Neue Integrationsmethoden

auf Grund der

Potenzial-, Logarithmal- und Numeralrechnung.

Von

Dr. Julius Bergbohm.

Stuttgart.
Selbstverlag des Verfassers.
1892.

Neue Integrationsmethoden

auf Grund der

Potenzial-, Logarithmal- und Numeralrechnung.

Von

Dr. Julius Bergbohm.

Stuttgart.
Selbstverlag des Verfassers.
1892.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

Inhalt.

Neue Integrationsmethoden auf Grund der Potenzial-, Logarithmal- und Numeralrechnung.[1])

§ 1.
Allgemeiner Charakter der heutigen Integralrechnung.

Von den beiden grossen Gebieten der Analysis des Unendlichen hat bisher nur die Differentialrechnung eine streng wissenschaftliche Ausbildung erlangt, während die Integralrechnung unverkennbar noch heute einen zwischen Wissenschaft und blosser Empirie schwankenden Charakter an sich trägt. Denn die Differentiale werden durch allgemein gültige Methoden aus den ursprünglichen Funktionen abgeleitet; deshalb kann auch in jedem einzelnen Falle entweder die Differentiation wirklich vollzogen werden (nämlich bei allen veränderlichen Funktionen), oder es steht wie bei den Konstanten fest, dass diese Operation unmöglich ist. Zwar besteht über die Art der Ableitung der Differentiale zwischen den Mathematikern seit zwei Jahrhunderten ein wichtiger Streit, indem die älteren Analytiker, mit Leibniz an der Spitze, die Weglassung der Differentiale höherer Ordnung für zulässig erachten, während die Anhänger der Grenztheorie seit Cauchy diese Vernachlässigung als der mathematischen Strenge widersprechend verwerfen, dieselbe jedoch gleichwohl auf einem Umwege und in verhüllterer Form zur Anwendung bringen.[2]) Aber darüber besteht trotz dieser Gegensätze

[1]) Ich habe die in der Überschrift bezeichneten Rechnungsmethoden, dann die Radikal- und Immensalrechnung in meiner Schrift: „Neue Rechnungsmethoden der höheren Mathematik, 1891“ (welche ich in dieser Abhandlung abgekürzt mit N. R. zitiere) in ihren Grundzügen dargestellt. Das Büchlein, welches nicht in den Buchhandel gekommen ist, steht Freunden der Mathematik auf ihren dem Verfasser (Wien, Hauptpost, poste restante) geäusserten Wunsch unentgeltlich zur Verfügung.

[2]) Ich habe in dieser Abhandlung wie auch in meiner früheren Schrift (Note 1) die Differentiale höherer Ordnung mit den älteren Analytikern ohne Bedenken vernachlässigt. Dass die Differentiale höherer Ordnung nicht nur weggelassen werden können sondern sogar weggelassen werden müssen, wenn anders die Differentialrechnung ihrer Aufgabe genügen soll, werde ich in einer späteren Schrift nachweisen. Nur dieser letztere Nachweis entspricht den Anforderungen des rigor mathematicus.

zwischen den Mathematikern kein Streit, dass die Differentiale aus den veränderlichen Funktionen auf streng methodischem Wege abgeleitet werden müssen und dass eine blos empirische Auffindung derselben keinen wissenschaftlichen Wert haben würde.

Ganz anders verhält es sich mit der Integralrechnung. Allgemeine Integrationsmethoden, wie sie für die Differentiation seit langem in der Differentialrechnung ausgebildet worden sind, bestehen überhaupt nicht, so dass in betreff der Differentiale, deren Integration bisher noch nicht gelungen ist, in der Regel niemand mit Bestimmtheit sagen kann, ob dieselben durch einen geschlossenen Ausdruck integriert werden können oder nicht. Die Gründe für diesen unbefriedigenden Zustand sind gewiss nicht blos in einer einzigen Richtung zu suchen. Die Hauptursache besteht aber ohne Zweifel darin, dass es bisher an allgemeinen Methoden fehlt, um die Integrale unmittelbar aus den Differentialen durch Rechnung abzuleiten. Die Fundamentalformeln der Integralrechnung werden vielmehr einfach durch „Umkehrung" der entsprechenden Differentialformeln gewonnen, und bei den verwickelteren Integralen ist das Bestreben im wesentlichen darauf gerichtet, dieselben durch allerlei methodische Hilfsmittel auf jene einfachsten Integralformeln zurückzuführen. Nun weiss aber jedermann, wie unsicher die Resultate sind, welche auf anderen Gebieten der Mathematik durch solche „Umkehrungen" gewonnen werden. So ist, um nur das bekannteste Beispiel zu erwähnen, $y \times y = y^2$; aber es wäre ganz irrig, durch „Umkehrung" dieser Formel zu schliessen, dass immer $\sqrt{y^2} = +y$ ist, weil y^2 zwei Wurzeln, nämlich $+y$ und $-y$ besitzt. Wer bürgt uns dafür, dass die „Umkehrung" der Differentialformeln nicht ebenso mangelhafte Resultate liefert? Kurz, solange die Integrale nicht auf streng methodischem Wege unmittelbar aus den Differentialen abgeleitet werden, muss man den Resultaten der Integralrechnung jene unbedingte Gewissheit und Notwendigkeit bestreiten, welche seit jeher den schönsten Ruhmestitel der mathematischen Erkenntnisse bildet.

Ich versuche es nun in der nachfolgenden Darstellung, mit Hilfe der von mir erfundenen Rechnungsmethoden (Note 1) die einfacheren Integrale aus den betreffenden Differentialen gerade so durch Rechnung zu bestimmen, wie diese letzteren ihrerseits aus den veränderlichen Funktionen abgeleitet werden. Der Hauptzweck dieser Abhandlung besteht allerdings darin, den Mechanismus meiner neuen Rechnungsmethoden vollständig klar zu legen, weil man mir mit Recht entgegengehalten hat, dass dieselben in meiner ersten Schrift (Note 1) viel zu abstrakt und ohne Rücksicht auf ihre praktische Anwendung dargestellt worden sind. Aber ich hoffe, dass die vorliegenden Untersuchungen auch für die Integralrechnung nicht ohne Nutzen sein werden. Denn es wird durch eine solche

Ableitung der Integrale, welche ihr allmähliges Entstehen aus den Differentialen veranschaulicht, nicht nur ihre oft so bizarre Form vollständig klar und verständlich gemacht, sondern die Berechnung der Integrale ist auch als der erste Schritt zu einer allgemeinen Integrationsmethode zu betrachten, welche den Bearbeitern der Integralrechnung ohne Zweifel als letztes Ziel ihrer Bestrebungen vorschweben muss. Dieses Ziel kann aber erst dann als erreicht gelten, wenn die Integrationsmethoden so vervollkommnet sind, dass bei jedem Differential, welches der Integration in einem geschlossenen Ausdruck überhaupt fähig ist, diese Operation wirklich vollzogen, bei jedem Differential dagegen, welches die Integration in einem geschlossenen Ausdruck nicht zulässt, der Grund dieser Unmöglichkeit klar erkannt werden kann. Erst dann wird sich die Integralrechnung in Beziehung auf ihre wissenschaftliche Durchbildung der Differentialrechnung an die Seite stellen können.

Bevor ich nun daran gehe, durch Berechnung der Integrale aus den Differentialen den ersten Schritt auf dieser Bahn zu versuchen, ist es unerlässlich, die in meiner Schrift: „Neue Rechnungsmethoden der höheren Mathematik“ gegebene Darstellung in einigen Punkten zu ergänzen, um die Rechnungen, welche zur Auffindung der Integrale aus den Differentialen führen, teils zu erleichtern, teils zu ermöglichen.

§ 2.

Das Differentialbinomium.

Unter einem Differentialbinomium verstehe ich einen Ausdruck von der Form $p \pm q dx$, in welchem p und q beliebige endliche (variable oder konstante) Grössen bedeuten. Da das Differentialbinomium durch die Division mit p sehr leicht auf die Form $p\left(1 \pm \frac{q}{p} dx\right)$ oder einfacher auf die Form $p(1 \pm q' dx)$ gebracht werden kann, so werde ich den Ausdruck $1 \pm q dx$ als das Differentialbinomium in einem vorzüglichen Sinn, den Ausdruck $1 \pm p dx \pm q dx$ als das Differentialpolynom bezeichnen.

Ich habe nun schon in meiner Schrift „Neue Rechnungsmethoden der höheren Mathematik“ (S. 14 ff.) die Operationen dargestellt, welche sich ergeben, wenn das Differentialbinomium zu einer unendlich grossen oder kleinen Potenz erhoben wird. An diese Darstellung mögen sich nun zur Erleichterung der unten folgenden Integrationsoperationen noch die nachfolgenden Formeln anschliessen. Sie sind insgesamt in der Weise entstanden, dass die betreffenden Operationen (Multiplikation, Division u. s. f.) geradeso wie bei endlichen Grössen vollzogen und nur die Differentiale höherer Ordnung weggelassen werden. Blos in Betreff der irrationalen Differentialbinomien (Gl. 13—20) ist zu bemerken, dass zufolge der Gleichungen 22—24 jeder endliche Exponent des Differentialbinomiums (welcher bei den unten dargestellten irrationalen Differentionalbinomien immer $= \frac{1}{2}$ ist) in dieses letztere als Faktor des Differentials versetzt werden kann.

a) Multiplikation von zwei Differentialbinomien.

Hier ergeben sich folgende Formeln:

$$(1 + p\,dx) \,.\, (1 + q\,dx) = 1 + p\,dx + q\,dx \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$(1 + p\,dx) \,.\, (1 - q\,dx) = 1 + p\,dx - q\,dx \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

$$(1 - p\,dx) \,.\, (1 + q\,dx) = 1 - p\,dx + q\,dx \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

$$(1 - p\,dx) \,.\, (1 - q\,dx) = 1 - p\,dx - q\,dx \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Wenn also zwei Differentialbinomien miteinander multipliziert werden sollen, so ist das Produkt gleich dem Multiplikanden, welchem das Differential des Multiplikators mit unverändertem Zeichen anzuhängen ist. Umgekehrt können aus den Gleichungen 1—4, wenn ein Differentialpolynom von der Form $1 \pm p\,dx \pm q\,dx$ vorliegt, sehr leicht die entsprechenden Faktoren ermittelt werden.

b) Division eines Differentialbinomiums durch ein anderes.

In diesem Falle sind folgende Formeln von Wichtigkeit:

$$\frac{1 + p\,dx}{1 + q\,dx} = 1 + p\,dx - q\,dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

$$\frac{1 + p\,dx}{1 - q\,dx} = 1 + p\,dx + q\,dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

$$\frac{1 - p\,dx}{1 + q\,dx} = 1 - p\,dx - q\,dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

$$\frac{1 - p\,dx}{1 - q\,dx} = 1 - p\,dx + q\,dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Wenn also ein Differentialbinomium durch ein anderes dividiert wird, so ist der Quotient gleich dem Zählerbinomium, welchem das Differential des Nennerbinomiums mit verändertem Zeichen angehängt wird. Umgekehrt kann, wenn ein Differentialpolynom von der Form $1 \pm p\,dx \pm q\,dx$ vorliegt, auf Grund der Gleichungen 5—8 sehr leicht der betreffende Bruch gefunden werden. Diese letztere Operation ist, wie sich bald (Gl. 277, 310) ergeben wird, für die neue Integrationsmethode von grosser Bedeutung.

c). Division der Einheit durch ein Differentialbinomium.

Hier ergeben sich folgende zwei Grundformeln:

$$\frac{1}{1+q\,dx} = 1 - q\,dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$\frac{1}{1-q\,dx} = 1 + q\,dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Wird also die Einheit durch ein Differentialbinomium dividiert, so ist der Quotient gleich dem Nennerbinomium mit verändertem Verbindungszeichen. Dieser Satz ist für die neue Integrationsmethode deshalb von grösster Bedeutung, weil durch denselben ermöglicht wird, jederzeit ein Differenzialbinomium aus dem Zähler in den Nenner zu versetzen und umgekehrt (z. B. Gl. 168, 169, 301, 302).

Zu den vorstehenden Gleichungen mögen noch zwei andere hinzugefügt werden, werden, welche von mir später gleichfalls öfter (z. B. Gl. 177, 191) anzuwenden sein werden, nämlich:

$$\frac{1}{p+q\,dx} = \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1+\frac{q\,dx}{p}} = (\text{Gl. } 9)\ \frac{1}{p}\left(1-\frac{q\,dx}{p}\right) = \frac{1}{p} - \frac{q\,dx}{p^2} = \frac{p-q\,dx}{p^2} \quad \ldots \quad (11)$$

$$\frac{1}{p-q\,dx} = \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1-\frac{q\,dx}{p}} = (\text{Gl. } 10)\ \frac{1}{p}\left(1+\frac{q\,dx}{p}\right) = \frac{1}{p} + \frac{q\,dx}{p^2} = \frac{p+q\,dx}{p^2} \quad \ldots \quad (12)$$

d). Irrationale Differentialbinomien.

Hier will ich aus der grossen Fülle von Formeln nur die folgenden einfachsten Fälle (vergl. unten § 13) wählen:

$$\sqrt{1\pm q\,dx} = (1\pm q\,dx)^{\frac{1}{2}} = (\text{Gl. } 23)\ 1 \pm \frac{1}{2}\,q\,dx \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1\pm q\,dx}} = (\text{Gl. } 13)\ \frac{1}{1\pm\frac{1}{2}\,q\,dx} = (\text{Gl. } 9, 10)\ 1 \mp \frac{1}{2}\,q\,dx \quad \ldots \quad (14)$$

$$\sqrt{1\pm 2q\,dx} = 1 \pm q\,dx \ (\text{s. Gl. } 13) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1\pm 2q\,dx}} = \frac{1}{1\pm q\,dx} = 1 \mp q\,dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

$$\sqrt{p \pm q\,dx} = \sqrt{p} \cdot \sqrt{1 \pm \frac{q\,dx}{p}} = \sqrt{p}\left(1 \pm \frac{q\,dx}{2p}\right) =$$

$$\sqrt{p} \pm \frac{\sqrt{p}\,q\,dx}{2p} = \sqrt{p} \pm \frac{q\,dx}{2\sqrt{p}} = \frac{2p \pm q\,dx}{2\sqrt{p}} \quad . \quad . \quad (17)$$

$$\frac{1}{\sqrt{p \pm q\,dx}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 \pm \frac{q\,dx}{p}}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \frac{1}{1 \pm \frac{q\,dx}{2p}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\left(1 \mp \frac{q\,dx}{2p}\right) = \frac{1}{\sqrt{p}} \mp \frac{q\,dx}{2p\sqrt{p}} = \frac{2p \mp q\,dx}{2p\sqrt{p}} \quad . \quad . \quad (18)$$

$$\sqrt{p \pm 2q\,dx} = \sqrt{p} \cdot \sqrt{1 \pm \frac{2q\,dx}{p}} = \sqrt{p}\left(1 \pm \frac{q\,dx}{p}\right) =$$

$$\sqrt{p} \pm \frac{\sqrt{p}\,q\,dx}{p} = \sqrt{p} \pm \frac{q\,dx}{\sqrt{p}} = \frac{p \pm q\,dx}{\sqrt{p}} \quad . \quad . \quad (19)$$

$$\frac{1}{\sqrt{p \pm 2q\,dx}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 \pm \frac{2q\,dx}{p}}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \frac{1}{1 \pm \frac{q\,dx}{p}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\left(1 \mp \frac{q\,dx}{p}\right) = \frac{1}{\sqrt{p}} \mp \frac{q\,dx}{p\sqrt{p}} = \frac{p \mp q\,dx}{p\sqrt{p}} \quad . \quad . \quad (20)$$

e). Erhebung des Differentialbinomiums zu einer endlichen Potenz.

Die Erhebung des Differentialbinomiums zu einer unendlich grossen oder kleinen Potenz ist, wie bereits oben bemerkt wurde, schon in meinen „Neuen Rechnungsmethoden" dargestellt worden. Der Binomialsatz in seiner Anwendung auf die Differentiale und auf die Immensale kann aber auch auf den Fall ausgedehnt werden, wenn das Differentialbinomium zu einer endlichen Potenz erhoben werden soll. Drückt man diesen Fall in der mathematischen Zeichensprache aus, so ist zu untersuchen, welchen Wert der Ausdruck $\left[1 + df(x)\right]^n$ besitzt, in welchem $df(x)$ ein beliebiges Differential, n dagegen eine endliche (variable oder konstante) Grösse bedeutet.

Nun ist aber:

$$[1 + df(x)]^n = 1 + n\,df(x) + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,df(x)^2 +$$

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,df(x)^3 + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21$$

Da in der vorstehenden Reihe das dritte und die folgenden Glieder verschwinden, weil sie Differentiale höherer Ordnung enthalten, so gilt die Gleichung:

$$\left[1 + df(x)\right]^n = 1 + n\,df(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Setzt man in diese Gleichung $df(x) = dx$, so entsteht der einfachere Ausdruck:

$$(1 + dx)^n = 1 + n\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Da nun, wie ich in meiner früheren Schrift (N. R. § 10) nachgewiesen habe, auch $ld\beta$ eine endliche Grösse ist, so ist auch:

$$(1 + dx)^{ld\beta} = 1 + dx\,ld\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

wobei zu bemerken ist, dass der Ausdruck rechts $(= d\beta^{dx})$ das einfachste Potenzial (N. R. § 4, Gl. 2) darstellt.

Aus diesen Gleichungen (22—24) ergibt sich nun der für die neue Integrationsmethode überaus wichtige Satz, dass man in einem Differentialbinomium die endlichen Faktoren des Differentials in Exponenten des Binomiums verwandeln kann und dass man umgekehrt die endlichen Exponenten eines Differentialbinomiums jederzeit als Faktoren in das Differential des Binoms versetzen kann. Von diesem Grundsatz ist schon oben bei Entwicklung der irrationalen Differentialbinomien (Gl. 13—20) ein vorläufiger Gebrauch gemacht worden.

f). Erhebung der Differentiale und Immensale zu endlichen Potenzen.

Ebenso wie das Differentialbinomium, so kann auch jedes blosse Differenzial oder Immensal zu einer endlichen Potenz erhoben werden, während ich in meinen „Neuen Rechnungsmethoden“ nur den Fall ins Auge gefasst habe, dass ein Differential oder Immensal zu einer unendlichen Potenz erhoben wird. Wenn wir mit n eine endliche (variable oder konstante) Grösse bezeichnen, so ist also:

$$\overset{n}{\pi}(dx) = dx^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

$$\overset{n}{\pi}\left(\frac{1}{dx}\right) = \left(\frac{1}{dx}\right)^n = \frac{1}{dx^n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Durch die Erhebung zu einer endlichen Potenz wird das Differential oder Immensal niemals in eine endliche Grösse verwandelt. Die Ausdrücke dx^n und $\frac{1}{dx^n}$ können, so viel ich sehe, nicht mehr auf eine einfachere Form gebracht werden.

Diese Ausdehnung der Potenzialrechnung auf die endlichen Exponenten ist für die neue Integrationsmethode von grösster Wichtigkeit, weil die zu integrierenden Differentiale in der Regel teils aus endlichen, teils aus unendlich kleinen Grössen bestehen, so dass die neuen Rechnungsmethoden nur dann angewendet werden können, wenn sie sich sowohl auf die endlichen als auch auf die unendlichen Quantitäten beziehen. Deshalb muss, wie sich sofort ergeben wird, auch bei der Logarithmal- und Numeralrechnung eine ähnliche Erweiterung stattfinden.

§ 3.

Erweiterung der Logarithmalrechnung.

Die in meiner Schrift „Neue Rechnungsmethoden der höheren Mathematik“ gegebene Darstellung bedarf, um sie für die neuen Integrationsmethoden brauchbar zu machen, in dreifacher Richtung einer Ergänzung: 1) Aus dem soeben (§ 2) angegebenen Grund sind auch hier die Logarithmale der endlichen Grössen zu ermitteln. 2) Es sind die Logarithmale mit der Basis $\frac{1}{d\beta}$ festzustellen, während ich mich in meiner oftererwähnten Schrift auf die Basis $d\beta$ beschränkt habe, weil die ersteren die Integration der Differentiale, welche negative Differentialsummen ergeben, erheblich erleichtern (vergl. unten § 14). 3). Es sind die Logarithmale der Differenzialpolynome von der Form $1 \pm p dx \pm q dx$ (Gl. 1—8) aufzufinden.

a). Ausdehnung der Logarithmalrechnung auf endliche Grössen.

(Vergl. N. R. § 10.)

Die allgemeine Formel für das Logarithmal endlicher Grössen ist:

$$\overset{d\beta}{\lambda}\, x = \frac{l x}{l d\beta} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

Demgemäss werden sich als einfache Consequenz der vorstehenden Gleichung folgende Formeln ergeben:

$$\overset{d\beta}{\lambda}\, xy = \frac{l x + l y}{l d\beta} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

$$\overset{d\beta}{\lambda}\, \frac{x}{y} = \frac{l x - l y}{l d\beta} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

$$\overset{d\beta}{\lambda}\, x^n = \frac{nlx}{ld\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

$$\overset{d\beta}{\lambda}\, a^x = \frac{xla}{ld\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Eine eigentümliche Stellung nehmen in mancher Richtung die Logarithmale von a^{bdx} ein, weil der Ausdruck a^{bdx} das Differentialbinomium $1 + labdx$ liefert. Es ist nun, wenn man diesen Ausdruck logarithmalisiert und numeralisiert (s. unten Gl. 61, 62):

$$\overset{d\beta}{\lambda}\left(a^{bdx}\right) = \frac{la^{bdx}}{ld\beta} = \frac{labdx}{ld\beta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

$$\overset{d\beta}{\nu}\,\frac{labdx}{ld\beta} = d\beta^{\frac{labdx}{ld\beta}} = 1 + \frac{labdx}{ld\beta}\cdot ld\beta =$$

$$\text{(N. R. § 11, Gl. 6)}\ 1 + labdx = a^{bdx} \quad \ldots \quad (33)$$

und umgekehrt, wenn man zuerst numeralisiert und dann logarithmalisiert:

$$\overset{d\beta}{\nu}\, a^{bdx} = \text{(Gl. 32, 33)}\ \overset{d\beta}{\nu}\,(1 + labdx) = d\beta^{1 + labdx} = d\beta\,(1 + labdxld\beta) \quad (34)$$

$$\overset{d\beta}{\lambda}\, d\beta\,(1 + labdxld\beta) = \overset{d\beta}{\lambda}\, d\beta + \overset{d\beta}{\lambda}\,(1 + labdxld\beta) = 1 + labdx = a^{bdx} \quad (35)$$

b). Logarithmale mit der Basis $\frac{1}{d\beta}$.

Ich habe in meinen „Neuen Rechnungsmethoden“ blos die Logarithmale mit der Basis $d\beta$ entwickelt. Zur Integration mancher Differentiale ist jedoch, wie bereits oben bemerkt wurde, auch die Ableitung der wichtigsten Logarithmale mit der Basis $\frac{1}{d\beta}$ erforderlich.

Die Grundgleichung für das Logarithmal von dx mit der Basis $\frac{1}{d\beta}$ ist nun (vergl. N. R. § 10, Gl. 1 und 7):

$$\left(\frac{1}{d\beta}\right)^{\lambda dx} = dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

und wenn man von dieser Gleichung den natürlichen Logarithmus nimmt:

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}\, dx = -\frac{ldx}{ld\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

Auf ganz ähnliche Weise gelangt man noch zu folgenden Formeln (vergl. N. R. § 10, Gl. 8 ff.):

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}\left(\frac{1}{dx}\right) = \frac{l\,dx}{l\,d\beta} \tag{38}$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}(a\,dx) = -\frac{l(a\,dx)}{l\,d\beta} \tag{39}$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}\frac{1}{a\,dx} = \frac{l(a\,dx)}{l\,d\beta} \tag{40}$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}(1 + a\,dx) = -\frac{a\,dx}{l\,d\beta} \tag{41}$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}(1 - a\,dx) = \frac{a\,dx}{l\,d\beta} \tag{42}$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}(1 + dx\,l\,dx) = -\frac{dx\,l\,dx}{l\,d\beta} \tag{43}$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}\,dx^{dx} = dx\,\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}\,dx = -\frac{dx\,l\,dx}{l\,d\beta} \tag{44}$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}(1 - dx\,l\,dx) = \frac{dx\,l\,dx}{l\,d\beta} \tag{45}$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}\left(\frac{1}{dx}\right)^{dx} = dx\,\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}\left(\frac{1}{dx}\right) = \frac{dx\,l\,dx}{l\,d\beta} \tag{46}$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}\left(\frac{1}{d\beta}\right) = 1 \text{ (vgl. N. R. § 10, Gl. 19)} \tag{47}$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}\,1 = 0 \text{ (vgl. N. R. § 10, Gl. 20)} \tag{48}$$

Aus diesen Formeln ergibt sich, dass im allgemeinen das Logarithmal mit der Basis $\frac{1}{d\beta}$ gleich ist dem Logarithmal mit der Basis $d\beta$, jedoch mit verändertem Zeichen. Demgemäss werden auch die oben (Gl. 27

bis 31) entwickelten Logarithmale der endlichen Grössen folgende Gestalt annehmen:

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}\, x = -\frac{lx}{ld\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (49)$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}\, xy = -\frac{lx+ly}{ld\beta} = \frac{-lx-ly}{ld\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (50)$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}\, \frac{x}{y} = -\frac{lx-ly}{ld\beta} = \frac{ly-lx}{ld\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (51)$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}\, x^n = -\frac{nlx}{ld\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (52)$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}\, a^x = -\frac{xla}{ld\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (53)$$

c). Logarithmale der Differentialpolynome.

Auch die Differentialpolynome können logarithmalisiert werden. Ich beschränke mich der Kürze wegen auf die Differentialpolynome von der Form $1 \pm pdx \pm qdx$, welche oben in der Gl. 1—8 vorgekommen sind. Es ist nun:

$$\overset{d\beta}{\lambda}(1 \pm pdx \pm qdx) = \overset{d\beta}{\lambda}\left[1 \pm dx(p \pm q)\right] = \frac{\pm pdx \pm qdx}{ld\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (54)$$

$$\overset{d\beta}{\lambda}(1 \pm pdxld\beta \pm qdxld\beta) = \pm pdx \pm qdx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (55)$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}(1 \pm pdx \pm qdx) = -\frac{\pm pdx \pm qdx}{ld\beta} = \frac{\mp pdx \mp qdx}{ld\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (56)$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}(1 \pm pdxld\beta \pm qdxld\beta) = -\left[\pm pdx \pm qdx\right] = \mp pdx \mp qdx \ldots \qquad (57)$$

Die Logarithmalisierung der Differentialpolynome ist also jener der Differentialbinome (N. R. § 10, Gl. 14 und 16 und oben Gl. 41 und 42) völlig analog.

§ 4.

Erweiterung der Numeralrechnung.

Die in meinen „Neuen Rechnungsmethoden“ gegebene Darstellung der Numeralrechnung (N. R. § 11) ist, um dieselbe zur Anwendung auf die Integralrechnung brauchbar zu machen, in denselben drei Punkten wie die Logarithmalrechnung (oben § 3) zu ergänzen.

a) Ausdehnung der Numeralrechnung auf die endlichen Grössen.

Da die Differentiale zu endlichen Potenzen erhoben werden können (s. oben Gl. 25), so ist auch die Numeralisierung einer endlichen Grösse möglich. Die allgemeine Formel für eine solche Numeralisierung ist, wenn man mit n eine endliche (variable oder konstante) Grösse bezeichnet:

$$\overset{d\beta}{\nu}\, n = d\beta^{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

Setzt man nun $n = x^m$ oder $= a^x$, so verwandelt sich diese Gleichung in folgende Ausdrücke:

$$\overset{d\beta}{\nu}\, x^m = d\beta^{x^m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

$$\overset{d\beta}{\nu}\, a^x = d\beta^{a^x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

Logarithmalisierung und Numeralisierung sind auch in Betreff der endlichen Grössen, geradeso wie in Ansehung der Differentiale und Immensale (N. R. S. 24), entgegengesetzte Operationen, die sich gegenseitig aufheben. Es ist also:

$$\overset{d\beta}{\lambda}\,\overset{d\beta}{\nu}\, dx = dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

$$\overset{d\beta}{\lambda}\,\overset{d\beta}{\nu}\, n = n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

Thatsächlich haben wir oben (Gl. 32—35) gesehen, dass die Logarithmalisierung und Numeralisierung, wenn sie in Ansehung des nämlichen Ausdruckes, gleichviel in welcher Reihenfolge, vorgenommen werden, immer wieder den ursprünglichen Wert ergeben.

b). Numerale mit der Basis $\frac{1}{d\beta}$.

Die einfache Umkehrung der in den Gleichungen 37—53 angeführten Logarithmale mit der Basis $\frac{1}{d\beta}$ ergiebt die betreffenden Numerale mit der nämlichen Basis, welche übrigens sehr leicht durch die in meinen „Neuen Rechnungsmethoden“ dargestellten Operationen verifiziert werden können. Nur folgende Numeralformeln mit der Basis $\frac{1}{d\beta}$ sind wegen ihrer praktischen Wichtigkeit besonders hervorzuheben:

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\nu}\, dx = 1 - dx\,l\,d\beta \quad \ldots \ldots \quad (63)$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\nu}\,(a\,dx) = 1 - a\,dx\,l\,d\beta \quad \ldots \ldots \quad (64)$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\nu}\,(1 + a\,dx) = \left(\frac{1}{d\beta}\right)^{1+a\,dx} = \frac{1}{d\beta}\cdot\left(\frac{1}{d\beta}\right)^{a\,dx} = (\text{Gl. } 64)\ \frac{1}{d\beta}\cdot(1 - a\,dx\,l\,d\beta) =$$
$$\frac{1 - a\,dx\,l\,d\beta}{d\beta} \quad \ldots \ldots \quad (65)$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\nu}\,(1 - a\,dx) = \frac{1}{d\beta}^{1-a\,dx} = \frac{1}{d\beta} : \left(\frac{1}{d\beta}\right)^{a\,dx} = (\text{Gl. } 64)\ \frac{1}{d\beta} : (1 - a\,dx\,l\,d\beta) =$$
$$\frac{1}{d\beta\,(1 - a\,dx\,l\,d\beta)} \quad \ldots \ldots \quad (66)$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\nu}\, x = \left(\frac{1}{d\beta}\right)^{x} = \frac{1}{d\beta^{x}} \quad \ldots \ldots \quad (67)$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\nu}\, 1 = \frac{1}{d\beta} \quad \ldots \ldots \quad (68)$$

c). Numerale der Doppeldifferentiale.

Entsprechend den oben (Gl. 54—57) entwickelten Logarithmalen ergeben sich folgende Numeralgleichungen:

$$\overset{d\beta}{\nu}\,\frac{\pm p\,dx \pm q\,dx}{l\,d\beta} = 1 \pm p\,dx \pm q\,dx \quad \ldots \ldots \quad (69)$$

$$ {}^{d\beta}\nu\,(\pm pdx \pm qdx) = 1 \pm pdxld\beta \pm qdxld\beta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (70) $$

$$ {}^{\frac{1}{d\beta}}\nu\,\frac{\pm pdx \pm qdx}{ld\beta} = 1 - [\pm pdx \pm qdx] = 1 \mp pdx \mp qdx \quad \ldots \quad (71) $$

$$ {}^{\frac{1}{d\beta}}\nu\,(\pm pdx \pm qdx) = 1 - [\pm pdxld\beta \pm qdxld\beta] = $$

$$ 1 \mp pdxld\beta \mp qdxld\beta \quad \ldots\ldots \quad (72) $$

§ 5.

Praktische Regeln für die Anwendung der Logarithmal- und Numeralrechnung.

Durch die Potenzial-, Radikal-, Logarithmal- und Numeralrechnung wird den Differentialen eine Transformabilität verliehen, welche mittelst der bisher bekannten Methoden entfernt nicht erreicht werden konnte und die sogar die Umgestaltungsfähigkeit der endlichen Grössen weit übertrifft. Zahlreiche Probleme, welche bisher unlösbare Schwierigkeiten boten, können durch die neuen Rechnungsmethoden mit Leichtigkeit gelöst werden. Ich will hier nur jene Punkte ins Auge fassen, welche sich unmittelbar auf die von mir behandelte Aufgabe beziehen.

Was zuvörderst die L o g a r i t h m a l i s i e r u n g betrifft, so wird durch dieselbe, ähnlich wie bei den Logarithmen endlicher Grössen, jede Rechnungsoperation in die nächstniedrigere verwandelt, also die Multiplikation und die Division in eine Addition und in eine Subtraktion, die Potenzierung und die Radizierung in eine Multiplikation und in eine Division. Wir werden später bei der Integration des Differentials $mx^{m-1}dx$ (s. unten Gl. 106) sehen, dass man nach einigen Operationen zu der sogenannten Numeralgleichung gelangt, welche folgende Gestalt besitzt:

$$ \frac{d\beta^{x^m}\left(1+\frac{mdxld\beta}{x}\right)^{x^m}}{d\beta^{x^m}} = {}^{d\beta}\nu\, dy \quad \ldots\ldots \quad (73) $$

Will man nun den ursprünglichen Wert dieser Gleichung wieder herstellen (s. z. B. unten Gl. 95, 106), so muss dieselbe auf beiden Seiten logarithmalisiert werden, was folgendes Resultat ergiebt:

$$x^m \overset{d\beta}{\lambda}\, d\beta + x^m \overset{d\beta}{\lambda}\left(1 + \frac{mdxld\beta}{x}\right) - x^m \overset{d\beta}{\lambda}\, d\beta = \overset{d\beta}{\lambda}\overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad (74)$$

Nun ist aber $\overset{d\beta}{\lambda}\, d\beta = 1$ (N. R. § 10, Gl. 19), ferner:

$$\overset{d\beta}{\lambda}\left(1 + \frac{mdxld\beta}{x}\right) = \frac{mdxld\beta}{xld\beta} = \frac{mdx}{x} \quad \text{(N. R. § 10, Gl. 14)},$$

endlich ist $\overset{d\beta}{\lambda}\overset{d\beta}{\nu}\, dy = dy$, weil sich Logarithmalisierung und Numeralisierung gegenseitig aufheben (oben Gl. 61, 62), so dass die Gleichung 73 nach erfolgter Logarithmalisierung folgende Gestalt hat:

$$x^m + x^m \cdot \frac{mdx}{x} - x^m = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

Durch die Logarithmalisierung der Gleichung 73 wurde also, wie sich aus dem vorstehenden Ausdruck ergiebt, der Exponent x^m überall in einen Faktor, das im Zähler erscheinende Produkt in eine Summe, der Nenner in einen Subtrahenden verwandelt.

Die Numeralisierung hat, wie sich aus ihrer Natur als umgekehrte Rechnungsoperation von selbst ergiebt, in Vergleich mit der Logarithmalisierung gerade die entgegengesetzten Wirkungen.

Die Numeralisierung verwandelt also zuvörderst jede Addition in eine Multiplikation, jede Subtraktion in eine Division. So lautet bekanntlich bei der Differentiation von x^m die Fundamentalgleichung:

$$(x + dx)^m - x^m = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

Nimmt man nun von dieser Gleichung das Numeral, so entsteht folgender Ausdruck:

$$\frac{\overset{d\beta}{\nu}\,(x + dx)^m}{d\beta^{x^m}} = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

In der Gleichung 77 ist die Numeralisierung in Betreff des Subtrahenden x^m bereits vollzogen (s. oben Gl. 59), demgemäss ist auch das Numeral des Subtrahenden in einen Divisor verwandelt. Die Numeralisierung $\overset{d\beta}{\nu}\,(x + dx)^m$ ist dagegen noch unentwickelt und demgemäss in den mathematischen Verhältnissen der einzelnen Bestandteile dieses Ausdrucks vorläufig (s. Gl. 79) noch keine Änderung vorgenommen.

Durch die Numeralisierung eines Produkts wird aber zweitens auch bewirkt, dass sich derjenige Faktor desselben, auf welchen sich die Numeralisierung nicht bezieht, in einen Exponenten verwandelt. So kann man die obige Gleichung 77, weil

$$(x+dx)^m = x^m\left(1+\frac{dx}{x}\right)^m = \text{(Gl. 22)}\ x^m\left(1+\frac{m\,dx}{x}\right)$$

ist, auch so schreiben:

$$\frac{\overset{d\beta}{\nu}\, x^m\left(1+\dfrac{m\,dx}{x}\right)}{d\beta^{x^m}} = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad \ldots\ldots \quad (78)$$

Man kann nun, mit Rücksicht auf das soeben Gesagte, das Numeralisierungszeichen in dem Ausdruck $\overset{d\beta}{\nu}\, x^m\left(1+\dfrac{m\,dx}{x}\right)$ auch hinter x^m setzen, sodann die Numeralisierung von $1+\dfrac{m\,dx}{x}$ wirklich vornehmen und gleichzeitig x^m als Exponenten des gefundenen Numerals hinstellen. Es ist dann:

$$\overset{d\beta}{\nu}\, x^m\left(1+\frac{m\,dx}{x}\right) = x^m\, \overset{d\beta}{\nu}\left(1+\frac{m\,dx}{x}\right) = \text{(Gl. 34)} \left[d\beta\left(1+\frac{m\,dx\,l\,d\beta}{x}\right)\right]^{x^m} =$$

$$d\beta^{x^m}\left(1+\frac{m\,dx\,l\,d\beta}{x}\right)^{x^m} \quad \ldots\ldots \quad (79)$$

Selbstverständlich kann das Numeralisierungszeichen hinter jeden beliebigen Faktor eines solchen Produkts gesetzt und dieser dadurch in den Exponenten des gefundenen Numerals verwandelt werden. So ist, wenn man der Kürze wegen in der Gleichung 79 $x^m = y$ setzt:

$$\overset{d\beta}{\nu}\, y\left(1+\frac{m\,dx}{x}\right) = \left(1+\frac{m\,dx}{x}\right)\overset{d\beta}{\nu}\, y = \text{(Gl. 58)}\ (d\beta^y)^{1+\frac{m\,dx}{x}} =$$

$$d\beta^y \cdot d\beta^{\frac{m\,y\,dx}{x}} = d\beta^y\left(1+\frac{m\,y\,dx\,l\,d\beta}{x}\right) = \text{(Gl. 22)}\ d\beta^y\left(1+\frac{m\,dx\,l\,d\beta}{x}\right)^y =$$

$$d\beta^{x^m}\left(1+\frac{m\,dx\,l\,d\beta}{x}\right)^{x^m} \quad \ldots\ldots \quad (80)$$

welches Resultat mit der Gl. 79 übereinstimmt.

Die bisher dargestellten zahlreichen Operationen, insbesondere die Versetzung der endlichen Exponenten in das Differentialbinomium und umgekehrt die Versetzung der endlichen Faktoren in die Potenz (Gl. 22—24), ferner die bei der Numeralisierung vorkommenden Veränderungen (Gl. 76

bis 80) sind nun besonders geeignet, die Umgestaltung der Differentiale zu bewirken. Ist die Transformation dann vollzogen, so kann der ursprüngliche Wert des Differentials jederzeit durch die entgegengesetzte Operation wiederhergestellt werden. In der That besteht auch, wie wir sofort sehen werden, die Anwendung der neuen Rechnungsmethoden auf die Differential- und Integralrechnung im wesentlichen darin, dass die Fundamentalgleichung (vgl. z. B. Gl. 76) oder das Differential (s. z. B. Gl. 100) zuerst numeralisiert werden, dass man dann die erforderlichen Umgestaltungen des Numerals vornimmt und dass schliesslich der ursprüngliche Wert des nunmehr transformierten Ausdrucks durch Logarithmalisierung wiederhergestellt wird.

§ 6.

Die Integralgleichung und die Differentialsumme.

Bekanntlich werden alle Differentiale aus folgender Fundamentalgleichung

$$f(x+dx)-f(x) = df(x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (81)$$

gewonnen. Diese Gleichung enthält drei wesentlich verschiedene Elemente.

Auf der linken Seite derselben erscheint an erster Stelle die ursprüngliche Funktion oder das Integral, in welchem jedoch jedes x, gleichviel ob es als Summand, Faktor, Divisor, Exponent oder in einer anderen Gestalt erscheint, um die unendlich kleine Grösse dx vermehrt ist. Ich will deshalb diese Grösse, von welcher später noch oft die Rede sein wird, die Differentialsumme nennen und mit dem Symbol Ds bezeichnen, welches dem gegebenen Differential vorzusetzen ist, so dass also die Gleichung gilt:

$$Ds\, df(x) = f(x+dx) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (82)$$

oder wenn man ein Beispiel nehmen will:

$$Ds\, mx^{m-1}dx = (x+dx)^m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (83)$$

An zweiter Stelle enthält die Fundamentalgleichung 81 in der Gestalt eines Subtrahenden das Integral in seiner ursprünglichen, noch unveränderten Gestalt.

Endlich an dritter Stelle erscheint, und zwar auf der rechten Seite der Fundamentalgleichung, das Differential, welches sich durch die Subtraktion des Integrals von der Differenzialsumme ergiebt.

Die Aufgabe, ein bestimmtes Differential zu integrieren, wird nun offenbar schon dann gelöst sein, wenn es durch irgend welche mathematische Operationen gelingt, dasselbe wieder in jene Fundamentalgleichung zu verwandeln, aus welcher es ursprünglich entstanden ist. Denn in der Fundamentalgleichung erscheint das Integral als Subtrahend in seiner ursprünglichen Gestalt und auch aus der Differentialsumme kann es ohne Schwierigkeit ermittelt werden, wenn man in dieser $dx = 0$ setzt. So kann z. B. die Integration von $mx^{m-1}dx$ als vollzogen gelten, wenn dieses Differential in den Ausdruck $(x+dx)^m - x^m$ transformiert ist.[3])

Ich will nun jene Fundamentalgleichung, welche für die Differentiation den ersten Ausgangspunkt, für die neue Integrationsmethode dagegen das letzte Ziel bildet, vom Standpunkt meiner Aufgabe als die Integralgleichung bezeichnen.

Da das Integral ohne Schwierigkeit aus der Differentialsumme ermittelt werden kann, wenn man $dx = 0$ setzt, so wird die Integration in den meisten Fällen schon dann als erreicht gelten, wenn man das zu integrierende Differential in die entsprechende Differentialsumme verwandelt und hiebei den Subtrahenden weglässt — eine Operation, welche namentlich bei sehr verwickelten Integralen die Integration erheblich erleichtert. Dabei ist jedoch hervorzuheben, dass die Differentialsumme aus dem gegebenen Differential erst dann ermittelt ist, wenn jedes x des Differentials in dem transformierten Ausdruck in $x+dx$ verwandelt ist; fehlt auch nur bei einem einzigen x dieses Increment, so ist die Differentialsumme noch nicht gefunden. Wir werden übrigens später (s. zu Gl. 180) sehen, dass dieser abgekürzte Weg in jenen Fällen nicht angewendet werden kann, wo im Laufe der Operationen die Differentialsumme und der Subtrahend (das Integral in seiner ursprünglichen Gestalt) nicht mit voller Bestimmtheit geschieden werden können. Um vollständig sicher zu gehen, muss man deshalb aus dem zu integrierenden Differential durch geeignete Transformationen die ganze Integralgleichung zu ermitteln suchen.

Indem ich nun daran gehe, eine Reihe einfacherer Integrale unmittelbar aus den betreffenden Differentialen mit Hilfe der neuen Methoden zu berechnen, möchte ich bemerken, dass ich mich der Kürze wegen auf die Integration jener algebraischen Differentiale beschränke, welche auch durch blos algebraische Funktionen integriert werden können, so dass ich die cyclometrischen und goniometrischen Integrale hier vorläufig beiseite lasse. Um jedoch den Mechanismus der neuen Integrationsmethoden vollständig klar zu machen, ist es notwendig, wenigstens bei einigen Funktionen auch die Differentiation vermittelst der Potenzial-, Logarithmal- und Numeralrechnung darzustellen, weil die neue Integration im wesentlichen nichts ist, als eine rückwärtsschreitende Differentiation und deshalb im Zusammenhang mit dieser am besten begriffen werden kann.

---

[3]) Ich lasse in dieser Abhandlung, wie es auch sonst bei der Entwicklung der unbestimmten Integrale üblich ist, die willkürliche Konstante unberücksichtigt.

§ 7.

Differentiation von x^m.

Die Fundamentalgleichung für die Differentiation von x^m ist:

$$(x + dx)^m - x^m = dx^m = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (84)$$

Der auf der linken Seite der vorstehenden Gleichung stehende Ausdruck ist nun in das Differential umzugestalten.

Da die Numeralisierung sich, wie bereits oben (§ 5) bemerkt wurde, zur Umgestaltung der Funktionen mit Differentialen besonders eignet, so sind beide Seiten der Gleichung zunächst zu numeralisieren. Es ist nun:

$$\overset{d\beta}{\nu}\left[(x + dx)^m - x^m\right] = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

Die Numeralisierung des Ausdrucks auf der linken Seite kann nun in betreff des Subtrahenden x^m sofort vollzogen werden, indem man denselben in den Ausdruck $d\beta^{x^m}$ verwandelt (Gl. 59) und dieses Numeral gleichzeitig in den Nenner versetzt (Gl. 77). Es ist dann:

$$\frac{\overset{d\beta}{\nu}\,(x + dx)^m}{d\beta^{x^m}} = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86)$$

Um die später (Gl. 92, 93) stattfindende Reduktion zwischen Zähler und Nenner möglich zu machen, ist aus der noch nicht numeralisierten Differentialsumme $(x + dx)^m$ der Faktor x^m auszuziehen, also:

$$\frac{\overset{d\beta}{\nu}\, x^m \left(1 + \dfrac{dx}{x}\right)^m}{d\beta^{x^m}} = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (87)$$

Nunmehr ist, was nach den G. 79—80 zulässig ist, das Numeralisierungszeichen hinter x^m zu setzen:

$$\frac{x^m \, \overset{d\beta}{\nu} \left(1 + \dfrac{dx}{x}\right)^m}{d\beta^{x^m}} = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88)$$

Bevor jedoch die Numeralisierung des Ausdrucks $\left(1 + \dfrac{dx}{x}\right)^m$ wirklich stattfindet, muss der Exponent m in das Differentialbinomium als Faktor versetzt werden, was zufolge der Gl. 22—24 zulässig ist. Denn da x^m infolge der Numeralisierung gleichfalls in einen Exponenten verwandelt wird, so würde der numeralisierte Zähler den Exponenten mx^m haben und es könnte die in den Gl. 92, 93 vollzogene Reduktion, die zur Auffindung des Differentials unerlässlich ist, nicht stattfinden.

Es ist daher:

$$\frac{x^m \overset{d\beta}{\nu}\left(1+\frac{m\,dx}{x}\right)}{d\beta^{x^m}} = \overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad \ldots\ldots \quad (89)$$

Nunmehr kann die vollständige Numeralisierung des Zählers ohne weiteres vorgenommen werden. Es ist aber:

$$\overset{d\beta}{\nu}\left(1+\frac{m\,dx}{x}\right) = d\beta^{1+\frac{m\,dx}{x}} = d\beta\,.\,d\beta^{\frac{m\,dx}{x}} = d\beta\left(1+\frac{m\,dx\,l\,d\beta}{x}\right) \quad . \quad (90)$$

Substituiert man den letzteren Ausdruck in die Gl. 89 und verwandelt man gleichzeitig x^m in den Exponenten dieses Numerals (s. Gl. 79), so ist:

$$\frac{\left[d\beta\left(1+\frac{m\,dx\,l\,d\beta}{x}\right)\right]^{x^m}}{d\beta^{x^m}} = \overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad \ldots\ldots \quad (91)$$

Nimmt man nun die Potenzierung des im Zähler erscheinenden Produkts wirklich vor, so ist:

$$\frac{d\beta^{x^m}\cdot\left(1+\frac{m\,dx\,l\,d\beta}{x}\right)^{x^m}}{d\beta^{x^m}} = \overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad \ldots\ldots \quad (92)$$

In dem vorstehenden Ausdruck erscheint nunmehr die Fundamentalgleichung 84 vollständig numeralisiert, weshalb ich diese Gleichung, die in irgend einer Form bei allen Differentiationen und Integrationen nach der neuen Methode wiederkehrt, auch die Numeralgleichung schlechthin nennen werde. Sie bildet gleichsam den Mittelpunkt des neuen Differentiations- und Integrationssystems. Ist man bei der Differentiation zur Numeralgleichung gelangt, so genügen einige leichte Operationen, um das Differenzial aufzufinden. Hat man umgekehrt bei der Integration einmal aus dem Differential die Numeralgleichung gebildet, so kann man ohne Schwierigkeit zur Integralgleichung und damit zugleich auch zu dem gesuchten Integral gelangen.

Wenn man nun in der Gleichung 92 zwischen dem Zähler und dem Nenner reduziert, so ist:

$$\left(1+\frac{m\,dx\,l\,d\beta}{x}\right)^{x^m} = \overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad \ldots\ldots \quad (93)$$

Um dieses Numeral noch mehr zu vereinfachen, versetzt man jetzt, wo die entscheidende Reduktion bereits vollzogen ist (Gl. 92 und 93), den Exponenten x^m in das Differentialbinomium (s. Gl. 22—24), woraus sich ergiebt:

$$1 + \frac{mx^m dxld\beta}{x} = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (94)$$

und wenn man reduziert:

$$1 + mx^{m-1} dxld\beta = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (95)$$

Mit diesem Ausdruck hat die Numeralgleichung jedenfalls ihre einfachste Form erlangt. Um jedoch zu dem ursprünglichen Wert von $dy = dx^m$, welcher durch die Numeralisierung verändert worden ist, wieder zu gelangen, bedarf es noch der entgegengesetzten Operation, nämlich der Logarithmalisierung der Gleichung. Es ist also:

$$\overset{d\beta}{\lambda}\,(1 + mx^{m-1} dxld\beta) = \overset{d\beta}{\lambda}\;\overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96)$$

Nun ist aber (N. R. § 10, Gl. 14 und oben Gl. 74, 75):

$$\overset{d\beta}{\lambda}\,(1 + mx^{m-1} dxld\beta) = mx^{m-1} dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

ferner zufolge Gl. 61:

$$\overset{d\beta}{\lambda}\;\overset{d\beta}{\nu}\, dy = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

so dass durch Substitution dieser Werte in der Gleichung 96 letztere folgende Gestalt annimmt:

$$mx^{m-1} dx = dy = dx^m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (99)$$

Das gesuchte Differential von x^m ist also $mx^{m-1}dx$. Genau dasselbe Resultat würde sich auch ergeben, wenn man die Gleichung 93 unmittelbar logarithmalisiert (s. z. B. unten Gl. 141, 142).

§. 8.

Integration von $mx^{m-1}dx$.

Die Integration des Differentials $mx^{m-1}dx$ ist nichts als eine Umkehrung der im vorigen Paragraphen dargestellten Rechnungsoperationen. Um diesen Parallelismus klar hervortreten zu lassen, habe ich das

Differential $mx^{m-1}dx$ zur Integration gewählt, obgleich die übliche Form des Potenzintegrals bekanntlich $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ ist.

I. Die Fundamentalgleichung bei der Integration ist jener Ausdruck, mit welchem oben (Gl. 99) die Differentiation abgeschlossen wurde, nämlich

$$mx^{m-1}dx = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

und unsere Aufgabe geht nun dahin, diese Gleichung durch die Numeralisierung und Logarithmalisierung in die entsprechende Integralgleichung (s. Gl. 84), nämlich:

$$(x + dx)^m - x^m = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (101)$$

umzugestalten.

Zu diesem Zweck ist zuvörderst die Verwandlung der Gl. 100 in die Numeralgleichung (Gl. 92) anzustreben. Numeralisiert man nun Gl. 100, so ergiebt sich:

$$\overset{d\beta}{\nu}\; mx^{m-1}dx = \overset{d\beta}{\nu}\; dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (102)$$

oder wenn man auf der linken Seite die Numeralisierung wirklich vollzieht (N. R. § 11, Gl. 13):

$$1 + mx^{m-1}dx\,ld\beta = \overset{d\beta}{\nu}\; dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

Da aus dem in vorstehender Gleichung links erscheinenden Differentialbinomium später (Gl. 109—111) die Differentialsumme gebildet werden soll, so muss demselben die Form $1 + \frac{Pdx}{x}$ gegeben werden, was dadurch geschieht, dass man das Differential mit x multipliciert und dividiert, wobei zu bemerken ist, dass die mit P bezeichneten Faktoren des Differentialbinomiums (im vorliegenden Falle $mx^m\,ld\beta$) durch spätere Operationen (Gl. 105, 107, 109) eliminiert werden. Es ist also:

$$1 + \frac{mx^m\,dx\,ld\beta}{x} = \overset{d\beta}{\nu}\; dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

Man versetzt nun x^m aus dem Differentialbinomium in die Potenz, was zufolge der Gl. 22—24 jederzeit zulässig ist. Die richtige Auswal der in die Potenz zu versetzenden Faktoren — welche fast bei allen Integrationen nach der neuen Methode wiederkehrt —, erfordert eine gewisse Uebung in der Numeral- und Logarithmalrechnung, insbesondere einen Ueberblick über die durch den späteren Verlauf der Operationen ohnedies eliminierten Faktoren, welche selbstverständlich nicht in die Potenz versetzt werden dürfen. So ist z. B. in der Gl. 104 nur x^m, nicht aber m

oder $ld\beta$ in einen Exponenten des Differentialbinomiums zu verwandeln, obgleich zur Bildung der Differentialsumme nur der Ausdruck $1 + \frac{dx}{x}$ verwendet werden kann, und zwar aus dem Grunde, weil ohnedies m in der Gl. 109, $ld\beta$ in der Gl. 107 aus dem Differentialbinomium verschwindet. Nimmt man nun jene Operation vor, so ist:

$$\left(1 + \frac{m\,dx\,ld\beta}{x}\right)^{x^m} = {}^{d\beta}\nu\,dy \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (105)$$

Wir sind nunmehr in unserer rückwärtsschreitenden Integration bis zur Gl. 93, also bis unmittelbar vor die Numeralgleichung gelangt. Es ist jetzt nur noch nothwendig, aus der Gl. 105 diese letztere zu bilden, um die Integration des gegebenen Differentials zu bewirken. So wie nämlich die in den Gleichungen 92 und 93 im Zähler und Nenner vollzogene Reduktion von $d\beta^{x^m}$ zur Folge hatte, dass durch die Logarithmalisierung des reduzierten Ausdruckes sich das Differential ergab, so bedarf es umgekehrt nur der Umbildung des Ausdruckes $\left(1 + \frac{m\,dx\,ld\beta}{x}\right)^{x^m}$ zur Numeralgleichung, um durch die Logarithmalisierung dieser Letzteren zur Integralgleichung und damit zum gesuchten Integral zu gelangen. Mit anderen Worten: die Numeralgleichung hat die merkwürdige Eigenschaft, dass ihre Logarithmalisierung mit jener Reduction das Differential, ohne jene Reduction das Integral ergibt.

Die Umbildung der Gl. 105 zur Numeralgleichung erfolgt aber einfach dadurch, dass man den Ausdruck $\left(1 + \frac{m\,dx\,l\,d\beta}{x}\right)^{x^m}$ mit der Basis des Logarithmals multipliciert und dividiert und letztere zu derselben Potenz wie das Differentialbinomium erhebt. Der Multiplicator und Divisor wird also im vorliegenden Falle $d\beta^{x^m}$ sein. Will man nur die Differentialsumme und nicht die ganze Integralgleichung ermitteln, so genügt schon die Multiplication mit $d\beta^{x^m}$, weil die Division den Zweck hat, den Subtrahenden der Integralgleichung daraus hervorgehen zu lassen (S. Gl. 107).

Nimmt man die soeben angedeuteten Operationen vor, so nimmt die Gl. 105 folgende Gestalt an:

$$\frac{{}^{d\beta^{x^m}}\left(1 + \frac{m\,dx\,ld\beta}{x}\right)^{x^m}}{{}^{d\beta^{x^m}}} = {}^{d\beta}\nu\,dy \quad . \; . \; . \; . \quad (106)$$

Logarithmalisiert man nun, um den durch die Numeralisierung in den Gl. 102 und 103 veränderten Werth von dy wieder herzustellen, nach den oben (Gl. 74, 75) gegebenen Regeln die vorstehende Numeralgleichung, so ist:

$$x^m + x^m \cdot \frac{m\,dx}{x} - x^m = \overset{d\beta}{\lambda}\ \overset{d\beta}{\nu}\ dy = dy \quad . \quad . \quad . \quad (107)$$

oder:

$$x^m \left(1 + \frac{m\,dx}{x}\right) - x^m = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (108)$$

Da nun aus den beiden Faktoren des Ausdrucks $x^m \left(1 + \frac{m\,dx}{x}\right)$ die Differentialsumme gebildet werden soll, so müssen dieselben auf den gleichen Exponenten gebracht werden, was in diesem Falle ohne Weiteres dadurch geschehen kann, dass man den Faktor m aus dem Differentialbinomium in die Potenz versetzt (Gl. 22—24). Sollte das zu integrierende Differential so beschaffen sein, dass das aus demselben gebildete Differentialbinomium diese Operation nicht gestattet, so muss es entweder gleich zu Anfang vor erfolgter Numeralisierung oder auch später, so lange es noch nicht in die Differentialsumme verwandelt ist, mit den erforderlichen Constanten multipliciert und dividiert werden, was dann zur Folge hat, dass die nämlichen Operationen auch an dy vorgenommen werden müssen. (S. z. B. Gl. 125, 131, 132.) Es ist also im vorliegenden Falle:

$$x^m \left(1 + \frac{dx}{x}\right)^m - x^m = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (109)$$

oder:

$$\left[x\left(1 + \frac{dx}{x}\right)\right]^m - x^m = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (110)$$

oder:

$$(x + dx)^m - x^m = dy \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (111)$$

Nunmehr ist also die Integralgleichung und damit auch das gesuchte Integral $= x^m$ ermittelt.

II. Will man nicht die vollständige Integralgleichung, sondern blos die Differentialsumme auffinden (s. Gl. 82, 83), so entstehen von Gl. 106 an folgende abweichende Ausdrücke, die keiner weiteren Erläuterung bedürfen:

$$d\beta^{x^m} \left(1 + \frac{m\,dx\,l\,d\beta}{x}\right)^{x^m} = Ds\ \overset{d\beta}{\nu}\ dy \text{ (s. Gl. 106)} \quad . \quad . \quad (112)$$

$$x^m + x^m \cdot \frac{m\,dx}{x} = \overset{d\beta}{\lambda}\ Ds\ \overset{d\beta}{\nu}\ dy = Ds\,dy \text{ (s. Gl 107)} \quad . \quad (113)$$

$$x^m\left(1+\frac{m\,dx}{x}\right)=Ds\,dy \text{ (s. Gl. 108)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (114)$$

$$\left[x\left(1+\frac{m\,dx}{x}\right)\right]^m=Ds\,dy \text{ (s. Gl. 109, 110)} \quad . \quad . \quad (115)$$

$$(x+dx)^m=Ds\,dy \text{ (s. Gl. 111)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (116)$$

Setzt man in der Gl. 116 das Increment $dx=o$, so ergiebt sich gleichfalls das Integral x^m.

III. Gewöhnlich wird das Potenz-Integral durch die Formel ausgedrückt:

$$\int x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (117)$$

Nimmt man nun die in den Gl. 100—104 angedeuteten Operationen mit dem Differential $x^m dx$ vor, so wird die Gl. 104 folgende Gestalt annehmen:

$$1+\frac{x^{m+1}dx\,l\,d\beta}{x}=\overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (118)$$

und demgemäss wird auch in allen folgenden Gleichungen x^{m+1} an die Stelle von x^m treten, dagegen der Faktor m, welcher in dem gegebenen Differential $x^m dx$ fehlt, aus dem Differentialbinomium entfallen. Es wird daher die Gl. 108 folgende Gestalt annehmen:

$$x^{m+1}\left(1+\frac{dx}{x}\right)-x^{m+1}=dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (119)$$

Es ist klar, dass die beiden Faktoren des Ausdrucks $x^{m+1}\left(1+\frac{dx}{x}\right)$ (was zur Bildung der Differentialsumme unerlässlich ist) nur dann unter denselben Exponenten gebracht werden können, wenn an die Stelle des Binoms $1+\frac{dx}{x}$ der Ausdruck $1+\frac{(m+1)\,dx}{x}$ treten würde, weil man dann $m+1$ in die Potenz versetzen könnte. Diese Aenderung kann auch sehr leicht dadurch bewirkt werden, dass man die Fundamentalgleichung:

$$x^m dx=dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (120)$$

noch vor erfolgter Numeralisierung mit $m+1$ multipliciert, wodurch sie folgende Gestalt erhält:

$$x^m(m+1)\,dx=(m+1)\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (121)$$

Nimmt man dann alle sub I angedeuteten Operationen vor, so wird die Gl. 108 lauten:

$$x^{m+1}\left[1+\frac{(m+1)\,dx}{x}\right]-x^{m+1}=(m+1)\,dy \quad . \quad . \quad . \quad (122)$$

und die Gl. 111:

$$(x+dx)^{m+1}-x^{m+1}=(m+1)\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (123)$$

und wenn man dy durch Division von den Konstanten befreit:

$$\frac{(x+dx)^{m+1}}{m+1}-\frac{x^{m+1}}{m+1}=dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (124)$$

welche Integralgleichung das Integral in seiner gewöhnlichen Form darstellt.

Ich bemerke noch, dass die auf der rechten Seite der Gleichungen stehende Grösse dy ohne Weiteres mit jeder Konstanten multipliziert, dividiert oder potenziert werden kann, weil alle Rechnungsoperationen, wie aus der bisherigen Darstellung ersichtlich ist, nur die Umformung der variablen Bestandteile (der x) in $x+dx$ bezwecken, während die Konstanten unberührt bleiben. Nur muss dy immer am Ende der Rechnung von den Konstanten, mit welchen es behaftet ist, durch die geeigneten Operationen wieder befreit werden (s. z. B. Gl. 123, 124).

Die Multiplikation und die Division der Fundamentalgleichung mit den Konstanten vor erfolgter Numeralisierung entspricht den Anforderungen einer strengen Methode, sie erfordert aber eine genaue Uebersicht über den späteren Verlauf des Integrationsprozesses, welche übrigens durch längeren Gebrauch der neuen Rechnungsmethoden leicht erworben wird. Da jedoch die konstanten Bestandtheile der Differentiale auf beiden Seiten der Gleichungen durch die Numeralisierung und Logarithmalisierung keine andere Veränderung erleiden, als dass sie allmählig eliminiert werden (s. Gl. 102 und ff.), so kann die Einführung der Konstanten auch später, so lange noch nicht die Differentialsumme gebildet ist, in dem Zeitpunkte stattfinden, wo die Konstanten zur Durchführung der Rechnung nothwendig werden. Dies geschieht nun in der Weise, dass einerseits das Differential des Binoms dx, und andererseits dy mit den erforderlichen Konstanten multipliciert oder dividiert werden, ohne dass diese Operationen sich auf die übrigen Bestandtheile der Gleichung beziehen (s. unten Gl. 132). Wenn man z. B. bei der Integration von $x^m dx$ zu der Gleichung 119 gelangt ist, so kann man noch immer $\frac{dx}{x}$ und dy mit $m+1$ multiplicieren, die übrigen Bestandtheile der Gleichung aber unberührt lassen, so dass diese dann die Gestalt annimmt:

$$x^{m+1}\left[1+\frac{(m+1)\,dx}{x}\right]-x^{m+1}=(m+1)\,dy \quad . \quad . \quad (125)$$

Genau dieselbe Form hätte aber diese Gleichung erlangt, wenn man schon die Fundamentalgleichung mit $m+1$ multipliziert hätte (s. Gl. 120 bis 122). Da die Resultate nach beiden Methoden die nämlichen sind, aber die Einführung der Konstanten erst in dem Augenblick, wo der Lauf der Rechnung sie nothwendig macht, die Entstehung der Integrale viel anschaulicher gestaltet, so werde ich in der folgenden Darstellung mich vorzüglich dieser zweiten Methode bedienen.

§. 9.

Integration von $(a+bx)^m dx$; — $[a+bx=\omega]$.

Ganz analog mit der Integration von $x^m dx$ ist die Integration des allgemeineren Ausdrucks $(a+bx)^m dx$. Die Fundamentalgleichung ist hier, wenn man $a+bx=\omega$ setzt:

$$\omega^m dx = dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (126)$$

Nunmehr wäre die Fundamentalgleichung mit den erforderlichen Konstanten zu multiplizieren (s. Gl. 120, 121). Der Einfachheit wegen werde ich aber mit Rücksicht auf das am Schlusse des § 8 Gesagte die Konstanten erst dann einführen, wenn der Lauf der Rechnung dies nothwendig macht.

Numeralisiert man die Fundamentalgleichung, so ist:

$$1+\omega^m dxld\beta = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (127)$$

Nun ist aber (s. Gl. 103—106):

$$1+\omega^m dxld\beta = 1+\frac{\omega^{m+1} dxld\beta}{\omega} = \left(1+\frac{dxld\beta}{\omega}\right)^{\omega^{m+1}} =$$

$$\frac{{}_{d\beta}\omega^{m+1}\left(1+\frac{dxld\beta}{\omega}\right)^{\omega^{m+1}}}{{}_{d\beta}\omega^{m+1}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (128)$$

Substituiert man den letzten Ausdruck in der Gl. 127, so entsteht die Numeralgleichung:

$$\frac{{}_{d\beta}\omega^{m+1}\left(1+\frac{dxld\beta}{\omega}\right)^{\omega^{m+1}}}{{}_{d\beta}\omega^{m+1}} = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \; . \quad (129)$$

Logarithmalisiert man die vorstehende Gleichung, so ist:

$$\omega^{m+1} + \omega^{m+1} \cdot \frac{dx}{\omega} - \omega^{m+1} = \overset{d\beta}{\lambda}\ \overset{d\beta}{\nu}\ dy = dy \quad . \quad . \quad (130)$$

oder:

$$\omega^{m+1} \left(1 + \frac{dx}{\omega}\right) - \omega^{m+1} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (131)$$

Damit nun in dieser Gleichung aus dem Ausdruck $\omega^{m+1} \left(1 + \frac{dx}{\omega}\right)$ die Differentialsumme gebildet werden kann, ist die Einführung von 2 Konstanten erforderlich. Vor Allem muss $\frac{dx}{\omega}$ und dy mit $m+1$ multipliziert werden, um ω^{m+1} und $1 + \frac{dx}{\omega}$ auf den gleichen Exponenten zu bringen. Dann aber ist zweitens zur Bildung der Differentialsumme notwendig, dass das Differentialbinom auf die Form $1 + \frac{d\omega}{\omega}$ gebracht wird, ähnlich wie im § 8 das Differentialbinom die Gestalt $1 + \frac{dx}{x}$ annehmen musste. Nun ist aber $d\omega = d\,(a + b\,x) = b\,dx$; folglich muss noch überdies $\frac{dx}{x}$ und dy mit b multipliziert werden. Diese Operationen hätten übrigens ohne Änderung des Resultates auch gleich am Beginne der Rechnung vorgenommen werden können. Die Gl. 131 nimmt nunmehr folgende Gestalt an:

$$\omega^{m+1} \left[1 + \frac{(m+1)\,b\,dx}{\omega}\right] - \omega^{m+1} = (m+1)\,b\,dy \quad . \quad . \quad (132)$$

oder:

$$\omega^{m+1} \left(1 + \frac{b\,dx}{\omega}\right)^{m+1} - \omega^{m+1} = (m+1)\,b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad (133)$$

oder (s. Gl. 108—111):

$$(\omega + b\,dx)^{m+1} - \omega^{m+1} = (m+1)\,b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (134)$$

Befreit man nun dy von den Konstanten, so ist:

$$\frac{1}{b}\ \frac{(\omega + b\,dx)^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{b}\ \frac{\omega^{m+1}}{m+1} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (135)$$

Das gesuchte Integral ist also $\frac{1}{b}\ \frac{\omega^{m+1}}{m+1} = \frac{1}{b}\ \frac{(a+bx)^{m+1}}{m+1}$.

§ 10.

Differentiation und Integration der Exponentialfunction.

a). Differentiation.

Die Fundamentalgleichung ist in diesem Falle:

$$a^{bx+bdx} - a^{bx} = dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (136)$$

und wenn man numeralisiert:

$$\overset{d\beta}{\nu}\left[a^{bx+bdx} - a^{bx}\right] = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (137)$$

oder (s. Gl. 85, 86):

$$\frac{\overset{d\beta}{\nu}\, a^{bx+bdx}}{d\beta^{a^{bx}}} = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (138$$

Nun ist aber:

$$\overset{d\beta}{\nu}\, a^{bx+bdx} = \overset{d\beta}{\nu}\, a^{bx} \cdot a^{bdx} = (\text{Gl. } 88)\; a^{bx}\, \overset{d\beta}{\nu}\, a^{bdx} = (\text{Gl. } 33)$$

$$= a^{bx}\, \overset{d\beta}{\nu}\, (1 + labdx) = (\text{Gl. } 91)\; [d\beta\,(1 + labdxld\beta)]^{a^{bx}} =$$

$$= d\beta^{a^{bx}}\, (1 + labdxld\beta)^{a^{bx}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (139)$$

Substituiert man den letzteren Ausdruck in die Gl. 138, so entsteht die Numeralgleichung:

$$\frac{d\beta^{a^{bx}}\, (1 + labdxld\beta)^{a^{bx}}}{d\beta^{a^{bx}}} = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (140)$$

und wenn man reduziert:

$$(1 + labdxld\beta)^{a^{bx}} = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (141)$$

Logarithmalisiert man jetzt, um den ursprünglichen Werth von dy wieder herzustellen, so ist (s. Gl. 96—98):

$$a^{bx} \cdot labdx = \overset{d\beta}{\lambda}\, \overset{d\beta}{\nu}\, dy = dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (142)$$

oder:

$$a^{bx} labdx = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (143)$$

womit das Differential ermittelt erscheint.

b). Integration.

Die Fundamentalgleichung ist hier (s. Gl. 143):

$$a^{bx} labdx = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (144)$$

und wenn man numeralisiert:

$$1 + a^{bx} labdxld\beta = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (145)$$

Da zum Zwecke der Bildung der Differentialsumme jedes x des zu integrierenden Differentials sich in $x + dx$ verwandeln muss, folglich der im vorstehenden Differentialbinomium erscheinende Ausdruck a^{bx} in a^{bx+bdx} zu transformieren ist, so muss aus dem Binom a^{bx} in die Potenz versetzt werden, weil der übrig bleibende Ausdruck $1 + labdxld\beta$, wenn man von dem später (Gl. 148) verschwindenden $ld\beta$ absieht, zufolge Gl. $33 = a^{bdx}$ ist. Es ist also:

$$1 + a^{bx} labdxld\beta = [1 + labdxld\beta]^{a^{bx}} = \frac{d\beta^{a^{bx}} (1 + labdxld\beta)^{a^{bx}}}{d\beta^{a^{bx}}} \quad (146)$$

Substituiert man den letzteren Ausdruck in die Gl. 145, so entsteht die Numeralgleichung:

$$\frac{d\beta^{a^{bx}} (1 + labdxld\beta)^{a^{bx}}}{d\beta^{a^{bx}}} = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (147)$$

Logarithmalisiert man zur Herstellung des ursprünglichen Wertes von dy die vorstehende Gleichung, so ist:

$$a^{bx} + a^{bx} \cdot labdx - a^{bx} = \overset{d\beta}{\lambda}\ \overset{d\beta}{\nu}\, dy = dy \quad . \quad . \quad . \quad (148)$$

oder:

$$a^{bx} (1 + labdx) - a^{bx} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (149)$$

oder:

$$a^{bx} \cdot a^{bdx} - a^{bx} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (150)$$

oder:

$$a^{bx+bdx} - a^{bx} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (151)$$

Das gesuchte Integral ist also a^{bx}.

c). Integration von $e^{ax}dx$.

Will man das Integral der Exponentialfunktion in der üblichen Form $\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}$ berechnen, so ist die Fundamentalgleichung:

$$e^{ax}dx = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (152)$$

und wenn man numeralisiert:

$$1 + e^{ax}dx l d\beta = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (153)$$

Nun ist aber (s. Gl. 146):

$$1 + e^{ax}dx l d\beta = (1 + dx l d\beta)^{e^{ax}} = \frac{d\beta^{e^{ax}}(1 + dx l d\beta)^{e^{ax}}}{d\beta^{e^{ax}}} \quad . \quad (154)$$

folglich die Numeralgleichung:

$$\frac{d\beta^{e^{ax}}(1 + dx l d\beta)^{e^{ax}}}{d\beta^{e^{ax}}} = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (155)$$

Logarithmalisiert man diese Gleichung, so ist:

$$e^{ax} + e^{ax} \cdot dx - e^{ax} = \overset{d\beta}{\lambda}\ \overset{d\beta}{\nu}\, dy = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (156)$$

oder:

$$e^{ax}(1 + dx) - e^{ax} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (157)$$

Da nun zur Bildung der Differentialsumme aus e^{ax} der Ausdruck $e^{adx} = 1 + adx$ notwendig ist, das Differentialbinom $1 + dx$ aber nur e^{dx} ergiebt, so muss dx und dy mit a multipliciert werden (s. Gl. 125, 132). Es ist dann:

$$e^{ax}(1 + adx) - e^{ax} = ady \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (158)$$

oder:

$$e^{ax} \cdot e^{adx} - e^{ax} = ady \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (159)$$

oder:

$$e^{ax + adx} - e^{ax} = ady \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (160)$$

und wenn man dy von der Konstante befreit:

$$\frac{e^{ax + adx}}{a} - \frac{e^{ax}}{a} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (161)$$

Das gesuchte Integral ist also $\frac{e^{ax}}{a}$.

§ 11.

Differentiation und Integration der gebrochenen Funktionen.

a). Differentiation von $\frac{a}{bx}$.

Die Fundamentalgleichung ist hier:

$$\frac{a}{b(x+dx)} - \frac{a}{bx} = dy \quad \ldots \ldots \quad (162)$$

oder, da man die Konstanten, welche zur Durchführung der folgenden Rechnungsoperationen nicht notwendig sind, auf die rechte Seite der Gleichung schaffen kann:

$$\frac{1}{x+dx} - \frac{1}{x} = \frac{b}{a}\, dy \quad \ldots \ldots \quad (163)$$

Wenn man diese Gleichung numeralisiert, so ist (s. Gl. 85, 86, 137, 138):

$$\frac{\overset{d\beta}{\nu}\, \frac{1}{x+dx}}{d\beta^{\frac{1}{x}}} = \overset{d\beta}{\nu}\, \frac{b}{a}\, dy \quad \ldots \ldots \quad (164)$$

Zieht man, um später (Gl. 167, 168) die bekannte Reduktion zu ermöglichen und um den Ausdruck $x+dx$ in das Differentialbinomium zu verwandeln, aus dem noch zu numeralisierenden Ausdruck $\frac{1}{x}$ heraus und setzt man $\overset{d\beta}{\nu}$ hinter diesen Faktor, so ist:

$$\frac{\frac{1}{x}\, \overset{d\beta}{\nu}\, \frac{1}{1+\frac{dx}{x}}}{d\beta^{\frac{1}{x}}} = \overset{d\beta}{\nu}\, \frac{b}{a}\, dy \quad \ldots \ldots \quad (165)$$

Nun ist aber:

$$\overset{d\beta}{\nu}\, \frac{1}{1+\frac{dx}{x}} = (\text{Gl. } 9)\ \overset{d\beta}{\nu}\left(1 - \frac{dx}{x}\right) = d\beta^{1-\frac{dx}{x}} = \frac{d\beta}{d\beta^{\frac{dx}{x}}} =$$

$$\frac{d\beta}{1+\frac{dx\, l\, d\beta}{x}} \quad \ldots \ldots \quad (166)$$

Substituiert man den letzten Ausdruck in die Gl. 165, indem man gleichzeitig $\frac{1}{x}$ in die Potenz versetzt, so entsteht die Numeralgleichung:

$$\frac{d\beta^{\frac{1}{x}}}{d\beta^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{dx\,l\,d\beta}{x}\right)^{\frac{1}{x}}} = {}^{d\beta}\nu\,\frac{b}{a}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (167)$$

und wenn man reduciert:

$$\frac{1}{\left(1+\frac{dx\,l\,d\beta}{x}\right)^{\frac{1}{x}}} = {}^{d\beta}\nu\,\frac{b}{a}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (168)$$

Versetzt man nunmehr in vorstehender Gleichung den Exponenten $\frac{1}{x}$ in das Differentialbinomium und dieses letztere selbst in den Zähler (Gl. 9), so ist:

$$1-\frac{dx\,l\,d\beta}{x^2} = {}^{d\beta}\nu\,\frac{b}{a}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (169)$$

Logarithmalisiert man endlich, um den ursprünglichen Wert von dy wieder herzustellen, diese Gleichung, so ist:

$$-\frac{dx}{x^2} = {}^{d\beta}\lambda\;{}^{d\beta}\nu\,\frac{b}{a}\,dy = \frac{b}{a}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (170)$$

und wenn man dy von den Konstanten befreit:

$$-\frac{a\,dx}{b\,x^2} = dy = d\,\frac{a}{bx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (171)$$

b.) Integration von $\frac{a\,dx}{b\,x^2}$.

Die Fundamentalgleichung ist, wenn man die Konstanten, die zur Durchführung der Rechnungsoperationen nicht notwendig sind, auf die rechte Seite schafft:

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{b}{a}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (172)$$

und wenn man numeralisiert:

$$1+\frac{dx\,l\,d\beta}{x^2} = {}^{d\beta}\nu\,\frac{b}{a}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (173)$$

Wenn man, um das links stehende Numeral auf die Form $1 + \frac{dx}{x}$ zu bringen, (s. Gl. 104, 105), $\frac{1}{x}$ in die Potenz versetzt, so ist:

$$1 + \frac{dx l d\beta}{x^2} = \left(1 + \frac{dx l d\beta}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{d\beta^{\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{dx l d\beta}{x}\right)^{\frac{1}{x}}}{d\beta^{\frac{1}{x}}} \quad . \quad (174)$$

und wenn man diesen letzteren Ausdruck in die Gl. 173 substituiert, so entsteht die Numeralgleichung:

$$\frac{d\beta^{\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{dx l d\beta}{x}\right)^{\frac{1}{x}}}{d\beta^{\frac{1}{x}}} = \overset{d\beta}{\nu} \frac{b}{a} dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (175)$$

Logarithmalisiert man nun, um den ursprünglichen Wert von dy herzustellen, die vorstehende Gleichung, so ist:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x} - \frac{1}{x} = \overset{d\beta}{\lambda} \overset{d\beta}{\nu} \frac{b}{b} dy = \frac{b}{a} dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (176)$$

Nun ist aber zufolge Gl. 11:

$$\frac{1}{p + q dx} = \frac{1}{p} - \frac{q dx}{p^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (177)$$

folglich, wenn man in der letzten Gleichung $p = x$, $q = 1$ setzt:

$$\frac{dx}{x^2} - \frac{1}{x} = -\left(\frac{1}{x} - \frac{dx}{x^2}\right) = -\frac{1}{x + dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (178)$$

und wenn man den letzten Ausdruck in die Gl. 176 substituiert:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x + dx} = \frac{b}{a} dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (179)$$

oder wenn man der Integralgleichung durch Wechsel der Zeichen ihre gewöhnliche, anschauliche Form verleiht und dy von den Konstanten befreit, so ist:

$$-\left[\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{x + dx} - \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{x}\right] = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (180)$$

Es ist also $\int \frac{a dx}{b x^2} = -\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{a}{bx}$.

Ich bemerke, dass hier ein Fall vorliegt, wo die Differentialsumme und der Subtrahend der Integralgleichung nicht mit Sicherheit geschieden werden können (s. oben S. 18), weil die erstere nicht blos aus dem Zähler, sondern zum Theil auch aus dem Nenner der Numeralgleichung 175 entstanden ist. Man kann übrigens zu dem in der Gl. 180 enthaltenen Resultat auch dadurch gelangen, dass man in der Gl. 176 die Differentiale dx und dy mit der Konstante -1 multipliziert und am Ende der Rechnung dy durch Zeichenwechsel von dem Minuszeichen befreit. In diesem Falle kann dann die Differentialsumme von dem Subtrahenden ebenso wie bei den übrigen Integrationen genau unterschieden werden.

c). Integration von $\frac{dx}{(a+bx)^2}$; — $[a+bx=\omega]$.

Die Integration von $\frac{dx}{(a+bx)^2} = \frac{dx}{\omega^2}$ ist dem Falle unter b vollständig analog.

Die Fundamentalgleichung ist:

$$\frac{dx}{\omega^2} = dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (181)$$

Die Numeralgleichung lautet (s. Gl. 172—175):

$$\frac{d\beta^{\frac{1}{\omega}}\left(1+\frac{dx\,l\,d\beta}{\omega}\right)^{\frac{1}{\omega}}}{d\beta^{\frac{1}{\omega}}} = {}^{d\beta}\!\nu\, dy \quad \ldots\ldots \quad (182)$$

Logarithmalisiert man diese Gleichung, so ist:

$$\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega}\cdot\frac{dx}{\omega}-\frac{1}{\omega} = dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (183)$$

Da der Ausdruck $\frac{dx}{\omega^2}-\frac{1}{\omega}$ oder $-\left[\frac{1}{\omega}-\frac{dx}{\omega^2}\right]$ zufolge den Gl. 177 und 178 $-\frac{1}{\omega+dx}$ ergiebt, die Differentialsumme von $\frac{1}{\omega}=\frac{1}{a+bx}$ aber $\frac{1}{a+bx+bdx}$ ist, so muss vor Bildung der Differentialsumme dx und dy mit b multipliziert werden. Die Gl. 183 nimmt dann folgende Gestalt an:

$$\frac{1}{\omega}+\frac{bdx}{\omega^2}-\frac{1}{\omega} = b\,dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (184)$$

oder, wenn man in der Gl. 177 $p=\omega$, $q=b$ setzt:

$$\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\omega+bdx} = b\,dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (185)$$

oder, wenn man die Zeichen wechselt und dy von der Konstante befreit:

$$-\left[\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{\omega+b\,dx}-\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{\omega}\right]=dy \quad \ldots\ldots \quad (186)$$

Es ist also $\int\frac{dx}{(a+bx)^2}=-\frac{1}{b\,(a+bx)}$.

d). Integration von $\frac{\mathrm{d}x}{(a+bx)^3}$; — $[a+bx=\omega]$.

Die Fundamentalgleichung ist:

$$\frac{dx}{\omega^3}=dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (187)$$

und wenn man diese numeralisiert:

$$1+\frac{dx\,l\,d\beta}{\omega^3}=\overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (188)$$

Hier muss, um das links stehende Numeral auf die Form $1+\frac{d\,\omega}{\omega}$ zu bringen und dadurch die Bildung der Differentialsumme zu ermöglichen, $\frac{1}{\omega^2}$ in die Potenz versetzt werden. Es ergiebt sich dann die Numeralgleichung:

$$\frac{d\beta^{\frac{1}{\omega^2}}\left(1+\frac{dx\,l\,d\beta}{\omega}\right)^{\frac{1}{\omega^2}}}{d\beta^{\frac{1}{\omega^2}}}=\overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad \ldots\ldots \quad (189)$$

Logarithmalisiert man diese Gleichung, so ist:

$$\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^2}\cdot\frac{dx}{\omega}-\frac{1}{\omega^2}=\overset{d\beta}{\lambda}\,\overset{d\beta}{\nu}\,dy=dy \quad \ldots\ldots \quad (190)$$

Nun ist aber:

$$\frac{1}{(\omega+b\,dx)^2}=\frac{1}{\omega^2+2b\,\omega\,dx}=\frac{1}{\omega^2}-\frac{2b\,\omega\,dx}{\omega^4}=\frac{1}{\omega^2}-\frac{2b\,dx}{\omega^3} \quad . \quad (191)$$

Der zweite Ausdruck dieser Gleichung entsteht, wenn man in dem ersten $(\omega+b\,dx)^2$ entwickelt und b^2dx^2 weglässt; der dritte und vierte, wenn man in der Gl. 177 $p=\omega^2$, $q=2b\omega$ setzt. Um also zu der Differentialsumme $\frac{1}{(\omega+b\,dx)^2}$ zu gelangen, braucht man in der Gl. 190 blos dx und dy mit $2b$ zu multiplizieren. Es ist dann:

$$\frac{1}{\omega^2}+\frac{2b\,dx}{\omega^3}-\frac{1}{\omega^2}=2b\,dy \quad \ldots\ldots \quad (192)$$

oder, wenn man teilweise die Zeichen wechselt:

$$\frac{1}{\omega^2} - \left[\frac{1}{\omega^2} - \frac{2\,b\,dx}{\omega^3}\right] = 2b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (193)$$

oder mit Rücksicht auf die Gl. 191:

$$\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{(\omega + b\,dx)^2} = 2\,b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (194)$$

Giebt man der Integralgleichung durch Zeichenwechsel ihre gewöhnliche Form, und befreit man dy von den Konstanten, so ist:

$$-\left[\frac{1}{2b} \cdot \frac{1}{(\omega + b\,dx)^2} - \frac{1}{2b} \cdot \frac{1}{\omega^2}\right] \doteq dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (195)$$

Das gesuchte Integral ist also $-\dfrac{1}{2b\,(a + bx)^2}$.

§ 12.

Logarithmische Integrale.

Alle bisherigen Integrale hatten die gemeinsame Eigentümlichkeit, dass aus dem Differentialbinomium vor Bildung der Numeralgleichung einzelne Faktoren in die Potenz versetzt werden mussten, um das Binom auf die Form $1 + \dfrac{dx}{x}$ oder $1 + \dfrac{d\omega}{\omega}$ zu bringen. Anders verhält sich dies bei den logarithmischen Integralen. Hier liefert sofort die Numeralisierung des Differentials die Numeralgleichung entweder in der Form $1 + \dfrac{dx\,l\,d\beta}{x}$ oder in der Form $1 + \dfrac{dx\,l\,d\beta}{\omega}$; in dem letzteren Falle (s. Gl. 209, 210, 215, 216) ist zwar die Multiplikation mit Konstanten, aber nicht eine Versetzung in die Potenz erforderlich.

a) Integration von $\dfrac{dx}{x}$.

Die Fundamentalgleichung ist hier:

$$\frac{dx}{x} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (196)$$

und wenn man numeralisiert:

$$1 + \frac{dx\,l\,d\beta}{x} = \overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (197)$$

Nun ist aber:

$$1+\frac{dx\,l\,d\beta}{x}=\text{(Gl. 24)}\left(1+\frac{dx}{x}\right)^{l\,d\beta}=\left(\frac{x+dx}{x}\right)^{l\,d\beta} \quad . \quad . \quad (198)$$

folglich, wenn man den letzteren Ausdruck in die Gl. 197 substituiert:

$$\left(\frac{x+dx}{x}\right)^{l\,d\beta}=\overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (199)$$

Logarithmalisiert man vorstehende Gleichung, so ist (Gl. 29):

$$l\,d\beta\cdot\frac{l\,(x+dx)-lx}{l\,d\beta}=\overset{d\beta\,d\beta}{\lambda\;\nu}\,dy=dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (200)$$

oder:

$$l\,(x+dx)-lx=dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (201)$$

Das gesuchte Integral ist also lx.

b) Integration von $\frac{dx}{xlx}$.

Die Fundamentalgleichung ist:

$$\frac{dx}{xlx}=dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (202)$$

und wenn man numeralisiert:

$$1+\frac{dx\,l\,d\beta}{xlx}=\overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (203)$$

Nun ist aber:

$$1+\frac{dx\,l\,d\beta}{xlx}=\left[1+\frac{dx}{xlx}\right]^{l\,d\beta}=\left[1+\frac{l\left(1+\frac{dx}{x}\right)}{lx}\right]^{l\,d\beta}$$

$$=\left[\frac{lx+l\left(1+\frac{dx}{x}\right)}{lx}\right]^{l\,d\beta}=\left[\frac{\log\,x\left(1+\frac{dx}{x}\right)}{lx}\right]^{l\,d\beta}=\left[\frac{l\,(x+dx)}{lx}\right]^{l\,d\beta} \quad (204)$$

Substituiert man den letzten Ausdruck in die Gl. 203, so ist:

$$\left[\frac{l\,(x+dx)}{lx}\right]^{l\,d\beta}=\overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (205)$$

Logarithmalisiert man nun, um den ursprünglichen Wert von dy herzustellen, die vorstehende Gleichung, so ist:

$$l d\beta \cdot \frac{l^2(x+dx) - l^2 x}{l d\beta} = \overset{d\beta}{\lambda}\,\overset{d\beta}{\nu}\, dy = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (206)$$

oder:

$$l^2(x+dx) - l^2 x = dy. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (207)$$

Das gesuchte Integral ist also $l^2 x = l\,(l x)$.

c) Integration von $\dfrac{dx}{a+bx}$; — $[a+bx=\omega]$.

Die Fundamentalgleichung ist:

$$\frac{dx}{\omega} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (208)$$

und wenn man numeralisiert:

$$1 + \frac{dx l d\beta}{\omega} = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (209)$$

Da in dem vorstehenden Ausdruck die Differentialsumme aus ω und dx zu bilden ist (s. unten Gl. 211), die Differentialsumme von ω aber $= a + bx + bdx = \omega + bdx$ ist, so muss zunächst dx und dy mit b multipliziert werden. Es ergiebt sich dann:

$$1 + \frac{b dx l d\beta}{\omega} = \overset{d\beta}{\nu}\, b\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (210)$$

oder (s. Gl. 198, 199):

$$\left(\frac{\omega + bdx}{\omega}\right)^{l d\beta} = \overset{d\beta}{\nu}\, b\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (211)$$

Logarithmalisiert man diesen Ausdruck (s. Gl. 200, 206), so ist:

$$l(\omega + bdx) - l\omega = \overset{d\beta}{\lambda}\,\overset{d\beta}{\nu}\, bdy = bdy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (212)$$

und wenn man dy von der Konstante befreit:

$$\frac{1}{b}\, l(\omega + bdx) - \frac{1}{b}\, l\omega = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (213)$$

Das gesuchte Integral ist also $\frac{1}{b} l\,(a + bx.)$

d) Integration von $\frac{x\,dx}{a+bx^2}$; — $[a+bx^2=\omega]$.

Die Fundamentalgleichung ist:

$$\frac{x\,dx}{\omega}=dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (214)$$

Numeralisiert man, so ist:

$$1+\frac{x\,dx\,l\,d\beta}{\omega}=\overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (215)$$

Da aus ω und $x\,dx$ die Differentialsumme gebildet wird, die Differentialsumme von ω aber $a+bx^2+2bx\,dx=\omega+2bx\,dx$ ist, so muss in vorstehender Gleichung dx und dy mit $2\,b$ multipliziert werden. Es ist dann:

$$1+\frac{2bx\,dx\,l\,d\beta}{\omega}=\overset{d\beta}{\nu}\,2b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (216)$$

oder:

$$\left[\frac{\omega+2bx\,dx}{\omega}\right]^{l\,d\beta}=\overset{d\beta}{\nu}\,2b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (217)$$

Logarithmalisiert man, so ist:

$$l\,(\omega+2bx\,dx)-l\,\omega=\overset{d\beta}{\lambda}\;\overset{d\beta}{\nu}\,2b\,dy=2b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (218)$$

und wenn man dy von den Konstanten befreit:

$$\frac{1}{2b}\,l(\omega+2bx\,dx)-\frac{1}{2b}\,l\,\omega=dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (219)$$

Das gesuchte Integral ist also $\frac{1}{2b}\,l\,(a+bx^2)$.

§ 13.

Irrationale Integrale.

a) Integration von $dx\sqrt{a+bx}$; — $[a+bx=\omega]$.

Die Fundamentalgleichung ist:

$$\sqrt{\omega}\,dx=dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (220)$$

Numeralisiert man, so ist:

$$1+\sqrt{\omega}\,dx l d\beta = \overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (221)$$

Multipliziert man, um das Numeral links auf die Form $1+\frac{d\omega}{\omega}$ zu bringen, Zähler und Nenner des Differentials mit ω, so ist:

$$1+\frac{\omega\sqrt{\omega}\,dx l d\beta}{\omega} = \overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (222)$$

und versetzt man zu dem gleichen Zwecke $\omega\sqrt{\omega}$ in die Potenz, so verwandelt sich die vorstehende Gleichung in folgenden Ausdruck:

$$\left(1+\frac{dx l d\beta}{\omega}\right)^{\omega\sqrt{\omega}} = \overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (223)$$

und in die Numeralgleichung:

$$\frac{d\beta^{\omega\sqrt{\omega}}\left(1+\frac{dx l d\beta}{\omega}\right)^{\omega\sqrt{\omega}}}{d\beta^{\omega\sqrt{\omega}}} = \overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (224)$$

Logarithmalisiert man nun, so erhält man folgende Gleichung:

$$\omega\sqrt{\omega}+\omega\sqrt{\omega}\cdot\frac{dx}{\omega}-\omega\sqrt{\omega} = \overset{d\beta\,d\beta}{\lambda\;\;\nu}\,dy = dy \quad \ldots \quad (225)$$

oder:

$$\omega^{\frac{3}{2}}+\omega^{\frac{1}{2}}dx-\omega^{\frac{3}{2}} = dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (226)$$

Nun ist aber die Differentialsumme von $\omega^{\frac{3}{2}}$, welche zufolge des Subtrahenden in der Gl. 226 allein in Frage kommen kann:

$$(\omega+b\,dx)^{\frac{3}{2}} = \omega^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}\,\omega^{\frac{1}{2}}b\,dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (227)$$

folglich muss in der Gl. 226 dx und dy mit $\frac{3b}{2}$ multipliziert werden, damit man die Differentialsumme bilden kann. Es ist also:

$$\omega^{\frac{3}{2}}+\frac{3b}{2}\,\omega^{\frac{1}{2}}dx-\omega^{\frac{3}{2}} = \frac{3b}{2}\,dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (228)$$

oder, wenn man aus der Gl. 227 die Differentialsumme substituiert:

$$(\omega+b\,dx)^{\frac{3}{2}}-\omega^{\frac{3}{2}} = \frac{3b}{2}\,dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (229)$$

und wenn man dy von den Konstanten befreit:

$$\frac{2}{3b}(\omega + b\,dx)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3b}\,\omega^{\frac{3}{2}} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (230)$$

Das gesuchte Integral ist also $\frac{2}{3b}\omega\sqrt{\omega}$.

b) Integration von $\frac{dx}{\sqrt{a+bx}}$; — $[a + bx = \omega]$.

Die Fundamentalgleichung ist:

$$\frac{dx}{\sqrt{\omega}} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (231)$$

Diese, numeralisiert, ist:

$$1 + \frac{dx\,l\,d\beta}{\sqrt{\omega}} = \overset{d\beta}{\gamma}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (232)$$

Multipliziert man, um das Numeral links auf die Form $1 + \frac{d\omega}{\omega}$ zu bringen, im Zähler und Nenner mit $\sqrt{\omega}$, so ist:

$$1 + \frac{\sqrt{\omega}\,dx\,l\,d\beta}{\omega} = \overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (233)$$

und versetzt man aus dem gleichen Grund $\sqrt{\omega}$ aus dem Zähler des Differentials in die Potenz, so ergiebt sich:

$$\left(1 + \frac{dx\,l\,d\beta}{\omega}\right)^{\sqrt{\omega}} = \overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (234)$$

ferner die Numeralgleichung:

$$\frac{\overset{\sqrt{\omega}}{d\beta}\left(1 + \frac{dx\,l\,d\beta}{\omega}\right)^{\sqrt{\omega}}}{\overset{\sqrt{\omega}}{d\beta}} = \overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (235)$$

Logarithmalisiert man, so ist:

$$\sqrt{\omega} + \sqrt{\omega}\cdot\frac{dx}{\omega} - \sqrt{\omega} = \overset{d\beta\,d\beta}{\lambda\ \ \nu}\,dy = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (236)$$

oder:

$$\sqrt{\omega}\left(1 + \frac{dx}{\omega}\right) - \sqrt{\omega} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (237)$$

Da die Differentialsumme von $\omega = \omega + b\,dx$ ist, so muss in der vorstehendên Gleichung dx und dy mit b multipliziert werden. Da ferner der Ausdruck $1 + \frac{dx}{\omega}$ mit $\sqrt{\omega}$ unter denselben Exponenten $(= \frac{1}{2})$ gebracht werden muss, so ist dx und dy überdies mit $\frac{1}{2}$, also mit $\frac{b}{2}$ zu multiplizieren. Die Gl. 236 resp. 237 nimmt dann folgende Gestalt an:

$$\sqrt{\omega} + \frac{b\,dx}{2\sqrt{\omega}} - \sqrt{\omega} = \frac{b}{2}\,dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (238)$$

Nun ist aber zufolge Gl. 17:

$$\sqrt{p + q\,dx} = \sqrt{p} + \frac{p\,dx}{2\sqrt{p}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (239)$$

folglich, wenn man $p = \omega$, $q = b$ setzt:

$$\sqrt{\omega + b\,dx} = \sqrt{\omega} + \frac{b\,dx}{2\sqrt{\omega}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (240)$$

Dasselbe Resultat kann man übrigens ohne Zuhilfenahme der Gl. 17 unmittelbar aus Gl. 238 gewinnen. Es ist nämlich:

$$\sqrt{\omega}\left(1 + \frac{b\,dx}{2\omega}\right) = \text{(Gl. 23)}\ \sqrt{\omega}\sqrt{1 + \frac{b\,dx}{\omega}} = \sqrt{\omega\left(1 + \frac{b\,dx}{\omega}\right)} =$$

$$\sqrt{\omega + b\,dx} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (241)$$

Substituiert man nun die Differentialsumme aus den Gl. 240 und 241 in die Gl. 238, so ist:

$$\sqrt{\omega + b\,dx} - \sqrt{\omega} = \frac{b}{2}\,dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (242)$$

und wenn man dy von den Konstanten befreit:

$$\frac{2}{b}\sqrt{\omega + b\,dx} - \frac{2}{b}\sqrt{\omega} = dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (243)$$

Das gesuchte Integral ist also $\frac{2}{b}\sqrt{\omega}$.

c) Integration von $\frac{x\,dx}{\sqrt{a + bx^2}}$; — $[a + bx^2 = \omega]$.

Die Fundamentalgleichung ist:

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{\omega}} = dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (244)$$

und wenn man numeralisiert:

$$1+\frac{x\,dx\,l\,d\beta}{\sqrt{\omega}} = {}^{d\beta}\nu\,dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (245)$$

und wenn man, um das Numeral links auf die Form $1+\frac{d\omega}{\omega}$ zu bringen, Zähler und Nenner des Differentials mit $\sqrt{\omega}$ multipliziert:

$$1+\frac{\sqrt{\omega}\,x\,dx\,l\,d\beta}{\omega} = {}^{d\beta}\nu\,dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (246)$$

und wenn man endlich zu dem gleichen Zwecke $\sqrt{\omega}$ aus dem Zähler in die Potenz versetzt:

$$\left(1+\frac{x\,dx\,l\,d\beta}{\omega}\right)^{\sqrt{\omega}} = {}^{d\beta}\nu\,dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (247)$$

woraus sich die Numeralgleichung ergiebt:

$$\frac{{}_{d\beta}{}^{\sqrt{\omega}}\left(1+\frac{x\,dx\,l\,d\beta}{\omega}\right)^{\sqrt{\omega}}}{{}_{d\beta}{}^{\sqrt{\omega}}} = {}^{d\beta}\nu\,dy \quad \ldots\ldots \quad (248)$$

Logarithmalisiert man, so ist:

$$\sqrt{\omega}+\sqrt{\omega}\cdot\frac{x\,dx}{\omega}-\sqrt{\omega} = {}^{d\beta}\lambda\,{}^{d\beta}\nu\,dy = dy \quad \ldots \quad (249)$$

oder:

$$\sqrt{\omega}\left(1+\frac{x\,dx}{\omega}\right)-\sqrt{\omega} = dy \quad \ldots\ldots \quad (250)$$

Soll nun das Differentialbinomium links in $1+\frac{d\omega}{\omega}$ verwandelt werden, so muss man $x\,dx$, weil $d\omega = 2\,b\,x\,dx$ ist, mit $2\,b$ multiplizieren. Da ferner das Differentialbinomium mit $\sqrt{\omega}$ unter denselben Exponenten ($=\frac{1}{2}$) gebracht werden muss, so ist ferner dx mit $\frac{1}{2}$ zu multiplizieren. Es muss also dx und dy mit $\frac{2b}{2}$, d. i. mit b multipliziert werden. Demgemäss ergiebt sich aus den Gleichungen 249 und 250 folgender Ausdruck:

$$\sqrt{\omega}+\frac{b\,x\,dx}{\sqrt{\omega}}-\sqrt{\omega} = b\,dy \quad \ldots\ldots \quad (251)$$

Nun ist aber zufolge Gl. 19:

$$\sqrt{p+2q\,dx} = \sqrt{p}+\frac{q\,dx}{\sqrt{p}} \quad \ldots\ldots \quad (252)$$

folglich, wenn man $p = \omega$, $q = bx$ setzt:

$$\sqrt{\omega + 2bxdx} = \sqrt{\omega} + \frac{bxdx}{\sqrt{\omega}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (253)$$

Dasselbe Resultat kann auch ohne Zuhilfenahme der Gl. 19 unmittelbar aus der Gl. 249 und 250 gewonnen werden, wenn man dx mit $\frac{2b}{2}$, dy mit b multipliziert. Es ist dann (Gl. 250):

$$\sqrt{\omega}\left(1 + \frac{2bxdx}{2\omega}\right) = \sqrt{\omega} \cdot \sqrt{1 + \frac{2bxdx}{\omega}} = \sqrt{\omega\left(1 + \frac{2bxdx}{\omega}\right)} =$$
$$\sqrt{\omega + 2bxdx} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (254)$$

Substituiert man nun die Differentialsumme aus den Gl. 253 und 254 in die Gl. 251, so ist:

$$\sqrt{\omega + 2bxdx} - \sqrt{\omega} = bdy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (255)$$

und wenn man dy von der Konstante befreit:

$$\frac{\sqrt{\omega + 2bxdx}}{b} - \frac{\sqrt{\omega}}{b} = dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (256)$$

Das gesuchte Integral ist also $\frac{\sqrt{\omega}}{b} = \frac{\sqrt{a + bx^2}}{b}$.

d) Integration von $\frac{xdx}{\sqrt{(a + bx^2)^3}}$; — $[a + bx^2 = \omega]$.

Die Fundamentalgleichung ist:

$$\frac{xdx}{\omega\sqrt{\omega}} = dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (257)$$

Numeralisiert man, so ist:

$$1 + \frac{xdxld\beta}{\omega\sqrt{\omega}} = \nu^{d\beta} dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (258)$$

Versetzt man, um zum Ausdruck $1 + \frac{d\omega}{\omega}$ zu gelangen, $\frac{1}{\sqrt{\omega}}$ in die Potenz, so ergiebt sich:

$$\left[1 + \frac{xdxld\beta}{\omega}\right]^{\frac{1}{\sqrt{\omega}}} = \nu^{d\beta} dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (259)$$

und die Numeralgleichung:

$$\frac{d\beta^{\frac{1}{\sqrt{\omega}}}\left(1+\frac{x\,dx\,l\,d\beta}{\omega}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\omega}}}}{d\beta^{\frac{1}{\sqrt{\omega}}}} = \nu^{d\beta}\,dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (260)$$

Logarithmalisiert man, so ist:

$$\frac{1}{\sqrt{\omega}} + \frac{1}{\sqrt{\omega}} \cdot \frac{x\,dx}{\omega} - \frac{1}{\sqrt{\omega}} = \lambda^{d\beta}\,\nu^{d\beta}\,dy = dy \quad . \; . \; . \quad (261)$$

oder:

$$\frac{1}{\sqrt{\omega}} - \left[\frac{1}{\sqrt{\omega}} - \frac{x\,dx}{\omega\sqrt{\omega}}\right] = dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (262)$$

Nun ist aber zufolge Gl. 20:

$$\frac{1}{\sqrt{p+2q\,dx}} = \frac{1}{\sqrt{p}} - \frac{q\,dx}{p\sqrt{p}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (263)$$

folglich, wenn man in dieser Gl. $p = \omega$, $q = bx$ setzt:

$$\frac{1}{\sqrt{\omega+2bx\,dx}} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} - \frac{bx\,dx}{\omega\sqrt{\omega}} \quad . \; . \; . \; . \quad (264)$$

Demgemäss muss in der Gl. 262, damit man aus dem in den Klammern eingeschlossenen Ausdruck die Differentialsumme bilden kann, dx und dy mit b multipliziert werden. Es ist dann:

$$\frac{1}{\sqrt{\omega}} - \left[\frac{1}{\sqrt{\omega}} - \frac{bx\,dx}{\omega\sqrt{\omega}}\right] = b\,dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (265)$$

oder, wenn man die Differentialsumme aus Gl. 264 substituiert:

$$\frac{1}{\sqrt{\omega}} - \frac{1}{\sqrt{\omega+2bx\,dx}} = b\,dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (266)$$

Giebt man der Integralgleichung durch Zeichenwechsel ihre gewöhnliche Form und befreit man dy von der Konstante, so ist:

$$-\left[\frac{1}{b\sqrt{\omega+2bx\,dx}} - \frac{1}{b\sqrt{\omega}}\right] = dy \quad . \; . \; . \; . \quad (267)$$

Das gesuchte Integral ist also $-\frac{1}{b\sqrt{\omega}}$.

c) **Integration von** $\dfrac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)^3}}$; — $[a+bx^2=\omega]$.

Beträchtlich complizierter als die bisherigen Fälle ist die Integration des vorstehenden Differentials, und zwar aus dem Grunde, weil $a+bx^2=\omega$ die Differentialsumme $\omega+2bxdx$ ergiebt, während das gegebene Differential (dx) nur ersten Grades ist. Am einfachsten wäre nun, dx und dy mit x zu multiplizieren; aber die bisher dargestellten Methoden gewähren uns kein Mittel, x auf der rechten Seite in $x+dx$ zu verwandeln und dann dy von dieser Variablen zu befreien. Man muss desshalb zu einer Substitution seine Zuflucht nehmen.

Die Fundamentalgleichung ist:

$$\frac{dx}{\omega\sqrt{\omega}}=dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (268)$$

Man multipliziert nun, da $\omega-bx^2=a$ ist, dx mit $\omega-bx^2$, ferner dy mit a, so dass die vorstehende Gleichung folgende Gestalt annimmt:

$$\frac{(\omega-bx^2)\,dx}{\omega\sqrt{\omega}}=a\,dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (269)$$

Numeralisiert man, so ist:

$$1+\frac{(\omega-bx^2)\,dx\,l\,d\beta}{\omega\sqrt{\omega}}=\nu^{d\beta}\,a\,dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (270)$$

oder:

$$1+\frac{dx\,l\,d\beta}{\sqrt{\omega}}-\frac{bx^2\,dx\,l\,d\beta}{\omega\sqrt{\omega}}=\nu^{d\beta}\,a\,dy \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (271)$$

Es liegt also in diesem Falle ein Differentialpolynom von der Form $1\pm pdx\pm qdx$ vor. Sowie nun in früheren Fällen unser Bestreben dahin gerichtet war, dem Differentialbinom durch Versetzung einzelner Faktoren des Differentials in die Potenz die Form $1+\dfrac{dx}{\omega}$ oder $1+\dfrac{d\omega}{\omega}$ zu verleihen, so müssen wir hier durch eine analoge Operation bewirken, dass das Differentialtrinom die Gestalt $1\pm\dfrac{dx}{x}\pm\dfrac{d\omega}{\omega}$ oder $1\pm\dfrac{d\omega}{\omega}\pm\dfrac{d\omega}{\omega}$ annimmt. Dies wird, wie leicht ersichtlich ist, bei dem Ausdruck $\dfrac{dx\,l\,d\beta}{\sqrt{\omega}}$ dadurch erreicht werden, dass man denselben mit $\sqrt{\omega}$ multipliziert und mit x dividiert. Die Integrabilität des Trinoms in einem geschlossenen Ausdruck hängt davon ab, dass diese Operationen auch in dem Ausdruck $\dfrac{bx^2\,dx\,l\,d\beta}{\omega\sqrt{\omega}}$ die erforderlichen Änderungen bewirken.

Nimmt man nun diese Operationen vor, so ist:

$$1 + \frac{x}{\sqrt{\omega}} \left[\frac{dx l d\beta}{x} - \frac{bx dx l d\beta}{\omega} \right] \overset{d\beta}{=} \nu \, ady \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (272)$$

Versetzt man nun $\frac{x}{\sqrt{\omega}}$ in die Potenz, so ist:

$$\left[1 + \frac{dx l d\beta}{x} - \frac{bx dx l d\beta}{\omega} \right]^{\frac{x}{\sqrt{\omega}}} \overset{d\beta}{=} \nu \, ady \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (273)$$

und wenn man die Numeralgleichung bildet:

$$\frac{d\beta^{\frac{x}{\sqrt{\omega}}} \left(1 + \frac{dx l d\beta}{x} - \frac{bx dx l d\beta}{\omega} \right)^{\frac{x}{\sqrt{\omega}}}}{d\beta^{\frac{x}{\sqrt{\omega}}}} \overset{d\beta}{=} \nu \, ady \quad . \quad . \quad (274)$$

Logarithmalisiert man so ist (s. Gl. 55):

$$\frac{x}{\sqrt{\omega}} + \frac{x}{\sqrt{\omega}} \left[\frac{dx}{x} - \frac{bx dx}{\omega} \right] - \frac{x}{\sqrt{\omega}} \overset{d\beta \, d\beta}{=} \lambda \; \nu \, ady = ady \qquad (275)$$

oder:

$$\frac{x}{\sqrt{\omega}} \left[1 + \frac{dx}{x} - \frac{bx dx}{\omega} \right] - \frac{x}{\sqrt{\omega}} = ady \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (276)$$

Nun ist aber zufolge Gl. 5:

$$1 + \frac{dx}{x} - \frac{bx da}{\omega} = \frac{1 + \frac{dx}{x}}{1 + \frac{bx dx}{\omega}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (277)$$

wobei zu bemerken ist, dass $-\frac{bx dx}{\omega}$ jedenfalls mit verändertem (positivem) Verbindungszeichen in den Nenner versetzt werden muss, weil die Differentialsumme von $\omega = a + bx^2$ nur positive Differentiale, nämlich $+ 2 bx dx$ liefert.

Substituiert man nun den Bruch aus der Gl. 277 in die Gl. 276, so ist:

$$\frac{x}{\sqrt{\omega}} \cdot \frac{1 + \frac{dx}{x}}{1 + \frac{bx dx}{\omega}} - \frac{x}{\sqrt{\omega}} = ady \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (278)$$

Die Multiplikation von x mit $1 + \frac{dx}{x}$ ergibt, wie leicht ersichtlich ist, die Differentialsumme $x + dx$.

Damit aber auch aus $\sqrt{\omega}\left(1+\frac{bxdx}{\omega}\right)$ die entsprechende Differentialsumme gebildet werden kann, muss das Differential im Zähler und Nenner mit 2 multipliziert werden. Es ist dann:

$$\sqrt{\omega}\left(1+\frac{bxdx}{\omega}\right)=\sqrt{\omega}\left(1+\frac{2bxdx}{2\omega}\right)=\sqrt{\omega}\,.\sqrt{1+\frac{2bxdx}{\omega}}=$$

$$\sqrt{\omega\left(1+\frac{2bxdx}{\omega}\right)}=\sqrt{\omega+2bxdx} \quad . \quad (279)$$

Nimmt man nun in der Gl. 278 die Multiplikation und die anderen in Gl. 279 angedeuteten Operationen wirklich vor, so ist:

$$\frac{x+dx}{\sqrt{\omega+2bxdx}}-\frac{x}{\sqrt{\omega}}=ady \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (280)$$

und wenn man dy von der Konstante befreit:

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{x+dx}{\sqrt{\omega+2bxdx}}-\frac{1}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{\omega}}=dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (281)$$

Das gesuchte Integral ist also $\frac{x}{a\sqrt{\omega}}$.

f) Integration von $\frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}$; — $\left[a^2+b^2x^2=\omega\right]$.

Die Fundamentalgleichung ist:

$$\frac{dx}{\sqrt{\omega}}=dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (282)$$

Da $d\sqrt{\omega}=\frac{b^2xdx}{\sqrt{\omega}}$ ist, so müsste dx und dy mit Rücksicht auf die Operation in Gl. 286 mit bx multipliziert werden, was aber in Ansehung von dy nach dem früher Gesagten (S. 47) nicht zulässig ist. Es ist desshalb hier die Addition des Hilfsdifferentials dx erforderlich. Es ist dann:

$$\left(\frac{bxdx}{\sqrt{\omega}}+dx\right)z=\frac{dx}{\sqrt{\omega}}=dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (283)$$

in welcher Gleichung z jene Grösse bedeutet, mit der $\frac{bxdx}{\sqrt{\omega}}+dx$ multipliziert werden muss, damit der Wert des Differentials $\frac{dx}{\sqrt{\omega}}=dy$ ungeändert bleibt.

Es ist nun zufolge Gl. 283, wenn man aus derselben den Wert von z ermittelt:

$$z = \frac{1}{bx + \sqrt{\omega}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (284)$$

und wenn man diesen Ausdruck in die Gl. 282 und 283 substituiert:

$$\frac{\frac{bx\,dx}{\sqrt{\omega}} + dx}{bx + \sqrt{\omega}} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (285)$$

Diese Gleichung ist zunächst, da $d\omega = \frac{b^2 x\,dx}{\sqrt{\omega}}$ ist, mit b zu multiplizieren, folglich:

$$\frac{\frac{b^2 x\,dx}{\sqrt{\omega}} + b\,dx}{bx + \sqrt{\omega}} = b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (286)$$

Numeralisiert man nun, so ist (s. Gl. 70 und 24):

$$\left[1 + \frac{\frac{b^2 x\,dx}{\sqrt{\omega}} + b\,dx}{bx + \sqrt{\omega}}\right]^{l\,d\beta} = \overset{d\beta}{\nu}\, b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (287)$$

oder:

$$\left[\frac{bx + b\,dx + \sqrt{\omega} + \frac{b^2 x\,dx}{\sqrt{\omega}}}{bx + \sqrt{\omega}}\right]^{l\,d\beta} = \overset{d\beta}{\nu}\, b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (288)$$

oder, da $\sqrt{\omega} + \frac{b^2 x\,dx}{\sqrt{\omega}} = \sqrt{\omega + 2b^2 x\,dx}$ ist (s. Gl. 279):

$$\left[\frac{b\,(x + dx) + \sqrt{\omega + 2b^2 x\,dx}}{bx + \sqrt{\omega}}\right]^{l\,d\beta} = \overset{d\beta}{\nu}\, b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad (289)$$

Logarithmalisiert man, und befreit man gleichzeitig dy von der Konstante, so ist:

$$\frac{1}{b}\, l\left[b\,(x + dx) + \sqrt{\omega + 2b^2 x\,dx}\right] - \frac{1}{b}\, l\left[bx + \sqrt{\omega}\,\right] = dy \quad . \quad (290)$$

Das gesuchte Integral ist also $\frac{1}{b}\, l\left[bx + \sqrt{\omega}\right]$.

§ 14.

Differentialsummen mit negativen Differentialen.

Die bisher dargestellten Methoden sind lediglich auf Differentialsummen berechnet, welche positive Differentiale ergeben. So ist z. B. die Differentialsumme von $a + bx = a + bx + bdx$. Enthält dagegen das zu integrierende Differential ein Binom von der Form $a - bx$ $\left(\text{z. B. } \frac{dx}{a - bx}\right)$, so ist die Differentialsumme $a - bx - bdx$ und es können deshalb auf solche Differentiale die bisher dargestellten Numeralisierungs- und Logarithmalisierungsformeln nicht angewendet werden. Hier sind deshalb besondere Methoden notwendig, die noch kurz darzustellen sind.

a) Integration von $\frac{dx}{a - bx}$; — $[a - bx = \omega]$.

Denken wir uns, um diese Methoden anschaulicher zu machen, dass das obige Differential $\frac{dx}{a - bx}$ zu integrieren ist. Hier kann die Integration auf eine dreifache Weise stattfinden.

I. Vorerst kann man zu diesem Zweck die Numeralisierungs- und Logarithmalisierungsformeln mit der Basis $\frac{1}{d\beta}$ verwenden. Wir erinnern uns (s. Gl. 63, 64), dass

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\nu}(adx) = 1 - adx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (291)$$

ist.

Wenn wir nun die Fundamentalformel für obige Integration bilden, so ist:

$$\frac{dx}{\omega} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (292)$$

und wenn man mit der Basis $\frac{1}{d\beta}$ numeralisiert:

$$1 - \frac{dxld\beta}{\omega} = \overset{\frac{1}{d\beta}}{\nu} dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (293)$$

Da $d\omega = -bdx$ ist, so muss dx und dy in vorstehender Gleichung mit b multipliziert werden, folglich ist:

$$1 - \frac{b\,d\,x\,l\,d\beta}{\omega} = \overset{\frac{1}{d\beta}}{\nu}\, b\,d\,y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (294)$$

oder (s. Gl. 210, 211):

$$\left(\frac{\omega - b\,d\,x}{\omega}\right)^{l\,d\beta} = \overset{\frac{1}{d\beta}}{\nu}\, b\,d\,y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (295)$$

Logarithmalisiert man nun die vorstehende Gleichung, um den ursprünglichen Wert von $d\,y$ wieder herzustellen, mit der Basis $\frac{1}{d\beta}$, so ist (Gl. 51):

$$l\,d\beta \cdot - \frac{l\,(\omega - b\,d\,x) - l\,\omega}{l\,d\beta} = \overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}\; \overset{\frac{1}{d\beta}}{\nu}\, b\,d\,y = b\,d\,y \quad . \quad . \qquad (296)$$

oder:

$$-\left[l\,(\omega - b\,d\,x) - l\,\omega\right] = b\,d\,y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (297)$$

Schafft man das Minuszeichen am Anfang der vorstehenden Gleichung weg, so ist:

$$l\,\frac{1}{\omega - b\,d\,x} - l\,\frac{1}{\omega} = b\,d\,y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (298)$$

und wenn man $d\,y$ von der Konstante befreit:

$$\frac{1}{b}\,l\,\frac{1}{\omega - b\,d\,x} - \frac{1}{b}\,l\,\frac{1}{\omega} = d\,y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (299)$$

Das gesuchte Integral ist also $\frac{1}{b}\,l\,\frac{1}{\omega} = \frac{1}{b}\,l\,\frac{1}{a - b\,x}$.

II. Dasselbe Resultat kann jedoch auch durch eine Numeralisierung und Logarithmalisierung mit der Basis $d\beta$ erreicht werden.

Man numeralisiert die Gl. 292 mit der Basis $d\beta$, also:

$$1 + \frac{d\,x\,l\,d\beta}{\omega} = d\,y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (300)$$

multiplizirt $d\,x$ und $d\,y$ mit b:

$$1 + \frac{b\,d\,x\,l\,d\beta}{\omega} = \overset{d\beta}{\nu}\, b\,d\,y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (301)$$

versetzt nun das linksseitige Numeral, um das Differential $\frac{b\,d\,x\,l\,d\beta}{\omega}$ negativ zu machen, zufolge Gl. 10 in den Nenner:

$$\frac{1}{1-\frac{b\,dx\,l\,d\beta}{\omega}} = \overset{d\beta}{\nu}\, b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (302)$$

oder:

$$\left[\frac{1}{\frac{\omega - b\,dx}{\omega}}\right]^{l\,d\beta} = \overset{d\beta}{\nu}\, b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (303)$$

Logarithmalisiert man nun mit der Basis $d\beta$, so ist:

$$l\,d\beta \frac{-l\,\frac{\omega - b\,dx}{\omega}}{l\,d\beta} = \overset{d\beta}{\lambda}\ \overset{d\beta}{\nu}\, b\,dy = b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (304)$$

oder:

$$-\left[l\,(\omega - b\,dx) - l\,\omega\right] = b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (305)$$

Diese Gleichung stimmt mit der Gl. 297 überein und auch die folgenden Operationen sind völlig identisch.

III. Eine dritte, vielleicht die einfachste Methode besteht darin, dass man die Fundamentalgleichung, ebenso wie in der Gl. 300, mit $d\beta$ numeralisiert und dann dx und dy mit der Konstante -1 multipliziert. Der weitere Verlauf der Operationen gestaltet sich genau so wie in den Gl. 210—212, nur dass das Verbindungszeichen des linkseitigen Numerals und dy in Folge der Multiplikation mit -1 negativ sind. Am Ende der Rechnung wird dy durch Zeichenwechsel von dem Minuszeichen befreit (vgl. oben S. 35).

b) Integration von $\dfrac{dx}{a^2 - b^2x^2}$.

Aus den Gl. 208—213 und 292—299 ergiebt sich dass $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\, l\,(a+bx)$, dagegen $\int \frac{dx}{a-bx} = \frac{1}{b}\, l\, \frac{1}{a-bx}$ ist. Findet also bei einem zu integrierenden Ausdruck eine Kombination von Differentialsummen mit positiven und negativen Differentialen statt (z. B. bei $\int \frac{dx}{a^2 - b^2x^2} = \int \frac{dx}{(a+bx)\,(a-bx)}$), so wird auch eine analoge Kombination der Integrale eintreten.

Setzen wir nun der Kürze wegen $a + bx = \pi$, $a - bx = \varrho$, folglich $\pi + \varrho = 2a$, so wird die Fundamentalgleichung lauten:

$$\frac{dx}{\pi\varrho} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (306)$$

Da jedoch das Differential des Zählers im Ausdruck links ersten Grades ist, während der Nenner $a^2 - b^2x^2$ die Variable x in der zweiten Potenz enthält, so müssen Zähler und Nenner auf den gleichen Grad gebracht werden. Dies kann in unserem Falle sehr leicht dadurch geschehen, dass man dx mit $\pi + \varrho$, dy mit $2a$ multipliziert. Durch diese einfache Substitution wird sowohl das Differential des Zählers als auch die Differentialsumme des Nenners auf die Form pdx gebracht, ohne dass es (wie in Gl. 271, 272) noch einer Division mit x bedarf. Es ist dann:

$$\frac{(\pi + \varrho)\,dx}{\pi\varrho} = 2a\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (307)$$

oder:

$$\frac{dx}{\pi} + \frac{dx}{\varrho} = 2a\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (308)$$

Da sowohl π als auch ϱ das Differential bdx und zwar das das erstere $+bdx$, das zweite $-bdx$ liefern, so muss obige Gleichung mit b multipliziert werden, also:

$$\frac{b\,dx}{\pi} + \frac{b\,dx}{\varrho} = 2ab\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (309)$$

Numeralisiert man diese Gleichung, so ist (s. Gl. 70):

$$1 + \frac{b\,dx\,l\,d\beta}{\pi} + \frac{b\,dx\,l\,d\beta}{\varrho} = \sqrt[d\beta]{2ab\,dy} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (310)$$

Nun ist aber:

$$1 + \frac{b\,dx\,l\,d\beta}{\pi} + \frac{b\,dx\,l\,d\beta}{\varrho} = \left[1 + \frac{b\,dx}{\pi} + \frac{b\,dx}{\varrho}\right]^{l\,d\beta} = \text{(Gl. 6)}$$

$$\left[\frac{1 + \frac{b\,dx}{\pi}}{1 - \frac{b\,dx}{\varrho}}\right]^{l\,d\beta} = \left[\frac{\pi + b\,dx}{\pi} : \frac{\varrho - b\,dx}{\varrho}\right]^{l\,d\beta} = \left[\frac{\pi + b\,dx}{\varrho - b\,dx} : \frac{\pi}{\varrho}\right]^{l\,d\beta} \quad (311)$$

Der dritte Ausdruck in vorstehender Gleichung ist aus dem zweiten dadurch entstanden, dass man zufolge Gl. 6 das Differential $\frac{b\,dx}{\varrho}$ mit geändertem Verbindungszeichen, ähnlich wie in der Gl. 302, in den Nenner versetzt, was deshalb notwendig ist, weil ϱ ein negatives Differential liefert. Der fünfte Ausdruck entsteht dadurch aus dem vierten, dass man sowohl den Dividend, als auch den Divisor mit π multipliziert, mit $\varrho - b\,dx$ dividiert.

Substituiert man nun den letzten Ausdruck der Gl. 311 in die Gl. 310, so ist:

$$\left[\frac{\pi + b\,dx}{\varrho - b\,dx} : \frac{\pi}{\varrho}\right]^{l\,d\beta} = \overset{d\beta}{v}\,2\,a\,b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (312)$$

Da hier offenbar ein rein logarithmisches Integral (s. § 12) vorliegt, so bedarf es keiner weiteren Umformung, sondern man kann sofort durch Logarithmalisierung den ursprünglichen Wert von dy herstellen. Es ist dann, wenn man gleichzeitig mit $l\,d\beta$ reduziert:

$$l\,\frac{\pi + b\,dx}{\varrho - b\,dx} - l\,\frac{\pi}{\varrho} = 2\,a\,b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (313)$$

und wenn man dy von den Konstanten befreit:

$$\frac{1}{2\,a\,b}\,l\,\frac{\pi + b\,dx}{\varrho - b\,dx} - \frac{1}{2\,a\,b}\,l\,\frac{\pi}{\varrho} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (314)$$

Das gesuchte Integral ist also $\frac{1}{2ab}\,l\,\frac{a + bx}{a - bx}$.

§ 15.

Grundzüge der neuen Integrationsmethode.

Den Schluss dieses Aufsatzes mag eine kurze Zusammenfassung der bisher gewonnenen Resultate bilden. Es konnte natürlich meine Absicht nicht sein, in dem engen Rahmen dieser Blätter ein vollständiges System der neuen Integralrechnung zu bieten, vielmehr verfolgte ich lediglich den Zweck, die praktische Anwendung der von mir erfundenen Rechnungsmethoden auf die einfacheren Integrationen klarzulegen. Ich behalte mir vor, die übrigen Teile der Integralrechnung in späteren Schriften auf Grund der neuen Methoden darzustellen.

Aber schon jetzt kann ich im Hinblicke auf die von mir gewonnenen Resultate die Behauptung wagen, dass die heutige Integralrechnung durch die neuen Rechnungsmethoden einer völligen Umgestaltung entgegengeht. Die endlosen Reduktions- und Rekursionsformeln, welche bisher die Integralrechnung zu einem so abschreckenden Gedächtniswerk gemacht haben, werden verschwinden. An ihre Stelle werden einfache Integrationsmethoden treten, die nicht erheblich komplizierter sind als die Operationen der Differentialrechnung und die zugleich eine genetische, streng wissenschaftliche Ableitung der Integrale aus ihren Differentialen ermöglichen werden. Fast alle Methoden, welche nötig sind, um selbst die verwickeltesten Integrale zu ermitteln, sind schon in der vorliegenden Abhandlung angedeutet. Ich hoffe dadurch das Resultat herbeizuführen, dass Jedermann, der sich mit den neuen Rechnungsmethoden vertraut gemacht hat, die Integrale ohne Hilfe von Integraltafeln und weitläufigen Formeln auf eine einfache Weise selbst berechnen kann.

In folgenden Punkten möchte ich die charakteristischen Eigenthümlichkeiten der neuen Integrationsmethode zusammenfassen.

1. Nach der neuen Integrationsmethode wird das Integral genau durch dieselben, wenngleich in entgegengesetzter Richtung vorgenommenen Operationen aus dem Differential gewonnen, wie umgekehrt das Differential aus dem Integral (vgl. bes. § 7 und 8). Der inverse Charakter der Differentiation und der Integration tritt dadurch auch in der Rechnung klar zu Tage. Bisher trug die Auffindung der Differentiale und der Integrale einen wesentlich verschiedenen Charakter, indem die ersteren aus den Integralen durch wissenschaftliche Methoden abgeleitet, die letzteren auf rein empirischem Wege erraten werden.

2. Das Ziel der neuen Integrationsmethode ist die Ableitung der Integralgleichung (s. § 6) aus dem gegebenen Differential. Aus der Integralgleichung kann dann das Integral ohne Schwierigkeit gefunden werden.

3. Zur Auffindung des Integrals genügt in der Regel auch schon die Berechnung der blossen Differentialsumme, indem man in dieser $dx = o$ setzt (s. § 6 und Gl. 112—116). Die blosse Berechnung der Differentialsumme gewährt namentlich bei verwickelten Integralen den Vorteil grösserer Uebersichtlichkeit, ihre Ergebnisse sind aber niemals vollständig sicher, weil bei manchen Funktionen die Differentialsumme und der Subtrahend nicht mit Sicherheit geschieden werden können (siehe z. B. zu Gl. 180).

4. Da die Konstanten weder bei Ableitung der Integralgleichung, noch auch bei jener der Differentialsumme eine Aenderung erleiden, so kann man sie, dafern sie nicht im weiteren Fortgang der Operationen zu eliminieren sind, gleich beim Beginn der Rechnung auf die rechte Seite der Gleichung (dy) schaffen (s. z. B. Gl. 172).

5. Die nämliche Operation ist dagegen in Ansehung der variablen Bestandtheile des zu integrierenden Differentials (in Betreff der x) desshalb nicht zulässig, weil dy durch die Numeralisierungs- und Logarithmalisierungs-Operationen nicht verändert wird, folglich die Umwandlung der auf die rechte Seite übertragenen x in die Form $x + dx$ nicht möglich ist. Die Auffindung von Rechnungsoperationen, welche die Erreichung dieses Zweckes ermöglichen, würde folglich eine wesentliche Verbesserung der neuen Integrationsmethoden bedeuten.

6. Bevor zur Numeralisierungs- und Logarithmalisierungs-Operation geschritten wird, ist das zu integrierende Differential — in der Regel durch Multiplikation mit Konstanten — so umzugestalten, dass später die Bildung der Differentialsumme keinen Schwierigkeiten begegnet. Die Multiplikation und Division mit den Konstanten kann auch später erfolgen, so lange das Differentialbinomium sich noch nicht in die Differentialsumme verwandelt hat und sie bezieht sich auch in diesem Fall lediglich auf die beiden Differentiale der Gleichung (auf dx und dy), mögen inzwischen durch den Gang der Operationen auch andere variable und konstante Bestandtheile hinzugetreten sein (s. § 6). Ich habe wegen der grösseren Anschaulichkeit regelmässig diese letztere Methode gewählt.

7. Nunmehr wird die Fundamentalgleichung numeralisiert. Rücksichtlich des zu integrierenden Differentials wird die Numeralisierung wirklich vollzogen, rücksichtlich des rechts stehenden Ausdrucks dy nur symbolisch angedeutet.

8. Bei den logarithmischen Integralen (s. § 12 und auch § 14) wird durch die ad 7) erwähnte Numeralisierung bewirkt, dass das Differential sofort in der Form $1 + \frac{dx l d\beta}{x}$ oder allgemeiner in der Form $1 + \frac{d\omega l d\beta}{\omega}$ erscheint, wo ω jede beliebige Funktion von x bedeutet. Tritt dieser Fall ein, so braucht man jenem Ausdruck nur die Form $\left(\frac{x + dx}{x}\right)^{l d\beta}$ oder $\left(\frac{\omega + d\omega}{\omega}\right)^{l d\beta}$ zu geben und durch Logarithmalisierung den ursprünglichen Wert von dy herzustellen, um zur Integralgleichung zu gelangen.

9. In allen übrigen Fällen muss das Numeral des zu integrierenden Differentials vor der Logarithmalisierung noch einer Umgestaltung unterzogen werden, welche den Zweck hat, dasselbe auf die Form $1 + \frac{dx l d\beta}{x}$ oder $1 + \frac{d\omega l d\beta}{\omega}$ zu bringen. Diese Umgestaltung erfolgt in der Weise, dass alle übrigen variablen oder konstanten Bestandtheile des Numerals, welche nicht ohnedies durch den Lauf der weiteren Operationen eliminiert werden, in die Potenz zu versetzen sind.

10. Sobald die ad 9) bezeichnete Operation vollzogen ist, kann zur Bildung der Numeralgleichung geschritten werden. Diese erfolgt in der Weise, dass man die Basis $d\beta$ zu derselben Potenz erhebt wie das Numeral (s. Nr. 9) und dieses letztere mit dem so gefundenen Ausdruck gleichzeitig multipliziert und dividiert (s. sämmtliche Integrationen mit Ausnahme der logarithmischen Integrale).

11. Die Numeralgleichung ist der Mittelpunkt der neuen Differentiations- und Integrationsmethode, ihre Auffindung das eigentliche Ziel sowohl bei der Differentiation als auch bei der Integration. Die Logarithmalisierung der Numeralgleichung ohne die in Nr. 9 erwähnte Multiplikation und Division ergibt das Differential, mit derselben dagegen das Integral (s. bes. zu Gl. 92, 105).

12. Sobald die Numeralgleichung gefunden ist, wird dieselbe logarithmalisiert und auf diese Weise der durch die frühere Numeralisierung (Nr. 7) veränderte Wert von dy wieder hergestellt. Da auf der rechten Seite der Gleichung die Numeralisierungs- und Logarithmalisierungs-Operationen nur angedeutet werden (z. B. $\overset{d\beta}{\lambda}\ \overset{d\beta}{\nu}\ dy$), so können die beiden sich aufhebenden Zeichen weggelassen werden. Das auf der linken Seite der Gleichung stehende, der Logarithmalisierung wirklich unterzogene Numeral ist durch geeignete Umgestaltungsoperationen auf die Form der Integralgleichung (Differentialsumme und Subtrahend) zu bringen.

13. Enthält dy auf der rechten Seite der Gleichung Konstanten (Nr. 4, 6 und 12), so ist dy nach Bildung der Differentialsumme und des Subtrahenden (Nr. 12) durch geeignete Operationen von denselben zu befreien. Der sodann erscheinende Ausdruck ist die Integralgleichung, aus der sich das Integral unmittelbar ergibt.

14) Ist das zu integrierende Differential positiv, während die in demselben enthaltenen endlichen Variablen auf ein negatives Differential führen, so ist die Numeralisierung und die Logarithmalisierung mit der Basis $\frac{1}{d\beta}$ vorzunehmen. Auch kann zu diesem Zwecke der Satz benützt werden, dass jedes Differentialbinomium gleich ist der Einheit, dividiert durch dasselbe Binom, jedoch mit verändertem Verbindungszeichen. Endlich ist drittens in diesem Falle auch die Multiplikation von dx und dy mit der Konstante — 1 zulässig. (S. § 14.)