ENTWURF

EINER

NEUEN INTEGRALRECHNUNG

AUF GRUND DER

POTENZIAL- LOGARITHMAL- UND NUMERALRECHNUNG

VON

Dr. JULIUS BERGBOHM

ZWEITES HEFT

DIE IRRATIONALEN, EXPONENTIELLEN, LOGARITHMISCHEN UND CYCLOMETRISCHEN INTEGRALE

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

1893

ENTWURF

EINER

NEUEN INTEGRALRECHNUNG

AUF GRUND DER

POTENZIAL- LOGARITHMAL- UND NUMERALRECHNUNG

VON

DR. JULIUS BERGBOHM

ZWEITES HEFT

DIE IRRATIONALEN, EXPONENTIELLEN, LOGARITHMISCHEN UND CYCLOMETRISCHEN INTEGRALE

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

1893

Vorrede.

Ich übergebe hiermit dem mathematischen Publikum das zweite Heft meines Entwurfs einer neuen Integralrechnung, welches die irrationalen, exponentiellen, logarithmischen und cyklometrischen Integrale behandelt und meine Versuche einer Erweiterung und Verbesserung der höheren Mathematik vorläufig zum Abschluss bringt. Der Kenner wird in dieser Abhandlung überall Integrale finden, welche entweder neu, oder allgemeiner gefasst, oder in eine bessere Form gebracht sind. Da überdies auch die von mir angewandten Integrationsmethoden sich von den bisher üblichen völlig unterscheiden, so kann es kaum fehlen, dass mein Entwurf einer neuen Integralrechnung ein Gefühl des Befremdens bei der grossen Zahl jener Mathematiker hervorrufen muss, welche die Elemente unserer heutigen Integralrechnung als ein sicheres, unantastbares Besitztum zu betrachten gewohnt sind. Dennoch möchte ich an meine Fachgenossen die Bitte richten, diesen ersten Eindruck des Misstrauens zu überwinden und den nachfolgenden Untersuchungen ihre ernste Beachtung zu schenken. Denn der Umstand, dass ich, noch in der Ausarbeitung meines Integrationssystems begriffen, gar manche bedeutsame Resultate gewonnen habe, lässt mit Sicherheit voraussehen, welchen Vorteil bessere Rechner als ich aus den neuentdeckten Rechnungs- und Integrationsmethoden ziehen werden.

Wien, im Oktober 1893.

Der Verfasser.

Inhalt des zweiten Heftes.

Fünfte Abteilung.

Die exponentiellen, logarithmischen und cyklometrischen Integrale.

Vierte Abteilung.

Die irrationalen Integrale.

§. 31.

Integration von $\omega^{\frac{p}{r}}\omega' dx$ **und** $\frac{\omega' dx}{\omega^{\frac{p}{r}}}$.

Wenn ω eine beliebige Funktion von x (vgl. z. B. unten §. 51, Gl. 4, 9, 22), insbesondere einen Ausdruck von der Form $\pm a \pm bx^n \pm cx^{2n} \pm \cdots$, ferner ω' den ersten Differentialquotienten von ω, p und r ganze*) positive Zahlen bedeuten, so können alle Differentiale von der in der Überschrift bezeichneten Gattung in geschlossenen Ausdrücken integriert werden.

I. Ist zunächst die Gleichung:

$$\omega^{\frac{p}{r}}\omega' dx = dy \tag{1}$$

zu integrieren, so wendet man zu diesem Zweck die in den „Neuen Integrationsmethoden“ Gl. 220—267 dargelegten Operationen an, indem man die Gl. 1 zuvörderst numeralisiert, also:

$$1 + \omega^{\frac{p}{r}}\omega' dx l d\beta = 1 + \frac{\omega^{\frac{p}{r}+1}\omega' dx l d\beta}{\omega} = \overset{d\beta}{\nu}\, dy. \tag{2}$$

Bildet man nunmehr aus der vorstehenden Relation die Numeralgleichung („Neue Int.-Meth.“ S. 20), so ist:

$$\frac{d\beta^{\omega^{\frac{p}{r}+1}}\left(1 + \frac{\omega' dx l d\beta}{\omega}\right)^{\omega^{\frac{p}{r}+1}}}{d\beta^{\omega^{\frac{p}{r}+1}}} = \overset{d\beta}{\nu}\, dy. \tag{3}$$

Logarithmalisiert man die Numeralgleichung, um den ursprünglichen Wert von dy herzustellen, so ergiebt sich folgende Relation:

$$\omega^{\frac{p}{r}+1} + \omega^{\frac{p}{r}}\omega' dx - \omega^{\frac{p}{r}+1} = dy. \tag{4}$$

Multipliziert man nun, um aus den beiden ersten Differentialen links die

*) Ich nehme hier und anderwärts (z. B. S. 97 u. s. f.) an, dass p und r ganze Zahlen sind, weil diese Ausdrücke, wenn sie Brüche sind, leicht auf solche zurückgeführt werden können.

Differentialsumme bilden zu können, dx und dy mit $\frac{p+r}{r}$ (vgl. „Neue Integr.-Meth.“ S. 26, 27), so ist:

$$\omega^{\frac{p}{r}+1} + \frac{(p+r)\omega^{\frac{p}{r}}\omega' dx}{r} - \omega^{\frac{p}{r}+1} = \frac{(p+r)dy}{r} \tag{5}$$

oder

$$(\omega + \omega' dx)^{\frac{p}{r}+1} - \omega^{\frac{p}{r}+1} = \frac{(p+r)dy}{r}. \tag{6}$$

Befreit man endlich dy von den Konstanten, so ergiebt sich die Integralgleichung:

$$\frac{r}{p+r}(\omega + \omega' dx)^{\frac{p}{r}+1} - \frac{r}{p+r}\omega^{\frac{p}{r}+1} = dy = \omega^{\frac{p}{r}}\omega' dx. \tag{7}$$

Begnügt man sich mit der Differentialsumme und wendet man die oben im §. 5 (S. 5) angegebene Bezeichnungsweise an, so ist

$$Ds\,\omega^{\frac{p}{r}}\omega' dx = \frac{r}{p+r}\cdot\overline{\omega}^{\frac{p}{r}+1}. \tag{8}$$

II. Ist ferner die Gleichung:

$$\frac{\omega' dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} = dy \tag{9}$$

zu integrieren, so ist die Numeralgleichung, wenn man zur Bildung derselben den Ausdruck $\frac{1}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}$ in die Potenz versetzt (vgl. z. B. Neue Int.-Meth. Gl. 258—260):

$$\frac{d\beta^{\frac{1}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}}\left(1 + \frac{\omega' dx\, l\, d\beta}{\omega}\right)^{\frac{1}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}}}{d\beta^{\frac{1}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}}} = \overset{d\beta}{\nu}\, dy. \tag{10}$$

Logarithmalisiert man den vorstehenden Ausdruck, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} + \frac{\omega' dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} - \frac{1}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} = dy \tag{11}$$

und wenn man, um aus den beiden ersten Ausdrücken links die Differentialsumme bilden zu können (Gl. 12 u. 13), dx und dy mit $-\frac{p-r}{r}$ multipliziert:

$$\frac{1}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p-r)\omega' dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}}} - \frac{1}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} = -\frac{(p-r)dy}{r}. \tag{12}$$

Fasst man nunmehr die beiden ersten Ausdrücke links mit Rücksicht auf die in den „Neuen Integrationsmethoden“ Gl. 20, 261—267 gegebenen Entwicklungen in eine Differentialsumme zusammen, so ist:

$$\frac{1}{(\omega+\omega' dx)^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{1}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} = -\frac{(p-r)dy}{r} \tag{13}$$

oder, wenn man dy von den Konstanten befreit:

$$-\frac{r}{p-r}\cdot\frac{1}{(\omega+\omega' dx)^{\frac{p}{r}-1}} - \left[-\frac{r}{p-r}\cdot\frac{1}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}\right] = dy = \frac{\omega' dx}{\omega^{\frac{p}{r}}}, \tag{14}$$

oder

$$Ds\,\frac{\omega' dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} = -\frac{r}{p-r}\cdot\frac{1}{\bar{\omega}^{\frac{p}{r}-1}}. \tag{15}$$

Die beiden Gl. 14 und 15 können aus den Relationen 7 und 8 auch mittelbar dadurch gefunden werden, dass man in diesen p durch $-p$ ersetzt.

III. Die in den Gl. 8 und 15 enthaltenen Integrationsformeln sind von sehr umfassender Anwendung. Alle Differentiale, gleichviel ob ihre endlichen Bestandteile aus rationalen, irrationalen, goniometrischen oder Exponentialgrössen, aus Logarithmen oder Kreisbögen bestehen, können in geschlossenen Ausdrücken integriert werden, wenn sie entweder von vornherein die Form von $\omega^{\frac{p}{r}}\omega' dx$ und $\frac{\omega' dx}{\omega^{\frac{p}{r}}}$ aufweisen oder doch (z. B. durch Einführung von Konstanten) auf diese Form gebracht werden können. Nur wenn $p = r$ also $p - r = 0$ ist, wird die Formel 15 augenscheinlich unbrauchbar. In der That liegt dann ein logarithmisches Differential („Neue Int.-Meth.“ §. 12) vor und es gilt die Relation:

$$Ds\,\frac{\omega' dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} = Ds\,\frac{\omega' dx}{\omega} = \log\bar{\omega}. \tag{16}$$

Aus dieser Darstellung geht insbesondere auch hervor, dass alle irrationalen Differentiale von der Form $x^{n-1}\sqrt{\pm a \pm bx^n}\,dx$ und $\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{\pm a \pm bx^n}}$ in geschlossenen Ausdrücken integrierbar sind. So ist z. B. (vgl. auch Neue Integr.-Meth. S. 40—46):

$$Ds\sqrt{a+bx}\,dx = Ds\sqrt{\omega}\,dx = \frac{1}{b}\,Ds\,\omega^{\frac{1}{2}}\omega' dx = (\text{Gl. } 8)\ \frac{2\bar{\omega}^{\frac{3}{2}}}{3b}, \tag{17}$$

$$Ds\sqrt{a-bx}\,dx = Ds\sqrt{\omega}\,dx = -\frac{1}{b}\,Ds\,\omega^{\frac{1}{2}}\omega' dx = -\frac{2\bar{\omega}^{\frac{3}{2}}}{3b}, \tag{18}$$

$$Ds\,(a+bx)^{\frac{5}{2}}dx = Ds\,\omega^{\frac{5}{2}}dx = \frac{1}{b}\,Ds\,\omega^{\frac{5}{2}}\omega' dx = \frac{2\bar{\omega}^{\frac{7}{2}}}{7b}, \tag{19}$$

$$Ds\,\frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = Ds\,\frac{dx}{\sqrt{\varpi}} = \frac{1}{b}\,Ds\,\frac{\varpi'\,dx}{\varpi^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{\varpi}}{b}, \tag{20}$$

$$Ds\,\frac{dx}{(a+bx)^{\frac{2}{5}}} = Ds\,\frac{dx}{\varpi^{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{b}\,Ds\,\frac{\varpi'\,dx}{\varpi^{\frac{2}{5}}} = \frac{5\,\varpi^{\frac{3}{5}}}{3b}, \tag{21}$$

$$Ds\,x\sqrt{a+bx^2}\,dx = Ds\,x\sqrt{\varpi}\,dx = \frac{1}{2b}\,Ds\,\varpi^{\frac{1}{2}}\varpi'\,dx = \frac{\varpi^{\frac{3}{2}}}{3b}, \tag{22}$$

$$Ds\,\frac{x\,dx}{\sqrt{-a+bx^2}} = Ds\,\frac{x\,dx}{\sqrt{\varpi}} = \frac{1}{2b}\,Ds\,\frac{\varpi'\,dx}{\varpi^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\varpi}}{b}, \tag{23}$$

$$Ds\,x^2(a-bx^3)^{\frac{5}{17}}dx = Ds\,x^2\varpi^{\frac{5}{17}}dx = -\frac{1}{3b}\,Ds\,\varpi^{\frac{5}{17}}\varpi'\,dx = -\frac{17\,\varpi^{\frac{22}{17}}}{66b}. \tag{24}$$

IV. Die Integration des trinomischen Differentials:

$$x^{2n-1}(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}dx = x^{2n-1}\varpi^{\frac{p}{r}}dx = dy \tag{25}$$

ist zwar nicht, wie jene des analogen binomischen Differentials (Abs. III) durch einfache Einführung von Konstanten möglich, wohl aber kann dieselbe mit Rücksicht auf die Relation:

$$\varpi' = nbx^{n-1} + 2ncx^{2n-1};\quad x^{2n-1} = \frac{\varpi' - nbx^{n-1}}{2nc} \tag{26}$$

vermittelst einer Substitution durchgeführt werden. Es ist nämlich:

$$x^{2n-1}\varpi^{\frac{p}{r}}dx = \frac{(\varpi' - nbx^{n-1})\,\varpi^{\frac{p}{r}}dx}{2nc} = \frac{\varpi^{\frac{p}{r}}\varpi'\,dx}{2nc} - \frac{bx^{n-1}\varpi^{\frac{p}{r}}dx}{2c}. \tag{27}$$

Von diesem letzten Ausdruck kann das erste Differential vermittelst der Gl. 8, das zweite etwa nach §. 42 Abs. VI (vgl. z. B. §. 47 Abs. X) in endlicher Form integriert werden.

Ebenso ist:

$$\frac{x^{2n-1}dx}{(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}} = \frac{\varpi'\,dx}{2nc\varpi^{\frac{p}{r}}} - \frac{bx^{n-1}dx}{2c\varpi^{\frac{p}{r}}}, \tag{28}$$

von welchem Ausdruck das erste Differential nach Gl. 15, das zweite nach §. 34 Absatz III integrierbar ist.

Es ist leicht ersichtlich, dass die vorstehenden Sätze nur dann gelten, wenn p eine ungerade Zahl, $r = 2$ ist, weil die Reduktion auf die im §. 34 Abs. I und II integrierten Differentiale blos in diesem Falle immer möglich ist.

V. So ist z. B.:

$$Ds\,x\sqrt{a+bx+cx^2}\,dx = \frac{(\varpi'-b)\sqrt{\varpi}\,dx}{2c} = \frac{1}{2c}\,Ds\,\varpi^{\frac{1}{2}}\varpi'\,dx - \frac{b}{2c}\,Ds\sqrt{\varpi}\,dx$$

$$= \frac{\varpi^{\frac{3}{2}}}{3c} - \frac{b}{2c}\,Ds\sqrt{\varpi}\,dx\quad (\text{§. 46 Abs. VI}), \tag{29}$$

$$Ds \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{2c} Ds \frac{\omega'\,dx}{\omega^{\frac{1}{2}}} - \frac{b}{2c} Ds \frac{dx}{\sqrt{\omega}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\overline{\omega}}}{c} - \frac{b}{2c} Ds \frac{dx}{\sqrt{\omega}} \text{ (§. 32 Gl. 24).} \qquad 30)$$

VI. Zur Integration der Gleichung

$$x^3\sqrt{a+bx^2+cx^4}\,dx = x^3\sqrt{\omega}\,dx = dy \qquad 31)$$

setze man

$$\omega' = 2bx + 4cx^3; \qquad x^3 = \frac{\omega' - 2bx}{4c}, \qquad 32)$$

also wenn man den Wert von x^3 in die Gl. 31 substituiert:

$$Ds \frac{(\omega' - 2bx)\sqrt{\omega}\,dx}{4c} = \frac{1}{4c} Ds\, \omega^{\frac{1}{2}} \omega'\,dx - \frac{b}{2c} Ds\, x\sqrt{\omega}\,dx = Ds\, dy. \quad 33)$$

Das vorstehende Integral wird unten (§. 47 Abs. XII) in seinem vollen Umfang ermittelt werden.

In ganz analoger Weise findet man mit Rücksicht auf die obige Gl. 15, ferner auf §. 34, Gl. 35:

$$Ds \frac{x^3dx}{\sqrt{a+bx^2+cx^4}} = Ds \frac{x^3dx}{\sqrt{\omega}} = \frac{1}{4c} Ds \frac{\omega'\,dx}{\sqrt{\omega}} - \frac{b}{2c} Ds \frac{x\,dx}{\sqrt{\omega}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\overline{\omega}}}{2c} - \frac{b}{8c\sqrt{c}} \log \frac{b + 2c\overline{x}^2 + 2\sqrt{c\overline{\omega}}}{b + 2c\overline{x}^2 - 2\sqrt{c\overline{\omega}}}. \qquad 34)$$

VII. Sowie alle Differentiale von der Form $x^{n-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{r}}dx$ und $\frac{x^{n-1}dx}{(a+bx^n)^{\frac{p}{r}}}$ auf die Ausdrücke $\omega^{\frac{p}{r}}\omega'dx$ und $\frac{\omega'dx}{\omega^{\frac{p}{r}}}$ gebracht und dann in einem geschlossenen Ausdruck integriert werden können, so ist dies auch bei allen Differentialen von der Form $x^{\mu n-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{r}}dx$ und $\frac{x^{\mu n-1}dx}{(a+bx^n)^{\frac{p}{r}}}$ der Fall, in welchen Ausdrücken μ eine ganze positive Zahl bedeutet. Man kann nämlich in solchen Differentialen immer für x^n den Ausdruck $\frac{\omega - a}{b}$ substituieren und auf diese Weise successiv die Integration bewirken. So ist z. B.:

$$Ds\, x^5\sqrt{a+bx^3}\,dx = \frac{1}{3b} Ds\, x^3\sqrt{\omega}\,\omega'dx = \frac{1}{3b^2} Ds\left[\omega^{\frac{3}{2}}\omega'dx - a\sqrt{\omega}\,\omega'dx\right], \quad 35)$$

welcher letztere Ausdruck nach Gl. 8 integriert werden kann.

Durch ganz ähnliche Substitutionen kann man auch beweisen, dass $x^{\mu n-1}(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{2}}dx$ und $\frac{x^{\mu n-1}dx}{(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{2}}}$ immer in endlicher Form integrabel sind.

§. 32.

Reduktion der irrationalen Differentiale auf logarithmische Differentiale mit irrationalen Bestandteilen.

Lässt sich ein irrationales Differential nicht auf die im §. 31 entwickelten Formen zurückführen, so kann man die Integration durch einen geschlossenen Ausdruck in vielen Fällen dadurch ermöglichen, dass man dasselbe auf logarithmische Differentiale von der Form $\pm\left(\frac{\pi' dx}{\pi} - \frac{\varrho' dx}{\varrho}\right)$ reduziert (vgl. Neue Int.-Meth. S. 37—40), welche die Eigentümlichkeit haben, dass sowohl π und ϱ als auch π' und ϱ' irrationale Bestandteile enthalten. Diese Umwandlung erfolgt vermittelst der Methode der Einführung von Variablen und Konstanten.

I. Ist die Gleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{dx}{\sqrt{\omega}} = dy \qquad 1)$$

zu integrieren, so ist leicht ersichtlich, dass deren Reduktion auf die Form $\frac{\omega' dx}{\sqrt{\omega}}$ unmöglich ist. Man setze daher:

$$\pi = \sqrt{b}x + \sqrt{\omega}; \qquad \pi' = \sqrt{b} + \frac{bx}{\sqrt{\omega}}, \qquad 2)$$

$$\varrho = \sqrt{b}x - \sqrt{\omega}; \qquad \varrho' = \sqrt{b} - \frac{bx}{\sqrt{\omega}}, \qquad 3)$$

$$\pi'\varrho - \pi\varrho' = -\frac{2a\sqrt{b}}{\sqrt{\omega}}; \qquad \sqrt{\omega}(\pi'\varrho - \pi\varrho') = -2a\sqrt{b}, \qquad 4)$$

$$\pi\varrho = -a. \qquad 5)$$

Multipliziert man nun das Differential $\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$ in der Gl. 1, um dessen Reduktion auf die Form $\pm\left(\frac{\pi' dx}{\pi} - \frac{\varrho' dx}{\varrho}\right)$ zu ermöglichen, im Zähler und Nenner mit Rücksicht auf die Gl. 5, so ist:

$$-\frac{a\,dx}{\pi\varrho\sqrt{\omega}} = dy. \qquad 6)$$

Führt man sodann mit Rücksicht auf die Gl. 4 Variable und Konstanten ein, so ist:

$$-\frac{\sqrt{\omega}(\pi'\varrho - \pi\varrho')\,a\,dx}{\pi\varrho\sqrt{\omega}} = -2a\sqrt{b}\,dy \qquad 7)$$

oder

$$\frac{\pi' dx}{\pi} - \frac{\varrho' dx}{\varrho} = 2\sqrt{b}\,dy. \qquad 8)$$

Da die Differentiale links logarithmisch sind (Neue Int.-Meth. §. 12), so erhält man die Differentialsumme:

$$\log \bar{\pi} - \log \bar{\varrho} = Ds\, 2\sqrt{b}\, dy \qquad 9)$$

oder wenn man dy von den Konstanten befreit:

$$\frac{1}{2\sqrt{b}} \log \frac{\bar{\pi}}{\bar{\varrho}} = \frac{1}{2\sqrt{b}} \log \frac{\sqrt{b}\,\bar{x} + \sqrt{a + b\bar{x}^2}}{\sqrt{b}\,\bar{x} - \sqrt{a + b\bar{x}^2}} = Ds \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}}. \qquad \mathbf{10)}$$

Auf ganz analoge Weise erhält man auch:

$$\frac{1}{2\sqrt{b}} \log \frac{\sqrt{b}\,\bar{x} + \sqrt{-a + b\bar{x}^2}}{\sqrt{b}\,\bar{x} - \sqrt{-a + b\bar{x}^2}} = Ds \frac{dx}{\sqrt{-a + b\bar{x}^2}}. \qquad \mathbf{11)}$$

II. Zur Integration der Gleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{a - bx^2}} = \frac{dx}{\sqrt{\omega}} = dy \qquad 12)$$

kann die im Abs. I entwickelte Methode nicht angewandt werden, weil in diesem Fall $\pi\varrho = 2bx^2 - a$ wäre (s. Gl. 5), folglich die in den Gl. 6—8 vorgenommenen Operationen nicht vollzogen werden können. Hier ist, so lange zur Auffindung der Differentialsummen irrationaler Differentiale blos die im §. 31 und 32 enthaltenen Methoden offenstehen, lediglich die Integration durch Kreisbögen nach der Formel

$$Ds \frac{df(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}} = \text{arc} \sin f(\bar{x}) \qquad 13)$$

möglich (vgl. oben §. 8 Gl. 1 und unten §. 53 Gl. 3). Zu diesem Zweck dividiert man in der Gl. 12 das Differential links in Zähler und Nenner mit $\sqrt{a}$ und multipliziert sodann die Gleichung auf beiden Seiten mit $\sqrt{b}$, so dass sich, wenn man gleichzeitig die Differentialsumme nimmt, folgende Relation ergiebt:

$$Ds \frac{\frac{\sqrt{b}\, dx}{\sqrt{a}}}{\sqrt{1 - \frac{bx^2}{a}}} = Ds \frac{d\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2}} = \text{arc} \sin \frac{\bar{x}\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = Ds \sqrt{b}\, dy. \qquad 14)$$

Befreit man nunmehr dy von der Konstante, so ist

$$\frac{1}{\sqrt{b}} \text{arc} \sin \frac{\bar{x}\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = Ds \frac{dx}{\sqrt{a - bx^2}}. \qquad \mathbf{15)}$$

III. Zur Integration der Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{dx}{\sqrt{\omega}} = dy \qquad 16)$$

setze man, ähnlich wie im Abs. I:

$$\pi = b + 2cx + 2\sqrt{c\omega}; \qquad \pi' = 2c + \frac{\sqrt{c}\,\omega'}{\sqrt{\omega}}, \qquad 17)$$

$$\varrho = b + 2cx - 2\sqrt{c\omega}; \qquad \varrho' = 2c - \frac{\sqrt{c}\,\omega'}{\sqrt{\omega}}, \qquad 18)$$

$$\pi\varrho = b^2 - 4ac = \delta = -\Delta, \tag{19}$$

$$\pi'\varrho - \pi\varrho' = \frac{2\sqrt{c\delta}}{\sqrt{\omega}}; \quad \sqrt{\omega}(\pi'\varrho - \pi\varrho') = 2\sqrt{c\delta}. \tag{20}$$

Multipliziert man nun das Differential links in der Gl. 16 in Zähler und Nenner mit Rücksicht auf die Gl. 19 (vgl. oben Gl. 6), so ist:

$$\frac{\delta\, dx}{\pi\varrho\sqrt{\omega}} = dy \tag{21}$$

und wenn man mit Rücksicht auf Gl. 20 Variable und Konstanten einführt (s. Gl. 7):

$$\frac{\sqrt{\omega}(\pi'\varrho - \pi\varrho')\,\delta\, dx}{\pi\varrho\sqrt{\omega}} = 2\sqrt{c}\,\delta\, dy \tag{22}$$

oder

$$\frac{\pi' dx}{\pi} - \frac{\varrho' dx}{\varrho} = 2\sqrt{c}\, dy. \tag{23}$$

Nimmt man nun, ähnlich wie in den Gl. 9 und 10 die Differentialsumme und befreit sodann dy von den Konstanten, so ist:

$$\frac{1}{2\sqrt{c}}\log\frac{\overline{\pi}}{\overline{\varrho}} = \frac{1}{2\sqrt{c}}\log\frac{b + 2c\overline{x} + 2\sqrt{c\overline{\omega}}}{b + 2c\overline{x} - 2\sqrt{c\overline{\omega}}} = Ds\frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}}. \tag{24}$$

Durch ganz ähnliche Operationen erhält man noch die nachfolgenden Integrale:

$$Ds\frac{dx}{\sqrt{-a + bx + cx^2}} = Ds\frac{dx}{\sqrt{\omega}} = \frac{1}{2\sqrt{c}}\log\frac{b + 2c\overline{x} + 2\sqrt{c\overline{\omega}}}{b + 2c\overline{x} - 2\sqrt{c\overline{\omega}}} = \frac{1}{2\sqrt{c}}\log\frac{\overline{\pi}}{\overline{\varrho}}, \tag{25}$$

$$Ds\frac{dx}{\sqrt{a - bx + cx^2}} = Ds\frac{dx}{\sqrt{\omega}} = \frac{1}{2\sqrt{c}}\log\frac{b - 2c\overline{x} + 2\sqrt{c\overline{\omega}}}{b - 2c\overline{x} - 2\sqrt{c\overline{\omega}}} = \frac{1}{2\sqrt{c}}\log\frac{\overline{\pi}}{\overline{\varrho}}, \tag{26}$$

$$Ds\frac{dx}{\sqrt{-a - bx + cx^2}} = Ds\frac{dx}{\sqrt{\omega}} = \frac{1}{2\sqrt{c}}\log\frac{b - 2c\overline{x} - 2\sqrt{c\overline{\omega}}}{b - 2c\overline{x} + 2\sqrt{c\overline{\omega}}} = \frac{1}{2\sqrt{c}}\log\frac{\overline{\varrho}}{\overline{\pi}}. \tag{27}$$

IV. Ist die Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}} = \frac{dx}{\sqrt{\omega}} = dy \tag{28}$$

zu integrieren, so sind die im Abs. III erörterten Methoden unanwendbar, weil in diesem Falle $\pi\varrho = \delta + 8c^2x^2$ wäre, so dass die zur Reduktion auf ein logarithmisches Differential unentbehrlichen Operationen in den Gl. 21—23 nicht vorgenommen werden können. In diesem Falle ist deshalb die Integration gleichfalls (vgl. Abs. II) nur durch Kreisbögen und zwar am bequemsten nach der Formel (s. unten §. 53 Gl. 4):

$$Ds - \frac{df(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}} = \arccos f(\overline{x}) \tag{29}$$

möglich. Es ist nämlich, wenn man auch hier (vgl. oben §. 10 Gl. 3) $b^2 + 4ac = \sigma$ setzt:

$$\frac{dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}} = \frac{2\sqrt{c}dx}{\sqrt{b^2 - b^2 + 4ac + 4bcx - 4c^2x^2}} = \frac{2\sqrt{c}dx}{\sqrt{\sigma - (b - 2cx)^2}}$$

$$= \frac{\frac{2\sqrt{c}dx}{\sqrt{\sigma}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{b - 2cx}{\sqrt{\sigma}}\right)^2}} = dy. \qquad 30)$$

Multipliziert man die beiden letzten Ausdrücke mit $\sqrt{c}$, so ist

$$\frac{\frac{2cdx}{\sqrt{\sigma}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{b - 2cx}{\sqrt{\sigma}}\right)^2}} = - \frac{d\frac{b - 2cx}{\sqrt{\sigma}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{b - 2cx}{\sqrt{\sigma}}\right)^2}} = \sqrt{c}dy. \qquad 31)$$

Nimmt man schliesslich von den beiden letzten Differentialen die Differentialsumme (s. Gl. 29) und befreit dann dy von der Konstante, so ergiebt sich folgendes Integral:

$$\frac{1}{\sqrt{c}} \arccos \frac{b - 2c\bar{x}}{\sqrt{b^2 + 4ac}} = Ds \frac{dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}}. \qquad 32)$$

Dieses Integral ist ebenso richtig und einfacher als jenes, welches gewöhnlich in den Integraltafeln erscheint.

Durch ganz analoge Operationen erhält man noch folgende Integrale:

$$Ds \frac{dx}{\sqrt{- a + bx - cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arccos \frac{b - 2c\bar{x}}{\sqrt{b^2 - 4ac}}, \qquad 33)$$

$$Ds \frac{dx}{\sqrt{a - bx - cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{b + 2c\bar{x}}{\sqrt{b^2 + 4ac}}. \qquad 34)$$

V. Die Integration des Differentials $\frac{dx}{\sqrt{\pm bx \pm cx^2}}$ ist den im Abs. III und IV dargestellten Ableitungsweisen ganz analog, nur tritt an die Stelle von $b^2 \pm 4ac$ überall b^2, weil eben $a = 0$ ist.

Ist die Gleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{bx + cx^2}} = \frac{dx}{\sqrt{\omega}} = dy \qquad 36)$$

zu integrieren, so setze man (vgl. Abs. III):

$$\pi = b + 2cx + 2\sqrt{c\omega}; \quad \pi' = 2c + \frac{\sqrt{c}\,\omega'}{\sqrt{\omega}}, \qquad 37)$$

$$\varrho = b + 2cx - 2\sqrt{c\omega}; \quad \varrho' = 2c - \frac{\sqrt{c}\,\omega'}{\sqrt{\omega}}, \qquad 38)$$

$$\pi\varrho = b^2, \tag{39}$$

$$\pi'\varrho - \pi\varrho' = \frac{2\sqrt{c}\,b^2}{\sqrt{\omega}}; \quad \sqrt{\omega}(\pi'\varrho - \pi\varrho') = 2\sqrt{c}\,b^2, \tag{40}$$

und es ergiebt sich, wenn man in der Gl. 36 das Differential links im Zähler und Nenner mit Rücksicht auf die Gl. 39 multipliziert und sodann (Gl. 40) Variable und Konstanten einführt:

$$\frac{\sqrt{\omega}(\pi'\varrho - \pi\varrho')b^2 dx}{\pi\varrho\sqrt{\omega}} = 2\sqrt{c}\,b^2 dy \tag{41}$$

oder

$$\frac{\pi' dx}{\pi} - \frac{\varrho' dx}{\varrho} = 2\sqrt{c}\,dy. \tag{42}$$

Verfährt man endlich wie in den Gl. 9, 10, 24, so ist:

$$\frac{1}{2\sqrt{c}}\log\frac{\bar{\pi}}{\bar{\varrho}} = \frac{1}{2\sqrt{c}}\log\frac{b + 2c\bar{x} + 2\sqrt{c\bar{\omega}}}{b + 2c\bar{x} - 2\sqrt{c\bar{\omega}}} = Ds\frac{dx}{\sqrt{bx + cx^2}}. \tag{43}$$

Durch ganz ähnliche Operationen erhält man auch das Integral:

$$Ds\frac{dx}{\sqrt{-bx + cx^2}} = \frac{dx}{\sqrt{\omega}} = \frac{1}{2\sqrt{c}}\log\frac{b - 2c\bar{x} - 2\sqrt{c\bar{\omega}}}{b - 2c\bar{x} + 2\sqrt{c\bar{\omega}}} = \frac{1}{2\sqrt{c}}\log\frac{\bar{\varrho}}{\bar{\pi}}. \tag{44}$$

VI. Ist endlich die Gleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{bx - cx^2}} = dy \tag{45}$$

zu integrieren, so ist die im Abs. V dargestellte Methode unanwendbar, weil dann $\pi\varrho = b^2 + 8c^2x^2$ wäre, folglich die in den Gl. 41 und 42 enthaltenen Operationen nicht vollzogen werden können. Um wie in den früheren Fällen das Kreisbogenintegral zu erhalten, setze man:

$$\frac{dx}{\sqrt{bx - cx^2}} = \frac{2\sqrt{c}\,dx}{\sqrt{b^2 - b^2 + 4bcx - 4c^2x^2}} = \frac{\frac{2\sqrt{c}\,dx}{b}}{\sqrt{1 - \left(\frac{b - 2cx}{b}\right)^2}} = dy. \tag{46}$$

Multipliziert man die beiden letzteren Ausdrücke mit $\sqrt{c}$, so ist:

$$Ds\frac{\frac{2c\,dx}{b}}{\sqrt{1 - \left(\frac{b - 2cx}{b}\right)^2}} = Ds - \frac{d\frac{b - 2cx}{b}}{\sqrt{1 - \left(\frac{b - 2cx}{b}\right)^2}}$$

$$= \arccos\frac{b - 2c\bar{x}}{b} = Ds\sqrt{c}\,dy. \tag{47}$$

Befreit man sodann dy von der Konstante, so ist:

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\arccos\frac{b - 2c\bar{x}}{b} = Ds\frac{dx}{\sqrt{bx - cx^2}}. \tag{48}$$

Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass in allen vorstehenden Rechnungen (Abs. I—VI) wie überhaupt in der vorliegenden Abhandlung vorausgesetzt wurde, dass a, b, c immer positive Grössen sind (vgl. oben S. 12).

VII. In vielen Integraltafeln erscheinen die in den Gl. 10, 24, 43 enthaltenen Integrale in einer einfacheren Gestalt, nämlich:

$$Ds\,\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\log\left(\sqrt{b}\,\bar{x} + \sqrt{a+b\bar{x}^2}\right), \tag{49}$$

$$Ds\,\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{dx}{\sqrt{\omega}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\log\left(b + 2c\bar{x} + 2\sqrt{c\bar{\omega}}\right), \tag{50}$$

$$Ds\,\frac{dx}{\sqrt{bx+cx^2}} = \frac{dx}{\sqrt{\omega}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\log\left(b + 2c\bar{x} + 2\sqrt{c\bar{\omega}}\right). \tag{51}$$

In der That ist bei diesen Integralen (Gl. 49—51):

$$d\,\frac{1}{2\sqrt{c}}\log\frac{\pi}{\varrho} = d\,\frac{1}{\sqrt{c}}\log\pi \tag{52}$$

oder

$$\frac{\pi' dx}{\pi} + \frac{\varrho' dx}{\varrho} = (\pi'\varrho + \pi\varrho')\,dx = 0. \tag{53}$$

Einige leichte Operationen zeigen, dass bei den Integralen in den Gl. 10, 24, 43 wirklich die Bedingungsgleichung $\pi'\varrho + \pi\varrho' = 0$ stattfindet, so dass dieselben mit Rücksicht auf die Relation 52 den Integralen in den Gl. 49—51 gleichgesetzt werden können. Unter derselben Voraussetzung $(\pi'\varrho + \pi\varrho' = 0)$ gilt auch die weitere Relation:

$$d\,\frac{1}{2\sqrt{c}}\log\frac{\varrho}{\pi} = d\left[-\frac{1}{\sqrt{c}}\log\pi\right]. \tag{54}$$

§. 33.

Integration von $\dfrac{dx}{x\sqrt{\pm a \pm bx^n}}$ und $\dfrac{dx}{x\sqrt{\pm a \pm bx^n \pm cx^{2n}}}$.

I. Während die Integration der Differentiale

$$\frac{dx}{\sqrt{\pm a \pm bx^n}} \quad \text{und} \quad \frac{dx}{\sqrt{\pm a \pm bx^n \pm cx^{2n}}}$$

bisher nur in dem Falle gelungen ist, wenn x in dem irrationalen Ausdruck höchstens in zweiter Potenz erscheint (§. 32 Abs. I—IV), lassen sich die in der Überschrift bezeichneten Differentiale in dieser allgemeinen Form integrieren. Zur Integration der Gleichung:

$$\frac{dx}{x\sqrt{a+bx^n}} = \frac{dx}{x\sqrt{\omega}} = dy \tag{1}$$

setze man:

$$\pi = \sqrt{\omega} + \sqrt{a}; \quad \pi' = \frac{nbx^{n-1}}{2\sqrt{\omega}}, \tag{2}$$

$$\varrho = \sqrt{\omega} - \sqrt{a}; \quad \varrho' = \frac{nbx^{n-1}}{2\sqrt{\omega}}, \tag{3}$$

$$\pi\varrho = bx^n, \tag{4}$$

$$\pi'\varrho - \pi\varrho' = -\frac{\sqrt{a}bnx^{n-1}}{\sqrt{\omega}}; \quad \frac{\sqrt{\omega}(\pi'\varrho - \pi\varrho')}{x^{n-1}} = -\sqrt{a}bn. \tag{5}$$

Multipliziert man, ähnlich wie in zahlreichen früheren Fällen das linksseitige Differential der Gl. 1 im Zähler und Nenner, mit Rücksicht auf die Gl. 4, so ist:

$$\frac{bx^n\,dx}{x\pi\varrho\sqrt{\omega}} = dy. \tag{6}$$

Führt man sodann mit Rücksicht auf die Gl. 5 Variable und Konstanten ein, so ergiebt sich:

$$\frac{\sqrt{\omega}(\pi'\varrho - \pi\varrho')bx^n\,dx}{\pi\varrho x^n\sqrt{\omega}} = -\sqrt{a}bn\,dy \tag{7}$$

oder

$$\frac{\varrho'\,dx}{\varrho} - \frac{\pi'\,dx}{\pi} = \sqrt{a}n\,dy. \tag{8}$$

Verfährt man mit dieser Gleichung in der bekannten Weise, so ist:

$$\frac{1}{\sqrt{a}n}\log\frac{\sqrt{a+bx^n} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bx^n} + \sqrt{a}} = Ds\frac{dx}{x\sqrt{a+bx^n}}. \tag{9}$$

Durch ganz analoge Rechnungen erhält man das Integral:

$$Ds\frac{dx}{x\sqrt{a-bx^n}} = \frac{dx}{x\sqrt{\omega}} = \frac{1}{\sqrt{a}n}\log\frac{\sqrt{\omega}-\sqrt{a}}{\sqrt{\omega}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}n}\log\frac{\varrho}{\pi}. \tag{10}$$

II. Ist die Gleichung:

$$\frac{dx}{x\sqrt{-a+bx^n}} = \frac{dx}{x\sqrt{\omega}} = dy \tag{11}$$

zu integrieren, so sind die Operationen in der Gl. 6—8 wegen $\pi\varrho = -2a + bx^n$ undurchführbar und deshalb nur die Integration durch Kreisbögen möglich. Zu diesem Zweck schreibt man die Gl. 11 folgendermassen:

$$\frac{\dfrac{\sqrt{a}nbx^{n-1}dx}{2\sqrt{\omega}}}{bx^n} = \frac{\sqrt{a}n\,dy}{2}, \tag{12}$$

welche Umgestaltung, wie einige leichte Reduktionen beweisen, ohne Veränderung des Wesens der Gleichung vorgenommen werden kann.

Nun ist aber:

$$\frac{nbx^{n-1}dx}{2\sqrt{\omega}} = d\sqrt{\omega}, \tag{13}$$

$$bx^n = a\left[1 + \left(\frac{\sqrt{-a+bx^n}}{\sqrt{a}}\right)^2\right] \tag{14}$$

folglich wenn man die Werte aus den Gl. 13 und 14 in die Gl. 12 substituiert:

$$Ds\,\frac{d\frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{a}}}{1+\left(\frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{a}}\right)^2} = (\S.\,22 \text{ Gl. } 63) \operatorname{arctan}\frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{a}} = Ds\,\frac{\sqrt{a}\,n\,dy}{2}. \tag{15}$$

Befreit man schliesslich dy von den Konstanten, so ergiebt sich:

$$\frac{2}{\sqrt{a}\,n}\operatorname{arctan}\frac{\sqrt{-a+b\bar{x}^n}}{\sqrt{a}} = Ds\,\frac{dx}{x\sqrt{-a+bx^n}}. \tag{16}$$

III. Ist die Gleichung:

$$\frac{dx}{x\sqrt{a+bx^n+cx^{2n}}} = \frac{dx}{x\sqrt{\omega}} = dy. \tag{17}$$

zu integrieren, so setze man:

$$\pi = 2a + bx^n + 2\sqrt{a\omega}; \quad \pi' = nbx^{n-1} + \frac{\sqrt{a}\,\omega'}{\sqrt{\omega}}. \tag{18}$$

$$\varrho = 2a + bx^n - 2\sqrt{a\omega}; \quad \varrho' = nbx^{n-1} - \frac{\sqrt{a}\,\omega'}{\sqrt{\omega}}. \tag{19}$$

$$\pi\varrho = -\Delta x^{2n}. \tag{20}$$

$$\pi'\varrho - \pi\varrho' = \frac{2\sqrt{a}\Delta n x^{2n-1}}{\sqrt{\omega}}; \quad \frac{\sqrt{\omega}(\pi'\varrho - \pi\varrho')}{x^{2n-1}} = 2\sqrt{a}\Delta n. \tag{21}$$

Multipliziert man nun das linksseitige Differential der Gl. 17 mit Rücksicht auf die Gl. 20, so ist:

$$\frac{\Delta x^{2n}dx}{\pi\varrho x\sqrt{\omega}} = -dy. \tag{22}$$

Führt man sodann mit Rücksicht auf die Gl. 21 Variable und Konstanten ein, so ergiebt sich:

$$\frac{\sqrt{\omega}(\pi'\varrho - \pi\varrho')\Delta x^{2n}dx}{\pi\varrho x^{2n}\sqrt{\omega}} = -2\sqrt{a}\Delta n dy \tag{23}$$

oder

$$\frac{\varrho' dx}{\varrho} - \frac{\pi' dx}{\pi} = 2\sqrt{a}\,n\,dy. \tag{24}$$

Verfährt man in der bekannten Weise, so ist:

$$\frac{1}{2\sqrt{an}}\log\frac{\bar\varrho}{\bar\pi}=\frac{1}{2\sqrt{an}}\log\frac{2a+b\bar x^n-2\sqrt{a\bar\omega}}{2a+b\bar x^n+2\sqrt{a\bar\omega}}=Ds\frac{dx}{x\sqrt{a+bx^n+cx^{2n}}}. \tag{25}$$

Auf ähnliche Weise erhält man die Integrale:

$$Ds\frac{dx}{x\sqrt{a-bx^n+cx^{2n}}}=\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}=\frac{1}{2\sqrt{an}}\log\frac{2a-b\bar x^n-2\sqrt{a\bar\omega}}{2a-b\bar x^n+2\sqrt{a\bar\omega}}=\frac{1}{2\sqrt{an}}\log\frac{\bar\varrho}{\bar\pi}, \tag{26}$$

$$Ds\frac{dx}{x\sqrt{a+bx^n-cx^{2n}}}=\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}=\frac{1}{2\sqrt{an}}\log\frac{2a+b\bar x^n-2\sqrt{a\bar\omega}}{2a+b\bar x^n+2\sqrt{a\bar\omega}}=\frac{1}{2\sqrt{an}}\log\frac{\bar\varrho}{\bar\pi}, \tag{27}$$

$$Ds\frac{dx}{x\sqrt{a-bx^n-cx^{2n}}}=\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}=\frac{1}{2\sqrt{an}}\log\frac{2a-b\bar x^n-2\sqrt{a\bar\omega}}{2a-b\bar x^n+2\sqrt{a\bar\omega}}=\frac{1}{2\sqrt{an}}\log\frac{\bar\varrho}{\bar\pi}. \tag{28}$$

IV. Ist die Gleichung:

$$\frac{dx}{x\sqrt{-a+bx^n+cx^{2n}}}=dy \tag{29}$$

zu integrieren, so ist die im Abs. III entwickelte Methode wegen $\pi\varrho=8a^2-\varDelta x^{2n}$ unanwendbar, folglich auch hier nur die Integration durch Kreisbogen möglich. Zu diesem Zweck schreibt man die Gl. 29 in folgender Weise, was, wie einige leichte Reduktionen beweisen, ohne Änderung ihres Wesens möglich ist ($\sigma=b^2+4ac$):

$$\frac{\dfrac{n\sigma x^{2n-1}dx}{4\sqrt{a}\,\omega^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{\sigma x^{2n}}{4a\omega}}=\sqrt{an}\,dy. \tag{30}$$

Nun ist aber:

$$\frac{n\sigma x^{2n-1}dx}{4\sqrt{a}\,\omega^{\frac{3}{2}}}=d\frac{-2a+bx^n}{2\sqrt{a\omega}}, \tag{31}$$

$$\frac{\sigma x^{2n}}{4a\omega}=1+\left(\frac{-2a+bx^n}{2\sqrt{a\omega}}\right)^2. \tag{32}$$

Substituiert man die Werte aus den Gl. 31 und 32 in die Gl. 30, so ist

$$Ds\frac{d\dfrac{-2a+bx^n}{2\sqrt{a\omega}}}{1+\left(\dfrac{-2a+bx^n}{2\sqrt{a\omega}}\right)^2}=\operatorname{arctan}\frac{-2a+b\bar x^n}{2\sqrt{a\bar\omega}}=Ds\sqrt{an}\,dy. \tag{33}$$

Befreit man endlich dy von den Konstanten, so ergiebt sich folgendes Integral:

$$\frac{1}{\sqrt{an}}\operatorname{arctan}\frac{-2a+b\bar x^n}{2\sqrt{a\bar\omega}}=Ds\frac{dx}{x\sqrt{-a+bx^n+cx^{2n}}}. \tag{34}$$

Auf ganz analoge Weise erhält man noch die Integrale:

$$Ds\frac{dx}{x\sqrt{-a-bx^n+cx^{2n}}}=Ds\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}=\frac{1}{\sqrt{a}n}\arctan\frac{-2a-b\overline{x}^n}{2\sqrt{a\overline{\omega}}}, \tag{35}$$

$$Ds\frac{dx}{x\sqrt{-a+bx^n-cx^{2n}}}=Ds\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}=\frac{1}{\sqrt{a}n}\arctan\frac{-2a+b\overline{x}^n}{2\sqrt{a\overline{\omega}}}. \tag{36}$$

V. Ist die Gleichung:

$$\frac{dx}{x\sqrt{bx^n+cx^{2n}}}=\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}=dy. \tag{37}$$

zu integrieren, so setze man:

$$\frac{x\omega'-2n\omega}{x^n}=-nb \tag{38}$$

und führe dann mit Rücksicht auf diese Relation in die Gl. 37 Variable und Konstanten ein, also:

$$\frac{\omega' dx}{x^n\sqrt{\omega}}-\frac{2n\sqrt{\omega}dx}{x^{n+1}}=-nbdy. \tag{39}$$

Dividiert man die vorstehende Gleichung durch 2 und bildet schliesslich aus den beiden Differentialen links die Differentialsumme, indem man gleichzeitig dy von den Konstanten befreit, so ist:

$$-\frac{2}{nb}Ds\frac{\sqrt{\omega}}{x^n}\left[\frac{\omega' dx}{2\omega}-\frac{ndx}{x}\right]=Ds\frac{dx}{x\sqrt{bx^n+cx^{2n}}}. \tag{40}$$

Ebenso ist:

$$Ds\frac{dx}{x\sqrt{-bx^n+cx^{2n}}}=Ds\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}=\frac{2\sqrt{\overline{\omega}}}{nb\overline{x}^n}, \tag{41}$$

$$Ds\frac{dx}{x\sqrt{bx^n-cx^{2n}}}=Ds\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}=-\frac{2\sqrt{\overline{\omega}}}{nb\overline{x}^n}. \tag{42}$$

VI. Aus den vorstehenden Formeln ergeben sich folgende in dem weiteren Verlauf dieser Abhandlung benutzte Integrale, welche übrigens nach den im Abs. I—V dargestellten Methoden auch unmittelbar aus den betreffenden Differentialen abgeleitet werden können:

$$Ds\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}=(\text{Gl. }9)\ \frac{1}{\sqrt{a}}\log\frac{\sqrt{a+b\overline{x}}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+b\overline{x}}+\sqrt{a}}, \tag{43}$$

$$Ds\frac{dx}{x\sqrt{-a+bx}}=(\text{Gl. }16)\ \frac{2}{\sqrt{a}}\arctan\frac{\sqrt{-a+b\overline{x}}}{\sqrt{a}}, \tag{44}$$

$$Ds\frac{dx}{x\sqrt{a+bx^2}}=Ds\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}\log\frac{\sqrt{\overline{\omega}}-\sqrt{a}}{\sqrt{\overline{\omega}}+\sqrt{a}}, \tag{45}$$

$$Ds\frac{dx}{x\sqrt{-a+bx^2}}=Ds\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arctan}\frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{a}}, \tag{46}$$

$$Ds\frac{dx}{x\sqrt{a+bx^3}}=Ds\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}=\frac{1}{3\sqrt{a}}\log\frac{\sqrt{\varpi}-\sqrt{a}}{\sqrt{\varpi}+\sqrt{a}}, \tag{47}$$

$$Ds\frac{dx}{x\sqrt{-a+bx^3}}=Ds\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}=\frac{2}{3\sqrt{a}}\operatorname{arctan}\frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{a}}, \tag{48}$$

$$Ds\frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}}=Ds\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}=(\text{Gl. }25)\frac{1}{2\sqrt{a}}\log\frac{2a+b\overline{x}-2\sqrt{a\overline{\omega}}}{2a+b\overline{x}+2\sqrt{a\overline{\omega}}}, \tag{49}$$

$$Ds\frac{dx}{x\sqrt{-a+bx+cx^2}}=Ds\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}=(\text{Gl. }34)\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arctan}\frac{-2a+b\overline{x}}{2\sqrt{a\overline{\omega}}}, \tag{50}$$

$$Ds\frac{dx}{x\sqrt{a+bx^2+cx^4}}=Ds\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}=\frac{1}{4\sqrt{a}}\log\frac{2a+b\overline{x}^2-2\sqrt{a\overline{\omega}}}{2a+b\overline{x}^2+2\sqrt{a\overline{\omega}}}, \tag{51}$$

$$Ds\frac{dx}{x\sqrt{-a+bx^2+cx^4}}=Ds\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}\operatorname{arctan}\frac{-2a+b\overline{x}^2}{2\sqrt{a\overline{\omega}}}, \tag{52}$$

$$Ds\frac{dx}{x\sqrt{bx+cx^2}}=Ds\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}=(\text{Gl. }40)-\frac{2\sqrt{\overline{\omega}}}{b\overline{x}} \tag{53}$$

u. s. w.

§. 34.

Integration von $\dfrac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a+bx^n+cx^{2n}}}$ **und** $\dfrac{x^n dx}{\sqrt{a+bx^n+cx^{2n}}}$.

I. Ist die Gleichung:

$$\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a+bx^n+cx^{2n}}}=\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{\omega}}=dy \tag{1}$$

zu integrieren, so geht man in ähnlicher Weise vor wie im §. 32 Gl. 16—27 und man setzt demgemäss:

$$\pi=b+2cx^n+2\sqrt{c\omega};\quad \pi'=2ncx^{n-1}+\frac{\sqrt{c}\,\omega'}{\sqrt{\omega}}, \tag{2}$$

$$\varrho=b+2cx^n-2\sqrt{c\omega};\quad \varrho'=2ncx^{n-1}-\frac{\sqrt{c}\,\omega'}{\sqrt{\omega}}, \tag{3}$$

$$\pi\varrho=b^2-4ac=\delta=-\varDelta, \tag{4}$$

$$\pi'\varrho-\pi\varrho'=-\frac{2\sqrt{c}\varDelta nx^{n-1}}{\sqrt{\omega}};\quad \frac{\sqrt{\omega}(\pi'\varrho-\pi\varrho')}{x^{n-1}}=-2\sqrt{c}\varDelta n. \tag{5}$$

Multipliziert man das linksseitige Differential der Gl. 1 im Zähler und Nenner mit Rücksicht auf die Gl. 4, so ist:

$$-\frac{\varDelta x^{n-1}dx}{\pi\varrho\sqrt{\omega}}=dy. \tag{6}$$

Führt man nunmehr mit Rücksicht auf die Gl. 5 Variable und Konstanten ein, so ergiebt sich:

$$-\frac{\sqrt{\omega}(\pi'\varrho - \pi\varrho')\varDelta x^{n-1}dx}{x^{n-1}\pi\varrho\sqrt{\omega}} = -2\sqrt{c}\varDelta n dy \tag{7}$$

oder

$$\frac{\pi' dx}{\pi} - \frac{\varrho' dx}{\varrho} = 2\sqrt{c} n dy. \tag{8}$$

Verfährt man mit dieser Gleichung in der bekannten Weise, so ist:

$$\frac{1}{2\sqrt{cn}}\log\frac{\overline{\pi}}{\overline{\varrho}} = \frac{1}{2\sqrt{cn}}\log\frac{b+2c\overline{x}^n+2\sqrt{c\overline{\omega}}}{b+2c\overline{x}^n-2\sqrt{c\overline{\omega}}} = Ds\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a+bx^n+cx^{2n}}}. \tag{9}$$

II. Ist die Gleichung:

$$\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a+bx^n-cx^{2n}}} = dy \tag{10}$$

zu integrieren, so ist die im Abs. I angewendete Methode unanwendbar, weil dann $\pi\varrho$, wie in mehreren früher behandelten Fällen, einen unreduzierbaren Wert annimmt. Man muss deshalb auch in diesem Falle ähnlich wie im §. 32 Gl. 28—32 vorgehen. Man schreibt zu diesem Zweck die vorstehende Gleichung folgendermassen ($\sigma = b^2 + 4ac$):

$$\frac{2\sqrt{c}x^{n-1}dx}{\sqrt{b^2-b^2+4ac+4bcx^n-4c^2x^{2n}}} = \frac{\frac{2\sqrt{c}x^{n-1}dx}{\sqrt{\sigma}}}{\sqrt{1-\left(\frac{b-2cx^n}{\sqrt{\sigma}}\right)^2}} = dy. \tag{11}$$

Multipliziert man die beiden letzten Glieder der vorstehenden Gleichung mit $n\sqrt{c}$, so ist:

$$Ds\frac{\frac{2cnx^{n-1}dx}{\sqrt{\sigma}}}{\sqrt{1-\left(\frac{b-2cx^n}{\sqrt{\sigma}}\right)^2}} = Ds - \frac{d\frac{b-2cx^n}{\sqrt{\sigma}}}{\sqrt{1-\left(\frac{b-2cx^n}{\sqrt{\sigma}}\right)^2}} =$$

$$= \arccos\frac{b-2c\overline{x}^n}{\sqrt{b^2+4ac}} = Ds\, n\sqrt{c}dy \tag{12}$$

und wenn man dy von den Konstanten befreit,

$$\frac{1}{n\sqrt{c}}\arccos\frac{b-2c\overline{x}^n}{\sqrt{b^2+4ac}} = Ds\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a+bx^n-cx^{2n}}}. \tag{13}$$

Es ist leicht ersichtlich, dass die Integrale in der Gl. 9 und 13 mit jenen in §. 32 Gl. 24, 32 im Wesentlichen übereinstimmen, wie denn auch die ersteren aus den letzteren durch die Substitution $z = x^n$ gefunden werden können. Man kann deshalb die verschiedenen Zeichenkombinationen der in dem §. 32 Gl. 25—27, 33, 34 ermittelten Integrale mit den erforderlichen Abänderungen auch auf unser Integral anwenden.

III. Ist die Gleichung:

$$\frac{x^{n-1}\,dx}{(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}} = \frac{x^{n-1}\,dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} = dy \tag{14}$$

zu integrieren, in welcher im Gegensatz zu Gl. 1 p und r beliebige ganze positive Zahlen bedeuten, so setzt man:

$$\lambda = b + 2cx^n, \tag{15}$$

$$\lambda' = 2ncx^{n-1}, \tag{16}$$

$$2\lambda'\omega - \lambda\omega' = n\Delta x^{n-1}; \qquad \frac{2\lambda'\omega - \lambda\omega'}{x^{n-1}} = n\Delta \tag{17}$$

und führt mit Rücksicht auf die Gl. 17 in die Gl. 14 Variable und Konstanten ein, also:

$$\frac{2\lambda'\,dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{\lambda\omega'\,dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} = n\Delta dy. \tag{18}$$

Ein Blick auf die vorstehende Gleichung genügt, um zu zeigen, dass sie die variablen Bestandteile in der zur Bildung der Differentialsumme erforderlichen Form bereits enthält (s. unten Gl. 23 und 24). Um nun auch die beiden Differentiale links mit den zu diesem Zweck notwendigen Konstanten auszustatten, multipliziert man zunächst die Gleichung mit dem Exponenten des Nenners des ersten Differentials, also:

$$\frac{2(p-r)\lambda'\,dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p-r)\lambda\omega'\,dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}}} = \frac{(p-r)n\Delta dy}{r}. \tag{19}$$

Durch diese Operation hat das zweite Differential links die zur Bildung der Differentialsumme notwendige Form erlangt. Damit auch das erste Differential hierzu brauchbar werde, muss es die Form $\frac{\lambda'\,dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}$ annehmen. Zu diesem Zweck dient die Methode der ausgleichenden Hilfsdifferentiale oder der Teilung der Differentiale, von welcher schon in dem ersten Hefte dieser Abhandlung (§. 17 Gl. 6, §. 18 Gl. 7 u. 8 u. s. f.) öfter Gebrauch gemacht wurde. Bezeichnet man nämlich der Kürze wegen jene variablen und konstanten Bestandteile des umzugestaltenden Differentials, welche durch die Veränderung nicht berührt werden, mit dz $\left(\text{im vorliegenden Falle } \frac{\lambda'\,dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}\right)$, das ausgleichende Hilfsdifferential dagegen mit $d\xi$, so ist:

$$dz + d\xi = \frac{2(p-r)dz}{r}; \qquad \left[dz = \frac{\lambda' dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}\right], \tag{20}$$

$$d\xi = \frac{(2p-3r)dz}{r}, \tag{21}$$

$$dz + \frac{(2p-3r)dz}{r} = \frac{2(p-r)dz}{r}. \tag{22}$$

Substituiert man nun den Wert für das erste Differential der Gl. 19 aus der Gl. 22, so ist:

$$\frac{\lambda' dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p-r)\lambda\omega' dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}}} + \frac{(2p-3r)\lambda' dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}-1}} = \frac{(p-r)n\Delta dy}{r}. \tag{23}$$

Bildet man nun aus den beiden ersten Differentialen die Differentialsumme, indem man $\frac{\lambda}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}$ extrahiert und befreit man sodann dy von den Konstanten, so ergiebt sich folgende Integrationsformel (vgl. unten §. 43 Abs. I):

$$\frac{r}{(p-r)n\Delta} Ds \frac{\lambda}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}\left[\frac{\lambda' dx}{\lambda} - \frac{(p-r)\omega' dx}{r\omega}\right] + \frac{2c(2p-3r)}{(p-r)\Delta} Ds \frac{x^{n-1}dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} =$$

$$= Ds \frac{x^{n-1}dx}{(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}}. \tag{24}$$

IV. Ist die Gleichung:

$$\frac{x^n dx}{(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}} = \frac{x^n dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} = dy \tag{25}$$

zu integrieren (vgl. §. 43 Abs. V und VII), so setzt man:

$$2n\omega - x\omega' = 2na + nbx^n; \qquad x^n = \frac{2n\omega - x\omega' - 2na}{nb}, \tag{26}$$

folglich, wenn man diesen letzteren Wert in die Gl. 25 substituiert, so ist:

$$\frac{2ndx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{x\omega' dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} - \frac{2nadx}{\omega^{\frac{p}{r}}} = nbdy. \tag{27}$$

Man multipliziert nun, um das zweite Differential mit den erforderlichen Konstanten auszustatten, ebenso wie sub III mit dem Exponenten des Nenners des ersten Differentials, also:

$$\frac{2n(p-r)dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p-r)x\omega' dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}}} - \frac{2n(p-r)adx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}}} = \frac{(p-r)nbdy}{r}. \tag{28}$$

Um nun auch dem ersten Differential die zur Bildung der Differentialsumme erforderlichen Konstanten zu verschaffen, wendet man wieder wie oben die Methode der ausgleichenden Hilfsdifferentiale an, also:

$$dz + d\xi = \frac{2n(p-r)dz}{r}; \qquad \left[dz = \frac{dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}\right], \tag{29}$$

$$d\xi = \frac{(2np - 2nr - r)dz}{r}, \tag{30}$$

$$dz + \frac{(2np - 2nr - r)dz}{r} = \frac{2n(p-r)dz}{r}. \tag{31}$$

Substituiert man für das erste Differential der Gl. 28 den Wert aus der Gl. 31, so ist:

$$\frac{dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p-r)x\omega' dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}}} + \frac{(2np-2nr-r)dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{2n(p-r)a\,dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}}} = \frac{(p-r)nb\,dy}{r}. \tag{32}$$

Bildet man endlich aus den beiden ersten Differentialen durch Extraction von $\frac{x}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}$ die Differentialsumme und befreit sodann dy von den Konstanten, so ergiebt sich:

$$\frac{r}{(p-r)nb} Ds \frac{x}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}\left[\frac{dx}{x} - \frac{(p-r)\omega\, dx}{r\,\omega}\right] + \frac{2np-2nr-r}{(p-r)nb} Ds \frac{dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{2a}{b} Ds \frac{dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} =$$
$$= Ds \frac{x^n\,dx}{(a + bx^n + cx^{2n})^{\frac{p}{r}}}. \tag{33}$$

Setzt man in der vorstehenden Formel $p = 1$, $r = 2$, so ist:

$$-\frac{2\bar{x}\sqrt{\bar{\omega}}}{nb} + \frac{2(n+1)}{nb} Ds\sqrt{\omega}\,dx - \frac{2a}{b} Ds \frac{dx}{\sqrt{\omega}} = Ds \frac{x^n dx}{\sqrt{a + bx^n + cx^{2n}}}. \tag{34}$$

V. Aus den sub I—IV entwickelten Formeln ergeben sich folgende, im weiteren Verlauf dieser Abhandlung öfter benützte Integrale, die übrigens auch leicht unmittelbar aus den Differentialen abgeleitet werden können:

$$Ds \frac{x\,dx}{\sqrt{a + bx^2 + cx^4}} = Ds \frac{x\,dx}{\sqrt{\omega}} = (\text{Gl. } 9)\ \frac{1}{4\sqrt{c}} \log \frac{b + 2c\bar{x}^2 + 2\sqrt{c\bar{\omega}}}{b + 2c\bar{x}^2 - 2\sqrt{c\bar{\omega}}}, \tag{35}$$

$$Ds \frac{x\,dx}{\sqrt{a + bx^2 - cx^4}} = Ds \frac{x\,dx}{\sqrt{\omega}} = (\text{Gl. } 13)\ \frac{1}{2\sqrt{c}} \arccos \frac{b - 2c\bar{x}^2}{\sqrt{b^2 + 4ac}}, \tag{36}$$

$$Ds \frac{x\,dx}{\sqrt{(a+bx^2+cx^4)^{\frac{3}{2}}}} = Ds \frac{x\,dx}{\omega^{\frac{3}{2}}} = (\text{Gl. 24 und §. 47 Abs. XIV})\ \frac{b + 2c\bar{x}^2}{\Delta\sqrt{\bar{\omega}}}. \tag{37}$$

$$Ds \frac{x^2 dx}{\sqrt{a + bx^2 + cx^4}} = Ds \frac{x^2 dx}{\sqrt{\omega}} = (\text{Gl. } 33,\ 34) = -\frac{\bar{x}\sqrt{\bar{\omega}}}{b} +$$
$$+ \frac{3}{b} Ds\sqrt{\omega}\,dx - \frac{2a}{b} Ds \frac{dx}{\sqrt{\omega}}. \tag{38}$$

§. 35.

Vermischte irrationale Integrale.

I. An die in den §. 31—34 gegebenen Entwicklungen möge sich noch die Ableitung einiger Integrale anschliessen, die teils von vornherein irrational sind, teils sich auf solche zurückführen lassen.

Ist die Gleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}(a+bx)} = \frac{dx}{\sqrt{x}(\alpha^2+\beta^2 x)} = dy \tag{1}$$

zu integrieren, so dividiert man Zähler und Nenner mit α^2 und multipliziert dann die Gleichung auf beiden Seiten mit $\frac{\alpha\beta}{2}$ und es ergiebt sich:

$$Ds\frac{\frac{\beta dx}{2\alpha\sqrt{x}}}{1+\left(\frac{\beta\sqrt{x}}{\alpha}\right)^2} = Ds\frac{d\frac{\beta\sqrt{x}}{\alpha}}{1+\left(\frac{\beta\sqrt{x}}{\alpha}\right)^2} = \arctan\frac{\beta\sqrt{x}}{\alpha} = Ds\frac{\alpha\beta dy}{2}. \tag{2}$$

Befreit man dy von den Konstanten, so ist:

$$\frac{2}{\alpha\beta}\arctan\frac{\beta\sqrt{x}}{\alpha} = \frac{2}{\sqrt{ab}}\arctan\sqrt{\frac{bx}{a}} = Ds\frac{dx}{\sqrt{x}(\alpha^2+\beta^2x)} = Ds\frac{dx}{\sqrt{x}(a+bx)}. \tag{3}$$

II. Ist die Gleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}(a-bx)} = \frac{dx}{\sqrt{x}(\alpha^2-\beta^2x)} = dy \tag{4}$$

zu integrieren, so setze man:

$$\pi = \alpha + \beta\sqrt{x}, \tag{5}$$

$$\varrho = \alpha - \beta\sqrt{x}, \tag{6}$$

$$\pi\varrho = \alpha^2 - \beta^2 x = \omega, \tag{7}$$

$$\frac{\pi-\varrho}{\sqrt{x}} = 2\beta \tag{8}$$

und führe dann mit Rücksicht auf die Gl. 8 Variable und Konstanten ein, also:

$$\frac{(\pi-\varrho)dx}{x\pi\varrho} = \frac{dx}{x\varrho} - \frac{dx}{x\pi} = 2\beta dy. \tag{9}$$

Nun ist aber:

$$Ds\frac{dx}{x\varrho} = Ds\frac{dx}{x(\alpha-\beta\sqrt{x})} = Ds\frac{\frac{dx}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}(\alpha-\beta\sqrt{x})} = Ds\frac{2d\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\alpha-\beta\sqrt{x})} =$$

$$= \frac{2}{\alpha}\log\frac{\sqrt{\bar{x}}}{\alpha-\beta\sqrt{\bar{x}}}, \qquad 10^{*})$$

$$Ds - \frac{dx}{x\pi} = Ds - \frac{dx}{x(\alpha+\beta\sqrt{x})} = (\S.\,21\ \text{Gl.}\ 10) - \frac{2}{\alpha}\log\frac{\sqrt{\bar{x}}}{\alpha+\beta\sqrt{\bar{x}}}. \qquad 11)$$

Substituiert man die Werte der Differentialsummen aus den Gl. 10 und 11 in die Gl. 9 und befreit dann dy von den Konstanten, so ist:

$$\frac{1}{\alpha\beta}\log\frac{\alpha+\beta\sqrt{\bar{x}}}{\alpha-\beta\sqrt{\bar{x}}} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\log\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b\bar{x}}}{\sqrt{a}-\sqrt{b\bar{x}}} = Ds\frac{dx}{\sqrt{x}(\alpha^2-\beta^2 x)} = Ds\frac{dx}{\sqrt{x}(a-bx)}. \qquad \mathbf{12)}$$

Ebenso ist:

$$Ds\frac{dx}{\sqrt{x}(-a+bx)} = Ds\frac{dx}{\sqrt{x}(-\alpha^2+\beta^2 x)} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\log\frac{\sqrt{b\bar{x}}-\sqrt{a}}{\sqrt{b\bar{x}}+\sqrt{a}} =$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta}\log\frac{\beta\sqrt{\bar{x}}-\alpha}{\beta\sqrt{\bar{x}}+\alpha}. \qquad \mathbf{13)}$$

III. Zur Integration der Gleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}(a+bx^2)} = \frac{dx}{\sqrt{x}(\alpha^4+\beta^4x^2)} = \frac{dx}{\sqrt{x}\,\omega} = dy \qquad 14)$$

setze man (vgl. §. 15 Gl. 4—7):

$$\pi = \alpha^2 + \sqrt{2}\alpha\beta\sqrt{x} + \beta^2 x, \qquad 15)$$

$$\varrho = \alpha^2 - \sqrt{2}\alpha\beta\sqrt{x} + \beta^2 x, \qquad 16)$$

$$\pi\varrho = \alpha^4 + \beta^4 x^2 = a + bx^2 = \omega, \qquad 17)$$

$$\frac{\pi-\varrho}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{2}\alpha\beta \qquad 18)$$

und führe sodann in die Gl. 14 mit Rücksicht auf die Gl. 18 Variable und Konstanten ein, also:

$$\frac{(\pi-\varrho)dx}{x\pi\varrho} = \frac{dx}{x\varrho} - \frac{dx}{x\pi} = 2\sqrt{2}\alpha\beta dy. \qquad 19)$$

Nun ist aber zufolge §. 21 Gl. 24. 20:

$$Ds\frac{dx}{x\varrho} = Ds\frac{\frac{dx}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}(\alpha^2-\sqrt{2}\alpha\beta\sqrt{x}+\beta^2 x)} = 2\,Ds\frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\alpha^2-\sqrt{2}\alpha\beta\sqrt{x}+\beta^2 x)} =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\log\frac{\bar{x}}{\varrho} + \frac{\sqrt{2}\beta}{\alpha}\,Ds\frac{d\sqrt{x}}{\varrho}, \qquad 20)$$

---

*) Dieses Integral ist im §. 21 nicht abgeleitet worden, es kann aber sehr leicht mit der daselbst dargestellten Methode gefunden werden.

$$Ds\frac{dx}{x\pi} = -\frac{1}{\alpha^2}\log\frac{\overline{x}}{\overline{\pi}} + \frac{\sqrt{2}\,\beta}{\alpha}\,Ds\frac{d\sqrt{x}}{\pi}. \qquad 21)$$

Substituiert man die Differentialsummen aus den Gl. 20 und 21 in die Gl. 19, so ergiebt sich nach einigen Reductionen:

$$\frac{1}{a^2}\log\frac{\overline{\pi}}{\overline{\varrho}} + \frac{\sqrt{2}\beta}{\alpha}\left[Ds\frac{d\sqrt{x}}{\pi} + Ds\frac{d\sqrt{x}}{\varrho}\right] = 2\sqrt{2}\,\alpha\beta dy. \qquad 22)$$

Substituiert man endlich den Wert für die eingeklammerten Differentialsummen aus §. 12 Gl. 24 und befreit dann dy von den Konstanten, so ist:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}\,\alpha^3\beta}\left[\log\frac{\alpha^2+\sqrt{2}\,\alpha\beta\sqrt{\overline{x}}+\beta^2\overline{x}}{\alpha^2-\sqrt{2}\,\alpha\beta\sqrt{\overline{x}}+\beta^2\overline{x}} + 2\arctan\frac{\sqrt{2}\,\alpha\beta\sqrt{\overline{x}}}{\alpha^2-\beta^2\overline{x}}\right] = Ds\frac{dx}{\sqrt{x}(\alpha^4+\beta^4x^2)} =$$
$$= Ds\frac{dx}{\sqrt{x}(a+bx^2)}. \qquad 23)$$

Setzt man in dem vorstehenden Integral $\frac{\alpha}{\beta} = k$ und ersetzt mittelst der geeigneten Operationen α und β überall durch k, so erlangt dasselbe seine übliche Gestalt.

IV. Zur Integration der Gleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}(a-bx^2)} = \frac{dx}{\sqrt{x}(\alpha^4-\beta^4x^2)} = \frac{dx}{\sqrt{x}\,\omega} = dy \qquad 24)$$

setze man:

$$\pi = \alpha^2 + \beta^2 x, \qquad 25)$$

$$\varrho = \alpha^2 - \beta^2 x, \qquad 26)$$

$$\pi\varrho = \alpha^4 - \beta^4x^2 = a - bx^2 = \omega, \qquad 27)$$

$$\pi + \varrho = 2\alpha^2 \qquad 28)$$

und es ergiebt sich, wenn man in die Gl. 24 Variable und Konstanten einführt (Gl. 28):

$$\frac{(\pi+\varrho)dx}{\sqrt{x}\pi\varrho} = \frac{dx}{\sqrt{x}\varrho} + \frac{dx}{\sqrt{x}\pi} = 2\alpha^2 dy. \qquad 29)$$

Nun ist aber zufolge Gl. 12 und 3:

$$Ds\frac{dx}{\sqrt{x}\varrho} = Ds\frac{dx}{\sqrt{x}(\alpha^2-\beta^2x)} = \frac{1}{\alpha\beta}\log\frac{\alpha+\beta\sqrt{\overline{x}}}{\alpha-\beta\sqrt{\overline{x}}}, \qquad 30)$$

$$Ds\frac{dx}{\sqrt{x}\pi} = Ds\frac{dx}{\sqrt{x}(\alpha^2+\beta^2x)} = \frac{2}{\alpha\beta}\arctan\frac{\beta\sqrt{\overline{x}}}{\alpha} \qquad 31)$$

und wenn man die vorstehenden Differentialsummen in die Gl. 29 substituiert und dann dy von den Konstanten befreit, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{2\alpha^3\beta}\left[\log\frac{\alpha+\beta\sqrt{\bar{x}}}{\alpha-\beta\sqrt{\bar{x}}}+2\arctan\frac{\beta\sqrt{\bar{x}}}{\alpha}\right]=Ds\frac{dx}{\sqrt{\bar{x}}(\alpha^4-\beta^4x^2)}=$$

$$=Ds\frac{dx}{\sqrt{\bar{x}}(a-bx^2)}. \qquad 32)$$

Ebenso ist:

$$\frac{1}{2\alpha^3\beta}\left[\log\frac{\beta\sqrt{\bar{x}}-\alpha}{\beta\sqrt{\bar{x}}+\alpha}-2\arctan\frac{\beta\sqrt{\bar{x}}}{\alpha}\right]=Ds\frac{dx}{\sqrt{\bar{x}}(-\alpha^4+\beta^4x^2)}. \qquad 33)$$

V. Bei der Integration von:

$$\frac{dx}{\sqrt{\bar{x}}(a+bx+cx^2)}=\frac{dx}{\sqrt{\bar{x}}\,\omega}=dy \qquad 34)$$

ist zu unterscheiden, ob $b^2 \gtreqless 4ac$ ist.

Ist $b^2>4ac$, folglich $\sqrt{\delta}$ eine reelle Grösse, so benützt man dieselben Abkürzungen wie im §. 10 Gl. 1—8 und es ergiebt sich, wenn man mit Rücksicht auf §. 10 Gl. 7 Variable und Konstanten einführt:

$$\frac{dx}{\sqrt{\bar{x}}(b-\sqrt{\delta}+2cx)}-\frac{dx}{\sqrt{\bar{x}}(b+\sqrt{\delta}+2cx)}=\frac{\sqrt{\delta}\,dy}{2c} \qquad 35)$$

oder, wenn man $b+\sqrt{\delta}=A$, $b-\sqrt{\delta}=A'$ setzt und dann die Integration nach Abs. I vornimmt:

$$\frac{2\sqrt{2c}}{\sqrt{\delta}}\left[\frac{1}{\sqrt{A'}}\arctan\sqrt{\frac{2c\bar{x}}{A'}}-\frac{1}{A}\arctan\sqrt{\frac{2c\bar{x}}{A}}\right]=Ds\frac{dx}{\sqrt{\bar{x}}(a+bx+cx^2)}. \qquad 36)$$

Ist dagegen $b^2=4ac$, also $\sqrt{\delta}=0$, so kann die Gl. 34 (vgl. §. 10 Gl. 5, 6, 18, 19), auch so geschrieben werden:

$$Ds\frac{4c\,dx}{\sqrt{\bar{x}}(b+2cx)^2}=8c\,Ds\frac{d\sqrt{\bar{x}}}{[b+2c(\sqrt{\bar{x}})^2]^2}=(\text{§. 16 Gl. 20})\,\frac{4c\sqrt{\bar{x}}}{b(b+2c\bar{x})}+$$

$$+\frac{4c}{b}Ds\frac{d\sqrt{\bar{x}}}{b+2cx}=\frac{4c\sqrt{\bar{x}}}{b(b+2c\bar{x})}+\frac{2c}{b}Ds\frac{dx}{\sqrt{\bar{x}}(b+2cx)}=Ds\frac{dx}{\sqrt{\bar{x}}(a+bx+cx^2)}. \qquad 37)$$

Ist endlich $b^2<4ac$, also $\sqrt{\delta}$ imaginär, so schreibt man die Gl. 34, indem man die im §. 13 Gl. 19—25 enthaltenen Abkürzungen benützt, folgendermassen:

$$Ds\frac{dx}{\sqrt{\bar{x}}(a+bx+cx^2)}=2\,Ds\frac{d\sqrt{\bar{x}}}{a+b(\sqrt{\bar{x}})^2+c(\sqrt{\bar{x}})^4}=$$

$$=(\text{§. 13 Gl. 32})\,\frac{1}{2\sqrt{a\lambda}}\log\frac{\sqrt{a}+\sqrt{\lambda\bar{x}}+\sqrt{c\bar{x}}}{\sqrt{a}-\sqrt{\lambda\bar{x}}+\sqrt{c\bar{x}}}+\frac{1}{\sqrt{a\varkappa}}\arctan\frac{\sqrt{c\bar{x}}-\sqrt{a}}{\sqrt{\varkappa\bar{x}}}. \qquad 38)$$

VI. Zur Integration der Gleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{\bar{x}}(a-bx+cx^2)}=\frac{dx}{\sqrt{\bar{x}}\,\omega}=dy \qquad 39)$$

sind ganz ähnliche Methoden wie sub V anzuwenden.

Ist nämlich $b^2 > 4ac$, so verwandelt sich die vorstehende Gleichung mit Rücksicht auf §. 10 Gl. 21—29 in folgenden Ausdruck:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}(b-\sqrt{\delta}-2cx)} - \frac{dx}{\sqrt{x}(b+\sqrt{\delta}-2cx)} = \frac{\sqrt{\delta}\,dy}{2c} \qquad 40)$$

und wenn man wieder $A = b + \sqrt{\delta}$, $A' = b - \sqrt{\delta}$ gleich setzt und dann nach Abs. II integriert, so erhält man das Integral:

$$\frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{\delta}}\left[\frac{1}{\sqrt{A'}}\log\frac{\sqrt{A'}+\sqrt{2c\bar{x}}}{\sqrt{A'}-\sqrt{2c\bar{x}}} - \frac{1}{\sqrt{A}}\log\frac{\sqrt{A}+\sqrt{2c\bar{x}}}{\sqrt{A}-\sqrt{2c\bar{x}}}\right] = Ds\frac{dx}{\sqrt{x}(a-bx+cx^2)}. \qquad 41)$$

Ist dagegen $b^2 = 4ac$, folglich $\sqrt{\delta} = 0$, so ergiebt sich nach ganz ähnlichen Rechnungen wie sub V:

$$\frac{4c\sqrt{\bar{x}}}{b(b-2c\bar{x})} + \frac{2c}{b}Ds\frac{dx}{\sqrt{x}(b-2cx)} = Ds\frac{dx}{\sqrt{x}(a-bx+cx^2)}. \qquad 42)$$

Ist endlich $b^2 < 4ac$, also $\sqrt{\delta}$ imaginär, so ergiebt sich, wenn man die im §. 13 Abs. V enthaltenen Abkürzungen und die dort abgeleitete Gleichung 38 benützt:

$$\frac{1}{2\sqrt{a\varkappa}}\log\frac{\sqrt{a}+\sqrt{\varkappa\bar{x}}+\sqrt{c\bar{x}}}{\sqrt{a}-\sqrt{\varkappa\bar{x}}+\sqrt{c\bar{x}}} + \frac{1}{\sqrt{a\lambda}}\operatorname{arctan}\frac{\sqrt{c\bar{x}}-\sqrt{a}}{\sqrt{\lambda\bar{x}}} = Ds\frac{dx}{\sqrt{x}(a-bx+cx^2)}. \qquad 43)$$

VII. Ist die Gleichung:

$$\frac{dx}{(f+gx)\sqrt{a+bx}} = \frac{dx}{(f+gx)\sqrt{\omega}} = dy \qquad 44)$$

zu integrieren, so setze man:

$$p = f + gx; \quad x = \frac{p-f}{g}, \qquad 45)$$

$$A = ag - bf, \qquad 46)$$

und es verwandelt sich die Gl. 44, wenn man den Wert von x aus der Gl. 45 in $\sqrt{\omega}$ substituiert, in die Relation

$$\frac{dp}{p\sqrt{A+bp}} = \frac{dp}{p\sqrt{\Omega}} = \sqrt{g}\,dy; \quad [\Omega = g\omega]. \qquad 47)$$

Ist $ag > bf$, also A positiv, so integriert man nach §. 33 Gl. 43 und es ergiebt sich:

$$\frac{1}{\sqrt{g(ag-bf)}}\log\frac{\sqrt{g\bar{\omega}}-\sqrt{ag-bf}}{\sqrt{g\bar{\omega}}+\sqrt{ag-bf}} = Ds\frac{dx}{(f+gx)\sqrt{a+bx}}. \qquad 48)$$

Ist $ag = bf$, also $A = 0$, so verwandelt sich die Gl. 47 in:

$$\frac{dp}{\sqrt{b}p^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{g}\,dy \qquad 49)$$

oder

$$-\frac{2}{\sqrt{bg(f+gx)}} = Ds\frac{dx}{(f+gx)\sqrt{a+bx}}. \qquad 50)$$

Ist endlich $ag < bf$, so ist, weil in dieser Schrift A, B, C u. s. w. überall als positive Grössen vorausgesetzt werden:

$$ag - bf = -A; \quad bf - ag = A \tag{51}$$

und es verwandelt sich demgemäss die Gl. 47 in die Relation:

$$\frac{dp}{p\sqrt{-A + bp}} = \sqrt{g}dy \tag{52}$$

oder wenn man nach §. 33 Gl. 44 integriert:

$$\frac{2}{\sqrt{g(bf - ag)}} \operatorname{arctan} \frac{\sqrt{g\varpi}}{\sqrt{bf - ag}} = Ds \frac{dx}{(f + gx)\sqrt{a + bx}}. \tag{53}$$

VIII. Ist die Gleichung:

$$\frac{dx}{(f + gx)\sqrt{a + bx^2}} = \frac{dx}{(f + gx)\sqrt{\omega}} = dy \tag{54}$$

zu integrieren, so setze man:

$$p = f + gx; \quad x = \frac{p - f}{g}, \tag{55}$$

$$A = ag^2 + bf^2; \quad B = 2bf; \quad C = b \tag{56}$$

und es verwandelt sich die Gl. 54, wenn man in $\sqrt{\omega}$ den Wert von x aus der Gl. 55 substituiert, in folgenden Ausdruck:

$$\frac{dp}{p\sqrt{A - Bp + Cp^2}} = \frac{dp}{p\sqrt{\Omega}} = dy; \quad [\Omega = g^2\omega]. \tag{57}$$

Integriert man nun nach §. 33 Gl. 26, so ergiebt sich nach einigen Reduktionen das Integral:

$$\frac{1}{2\sqrt{ag^2 + bf^2}} \log \frac{ag - bf\overline{x} - \sqrt{(ag^2 + bf^2)\overline{\omega}}}{ag - bf\overline{x} + \sqrt{(ag^2 + bf^2)\overline{\omega}}} = Ds \frac{dx}{(f + gx)\sqrt{a + bx^2}}. \tag{58}$$

Da in dieser Schrift überall vorausgesetzt wird, dass a, b, c, f, g positive Grössen sind, so ist in diesem Falle $\sqrt{A}$ immer reell und es genügt deshalb dieses Integral.

IX. Ist die Gleichung:

$$\frac{dx}{(f + gx^2)\sqrt{a + bx}} = \frac{dx}{\sqrt{a + bx}\,\omega} = dy \tag{59}$$

zu integrieren, so setze man

$$a + bx = p; \quad x = \frac{p - a}{b}, \tag{60}$$

$$A = a^2g + b^2f; \quad B = 2ag; \quad C = g, \tag{61}$$

$$K = 2\sqrt{AC} + B = 2\sqrt{(a^2g + b^2f)g} + 2ag \text{ (vgl. §. 13 Gl. 20, 21)}, \tag{62}$$

$$L = 2\sqrt{AC} - B = 2\sqrt{(a^2g + b^2f)g} - 2ag \tag{63}$$

und es verwandelt sich die Gl. 59, wenn man den Wert von x aus der Gl. 60 in den Ausdruck $f+gx^2$ substituiert, in folgende Relation:

$$\frac{dp}{\sqrt{p}(A-Bp+Cp^2)}=\frac{dp}{\sqrt{p}\,\Omega}=\frac{dy}{b}; \quad [\Omega=b^2\omega]. \tag{64}$$

Dieses Differential kann nach Abs. VI leicht integriert werden und zwar ist, da im vorliegenden Fall immer $B^2<4AC$ ist, die Integrationsformel der Gl. 43 zu benützen. Es ergiebt sich dann:

$$\frac{b}{2\sqrt{AK}}\log\frac{\sqrt{A}+\sqrt{Kp}+\sqrt{Cp}}{\sqrt{A}-\sqrt{Kp}+\sqrt{Cp}}+\frac{b}{\sqrt{AL}}\operatorname{arctan}\frac{\sqrt{Cp}-\sqrt{A}}{\sqrt{Lp}}=$$
$$=Ds\frac{dx}{(f+gx^2)\sqrt{a+bx}}. \tag{65}$$

X. Ist die Gleichung:

$$\frac{dx}{(f+gx^2)\sqrt{a+bx^2}}=\frac{dx}{p\sqrt{\omega}}=dy, \tag{66}$$

so setze man, wenn $bf>ag$ ist:

$$\tau=f(bf-ag), \tag{67}$$

$$\pi=f\sqrt{\omega}+x\sqrt{\tau}; \quad \pi'=\frac{f\omega'}{2\sqrt{\omega}}+\sqrt{\tau}, \tag{68}$$

$$\varrho=f\sqrt{\omega}-x\sqrt{\tau}; \quad \varrho'=\frac{f\omega'}{2\sqrt{\omega}}-\sqrt{\tau}, \tag{69}$$

$$\pi\varrho=af(f+gx^2)=afp, \tag{70}$$

$$\pi'\varrho-\pi\varrho'=\frac{2af\sqrt{\tau}}{\sqrt{\omega}}; \quad \sqrt{\omega}(\pi'\varrho-\pi\varrho')=2af\sqrt{\tau}. \tag{71}$$

Multipliziert man nun das linksseitige Differential der Gl. 66 im Zähler und Nenner in Gemässheit der Gl. 70, so ist:

$$\frac{afpdx}{p\pi\varrho\sqrt{\omega}}=dy \tag{72}$$

und wenn man dann mit Rücksicht auf die Gl. 71 Variable und Konstanten einführt:

$$\frac{afp\sqrt{\omega}(\pi'\varrho-\pi\varrho')dx}{p\pi\varrho\sqrt{\omega}}=2af\sqrt{\tau}dy \tag{73}$$

oder

$$\frac{\pi'dx}{\pi}-\frac{\varrho'dx}{\varrho}=2\sqrt{\tau}dy. \tag{74}$$

Verfährt man nun mit dieser Gleichung in der bekannten Weise, so ist:

$$\frac{1}{2\sqrt{\tau}}\log\frac{\pi}{\varrho} = \frac{1}{2\sqrt{f(bf-ag)}}\log\frac{f\sqrt{a+b\bar{x}^2}+\bar{x}\sqrt{f(bf-ag)}}{f\sqrt{a+b\bar{x}^2}-\bar{x}\sqrt{f(bf-ag)}} =$$

$$= Ds\frac{dx}{(f+gx^2)\sqrt{a+bx^2}}. \qquad \mathbf{75)}$$

Ist $bf < ag$, so wird die vorstehende Gleichung imaginär und man schreibt deshalb die Gl. 66, um das Kreisbogenintegral zu gewinnen:

$$\frac{\frac{af\sqrt{\tau}dx}{\sqrt{\omega}}}{af(f+gx^2)} = \sqrt{\tau}dy. \qquad 76)$$

Nun ist aber:

$$af(f+gx^2) = f^2\omega + \tau x^2 = f^2\omega\left[1+\frac{\tau x^2}{f^2\omega}\right] \qquad 77)$$

und wenn man diesen Wert in die Gl. 76 substituiert:

$$\frac{\frac{a\sqrt{\tau}dx}{f\omega^{\frac{3}{2}}}}{1+\left(\frac{\sqrt{\tau}x}{f\sqrt{\omega}}\right)^2} = \sqrt{\tau}dy. \qquad 78)$$

Da endlich $\frac{adx}{\omega^{\frac{3}{2}}} = d\frac{x}{\sqrt{\omega}}$ ist, so kann man die vorstehende Gleichung auch so schreiben:

$$Ds\frac{d\frac{\sqrt{\tau}x}{f\sqrt{\omega}}}{1+\left(\frac{\sqrt{\tau}x}{f\sqrt{\omega}}\right)^2} = \operatorname{arctan}\frac{\sqrt{\tau}\bar{x}}{f\sqrt{\bar{\omega}}} = Ds\sqrt{\tau}dy \qquad 79)$$

oder

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}}\operatorname{arctan}\frac{\sqrt{\tau}\bar{x}}{f\sqrt{\bar{\omega}}} = \frac{1}{\sqrt{f(bf-ag)}}\operatorname{arctan}\frac{\bar{x}\sqrt{f(bf-ag)}}{f\sqrt{a+b\bar{x}^2}} = Ds\frac{dx}{(f+gx^2)\sqrt{a+bx^2}}. \qquad \mathbf{80)}$$

Ist endlich $bf = ag$, folglich $g = \frac{bf}{a}$, so nimmt die Gl. 66, wenn man in derselben für g diesen Wert substituiert, folgende Gestalt an:

$$Ds\frac{adx}{f(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\bar{x}}{f\sqrt{a+b\bar{x}^2}} = Ds\frac{dx}{(f+gx^2)\sqrt{a+bx^2}}. \qquad \mathbf{81)}$$

XI. Ist die Gleichung:

$$\frac{dx}{(f+gx)\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{dx}{(f+gx)\sqrt{\omega}} = dy \qquad 82)$$

zu integrieren, so setzt man:

$$p = f+gx; \quad x = \frac{p-f}{g}, \qquad 83)$$

$$A = ag^2 - bfg + cf^2; \quad B = bg - 2cf; \quad C = c \qquad 84)$$

und es verwandelt sich die Gl. 82, wenn man den Wert von x aus der Gl. 83 in $\sqrt{\omega}$ (Gl. 82) substituiert, in folgenden Ausdruck:

$$\frac{dp}{p\sqrt{A+Bp+Cp^2}} = \frac{dp}{p\sqrt{\Omega}} = dy; \quad [\Omega = g^2\omega]. \tag{85}$$

Ist $ag^2 + cf^2 > bfg$, folglich A positiv, so integriert man das vorstehende Differential nach §. 33 Gl. 25 und es ergiebt sich das Integral:

$$\frac{1}{2\sqrt{A}}\log\frac{2A+B\overline{p}-2\sqrt{A\overline{\Omega}}}{2A+B\overline{p}+2\sqrt{A\overline{\Omega}}} = \frac{1}{2\sqrt{A}}\log\frac{2ag-bf+B\overline{x}-2\sqrt{A\overline{\omega}}}{2ag-bf+B\overline{x}+2\sqrt{A\overline{\omega}}} =$$

$$= Ds\frac{dx}{(f+gx)\sqrt{a+bx+cx^2}}. \tag{86}$$

Ist $ag^2 + cf^2 = bfg$, also $A = 0$, so nimmt die Gl. 85 folgende Gestalt an:

$$\frac{dp}{p\sqrt{Bp+Cp^2}} = \frac{dp}{p\sqrt{\Omega}} = dy \tag{87}$$

und es ergiebt sich, wenn man nach §. 33 Gl. 53 integriert:

$$-\frac{2\sqrt{\overline{\Omega}}}{B\overline{p}} = -\frac{2g\sqrt{\overline{\omega}}}{(bg-2cf)(f+gx)} = Ds\frac{dx}{(f+gx)\sqrt{a+bx+cx^2}}. \tag{88}$$

Ist endlich $ag^2 + cf^2 < bgf$, so ist, da A immer als eine positive Grösse vorausgesetzt wird:

$$ag^2 - bgf + cf^2 = -A; \quad bgf - ag^2 - cf^2 = A \tag{89}$$

und es nimmt die Gl. 85 demgemäss folgende Gestalt an:

$$\frac{dp}{p\sqrt{-A+Bp+Cp^2}} = \frac{dp}{p\sqrt{\Omega}} = dy. \tag{90}$$

Integriert man nun die vorstehende Gleichung nach §. 33 Gl. 50, so ergiebt sich folgendes Integral:

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\arctan\frac{-2A+B\overline{p}}{2\sqrt{A\overline{\Omega}}} = \frac{1}{\sqrt{A}}\arctan\frac{2ag-bf+B\overline{x}}{2\sqrt{A\overline{\omega}}} =$$

$$= Ds\frac{dx}{(f+gx)\sqrt{a+bx+cx^2}}. \tag{91}$$

XII. Ich habe bei den vorstehenden Integrationen (Abs. I—XI) mit wenigen Ausnahmen vorausgesetzt, dass die Zeichen der in den Differentialen erscheinenden Binome und Trinome durchgreifend positiv sind. Die hier entwickelten Methoden machen es jedoch leicht, auch alle Zeichenkombinationen jener Differentiale der Integration zu unterziehen, da die Ausdrücke, auf welche diese letzteren zurückgeführt werden können, im §. 33 in allen ihren Zeichenkombinationen integriert worden sind. Auch die Zeichenkombinationen der oben in den Abs. V und VI gefundenen Integrale, welche zur Integration der im Abs. IX vorkommenden Differentiale notwendig sind, können durch die daselbst (Abs. V und VI) entwickelten Methoden in Verbindung mit §. 10—12 dieser Abhandlung ohne Schwierigkeit gefunden werden.

Ebenso ist leicht ersichtlich, dass die oben entwickelten Methoden es ermöglichen, auch zahlreiche andere Differentiale mit höheren Potenzen von x z. B.

$$\frac{dx}{\sqrt{x}(a+bx^3)},\quad \frac{dx}{\sqrt{x}(a+bx^2+cx^4)},\quad \frac{dx}{(f-gx^2)\sqrt{a+bx+cx^2}}\ \text{u. s. w.}$$

der Integration zu unterziehen. Die Darlegung dieser ziemlich weitläufigen Rechnungen würde jedoch an diesem Ort zu weit führen.

XIII. Zur Integration der Gleichung:

$$\frac{dx}{a+b\sin x}=\frac{dx}{p}=\frac{d\sin x}{p\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{dp}{p\sqrt{b^2-a^2+2ap-p^2}} \tag{92}$$

setze man $A=b^2-a^2$, $B=2a$, $C=1$ und es ergiebt sich zufolge der Integrationsformel in §. 33 Gl. 27 nach einigen Reduktionen ($\Omega=b^2\cos x^2$):

$$Ds\,\frac{dp}{p\sqrt{A+Bp-Cp^2}}=\frac{dp}{p\sqrt{\Omega}}=\frac{1}{2\sqrt{A}}\log\frac{2A+B\overline{p}-2\sqrt{A\overline{\Omega}}}{2A+B\overline{p}+2\sqrt{A\overline{\Omega}}}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{b^2-a^2}}\log\frac{b+a\sin\overline{x}-\cos\overline{x}\sqrt{b^2-a^2}}{b+a\sin\overline{x}+\cos\overline{x}\sqrt{b^2-a^2}}=Ds\,\frac{dx}{a+b\sin x}. \tag{93}$$

Die vorstehende Formel wird für $b<a$ imaginär und es ist deshalb die Integration durch Kreisbögen erforderlich. Zu diesem Zweck setze man, da A nach der allgemeinen in dieser Schrift gemachten Voraussetzung immer eine positive Zahl ist:

$$b^2-a^2=-A;\qquad a^2-b^2=A \tag{94}$$

und es ergiebt sich statt der Gl. 93 folgender Ausdruck (§. 33 Gl. 36):

$$Ds\,\frac{dp}{p\sqrt{-A+Bp-Cp^2}}=Ds\,\frac{dp}{p\sqrt{\Omega}}=\frac{1}{\sqrt{A}}\arctan\frac{-2A+B\overline{p}}{2\sqrt{A\overline{\Omega}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\frac{b+a\sin\overline{x}}{\sqrt{a^2-b^2}\cos\overline{x}}=Ds\,\frac{dx}{a+b\sin x}. \tag{95}$$

Ist endlich im Differential in der Gl. 92 $a=b$, so ist ($p=1+\sin x$):

$$Ds\,\frac{dx}{a(1+\sin x)}=\frac{1}{a}Ds\,\frac{d\sin x}{(1+\sin x)\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{1}{a}Ds\,\frac{dp}{p\sqrt{2p-p^2}}=$$

$$=(\text{§. 33 Gl. 42})-\frac{\cos\overline{x}}{a(1+\sin\overline{x})}=Ds\,\frac{dx}{a+b\sin x}. \tag{96}$$

Es ist leicht ersichtlich, dass man nach den soeben entwickelten Methoden nicht nur alle Zeichenkombinationen des Differentials $\frac{dx}{\pm a \pm b \sin x}$, sondern auch die Differentiale $\frac{dx}{\pm a \pm b \cos x}$, $\frac{dx}{\pm a \pm b \operatorname{tg} x}$ u. s. w. leicht integrieren kann.

§. 36.

Integration von $x^m(a + bx^n)^{\frac{p}{r}}$.

Ich werde im Anschluss an die bisherigen Darstellungen der Integralrechnung zuerst die Integrale des sg. binomischen Differentials $x^m(a + bx^n)^{\frac{p}{r}} dx$, in welchem m, n, p, r ganze positive Zahlen bedeuten, vermittelst der neuen Methoden ableiten, und dann dieselben auch rücksichtlich der verschiedenen Kombinationen desselben (z. B. $\frac{x^m dx}{(a + bx^n)^{\frac{p}{r}}}$, $\frac{dx}{x^m(a + bx^n)^{\frac{p}{r}}}$ u. s. w.) auf dem nämlichen Wege ermitteln. Zwar kann man diese letzteren Integrale auch mittelbar in der Weise finden, dass man in dem binomischen Differential und in den entsprechenden Integralen m durch $-m$, p durch $-p$ ersetzt; allein es ist gewiss ein wissenschaftliches Bedürfnis, dass alle diese praktisch so bedeutsamen Integrale einmal auf streng methodischem Wege aus den Differentialen selbst abgeleitet werden, damit man über die Notwendigkeit ihrer einzelnen Bestandteile eine klare Anschauung gewinnen kann. Auch gewährt die Ableitung der wichtigsten binomischen und trinomischen Integrale einen Einblick in das Wesen der neuen Methoden, wie er sonst schwerlich zu erreichen ist. Überdies werden diese Ableitungen demjenigen, welcher sich mit dem neuen Integrationssystem vertraut machen will, bei der Auffindung der einzelnen Integrale als Muster gute Dienste leisten.

I. Zur Integration der Gleichung:

$$x^m(a + bx^n)^{\frac{p}{r}} dx = x^m \omega^{\frac{p}{r}} dx = dy \qquad 1)$$

kann man zunächst die Methode der Hilfsdifferentiale und zwar in einer doppelten Weise gebrauchen. Man kann nämlich das zu integrierende Differential entweder als die erste Funktion der Differentialsumme betrachten, sie durch Multiplikation der Gleichung mit den erforderlichen Koeffizienten ausstatten und dann die zweite Funktion der Differentialsumme als Hilfsdifferential hinzufügen. Oder man kann umgekehrt das Differential als die zweite Funktion der Differentialsumme behandeln und die erste durch Hinzufügung eines Hilfsdifferentials beschaffen. Ich will zunächst die erste Methode anwenden (vgl. Abs. II).

Zu diesem Zweck muss man zuvörderst die Gl. 1 mit $m + 1$ multiplizieren, also:

$$(m+1)x^m \omega^{\frac{p}{r}} dx = (m+1)dy. \qquad 2)$$

Damit ist, wie sich sofort (Gl. 5 u. 6) ergeben wird, die erste Funktion der Differentialsumme gebildet; um auch die zweite herzustellen, führe man Hilfsdifferentiale ein, nämlich

$$(m+1)x^m \omega^{\frac{p}{r}} dx + \frac{pnbx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}-1} dx}{r} - \frac{pnbx^{m+r}\omega^{\frac{p}{r}-1} dx}{r} = (m+1)dy. \qquad 3)$$

Nun ist aber:

$$nbx^{m+n} = x^{m+1}nbx^{n-1} = x^{m+1}\omega', \qquad 4)$$

folglich auch:

$$(m+1)x^m \omega^{\frac{p}{r}} dx + \frac{px^{m+1}\omega^{\frac{p}{r}-1}\omega' dx}{r} - \frac{bnp}{r}\cdot x^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}-1} dx = (m+1)dy. \qquad 5)$$

Bildet man schliesslich aus den beiden ersten Differentialen der vorstehenden Gleichung die Differentialsumme und befreit dann dy von den Konstanten, so ist:

$$\frac{1}{m+1} Ds\, x^{m+1}\omega^{\frac{p}{r}}\left[\frac{(m+1)dx}{x} + \frac{p\omega' dx}{r\omega}\right] - \frac{bnp}{(m+1)r} Ds\, x^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}-1} dx =$$
$$= Ds\, x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{r}} dx. \qquad 6)$$

II. Behandelt man das zu integrierende Differential als die zweite Funktion der Differentialsumme, so muss man die Gl. 1 mit $\frac{nb(p+r)}{r}$ multiplizieren und dann als erste Funktion der Differentialsumme das Hilfsdifferential $(m-n+1)x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}+1} dx$ hinzufügen, also:

$$(m-n+1)x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}+1} dx + \frac{nb(p+r)x^m\omega^{\frac{p}{r}} dx}{r} - (m-n+1)x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}+1} dx$$
$$= \frac{nb(p+r)dy}{r}. \qquad 7)$$

Bildet man auch hier aus den beiden ersten Differentialen links mit Berücksichtigung der Relation:

$$x^{m-n+1}\omega' = nbx^m \qquad 7^{a})$$

die Differentialsumme und befreit dann dy von den Konstanten, so ist:

$$\frac{r}{(p+r)nb} Ds\, x^{m-n+1}\omega^{\frac{p}{r}+1}\left[\frac{(m-n+1)dx}{x} + \frac{(p+r)\omega' dx}{r\omega}\right] -$$
$$- \frac{(m-n+1)r}{(p+r)nb} Ds\, x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}+1} dx = Ds\, x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{r}} dx. \qquad 8)$$

III. Die Gl. 1 kann ferner auch dadurch integriert werden, dass man in dieselbe mit Rücksicht auf die Relation:

$$\omega - bx^n = a \tag{9}$$

Variable und Konstanten einführt. Es ist dann:

$$x^m \omega^{\frac{p}{r}+1} dx - bx^{m+n} \omega^{\frac{p}{r}} dx = a dy. \tag{10}$$

Die Variablen haben in dieser Gleichung, wie sich sofort ergeben wird, die zur Bildung der Differentialsumme erforderliche Form. Um nun auch den beiden Differentialen links die zu diesem Zweck erforderlichen Konstanten zu verschaffen, kann man die Gleichung 10 entweder mit den für das erste Differential notwendigen Koeffizienten multiplizieren und dann das zweite Differential durch die Methode der ausgleichenden Hilfsdifferentiale mit den zur Bildung der Differentialsumme erforderlichen Konstanten ausstatten oder umgekehrt. Wählt man zunächst (vgl. Abs. IV) den ersten Weg, so muss man die Gl. 10 mit $m+1$ multiplizieren, also:

$$(m+1)x^m \omega^{\frac{p}{r}+1} dx - (m+1)bx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}} dx = (m+1) a dy. \tag{11}$$

Dadurch hat das erste Differential die zur Bildung der Differentialsumme erforderliche Form erlangt. Um nun auch das zweite Differential der Gl. 11 mit den zu diesem Zweck notwendigen Koeffizienten auszustatten, muss es in den Ausdruck:

$$\frac{(p+r)nbx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}} dx}{r} = (\text{Gl. } 4)\ \frac{(p+r)x^{m+1}\omega^{\frac{p}{r}}\omega' dx}{r} \tag{12}$$

umgestaltet werden, was durch ein ausgleichendes Hilfsdifferential leicht ermöglicht werden kann. Benutzt man dieselben Abkürzungen wie im §. 34 Abs. III und IV, so ist:

$$\frac{(p+r)n dz}{r} + d\xi = -(m+1)dz; \qquad [dz = bx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}} dx], \tag{13}$$

$$d\xi = -\frac{(mr+np+nr+r)dz}{r}, \tag{14}$$

$$\frac{(p+r)n dz}{r} - \frac{(mr+np+nr+r)dz}{r} = -(m+1)dz. \tag{15}$$

Substituiert man den Wert von $-(m+1)dz$ aus der Gl. 15 in die Gl. 11, so ist:

$$(m+1)x^m\omega^{\frac{p}{r}+1}dx + \frac{(p+r)nbx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r} -$$

$$- \frac{(mr+np+nr+r)b}{r} \cdot x^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}} dx = (m+1) a dy \tag{16}$$

oder mit Rücksicht auf die Gl. 12:

$$(m+1)x^m \omega^{\frac{p}{r}+1} dx + \frac{(p+r)x^{m+1}\omega^{\frac{p}{r}}\omega' dx}{r} -$$

$$-\frac{(mr+np+nr+r)b}{r} \cdot x^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}} dx = (m+1)a dy. \quad 17)$$

Bildet man endlich aus den beiden ersten Differentialen die Differentialsumme und befreit dann dy von den Konstanten, so ist:

$$\frac{1}{(m+1)a} Ds\, x^{m+1}\omega^{\frac{p}{r}+1}\left[\frac{(m+1)dx}{x} + \frac{(p+r)\omega' dx}{r\omega}\right] -$$

$$-\frac{(mr+np+nr+r)b}{(m+1)ar} Ds\, x^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}} dx = Ds\, x^m (a+bx^n)^{\frac{p}{r}} dx. \quad \mathbf{18)}$$

IV. Wählt man den zweiten Weg (s. oben Abs. III) und will man zunächst das zweite Differential der Gl. 10 mit den zur Bildung der Differentialsumme notwendigen Konstanten ausstatten, so multipliziert man die Gl. 10 mit $-\frac{n(p+r)}{r}$, also:

$$-\frac{n(p+r)x^m\omega^{\frac{p}{r}+1} dx}{r} + \frac{(p+r)nbx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}} dx}{r} = -\frac{an(p+r)dy}{r}. \quad 19)$$

Das zweite Differential hat nunmehr die zur Bildung der Differentialsumme erforderliche Form. Dagegen muss das erste Differential, wie schon aus den Gl. 11, 16, 17 ersichtlich ist, durch ein ausgleichendes Hilfsdifferential auf die Form $(m+1)x^m\omega^{\frac{p}{r}+1} dx$ gebracht werden. Zu diesem Zweck setzt man ähnlich wie im Abs. III:

$$(m+1)dz + d\xi = -\frac{n(p+r)dz}{r}; \qquad [dz = x^m\omega^{\frac{p}{r}+1} dx], \quad 20)$$

$$d\xi = -\frac{(mr+np+nr+r)dz}{r}, \quad 21)$$

$$(m+1)dz - \frac{(mr+np+nr+r)dz}{r} = -\frac{n(p+r)dz}{r}. \quad 22)$$

Substituiert man den Wert von $-\frac{n(p+r)dz}{r}$ aus der Gl. 22 in die Gl. 19, so ist:

$$(m+1)x^m\omega^{\frac{p}{r}+1} dx + \frac{(p+r)nbx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}} dx}{r} - \frac{mr+np+nr+r}{r} \cdot x^m\omega^{\frac{p}{r}+1} dx =$$

$$= -\frac{(p+r)an dy}{r}. \quad 23)$$

Bildet man nunmehr die Differentialsumme (s. Gl. 4 u. 12) und befreit man dann dy von den Konstanten, so ist:

$$-\frac{r}{(p+r)an} Ds\, x^{m+1} \omega^{\frac{p}{r}+1} \left[\frac{(m+1)dx}{x} + \frac{(p+r)\,\omega' dx}{r\omega}\right] +$$

$$+\frac{mr+np+nr+r}{(p+r)an} Ds\, x^m \omega^{\frac{p}{r}+1} dx = Ds\, x^m (a+bx^n)^{\frac{p}{r}} dx. \quad \mathbf{24)}$$

V. Die Integration des binomischen Differentials kann auch dadurch bewirkt werden, dass man das zu integrierende Differential selbst als Hilfsdifferential benutzt. Man multipliziert zu diesem Zweck die Gl. 1 (vgl. Abs. I) mit $m+1$, also:

$$(m+1)x^m \omega^{\frac{p}{r}} dx = (m+1)dy \qquad 25)$$

und führt sodann mit Rücksicht auf die Relation:

$$\frac{np\,x^m \omega^{\frac{p}{r}} dx}{r} = \frac{np\,dy}{r} \qquad 26)$$

das ursprüngliche Differential in die Gleichung nochmals als Hilfsdifferential ein:

$$(m+1)x^m \omega^{\frac{p}{r}} dx + \frac{np\,x^m \omega^{\frac{p}{r}} dx}{r} = (m+1)dy + \frac{np\,dy}{r} = \frac{(mr+np+r)\,dy}{r}. \quad 27)$$

Substituiert man nunmehr in dem zweiten Differential links an die Stelle von $\omega^{\frac{p}{r}}$ den Ausdruck $(a+bx^n)\ \omega^{\frac{p}{r}-1}$, so ist:

$$(m+1)x^m \omega^{\frac{p}{r}} dx + \frac{npb\,x^{m+n} \omega^{\frac{p}{r}-1} dx}{r} + \frac{anp\,x^m \omega^{\frac{p}{r}-1} dx}{r} = \frac{(mr+np+r)\,dy}{r}. \quad 28)$$

Bildet man endlich aus den beiden ersten Differentialen die Differentialsumme und befreit dann dy von den Konstanten, so ergiebt sich folgende Integrationsformel (s. Gl. 4):

$$\frac{r}{mr+np+r} Ds\, x^{m+1} \omega^{\frac{p}{r}} \left[\frac{(m+1)dx}{x} + \frac{p\omega' dx}{r\omega}\right] + \frac{anp}{mr+np+r} Ds\, x^m \omega^{\frac{p}{r}-1} dx =$$

$$= Ds\, x^m (a+b\,x^n)^{\frac{p}{r}} dx. \qquad \mathbf{29)}$$

VI. Die Integration des binomischen Integrals kann endlich auch auf dieselbe Weise wie im Abs. V, jedoch mit Benutzung einer anderen Substitution als in den Gl. 27 und 28 bewirkt werden. Man substituiert zu diesem Zweck den Wert von

$$x^n = \frac{\omega - a}{b} \qquad 30)$$

in die Gl. 1, worauf diese folgende Gestalt annimmt:

$$x^{m-n} \omega^{\frac{p}{r}+1} dx - a x^{m-n} \omega^{\frac{p}{r}} dx = b\,dy. \qquad 31)$$

Multipliziert man nun, um aus dem ersten Differential links die erste Funktion der Differentialsumme zu machen, die Gleichung mit $m-n+1$ (s. Abs. II), so ist:

$$(m-n+1)x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx - a(m-n+1)x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}}dx = (m-n+1)bdy. \quad 32)$$

Das erste Differential links hat nunmehr die zur Bildung der Differentialsumme erforderliche Form, dagegen ist das zweite Differential wegen des Exponenten in x^{m-n} zu diesem Zweck untauglich. Man führt deshalb auch in diesem Fall (vgl. Abs. V) das zu integrierende Differential als Hilfsdifferential mit Rücksicht auf die Relation:

$$\frac{(p+r)nbx^m\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r} = \frac{(p+r)nb\,dy}{r} \quad 33)$$

ein, so dass die Gl. 32 folgende Gestalt annimmt:

$$(m-n+1)x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx + \frac{(p+r)nbx^m\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r} - a(m-n+1)x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}}dx =$$

$$= (m-n+1)bdy + \frac{(p+r)nb\,dy}{r} = \frac{(mr+np+r)bdy}{r}. \quad 34)$$

Bildet man nunmehr die Differentialsumme und befreit dy von den Konstanten, so ist (s. oben Gl. 7[a]):

$$\frac{r}{(mr+np+r)b} Ds\, x^{m-n+1}\omega^{\frac{p}{r}+1}\left[\frac{(m-n+1)dx}{x} + \frac{(p+r)\omega' dx}{r\omega}\right] -$$

$$-\frac{(m-n+1)ar}{(mr+np+r)b} Ds\, x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}}dx = Ds\, x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{r}}dx. \quad \mathbf{35)}$$

Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass die in den Abs. I—VI entwickelten Integrale, wenn man $r=1$ setzt, ihre in den Lehrbüchern und Integraltafeln übliche Form erlangen. Die hier entwickelten Integrationsformeln sind übrigens für den praktischen Gebrauch bequemer, weil sie die Rechnung mit lauter ganzen Zahlen gestatten.

Gedächtnistafel.

Abs. I und II. Das zu integrierende binomische Differential wird sub I als erste, sub II als zweite Funktion der Differentialsumme behandelt und die noch fehlende Funktion durch Hinzufügung von Hilfsdifferentialen herbeigeschafft.

Abs. III und IV. In beiden Fällen werden Variable und Konstanten eingeführt und dann sub III das erste, sub IV das zweite Differential durch Multiplikation der Gleichung mit dem erforderlichen Koefficienten ausgestattet, während dem anderen Differential die notwendigen Konstanten durch ausgleichende Hilfsdifferentiale verschafft werden.

Abs. V und VI. In beiden Fällen wird das zu integrierende Differential durch eine Substitution umgestaltet und dann dasselbe als Hilfsdifferential wieder eingeführt.

§. 37.

Integration von $\frac{x^m dx}{(a+bx^n)^{\frac{p}{r}}}$.

I. Zur Integration der Gleichung:

$$\frac{x^m dx}{(a+bx^n)^{\frac{p}{r}}} = \frac{x^m dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} = dy \qquad 1)$$

ist, wenn man eine Integrationsformel erhalten will, durch welche die Exponenten von x und ω gleichzeitig reduziert werden, die im §. 36 Abs. II dargestellte Integrationsmethode anzuwenden. Man multipliziert zu diesem Zweck die Gl. 1 mit $-\frac{nb(p-r)}{r}$, also:

$$-\frac{nb(p-r)x^m dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}}} = -\frac{nb(p-r)dy}{r}. \qquad 2)$$

Der negative Wert der eingeführten Konstanten (vgl. §. 36 Abs. II) rechtfertigt sich dadurch, dass das zu integrierende Differential als zweite Funktion der Differentialsumme behandelt wird, folglich dem Ausdruck $\omega^{\frac{p}{r}}$ entspricht, der sich hier aber im Nenner befindet.

Führt man nun mit Rücksicht auf die Relation

$$x^{m-n+1} \cdot \omega' = x^{m-n+1} \cdot nbx^{n-1} = nbx^m \qquad 3)$$

Hilfsdifferentiale ein (vgl. §. 36 Gl. 7), so ist:

$$\frac{(m-n+1)x^{m-n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p-r)nbx^m dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}}} - \frac{(m-n+1)x^{m-n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} = -\frac{(p-r)nbdy}{r}. \qquad 4)$$

Bildet man endlich die Differentialsumme und befreit dy von den Konstanten, so ergiebt sich:

$$-\frac{r}{(p-r)nb} Ds \frac{x^{m-n+1}}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}\left[\frac{(m-n+1)dx}{x} - \frac{(p-r)\omega' dx}{r\omega}\right] +$$

$$+\frac{(m-n+1)r}{(p-r)nb} Ds \frac{x^{m-n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} = Ds \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^{\frac{p}{r}}}. \qquad 5)$$

II. Eine Integrationsformel, durch welche nur der Exponent von x reduziert wird, während jener von ω unberührt bleibt, erlangt man, wenn man nach §. 36 Abs. VI vorgeht. Substituiert man nämlich in die Gl. 1 den Wert von x^n mit Rücksicht auf die Relation:

$$x^n = \frac{\omega - a}{b}, \tag{6}$$

so ergiebt sich:

$$\frac{x^{m-n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{ax^{m-n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} = bdy. \tag{7}$$

Multipliziert man nunmehr, um aus dem ersten Differential die erste Funktion der Differentialsumme bilden zu können, die vorstehende Gleichung mit $m - n + 1$ und führt dann das ursprüngliche Differential mit Rücksicht auf die Relation:

$$-\frac{(p-r)nbx^m dx}{r\omega^{\frac{p}{r}}} = -\frac{(p-r)nb\,dy}{r} \tag{8}$$

wieder als Hilfsdifferential ein, so ist:

$$\frac{(m-n+1)x^{m-n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p-r)nbx^m dx}{r\omega^{\frac{p}{r}}} - \frac{a(m-n+1)x^{m-n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} =$$

$$= (m-n+1)bdy - \frac{(p-r)nb\,dy}{r} = \frac{(mr-np+r)bdy}{r}. \tag{9}$$

Bildet man schliesslich die Differentialsumme und befreit dy von den Konstanten, so ist (s. Gl. 3):

$$\frac{r}{(mr-np+r)b} Ds \frac{x^{m-n+1}}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}\left[\frac{(m-n+1)dx}{x} - \frac{(p-r)\omega' dx}{r\omega}\right] -$$

$$-\frac{(m-n+1)ar}{(mr-np+r)b} Ds \frac{x^{m-n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} = Ds \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^{\frac{p}{r}}}. \tag{10}$$

III. Soll endlich eine Integrationsformel gefunden werden, durch welche der Exponent von x unberührt bleibt, während jener von ω reduziert wird, so muss man nach §. 36 Abs. IV vorgehen. Man führt also zunächst in die Gl. 1 Variable und Konstanten ein, also:

$$\frac{x^m dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{bx^{m+n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} = ady \tag{11}$$

und multipliziert die vorstehende Gleichung, um aus dem zweiten Differential links die zweite Funktion der Differentialsumme zu bilden, mit $\frac{n(p-r)}{r}$, welcher Koeffizient hier nicht negativ genommen zu werden braucht, weil das zweite Differential ohnedies schon negativ ist. Es ist also:

$$\frac{n(p-r)x^m dx}{r\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p-r)nbx^{m+n}dx}{r\omega^{\frac{p}{r}}} = \frac{(p-r)andy}{r}. \qquad 12)$$

Um nunmehr auch dem ersten Differential die zur Bildung der Differentialsumme erforderlichen Konstanten zu verleihen, wendet man die Methode der ausgleichenden Hilfsdifferentiale an (vgl. §. 34 Abs. III, IV, §. 36 Abs. III u. IV) und setzt demgemäss:

$$(m+1)dz + d\xi = \frac{n(p-r)dz}{r}; \qquad \left[dz = \frac{x^m dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}\right], \qquad 13)$$

$$d\xi = -\frac{(mr-np+nr+r)dz}{r}, \qquad 14)$$

$$(m+1)dz - \frac{(mr-np+nr+r)dz}{r} = \frac{n(p-r)dz}{r}. \qquad 15)$$

Substituiert man für das erste Differential der Gl. 12 den Wert aus der Gl. 15, so ist:

$$\frac{(m+1)x^m dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p-r)nbx^{m+n}dx}{r\omega^{\frac{p}{r}}} - \frac{(mr-np+nr+r)x^m dx}{r\omega^{\frac{p}{r}-1}} = \frac{(p-r)andy}{r}. \qquad 16)$$

Bildet man schliesslich mit Rücksicht auf die Relation:

$$x^{m+1}.\omega' = x^{m+1}\cdot nbx^{n-1} = nbx^{m+n} \qquad 17)$$

die Differentialsumme und befreit dy von den Konstanten, so ergiebt sich folgende Integrationsformel:

$$\frac{r}{(p-r)an} Ds \frac{x^{m+1}}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}\left[\frac{(m+1)dx}{x} - \frac{(p-r)\omega' dx}{r\omega}\right] -$$

$$-\frac{mr-np+nr+r}{(p-r)an} Ds \frac{x^m dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} = Ds \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^{\frac{p}{r}}}. \qquad \mathbf{18)}$$

§. 38.

Integration von $\dfrac{dx}{x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{r}}}$.

I. Ist die Gleichung:

$$\frac{dx}{x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{r}}} = \frac{dx}{x^m\omega^{\frac{p}{r}}} = dy \qquad 1)$$

zu integrieren, so wird eine Integrationsformel, in welcher der Exponent von x reduziert, jener von ω unberührt erscheint, durch Anwendung der im §. 36 Abs. III dargestellten Methoden gewonnen. Man führt also zunächst in die Gl. 1 Variable und Konstanten ein, also:

$$\frac{dx}{x^m \omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{b x^n dx}{x^m \omega^{\frac{p}{r}}} = a\,dy. \tag{2}$$

Nunmehr multipliziert man die Gleichung, um das erste Differential mit dem erforderlichen Koeffizienten auszustatten, mit $-(m-1)$, welcher Ausdruck hier negativ genommen wird, weil sich x^m im Nenner befindet (s. §. 37 Gl. 2). Es ist dann:

$$-\frac{(m-1)dx}{x^m \omega^{\frac{p}{r}-1}} + \frac{(m-1)b x^{n-1} dx}{x^{m-1} \omega^{\frac{p}{r}}} = -(m-1)a\,dy. \tag{3}$$

Wendet man, um jetzt auch das zweite Differential mit den nötigen Konstanten auszustatten, die Methode der ausgleichenden Hilfsdifferentiale an (s. §. 34 Abs. III, IV, §. 36 Abs. III), so ist:

$$-\frac{(p-r)n\,dz}{r} + d\xi = (m-1)dz; \qquad \left[dz = \frac{b x^{n-1} dx}{x^{m-1} \omega^{\frac{p}{r}}}\right], \tag{4}$$

$$d\xi = \frac{(mr + np - nr - r)dz}{r}, \tag{5}$$

$$-\frac{(p-r)n\,dz}{r} + \frac{(mr + np - nr - r)dz}{r} = (m-1)dz. \tag{6}$$

Substituiert man für das zweite Differential der Gl. 3 den Wert aus der Gl. 6, so ist:

$$-\frac{(m-1)dx}{x^m \omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p-r)n b x^{n-1} dx}{r x^{m-1} \omega^{\frac{p}{r}}} + \frac{(mr + np - nr - r)b\,dx}{r x^{m-n} \omega^{\frac{p}{r}}} =$$

$$= -(m-1)a\,dy. \tag{7}$$

Bildet man endlich aus den beiden ersten Differentialen links die Differentialsumme und befreit dy von den Konstanten, so ergiebt sich folgende Integrationsformel:

$$-\frac{1}{(m-1)a} Ds \frac{1}{x^{m-1} \omega^{\frac{p}{r}-1}} \left[-\frac{(m-1)dx}{x} - \frac{(p-r)\,\omega'\,dx}{r\omega}\right] -$$

$$-\frac{(mr + np - nr - r)b}{(m-1)ar} Ds \frac{dx}{x^{m-n} \omega^{\frac{p}{r}}} = Ds \frac{dx}{x^m (a + bx^n)^{\frac{p}{r}}}. \tag{8}$$

II. Um für die Gl. 1 eine Integrationsformel zu ermitteln, in welcher der Exponent von x unberührt, jener von ω reduziert erscheint, wendet man die im §. 36 Abs. IV dargestellte Methode an. Man führt daher, ebenso wie oben in der Gl. 2, Variable und Konstanten ein und multipliziert die Gl. 2, um das zweite Differential links mit den erforderlichen Koeffizienten auszustatten, mit $\frac{n(p-r)}{r}$, also:

$$\frac{n(p-r)dx}{rx^m\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p-r)nbx^{n-1}dx}{rx^{m-1}\omega^{\frac{p}{r}}} = \frac{(p-r)andy}{r}. \qquad 9)$$

Um nun auch dem ersten Differential die zur Bildung der Differentialsumme erforderlichen Konstanten zu verschaffen, wendet man wieder die Methode der ausgleichenden Hilfsdifferentiale (§. 34 Abs. III, IV, §. 36 Abs. III) an und setzt demgemäss:

$$-(m-1)dz + d\xi = \frac{n(p-r)dz}{r}; \qquad \left[dz = \frac{dx}{x^m\omega^{\frac{p}{r}-1}}\right], \qquad 10)$$

$$d\xi = \frac{(mr+np-nr-r)dz}{r}, \qquad 11)$$

$$-(m-1)dz + \frac{(mr+np-nr-r)dz}{r} = \frac{n(p-r)dz}{r}. \qquad 12)$$

Substituiert man den Wert für das erste Differential der Gl. 9 aus der Gl. 12, so ist:

$$-\frac{(m-1)dx}{x^m\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p-r)\omega' dx}{rx^{m-1}\omega^{\frac{p}{r}}} + \frac{(mr+np-nr-r)dx}{rx^m\omega^{\frac{p}{r}-1}} = \frac{(p-r)andy}{r}. \qquad 13)$$

Bildet man endlich die Differentialsumme und befreit dy von den Konstanten, so ist:

$$\frac{r}{(p-r)an} Ds \frac{1}{x^{m-1}\omega^{\frac{p}{r}-1}}\left[-\frac{(m-1)dx}{x} - \frac{(p-r)\omega' dx}{r\omega}\right] +$$

$$+ \frac{mr+np-nr-r}{(p-r)an} Ds \frac{dx}{x^m\omega^{\frac{p}{r}-1}} = Ds \frac{dx}{x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{r}}}. \qquad \textbf{14)}$$

§. 39.

Integration von $\dfrac{(a+bx^n)^{\frac{p}{r}}dx}{x^m}$.

I. Zur Integration der Gleichung:

$$\frac{(a+bx^n)^{\frac{p}{r}}dx}{x^m} = \frac{\omega^{\frac{p}{r}}dx}{x^m} = dy \qquad 1)$$

erhält man eine Integrationsformel, in welcher sowohl der Exponent von x als auch jener von ω reduziert erscheint, wenn man nach §. 36 Abs. I verfährt. Man erhält die eine Funktion der Differentialsumme, indem man die Gl. 1, weil auch hier x^m im Nenner ist, mit $-(m-1)$ multipliziert, also:

$$-\frac{(m-1)\,\omega^{\frac{p}{r}}\,dx}{x^m} = -(m-1)dy. \tag{2}$$

Man fügt nunmehr die andere Funktion der Differentialsumme als Hilfsdifferential hinzu:

$$\frac{p\,\omega^{\frac{p}{r}-1}\,\omega'\,dx}{r\,x^{m-1}} - \frac{(m-1)\,\omega^{\frac{p}{r}}\,dx}{x^m} - \frac{p\,\omega^{\frac{p}{r}-1}\,\omega'\,dx}{r\,x^{m-1}} = -(m-1)dy. \tag{3}$$

Verfährt man nunmehr in der bekannten Weise, so ist

$$-\frac{1}{m-1}\,Ds\,\frac{\omega^{\frac{p}{r}}}{x^{m-1}}\left[\frac{p\,\omega'\,dx}{r\,\omega} - \frac{(m-1)\,dx}{x}\right] + \frac{bnp}{(m-1)r}\,Ds\,\frac{\omega^{\frac{p}{r}-1}\,dx}{x^{m-n}} =$$
$$= Ds\,\frac{(a+bx^n)^{\frac{p}{r}}\,dx}{x^m}. \tag{4}$$

II. Um eine Integrationsformel zu erhalten, in welcher der Exponent von x reduziert, jener von ω unberührt erscheint, gehe man nach §. 36 Abs. III vor und führe zunächst in die Gl. 1 Variable und Konstanten ein, also:

$$-\frac{b\,x^{n-1}\,\omega^{\frac{p}{r}}\,dx}{x^{m-1}} + \frac{\omega^{\frac{p}{r}+1}\,dx}{x^m} = a\,dy. \tag{5}$$

Um aus dem zweiten Differential links die eine Funktion der Differentialsumme zu bilden, multipliziert man die vorstehende Gleichung mit $-(m-1)$, also:

$$\frac{(m-1)\,b\,x^{n-1}\,\omega^{\frac{p}{r}}\,dx}{x^{m-1}} - \frac{(m-1)\,\omega^{\frac{p}{r}+1}\,dx}{x^m} = -(m-1)\,a\,dy. \tag{6}$$

Um nun auch das erste Differential mit dem erforderlichen Koeffizienten zu versehen, benützt man die Methode der ausgleichenden Hilfsdifferentiale (§. 34 Abs. III, IV, §. 36 Abs. III) und setzt demgemäss:

$$\frac{(p+r)\,n\,dz}{r} + d\xi = (m-1)\,dz; \qquad \left[dz = \frac{b\,x^{n-1}\,\omega^{\frac{p}{r}}\,dx}{x^{m-1}}\right], \tag{7}$$

$$d\xi = \frac{(mr-np-nr-r)\,dz}{r}, \tag{8}$$

$$\frac{(p+r)\,n\,dz}{r} + \frac{(mr-np-nr-r)\,dz}{r} = (m-1)\,dz. \tag{9}$$

Substituiert man nunmehr den Wert des ersten Differentials der Gl. 6 aus der Gl. 9, so ergiebt sich:

$$\frac{(p+r)nbx^{n-1}\omega^{\frac{p}{r}}\,dx}{rx^{m-1}} - \frac{(m-1)\omega^{\frac{p}{r}+1}\,dx}{x^m} + \frac{(mr-np-nr-r)b\,\omega^{\frac{p}{r}}\,dx}{rx^{m-n}} =$$

$$= -(m-1)a\,dy. \qquad 10)$$

Verfährt man nun in der bekannten Weise, so ist:

$$-\frac{1}{(m-1)a} Ds \frac{\omega^{\frac{p}{r}+1}}{x^{m-1}}\left[\frac{(p+r)\,\omega'\,dx}{r\omega} - \frac{(m-1)\,dx}{x}\right] -$$

$$-\frac{(mr-np-nr-r)b}{(m-1)\,ar} Ds \frac{\omega^{\frac{p}{r}}\,dx}{x^{m-n}} = Ds \frac{(a+bx^n)^{\frac{p}{r}}\,dx}{x^m}. \qquad \mathbf{11)}$$

III. Um endlich eine Integrationsformel zu erhalten, in welcher der Exponent von x unberührt bleibt, jener von ω reduziert wird, gebraucht man die im §. 36 Abs. V entwickelte Methode. Man multipliziert zu diesem Zweck die Gl. 1 mit $-(m-1)$:

$$-\frac{(m-1)\,\omega^{\frac{p}{r}}\,dx}{x^m} = -(m-1)dy \qquad 12)$$

und führt dann das ursprüngliche Differential wieder als Hilfsdifferential ein, also:

$$\frac{np\,\omega^{\frac{p}{r}}\,dx}{rx^m} - \frac{(m-1)\,\omega^{\frac{p}{r}}\,dx}{x^m} = -(m-1)dy + \frac{np\,dy}{r} = -\frac{(mr-np-r)\,dy}{r}. \qquad 13)$$

Substituiert man nunmehr in dem ersten Differential statt $\omega^{\frac{p}{r}}$ den Ausdruck $(a+bx^n)\,\omega^{\frac{p}{r}-1}$, so ist:

$$\frac{pnbx^{n-1}\omega^{\frac{p}{r}-1}\,dx}{rx^{m-1}} - \frac{(m-1)\,\omega^{\frac{p}{r}}\,dx}{x^m} + \frac{anp\,\omega^{\frac{p}{r}-1}\,dx}{rx^m} = -\frac{(mr-np-r)\,dy}{r}. \qquad 14)$$

Bildet man endlich aus den beiden ersten Differentialen die Differentialsumme und befreit dy von den Konstanten, so ergiebt sich folgende Integrationsformel:

$$-\frac{r}{mr-np-r} Ds \frac{\omega^{\frac{p}{r}}}{x^{m-1}}\left[\frac{p\,\omega'\,dx}{r\omega} - \frac{(m-1)\,dx}{x}\right] - \frac{anp}{mr-np-r} Ds \frac{\omega^{\frac{p}{r}-1}\,dx}{x^m} =$$

$$= \frac{(a+bx^n)^{\frac{p}{r}}\,dx}{x^m}. \qquad \mathbf{15)}$$

§. 40.

Integration von $\dfrac{dx}{(a+bx^n)^{\frac{p}{r}}}$ und $(a+bx^n)^{\frac{p}{r}}dx$.

I. Zur Integration der Gleichung:

$$\frac{dx}{(a+bx^n)^{\frac{p}{r}}} = \frac{dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} = dy \tag{1}$$

gebraucht man die im §. 36 Abs. IV dargestellte Methode, welche der Entwickelung im §. 17 Gl. 1—8 sehr analog ist. Man führt also zunächst Variable und Konstanten ein, also:

$$\frac{dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{bx^n dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} = a dy \tag{2}$$

und multipliziert, um das zweite Differential in die gehörige Form zu bringen, die Gleichung mit $\frac{n(p-r)}{r}$:

$$\frac{n(p-r)dx}{r\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p-r)nbx^n dx}{r\omega^{\frac{p}{r}}} = \frac{(p-r)andy}{r}. \tag{3}$$

Gebraucht man nunmehr, um auch das erste Differential mit dem erforderlichen Koeffizienten auszustatten, die Methode der ausgleichenden Hilfsdifferentiale, so ist:

$$dz + d\xi = \frac{n(p-r)dz}{r}; \qquad \left[dz = \frac{dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}\right], \tag{4}$$

$$d\xi = \frac{(np-nr-r)dz}{r}, \tag{5}$$

$$dz + \frac{(np-nr-r)dz}{r} = \frac{n(p-r)dz}{r}. \tag{6}$$

Substituiert man den Wert des ersten Differentials der Gl. 3 aus der Gl. 6, so ist:

$$\frac{dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p-r)x\omega' dx}{r\omega^{\frac{p}{r}}} + \frac{(np-nr-r)dx}{r\omega^{\frac{p}{r}-1}} = \frac{(p-r)andy}{r} \tag{7}$$

oder:

$$\frac{r}{(p-r)an} Ds \frac{x}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}\left[\frac{dx}{x} - \frac{(p-r)\omega' dx}{r\omega}\right] + \frac{np-nr-r}{(p-r)an} Ds \frac{dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} =$$

$$= Ds \frac{dx}{(a+bx^n)^{\frac{p}{r}}}. \tag{8}$$

Setzt man in der vorstehenden Gleichung $r = 1$, so ergiebt sich die im §. 17 Gl. 8 enthaltene Formel.

II. Zur Integration der Gleichung:

$$(a + bx^n)^{\frac{p}{r}} dx = \omega^{\frac{p}{r}} dx = dy \qquad 9)$$

multipliziere man (vgl. §. 36 Abs. V) die Gleichung zunächst mit $\frac{np}{r}$, also:

$$\frac{np\omega^{\frac{p}{r}} dx}{r} = \frac{npdy}{r} \qquad 10)$$

und setze dann statt $\omega^{\frac{p}{r}}$ den Ausdruck $(a + bx^n)\omega^{\frac{p}{r}-1}$:

$$\frac{pnbx^n\omega^{\frac{p}{r}-1} dx}{r} + \frac{anp\omega^{\frac{p}{r}-1} dx}{r} = \frac{npdy}{r}. \qquad 11)$$

Führt man nunmehr das ursprüngliche Differential wieder als Hilfsdifferential ein, so ist:

$$\omega^{\frac{p}{r}} dx + \frac{p\omega^{\frac{p}{r}-1} x\omega' dx}{r} + \frac{anp\omega^{\frac{p}{r}-1} dx}{r} = \frac{npdy}{r} + dy = \frac{(np+r)dy}{r}. \qquad 12)$$

Nimmt man endlich die Differentialsumme und befreit dy von den Konstanten, so ist:

$$\frac{r}{np+r} Ds\, x\omega^{\frac{p}{r}}\left[\frac{dx}{x} + \frac{p\omega' dx}{r\omega}\right] + \frac{anp}{np+r} Ds\, \omega^{\frac{p}{r}-1} dx = Ds\,(a + bx^n)^{\frac{p}{r}} dx. \quad \mathbf{13)}$$

§. 41.

Beispiele.

I. Zur Erläuterung der im §. 31, 36—40 dargestellten Methoden wähle ich vorzüglich die Differentiale mit der Irrationalität $\sqrt{a + bx^3}$, die sich entweder in geschlossenen Ausdrücken integrieren oder doch wenigstens auf die Integrale $Ds \frac{dx}{\sqrt{a + bx^3}}$ und $Ds \frac{xdx}{\sqrt{a + bx^3}}$ zurückführen lassen. Daran mag sich die Integration einiger Differentiale mit den Irrationalitäten $\sqrt{a + bx}$ und $\sqrt{a + bx^2}$ anschliessen, welche immer in endlicher Form durchgeführt werden kann.

Ist die Gleichung:

$$\frac{x^2 dx}{\sqrt{a + bx^3}} = \frac{x^2 dx}{\sqrt{\omega}} = dy \qquad 1)$$

zu integrieren, so geht man nach §. 31 Abs. II vor und setzt demgemäss:

$$Ds \frac{x^2 dx}{\sqrt{\omega}} = \frac{1}{3b} Ds \frac{\omega' dx}{\sqrt{\omega}} = \frac{2\sqrt{\omega}}{3b} = Ds \frac{x^2 dx}{\sqrt{a + bx^3}}. \qquad 2)$$

II. Zur Integration der Gleichung:

$$\frac{x^3\,dx}{\sqrt{a+bx^3}} = \frac{x^3\,dx}{\sqrt{\omega}} = dy \tag{3)}$$

benützt man die Methode §. 37 Abs. II, weil hier nur eine Reduktion des Exponenten von x notwendig ist, und setzt deshalb mit Rücksicht auf die Relation $x^3 = \frac{\omega - a}{b}$:

$$\frac{(\omega - a)\,dx}{\sqrt{\omega}} = \sqrt{\omega}\,dx - \frac{a\,dx}{\sqrt{\omega}} = b\,dy. \tag{4)}$$

Das erste Differential ($= \sqrt{\omega}\,dx$) ist zur Bildung der ersten Funktion der Differentialsumme brauchbar. Um die zweite Funktion zu erhalten, führt man das ursprüngliche Differential nach der Relation:

$$\frac{x\,\omega'\,dx}{2\sqrt{\omega}} = \frac{3\,b\,x^3\,dx}{2\sqrt{\omega}} = \frac{3\,b\,dy}{2} \tag{5)}$$

wieder als Hilfsdifferential ein, also:

$$\sqrt{\omega}\,dx + \frac{x\,\omega'\,dx}{2\sqrt{\omega}} - \frac{a\,dx}{\sqrt{\omega}} = b\,dy + \frac{3b\,dy}{2} = \frac{5\,b\,dy}{2}. \tag{6)}$$

Nimmt man nun die Differentialsumme und befreit dy von den Konstanten, so ist:

$$\frac{2}{5b}\,Ds\,x\sqrt{\omega}\left[\frac{dx}{x} + \frac{\omega'\,dx}{2\,\omega}\right] - \frac{2a}{5b}\,Ds\,\frac{dx}{\sqrt{\omega}} = Ds\,\frac{x^3\,dx}{\sqrt{a+bx^3}}. \tag{7)}$$

III. Zur Integration der Gleichung:

$$\frac{x^4\,dx}{\sqrt{a+bx^3}} = \frac{x^4\,dx}{\sqrt{\omega}} = dy \tag{8)}$$

wendet man die nämliche Substitution wie oben in der Gl. 4 an, also:

$$x\sqrt{\omega}\,dx - \frac{a\,x\,dx}{\sqrt{\omega}} = b\,dy. \tag{9)}$$

Multipliziert man nun, um später (Gl. 12) die erste Funktion der Differentialsumme bilden zu können, die Gleichung mit 2 und führt dann mit Rücksicht auf die Relation:

$$\frac{x^2\,\omega'\,dx}{2\sqrt{\omega}} = \frac{3\,b\,x^4\,dx}{2\sqrt{\omega}} = \frac{3\,b\,dy}{2} \tag{10)}$$

das ursprüngliche Differential als Hilfsdifferential ein, so ist:

$$2x\sqrt{\omega}\,dx + \frac{x^2\,\omega'\,dx}{2\sqrt{\omega}} - \frac{2\,a\,x\,dx}{\sqrt{\omega}} = 2b\,dy + \frac{3b\,dy}{2} = \frac{7\,b\,dy}{2} \tag{11)}$$

oder

$$\frac{2}{7b}\,Ds\,x^2\sqrt{\omega}\left[\frac{2\,dx}{x} + \frac{\omega'\,dx}{2\,\omega}\right] - \frac{4a}{7b}\,Ds\,\frac{x\,dx}{\sqrt{\omega}} = Ds\,\frac{x^4\,dx}{\sqrt{a+bx^3}}. \tag{12)}$$

IV. Die Gleichung:

$$\frac{x^2 dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{x^2 dx}{\sqrt{\omega}} = dy \tag{13}$$

kann mit Rücksicht auf die Relationen:

$$x^2 = \frac{\omega - a}{b}; \qquad \frac{x\omega' dx}{2\sqrt{\omega}} = \frac{bx^2 dx}{\sqrt{\omega}} = bdy \tag{14}$$

auch so geschrieben werden:

$$\sqrt{\omega}\, dx + \frac{x\omega' dx}{2\sqrt{\omega}} - \frac{a\,dx}{\sqrt{\omega}} = bdy + bdy = 2bdy \tag{15}$$

oder

$$\frac{1}{2b} Ds\, x\sqrt{\omega}\left[\frac{dx}{x} + \frac{\omega' dx}{2\omega}\right] - \frac{a}{2b} Ds \frac{dx}{\sqrt{\omega}} = Ds \frac{x^2 dx}{\sqrt{a+bx^2}} \cdot \tag{16}$$

Ebenso kann man statt der Gleichung:

$$\frac{x^3 dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{x^3 dx}{\sqrt{\omega}} = dy \tag{17}$$

auch schreiben:

$$2x\sqrt{\omega}\, dx + \frac{x^2\omega' dx}{2\sqrt{\omega}} - \frac{2ax\,dx}{\sqrt{\omega}} = 2bdy + bdy = 3bdy \tag{18}$$

oder

$$\frac{1}{3b} Ds\, x^2\sqrt{\omega}\left[\frac{2dx}{x} + \frac{\omega' dx}{2\omega}\right] - \frac{2a}{3b} Ds \frac{x\,dx}{\sqrt{\omega}} = Ds \frac{x^3 dx}{\sqrt{a+bx^3}} \cdot \tag{19}$$

Substituiert man für $\frac{x\,dx}{\sqrt{\omega}}$ das nach §. 31 Abs. II zu ermittelnde Integral, so ist die Integration vollzogen.

V. In ganz analoger Weise kann man die Gleichung:

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{x\,dx}{\sqrt{\omega}} = dy \tag{20}$$

umgestalten in:

$$\sqrt{\omega}\, dx + \frac{x\omega' dx}{2\sqrt{\omega}} - \frac{a\,dx}{\sqrt{\omega}} = bdy + \frac{bdy}{2} = \frac{3bdy}{2} \tag{21}$$

oder

$$\frac{2}{3b} Ds\, x\sqrt{\omega}\left[\frac{dx}{x} + \frac{\omega' dx}{2\omega}\right] - \frac{2a}{3b} Ds \frac{dx}{\sqrt{\omega}} = Ds \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}} \cdot \tag{22}$$

VI. Ist die Gleichung:

$$\frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx^3}} = \frac{dx}{x^2\sqrt{\omega}} = dy \tag{23}$$

zu integrieren (s. §. 33 Gl. 47), so geht man, weil auch hier nur der Exponent von x zu reduzieren ist, nach §. 38 Abs. I vor und führt mit Rücksicht auf die Relation $bx^n - \omega = -a$ Variable und Konstanten ein, also:

$$\frac{bx^2 dx}{x\sqrt{\omega}} - \frac{\sqrt{\omega}\, dx}{x^2} = -\,a dy. \tag{24}$$

Das zweite Differential links ist sofort zur Bildung der Differentialsumme brauchbar. Dem ersten Differential wird der notwendige Koeffizient durch die Methode der ausgleichenden Hilfsdifferentiale in folgender Weise verschafft:

$$\frac{3bx^2dx}{2x\sqrt{\omega}} - \frac{\sqrt{\omega}dx}{x^2} - \frac{bxdx}{2\sqrt{\omega}} = -ady \tag{25}$$

oder

$$-\frac{1}{a}Ds\frac{\sqrt{\omega}}{x}\left[\frac{\omega' dx}{2\omega} - \frac{dx}{x}\right] + \frac{b}{2a}Ds\frac{xdx}{\sqrt{\omega}} = Ds\frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx^3}}. \tag{26}$$

Ebenso kann man statt der Gleichung:

$$\frac{dx}{x^3\sqrt{a+bx^3}} = \frac{dx}{x^3\sqrt{\omega}} = dy \tag{27}$$

auch schreiben:

$$\frac{2bx^2dx}{x^2\sqrt{\omega}} - \frac{2\sqrt{\omega}dx}{x^3} = -2ady \tag{28}$$

oder

$$\frac{3bx^2dx}{2x^2\sqrt{\omega}} - \frac{2\sqrt{\omega}dx}{x^3} + \frac{bdx}{2\sqrt{\omega}} = -2ady. \tag{29}$$

Verfährt man in der bekannten Weise, so ist:

$$-\frac{1}{2a}Ds\frac{\sqrt{\omega}}{x^2}\left[\frac{\omega' dx}{2\omega} - \frac{2dx}{x}\right] - \frac{b}{4a}Ds\frac{dx}{\sqrt{\omega}} = Ds\frac{dx}{x^3\sqrt{a+bx^3}}. \tag{30}$$

VII. Ist die Gleichung:

$$\frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx^2}} = \frac{dx}{x^2\sqrt{\omega}} = dy \tag{31}$$

zu integrieren (s. §. 33 Gl. 45), so schreibt man ähnlich wie sub VI:

$$\frac{2bxdx}{2x\sqrt{\omega}} - \frac{\sqrt{\omega}dx}{x^2} = -ady \tag{32}$$

oder

$$-\frac{1}{a}Ds\frac{\sqrt{\omega}}{x}\left[\frac{\omega' dx}{2\omega} - \frac{dx}{x}\right] = Ds\frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx^2}}. \tag{33}$$

Ebenso kann man statt

$$\frac{dx}{x^3\sqrt{a+bx^2}} = \frac{dx}{x^3\sqrt{\omega}} = dy \tag{34}$$

auch folgenden Ausdruck setzen:

$$\frac{2bxdx}{x^2\sqrt{\omega}} - \frac{2\sqrt{\omega}dx}{x^3} = -2ady \tag{35}$$

oder

$$\frac{\omega' dx}{2x^2\sqrt{\omega}} - \frac{2\sqrt{\omega}dx}{x^3} + \frac{bdx}{x\sqrt{\omega}} = -2ady. \tag{36}$$

Verfährt man in der bekannten Weise, so ist:

$$-\frac{1}{2a}Ds\frac{\sqrt{\omega}}{x^2}\left[\frac{\omega' dx}{2\omega}-\frac{2dx}{x}\right]-\frac{b}{2a}Ds\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}=Ds\frac{dx}{x^3\sqrt{a+bx^2}}. \qquad 37)$$

VIII. Ist die Gleichung:

$$\frac{\sqrt{a+bx^3}\,dx}{x}=\frac{\sqrt{\omega}\,dx}{x}=dy \qquad 38)$$

zu integrieren, so verfährt man am zweckmässigsten nach §. 39 Abs. III und setzt demgemäss:

$$\frac{(a+bx^3)\,dx}{x\sqrt{\omega}}=\frac{a\,dx}{x\sqrt{\omega}}+\frac{bx^2\,dx}{\sqrt{\omega}}=dy. \qquad 39)$$

Substituiert man für die beiden Differentiale in dem mittleren Ausdruck den Wert der Differentialsummen aus §. 33 Gl. 47 und aus der obigen Gl. 2, so ist:

$$\frac{\sqrt{a}}{3}\log\frac{\sqrt{a+b\bar{x}^3}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+b\bar{x}^3}+\sqrt{a}}+\frac{2\sqrt{a+b\bar{x}^3}}{3}=Ds\frac{\sqrt{a+bx^3}\,dx}{x}. \qquad 40)$$

Bei der Integration der Gleichung:

$$\frac{\sqrt{a+bx^3}\,dx}{x^2}=\frac{\sqrt{\omega}\,dx}{x^2}=dy \qquad 41)$$

verfährt man am besten nach der im §. 39 Abs. I entwickelten Methode und schreibt demgemäss:

$$\frac{\omega' dx}{2x\sqrt{\omega}}-\frac{\sqrt{\omega}\,dx}{x^2}-\frac{3bx\,dx}{2\sqrt{\omega}}=-dy \qquad 42)$$

oder

$$-Ds\frac{\sqrt{\omega}}{x}\left[\frac{\omega' dx}{2\omega}-\frac{dx}{x}\right]+\frac{3b}{2}Ds\frac{x\,dx}{\sqrt{\omega}}=Ds\frac{\sqrt{a+bx^3}\,dx}{x^2}. \qquad 43)$$

Ebenso kann man die Gleichung:

$$\frac{\sqrt{a+bx^3}\,dx}{x^3}=\frac{\sqrt{\omega}\,dx}{x^3}=dy \qquad 44)$$

auch schreiben:

$$\frac{\omega' dx}{2x^2\sqrt{\omega}}-\frac{2\sqrt{\omega}\,dx}{x^3}-\frac{3b\,dx}{2\sqrt{\omega}}=-2dy \qquad 45)$$

oder

$$-\frac{1}{2}Ds\frac{\sqrt{\omega}}{x^2}\left[\frac{\omega' dx}{2\omega}-\frac{2dx}{x}\right]+\frac{3b}{4}Ds\frac{dx}{\sqrt{\omega}}=Ds\frac{\sqrt{a+bx^3}\,dx}{x^3}. \qquad 46)$$

IX. Ist die Gleichung:

$$\frac{\sqrt{a+bx}\,dx}{x}=\frac{\sqrt{\omega}\,dx}{x}=dy \qquad 47)$$

zu integrieren, so verfährt man wieder wie oben (Gl. 39) nach §. 39 Abs. III und schreibt demgemäss:

$$Ds\frac{\sqrt{a+bx}\,dx}{x} = Ds\frac{(a+bx)\,dx}{x\sqrt{\omega}} = a\,Ds\frac{dx}{x\sqrt{\omega}} + b\,Ds\frac{dx}{\sqrt{\omega}}, \qquad 48)$$

für welche letzteren Ausdrücke der Wert aus §. 33 Gl. 43 und §. 31 Gl. 20 substituiert werden kann.

X. Ist die Gleichung:

$$x\sqrt{a+bx^3}\,dx = x\sqrt{\omega}\,dx = dy \qquad 49)$$

zu integrieren, so geht man am richtigsten nach §. 36 Abs. V vor. Man multipliziert daher zunächst die vorstehende Gleichung mit 2 und führt dann das ursprüngliche Differential als Hilfsdifferential ein, also:

$$\frac{3x\sqrt{\omega}\,dx}{2} + 2x\sqrt{\omega}\,dx = 2\,dy + \frac{3\,dy}{2} = \frac{7\,dy}{2}. \qquad 50)$$

Man substituiert sodann im ersten Differential für ω seinen Wert $a+bx^3$:

$$\frac{3x(a+bx^3)\,dx}{2\sqrt{\omega}} + 2x\sqrt{\omega}\,dx = \frac{7\,dy}{2} \qquad 51)$$

oder

$$\frac{3bx^4\,dx}{2\sqrt{\omega}} + 2x\sqrt{\omega}\,dx + \frac{3ax\,dx}{2\sqrt{\omega}} = \frac{7\,dy}{2}. \qquad 52)$$

Verfährt man nunmehr in der bekannten Weise, so ist:

$$\frac{2}{7}\,Ds\,x^2\sqrt{\omega}\left[\frac{\omega'\,dx}{2\omega} + \frac{2\,dx}{x}\right] + \frac{3a}{7}\,Ds\frac{x\,dx}{\sqrt{\omega}} = Ds\,x\sqrt{a+bx^3}\,dx. \qquad 53)$$

Die Gleichung:

$$Ds\,x^2\sqrt{a+bx^3}\,dx = \frac{1}{3b}\,Ds\,\omega^{\frac{1}{2}}\,\omega'\,dx = Ds\,dy \qquad 54)$$

ist nach §. 31 Abs. I integrierbar.

Ist die Gleichung:

$$x^3\sqrt{a+bx^3}\,dx = x^3\sqrt{\omega}\,dx = dy \qquad 55)$$

zu integrieren, so benutzt man am zweckmässigsten die im §. 36 Abs. VI entwickelte Methode und schreibt demgemäss mit Rücksicht auf die Relation $x^3 = \frac{\omega - a}{b}$ die vorstehende Gleichung:

$$\omega^{\frac{3}{2}}\,dx - a\sqrt{\omega}\,dx = b\,dy \qquad 56)$$

oder

$$\omega^{\frac{3}{2}}\,dx + \frac{3\sqrt{\omega}\,x\,\omega'\,dx}{2} - a\sqrt{\omega}\,dx = b\,dy + \frac{9b\,dy}{2} = \frac{11b\,dy}{2}. \qquad 57)$$

Verfährt man in der bekannten Weise, so ist:

$$\frac{2}{11b} Ds\, x\omega^{\frac{3}{2}}\left[\frac{dx}{x} + \frac{3\,\omega' dx}{2\omega}\right] - \frac{2a}{11b} Ds\sqrt{\omega}\,dx = Ds\,dy. \tag{58}$$

Substituiert man den Wert von $Ds\sqrt{\omega}\,dx$ aus der weiter folgenden Gl. 79, so ist:

$$\frac{\bar{x}\sqrt{\bar{\omega}}(10\bar{\omega} - 4a)}{55b} - \frac{6a^2}{55b} Ds\frac{dx}{\sqrt{\omega}} = Ds\,x^3\sqrt{a + bx^3}\,dx. \tag{59}$$

Benützt man zur Auffindung dieses Integrals die im §. 36 Abs. V entwickelte Methode, so ergiebt sich nach einigen leichten Reduktionen:

$$\frac{2}{11} Ds\,x^4\sqrt{\omega}\left[\frac{4dx}{x} + \frac{\omega' dx}{2\omega}\right] + \frac{3a}{11} Ds\frac{x^3dx}{\sqrt{\omega}} = Ds\,x^3\sqrt{a + bx^3}\,dx. \tag{60}$$

Substituiert man für die zweite Differentialsumme den Wert aus der obigen Gl. 7, so ergiebt sich das nämliche Integral wie in der Gl. 59.

XI. Die Gleichung:

$$Ds\,x\sqrt{a + bx^2}\,dx = \frac{1}{2b} Ds\,\omega^{\frac{1}{2}}\omega' dx = Ds\,dy \tag{61}$$

ist nach §. 31 Abs. I integrierbar.

Zur Integration der Gleichung:

$$x^2\sqrt{a + bx^2}\,dx = x^2\sqrt{\omega}\,dx = dy \tag{62}$$

schreibe man ähnlich wie sub X Gl. 50:

$$3x^2\sqrt{\omega}\,dx + x^2\sqrt{\omega}\,dx = 3dy + dy = 4dy \tag{63}$$

oder

$$3x^2\sqrt{\omega}\,dx + \frac{bx^4dx}{\sqrt{\omega}} + \frac{ax^2dx}{\sqrt{\omega}} = 4dy. \tag{64}$$

Nimmt man nunmehr die Differentialsumme und befreit dy von der Konstante, so ist:

$$\frac{1}{4} Ds\,x^3\sqrt{\omega}\left[\frac{3dx}{x} + \frac{\omega' dx}{2\omega}\right] + \frac{a}{4} Ds\frac{x^2dx}{\sqrt{\omega}} = Ds\,dy. \tag{65}$$

Substituiert man endlich den Werth für die zweite Differentialsumme aus der Gl. 16, so ist:

$$\frac{\bar{x}\sqrt{\bar{\omega}}(2b\bar{x}^2 + a)}{8b} - \frac{a^2}{8b} Ds\frac{dx}{\sqrt{\omega}} = Ds\,x^2\sqrt{a + bx^2}\,dx. \tag{66}$$

XII. Zur Integration der Gleichung:

$$\frac{dx}{(a + bx^3)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dx}{\omega^{\frac{3}{2}}} = dy \tag{67}$$

benützt man die §. 40 Abs. I dargestellte Methode, führt demgemäss Variable und Konstanten ein und multipliziert die Gleichung mit $\frac{3}{2}$, also:

$$\frac{dx}{\sqrt{\omega}} - \frac{3bx^3dx}{2\omega^{\frac{3}{2}}} + \frac{dx}{2\sqrt{\omega}} = \frac{3ady}{2} \qquad 68)$$

oder

$$\frac{2}{3a} Ds \frac{x}{\sqrt{\omega}} \left[\frac{dx}{x} - \frac{\omega' dx}{2\omega}\right] + \frac{1}{3a} Ds \frac{dx}{\sqrt{\omega}} = Ds \frac{dx}{(a+bx^3)^{\frac{3}{2}}}. \qquad 69)$$

Zur Integration von:

$$\frac{dx}{(a+bx^3)^{\frac{5}{2}}} = \frac{dx}{\omega^{\frac{5}{2}}} = dy \qquad 70)$$

gehe man ebenso vor, nur multipliziere man mit $\frac{9}{2}$ und es ergiebt sich:

$$\frac{dx}{\omega^{\frac{3}{2}}} - \frac{3 \cdot 3bx^3dx}{2\omega^{\frac{5}{2}}} + \frac{7dx}{2\omega^{\frac{3}{2}}} = \frac{9ady}{2} \qquad 71)$$

oder

$$\frac{2}{9a} Ds \frac{x}{\omega^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{dx}{x} - \frac{3\omega' dx}{2\omega}\right] + \frac{7}{9a} Ds \frac{dx}{\omega^{\frac{3}{2}}} = Ds \frac{dx}{(a+bx^3)^{\frac{3}{2}}}. \qquad 72)$$

Substituiert man für die zweite Differentialsumme den Wert aus der obigen Gleichung 69, so ist die Integration vollzogen.

XIII. Zur Integration der Gleichung:

$$\frac{dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dx}{\omega^{\frac{3}{2}}} = dy \qquad 73)$$

führe man Variable und Konstanten ein und es ergiebt sich, ohne dass (vgl. Abs. XII) eine Multiplikation der Gleichung notwendig ist $\left(\frac{n(p-r)}{r} = 1\right)$:

$$\frac{dx}{\sqrt{\omega}} - \frac{2bx^2dx}{2\omega^{\frac{3}{2}}} = ady \qquad 74)$$

oder

$$\frac{1}{a} Ds \frac{x}{\sqrt{\omega}} \left[\frac{dx}{x} - \frac{\omega' dx}{2\omega}\right] = Ds \frac{dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad 75)$$

XIV. Ist die Gleichung:

$$\sqrt{a+bx^3}\,dx = \sqrt{\omega}\,dx = dy \qquad 76)$$

zu integrieren, so geht man nach §. 40 Abs. II vor und giebt demgemäss der vorstehenden Gleichung folgende Gestalt:

$$\frac{3bx^3dx}{2\sqrt{\omega}} + \frac{3adx}{2\sqrt{\omega}} = \frac{3dy}{2} \qquad 77)$$

oder

$$\sqrt{\omega}\,dx + \frac{x\omega' dx}{2\sqrt{\omega}} + \frac{3adx}{2\sqrt{\omega}} = dy + \frac{3dy}{2} = \frac{5dy}{2}. \qquad 78)$$

Nimmt man die Differentialsumme und befreit dy von den Konstanten, so ist:

$$\frac{2}{5} Ds\, x\sqrt{\omega} \left[\frac{dx}{x} + \frac{\omega' dx}{2\omega}\right] + \frac{3a}{5} Ds \frac{dx}{\sqrt{\omega}} = Ds \sqrt{a+bx^3}\,dx. \qquad 79)$$

Zur Integration der Gleichung:

$$(a + bx^3)^{\frac{3}{2}} dx = \omega^{\frac{3}{2}} dx = dy \tag{80}$$

schreibt man:

$$\frac{9(a + bx^3)\sqrt{\omega}\, dx}{2} = \frac{9\, dy}{2} \tag{81}$$

oder

$$\omega^{\frac{3}{2}} dx + \frac{3 \cdot 3bx^3 \sqrt{\omega}\, dx}{2} + \frac{9\, a\sqrt{\omega}\, dx}{2} = dy + \frac{9\, dy}{2} = \frac{11\, dy}{2}. \tag{82}$$

Nimmt man die Differentialsumme, so ist:

$$\frac{2}{11} Ds\, x\, \omega^{\frac{3}{2}} \left[\frac{dx}{x} + \frac{3\,\omega' dx}{2\omega}\right] + \frac{9a}{11} Ds \sqrt{\omega}\, dx = Ds\, dy. \tag{83}$$

Substituiert man den Wert der zweiten Differentialsumme aus der Gl. 79, so ergiebt sich:

$$\frac{2\bar{x}\sqrt{\bar{\omega}}}{11}\left(\bar{\omega} + \frac{9a}{5}\right) + \frac{27\,a^2}{55} Ds \frac{dx}{\sqrt{\omega}} = Ds\,(a + bx^3)^{\frac{3}{2}} dx. \tag{84}$$

XV. Zur Integration der Gleichung:

$$\sqrt{a + bx^2}\, dx = \sqrt{\omega}\, dx = dy \tag{85}$$

setzt man ähnlich wie sub XIV:

$$\sqrt{\omega}\, dx + \frac{2bx^2 dx}{2\sqrt{\omega}} + \frac{a\, dx}{\sqrt{\omega}} = dy + dy = 2dy \tag{86}$$

oder

$$\frac{1}{2} Ds\, x\sqrt{\omega}\left[\frac{dx}{x} + \frac{\omega' dx}{2\omega}\right] + \frac{a}{2} Ds \frac{dx}{\sqrt{\omega}} = Ds \sqrt{a + bx^2}\, dx. \tag{87}$$

Will man die Gleichung:

$$(a + bx^2)^{\frac{3}{2}} dx = \omega^{\frac{3}{2}} dx = dy \tag{88}$$

integrieren, so schreibt man:

$$\omega^{\frac{3}{2}} dx + \frac{3 \cdot 2bx^2 \sqrt{\omega}\, dx}{2} + 3a\sqrt{\omega}\, dx = dy + 3dy = 4dy \tag{89}$$

oder

$$\frac{1}{4} Ds\, x\,\omega^{\frac{3}{2}}\left[\frac{dx}{x} + \frac{3\,\omega' dx}{2\omega}\right] + \frac{3a}{4} Ds \sqrt{\omega}\, dx = Ds\,(a + bx^3)^{\frac{3}{2}} dx. \tag{90}$$

Substituiert man den Wert der zweiten Differentialsumme aus der Gl. 87, so erscheint das Integral in seiner gewöhnlichen Gestalt.

XVI. Zur Integration der Gleichung:

$$\frac{x\,dx}{(a + bx^3)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x\,dx}{\omega^{\frac{3}{2}}} = dy \tag{91}$$

benützt man, weil $\frac{x\,dx}{\sqrt{\omega}}$ nicht integrierbar ist, folglich nur der Exponent von ω reduziert werden kann, am besten die in §. 37 Abs. III dargestellte Methode. Man führt demgemäss Variable und Konstanten ein und multipliziert die Gleichung mit $\frac{3}{2}$, also:

$$\frac{3x\,dx}{2\sqrt{\omega}} - \frac{3bx^4dx}{2\omega^{\frac{3}{2}}} = \frac{3a\,dy}{2}, \tag{92}$$

benützt sodann die Methode der ausgleichenden Hilfsdifferentiale:

$$\frac{2x\,dx}{\sqrt{\omega}} - \frac{x^2\omega'\,dx}{2\omega^{\frac{3}{2}}} - \frac{x\,dx}{2\sqrt{\omega}} = \frac{3a\,dy}{2} \tag{93}$$

oder

$$\frac{2}{3a}\,Ds\,\frac{x^2}{\sqrt{\omega}}\left[\frac{2\,dx}{x} - \frac{\omega'\,dx}{2\omega}\right] - \frac{1}{3a}\,Ds\,\frac{x\,dx}{\sqrt{\omega}} = Ds\,\frac{x\,dx}{(a+bx^3)^{\frac{3}{2}}}. \tag{94}$$

Die Gleichung:

$$Ds\,\frac{x^2dx}{(a+bx^3)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3b}\,Ds\,\frac{\omega'\,dx}{\omega^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2}{3b\sqrt{\omega}} \tag{95}$$

ist nach §. 31 Abs. II integrierbar.

Ist die Gleichung:

$$\frac{x^3dx}{(a+bx^3)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^3dx}{\omega^{\frac{3}{2}}} = dy \tag{96}$$

zu integrieren, so benützt man am besten die im §. 37 Abs. I entwickelte Methode, weil in diesem Falle sowohl der Exponent von x als auch jener von ω reduziert werden kann. Man schreibt folglich:

$$\frac{dx}{\sqrt{\omega}} - \frac{3bx^3dx}{2\omega^{\frac{3}{2}}} - \frac{dx}{\sqrt{\omega}} = -\frac{3b\,dy}{2} \tag{97}$$

oder

$$-\frac{2}{3b}\,Ds\,\frac{x}{\sqrt{\omega}}\left[\frac{dx}{x} - \frac{\omega'\,dx}{2\omega}\right] + \frac{2}{3b}\,Ds\,\frac{dx}{\sqrt{\omega}} = Ds\,\frac{x^3dx}{(a+bx^3)^{\frac{3}{2}}}. \tag{98}$$

XVII. Ist die Gleichung:

$$\frac{dx}{x(a+bx^3)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dx}{x\omega^{\frac{3}{2}}} = dy \tag{99}$$

zu integrieren, so geht man nach §. 38 Abs. II vor und führt demgemäss Variable und Konstanten ein, also:

$$Ds\,\frac{dx}{x\sqrt{\omega}} - Ds\,\frac{bx^2dx}{\omega^{\frac{3}{2}}} = Ds\,a\,dy. \tag{100}$$

Substituiert man den Wert der beiden Differentialsummen links, der in endlicher Form darstellbar ist, aus §. 33 Gl. 47 und aus der obigen Gl. 95 und befreit dann dy von der Konstante, so ist die Integration vollzogen.

Zur Integration der Gleichung:

$$\frac{dx}{x^2(a+bx^3)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dx}{x^2\omega^{\frac{3}{2}}} = dy \tag{101}$$

benützt man gleichfalls am zweckmässigsten die im §. 38 Abs. II entwickelte Methode und schreibt demgemäss:

$$\frac{3dx}{2x^2\sqrt{\omega}} - \frac{3bx^2dx}{2x\omega^{\frac{3}{2}}} = \frac{3ady}{2} \tag{102}$$

oder

$$-\frac{dx}{x^2\sqrt{\omega}} - \frac{\omega' dx}{2x\omega^{\frac{3}{2}}} + \frac{5dx}{2x^2\sqrt{\omega}} = \frac{3ady}{2}. \tag{103}$$

Verfährt man in der bekannten Weise, so ist:

$$\frac{2}{3a} Ds \frac{1}{x\sqrt{\omega}}\left[-\frac{dx}{x} - \frac{\omega' dx}{2\omega}\right] + \frac{5}{3a} Ds \frac{dx}{x^2\sqrt{\omega}} = Ds \frac{dx}{x^2(a+bx^3)^{\frac{3}{2}}}. \tag{104}$$

Substituiert man den Wert der zweiten Differentialsumme aus der Gl. 26, so ist das Integral ermittelt.

Auf ähnliche Weise lassen sich auch die Integrale aller anderen Differentialfunktionen von der in den §. 36—40 bezeichneten Form unmittelbar aus den Differentialen ermitteln. Bei einiger Übung in den neuen Integrationsmethoden wird man dieselben ähnlich wie die algebraischen Operationen leicht handhaben, ohne dass es zu diesem Zweck eines Zurückgehens auf das Detail der oben (§. 36—40) dargestellten Methoden bedarf.

§. 42.

Integration von $x^m(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}dx$.

Ganz analog den im §. 36—40 dargestellten Integrationsmethoden ist auch die Integration des trinomischen Differentials von der Form $x^m(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}dx$ und der daran sich schliessenden Kombinationen. Ich will bei der Ableitung der Integrationsformeln genau die oben §. 36—40 beobachtete Reihenfolge anwenden.

I. Ist die Gleichung:

$$x^m(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}dx = x^m\omega^{\frac{p}{r}}dx = dy \tag{1}$$

zu integrieren, so multipliziert man zunächst auch hier (vgl. §. 36 Abs. I) mit $m+1$, also:

$$(m+1)x^m\omega^{\frac{p}{r}}dx = (m+1)\,dy, \tag{2}$$

womit die erste Funktion der Differentialsumme gebildet erscheint. Um auch die zweite herzustellen, führe man mit Rücksicht auf die Relation:

$$x^{m+1} \cdot \omega' = x^{m+1} \cdot nbx^{n-1} + x^{m+1} \cdot 2ncx^{2n-1} = nbx^{m+n} + 2ncx^{m+2n} \quad 3)$$

in die Gl. 2 Hilfsdifferentiale ein, also:

$$(m+1)x^m \omega^{\frac{p}{r}} dx + \frac{pnbx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}-1}dx}{r} + \frac{2pncx^{m+2n}\omega^{\frac{p}{r}-1}dx}{r} -$$

$$- \frac{pnbx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}-1}dx}{r} - \frac{2cnpx^{m+2n}\omega^{\frac{p}{r}-1}dx}{r} = (m+1)dy \quad 4)$$

oder (s. Gl. 3):

$$(m+1)x^m \omega^{\frac{p}{r}} dx + \frac{px^{m+1}\omega^{\frac{p}{r}-1}\omega' dx}{r} - \frac{bnp}{r} \cdot x^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}-1}dx -$$

$$- \frac{2cnp}{r} \cdot x^{m+2n}\omega^{\frac{p}{r}-1}dx = (m+1)dy. \quad 5)$$

Bildet man schliesslich aus den zwei ersten Differentialen die Differentialsumme und befreit dann dy von den Konstanten, so ist:

$$\frac{1}{m+1} Ds\, x^{m+1}\omega^{\frac{p}{r}}\left[\frac{(m+1)dx}{x} + \frac{p\,\omega' dx}{r\,\omega}\right] - \frac{bnp}{(m+1)r} Ds\, x^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}-1}dx -$$

$$- \frac{2cnp}{(m+1)r} Ds\, x^{m+2n}\omega^{\frac{p}{r}-1}dx = Ds\, x^m(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}dx. \quad \mathbf{6)}$$

II. Man kann das trinomische Differential auch in der Weise integrieren, dass man es als die zweite Funktion der Differentialsumme behandelt und die erste durch Hilfsdifferentiale herbeischafft (vgl. §. 36 Abs. II). Zu diesem Zweck multipliziert man die Gl. 1 mit $\frac{(p+r)2nc}{r}$, also:

$$\frac{(p+r)2ncx^m\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r} = \frac{(p+r)2ncdy}{r} \quad 7)$$

und führt sodann mit Rücksicht auf die Relation:

$$x^{m-2n+1} \cdot \omega' = nbx^{m-n} + 2ncx^m \quad 8)$$

zwei Hilfsdifferentiale ein, nämlich:

$$(m-2n+1)x^{m-2n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx + \frac{(p+r)nbx^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r} + \frac{(p+r)2ncx^m\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r} -$$

$$- (m-2n+1)x^{m-2n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx - \frac{(p+r)nbx^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r} = \frac{(p+r)2ncdy}{r} \quad 9)$$

oder mit Rücksicht auf die Gl. 8:

$$(m-2n+1)x^{m-2n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx+\frac{(p+r)x^{m-2n+1}\omega^{\frac{p}{r}}\omega' dx}{r}-$$

$$-(m-2n+1)x^{m-2n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx-\frac{(p+r)nb}{r}\cdot x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}}dx=\frac{(p+r)2ncdy}{r}. \qquad 10)$$

Bildet man endlich aus den beiden ersten Differentialen die Differentialsumme und befreit dann dy von den Konstanten, so ist:

$$\frac{r}{(p+r)2nc}Ds\,x^{m-2n+1}\omega^{\frac{p}{r}+1}\left[\frac{m-2n+1)dx}{x}+\frac{(p+r)\omega' dx}{r\omega}\right]-$$

$$-\frac{b}{2c}Ds\,x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}}dx-\frac{(m-2n+1)r}{(p+r)2nc}Ds\,x^{m-2n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx=$$

$$=Ds\,x^m(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}dx. \qquad \mathbf{11)}$$

III. Das trinomische Differential kann auch dadurch integriert werden, dass man in dasselbe mit Rücksicht auf die Relation $\omega-bx^n-cx^{2n}=a$ Variable und Konstanten einführt (s. §. 36 Abs. III u. IV), also:

$$x^m\omega^{\frac{p}{r}+1}dx-bx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}}dx-cx^{m+2n}\omega^{\frac{p}{r}}dx=a\,dy. \qquad 12)$$

Um dem ersten Differential den zur Bildung der Differentialsumme erforderlichen Koeffizienten zu verschaffen, multipliziert man die Gl. 12 wieder (Abs. I) mit $m+1$, also:

$$(m+1)x^m\omega^{\frac{p}{r}+1}dx-(m+1)bx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}}dx-(m+1)cx^{m+2n}\omega^{\frac{p}{r}}dx=$$

$$=(m+1)a\,dy. \qquad 13)$$

Um nun auch dem zweiten und dem dritten Differential, deren variable Bestandteile die zur Bildung der Differentialsumme nötige Form bereits besitzen (s. Gl. 3—6), die zu diesem Zweck erforderlichen Konstanten zu verschaffen, benützt man wieder die Methode der ausgleichenden Hilfsdifferentiale (§. 34 Abs. III u. IV, §. 36 Abs. III u. IV) und setzt:

a) $$\frac{(p+r)ndz}{r}+d\xi=-(m+1)dz; \qquad [dz=b\,x^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}}dx], \qquad 14)$$

$$d\xi=-\frac{(mr+np+nr+r)dz}{r}, \qquad 15)$$

$$\frac{(p+r)ndz}{r}-\frac{(mr+np+nr+r)dz}{r}=-(m+1)dz \qquad 16)$$

(b $$\frac{(p+r)2ndz'}{r}+d\xi'=-(m+1)dz'; \qquad [dz'=c\,x^{m+2n}\omega^{\frac{p}{r}}dx], \qquad 17)$$

$$d\xi'=-\frac{(mr+2np+2nr+r)dz'}{r}, \qquad 18)$$

$$\frac{(p+r)2ndz'}{r}-\frac{(mr+2np+2nr+r)dz'}{r}=-(m+1)dz'. \qquad 19)$$

Substituiert man nun die Werte für das zweite und dritte Differential der Gl. 13 aus den Gl. 16 und 19, so ist:

$$(m+1)x^m\omega^{\frac{p}{r}+1}dx + \frac{(p+r)nbx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r} + \frac{(p+r)2ncx^{m+2n}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r} -$$

$$-\frac{(mr+np+nr+r)b}{r}\cdot x^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}}dx - \frac{(mr+2np+2nr+r)c}{r}\cdot x^{m+2n}\omega^{\frac{p}{r}}dx =$$

$$= (m+1)ady \qquad 20)$$

oder mit Rücksicht auf die Gl. 3:

$$(m+1)x^m\omega^{\frac{p}{r}+1}dx + \frac{(p+r)x^{m+1}\omega^{\frac{p}{r}}\omega' dx}{r} - \frac{(mr+np+nr+r)b}{r}\cdot x^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}}dx -$$

$$-\frac{(mr+2np+2nr+r)c}{r}\cdot x^{m+2n}\omega^{\frac{p}{r}}dx = (m+1)ady. \qquad 21)$$

Bildet man schliesslich aus den zwei ersten Differentialen die Differentialsumme und befreit dy von den Konstanten, so ist:

$$\frac{1}{(m+1)a}Ds\,x^{m+1}\omega^{\frac{p}{r}+1}\left[\frac{(m+1)dx}{x} + \frac{(p+r)\omega' dx}{r\omega}\right] -$$

$$-\frac{(mr+np+nr+r)b}{(m+1)ar}Ds\,x^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}}dx - \frac{(mr+2np+2nr+r)c}{(m+1)ar}Ds\,x^{m+2n}\omega^{\frac{p}{r}}dx =$$

$$= Ds\,x^m(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}dx. \qquad 22)$$

IV. Man kann auch den umgekehrten Weg wie sub III einschlagen, (vgl. §. 36 Abs. IV), dem zweiten und dritten Differential in der Gl. 12 durch Multiplikation dieser letzteren die erforderlichen Koeffizienten verschaffen und dann das erste Differential durch die Methode der ausgleichenden Hilfsdifferentiale mit den zur Bildung der Differentialsumme notwendigen Konstanten ausstatten. Zu diesem Zweck multipliziert man die Gl. 12 mit $-\frac{(p+r)2n}{r}$, also:

$$-\frac{2n(p+r)x^m\omega^{\frac{p}{r}+1}dx}{r} + \frac{(p+r)2nbx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r} + \frac{(p+r)2ncx^{m+2n}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r} =$$

$$= -\frac{(p+r)2andy}{r}. \qquad 23)$$

Das zweite und dritte Differential haben nunmehr die zur Bildung der Differentialsumme erforderliche Gestalt, wobei jedoch zu bemerken ist, dass das zweite zu diesem Zweck geteilt werden muss (s. oben Gl. 3 u. 4). Um auch dem ersten Differential die notwendige Form zu verleihen, wendet man die Methode der ausgleichenden Hilfsdifferentiale an, also:

$$(m+1)dz + d\xi = -\frac{2n(p+r)dz}{r}; \qquad [dz = x^m \omega^{\frac{p}{r}+1} dx], \tag{24}$$

$$d\xi = -\frac{(mr+2np+2nr+r)dz}{r}, \tag{25}$$

$$(m+1)dz - \frac{(mr+2np+2nr+r)dz}{r} = -\frac{2n(p-r)dz}{r}. \tag{26}$$

Substituiert man für das erste Differential der Gl. 23 den Wert aus der Gl. 26 und nimmt man die früher erwähnte Teilung des zweiten Differentials vor, so ist:

$$(m+1)x^m \omega^{\frac{p}{r}+1} dx + \frac{(p+r)nbx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r} + \frac{(p+r)2ncx^{m+2n}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r} +$$

$$+ \frac{(p+r)nbx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r} - \frac{(mr+2np+2nr+r)x^m\omega^{\frac{p}{r}+1}dx}{r} = -\frac{(p+r)2andy}{r} \tag{27}$$

oder (s. Gl. 3 und 4):

$$(m+1)x^m \omega^{\frac{p}{r}+1} dx + \frac{(p+r)x^{m+1}\omega^{\frac{p}{r}}\omega' dx}{r} + \frac{(p+r)nbx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r} -$$

$$- \frac{(mr+2np+2nr+r)x^m\omega^{\frac{p}{r}+1}dx}{r} = -\frac{(p+r)2andy}{r}. \tag{28}$$

Bildet man endlich aus den zwei ersten Differentialen die Differentialsumme und befreit dy von den Konstanten, so ist:

$$-\frac{r}{2an(p+r)} Ds\, x^{m+1}\omega^{\frac{p}{r}+1}\left[\frac{(m+1)dx}{x} + \frac{(p+r)\omega' dx}{r\omega}\right] - \frac{b}{2a} Ds\, x^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}}dx +$$

$$+ \frac{mr+2np+2nr+r}{2an(p+r)} Ds\, x^m \omega^{\frac{p}{r}+1} dx = Ds\, x^m(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}} dx. \tag{29}$$

V. Das trinomische Differential kann auch, ähnlich wie das binomische (§. 36 Abs. V) dadurch integriert werden, dass man das zu integrierende Differential selbst als Hilfsdifferential wieder einführt. Zu diesem Zweck multipliziert man die Gl. 1 mit $m+1$ und führt dann mit Rücksicht auf die Relation:

$$\frac{2npx^m\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r} = \frac{2npdy}{r} \tag{30}$$

Hilfsdifferentiale ein, also:

$$(m+1)x^m\omega^{\frac{p}{r}}dx + \frac{2npx^m\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r} = (m+1)dy + \frac{2npdy}{r} =$$

$$= \frac{(mr+2np+r)dy}{r} \tag{31}$$

oder

$$(m+1)x^m \omega^{\frac{p}{r}} dx + \frac{2npx^m(a+bx^n+cx^{2n})\omega^{\frac{p}{r}-1} dx}{r} = \frac{(mr+2np+r)dy}{r} \qquad 32)$$

oder

$$(m+1)x^m \omega^{\frac{p}{r}} dx + \frac{pnbx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}-1} dx}{r} + \frac{2pncx^{m+2n}\omega^{\frac{p}{r}-1} dx}{r} +$$

$$+ \frac{2anpx^m \omega^{\frac{p}{r}-1} dx}{r} + \frac{bnpx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}-1} dx}{r} = \frac{(mr+2np+r)dy}{r}. \qquad 33)$$

Nach einigen leichten Operationen ist mit Rücksicht auf Gl. 3:

$$\frac{r}{mr+2np+r} Dsx^{m+1}\omega^{\frac{p}{r}}\left[\frac{(m+1)dx}{x} + \frac{p\,\omega'\,dx}{r\omega}\right] + \frac{2anp}{mr+2np+r} Dsx^m \omega^{\frac{p}{r}-1} dx +$$

$$+ \frac{bnp}{mr+2np+r} Ds\,x^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}-1} dx = Ds\,x^m(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}} dx. \qquad \mathbf{34)}$$

VI. Das trinomische Differential kann endlich (vgl. §. 36 Abs. VI) auch durch die Substitution:

$$x^{2n} = \frac{\omega - a - bx^n}{c} \qquad 35)$$

und durch Wiedereinführung des ursprünglichen Differentials als Hilfsdifferentials integriert werden. Substituiert man den Wert von x^{2n} in die Gl. 1, so ist:

$$x^{m-2n}\omega^{\frac{p}{r}+1} dx - bx^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}} dx - ax^{m-2n}\omega^{\frac{p}{r}} dx = cdy. \qquad 36)$$

Das erste Differential der vorstehenden Gleichung wird zur Bildung der Differentialsumme tauglich, wenn man die erstere mit $m - 2n + 1$ multipliziert, also:

$$(m-2n+1)x^{m-2n}\omega^{\frac{p}{r}+1} dx - (m-2n+1)bx^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}} dx -$$

$$-(m-2n+1)ax^{m-2n}\omega^{\frac{p}{r}} dx = (m-2n+1)cdy. \qquad 37)$$

Ein Blick auf die vorstehende Gleichung zeigt, dass das dritte Differential wegen des Exponenten von x^{m-2n} zur Bildung der zweiten Funktion der Differentialsumme nicht verwendet werden kann. Dagegen ist das zweite Differential mit Rücksicht auf die Gl. 8 zu diesem Zweck allerdings verwendbar, nur muss sein Koeffizient durch die Methode der ausgleichenden Hilfsdifferentiale verändert und der zweite Ausdruck rechts in der Gl. 8 durch Wiedereinführung des zu integrierenden Differentials herbeigeschafft werden. Es ist nun:

$$\frac{(p+r)ndz}{r} + d\xi = -(m-2n+1)dz; \qquad [dz = bx^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}}dx], \quad 38)$$

$$d\xi = -\frac{(mr+np-nr+r)dz}{r}, \qquad 39)$$

$$\frac{(p+r)ndz}{r} - \frac{(mr+np-nr+r)dz}{r} = -(m-2n+1)dz. \qquad 40)$$

Substituiert man für das zweite Differential der Gl. 37 den Wert aus der Gl. 40 und führt man gleichzeitig mit Rücksicht auf die Relation:

$$\frac{(p+r)2ncx^m\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r} = \frac{(p+r)2ncdy}{r} \qquad 41)$$

Hilfsdifferentiale ein, so ist:

$$(m-2n+1)x^{m-2n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx + \frac{(p+r)nbx^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r} + \frac{(p+r)2ncx^m\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r} -$$

$$-\frac{(mr+np-nr+r)bx^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r} - (m-2n+1)ax^{m-2n}\omega^{\frac{p}{r}}dx =$$

$$= (m-2n+1)cdy + \frac{(p+r)2ncdy}{r} = \frac{(mr+2np+r)cdy}{r}. \qquad 42)$$

Bildet man endlich aus den drei ersten Differentialen die Differentialsumme (Gl. 8) und befreit dann dy von den Konstanten, so ergiebt sich:

$$\frac{r}{(mr+2np+r)c} Ds\, x^{m-2n+1}\omega^{\frac{p}{r}+1}\left[\frac{(m-2n+1)dx}{x} + \frac{(p+r)\omega' dx}{r\omega}\right] -$$

$$-\frac{(mr+np-nr+r)b}{(mr+2np+r)c} Ds\, x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}}dx - \frac{(m-2n+1)ar}{(mr+2np+r)c} Ds\, x^{m-2n}\omega^{\frac{p}{r}}dx =$$

$$= Ds\, x^m(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}dx. \qquad \mathbf{43)}$$

VII. Die sub I—VI entwickelten Formeln entsprechen genau den Integrationen des binomischen Differentials (§. 36 Abs. I—VI). Es lassen sich übrigens für das trinomische Differential noch zahlreiche andere Integralformeln ermitteln, von welchen ich die für das neue Integrationssystem wichtigsten und brauchbarsten erwähnen will.

So liefert zunächst die sub V dargestellte Integrationsmethode mit Rücksicht auf die Relation:

$$\omega = \frac{x\omega'}{2n} + a + \frac{bx^n}{2} = \frac{x\omega'}{n} + a - cx^{2n} \qquad 44)$$

zwei Integrationsformeln. Substituiert man nämlich in dem zweiten Differential der Gl. 31 und 32 für ω den ersten in der vorstehenden Relation erscheinenden Wert, so ergiebt sich die in der Gl. 34 enthaltene Integrationsformel. Substituiert man dagegen den zweiten in der Gl. 44 erscheinenden Wert von ω, so ist:

$$(m+1)x^m\omega^{\frac{p}{r}}dx + \frac{npx^m\left(\frac{x\omega'}{n}+a-cx^{2n}\right)\omega^{\frac{p}{r}-1}dx}{r} = (m+1)dy + \frac{npdy}{r} =$$

$$= \frac{(mr+np+r)dy}{r} \qquad 45)$$

oder

$$(m+1)x^m\omega^{\frac{p}{r}}dx + \frac{px^{m+1}\omega^{\frac{p}{r}-1}\omega'dx}{r} + \frac{anp}{r}\cdot x^m\omega^{\frac{p}{r}-1}dx -$$

$$-\frac{cnp}{r}\cdot x^{m+2n}\omega^{\frac{p}{r}-1}dx = \frac{(mr+np+r)dy}{r}. \qquad 46)$$

Bildet man endlich aus den beiden ersten Differentialen die Differentialsumme und befreit sodann dy von den Konstanten, so ist:

$$\frac{r}{mr+np+r}Ds\,x^{m+1}\omega^{\frac{p}{r}}\left[\frac{(m+1)dx}{x}+\frac{p\omega'dx}{r\omega}\right]+\frac{anp}{mr+np+r}Ds\,x^m\omega^{\frac{p}{r}-1}dx -$$

$$-\frac{cnp}{mr+np+r}Ds\,x^{m+2n}\omega^{\frac{p}{r}-1}dx = Ds\,x^m(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}dx. \qquad 47)$$

VIII. Auch die sub VI dargestellte Methode liefert noch eine zweite Integralformel. Multipliziert man nämlich die Gl. 36 mit den zur Bildung der zweiten Funktion der Differentialsumme erforderlichen Konstanten $= -\frac{n(p+r)}{r}$ und führt man sodann mit Rücksicht auf die Gl. 8 das ursprüngliche Differential als Hilfsdifferential ein, so ist:

$$-\frac{n(p+r)x^{m-2n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx}{r}+\frac{(p+r)nbx^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r}+\frac{(p+r)2ncx^m\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r}+$$

$$+\frac{(p+r)anx^{m-2n}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r} = -\frac{n(p+r)cdy}{r}+\frac{(p+r)2ncdy}{r} = \frac{(p+r)ncdy}{r}. \qquad 48)$$

Um nun auch der ersten Funktion der Differentialsumme die notwendigen Koeffizienten zu verschaffen, führt man ausgleichende Hilfsdifferentiale ein, also:

$$(m-2n+1)dz + d\xi = -\frac{n(p+r)dz}{r}; \qquad [dz = x^{m-2n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx], \qquad 49)$$

$$d\xi = -\frac{(mr+np-nr+r)dz}{r}, \qquad 50)$$

$$(m-2n+1)dz - \frac{(mr+np-nr+r)dz}{r} = -\frac{n(p+r)dz}{r}. \qquad 51)$$

Substituiert man für das erste Differential der Gl. 48 den Wert aus der Gl. 51, so ist (s. Gl. 8):

$$(m-2n+1)x^{m-2n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx+\frac{(p+r)x^{m-2n+1}\omega^{\frac{p}{r}}\omega' dx}{r}+$$

$$+\frac{(p+r)anx^{m-2n}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r}-\frac{(mr+np-nr+r)x^{m-2n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx}{r}=\frac{(p+r)ncdy}{r}. \quad 52)$$

Verfährt man nun in der bekannten Weise, so ist:

$$\frac{r}{(p+r)nc}Ds\,x^{m-2n+1}\omega^{\frac{p}{r}+1}\left[\frac{(m-2n+1)dx}{x}+\frac{(p+r)\omega' dx}{r\omega}\right]+$$

$$+\frac{a}{c}Ds\,x^{m-2n}\omega^{\frac{p}{r}}dx-\frac{mr+np-nr+r}{(p+r)nc}Ds\,x^{m-2n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx=$$

$$=Ds\,x^m(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}dx. \quad 53)$$

IX. Während die Integrationsformeln sub VI und VIII auf der Substitution von x^{2n} beruhen (Gl. 35), können weitere Integrationen durch die Substitution

$$x^n=\frac{\omega-cx^{2n}-a}{b} \quad 54)$$

bewirkt werden. Substituiert man nämlich diesen Wert von x^n in die Gl. 1, so ist:

$$x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx-cx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}}dx-ax^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}}dx=bdy \quad 55)$$

und wenn man diese Gleichung mit den zur Bildung der ersten Funktion der Differentialsumme erforderlichen Konstanten multipliziert:

$$(m-n+1)x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx-(m-n+1)cx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}}dx-$$

$$-(m-n+1)ax^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}}dx=(m-n+1)bdy. \quad 56)$$

Nun ist aber:

$$x^{m-n+1}.\,\omega'=nbx^m+2ncx^{m+n}, \quad 57)$$

aus welcher Relation hervorgeht, dass das zweite Differential in der Gl. 56 bereits die erforderlichen variablen Bestandteile besitzt und nur durch die Methode der ausgleichenden Hilfsdifferentiale mit den notwendigen Konstanten ausgestattet werden muss, wogegen das Differential $nbx^m\omega^{\frac{p}{r}}dx$ (Gl. 57) leicht durch Einführung des ursprünglichen Differentials als Hilfsdifferentials herbeigeschafft werden kann. Es ist also:

$$\frac{2n(p+r)dz}{r}+d\xi=-(m-n+1)dz;\quad [dz=cx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}}dx], \quad 58)$$

$$d\xi=-\frac{(mr+2np+nr+r)dz}{r} \quad 59)$$

$$\frac{2n(p+r)dz}{r}-\frac{(mr+2np+nr+r)dz}{r}=-(m-n+1)dz. \quad 60)$$

Substituiert man nun für das zweite Differential der Gl. 56 den Wert aus der Gl. 60 und führt gleichzeitig das ursprüngliche Differential als Hilfsdifferential ein, so ist:

$$(m-n+1)x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx+\frac{(p+r)nbx^{m}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r}+\frac{(p+r)2ncx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r}-$$

$$-(m-n+1)ax^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}}dx-\frac{(mr+2np+nr+r)cx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r}=$$

$$=(m-n+1)bdy+\frac{(p+r)nbdy}{r}=\frac{(mr+np+r)bdy}{r} \qquad 61)$$

oder (Gl. 57)

$$\frac{r}{(mr+np+r)b}\,Ds\,x^{m-n+1}\omega^{\frac{p}{r}+1}\left[\frac{(m-n+1)dx}{x}+\frac{(p+r)\omega' dx}{r\omega}\right]-$$

$$-\frac{(m-n+1)ar}{(mr+np+r)b}\,Ds\,x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}}dx-\frac{(mr+2np+nr+r)c}{(mr+np+r)b}\,Ds\,x^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}}dx=$$

$$=Ds\,x^{m}(a+bx^{n}+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}dx. \qquad \mathbf{62)}$$

X. Eine weitere Integrationsformel erlangt man dadurch, dass man dieselbe Substitution wie in den Gl. 54 und 55 vornimmt, dann aber die Gleichung mit den zur Bildung der zweiten Funktion der Differentialsumme erforderlichen Konstanten $\left(=-\frac{2n(p+r)}{r}\right)$ multipliziert und überdies mit Rücksicht auf die Gl. 57 das ursprüngliche Differential als Hilfsdifferential einführt, also:

$$-\frac{2n(p+r)x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx}{r}+\frac{(p+r)nbx^{m}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r}+\frac{(p+r)2ncx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r}+$$

$$+\frac{(p+r)2anx^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r}=-\frac{2n(p+r)bdy}{r}+\frac{(p+r)nbdy}{r}=-\frac{(p+r)nbdy}{r}. \qquad 63)$$

Um nun auch dem ersten Differential der vorstehenden Gleichung die erforderlichen Koeffizienten zu verleihen, führt man ausgleichende Hilfsdifferentiale ein, also:

$$(m-n+1)dz+d\xi=-\frac{2n(p+r)dz}{r}; \qquad \left[dz=x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx\right], \quad 64)$$

$$d\xi=-\frac{(mr+2np+nr+r)dz}{r}, \qquad 65)$$

$$(m-n+1)dz-\frac{(mr+2np+nr+r)dz}{r}=-\frac{2n(p+r)dz}{r}. \qquad 66)$$

Substituiert man für das erste Differential der Gl. 63 den Wert aus der Gl. 66, so ist (Gl. 57):

$$(m-n+1)x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx+\frac{(p+r)x^{m-n+1}\omega^{\frac{p}{r}}\omega' dx}{r}+\frac{(p+r)2anx^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r}-$$

$$-\frac{(mr+2np+nr+r)x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx}{r}=-\frac{(p+r)nb\,dy}{r} \qquad 67)$$

oder

$$-\frac{r}{(p+r)nb}Ds\,x^{m-n+1}\omega^{\frac{p}{r}+1}\left[\frac{(m-n+1)dx}{x}+\frac{(p+r)\omega' dx}{r\omega}\right]-$$

$$-\frac{2a}{b}Ds\,x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}}dx+\frac{mr+2np+nr+r}{(p+r)nb}Ds\,x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx=$$

$$=Ds\,x^m(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}dx. \qquad 68)$$

XI. Schliesslich sind noch zwei Integrationsformeln für das trinomische Differential zu entwickeln, welche sich von den bisher abgeleiteten namentlich dadurch unterscheiden, dass sie dreigliedrige Differentialsummen (vgl. §. 30 Gl. 5) enthalten. Sie sind namentlich für die Integration der im §. 43 und 44 behandelten Differentiale mit höheren Potenzen von ω sehr bequem und brauchbar.

Man benutzt also zunächst die im §. 34 Gl. 15—17 enthaltenen Relationen und es ergiebt sich, wenn man in die Gl. 1 mit Rücksicht auf §. 34 Gl. 17 Variable und Konstanten einführt und dann die Gleichung mit $-\frac{p+r}{r}$ multipliziert:

$$-\frac{2(p+r)x^{m-n+1}\omega^{\frac{p}{r}+1}\lambda' dx}{r}+\frac{(p+r)x^{m-n+1}\lambda\,\omega^{\frac{p}{r}}\omega' dx}{r}=-\frac{(p+r)n\Delta dy}{r}. \qquad 69)$$

Das zweite Differential der vorstehenden Gleichung, aus welchem demnächst die dritte Funktion der Differentialsumme gebildet werden wird (Gl. 74), hat nunmehr die zu diesem Zweck erforderliche Form. Um auch dem ersten Differential, aus dem die zweite Funktion der Differentialsumme entstehen soll (Gl. 74), die nötigen Konstanten zu verschaffen, führt man ausgleichende Hilfsdifferentiale ein, also:

$$dz+d\xi=-\frac{2(p+r)dz}{r}; \qquad \left[dz=x^{m-n+1}\omega^{\frac{p}{r}+1}\lambda' dx\right], \qquad 70)$$

$$d\xi=-\frac{(2p+3r)dz}{r}, \qquad 71)$$

$$dz-\frac{(2p+3r)dz}{r}=-\frac{2(p+r)dz}{r}. \qquad 72)$$

Substituiert man für das erste Differential der Gl. 69 den Wert aus der Gl. 72 und führt man überdies zur Herbeischaffung der ersten Funktion der Differentialsumme Hilfsdifferentiale ein, so ist:

$$(m-n+1)x^{m-n}\lambda\,\omega^{\frac{p}{r}+1}dx + x^{m-n+1}\omega^{\frac{p}{r}+1}\lambda' dx + \frac{(p+r)x^{m-n+1}\lambda\,\omega^{\frac{p}{r}}\omega' dx}{r} -$$

$$-\frac{(2p+3r)x^{m-n+1}\omega^{\frac{p}{r}+1}\lambda' dx}{r} - (m-n+1)x^{m-n}\lambda\,\omega^{\frac{p}{r}+1}dx =$$

$$= -\frac{(p+r)n\varDelta\,dy}{r}. \qquad 73)$$

Bildet man endlich aus den drei ersten Differentialen dieser Gleichung die Differentialsumme und substituiert man in dem vierten und fünften Differential für λ und λ' die im §. 34 Gl. 15, 16 angegebenen Werte, so ergiebt sich nach einigen Reduktionen folgende Integrationsformel ($\lambda = b + 2cx^n$):

$$-\frac{r}{(p+r)n\varDelta} Ds\, x^{m-n+1}\lambda\,\omega^{\frac{p}{r}+1}\left[\frac{(m-n+1)dx}{x} + \frac{\lambda' dx}{\lambda} + \frac{(p+r)\,\omega' dx}{r\omega}\right] +$$

$$+\frac{(m-n+1)br}{(p+r)n\varDelta} Ds\, x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx + \frac{(mr+2np+2nr+r)2c}{(p+r)n\varDelta} Ds\, x^m\omega^{\frac{p}{r}+1}dx =$$

$$= x^m(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}dx. \qquad 74)$$

XII. Setzt man endlich (vgl. unten §. 46 Abs. II):

$$\tau = 2acx - b^2x - bcx^{n+1}, \qquad 75)$$

$$\tau' = 2ac - b^2 - (n+1)bcx^n, \qquad 76)$$

$$2n\tau'\omega - \tau\omega' + nb^2\omega + 2n^2bcx^n\omega = na\varDelta, \qquad 77)$$

so ergiebt sich, wenn man in die Gl. 1 mit Rücksicht auf die Gl. 77 Variable und Konstanten einführt und dann mit $-\frac{p+r}{r}$ multipliziert:

$$-\frac{2n(p+r)x^m\omega^{\frac{p}{r}+1}\tau' dx}{r} + \frac{(p+r)x^m\tau\omega^{\frac{p}{r}}\omega' dx}{r} - \frac{(p+r)nb^2x^m\omega^{\frac{p}{r}+1}dx}{r} -$$

$$-\frac{2n^2(p+r)bcx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx}{r} = -\frac{(p+r)na\varDelta\,dy}{r}. \qquad 78)$$

Auch hier muss wie sub XI das erste Differential durch die Methode der ausgleichenden Hilfsdifferentiale mit dem zur Bildung der Differentialsumme erforderlichen Koeffizienten ausgestattet und dann noch ein Hilfsdifferential hinzugefügt werden. Demgemäss ist:

$$dz + d\xi = -\frac{2n(p+r)dz}{r}; \qquad \left[dz = x^m\omega^{\frac{p}{r}+1}\tau' dx\right], \qquad 79)$$

$$d\xi = -\frac{(2np+2nr+r)dz}{r}, \qquad 80)$$

$$dz - \frac{(2np+2nr+r)dz}{r} = -\frac{2n(p+r)dz}{r}. \qquad 81)$$

Substituiert man nun für das erste Differential der Gl. 78 den Wert aus der Gl. 81 und fügt überdies das bereits erwähnte Hilfsdifferential hinzu, so ist:

$$mx^{m-1}\tau\omega^{\frac{p}{r}+1}dx + x^m\omega^{\frac{p}{r}+1}\tau'dx + \frac{(p+r)x^m\tau\omega^{\frac{p}{r}}\omega'dx}{r} - \frac{(p+r)nb^2x^m\omega^{\frac{p}{r}+1}dx}{r} -$$

$$- \frac{2n^2(p+r)bcx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx}{r} - \frac{(2np+2nr+r)x^m\omega^{\frac{p}{r}+1}\tau'dx}{r} -$$

$$- mx^{m-1}\tau\omega^{\frac{p}{r}+1}dx = -\frac{(p+r)na\varDelta dy}{r}. \qquad 82)$$

Bildet man schliesslich aus den ersten drei Differentialen die Differentialsumme und substituiert man im sechsten und siebenten Differential für τ und τ' ihre oben (Gl. 75, 76) angegebenen Werte, so ergiebt sich nach einigen Reduktionen folgende Integralformel:

$$- \frac{r}{(p+r)na\varDelta} Ds\, x^m\tau\omega^{\frac{p}{r}+1}\left[\frac{m\,dx}{x} + \frac{\tau'dx}{\tau} + \frac{(p+r)\omega'dx}{r\omega}\right] -$$

$$- \frac{(mr+2np+3nr+r)bc}{(p+r)na\varDelta} Ds\, x^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx +$$

$$+ \frac{2ac(mr+2np+2nr+r) - b^2(mr+np+nr+r)}{(p+r)na\varDelta} Ds\, x^m\omega^{\frac{p}{r}+1}dx =$$

$$= x^m(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}dx. \qquad 83)$$

Gedächtnistafel.

Abs. I und II. — Das zu integrierende trinomische Differential wird sub I als erste, sub II als zweite Funktion der Differentialsumme behandelt und die noch fehlende Funktion durch Hinzufügung von Hilfsdifferentialen herbeigeschafft.

Abs. III und IV. — In beiden Fällen werden Variable und Konstanten eingeführt und dann sub III das erste, sub IV das zweite und dritte Differential durch Multiplikation der Gleichung mit dem erforderlichen Koeffizienten ausgestattet, während der anderen Funktion der Differentialsumme die notwendigen Konstanten durch ausgleichende Hilfsdifferentiale verschafft werden.

Abs. V und VII. — In beiden Fällen Wiedereinführung des ursprünglichen Differentials als Hilfsdifferentials und Substitution des doppelten Wertes für ω (Gl. 44).

Abs. VI und VIII. — In beiden Fällen erfolgt die Substitution von x^{2n} in die Gleichung und es wird sodann sub VI das erste, sub VIII das zweite und dritte Differential durch Multiplikation der Gleichung mit den erforderlichen Koeffizienten ausgestattet, während der anderen Funktion der Differentialsumme die notwendigen Konstanten durch ausgleichende Hilfsdifferentiale verschafft werden.

Abs. IX und X. — Substitution von x^n, sonst wie im vorhergehenden Absatz.

Abs. XI und XII. In beiden Fällen werden Variable und Konstanten eingeführt, doch wird die Gleichung zwischen den Variablen und Konstanten nicht wie sub III und IV blos aus dem Trinom gebildet (vgl. §. 34 Gl. 17 und oben Gl. 77). — Bildung einer dreigliedrigen Differentialsumme.

§. 43.

Integration von $\dfrac{x^m dx}{(a + bx^n + cx^{2n})^{\frac{p}{r}}}$.

I. Bei der Integration der Gleichung:

$$\frac{x^m dx}{(a + bx^n + cx^{2n})^{\frac{p}{r}}} = \frac{x^m dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} = dy \tag{1}$$

findet man eine Integrationsformel, durch welche der Exponent von ω vollständig und zwar gleichmässig (vgl. unten Abs. V und VI), jener von x wenigstens teilweise reduziert wird, und die sich deshalb namentlich für Differentiale mit höheren Potenzen von ω eignet, indem man nach §. 42 Abs. XI vorgeht. Man nimmt also dieselbe Substitution wie dort vor und multipliziert die Gleichung sodann, weil sich hier ω im Nenner befindet, mit $\frac{p-r}{r}$, so dass sich also ergiebt:

$$\frac{2(p-r)x^{m-n+1}\lambda' dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p-r)x^{m-n+1}\lambda\,\omega' dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}}} = \frac{(p-r)n\Delta dx}{r}. \tag{2}$$

Da das zweite Differential nunmehr die erforderliche Form besitzt, so stattet man auch das erste mit dem notwendigen Koeffizienten durch ausgleichende Hilfsdifferentiale aus, also:

$$dz + d\xi = \frac{2(p-r)dz}{r}; \qquad \left[dz = \frac{x^{m-n+1}\lambda' dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}\right], \tag{3}$$

$$d\xi = \frac{(2p-3r)dz}{r}, \tag{4}$$

$$dz + \frac{(2p-3r)dz}{r} = \frac{2(p-r)dz}{r}. \tag{5}$$

Substituiert man nun für das erste Differential der Gl. 2 den Wert aus der Gl. 5 und führt man, um die dreigliedrige Differentialsumme zu vervollständigen, Hilfsdifferentiale ein, so ist:

$$\frac{(m-n+1)x^{m-n}\lambda\,dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}+\frac{x^{m-n+1}\lambda'\,dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}-\frac{(p-r)\,x^{m-n+1}\lambda\,\omega'\,dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}}}+$$

$$+\frac{(2p-3r)\,x^{m-n+1}\lambda'\,dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}-1}}-\frac{(m-n+1)x^{m-n}\lambda\,dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}=\frac{(p-r)\,n\varDelta\,dy}{r}. \qquad 6)$$

Bildet man schliesslich aus den drei ersten Differentialen die Differentialsumme und substituiert man überdies im vierten und fünften Differential für λ und λ' die im §. 34 Gl. 15, 16 angegebenen Werte, so ergiebt sich nach einigen Reduktionen folgende Integrationsformel ($\lambda=b+2cx^n$):

$$\frac{r}{(p-r)n\varDelta}\,Ds\,\frac{x^{m-n+1}\lambda}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}\left[\frac{(m-n+1)dx}{x}+\frac{\lambda'\,dx}{\lambda}-\frac{(p-r)\,\omega'\,dx}{r\,\omega}\right]-$$

$$-\frac{2c(mr-2np+2nr+r)}{(p-r)n\varDelta}\,Ds\,\frac{x^m\,dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}-\frac{(m-n+1)br}{(p-r)n\varDelta}\,Ds\,\frac{x^{m-n}\,dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}=$$

$$=Ds\,\frac{x^m\,dx}{(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}}. \qquad 7)$$

Setzt man in der vorstehenden Formel $m=n-1$, so ergiebt sich der im §. 34 Gl. 24 enthaltene Ausdruck. Setzt man $m=n$, so erhält man die unten (Abs. VII) auf einem anderen Wege abgeleitete Formel.

II. Um eine Integrationsformel zu finden, durch welche umgekehrt (Abs. I) der Exponent von x vollständig, jener von ω wenigstens teilweise reduziert wird, muss man nach §. 42 Abs. II vorgehen (vgl. §. 37 Abs. I), nur ist ebenso wie sub. I zu berücksichtigen, dass sich hier $\omega^{\frac{p}{r}}$ im Nenner befindet, folglich die diesem Ausdruck entsprechende zweite Funktion der Differentialsumme ein negatives Vorzeichen haben und die Gleichung deshalb mit $-\frac{(p-r)\,2nc}{r}$ multipliziert werden muss. Die Gl. 9 §. 42 nimmt dann folgende Gestalt an:

$$\frac{(m-2n+1)\,x^{m-2n}\,dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}-\frac{(p-r)\,nbx^{m-n}\,dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}}}-\frac{(p-r)\,2ncx^m\,dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}}}+$$

$$+\frac{(p-r)nbx^{m-n}\,dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}}}-\frac{(m-2n+1)x^{m-2n}\,dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}=-\frac{(p-r)\,2nc\,dy}{r} \qquad 8)$$

oder (§. 42 Gl. 10):

$$\frac{(m-2n+1)x^{m-2n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p-r)x^{m-2n+1}\omega' dx}{r\omega^{\frac{p}{r}}} + \frac{(p-r)nbx^{m-n}dx}{r\omega^{\frac{p}{r}}} -$$

$$- \frac{(m-2n+1)x^{m-2n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} = - \frac{(p-r)2ncdy}{r}. \qquad 9)$$

Nimmt man nunmehr die Differentialsumme und befreit dy von den Konstanten, so ist:

$$-\frac{r}{(p-r)2nc} Ds \frac{x^{m-2n+1}}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}\left[\frac{(m-2n+1)dx}{x} - \frac{(p-r)\omega' dx}{r\omega}\right] - \frac{b}{2c} Ds \frac{x^{m-n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} +$$

$$+ \frac{(m-2n+1)r}{(p-r)2nc} Ds \frac{x^{m-2n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} = Ds \frac{x^m dx}{(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}}. \qquad \mathbf{10)}$$

III. Eine in vielen Fällen brauchbare Formel, durch welche der Exponent von x reduziert wird, jener von ω unberührt bleibt, erlangt man dadurch, dass man nach §. 42 Abs. VI verfährt (vgl. §. 37 Abs. II), wobei jedoch wieder zu berücksichtigen ist, dass $\omega^{\frac{p}{r}}$ sich im Nenner befindet. Die Gl. 37 §. 42 nimmt dann folgende Gestalt an:

$$\frac{(m-2n+1)x^{m-2n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(m-2n+1)bx^{m-n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} - \frac{(m-2n+1)ax^{m-2n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} =$$

$$= (m-2n+1)cdy. \qquad 11)$$

Das erste Differential hat hier die zur Bildung der Differentialsumme nötige Gestalt. Dagegen muss der Koeffizient des zweiten Differentials durch die Methode der ausgleichenden Hilfsdifferentiale geändert und überdies mit Rücksicht auf die in §. 42 Gl. 8 enthaltene Relation das ursprüngliche Differential als Hilfsdifferential eingeführt werden. Es ist nun:

$$-\frac{(p-r)ndz}{r} + d\xi = -(m-2n+1)dz; \qquad \left[dz = \frac{bx^{m-n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}}}\right], \quad 12)$$

$$d\xi = -\frac{(mr-np-nr+r)dz}{r}; \qquad 13)$$

$$-\frac{(p-r)ndz}{r} - \frac{(mr-np-nr+r)dz}{r} = -(m-2n+1)dz. \qquad 14)$$

Substituiert man für das zweite Differential der Gl. 11 den Wert aus der Gl. 14 und führt man überdies mit Rücksicht auf die Relation:

$$-\frac{(p-r)2ncx^m dx}{r\omega^{\frac{p}{r}}} = -\frac{(p-r)2ncdy}{r} \qquad 15)$$

Hilfsdifferentiale ein, so ergiebt sich:

$$\frac{(m-2n+1)x^{m-2n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p-r)nbx^{m-n}dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}}} - \frac{(p-r)2ncx^{m}dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}}} -$$

$$- \frac{(mr-np-nr+r)bx^{m-n}dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}}} - \frac{(m-2n+1)ax^{m-2n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} =$$

$$= (m-2n+1)cdy - \frac{(p-r)2ncdy}{r} = \frac{(mr-2np+r)cdy}{r}. \qquad 16)$$

Verfährt man nun in der bekannten Weise, so ist (§. 42 Gl. 8):

$$\frac{r}{(mr-2np+r)c} Ds \frac{x^{m-2n+1}}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} \left[\frac{(m-2n+1)dx}{x} - \frac{(p-r)\omega' dx}{r\omega}\right] -$$

$$- \frac{(mr-np-nr+r)b}{(mr-2np+r)c} Ds \frac{x^{m-n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} - \frac{(m-2n+1)ar}{(mr-2np+r)c} Ds \frac{x^{m-2n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} =$$

$$= Ds \frac{x^m dx}{(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}}. \qquad \mathbf{17)}$$

IV. Eine vierte Integrationsformel erlangt man, wenn man nach §. 42 Abs. IV vorgeht (vgl. §. 37 Abs. III). Man führt also nach der bekannten Relation in die Gl. 1 Variable und Konstanten ein:

$$\frac{x^m dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{bx^{m+n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} - \frac{cx^{m+2n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} = ady, \qquad 18)$$

man multipliziert ferner die Gl. 18 mit $\frac{(p-r)2n}{r}$ und teilt sodann mit Rücksicht auf die Relation §. 42 Gl. 3 das zweite Differential:

$$\frac{2n(p-r)x^m dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p-r)nbx^{m+n}dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}}} - \frac{(p-r)2ncx^{m+2n}dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}}} -$$

$$- \frac{(p-r)nbx^{m+n}dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}}} = \frac{(p-r)2andy}{r}. \qquad 19)$$

Das zweite und dritte Differential haben nunmehr die zur Bildung der Differentialsumme nötige Form (§. 42 Gl. 3), während dem ersten Differential die nötigen Konstanten durch die Methode der ausgleichenden Hilfsdifferentiale verschafft werden müssen. Zu diesem Zweck setzt man:

$$(m+1)dz + d\xi = \frac{2n(p-r)dz}{r}; \qquad \left[dz = \frac{x^m dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}\right], \qquad 20)$$

$$d\xi = -\frac{(mr - 2np + 2nr + r)dz}{r}, \tag{21}$$

$$(m+1)dz - \frac{(mr - 2np + 2nr + r)dz}{r} = \frac{2n(p-r)dz}{r}. \tag{22}$$

Substituiert man den Wert des ersten Differentials der Gl. 19 aus der Gl. 22, so ist:

$$\frac{(m+1)x^m dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p-r)x^{m+1}\omega' dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}}} - \frac{(p-r)nbx^{m+n}dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}}} -$$

$$- \frac{(mr - 2np + 2nr + r)x^m dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}-1}} = \frac{(p-r)2andy}{r} \tag{23}$$

oder

$$\frac{r}{(p-r)2an} Ds \frac{x^{m+1}}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}\left[\frac{(m+1)dx}{x} - \frac{(p-r)\omega' dx}{r\omega}\right] - \frac{b}{2a} Ds \frac{x^{m+n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} -$$

$$- \frac{mr - 2np + 2nr + r}{(p-r)2an} Ds \frac{x^m dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} = Ds \frac{x^m dx}{(a + bx^n + cx^{2n})^{\frac{p}{r}}}. \tag{24}$$

V. Weitere wichtige und brauchbare Integrationsformeln, durch welche der Exponent von x vollständig und zwar gleichmässig, jener von ω wenigstens teilweise reduziert wird (vgl. Abs. I), erlangt man durch die im Abs. VIII und X des §. 42 dargestellten Methoden. Geht man zunächst nach §. 42 Abs. X vor, so setze man mit einer kleinen Abweichung von §. 42 Gl. 54:

$$x^n = \frac{2n\omega - x\omega' - 2na}{nb} \tag{25}$$

und es ergiebt sich, wenn man diesen Wert von x^n in die Gl. 1 substituiert und dann mit dem zur Bildung der zweiten Funktion erforderlichen Koeffizienten $\left(= \frac{p-r}{r}\right)$ multipliziert:

$$\frac{2n(p-r)x^{m-n}dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p-r)x^{m-n+1}\omega' dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}}} - \frac{2na(p-r)x^{m-n}dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}}} =$$

$$= \frac{(p-r)nbdy}{r}. \tag{26}$$

Verschafft man nun auch der ersten Funktion durch ausgleichende Hilfsdifferentiale die erforderlichen Koeffizienten, so ist:

$$(m-n+1)dz + d\xi = \frac{2n(p-r)dz}{r}; \quad \left[dz = \frac{x^{m-n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}\right], \tag{27}$$

$$d\xi = -\frac{(mr - 2np + nr + r)dz}{r}, \tag{28}$$

$$(m - n + 1)dz - \frac{(mr - 2np + nr + r)dz}{r} = \frac{2n(p - r)dz}{r}. \tag{29}$$

Substituiert man für das erste Differential der Gl. 26 den Wert aus der Gl. 29, so ist:

$$\frac{(m - n + 1)x^{m-n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p - r)x^{m-n+1}\omega' dx}{r\omega^{\frac{p}{r}}} - \frac{2na(p - r)x^{m-n}dx}{r\omega^{\frac{p}{r}}} -$$
$$- \frac{(mr - 2np + nr + r)x^{m-n}dx}{r\omega^{\frac{p}{r}-1}} = \frac{(p - r)nb\,dy}{r} \tag{30}$$

oder

$$\frac{r}{(p-r)nb} Ds \frac{x^{m-n+1}}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}\left[\frac{(m - n + 1)dx}{x} - \frac{(p - r)\omega' dx}{r\omega}\right] - \frac{2a}{b} Ds \frac{x^{m-n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} -$$
$$- \frac{mr - 2np + nr + r}{(p - r)nb} Ds \frac{x^{m-n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} = Ds \frac{x^m dx}{(a + bx^n + cx^{2n})^{\frac{p}{r}}}. \tag{31}$$

Diese Entwicklung ist für einen speziellen Fall ($m = n$) schon oben §. 34 Abs. IV in einem anderen Zusammenhang gegeben worden und man erhält die Relation in §. 34 Gl. 34, wenn man in der vorstehenden Gleichung gleichfalls $m = n$ setzt.

VI. Geht man nach §. 42 Abs. VIII vor und setzt man, um die Rechnung etwas abzukürzen, mit einer leichten Abweichung von §. 42 Gl. 35:

$$x^{2n} = -\frac{n\omega - x\omega' - na}{nc}, \tag{32}$$

so ist, wenn man diesen Wert in der Gl. 1 substituiert und diese sodann mit dem zur Bildung der zweiten Funktion der Differentialsumme notwendigen Koeffizienten $\left(= \frac{p-r}{r}\right)$ multipliziert:

$$\frac{n(p - r)x^{m-2n}dx}{r\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p - r)x^{m-2n+1}\omega' dx}{r\omega^{\frac{p}{r}}} - \frac{na(p - r)x^{m-2n}dx}{r\omega^{\frac{p}{r}}} =$$
$$= -\frac{(p - r)nc\,dy}{r}. \tag{33}$$

Wendet man nun, um auch der ersten Funktion der Differentialsumme die erforderlichen Konstanten zu verschaffen, die Methode der ausgleichenden Hilfsdifferentiale an, so ist:

$$(m - 2n + 1)dz + d\xi = \frac{n(p - r)dz}{r}; \qquad \left[dz = \frac{x^{m-2n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}\right], \tag{34}$$

$$d\xi = -\frac{(mr - np - nr + r)dz}{r}, \tag{35}$$

$$(m - 2n + 1)dz - \frac{(mr - np - nr + r)dz}{r} = \frac{n(p - r)dz}{r}. \tag{36}$$

Substituiert man den Wert des ersten Differentials der Gl. 33 aus der Gl. 36, so ist:

$$\frac{(m-2n+1)x^{m-2n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p-r)x^{m-2n+1}\omega' dx}{r\omega^{\frac{p}{r}}} - \frac{na(p-r)x^{m-2n}dx}{r\omega^{\frac{p}{r}}} -$$

$$- \frac{(mr-np-nr+r)x^{m-2n}dx}{r\omega^{\frac{p}{r}-1}} = -\frac{(p-r)ncdy}{r} \tag{37}$$

oder

$$-\frac{r}{(p-r)nc} Ds \frac{x^{m-2n+1}}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} \left[\frac{(m-2n+1)dx}{x} - \frac{(p-r)\omega' dx}{r\omega}\right] + \frac{a}{c} Ds \frac{x^{m-2n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} +$$

$$+ \frac{mr-np-nr+r}{(p-r)nc} Ds \frac{x^{m-2n}dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} = Ds \frac{x^m dx}{(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}}. \tag{38}$$

VII. Ist $m = n$, folglich die Gleichung:

$$\frac{x^n dx}{(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}} = \frac{x^n dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} = dy \tag{39}$$

zu integrieren, so setzt man:

$$t = bx + 2cx^{n+1}, \tag{40}$$

$$t' = b + 2c(n+1)x^n, \tag{41}$$

$$\varDelta = 4ac - b^2. \tag{42}$$

Multipliziert man die Gl. 39 beiderseits mit $n\varDelta$, so ist:

$$\frac{n\varDelta x^n dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} = n\varDelta dy. \tag{43}$$

Nun ist aber, wie einige leichte Rechnungen beweisen:

$$n\varDelta x^n = 4ncx^n\omega - t\omega', \tag{44}$$

folglich, wenn man diesen Wert von $n\varDelta x^n$ in der Gl. 43 substituiert:

$$\frac{4ncx^n dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{t\omega' dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} = n\varDelta dy. \tag{45}$$

Multipliziert man nun die vorstehende Gleichung, um dem zweiten Differential den zur Bildung der Differentialsumme notwendigen Koeffizienten zu verschaffen, mit $\frac{p-r}{r}$, so ist:

$$\frac{(p-r)4ncx^n dx}{r\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p-r)t\omega' dx}{r\omega^{\frac{p}{r}}} = \frac{(p-r)n\varDelta dy}{r}. \tag{46}$$

Um sodann auch das erste Differential auf die zu diesem Zweck erforderliche Form, nämlich $\frac{t' dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}$ zu bringen, benutzt man die Methode der ausgleichenden Hilfsdifferentiale und setzt (Gl. 41):

$$\frac{b+2c(n+1)x^n dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} + d\xi = \frac{(p-r)4ncx^n dx}{r\omega^{\frac{p}{r}-1}}, \tag{47}$$

$$d\xi = \frac{2c(2np-3nr-r)x^n dx}{r\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{b dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}, \tag{48}$$

$$\frac{b+2c(n+1)x^n dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} + \frac{2c(2np-3nr-r)x^n dx}{r\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{b dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} = \frac{(p-r)4ncx^n dx}{r\omega^{\frac{p}{r}-1}}. \tag{49}$$

Substituiert man den Wert des ersten Differentials der Gl. 46 aus der Gl. 49, so ist (s. Gl. 41):

$$\frac{t' dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p-r)t\omega' dx}{r\omega^{\frac{p}{r}}} + \frac{2c(2np-3nr-r)x^n dx}{r\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{b dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} = \frac{(p-r)n\varDelta dy}{r} \tag{50}$$

oder

$$\frac{r}{(p-r)n\varDelta} Ds \frac{t}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}\left[\frac{t' dx}{t} - \frac{(p-r)\omega' dx}{r\omega}\right] + \frac{(2np-3nr-r)2c}{(p-r)n\varDelta} Ds \frac{x^n dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} -$$

$$- \frac{br}{(p-r)n\varDelta} Ds \frac{dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} = Ds \frac{x^n dx}{(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}}. \tag{51}$$

Integriert man die Gl. 1 nach der in den Gl. 40—51 entwickelten Methode, so erhält mit einer unerheblichen formellen Abweichung die in der Gl. 7 enthaltene Integralformel.

VIII. Zur Erläuterung der in den vorstehenden und folgenden Paragraphen dargestellten Methoden wird unten (§. 47) eine Beispielsammlung durch Integration jener trinomischen Differentiale gegeben werden, in welchen x im vierten Grade erscheint. Hier will ich nur einige trinomische Differentiale vermittelst der neuen Methoden integrieren, in welchen x blos im zweiten Grade vorkommt.

Ist z. B.

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{x\,dx}{\sqrt{\omega}} = dy \tag{52}$$

zu integrieren, so substituiert man am zweckmässigsten den Wert von

$$x = \frac{\omega' - b}{2c} \tag{53}$$

in die vorstehende Gleichung, also:

$$\frac{\omega'\,dx}{2\sqrt{\omega}} - \frac{b\,dx}{2\sqrt{\omega}} = c\,dy. \tag{54}$$

Da das erste Differential unmittelbar auf die Differentialsumme gebracht werden kann (§. 31 Abs. II), so hat man:

$$\frac{\sqrt{\omega}}{c} - \frac{b}{2c} Ds \frac{dx}{\sqrt{\omega}} = Ds \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}. \tag{55}$$

IX. Zur Integration der Gleichung

$$\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\omega}} = dy \tag{56}$$

geht man am zweckmässigsten nach Abs. III vor, substituiert für x^2 den Wert nach §. 42 Gl. 35 und führt das ursprüngliche Differential als Hilfsdifferential ein, also:

$$\sqrt{\omega}\,dx + \frac{bx\,dx}{2\sqrt{\omega}} + \frac{2cx^2\,dx}{2\sqrt{\omega}} - \frac{3bx\,dx}{2\sqrt{\omega}} - \frac{a\,dx}{\sqrt{\omega}} = c\,dy + c\,dy = 2c\,dy. \tag{57}$$

Bildet man aus den drei ersten Differentialen die Differentialsumme und befreit sodann dy von den Konstanten, so ist:

$$\frac{1}{2c} Ds\, x\sqrt{\omega}\left[\frac{dx}{x} + \frac{\omega'\,dx}{2\omega}\right] - \frac{3b}{4c} Ds \frac{x\,dx}{\sqrt{\omega}} - \frac{a}{2c} Ds \frac{dx}{\sqrt{\omega}} = Ds \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}. \tag{58}$$

Substituiert man den Wert für die zweite Differentialsumme aus der Gl. 55, so ist das Integral nach einigen leichten Reduktionen ermittelt.

X. Ist die Gleichung:

$$\frac{x\,dx}{(a+bx+cx^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x\,dx}{\omega^{\frac{3}{2}}} = dy \tag{59}$$

zu integrieren, so wendet man am einfachsten die im Abs. V dargestellte Methode an, indem man für x den in der Gl. 25 angegebenen Wert substituiert und dann die Gleichung mit $\frac{1}{2}$ multipliziert, also:

$$\frac{dx}{\sqrt{\omega}} - \frac{x\omega'\,dx}{2\omega^{\frac{3}{2}}} - \frac{a\,dx}{\omega^{\frac{3}{2}}} = \frac{b\,dy}{2} \tag{60}$$

oder

$$\frac{2}{b} Ds \frac{x}{\sqrt{\omega}}\left[\frac{dx}{x} - \frac{\omega' dx}{2\omega}\right] - \frac{2a}{b} Ds \frac{dx}{\omega^{\frac{3}{2}}} = Ds \frac{x dx}{(a + bx + cx^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad 61)$$

Substituiert man für die zweite Differentialsumme den Wert aus §. 46 Gl. 26, 30, so ist das Integral ermittelt.

Man kann aber auch zur Auffindung des obigen Integrals die Methode sub VII anwenden, indem man setzt:

$$t = bx + 2cx^2; \qquad t' = b + 4cx, \qquad 62)$$

$$\varDelta x = 4cx\omega - t\omega'. \qquad 63)$$

Multipliziert man nun die Gl. 59 beiderseits mit $\varDelta$ und substituiert dann für $\varDelta x$ den Wert aus der Gl. 63, so ergiebt sich, wenn man gleichzeitig mit $\frac{1}{2}$ multipliziert:

$$\frac{2cx dx}{\sqrt{\omega}} - \frac{t\omega' dx}{2\omega^{\frac{3}{2}}} = \frac{\varDelta dy}{2}. \qquad 64)$$

Verwandelt man endlich, um die Differentialsumme bilden zu können, den Zähler des ersten Differentials in t' (Gl. 62), so ist:

$$\frac{t' dx}{\sqrt{\omega}} - \frac{t\omega' dx}{2\omega^{\frac{3}{2}}} - \frac{2cx dx}{\sqrt{\omega}} - \frac{b dx}{\sqrt{\omega}} = \frac{\varDelta dy}{2} \qquad 65)$$

oder

$$\frac{2}{\varDelta} Ds \frac{t}{\sqrt{\omega}}\left[\frac{t' dx}{t} - \frac{\omega' dx}{2\omega}\right] - \frac{4c}{\varDelta} Ds \frac{x dx}{\sqrt{\omega}} - \frac{2b}{\varDelta} Ds \frac{dx}{\sqrt{\omega}} = Ds \frac{x dx}{(a + bx + cx^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad 66)$$

Substituiert man für die zweite Differentialsumme den Wert aus der Gl. 55, so ergiebt sich nach mehreren Reduktionen das nämliche Integral wie in dem früheren Fall.

Zur Integration von $\frac{x^2 dx}{\omega^{\frac{3}{2}}}$ wird am zweckmässigsten die sub VI oder sub I dargestellte Methode verwendet u. s. f.

§. 44.

Integration von $\dfrac{dx}{x^m(a + bx^n + cx^{2n})^{\frac{p}{r}}}$.

I. Ist die Gleichung:

$$\frac{dx}{x^m(a + bx^n + cx^{2n})^{\frac{p}{r}}} = \frac{dx}{x^m \omega^{\frac{p}{r}}} = dy \qquad 1)$$

zu integrieren, so findet man eine Integrationsformel, in welcher der Exponent von ω vollständig, jener von x wenigstens teilweise reduziert wird (vgl. §. 43 Abs. I), indem man nach §. 42 Abs. XII vorgeht. Man nimmt also dieselbe Substitution vor wie im §. 42 Gl. 77, 78 und multipliziert dann die Gleichung mit $\frac{p-r}{r}$, also:

$$\frac{2n(p-r)\tau' dx}{r x^m \omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p-r)\tau\omega' dx}{r x^m \omega^{\frac{p}{r}}} + \frac{nb^2(p-r)dx}{r x^m \omega^{\frac{p}{r}-1}} + \frac{2n^2(p-r)bc dx}{r x^{m-n} \omega^{\frac{p}{r}-1}} =$$

$$= \frac{(p-r)na\varDelta dy}{r}. \qquad 2)$$

Gebraucht man, um das erste Differential der vorstehenden Gleichung mit dem zur Bildung der Differentialsumme erforderlichen Koeffizienten auszustatten, die Methode der ausgleichenden Hilfsdifferentiale, so ist:

$$dz + d\xi = \frac{2n(p-r)dz}{r}; \qquad \left[dz = \frac{\tau' dx}{x^m \omega^{\frac{p}{r}-1}}\right], \qquad 3)$$

$$d\xi = \frac{(2np - 2nr - r)dz}{r}, \qquad 4)$$

$$dz + \frac{(2np - 2nr - r)dz}{r} = \frac{2n(p-r)dz}{r}. \qquad 5)$$

Substituiert man für das erste Differential der Gl. 2 den Wert aus der Gl. 5 und führt man, um die dreigliedrige Differentialsumme zu vervollständigen, Hilfsdifferentiale ein, so ist:

$$\frac{\tau' dx}{x^m \omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{m\tau dx}{x^{m+1} \omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p-r)\tau\omega' dx}{r x^m \omega^{\frac{p}{r}}} + \frac{nb^2(p-r)dx}{r x^m \omega^{\frac{p}{r}-1}} + \frac{2n^2(p-r)bc dx}{r x^{m-n} \omega^{\frac{p}{r}-1}} +$$

$$+ \frac{(2np - 2nr - r)\tau' dx}{r x^m \omega^{\frac{p}{r}-1}} + \frac{m\tau dx}{x^{m+1} \omega^{\frac{p}{r}-1}} = \frac{(p-r)na\varDelta y}{r}. \qquad 6)$$

Bildet man schliesslich aus den drei ersten Differentialen die Differentialsumme und substituiert man in das sechste und siebente Differential für τ und τ' die oben im §. 42 Gl. 75, 76 angegebenen Werte, so ergiebt sich nach einigen Reduktionen folgende Integrationsformel ($\tau = 2acx - b^2x - bcx^{n+1}$):

$$\frac{r}{(p-r)na\varDelta} Ds \frac{\tau}{x^m \omega^{\frac{p}{r}-1}} \left[\frac{\tau' dx}{\tau} - \frac{m dx}{x} - \frac{(p-r)\omega' dx}{r\omega}\right] -$$

$$- \frac{(mr + 2np - 3nr - r)bc}{(p-r)na\varDelta} Ds \frac{dx}{x^{m-n} \omega^{\frac{p}{r}-1}} +$$

$$+ \frac{2ac(mr + 2np - 2nr - r) - b^2(mr + np - nr - r)}{(p-r)na\varDelta} Ds \frac{dx}{x^m \omega^{\frac{p}{r}-1}} =$$

$$= Ds \frac{dx}{x^m(a + bx^n + cx^{2n})^{\frac{p}{r}}}. \qquad 7)$$

II. Zur Integration der Gl. 1 kann man ferner auch die im §. 42 Abs. III und IV dargestellten Methoden gebrauchen, welche den im §. 38 Abs. I und II für das analoge binomische Differential gegebenen Ableitungsweisen entsprechen.

Man führt also zunächst (§. 42 Abs. III) mit Rücksicht auf die bekannte Relation Variable und Konstanten ein und multipliziert dann die Gleichung mit $-(m-1)$, also:

$$-\frac{(m-1)dx}{x^m \omega^{\frac{p}{r}-1}} + \frac{(m-1)bx^{n-1}dx}{x^{m-1}\omega^{\frac{p}{r}}} + \frac{(m-1)cx^{2n-1}dx}{x^{m-1}\omega^{\frac{p}{r}}} = -(m-1)ady. \quad 8)$$

Das erste Differential ist dadurch in die richtige Form gebracht. Um auch das zweite und dritte Differential zur Bildung der Differentialsumme tauglich zu machen, benutzt man die Methode der ausgleichenden Hilfsdifferentiale und setzt demgemäss:

$$a)\quad -\frac{(p-r)ndz}{r} + d\xi = (m-1)dz; \qquad \left[dz = \frac{bx^{n-1}dx}{x^{m-1}\omega^{\frac{p}{r}}}\right], \quad 9)$$

$$d\xi = \frac{(mr+np-nr-r)dz}{r}, \quad 10)$$

$$-\frac{(p-r)ndz}{r} + \frac{(mr+np-nr-r)dz}{r} = (m-1)dz; \quad 11)$$

$$b)\quad -\frac{(p-r)2ndz'}{r} + d\xi' = (m-1)dz'; \qquad \left[dz' = \frac{cx^{2n-1}dx}{x^{m-1}\omega^{\frac{p}{r}}}\right], \quad 12)$$

$$d\xi' = \frac{(mr+2np-2nr-r)dz'}{r}, \quad 13)$$

$$-\frac{(p-r)2ndz'}{r} + \frac{(mr+2np-2nr-r)dz'}{r} = (m-1)dz'. \quad 14)$$

Substituiert man den Wert des zweiten und dritten Differentials der Gl. 8 aus den Gl. 11 und 14, so ist:

$$-\frac{(m-1)dx}{x^m \omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p-r)nbx^{n-1}dx}{rx^{m-1}\omega^{\frac{p}{r}}} - \frac{(p-r)2ncx^{2n-1}dx}{rx^{m-1}\omega^{\frac{p}{r}}} +$$

$$+\frac{(mr+np-nr-r)bdx}{rx^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}}} + \frac{(mr+2np-2nr-r)cdx}{rx^{m-2n}\omega^{\frac{p}{r}}} = -(m-1)ady. \quad 15)$$

Bildet man aus den ersten drei Differentialen die Differentialsumme und befreit dann dy von den Konstanten, so ist:

$$-\frac{1}{(m-1)a} Ds \frac{1}{x^{m-1}\omega^{\frac{p}{r}-1}}\left[-\frac{(m-1)dx}{x}-\frac{(p-r)\omega' dx}{r\omega}\right]-$$

$$-\frac{(mr+np-nr-r)b}{(m-1)ar} Ds \frac{dx}{x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}}}-\frac{(mr+2np-2nr-r)c}{(m-1)ar} Ds \frac{dx}{x^{m-2n}\omega^{\frac{p}{r}}}=$$

$$= Ds \frac{dx}{x^m(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}}. \qquad \textbf{16)}$$

III. Geht man zur Integration der Gl. 1 nach §. 42 Abs. IV vor, so führt man wieder Variable und Konstanten ein, multipliziert aber statt mit $-(m-1)$ mit $\frac{(p-r)2n}{r}$, in welchem Falle sich ergiebt:

$$\frac{2n(p-r)dx}{rx^m\omega^{\frac{p}{r}-1}}-\frac{(p-r)nbx^{n-1}dx}{rx^{m-1}\omega^{\frac{p}{r}}}-\frac{(p-r)2ncx^{2n-1}dx}{rx^{m-1}\omega^{\frac{p}{r}}}-$$

$$-\frac{(p-r)nbx^{n-1}dx}{rx^{m-1}\omega^{\frac{p}{r}}}=\frac{(p-r)2andy}{r}. \qquad 17)$$

Aus dem zweiten und dritten Differential kann die zweite Funktion der Differentialsumme ohne Weiteres gebildet werden. Um auch das erste Differential mit dem zu diesem Zweck erforderlichen Koeffizienten auszustatten, setzt man:

$$-(m-1)dz+d\xi=\frac{2n(p-r)dz}{r}; \qquad \left[dz=\frac{dx}{x^m\omega^{\frac{p}{r}-1}}\right], \qquad 18)$$

$$d\xi=\frac{(mr+2np-2nr-r)dz}{r}, \qquad 19)$$

$$-(m-1)dz+\frac{(mr+2np-2nr-r)dz}{r}=\frac{2n(p-r)dz}{r}. \qquad 20)$$

Substituiert man für das erste Differential der Gl. 17 den Wert aus der Gl. 20, so ist:

$$-\frac{(m-1)dx}{x^m\omega^{\frac{p}{r}-1}}-\frac{(p-r)\omega' dx}{rx^{m-1}\omega^{\frac{p}{r}}}-\frac{(p-r)nbdx}{rx^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}}}+\frac{(mr+2np-2nr-r)dx}{rx^m\omega^{\frac{p}{r}-1}}=$$

$$=\frac{(p-r)2andy}{r} \qquad 21)$$

oder

$$\frac{r}{(p-r)2an} Ds \frac{1}{x^{m-1}\omega^{\frac{p}{r}-1}}\left[-\frac{(m-1)dx}{x}-\frac{(p-r)\omega' dx}{r\omega}\right]-\frac{b}{2a} Ds \frac{dx}{x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}}}+$$

$$+\frac{mr+2np-2nr-r}{(p-r)2an} Ds \frac{dx}{x^m\omega^{\frac{p}{r}-1}}= Ds \frac{dx}{x^m(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}}. \qquad \textbf{22)}$$

IV. Ist z. B. die Gleichung:

$$\frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{dx}{x^2\sqrt{\omega}} = dy \tag{23}$$

zu integrieren, so geht man am einfachsten nach Abs. II vor, führt in die Gleichung Variable und Konstanten ein und multipliziert mit -1, also:

$$-\frac{\sqrt{\omega}\,dx}{x^2} + \frac{b\,dx}{2x\sqrt{\omega}} + \frac{2cx\,dx}{2x\sqrt{\omega}} + \frac{b\,dx}{2x\sqrt{\omega}} = -a\,dy \tag{24}$$

oder, wenn man aus den drei ersten Differentialen die Differentialsumme bildet:

$$-\frac{1}{a}\,Ds\,\frac{\sqrt{\omega}}{x}\left[\frac{\omega' dx}{2\omega} - \frac{dx}{x}\right] - \frac{b}{2a}\,Ds\,\frac{dx}{x\sqrt{\omega}} = Ds\,\frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx+cx^2}}. \tag{25}$$

V. Ist die Gleichung

$$\frac{dx}{x(a+bx+cx^3)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d}{x\,\omega^{\frac{3}{2}}} = dy \tag{26}$$

zu integrieren, so geht man nach Abs. III vor und führt Variable und Konstanten ein, also:

$$\frac{dx}{x\sqrt{\omega}} - \frac{b\,dx}{2\,\omega^{\frac{3}{2}}} - \frac{2cx\,dx}{2\,\omega^{\frac{3}{2}}} - \frac{b\,dx}{2\,\omega^{\frac{3}{2}}} = a\,dy \tag{27}$$

oder

$$\frac{dx}{x\sqrt{\omega}} - \frac{\omega' dx}{2\,\omega^{\frac{3}{2}}} - \frac{b\,dx}{2\,\omega^{\frac{3}{2}}} = a\,dy. \tag{28}$$

Die drei Differentiale links, sind nach §. 33 Abs. III, §. 31 Abs. II und §. 46 Abs. IV integrierbar.

§. 45.

Integration von $\frac{\sqrt{a+bx^n+cx^{2n}}\,dx}{x^m}$.

I. Zur Integration der Gleichung:

$$\frac{\sqrt{a+bx^n+cx^{2n}}\,dx}{x^m} = \frac{\sqrt{\omega}\,dx}{x^m} = dy \tag{1}$$

kann man drei Integrationsformeln ermitteln, die den Integrationsformeln des analogen binomischen Differentials (§. 39 Abs. I—III) sehr ähnlich sind und auch auf die gleiche Weise abgeleitet werden.

Um eine Integrationsformel zu finden, in welcher der Exponent von x und ω gleichzeitig reduziert wird, benutzt man die im §. 42 Abs. I dargestellte Methode (vgl. §. 39 Abs. I) und multipliziert zunächst die Gl. 1 mit $-(m-1)$, also:

$$-\frac{(m-1)\,\omega^{\frac{p}{r}}\,dx}{x^m} = -(m-1)\,dy. \qquad 2)$$

Hierauf führt man, um auch die erste Funktion der Differentialsumme zu bilden, mit Rücksicht auf die Relation:

$$\frac{p\,\omega^{\frac{p}{r}-1}\,\omega'\,dx}{r\,x^{m-1}} = \frac{bnp\,\omega^{\frac{p}{r}-1}\,dx}{r\,x^{m-n}} + \frac{2cnp\,\omega^{\frac{p}{r}-1}\,dx}{r\,x^{m-2n}} \qquad 3)$$

Hilfsdifferentiale ein, nämlich:

$$\frac{p\,\omega^{\frac{p}{r}-1}\,\omega'\,dx}{r\,x^{m-1}} - \frac{(m-1)\,\omega^{\frac{p}{r}}\,dx}{x^m} - \frac{bnp\,\omega^{\frac{p}{r}-1}\,dx}{r\,x^{m-n}} - \frac{2cnp\,\omega^{\frac{p}{r}-1}\,dx}{r\,x^{m-2n}} =$$

$$= -(m-1)\,dy \qquad 4)$$

oder

$$-\frac{1}{m-1}\,Ds\,\frac{\omega^{\frac{p}{r}}}{x^{m-1}}\left[\frac{p\,\omega'\,dx}{r\,\omega} - \frac{(m-1)\,dx}{x}\right] + \frac{bnp}{(m-1)\,r}\,Ds\,\frac{\omega^{\frac{p}{r}-1}}{x^{m-n}} +$$

$$+\frac{2cnp}{(m-1)\,r}\,Ds\,\frac{\omega^{\frac{p}{r}-1}\,dx}{x^{m-2n}} = Ds\,\frac{\sqrt{a+bx^n+cx^{2n}}\,dx}{x^m}. \qquad 5)$$

II. Eine zweite Integrationsformel, in welcher der Exponent von x reduziert, jener von ω unberührt erscheint, findet man, wenn man nach §. 42 Abs. III vorgeht (s. §. 39 Abs. II). Man führt zu diesem Zweck in die Gl. 1 nach der bekannten Relation Variable und Konstanten ein, also:

$$\frac{\omega^{\frac{p}{r}+1}\,dx}{x^m} - \frac{b\,x^{n-1}\,\omega^{\frac{p}{r}}\,dx}{x^{m-1}} - \frac{c\,x^{2n-1}\,\omega^{\frac{p}{r}}\,dx}{x^{m-1}} = a\,dy. \qquad 6)$$

Man multipliziert nunmehr, um die eine Funktion der Differentialsumme zu bilden, die vorstehende Gleichung mit $-(m-1)$, also:

$$\frac{(m-1)\,b\,x^{n-1}\,\omega^{\frac{p}{r}}\,dx}{x^{m-1}} + \frac{(m-1)\,c\,x^{2n-1}\,\omega^{\frac{p}{r}}\,dx}{x^{m-1}} - \frac{(m-1)\,\omega^{\frac{p}{r}+1}\,dx}{x^m} =$$

$$= -(m-1)\,a\,dy. \qquad 7)$$

Um nun auch die zwei ersten Differentiale, aus welchen die andere Funktion der Differentialsumme gebildet werden soll, mit den erforderlichen Koeffizienten auszustatten, führt man ausgleichende Hilfsdifferentiale ein und setzt demgemäss:

$$\text{a)}\quad \frac{(p+r)\,n\,dz}{r} + d\xi = (m-1)\,dz; \quad \left[dz = \frac{b\,x^{n-1}\,\omega^{\frac{p}{r}}\,dx}{x^{m-1}}\right], \qquad 8)$$

$$d\xi = \frac{(mr - np - nr - r)dz}{r}, \tag{9}$$

$$\frac{(p+r)n\,dz}{r} + \frac{(mr - np - nr - r)dz}{r} = (m-1)dz; \tag{10}$$

$$\text{b)}\quad \frac{(p+r)2n\,dz'}{r} + d\xi' = (m-1)dz'; \quad \left[dz' = \frac{cx^{2n-1}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{x^{m-1}}\right], \tag{11}$$

$$d\xi' = \frac{(mr - 2np - 2nr - r)dz'}{r}, \tag{12}$$

$$\frac{(p+r)2n\,dz'}{r} + \frac{(mr - 2np - 2nr - r)dz'}{r} = (m-1)dz'. \tag{13}$$

Substituiert man für das erste und zweite Differential der Gl. 7 den Wert aus den Gl. 10 und 13, so ist:

$$\frac{(p+r)nbx^{n-1}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{rx^{m-1}} + \frac{(p+r)2ncx^{2n-1}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{rx^{m-1}} - \frac{(m-1)\omega^{\frac{p}{r}+1}dx}{x^m} +$$

$$+ \frac{(mr-np-nr-r)b\,\omega^{\frac{p}{r}}dx}{rx^{m-n}} + \frac{(mr-2np-2nr-r)c\,\omega^{\frac{p}{r}}dx}{rx^{m-2n}} = -(m-1)a\,dy. \tag{14}$$

oder

$$-\frac{1}{(m-1)a}Ds\frac{\omega^{\frac{p}{r}+1}}{x^{m-1}}\left[\frac{(p+r)\omega' dx}{r\omega} - \frac{(m-1)dx}{x}\right] -$$

$$-\frac{(mr-np-nr-r)b}{(m-1)ar}Ds\frac{\omega^{\frac{p}{r}}dx}{x^{m-n}} - \frac{(mr-2np-2nr-r)c}{(m-1)ar}Ds\frac{\omega^{\frac{p}{r}}dx}{x^{m-2n}} =$$

$$= Ds\frac{\sqrt{a+bx^n+cx^{2n}}\,dx}{x^m}. \tag{15}$$

III. Um endlich eine Integrationsformel zu erhalten, in welcher der Exponent von ω reduziert, jener von x, wenigstens teilweise, unberührt erscheint, benutzt man die im §. 42 Abs. V dargestellte Methode (vgl. §. 39 Abs. III). Man multipliziert zu diesem Zweck die Gl. 1 mit $-(m-1)$ und führt dann in der bekannten Weise das ursprüngliche Differential als Hilfsdifferential ein, also:

$$\frac{2np\,\omega^{\frac{p}{r}}dx}{rx^m} - \frac{(m-1)\omega^{\frac{p}{r}}dx}{x^m} = \frac{2np\,dy}{r} - (m-1)dy = -\frac{(mr-2np-r)dy}{r} \tag{16}$$

oder, wenn man in dem ersten Differential ω durch seinen Wert ersetzt,

$$\frac{2np(a+bx^n+cx^{2n})\omega^{\frac{p}{r}-1}dx}{rx^m} - \frac{(m-1)\omega^{\frac{p}{r}}dx}{x^m} = -\frac{(mr-2np-r)dy}{r} \tag{17}$$

oder

$$\frac{pnbx^{n-1}\omega^{\frac{p}{r}-1}dx}{rx^{m-1}} + \frac{p2ncx^{2n-1}\omega^{\frac{p}{r}-1}dx}{rx^{m-1}} - \frac{(m-1)\omega^{\frac{p}{r}}dx}{x^m} + \frac{bnp\omega^{\frac{p}{r}-1}dx}{rx^{m-n}} +$$

$$+ \frac{2anp\omega^{\frac{p}{r}-1}dx}{rx^m} = - \frac{(mr-2np-r)dy}{r}. \qquad 18)$$

Bildet man schliesslich aus den zwei ersten Differentialen die erste, aus dem dritten die zweite Funktion der Differentialsumme und befreit dann dy von den Konstanten, so ergiebt sich:

$$- \frac{r}{mr-2np-r} Ds \frac{\omega^{\frac{p}{r}}}{x^{m-1}}\left[\frac{p\omega' dx}{r\omega} - \frac{(m-1)dx}{x}\right] - \frac{bnp}{mr-2np-r} Ds \frac{\omega^{\frac{p}{r}-1}dx}{x^{m-n}} -$$

$$- \frac{2anp}{mr-2np-r} Ds \frac{\omega^{\frac{p}{r}-1}dx}{x^m} = Ds \frac{\sqrt{a+bx^n+cx^{2n}}dx}{x^m}. \qquad \textbf{19)}$$

IV. Eine ähnliche Relation wie die vorstehende findet man, wenn man nach §. 42 Abs. VII vorgeht. Man multipliziert die Gl. 1 mit $-(m-1)$, führt das ursprüngliche Differential als Hilfsdifferential ein und substituiert in dem letzteren für ω den zweiten im §. 42 Gl. 44 enthaltenen Wert, also:

$$- \frac{(m-1)\omega^{\frac{p}{r}}dx}{x^m} + \frac{np\left(\frac{x\omega'}{n} + a - cx^{2n}\right)\omega^{\frac{p}{r}-1}dx}{rx^m} = -(m-1)dy + \frac{npdy}{r} =$$

$$= - \frac{(mr-np-r)dy}{r} \qquad 20)$$

oder

$$- \frac{(m-1)\omega^{\frac{p}{r}}dx}{x^m} + \frac{p\omega^{\frac{p}{r}-1}\omega' dx}{rx^{m-1}} + \frac{anp\omega^{\frac{p}{r}-1}dx}{rx^m} - \frac{cnp\omega^{\frac{p}{r}-1}dx}{rx^{m-2n}} =$$

$$= - \frac{(mr-np-r)dy}{r}. \qquad 21)$$

Bildet man aus den zwei ersten Differentialen die Differentialsumme, so ist:

$$- \frac{r}{mr-np-r} Ds \frac{\omega^{\frac{p}{r}}}{x^{m-1}}\left[\frac{p\omega' dx}{r\omega} - \frac{(m-1)dx}{x}\right] - \frac{anp}{mr-np-r} Ds \frac{\omega^{\frac{p}{r}-1}dx}{x^m} +$$

$$+ \frac{cnp}{mr-np-r} Ds \frac{\omega^{\frac{p}{r}-1}dx}{x^{m-2n}} = Ds \frac{(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}dx}{x^m}. \qquad \textbf{22)}$$

V. Ist z. B. die Gleichung:

$$\frac{\sqrt{a+bx+cx^2}dx}{x} = \frac{\sqrt{\omega}dx}{x} = dy \qquad 23)$$

zu integrieren, so multipliziert man am zweckmässigsten Zähler und Nenner des Differentials links mit $\sqrt{\omega}$, also:

$$\frac{a\,dx}{x\sqrt{\omega}} + \frac{b\,dx}{\sqrt{\omega}} + \frac{c\,x\,dx}{\sqrt{\omega}} = dy. \tag{24}$$

Die drei Differentiale links sind nach §. 33 Abs. III, §. 32 Abs. III und nach §. 43 Abs. VIII integrierbar.

VI. Ist die Gleichung:

$$\frac{\sqrt{a + bx + cx^2}\,dx}{x^2} = \frac{\sqrt{\omega}\,dx}{x^2} = dy \tag{25}$$

zu integrieren, so wendet man am zweckmässigsten die im Abs. I dargestellte Methode an. Man multipliziert also die Gleichung mit -1 und führt Hilfsdifferentiale ein, also:

$$\frac{\omega'\,dx}{2x\sqrt{\omega}} - \frac{\sqrt{\omega}\,dx}{x^2} - \frac{b\,dx}{2x\sqrt{\omega}} - \frac{c\,dx}{\sqrt{\omega}} = -\,dy \tag{26}$$

oder, wenn man aus den beiden ersten Differentialen die Differentialsumme bildet:

$$-\,Ds\frac{\sqrt{\omega}}{x}\left[\frac{\omega'\,dx}{2\omega} - \frac{dx}{x}\right] + \frac{b}{2}\,Ds\frac{dx}{x\sqrt{\omega}} + c\,Ds\frac{dx}{\sqrt{\omega}} = Ds\frac{\sqrt{a + bx + cx^2}\,dx}{x^2}. \tag{27}$$

Auch $Ds\dfrac{\omega^{\frac{3}{2}}dx}{x}$ kann nach Abs. III u. IV (vgl. auch oben Abs. V), $Ds\dfrac{\omega^{\frac{3}{2}}dx}{x^2}$ nach Abs. I u. II und zwar in einer einfacheren als der gewöhnlichen Form gefunden werden u. s. f.

§. 46.

Integration von $\dfrac{dx}{(a + bx^n + cx^{2n})^{\frac{p}{r}}}$ und $(a + bx^n + cx^{2n})^{\frac{p}{r}}dx$.

I. Die beiden vorstehenden Differentiale lassen sich sehr leicht dadurch integrieren, dass man in den Integrationsformeln der §. 42—44 den Exponenten $m = 0$, folglich $x^m = 1$ setzt. Ich benutze hier zur Integration der Gleichung:

$$\frac{dx}{(a + bx^n + cx^{2n})^{\frac{p}{r}}} = \frac{dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} = dy \tag{1}$$

die im §. 42 Abs. IV entwickelte Methode (vgl. §. 40 Abs. I) weil diese eine in vielen Fällen sehr brauchbare Integrationsformel liefert. Zu diesem Zweck führt man nach der bekannten Relation Variable und

Konstanten in die Gl. 1 ein und multipliziert sie dann, um die zweite Funktion der Differentialsumme bilden zu können, mit $\frac{2n(p-r)}{r}$, also:

$$\frac{2n(p-r)dx}{r\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p-r)nbx^n dx}{r\omega^{\frac{p}{r}}} - \frac{(p-r)2ncx^{2n}dx}{r\omega^{\frac{p}{r}}} - \frac{(p-r)nbx^n dx}{r\omega^{\frac{p}{r}}} = \\ = \frac{2n(p-r)ady}{r}. \qquad 2)$$

Um auch das erste Differential zur Bildung der Differentialsumme tauglich zu machen, setze man:

$$dz + d\xi = \frac{2n(p-r)dz}{r}; \quad \left[dz = \frac{dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}\right], \qquad 3)$$

$$d\xi = \frac{(2np-2nr-r)dz}{r}, \qquad 4)$$

$$dz + \frac{(2np-2nr-r)dz}{r} = \frac{2n(p-r)dz}{r}. \qquad 5)$$

Substituiert man für das erste Differential der Gl. 2 den Wert aus der Gl. 5, so ist:

$$\frac{dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p-r)x\omega' dx}{r\omega^{\frac{p}{r}}} - \frac{(p-r)nbx^n dx}{r\omega^{\frac{p}{r}}} + \frac{(2np-2nr-r)dx}{r\omega^{\frac{p}{r}-1}} = \\ = \frac{(p-r)2andy}{r} \qquad 6)$$

oder

$$\frac{r}{(p-r)2an} Ds \frac{x}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}\left[\frac{dx}{x} - \frac{(p-r)\omega' dx}{r\omega}\right] - \frac{b}{2a} Ds \frac{x^n dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} + \\ + \frac{2np-2nr-r}{(p-r)2an} Ds \frac{dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} = Ds \frac{dx}{(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}}. \qquad 7)$$

II. Eine zweite brauchbare Integrationsformel für die Gl. 1 erlangt man, indem man gleichsetzt (vgl. §. 42 Gl. 75, 76):

$$\tau = 2acx - b^2 x - bcx^{n+1}, \qquad 8)$$

$$\tau' = 2ac - b^2 - bc(n+1)x^n, \qquad 9)$$

$$\Delta = 4ac - b^2, \qquad 10)$$

$$\tau\omega' = n\Delta(bx^n + cx^{2n}) - 2nbcx^n\omega. \qquad 11)$$

Die letztere Gleichung kann durch einige leichte Operationen gefunden werden.

Führt man nun mit Rücksicht auf die folgende Relation, deren Richtigkeit sich von selbst ergiebt:

$$na\Delta = n(4ac - b^2)(\omega - bx^n - cx^{2n}) =$$
$$= (4acn - nb^2)\omega - n\Delta(bx^n + cx^{2n}) \qquad 12)$$

in die Gl. 1 Variable und Konstanten ein, so ist:

$$\frac{(4acn - nb^2)dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{n\Delta(bx^n + cx^{2n})dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} = na\Delta dy. \qquad 13)$$

Führt man nunmehr in die vorstehende Gleichung das Hilfsdifferential $\frac{2nbcx^n dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}$ ein, indem man dasselbe von dem ersten Differential links subtrahiert, zu dem zweiten addiert, so ergiebt sich:

$$\frac{(4acn - nb^2 - 2nbcx^n)dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{n\Delta(bx^n + cx^{2n})dx - 2nbcx^n\omega dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} = na\Delta dy \qquad 14)$$

oder mit Rücksicht auf die Gl. 11:

$$\frac{(4acn - nb^2 - 2nbcx^n)dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{\tau\omega' dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} = na\Delta dy. \qquad 15)$$

Um dem zweiten Differential die zur Bildung der Differentialsumme erforderlichen Koeffizienten zu verleihen, multipliziert man die Gl. 15 mit $\frac{p-r}{r}$, also:

$$\frac{(4acn - nb^2 - 2nbcx^n)(p-r)dx}{r\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p-r)\tau\omega' dx}{r\omega^{\frac{p}{r}}} = \frac{na\Delta(p-r)dy}{r}. \qquad 16)$$

Um nun auch das erste Differential auf die zur Bildung der Differentialsumme nötige Form, nämlich auf den Ausdruck $\frac{\tau' dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}$ zu bringen, benützt man die Methode der ausgleichenden Hilfsdifferentiale und setzt demgemäss:

$$[2ac - b^2 - bc(n+1)x^n]dz + d\xi = \frac{(4acn - nb^2 - 2nbcx^n)(p-r)dz}{r};$$
$$\left[dz = \frac{dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}\right], \qquad 17)$$

$$d\xi = -\frac{(2np - 3nr - r)bcx^n dz}{r} + \frac{(2ac - b^2)(np - nr - r)dz + 2ac(np - nr)dz}{r}. \qquad 18)$$

Substituiert man für das erste Differential der Gl. 16 in der bekannten Weise die Werte aus den Gl. 17 und 18, so ist (Gl. 9):

$$\frac{\tau' dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(p-r)\tau\omega' dx}{r\omega} - \frac{(2np-3nr-r)bcx^n dx}{r\omega^{\frac{p}{r}-1}} +$$

$$+ \frac{(2ac-b^2)(np-nr-r)+2ac(np-nr)}{r} \cdot \frac{dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} = \frac{na\varDelta(p-r)dy}{r}. \qquad 19)$$

Bildet man schliesslich aus den zwei ersten Differentialen die Differentialsumme und befreit dy von den Konstanten, so ist:

$$\frac{r}{(p-r)na\varDelta} Ds \frac{\tau}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}\left[\frac{\tau' dx}{\tau} - \frac{(p-r)\omega' dx}{r\omega}\right] - \frac{(2np-3nr-r)bc}{(p-r)na\varDelta} Ds \frac{x^n dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} +$$

$$+ \frac{(2ac-b^2)(np-nr-r)+2ac(np-nr)}{(p-r)na\varDelta} Ds \frac{dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} = Ds \frac{dx}{(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}}. \qquad \mathbf{20)}$$

Geht man bei der Integration der Gl. 1 nach §. 42 Abs. XII vor oder setzt man im §. 44 Gl. 7 den Exponenten $m=0$, so erhält man mit einer blos formellen Abweichung gleichfalls die vorstehende Gleichung.

III. Ist die Gleichung:

$$(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}} dx = \omega^{\frac{p}{r}} dx = dy \qquad 21)$$

zu integrieren, so benützt man die im §. 42 Abs. V entwickelte Methode (vgl. §. 40 Abs. II) und setzt demgemäss:

$$\omega^{\frac{p}{r}} dx + \frac{2np\omega^{\frac{p}{r}} dx}{r} = dy + \frac{2np\,dy}{r} = \frac{(2np+r)dy}{r} \qquad 22)$$

oder, wenn man im zweiten Differential $\omega^{\frac{p}{r}}$ durch $(a+bx^n+cx^{2n})\omega^{\frac{p}{r}-1}$ ersetzt:

$$\omega^{\frac{p}{r}} dx + \frac{bnpx^n\omega^{\frac{p}{r}-1} dx}{r} + \frac{2cnpx^{2n}\omega^{\frac{p}{r}-1} dx}{r} + \frac{bnpx^n\omega^{\frac{p}{r}-1} dx}{r} +$$

$$+ \frac{2anp\omega^{\frac{p}{r}-1} dx}{r} = \frac{(2np+r)dx}{r} \qquad 23)$$

oder

$$\frac{r}{2np+r} Ds\, x\omega^{\frac{p}{r}}\left[\frac{dx}{x} + \frac{p\omega' dx}{r\omega}\right] + \frac{bnp}{2np+r} Ds\, x^n\omega^{\frac{p}{r}-1} dx +$$

$$+ \frac{2anp}{2np+r} Ds\, \omega^{\frac{p}{r}-1} dx = Ds\,(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}} dx. \qquad \mathbf{24)}$$

IV. Ist z. B. die Gleichung:

$$\frac{dx}{(a+bx+cx^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dx}{\omega^{\frac{3}{2}}} = dy \qquad 25)$$

zu integrieren, so setze man, um weitläufige Rechnungen zu vermeiden, in die Gl. 20 die entsprechenden Werte für n, p, r und es ergiebt sich nach einigen Reduktionen die Relation:

$$\frac{2(b + 2c\bar{x})}{\varDelta\sqrt{\bar{\omega}}} = Ds \frac{dx}{(a + bx + cx^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad 26)$$

Da im vorliegenden Falle $x^{n-1} = 1$ ist, so kann man zur Integration der Gl. 25 mit Vorteil auch die im §. 34 Abs. III dargestellte Methode gebrauchen und setzt demgemäss:

$$\lambda = b + 2cx; \quad \lambda' = 2c, \qquad 27)$$

$$2\lambda'\omega - \lambda\omega' = \varDelta. \qquad 28)$$

Führt man nun in die Gl. 25 mit Rücksicht auf die Gl. 28 Variable und Konstanten ein und multipliziert sodann die Gleichung mit $\frac{1}{2}$, so ergiebt sich:

$$\frac{\lambda' dx}{\sqrt{\omega}} - \frac{\lambda\omega' dx}{2\omega^{\frac{3}{2}}} = \frac{\varDelta dy}{2} \qquad 29)$$

oder

$$\frac{2}{\varDelta} Ds \frac{\lambda}{\sqrt{\omega}}\left[\frac{\lambda' dx}{\lambda} - \frac{\omega' dx}{2\omega}\right] = Ds \frac{dx}{(a + bx + cx^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad 30)$$

V. Ist die Gleichung:

$$\frac{dx}{(a + bx + cx^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{dx}{\omega^{\frac{5}{2}}} = dy \qquad 31)$$

zu integrieren, so führt man (§. 34 Abs. III) wieder Variable und Konstanten ein (Gl. 28), multipliziert die Gleichung, um der zweiten Funktion der Differentialsumme die erforderlichen Konstanten zu verschaffen, mit dem Exponenten des Nenners des ersten Differentials $\left(=\frac{3}{2}\right)$ und wendet auf das erste Differential der Gleichung die Methode der ausgleichenden Hilfsdifferentiale an, also:

$$\frac{\lambda' dx}{\omega^{\frac{3}{2}}} - \frac{3\lambda\omega' dx}{2\omega^{\frac{5}{2}}} + \frac{2\lambda' dx}{\omega^{\frac{3}{2}}} = \frac{3\varDelta dy}{2} \qquad 32)$$

oder

$$\frac{2}{3\varDelta} Ds \frac{\lambda}{\omega^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{\lambda' dx}{\lambda} - \frac{3\omega' dx}{2\omega}\right] + \frac{8c}{3\varDelta} Ds \frac{dx}{\omega^{\frac{3}{2}}} = Ds \frac{dx}{(a + bx + cx^2)^{\frac{5}{2}}}. \qquad 33)$$

Substituiert man für die zweite Differentialsumme den Wert aus den Gl. 26, 30, so ergiebt sich nach einigen Reduktionen das bekannte Integral.

VI. Ist die Gleichung:

$$\sqrt{a + bx + cx^2}\, dx = \sqrt{\omega}\, dx = dy \qquad 34)$$

zu integrieren, so führt man (Abs. III) das ursprüngliche Differential als Hilfsdifferential ein und substituiert in dem letzteren für ω seinen Wert (s. Gl. 22, 23), also:

$$\sqrt{\omega}\,dx + \frac{bx\,dx}{2\sqrt{\omega}} + \frac{2cx^2dx}{2\sqrt{\omega}} + \frac{bx\,dx}{2\sqrt{\omega}} + \frac{a\,dx}{\sqrt{\omega}} = dy + dy = 2dy \qquad 35)$$

oder

$$\frac{1}{2} Ds\,x\sqrt{\omega}\left[\frac{dx}{x} + \frac{\omega' dx}{2\omega}\right] + \frac{b}{4} Ds\frac{x\,dx}{\sqrt{\omega}} + \frac{a}{2} Ds\frac{dx}{\sqrt{\omega}} = Ds\sqrt{a+bx+cx^2}dx. \qquad 36)$$

Substituiert man für die zweite Differentialsumme den Wert aus §. 43 Gl. 55, so ist das Integral gefunden. Noch einfacher gestaltet sich die Rechnung, wenn man die erwähnte Substitution für ω mit Rücksicht auf die Relation (§. 42 Gl. 44):

$$\omega = \frac{x\omega'}{2} + \frac{bx}{2} + a \qquad 37)$$

vornimmt.

VII. Zur Integration der Gleichung:

$$(a + bx + cx^2)^{\frac{3}{2}} dx = \omega^{\frac{3}{2}} dx = dy \qquad 38)$$

setzt man (Gl. 22 und 37):

$$\omega^{\frac{3}{2}} dx + \frac{2\cdot 3\left(\frac{x\omega'}{2} + \frac{bx}{2} + a\right)\sqrt{\omega}\,dx}{2} = dy + 3dy = 4dy \qquad 39)$$

oder

$$\frac{1}{4} Ds\,x\,\omega^{\frac{3}{2}}\left[\frac{dx}{x} + \frac{3\,\omega' dx}{2\omega}\right] + \frac{3b}{8} Ds\,x\sqrt{\omega}\,dx + \frac{3a}{4} Ds\sqrt{\omega}\,dx =$$
$$= Ds\,(a + bx + cx^2)^{\frac{3}{2}} dx. \qquad 40)$$

Substituiert man für die zweite und dritte Differentialsumme die entsprechenden Werte (s. Gl. 36 u. 42), so ist das Integral nach einigen Reduktionen ermittelt.

VIII. Ist endlich die Gleichung:

$$x\sqrt{a + bx + cx^2}dx = x\sqrt{\omega}dx = dy \qquad 41)$$

zu integrieren, so bewirkt man am einfachsten die Integration, indem man mit $2c$ multipliziert und ein Hilfsdifferential hinzufügt, also:

$$b\sqrt{\omega}dx + 2cx\sqrt{\omega}dx - b\sqrt{\omega}dx = \sqrt{\omega}\,\omega' dx - b\sqrt{\omega}dx = 2cdy. \qquad 42)$$

Das erste Differential in dem mittleren Ausdruck ist nach §. 31 Abs. I, das zweite nach dem obigen Abs. VI integrierbar.

§. 47.

Beispiele.

Die nachfolgenden Beispiele zur Erläuterung der in den §. 42—46 dargestellten Integrationsmethoden sind aus dem Kreise jener Integrale gewählt, die entweder elliptische sind oder doch zu diesen in naher Beziehung stehen, weil seit Legendre die wissenschaftlichen Untersuchungen sich vorherrschend auf die elliptischen Integrale in ihrer goniometrischen Form beziehen, obgleich die algebraischen Ausdrücke doch die allgemeineren sind.

I. Ist die Gleichung:

$$\frac{x^4 dx}{\sqrt{a + bx^2 + cx^4}} = \frac{x^4 dx}{\sqrt{\omega}} = \frac{x^4 dx}{\sqrt{\omega}} = dy \qquad 1)$$

zu integrieren, (vgl. über die analogen Differentiale mit xdx, x^2dx und x^3dx im Zähler §. 34 Gl. 35, 38 und §. 31 Gl. 34), so kann man zunächst nach §. 43 Abs. III und §. 42 Abs. VI vorgehen und substituiert daher den Wert von:

$$x^4 = \frac{\omega - bx^2 - a}{c} \qquad 2)$$

in die Gl. 1, also:

$$\sqrt{\omega}\, dx - \frac{bx^2 dx}{\sqrt{\omega}} - \frac{a dx}{\sqrt{\omega}} = c dy. \qquad 3)$$

Das erste Differential der vorstehenden Gleichung hat bereits die zur Bildung der Differentialsumme nötige Form. Die zweite Funktion der Differentialsumme muss, je nach der Höhe des Exponenten von x (vgl. unten Abs. II) folgende Gestalt haben:

$$\frac{x\omega' dx}{2\sqrt{\omega}} = \frac{bx^2 dx}{\sqrt{\omega}} + \frac{2cx^4 dx}{\sqrt{\omega}}; \quad \frac{x^2\omega' dx}{2\sqrt{\omega}} = \frac{bx^3 dx}{\sqrt{\omega}} + \frac{2cx^5 dx}{\sqrt{\omega}} \text{ u. s. w.} \qquad 4)$$

Um nun die Gl. 3 in dieser Weise umzugestalten, schreibt man dieselbe, indem man das ursprüngliche Differential als Hilfsdifferential einführt:

$$\sqrt{\omega} dx + \frac{bx^2 dx}{\sqrt{\omega}} + \frac{2cx^4 dx}{\sqrt{\omega}} - \frac{2bx^2 dx}{\sqrt{\omega}} - \frac{a dx}{\sqrt{\omega}} = cdy + 2cdy = 3cdy \quad 5)$$

oder

$$\frac{1}{3c} Ds\, x\sqrt{\omega}\left[\frac{dx}{x} + \frac{\omega' dx}{2\omega}\right] - \frac{2b}{3c} Ds \frac{x^2 dx}{\sqrt{\omega}} - \frac{a}{3c} Ds \frac{dx}{\sqrt{\omega}} = Ds\, dy. \qquad 6)$$

Substituiert man für $Ds\frac{x^2 dx}{\sqrt{\omega}}$ den Wert aus §. 34 Gl. 38, so ist:

$$\frac{\overline{x}\sqrt{\overline{\omega}}}{c} - \frac{2}{c} Ds \sqrt{\omega} dx + \frac{a}{c} Ds \frac{dx}{\sqrt{\omega}} = Ds \frac{x^4 dx}{\sqrt{a + bx^2 + cx^4}}. \qquad 7)$$

Noch einfacher gelangt man zu diesem Resultat, wenn man nach §. 43 Abs. VI und §. 42 Abs. VIII vorgeht. Nimmt man zu diesem Zweck die im §. 43 Gl. 32 angedeutete Substitution für x^4 in die Gl. 1 vor und multipliziert dann die Gleichung mit $-\frac{1}{2}$, so ist:

$$-\sqrt{\omega} dx + \frac{x\omega' dx}{2\sqrt{\omega}} + \frac{a dx}{\sqrt{\omega}} = cdy \qquad 8)$$

oder, wenn man, um das erste Differential zur Bildung der Differentialsumme tauglich zu machen, ausgleichende Hilfsdifferentiale einführt:

$$\sqrt{\varpi}\,dx + \frac{x\varpi'\,dx}{2\sqrt{\varpi}} - 2\sqrt{\varpi}\,dx + \frac{a\,dx}{\sqrt{\varpi}} = c\,dy. \qquad 9)$$

Bildet man endlich aus den zwei ersten Differentialen die Differentialsumme, so ergiebt sich wie früher:

$$\frac{1}{c} Ds\, x\sqrt{\varpi}\left[\frac{dx}{x} + \frac{\varpi'\,dx}{2\varpi}\right] - \frac{2}{c} Ds\sqrt{\varpi}\,dx + \frac{a}{c} Ds\frac{dx}{\sqrt{\varpi}} = Ds\frac{x^4\,dx}{\sqrt{a+bx^2+cx^4}}\cdot \qquad 10)$$

Denselben Ausdruck erhält man, wenn man bei der Integration nach §. 43 Abs. II und §. 42 Abs. II vorgeht.

II. Ist die Gleichung:

$$\frac{x^5\,dx}{\sqrt{a+bx^2+cx^4}} = \frac{x^5\,dx}{\sqrt{\varpi}} = dy \qquad 11)$$

zu integrieren, so verfährt man ähnlich wie sub I und schreibt dieselbe:

$$2x\sqrt{\varpi}\,dx - \frac{2bx^3dx}{\sqrt{\varpi}} - \frac{2ax\,dx}{\sqrt{\varpi}} = 2c\,dy \qquad 12)$$

oder mit Rücksicht auf Gl. 4:

$$2x\sqrt{\varpi}\,dx + \frac{bx^3dx}{\sqrt{\varpi}} + \frac{2cx^5dx}{\sqrt{\varpi}} - \frac{3bx^3dx}{\sqrt{\varpi}} - \frac{2ax\,dx}{\sqrt{\varpi}} =$$
$$= 2c\,dy + 2c\,dy = 4c\,dy. \qquad 13)$$

Bildet man nun aus den drei ersten Differentialen die Differentialsumme und befreit dy von den Konstanten, so ist:

$$\frac{1}{4c} Ds\, x^2\sqrt{\varpi}\left[\frac{2\,dx}{x} + \frac{\varpi'\,dx}{2\varpi}\right] - \frac{3b}{4c} Ds\frac{x^3dx}{\sqrt{\varpi}} - \frac{a}{2c} Ds\frac{x\,dx}{\sqrt{\varpi}} =$$
$$= Ds\frac{x^5\,dx}{\sqrt{a+bx^2+cx^4}}. \qquad 14)$$

Substituiert man für die zweite und dritte Differentialsumme den Wert aus §. 31 Gl. 34 und §. 34 Gl. 38, so ist nach einigen Reduktionen:

$$\frac{\sqrt{\overline{\varpi}}\,(2c\overline{x}^2 - 3b)}{8c^2} + \frac{3b^2-4ac}{32c^2\sqrt{c}}\log\frac{b+c\overline{x}^2+2\sqrt{c\overline{\varpi}}}{b+2c\overline{x}^2-2\sqrt{c\overline{\varpi}}} = Ds\frac{x^5dx}{\sqrt{a+bx^2+cx^4}}\cdot \qquad 15)$$

Wählt man zur Integration der Gl. 11 die im §. 43 Abs. II und 42 Abs. II dargestellte Methode, so schreibt man die Gl. 11:

$$\frac{2cx^5dx}{\sqrt{\varpi}} = 2c\,dy \qquad 16)$$

oder (Gl. 4):

$$2x\sqrt{\varpi}\,dx + \frac{bx^3dx}{\sqrt{\varpi}} + \frac{2cx^5dx}{\sqrt{\varpi}} - 2x\sqrt{\varpi}\,dx - \frac{bx^3dx}{\sqrt{\varpi}} = 2c\,dy. \qquad 17)$$

Verfährt man in der bekannten Weise, so ist:

$$\frac{1}{2c} Ds\, x^2 \sqrt{\omega} \left[\frac{2\,dx}{x} + \frac{\omega'\,dx}{2\,\omega}\right] - \frac{1}{c} Ds\, x \sqrt{\omega}\, dx - \frac{b}{2c} Ds \frac{x^3 dx}{\sqrt{\omega}} =$$

$$= Ds \frac{x^5}{\sqrt{a + bx^2 + cx^4}}. \qquad 18)$$

Substituiert man den Wert für die zweite Differentialsumme aus der weiter unten folgenden Gl. 57, für die dritte aus §. 31 Gl. 34, so ergiebt sich das nämliche Integral wie in der Gl. 15.

Auch nach §. 43 Abs. VI und §. 42 Abs. VIII kann dieses Integral ermittelt werden, indem man die Gl. 32 §. 43 mit x multipliziert und dann die Substitution vornimmt.

III. Zur Integration der Gleichung (vgl. §. 33 Gl. 51):

$$\frac{dx}{x^2\sqrt{a + bx^2 + cx^4}} = \frac{dx}{x^2\sqrt{\omega}} = dy \qquad 19)$$

benützt man am zweckmässigsten die im §. 44 Abs. II und §. 42 Abs. III entwickelte Methode. Man führt demgemäss in die Gleichung Variable und Konstanten ein und multipliziert sie mit -1, also:

$$-\frac{\sqrt{\omega}\,dx}{x^2} + \frac{bx\,dx}{x\sqrt{\omega}} + \frac{cx^3 dx}{x\sqrt{\omega}} = -a\,dy \qquad 20)$$

oder

$$-\frac{\sqrt{\omega}\,dx}{x^2} + \frac{bx\,dx}{x\sqrt{\omega}} + \frac{2cx^3 dx}{x\sqrt{\omega}} - \frac{cx^2 dx}{\sqrt{\omega}} = -a\,dy. \qquad 21)$$

Kontrahiert man das zweite und dritte Differential in den Ausdruck $\frac{\omega'\,dx}{2x\sqrt{\omega}}$ und verfährt dann in der bekannten Weise, so ist:

$$-\frac{1}{a} Ds \frac{\sqrt{\omega}}{x}\left[\frac{\omega'\,dx}{2\,\omega} - \frac{dx}{x}\right] + \frac{c}{a} Ds \frac{x^2 dx}{\sqrt{\omega}} = Ds\,dy, \qquad 22)$$

oder wenn man für die zweite Differentialsumme den Wert aus §. 34 Gl. 38 substituiert, so ist:

$$-\frac{\sqrt{\overline{\omega}}(b + c\overline{x}^2)}{ab\overline{x}} + \frac{3c}{ab} Ds \sqrt{\omega}\,dx - \frac{2c}{b} Ds \frac{dx}{\sqrt{\omega}} = Ds \frac{dx}{x^2\sqrt{a + bx^2 + cx^4}}. \qquad 23)$$

Will man die Gl. 19 nach der im §. 44 Abs. III und §. 42 Abs. IV entwickelten Methode integrieren, so multipliziert man sie nach Einführung von Variablen und Konstanten mit -2, also:

$$-\frac{\sqrt{\omega}\,dx}{x^2} + \frac{bx\,dx}{x\sqrt{\omega}} + \frac{2cx^3 dx}{x\sqrt{\omega}} - \frac{\sqrt{\omega}\,dx}{x^2} + \frac{b\,dx}{\sqrt{\omega}} = -2a\,dy. \qquad 24)$$

Bildet man aus den drei ersten Differentialen die Differentialsumme und befreit dy von den Konstanten, so ist:

$$-\frac{1}{2a} Ds \frac{\sqrt{\omega}}{x}\left[\frac{\omega' dx}{2\omega} - \frac{dx}{x}\right] + \frac{1}{2a} Ds \frac{\sqrt{\omega}\, dx}{x^2} - \frac{b}{2a} Ds \frac{dx}{\sqrt{\omega}} =$$

$$= Ds \frac{dx}{x^2\sqrt{a + bx^2 + cx^4}}. \qquad 25)$$

Substituiert man den Wert der zweiten Differentialsumme aus der unten folgenden Gl. 42, so ergiebt sich das nämliche Integral wie in der Gl. 23.

IV. Will man die Integration der Gleichung:

$$\frac{dx}{x^3\sqrt{a + bx^2 + cx^4}} = \frac{dx}{x^3\sqrt{\omega}} = dy \qquad 26)$$

nach §. 44 Abs. II und nach §. 42 Abs. III vornehmen, so giebt man ihr folgende Gestalt:

$$-\frac{2\sqrt{\omega}\, dx}{x^3} + \frac{bx\, dx}{x^2\sqrt{\omega}} + \frac{2cx^3 dx}{x^2\sqrt{\omega}} + \frac{b\, dx}{x\sqrt{\omega}} = -2a\, dy \qquad 27)$$

oder

$$-\frac{1}{2a} Ds \frac{\sqrt{\omega}}{x^2}\left[\frac{\omega' dx}{2\omega} - \frac{2dx}{x}\right] - \frac{b}{2a} Ds \frac{dx}{x\sqrt{\omega}} = Ds\, dy. \qquad 28)$$

Substituiert man den Wert für die zweite Differentialsumme aus §. 33 Gl. 51, so ist:

$$-\frac{\sqrt{\overline{\omega}}}{2a\overline{x}^2} - \frac{b}{8a\sqrt{a}} \log \frac{2a + b\overline{x}^2 - 2\sqrt{a\overline{\omega}}}{2a + b\overline{x}^2 + 2\sqrt{a\overline{\omega}}} = Ds \frac{dx}{x^3\sqrt{a + bx^2 + cx^4}}. \qquad 29)$$

Die im §. 44 Abs. III und §. 42 Abs. IV entwickelte Methode ergiebt in diesem Fall die nämliche Rechnung.

V. Die Integration der Gleichung:

$$\frac{dx}{x^4\sqrt{a + bx^2 + cx^4}} = \frac{dx}{x^4\sqrt{\omega}} = dy \qquad 30)$$

ergiebt nach §. 44 Abs. II und §. 42 Abs. III:

$$-\frac{3\sqrt{\omega}\, dx}{x^4} + \frac{bx\, dx}{x^3\sqrt{\omega}} + \frac{2cx^3 dx}{x^3\sqrt{\omega}} + \frac{2b\, dx}{x^2\sqrt{\omega}} + \frac{c\, dx}{\sqrt{\omega}} = -3a\, dy \qquad 31)$$

oder

$$-\frac{1}{3a} Ds \frac{\sqrt{\omega}}{x^3}\left[\frac{\omega' dx}{2\omega} - \frac{3dx}{x}\right] - \frac{2b}{3a} Ds \frac{dx}{x^2\sqrt{\omega}} - \frac{c}{3a} Ds \frac{dx}{\sqrt{\omega}} = Ds\, dy. \qquad 32)$$

Substituiert man den Wert der zweiten Differentialsumme aus der Gl. 23, so ergiebt sich folgendes Integral:

$$\frac{\sqrt{\overline{\omega}}\,(2\overline{\omega} - 3a)}{3a^2\overline{x}^3} - \frac{2c}{a^2} Ds \sqrt{\omega}\, dx + \frac{c}{a} Ds \frac{dx}{\sqrt{\omega}} = Ds \frac{dx}{x^4\sqrt{a + bx^2 + cx^4}}. \qquad 33)$$

Will man dieselbe Integration nach §. 44 Abs. III und § 42 Abs. IV vornehmen, so ist:

$$-\frac{3\sqrt{\omega}\,dx}{x^4}+\frac{bx\,dx}{x^3\sqrt{\omega}}+\frac{2cx^3dx}{x^3\sqrt{\omega}}+\frac{\sqrt{\omega}\,dx}{x^4}+\frac{b\,dx}{x^2\sqrt{\omega}}=-2a\,dy \qquad 34)$$

oder

$$-\frac{1}{2a}Ds\frac{\sqrt{\omega}}{x^3}\left[\frac{\omega'dx}{2\omega}-\frac{3dx}{x}\right]-\frac{1}{2a}Ds\frac{\sqrt{\omega}\,dx}{x^4}-\frac{b}{2a}Ds\frac{dx}{x^2\sqrt{\omega}}=$$

$$=Ds\frac{dx}{x^4\sqrt{a+bx^2+cx^4}}. \qquad 35)$$

Substituiert man für die zweite und dritte Differentialsumme den Wert aus der weiter folgenden Gl. 50 und aus der obigen Gl. 23, so ergiebt sich das nämliche Integral wie in der Gl. 33.

VI. Ist die Gleichung:

$$\frac{\sqrt{a+bx^2+cx^4}\,dx}{x}=\frac{\sqrt{\omega}\,dx}{x}=dy \qquad 36)$$

zu integrieren, so geht man ähnlich wie im §. 45 Abs. III (Gl. 17 u. 18) vor und setzt:

$$\frac{a\,dx}{x\sqrt{\omega}}+\frac{bx\,dx}{\sqrt{\omega}}+\frac{cx^3dx}{\sqrt{\omega}}=dy. \qquad 37)$$

Substituiert man den Wert der Differentialsumme für die drei Differentiale links aus §. 33 Gl. 51, §. 34 Gl. 35, §. 31 Gl. 34, so ist:

$$\frac{\sqrt{\overline{\omega}}}{2}+\frac{\sqrt{a}}{4}\log\frac{2a+bx^2-2\sqrt{a\overline{\omega}}}{2a+bx^2+2\sqrt{a\overline{\omega}}}+\frac{b}{8\sqrt{c}}\log\frac{b+2c\overline{x}^2+2\sqrt{c\,\overline{\omega}}}{b+2c\overline{x}^2-2\sqrt{c\,\overline{\omega}}}=$$

$$=Ds\frac{\sqrt{a+bx^2+cx^4}\,dx}{x}. \qquad 38)$$

VII. Die Gleichung:

$$\frac{\sqrt{a+bx^2+cx^4}\,dx}{x^2}=\frac{\sqrt{\omega}\,dx}{x^2}=dy \qquad 39)$$

wird am zweckmässigsten nach §. 45 Abs. I und §. 42 Abs. II integriert. Man multipliziert dieselbe mit — 1 und führt dann Hilfsdifferentiale ein, also:

$$\frac{\omega'dx}{2x\sqrt{\omega}}-\frac{\sqrt{\omega}\,dx}{x^2}-\frac{b\,dx}{\sqrt{\omega}}-\frac{2cx^2dx}{\sqrt{\omega}}=-dy \qquad 40)$$

oder

$$-Ds\frac{\sqrt{\omega}}{x}\left[\frac{\omega'dx}{2\omega}-\frac{dx}{x}\right]+2c\,Ds\frac{x^2dx}{\sqrt{\omega}}+b\,Ds\frac{dx}{\sqrt{\omega}}=Ds\,dy. \qquad 41)$$

Substituiert man für die zweite Differentialsumme den Wert aus §. 34 Gl. 38, so ist:

$$-\frac{\sqrt{\overline{\omega}}(b+2c\overline{x}^2)}{b\overline{x}}+\frac{6c}{b}Ds\sqrt{\omega}\,dx+\frac{b^2-4ac}{b}Ds\frac{dx}{\sqrt{\omega}}=Ds\frac{\sqrt{a+bx^2+cx^4}\,dx}{x^2}. \qquad 42)$$

VIII. Ist die Gleichung:

$$\frac{\sqrt{a+bx^2+cx^4}\,dx}{x^3} = \frac{\sqrt{\omega}\,dx}{x^3} = dy \qquad 43)$$

zu integrieren, so setzt man ähnlich wie sub VII:

$$\frac{\omega' dx}{2x^2\sqrt{\omega}} - \frac{2\sqrt{\omega}\,dx}{x^3} - \frac{b\,dx}{x\sqrt{\omega}} - \frac{2cx\,dx}{\sqrt{\omega}} = -2dy \qquad 44)$$

oder

$$-\frac{1}{2}Ds\frac{\sqrt{\omega}}{x^2}\left[\frac{\omega' dx}{2\omega} - \frac{2dx}{x}\right] + \frac{b}{2}Ds\frac{dx}{x\sqrt{\omega}} + c\,Ds\frac{x\,dx}{\sqrt{\omega}} = Ds\,dy. \qquad 45)$$

Substituiert man den Wert für die zweite und dritte Differentialsumme aus §. 33 Gl. 51 und §. 34 Gl. 35, so ergiebt sich:

$$-\frac{\sqrt{\overline{\omega}}}{2\overline{x}^2} + \frac{c}{4\sqrt{a}}\log\frac{2a+b\overline{x}^2-2\sqrt{a\overline{\omega}}}{2a+b\overline{x}^2+2\sqrt{a\overline{\omega}}} + \frac{b}{8\sqrt{c}}\log\frac{b+2c\overline{x}^2+2\sqrt{c\overline{\omega}}}{b+2c\overline{x}^2-2\sqrt{c\overline{\omega}}} =$$

$$= Ds\frac{\sqrt{a+bx^2+cx^4}\,dx}{x^3}. \qquad 46)$$

IX. Will man die Gleichung:

$$\frac{\sqrt{a+bx^2+cx^4}\,dx}{x^4} = \frac{\sqrt{\omega}\,dx}{x^4} = dy \qquad 47)$$

nach der im §. 45 Abs. I und §. 42 Abs. II entwickelten Methode integrieren, so setzt man:

$$\frac{\omega' dx}{2x^3\sqrt{\omega}} - \frac{3\sqrt{\omega}\,dx}{x^4} - \frac{b\,dx}{x^2\sqrt{\omega}} - \frac{2c\,dx}{\sqrt{\omega}} = -3dy \qquad 48)$$

oder

$$-\frac{1}{3}Ds\frac{\sqrt{\omega}}{x^3}\left[\frac{\omega' dx}{2\omega} - \frac{3dx}{x}\right] + \frac{b}{3}Ds\frac{dx}{x^2\sqrt{\omega}} + \frac{2c}{3}Ds\frac{dx}{\sqrt{\omega}} = Ds\,dy. \qquad 49)$$

Substituiert man den Wert für die zweite Differentialsumme aus der obigen Gl. 23, so ist:

$$-\frac{\overline{\omega}^{\frac{3}{2}}}{3a\overline{x}^3} + \frac{c}{a}Ds\sqrt{\omega}\,dx = Ds\frac{\sqrt{a+bx^2+cx^4}\,dx}{x^4}. \qquad 50)$$

Noch einfacher ist dieses Resultat durch die im §. 45 Abs. II und §. 42 Abs. IV entwickelte Methode zu erreichen. Man führt zu diesem Zweck Variable und Konstanten ein, also:

$$-\frac{3\omega^{\frac{3}{2}}dx}{x^4} + \frac{3bx\sqrt{\omega}\,dx}{x^3} + \frac{6cx^3\sqrt{\omega}\,dx}{x^3} - 3c\sqrt{\omega}\,dx = -3a\,dy \qquad 51)$$

oder

$$-\frac{1}{3a}Ds\frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{x^3}\left[\frac{3\omega' dx}{2\omega} - \frac{3dx}{x}\right] + \frac{c}{a}Ds\sqrt{\omega}\,dx = Ds\frac{\sqrt{a+bx^2+cx^4}\,dx}{x^4}. \qquad 52)$$

X. Ist die Gleichung:

$$x\sqrt{a+bx^2+cx^4}\,dx = x\sqrt{\omega}\,dx = dy \qquad 53)$$

zu integrieren, so geht man nach §. 42 Abs. V vor und setzt demgemäss:

$$2x\sqrt{\omega}dx + \frac{2x(a+bx^2+cx^4)dx}{\sqrt{\omega}} = 2dy + 2dy = 4dy \qquad 54)$$

oder

$$2x\sqrt{\omega}dx + \frac{bx^3dx}{\sqrt{\omega}} + \frac{2cx^5dx}{\sqrt{\omega}} + \frac{2axdx}{\sqrt{\omega}} + \frac{bx^3dx}{\sqrt{\omega}} = 4dy. \qquad 55)$$

Nimmt man die Differentialsumme und befreit dy von der Konstante, so ist:

$$\frac{1}{4} Ds\, x^2\sqrt{\omega}\left[\frac{2dx}{x} + \frac{\omega' dx}{2\omega}\right] + \frac{a}{2} Ds \frac{xdx}{\sqrt{\omega}} + \frac{b}{4} Ds \frac{x^3dx}{\sqrt{\omega}} = Ds\, dy. \qquad 56)$$

Substituiert man für die zweite und dritte Differentialsumme den Wert aus §. 34 Gl. 35 und aus §. 31 Gl. 34, so ist:

$$\frac{\sqrt{\overline{\omega}}(b+2c\overline{x}^2)}{8c} + \frac{\varDelta}{32c\sqrt{c}} \log \frac{b+2c\overline{x}^2+2\sqrt{c\overline{\omega}}}{b+2c\overline{x}^2-2\sqrt{c\overline{\omega}}} = Ds\, x\sqrt{a+bx^2+cx^4}dx. \qquad 57)$$

XI. Um die Gleichung:

$$x^2\sqrt{a+bx^2+cx^4}\,dx = x^2\sqrt{\omega}\,dx = dy \qquad 58)$$

zu integrieren, geht man nach §. 42 Abs. VI vor und setzt (§. 42 Gl. 36, 37) mit Rücksicht auf die Relation:

$$x^4 = \frac{\omega - bx^2 - a}{c}, \qquad 59)$$

$$-\frac{\omega^{\frac{3}{2}}dx}{x^2} + \frac{bx\sqrt{\omega}\,dx}{x} + \frac{a\sqrt{\omega}\,dx}{x^2} = -\,cdy. \qquad 60)$$

Verleiht man nunmehr dem zweiten Differential durch die Methode der ausgleichenden Hilfsdifferentiale den zur Bildung der Differentialsumme erforderlichen Koeffizienten und führt man überdies das ursprüngliche Differential als Hilfsdifferential ein, so ist:

$$-\frac{\omega^{\frac{3}{2}}dx}{x^2} + \frac{3\,.\,2bx\sqrt{\omega}\,dx}{2x} + \frac{3\,.\,4cx^3\sqrt{\omega}\,dx}{2x} - 2b\sqrt{\omega}dx + \frac{a\sqrt{\omega}\,dx}{x^2} =$$
$$= -\,cdy + 6cdy = 5cdy \qquad 61)$$

oder

$$\frac{1}{5c} Ds \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{x}\left[\frac{3\omega' dx}{2\omega} - \frac{dx}{x}\right] + \frac{a}{5c} Ds \frac{\sqrt{\omega}\,dx}{x^2} - \frac{2b}{5c} Ds\sqrt{\omega}dx = Ds\, dy. \qquad 62)$$

Substituiert man den Wert für die zweite Differentialsumme aus der obigen Gl. 42 und setzt man der Abkürzung wegen (s. §. 46 Gl. 8):

$$\tau = 2acx - b^2x - bcx^3, \qquad 63)$$

so ergiebt sich:

$$\frac{\overline{\tau}\sqrt{\overline{\omega}}}{5bc} + \frac{2(3ac-b^2)}{5bc} Ds\sqrt{\omega}\,dx - \frac{a\varDelta}{5bc} Ds \frac{dx}{\sqrt{\omega}} = x^2\sqrt{a+bx^2+cx^4}\,dx. \qquad 64)$$

XII. Zur Integration der Gleichung:

$$x^3\sqrt{a+bx^2+cx^4}\,dx = x^3\sqrt{\omega}\,dx = dy \qquad 65)$$

geht man (vgl. §. 31 Abs. VI) am einfachsten nach §. 42 Abs. II vor und setzt demgemäss:

$$2bx\sqrt{\omega}\,dx + 4cx^3\sqrt{\omega}\,dx - 2bx\sqrt{\omega}\,dx = 4c\,dy. \qquad 66)$$

Da die zwei ersten Differentiale, welche $=\sqrt{\omega}\,\omega'dx$ sind, nach §. 31 Abs. I sofort integriert werden können, so bedarf es nicht mehr der Hinzufügung weiterer Hilfsdifferentiale, vielmehr ist:

$$\frac{1}{4c}\,Ds\sqrt{\omega}\,\omega'dx - \frac{b}{2c}\,Ds\,x\sqrt{\omega}\,dx = Ds\,dy. \qquad 67)$$

Substituiert man den Wert für die beiden Differentialsummen links aus den §. 31 Gl. 8 und der obigen Gl. 57, so ist:

$$\frac{\sqrt{\overline{\omega}}(8c\overline{\omega} - 3b^2 - bc\overline{x}^2)}{48c^2} - \frac{b\varDelta}{64c^2\sqrt{c}}\log\frac{b+2c\overline{x}^2+2\sqrt{c\overline{\omega}}}{b+2c\overline{x}^2-2\sqrt{c\overline{\omega}}} =$$
$$= Ds\,x^3\sqrt{a+bx^2+cx^4}\,dx. \qquad 68)$$

XIII. Bei der Integration der Gleichung:

$$\frac{dx}{(a+bx^2+cx^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dx}{\omega^{\frac{3}{2}}} = dy \qquad 69)$$

geht man am zweckmässigsten nach §. 46 Abs. II vor. Substituiert man, um eine weitläufige Rechnung zu vermeiden, in der Gl. 20 des §. 46 die entsprechenden Werte, so ergiebt sich, wenn man die in der Gl. 63 enthaltene Abkürzung benutzt:

$$\frac{\overline{\tau}}{a\varDelta\sqrt{\overline{\omega}}} + \frac{bc}{a\varDelta}\,Ds\frac{x^2dx}{\sqrt{\omega}} + \frac{2c}{\varDelta}\,Ds\frac{dx}{\sqrt{\omega}} = Ds\,dy \qquad 70)$$

und wenn man für die zweite Differentialsumme den Wert aus §. 34 Gl. 38 substituiert:

$$\frac{c\overline{x}(a-c\overline{x}^4) - b\overline{x}(b+2c\overline{x}^2)}{a\varDelta\sqrt{\overline{\omega}}} + \frac{3c}{a\varDelta}\,Ds\sqrt{\omega}\,dx = Ds\frac{dx}{(a+bx^2+cx^4)^{\frac{3}{2}}}. \qquad 71)$$

XIV. Ist die Gleichung:

$$\frac{x\,dx}{(a+bx^2+cx^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x\,dx}{\omega^{\frac{3}{2}}} = dy \qquad 72)$$

zu integrieren, so geht man am besten nach §. 34 Abs. III vor und setzt demgemäss:

$$\lambda = b + 2cx^2;\quad \lambda' = 4cx, \qquad 73)$$

$$2\lambda'\omega - \lambda\omega' = 2\varDelta x;\quad x = \frac{\lambda'\omega}{\varDelta} - \frac{\lambda\omega'}{2\varDelta}. \qquad 74)$$

Substituiert man diesen letzteren Wert in die Gl. 72, so ist:

$$\frac{\lambda' dx}{\sqrt{\omega}} - \frac{\lambda\omega' dx}{2\omega^{\frac{3}{2}}} = \varDelta dy. \qquad 75)$$

Verfährt man nun in der bekannten Weise, so ist:

$$\frac{1}{\varDelta} Ds \frac{\lambda}{\sqrt{\omega}}\left[\frac{\lambda' dx}{\lambda} - \frac{\omega' dx}{2\omega}\right] = \frac{b + 2c\bar{x}^2}{\varDelta\sqrt{\bar{\omega}}} = Ds \frac{x dx}{(a + bx^2 + cx^4)^{\frac{3}{2}}}. \qquad 76)$$

XV. Die Gleichung:

$$\frac{x^2 dx}{(a + bx^2 + cx^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2 dx}{\omega^{\frac{3}{2}}} = dy \qquad 77)$$

wird am zweckmässigsten nach §. 43 Abs. VII oder Abs. I integriert. Setzt man demgemäss zur Abkürzung (§. 43 Gl. 40):

$$t = bx + 2cx^3, \qquad 78)$$

so ergiebt sich:

$$\frac{\bar{t}}{\varDelta\sqrt{\bar{\omega}}} - \frac{2c}{\varDelta} Ds \frac{x^2 dx}{\sqrt{\omega}} - \frac{b}{\varDelta} Ds \frac{dx}{\sqrt{\omega}} = Ds\, dy. \qquad 79)$$

Substituiert man den Wert für die zweite Differentialsumme aus §. 34 Gl. 38, so ergiebt sich:

$$\frac{b\bar{x}(b + 4c\bar{x}^2) + 2c\bar{x}(a + c\bar{x}^4)}{b\varDelta\sqrt{\bar{\omega}}} - \frac{6c}{b\varDelta} Ds \sqrt{\omega}\, dx + \frac{1}{b} Ds \frac{dx}{\sqrt{\omega}} =$$
$$= Ds \frac{x^2 dx}{(a + bx^2 + cx^4)^{\frac{3}{2}}}. \qquad 80)$$

XVI. Die Gleichung:

$$\frac{x^3 dx}{(a + bx^2 + cx^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^3 dx}{\omega^{\frac{3}{2}}} = dy \qquad 81)$$

ist durch Hinzufügung eines Hilfsdifferentials leicht zu integrieren, indem man schreibt:

$$\frac{2bx\,dx}{\omega^{\frac{3}{2}}} + \frac{4cx^3 dx}{\omega^{\frac{3}{2}}} - \frac{2bx\,dx}{\omega^{\frac{3}{2}}} = \frac{\omega' dx}{\omega^{\frac{3}{2}}} - \frac{2bx\,dx}{\omega^{\frac{3}{2}}} = 4c\,dy. \qquad 82)$$

In dem mittleren Ausdruck ist das erste Differential nach §. 31 Abs. II, das zweite nach Abs. XIV integrierbar.

Die Gleichung:

$$\frac{x^4 dx}{(a + bx^2 + cx^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^4 dx}{\omega^{\frac{3}{2}}} = dy \qquad 83)$$

ist nach §. 43 Abs. I, II, III u. s. f. integrierbar.

XVII. Die Gleichung:

$$\frac{dx}{x(a + bx^2 + cx^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dx}{x\omega^{\frac{3}{2}}} = dy \qquad 84)$$

kann nach den drei im §. 44 angegebenen Methoden, namentlich nach Abs. I und III integriert werden. Das Gleiche ist mit $\frac{dx}{x^2\sqrt{\omega}}$ u. s. f. der Fall. Auch alle übrigen Kombinationen mit der Irrationalität $\sqrt{a+bx^2+cx^4}$ können durch die in dieser Abhandlung dargestellten Methoden leicht integriert werden. Obgleich nur ein Teil dieser Differentiale sich in geschlossenen Ausdrücken integrieren lässt, während die Integrale der übrigen entweder zwei nicht integrierbare Differentiale $\left(\text{nämlich } \sqrt{\omega}\,dx \text{ und } \frac{dx}{\sqrt{\omega}}\right)$ oder doch wenigstens eines enthalten, so wäre es doch sehr erwünscht, wenn die Integraltafeln durch die Integrale dieser Differentiale (sowie auch durch jene der Differentiale mit der Irrationalität $\sqrt{a+bx^3+cx^6}$ u. s. f.) ergänzt würden.

§. 48.

Zeichenkombinationen der trinomischen Differentiale.

I. Da ich in dieser Schrift überall voraussetze, dass die Koeffizienten a, b, c positive Grössen sind, so wäre es an sich geraten, die in den vorhergehenden Paragraphen dargestellten Methoden auch auf alle Zeichenkombinationen der Irrationalität $(\pm a \pm bx^n \pm cx^{2n})^{\frac{p}{r}}$ anzuwenden. Denn im Laufe dieser Darstellung haben wir bei den Urintegralen oft gesehen, dass eine Veränderung der Vorzeichen auch eine gänzliche Verschiedenheit der Integrale zur Folge hat (s. z. B. §. 32 Gl. 10, 11 und 15, 24—27 und 32—34 u. s. f.). Um jedoch eine übermässige Weitläufigkeit zu vermeiden, werde ich bloss einige typische Beispiele geben, die dann als Muster für die Behandlung anderer Fälle dienen können.

Ist z. B. die Gleichung:

$$\frac{x^m\,dx}{(a-bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}} = \frac{x^m\,dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} = dy \tag{1}$$

zu integrieren und verfährt man nach §. 43 Abs. III, so nimmt mit Rücksicht auf die Relationen:

$$\omega' = -nbx^{n-1} + 2ncx^{2n-1}, \tag{2}$$

$$x^{2n} = \frac{\omega + bx^n - a}{c}, \tag{3}$$

die im §. 43 Gl. 11 enthaltene Formel folgende Gestalt an:

$$\frac{(m-2n+1)x^{m-2n}\,dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} + \frac{(m-2n+1)bx^{m-n}\,dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} - \frac{(m-2n+1)ax^{m-2n}\,dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} =$$
$$= (m-2n+1)dy. \tag{4}$$

Um das zweite Differential mit dem erforderlichen Koeffizienten auszustatten, benutzt man die Methode der ausgleichenden Hilfsdifferentiale und setzt demgemäss:

$$\frac{(p-r)n\,dz}{r} + d\xi = (m-2n+1)\,dz; \qquad \left[dz = \frac{b\,x^{m-n}\,dx}{\omega^{\frac{p}{r}}}\right], \tag{5}$$

$$d\xi = \frac{(mr-np-nr+r)\,dz}{r}, \tag{6}$$

$$\frac{(p-r)n\,dz}{r} + \frac{(mr-np-nr+r)\,dz}{r} = (m-2n+1)\,dz. \tag{7}$$

Substituiert man den Wert für das erste Differential der Gl. 4 aus der Gl. 7 und führt man zur Vervollständigung der zweiten Funktion der Differentialsumme das ursprüngliche Differential als Hilfsdifferential ein, so ergiebt sich:

$$\frac{(m-2n+1)\,x^{m-2n}\,dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} + \frac{(p-r)\,nb\,x^{m-n}\,dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}}} - \frac{(p-r)\,2nc\,x^{m}\,dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}}} +$$

$$+ \frac{(mr-np-nr+r)\,b\,x^{m-n}\,dx}{r\,\omega^{\frac{p}{r}}} - \frac{(m-2n+1)\,a\,x^{m-2n}\,dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} =$$

$$= (m-2n+1)\,c\,dy - \frac{(p-r)\,2nc\,dy}{r} = \frac{(mr-2np+r)\,c\,dy}{r} \tag{8}$$

oder

$$\frac{r}{(mr-2np+r)c}\,Ds\,\frac{x^{m-2n+1}}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}\left[\frac{(m-2n+1)\,dx}{x} - \frac{(p-r)\,\omega'\,dx}{r\,\omega}\right] +$$

$$+ \frac{(mr-np-nr+r)\,b}{(mr-2np+r)\,c}\,Ds\,\frac{x^{m-n}\,dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} - \frac{(m-2n+1)\,ar}{(mr-2np+r)\,c}\,Ds\,\frac{x^{m-2n}\,dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} =$$

$$= Ds\,\frac{x^{m}\,dx}{(a-bx^{n}+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}}. \tag{9}$$

Auf ganz analoge Weise findet man auch das Integral:

$$-\frac{r}{(mr-2np+r)c}\,Ds\,\frac{x^{m-2n+1}}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}\left[\frac{(m-2n+1)\,dx}{x} - \frac{(p-r)\,\omega'\,dx}{r\,\omega}\right] +$$

$$+ \frac{(mr-np-nr+r)\,b}{(mr-2np+r)\,c}\,Ds\,\frac{x^{m-n}\,dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} + \frac{(m-2n+1)\,ar}{(mr-2np+r)\,c}\,Ds\,\frac{x^{m-2n}\,dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} =$$

$$= Ds\,\frac{x^{m}\,dx}{(a+bx^{n}-cx^{2n})^{\frac{p}{r}}}. \tag{10}$$

II. Aus den vorstehenden Formeln lassen sich manche Relationen der elliptischen Integrale in ihrer goniometrischen Form durch einfache Substitution ableiten. Ist z. B.:

$$\frac{\sin^m x\,dx}{\Delta x} = \frac{\sin^m x\,d\sin x}{\sqrt{1-(1+\varepsilon^2)\sin^2 x+\varepsilon^2\sin^4 x}} = \frac{\sin^m x\,d\sin x}{\sqrt{\omega}} = dy \qquad 11)$$

zu integrieren, so setzt man in der Gl. 9 $x = \sin x$, $m = m$, $n = 2$, $p = 1$, $r = 2$, $a = 1$, $b = 1+\varepsilon^2$, $c = \varepsilon^2$ und es ergiebt sich dann:

$$\frac{1}{(m-1)\varepsilon^2}\cdot\sin^{m-3}\overline{x}\sqrt{\overline{\omega}} - \frac{m-3}{(m-1)\varepsilon^2}\,Ds\,\frac{\sin^{m-4}x\,d\sin x}{\sqrt{\omega}} +$$

$$+\frac{(m-2)(1+\varepsilon^2)}{(m-1)\varepsilon^2}\,Ds\,\frac{\sin^{m-2}x\,d\sin x}{\sqrt{\omega}} = Ds\,\frac{\sin^m x\,d\sin x}{\sqrt{1-(1+\varepsilon^2)\sin^2 x+\varepsilon^2\sin^4 x}} =$$

$$= Ds\,\frac{\sin^m x\,dx}{\Delta x}. \qquad 12)$$

Ersetzt man in der vorstehenden Gleichung überall $\frac{d\sin x}{\sqrt{\omega}}$ durch $\frac{dx}{\Delta x}$, so erlangt die vorstehende Relation ihre gewöhnliche Gestalt.

III. Ist die Gleichung:

$$\frac{\cos^m x\,dx}{\Delta x} = -\frac{\cos^m x\,d\cos x}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)+(2\varepsilon^2-1)\cos^2 x-\varepsilon^2\cos^4 x}} =$$

$$= -\frac{\cos^m x\,d\cos x}{\sqrt{\omega}} = dy \qquad 13)$$

zu integrieren, so setze man in der Gl. 10 $x = \cos x$, $m = m$, $n = 2$, $p = 1$, $r = 2$, $a = 1-\varepsilon^2$, $b = 2\varepsilon^2-1$, $c = \varepsilon^2$ und es ergiebt sich:

$$\frac{1}{(m-1)\varepsilon^2}\cdot\cos^{m-3}\overline{x}\sqrt{\overline{\omega}} - \frac{(m-3)(1-\varepsilon^2)}{(m-1)\varepsilon^2}\,Ds\,\frac{\cos^{m-4}x\,d\cos x}{\sqrt{\omega}} -$$

$$-\frac{(m-2)(2\varepsilon^2-1)}{(m-1)\varepsilon^2}\,Ds\,\frac{\cos^{m-2}x\,d\cos x}{\sqrt{\omega}} = -\frac{\cos^m x\,d\cos x}{\sqrt{(1+\varepsilon^2)+(2\varepsilon^2-1)\cos^2 x-\varepsilon^2\sin^4 x}} =$$

$$= \frac{\cos^m x\,dx}{\Delta x}. \qquad 14)$$

Ersetzt man in der vorstehenden Relation $\frac{d\cos x}{\sqrt{\omega}}$ überall durch $-\frac{dx}{\Delta x}$, so erlangt dieselbe ihre übliche Gestalt.

IV. Auch die Gleichung:

$$\frac{\mathrm{tg}^m x\,dx}{\Delta x} = \frac{\mathrm{tg}^m x\,d\,\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{1+(2-\varepsilon^2)\mathrm{tg}^2 x+(1-\varepsilon^2)\mathrm{tg}^4 x}} = \frac{\mathrm{tg}^m x\,dx}{\sqrt{\omega}} = dy \qquad 15)$$

ist ähnlich wie im Abs. II und III durch die im §. 43 Gl. 17 enthaltene Formel zu integrieren.

V. Geht man in analoger Weise vor wie sub I, so erhält man noch folgende zwei Integrationsformeln:

$$-\frac{1}{(m-1)a} Ds \frac{1}{x^{m-1}\omega^{\frac{p}{r}-1}}\left[-\frac{(m-1)dx}{x}-\frac{(p-r)\omega' dx}{r\omega}\right]+$$

$$+\frac{(mr+np-nr-r)b}{(m-1)ar} Ds \frac{dx}{x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}}}-\frac{(mr+2np-2nr-r)c}{(m-1)ar} Ds \frac{dx}{x^{m-2n}\omega^{\frac{p}{r}}}=$$

$$= Ds \frac{dx}{x^m(a-bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}}, \qquad 16)$$

ferner

$$-\frac{1}{(m-1)a} Ds \frac{1}{x^{m-1}\omega^{\frac{p}{r}-1}}\left[-\frac{(m-1)dx}{x}-\frac{(p-r)\omega' dx}{r\omega}\right]-$$

$$-\frac{(mr+np-nr-r)b}{(m-1)ar} Ds \frac{dx}{x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}}}+\frac{(mr+2np-2nr-r)c}{(m-1)ar} Ds \frac{dx}{x^{m-2n}\omega^{\frac{p}{r}}}=$$

$$= Ds \frac{dx}{x^m(a+bx^n-cx^{2n})^{\frac{p}{r}}}. \qquad 17)$$

Aus den zwei vorstehenden Gleichungen, ferner aus der Relation in §. 44 Gl. 16 können die bekannten Integrale $Ds \frac{dx}{\sin^m x \varDelta x}$, $Ds \frac{dx}{\cos^m x \varDelta x}$, $Ds \frac{dx}{\mathrm{tg}^m x \varDelta x}$ durch ganz ähnliche Operationen wie sub II—IV gefunden werden.

VI. Benützt man dieselben Abkürzungen und Substitutionen wie im §. 35 Abs. XIII, so ergiebt sich, wenn man nach Massgabe der obigen Gl. 17 integriert und in dem gefundenen Integral für $\frac{dp}{\sqrt{\Omega}}$ dessen Wert dx substituiert:

$$Ds \frac{dx}{(a+b\sin x)^m} = Ds \frac{dp}{p^m\sqrt{A+Bp-Cp^2}} = Ds \frac{dp}{p^m\sqrt{\Omega}} =$$

$$= \frac{1}{A}\left[-\frac{b\cos \bar{x}}{(m-1)(a+b\sin \bar{x})^{m-1}}-\frac{(2m-3)a}{m-1} Ds \frac{dx}{(a+b\sin x)^{m-1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{m-2}{m-1} Ds \frac{dx}{(a+b\sin x)^{m-2}}\right]. \qquad 18)$$

Auf ähnliche Weise können auch die analogen Differentiale mit $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$ u. s. f. wie auch sämtliche Zeichenkombinationen integriert werden.

§. 49.

Rationale binomische und trinomische Integrale.

I. Die in den §. 36—48 dargestellten Methoden lassen sich auch auf die rationalen binomischen und trinomischen Differentiale anwenden, wenn man in den betreffenden Formeln $r = 1$, folglich den Exponenten $\frac{p}{r} = p$ setzt. Die Anwendung dieser Methode ergiebt natürlich regelmässig dieselben Resultate, wie die in der Lehre von den rationalen Integralen dargestellten Operationen. Ist z. B. die Gleichung:

$$\frac{dx}{(a + bx + cx^2)^2} = \frac{dx}{\omega^2} = dy \tag{1}$$

zu integrieren und geht man dabei nach §. 46 Abs. II vor, so gelangt man nach einigen Rechnungen zu der Relation:

$$\frac{\tau}{a\Delta\overline{\omega}} + \frac{2c}{\Delta} Ds \frac{dx}{\omega} = Ds \frac{dx}{(a + bx + cx^2)^2}, \tag{2}$$

wo $\tau = 2acx - b^2x - bcx^2$ zu setzen ist (vgl. §. 46 Gl. 8). Dieses Integral stimmt, obgleich äusserlich abweichend, mit dem im §. 18 Gl. 16 ermittelten Ausdruck überein, weil

$$d\frac{\tau}{a\Delta\omega} = d\frac{b + 2cx}{\Delta\omega} \tag{3}$$

ist. Geht man bei der Ableitung der im §. 18 Abs. II und III ermittelten Integrale nach §. 34 Abs. III vor (vgl. §. 46 Abs. IV und V), so erhält man dieselben sofort in der dort erscheinenden einfachen Gestalt.

II. Zur Ergänzung der im §. 18 Gl. 1—9 (S. 38, 39) für rationale trinomische Differentiale entwickelten Formel dient nachstehende Relation, welche aus der Formel in §. 46 Gl. 20 entsteht, wenn man $r = 1$ setzt, im Übrigen aber die daselbst benutzten Abkürzungen beibehält:

$$\frac{1}{(p-1)na\Delta} \cdot \frac{\tau}{\overline{\omega}^{p-1}} - \frac{(2np - 3n - 1)bc}{(p-1)na\Delta} Ds \frac{x^n dx}{\omega^{p-1}} + \left(\frac{1}{a} - \frac{2ac - b^2}{(p-1)na\Delta}\right) Ds \frac{dx}{\omega^{p-1}}$$
$$= Ds \frac{dx}{(a + bx^n + cx^{2n})^p}. \tag{4}$$

III. Um das Verhältnis der für die Integration der rationalen und der irrationalen Differentiale aufgestellten Methoden klarzulegen, mögen folgende Bemerkungen dienen. Setzt man $a + bx + cx^2 = \omega$, so werden die Differentiale $\frac{x^2 dx}{\omega}$ und $\frac{dx}{x^2\omega}$ u. s. f., wie sich aus §. 20 Abs. II u. III, §. 21 Abs. VI ergiebt, im Anfang nach den nämlichen Methoden behandelt wie die analogen irrationalen Differentiale im §. 47 Abs. I u. III (nämlich Substitution für x^2 und x^4 und Einführung von Variablen und Konstanten); nur werden die rationalen Differentiale dadurch sofort unmittelbar integrierbar gemacht, so dass die weiteren Operationen, welche bei den irrationalen Differentialen allerdings notwendig sind, hier entfallen. Dagegen können die für die Integration der irrationalen Differentiale dargestellten Methoden auch auf die rationalen angewendet werden, wenn in diesen ω in zweiter oder höherer Potenz erscheint.

So kann das Differential $\frac{x\,dx}{\omega^2}$ etwa nach §. 34 Abs. IV, $\frac{x^2dx}{\omega^2}$ u. s. w. nach §. 43 Abs. I und §. 42 Abs. XI, $\frac{dx}{x\omega^2}$, $\frac{dx}{x^2\omega^2}$ u. s. f. (ersteres mit einer kleinen Abweichung) nach §. 44 Abs. I und III integriert werden, ohne dass jedoch die Anwendung der übrigen Integrationsmethoden schlechthin ausgeschlossen ist.

§. 50.

Integration von $x^m(bx^n + cx^{2n})^{\frac{p}{r}}dx$.

I. Die im §. 42 ff. dargestellten Methoden können auch auf die Integration des vorstehenden binomischen Differentials angewendet werden. Doch ergeben die Methoden des §. 42 Abs. I, II und XI dreigliedrige und deshalb minder brauchbare Integralformeln. Die Methoden des §. 42 Abs. III und IV können hier überhaupt nicht benutzt werden, weil sie auf der Einführung von Variablen und Konstanten beruhen, das Binom $bx^n + cx^{2n}$ aber keine blosse Konstante enthält. Endlich ist auch die im §. 42 Abs. XII entwickelte Methode unanwendbar, weil sich im §. 42 Gl. 83 die Konstante a (= 0) im Nenner befindet. Dagegen können durch die im §. 42 Abs. V—X dargestellten Operationen zweckmässige Integralformeln gewonnen werden.

Will man zur Integration der Gleichung:

$$x^m(bx^n + cx^{2n})^{\frac{p}{r}}dx = x^m\omega^{\frac{p}{r}}dx = dy \qquad 1)$$

die im §. 42 Abs. V benutzte Substitution gebrauchen, so setze man zur Abkürzung des dort angewendeten Verfahrens:

$$\omega = \frac{x\omega'}{n} - cx^{2n} = \frac{x\omega'}{2n} + \frac{bx^n}{2}, \qquad 2)$$

multipliziere die Gl. 1 mit $m + 1$, führe dann das ursprüngliche Differential als Hilfsdifferential ein und nehme in dem letzteren die Substitution für ω in Gemässheit der Gl. 2 mit Benutzung des ersten daselbst angegebenen Wertes (vgl. §. 42 Abs. VII) vor, so ergiebt sich:

$$(m+1)x^m\omega^{\frac{p}{r}}dx + \frac{np}{r}x^m\left(\frac{x\omega'}{n} - cx^{2n}\right)\omega^{\frac{p}{r}-1}dx = (m+1)dy + \frac{np\,dy}{r} =$$
$$= \frac{(mr+np+r)dy}{r} \qquad 3)$$

oder

$$\frac{r}{mr+np+r}Ds\,x^{m+1}\omega^{\frac{p}{r}}\left[\frac{(m+1)dx}{x} + \frac{p\omega'dx}{r\omega}\right] -$$
$$-\frac{cnp}{mr+np+r}Ds\,x^{m+2n}\omega^{\frac{p}{r}-1}dx = Ds\,x^m(bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}dx. \qquad 4)$$

II. Geht man wie sub I vor, benutzt man aber bei der Substitution für ω den zweiten in der Gl. 2 angegebenen Wert (s. §. 42 Abs. V), so ist:

$$(m+1)x^m\omega^{\frac{p}{r}}dx+\frac{2np}{r}x^m\left(\frac{x\omega'}{2n}+\frac{bx^n}{2}\right)\omega^{\frac{p}{r}-1}dx=(m+1)dy+\frac{2np\,dy}{r}=$$
$$=\frac{(mr+2np+r)dy}{r} \qquad 5)$$

oder

$$\frac{r}{mr+2np+r}Ds\,x^{m+1}\omega^{\frac{p}{r}}\left[\frac{(m+1)dx}{x}+\frac{p\omega'dx}{r\omega}\right]+$$
$$+\frac{bnp}{mr+2np+r}Ds\,x^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}-1}dx=x^m(bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}dx. \qquad 6)$$

III. Will man zur Integration der Gl. 1 die im §. 42 Abs. VI entwickelte Methode benützen, so substituiere man in der Gl. 1 den Wert von

$$x^{2n}=\frac{\omega-bx^n}{c} \qquad 6^{a})$$

und multipliziere die Gleichung sodann mit den zur Bildung der ersten Funktion der Differentialsumme erforderlichen Konstanten, also:

$$(m-2n+1)x^{m-2n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx-(m-2n+1)bx^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}}dx=(m-2n+1)cdy. \qquad 7)$$

Führt man, um nunmehr auch das zweite Differential mit dem nötigen Koeffizienten auszustatten, ausgleichende Hilfsdifferentiale ein, so ist:

$$\frac{n(p+r)dz}{r}+d\xi=-(m-2n+1)dz;\quad [dz=bx^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}}dx], \qquad 8)$$

$$d\xi=-\frac{(mr+np-nr+r)dz}{r}, \qquad 9)$$

$$\frac{n(p+r)\,dz}{r}-\frac{(mr+np-nr+r)\,dz}{r}=-(m-2n+1)dz. \qquad 10)$$

Substituiert man den Wert für das zweite Differential der Gl. 7 aus der Gl. 10 und führt man mit Rücksicht auf die Relation:

$$x^{m-2n+1}\cdot\omega'=x^{m-2n+1}(nbx^{n-1}+2ncx^{2n-1})=nbx^{m-n}+2ncx^m \qquad 11)$$

das ursprüngliche Differential als Hilfsdifferential ein, so ist:

$$(m-2n+1)x^{m-2n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx+\frac{(p+r)nbx^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r}+\frac{(p+r)2ncx^m\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r}-$$
$$-\frac{(mr+np-nr+r)bx^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r}=(m-2n+1)cdy+\frac{(p+r)2ncdy}{r}=$$
$$=\frac{(mr+2np+r)cdy}{r} \qquad 12)$$

oder

$$\frac{r}{(mr+2np+r)c} Ds\, x^{m-2n+1} \omega^{\frac{p}{r}+1}\left[\frac{(m-2n+1)dx}{x}+\frac{(p+r)\omega' dx}{r\omega}\right] -$$

$$-\frac{(mr+np-nr+r)b}{(mr+2np+r)c} Ds\, x^{m-n} \omega^{\frac{p}{r}} dx = Ds\, x^m (bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}} dx. \quad \mathbf{13)}$$

IV. Man kann auch dieselbe Substitution wie sub III benutzen und dann die sich ergebende Gleichung statt mit $m-2n+1$ (Gl. 7) mit dem zur Bildung der zweiten Funktion der Differentialsumme notwendigen Koeffizienten, nämlich $-\frac{n(p+r)}{r}$ multiplizieren (s. §. 42 Abs. VIII) und dann mit Rücksicht auf die Gl. 11 das ursprüngliche Differential als Hilfsdifferential einführen. Es ist dann:

$$-\frac{n(p+r)x^{m-2n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx}{r}+\frac{(p+r)nbx^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r}+\frac{(p+r)2ncx^m\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r}=$$

$$=-\frac{(p+r)ncdy}{r}+\frac{(p+r)2ncdy}{r}=\frac{(p+r)ncdy}{r}. \quad 14)$$

Benutzt man nunmehr, um auch die erste Funktion der Differentialsumme mit den erforderlichen Konstanten auszustatten, die Methode der ausgleichenden Hilfsdifferentiale, so ist:

$$(m-2n+1)x^{m-2n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx+\frac{(p+r)\omega^{\frac{p}{r}}\omega' dx}{r}-$$

$$-\frac{(mr+np-nr+r)x^{m-2n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx}{r}=\frac{(p+r)ncdy}{r} \quad 15)$$

oder

$$\frac{r}{(p+r)nc} Ds\, x^{m-2n+1}\omega^{\frac{p}{r}+1}\left[\frac{(m-2n+1)dx}{x}+\frac{(p+r)\omega' dx}{r\omega}\right]-$$

$$-\frac{mr+np-nr+r}{(p+r)nc} Ds\, x^{m-2n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx = Ds\, x^m(bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}dx. \quad \mathbf{16)}$$

V. Will man zur Integration der Gleichung 1 die Substitution:

$$x^n=\frac{\omega-cx^{2n}}{b} \quad 17)$$

benutzen, so ergiebt sich, wenn man die Gleichung nach erfolgter Substitution mit dem zur Bildung der ersten Funktion der Differentialsumme erforderlichen Koeffizienten multipliziert (vgl. §. 42 Abs. IX):

$$(m-n+1)x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx-(m-n+1)cx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}}dx=(m-n+1)bdy. \quad 18)$$

Um das zweite Differential mit Rücksicht auf die Relation:

$$x^{m-n+1}\cdot\omega'=nbx^m+2ncx^{m+n}$$

zur Bildung der zweiten Funktion der Differentialsumme verwenden zu können, führt man ausgleichende Hilfsdifferentiale ein und setzt:

$$\frac{2n(p+r)dz}{r} + d\xi = -(m-n+1)dz; \quad [dz = cx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}}dx], \qquad 20)$$

$$d\xi = -\frac{(mr+2np+nr+r)dz}{r}, \qquad 21)$$

$$\frac{2n(p+r)dz}{r} - \frac{(mr+2np+nr+r)dz}{r} = -(m-n+1)dz. \qquad 22)$$

Substituiert man für das zweite Differential in der Gl. 18 den Wert aus der Gl. 22 und führt man, um auch den zweiten Ausdruck der Relation 19 zu erhalten, das ursprüngliche Differential als Hilfsdifferential ein, so ist:

$$(m-n+1)x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx + \frac{(p+r)nbx^m\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r} + \frac{(p+r)2ncx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r} -$$

$$-\frac{(mr+2np+nr+r)cx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r} = (m-n+1)bdy + \frac{(p+r)nbdy}{r} =$$

$$= \frac{(mr+np+r)bdy}{r} \qquad 23)$$

oder

$$\frac{r}{(mr+np+r)b} Ds\, x^{m-n+1}\omega^{\frac{p}{r}+1}\left[\frac{(m-n+1)dx}{x} + \frac{(p+r)\omega' dx}{r\omega}\right] -$$

$$-\frac{(mr+2np+nr+r)c}{(mr+np+r)b} Ds\, x^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}}dx = Ds\, x^m(bx^n+cx^{2n})^{\frac{p}{r}}dx. \qquad \mathbf{24)}$$

VI. Man kann die sub V dargestellte Methode auch so anwenden, dass man nach erfolgter Substitution die Gleichung mit den zur Bildung der zweiten Differentialsumme erforderlichen Konstanten, nämlich mit $-\frac{2n(p+r)}{r}$ multipliziert (s. §. 42 Abs. X). Es ist dann:

$$-\frac{2n(p+r)x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx}{r} + \frac{(p+r)2ncx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r} = -\frac{(p+r)2nbdy}{r}. \qquad 25)$$

Verschafft man nunmehr dem ersten Differential den erforderlichen Koeffizient $m-n+1$ durch die Methode der ausgleichenden Hilfsdifferentiale und führt man mit Rücksicht auf die Relation 19 das ursprüngliche Differential als Hilfsdifferential ein, so ist:

$$(m-n+1)x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx + \frac{(p+r)nbx^m\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r} + \frac{(p+r)2ncx^{m+n}\omega^{\frac{p}{r}}dx}{r} -$$

$$-\frac{(mr+2np+nr+r)x^{m-n}\omega^{\frac{p}{r}+1}dx}{r} = -\frac{(p+r)2nbdy}{r} + \frac{(p+r)nbdy}{r} =$$

$$= -\frac{(p+r)nbdy}{r} \qquad 26)$$

oder

$$-\frac{r}{(p+r)nb} Ds\, x^{m-n+1} \omega^{\frac{p}{r}+1} \left[\frac{(m-n+1)dx}{x} + \frac{(p+r)\omega' dx}{r\omega}\right] +$$

$$+\frac{mr+2np+nr+r}{(p+r)nb} Ds\, x^{m-n} \omega^{\frac{p}{r}+1} dx = Ds\, x^m (bx^n + cx^{2n})^{\frac{p}{r}} dx. \quad 27)$$

VII. Aus den in Abs. I—VI ermittelten Integralen von $x^m \omega^{\frac{p}{r}}$ lassen sich die Differentialsummen von $\frac{x^m dx}{\omega^{\frac{p}{r}}}$, $\frac{dx}{x^m \omega^{\frac{p}{r}}}$, $\frac{\omega^{\frac{p}{r}} dx}{x^m}$ leicht dadurch finden, dass man m durch $-m$, p durch $-p$ ersetzt. Auch kann man diese Differentialsummen nach der für die binomischen und trinomischen Differentiale gegebenen Anleitung unmittelbar aus den Differentialen ohne Schwierigkeit ableiten. Nur die Integration von zwei Differentialen dieser Gruppe ist hier noch darzustellen, weil diese sich nicht unmittelbar aus den sub I—VI gefundenen Formeln ergeben.

Ist nämlich die Gleichung:

$$(bx^n + cx^{2n})^{\frac{p}{r}} dx = \omega^{\frac{p}{r}} dx = dy \quad 28)$$

zu integrieren, so setzt man in der Gl. 13 $m = 0$ und es ergiebt sich dann:

$$Ds\, (bx^n + cx^{2n})^{\frac{p}{r}} dx = \frac{r}{(2np+r)c} \cdot \frac{\overline{\omega}^{\frac{p}{r}+1}}{\overline{x}^{2n-1}} - \frac{(np-nr+r)b}{(2np+r)c} Ds \frac{\omega^{\frac{p}{r}} dx}{x^n}. \quad 29)$$

Nun ist aber, wenn man in der Gl. 6 m durch $-n$ ersetzt:

$$Ds \frac{(bx^n + cx^{2n})^{\frac{p}{r}} dx}{x^n} = \frac{r}{2np-nr+r} \cdot \frac{\overline{\omega}^{\frac{p}{r}}}{\overline{x}^{n-1}} + \frac{bnp}{2np-nr+r} Ds\, \omega^{\frac{p}{r}-1} dx. \quad 30)$$

Substituiert man den Wert für $Ds \frac{\omega^{\frac{p}{r}} dx}{x^n}$ aus der Gl. 30 in die Gl. 29, so ergiebt sich nach einigen Reduktionen:

$$Ds\, (bx^n + cx^{2n})^{\frac{p}{r}} dx = \frac{r}{(2np+r)c} \cdot \frac{\overline{\omega}^{\frac{p}{r}}}{\overline{x}^{n-1}} \left[\frac{\overline{\omega}}{\overline{x}^n} - \frac{(np-nr+r)b}{2np-nr+r}\right] -$$

$$-\frac{(np-nr+r)b^2 np}{(2np+r)(2np-nr+r)c} Ds\, \omega^{\frac{p}{r}-1} dx. \quad \mathbf{31)}$$

VIII. Ist endlich die Gleichung:

$$\frac{dx}{(bx^n + cx^{2n})^{\frac{p}{r}}} = \frac{dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} = dy \quad 32)$$

zu integrieren, so geht man wie sub VII vor und setzt in der Gl. 24 $m = 0$, $p = -p$, also:

$$Ds\,\frac{dx}{(b x^n + c x^{2n})^{\frac{p}{r}}} = -\,\frac{r}{(np-r)b}\cdot\frac{1}{\bar{x}^{n-1}\,\bar{\omega}^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{2np - nr - r)c}{(np-r)b}\,Ds\,\frac{x^n\,dx}{\omega^{\frac{p}{r}}}\,. \qquad 33)$$

Setzt man ferner in der Gl. 27 $m = n$, $p = -p$, so ergiebt sich:

$$Ds\,\frac{x^n\,dx}{(b x^n + c x^{2n})^{\frac{p}{r}}} = \frac{r}{(p-r)nb}\,\frac{\bar{x}}{\bar{\omega}^{\frac{p}{r}-1}} + \frac{2np - 2nr - r}{(p-r)nb}\,Ds\,\frac{dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}} \qquad 34)$$

und wenn die vorstehende Differentialsumme in die Gl. 33 substituiert wird, so ist:

$$Ds\,\frac{dx}{(b x^n + c x^{2n})^{\frac{p}{r}}} = -\,\frac{r\left[(p-r)nb + (2np - nr - r)c\bar{x}^n\right]}{(np-r)(p-r)nb^2\bar{x}^{n-1}\bar{\omega}^{\frac{p}{r}-1}} - \frac{(2np - nr - r)(2np - 2nr - r)c}{(np-r)(p-r)nb^2}\,Ds\,\frac{dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}\,. \qquad \mathbf{35)}$$

Setzt man in den vorstehenden Integralformeln (Abs. I—VIII) $n = 1$, $r = 2$, so erhält man dieselben in der mehr speziellen Form, in welcher unsere Lehrbücher und Integraltafeln diese Integrale gewöhnlich ausweisen.

Fünfte Abteilung.

Die exponentiellen, logarithmischen und cyklometrischen Integrale.

§. 36.

Die exponentiellen Integrale.

I. Von den exponentiellen, logarithmischen und cyklometrischen Integralen sollen nach dem Plane dieser Abhandlung nur die wichtigsten Fälle in Betracht gezogen werden, weil die ausführliche Ableitung der rationalen, goniometrischen und irrationalen Integrale in den vorhergehenden drei Abteilungen hinreichende Anhaltspunkte gewährt, um auch die Methoden für die Integration aller übrigen Differentiale aufzufinden.

Ist die Gleichung:

$$\frac{dx}{a + b e^{mx}} = \frac{dx}{\omega} = dy \qquad 1)$$

zu integrieren, so führt man mit Rücksicht auf die Relation:

$$\omega - b e^{mx} = a \qquad 2)$$

Variable und Konstanten ein, also:

$$dx - \frac{b e^{mx} dx}{\omega} = a dy. \qquad 3)$$

Nun ist aber (§. 31 Gl. 16):

$$Ds \frac{b e^{mx} dx}{a + b e^{mx}} = -\frac{1}{m} Ds \frac{\omega' dx}{\omega} = -\frac{1}{m} \log \overline{\omega}. \qquad 4)$$

Nimmt man nunmehr von der Gl. 3 die Differentialsumme (s. Gl. 4) und befreit dann dy von der Konstante, so ist:

$$\frac{1}{a}\left(\overline{x} - \frac{1}{m} \log \overline{\omega}\right) = Ds \frac{dx}{a + b e^{mx}}. \qquad 5)$$

Durch ganz analoge Rechnungen, bei welchen nur die Gl. 2 eine Veränderung in den Zeichen erleidet, erhält man noch:

$$Ds \frac{dx}{-a + b e^{mx}} = \frac{dx}{\omega} = \frac{1}{a}\left(-x + \frac{1}{m} \log \overline{\omega}\right), \qquad 6)$$

$$Ds \frac{dx}{a - b e^{mx}} = \frac{dx}{\omega} = \frac{1}{a}\left(x - \frac{1}{m} \log \overline{\omega}\right). \qquad 7)$$

II. Ist die Gleichung:

$$\frac{dx}{(a + b e^{mx})^{\frac{p}{r}}} = \frac{dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} = dy \qquad 8)$$

zu integrieren, so führt man mit Rücksicht auf die Gl. 2 Variable und Konstanten ein, bringt dann das zweite Differential links auf die nach §. 31 Gl. 15 integrierbare Form $\frac{\omega' dx}{\omega^{\frac{p}{r}}}$ (s. Gl. 4 und 23) und befreit schliesslich dy von den Konstanten, worauf sich folgende Formel ergiebt:

$$Ds \frac{dx}{(a + b e^{mx})^{\frac{p}{r}}} = \frac{r}{am(p-r)\overline{\omega}^{\frac{p}{r}-1}} + \frac{1}{a} Ds \frac{dx}{\omega^{\frac{p}{r}-1}}. \qquad 9)$$

Auch die Integrale für die verschiedenen Zeichenkombinationen des vorstehenden Ausdrucks (vgl. Abs. I) sind leicht zu finden.

III. Zur Integration der Gleichung:

$$\frac{dx}{ae^{mx} + b e^{-mx}} = \frac{e^{mx} dx}{b + ae^{2mx}} = \frac{\frac{e^{mx} dx}{b}}{1 + \left(\frac{\sqrt{a}e^{mx}}{\sqrt{b}}\right)^2} = dy \qquad 10)$$

multipliziert man beiderseits mit $\sqrt{abm}$, also:

$$Ds \frac{\frac{\sqrt{a}e^{mx} m dx}{\sqrt{b}}}{1 + \left(\frac{\sqrt{a}e^{mx}}{\sqrt{b}}\right)^2} = Ds \frac{d\frac{\sqrt{a}e^{mx}}{\sqrt{b}}}{1 + \left(\frac{\sqrt{a}e^{mx}}{\sqrt{b}}\right)^2} = \operatorname{arctan} \frac{\sqrt{a}e^{m\overline{x}}}{\sqrt{b}} = Ds \sqrt{abm} dy \qquad 11)$$

oder wenn man dy von den Konstanten befreit:

$$\frac{1}{\sqrt{ab}\,m} \operatorname{arctan} \frac{\sqrt{a}\,e^{m\bar{x}}}{\sqrt{b}} = Ds \frac{dx}{a e^{mx} + b e^{-mx}}. \tag{12}$$

IV. Die Gleichung

$$\frac{dx}{ae^{mx} - b e^{-mx}} = \frac{e^{mx}\,dx}{ae^{2mx} - b} = dy \tag{13}$$

kann dadurch integriert werden, dass man setzt:

$$\omega = ae^{2mx} - b, \tag{14}$$

$$\pi = \sqrt{a}\,e^{mx} + \sqrt{b}, \tag{15}$$

$$\varrho = \sqrt{a}\,e^{mx} - \sqrt{b}, \tag{16}$$

$$\pi + \varrho = 2\sqrt{a}\,e^{mx}; \quad \frac{\pi + \varrho}{e^{mx}} = 2\sqrt{a}, \tag{17}$$

$$\pi\varrho = ae^{2mx} - b = \omega. \tag{18}$$

Führt man in die Gl. 13 mit Rücksicht auf die Gl. 17 Variable und Konstanten ein und ersetzt man ω durch $\pi\varrho$ (Gl. 18), so ist:

$$\frac{(\pi + \varrho)\,e^{mx}\,dx}{e^{mx}\,\pi\varrho} = 2\sqrt{a}\,dy \tag{19}$$

oder

$$Ds \frac{dx}{\pi} + Ds \frac{dx}{\varrho} = Ds\, 2\sqrt{a}\,dy. \tag{20}$$

Substituiert man den Wert der beiden Differentialsummen links aus den Gl. 5 und 6 und befreit sodann dy von den Konstanten, so ist:

$$\frac{1}{2\sqrt{ab}\,m} \log \frac{\bar{\varrho}}{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{ab}\,m} \log \frac{-\sqrt{b} + \sqrt{a}\,e^{m\bar{x}}}{\sqrt{b} + \sqrt{a}\,e^{m\bar{x}}} = Ds \frac{dx}{ae^{mx} - b e^{-mx}}. \tag{21}$$

V. Die Gleichung

$$\frac{e^{nx}\,dx}{\sqrt{a + b e^{nx}}} = \frac{1}{bn} \cdot \frac{b e^{nx}\, n\, dx}{\sqrt{a + b e^{nx}}} = \frac{1}{bn} \cdot \frac{\omega'\,dx}{\omega^{\frac{1}{2}}} = dy \tag{22}$$

kann nach §. 31 Gl. 15 integriert werden.

Auf dieselbe Weise kann man

$$\frac{e^{nx}\,dx}{(a + b e^{nx})^{\frac{p}{r}}} = \frac{1}{bn} Ds \frac{\omega'\,dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} \tag{23}$$

integrieren.

VI. Die Integration der Differentiale $\dfrac{dx}{\sqrt{a + b e^{nx}}}$ und $\dfrac{dx}{\sqrt{-a + b e^{nx}}}$ ist den Operationen im §. 33 Abs. I und II sehr analog.

Zur Integration der Gleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{a + b e^{nx}}} = \frac{dx}{\sqrt{\omega}} = dy \tag{24}$$

setzt man nämlich:

$$\pi = \sqrt{a + be^{nx}} + \sqrt{a}; \quad \pi' = \frac{b n e^{nx}}{2\sqrt{\omega}}, \tag{25}$$

$$\varrho = \sqrt{a + be^{nx}} - \sqrt{a}; \quad \varrho' = \frac{b n e^{nx}}{2\sqrt{\omega}}. \tag{26}$$

$$\pi'\varrho - \pi\varrho' = -\frac{\sqrt{a} b n e^{nx}}{\sqrt{\omega}}; \quad \frac{(\pi'\varrho - \pi\varrho')\sqrt{\omega}}{e^{nx}} = -\sqrt{a} b n, \tag{27}$$

$$\pi\varrho = be^{nx}. \tag{28}$$

Multipliziert man nunmehr das Differential links in der Gl. 24 im Zähler und Nenner in Gemässheit der Relation 28 und führt man dann mit Rücksicht auf die Gl. 27 Variable und Konstanten ein, so ergiebt sich:

$$\frac{(\pi'\varrho - \pi\varrho')\sqrt{\omega}\, b e^{nx} dx}{e^{nx}\pi\varrho\sqrt{\omega}} = -\sqrt{a} b n dy \tag{29}$$

oder

$$\frac{\pi' dx}{\pi} - \frac{\varrho' dx}{\varrho} = -\sqrt{a} n dy. \tag{30}$$

Verfährt man nun in der bekannten Weise, so ist:

$$\frac{1}{\sqrt{a}n}\log\frac{\varrho}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{a}n}\log\frac{\sqrt{a + b e^{nx}} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + b e^{nx}} + \sqrt{a}} = Ds\frac{dx}{\sqrt{a + b e^{nx}}}. \tag{31}$$

VII. Zur Integration der Gleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{-a + b e^{nx}}} = \frac{dx}{\sqrt{\omega}} = dy \tag{32}$$

ist diese Methode aus dem im §. 33 Abs. II angeführten Grunde unanwendbar und es kann nur die Integration durch Kreisbögen durchgeführt werden. Zu diesem Zweck schreibe man die Gl. 32 mit Rücksicht auf die Relationen:

$$d\sqrt{-a + be^{nx}} = \frac{b e^{nx} n dx}{2\sqrt{\omega}}; \quad be^{nx} = a\left[1 + \left(\frac{\sqrt{-a + b e^{nx}}}{\sqrt{a}}\right)^2\right] \tag{33}$$

folgendermassen:

$$\frac{\dfrac{b e^{nx} n dx}{2\sqrt{\omega}}}{a\left[1 + \left(\dfrac{\sqrt{-a + b e^{nx}}}{\sqrt{a}}\right)^2\right]} = \frac{d\sqrt{\omega}}{a\left[1 + \left(\dfrac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{a}}\right)^2\right]} = \frac{n dy}{2}. \tag{34}$$

Versetzt man schliesslich a aus dem Nenner des zweiten Ausdrucks in den Zähler des dritten und dividiert man dann die Gleichung beiderseits mit $\sqrt{a}$, so ergiebt sich, wenn man in der bekannten Weise verfährt:

$$\frac{2}{\sqrt{a}n}\arctan\frac{\sqrt{-a+be^{nx}}}{\sqrt{a}} = Ds\frac{dx}{\sqrt{-a+be^{nx}}}. \qquad 35)$$

VIII. Die Gleichung:

$$x^m e^{nx} dx = dy$$

kann dadurch integriert werden, dass man sie mit n multipliziert und dann Hilfsdifferentiale einführt, also:

$$x^m de^{nx} + e^{nx} dx^m - mx^{m-1}e^{nx}dx = ndy \qquad 36)$$

oder

$$\frac{1}{n} Ds\, x^m e^{nx}\left[\frac{dx^m}{x^m} + \frac{de^{nx}}{e^{nx}}\right] - \frac{m}{n} Ds\, x^{m-1}e^{nx}dx = Ds\, x^m e^{nx} dx. \qquad 37)$$

Das vorstehende Integral kann, wie ein Blick auf dasselbe ergiebt, nur dann in einem geschlossenen Ausdruck dargestellt werden, wenn m eine ganze positive Zahl ist (vgl. Abs. IX).

IX. Die Gleichung:

$$\frac{e^{nx}dx}{x^m} = dy \qquad 38)$$

kann, wenn m positiv, ganz und > 1 ist, dadurch (jedoch nicht in geschlossener Form) integriert werden, dass man sie mit $-(m-1)$ multipliziert und dann Hilfsdifferentiale einführt, also:

$$\frac{de^{nx}}{x^{m-1}} - \frac{(m-1)e^{nx}dx}{x^m} - \frac{ne^{nx}dx}{x^{m-1}} = -(m-1)dy \qquad 39)$$

oder

$$-\frac{1}{m-1}Ds\frac{e^{nx}}{x^{m-1}}\left[\frac{de^{nx}}{e^{nx}} - \frac{(m-1)dx}{x}\right] + \frac{n}{m-1}Ds\frac{e^{nx}dx}{x^{m-1}} = Ds\frac{e^{nx}dx}{x^m}. \qquad 40)$$

X. Ist die Gleichung:

$$\sin^m x e^{nx} dx = dy$$

zu integrieren, so multipliziert man dieselbe mit $m^2 + n^2$ und setzt in dem Differential mit dem Koeffizienten m^2 an die Stelle von $\sin^m x$ den Ausdruck $\sin^{m-2}x(1-\cos^2)$, also:

$$n^2 \sin^m xe^{nx}dx + m^2\sin^{m-2}xe^{nx}dx - m^2\cos^2 x\sin^{m-2}xe^{nx}dx =$$
$$= (m^2+n^2)dy. \qquad 41)$$

Führt man nunmehr das Hilfsdifferential

$$mn\cos x\sin^{m-1}xe^{nx}dx$$

ein, so ist:

$$n^2\sin^m xe^{nx}dx + mn\cos x\sin^{m-1}xe^{nx}dx + m^2\sin^{m-2}xe^{nx}dx -$$
$$- m^2\cos^2 x\sin^{m-2}xe^{nx}dx - mn\cos x\sin^{m-1}xe^{nx}dx = (m^2+n^2)dy. \qquad 42)$$

Aus den zwei ersten Differentialen links kann, wie ein Blick lehrt, die Differentialsumme sofort gebildet werden. Ebenso kann man auch aus dem dritten bis fünften Differential, wie sich sofort ergeben wird, eine weitere Differentialsumme unter der Bedingung bilden, dass man den Koeffizienten des dritten Differentials m^2 durch m ersetzt, was vermittelst der Methode der ausgleichenden Hilfsdifferentiale leicht geschehen kann. Es ist nämlich:

$$m dz + d\xi = m^2 dz; \quad [dz = \sin^{m-2} x e^{nx} dx], \tag{43}$$

$$d\xi = m(m-1) dz, \tag{44}$$

$$m dz + m(m-1) dz = m^2 dz. \tag{45}$$

Substituiert man nun den Wert des dritten Differentials der Gl. 42 aus der Gl. 45, so ist:

$$\begin{aligned} &n[n \sin^m x e^{nx} dx + m \cos x \sin^{m-1} x e^{nx} dx] - \\ &- m[- \sin^{m-2} x e^{nx} dx + m \cos^2 x \sin^{m-2} x e^{nx} dx + n \cos x \sin^{m-1} x e^{nx} dx] + \\ &+ m(m-1) \sin^{m-2} x e^{nx} dx = (m^2 + n^2) dy. \end{aligned} \tag{46}$$

Bildet man endlich aus den in den Klammern eingeschlossenen Differentialen die beiden Differentialsummen und befreit schliesslich dy von den Konstanten, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} &\frac{n}{m^2+n^2} Ds \sin^m x e^{nx} \left[\frac{d \sin^m x}{\sin^m x} + \frac{de^{nx}}{e^{nx}}\right] - \\ &- \frac{m}{m^2+n^2} Ds \cos x \sin^{m-1} x e^{nx} \left[\frac{d \cos x}{\cos x} + \frac{d \sin^{m-1} x}{\sin^{m-1} x} + \frac{de^{nx}}{e^{nx}}\right] + \\ &+ \frac{m(m-1)}{m^2+n^2} Ds \sin^{m-2} x e^{nx} dx = Ds \sin^m x e^{nx} dx. \end{aligned} \tag{47}$$

XI. Ist die Gleichung:

$$\cos^m x e^{nx} dx = dy \tag{48}$$

zu integrieren, so erhält man nach einigen ganz analogen Rechnungen (Abs. X) den Ausdruck:

$$\begin{aligned} &n[n \cos^m x e^{nx} dx - m \sin x \cos^{m-1} x e^{nx} dx] + \\ &+ m[\cos^{m-2} x e^{nx} dx - m \sin^2 x \cos^{m-2} x e^{nx} dx + n \sin x \cos^{m-1} x e^{nx} dx] + \\ &+ m(m-1) \cos^{m-2} x e^{nx} dx = (m^2 + n^2) dy \end{aligned} \tag{49}$$

oder

$$\begin{aligned} &\frac{n}{m^2+n^2} Ds \cos^m x e^{nx} \left[\frac{d \cos^m x}{\cos^m x} + \frac{de^{nx}}{e^{nx}}\right] + \\ &+ \frac{m}{m^2+n^2} Ds \sin x \cos^{m-1} x e^{nx} \left[\frac{d \sin x}{\sin x} + \frac{d \cos^{m-1} x}{\cos^{m-1} x} + \frac{de^{nx}}{e^{nx}}\right] + \\ &+ \frac{m(m-1)}{m^2+n^2} Ds \cos^{m-2} x e^{nx} dx = Ds \cos^m x e^{nx} dx. \end{aligned} \tag{50}$$

Auf analoge Weise kann man auch die Integrale für $\mathrm{tg}^m x e^{nx} dx$ u.s.f. ermitteln.

§. 52.

Die logarithmischen Integrale.

Die Integration der einfachsten logarithmischen Differentiale vermittelst der neuen Rechnungsmethoden ist schon in meinen „Neuen Integrationsmethoden“ S. 37—39 dargestellt worden. Es erübrigt daher nur noch, auch einige verwickeltere Differentialsummen dieser Art, die übrigens nur zum Teil in endlicher Form darstellbar sind, der Integration durch die neuen Rechnungsmethoden zu unterziehen.

I. Ist die Gleichung:

$$x^m (\log x)^n \, dx = dy \tag{1}$$

zu integrieren, so setzt man:

$$\int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} = z \tag{2}$$

und es ist, wenn man Hilfsdifferentiale einführt:

$$(\log x)^n \, dz + z \, d\,(\log x)^n - \frac{n}{m+1} x^m (\log x)^{n-1} \, dx = dy \tag{3}$$

und wenn man dann aus den beiden ersten Differentialen die Differentialsumme bildet:

$$\frac{\overline{x}^{m+1} (\log \overline{x})^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} Ds \, x^m (\log x)^{n-1} \, dx = Ds \, x^m (\log x)^n \, dx. \tag{4}$$

II. Ebenso kann die Gleichung:

$$\frac{x^m \, dx}{(\log x)^n} = \frac{x^{m+1} \, dx}{x \, (\log x)^n} = \frac{x^{m+1} \, d \log x}{(\log x)^n} = dy \tag{5}$$

dadurch integriert werden, dass man setzt:

$$\int \frac{d \log x}{(\log x)^n} = - \frac{1}{(n-1)(\log x)^{n-1}} = z \tag{6}$$

und dann Hilfsdifferential einführt, also:

$$x^{m+1} \, dz + z \, dx^{m+1} + \frac{m+1}{n-1} \cdot \frac{x^m \, dx}{(\log x)^{n-1}} = dy \tag{7}$$

oder

$$- \frac{\overline{x}^{m+1}}{(n-1)(\log \overline{x})^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1} Ds \frac{x^m \, dx}{(\log x)^{n-1}} = Ds \frac{x^m \, dx}{(\log x)^{n-1}} \; [n > 1]. \tag{8}$$

Setzt man in den Gl. 4 und 8 $m = 0$, so ist:

$$Ds \, (\log x)^n \, dx = \overline{x} \, (\log \overline{x})^n - n \, Ds \, (\log x)^{n-1} \, dx, \tag{9}$$

$$Ds \frac{dx}{(\log x)^n} = - \frac{\overline{x}}{(n-1)(\log \overline{x})^{n-1}} + \frac{1}{n-1} Ds \frac{dx}{(\log x)^{n-1}}. \tag{10}$$

Die beiden vorstehenden Integrale können vermittelst der bekannten Methoden auch unmittelbar aus den Differentialen abgeleitet werden.

III. Die Gleichung:

$$(\log x)^m (a + bx^n)^p dx = dy \qquad 11)$$

kann, wenn p eine ganze positive Zahl ist, dadurch integriert werden, dass man $(a + bx^n)^p$ nach dem Binomialsatz entwickelt, die einzelnen Glieder sodann mit $(\log x)^m$ multipliziert und sie nach den Formeln 4 und 9 der Integration unterzieht.

IV. Ist dagegen p eine gebrochene, positive Zahl, folglich die Gleichung:

$$(\log x)^m (a + bx^n)^{\frac{p}{r}} dx = (\log x)^m \omega^{\frac{p}{r}} dx = dy \qquad 12)$$

zu integrieren, so setzt man:

$$\int \omega^{\frac{p}{r}} dx = z \qquad 13)$$

und führt sodann Hilfsdifferentiale ein, also:

$$(\log x)^m dz + z d (\log x)^m - \frac{mz (\log x)^{m-1} dx}{x} = dy \qquad 14)$$

oder

$$(\log \overline{x})^m \overline{z} - m\, Ds \frac{z (\log x)^{m-1} dx}{x} = Ds\, (\log x)^m (a + bx^n)^{\frac{p}{r}} dx. \qquad \mathbf{15)}$$

Dieses Integral kann dann in endlicher Form dargestellt werden, wenn sowohl z als auch $Ds \frac{z (\log x)^{m-1} dx}{x}$ in geschlossenen Ausdrücken integrierbar sind, was aber bei der Unvollkommenheit unserer Integrationsmethoden entfernt nicht in allen Fällen möglich ist.

So ist z. B.:

$$Ds \log x \sqrt{a + bx}\, dx = \frac{2 \log \overline{x} \overline{\omega}^{\frac{3}{2}}}{3b} - \frac{4 \sqrt{\overline{\omega}} (4a + b\overline{x})}{9b} - \frac{2a^2}{3b} Ds \frac{dx}{x \sqrt{\omega}} \cdot \qquad 16)$$

Ebenso ist $x \log x \sqrt{a + bx^2} dx$ integrabel, weil sowohl $\int x \sqrt{a + bx^2} dx$ als auch $-mDs \frac{z (\log x)^{m-1} dx}{x} = - Ds \frac{(a + bx^2)^{\frac{3}{2}} dx}{x}$ in geschlossener Form darstellbar sind u. s. w.

V. Zur Integration der Gleichung:

$$\frac{(\log x)^m dx}{(a + bx^n)^{\frac{p}{r}}} = \frac{(\log x)^m dx}{\omega^{\frac{p}{r}}} = dy \qquad 17)$$

setzt man:

$$\int \frac{dx}{(a + bx^n)^{\frac{p}{r}}} = z \qquad 18)$$

und es ist dann, ebenso wie sub IV:

$$(\log \overline{x})^m \overline{z} - m\, Ds \frac{z (\log x)^{m-1} dx}{x} = Ds \frac{(\log x)^m dx}{(a + bx^n)^{\frac{p}{r}}} \cdot \qquad \mathbf{19)}$$

Die Bemerkung zur Gl. 15 gilt auch in Betreff der vorstehenden Relation. So ist z. B., wenn die Gleichung:

$$\frac{\log x dx}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\log x dx}{\omega^{\frac{3}{2}}} = dy \tag{20}$$

integriert werden soll:

$$\int \frac{dx}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2}{b\sqrt{\omega}} = z, \tag{21}$$

folglich (Gl. 19):

$$Ds\, \frac{\log x dx}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2 \log \overline{x}}{b\sqrt{\overline{\omega}}} + \frac{2}{b}\, Ds\, \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}. \tag{22}$$

Ebenso ist, wenn man die Gleichung:

$$\frac{x \log x dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{x \log x dx}{\sqrt{\omega}} = dy \tag{23}$$

integrieren will:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{\sqrt{\omega}}{b} = z, \tag{24}$$

folglich (Gl. 19):

$$Ds\, \frac{x \log x dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{\log \overline{x} \sqrt{\overline{\omega}}}{b} - \frac{1}{b}\, Ds\, \frac{\sqrt{\omega}\, dx}{x} \tag{25}$$

u. s. w.

§. 53.

Die cyklometrischen Integrale.

I. Eine wirkliche Ermittlung der Differentialsummen ist bei den cyklometrischen Urintegralen (Gl. 3—6) mit den bisher entwickelten Methoden unmöglich, vielmehr erfolgt hier die Integration durch Umkehrung der für die goniometrischen Differentiale ermittelten Integrationsformeln. So ergiebt die Relation:

$$d \sin x = \cos x d \operatorname{arc} x \tag{1}$$

oder

$$\frac{d \sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = d \operatorname{arc} x, \tag{2}$$

wenn man beiderseits die Differentialsumme nimmt, folgende Gleichung:

$$Ds\, \frac{d \sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \operatorname{arc} \overline{x}.\text{*)} \tag{3}$$

---

*) Die obige Relation würde bei Anwendung der gewöhnlichen Bezeichnungsweise lauten: $Ds\, \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin \overline{x}$, doch wird sich aus der folgenden Darstellung ergeben, dass die von mir gewählte Bezeichnung für die neuen Rechnungsmethoden zweckmässiger ist.

Es ist leicht ersichtlich, dass hier bei dem Differential links eine wirkliche Umwandlung in die Differentialsumme nicht stattgefunden hat, sondern dass diese Operation durch Vorsetzung des Zeichens Ds nur symbolisch angedeutet erscheint.

Ebenso ergiebt sich:

$$Ds - \frac{d \cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = \operatorname{arc} \cos \bar{x}, \tag{4}$$

$$Ds \frac{d \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{arctan} \bar{x}, \tag{5}$$

$$Ds - \frac{d \operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = \operatorname{arcctg} \bar{x}. \tag{6}$$

II. Ist die Gleichung:

$$\operatorname{arc}^m x \sin^n x d \sin x = dy \tag{7}$$

zu integrieren, so setzt man wie in früheren Fällen:

$$\int \sin^n x d \sin x = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} = z \tag{8}$$

und es ergiebt sich, wenn man in der bekannten Weise Hilfsdifferentiale einführt:

$$\operatorname{arc}^m x dz + z d \operatorname{arc}^m x - z d \operatorname{arc}^m x = dy \tag{9}$$

oder

$$\operatorname{arc}^m \bar{x} \bar{z} - m\, Ds\, z \operatorname{arc}^{m-1} x d \operatorname{arc} x = Ds \operatorname{arc}^m x \sin^n x d \sin x. \tag{10}$$

Durch diese Formel kann jedes Differential der vorbezeichneten Form entweder sofort oder durch wiederholte Einführung von Hilfsdifferentialen ermittelt werden. Die Exponenten m und n sind hier wie in den folgenden Absätzen ganze positive Zahlen.

III. Ist z. B. die Gleichung:

$$\operatorname{arc} x \sin x d \sin x = dy \tag{11}$$

zu integrieren, so setzt man:

$$\int \sin x d \sin x = \frac{\sin^2 x}{2} = z, \tag{12}$$

folglich (Gl. 10):

$$\frac{\operatorname{arc} \bar{x} \sin^2 \bar{x}}{2} - Ds \frac{\sin^2 x d \operatorname{arc} x}{2} = Ds\, dy. \tag{13}$$

Substituiert man den Wert für die zweite Differentialsumme links aus §. 23 Gl. 12, so ist:

$$\frac{\operatorname{arc} \bar{x} \sin^2 \bar{x}}{2} + \frac{\sin \bar{x} \cos \bar{x}}{4} - \frac{\operatorname{arc} \bar{x}}{4} = Ds \operatorname{arc} x \sin x d \sin x. \tag{14}$$

Einige leichte Reduktionen bringen dieses Integral auf seine in den Lehrbüchern übliche Form.

IV. Ist die Gleichung:

$$\operatorname{arc}^2 x \sin^2 x d \sin x = dy \tag{15)}$$

zu integrieren, so setze man:

$$\int \sin^2 x d \sin x = \frac{\sin^3 x}{3} = z, \tag{16)}$$

also zufolge Gl. 10:

$$\frac{\operatorname{arc}^2 \bar{x} \sin^3 \bar{x}}{3} - \frac{2}{3} Ds \sin^3 x \operatorname{arc} x d \operatorname{arc} x = Ds\, dy. \tag{17)}$$

Die in der vorstehenden Gleichung erscheinende Differentialsumme $Ds \sin^3 x \operatorname{arc} x d \operatorname{arc} x$ kann leicht durch nochmalige Einführung von Hilfsdifferentialen ermittelt werden (vgl. §. 28). Man setzt zu diesem Zweck (s. §. 23 Gl. 16):

$$\int \sin^3 x d \operatorname{arc} x = -\frac{\sin^2 x \cos x}{3} - \frac{2 \cos x}{3} = \zeta, \tag{18)}$$

also mit Rücksicht auf die Gl. 10:

$$\begin{aligned} Ds \sin^3 x \operatorname{arc} x d \operatorname{arc} x &= Ds\, [\operatorname{arc} x d\zeta + \zeta d \operatorname{arc} x - \zeta d \operatorname{arc} x] = \\ &= \operatorname{arc} \bar{x} \bar{\zeta} - Ds\, \zeta d \operatorname{arc} x = -\frac{\operatorname{arc} \bar{x} \sin^2 \bar{x} \cos \bar{x}}{3} - \frac{2 \operatorname{arc} \bar{x} \cos \bar{x}}{3} + \\ &\qquad + \frac{\sin^3 \bar{x}}{9} + \frac{2 \sin \bar{x}}{3}. \end{aligned} \tag{19)}$$

Substituiert man die vorstehende Differentialsumme in die Gl. 17, so ist das Integral ermittelt.

V. Ist die Gleichung:

$$\frac{\operatorname{arc}^m x d \sin x}{\sin^n x} = dy \tag{20)}$$

zu integrieren, so setzt man:

$$\int \frac{d \sin x}{\sin^n x} = -\frac{1}{(n-1) \sin^{n-1} x} = z, \tag{21)}$$

folglich, wenn man Hilfsdifferentiale einführt:

$$-\frac{\operatorname{arc}^m \bar{x}}{(n-1) \sin^{n-1} \bar{x}} + \frac{m}{n-1} Ds \frac{\operatorname{arc}^{m-1} x d \operatorname{arc} x}{\sin^{n-1} x} = Ds \frac{\operatorname{arc}^m x d \sin x}{\sin^n x} \; [n > 1]. \tag{22)}$$

Die zweite Differentialsumme ist mit den bisher aufgefundenen Integrationsmethoden in einem geschlossenen Ausdruck nicht immer darstellbar (vgl. oben zu §. 52 Gl. 15 und 19).

VI. Ist z. B. die Gleichung:

$$\frac{\operatorname{arc} x d \sin x}{\sin^2 x} = dy \tag{23)}$$

zu integrieren, so ist:

$$\int \frac{d \sin x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x} = z, \tag{24)}$$

folglich (Gl. 22):

$$-\frac{\operatorname{arc}\bar{x}}{\sin\bar{x}}+Ds\frac{dx}{\sin x}\ (\S.\ 22\ \text{Gl.}\ 58)=Ds\frac{\operatorname{arc}x\,d\sin x}{\sin^2 x}. \qquad 25)$$

VII. Setzt man in den Gl. 10 und 22 $n=0$, so ist:

$$\operatorname{arc}^m\bar{x}\sin\bar{x}-m\,Ds\operatorname{arc}^{m-1}x\sin x\,d\operatorname{arc}x=Ds\operatorname{arc}^m x\,d\sin x, \qquad \mathbf{26)}$$

welche Formel übrigens auch unmittelbar aus dem Differential ermittelt werden kann. Auch hier (s. zu Gl. 17) ist unter Umständen eine wiederholte Einführung von Hilfsdifferentialen erforderlich. So ist z. B. zufolge Gl. 26:

$$Ds\operatorname{arc}^2 x\,d\sin x=\operatorname{arc}^2\bar{x}\sin\bar{x}-2Ds\operatorname{arc}x\sin x\,d\operatorname{arc}x=$$
$$=(\S.\ 28\ \text{Gl.}\ 12)\operatorname{arc}^2\bar{x}\sin x+2\operatorname{arc}\bar{x}\cos\bar{x}-2\sin\bar{x}. \qquad 27)$$

VIII. Ist die Gleichung:

$$\frac{\operatorname{arc}x\sin^m x\,d\sin x}{(a+b\sin^n x)^{\frac{p}{r}}}=dy \qquad 28)$$

zu integrieren, so setzt man wieder:

$$\int\frac{\sin^m x\,d\sin x}{(a+b\sin^n x)^{\frac{p}{r}}}=z, \qquad 29)$$

folglich auch, indem man Hilfsdifferentiale einführt:

$$\bar{z}\operatorname{arc}\bar{x}-Ds\,z\,d\operatorname{arc}x=Ds\frac{\operatorname{arc}x\sin^m x\,d\sin x}{(a+b\sin^n x)^{\frac{p}{r}}}. \qquad \mathbf{30)}$$

Auch in dieser Gleichung kann sowohl z als auch die zweite Differentialsumme entfernt nicht in allen Fällen durch geschlossene Ausdrücke dargestellt werden.

IX. Ist z. B. die Gleichung:

$$\frac{\operatorname{arc}x\,d\sin x}{(a+b\sin x)^2}=dy \qquad 31)$$

zu integrieren, so setzt man:

$$\int\frac{d\sin x}{(a+b\sin x)^2}=-\frac{1}{b(a+b\sin x)}=z, \qquad 32)$$

folglich auch (Gl. 30):

$$Ds\frac{\operatorname{arc}x\,d\sin x}{(a+b\sin x)}=-\frac{\operatorname{arc}\bar{x}}{b(a+b\sin\bar{x})}+\frac{1}{b}Ds\frac{d\operatorname{arc}x}{a+b\sin x}\ \begin{pmatrix}\S.\ 35\ \text{Abs. XIII},\\ \S.\ 48\ \text{Abs. VI}\end{pmatrix}. \qquad 33)$$

X. Ist endlich die Gleichung:

$$\frac{\operatorname{arc}x\sin^m x\,d\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\operatorname{arc}x\sin^m x\,d\operatorname{arc}x=dy \qquad 34)$$

zu integrieren, so ist das Integral für das zweite Differential leicht dadurch zu finden, dass man

$$\int \sin^m x d \operatorname{arc} x = z \qquad 35)$$

nach §. 23 ermittelt und sodann in der oft benützten Weise Hilfsdifferentiale einführt (vgl. §. 28).

Ich habe in dieser Darstellung (Abs. I—X) nur solche cyklometrische Differentiale in Betracht gezogen, in welchen Funktionen von $\sin x$ vorkommen; es können aber auf ganz analoge Weise auch solche cyklometrische Differentiale integriert werden, die Funktionen von $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ u. s. w. enthalten.