DIE ARITHMETIK

UND DIE

SCHRIFT ÜBER POLYGONALZAHLEN

DES

DIOPHANTUS VON ALEXANDRIA.

ÜBERSETZT UND MIT ANMERKUNGEN BEGLEITET

VON

G. WERTHEIM,

OBERLEHRER AN DER REALSCHULE DER ISRAEL. GEMEINDE ZU FRANKFURT A/M.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1890.

Vorwort.

Was die Griechen in den beiden Zweigen der Mathematik, der Geometrie und der Arithmetik, aus eigener Kraft und unter Zuhilfenahme der Leistungen anderer Völker geschaffen haben, ist uns hauptsächlich in zwei Werken erhalten worden, in den Elementen des Euklid und der Arithmetik des Diophant.

Die Schicksale beider Bücher sind nun ganz verschieden gewesen. Die Elemente Euklids wurden zu allen Zeiten bis in die Gegenwart hinein als Grundlage der Geometrie angesehen und haben in Text-Ausgaben, Übersetzungen und Bearbeitungen die weiteste Verbreitung gefunden.

Ganz anders das Werk des Diophant. Im Vergleich mit dem, was die Geometrie den Griechen zu verdanken hat, sind die Leistungen dieses Volkes in der Algebra nur gering, und so konnten die Grenzen, zu denen die Griechen in dieser Wissenschaft vorgedrungen waren, bedeutend hinausgerückt werden, sobald man wieder sich einer wahrhaft wissenschaftlichen Thätigkeit zuwandte. Das Werk Diophants selbst hätte freilich den Griechen Anregung zu weiterer Forschung geben können; aber diese waren, wie ein neuerer Geschichtsschreiber treffend sagt, am Ende des IV. Jahrhunderts längst nicht mehr das Volk, dem Leben gleichbedeutend war mit Fortschreiten in Kunst und Wissenschaft. Diophants Name war von dem Strahlenglanze algebraischen Ruhmes umflossen, und doch ist kein griechischer Algebraiker nach ihm aufgetreten, der seine Geistesrichtung verfolgt hätte. Man verstand kaum sein Werk, und so erklärt er sich, dafs uns nicht einmal Notizen über sein Leben hinterlassen sind*), und dafs wir

*) Alles, was wir über seine persönlichen Verhältnisse wissen, ist in dem pag. 336 mitgeteilten Epigramm No. 19 enthalten.

von seinen Schriften nur ganz wenige und überdies verstümmelte Exemplare besitzen.

Nur ein Grieche, der gelehrte Mönch Maximus Planudes, der in der ersten Hälfte des XIV. Jahrhunderts, also etwa 1000 Jahre nach Diophant lebte, hat Scholien zu dem Werke seines grofsen Landsmannes geschrieben; er ist aber über die beiden ersten Bücher nicht hinausgegangen. Von diesen Scholien ist bis jetzt nur eine lateinische Übersetzung veröffentlicht, und zwar von Xylander, in dessen weiter unten zu erwähnender Übersetzung des Diophant.

Weit früher als die eigenen Landsleute haben sich die Araber mit Diophant beschäftigt. Besonders zu nennen ist hier Muhammed Abul Wafa, geboren 940 zu Buzjan in Persien, der von 959 bis zu seinem 998 erfolgten Tode in Bagdad lebte und daselbst Mathematik studierte und lehrte. Er verfafste eine Übersetzung (einen Kommentar?) des Diophant, deren Wiederauffindung vom höchsten Interesse sein würde, weil eine — freilich nur geringe — Hoffnung vorhanden ist, dafs Abul Wafa das Werk Diophants noch in unverstümmelter Gestalt vor Augen gehabt hat, dafs also mittels seiner Übersetzung eine Wiederherstellung erfolgen könnte. (Vgl. Nesselmann p. 274 ff., Heath p. 23 ff., Cantor p. 637).*)

Verhältnismäfsig sehr spät ist das Werk Diophants auch

---

*) Die wichtigeren Werke, welche ich bei der Arbeit benutzt habe und öfter zu erwähnen haben werde, sind, abgesehen von den beiden Text-Ausgaben von Bachet und S. Fermat und von Xylanders lateinischer Übersetzung, folgende:

1) Diophantus von Alexandria arithm. Aufgaben nebst dessen Schrift über die Polygon-Zahlen. Aus dem Griechischen übersetzt und mit Anmerkungen begleitet von Otto Schulz. Berlin, 1822.

2) Nesselmann, die Algebra der Griechen. Berlin, 1842.

3) Brassinne, Précis des Oeuvres Math. de P. Fermat et de l'Arithmétique de Diophante. Paris, 1853.

4) H. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. Leipzig, 1874.

5) M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. I. Leipzig, 1880.

6) T. L. Heath, Diophantos of Alexandria; a study in the history of Greek Algebra. Cambridge, 1885.

nach dem Wiederaufleben der Wissenschaften in Europa bekannt geworden. Die erste Erwähnung desselben geschah von dem deutschen Mathematiker Regiomontanus (Johannes Müller, geb. 6. Juni 1436 zu Königsberg in Franken, gestorben am 6. Juli 1476 zu Rom), der 1461 nach Italien ging, um dort Griechisch zu lernen, und der in diesem Lande eine Handschrift der Arithmetik Diophants sah. Ungefähr 100 Jahre später spricht ein anderer deutscher Mathematiker, Joachim Camerarius, von einer in der Vatikanischen Bibliothek zu Rom befindlichen Handschrift des Diophant, und um dieselbe Zeit sagt Jacob Peletarius, daſs einige die Erfindung der Algebra einem gewissen Griechen Diophant zuschreiben.

Während die Existenz einer Handschrift des Diophant in Rom deutschen Mathematikern seit etwa 1470 bekannt war, scheint dieselbe den Italienern selbst unbekannt geblieben zu sein. Erst Rafael Bombelli faſste einige Zeit vor 1572 den Plan, eine Übersetzung zu veröffentlichen. Er legte von den drei Handschriften der Vatikanischen Bibliothek diejenige zu Grunde, in welcher die Arithmetik in sieben Bücher geteilt ist (die übrigen Handschriften enthalten denselben Stoff in sechs Büchern), und hatte im Verein mit einem gewissen Pazzi, Lehrer der Mathematik in Rom, bereits 5 Bücher übersetzt, als beide wegen anderweitiger Beschäftigung die Arbeit liegen lieſsen. Im Jahre 1572 veröffentlichte sodann Bombelli seine Algebra, in welche er die Aufgaben der 4 ersten Bücher Diophants, sowie einige Aufgaben des 5ten Buches aufnahm, so daſs das Verständnis des Diophant dem Bachet, wie dieser in der Vorrede zu seiner Ausgabe selbst erklärt, durch den Gebrauch des Werkes von Bombelli mehr erleichtert wurde, als durch Xylanders Übersetzung.

Die erste, allerdings noch mangelhafte, aber vollständige Übersetzung (in lateinischer Sprache) veröffentlichte 1575 Wilhelm Xylander oder Holzmann aus Augsburg, seit 1558 Professor in Heidelberg, nach einer dem kaiserlichen Gesandten am polnischen Hofe Andreas Dudicius gehörenden Handschrift, welche nach der Ansicht des Herrn P. Tannery mit der jetzt in Wolfenbüttel befindlichen identisch ist. Diese Übersetzung ist ungemein selten geworden. Nesselmann, einer der bedeutendsten Schriftsteller über Diophant, sagt (p. 258), dafs es ihm nicht gelungen sei, ein Exemplar zu Gesichte zu bekommen. Heath (p. 49) preist sein Glück, ein Exemplar in der Bibliothek des Trinity College zu Cambridge gefunden zu haben. Desselben Glückes kann ich mich rühmen: die hiesige Stadtbibliothek, die seit Anfang dieses Jahrhunderts die Anschaffung mathematischer Bücher eingestellt hat, besitzt aus der besseren alten Zeit noch eine Anzahl wertvoller mathematischer Werke, darunter Xylanders Übersetzung des Diophant.

Die erste Text-Ausgabe (mit lateinischer Übersetzung und vielen Zusätzen und Erläuterungen) verdanken wir dem ausdauernden Fleifse des Claude Gaspar Bachet, Sieur de Méziriac, der trotz körperlicher Leiden aller Schwierigkeiten, welche die Arbeit bot, Herr zu werden wufste. Bachet, dem wir auch die Auflösung der Gleichung $ax + by = c$ in ganzen Zahlen x, y verdanken (Aufgaben, welche zu solchen Gleichungen führen, heifsen diophantische, obwohl sich in Diophants Schriften keine einzige der Art vorfindet) veranstaltete seine 1621 in Paris erschienene Ausgabe nach einer Handschrift der königl. Bibliothek zu Paris, welche er mit noch zwei anderen Handschriften verglich. Er ging nur zögernd an die Veröffentlichung seines grofsen Werkes; er wollte erst sehen, welche Aufnahme seine Arbeit finden würde, und deshalb liefs er 1612 als „avant-coureur“ des Diophant seine „Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres“ erscheinen, ein mit grofsem Beifall aufgenommenes Büchlein, welches in den letzten Jahren mehrfach neu aufgelegt worden ist.

Einen neuen, aber mit sehr wenig Sorgfalt hergestellten Abdruck der Bachet'schen Ausgabe veranstaltete S. Fermat (Toulouse, 1670), der Sohn des grofsen Mathematikers P. Fermat, mit den Randbemerkungen dieses letzteren. Seit dieser Zeit ist keine Text-Ausgabe erschienen. Hoffentlich wird Herr P. Tannery in Paris, der sich seit Jahren mit der Revision des Textes beschäftigt, bald in der Lage sein, diese Lücke auszufüllen.

Ins Deutsche wurde Diophants Schrift über Polygonalzahlen von Poselger übersetzt (Leipzig, 1810), die Arithmetik von O. Schulz (Berlin, 1822). Das letztere mit der gröfsten Gewissenhaftigkeit gearbeitete Werk, dem auch Poselgers Übersetzung beigefügt worden ist, ist sprachlich etwas veraltet und überdies selten geworden, so dafs schon aus äufseren Gründen die Veranstaltung einer neuen deutschen Ausgabe für wünschenswert erscheinen mufste. Freilich würde ich damit bis zum Erscheinen der neuen Text-Ausgabe des Herrn P. Tannery gewartet haben, wenn dieser mich nicht selbst versichert hätte, dafs seine Revision des Textes keine erhebliche Änderung des Inhalts ergeben habe.

Von einer zusammenfassenden Wiedergabe der mannigfachen Forschungen der neueren Zeit über Diophant und seine Schriften mufste ich hier absehen. Ich will dem Leser nur das vorführen, was uns von Diophant erhalten ist. Die Untersuchungen über die Endung seines Namens; die Versuche, die man gemacht hat, die Zeit, zu der er lebte, in möglichst enge Grenzen einzuschliefsen; die Mutmafsungen über das Verhältnis der verlorenen zu den erhaltenen Teilen seiner Werke, über den Inhalt der verlorenen Schriften, über die Zeit, zu welcher die Verstümmelung erfolgte; die Erörterungen darüber, ob Diophant selbständig gearbeitet oder vielleicht auf uns unbekanntem Wege in den Besitz der von den Indern entdeckten mathematischen Wahrheiten gelangt sei; alle diese Punkte mufsten hier übergangen werden. Denn der Natur der Sache nach liegt das Hauptinteresse dabei nicht in den immer mehr oder weniger fraglich bleibenden Ergebnissen, sondern in dem Gange der Untersuchung selbst, und daher würde ein Eingehen darauf hier zu weit geführt haben. Ich verweise in dieser Beziehung auf die oben erwähnten Werke, in denen alle diese Fragen mit gröfserer oder geringerer Ausführlichkeit behandelt worden sind.

Was nun meine Arbeit betrifft, so mufste allerdings die korrekte Wiedergabe des Inhalts die Hauptsache sein; ich habe aber, soweit dies mit dem Geiste unserer Sprache verträglich war, eine treue Übersetzung gegeben, da nur bei einer solchen die Eigentümlichkeiten des Originals unverwischt bleiben.

Meine Anmerkungen sind für Leser bestimmt, die sich nur wenig mit Mathematik beschäftigt haben. Ich habe hier und da durch kurze, in den Text eingeschobene und in eckige Klammern gesetzte Bemerkungen das Verständnis zu erleichtern gesucht, auch in vielen Fällen die Aufgabe allgemein gelöst, besonders wenn nur dadurch eine Würdigung der von Diophant gegebenen Determination der Aufgabe zu erzielen war; endlich habe ich bei manchen Aufgaben, deren Lösung mir verwickelt schien, den Gang dieser Lösung kurz und allgemein wiederholt.

Die Zusätze und Bemerkungen P. Fermats, auch die minder wichtigen, habe ich vollständig übersetzt, und ich glaube, dafs diese Zugabe schon aus dem Grunde nicht unwillkommen sein wird, weil die Fermat'sche Ausgabe so überaus selten und Brassinne's französische Übersetzung jener Zusätze eine ziemlich mangelhafte ist. Dafs die von der französischen Regierung 1843 beschlossene Veranstaltung einer neuen Ausgabe von Fermats Werken, zu welcher die Kammer bereits das Geld bewilligt hatte (François Arago, Oeuvres, III, p. 517 ff.), unterblieben ist, dafs wir in Betreff der Varia Opera Mathematica auf den von R. Friedländer u. Sohn in Berlin hergestellten Neudruck angewiesen sind, während die Diophant-Ausgabe mit den zum Teil doch so wertvollen Anmerkungen Fermats ganz zu verschwinden droht, ist höchst bedauerlich, und es wäre wirklich von Interesse, die Gründe zu erfahren, aus denen die bereits bewilligten Gelder wieder in die Staatskasse geflossen sind und der grofse Gedanke, die seltenen oder noch nicht herausgegebenen Werke der berühmten französischen Mathematiker auf Staatskosten zu veröffentlichen, aufgegeben ist.

Die allgemeinen Bemerkungen, die sich beim Studium des Diophant aufdrängen (über negative und irrationale Zahlen, über die Auflösung der gemischt-quadratischen Gleichung, über verschiedene Sätze der Zahlentheorie, u. s. w.) habe ich aus pädagogischen Gründen — der Leser verzeihe den Ausdruck — nicht in einer Einleitung sämtlich nach einander abgehandelt, sondern ich habe über jeden Punkt das Erforderliche an der Stelle gesagt, wo sich zum ersten Male Gelegenheit dazu bot. Ein kurzes Register wird die Auffindung erleichtern.

Im Anhang behandle ich noch kurz die figurierten Zahlen, um dem Leser, welchem der Gegenstand fremd ist, das Studium von Diophants Schrift über die Polygonalzahlen zu erleichtern; ferner gebe ich Lagrange's Beweis des Satzes über die Zerlegbarkeit der Zahlen in vier oder weniger Quadrate. Endlich füge ich noch die arithmetischen Epigramme der griechischen Anthologie und das Rinderproblem des Archimedes bei.

Frankfurt a. M., im September 1890.

G. Wertheim.

Druckfehler.

Seite 234, Zeile 2 von unten lies $\frac{a}{b} \cdot b^2$ statt $\frac{a^2}{b} \cdot b$.

Berichtigung.

Die beiden letzten Zeilen der Seite 136 sind zu ersetzen durch:
Somit ist

$$x = \frac{1}{2z}(a + b - c), \qquad y = \frac{1}{2z}(a - b + c),$$

und man erhält

$$x = \sqrt{\frac{(-a + b + c)(a + b - c)}{2(a - b + c)}}, \quad y = \sqrt{\frac{(-a + b + c)(a - b + c)}{2(a + b - c)}},$$

$$z = \sqrt{\frac{(a - b + c)(a + b - c)}{2(-a + b + c)}}.$$

Einleitung.

Da ich sehe, geehrtester Dionysius, daſs du eifrig bemüht bist, die Lösung arithmetischer Aufgaben zu erlernen, so habe ich versucht, dir das Verfahren wissenschaftlich darzustellen. Ich beginne dabei mit der Betrachtung der Natur und der Beschaffenheit der Zahlen, da hierauf die ganze Sache beruht.

Der Gegenstand wird dir vielleicht schwierig erscheinen, da er dir noch ganz fremd ist, und Anfänger haben ja immer wenig Hoffnung auf Erfolg. Aber bei deinem Fleiſse und durch meine Darstellung wird dir die Sache leicht faſslich werden; denn schnell lernt man, wenn Eifer und Unterweisung zusammenkommen.

I.

Jede Zahl ist, wie du unter anderem weiſst, aus einer gewissen Menge von Einheiten zusammengesetzt; daraus geht hervor, daſs dieselbe unbegrenzt zunehmen kann. Unter den Zahlen befinden sich nun:

Quadratzahlen (τετράγωνος), d. h. Zahlen, welche entstehen, indem man eine Zahl, die dann die Seite des Quadrats genannt wird, mit sich selbst multipliziert; ferner

Kubikzahlen, die entstehen, wenn man eine Quadratzahl mit ihrer Seite multipliziert; weiter

Biquadratzahlen, die aus der Multiplikation von Quadraten mit sich selbst hervorgehen; dann

Quadrato-Kubikzahlen, die man erhält, indem man eine Quadratzahl mit der Kubikzahl derselben Seite multipliziert; endlich

Kubo-Kubikzahlen, die sich durch Multiplication einer Kubikzahl mit sich selbst ergeben.

Indem man nun die Summe oder die Differenz oder das Produkt oder das Verhältnis dieser Zahlen zu einander betrachtet, oder das Verhältnis entweder jeder einzelnen oder einer beliebigen Anzahl derselben zu ihren Seiten ins Auge faſst, lassen sich eine Menge arithmetischer Aufgaben bilden, die jedoch auf dem Wege, den ich dir zeigen will, ihre Lösung finden.

II.

Es ist festgesetzt und gebräuchlich geworden, daſs jede dieser Zahlen, nachdem sie eine kürzere Benennung erhalten hat, als Element der arithmetischen Betrachtung diene*).

Das Quadrat (*δύναμις*) der Unbekannten wird durch ein δ mit [rechts oben] dazu gesetztem $\tilde{\upsilon}$, also durch $\delta^{\tilde{\upsilon}}$ bezeichnet. Durch Multiplikation des Quadrats mit seiner Seite entsteht der Kubus (*κύβος*), der durch ein $\varkappa$ mit dazu gesetztem $\tilde{\upsilon}$, also durch $\varkappa^{\tilde{\upsilon}}$ bezeichnet wird. Wird das Quadrat mit sich selbst multipliziert, so entsteht das Biquadrat (*δυναμοδύναμις*), welches durch $\delta\delta$ mit beigefügtem $\tilde{\upsilon}$, also durch $\delta\delta^{\tilde{\upsilon}}$ bezeichnet wird. Durch Multiplikation eines Quadrats mit dem Kubus derselben Seite entsteht der Quadrato-Kubus (*δυναμόκυβος*), dessen Zeichen $\delta\varkappa$ mit einem beigefügten $\tilde{\upsilon}$, also $\delta\varkappa^{\tilde{\upsilon}}$ ist. Endlich erhält man durch Multiplikation des Kubus mit sich selbst den Kubo-Kubus (*κυβόκυβος*), der das Zeichen $\varkappa\varkappa$ mit beigefügtem $\tilde{\upsilon}$, also $\varkappa\varkappa^{\tilde{\upsilon}}$ hat.

Eine Zahl, welche keine dieser Eigenschaften besitzt, sondern bloſs eine unbekannte Anzahl von Einheiten enthält, wird einfach eine Unbekannte (*ἄλογος ἀριθμός*) genannt und mit ϛ̀ bezeichnet**).

Auch für die bestimmten Zahlen giebt es ein unveränderliches Zeichen, das von dem Ausdrucke für die Einheit (*μονάς*) hergenommen ist, nämlich μ mit beigefügtem $\tilde{o}$, also $\mu^{\tilde{o}}$.

*) Dieser Satz ist auffallender Weise von Bachet weggelassen worden. Xylanders Übersetzung enthält ihn. Der Text lautet nach der Wolfenbütteler Handschrift: *Ἐδοκιμάσθη οὖν ἕκαστος τούτων τῶν ἀριθμῶν, συντομωτέραν ἐπωνυμίαν κτησάμενος, στοιχεῖον τῆς ἀριθμητικῆς θεωρίας εἶναι.*

**) Über die Erklärung dieses Zeichens lese man Heath, p. 57 ff. nach.

III.

Wie man die bestimmten Brüche nach ihren Nennern benennt (Drittel nach der Zahl 3, Viertel nach 4), so sollen auch die Brüche, welche die oben definierten allgemeinen Ausdrücke zu Nennern haben, nach diesen Ausdrücken benannt werden. Ein Bruch, dessen Nenner die unbekannte Zahl (*ἀριθμός*) selbst ist, soll ein einfacher Bruch (*ἀριθμοστόν*) heifsen. Ist der Nenner das Quadrat der Unbekannten, so nennen wir den Bruch einen quadratischen (*δυναμοστόν*); ebenso wird ein Bruch beziehungsweise ein kubischer (*κυβοστόν*), ein biquadratischer (*δυναμοδυναμοστόν*), ein quadrato-kubischer (*δυναμοκυβοστόν*) oder ein kubo-kubischer (*κυβοκυβοστόν*) genannt, je nachdem sein Nenner den Kubus, das Biquadrat, den Quadrato-Kubus oder den Kubo-Kubus der Unbekannten enthält.

Jeder solche Bruch erhält das Zeichen der ihm entsprechenden allgemeinen Zahl, und zur Unterscheidung wird diesem Zeichen ein Strich angefügt*).

---

*) Die numerischen Brüche bezeichnet Diophant in der Weise, dafs er neben den Zähler den Nenner so schreibt, wie wir einen Exponenten schreiben würden, und über den letzten Buchstaben des Nenners einen Circumflex setzt.

$$\text{Beispiele:}\quad \frac{8}{12} = \bar{\eta}^{\iota\tilde{\beta}}, \qquad \frac{7}{9} = \bar{\zeta}^{\tilde{\vartheta}}, \qquad \frac{289}{64} = \sigma\pi\overline{\vartheta}^{\xi\tilde{\delta}},$$

$$30\,\tfrac{1}{4} = \mu^{\tilde{o}}\bar{\lambda}\cdot\bar{\alpha}^{\tilde{\delta}}.$$

Sind Zähler und Nenner grofse Zahlen, so wird zuweilen hinter den Zähler *ἐν μορίῳ* oder *μορίου* und dann der Nenner geschrieben,

$$\text{z. B.}\quad \frac{1\,507\,984}{262\,144} - x^2 = \mu^{\tilde{o}}\varrho\bar{\nu}\,.\,{}_{,}\xi\text{ϡ}\pi\bar{\delta}\ \ \mu o\varrho\acute{\iota}o\upsilon\ \ \varkappa\bar{\text{ϛ}}.\ \ {}_{,}\beta\varrho\mu\bar{\delta}$$

$$\lambda\varepsilon\acute{\iota}\psi\varepsilon\iota\ \ \delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\varepsilon\omega\varsigma\ \ \bar{\alpha}.$$

Bemerkenswert ist die Schreibweise der aufsteigenden Kettenbrüche,

$$\text{z. B.}\quad \frac{502\,\frac{1}{4}}{77} = \varphi\bar{\beta}^{o\tilde{\zeta}}\,.\,\bar{\alpha}^{\tilde{\delta}}.$$

Von den algebraischen Brüchen sind die einfachsten diejenigen, in welchen der Nenner eine Potenz der Unbekannten ist. Bei diesen werden die Nenner $\overline{\alpha\varsigma}$ oder ϛοῦ α̃ (Endung des

IV.

Nachdem ich dir die Benennung der einzelnen Zahlen aus einander gesetzt habe, wende ich mich zu den Multiplikationen derselben; diese werden dir um so leichter verständlich sein, als sie eben durch die gewählte Benennung schon im voraus deutlich gemacht sind.

Die Unbekannte giebt, mit sich selbst multipliziert, das Quadrat; mit dem Quadrate multipliziert, den Kubus; mit dem Kubus multipliziert, das Biquadrat; mit dem Biquadrat multipliziert, den Quadrato-Kubus; mit dem Quadrato-Kubus multipliziert, den Kubo-Kubus.

Das Quadrat der Unbekannten giebt, mit sich selbst multipliziert, das Biquadrat; mit dem Kubus multipliziert, den Quadrato-Kubus; mit dem Biquadrat multipliziert, den Kubo-Kubus.

Endlich giebt der Kubus der Unbekannten, mit sich selbst multipliziert, den Kubo-Kubus.

V.

Jeder dieser allgemeinen Zahlenausdrücke liefert, mit einem ihm gleichnamigen Bruche multipliziert, eine bestimmte Zahl.

Genitivs von *ἀριθμοστόν*), $\delta\tilde{\upsilon}\,.\,\tilde{\alpha}$ u. s. w. so geschrieben, als wären es bestimmte Zahlen.

Beispiele: $\frac{25}{x} = \varkappa\bar{\varepsilon}^{\varsigma o \tilde{\upsilon}\;\tilde{\alpha}}$, $\quad 15 + \frac{300}{x^2} = \mu^{\tilde{o}}\,\iota\bar{\varepsilon}\ \varkappa\alpha\grave{\iota}\ \bar{\tau}^{\delta\tilde{\upsilon}.\tilde{\alpha}}$,

$$\frac{9-x}{x} = \mu^{\tilde{o}}\,\bar{\vartheta}\,\pitchfork\,\varsigma^{o\tilde{\upsilon}}\,\bar{\alpha}^{\varsigma o\tilde{\upsilon}.\tilde{\alpha}}.$$

Ist der Zähler schon ein Bruch, so werden die Ausdrücke *ἀριθμοστόν* u. s. w. in der Regel unverkürzt geschrieben,

$$\text{z. B.}\quad \frac{6\frac{1}{4}}{x^2} + 6\tfrac{1}{4}x^2 - 25 = \delta\upsilon\nu\alpha\mu o\sigma\tau\grave{o}\nu\ \bar{\varsigma}\,.\,\bar{\alpha}^{\tilde{\delta}}$$

$$\delta^{\tilde{\upsilon}}\bar{\varsigma}\,.\,\bar{\alpha}^{\tilde{\delta}}\ \lambda\varepsilon\acute{\iota}\psi\varepsilon\iota\ \mu^{\tilde{o}}\varkappa\bar{\varepsilon}.$$

Wenn der Nenner ein zusammengesetzter Ausdruck ist, so wird wieder *ἐν μορίῳ* oder *μορίου* zwischen Zähler und Nenner gesetzt,

$$\text{z. B.}\quad \frac{2x^3+3x^2+x}{x^2+2x+1} = \varkappa^{\tilde{\upsilon}}\bar{\beta}.\ \delta^{\tilde{\upsilon}}\bar{\gamma}\,.\,\varsigma^{o\tilde{\upsilon}}\bar{\alpha}\ \grave{\varepsilon}\nu\ \mu o\varrho\acute{\iota}\omega\ \delta^{\tilde{\upsilon}}\bar{\alpha}\,.\,\varsigma\tilde{\varsigma}\bar{\beta}\,.\,\mu^{o}\bar{\alpha}.$$

VI.

Da jede bestimmte Zahl unveränderlich ist und immer bleibt, so giebt auch ihre Multiplikation mit irgend einem allgemeinen Ausdrucke wieder einen Ausdruck derselben Art.

VII.

Wenn Brüche, deren Nenner allgemeine Ausdrücke sind, mit einander multipliziert werden, so entsteht ein Bruch, dessen Nenner das Produkt der Nenner dieser allgemeinen Ausdrücke ist. So liefert ein einfacher Bruch, mit einem einfachen multipliziert, einen quadratischen; mit einem quadratischen multipliziert, einen kubischen; mit einem kubischen multipliziert, einen biquadratischen; mit einem biquadratischen multipliziert, einen quadrato-kubischen; mit einem quadrato-kubischen multipliziert, einen kubo-kubischen; so dafs also der Nenner des Produkts immer das Produkt der Nenner ist.

Ebenso bringt ein quadratischer Bruch, mit einem einfachen multipliziert, einen kubischen hervor; mit einem quadratischen multipliziert, einen biquadratischen; mit einem kubischen multipliziert, einen quadrato-kubischen; mit einem biquadratischen multipliziert, einen kubo-kubischen.

Ein kubischer Bruch liefert, mit einem einfachen multipliziert, einen biquadratischen; mit einem quadratischen multipliziert, einen quadrato-kubischen; mit einem kubischen multipliziert, einen kubo-kubischen.

Ein biquadratischer Bruch giebt, mit einem einfachen Bruche multipliziert, einen quadrato-kubischen; mit einem quadratischen Bruche multipliziert, einen kubo-kubischen.

Endlich liefert ein quadrato-kubischer Bruch, mit einem einfachen multipliziert, einen kubo-kubischen.

VIII.

Weiter liefert ein einfacher Bruch, mit dem Quadrat multipliziert, die unbekannte Zahl selbst; mit dem Kubus multipliziert, das Quadrat; mit dem Biquadrat multipliziert, den Kubus; mit dem Quadrato-Kubus multipliziert, das Biquadrat; mit dem Kubo-Kubus multipliziert, den Quadrato-Kubus.

Ein quadratischer Bruch liefert, mit der Unbekannten multipliziert, einen einfachen Bruch; mit dem Kubus multipliziert, die Unbekannte; mit dem Biquadrat multipliziert, das Quadrat; mit dem Quadrato-Kubus multipliziert, den Kubus; mit dem Kubo-Kubus multipliziert, das Biquadrat.

Ein kubischer Bruch liefert, mit der Unbekannten multipliziert, einen quadratischen Bruch; mit dem Quadrat multipliziert, einen einfachen Bruch; mit dem Biquadrat multipliziert, die Unbekannte; mit dem Quadrato-Kubus multipliziert, das Quadrat; mit dem Kubo-Kubus multipliziert, den Kubus.

Ein biquadratischer Bruch liefert, mit der Unbekannten multipliziert, einen kubischen Bruch; mit dem Quadrat multipliziert, einen quadratischen Bruch; mit dem Kubus multipliziert, einen einfachen Bruch; mit dem Quadrato-Kubus multipliziert, die Unbekannte; mit dem Kubo-Kubus multipliziert, das Quadrat.

Ein quadrato-kubischer Bruch liefert, mit der Unbekannten multipliziert, einen biquadratischen Bruch; mit dem Quadrat multipliziert, einen kubischen Bruch; mit dem Kubus multipliziert, einen quadratischen Bruch; mit dem Biquadrat multipliziert, einen einfachen Bruch; mit dem Kubo-Kubus multipliziert, die Unbekannte.

Ein kubo-kubischer Bruch endlich liefert, mit der Unbekannten multipliziert, einen quadrato-kubischen Bruch; mit dem Quadrat multipliziert, einen biquadratischen Bruch; mit dem Kubus multipliziert, einen kubischen Bruch; mit dem Biquadrat multipliziert, einen quadratischen Bruch; mit dem Quadrato-Kubus multipliziert, einen einfachen Bruch.

IX.

Eine abzuziehende Zahl (*λεῖψις*), mit einer abzuziehenden multipliziert, giebt eine hinzuzufügende (*ὕπαρξις*); eine abzuziehende Zahl dagegen, mit einer hinzuzufügenden multipliziert, giebt eine abzuziehende Zahl. Das Zeichen der Subtraktion ist ⋔ (ein verstümmeltes und umgekehrtes *ψ*).*)

*) Dies ist das einzige Operationszeichen, welches Diophant anwendet. Zahlen, die addiert werden sollen, stellt er einfach neben einander; Multiplikation und die übrigen Rechnungsarten werden

X.

Nachdem ich dir die Multiplikation der allgemeinen Ausdrücke (εἶδος) erläutert habe, werden dir die Divisionen derselben einleuchtend sein. Gut ist es nun, ehe man weiter geht, sich tüchtig in der Addition, Subtraktion und Multiplikation dieser Ausdrücke zu üben. Besonders mufs man es verstehen, Ausdrücke von hinzuzufügenden und abzuziehenden Gliedern, die ungleiche Koeffizienten haben, zu anderen Ausdrücken, die entweder nur hinzuzufügende oder teils hinzuzufügende teils abzuziehende Glieder enthalten, zu addieren. Ebenso mufs man von einem Ausdruck mit hinzuzufügenden und abzuziehenden Gliedern andere Ausdrücke subtrahieren können, die entweder nur hinzuzufügende, oder teils hinzuzufügende teils abzuziehende Glieder haben.

XI.

Wenn nun bei irgend einer Aufgabe dieselben allgemeinen Ausdrücke auf beiden Seiten der Gleichung, aber mit ungleichen Koeffizienten stehen, so mufs man Gleiches von Gleichem subtrahieren, bis zuletzt ein eingliedriger Ausdruck einem andern gleichgesetzt ist. Sollten irgend welche allgemeinen Ausdrücke auf einer Seite oder auf beiden Seiten als abzuziehende Zahlen stehen, so mufs man dieselben auf beiden Seiten addieren, so dafs auf jeder Seite nur hinzuzufügende Zahlen sich befinden. Darauf hat man wieder Gleiches von Gleichem zu subtrahieren,

---

durch Worte ausgedrückt. Um allzu grofse Weitläufigkeiten im Ausdruck zu vermeiden, ist in der Übersetzung das Zeichen + überall, das Zeichen der Multiplikation · hin und wieder angewandt worden. Was die Form und Entstehung des Zeichens ⋔ betrifft, so sei auf Heath, p. 71 ff. verwiesen. Übrigens sei hier schon bemerkt, dafs Diophant negative Zahlen als solche nicht kennt. Das Zeichen ⋔, für welches in der Übersetzung — gesetzt ist, ist ihm nichts anderes als ein Subtraktionszeichen. Bei zusammengesetzten Ausdrücken stellt er die positiven Glieder voran und läfst dann alle negativen folgen; vor das erste der letzteren schreibt er das Zeichen ⋔. Ein allein stehendes subtraktives Glied kommt nirgend vor. Aus diesem Grunde habe ich in der Übersetzung die Ausdrücke positiv und negativ vermieden und dafür — der Sache entsprechend — hinzuzufügend und abzuziehend gesagt.

bis auf jeder Seite nur ein Ausdruck übrig ist. In dieser Weise wird so lange mit dem Ansatze der Aufgaben verfahren, bis wo möglich auf jeder Seite nur ein Glied sich befindet. Später werde ich dir auch noch zeigen, wie die Aufgabe gelöst wird, wenn zuletzt ein zweigliedriger Ausdruck einem eingliedrigen gleich ist*).

Jetzt wollen wir uns zu den Aufgaben selbst wenden, zu deren Lösung die Ergebnisse, welche die Betrachtung der allgemeinen Zahlenausdrücke geliefert hat, einen breiten Weg geschaffen haben. Da es aber sehr viele und sehr grofse Zahlen giebt, und sie daher nur schwer von den Lernenden erfafst und im Gedächtnis behalten werden, so habe ich es für gut befunden, alles, was eine solche Ausscheidung gestattet, und besonders das zu den Elementen Gehörende zuerst zu behandeln und dabei, wie es sich gebührt, vom Einfacheren zum Schwierigeren überzugehen. Auf diese Weise wird alles dem Anfänger leicht zugänglich werden, und das Verfahren wird sich seinem Gedächtnisse einprägen.

Ich werde deshalb den Gegenstand in 13 Büchern behandeln.

---

*) Damit ist unzweifelhaft die Auflösung der gemischt-quadratischen Gleichung gemeint, die sich übrigens in den uns erhaltenen Schriften Diophants nicht vorfindet.

I. Buch.

1. Aufgabe. Eine gegebene Zahl in zwei Zahlen von gegebener Differenz zu teilen.

Auflösung. Die gegebene Zahl sei 100, die Differenz der zu ermittelnden Zahlen 40. Es werde die kleinere Zahl gleich x gesetzt; dann wird die gröfsere $x + 40$ sein; beide zusammen werden also $2x + 40$ betragen. Da nun ihre Summe gleich 100 sein soll, so wird

$$2x + 40 =^{*)} 100$$

sein. Subtrahiert man jetzt Gleiches von Gleichem, nämlich 40 sowohl von $2x + 40$, wie von 100, so bleibt

$$2x = 60,$$

und somit wird

$$x = 30.$$

Wenn man diesen Wert in die Ausdrücke für die gesuchten Zahlen einsetzt, so ergiebt sich für die kleinere Zahl 30, für die gröfsere 70, und durch diese Werte wird offenbar der Aufgabe genügt.

---

2. Aufgabe. Eine gegebene Zahl in zwei Zahlen zu teilen, die in einem gegebenen Verhältnis**) zu einander stehen.

Auflösung. Es werde verlangt, die Zahl 60 in zwei Zahlen zu teilen, von denen die eine das Dreifache der anderen ist.

---

*) Die beiden Seiten einer Gleichung werden bei Diophant durch ἴσος (resp. ἴσα, ἴσοι) mit der zugehörigen Form von εἶναι oder abgekürzt durch ἰ (der Spiritus zur Unterscheidung von $\iota = 10$) verbunden.

**) Dies heifst bei Diophant überall, dafs die eine Zahl ein Vielfaches der andern sein soll.

Wird die kleinere Zahl gleich x gesetzt, so wird die gröſsere $3x$ sein, denn bei dieser Annahme ist sie das Dreifache der kleineren. Es erübrigt noch, daſs die Summe beider Zahlen gleich 60 sei. Diese Summe ist aber $4x$. Daher ist

$$4x = 60,$$

folglich

$$x = 15.$$

Die kleinere Zahl wird somit 15, die gröſsere 45 sein.

---

3. Aufgabe. Eine gegebene Zahl so in zwei Zahlen zu teilen, daſs die eine um eine gegebene Zahl gröſser sei als ein vorgeschriebenes Vielfache der anderen.

Auflösung. Es sei aufgegeben, 80 so in zwei Zahlen zu teilen, daſs die gröſsere um 4 gröſser sei als das Dreifache der kleineren.

Wird die kleinere Zahl gleich x gesetzt, so ist die gröſsere $3x + 4$; denn dann beträgt die gröſsere 4 mehr als das Dreifache der kleineren. Es erübrigt noch, daſs die Summe beider Zahlen gleich 80 sei. Die Summe beider ist aber $4x + 4$; es muſs also

$$4x + 4 = 80$$

sein. Wird jetzt Gleiches von Gleichem subtrahiert, so bleibt

$$4x = 76,$$

und man erhält

$$x = 19.$$

Wird dieser Wert in die Ausdrücke für die gesuchten Zahlen eingesetzt, so erhält man für die kleinere Zahl 19, für die gröſsere 61. Um diese letztere zu finden, muſs man zum Dreifachen der kleineren Zahl die 4 Einheiten addieren, welche wir von 80 subtrahiert hatten, um den Wert von x zu ermitteln. Diese vier Einheiten sind der gröſseren Zahl zuzuschreiben, wenn die Gröſse von x bestimmt ist.

---

4. Aufgabe. Zwei Zahlen zu ermitteln, die in einem gegebenen Verhältnis stehen und zugleich eine gegebene Differenz haben.

Auflösung. Es wird verlangt, daſs die gröſsere Zahl das

Fünffache der kleineren sei, und daſs der Unterschied beider Zahlen 20 betrage.

Wird die kleinere Zahl gleich x gesetzt, so wird die gröſsere gleich $5x$ sein. Es erübrigt noch, daſs die Differenz zwischen $5x$ und x gleich 20 sei. Diese Differenz ist aber $4x$; also ist

$$4x = 20,$$

und daraus folgt

$$x = 5.$$

Es ergiebt sich also für die kleinere Zahl 5, für die gröſsere 25; bei dieser Annahme ist in der That die gröſsere Zahl das Fünffache der kleineren und die Differenz beider Zahlen gleich 20.

---

5. Aufgabe. Eine vorgelegte Zahl so in zwei Zahlen zu teilen, daſs ein vorgeschriebener Teil der ersteren, addiert zu einem gleichfalls vorgeschriebenen, aber anderen Teile der zweiten Zahl, eine gegebene Summe liefere.

Die gegebene Summe muſs jedoch zwischen den beiden Zahlen liegen, die entstehen, wenn man von der vorgelegten Zahl die beiden vorgeschriebenen (nicht identischen) Teile nimmt*).

Auflösung. Es sei aufgegeben, die Zahl 100 so in zwei Zahlen zu teilen, daſs ein Drittel der ersteren, vermehrt um ein Fünftel der zweiten Zahl, gleich 30 sei.

Ich setze ein Fünftel der zweiten Zahl gleich x, so wird

---

*) Diese Bedingung muſs Diophant stellen, damit negative Zahlen, die für ihn nicht existieren, vermieden werden. Stellt man nämlich die allgemeine Aufgabe: „Eine Zahl a so in zwei Zahlen zu zerlegen, daſs der m^{te} Teil der ersteren, vermehrt um den n^{ten} Teil der zweiten, die Summe b gebe", so hat man die Gleichung

$$\frac{x}{m} + \frac{a-x}{n} = b$$

zu lösen und erhält

$$x = \frac{m}{n-m}(bn - a), \quad a - x = \frac{n}{n-m}(a - bm);$$

damit nun sowohl x wie $a - x$ positiv sei, muſs offenbar $bn \gtrless a$ und zugleich $bm \lessgtr a$ sein, d. h. b muſs zwischen $\frac{a}{m}$ und $\frac{a}{n}$ liegen.

diese selbst $5x$ sein. Das Drittel der ersteren Zahl ist nun $30 - x$, diese Zahl selbst also $90 - 3x$. Es erübrigt noch, dafs die Summe beider Zahlen 100 werde. Beide Zahlen geben aber zusammen $2x + 90$. Es ist also

$$2x + 90 = 100.$$

Subtrahiert man Gleiches von Gleichem, so bleibt

$$2x = 10;$$

somit ist

$$x = 5.$$

Nun hatten wir ein Fünftel der zweiten Zahl gleich x gesetzt, und da $x = 5$ ist, so ist die zweite Zahl 25.

Ferner war ein Drittel der ersteren Zahl $30 - x$, d. i. 25, folglich ist die erstere Zahl selbst 75, so dafs also in der That ein Drittel der ersten und ein Fünftel der zweiten Zahl die vorgeschriebene Summe 30 haben.

---

6. Aufgabe. Eine vorgelegte Zahl so in zwei Zahlen zu teilen, dafs ein vorgeschriebener Teil der ersteren einen vorgeschriebenen Teil der zweiten um eine gegebene Zahl übertreffe.

Diese letztere Zahl mufs jedoch kleiner sein, als die Zahl, welche man erhält, wenn man die zu teilende gegebene Zahl durch den Nenner des gröfseren Bruches dividiert*).

Auflösung. Es sei aufgegeben, die Zahl 100 so in zwei Zahlen zu zerlegen, dafs ein Viertel der ersteren um 20 gröfser sei, als ein Sechstel der zweiten.

---

*) Auch diese Bedingung schliefst negative Antworten aus. Die allgemeine Aufgabe führt nämlich zu der Gleichung

$$\frac{x}{m} - \frac{a-x}{n} = b;$$

diese liefert für die gesuchten Zahlen die Werte

$$x = \frac{m(a + bn)}{m + n}, \quad a - x = \frac{n(a - bm)}{m + n},$$

und damit der letztere positiv sei, mufs $bm < a$, d. i. $b < \frac{a}{m}$ vorausgesetzt werden.

Ich setze ein Sechstel der zweiten Zahl gleich x, so ist diese selbst $6x$. Der vierte Teil der ersten Zahl wird dann $x + 20$, sie selbst folglich $4x + 80$ sein. Es sollen nun noch beide Zahlen zur Summe 100 haben. Ihre Summe ist aber $10x + 80$. Somit ist

$$10x + 80 = 100.$$

Subtrahiert man Gleiches von Gleichem, so bleibt

$$10x = 20,$$

und daraus folgt

$$x = 2.$$

Nun hatte ich ein Sechstel der zweiten Zahl gleich x gesetzt; die zweite Zahl ist daher 12. Ferner ist ein Viertel der ersten Zahl $x + 20$, d. i. 22, die erste Zahl selbst also 88.

Für diese Werte ist in der That ein Viertel der ersten Zahl um 20 gröfser als ein Sechstel der zweiten, und zugleich haben beide die vorgelegte Zahl zur Summe.

---

7. Aufgabe. Es sollen von derselben Zahl zwei gegebene Zahlen subtrahiert werden, so dafs die Reste in einem gegebenen Verhältnis zu einander stehen.

Auflösung. Es wird verlangt, dafs man von derselben Zahl 100 und 20 subtrahiere, und dafs der gröfsere Rest das Dreifache des kleineren sei.

Wir setzen die gesuchte Zahl gleich x. Wird von derselben 100 subtrahiert, so bleibt $x - 100$, und wird von derselben 20 subtrahiert, so bleibt $x - 20$. Nun soll der gröfsere Rest das Dreifache des kleineren, folglich das Dreifache des kleineren gleich dem gröfseren sein. Wenn man aber den kleineren Rest 3mal nimmt, so erhält man $3x - 300$. Also soll

$$3x - 300 = x - 20$$

sein. Wird die [gröfsere] abzuziehende Zahl beiderseits addiert, so erhält man

$$3x = x + 280,$$

und wenn man Gleiches von Gleichem subtrahiert,

$$2x = 280;$$

also ist

$$x = 140.$$

Nun hatte ich die gesuchte Zahl gleich x gesetzt. Diese ist somit 140. Wird davon 100 subtrahiert, so bleibt 40; subtrahiert man aber 20, so bleibt 120, und der gröſsere Rest ist das Dreifache des kleineren.

---

8. Aufgabe. Zu zwei gegebenen Zahlen eine und dieselbe Zahl zu addieren, so daſs die erhaltenen Summen in einem gegebenen Verhältnis zu einander stehen.

Es muſs jedoch dieses Verhältnis kleiner sein als dasjenige, in welchem die gröſsere der beiden gegebenen Zahlen zur kleineren steht*).

Auflösung. Es soll zu 100 und zu 20 eine und dieselbe Zahl addiert werden, die so gewählt ist, daſs die erhaltene gröſsere Summe das Dreifache der kleineren sei.

Wir setzen die Zahl, welche zu jeder der gegebenen Zahlen addiert werden soll, gleich x; wird dieselbe zu 100 addiert, so erhält man $x + 100$; wird dieselbe zu 20 addiert, so erhält man $x + 20$. Nun soll die gröſsere Zahl das Dreifache der kleineren, also das Dreifache der kleineren gleich der gröſseren sein. Da das Dreifache der kleineren Zahl $3x + 60$ ist, so wird

$$3x + 60 = x + 100$$

sein. Wird jetzt Gleiches von Gleichem subtrahiert, so bleibt

$$2x = 40,$$

also wird

$$x = 20.$$

Nun hatte ich die Zahl, welche zu jeder der gegebenen addiert werden muſs, gleich x gesetzt. Für diese Zahl erhalten wir somit 20. Wenn man 20 zu 100 addiert, so ergiebt sich als

---

*) Sind a, b die gegebenen Zahlen, m die gegebene Verhältniszahl und $a > b$, so liefert die Gleichung $\frac{a + x}{b + x} = m$ für die gesuchte Zahl x den Wert $x = \frac{a - bm}{m - 1}$, und damit dieser positiv sei, muſs $bm < a$, also $m < \frac{a}{b}$ angenommen werden.

Summe 120; wird 20 zu 20 addiert, so erhält man 40, und die gröſsere dieser beiden Summen ist wirklich das Dreifache der kleineren.

---

9. **Aufgabe.** Von zwei gegebenen Zahlen eine und dieselbe Zahl zu subtrahieren, so daſs die erhaltenen Reste in einem gegebenen Verhältnis zu einander stehen.

Es muſs jedoch dieses Verhältnis gröſser sein als das Verhältnis, in welchem die gröſsere der beiden gegebenen Zahlen zur kleineren steht*).

Auflösung. Es soll von 20 und von 100 eine und dieselbe Zahl subtrahiert werden, die so gewählt ist, daſs der gröſsere Rest das Sechsfache des kleineren sei.

Die Zahl, welche von jeder der beiden gegebenen Zahlen subtrahiert wird, setzen wir gleich x. Wird diese Zahl von 100 subtrahiert, so bleibt $100 - x$; wird sie von 20 subtrahiert, so bleibt $20 - x$. Nun soll die gröſsere Differenz das Sechsfache der kleineren, also das Sechsfache der kleineren gleich der gröſseren sein. Das Sechsfache der kleineren ist aber $120 - 6x$; also ergiebt sich

$$120 - 6x = 100 - x.$$

Wird die [gröſsere] abzuziehende Gröſse beiderseits addiert und sodann Gleiches von Gleichem subtrahiert, so erhält man

$$5x = 20;$$

also ist

$$x = 4.$$

Nun hatte ich die Zahl, welche von jeder der beiden gegebenen Zahlen subtrahiert werden soll, gleich x gesetzt. Für diese Zahl finden wir somit den Wert 4. Wird 4 von 100 subtrahiert, so bleibt 96; wird 4 von 20 subtrahiert, so bleibt 16, und der gröſsere dieser beiden Reste ist wirklich das Sechsfache des kleineren.

---

*) Aus der Gleichung $\frac{a-x}{b-x} = m$ folgt nämlich $x = \frac{bm - a}{m - 1}$, und diese Zahl ist nur dann positiv, wenn $bm > a$, also $m > \frac{a}{b}$ ist.

10. Aufgabe. Es sind zwei Zahlen gegeben. Man soll eine und dieselbe Zahl zu der kleineren addieren und von der gröſseren subtrahieren, und die erhaltene Summe soll zur erhaltenen Differenz in einem gegebenen Verhältnis stehen.

Auflösung. Es soll eine und dieselbe Zahl zu 20 addiert und von 100 subtrahiert werden, und die entstandene Summe soll das Vierfache der erhaltenen Differenz sein.

Wir setzen die gesuchte Zahl gleich x. Wird dieselbe zu 20 addiert, so erhält man $x + 20$; wird sie von 100 subtrahiert, so bleibt $100 - x$. Es soll nun die gröſsere Zahl [die Summe] das Vierfache der kleineren [der Differenz], also das Vierfache der kleineren gleich der gröſseren sein. Wird die kleinere Zahl 4mal genommen, so ergiebt sich $400 - 4x$; folglich wird

$$400 - 4x = x + 20.$$

Wird die abzuziehende Zahl beiderseits addiert und Gleiches von Gleichem subtrahiert, so erhält man

$$5x = 380$$

und daraus

$$x = 76.$$

Nun hatte ich x gleich der Zahl gesetzt, die zu der einen Zahl addiert und von der anderen subtrahiert werden sollte. Für diese Zahl finden wir also den Wert 76. Wenn wir 76 zu 20 addieren, so erhalten wir 96; wenn weiter 76 von 100 subtrahiert wird, so bleibt 24, und in der That ist die gröſsere Zahl [96] das Vierfache der kleineren [24].

---

11. Aufgabe. Eine Zahl von der Beschaffenheit zu suchen, daſs, wenn man die eine von zwei gegebenen Zahlen zu derselben addiert, die andere von derselben subtrahiert, die erhaltenen Resultate in einem gegebenen Verhältnis zu einander stehen.

Auflösung. Es wird verlangt, 20 zu einer Zahl zu addieren und von derselben Zahl 100 zu subtrahieren, und es soll die gröſsere der so entstandenen Zahlen das Dreifache der kleineren sein.

Die gesuchte Zahl sei x. Wird 20 zu derselben addiert, so erhält man $x + 20$; wird 100 von derselben subtrahiert, so bleibt $x - 100$. Es soll nun die gröfsere Zahl [die Summe] das Dreifache der kleineren [der Differenz], also das Dreifache der kleineren gleich der gröfseren sein. Wird die kleinere Zahl mit 3 multipliziert, so ergiebt sich $3x - 300$. Folglich ist

$$3x - 300 = x + 20.$$

Wird die abzuziehende Zahl beiderseits addiert und dann Gleiches von Gleichem subtrahiert, so erhalten wir

$$2x = 320,$$

und daraus folgt

$$x = 160.$$

Es wird dann die gröfsere Zahl 180, die kleinere 60 sein, und die gröfsere dieser Zahlen ist wirklich das Dreifache der kleineren.

---

12. Aufgabe. Eine gegebene Zahl zweimal in je zwei Zahlen zu teilen, so dafs der eine Teil der ersteren Zerlegung zu dem einen Teil der zweiten in einem gegebenen Verhältnisse stehe, und dafs ferner der andere Teil der zweiten Zerlegung zum anderen Teil der ersteren gleichfalls ein gegebenes Verhältnis habe.

Auflösung. Es sei aufgegeben, die Zahl 100 zweimal in je zwei Zahlen von solcher Beschaffenheit zu teilen, dafs der gröfsere Teil der ersteren Zerlegung doppelt so grofs sei wie der kleinere Teil der zweiten, und dafs zugleich der gröfsere Teil der zweiten Zerlegung das Dreifache des kleineren Teils der ersten sei.

Wir setzen den kleineren Teil der zweiten Zerlegung gleich x, so ist der gröfsere Teil der ersten Zerlegung $2x$, also der kleinere Teil der ersten Zerlegung $100 - 2x$. Da aber das Dreifache dieses Teils gleich dem gröfseren Teil der zweiten Zerlegung sein soll, so ist letzterer gleich $300 - 6x$. Jetzt sollen noch die Teile der zweiten Zerlegung zusammen 100 geben. Ihre Summe ist aber $300 - 5x$; also erhalten wir

$$300 - 5x = 100,$$

und daraus folgt

$$x = 40.$$

Nun hatte ich den gröſseren Teil der ersten Zerlegung gleich $2x$ gesetzt; dieser wird daher 80 sein. Der kleinere Teil derselben Zerlegung war $100 - 2x$, und das wird 20 sein.

Ferner hatten wir für den gröſseren Teil der zweiten Zerlegung $300 - 6x$; das wird also 60 sein. Der kleinere Teil der zweiten Zerlegung war x; das ist 40.

Durch diese Werte ist die Aufgabe offenbar gelöst.

---

13. Aufgabe. Eine gegebene Zahl auf drei Arten in je zwei Zahlen zu teilen, so daſs ein Teil der ersten Zerlegung zu einem Teile der zweiten in einem gegebenen Verhältnisse stehe; daſs ferner der andere Teil der zweiten Zerlegung zu einem Teile der dritten in einem ebenfalls gegebenen Verhältnisse stehe; daſs endlich auch der andere Teil der dritten Zerlegung zu dem noch nicht benutzten Teile der ersten in einem gegebenen Verhältnisse stehe.

Auflösung. Es sei die Aufgabe gestellt, die Zahl 100 auf drei Weisen in je zwei Teile zu teilen, dergestalt daſs der gröſsere Teil der ersten Zerlegung dreimal so groſs sei als der kleinere Teil der zweiten; daſs weiter der gröſsere Teil der zweiten Zerlegung doppelt so groſs sei wie der kleinere Teil der dritten; daſs endlich der gröſsere Teil der dritten Zerlegung viermal so groſs sei wie der kleinere Teil der ersten.

Wir setzen den kleineren Teil der dritten Zerlegung gleich x; dann wird der gröſsere Teil der zweiten Zerlegung $2x$, also, da beide Teile einer Zerlegung zusammen 100 geben müssen, der kleinere Teil der zweiten Zerlegung $100 - 2x$ sein. Das Dreifache dieser letzteren Zahl ist gleich dem gröſseren Teil der ersten Zerlegung; dieser muſs daher $300 - 6x$ sein, und dann wird der kleinere Teil der ersten Zerlegung $6x - 200$ betragen. Da nun das Vierfache dieser Zahl gleich dem gröſseren Teile der dritten Zerlegung ist, so ergiebt sich für diesen $24x - 800$.

Nun sollen noch beide Teile der dritten Zerlegung zusammen 100 ausmachen. Da die Addition dieser beiden Teile $25x - 800$ ergiebt, so muſs

$$25x - 800 = 100$$

sein, und daraus erhält man

$$x = 36.$$

Es wird also der kleinere Teil der dritten Zerlegung 36, der gröſsere 64 betragen. Für den kleineren Teil der ersten Zerlegung ergiebt sich 16, für den gröſseren 84. Endlich wird der kleinere Teil der zweiten Zerlegung 28, der gröſsere 72 sein, und es ist augenscheinlich, daſs diese Zahlen der Aufgabe genügen.

---

14. Aufgabe. Zwei Zahlen von solcher Beschaffenheit zu finden, daſs das Produkt derselben zu ihrer Summe in einem gegebenen Verhältnis stehe.

Es muſs jedoch der Wert, welchen man der einen dieser Zahlen [die unbestimmt bleibt] beilegt, gröſser sein, als die gegebene Verhältniszahl*).

Auflösung. Es soll das Produkt der beiden Zahlen das Dreifache ihrer Summe sein.

Wir setzen die eine der beiden Zahlen gleich x; die andere muſs wegen der angegebenen Begrenzung gröſser als 3 sein; dieselbe sei gleich 12. Dann ist das Produkt beider Zahlen $12x$, ihre Summe $x + 12$. Nun soll noch $12x$ das Dreifache von $x + 12$, also das Dreifache der kleineren Zahl gleich der gröſseren sein. [Aus $12x = 3x + 36$] ergiebt sich $x = 4$. Es wird also die eine Zahl 4, die andere 12 sein, und diese Werte genügen offenbar der Aufgabe.

---

15. Aufgabe. Zwei Zahlen von solcher Beschaffenheit zu finden, daſs eine jede, nachdem ihr eine be-

*) Auch diese Beschränkung hat nur den Zweck, negative Lösungen auszuschlieſsen. Die der allgemeineren Aufgabe entsprechende Gleichung

$$xy = m(x + y)$$

liefert nämlich

$$x = \frac{my}{y - m},$$

und damit x positiv sei, ist $y > m$ vorauszusetzen.

stimmte Menge Einheiten der anderen hinzugefügt worden sind, zu dem Reste der anderen in einem gegebenen Verhältnisse stehe.

Auflösung. Es wird verlangt, daſs die erste Zahl, nachdem sie 30 Einheiten von der zweiten empfangen, das Doppelte des Restes dieser zweiten sei, und daſs zugleich die zweite Zahl, nachdem sie 50 Einheiten von der ersten empfangen, das Dreifache des Restes dieser ersten sei.

Wir setzen die zweite Zahl, da sie 30 Einheiten abgeben soll, gleich $x + 30$; dann muſs die erste $2x - 30$ sein, damit sie das Doppelte der zweiten werde, nachdem sie von dieser 30 Einheiten empfangen hat. Nun soll noch die zweite, nachdem sie von der ersten 50 Einheiten erhalten hat, das Dreifache des Restes der ersten sein. Wird von der ersten Zahl 50 subtrahiert, so bleibt $2x - 80$, und wenn man 50 zur zweiten Zahl addiert, so wird dieselbe $x + 80$. Es soll also $x + 80$ das Dreifache von $2x - 80$ oder

$$3(2x - 80) = x + 80$$

sein. Hieraus ergiebt sich

$$x = 64.$$

Somit wird die erste Zahl 98, die zweite 94 sein, und durch diese Werte wird der Aufgabe genügt.

---

16. Aufgabe. Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daſs die Summe je zweier derselben gleich einer gegebenen Zahl sei.

Es muſs aber die halbe Summe der drei gegebenen Zahlen gröſser als jede dieser Zahlen sein*).

*) Sind a, b, c die drei gegebenen Summen, und wird die Summe der drei gesuchten Zahlen gleich x gesetzt, so werden die gesuchten Zahlen selbst $x - a$, $x - b$, $x - c$ sein. Es ist also

$$3x - (a + b + c) = x,$$

und daraus folgt

$$x = \frac{a + b + c}{2}.$$

Für die gesuchten Zahlen ergeben sich somit die Werte

Auflösung. Es werde verlangt, daſs die erste und die zweite Zahl zusammen 20 geben, die zweite und die dritte 30, die dritte und die erste 40.

Wir setzen die Summe der drei Zahlen gleich x. Nun soll die Summe der beiden ersten 20 sein; wenn ich also 20 von x subtrahiere, so erhalte ich die dritte Zahl, d. i. $x - 20$. Ebenso ergiebt sich für die erste Zahl $x - 30$, für die zweite $x - 40$. Jetzt erübrigt noch, daſs die Summe der drei Zahlen gleich x sei. Wenn man aber die drei Zahlen addiert, so erhält man $3x - 90$. Es ist also

$$3x - 90 = x,$$

und daraus folgt

$$x = 45.$$

Somit ist die erste Zahl 15, die zweite 5, die dritte 25, und diese Werte genügen offenbar der Aufgabe.

---

17. Aufgabe. Vier Zahlen von solcher Beschaffenheit zu ermitteln, daſs die Summe je dreier derselben gleich einer gegebenen Zahl sei.

Es muſs aber ein Drittel der Summe der vier gegebenen Zahlen gröſser als jede einzelne derselben sein*).

Auflösung. Es wird verlangt, daſs die Summe der ersten und der beiden folgenden Zahlen 20 betrage, die Summe der

---

$$\frac{a+b+c}{2} - a, \quad \frac{a+b+c}{2} - b, \quad \frac{a+b+c}{2} - c,$$

und diese sind nur, wenn die angegebene Bedingung erfüllt ist, positiv.

*) Sind wieder a, b, c, d die gegebenen Summen, und wird die Summe der gesuchten Zahlen gleich x gesetzt, so gelangt man zu der Gleichung

$$4x - (a + b + c + d) = x,$$

und daraus folgt

$$x = \frac{1}{3}(a + b + c + d).$$

Die gesuchten Zahlen sind also $\frac{1}{3}(a + b + c + d) - a, \ldots$ Die angegebene Bedingung hindert also das Auftreten negativer Werte.

zweiten und der beiden folgenden Zahlen 22, die Summe der dritten, vierten und ersten Zahl 24, endlich die Summe der vierten, ersten und zweiten Zahl 27.

Wir setzen die Summe aller vier Zahlen gleich x. Wenn von x die Summe der drei ersten Zahlen, d. i. 20, subtrahiert wird, so bleibt die vierte Zahl; diese ist also $x - 20$.

Auf dieselbe Weise erhält man für die erste Zahl $x - 22$, für die zweite $x - 24$, für die dritte $x - 27$.

Es soll nun noch die Summe aller vier Zahlen x sein. Durch Addition der vier Zahlen erhält man aber $4x - 93$. Es ist folglich

$$4x - 93 = x,$$

und daraus ergiebt sich

$$x = 31.$$

Die erste Zahl ist somit 9, die zweite 7, die dritte 4, die vierte 11, und diese Werte genügen der Aufgabe.

---

18. Aufgabe. Drei Zahlen von solcher Beschaffenheit zu finden, daſs die Summe je zweier derselben um eine gegebene Zahl gröſser als die dritte sei.

Auflösung. Es wird verlangt, daſs die Summe der ersten und zweiten Zahl um 20 gröſser sei als die dritte, die Summe der zweiten und dritten um 30 gröſser als die erste, endlich die Summe der dritten und ersten um 40 gröſser als die zweite Zahl.

Wir setzen die Summe der drei Zahlen gleich $2x$. Nun sind die erste und zweite zusammen um 20 gröſser als die dritte; daraus folgt, wenn beiderseits die dritte hinzugefügt wird, daſs die Summe aller drei Zahlen um 20 gröſser ist als das Doppelte der dritten Zahl. Wenn also 20 von der Summe der drei Zahlen, d. i. $2x$, subtrahiert wird, so bleibt das Doppelte der dritten Zahl übrig; es ist somit das Doppelte der dritten Zahl $2x - 20$, und daher muſs diese selbst $x - 10$ sein.

Ebenso findet man, daſs die erste Zahl gleich $x - 15$, die zweite gleich $x - 20$ ist.

Nun soll die Summe der drei Zahlen $2x$ sein. Addiert man die drei Zahlen, so erhält man $3x - 45$. Es ist also

$$3x - 45 = 2x,$$

und daraus ergiebt sich

$$x = 45.$$

Die erste Zahl ist folglich 30, die zweite 25, die dritte 35, und diese Werte genügen der Aufgabe.

---

19. Andere Auflösung. — Es sollen die erste und die zweite Zahl zusammen 20 gröſser sein als die dritte. Wird also die dritte Zahl gleich x gesetzt, so ist die Summe der ersten und der zweiten gleich $x + 20$.

Da weiter die Summe der zweiten und der dritten Zahl 30 gröſser sein soll als die erste, so muſs die zweite Zahl gleich der Hälfte der Summe $20 + 30$, d. i. gleich 25 gesetzt werden.

Nun ist die erste und die zweite Zahl zusammen $x + 20$, und da die zweite 25 ist, so bleibt für die erste $x - 5$ übrig.

Jetzt soll noch die Summe der dritten und ersten Zahl 40 gröſser sein als die zweite. Es ist aber die Summe der ersten und dritten Zahl gleich $2x - 5$, also muſs

$$2x - 5 = 65$$

sein. Wird die abzuziehende Zahl beiderseits addiert, so erhält man

$$2x = 70$$

und daraus

$$x = 35.$$

Nun war die erste Zahl gleich $x - 5$, das ist also 30; die zweite Zahl ist 25, und die dritte, die gleich x gesetzt war, ist 35.

---

20. Aufgabe. Vier Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daſs die Summe von je drei derselben um eine gegebene Zahl gröſser sei als die vierte Zahl.

Es muſs aber jede der vier gegebenen Differenzen kleiner sein als die halbe Summe derselben *).

---

*) Sind a, b, c, d die gegebenen Differenzen, und wird die Summe der gesuchten vier Zahlen gleich $2x$ gesetzt, so werden

Auflösung. Es wird verlangt, dafs die Summe der drei ersten Zahlen um 20 gröfser sei als die vierte Zahl; dafs die Summe der zweiten und der beiden folgenden Zahlen 30 mehr betrage als die erste Zahl; dafs die Summe der beiden letzten und der ersten Zahl 40 gröfser sei als die zweite; dafs endlich die Summe der vierten und der beiden ersten Zahlen 50 gröfser sei als die dritte Zahl.

Wir setzen die Summe aller vier Zahlen gleich $2x$. Da nun die Summe der drei ersten Zahlen 20 gröfser ist als die vierte Zahl, und da es offenbar dasselbe ist, ob man von der Summe der drei ersten Zahlen die vierte, oder von der Summe aller vier Zahlen das Doppelte der vierten subtrahiert, so mufs auch die Summe aller vier Zahlen, d. i. $2x$, um 20 gröfser sein als das Doppelte der vierten Zahl. Danach ist das Doppelte der vierten Zahl gleich $2x - 20$, also die vierte Zahl selbst $x - 10$.

Auf dieselbe Weise ergiebt sich für die erste Zahl $x - 15$, für die zweite $x - 20$, für die dritte $x - 25$.

Es bleibt noch auszudrücken, dafs die Summe aller vier Zahlen gleich $2x$ sei. Diese Summe beträgt aber $4x - 70$; also ist

$$4x - 70 = 2x,$$

und daraus folgt

$$x = 35.$$

Somit wird die erste Zahl 20, die zweite 15, die dritte 10, die vierte 25 sein, und durch diese Werte wird der Aufgabe genügt.

---

diese letzteren $x - \frac{1}{2}a$, $x - \frac{1}{2}b$, $x - \frac{1}{2}c$, $x - \frac{1}{2}d$ oder, da die Gleichung

$$4x - \frac{1}{2}(a + b + c + d) = 2x$$

den Wert

$$x = \frac{1}{4}(a + b + c + d)$$

liefert,

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(a + b + c + d) - a\right], \quad \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(a + b + c + d) - b\right], \ldots$$

sein, wodurch die von Diophant gestellte Bedingung gerechtfertigt ist.

21. Andere Auflösung. — Es soll die Summe der drei ersten Zahlen 20 gröfser sein als die vierte Zahl. Wenn also die vierte Zahl gleich x gesetzt wird, so wird die Summe der drei ersten Zahlen $x + 20$ sein. Da weiter die drei letzten Zahlen zusammen 30 mehr betragen als die erste, so ist die Summe der zweiten und dritten Zahl gleich so viel Einheiten zu setzen, als die halbe Summe dieser Differenzen 20 und 30 beträgt, d. i. gleich 25. Nun ist aber die Summe der drei ersten Zahlen gleich $x + 20$, und da die zweite und dritte Zahl zusammen gleich 25 sind, so bleibt für die erste Zahl $x - 5$ übrig.

Weiter ist die Summe der drei letzten Zahlen 30 gröfser als die erste Zahl, und die Summe der dritten, vierten und ersten Zahl 40 gröfser als die zweite. Daraus folgt wieder, dafs die Summe der dritten und vierten Zahl 35 beträgt, und [da die vierte Zahl gleich x gesetzt worden ist,] so bleibt für die dritte Zahl $35 - x$ übrig.

Es war aber die Summe der zweiten und dritten Zahl gleich 25, und da die dritte Zahl $35 - x$ ist, so bleibt für die zweite Zahl $x - 10$.

Jetzt soll nun noch die Summe der vierten, ersten und zweiten Zahl 50 mehr sein als die dritte. Die Summe dieser drei Zahlen ist aber $3x - 15$, und die dritte Zahl ist $35 - x$. Es mufs also $3x - 15$ um 50 gröfser sein als $35 - x$, d. h. es ist

$$85 - x = 3x - 15,$$

und daraus folgt

$$x = 25.$$

Nun hatte ich die erste Zahl gleich $x - 5$ gesetzt; diese Zahl ist also 20; ebenso erhält man für die zweite Zahl 15, für die dritte 10, für die vierte 25.

---

22. Aufgabe. Eine gegebene Zahl so in drei Teile zu teilen, dafs jeder der äufseren Teile, wenn man ihn um den mittleren vermehrt, zu dem anderen äufseren in einem gegebenen Verhältnisse stehe.

Auflösung. Es sei aufgegeben, die Zahl 100 so in drei Teile zu teilen, dafs die Summe des ersten und zweiten das

Dreifache des dritten, die Summe des zweiten und dritten Teils das Vierfache des ersten sei.

Wir setzen den dritten Teil gleich x. Da nun der erste und zweite Teil zusammen das Dreifache des dritten sind, so werden diese beiden zusammen gleich $3x$, alle drei Teile zusammen folglich gleich $4x$ sein. Es ist also

$$4x = 100,$$

und daraus folgt

$$x = 25.$$

Nun hatte ich den dritten Teil gleich x gesetzt; dieser ist somit 25. Die Summe des ersten und zweiten Teils war $3x$; diese ist daher 75.

Weiter soll die Summe des zweiten und dritten Teils das Vierfache des ersten sein. Wird daher der erste Teil gleich x gesetzt*), so ist die Summe des zweiten und dritten Teils $4x$; folglich sind alle Teile zusammen $5x$. Es ist daher

$$5x = 100,$$

also

$$x = 20.$$

Somit ist der erste Teil gleich 20. Da sich nun für den dritten Teil 25 ergeben hat, so bleibt für den zweiten Teil noch 55, und durch diese Werte wird der Aufgabe genügt.

---

23. Aufgabe. Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs die gröfste um einen vorgeschriebenen Teil der kleinsten gröfser sei als die mittlere; dafs die mittlere um einen vorgeschriebenen Teil der gröfsten gröfser sei als die kleinste, und dafs die kleinste um eine gegebene Zahl gröfser sei als ein vorgeschriebener Teil der mittleren Zahl.

---

*) Diophant hat für die Unbekannten nur ein Zeichen. So lange sich die verschiedenen Unbekannten aus einander halten lassen, hat das weiter keine Unbequemlichkeit, und es konnte in der Übersetzung immer der Buchstabe x gesetzt werden. Es kommt aber auch vor, dafs in einer und derselben Gleichung dasselbe Zeichen für ganz verschiedene Unbekannte steht. In solchen Fällen blieb mir nichts anderes übrig, als dieselben durch verschiedene Buchstaben zu bezeichnen.

Es mufs aber die mittlere Zahl um einen solchen Teil der gröfsten gröfser als die kleinste sein, dafs, wenn der Nenner dieses Teils mit der Differenz der mittleren und der kleinsten Zahl multipliziert wird, die Unbekannte in diesem Produkt einen gröfseren Koeffizienten habe, als in dem Ausdruck für die mittlere Zahl*).

---

*) Um diese Bedingung zu würdigen, lösen wir die allgemeinere Aufgabe: „Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs die Differenz zwischen der gröfsten und der mittleren $\frac{1}{m}$ der kleinsten, die Differenz zwischen der mittleren und kleinsten $\frac{1}{n}$ der gröfsten, endlich die Differenz zwischen der kleinsten und einer gegebenen Zahl a gleich $\frac{1}{p}$ der mittleren sei."

Werden die gesuchten Zahlen mit I, II, III bezeichnet, wo $\mathrm{I} > \mathrm{II} > \mathrm{III}$ sein möge, so soll $\mathrm{I} - \mathrm{II} = \frac{1}{m} \cdot \mathrm{III}$, $\mathrm{II} - \mathrm{III} = \frac{1}{n} \cdot \mathrm{I}$, $\mathrm{III} - a = \frac{1}{p} \cdot \mathrm{II}$ sein, und da $n \cdot (\mathrm{II} - \mathrm{III}) = \mathrm{I}$ ist, so sagt Diophant, der Koeffizient von x solle in I gröfser als in II sein. Diese Bedingung ist von Bachet mit Recht beanstandet worden, da sie fordert, dafs man erst eine oder zwei der gesuchten Zahlen als Funktionen der dritten ausdrücke, ehe man über die Möglichkeit der Lösung (in positiven Zahlen) urteilen könne. Die Bedingung ist aber auch nicht ausreichend: Wird z. B. die dritte Zahl gleich x gesetzt, so erhält man für die zweite den Ausdruck $px - ap$, für die erste $\left(p + \frac{1}{m}\right) x - ap$, und dann ist jene Bedingung, da $p + \frac{1}{m} > p$ ist, immer erfüllt. Offenbar hatte Diophant nicht die allgemeine Lösung der von ihm gestellten Aufgabe, sondern nur eine Verallgemeinerung des von ihm eingeschlagenen Verfahrens im Auge. Setzt man nämlich $\mathrm{III} = x + a$, so ergiebt sich $\mathrm{II} = px$, $\mathrm{I} = n(px - x - a)$, und die Bedingung geht über in $np - n > p$ oder $np > n + p$. Diese Bedingung mufs nun wirklich erfüllt sein, wenn sich für die gesuchten Zahlen positive Werte ergeben sollen. Das ist leicht nachzuweisen. Drücken wir unter Benutzung der oben gegebenen Werte $n(px - x - a)$, px, $x + a$ noch aus, dafs die Differenz zwischen der ersten und zweiten Zahl $\frac{1}{m}$ der dritten sein soll, so erhalten wir die Gleichung

Auflösung. Es werde verlangt, dafs die gröfste Zahl um ein Drittel der kleinsten gröfser sei als die mittlere, dafs die mittlere um ein Drittel der gröfsten gröfser sei als die kleinste, und dafs die kleinste 10 mehr betrage als ein Drittel der mittleren.

Wir setzen die dritte Zahl, da sie 10 gröfser sein soll als ein Drittel der mittleren, gleich $x + 10$; dann mufs die mittlere Zahl gleich $3x$ sein, damit die kleinste Zahl 10 mehr betrage als ein Drittel derselben.

Man kann diese Ausdrücke auch auf folgende Weise bilden:

Wir setzen die mittlere Zahl gleich $3x$; da wir nun wollen, dafs die kleinste Zahl um 10 gröfser sei als ein Drittel der mittleren, so wird die kleinste $x + 10$ sein.

Es soll nun noch die mittlere Zahl um ein Drittel der gröfsten gröfser sein als die kleinste. Die Differenz zwischen der mittleren und der kleinsten Zahl ist $2x - 10$. Dies ist daher gleich einem Drittel der gröfsten Zahl, und somit ist die gröfste Zahl selbst gleich $6x - 30$.

Jetzt soll noch die gröfste Zahl um ein Drittel der kleinsten gröfser als die mittlere sein. Die Differenz zwischen der gröfsten und der mittleren Zahl ist aber $3x - 30$. Dies ist daher ein Drittel der kleinsten Zahl, folglich mufs die kleinste

---

$$(npx - nx - an - px)m = x + a,$$

und daraus ergiebt sich

$$x = \frac{a(mn + 1)}{mnp - mn - mp - 1},$$

so dafs wir für die gröfste Zahl $\frac{anp(m + 1)}{mnp - mn - mp - 1}$, für die mittlere $\frac{ap(mn + 1)}{mnp - mn - mp - 1}$, für die kleinste $\frac{amp(n - 1)}{mnp - mn - mp - 1}$ finden. Alle diese Werte sind positiv, wenn $mnp > mn + mp + 1$ oder $np > n + p + \frac{1}{m}$ oder, da m, n, p ganze positive Zahlen sind, wenn $np > n + p$ ist.

Ebenso überzeugt man sich leicht, dafs sich positive Werte ergeben, sobald $np > n + p$ ist, von welcher Zahl als Unbekannten man auch ausgehen mag.

Zahl $9x - 90$ sein. Für dieselbe war aber oben der Wert $x + 10$ gefunden. Daher ist

$$9x - 90 = x + 10,$$

und daraus folgt

$$x = 12\tfrac{1}{2}.$$

Somit wird die dritte Zahl $22\frac{1}{2}$, die mittlere $37\frac{1}{2}$, die gröfste 45 sein, und diese Werte genügen der Aufgabe.

---

24. Aufgabe. Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs die gröfste um einen vorgeschriebenen Teil der kleinsten gröfser sei als die mittlere, die mittlere um einen vorgeschriebenen Teil der gröfsten gröfser als die kleinste, endlich die kleinste um einen vorgeschriebenen Teil der mittleren gröfser als eine gegebene Zahl.

Es mufs aber der vorgeschriebene Teil der gröfsten Zahl ein solcher sein, dafs, wenn man ihn zur kleinsten Zahl addiert, der Koeffizient der Unbekannten in dieser Summe kleiner als der ist, welchen die Unbekannte von Anfang an in dem Ausdruck für die mittlere Zahl hat*).

Auflösung. Es werde wieder die kleinste Zahl, da sie um 10 gröfser sein soll als ein Drittel der mittleren, gleich $x + 10$ gesetzt; dann wird die mittlere $3x$ sein, damit ihr Drittel von der kleinsten Zahl um 10 Einheiten übertroffen werde.

Weiter soll wieder die gröfste Zahl um ein Drittel der kleinsten gröfser sein als die mittlere. Wenn ich also zur mittleren ein Drittel der kleinsten addiere, so erhalte ich die gröfste, nämlich $3\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}$.

Es bleibt noch auszudrücken, dafs die mittlere Zahl gleich der Summe der kleinsten und eines Drittels der gröfsten sei; die kleinste Zahl giebt aber, wenn sie um ein Drittel der gröfsten vermehrt wird, $2\frac{1}{9}x + 11\frac{1}{9}$. Dies mufs gleich der mittleren Zahl, d. i. $3x$ sein. Zieht man [in

---

*) Diese Aufgabe ist dieselbe wie 23; auch überzeugt man sich leicht, dafs die Determination auf dasselbe hinausläuft wie die vorhergehende.

$$3x = 2\tfrac{1}{9}x + 11\tfrac{1}{9}]$$

Gleiches von Gleichem ab, so folgt

$$\tfrac{8}{9}x = 11\tfrac{1}{9}.$$

Nun multiplizieren wir alles mit 9 und erhalten

$$8x = 100$$

und daraus

$$x = 12\tfrac{1}{2}.$$

Die Richtigkeit der Lösung ergiebt sich wie oben.

---

25. Aufgabe. Drei Zahlen zu ermitteln, welche einander gleich werden, wenn eine jede der folgenden [die erste der zweiten, diese der dritten, endlich die dritte der ersten] einen vorgeschriebenen Bruchteil ihres Wertes abgiebt.

Auflösung. Es soll die erste Zahl der zweiten ein Drittel ihres Betrages abgeben, die zweite der dritten ein Viertel ihres Betrages, endlich die dritte der ersten ein Fünftel ihres Betrages, und durch diesen Austausch sollen die drei Zahlen einander gleich werden.

Wir setzen die erste Zahl, weil sie ein Drittel ihres Wertes abgeben soll, gleich x mit einem beliebigen durch 3 teilbaren Koeffizienten, etwa gleich $3x$.

Weiter sei die zweite Zahl, welche ein Viertel ihres Wertes hergeben soll, eine beliebige durch 4 teilbare Zahl, etwa gleich 4; dieselbe wird dann infolge der Verkleinerung und Vergröfserung, die sie nach der Aufgabe erfährt, gleich $x + 3$ werden.

Es mufs nun auch die erste Zahl durch Abgabe an die zweite und Empfangen seitens der dritten gleich $x + 3$ werden. Da aber die erste Zahl, nachdem sie ein Drittel ihres Wertes d. i. x, hergegeben hat, nur dadurch auf den Betrag $x + 3$ gebracht werden kann, dafs sie $3 - x$ empfängt, so mufs $3 - x$ ein Fünftel der dritten Zahl, diese selbst also $15 - 5x$ sein.

Endlich mufs auch diese dritte Zahl dadurch, dafs sie ein Fünftel ihres Wertes abgiebt und ein Viertel vom Werte der zweiten, d. i. 1, empfängt, gleich $x + 3$ werden.

Wenn aber die dritte Zahl ein Fünftel ihres Wertes, d. i. $3 - x$, hergiebt, so bleibt $12 - 4x$; wird hierzu ein Viertel der zweiten Zahl, d. i. 1, addiert, so ergiebt sich $13 - 4x$. Das mufs gleich $x + 3$ sein. Aus

$$13 - 4x = x + 3$$

folgt nun

$$x = 2,$$

und so ist die erste Zahl 6, die zweite 4, die dritte 5, welche Werte offenbar auch der Aufgabe genügen*).

---

26. Aufgabe. Vier Zahlen zu finden, welche einander gleich werden, wenn eine jede an die nächstfolgende einen vorgeschriebenen Bruchteil ihres Wertes abgiebt.

Auflösung. Es sei verlangt, dafs die erste der zweiten ein Drittel, die zweite der dritten ein Viertel, die dritte der vierten ein Fünftel, endlich die vierte der ersten ein Sechstel ihres Wertes abgebe, und dafs durch diesen Austausch alle vier Zahlen einander gleich werden.

Wir setzen die erste Zahl, da sie ein Drittel ihres Wertes abgeben soll, gleich x mit irgend einem durch 3 teilbaren Koeffizienten, etwa gleich $3x$.

Für die zweite Zahl nehmen wir, weil dieselbe ein Viertel ihres Wertes abgeben soll, eine beliebige durch 4 teilbare Zahl, etwa 4. Indem nun die zweite Zahl ein Viertel ihres Wertes, d. i. 1, hergiebt und ein Drittel vom Werte der ersten, d. i. x, empfängt, wird sie gleich $x + 3$. Es mufs also auch die erste Zahl, indem sie ein Drittel ihres Wertes, d. i. x, hergiebt und ein Sechstel vom Werte der vierten Zahl empfängt, gleich $x + 3$ werden. Wenn aber die erste Zahl x abgiebt,

*) Um die Aufgabe allgemein in ganzen Zahlen zu lösen, setzen wir die Zahlen gleich $3x$, $4y$, $5z$. Nach Ausführung der verlangten Änderungen sind dann dieselben beziehungsweise $2x + z$, $3y + x$, $4z + y$; durch Gleichsetzung dieser Ausdrücke bildet man zwei Gleichungen, deren Lösung $x = 2k$, $y = k$, $z = k$ ist, so dafs sich für die gesuchten Zahlen die Werte $6k$, $4k$, $5k$ ergeben, wo k eine beliebige ganze Zahl bezeichnet.

so bleibt $2x$ übrig. Dies mufs also, wenn ein Sechstel der vierten Zahl hinzukommt, gleich $x + 3$ werden. Daher mufs ein Sechstel der vierten Zahl gleich $3 - x$, also die vierte Zahl selbst gleich $18 - 6x$ sein.

Nun soll ferner auch die vierte Zahl, indem sie ein Sechstel ihres Wertes abgiebt und ein Fünftel des Wertes der dritten Zahl empfängt, gleich $x + 3$ werden.

Wenn aber die vierte Zahl ein Sechstel ihres Wertes, d. i. $3 - x$, abgiebt, so bleibt $15 - 5x$. Diese Zahl soll, wenn sie um ein Fünftel der dritten vermehrt wird, gleich $x + 3$ sein. Da man nun $6x - 12$ zu $15 - 5x$ addieren mufs, um $x + 3$ zu erhalten, so ist $6x - 12$ ein Fünftel der dritten Zahl, die dritte Zahl selbst also $30x - 60$.

Endlich mufs noch diese dritte Zahl, indem sie ein Fünftel ihres Wertes abgiebt und ein Viertel der zweiten empfängt, gleich $x + 3$ werden. Wenn aber die dritte Zahl ein Fünftel, d. i. $6x - 12$, abgiebt, so bleibt $24x - 48$; addiert man dazu ein Viertel der zweiten Zahl, d. i. 1, so erhält man $24x - 47$. Es ist also

$$24x - 47 = x + 3,$$

und daraus folgt

$$x = \frac{50}{23}.$$

Somit wird die erste Zahl $\frac{150}{23}$, die zweite $\frac{92}{23}$, die dritte $\frac{120}{23}$, die vierte $\frac{114}{23}$ sein. Wenn man jetzt den gemeinschaftlichen Nenner abwirft, so wird die erste Zahl 150, die zweite 92, die dritte 120, die vierte 114, und diese Werte genügen der Aufgabe*).

---

27. Aufgabe. Drei Zahlen zu finden, welche sämtlich einander gleich werden, wenn man eine jede um

*) Durch diese Multiplikation mit der Zahl 23, für welche auch jede andere Zahl, also, wenn man nur ganze Lösungen zulassen will, allgemein $23k$ angenommen werden kann, wird der Lösung Diophants der Charakter der Allgemeinheit zurückgegeben, den sie verlor, als für die zweite Zahl willkürlich der Wert 4 angenommen wurde. Ähnliches gilt von den beiden folgenden Aufgaben.

einen vorgeschriebenen Bruchteil der Summe der beiden andern vermehrt.

Auflösung. Es wird verlangt, dafs man die erste Zahl um ein Drittel der Summe der beiden andern, die zweite um ein Viertel der Summe der beiden andern, die dritte um ein Fünftel der Summe der beiden andern vermehrt, und dafs dadurch die drei Zahlen gleich werden.

Wir setzen die erste Zahl gleich x und die Summe der beiden andern, da diese Summe ein Drittel ihres Wertes abgeben soll, der Bequemlichkeit wegen, gleich irgend einer durch 3 teilbaren Zahl, etwa gleich 3. Alle drei Zahlen sind also zusammen gleich $x + 3$, und die erste wird, wenn man sie um ein Drittel der Summe der beiden andern vermehrt, gleich $x + 1$ werden.

Es mufs nun auch die zweite Zahl, wenn ihr ein Viertel der Summe der beiden andern hinzugefügt wird, gleich $x + 1$ werden. Wird jetzt alles vervierfacht, so heifst dies: das Vierfache der zweiten Zahl, vermehrt um die Summe der beiden andern Zahlen, oder, was dasselbe ist, das Dreifache der zweiten Zahl, vermehrt um die Summe aller drei Zahlen, mufs gleich $4x + 4$ sein. Wird hiervon die Summe der drei Zahlen subtrahiert, so bleibt $3x + 1$ als dreifacher Wert der zweiten Zahl. Die zweite Zahl selbst ist also gleich $x + \frac{1}{3}$.

Ferner mufs auch die dritte Zahl, wenn ihr ein Fünftel der Summe der beiden andern hinzugefügt wird, gleich $x + 1$ werden. Wir verfünffachen jetzt, dem obigen Verfahren entsprechend, alles und erhalten durch ähnliche Schlüsse, dafs die dritte Zahl $x + \frac{1}{2}$ ist.

Nun erübrigt noch, dafs die Summe aller drei Zahlen gleich $x + 3$ sei. Es ergiebt sich

$$\left[\text{aus der Gleichung } x + x + \frac{1}{3} + x + \frac{1}{2} = x + 3\right]$$

$$x = \frac{13}{12};$$

bei Weglassung des gemeinschaftlichen Nenners findet man dann für die erste Zahl 13, für die zweite 17, für die dritte 19, und diese Werte genügen der Aufgabe.

28. Aufgabe. Vier Zahlen zu finden, die sämtlich einander gleich werden, wenn man eine jede um einen vorgeschriebenen Bruchteil der Summe der drei andern vermehrt.

Auflösung. Es sei aufgegeben, dafs die erste Zahl um ein Drittel der Summe der drei andern, die zweite ebenso um ein Viertel, die dritte um ein Fünftel und die vierte um ein Sechstel der Summe der drei andern vermehrt werde, und dafs auf diese Weise die vier Zahlen einander gleich werden.

Wir setzen die erste Zahl gleich x, die Summe der drei andern aber, da sie ein Drittel ihres Wertes abgeben soll, gleich irgend einer durch 3 teilbaren Zahl, etwa gleich 3. Dann wird die erste Zahl, wenn sie ein Drittel der Summe der drei andern empfängt, gleich $x + 1$.

Es mufs nun auch die zweite Zahl, indem sie um ein Viertel der Summe der drei andern vermehrt wird, gleich $x + 1$ werden. Wie in der vorigen Aufgabe vervierfachen wir wieder alles und folgern auf ähnliche Weise, dafs die zweite Zahl gleich $x + \frac{1}{3}$, die dritte gleich $x + \frac{1}{2}$, die vierte gleich $x + \frac{3}{5}$ ist.

Jetzt haben wir noch auszudrücken, dafs die Summe aller vier Zahlen gleich $x + 3$

$$\left[\text{d. i. } 4x + \frac{43}{30} = x + 3\right]$$

sei. Dadurch erhalten wir

$$x = \frac{47}{90},$$

und es ergiebt sich [bei Weglassung des gemeinschaftlichen Nenners] für die erste Zahl 47, für die zweite 77, für die dritte 92, für die vierte 101, welche Werte auch der Aufgabe genügen.

---

29. Aufgabe. Zu zwei gegebenen Zahlen eine dritte Zahl von der Beschaffenheit zu finden, dafs, wenn man dieselbe mit jeder der gegebenen Zahlen multipliziert, das eine Produkt ein Quadrat, das andere die Seite dieses Quadrates werde.

Auflösung. Die gegebenen Zahlen seien 200 und 5, die gesuchte Zahl gleich x. Wird letztere mit 200 multipliziert, so erhält man $200x$; multipliziert man sie aber mit 5, so erhält man $5x$.

Es soll nun das eine dieser Produkte ein Quadrat, das andere die Seite dieses Quadrates sein. Wenn man aber $5x$ ins Quadrat erhebt, so erhält man $25x^2$, und somit ist

$$25x^2 = 200x.$$

Wird alles durch die Unbekannte dividiert, so folgt

$$25x = 200$$

und daraus

$$x = 8.$$

Diese Zahl genügt der Aufgabe.

---

30. Aufgabe. Zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs sowohl ihre Summe als auch ihr Produkt gleich gegebenen Zahlen seien. Es mufs aber das Quadrat der halben Summe der gesuchten Zahlen um eine Quadratzahl gröfser sein, als das Produkt derselben, und man kann immer solche Zahlen als gegeben annehmen, dafs diese Bedingung erfüllt ist*).

---

*) Die Auflösung der Gleichungen $x + y = a$, $xy = b$ liefert für die Unbekannten die Werte $\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$. Beide Werte sind rational, wenn $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$ eine Quadratzahl ist. Da zugleich bei positivem b (und negative Zahlen kennt Diophant nicht) $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} < \frac{a}{2}$ ist, so sind beide Werte auch positiv. Die Aufgabe hat also eine Lösung (in rationalen positiven Zahlen), wenn $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$ oder $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy$ eine Quadratzahl ist.

Über den auch in den Aufgaben 31 und 33 stehenden Zusatz zur Determination: ἔστι δὲ τοῦτο πλασματικόν vergleiche aufser Xylander und Bachet auch Schulz p. 390, Nesselmann p. 326, Heath p. 169. Ich habe, auf eine prägnante Übersetzung verzichtend, nur den Sinn ausgedrückt, den der Satz zu haben scheint.

Auflösung. Es sei aufgegeben, daſs die Summe der gesuchten Zahlen 20, ihr Produkt 96 betrage. Wir setzen die Differenz der Zahlen gleich $2x$. Nun ist ihre Summe gleich 20. Wenn wir diese Zahl in zwei gleiche Teile teilen, so wird jeder Teil oder die Hälfte der Summe der Zahlen gleich 10 sein. Wird nun die Hälfte der Differenz beider Zahlen, d. i. x, zu dem einen Teile addiert und vom andern subtrahiert, so bleibt die Summe beider Teile 20, ihre Differenz $2x$*).

Wir setzen demgemäſs die gröſsere Zahl gleich $x + 10$; dann wird die kleinere $10 - x$ sein, und es ist die Summe beider Zahlen 20, ihre Differenz $2x$.

Es bleibt noch zu bewirken, daſs das Produkt der Zahlen 96 werde. Dies Produkt ist aber $100 - x^2$; daher muſs

$$100 - x^2 = 96$$

sein, und daraus folgt

$$x = 2.$$

Die gröſsere Zahl wird also 12, die kleinere 8 sein, und diese Werte genügen der Aufgabe.

---

31. Aufgabe. Zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daſs sowohl ihre Summe als auch die Summe ihrer Quadrate gleich gegebenen Zahlen seien.

Es muſs aber die doppelte Summe der Quadrate der Zahlen das Quadrat der Summe derselben um eine Quadratzahl übertreffen**), und es ist immer möglich, solche Zahlen als gegeben anzunehmen, welche dieser Bedingung genügen.

---

*) Die Gleichungen $x + y = a$, $x - y = b$ geben $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{a-b}{2}$.

**) Die Gleichungen $x + y = a$, $x^2 + y^2 = b$ liefern für die gesuchten Zahlen die Werte $\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2b - a^2}$. Beide sind rational, wenn $2b - a^2$ gleich einer Quadratzahl ist, und das stellt eben Diophant als Bedingung hin. Es sind aber auch, wenn diese Bedingung erfüllt ist, beide Zahlen positiv; denn da $a^2 > b$, also $2a^2 > 2b$ ist, so muſs $a^2 > 2b - a^2$, $a > \sqrt{2b - a^2}$,

Auflösung. Es sei aufgegeben, daſs die Summe der Zahlen 20, die Summe ihrer Quadrate 208 betrage.

Wir setzen die Differenz der Zahlen gleich $2x$, so wird die gröſsere wieder um die Hälfte der Summe beider Zahlen gröſser als x, also $x + 10$, die kleinere $10 - x$ sein; denn bei dieser Annahme ist die Summe der Zahlen 20, ihre Differenz $2x$.

Es bleibt noch zu bewirken, daſs die Summe der Quadrate beider Zahlen 208 werde. Die Summe der Quadrate ist aber $2x^2 + 200$. Es ist also

$$2x^2 + 200 = 208,$$

und daraus folgt

$$x = 2.$$

Die gröſsere Zahl wird somit 12, die kleinere 8 sein, und diese Werte genügen der Aufgabe.

---

32. Aufgabe. Zwei Zahlen von solcher Beschaffenheit zu finden, daſs sowohl ihre Summe als auch die Differenz ihrer Quadrate gleich gegebenen Zahlen seien.

Auflösung. Es wird verlangt, daſs die Summe der Zahlen 20, die Differenz ihrer Quadrate 80 betrage.

Wir setzen die Differenz beider Zahlen gleich $2x$, so wird wieder die gröſsere $x + 10$, die kleinere $10 - x$ betragen; denn bei dieser Annahme ist die Summe 20, die Differenz $2x$.

Nun ist noch zu bewirken, daſs die Differenz der Quadrate beider Zahlen 80 sei. Die Differenz dieser Quadrate ist aber $40x$. Es ist also

$$40x = 80,$$

und daraus schlieſsen wir wieder, daſs die gröſsere Zahl 12, die kleinere 8 ist, welche Werte auch der Aufgabe genügen.

$\frac{a}{2} > \frac{1}{2}\sqrt{2b - a^2}$ sein, und somit ist nicht nur $\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2b - a^2}$, sondern auch $\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2b - a^2}$ eine positive Zahl.

33. Aufgabe. Zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs sowohl ihre Differenz als auch ihr Produkt gleich gegebenen Zahlen seien.

Es mufs aber das Vierfache des Produkts mit dem Quadrat der Differenz zusammen eine Quadratzahl ausmachen, und man kann immer solche Zahlen als gegeben annehmen, dafs diese Bedingung erfüllt ist*).

Auflösung. Es wird verlangt, dafs die Differenz der beiden Zahlen 4, ihr Produkt 96 betrage.

Wir setzen die Summe der Zahlen gleich $2x$. Da nun die Differenz derselben 4 ist, so wird die gröfsere $x + 2$, die kleinere $x - 2$ betragen; denn bei dieser Annahme erhält man als Summe $2x$, als Differenz 4.

Nun bleibt noch zu bewirken, dafs das Produkt der Zahlen 96 ausmache. Dies Produkt ist aber $x^2 - 4$. Setzen wir nun

$$x^2 - 4 = 96,$$

so finden wir wieder für die gröfsere Zahl 12, für die kleinere 8, und diese Werte genügen der Aufgabe.

---

34. Aufgabe. Zwei Zahlen zu finden, die selbst in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen, und bei denen die Summe der Quadrate zur Summe der Zahlen gleichfalls in einem gegebenen Verhältnisse steht.

Auflösung. Es sei aufgegeben, dafs die gröfsere Zahl das Dreifache der kleineren, und die Summe der Quadrate der Zahlen fünfmal so grofs sei wie die Summe der Zahlen.

Wir setzen die kleinere Zahl gleich x, so wird die gröfsere $3x$ sein. Nun mufs noch die Summe der Quadrate der Zahlen fünfmal so grofs werden wie die Summe der Zahlen. Die Summe der Quadrate der Zahlen ist aber

---

*) Die Gleichungen $x - y = a$, $xy = b$ liefern nämlich $x = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4b + a^2}$, $y = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4b + a^2}$.

$10x^2$, die Summe der Zahlen $4x$. Es ist also $10x^2$ das Fünffache von $4x$ oder

$$10x^2 = 20x.$$

Daraus folgt

$$x = 2.$$

Somit wird die kleinere Zahl 2, die gröfsere 6 sein, und diese Werte genügen der Aufgabe.

---

35. Aufgabe. Zwei Zahlen zu finden, die in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen, und bei welchen die Summe der Quadrate zur Differenz der Zahlen in einem gleichfalls gegebenen Verhältnisse steht.

Auflösung. Es wird verlangt, dafs die gröfsere Zahl das Dreifache der kleineren, und die Summe der Quadrate zehnmal so grofs als die Differenz der Zahlen sei.

Wir setzen die kleinere Zahl gleich x, so wird die gröfsere $3x$ sein. Jetzt mufs noch die Summe der Quadrate das Zehnfache der Differenz der Zahlen sein. Die Summe der Quadrate der Zahlen ist aber $10x^2$ und die Differenz der Zahlen $2x$. Es ist also $10x^2$ das Zehnfache von $2x$. Das Zehnfache von $2x$ ist aber $20x$. Somit ist

$$10x^2 = 20x.$$

Wird alles durch x dividiert, so folgt

$$10x = 20$$

und daraus

$$x = 2.$$

Es wird also wieder die kleinere Zahl 2, die gröfsere 6 sein, und diese Werte genügen der Aufgabe.

---

36. Aufgabe. Zwei Zahlen zu finden, die in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen, und bei denen die Differenz der Quadrate zur Summe der Zahlen gleichfalls in einem gegebenen Verhältnisse steht.

Auflösung. Es werde verlangt, daſs die gröſsere Zahl das Dreifache der kleineren, und die Differenz der Quadrate das Sechsfache der Summe der Zahlen sei.

Wir setzen die kleinere Zahl gleich x; dann wird die gröſsere $3x$ sein. Jetzt muſs noch die Differenz der Quadrate das Sechsfache der Summe der Zahlen sein. Die Differenz der Quadrate ist aber $8x^2$, die Summe der Zahlen $4x$. Es muſs daher $8x^2$ sechsmal so viel als $4x$ oder

$$8x^2 = 24x$$

sein. Daraus ergiebt sich

$$x = 3.$$

Die kleinere Zahl wird also 3, die gröſsere 9 sein, und diese Werte genügen der Aufgabe.

---

37. Aufgabe. Zwei Zahlen zu finden, die in einem gegebenen Verhältnisse stehen, und bei denen die Differenz der Quadrate zur Differenz der Zahlen gleichfalls in einem gegebenen Verhältnisse steht.

Auflösung. Es soll die gröſsere Zahl das Dreifache der kleineren, und die Differenz der Quadrate zwölfmal so groſs wie die Differenz der Zahlen sein.

Wird wieder die kleinere Zahl gleich x gesetzt, so ist die gröſsere $3x$, und es bleibt noch zu bewirken, daſs die Differenz der Quadrate das Zwölffache der Differenz der Zahlen werde. Die Differenz der Quadrate ist aber $8x^2$. Das muſs also zwölfmal so viel wie $2x$ sein. Es ist daher

$$24x = 8x^2,$$

und daraus folgt wieder

$$x = 3,$$

womit die Aufgabe offenbar gelöst ist.

Ähnlich werden durch dieselben Betrachtungen die Aufgaben gelöst:

Zwei Zahlen zu finden, die in einem gegebenen Verhältnisse stehen, und deren Produkt zur Summe gleichfalls in einem gegebenen Verhältnisse steht; und weiter:

Zwei Zahlen zu finden, die in einem gegebenen Verhältnisse stehen, und deren Produkt zur Differenz gleichfalls in einem gegebenen Verhältnisse steht.

---

38. Aufgabe. Zwei Zahlen zu finden, die in einem gegebenen Verhältnisse stehen und so beschaffen sind, daſs das Quadrat der kleineren Zahl zur gröſseren Zahl in einem gleichfalls gegebenen Verhältnisse steht.

Auflösung. Es sei aufgegeben, daſs die gröſsere Zahl das Dreifache der kleineren, und das Quadrat der kleineren das Sechsfache der gröſseren Zahl sei.

Wir setzen wieder die kleinere Zahl gleich x, so wird die gröſsere $3x$ sein, und es erübrigt noch zu bewirken, daſs das Quadrat der kleineren das Sechsfache der gröſseren Zahl sei. Das Quadrat der kleineren Zahl ist aber x^2. Folglich muſs x^2 das Sechsfache von $3x$ sein; also ist

$$18x = x^2,$$

und es ergiebt sich

$$x = 18.$$

Somit ist die kleinere Zahl 18, die gröſsere 54, und diese Werte genügen der Aufgabe.

---

39. Aufgabe. Zwei Zahlen zu finden, die in einem gegebenen Verhältnisse stehen und so beschaffen sind, daſs das Quadrat der kleineren Zahl zu der kleineren Zahl in einem gleichfalls gegebenen Verhältnisse steht.

Auflösung. Es wird verlangt, daſs die gröſsere Zahl das Dreifache der kleineren, und das Quadrat der kleineren das Sechsfache der kleineren Zahl selbst sei.

Es sei wieder die gröſsere Zahl $3x$, die kleinere x, so ist die gröſsere das Dreifache der kleineren, und wir haben nur noch zu bewirken, daſs das Quadrat der kleineren das Sechsfache der kleineren Zahl selbst sei. Es soll also x^2 das Sechsfache von x oder

$$6x = x^2$$

sein. Daraus ergiebt sich

$$x = 6.$$

Die kleinere Zahl wird demnach 6, die gröfsere 18 sein, und diese Werte genügen der Aufgabe.

---

40. Aufgabe. Zwei Zahlen zu finden, die in einem gegebenen Verhältnisse stehen und so beschaffen sind, dafs das Quadrat der kleineren zur Summe der beiden Zahlen gleichfalls in einem gegebenen Verhältnisse steht.

Auflösung. Es sei aufgegeben, dafs die gröfsere Zahl das Dreifache der kleineren, und das Quadrat der kleineren das Doppelte der Summe beider Zahlen betrage.

Ist wie oben die gröfsere Zahl gleich $3x$, die kleinere gleich x, so bleibt noch zu bewirken, dafs das Quadrat der kleineren Zahl doppelt so grofs wie die Summe der beiden Zahlen werde. Das Quadrat der kleineren Zahl ist aber x^2, die Summe beider Zahlen $4x$. Daher mufs x^2 das Doppelte von $4x$, also

$$8x = x^2$$

sein, und es wird

$$x = 8.$$

Die kleinere Zahl wird demnach 8, die gröfsere 24 sein, und diese Werte genügen der Aufgabe.

---

41. Aufgabe. Zwei Zahlen zu finden, die in einem gegebenen Verhältnisse stehen und so beschaffen sind, dafs das Quadrat der kleineren Zahl zur Differenz der Zahlen in einem gleichfalls gegebenen Verhältnisse stehe.

Auflösung. Es werde verlangt, dafs die gröfsere Zahl das Dreifache der kleineren, und das Quadrat der kleineren das Sechsfache der Differenz beider Zahlen sei.

Ist wieder wie oben die gröfsere Zahl gleich $3x$, die kleinere gleich x, so bleibt noch zu bewirken, dafs das Quadrat der kleineren das Sechsfache der Differenz beider Zahlen werde. Es mufs also x^2 das Sechsfache von $2x$ oder

$$12x = x^2$$

sein. Dann ist

$$x = 12;$$

die kleinere Zahl wird somit 12, die gröſsere 36 sein, und diese Werte genügen der Aufgabe.

---

42. In ähnlicher Weise werden durch dieselben Schlüsse folgende Aufgaben gelöst:

Zwei Zahlen zu finden, die in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen und so beschaffen sind, daſs das Quadrat der gröſseren zur kleineren Zahl in einem gleichfalls gegebenen Verhältnisse stehe.

Zwei Zahlen zu finden, die in einem gegebenen Verhältnisse stehen und so beschaffen sind, daſs das Quadrat der gröſseren zur gröſseren Zahl in einem gleichfalls gegebenen Verhältnisse stehe.

Zwei Zahlen zu finden, die in einem gegebenen Verhältnisse stehen und so beschaffen sind, daſs das Quadrat der gröſseren zur Summe beider Zahlen in einem gegebenen Verhältnisse stehe.

Zwei Zahlen zu finden, die in einem gegebenen Verhältnisse stehen und so beschaffen sind, daſs das Quadrat der gröſseren zur Differenz beider Zahlen in einem gleichfalls gegebenen Verhältnisse stehe.

---

43. Aufgabe. Zu zwei gegebenen Zahlen eine dritte Zahl von der Beschaffenheit zu finden, daſs, wenn man je zwei dieser drei Zahlen addiert und die jedesmalige Summe mit der zurück gebliebenen Zahl multipliziert, drei Zahlen von gleicher Differenz entstehen.

Auflösung. Die gegebenen Zahlen seien 3 und 5. Man soll eine dritte Zahl finden, so daſs, wenn man je zwei dieser drei Zahlen addiert und die jedesmalige Summe mit der zurückgebliebenen Zahl multipliziert, drei Zahlen von gleicher Differenz gebildet werden.

Die gesuchte Zahl sei gleich x. Wird dieselbe zu 5 addiert, so erhält man $x + 5$. Wird diese Summe mit der zurückgebliebenen Zahl, d. i. 3, multipliziert, so ergiebt sich $3x + 15$.

Wird weiter x zu 3 addiert, so erhält man $x + 3$. Wird dies mit der zurückgebliebenen Zahl, d. i. 5, multipliziert, so ergiebt sich $5x + 15$.

Wird endlich 5 zu 3 addiert und die Summe 8 mit x multipliziert, so erhält man $8x$.

Es ist nun klar, daſs $3x + 15$ in keinem Falle das gröſste der drei erhaltenen Produkte sein kann; denn $5x + 15$ ist gröſser als $3x + 15$. Folglich wird $3x + 15$ entweder das mittlere oder das kleinste Produkt sein, während $5x + 15$ entweder das gröſste oder das mittlere ist. Dagegen kann $8x$ sowohl das gröſste, als auch das kleinste Produkt sein, da der Wert von x unbekannt ist.

Wir setzen nun erstens voraus, $5x + 15$ sei das gröſste, $3x + 15$ das kleinste, also natürlich $8x$ das mittlere Produkt. Wenn nun diese Produkte Zahlen von gleicher Differenz sind, so wird die Summe des kleinsten und des gröſsten das Doppelte des mittleren, also, da die Summe des gröſsten und des kleinsten $8x + 30$ beträgt,

$$8x + 30 = 16x$$

sein. Daraus folgt

$$x = \frac{15}{4};$$

dies ist die gesuchte Zahl, und dieselbe genügt der Aufgabe.

Es sei jetzt zweitens $5x + 15$ das gröſste Produkt, aber $3x + 15$ das mittlere, also $8x$ das kleinste. Wenn nun diese Produkte Zahlen gleicher Differenz sind, so muſs das gröſste um ebensoviel mehr betragen als das mittlere, wie das mittlere gröſser ist als das kleinste. Das gröſste beträgt aber $2x$ mehr als das mittlere und das mittlere $15 - 5x$ mehr als das kleinste. Daher ist

$$15 - 5x = 2x,$$

und daraus folgt

$$x = \frac{15}{7}.$$

Das ist der Wert der gesuchten Zahl, und derselbe genügt der Aufgabe.

Drittens sei $8x$ das gröſste Produkt, $5x + 15$ das mittlere und $3x + 15$ das kleinste. Da nun wieder die Summe des gröſsten und des kleinsten das Doppelte des mittleren ist, und das gröſste und kleinste zusammen $11x + 15$ betragen, so muſs $11x + 15$ das Doppelte des mittleren Produktes sein. Das mittlere Produkt ist aber $5x + 15$. Daher ist

$$10x + 30 = 11x + 15.$$

Daraus ergiebt sich für die gesuchte Zahl 15, und dieser Wert genügt der Aufgabe.

II. Buch.

1. Aufgabe. Zwei Zahlen von solcher Beschaffenheit zu finden, dafs ihre Summe zur Summe ihrer Quadrate in einem gegebenen Verhältnisse stehe.

Auflösung. Es wird verlangt, dafs die Summe der Zahlen der zehnte Teil der Summe ihrer Quadrate sei.

Wir setzen die kleinere Zahl gleich x, die gröfsere gleich $2x$*), so ist die Summe beider $3x$, die Summe ihrer Quadrate $5x^2$.

Es soll nun $3x$ der zehnte Teil von $5x^2$, also

$$30x = 5x^2$$

sein. Daraus ergiebt sich

$$x = 6.$$

Somit ist die kleinere Zahl 6, die gröfsere 12, und diese Werte genügen der Aufgabe.

---

*) Durch diese (willkürliche) Annahme wird die Aufgabe mit der 34[ten] des ersten Buches identisch. Die allgemeine Aufgabe führt zu der Gleichung $x^2 + y^2 = m(x + y)$, welche

$$x = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} + my - y^2}$$

liefert. Um rationale Werte zu erhalten, ist $\frac{m^2}{4} + my - y^2 = \left(\frac{m}{2} + ky\right)^2$ zu setzen, wo k unbestimmt bleibt. Man erhält durch leichte Entwicklungen $y = \frac{m(1-k)}{1+k^2}$ und x entweder

$$= \frac{m(k+1)}{1+k^2} \quad \text{oder} \quad = \frac{mk(k-1)}{1+k^2}.$$

Diophant's Lösung entspricht den Werten $m = 10$ und $k = \frac{1}{3}$ oder $k = -2$, je nachdem der erste oder zweite Ausdruck für x benutzt wird.

2. Aufgabe. Zwei Zahlen von solcher Beschaffenheit zu finden, dafs ihre Differenz zur Differenz ihrer Quadrate in einem gegebenen Verhältnisse stehe.

Auflösung. Es soll die Differenz der Zahlen der sechste Teil der Differenz ihrer Quadrate sein.

Wir setzen die kleinere Zahl gleich x, die gröfsere gleich $2x$*), so ist die Differenz der Zahlen x, die Differenz ihrer Quadrate $3x^2$. Es soll nun x der sechste Teil von $3x^2$ sein. Daher ist

$$6x = 3x^2,$$

und daraus folgt

$$x = 2.$$

Die kleinere Zahl wird also 2, die gröfsere 4 sein, und diese Werte genügen der Aufgabe.

---

3. Aufgabe. Zwei Zahlen von solcher Beschaffenheit zu finden, dafs das Produkt zur Summe oder zur Differenz derselben in einem gegebenen Verhältnisse stehe.

Auflösung. Es sei erstens aufgegeben, dafs das Produkt der Zahlen das Sechsfache ihrer Summe sei. Wir setzen die gesuchten Zahlen gleich x und $2x$**). Dieselben können

---

*) Durch diese Annahme wird die Aufgabe mit der 37ten des ersten Buches identisch. Die allgemeine Aufgabe führt zu der Gleichung $x^2 - y^2 = m(x - y)$. Diese liefert $x = m - y$, wo y unbestimmt bleibt. Diophant's Lösung entspricht den Werten $m = 6$, $y = 2$.

**) Diese Annahme macht beide Aufgaben mit den der 37ten des ersten Buches angefügten identisch. Allgemein wird die erste Aufgabe zur Gleichung $xy = m(x + y)$, die zweite zu

$$xy = m(x - y)$$

führen. Die erste Gleichung liefert

$$x = \frac{my}{y - m} = m + \frac{m^2}{y - m},$$

die zweite

$$x = \frac{-my}{y - m} = -m - \frac{m^2}{y - m}.$$

Darin ist m gegeben, y bleibt unbestimmt.

übrigens auch in jedem anderen gegebenen Verhältnisse stehen.

Das Produkt der Zahlen wird nun $2x^2$, ihre Summe $3x$ betragen, und es soll $2x^2$ das Sechsfache von $3x$ oder

$$18x = 2x^2$$

sein. Daraus folgt

$$x = 9,$$

und es ergiebt sich für die erste Zahl 9, für die zweite 18, welche Werte auch der Aufgabe genügen.

Zweitens werde gefordert, dafs das Produkt der Zahlen das Sechsfache ihrer Differenz sei. Dann wird wieder das Produkt der beiden Zahlen $2x^2$, die Differenz aber x betragen, und es mufs

$$6x = 2x^2$$

sein, woraus sich

$$x = 3$$

ergiebt. Die erste Zahl wird also 3, die zweite 6 sein, und diese Werte genügen der Aufgabe.

---

4. Aufgabe. Zwei Zahlen von solcher Beschaffenheit zu finden, dafs die Summe der Quadrate zur Differenz der Zahlen in einem gegebenen Verhältnisse stehe.

Auflösung. Es sei aufgegeben, dafs die Summe der Quadrate das Zehnfache der Differenz der beiden Zahlen betrage.

Wir setzen wieder die erste Zahl gleich x, die zweite gleich $2x$*), so ist die Summe der Quadrate beider Zahlen $5x^2$, die Differenz der Zahlen x. Es soll also $5x^2$ das Zehnfache von x oder

---

*) Durch diese Annahme wird die Aufgabe mit der 35ten des ersten Buches identisch. Allgemein führt die Aufgabe zu der Gleichung $x^2 + y^2 = m(x - y)$, welche die beiden Lösungen

$$x = \frac{m(k+1)}{k^2+1}, \quad y = \frac{m(k-1)}{k^2+1}$$

$$x = \frac{mk(k-1)}{k^2+1}, \quad y = \frac{m(k-1)}{k^2+1}$$

hat, wo m gegeben ist und k unbestimmt bleibt.

$$5x^2 = 10x$$

sein; daraus ergiebt sich

$$x = 2.$$

Die erste Zahl wird also 2, die zweite 4 sein, und diese Werte genügen der Aufgabe.

---

5. Aufgabe. Zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs die Differenz der Quadrate zur Summe der Zahlen in einem gegebenen Verhältnisse stehe.

Auflösung. Es werde verlangt, dafs die Differenz der Quadrate das Sechsfache der Summe der Zahlen sei.

Wir setzen wieder die eine der gesuchten Zahlen gleich x, die andere gleich $2x$*), so wird der Unterschied der Quadrate $3x^2$, die Summe der Zahlen $3x$ betragen; folglich soll $3x^2$ das Sechsfache von $3x$, d. h.

$$3x^2 = 18x$$

sein. Daraus ergiebt sich

$$x = 6,$$

wodurch die Aufgabe offenbar gelöst ist.

---

6. Aufgabe. Zwei Zahlen von gegebener Differenz zu finden, die so beschaffen sind, dafs die Differenz ihrer Quadrate die Differenz der Zahlen selbst um eine gegebene Zahl übertreffe.

Es mufs aber das Quadrat der Differenz der Zahlen kleiner sein als die Summe eben dieser Differenz und der Zahl, welche angiebt, um wieviel die Differenz der Quadrate die Differenz der Zahlen selbst übertrifft**).

---

*) Durch diese Annahme wird die Aufgabe mit der 36ten des ersten Buches identisch. Die allgemeine Aufgabe führt zu der Gleichung $x^2 - y^2 = m(x + y)$, und diese liefert $x = y + m$, wo m gegeben ist und y unbestimmt bleibt.

**) Setzt man allgemein

$$x - y = a$$

$$(x^2 - y^2) - (x - y) = b,$$

so ergiebt sich leicht

Auflösung. Es wird verlangt, dafs die Differenz der Zahlen 2 betrage, und die Differenz der Quadrate die Differenz der Zahlen selbst um 20 übertreffe.

Wird die kleinere Zahl gleich x gesetzt, so wird die gröfsere $x + 2$ sein; denn dann ist die Differenz der Zahlen gleich 2. Die Differenz der Quadrate der Zahlen ist aber $4x + 4$. Es mufs also $4x + 4$ um 2 gröfser sein als 20, so dafs wir

$$4x + 4 = 22$$

und daraus

$$x = 4\tfrac{1}{2}$$

erhalten. Folglich wird die kleinere Zahl $4\frac{1}{2}$, die gröfsere $6\frac{1}{2}$ betragen, und diese Werte lösen die Aufgabe.

---

7. Aufgabe. Zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs die Differenz ihrer Quadrate um eine gegebene Zahl gröfser sei als ein vorgeschriebenes Vielfache der Differenz der Zahlen.

Auflösung. Es wird verlangt, dafs die Differenz der Quadrate um 10 gröfser sei als das Dreifache der Differenz der Zahlen.

Es mufs aber*) das Quadrat der Differenz der Zahlen kleiner sein als die Summe des dreifachen Unterschiedes der Zahlen und der gegebenen Zahl 10.

Wir nehmen die Differenz der Zahlen gleich 2**) und die

$$x = \frac{a + b + a^2}{2a}, \quad y = \frac{a + b - a^2}{2a},$$

und nur wenn die obige Bedingung $a^2 < a + b$ erfüllt ist, erhält man für y positive Werte.

*) Die Berechtigung dieser wahrscheinlich an eine falsche Stelle geratenen und mit Rücksicht auf diese Stelle formulierten Determination wird die allgemeine Behandlung der Aufgabe ergeben.

**) Soll allgemein die Differenz der Quadrate um a gröfser als das $m$fache der Differenz der Zahlen sein, so nehmen wir an, die letztere Differenz sei d, die kleinere Zahl x, also die gröfsere $x + d$. Dann soll

$$(x + d)^2 - x^2 = a + md$$

oder

kleinere Zahl gleich x an; dann wird die gröſsere $x + 2$ sein. Es muſs also $4x + 4$ um 10 gröſser sein als das Dreifache von 2; daher ist

$$3 . 2 + 10 = 4x + 4,$$

und daraus folgt

$$x = 3.$$

Die kleinere Zahl ist somit 3, die gröſsere 5, und diese Werte genügen der Aufgabe.

---

8. **Aufgabe.** [Vieta, Zet. IV, 1.] Eine gegebene Quadratzahl in zwei Quadrate zu zerfällen.

Auflösung. Es werde verlangt, 16 in zwei Quadrate zu teilen. Wird das erste dieser Quadrate gleich x^2 gesetzt, so muſs noch $16 - x^2$ zu einem Quadrate gemacht werden.

Wir bilden das Quadrat eines um die Seite des gegebenen Quadrats 16 verminderten beliebigen Vielfachen von x, etwa von $2x - 4$. Das Quadrat dieser Zahl ist $4x^2 + 16 - 16x$, und diese Zahl muſs gleich $16 - x^2$ sein. Werden [in

$$4x^2 + 16 - 16x = 16 - x^2]$$

die abzuziehenden Gröſsen beiderseits addiert und sodann Gleiches von Gleichem subtrahiert, so folgt

$$5x^2 = 16x$$

und daraus

$$x = \frac{16}{5}.$$

Es wird also das eine Quadrat $\frac{256}{25}$, das andere $\frac{144}{25}$ sein; in

---

$$2dx + d^2 = a + md$$

sein; daraus folgt

$$x = \frac{a + md - d^2}{2d}$$

$$x + d = \frac{a + md + d^2}{2d}.$$

Wird, wie oben, $m = 3$, $a = 10$ vorausgesetzt, so ist

$$x = \frac{10 + 3d - d^2}{2d}, \quad x + d = \frac{10 + 3d + d^2}{2d},$$

und diese Ausdrücke liefern für $d = 1$ die Zahlen 6 und 7, für $d = 2$ die Zahlen 3 und 5, u. s. w.

der That ist die Summe dieser Zahlen $\frac{400}{25} = 16$, und dabei ist jede derselben eine Quadratzahl*).

---

9. Aufgabe. Nochmalige Lösung der vorhergehenden Aufgabe. Es soll wieder die Quadratzahl 16 in zwei Quadrate zerlegt werden.

Wir setzen die Seite des ersten Quadrats gleich x, die des andern gleich einem um die Seite des gegebenen Quadrats verminderten beliebigen Vielfachen von x, etwa gleich $2x - 4$. Dann werden die Quadrate x^2 und $4x^2 + 16 - 16x$ sein. Die Summe dieser beiden Zahlen soll gleich 16 sein, also ist

---

*) Soll allgemein a^2 in zwei Quadrate geteilt werden, so lösen wir, indem wir unter m eine beliebige Zahl verstehen, die Gleichung

$$a^2 = x^2 + (mx - a)^2$$

und erhalten für die Wurzeln der gesuchten Quadrate

$$x = \frac{2am}{m^2 + 1}, \quad mx - a = \frac{a(m^2 - 1)}{m^2 + 1}.$$

Im Besondern ist

$$1 = \left(\frac{2m}{m^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}\right)^2.$$

Bekanntlich hat P. Fermat seine Anmerkungen zum Diophant auf den Rand eines Exemplars der Bachet'schen Ausgabe geschrieben. Diese Anmerkungen sind sodann abgedruckt in der Ausgabe, welche S. Fermat (der Sohn des erstgenannten) 1670 veranstaltet hat. Da diese Ausgabe sehr selten geworden ist, so sollen jene Bemerkungen des grofsen Mathematikers hier Aufnahme finden. Zu der vorliegenden Aufgabe bemerkt Fermat: „Dagegen ist es ganz unmöglich, einen Kubus in zwei Kuben, ein Biquadrat in zwei Biquadrate, und allgemein irgend eine Potenz aufser dem Quadrat in zwei Potenzen von demselben Exponenten zu zerfällen. Hierfür habe ich einen wahrhaft wunderbaren Beweis entdeckt, aber der Rand ist zu klein ihn zu fassen."

Ob Fermat wirklich einen Beweis des Satzes besessen hat, dafs die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ in rationalen Zahlen nicht gelöst werden kann, sobald $n > 2$ ist? Man ist versucht, daran zu zweifeln, wenn man bedenkt, dafs trotz der Bemühungen von Männern wie Euler, Lejeune-Dirichlet, Kummer u. a. der Beweis noch nicht allgemein geführt ist. (Vergl. jedoch über diese Frage Lejeune-Dirichlet, Werke, I. p. 197.)

$$5x^2 + 16 - 16x = 16,$$

und daraus folgt

$$x = \frac{16}{5}.$$

Es wird daher die Seite des ersten Quadrats $\frac{16}{5}$, dieses selbst also $\frac{256}{25}$, die Seite des zweiten Quadrats $\frac{12}{5}$, dieses selbst also $\frac{144}{25}$ sein, und diese Werte genügen offenbar der Aufgabe.

---

10. Aufgabe. [Vieta, Zet. IV, 2, 3.] Eine gegebene Zahl, welche die Summe zweier Quadrate ist, in zwei andere Quadrate zu teilen.

Auflösung. Es sei die Zahl 13 vorgelegt, welche aus den Quadraten 4 und 9 besteht. Man soll dieselbe in zwei andere Quadrate zerlegen.

Wir nehmen die Seiten der genannten Quadrate, nämlich 2 und 3, und setzen die Seite des einen gesuchten Quadrats gleich $x + 2$, die des andern gleich einem beliebigen Vielfachen von x, vermindert um so viele Einheiten, als die Seite des zweiten Quadrats enthält, nämlich um 3*). Dieselbe sei

*) Soll allgemein $a^2 + b^2$ in zwei Quadrate zerlegt werden, deren Wurzeln von a und b verschieden sind, so nehmen wir diese Wurzeln gleich $x + a$, $mx - b$ an und erhalten durch Auflösung der Gleichung

$$(x + a)^2 + (mx - b)^2 = a^2 + b^2$$

leicht

$$x = \frac{2(bm - a)}{m^2 + 1},$$

so dafs sich für die gesuchten Wurzeln

$$x + a = \frac{am^2 + 2bm - a}{m^2 + 1}, \quad mx - b = \frac{bm^2 - 2am - b}{m^2 + 1}$$

ergiebt, wo für m jede beliebige Zahl gesetzt werden kann. Fermat bemerkt zu dieser Aufgabe folgendes:

„Kann man aber auch die Summe zweier Kuben in zwei andere Kuben zerfällen? Diese schwierige Aufgabe war sicherlich Bachet und Vieta, vielleicht sogar dem Diophant selbst unbekannt; ich habe sie aber unten in der Anmerkung zur zweiten Aufgabe des vierten Buches gelöst.“

gleich $2x - 3$. Die Quadrate werden dann $x^2 + 4x + 4$ und $4x^2 + 9 - 12x$ sein.

Es bleibt noch zu bewirken, dafs die Summe dieser Quadrate gleich 13 werde. Durch Addition derselben erhält man aber $5x^2 + 13 - 8x$. Es mufs also

$$5x^2 + 13 - 8x = 13$$

sein, und daraus folgt

$$x = \frac{8}{5}.$$

Nun hatte ich die Seite des ersten Quadrats gleich $x + 2$ gesetzt; dieselbe wird also $\frac{18}{5}$ sein. Die Seite des zweiten Quadrats war $2x - 3$; das wird gleich $\frac{1}{5}$. Was die Quadrate selbst betrifft, so wird das erste $\frac{324}{25}$, das zweite $\frac{1}{25}$ betragen; die Summe beider ist also $\frac{325}{25}$, und das ist gleich der vorgelegten Zahl 13.

---

11. Aufgabe. [Vieta, Zet. IV, 6.] Zwei Quadratzahlen zu finden, deren Differenz eine gegebene Zahl sei.

Auflösung. Es wird verlangt, dafs die Differenz der Quadrate gleich 60 sei.

Wir setzen die Seite des einen Quadrats gleich x, die des andern gleich der Summe von x und einer beliebigen Zahl, welche nur der Beschränkung unterworfen ist, dafs ihr Quadrat nicht gröfser sein darf als die gegebene Differenz*). Auf diese Weise bleibt nämlich zuletzt nur ein Glied auf jeder Seite der Gleichung, und die Aufgabe wird lösbar.

Es sei also die Seite des zweiten Quadrats $x + 3$. Die

---

*) Sind x^2, $(x + d)^2$ die gesuchten Quadrate, a die gegebene Differenz derselben, so soll

$$2dx + d^2 = a$$

sein. Hieraus folgt

$$x = \frac{a - d^2}{2d}, \quad x + d = \frac{a + d^2}{2d};$$

also mufs $d^2 < a$ sein, damit x einen positiven Wert erhalte.

Quadrate selbst werden dann x^2 und $x^2 + 6x + 9$, und ihr Unterschied wird $6x + 9$ sein. Dieser letztere soll gleich 60 sein. Aus

$$6x + 9 = 60$$

folgt aber

$$x = 8\tfrac{1}{2}.$$

Somit wird die Seite des ersten Quadrats $8\frac{1}{2}$, die des zweiten $11\frac{1}{2}$, das eine Quadrat selbst $72\frac{1}{4}$, das andere $132\frac{1}{4}$ betragen, und diese Werte genügen offenbar der Aufgabe.

---

12. Aufgabe. [Vieta, Zet. IV, 7.] Zu zwei gegebenen Zahlen eine und dieselbe Zahl zu addieren, so dafs jede der beiden Summen eine Quadratzahl sei.

Auflösung. Es seien 2 und 3 die gegebenen Zahlen, die zu addierende Zahl x. Es soll also sowohl $x + 2$, als auch $x + 3$ ein Quadrat werden. Wir haben hier eine sogenannte doppelte Gleichung*); dieselbe wird auf folgende Weise gelöst:

Man bestimmt die Differenz der gegebenen Zahlen und sucht sodann zwei Zahlen, deren Produkt gleich dieser Differenz ist. Es sind dies z. B. 4 und $\frac{1}{4}$. Nun setzt man entweder das Quadrat der halben Differenz dieser beiden Zahlen gleich dem kleineren der gesuchten Quadrate, oder das Quadrat der halben Summe beider Zahlen gleich dem gröfseren der

---

*) Die Aufgabe, für die Unbekannte einen solchen Wert zu finden, dafs zwei Funktionen derselben gleichzeitig Quadrate werden, nennt Diophant eine *διπλοϊσότης* oder *διπλῆ ἰσότης* oder *διπλῆ ἴσωσις*. Ich habe, freilich ungern, den von Schulz, Nesselmann u. a. dafür gebrauchten Ausdruck „doppelte Gleichung“ beibehalten, da ich keinen besseren weifs, und eine Umschreibung mancherlei Unbequemlichkeiten — besonders bei den Anmerkungen Fermats — herbeiführen würde. In der lateinischen Übersetzung sagen Xylander und Bachet duplicata aequalitas; Lagrange (in seinen Zusätzen zu Eulers Algebra), Brassinne etc. sagen double égalité, Heath übersetzt double-equation.

gesuchten Quadrate. Das Quadrat der halben Differenz jener beiden Zahlen ist aber $\frac{225}{64}$. Es ist also

$$\frac{225}{64} = x + 2,$$

und daraus folgt

$$x = \frac{97}{64}.$$

Das Quadrat der halben Summe jener Zahlen ist $\frac{289}{64}$, und wird dies gleich dem gröſseren Quadrat, also

$$\frac{289}{64} = x + 3$$

gesetzt, so ergiebt sich ebenfalls

$$x = \frac{97}{64}.$$

Die zu addierende Zahl ist somit $\frac{97}{64}$, und diese genügt auch offenbar der Aufgabe.

Will man nicht zu einer doppelten Gleichung gelangen, so hat man auf folgende Weise zu verfahren:

Man soll eine Zahl suchen, welche, zu jeder der beiden Zahlen 2 und 3 addiert, ein Quadrat liefert.

Wir suchen zuerst eine Zahl, welche, um 2 vermehrt, zu einer Quadratzahl wird, oder auch eine Zahl, welche, um 3 vermehrt, zu einer Quadratzahl wird. Das leistet aber jede beliebige Quadratzahl, welche wir um 2 oder um 3 vermindert haben.

Wir wollen die Zahl 2 benutzen. Wird 2 von x^2 subtrahiert, so bleibt der Rest $x^2 - 2$, und diese Zahl wird offenbar zu einem Quadrat, wenn 2 addiert wird. Wird aber 3 dazu addiert, so erhält man $x^2 + 1$. Das soll gleich einem Quadrat gemacht werden. Zu diesem Zwecke bilden wir das Quadrat der Zahl, die entsteht, wenn wir x um so viele Einheiten vermindern, daſs der Ausdruck für x^2 gröſser als die vorher abgezogene Zahl, im vorliegenden Falle also gröſser als 2 wird; auf diese Weise bleibt nämlich auf jeder Seite der Gleichung nur ein Glied zurück.

Es sei diese Zahl $x - 4$. Dann wird das Quadrat selbst

$x^2 + 16 - 8x$ betragen. Dies soll gleich $x^2 + 1$ sein. Wird in der Gleichung

$$x^2 + 16 - 8x = x^2 + 1$$

die abzuziehende Zahl beiderseits addiert und sodann Gleiches von Gleichem subtrahiert, so bleibt

$$8x = 15,$$

und daraus ergiebt sich

$$x = \frac{15}{8}.$$

Wird dieser Wert in den Ausdruck für die gesuchte Zahl eingesetzt, so ergiebt sich für dieselbe $\frac{97}{64}$.*)

---

*) Um die Aufgabe allgemein zu lösen, nehmen wir an, a, b seien die gegebenen Zahlen, und es sei $a > b$. Nach dem ersten Verfahren setzen wir dann

$$x + a = u^2, \quad x + b = v^2$$

und erhalten

$$(u + v)(u - v) = a - b,$$

oder, wenn n eine beliebige Zahl bezeichnet,

$$(u + v)(u - v) = \frac{(a - b)}{n} \cdot n.$$

Wird

$$u + v = n, \quad u - v = \frac{a - b}{n}$$

angenommen, so folgt

$$u = \frac{n^2 + a - b}{2n}, \quad v = \frac{n^2 - a + b}{2n},$$

und es ergiebt sich für die gesuchte Zahl der Wert

$$x = \left[\frac{n^2 + a - b}{2n}\right]^2 - a$$

oder, was dasselbe ist,

$$x = \left[\frac{n^2 - a + b}{2n}\right]^2 - b.$$

Im oben behandelten Falle ist $a = 3$, $b = 2$, also

$$x = \left[\frac{n^2 + 1}{2n}\right]^2 - 3 = \left[\frac{n^2 - 1}{2n}\right]^2 - 2,$$

wo n so zu wählen ist, dafs x positiv wird. Der Wert $x = \frac{97}{64}$ entspricht dem Werte $n = \frac{1}{4}$. $n = 4$.

13. Aufgabe. [Vieta, Zet. IV, 8.] Von zwei gegebenen Zahlen eine und dieselbe Zahl von der Beschaffenheit zu subtrahieren, dafs jeder der beiden Reste eine Quadratzahl sei.

Auflösung. Es werde verlangt, von 9 und 21 eine und dieselbe Zahl zu subtrahieren, die so bestimmt ist, dafs jeder der beiden Reste ein Quadrat sei.

Wir subtrahieren von einer der beiden gegebenen Zahlen ein ganz beliebiges Quadrat und setzen diese Differenz gleich der gesuchten Zahl; denn wenn wir dieselbe von der gegebenen Zahl subtrahieren, so bleibt ein Quadrat übrig.

Es sei also von 9 das Quadrat x^2 subtrahiert; der Rest ist dann $9 - x^2$. Wir müssen jetzt auch von 21 diese Differenz $9 - x^2$ subtrahieren und den Rest zu einem Quadrat machen. Wenn wir aber $9 - x^2$ von 21 subtrahieren, so bleibt $x^2 + 12$. Das soll zu einem Quadrat gemacht werden.

Zu diesem Zwecke bilde ich das Quadrat der Zahl, die erhalten wird, wenn von x eine Zahl subtrahiert wird, deren Quadrat mehr als 12 beträgt. Auf diese Weise wird erreicht, dafs auf jeder Seite der Gleichung nur ein Glied übrig bleibt. Es sei jene von x zu subtrahierende Zahl 4. Dann wird das Quadrat $x^2 + 16 - 8x$ betragen, und es soll

$$x^2 + 16 - 8x = x^2 + 12$$

sein. Wird jetzt Gleiches von Gleichem subtrahiert, so bleibt

---

Um das zweite Verfahren allgemein darzustellen, nennen wir die gesuchte Zahl $x^2 - a$ und setzen, unter n eine beliebige Zahl verstehend,

$$x^2 - a + b = (x - n)^2.$$

Daraus ergiebt sich leicht

$$x = \frac{n^2 + a - b}{2n},$$

und man erhält für die gesuchte Zahl, wie oben,

$$x^2 - a = \left[\frac{n^2 + a - b}{2n}\right]^2 - a.$$

Der letzte Ausdruck zeigt auch, weshalb der Ausdruck von x^2 gröfser sein soll als die vorher abgezogene Zahl a.

$$8x = 4,$$

und daraus folgt

$$x = \frac{4}{8}.$$

Nun ist $9 = \frac{72}{8} = \frac{576}{64}$. Wird davon x^2, d. i. $\frac{16}{64}$ subtrahiert, so erhält man die Zahl $\frac{560}{64}$, welche der Aufgabe genügt*).

---

14. Aufgabe. [Vieta, Zet. IV, 9.] Zwei gegebene Zahlen von einer und derselben Zahl zu subtrahieren, die so beschaffen ist, daſs jeder der beiden Reste ein Quadrat sei.

Auflösung. Es wird verlangt, die Zahlen 6 und 7 von einer solchen Zahl zu subtrahieren, daſs jeder der Reste ein Quadrat sei.

Wir setzen die gesuchte Zahl gleich x. Wird davon 6 subtrahiert, so bleibt $x - 6$, und das soll gleich einem Quadrat sein. Wird aber 7 subtrahiert, so bleibt $x - 7$. Wir kommen also in dieser Aufgabe wieder zu einer doppelten Gleichung, und da die Differenz der Zahlen 7 und 6, d. i. 1, gleich dem Produkt aus 2 in $\frac{1}{2}$ angenommen werden kann, so erhalten

---

*) Sind a, b die gegebenen Zahlen, wo $b > a$ sein möge, so genügt die Zahl $a - x^2$ für jeden Wert von x der Bedingung, daſs, wenn man sie von a subtrahiert, der Rest ein Quadrat sei. Es muſs also noch $b - (a - x^2)$, d. i. $b - a + x^2$ zu einem Quadrat gemacht werden.

Setzt man zu diesem Zwecke

$$b - a + x^2 = (x - n)^2,$$

so erhält man

$$x = \frac{n^2 - (b - a)}{2n},$$

und die gesuchte Zahl ist

$$a - x^2 = a - \left[\frac{n^2 - (b - a)}{2n}\right]^2.$$

Die von Diophant angegebene Bedingung drückt also nur aus, daſs x einen positiven Wert haben solle, nicht daſs die gesuchte Zahl selbst positiv werde, ein Mangel, auf den schon Bachet hinweist.

wir schliefslich für die Unbekannte x den Wert $\frac{121}{16}$, welcher auch der Aufgabe genügt.

Will man die doppelte Gleichung vermeiden, so hat man in folgender Weise die Untersuchung anzustellen:

Wir fragen zuerst, von welcher Zahl man 6 subtrahieren müsse, um ein Quadrat übrig zu behalten. Offenbar wird diese Forderung von jeder beliebigen um 6 vermehrten Quadratzahl erfüllt.

Es sei x^2 das genommene Quadrat, so ist $x^2 + 6$ die gesuchte Zahl; denn es leuchtet ein, dafs, wenn 6 von derselben subtrahiert wird, der Rest wirklich ein Quadrat ist.

Es mufs nun noch 7 von $x^2 + 6$ subtrahiert und der Rest zu einem Quadrat gemacht werden, d. h. $x^2 - 1$ mufs ein Quadrat sein.

Wir bilden das Quadrat von $x - 2$; dies Quadrat wird $x^2 + 4 - 4x$ sein. Wird dasselbe gleich $x^2 - 1$, [also

$$x^2 + 4 - 4x = x^2 - 1]$$

gesetzt, so ergiebt sich

$$x = \frac{5}{4},$$

und wir erhalten somit für die gesuchte Zahl den Wert $\frac{121}{16}$, welcher auch der Aufgabe genügt.

---

15. Aufgabe. Eine gegebene Zahl in zwei Teile zu teilen und dazu eine Quadratzahl von der Beschaffenheit zu ermitteln, dafs dieselbe ein Quadrat bleibt, wenn sie zu jedem der beiden Teile addiert wird.

Auflösung. Es wird verlangt, 20 in zwei solche Teile zu zerlegen.

Wir wählen zwei Zahlen von der Beschaffenheit, dafs die Summe ihrer Quadrate kleiner als 20 sei*). Diese Zahlen

*) Ist allgemein a die zu teilende Zahl, und wird das Quadrat, durch dessen Hinzufügung jeder Teil eine Quadratzahl wird, mit x^2 bezeichnet, so kann man die Teile von a gleich $2mx + m^2$ und $2nx + n^2$ setzen, wo m, n beliebige Zahlen sind. Die Summe beider Teile mufs a sein; also erhält man die Gleichung

seien 2 und 3. Addieren wir zu jeder derselben x, so sind die Quadrate der erhaltenen Summen $x^2 + 4x + 4$ und $x^2 + 6x + 9$.

Wenn wir von jedem derselben x^2, also ein Quadrat, subtrahieren, so erhalten wir zwei Zahlen, welche offenbar der Bedingung genügen, dafs jede von beiden durch Hinzufügung einer Quadratzahl zu einem Quadrat gemacht wird.

Wird aber von jenen beiden Quadraten x^2 subtrahiert, so bleibt von dem einen $4x + 4$, von dem andern $6x + 9$ übrig. Die Summe dieser beiden Reste soll gleich 20, also

$$10x + 13 = 20$$

sein. Daraus folgt

$$x = \frac{7}{10}.$$

Es wird also der eine Teil $\frac{68}{10}$, der andere $\frac{132}{10}$ sein, und diese Werte genügen der Aufgabe.

---

16. Aufgabe. Eine gegebene Zahl in zwei Teile zu teilen und dazu eine Quadratzahl von der Beschaffenheit zu suchen, dafs dieselbe ein Quadrat bleibt, wenn jeder Teil von ihr subtrahiert wird.

Auflösung. Es sei wieder aufgegeben, die Zahl 20 in der verlangten Weise zu teilen.

Wir nehmen als Seite des gesuchten Quadrats die Summe von x und einer Zahl, deren Quadrat nicht gröfser als 20 ist. Dieselbe sei $x + 2$; ihr Quadrat wird dann $x^2 + 4x + 4$ sein,

---

$$(2mx + m^2) + (2nx + n^2) = a,$$

welche den Wert

$$x = \frac{a - (m^2 + n^2)}{2(m + n)}$$

liefert; dieser Ausdruck zeigt die Berechtigung der von Diophant in betreff der Wahl von m, n gestellten Bedingung. Für die Teile von a ergeben sich

$$m \cdot \frac{a + mn - n^2}{m + n} \quad \text{und} \quad n \cdot \frac{a + mn - m^2}{m + n},$$

wo m, n unbestimmt bleiben.

und es leuchtet ein, daſs, wenn man hiervon $4x + 4$ subtrahiert, der Rest ein Quadrat sein wird. Ebenso bleibt ein Quadrat, nämlich $x^2 + 2x + 1$ übrig, wenn man $2x + 3$ subtrahiert.

Aus diesem Grunde nehmen wir als ersten Teil $4x + 4$, als zweiten Teil $2x + 3$ an, als das gesuchte Quadrat aber $x^2 + 4x + 4$; denn dieses giebt bei Subtraktion jedes Teils ein Quadrat als Rest.

Es bleibt noch zu bewirken, daſs die Summe der Teile gleich der zu teilenden Zahl sei. Beide Teile geben zusammen $6x + 7$; also muſs

$$6x + 7 = 20$$

sein. Wird Gleiches von Gleichem subtrahiert, so folgt

$$x = \frac{13}{6}.$$

Somit ergiebt sich für den ersten Teil $\frac{76}{6}$, für den zweiten $\frac{44}{6}$, für das Quadrat $\frac{625}{36}$, und diese Werte genügen der Aufgabe*).

---

*) Ist allgemein a die zu teilende Zahl, so nehmen wir

$$(x + m)^2 = x^2 + 2mx + m^2$$

als das zu bestimmende Quadrat, also $2mx + m^2$ als ersten und $2nx + (2mn - n^2)$ als zweiten Teil von a an. Denn bei Subtraktion des ersten Teils von $(x + m)^2$ bleibt x^2, bei Subtraktion des zweiten Teils dagegen $x^2 + 2(m - n)x + (m^2 - 2mn + n^2)$, also ebenfalls ein Quadrat als Rest. Die Summe beider Teile soll a sein; also besteht die Gleichung

$$2mx + m^2 + 2nx + 2mn - n^2 = a,$$

und diese liefert

$$x = \frac{a - m^2 + n^2 - 2mn}{2(m + n)}.$$

Der erste Teil ist danach

$$\frac{m(a - mn + n^2)}{m + n},$$

der zweite

$$\frac{n(a - mn + m^2)}{m + n},$$

das gesuchte Quadrat $\left[\frac{a + m^2 + n^2}{2(m + n)}\right]^2$. Diophants Lösung ent-

17. Aufgabe. Zwei Zahlen zu finden, die in einem gegebenen Verhältnisse stehen und so beschaffen sind, daſs jede, wenn man sie um ein gegebenes Quadrat vergröſsert, eine Quadratzahl wird.

Auflösung. Es sei aufgegeben, daſs die gröſsere Zahl das Dreifache der kleineren sei, und daſs jede der beiden Zahlen ein Quadrat bilde, wenn sie um 9 vergröſsert wird.

Wenn wir zu einem beliebigen Vielfachen von x die Zahl 3 addieren und von dem Quadrat dieser Summe 9 subtrahieren, so wird die Differenz die eine der gesuchten Zahlen sein. Es sei demgemäſs $x^2 + 6x$ die kleinere Zahl, so wird die gröſsere $3x^2 + 18x$ sein, und wir müssen noch bewirken, daſs auch diese letztere durch Addition von 9 zu einem Quadrat werde. Sie wird aber gleich $3x^2 + 18x + 9$; dies soll also ein Quadrat sein. Nehmen wir als Seite dieses Quadrats $2x - 3$ an, [setzen also

$$3x^2 + 18x + 9 = (2x - 3)^2],$$

so ergiebt sich

$$x = 30.$$

Danach wird die kleinere Zahl 1080, die gröſsere 3240 sein, und jede wird, wenn man 9 hinzufügt, das, was die Aufgabe verlangt*).

---

spricht den Werten $m = 2$, $n = 1$. Die Bedingung, daſs m^2 nicht gröſser als a sein dürfe, ist nicht aufrecht zu erhalten, sondern es muſs, $n < m$ vorausgesetzt, $a + n^2 > mn$ sein, wenn sich positive Werte ergeben sollen.

*) Soll allgemein die gröſsere Zahl das $m$fache der kleineren sein, und ist a^2 das gegebene Quadrat, so ist $k^2x^2 + 2akx$ die kleinere der gesuchten Zahlen, also $mk^2x^2 + 2akmx$ die gröſsere, und wir haben, um $mk^2x^2 + 2akmx + a^2$ in ein Quadrat zu verwandeln,

$$mk^2x^2 + 2akmx + a^2 = (lx + a)^2$$

zu setzen, woraus sich

$$x = \frac{2a(l - mk)}{mk^2 - l^2}$$

ergiebt, wo a, m gegeben sind, während k, l unbestimmt bleiben. Oben ist $a = 3$, $m = 3$ angenommen, und Diophants Lösung entspricht den Werten $k = 1$, $l = - 2$.

18. Aufgabe. Drei Zahlen zu finden, welche dadurch einander gleich werden, dafs eine jede der folgenden einen vorgeschriebenen Bruchteil ihres Betrages und dazu noch eine gegebene Zahl abgiebt.

Auflösung. Es wird verlangt, dafs die erste Zahl ein Fünftel ihres Betrages und noch 6 der zweiten, die zweite ein Sechstel ihres Betrages und noch 7 der dritten, endlich die dritte ein Siebentel ihres Betrages und noch 8 der ersten abgiebt.

Wir setzen die erste Zahl gleich $5x$ und die zweite gleich $6x$*). Wenn nun die zweite von der ersten $x + 6$ erhält, so wird sie gleich $7x + 6$. Sie giebt aber an die dritte ein Sechstel, d. i. x, und noch 7 ab, wird also gleich $6x - 1$.

Es bleibt jetzt noch zu bewirken, dafs auch jede der beiden anderen Zahlen durch die Vergröfserung und die Verkleinerung, die sie erfährt, gleich $6x - 1$ werde.

Indem nun die erste Zahl ein Fünftel ihres Betrages und 6 hergiebt, sinkt sie auf $4x - 6$. Dadurch dafs sie ein Siebentel der dritten Zahl und noch 8 erhält, soll sie $6x - 1$ werden. Nun mufs man aber $2x + 5$ zu $4x - 6$ addieren, um $6x - 1$ zu erhalten. Daher ist $2x + 5$ gleich einem um 8 vermehrten Siebentel der dritten Zahl. Wenn also 8 von $2x + 5$ subtrahiert wird, so mufs der Rest, d. i. $2x - 3$, gleich einem Siebentel der dritten Zahl sein. Die dritte Zahl selbst ist folglich $14x - 21$.

Jetzt mufs noch diese dritte Zahl dadurch, dafs sie ein Sechstel der mittleren Zahl und noch 7 empfängt, dann aber ein Siebentel ihres Betrages und noch 8 abgiebt, gleich $6x - 1$ werden.

Wenn die dritte Zahl ein Siebentel ihres Betrages und noch 8 hergiebt, so bleibt $12x - 26$. Nun erhält sie aber von der mittleren Zahl ein Sechstel und noch 7; dadurch wird sie gleich $13x - 19$. Das soll gleich $6x - 1$ sein. Aus

---

*) Durch die Annahme, dafs die Zahlen sich wie 5:6 verhalten sollen, verwandelt Diophant die unbestimmte Aufgabe in eine bestimmte.

$$13x - 19 = 6x - 1$$

folgt aber

$$x = \frac{18}{7}.$$

Es wird also die erste Zahl $\frac{90}{7}$, die zweite $\frac{108}{7}$, die dritte $\frac{105}{7}$ sein, und diese Werte genügen der Aufgabe*).

[Andere Auflösung der 18. Aufgabe.] Wir setzen die erste Zahl gleich $5x$, die zweite gleich 12. Die zweite soll von der ersten ein Fünftel, d. i. x, und noch 6 erhalten; sie wird also gleich $x + 18$. Nun giebt sie aber an die dritte Zahl ein Sechstel ihres anfänglichen Betrages und noch 7 ab; sie wird also zuletzt gleich $x + 9$ sein.

Es erübrigt noch, dafs auch jede der beiden andern Zahlen infolge der Vergröfserung und der Verkleinerung, die sie erfährt, gleich $x + 9$ werde.

Indem die erste Zahl ein Fünftel ihres Betrages und noch 6 abgiebt, wird sie gleich $4x - 6$. Nun soll sie durch Hinzufügung eines Siebentels der dritten Zahl und der Zahl 8 auch gleich $x + 9$ werden. Das wird sie, wenn man $15 - 3x$ addiert. Daher ist $15 - 3x$ gleich einem um 8 vermehrten Siebentel der dritten Zahl. Wird also 8 von $15 - 3x$ sub-

---

*) Werden die gesuchten Zahlen allgemein $5x$, $6y$, $7z$ genannt, so liefert die Ausführung der angegebenen Änderungen die beiden Gleichungen

$$4x + z + 2 = 5y + x - 1$$
$$5y + x - 1 = 6z + y - 1,$$

welche die Werte

$$x = \frac{26y - 18}{19}, \quad z = \frac{17y - 3}{19}$$

ergeben, wo y unbestimmt bleibt. Diophants Lösung entspricht der Annahme $y = \frac{18}{7}$.

Will man nur ganze Zahlen zulassen, so liefert das bekannte Verfahren für die erste Zahl $130k + 50$, für die zweite $114k + 48$, für die dritte $119k + 49$, wo k jede ganze Zahl sein kann.

trahiert, so erhält man ein Siebentel der dritten Zahl. Da sich hierfür $7 - 3x$ ergiebt, so wird die dritte Zahl selbst $49 - 21x$ sein.

Jetzt mufs noch bewirkt werden, dafs diese dritte Zahl, wenn sie von der mittleren ein Sechstel des Betrages derselben und noch 7 erhält, zugleich aber ein Siebentel ihres eigenen Betrages und noch 8 an die erste hergiebt, gleich $x + 9$ werde. Durch diese Abgabe und Annahme wird sie aber gleich $43 - 18x$. Setzen wir dies [d. i.

$$43 - 18x] = x + 9,$$

so ergiebt sich

$$x = \frac{34}{19}.$$

Es wird also die erste Zahl $\frac{170}{19}$, die zweite $\frac{228}{19}$, die dritte $\frac{217}{19}$ sein.

---

19. Aufgabe. Eine gegebene Zahl in drei Teile zu teilen, welche einander gleich werden, wenn eine jede an die folgende einen vorgeschriebenen Bruchteil ihres Betrages und noch eine gegebene Zahl abgiebt.

Auflösung. Es soll die Zahl 80 in drei Teile geteilt werden, welche einander gleich werden, wenn die erste ein Fünftel ihres Betrages und noch 6 an die zweite, die zweite ein Sechstel ihres Betrages und noch 7 an die dritte, die dritte endlich ein Siebentel ihres Betrages und noch 8 an die erste abgiebt*).

---

*) Im Original schliefst sich hier die oben gegebene andere Auflösung der 18. Aufgabe an. Ich habe kein Bedenken getragen, dieselbe an die ihr zukommende Stelle zu setzen.

Die vorliegende 19. Aufgabe ist im Original nicht gelöst. Übrigens macht die Lösung nicht die geringste Schwierigkeit. Zu den beiden in der Anmerkung zur 18. Aufgabe gegebenen Gleichungen kommt noch $5x + 6y + 7z = 80$ hinzu, und man erhält leicht für die gesuchten Teile

$$5x = \frac{9440}{363}, \quad 6y = \frac{9786}{363}, \quad 7z = \frac{9814}{363}.$$

Heath folgert (pag. 25) hier durch eine höchst geistreiche Betrachtung, dafs die Verstümmelung der Arithmetik Diophants schon vor dem 11. Jahrhundert erfolgt sein müsse.

20. Aufgabe. Drei Quadratzahlen von der Beschaffenheit zu finden, daſs die Differenz zwischen der gröſsten und mittleren zu der Differenz zwischen der mittleren und kleinsten in einem gegebenen Verhältnisse stehe.

Auflösung. Es soll die erste Differenz das Dreifache der zweiten sein.

Wir setzen das kleinste Quadrat gleich x^2, das mittlere gleich $x^2 + 2x + 1$, also gleich dem Quadrat von $x + 1$. Dann wird das gröſste Quadrat $x^2 + 8x + 4$ sein. Daher muſs $x^2 + 8x + 4$ zu einem Quadrate gemacht werden.

Zu diesem Zwecke bilden wir das Quadrat der Summe von x — damit x^2 erscheine — und so vielen Einheiten, daſs in dem Ausdrucke für das Quadrat der Koeffizient von x und das von x unabhängige Glied nicht beide gröſser seien als beziehungsweise 8 und 4, sondern daſs die eine jener Zahlen gröſser, die andere kleiner sei als beziehungsweise 8 und 4.

Es sei 3 diese [zu x zu addierende] Zahl. Dann soll das Quadrat, d. i.

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 8x + 4$$

sein. Daraus folgt

$$x = 2\tfrac{1}{2}.$$

Danach wird das gröſste Quadrat $30\frac{1}{4}$, das kleinste $6\frac{1}{4}$, das mittlere $12\frac{1}{4}$ betragen, und diese Werte genügen der Aufgabe*).

---

*) Wird allgemein das kleinste Quadrat gleich x^2, das mittlere gleich $(x + k)^2$ gesetzt, und soll die Differenz zwischen dem gröſsten und mittleren das $m$fache der Differenz zwischen dem mittleren und kleinsten sein, so wird das gröſste Quadrat

$$(x + k)^2 + m[(x + k)^2 - x^2]$$

betragen. Diesen Ausdruck in ein Quadrat zu verwandeln, setzen wir

$$x^2 + 2k(m + 1)x + k^2(m + 1) = (x + lk)^2$$

und erhalten leicht

$$x = \frac{k}{2} \cdot \frac{l^2 - m - 1}{m + 1 - l}.$$

Darin sind k, l unbestimmt, während m gegeben ist. Die gesuchten Quadrate sind also

21. Aufgabe. Zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs das Quadrat einer jeden, auch wenn man es um die andere Zahl vermehrt, eine Quadratzahl bleibt.

Auflösung. Wir nehmen an, die erste Zahl sei x, und damit das Quadrat derselben, wenn man es um die zweite Zahl vermehrt, ebenfalls eine Quadratzahl werde, so setzen wir die zweite Zahl gleich $2x + 1$.

Es erübrigt noch, dafs auch das Quadrat der zweiten Zahl, wenn dasselbe um die erste Zahl vermehrt wird, ein Quadrat werde. Wenn man aber zum Quadrat der zweiten die erste Zahl addiert, so erhält man $4x^2 + 5x + 1$. Das soll gleich einem Quadrat sein.

Als Seite dieses Quadrats nehmen wir $2x - 2$ an. Das Quadrat dieser Zahl ist $4x^2 + 4 - 8x$, und aus

$$4x^2 + 5x + 1 = 4x^2 + 4 - 8x$$

ergiebt sich

$$x = \frac{3}{13}.$$

Die erste Zahl wird also $\frac{3}{13}$, die zweite $\frac{19}{13}$ sein, und diese Werte genügen der Aufgabe*).

---

22. Aufgabe. Zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs das Quadrat einer jeden, wenn man es um die andere Zahl vermindert, eine Quadratzahl bleibt.

$\left[\frac{k}{2} \cdot \frac{l^2 - m - 1}{m + 1 - l}\right]^2$, $\left[\frac{k}{2} \cdot \frac{l^2 - 2l + m + 1}{m + 1 - l}\right]^2$, $\left[\frac{k}{2} \cdot \frac{(2l-1)(m+1) - l^2}{m + 1 - l}\right]^2$; z. B. ist für $m = 3$, $k = 2$, $l = 3$ das kleinste Quadrat 25, das mittlere 49, das gröfste 121.

*) Wird allgemein die erste Zahl gleich x, die zweite gleich $2kx + k^2$ gesetzt, wo k unbestimmt bleibt, so haben wir, um auch der zweiten Forderung zu genügen,

$$(2kx + k^2)^2 + x = (2kx + m)^2$$

anzunehmen, wo m eine zweite unbestimmt bleibende Zahl bezeichnet. Es ergiebt sich für die gesuchten Zahlen

$$\frac{m^2 - k^4}{4k^3 - 4km + 1} \text{ und } \frac{2k^5 - 4k^3m + k^2 + 2km^2}{4k^3 - 4km + 1}.$$

Diophants Lösung entspricht den Werten $k = 1$, $m = -2$.

Auflösung. Wir nehmen als kleinere Zahl die Summe von x und einer beliebigen Zahl an, etwa $x+1$.

Damit nun, wenn man von dem Quadrat der kleineren Zahl die gröſsere Zahl subtrahiert, ein Quadrat übrig bleibe, muſs die gröſsere Zahl gleich dem um x^2 verminderten Quadrat der kleineren angenommen werden. Nun ist aber das Quadrat der kleineren Zahl x^2+2x+1; daher wird, indem x^2 weggelassen wird, sich für die gröſsere Zahl $2x+1$ ergeben; denn unter dieser Annahme wird offenbar das Quadrat der kleineren Zahl, wenn man die gröſsere Zahl davon subtrahiert, ein Quadrat sein.

Es muſs aber auch das Quadrat der gröſseren Zahl, nämlich $4x^2+4x+1$, wenn man es um die kleinere Zahl vermindert, ein Quadrat ergeben. Diese Differenz ist $4x^2+3x$. Dieselbe soll gleich einem Quadrat sein. Wir setzen daher

$$4x^2+3x=(3x)^2$$

und erhalten

$$x=\frac{3}{5}.$$

Die kleinere Zahl wird also $\frac{8}{5}$, die gröſsere $\frac{11}{5}$ sein, und diese Werte genügen der Aufgabe*).

---

*) Allgemein setzen wir die kleinere Zahl gleich $x+k$, die gröſsere gleich $2kx+k^2$; damit dann das Quadrat der gröſseren Zahl, um die kleinere vermindert, gleichfalls ein Quadrat sei, nehmen wir, unter m eine zweite unbestimmt bleibende Zahl verstehend,

$$(2kx+k^2)^2-(x+k)=(2kx+m)^2$$

an und erhalten leicht für die gesuchten Zahlen die Werte

$$x+k=\frac{3k^4-4k^2m+m^2}{4k^3-4km-1}, \quad 2kx+k^2=\frac{2k^5-4k^3m+k^2+2km^2}{4k^3-4km-1},$$

oder, wenn $k=1$ angenommen wird,

$$x+1=\frac{3-4m+m^2}{3-4m}, \quad 2x+1=\frac{3-4m+2m^2}{3-4m}.$$

Diophant gelangt, da er von vornherein $k=2$ annimmt, zu $4x^2+3x$, d. i. einem Ausdrucke von der Form a^2x^2+bx. Diesen in ein Quadrat zu verwandeln, setzt er $a^2x^2+bx=c^2x^2$, wo $c^2>a^2$ sein muſs, und erhält $x=\frac{b}{c^2-a^2}$.

23. Aufgabe. Zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs das Quadrat einer jeden, wenn es um die Summe der beiden Zahlen vermehrt wird, ein Quadrat bleibt.

Auflösung. Wir nehmen die kleinere Zahl gleich x und die gröfsere gleich $x + 1$ an, damit das Quadrat der kleineren, d. i. x^2, wenn man es um die Summe der beiden Zahlen, d. i. $2x + 1$ vermehrt, ein Quadrat werde.

Es bleibt noch zu bewirken, dafs auch das Quadrat der gröfseren Zahl, wenn es um die Summe der beiden Zahlen vermehrt wird, ein Quadrat bilde. Wenn wir aber zum Quadrat der gröfseren Zahl die Summe beider Zahlen addieren, so erhalten wir $x^2 + 4x + 2$. Das soll ein Quadrat sein. Wir nehmen als Seite dieses Quadrats $x - 2$ an. Dann wird das Quadrat, d. i.

$$x^2 + 4 - 4x = x^2 + 4x + 2$$

sein, und daraus erhält man

$$x = \frac{2}{8}.$$

Die kleinere Zahl wird also $\frac{2}{8}$, die gröfsere $\frac{10}{8}$ sein, und diese Werte genügen der Aufgabe*).

---

24. Aufgabe. Zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs das Quadrat einer jeden eine Quadratzahl bleibt, wenn es um die Summe der beiden Zahlen vermindert wird.

Auflösung. Wir setzen die kleinere Zahl gleich x, und damit das Quadrat der gröfseren, wenn es um die Summe der beiden Zahlen vermindert wird, eine Quadratzahl bleibe, nehmen wir die gröfsere Zahl gleich $x + 1$ an.

Nun mufs noch das Quadrat der kleineren Zahl, wenn es um die Summe der beiden Zahlen vermindert wird, eine Quadratzahl bilden. Dasselbe wird dann $x^2 - 2x - 1$ betragen, und dieser Ausdruck soll ein Quadrat sein.

---

*) Bei dieser und der folgenden Aufgabe ist die Verallgemeinerung der Lösung ganz ähnlich wie in der 22. Aufgabe auszuführen und kann daher wohl dem Leser überlassen bleiben.

Als Seite dieses Quadrats nehmen wir $x - 3$ an. Dann ist

$$x^2 + 9 - 6x = x^2 - 2x - 1,$$

und es ergiebt sich

$$x = 2\tfrac{1}{2}.$$

Die kleinere Zahl wird also $2\frac{1}{2}$, die gröfsere $3\frac{1}{2}$ sein, und diese Werte genügen der Aufgabe.

---

25. Aufgabe. Zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs das Quadrat ihrer Summe eine Quadratzahl bleibt, wenn es um jede der beiden Zahlen vermehrt wird.

Auflösung. Da x^2 eine Quadratzahl giebt, sowohl wenn man $3x^2$, als auch wenn man $8x^2$ dazu addiert, so nehmen wir an, die eine der gesuchten Zahlen sei $3x^2$, die andere $8x^2$, das Quadrat der Summe beider x^2. Bei dieser Annahme wird nämlich das Quadrat der Summe der Zahlen, wenn es um jede derselben vermehrt wird, eine Quadratzahl bleiben.

Da nun die Summe der beiden Zahlen $11x^2$ ist, so wird das Quadrat der Summe $121x^4$ sein. Dasselbe ist aber auch gleich x^2. Wir haben daher

$$121x^4 = x^2.$$

Es müssen jetzt auch die Seiten beider Quadrate einander gleich sein, also

$$11x^2 = x.$$

Wird nun alles durch x dividiert, so erhält man

$$11x = 1,$$

und daraus ergiebt sich

$$x = \frac{1}{11}.$$

Die eine Zahl wird also $\frac{3}{121}$, die andere $\frac{8}{121}$, das Quadrat ihrer Summe $\frac{121}{14641}$ sein, und diese Werte genügen der Aufgabe*).

---

*) Für die gesuchten Zahlen ergeben sich allgemein die Werte

$$\frac{k^2 + 2k}{[k^2 + 2k + n^2 + 2n]^2}, \quad \frac{n^2 + 2n}{[k^2 + 2k + n^2 + 2n]^2},$$

wo k, n willkürlich angenommen werden können. Diophants Lösung entspricht den Werten $k = 1$, $n = 2$.

26. Aufgabe. Zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs das Quadrat ihrer Summe eine Quadratzahl bleibt, wenn es um jede der beiden Zahlen vermindert wird.

Auflösung. Ich nehme zuerst irgend eine Quadratzahl, von welcher bei Subtraktion einer jeden von zwei beliebigen Zahlen ein Quadrat übrig bleibt.

Diese Quadratzahl sei 16, welche Zahl sowohl bei Subtraktion von 12, als auch bei Subtraktion von 7 ein Quadrat als Rest giebt.

Nun drücke ich die gesuchten Zahlen durch x^2 aus und zwar die eine durch $12x^2$, die andere durch $7x^2$, das Quadrat ihrer Summe aber durch $16x^2$; denn bei dieser Annahme ist die Bedingung erfüllt, dafs das Quadrat der Summe beider Zahlen, wenn man es um jede derselben vermindert, eine Quadratzahl als Rest giebt.

Es bleibt jetzt noch zu bewirken, dafs das Quadrat der Summe beider Zahlen gleich $16x^2$ sei. Dann müssen aber auch die Seiten beider Quadrate einander gleich sein, also

$$19x^2 = 4x,$$

und daraus erhält man

$$x = \frac{4}{19}.$$

Die erste Zahl ist somit $\frac{192}{361}$, die zweite $\frac{112}{361}$, und diese Werte genügen der Aufgabe*).

---

27. Aufgabe. Zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs ihr Produkt, wenn es um jede derselben vermehrt wird, ein Quadrat bilde, und dafs zugleich die Summe der Seiten dieser Quadrate gleich einer gegebenen Zahl sei.

---

*) Allgemein kann das Quadrat der Summe beider Zahlen mit a^2, die eine Zahl mit $2ab - b^2$, die andere mit $2ac - c^2$ bezeichnet werden. Die Zahlen a, b, c haben dann nur der einen Bedingungsgleichung

$$2ab - b^2 + 2ac - c^2 = a$$

zu genügen.

Auflösung. Es wird verlangt, dafs die Summe der Seiten der Quadrate 6 betrage.

Wenn die gröfsere von zwei Zahlen das um 1 verminderte Vierfache der kleineren ist, so giebt das Produkt der Zahlen, wenn man es um die kleinere Zahl vermehrt, ein Quadrat. Daher setzen wir die kleinere Zahl gleich x, die gröfsere gleich $4x - 1$, und nun trifft es zu, dafs das Produkt ein Quadrat wird, wenn man die kleinere Zahl dazu addiert.

Es soll nun ebenso das um die gröfsere Zahl, d. i. $4x - 1$, vermehrte Produkt ein Quadrat sein, und zwar mufs die Seite dieses Quadrats gleich der Differenz von 6 und der Seite des kleineren Quadrats sein, damit der Aufgabe gemäfs die Summe der beiden Seiten 6 betrage. Wenn man aber zum Produkt der beiden Zahlen die gröfsere Zahl addiert, so erhält man $4x^2 + 3x - 1$, und das Quadrat von $6 - 2x$ ist $4x^2 + 36 - 24x$. Es mufs also

$$4x^2 + 3x - 1 = 4x^2 + 36 - 24x$$

sein, und daraus folgt

$$x = \frac{37}{27}.$$

Nun hatten wir die kleinere Zahl gleich x gesetzt; diese ist also $\frac{37}{27}$; die gröfsere war $4x - 1$; das ist $\frac{121}{27}$, und diese Werte genügen der Aufgabe*).

---

28. Aufgabe. Zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs das Produkt derselben, wenn es um jede der Zahlen vermindert wird, ein Quadrat bilde, und dafs zugleich die Summe der Seiten dieser beiden Quadrate gleich einer gegebenen Zahl sei.

---

*) Allgemein setzen wir die gröfsere Zahl gleich $a^2x - 1$, die kleinere gleich x und nehmen an, die Summe der Seiten der beiden auf die angegebene Weise gebildeten Quadrate sei b. Dann besteht die Gleichung

$$a^2x^2 - x + a^2x - 1 = (b - ax)^2,$$

und daraus folgt

$$x = \frac{b^2 + 1}{2ab + a^2 - 1}, \quad \text{u. s. w.}$$

Auflösung. Man verlangt, dafs die Summe der Seiten 5 betrage.

Wenn die gröfsere von zwei Zahlen das um 1 vermehrte Vierfache der kleineren ist, so ist das um die kleinere Zahl verminderte Produkt der Zahlen ein Quadrat. Daher setzen wir die gröfsere Zahl gleich $4x + 1$, die kleinere gleich x; dann wird das Produkt beider, wenn man es um die kleinere Zahl vermindert, gleich dem Quadrat $4x^2$, dessen Seite $2x$ ist.

Es mufs nun noch das Produkt der beiden Zahlen ein Quadrat sein, wenn man die gröfsere Zahl davon subtrahiert, und die Summe der Seiten beider Quadrate mufs gleich der gegebenen Zahl 5 sein. Wird aber das Produkt der Zahlen um die gröfsere Zahl vermindert, so erhält man $4x^2 - 3x - 1$. Das soll gleich dem Quadrat über der Seite $5 - 2x$ sein. Aus

$$4x^2 - 3x - 1 = (5 - 2x)^2 = 25 + 4x^2 - 20x$$

erhält man aber

$$x = \frac{26}{17};$$

daher wird die kleinere Zahl $\frac{26}{17}$, die gröfsere $\frac{121}{17}$ betragen, und diese Werte genügen der Aufgabe*).

---

29. **Aufgabe.** Zwei Quadratzahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs das Produkt derselben, wenn man es um jede der beiden Zahlen vermehrt, ein Quadrat wird.

Auflösung. Nehmen wir an, die erste Quadratzahl sei x^2, die zweite 1, so ist das Produkt beider gleich x^2, also eine Quadratzahl. Dies Produkt soll nun, wenn jede der beiden Zahlen dazu addiert wird, ein Quadrat geben.

---

*) Allgemein sei $a^2x + 1$ die gröfsere, x die kleinere Zahl, b die Summe der Seiten der beiden zu bildenden Quadrate. Dann besteht die Gleichung

$$a^2x^2 + x - a^2x - 1 = (b - ax)^2,$$

welche

$$x = \frac{b^2 + 1}{1 + 2ab - a^2}$$

liefert.

Die Aufgabe ist also zunächst darauf zurückgeführt, zu untersuchen, welches Quadrat bei Addition von 1 ein Quadrat bleibt.

Wir setzen das Quadrat, welches das Produkt der beiden Zahlen sein soll, gleich x^2. Wird 1 dazu addiert, so erhält man $x^2 + 1$, und dieser Ausdruck soll ein Quadrat werden.

Als Seite dieses Quadrats nehmen wir $x - 2$ an; dann ist also

$$(x - 2)^2 = x^2 + 1,$$

und daraus folgt

$$x = \frac{3}{4}.$$

Somit wird die erste Quadratzahl $\frac{9}{16}$, die andere $\frac{16}{16}$ sein, und für diese Werte trifft es zu, dafs das Produkt beider bei Addition von 1 ein Quadrat giebt.

Es ist nun noch zu bewirken, dafs das Produkt der beiden Quadratzahlen, auch wenn die andere dazu addiert wird, ein Quadrat bildet. Das Produkt beider ist $\frac{9}{16}$, oder, wenn wir die gesuchte Zahl durch x^2 ausdrücken, $\frac{9}{16}x^2$; es soll also $\frac{9}{16}x^2 + \frac{9}{16}$, und daher auch, wenn alles mit 16 multipliziert wird, $9x^2 + 9$ ein Quadrat geben.

Wir nehmen als Seite dieses Quadrats $3x - 4$. Dann wird das Quadrat selbst $9x^2 + 16 - 24x$ sein, und aus

$$9x^2 + 16 - 24x = 9x^2 + 9$$

ergiebt sich

$$x = \frac{7}{24}.$$

Folglich wird das erste Quadrat $\frac{324}{576}$, das zweite $\frac{49}{576}$ sein, und diese Werte lösen die Aufgabe*).

---

*) Werden die gesuchten Quadratzahlen allgemein mit x^2 und y^2 bezeichnet, so soll zunächst $x^2y^2 + x^2 = x^2(y^2 + 1)$ ein Quadrat sein. Um $y^2 + 1$ zu einem solchen zu machen, setzen wir $y^2 + 1 = (y + k)^2$ und erhalten

$$y = \frac{1 - k^2}{2k},$$

30. Aufgabe. Zwei Quadratzahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs das Produkt derselben, wenn es um jede der beiden Zahlen vermindert wird, ein Quadrat bildet.

Auflösung. Wenn wir die erste Quadratzahl gleich x^2, die zweite gleich 1 setzen, so ist das Produkt beider gleich x^2. Es soll nun dieses Produkt, wenn es um 1 verringert wird, eine Quadratzahl geben. Da nun x^2 eine Quadratzahl ist, so ist die Aufgabe darauf zurückgeführt, eine Quadratzahl zu suchen, welche ein Quadrat bleibt, wenn 1 davon subtrahiert wird.

Eine solche Quadratzahl ist $\frac{25}{16}$; diese giebt nämlich, wenn man $1 = \frac{16}{16}$ davon subtrahiert, die Quadratzahl $\frac{9}{16}$. Wir setzen daher die eine gesuchte Quadratzahl gleich x^2, die andere gleich $\frac{25}{16}$; dann ist das um x^2 verminderte Produkt beider ein Quadrat.

Nun soll noch das Produkt, auch wenn $\frac{25}{16}$ davon subtrahiert wird, eine Quadratzahl bleiben. Das um $\frac{25}{16}$ verminderte Produkt ist aber $\frac{25}{16}x^2 - \frac{25}{16}$. Dies, oder wenn alles

---

wo k unbestimmt bleibt. Für diesen Wert von y ist die erste Bedingung erfüllt.

Damit nun zweitens auch $x^2y^2 + y^2$ ein Quadrat werde, mufs, wie sich auf dieselbe Weise ergiebt,

$$x = \frac{1 - m^2}{2m}$$

sein, wo m eine zweite willkürlich anzunehmende Zahl bezeichnet. Die gesuchten Quadratzahlen sind also

$$\left(\frac{1 - k^2}{2k}\right)^2, \quad \left(\frac{1 - m^2}{2m}\right)^2.$$

Man kann aber auch

$$x^2 + 1 = (1 + nx)^2$$

annehmen; daraus ergiebt sich

$$x = \frac{2n}{1 - n^2}.$$

Es kann also auch jede der gesuchten Quadratzahlen von der Form $\left(\frac{2n}{1 - n^2}\right)^2$ sein.

mit 16 multipliziert wird, $25x^2 - 25$ [also auch $x^2 - 1$] soll eine Quadratzahl sein.

Wir bilden daher das Quadrat von $x - 4$. Wird dasselbe, d. i.

$$x^2 + 16 - 8x = x^2 - 1$$

gesetzt, so ergiebt sich

$$x = \frac{17}{8}.$$

Somit wird die erste Quadratzahl $\frac{289}{64}$, die zweite $\frac{100}{64}$ sein, und diese Werte genügen der Aufgabe*).

---

31. Aufgabe. Zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs das Produkt derselben, sowohl bei Addition als auch bei Subtraktion der Summe beider Zahlen, ein Quadrat gebe.

Auflösung. Die Summe der Quadrate zweier beliebigen Zahlen wird ein Quadrat, sowohl wenn das doppelte Produkt beider Zahlen addiert, als auch wenn dasselbe subtrahiert wird.

Nehmen wir etwa die Zahlen 2 und 3, so ist klar, dafs die Summe der Quadrate, wenn sie um das doppelte Produkt vermehrt wird, die Quadratzahl 25 giebt, und dafs die Summe der Quadrate, wenn das doppelte Produkt subtrahiert wird, die Quadratzahl 1 als Rest liefert.

Ich setze nun das Produkt der beiden Zahlen gleich $13x^2$, und zwar sei die eine Zahl x, die andere $13x$; denn bei dieser Annahme ergiebt die Multiplikation beider $13x^2$. Da nun $13x^2$ sowohl bei Addition, als auch bei Subtraktion von $12x^2$ ein Quadrat giebt, so mufs $12x^2$ gleich der Summe der beiden Zahlen sein. Diese Summe ist aber $14x$. Daher ist

---

*) Werden die gesuchten Quadratzahlen allgemein mit x^2, y^2 bezeichnet, so ergiebt sich leicht

$$x^2 = \left(\frac{k^2+1}{2k}\right)^2, \quad y^2 = \left(\frac{m^2+1}{2m}\right)^2,$$

wo k und m unbestimmt bleiben. Diophants Lösung entspricht den Werten $k = 4$, $m = 2$.

$$12x^2 = 14x,$$

und daraus erhält man

$$x = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}.$$

Nun war die erste Zahl x, diese wird also $\frac{7}{6}$ sein; die zweite, welche $13x$ war, wird $\frac{91}{6}$ betragen, und diese Werte genügen der Aufgabe*).

---

32. Aufgabe. Zwei Zahlen zu finden, deren Summe eine Quadratzahl ist, und deren Produkt sowohl bei Addition als auch bei Subtraktion dieser Summe ein Quadrat giebt.

Auflösung. Wenn von zwei Zahlen die eine das Doppelte der anderen ist, so ist ihr doppeltes Produkt eine Quadratzahl, und die Summe ihrer Quadrate giebt ein Quadrat sowohl bei Addition als auch bei Subtraktion ihres doppelten Produkts.

Wir wählen daher die Zahlen 4 und 2. Ihr doppeltes Produkt ist gleich der Quadratzahl 16, und die Summe ihrer Quadrate, d. i. 20, giebt, wenn man 16 addiert oder subtrahiert, beziehungsweise die Quadrate 36 und 4.

Wir drücken nun die gesuchten Zahlen durch das Quadrat der Unbekannten aus, und zwar sei das Produkt beider Zahlen $20x^2$, ihre Summe $16x^2$. Ferner sei die eine Zahl $2x$, die andere $10x$; dann ist die Summe beider $12x$; dieselbe ist aber auch $16x^2$; also ist

$$16x^2 = 12x,$$

und daraus folgt

$$x = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$

Somit wird die erste Zahl $\frac{6}{4}$, die zweite $\frac{30}{4}$ sein, und diese Werte genügen der Aufgabe**).

---

*) Allgemein ergiebt sich für die gesuchten Zahlen $\frac{a^2+b^2+1}{2ab}$ und $\frac{a^2+b^2+1}{2ab} \cdot (a^2+b^2)$, wo a, b unbestimmt bleiben. Diophants Lösung entspricht den Werten $a = 2$, $b = 3$.

**) Um Diophants Verfahren zu verallgemeinern, setzen wir die Summe der Zahlen gleich a^2x^2, das Produkt gleich $(a^2+1)x^2$;

33. Aufgabe. Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs das Quadrat einer jeden ein Quadrat bleibt, wenn es um die nächstfolgende Zahl vermehrt wird.

Auflösung. Wir setzen die erste Zahl gleich x. Wenn nun eine Zahl um 1 gröfser als das Doppelte einer andern Zahl ist, so bleibt das Quadrat der kleineren, wenn man es um die gröfsere Zahl vermehrt, ein Quadrat. Daher nehmen wir an, die zweite Zahl sei um 1 gröfser als das Doppelte der ersten, also gleich $2x + 1$.

Weiter nehme ich die dritte Zahl um 1 gröfser an als das Doppelte der zweiten, also gleich $4x + 3$. Dann trifft es zu, dafs das Quadrat der ersten Zahl, wenn man es um die zweite vermehrt, ein Quadrat giebt, nämlich $x^2 + 2x + 1$, und dafs ebenso das Quadrat der zweiten Zahl, wenn die dritte dazu addiert wird, ein Quadrat bildet, nämlich $4x^2 + 8x + 4$.

Es soll nun noch das Quadrat der dritten Zahl, wenn die erste dazu addiert wird, ein Quadrat geben. Wenn man aber die dritte Zahl ins Quadrat erhebt und die erste dazu zählt, so erhält man $16x^2 + 25x + 9$. Das soll gleich einem Quadrat sein. Wir setzen es gleich dem Quadrat über der Seite $4x - 4$, also

$$16x^2 + 16 - 32x = 16x^2 + 25x + 9$$

und erhalten

$$x = \frac{7}{57}.$$

---

und zwar sei die eine Zahl gleich x, die andere gleich $(a^2 + 1)x$. Dann liefert die Gleichung

$$x + (a^2 + 1)x = a^2x^2$$

den Wert

$$x = \frac{a^2 + 2}{a^2}.$$

Die gesuchten Zahlen sind also $\frac{a^2 + 2}{a^2}$ und $\frac{(a^2 + 1)(a^2 + 2)}{a^2}$. Es ist jetzt nur noch die Bedingung zu erfüllen, dafs das Produkt und die Summe der Zahlen zusammen ein Quadrat geben, d. h. dafs $(2a^2 + 1)x^2$ oder einfach $2a^2 + 1$ ein Quadrat sei. Das ist, wie sich leicht ergiebt, der Fall für $a = \frac{2k}{2 - k^2}$; wo k unbestimmt bleibt. Diophants Lösung entspricht dem Werte $k = 1$.

Die erste Zahl wird also $\frac{7}{57}$, die zweite $\frac{71}{57}$, die dritte $\frac{199}{57}$ sein, und diese Werte genügen der Aufgabe*).

---

34. Aufgabe. Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs das Quadrat einer jeden ein Quadrat bleibt, wenn es um die nächstfolgende Zahl vermindert wird.

Auflösung. Wenn eine Zahl das um 1 verminderte Doppelte einer zweiten Zahl ist, so bleibt das Quadrat der kleineren Zahl, wenn man es um die gröfsere Zahl vermindert, eine Quadratzahl.

Ich setze daher die erste Zahl gleich $x + 1$, die zweite gleich $2x + 1$, die dritte gleich $4x + 1$. Dann trifft es zu, dafs das Quadrat der ersten Zahl, wenn man es um die zweite Zahl vermindert, eine Quadratzahl ist, und dafs ebenso das Quadrat der zweiten Zahl, wenn man die dritte davon subtrahiert, eine Quadratzahl giebt.

Es mufs nun noch das Quadrat der dritten Zahl, wenn man es um die erste Zahl vermindert, eine Quadratzahl als Rest geben. Wenn man aber vom Quadrat der dritten Zahl die erste subtrahiert, so erhält man $16x^2 + 7x$. Das soll ein Quadrat sein. Als Seite dieses Quadrats nehme ich $5x$; dann ist also

$$25x^2 = 16x^2 + 7x,$$

und daraus folgt

$$x = \frac{7}{9}.$$

---

*) Wird die erste Zahl gleich x, die zweite gleich $2ax + a^2$, die dritte gleich $2b(2ax + a^2) + b^2$ gesetzt, so sind die beiden ersten Bedingungen erfüllt, und es ist nur noch zu bewirken, dafs auch das Quadrat der dritten Zahl und die erste Zahl zusammen ein Quadrat geben. Zu diesem Zwecke haben wir die Gleichung

$$[2b(2ax + a^2) + b^2]^2 + x = (4abx + k)^2$$

für x zu lösen; darin sind a, b, k unbestimmt. Diophants Lösung entspricht den Werten $a = 1$, $b = 1$, $k = -4$.

Somit wird die erste Zahl $\frac{16}{9}$, die zweite $\frac{23}{9}$, die dritte $\frac{37}{9}$ sein, und diese Werte erfüllen die Bedingungen der Aufgabe*).

---

35. Aufgabe. Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs das Quadrat einer jeden eine Quadratzahl bleibt, wenn es um die Summe der drei Zahlen vermehrt wird.

Auflösung. Es sei eine Zahl das Produkt zweier Faktoren. Wenn wir dann den kleineren Faktor von dem gröfseren subtrahieren, die Hälfte dieser Differenz ins Quadrat erheben und zu diesem Quadrat die anfänglich genommene Zahl [das Produkt] addieren, so ist die Summe eine Quadratzahl.

Ich setze daher die Summe der drei Zahlen gleich irgend einem Vielfachen von x^2, dessen Koeffizient sich auf drei Arten in je zwei Faktoren zerlegen läfst, etwa gleich $12x^2$. In dieser Zahl 12 geht 1 auf, nämlich 12mal, ferner 2, nämlich 6mal, und 3, nämlich 4mal. Ich subtrahiere nun bei jeder dieser drei Zerlegungen den kleineren Faktor von dem gröfseren und nehme die Hälfte des Restes; die so erhaltenen Werte setze ich gleich den gesuchten Zahlen, also die erste gleich $5\frac{1}{2}$, die zweite gleich 2, die dritte gleich $\frac{1}{2}$; dann ist klar, dafs das Quadrat einer jeden dieser drei Zahlen, bei Addition von 12, eine Quadratzahl giebt, nämlich die eine $12\frac{1}{4}$, die andere 16, die letzte $42\frac{1}{4}$.

Ich drücke nun die gesuchten Zahlen durch die Unbekannte x [mit den gefundenen Werten als Koeffizienten] aus, nämlich die erste durch $5\frac{1}{2}x$, die zweite durch $2x$, die

---

*) Allgemein setzen wir die Zahlen gleich x, $2ax - a^2$, $2b(2ax - a^2) - b^2$ und lösen die Gleichung

$$[2b(2ax - a^2) - b^2]^2 - x = (4abx + k)^2,$$

wo a, b, k unbestimmt sind. Diophants Lösung entspricht den Werten $a = 1$, $b = 1$, $k = -11$ $\left(\text{oder } k = -\frac{29}{9}\right)$.

dritte durch $\frac{1}{2}x$. Es mufs dann die Summe der drei Zahlen gleich $12x^2$ sein. Diese Summe ist aber auch $8x$. Also ist

$$8x = 12x^2,$$

und daraus folgt

$$x = \frac{8}{12} = \frac{4}{6}.$$

Somit wird die erste Zahl $\frac{22}{6}$, die zweite $\frac{8}{6}$, die dritte $\frac{2}{6}$ sein, und diese Werte genügen der Aufgabe*).

---

36. **Aufgabe.** Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs das Quadrat einer jeden ein Quadrat bleibt, wenn es um die Summe der drei Zahlen vermindert wird.

Auflösung. Wir wählen, wie in der vorigen Aufgabe, irgend eine Zahl, welche durch drei verschiedene Zahlen teilbar ist. Diese Zahl sei wieder 12. Indem wir nun die beiden Faktoren jeder der drei Zerlegungen addieren und die Hälfte der Summe nehmen, setzen wir die erste der drei gesuchten Zahlen gleich $6\frac{1}{2}x$, die zweite gleich $4x$, die dritte gleich $3\frac{1}{2}x$. Dann trifft es zu, dafs das Quadrat jeder dieser Zahlen, wenn man $12x^2$ davon subtrahiert, eine Quadratzahl giebt.

Es erübrigt noch, dafs die Summe der drei Zahlen gleich $12x^2$ sei. Diese Summe ist aber $14x$; also ist

$$14x = 12x^2,$$

und daraus folgt

$$x = \frac{7}{6}.$$

*) Wenn die Zahl $a = a_1 a_2 = b_1 b_2 = c_1 c_2$ ist, wo $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$, $c_1 < c_2$ angenommen werden möge, so können wir die Summe der drei Zahlen gleich ax^2 und die Zahlen selbst beziehungsweise gleich $\frac{a_2 - a_1}{2}x$, $\frac{b_2 - b_1}{2}x$, $\frac{c_2 - c_1}{2}x$ setzen; dann liefert die Gleichung

$$\frac{a_2 - a_1}{2}x + \frac{b_2 - b_1}{2}x + \frac{c_2 - c_1}{2}x = ax^2$$

den Wert

$$x = \frac{(a_2 + b_2 + c_2) - (a_1 + b_1 + c_1)}{2a}.$$

Die erste Zahl wird also $\frac{45+\frac{1}{2}}{6}$ *), die zweite $\frac{28}{6}$, die dritte $\frac{24+\frac{1}{2}}{6}$ sein, und diese Werte genügen der Aufgabe**).

---

*) Diophant ist der einzige Grieche, bei dem solche aufsteigenden Kettenbrüche vorkommen, während dieselben bei den Ägyptern, den Arabern und noch mehr bei den italienischen Mathematikern vom 13. bis 16. Jahrhundert eine grofse Rolle spielen.

**) Ist wieder $a = a_1 a_2 = b_1 b_2 = c_1 c_2$, und werden die Zahlen gleich $\frac{a_2+a_1}{2}x$, $\frac{b_2+b_1}{2}x$, $\frac{c_2+c_1}{2}x$ und die Summe derselben gleich ax^2 gesetzt, so liefert die Gleichung

$$\frac{a_2+a_1}{2}x + \frac{b_2+b_1}{2}x + \frac{c_2+c_1}{2}x = ax^2$$

den Wert

$$x = \frac{(a_2+b_2+c_2)+(a_1+b_1+c_1)}{2a}.$$

III. Buch.

1. **Aufgabe.** Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs die Summe derselben eine Quadratzahl wird, wenn man das Quadrat einer jeden von ihr subtrahiert.

Auflösung. Wir wählen zwei Quadrate, etwa das Quadrat von x und dasjenige von $2x$; die Summe dieser Quadrate ist $5x^2$.

Nun nehmen wir $5x^2$ als Summe der drei gesuchten Zahlen an und setzen die eine gleich x, die andere gleich $2x$, so sind schon zwei der gestellten Bedingungen erfüllt.

Wir haben hier die Zahl 5, welche die Summe zweier Quadratzahlen, nämlich 1 und 4 ist; daher können wir 5 auf die oben [II, 10] dargelegte Weise in zwei andere Quadrate zerfällen, etwa in $\frac{4}{25}$ und $\frac{121}{25}$. Als dritte Zahl nehmen wir die Seite eines dieser letzteren Quadrate an, etwa $\frac{2}{5}x$; dann giebt auch das Quadrat der dritten Zahl, wenn es von der Summe der Zahlen subtrahiert wird, ein Quadrat als Rest, nämlich $\frac{121}{25}x^2$.

Es mufs nun noch die Summe der drei Zahlen gleich $5x^2$ sein. Diese Summe ist aber $3\frac{2}{5}x$, und aus

$$3\frac{2}{5}x = 5x^2$$

ergiebt sich

$$x = \frac{85}{125}.$$

Die erste Zahl wird also $\frac{85}{125}$, die zweite $\frac{170}{125}$, die dritte $\frac{34}{125}$ sein, und diese Werte genügen der Aufgabe*).

---

*) Wird die Summe der drei Zahlen gleich $(a^2 + b^2)x^2$ gesetzt und nach II, 10 die Summe $a^2 + b^2$ in zwei Quadrate zer-

2. Aufgabe. Drei Zahlen von solcher Beschaffenheit zu finden, dafs das Quadrat ihrer Summe, wenn jede der drei Zahlen dazu addiert wird, eine Quadratzahl bleibt.

Auflösung. Wir setzen das Quadrat der Summe der drei Zahlen gleich x^2, und damit das Quadrat der Summe, d. i. x^2, bei Hinzufügung jeder der drei Zahlen ein Quadrat gebe, nehmen wir die erste Zahl gleich $3x^2$, die zweite gleich $8x^2$, die dritte gleich $15x^2$ an. Dann ergiebt sich nämlich beziehungsweise $4x^2$, $9x^2$ und $16x^2$.

Nun mufs aber die Summe der drei Zahlen gleich der Seite des Quadrats über dieser Summe, d. i. gleich x sein. Die Summe der drei Zahlen ist $26x^2$; also ergiebt sich [$26x^2 = x$ und]

$$x = \frac{1}{26}.$$

Somit wird die erste Zahl $\frac{3}{676}$, die zweite $\frac{8}{676}$, die dritte $\frac{15}{676}$ sein, und diese Werte genügen der Aufgabe*).

---

fällt, deren Wurzeln von a, b verschieden sind, so ergeben sich für die gesuchten Zahlen die Ausdrücke

$$ax, \quad bx, \quad \frac{bm^2 - 2am - b}{m^2 + 1} x,$$

und die Gleichung

$$(a^2 + b^2) x^2 = ax + bx + \frac{bm^2 - 2am - b}{m^2 + 1} x,$$

in der a, b, m unbestimmt bleiben, giebt die allgemeine Lösung der Aufgabe.

*) Damit eine Quadratzahl erhalten werde, wenn man jede Zahl zum Quadrate der Summe der Zahlen addiert, nimmt man diese Summe gleich x an und setzt die Zahlen beziehungsweise gleich $(a^2 - 1)x^2$, $(b^2 - 1)x^2$, $(c^2 - 1)x^2$. Dann liefert die Gleichung

$$(a^2 - 1)x^2 + (b^2 - 1)x^2 + (c^2 - 1)x^2 = x$$

den Wert

$$x = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 - 3};$$

jede der Zahlen a, b, c mufs > 1 sein, ist aber im übrigen unbestimmt.

3. Aufgabe. Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daſs das Quadrat ihrer Summe ein Quadrat bleibt, wenn jede der drei Zahlen davon subtrahiert wird.

Auflösung. Wird die Summe der drei Zahlen gleich $4x$ gesetzt, so ist das Quadrat der Summe $16x^2$, und dieses giebt ein Quadrat als Rest, wenn $7x^2$ oder $12x^2$ oder $15x^2$ davon subtrahiert wird.

Ich setze daher die erste Zahl gleich $7x^2$, die zweite gleich $12x^2$, die dritte gleich $15x^2$. Dann erübrigt noch, daſs die Summe dieser drei Ausdrücke gleich der Summe der drei gesuchten Zahlen sei. Die Summe der drei Zahlen ist aber gleich $4x$ angenommen worden, und jene drei Ausdrücke geben zusammen $34x^2$. Also [ist

$$34x^2 = 4x,$$

und daraus] folgt

$$x = \frac{2}{17}$$

und

$$x^2 = \frac{4}{289}.$$

Somit wird die erste Zahl $\frac{28}{289}$, die zweite $\frac{48}{289}$, die dritte $\frac{60}{289}$ sein, und diese Werte genügen der Aufgabe*).

---

4. Aufgabe. Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daſs, wenn man das Quadrat ihrer Summe von jeder der drei Zahlen subtrahiert, der Rest ein Quadrat werde.

---

*) Wird allgemein die Summe der Zahlen gleich ax gesetzt und die erste Zahl gleich $(a^2 - 1)x^2$, die zweite gleich $(2ab - b^2)x^2$, die dritte gleich $(2ac - c^2)x^2$ angenommen, so muſs

$$(a^2 - 1 + 2ab - b^2 + 2ac - c^2)x^2 = ax$$

sein, und daraus folgt

$$x = \frac{a}{a^2 - 1 + 2ab - b^2 + 2ac - c^2},$$

wo a, b, c unbestimmt sind. Diophants Lösung entspricht den Werten $a = 4$, $b = 2$, $c = 1$.

Auflöung. Wir setzen die Summe der drei Zahlen gleich x; dann ist das Quadrat ihrer Summe x^2.

Es seien nun die drei Zahlen beziehungsweise $2x^2$, $5x^2$, $10x^2$; dann giebt jede der Zahlen, wenn sie um das Quadrat der Summe der Zahlen, d. i. x^2, vermindert wird, ein Quadrat als Rest.

Nun leuchtet ein, dafs die Seite des Quadrats über der Summe der Zahlen gleich der Summe jener drei Ausdrücke ist. Die Summe der drei Zahlen ist somit ebensowohl gleich x, als gleich $17x^2$, und daraus folgt

$$x = \frac{1}{17},$$

also

$$x^2 = \frac{1}{289}.$$

Die erste Zahl wird daher $\frac{2}{289}$, die zweite $\frac{5}{289}$, die dritte $\frac{10}{289}$ sein, und diese Werte genügen der Aufgabe*).

---

5. **Aufgabe.** Drei Zahlen zu finden, deren Summe ein Quadrat ist, und die so beschaffen sind, dafs die Summe je zweier die dritte Zahl um eine Quadratzahl übertrifft.

Auflösung. Wir setzen die Summe der drei Zahlen gleich dem Quadrat von $x + 1$, also gleich $x^2 + 2x + 1$. Wenn nun die Summe der ersten und zweiten um 1 gröfser sein soll, als die dritte Zahl, so müssen wir die dritte Zahl gleich $\frac{1}{2}x^2 + x$ annehmen; denn bei dieser Annahme übertrifft die Summe der beiden ersten Zahlen die dritte Zahl um 1.

Weiter soll die Summe der zweiten und dritten Zahl die erste ebenfalls um eine Quadratzahl, etwa um x^2 übertreffen; dann wird die erste $x + \frac{1}{2}$ sein, und es bleibt für die zweite noch $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ übrig.

---

*) Allgemeine Lösung:

$$\frac{a^2+1}{(a^2+b^2+c^2+3)^2},\quad \frac{b^2+1}{(a^2+b^2+c^2+3)^2},\quad \frac{c^2+1}{(a^2+b^2+c^2+3)^2}.$$

Nun muſs noch die Summe der ersten und dritten Zahl die zweite um eine Quadratzahl übertreffen. Wenn man aber von der Summe der ersten und dritten die zweite Zahl subtrahiert, so erhält man $2x$. Das soll gleich einer Quadratzahl sein, etwa gleich 16; dann ist

$$x = 8.$$

Die erste Zahl wird also $8\frac{1}{2}$, die zweite $32\frac{1}{2}$, die dritte 40 betragen, und diese Werte genügen der Aufgabe.

---

6. Andere Auflösung. Ich suche zuerst drei Quadratzahlen, deren Summe ein Quadrat ist. Wenn ich zwei Quadrate, etwa 4 und 9, addiere und dann untersuche, welche Quadratzahl bei Addition zur Summe jener beiden, d. i. 13, ein Quadrat giebt, so erhalte ich 36 [II, 11]. Es wird also die Summe jener drei Quadrate eine Quadratzahl sein.

Jetzt sind nur noch drei Zahlen von der Beschaffenheit zu suchen, daſs die Summe je zweier um eine gegebene Zahl gröſser sei als die dritte, nämlich die erste und zweite zusammen um 4 gröſser als die dritte, die zweite und dritte um 9 gröſser als die erste, die dritte und erste um 36 gröſser als die zweite. Diese Aufgabe ist aber oben [I, 18] gelöst worden. Es ergiebt sich für die erste Zahl 20, für die zweite $6\frac{1}{2}$, für die dritte $22\frac{1}{2}$, und diese Werte genügen der Aufgabe*).

---

*) Werden die Zahlen mit I, II, III bezeichnet, so soll jeder der vier Ausdrücke

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}, \quad \mathrm{I} + \mathrm{II} - \mathrm{III}, \quad \mathrm{II} + \mathrm{III} - \mathrm{I}, \quad \mathrm{III} + \mathrm{I} - \mathrm{II}$$

ein Quadrat werden. Ist nun

$$\begin{aligned} \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} &= x^2 + 2ax + a^2 \\ \mathrm{I} + \mathrm{II} - \mathrm{III} &= \phantom{x^2 + 2ax + {}} a^2 \\ -\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} &= x^2, \end{aligned}$$

so ergiebt sich leicht

$$\mathrm{I} = ax + \frac{1}{2}a^2, \quad \mathrm{II} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}a^2, \quad \mathrm{III} = \frac{1}{2}x^2 + ax.$$

7. Aufgabe. [Vieta, Zet. V, 1.] Drei Zahlen zu finden, deren Summe ein Quadrat ist, und von denen die Summe je zweier gleichfalls ein Quadrat ist.

Auflösung. Wir nehmen an, die Summe der drei Zahlen sei gleich dem Quadrat $x^2 + 2x + 1$, und es sei die Summe der ersten und zweiten Zahl x^2, so bleibt für die dritte Zahl $2x + 1$ übrig.

Ferner sei die Summe der zweiten und dritten Zahl gleich dem Quadrat $x^2 + 1 - 2x$, dessen Seite $x - 1$ ist. Da nun alle drei Zahlen zusammen $x^2 + 2x + 1$ geben, so bleibt für die erste $4x$. Die Summe der ersten und zweiten Zahl ist aber gleich x^2 gesetzt worden; folglich wird die zweite Zahl gleich $x^2 - 4x$ sein.

Es mufs nun noch die Summe der ersten und dritten Zahl, nämlich $6x + 1$, gleich einem Quadrat sein. Es sei

$$6x + 1 = 121,$$

so ergiebt sich

$$x = 20.$$

Die erste Zahl wird also 80, die zweite 320, die dritte 41 sein, und diese Werte genügen der Aufgabe*).

Es soll nun noch III + I — II, d. i. $2ax$ zu einem Quadrat gemacht werden. Wir setzen also $2ax = k^2$, wo k unbestimmt bleibt, und erhalten für die gesuchten Zahlen

$$\frac{a^2 + k^2}{2}, \quad \frac{4a^4 + k^4}{8a^2}, \quad \frac{k^4 + 4a^2k^2}{8a^2}.$$

*) Setzen wir

$$\begin{aligned} \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} &= x^2 + 2ax + a^2 \\ \mathrm{I} + \mathrm{II} \qquad &= x^2 \\ \mathrm{II} + \mathrm{III} &= x^2 - 2ax + a^2, \end{aligned}$$

so ergiebt sich

$$\mathrm{I} = 4ax, \quad \mathrm{II} = x^2 - 4ax, \quad \mathrm{III} = 2ax + a^2,$$

und es ist noch I + III, d. i. $6ax + a^2$ zu einem Quadrat zu machen. Wir setzen also

$$6ax + a^2 = k^2$$

und erhalten

$$x = \frac{k^2 - a^2}{6a},$$

wo a, k unbestimmt sind.

8. Andere Auflösung. Wir nehmen die Summe der drei Zahlen gleich $x^2 + 2x + 1$ und die Summe der ersten und zweiten Zahl gleich x^2 an, so wird die dritte Zahl $2x + 1$ sein.

Es sei weiter die Summe der zweiten und dritten Zahl $x^2 + 1 - 2x$. Da nun die dritte Zahl $2x + 1$ ist, so wird die zweite $x^2 - 4x$ sein. Es ist aber die Summe der ersten und zweiten gleich x^2, und da die zweite $x^2 - 4x$ ist, so mufs die erste $4x$ sein.

Jetzt haben die drei Zahlen das angegebene Quadrat $x^2 + 2x + 1$ zur Summe, und sowohl die Summe der ersten und zweiten, als auch diejenige der zweiten und dritten Zahl ist eine Quadratzahl.

Es erübrigt noch, dafs auch die Summe der dritten und ersten Zahl, nämlich $6x + 1$, ein Quadrat sei. Setzen wir

$$6x + 1 = 36,$$

so ergiebt sich

$$x = \frac{35}{6}.$$

Die erste Zahl wird also $\frac{140}{6} = \frac{840}{36}$, die zweite $\frac{385}{36}$, die dritte $\frac{456}{36}$ sein, und diese Werte genügen der Aufgabe.

---

9. **Aufgabe.** [Vieta, Zet. V, 3.] Drei Zahlen von gleicher Differenz zu finden, die so beschaffen sind, dafs die Summe je zweier eine Quadratzahl ist.

Auflösung. Ich suche zunächst drei Quadratzahlen von gleicher Differenz, deren halbe Summe gröfser als jede der drei Zahlen ist.

Wird die erste gleich x^2, die zweite gleich $x^2 + 2x + 1$ gesetzt, so ist die Differenz beider gleich $2x + 1$. Wenn ich also $2x + 1$ zur zweiten Zahl addiere, so erhalte ich die dritte Zahl, nämlich $x^2 + 4x + 2$. Diese setze ich gleich dem Quadrate über der Seite $x - 8$; also ist das Quadrat

$$x^2 + 64 - 16x = x^2 + 4x + 2,$$

und daraus folgt

$$x = \frac{62}{20} = \frac{31}{10}.$$

Es wird also [wenn der Nenner 100 abgeworfen wird] die erste Zahl 961, die zweite 1681, die dritte 2401 sein, und diese Werte genügen der Aufgabe: Drei Quadratzahlen von gleicher Differenz zu suchen; dabei ist die halbe Summe gröfser als jede einzelne der Zahlen.

Jetzt gehe ich zur vorgelegten Aufgabe über, nämlich: Drei Zahlen von gleicher Differenz zu ermitteln, die so beschaffen sind, dafs die Summe je zweier eine Quadratzahl sei.

Ich suche zuerst drei Quadratzahlen von gleicher Differenz; das ist oben geschehen, und es hat sich für das erste Quadrat 961, für das zweite 1681, für das dritte 2401 ergeben.

Jetzt haben wir nur drei Zahlen von der Beschaffenheit zu suchen, dafs die erste und zweite zusammen 961 geben, die zweite und dritte zusammen 2401 (wegen der Gleichheit der Differenz wird die Reihenfolge geändert*)), die dritte und erste zusammen 1681.

Die Summe der drei Zahlen werde gleich x gesetzt. Wird von dieser Summe x der drei Zahlen die Summe der beiden ersten, d. i. 961, subtrahiert, so ergiebt sich die dritte Zahl, nämlich $x - 961$.

Wird weiter von x die Summe der zweiten und dritten Zahl, nämlich 2401 subtrahiert, so erhält man die erste Zahl, nämlich $x - 2401$. Wird endlich von x die Summe der dritten und ersten Zahl, d. i. 1681, subtrahiert, so ergiebt sich die zweite Zahl, nämlich $x - 1681$. Es erübrigt noch, dafs die Summe der drei Zahlen gleich x, also

$$3x - 5043 = x$$

sei. Daraus folgt

$$x = 2521\tfrac{1}{2},$$

womit die Aufgabe gelöst ist**).

---

*) Es mufs $\mathrm{I} + \mathrm{II} < \mathrm{I} + \mathrm{III} < \mathrm{II} + \mathrm{III}$ sein.

**) Auf dem von Diophant angegebenen Wege findet man für drei Quadratzahlen gleicher Differenz leicht die allgemeinen Ausdrücke:

$$u^2 = \left[\frac{k^2 - 2a^2}{4a - 2k}\right]^2, \quad v^2 = \left[\frac{k^2 + 2a^2 - 2ak}{4a - 2k}\right]^2,$$

$$w^2 = \left[\frac{4ak - k^2 - 2a^2}{4a - 2k}\right]^2.$$

10. Aufgabe. [Vieta, Zet. V, 4.] Zu einer gegebenen Zahl drei andere Zahlen von solcher Beschaffenheit zu finden, daſs die Summe je zweier der letzteren bei Addition der gegebenen Zahl ein Quadrat gebe, und daſs ferner die Summe aller drei Zahlen, wenn die gegebene Zahl dazu addiert wird, ebenfalls ein Quadrat werde.

Auflösung. Die gegebene Zahl sei 3 und die Summe der beiden ersten Zahlen $x^2 + 4x + 1$, damit bei Addition von 3 ein Quadrat entstehe.

Die Summe der zweiten und dritten Zahl sei $x^2 + 6x + 6$, die Summe aller drei Zahlen $x^2 + 8x + 13$, so daſs auch diese Ausdrücke bei Addition von 3 Quadrate werden.

Da nun die Summe aller drei Zahlen $x^2 + 8x + 13$ und die Summe der beiden ersten $x^2 + 4x + 1$ ist, so bleibt für die dritte Zahl $4x + 12$.

Da ferner die Summe der drei Zahlen $x^2 + 8x + 13$ und die Summe der zweiten und dritten $x^2 + 6x + 6$ ist, so muſs die erste Zahl $2x + 7$ betragen. Die erste und zweite Zahl sind aber zusammen $x^2 + 4x + 1$, also muſs die zweite $x^2 + 2x - 6$ sein.

Nun muſs noch die Summe der ersten und dritten Zahl bei Addition von 3 ein Quadrat werden. Wenn man 3 zur Summe der ersten und dritten Zahl addiert, so erhält man $6x + 22$. Dies muſs gleich einem Quadrat sein. Es sei

$$6x + 22 = 100,$$

so erhält man

$$x = 13.$$

Werden nun die gesuchten Zahlen mit I, II, III bezeichnet, so geben die Gleichungen

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} = u^2, \quad \mathrm{II} + \mathrm{III} = w^2, \quad \mathrm{I} + \mathrm{III} = v^2$$

die Werte

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - w^2, \quad \mathrm{II} = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - v^2,$$

$$\mathrm{III} = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - u^2.$$

Die erste Zahl wird also 33, die zweite 189, die dritte 64 sein, und diese Werte genügen der Aufgabe*).

---

11. Aufgabe. [Vieta, Zet. V, 5.] Zu einer gegebenen Zahl drei andere Zahlen von der Beschaffenheit zu suchen, dafs die Summe je zweier, wenn sie um die gegebene Zahl vermindert wird, ein Quadrat werde, und dafs ebenso die Summe aller drei Zahlen, wenn die gegebene Zahl davon subtrahiert wird, ein Quadrat als Rest gebe.

Auflösung. Es sei wieder 3 die gegebene Zahl und die Summe der beiden ersten Zahlen $x^2 + 3$, so dafs bei Subtraktion von 3 ein Quadrat bleibt. Weiter sei $x^2 + 2x + 4$ die Summe der zweiten und dritten Zahl und $x^2 + 4x + 7$ die Summe aller drei Zahlen, so dafs auch diese Ausdrücke bei Subtraktion von 3 Quadrate werden.

Da nun die drei Zahlen zusammen $x^2 + 4x + 7$ und die erste und zweite zusammen $x^2 + 3$ betragen, so mufs die dritte $4x + 4$ sein.

---

*) Ist a die gegebene Zahl, so folgt aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathrm{I} + \mathrm{II} &= x^2 + 2mx + (m^2 - a) \\ \mathrm{II} + \mathrm{III} &= x^2 + 2nx + (n^2 - a) \\ \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} &= x^2 + 2px + (p^2 - a), \end{aligned}$$

dafs

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= 2(p - n)x + (p^2 - n^2) \\ \mathrm{III} &= 2(p - m)x + (p^2 - m^2) \\ \mathrm{II} &= x^2 + 2(m + n - p)x + (m^2 + n^2 - p^2 - a) \end{aligned}$$

ist, und damit noch $\mathrm{I} + \mathrm{III} + a$ ein Quadrat sei, mufs

$$x = \frac{k^2 + m^2 + n^2 - 2p^2 - a}{2(2p - m - n)}$$

angenommen werden; darin ist a gegeben, während k, m, n, p unbestimmt sind.

Fermat bemerkt hier: „Wie man vier Zahlen von der Beschaffenheit ermittelt, dafs die Summe je zweier derselben durch Addition einer gegebenen Zahl in ein Quadrat verwandelt wird, zeige ich in der Anmerkung zur 3. Aufgabe des 5^{ten} Buches."

Da weiter die zweite und dritte zusammen $x^2 + 2x + 4$ sind und die dritte $4x + 4$ ist, so muſs die zweite $x^2 - 2x$ sein.

Endlich sind die erste und zweite Zahl zusammen $x^2 + 3$, und die zweite Zahl allein beträgt $x^2 - 2x$; es muſs also die erste Zahl $2x + 3$ sein.

Jetzt erübrigt noch, daſs die Summe der dritten und ersten Zahl, wenn 3 davon subtrahiert wird, eine Quadratzahl werde. Wenn man aber die dritte und erste Zahl addiert und von der Summe 3 subtrahiert, so erhält man $6x + 4$. Das muſs gleich einer Quadratzahl sein. Es sei

$$6x + 4 = 64,$$

so ergiebt sich

$$x = 10.$$

Danach wird die erste Zahl 23, die zweite 80, die dritte 44 betragen, und diese Werte genügen der Aufgabe*).

---

12. Aufgabe. [Vieta, Zet. V, 7.] Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daſs das um eine gegebene Zahl vermehrte Produkt je zweier derselben eine Quadratzahl sei.

Auflösung. Die gegebene Zahl sei 12. Nun soll das Produkt der beiden ersten Zahlen, wenn 12 dazu addiert wird, eine Quadratzahl geben. Wenn ich also von irgend einer Quadratzahl 12 subtrahiere, so werde ich das Produkt der ersten und zweiten Zahl erhalten.

Ich wähle die Quadratzahl 25. Wenn ich von dieser 12 subtrahiere, so wird der Rest, d. i. 13, das Produkt der ersten und zweiten Zahl sein. Es sei die erste Zahl 13, die zweite 1, oder vielmehr es sollen diese Zahlen durch die Unbekannte x

---

*) Die allgemeine Darstellung der Lösung dieser Aufgabe ist derjenigen der vorigen Aufgabe ganz ähnlich und kann dem Leser überlassen bleiben.

Fermat bemerkt hier: „Meine Anmerkung zur dritten Aufgabe des 5ten Buches lehrt, wie man vier Zahlen von der Beschaffenheit findet, daſs die Summe je zweier derselben ein Quadrat wird, wenn man eine gegebene Zahl davon subtrahiert.“

ausgedrückt werden, jedoch so, dafs das Produkt derselben 13 bleibt, nämlich die erste durch $13x$, die zweite durch $\frac{1}{x}$.

Wenn ich jetzt 12 von einer anderen Quadratzahl subtrahiere, so erhalte ich das Produkt der zweiten und dritten Zahl. Es sei dies Quadrat 16, so bleibt für das Produkt der zweiten und dritten Zahl 4. Auch diese beiden Zahlen sollen wieder durch die Unbekannte x ausgedrückt werden, doch so, dafs ihr Produkt 4 bleibt. Da nun die zweite Zahl $\frac{1}{x}$ ist, so mufs die dritte $4x$ sein.

Jetzt mufs noch das Produkt aus der ersten und dritten Zahl, wenn es um 12 vermehrt wird, eine Quadratzahl geben. Das Produkt aus der ersten und dritten Zahl ist aber $52x^2$. Es mufs also $52x^2 + 12$ [und daher auch $13x^2 + 3$] ein Quadrat sein.

Wenn nun der Koeffizient 13 von x im Ausdruck der ersten Zahl eine Quadratzahl wäre, so würde die Gleichung sehr leicht zu lösen sein. Da das nicht der Fall ist, so ist die Aufgabe auf folgende zurückgeführt:

Zwei Zahlen [statt 13 und 4] von der Beschaffenheit zu finden, dafs ihr Produkt ein Quadrat sei, und dafs jede derselben, wenn sie um 12 vermehrt wird, ebenfalls ein Quadrat werde.

Wenn ich nicht zwei beliebige Zahlen, sondern zwei Quadratzahlen nehme, so wird das Produkt beider von selbst eine Quadratzahl sein. Ich habe also nur zwei Quadratzahlen zu suchen, von denen jede, wenn sie um 12 vermehrt wird, ein Quadrat bleibt.

Das ist aber leicht, und sobald diese Quadratzahlen gefunden sind, macht, wie gesagt, die Lösung unserer Gleichung keine Schwierigkeit mehr. Das eine Quadrat ist 4, das andere $\frac{1}{4}$; denn jede dieser beiden Zahlen giebt, wenn sie um 12 vermehrt wird, eine Quadratzahl.

Nachdem ich diese Werte gefunden habe, kehre ich zur ursprünglichen Aufgabe zurück und setze die erste Zahl gleich $4x$, die zweite gleich $\frac{1}{x}$, die dritte gleich $\frac{1}{4}x$. Dann ist nur

noch zu bewirken, dafs das Produkt aus der ersten und dritten Zahl, wenn es um 12 vermehrt wird, ein Quadrat gebe. Das Produkt der ersten und dritten Zahl ist aber x^2. Daher mufs $x^2 + 12$ zu einem Quadrat werden. Ich bilde nun das Quadrat über der Seite $x + 3$. Dasselbe wird $x^2 + 6x + 9$ sein, und aus
$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 12$$
erhält man
$$x = \frac{3}{6},$$
womit die Aufgabe gelöst ist*).

---

13. **Aufgabe.** [Vieta, Zet. V, 8.] Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs das um eine gegebene Zahl verminderte Produkt je zweier derselben eine Quadratzahl sei.

Auflösung. Die gegebene Zahl sei 10. Da das Produkt aus der ersten und zweiten Zahl, wenn 10 davon subtrahiert wird, ein Quadrat geben soll, so mufs ich, wenn ich zu irgend einer Quadratzahl 10 addiere, jenes Produkt erhalten. Diese Quadratzahl sei 4. Dann ist das Produkt aus der ersten und

---

*) Das von Diophant eingeschlagene Verfahren läfst sich leicht allgemein darstellen. Auffallender Weise übersieht Diophant, dafs $52x^2 + 12$ für $x = 1$ zu einem Quadrat, nämlich gleich 64 wird. Um den allgemeinen Ausdruck der Werte zu erhalten, welche $52x^2 + 12$ oder $13x^2 + 3$ zu einem Quadrate machen, setze man $x = 1 + k$, wo k unbestimmt bleibt. Man erhält
$$13x^2 + 3 = 13k^2 + 26k + 16$$
und, wenn
$$13k^2 + 26k + 16 = (4 + kl)^2$$
gesetzt wird, wo l gleichfalls eine unbestimmt bleibende Gröfse bezeichnet,
$$k = \frac{8l - 26}{13 - l^2},$$
woraus sich
$$x = \frac{-l^2 + 8l - 13}{13 - l^2}$$
ergiebt. Dafs dies Verfahren Diophant nicht unbekannt war, dürfte aus VI, 16 hervorgehen.

zweiten Zahl 14. Nun sei die erste Zahl 14, also die zweite 1, oder vielmehr es mögen diese Zahlen wieder durch die Unbekannte x ausgedrückt werden, doch so, daſs das Produkt 14 bleibt, nämlich die erste durch $14x$, die zweite durch $\frac{1}{x}$.

Wenn ich weiter zu einer anderen Quadratzahl 10 addiere, so erhalte ich das Produkt aus der zweiten und dritten Zahl. Diese Quadratzahl sei 9; dann ist also das Produkt aus der zweiten und dritten Zahl 19. Nun ist die zweite Zahl $\frac{1}{x}$, folglich muſs die dritte $19x$ sein.

Jetzt muſs noch das Produkt aus der ersten und dritten Zahl, wenn es um 10 vermindert wird, ein Quadrat geben. Dasselbe wird $266x^2 - 10$. Dieser Ausdruck soll gleich einem Quadrat werden*). Nach dem in der vorhergehenden Aufgabe Gesagten bin ich also dazu geführt, zwei Quadrate zu suchen, von denen jedes, wenn es um 10 vermindert wird, eine Quadratzahl als Rest giebt. Das ist aber leicht. Du findest nämlich, wenn du untersuchst, welches Quadrat bei Subtraktion von 10 wieder ein Quadrat giebt, folgendes: Wenn zu irgend einer Zahl 1 addiert, die Hälfte der Summe ins Quadrat erhoben und von dem erhaltenen Quadrat die anfangs genommene Zahl subtrahiert wird, so wird der Rest wieder eine Quadratzahl sein. Daher addiere ich 1 zu 10, erhebe die Hälfte der Summe, d. i. $5\frac{1}{2}$, ins Quadrat und subtrahiere von dem Quadrat, nämlich von $30\frac{1}{4}$, die Zahl 10, so erhalte ich $20\frac{1}{4}$, eine Quadratzahl, deren Seite $4\frac{1}{2}$ ist.

Ich setze nun die erste Zahl gleich $30\frac{1}{4}$, die dritte gleich x^2, und es muſs, wenn von x^2 die Zahl 10 subtrahiert wird, der Rest ein Quadrat sein, oder $x^2 - 10$ muſs gleich einem

---

*) Auch dieser Ausdruck wird für $x = 1$ ein Quadrat, kann also auf die in der vorigen Aufgabe dargelegte Weise behandelt werden. Man erhält als Wert von x, für welchen $266x^2 - 10$ ein Quadrat wird,

$$x = \frac{-l^2 + 32l - 266}{266 - l^2},$$

wo l jede Zahl sein kann.

Quadrat werden. Als Seite dieses Quadrats nehme ich $x - 2$ an. Das Quadrat selbst wird dann $x^2 + 4 - 4x$ sein, und aus

$$x^2 + 4 - 4x = x^2 - 10$$

ergiebt sich

$$x = 3\tfrac{1}{2}.$$

Die dritte Zahl, welche ich gleich x^2 gesetzt hatte, wird daher gleich $12\frac{1}{4}$ sein; die erste wird $30\frac{1}{4}$ betragen, und jede dieser Zahlen giebt ein Quadrat, wenn 10 davon subtrahiert wird.

Jetzt gehe ich zu der ursprünglich gestellten Aufgabe über und setze die erste Zahl gleich $30\frac{1}{4}x$, die zweite gleich $\frac{1}{x}$, die dritte gleich $12\frac{1}{4}x$. Dann soll noch das Produkt aus der ersten und dritten Zahl, wenn 10 davon subtrahiert wird, ein Quadrat geben. Das Produkt aus der ersten und dritten Zahl ist aber $\left(370 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}\right)x^2$. Dies also soll gleich einem Quadrat werden, wenn man 10 davon subtrahiert; damit der Koeffizient von x^2 eine ganze Zahl sei, multipliziere ich mit 16. Dann mufs $5929x^2 - 160$ gleich einem Quadrat werden; als Seite dieses Quadrats nehme ich $77x - 2$, setze also

$$5929x^2 - 160 = 5929x^2 + 4 - 308x.$$

Daraus ergiebt sich

$$x = \frac{41}{77}.$$

Nun hatte ich die erste Zahl gleich $30\frac{1}{4}x$ gesetzt; dieselbe wird also $\frac{1240\frac{1}{4}}{77}$ sein; die zweite Zahl, d. i. $\frac{1}{x}$, wird gleich $\frac{77}{41}$ sein; die dritte hatte ich gleich $12\frac{1}{4}x$ gesetzt; dieselbe wird $\frac{502\frac{1}{4}}{77}$ betragen, und diese Werte genügen der Aufgabe*).

---

*) Die Quadratzahlen, welche bei Subtraktion der gegebenen Zahl a Quadrate bleiben, sind

$$p^2 = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2, \quad q^2 = \left(\frac{a+k^2}{2k}\right)^2,$$

wo k unbestimmt bleibt. Wir setzen daher

14. Aufgabe. Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daſs das Produkt je zweier derselben, wenn es um die dritte Zahl vermehrt wird, ein Quadrat bildet.

Auflösung. Wir wollen, daſs das Produkt aus der ersten und zweiten Zahl, wenn es um die dritte vermehrt wird, ein Quadrat bilde. Wenn wir also irgend ein Quadrat wählen und einen Teil desselben als dritte Zahl, den Rest als das Produkt der ersten und zweiten Zahl annehmen, so werden wir eine der Forderungen erfüllen.

Es werde das Quadrat über $x + 3$ gebildet. Dasselbe wird $x^2 + 6x + 9$ sein. Es sei nun 9 die dritte Zahl, so wird der Rest $x^2 + 6x$ das Produkt der ersten und zweiten sein. Wir setzen die erste Zahl gleich x, also die zweite gleich $x + 6$. Dann muſs noch das Produkt aus der zweiten und dritten Zahl, wenn es um die erste vermehrt wird, d. i. $10x + 54$ ein Quadrat sein, und weiter muſs das Produkt aus der dritten und ersten Zahl, wenn man es um die zweite vermehrt, also $10x + 6$, ebenfalls ein Quadrat geben.

Es entsteht hier also eine doppelte Gleichung. Die Differenz der beiden Ausdrücke ist 48. Wir müssen also zwei Quadratzahlen suchen, deren Differenz 48 ist. Das ist leicht und auf unendlich verschiedene Arten möglich.

Das kleinere Quadrat ist etwa 16, das gröſsere 64, und welches von beiden wir auch für die Gleichung benutzen, immer erhalten wir denselben Wert von x. Wenn wir nämlich das gröſsere Quadrat, d. i. $64 = 10x + 54$ setzen, so ergiebt sich $x = 1$, und wird das kleinere Quadrat, d. i. $16 = 10x + 6$ gesetzt, so folgt ebenfalls $x = 1$.

$$\mathrm{I} = p^2 x, \quad \mathrm{II} = \frac{1}{x}, \quad \mathrm{III} = q^2 x,$$

und es bleibt dann nur noch die Bedingung zu erfüllen, daſs $\mathrm{I} \,.\, \mathrm{III} - a$, d. i. $p^2 q^2 x^2 - a$ ein Quadrat werde. Dies zu bewirken, setzen wir

$$p^2 q^2 x^2 - a = (pqx - l)^2$$

und erhalten

$$x = \frac{l^2 + a}{2pql},$$

wo l ebenfalls unbestimmt bleibt.

Die erste Zahl wird also 1, die zweite 7 sein, die dritte ist 9, und diese Werte lösen die Aufgabe*).

---

15. Aufgabe. Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs das Produkt je zweier derselben, wenn die dritte Zahl davon subtrahiert wird, ein Quadrat bildet.

Auflösung. Wir setzen die erste Zahl gleich x, die zweite gleich $x + 4$. Dann wird das Produkt beider $x^2 + 4x$ sein, und dies Produkt mufs, wenn es um die dritte Zahl vermindert wird, ein Quadrat geben. Wenn wir also die dritte Zahl gleich $4x$ annehmen, so werden wir eine der Forderungen erfüllen.

Es mufs noch das um die erste Zahl verminderte Produkt der zweiten und dritten Zahl ein Quadrat geben, und ebenso mufs ein Quadrat entstehen, wenn die zweite Zahl von dem Produkt der dritten und ersten subtrahiert wird.

Das um die erste Zahl verminderte Produkt der zweiten und dritten ist aber $4x^2 + 15x$, und das soll ein Quadrat sein. Das um die zweite Zahl verminderte Produkt der dritten und ersten ist $4x^2 - x - 4$, und das soll ebenfalls ein Quadrat sein.

---

*) Geht man allgemeiner von dem Quadrat $x^2 + 2ax + a^2$ aus und setzt die dritte Zahl gleich a^2, die erste gleich x, also die zweite gleich $x + 2a$, so hat man noch die beiden Ausdrücke

$$a^2x + 2a^3 + x, \quad a^2x + 2a + x$$

in Quadrate zu verwandeln. Die Differenz derselben $2a(a^2 - 1)$ kann auf verschiedene Weisen in je zwei Faktoren zerlegt werden, und jede solche Zerlegung giebt eine Lösung der Aufgabe, in der noch die unbestimmte Gröfse a vorkommt. So z. B. entspricht der Zerlegung $2a \,.\, (a^2 - 1)$ die Lösung

$$\mathrm{I} = \frac{1}{4}(a^2 - 4a + 1), \quad \mathrm{II} = \frac{1}{4}(a^2 + 4a + 1), \quad \mathrm{III} = a^2;$$

der Zerlegung $(a + 1) \,.\, (2a^2 - 2a)$ die Lösung

$$\mathrm{I} = \frac{1}{4}(a^2 - 12a + 1) + \frac{5a}{2(a^2 + 1)},$$

$$\mathrm{II} = \frac{1}{4}(4a^2 - 4a + 1) + \frac{5a}{2(a^2 + 1)}, \quad \mathrm{III} = a^2; \text{ u. s. w.}$$

Es entsteht also wieder eine doppelte Gleichung. Da die Differenz der beiden Ausdrücke $16x + 4$ ist, so suche ich zwei Zahlen, deren Produkt $16x + 4$ beträgt. Es sind dies die Zahlen 4 und $4x + 1$. Nun ist entweder das Quadrat der halben Summe dieser beiden Zahlen gleich dem gröfseren oder das Quadrat der halben Differenz derselben gleich dem kleineren Ausdruck zu setzen, und dadurch erhält man $x = \frac{25}{20}$. Folglich wird die erste Zahl $\frac{25}{20}$, die zweite $\frac{105}{20}$, die dritte $\frac{100}{20}$ sein, und diese Werte genügen der Aufgabe*).

---

16. Aufgabe. Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs das Produkt je zweier derselben, wenn es um das Quadrat der dritten Zahl vermehrt wird, ein Quadrat bilde.

---

*) Setzen wir, um das Verfahren allgemein darzustellen, die gesuchten Zahlen gleich x, $x + a$, ax, so ist jeder der beiden Ausdrücke

$$ax^2 + a^2x - x, \quad ax^2 - a - x$$

in ein Quadrat zu verwandeln. Die Differenz derselben $a^2x + a$ kann gleich $a(ax + 1)$ gesetzt werden, und wir erhalten die Gleichung

$$\left(\frac{ax + a + 1}{2}\right)^2 = ax^2 + a^2x - x$$

oder

$$(a^2 - 4a)x^2 + 2(- a^2 + a + 2)x = - (a + 1)^2.$$

Für den von Diophant gewählten Wert $a = 4$ wird $x = \frac{25}{20}$. Ist aber a von 4 verschieden, so hat die Gleichung die beiden Wurzeln

$$\frac{a + 1}{a - 4}, \quad \frac{a^2 - 3a - 4}{a(a - 4)},$$

von denen die erste für die gesuchten Zahlen die Ausdrücke

$$\frac{a + 1}{a - 4}, \quad \frac{a + 1}{a - 1} + a, \quad \frac{a(a + 1)}{a - 4},$$

die zweite

$$\frac{a^2 - 3a - 4}{a(a - 4)}, \quad \frac{a^2 - 3a - 4}{a(a - 4)} + a, \quad \frac{a^2 - 3a - 4}{a - 4}$$

liefert.

Auflösung. Wir setzen die erste Zahl gleich x, die zweite gleich $4x + 4$ und die dritte gleich 1; dann sind schon zwei von den Forderungen der Aufgabe erfüllt.

Es mufs nun noch das Produkt aus der dritten und ersten Zahl, wenn es um das Quadrat der zweiten vermehrt wird, ein Quadrat geben. Wenn man aber die dritte und erste Zahl multipliziert und zum Produkt das Quadrat der zweiten addiert, so erhält man $16x^2 + 33x + 16$. Das mufs gleich einem Quadrat, etwa gleich dem Quadrat über der Seite $4x - 5$ sein. Es ist also

$$16x^2 + 25 - 40x = 16x^2 + 33x + 16,$$

und daraus folgt

$$x = \frac{9}{73}.$$

Die erste Zahl wird also [wenn der Nenner abgeworfen wird] 9 sein, die zweite 328, die dritte 73, und diese Werte genügen der Aufgabe*).

---

17. Aufgabe. Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs das Produkt je zweier derselben, wenn es um die Summe eben dieser beiden Zahlen vermehrt wird, ein Quadrat bildet.

Auflösung. Wenn man zu dem Produkte zweier beliebigen auf einander folgenden Quadratzahlen die Summe derselben

---

*) Werden die Zahlen mit I, II, III bezeichnet und $\mathrm{I} = \frac{ax}{4}$, $\mathrm{II} = ax + b^2$, $\mathrm{III} = \frac{b^2}{4}$ gesetzt, so sind $\mathrm{I}.\mathrm{II} + \mathrm{III}^2$ und $\mathrm{II}.\mathrm{III} + \mathrm{I}^2$ schon Quadrate; man hat also nur noch $\mathrm{I}.\mathrm{III} + \mathrm{II}^2$, d. i.

$$a^2x^2 + \frac{33ab^2x}{16} + b^4$$

in ein Quadrat zu verwandeln. Setzt man

$$a^2x^2 + \frac{33ab^2x}{16} + b^4 = (ax + kb^2)^2,$$

so ergiebt sich

$$x = \frac{16b^2(k^2 - 1)}{a(33 - 32k)},$$

wo k unbestimmt bleibt. Eine ganz allgemeine Lösung giebt Euler, Commentationes Alg. Coll. II, p. 576.

addiert, so erhält man wieder eine Quadratzahl $[a^2(a+1)^2 + a^2 + (a+1)^2 = (a^2+a+1)^2]$. Deshalb setzen wir die erste Zahl gleich 4, die zweite gleich 9, damit das durch Multiplikation beider erhaltene Quadrat, nämlich 36, bei Hinzufügung der Summe beider ein Quadrat gebe.

Nun mufs noch das Produkt aus der zweiten und dritten Zahl, wenn es um die Summe beider vermehrt wird, ein Quadrat geben, und ebenso mufs man ein Quadrat erhalten, wenn man die dritte und erste Zahl multipliziert und zum Produkt die Summe beider addiert.

Wird die dritte Zahl gleich x gesetzt, so wird das Produkt aus der zweiten und dritten, wenn man es um die Summe beider vermehrt, gleich $10x+9$; dies soll gleich einem Quadrat sein. Weiter wird das Produkt aus der dritten und ersten Zahl bei Addition der Summe dieser beiden Zahlen gleich $5x+4$, und auch dieser Ausdruck soll ein Quadrat sein.

Wir haben also hier wieder eine doppelte Gleichung zu lösen. Da die Differenz der beiden Ausdrücke $5x+5$ ist, so suche ich zwei Zahlen, deren Produkt $5x+5$ ist. Die eine dieser Zahlen ist $x+1$, die andere 5. Nach dem im zweiten Buche Gelehrten setze ich nun entweder das Quadrat der halben Summe beider Zahlen gleich dem gröfseren Ausdruck, oder das Quadrat der halben Differenz beider Zahlen gleich dem kleineren Ausdruck. Dann ergiebt sich $x = 28$. Die erste Zahl ist also 4, die zweite 9, die dritte 28, und diese Werte lösen die Aufgabe*).

---

*) Setzt man $\mathrm{I} = a^2$, $\mathrm{II} = (a+1)^2$, $\mathrm{III} = x$, so hat man die Ausdrücke

$$(a+1)^2x + (a+1)^2 + x, \quad a^2x + a^2 + x$$

in Quadrate zu verwandeln. Die Differenz derselben $(2a+1)x + (2a+1)$ kann gleich $(2a+1)(x+1)$ gesetzt werden, und da die Gleichung

$$\left(\frac{x-2a}{2}\right)^2 = a^2x + a^2 + x$$

den Wert

$$x = 4(a^2+a+1)$$

liefert, so sind die gesuchten Zahlen

$$a^2, \quad (a+1)^2, \quad 4(a^2+a+1).$$

18. Aufgabe. Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daſs das Produkt je zweier derselben, wenn

---

Wird allgemeiner I $= x$, II $= y$, III $= z$ gesetzt, so soll $xy + x + y = a^2$ und $xz + x + z = b^2$ sein; daraus folgt

$$y = \frac{a^2 - x}{x + 1}, \quad z = \frac{b^2 - x}{x + 1}.$$

Wenn also die gesuchten Zahlen durch

$$x, \quad \frac{a^2 - x}{x + 1}, \quad \frac{b^2 - x}{x + 1}$$

ausgedrückt werden, so sind bereits zwei Forderungen erfüllt, und es ist nur noch

$$\frac{a^2 - x}{x + 1} \cdot \frac{b^2 - x}{x + 1} + \frac{a^2 - x}{x + 1} + \frac{b^2 - x}{x + 1} = \frac{(a^2 + 1)(b^2 + 1) - (x + 1)^2}{(x + 1)^2}$$

in ein Quadrat zu verwandeln, was am leichtesten in der Weise geschieht, daſs man erst $a^2 + 1$, dann $b^2 + 1$ und hierauf

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) - (x + 1)^2$$

in ein Quadrat verwandelt.

Fermat bemerkt hier: „Eine ganz ähnliche Aufgabe ist die 5^{te} des 5^{ten}-Buches. Ob Diophant aber auch das folgende Problem gekannt und ausgelassen hat, oder ob es in einem der verlorenen Bücher behandelt worden ist, wissen wir nicht. Die Aufgabe lautet: „Drei Quadratzahlen von der Beschaffenheit zu finden, daſs das Produkt und die Summe je zweier derselben zusammen ein Quadrat bilden.“ Ich kann von derselben unendlich viele Lösungen angeben. So z. B. genügen der Aufgabe die drei folgenden Quadrate:

$$\frac{3504384}{203401}, \quad \frac{2019241}{203401}, \quad 4.$$

Nun hindert nichts, weiter zu gehen und die Aufgabe Diophants zu verallgemeinern. In der That kann ich die folgende Aufgabe allgemein und auf unendlich viele Arten lösen:

Vier Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daſs das Produkt und die Summe je zweier derselben zusammen eine Quadratzahl bilden.

Wir suchen nämlich nach V, 5 drei Quadratzahlen von der Beschaffenheit, daſs das Produkt je zweier derselben, wenn es um die Summe dieser beiden Zahlen vermehrt wird, ein Quadrat gebe. Diese drei Zahlen seien es um die Summe eben dieser beiden Zahlen vermehrt wird, ein Quadrat bildet.

Auflösung. Wir setzen die erste Zahl gleich x, die zweite gleich 3. Wird dann das Produkt beider um ihre Summe vermehrt, so ergiebt sich $4x + 3$. Das soll gleich einem Quadrat sein. Es sei dies Quadrat 25, so erhält man für x den Wert $5\frac{1}{2}$.

Es wird dann also die erste Zahl $5\frac{1}{2}$, die zweite 3 sein, und damit ist eine der Forderungen der Aufgabe erfüllt; denn das Produkt dieser beiden Zahlen wird, wenn man ihre Summe dazu zählt, gleich der Quadratzahl 25.

Es mufs nun noch das Produkt aus der zweiten und dritten und ebenso das Produkt aus der dritten und ersten Zahl, wenn jedesmal die Summe der beiden genommenen Zahlen dazu addiert wird, ein Quadrat geben.

Setzen wir die dritte Zahl gleich x, so wird das Produkt aus der zweiten und dritten Zahl, wenn man die Summe dieser beiden Zahlen dazu zählt, wieder $4x + 3$; das Produkt aus der dritten und ersten Zahl dagegen giebt, wenn man es um die Summe dieser Zahlen vermehrt, $6\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}$, und jeder dieser beiden Ausdrücke soll gleich einem Quadrat sein.

Da aber in diesen beiden Ausdrücken die Koeffizienten von x sowohl, als auch die von x unabhängigen Glieder ungleich sind und sich auch nicht wie zwei Quadratzahlen zu einander verhalten, so ist der Ansatz unnütz, und wir sind dazu geführt, zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu suchen,

---

$\frac{25}{9}$, $\frac{64}{9}$, $\frac{196}{9}$. Wir nehmen dieselben als die drei ersten der gesuchten Zahlen an und setzen die vierte gleich x. Wenn wir dann jede der drei ersten Zahlen mit x multiplizieren und jedes Produkt um die Summe seiner Faktoren vermehren, so erhalten wir

$$\frac{34x}{9} + \frac{25}{9}, \quad \frac{73x}{9} + \frac{64}{9}, \quad \frac{205x}{9} + \frac{196}{9}.$$

Jeder dieser drei Ausdrücke mufs in ein Quadrat verwandelt werden. Wie man aber diese dreifache Gleichung löst, habe ich in einer Anmerkung zur 24[ten] Aufgabe des 6[ten] Buches erläutert.“

dafs das Produkt beider, wenn man es um ihre Summe vermehrt, ein Quadrat gebe, und dafs aufserdem die beiden Zahlen, wenn jede um 1 vergröfsert wird, sich wie zwei Quadratzahlen verhalten.

Wenn nun eine Zahl um 3 gröfser als das Vierfache einer andern ist und zu jeder derselben 1 addiert wird, so verhalten sich die Summen wie zwei Quadratzahlen. Daher setze ich die erste Zahl gleich x, die zweite gleich $4x + 3$. Dann erübrigt noch, dafs das Produkt beider, wenn man es um ihre Summe vermehrt, ein Quadrat gebe. Das Produkt dieser Zahlen wird aber, wenn man es um ihre Summe vermehrt, gleich $4x^2 + 8x + 3$. Das soll gleich einem Quadrat sein.

Als Seite dieses Quadrats nehme ich $2x - 3$ an. Das Quadrat selbst wird dann $4x^2 + 9 - 12x$ sein, und es ergiebt sich aus $4x^2 + 8x + 3 = 4x^2 + 9 - 12x$

$$x = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

Also wird die erste Zahl $\frac{3}{10}$, die zweite $\frac{42}{10} = 4\frac{1}{5}$ sein, und eine der Forderungen ist erfüllt.

Nun mufs noch das Produkt aus der zweiten und dritten und ebenso das Produkt aus der dritten und ersten Zahl, wenn jedesmal die Summe der beiden Zahlen dazu gezählt wird, ein Quadrat geben.

Setze ich die dritte Zahl gleich x, so wird, da die zweite $4\frac{1}{5}$ ist, das Produkt beider, wenn man es um ihre Summe vermehrt, $5\frac{1}{5}x + 4\frac{1}{5}$. Dieser Ausdruck soll ein Quadrat sein; derselbe sei gleich 25.*)

Da weiter die dritte Zahl x, die erste $\frac{3}{10}$ ist, so wird das um ihre Summe vermehrte Produkt beider $\frac{13}{10}x + \frac{3}{10}$ sein. Auch dieser Ausdruck soll ein Quadrat sein; er sei gleich 100*).

Vervielfache ich $5\frac{1}{5}x + 4\frac{1}{5}$ mit 25, so erhalte ich den Ausdruck $130x + 105$, der gleichfalls ein Quadrat sein mufs. Wenn ich ebenso $\frac{13}{10}x + \frac{3}{10}$ mit 100 vervielfache, so erhalte

*) Ungeschickte Einschaltung eines Abschreibers.

ich den Ausdruck $130x + 30$, der ebenfalls ein Quadrat werden mufs. Die Differenz dieser beiden Ausdrücke ist 75. Ich habe also wieder eine doppelte Gleichung und erhalte aus derselben

$$x = \frac{7}{10}.$$

Die dritte Zahl wird somit $\frac{7}{10}$ sein; die erste war $\frac{3}{10}$, die zweite $\frac{42}{10}$, und diese Werte genügen der Aufgabe.

---

19. **Aufgabe.** Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs das Produkt je zweier derselben, wenn es um die Summe dieser beiden Zahlen vermindert wird, eine Quadratzahl werde.

Auflösung. Wenn wir, wie in der vorhergehenden Aufgabe, die erste Zahl gleich x setzen und der zweiten einen beliebigen Wert beilegen, so kommen wir in dieselbe unlösbare Schwierigkeit. Damit nun die Koeffizienten von x in beiden Ausdrücken sich wie zwei Quadratzahlen zu einander verhalten, müssen wir zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, dafs das Produkt beider, wenn es um ihre Summe verringert wird, ein Quadrat gebe, und dafs aufserdem, wenn man von jeder der beiden Zahlen 1 subtrahiert, sich die Reste wie zwei Quadratzahlen verhalten.

Wenn nun eine Zahl 3 weniger beträgt, als das Vierfache einer andern, und jede um 1 verringert wird, so verhalten sich die Reste wie zwei Quadratzahlen. Wird nämlich von jeder der Zahlen 1 subtrahiert, so entsteht bei der einen die abzuziehende Zahl 4, bei der andern die abzuziehende Zahl 1, und es ist klar, dafs, wenn eine Zahl das Vierfache einer andern ist und man von derselben 4mal so viel als von der andern subtrahiert, auch der Rest das Vierfache des Restes der andern sein wird, dafs also beide Reste sich wie zwei Quadratzahlen zu einander verhalten.

Daher setze ich die erste Zahl gleich $x + 1$, die zweite gleich $4x + 1$; dann wird das Produkt beider, wenn ihre Summe subtrahiert wird, $4x^2 - 1$. Wenn man diesen Ausdruck gleich dem Quadrat über der Seite $2x - 2$, d. i. gleich

$$4x^2 + 4 - 8x$$

setzt, so ergiebt sich

$$x = \frac{5}{8}.$$

Es wird also die erste Zahl $\frac{13}{8}$, die zweite $\frac{28}{8}$ sein, und jetzt ist eine der Forderungen erfüllt.

Während nun die erste Zahl $\frac{13}{8}$, die zweite $\frac{28}{8}$ ist, setze ich die dritte gleich x. Wenn ich jetzt die zweite und dritte multipliziere, so erhalte ich $3\frac{1}{2}x$, und wenn ich davon die Summe der zweiten und dritten, nämlich $x + 3\frac{1}{2}$ subtrahiere, so bleibt $2\frac{1}{2}x - 3\frac{1}{2}$. Dieser Ausdruck soll ein Quadrat (etwa gleich 4*)) sein.

Das Produkt der dritten und ersten Zahl wird $\frac{13}{8}x$, und wenn davon die Summe beider abgezogen wird, so bleibt $\frac{5x}{8} - \frac{13}{8}$; dieser Ausdruck soll gleichfalls ein Quadrat (etwa gleich 16)*) sein. Wird derselbe 16mal genommen, so ergiebt sich der Ausdruck $10x - 26$, der ein Quadrat werden soll, und wird ebenso $2\frac{1}{2}x - 3\frac{1}{2}$ mit 4 multipliziert, so erhält man $10x - 14$, welcher Ausdruck ebenfalls ein Quadrat werden soll.

Die Differenz beider Ausdrücke ist 12, das ist das Produkt der Zahlen 2 und 6. Wird das Quadrat der halben Summe dieser Zahlen, d. i. 16, gleich dem gröfseren Ausdruck, d. i. $10x - 14$, gesetzt, so ergiebt sich $x = 3$. Folglich wird die dritte Zahl $3 = \frac{24}{8}$ sein; für die erste hatten wir $\frac{13}{8}$ und für die zweite $3\frac{1}{2} = \frac{28}{8}$, und diese Werte genügen der Aufgabe**).

---

*) Ungeschickte Einschaltungen eines Schreibers.

**) Um zwei Forderungen der Aufgabe zu erfüllen, hat man

$$\mathrm{I} = x, \quad \mathrm{II} = \frac{a^2 + x}{x - 1}, \quad \mathrm{III} = \frac{b^2 + x}{x - 1}$$

anzunehmen; dann bleibt noch

$$\frac{(a^2 + x)(b^2 + x)}{(x - 1)^2} - \frac{a^2 + b^2 + 2x}{x - 1}$$

oder

20. Aufgabe. Zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daſs das Produkt derselben, sowohl wenn die Summe beider, als auch wenn jede einzelne dazu addiert wird, ein Quadrat gebe.

Auflösung. Wir setzen die eine Zahl gleich x und die andere gleich $4x - 1$, da, wenn eine Zahl das um 1 verminderte Vierfache einer andern ist, das um die kleinere Zahl vermehrte Produkt beider ein Quadrat sein wird.

Es bleiben nun noch die beiden anderen Forderungen zu erfüllen, nämlich daſs das Produkt der Zahlen, sowohl wenn die zweite [gröſsere] Zahl, als auch wenn die Summe beider dazu addiert wird, ein Quadrat gebe.

Wenn man aber zum Produkt beider Zahlen die zweite Zahl addiert, so erhält man $4x^2 + 3x - 1$, und dieser Ausdruck soll ein Quadrat werden. Wenn man zum Produkt beider Zahlen die Summe derselben addiert, so erhält man $4x^2 + 4x - 1$, und auch dieser Ausdruck soll ein Quadrat werden. Es entsteht also eine doppelte Gleichung. Die Differenz der beiden Ausdrücke ist x, und diese Zahl ist gleich dem Produkt aus $\frac{1}{4}$ in $4x$. Man erhält $x = \frac{65}{224}\cdot$ Folglich wird die erste Zahl $\frac{65}{224}$, die zweite $\frac{36}{224}$ sein, und diese Werte genügen der Aufgabe*).

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) - (x - 1)^2$$

in ein Quadrat zu verwandeln, was keine Schwierigkeit macht.

*) Wird allgemeiner die erste Zahl gleich x, die zweite gleich $a^2x - 1$ gesetzt, so hat man nur noch jeden der beiden Ausdrücke

$$a^2x^2 + (a^2 - 1)x - 1, \quad a^2x^2 + a^2x - 1$$

in ein Quadrat zu verwandeln. Zerlegt man die Differenz x in die beiden Faktoren $2ax$ und $\frac{1}{2a}$, so hat man die Gleichung

$$\left(ax + \frac{1}{4a}\right)^2 = a^2x^2 + a^2x - 1$$

zu lösen und erhält für die gesuchten Zahlen die Ausdrücke

$$\frac{1 + 16a^2}{8a^2(2a^2 - 1)}, \quad \frac{9}{8(2a^2 - 1)}$$

21. Aufgabe. Zwei Zahlen zu finden, deren Produkt ein Quadrat giebt, sowohl wenn jede der Zahlen, als auch wenn die Summe beider davon subtrahiert wird.

Auflösung. Wir setzen die eine Zahl gleich $x+1$, die andere gleich $4x$, da, wenn eine Zahl 4 weniger als das Vierfache einer andern beträgt, das Produkt beider Zahlen ein Quadrat wird, sobald man es um die gröfsere vermindert.

Nun mufs noch das Produkt beider Zahlen, wenn die kleinere Zahl davon subtrahiert wird, ein Quadrat geben, und ferner mufs ein Quadrat entstehen, wenn von dem Produkt die Summe beider Zahlen subtrahiert wird.

Das Produkt beider Zahlen giebt aber, wenn es um die kleinere vermindert wird, den Rest $4x^2+3x-1$, und das um die Summe beider Zahlen verminderte Produkt ist $4x^2-x-1$. Jeder dieser Ausdrücke soll ein Quadrat sein. Die Differenz beider ist $4x$. Zerlege ich dieselbe in die Faktoren $4x$ und 1, so ergiebt sich $x=1\frac{1}{4}$. Die erste Zahl wird also $2\frac{1}{4}$, die zweite 5 sein, und diese Werte genügen offenbar der Aufgabe*).

---

22. Aufgabe. Vier Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs das Quadrat ihrer Summe ein Quadrat bleibt, wenn jede der vier Zahlen zu demselben addiert oder von demselben subtrahiert wird.

Auflösung. In jedem rechtwinkligen Dreieck bleibt das Quadrat über der Hypotenuse ein Quadrat, wenn man das doppelte Produkt beider Katheten zu demselben addiert oder von demselben subtrahiert.

Daher suche ich zunächst vier rechtwinklige Dreiecke mit gleichen Hypotenusen; das ist aber dasselbe wie die Aufgabe:

---

*) Wir setzen die erste Zahl gleich x, die zweite gleich a^2x+1 und erhalten, indem wir ganz wie in der vorigen Aufgabe verfahren, die Ausdrücke

$$\frac{1+16a^2}{8a^2(1-2a^2)}, \quad \frac{9}{8(1-2a^2)},$$

wo a unbestimmt bleibt.

Ein beliebiges Quadrat viermal in je zwei Quadrate zu teilen, und wir haben schon gelernt, ein gegebenes Quadrat auf unendlich viele Arten in zwei Quadrate zu zerlegen.

Wir nehmen also zwei rechtwinklige Dreiecke, deren Seiten in den kleinsten Zahlen ausgedrückt sind, wie 3, 4, 5 und 5, 12, 13. Multiplizieren wir jetzt alle Seiten eines jeden mit der Hypotenuse des andern, so wird das erstere die Seiten 39, 52, 65, das zweite die Seiten 25, 60, 65 haben, und wir erhalten zwei rechtwinklige Dreiecke mit gleichen Hypotenusen.

Ihrer Natur nach läfst sich ferner die Zahl 65 zweimal in je zwei Quadrate zerfällen, nämlich in 16 und 49, sowie in 64 und 1. Dies rührt daher, dafs 65 durch Multiplikation der Zahlen 13 und 5 entsteht, von denen jede sich in zwei Quadrate zerlegen läfst. Ich nehme nun die Seiten der Quadrate 49 und 16, nämlich 7 und 4, und bilde vermittels dieser Zahlen 7, 4 das rechtwinklige Dreieck; dasselbe hat die Seiten 33, 56, 65. Ebenso nehme ich die Seiten der Quadrate 64 und 1, nämlich 8 und 1, und bilde vermittels derselben das rechtwinklige Dreieck; dasselbe hat die Seiten 16, 63, 65. Nun habe ich vier rechtwinklige Dreiecke mit gleichen Hypotenusen.

Indem ich jetzt zu der ursprünglich gestellten Aufgabe schreite, setze ich die Summe der vier gesuchten Zahlen gleich $65x$, jede einzelne derselben aber gleich x^2 mit einem Koeffizienten, der das Vierfache der Fläche eines der vier Dreiecke ist, also die erste Zahl gleich $4056x^2$, die zweite gleich $3000x^2$, die dritte gleich $3696x^2$, die vierte gleich $2016x^2$. Es ist dann die Summe der vier Zahlen

$$12\,768x^2 = 65x,$$

und daraus ergiebt sich

$$x = \frac{65}{12\,768}.$$

Daher werden die vier Zahlen Brüche mit dem gemeinschaftlichen Nenner 163 021 824 sein, und zwar hat die erste Zahl den Zähler 17 136 600, die zweite 12 675 000, die dritte 15 615 600, die vierte 8 517 600*).

---

*) Wir bezeichnen die gesuchten Zahlen mit I, II, III, IV, ihre Summe mit S. Da jeder der Ausdrücke $S^2 \pm \mathrm{I}$, $S^2 \pm \mathrm{II}$, ...

23. Aufgabe. [Vergl. II, 16.] Eine gegebene Zahl in zwei Teile zu teilen und dazu eine Quadratzahl von

---

ein Quadrat werden soll, so sind 8 Bedingungen zu erfüllen. Diophant wählt nun eine Zahl a, deren Quadrat nach II, 10 auf vier Arten in je zwei Quadrate zerfällt sein möge:

$$a^2 = m_1^2 + n_1^2 = m_2^2 + n_2^2 = m_3^2 + n_3^2 = m_4^2 + n_4^2.$$

Indem er dann

$$S = ax,\ \mathrm{I} = 2m_1n_1x^2,\ \mathrm{II} = 2m_2n_2x^2,\ \mathrm{III} = 2m_3n_3x^2,\ \mathrm{IV} = 2m_4n_4x^2$$

setzt, hat er alle 8 Forderungen erfüllt, da

$$S^2 \pm \mathrm{I} = a^2x^2 \pm 2m_1n_1x^2 = (m_1^2 + n_1^2)x^2 \pm 2m_1n_1x^2 = [(m_1 \pm n_1)x]^2$$

. . . .

ist. Man hat also nur noch x mittels der Gleichung

$$2(m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3 + m_4n_4)x^2 = ax$$

zu bestimmen und den erhaltenen Wert in die Ausdrücke für die gesuchten Zahlen einzusetzen.

Diese Aufgabe ist die erste, bei deren Lösung Diophant von einem rechtwinkligen Dreieck spricht. Er hat dabei aber nicht das geometrische Gebilde dieses Namens im Auge, sondern einfach drei rationale Zahlen, welche der Pythagoreischen Gleichung genügen. Das rechtwinklige Dreieck vermittels der beiden Zahlen m, n bilden, heifst nichts anderes, als die Lösung dieser Gleichung, also die Zahlen $m^2 - n^2$, $2mn$, $m^2 + n^2$ nehmen. Eigentümlich ist es, dafs er (und nach ihm Vieta, Bachet, Fermat u. a.) die beiden Katheten (*οἱ περὶ τὴν ὀρθὴν*) zuweilen von einander unterscheidet. Er denkt sich dann das Dreieck so gezeichnet, dafs die eine Kathete vertikal, die andere also horizontal liegt. Die horizontale Kathete ist meist $m^2 - n^2$ und heifst *ἡ βάσις* (Basis); die vertikale ist gleich $2mn$ und heifst *ἡ κάθετος* (perpendiculum, Lot).

Der Bachet'schen Besprechung verschiedener Einzelheiten der Lösung dieser Aufgabe fügt Fermat folgende Bemerkungen zu:

„Eine Primzahl von der Form $4n + 1$ ist nur einmal Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, ihr Quadrat ist es zweimal, ihr Kubus dreimal, ihr Biquadrat viermal, u. s. w. in inf.

Eine solche Primzahl und ihr Quadrat lassen sich nur einmal in zwei Quadrate zerfällen; ihr Kubus und ihr Biquadrat zweimal; ihr Quadrato-Kubus und ihr Kubo-Kubus dreimal; u. s. w. in inf.

Wenn eine Primzahl, welche die Summe zweier Quader Beschaffenheit zu finden, dafs sie ein Quadrat bleibt, wenn sie um jeden der beiden Teile vermindert wird.

---

drate ist, mit einer anderen Primzahl, die gleichfalls die Summe zweier Quadrate ist, multipliziert wird, so läfst sich das Produkt auf zwei Arten in zwei Quadrate zerfällen. Wird die erste Primzahl mit dem Quadrat der zweiten multipliziert, so kann das Produkt auf drei Arten in zwei Quadrate zerfällt werden. Wird die erste Primzahl mit dem Kubus der zweiten multipliziert, so gestattet das Produkt vier Zerfällungen in zwei Quadrate; u. s. w. in inf.

Danach ist es leicht zu ermitteln, wie oft eine gegebene Zahl Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks sein kann: Man nehme alle in die gegebene Zahl aufgehenden Primzahlen der Form $4n+1$, wie 5, 13, 17, ... Wenn die gegebene Zahl durch Potenzen solcher Primzahlen teilbar ist, so hat man die Exponenten derselben aufzuschreiben. Die vorgelegte Zahl möge z. B. durch den Kubus von 5, das Quadrat von 13 und die erste Potenz von 17 teilbar sein.

Man nehme jetzt die Exponenten aller Divisoren, also den Exponenten 3 von 5, den Exponenten 2 von 13 und den Exponenten 1 von 17, und schreibe dieselben in einer beliebigen Reihenfolge hin, etwa 3, 2, 1. Multipliziert man jetzt den ersten mit dem Doppelten des zweiten und addiert zum Produkt die Summe beider, so erhält man 17. Wird weiter 17 mit dem Doppelten des dritten Exponenten multipliziert und zum Produkt die Summe von 17 und dem dritten Exponenten addiert, so ergiebt sich 52, und das ist die Anzahl der rechtwinkligen Dreiecke, welche die gegebene Zahl zur Hypotenuse haben. Ebenso verfährt man bei beliebig vielen Divisoren und beliebigen Exponenten derselben.

Durch diejenigen Primzahlen, welche nicht von der Form $4n+1$ sind, und durch die Potenzen derselben wird die Zahl der rechtwinkligen Dreiecke, von denen die gegebene Zahl Hypotenuse ist, weder vergröfsert noch verkleinert.

Aufgabe. Eine Zahl zu finden, welche eine vorgeschriebene Anzahl Male Hypotenuse sei.

Auflösung. Es wird gefragt, welche Zahl etwa 7mal Hypotenuse ist. Wir verdoppeln die Zahl 7, das giebt 14, addieren 1, das giebt 15, und wählen alle Primzahlen, die in 15 aufgehen; es sind dies 3 und 5. Jede derselben

Auflösung. Die gegebene Zahl sei 10; das zu ermittelnde Quadrat werde gleich $x^2 + 2x + 1$ gesetzt. Dasselbe bleibt

---

verringern wir um 1 und nehmen die Hälfte des Restes; dadurch erhalten wir 1 und 2. Jetzt wählen wir so viele verschiedene Primzahlen, als hier Zahlen stehen, also zwei; diesen geben wir beziehungsweise die Exponenten 1 und 2 und multiplizieren die Resultate, also die eine Primzahl mit dem Quadrat der andern. Das entstandene Produkt wird der Aufgabe genügen; nur müssen die Primzahlen, die man nimmt, von der Form $4n + 1$ sein.

Hieraus erhellt auch, daſs es leicht ist, die kleinste Zahl zu ermitteln, welche eine verlangte Anzahl Male Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist.

Aufgabe. Eine Zahl zu finden, die eine vorgeschriebene Anzahl Male in zwei Quadrate zerfällt werden kann.

Auflösung. Man soll eine Zahl ermitteln, die sich auf 10 Arten in je zwei Quadrate zerfällen läſst. Das Doppelte von 10 ist 20, welche Zahl, in Primzahlen zerlegt, gleich 2 . 2 . 5 ist. Wird jeder dieser Faktoren um 1 verringert, so bleibt 1 . 1 . 4. Wir nehmen daher drei verschiedene Primzahlen (von der Form $4n + 1$), z. B. 5, 13, 17 und multiplizieren das Biquadrat (wegen des Exponenten 4) der einen mit dem Produkt der beiden andern, so erhalten wir die gesuchte Zahl.

Umgekehrt soll ermittelt werden, wie oft sich eine gegebene Zahl in zwei Quadrate zerfällen läſst. Die gegebene Zahl sei 325. Die darin aufgehenden Primzahlen (von der Form $4n + 1$) sind 5 und 13, und zwar ist in 325 das Quadrat der ersteren und die erste Potenz der letzten Zahl enthalten. Man schreibt nun die Exponenten 2, 1 nieder, addiert die Summe beider zu ihrem Produkt — das giebt 5 —, zählt 1 dazu — das giebt 6 — und nimmt die Hälfte dieser Zahl, d. i. 3. So oft ist die gegebene Zahl 325 in zwei Quadrate zu zerfällen.

Wären drei Exponenten, etwa 2, 2, 1 vorhanden, so würde man in folgender Weise verfahren: Das Produkt und die Summe der beiden ersten zusammen geben 8; zählt man jetzt das Produkt aus 8 in den letzten Exponenten zur Summe dieser beiden Zahlen, so erhält man 17; wird dazu 1 addiert, so ergiebt sich 18, und die Hälfte dieser Zahl ist 9. So oft läſst sich jene zweite Zahl in zwei Quadrate zerfällen. Hiernach ist es leicht, die kleinste Zahl zu ermitteln, welche eine vorgeschriebene Anzahl Male aus zwei Quadraten besteht. Wenn ein Quadrat, sowohl wenn man $2x + 1$, als auch wenn man $4x$ davon subtrahiert.

Daher setze ich den ersten Teil gleich $2x + 1$, den zweiten Teil gleich $4x$. Die Summe beider Teile mufs gleich der gegebenen Zahl sein. Setzt man aber die Summe, d. i.

$$6x + 1 = 10,$$

so ergiebt sich

$$x = 1\tfrac{1}{2}.$$

Es wird also der erste Teil 4, der zweite 6 und das Quadrat $6\frac{1}{4}$ sein.

---

24. Aufgabe. [Vergl. II, 15.] Eine gegebene Zahl in zwei Teile zu teilen und dazu eine Quadratzahl von der Beschaffenheit zu finden, dafs dieselbe ein Quadrat bleibt, wenn sie um jeden der beiden Teile vermehrt wird.

Auflösung. Die gegebene Zahl sei 20, und das Quadrat werde gleich $x^2 + 2x + 1$ gesetzt. Dasselbe bleibt ein Quadrat, wenn man $2x + 3$ dazu addiert, und ebenso, wenn es um $4x + 8$ vergröfsert wird.

Daher setze ich den ersten Teil gleich $2x + 3$, den zweiten gleich $4x + 8$. Dann ist die Summe beider Teile, d. i.

$$6x + 11 = 20,$$

und daraus ergiebt sich

$$x = 1\tfrac{1}{2}.$$

Es wird also der erste Teil 6, der zweite Teil 14, das Quadrat $6\frac{1}{4}$ sein, und diese Werte genügen offenbar der Aufgabe.

---

die zuletzt zu teilende Zahl ungerade ist, so mufs man 1 subtrahieren und den Rest durch 2 teilen.

Es möge noch die folgende Aufgabe gestellt sein: Eine ganze Zahl zu finden, welche eine Quadratzahl wird, wenn man sie um eine gegebene Zahl vergröfsert, und welche zugleich Hypotenuse einer vorgeschriebenen Anzahl von rechtwinkligen Dreiecken ist. Diese Aufgabe ist schwierig. Es soll z. B. eine Zahl gesucht werden, welche zweimal Hypotenuse ist und durch Addition von 2 zu einem Quadrat wird. Als Wert der gesuchten Zahl ergiebt sich 2023; es giebt aber noch unendlich viele andere Zahlen, welche dasselbe leisten, z. B. 3362 u. s. w."

IV. Buch.

1. **Aufgabe.** Eine gegebene Zahl in zwei Kuben zu zerlegen, deren Seiten eine gegebene Summe haben.

Auflösung. Es soll die Zahl 370 in zwei Kuben geteilt werden, deren Seiten die Summe 10 haben. Da 5 die halbe Summe der Seiten ist, so nehmen wir die Seite des ersten Kubus gleich $x + 5$ an; für die Seite des zweiten Kubus bleibt dann $5 - x$, und die Summe der Kuben selbst wird $30x^2 + 250$ sein. Das ist gleich der gegebenen Zahl, also gleich 370, und daraus ergiebt sich $x = 2$. Somit wird die Seite des ersten Kubus 7, die des zweiten 3 sein, und die Kuben selbst werden 343 und 27 betragen.

---

2. **Aufgabe.** Zwei Zahlen zu finden, deren Differenz eine gegebene Zahl ist, und deren Kuben ebenfalls eine gegebene Differenz haben.

Auflösung. Die Differenz der Zahlen soll 6, die Differenz der Kuben 504 betragen.

Wir setzen wieder die Seite des gröſseren Kubus gleich $x + 3$, die des kleineren gleich $x - 3$, so daſs die Differenz beider Seiten 6 ist. Nun soll noch die Differenz der Kuben 504 betragen. Die Differenz der Kuben ist aber $18x^2 + 54$. Wird das gleich 504 gesetzt, so ergiebt sich $x = 5$.

Somit wird die Seite des gröſseren Kubus 8, die des kleineren 2 sein; die Kuben selbst werden 512 und 8 betragen, und durch diese Werte wird offenbar der Aufgabe genügt*).

---

*) Die allgemeine Lösung dieser beiden Aufgaben macht keine Schwierigkeit. Setzt man in der ersten Aufgabe die Summe

3. Aufgabe. Eine Quadratzahl und deren Seite mit einer und derselben Zahl zu multiplizieren, so dafs

---

der Zahlen $= 2a$, die Summe der Kuben $= b$, so liefert die Gleichung

$$(a + x)^3 + (a - x)^3 = b$$

den Wert

$$x = \sqrt{\frac{b - 2a^3}{6a}}.$$

Wird ebenso in der zweiten Aufgabe die Differenz der Zahlen $= 2a$, die Differenz der Kuben $= b$ gesetzt, so giebt die Gleichung

$$(x + a)^3 - (x - a)^3 = b$$

den Wert

$$x = \sqrt{\frac{b - 2a^3}{6a}}.$$

Bachet fügt hier 5 ähnliche Aufgaben bei, von denen wir die drei ersten, auch von Vieta, Zet. IV, 18—20 behandelten kurz besprechen müssen, um die darauf bezüglichen Anmerkungen Fermats zu verstehen.

1. Aufgabe. Zwei Kubikzahlen zu finden, deren Summe gleich der Differenz zweier gegebenen Kuben ist. Es darf aber das Doppelte des kleineren Kubus nicht gröfser sein als der gröfsere.

Auflösung. Sind a^3, b^3 die gegebenen Kuben, wo $a > b$ vorausgesetzt wird, so setzen wir die Seiten der gesuchten Kuben gleich $x - b$ und $a - kx$. Dann geht die Gleichung

$$(x - b)^3 + (a - kx)^3 = a^3 - b^3$$

über in

$$x^3(1 - k^3) + 3x^2(ak^2 - b) + 3x(b^2 - a^2k) = 0;$$

also wird, wenn $b^2 - a^2k = 0$, d. h. $k = \frac{b^2}{a^2}$ angenommen wird,

$$x = \frac{3a^3b}{a^3 + b^3},$$

so dafs sich für die gesuchten Seiten

$$\frac{b(2a^3 - b^3)}{a^3 + b^3}, \quad \frac{a(a^3 - 2b^3)}{a^3 + b^3}$$

ergiebt. Der zweite Wert giebt den Grund der Bachet'schen Determination an.

Beispiel. $a = 2$, $b = 1$, $k = \frac{1}{4}$, $x = \frac{8}{3}$, also

$$8 - 1 = \left(\frac{5}{3}\right)^3 + \left(\frac{4}{3}\right)^3.$$

die Seite ein Kubus und die Quadratzahl die Seite dieses Kubus wird.

---

2. Aufgabe. Zwei Kubikzahlen zu finden, deren Differenz gleich der Summe zweier gegebenen Kuben ist.

Auflösung. Unter den nämlichen Voraussetzungen wie oben erhalten wir die Gleichung

$$(a + x)^3 - (kx - b)^3 = a^3 + b^3$$

oder

$$x^3(1 - k^3) + 3x^2(a + bk^2) + 3x(a^2 - b^2k) = 0,$$

und daraus für $k = \frac{a^2}{b^2}$

$$x = \frac{3ab^3}{a^3 - b^3},$$

also für die gesuchten Seiten

$$\frac{a(a^3 + 2b^3)}{a^3 - b^3}, \quad \frac{b(2a^3 + b^3)}{a^3 - b^3}.$$

Beispiel. $a = 2$, $b = 1$, $k = 4$, also

$$8 + 1 = \left(\frac{20}{7}\right)^3 - \left(\frac{17}{7}\right)^3.$$

3. Aufgabe. Zwei Kubikzahlen zu finden, deren Differenz gleich der Differenz zweier gegebenen Kubikzahlen ist. Es mufs jedoch das Doppelte der kleineren Kubikzahl mehr als die gröfsere betragen.

Auflösung. Die Gleichung

$$(x - b)^3 - (kx - a)^3 = a^3 - b^3$$

oder

$$x^3(1 - k^3) + 3x^2(ak^2 - b) + 3x(b^2 - a^2k) = 0$$

liefert für $k = \frac{b^2}{a^2}$

$$x = \frac{3a^3b}{a^3 - b^3};$$

also sind die gesuchten Zahlen

$$\frac{b(2a^3 - b^3)}{a^3 + b^3}, \quad \frac{a(2b^3 - a^3)}{a^3 + b^3}.$$

Beispiel. $125 - 64 = \left(\frac{248}{63}\right)^3 - \left(\frac{5}{63}\right)^3.$

Fermat bemerkt zur 1. Aufgabe folgendes:

„Durch ein wiederholt angewandtes Verfahren beseitigen wir leicht die Beschränkung und lösen diese und die folgenden Aufgaben ganz allgemein, was weder Bachet

Auflösung. Wir setzen das Quadrat gleich x^2, so wird die Seite desselben x sein. Die Zahl, mit der wir multiplizieren, sei der einfache Bruch mit einer beliebigen Kubikzahl als

---

noch Vieta zu stande bringen konnte. Die gegebenen Kubikzahlen seien 64 und 125, und es sollen zwei andere Kuben gefunden werden, deren Summe gleich der Differenz der gegebenen ist. Nach der dritten Aufgabe bestimmen wir zwei Kuben, deren Differenz gleich der Differenz der gegebenen ist. Diese hat Bachet ermittelt; es sind $\frac{15\,252\,992}{250\,047}$ und $\frac{125}{250\,047}$; diese Kuben haben nach ihrer Bildung eine Differenz, welche gleich der Differenz der gegebenen ist. Auf diese nach der dritten Aufgabe gefundenen Zahlen kann aber, weil das Doppelte der kleineren Zahl nicht mehr als die gröfsere beträgt, die erste Aufgabe angewandt werden. Man kann also von diesen letzteren Kuben als den gegebenen ausgehend zwei andere Kubikzahlen bestimmen, deren Summe gleich der Differenz der gegebenen ist; dies ist nämlich nach der Determination der ersten Aufgabe möglich. Die Differenz dieser gegebenen Kuben ist aber nach der dritten Aufgabe gleich der Differenz der anfänglich gegebenen Kuben 64 und 125. Auf diese Weise hindert uns nichts, zwei Kuben zu bilden, deren Summe gleich der Differenz der gegebenen Kuben 64 und 125 ist, worüber sich Bachet selbst wundern würde. Man kann sogar, indem man jene drei Aufgaben unaufhörlich nach einander anwendet, unendlich viele Paare von Kubikzahlen ermitteln, welche dasselbe leisten. Aus den zuletzt gefundenen Kuben, deren Summe gleich der Differenz der gegebenen ist, leitet man nämlich mittels der zweiten Aufgabe zwei andere her, deren Differenz gleich der Summe der letzteren, d. i. gleich der Differenz der früheren ist; dann sucht man zwei Kuben, deren Summe gleich der Differenz der zuletzt gefundenen ist, und dies Verfahren setzt man unbegrenzt fort."

Anmerkung Fermats zur dritten Aufgabe:

„Dafs die Determination dieser Aufgabe nicht richtig ist, werden wir auf ähnliche Weise, wie es bei der ersten Aufgabe geschah, darthun.

Wir können sogar mittels der obigen Bemerkungen eine Aufgabe lösen, welche Bachet unbekannt war, nämlich eine aus zwei Kuben zusammengesetzte Zahl in zwei andere Kuben zerlegen, und zwar ist das auf unendlich

Koeffizient, etwa $\frac{8}{x}$. Wenn wir mit derselben x^2 multiplizieren, so erhalten wir $8x$, und wenn wir x multiplizieren, so ergiebt sich 8.

Nun soll $8x$ die Seite des Kubus 8, also $2 = 8x$ sein, und daraus folgt

$$x = \frac{1}{4}.$$

Es wird daher das Quadrat $\frac{1}{16}$, die Seite desselben $\frac{1}{4}$, die Zahl, mit der wir zu multiplizieren haben, 32 sein; denn wenn $x = \frac{1}{4}$ ist, so ist der einfache Bruch, d. i. $\frac{1}{x}$ gleich 4, und durch die gefundenen Werte wird der Aufgabe offenbar genügt*).

viele Weisen möglich durch wiederholte Anwendung des oben dargelegten Verfahrens.

Es seien 8 und 1 die Kuben, deren Summe in zwei andere Kubikzahlen zerfällt werden soll. Nach der zweiten Aufgabe bestimmen wir zunächst zwei Kuben, deren Differenz gleich der Summe der gegebenen ist; diese sind $\frac{8000}{343}$ und $\frac{4913}{343}$. Da das Doppelte der kleineren dieser Zahlen mehr als die gröfsere beträgt, so läfst sich jetzt die dritte Aufgabe anwenden, dann wieder die erste, und damit ist die gestellte Forderung erfüllt. Will man eine zweite Lösung erhalten, so hat man wieder die zweite Aufgabe anzuwenden, u. s. w.

Um aber ganz klar darzuthun, dafs die Determination der dritten Aufgabe unrichtig ist, wollen wir wirklich zwei Kuben bestimmen, deren Differenz gleich der Differenz der gegebenen Kubikzahlen 8 und 1 ist. Bachet würde diese Aufgabe sicherlich für unmöglich erklären, und doch habe ich durch meine Methode zwei Kuben ermittelt, deren Differenz gleich 7, der Differenz von 8 und 1 ist. Diese Kuben sind $\frac{2\,024\,284\,625}{6\,128\,487}$ und $\frac{1\,981\,385\,216}{6\,128\,487}$, ihre Seiten $\frac{1265}{183}$ und $\frac{1256}{183}$."

*) Allgemein wird das Quadrat $\frac{1}{a^4}$, die Seite desselben $\frac{1}{a^2}$, die Zahl, mit der wir zu multiplizieren haben, a^5 sein.

4. Aufgabe. Zu einem Quadrat und dessen Seite eine und dieselbe Zahl zu addieren, so daſs das Quadrat ein Quadrat bleibt und die Seite zur Seite dieses neuen Quadrats wird.

Auflösung. Es sei das Quadrat x^2, dessen Seite also x; die zu addierende Zahl sei x^2 mit einem solchen Koeffizienten, daſs bei Addition von x^2 ein Quadrat entsteht, etwa $3x^2$.

Wird diese Zahl zu x^2 addiert, so erhält mau $4x^2$; wird dieselbe zu x addiert, so erhält man $3x^2 + x$. Dieser letztere Ausdruck soll gleich der Seite des Quadrats $4x^2$, also gleich $2x$ sein. Somit ergiebt sich

$$x = \frac{1}{3}.$$

Es wird daher das Quadrat $\frac{1}{9}$, die Seite desselben $\frac{1}{3}$ und die zu addierende Zahl $\frac{3}{9}$ sein*).

---

5. Aufgabe. Zu einem Quadrat und dessen Seite eine und dieselbe Zahl zu addieren, so daſs die Seite zu einem Quadrat und das Quadrat zur Seite dieses neuen Quadrats wird.

Auflösung. Es sei das Quadrat x^2, dessen Seite also x. Die zu addierende Zahl muſs nun, damit sie die Seite des Quadrats zu einem Quadrat mache, gleich x^2 mit irgend einer Quadratzahl als Koeffizient, vermindert um die Seite des Quadrats, sein; dieselbe sei $4x^2 - x$. Wird diese Zahl [zu x addiert, so erhält man $4x^2$; wird sie] zu x^2 addiert, so ergiebt sich $5x^2 - x$, und dieser Ausdruck muſs gleich $2x$, nämlich gleich der Seite des durch die erste Addition entstandenen Quadrats sein. Daraus erhält man

$$x = \frac{3}{5}.$$

---

*) Allgemein wird das Quadrat $\frac{1}{(a+1)^2}$, die Seite desselben $\frac{1}{a+1}$, die zu addierende Zahl $\frac{a-1}{a+1}$ sein.

Somit wird das Quadrat $\frac{9}{25}$, die Seite desselben $\frac{3}{5}$, die zu addierende Zahl $\frac{21}{25}$ sein*).

---

6. Aufgabe. Zu einem Kubus und einem Quadrat ein und dasselbe Quadrat zu addieren, so dafs der Kubus ein Kubus und das Quadrat ein Quadrat bleibt.

Auflösung. Es sei der Kubus x^3, das Quadrat x^2 mit einer beliebigen Quadratzahl als Koeffizienten, etwa $9x^2$. Da ich nun will, dafs ein Quadrat, wenn es um $9x^2$ vermehrt wird, ein Quadrat bleibe, so wähle ich zwei Zahlen, deren Produkt 9 ist, etwa 1 und 9. Wenn ich nun 1 von 9 subtrahiere und die Hälfte des Restes mit sich selbst multipliziere, so werde ich 16 erhalten. Diese Zahl giebt, wenn sie zu 9 addiert wird, ein Quadrat $\left[ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]$.

Ich setze daher das zu addierende Quadrat gleich $16x^2$, und dann erhalte ich, wenn ich es zu $9x^2$ addiere, wirklich ein Quadrat.

Wenn ich dasselbe aber zu dem Kubus x^3 addiere, so erhalte ich $x^3 + 16x^2$. Dieser Ausdruck soll gleich einem Kubus sein. Er sei gleich $8x^3$; dann ergiebt sich

$$x = \frac{16}{7}.$$

Somit wird der Kubus $\frac{4096}{343}$, das Quadrat $\frac{2304}{49}$ und das zu addierende Quadrat $\frac{4096}{49}$ sein**).

---

*) Allgemein wird das Quadrat $\left(\frac{a+1}{a^2+1}\right)^2$, die Seite desselben $\frac{a+1}{a^2+1}$, die zu addierende Zahl $\frac{(a+1)(a^3-1)}{(a^2+1)^2}$ sein.

**) Ist allgemein x^3 der Kubus, a^2x^2 das Quadrat, $(b^2-a^2)x^2$ das zu addierende Quadrat, so soll

$$x^3 + (b^2 - a^2)x^2 = c^3x^3$$

sein. Daraus erhält man

$$x = \frac{b^2 - a^2}{c^3 - 1},$$

wo a, b, c nur der Bedingung unterworfen sind, dafs $b^2 - a^2$ ein Quadrat sei.

7. Aufgabe. Zu einem Kubus und einem Quadrat ein und dasselbe Quadrat zu addieren, so daſs der Kubus ein Quadrat und das Quadrat ein Kubus werde.

Auflösung. Es sei der Kubus die erste, das Quadrat die zweite, das zu addierende Quadrat die dritte Zahl. Da nun das zu addierende Quadrat (die dritte Zahl), wenn es um das Quadrat (die zweite Zahl) vermehrt wird, einen Kubus geben soll, so möge diese Summe der Kubus sein, den wir die erste Zahl genannt haben*), so daſs die erste Zahl die zweite um die dritte, also um ein Quadrat übertrifft; denn die dritte Zahl ist ein Quadrat.

Welche zwei Zahlen ich nun aber auch nehmen mag, die Summe ihrer Quadrate wird, wenn man sie um das Doppelte Produkt derselben vermehrt, immer ein Quadrat. Ich muſs also, wenn ich zwei Zahlen gewählt habe, die Summe ihrer Quadrate als die erste Zahl annehmen, da die erste Zahl gleich der Summe zweier Quadrate, dem gesuchten und dem zu addierenden (der zweiten und dritten Zahl) ist. Das doppelte Produkt der Zahlen muſs ich als dritte Zahl annehmen. Es ist aber die dritte Zahl ein Quadrat, daher auch das doppelte Produkt der gewählten Zahlen ein Quadrat sein muſs.

Es möge daher die eine Zahl gleich x, die andere gleich $2x$ gesetzt werden, damit ihr doppeltes Produkt ein Quadrat sei. Indem ich nun die Summe der Quadrate dieser Zahlen nehme, setze ich die erste der gesuchten Zahlen gleich $5x^2$, das doppelte Produkt derselben aber, d. i. $4x^2$, gleich der dritten Zahl, so daſs für die zweite noch x^2 bleibt; denn diese soll, wenn sie zur dritten addiert wird, die erste Zahl geben.

Es erübrigt noch, daſs die erste Zahl ein Kubus, also

$$5x^2 = x^3$$

sei. Daraus folgt

$$x = 5.$$

Somit wird der Kubus (die erste Zahl) 125, das Quadrat (die zweite Zahl) 25, das zu addierende Quadrat (die dritte Zahl) 100 sein, und diese Werte genügen offenbar der Aufgabe.

---

*) Eine willkürliche Annahme, welche die Aufgabe zu einer ganz andern macht.

8. Andere Auflösung. Es sei wieder der Kubus die erste, das Quadrat die zweite, das zu addierende Quadrat die dritte Zahl. Da ich nun will, daſs das zu addierende Quadrat, wenn es zur zweiten Zahl, d. i. einem Quadrat, gezählt wird, einen Kubus gebe, so möge diese Summe die erste Zahl sein. Da ich weiter will, daſs die erste Zahl, wenn sie zur dritten addiert wird, ein Quadrat gebe, so bin ich dazu gebracht, zwei Quadrate zu suchen, deren Summe, wenn sie um eins der Quadrate vermehrt wird, ein Quadrat giebt. Auſserdem sollen diese beiden Quadrate, das zum zweiten zu addierende und das zweite selbst, zusammen einen Kubus, nämlich die erste Zahl geben.

Es werde nun das erste dieser beiden Quadrate gleich x^2, das zweite gleich 4 gesetzt, so ist die um eins der Quadrate vermehrte Summe beider gleich $2x^2 + 4$. Wird dies gleich dem Quadrat über der Seite $2x - 2$, also gleich $4x^2 + 4 - 8x$ gesetzt, so ergiebt sich $x = 4$. Es wird also das eine Quadrat 4, das andere 16 sein.

Nun setze ich das zu addierende Quadrat gleich $16x^2$ und die zweite Zahl gleich $4x^2$; dann wird die erste, weil sie der Summe beider gleich sein soll, $20x^2$ sein. Es erübrigt noch, daſs

$$20x^2 = x^3$$

werde; daraus folgt

$$x = 20.$$

Somit wird die erste Zahl 8000, die zweite 1600, die zu addierende Zahl 6400 sein; übrigens läſst die Aufgabe unendlich viele Lösungen zu*).

---

9. Aufgabe. Zu einem Kubus und dessen Seite eine und dieselbe Zahl zu addieren, so daſs der Kubus ein

---

*) Sind allgemein a, b zwei beliebige Zahlen, deren doppeltes Produkt eine Quadratzahl ist, so liefert Diophants sinnreiches Verfahren für den Kubus $(a^2 + b^2)^3$, für das erste Quadrat $(a - b)^2(a^2 + b^2)^2$, für das zu addierende Quadrat $2ab(a^2 + b^2)^2$; in der That ist

$$(a^2 + b^2)^3 + 2ab(a^2 + b^2)^2 = (a^2 + b^2)^2(a + b)^2,$$
$$(a - b)^2(a^2 + b^2)^2 + 2ab(a^2 + b^2)^2 = (a^2 + b^2)^3.$$

Kubus bleibt und die Seite zur Seite des neuen Kubus wird.

Auflösung. Es sei x die zu addierende Zahl. Die Seite des Kubus sei x mit einem beliebigen Koeffizienten, etwa $2x$, der Kubus selbst also $8x^3$.

Wenn x zu $2x$ addiert wird, so ergiebt sich $3x$, und wenn man x zu $8x^3$ addiert, so erhält man $8x^3+x$. Es soll nun

$$8x^3+x=27x^3$$

sein. Wird beiderseits $8x^3$ subtrahiert, so bleibt

$$19x^3=x,$$

und wenn alles durch x dividiert wird,

$$19x^2=1.$$

Nun ist 1 eine Quadratzahl. Wenn daher der Koeffizient 19 von x^2 ein Quadrat wäre, so wäre die Gleichung gelöst.

Der Ausdruck $19x^2$ ist aber aus der Differenz von $27x^3$ und $8x^3$ entstanden, und $27x^3$ ist der Kubus von $3x$, $8x^3$ derjenige von $2x$, so dafs die Zahl 19 entstanden ist aus der Differenz des Kubus von $3x$ und desjenigen von $2x$.

Die Zahl $2x$ haben wir oben willkürlich angenommen, und $3x$ haben wir dadurch erhalten, dafs wir den gewählten Koeffizienten von x um 1 vermehrt haben. Wir sind auf diese Weise zu der Aufgabe geführt: Zwei Zahlen von der Differenz 1 zu finden, deren Kuben eine Quadratzahl zur Differenz haben.

Es sei die eine dieser Zahlen x, die andere $x+1$, so ist die Differenz ihrer Kuben $3x^2+3x+1$. Setzen wir dies gleich dem Quadrat über der Seite $1-2x$, so ergiebt sich $x=7$. Die eine Zahl wird also 7, die andere 8 sein.

Jetzt gehe ich zu der ursprünglich gestellten Aufgabe zurück und setze die zu addierende Zahl gleich x, die Seite des Kubus gleich $7x$. Dann wird der Kubus $343x^3$ sein, und wenn x zu jeder der beiden Zahlen addiert wird, so erhält man $8x$ und $343x^3+x$. Nun soll der letztere Ausdruck der Kubus über der Seite $8x$ sein, also ist

$$512x^3=343x^3+x.$$

Daraus ergiebt sich

$$x=\frac{1}{13}.$$

Somit wird der Kubus $\frac{343}{2197}$, die Seite desselben $\frac{7}{13}$, die zu addierende Zahl $\frac{1}{13}$ sein*).

---

10. Aufgabe. Zu einem Kubus und dessen Seite eine und dieselbe Zahl zu addieren, so dafs die Seite ein Kubus und der Kubus die Seite des neuen Kubus wird.

Auflösung. Es sei der Kubus x^3 mit einer beliebigen Kubikzahl als Koeffizienten, etwa $8x^3$, seine Seite also $2x$. Die zu addierende Zahl werde gleich der Differenz gesetzt, die entsteht, wenn man von x^3 mit einer anderen beliebigen Kubikzahl als Koeffizienten die Seite des ersten Kubus subtrahiert; sie sei etwa $27x^3 - 2x$. Wird diese Zahl zu $2x$ addiert, so ergiebt sich $27x^3$, und das ist der Kubus der Seite $3x$. Wird dieselbe aber zu $8x^3$ addiert, so erhält man $35x^3 - 2x$. Dies soll nun die Seite des Kubus $27x^3$, also gleich $3x$ sein. Es ist also

$$35x^3 - 2x = 3x,$$

und daraus folgt

$$5x = 35x^3,$$

oder, wenn alles durch x dividiert wird,

$$35x^2 = 5.$$

Da diese beiden Ausdrücke sich nicht wie zwei Quadrate zu einander verhalten, so wird der Wert von x nicht rational**).

---

*) Es soll $x^3 + y = (x + y)^3$ sein. Daraus erhält man leicht

$$y = \frac{-3x \pm \sqrt{4 - 3x^2}}{2}.$$

Wird jetzt $4 - 3x^2 = (2 - kx)^2$ angenommen, so ergiebt sich

$$x = \frac{4k}{3 + k^2}$$

und

$$y = \frac{-6k \pm (3 - k^2)}{3 + k^2},$$

wo k unbestimmt bleibt.

**) Obwohl Diophant, wie aus V, 33 und anderen Beispielen ersichtlich ist, die irrationalen Wurzeln gemischt-quadratischer Gleichungen näherungsweise bestimmen kann, so läfst er doch nur

Nun ist 35 durch Addition der beiden Kuben 27 und 8 entstanden, die Zahl 5 durch Addition der Seiten derselben. Die Aufgabe ist also auf folgende zurückgeführt:

Zwei Kubikzahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs die Summe derselben und die Summe ihrer Seiten sich wie zwei Quadratzahlen zu einander verhalten.

Es sei die Summe der Seiten der Kuben eine beliebige Zahl, etwa 2. Wird dann die Seite des ersten Kubus gleich x gesetzt, so mufs die des andern $2 - x$ sein, und die Summe der Kuben wird $6x^2 + 8 - 12x$ betragen.

Wir wollen nun, dafs dieser Ausdruck und die Summe der Seiten, d. i. 2, sich wie zwei Quadratzahlen zu einander verhalten. Da 2 das Doppelte eines Quadrats ist, so mufs dann auch $6x^2 + 8 - 12x$ das Doppelte eines Quadrats, also die Hälfte davon, d. i. $3x^2 + 4 - 6x$, gleich einem Quadrat sein. Nehmen wir als Seite dieses Quadrats $2 - 4x$ an, setzen also

$$3x^2 + 4 - 6x = (2 - 4x)^2,$$

so wird

$$x = \frac{10}{13}.$$

Es wird also die eine Seite $\frac{10}{13}$, die andere $\frac{16}{13}$ sein. Nehme ich das Dreizehnfache und darauf die Hälfte, so erhalte ich als Seiten der Kuben 5 und 8.

Nun gehe ich zur ursprünglich gestellten Aufgabe zurück und setze die Seite des Kubus gleich $5x$; dann wird der Kubus $125x^3$ sein. Als zu addierende Zahl nehme ich den Kubus der Seite $8x$, vermindert um die Seite des ersten Kubus, also $512x^3 - 5x$ an. Wird dies zu $5x$ addiert, so erhält man einen Kubus; wird es zu $125x^3$ addiert, so erhält man $637x^3 - 5x$. Dieser letzte Ausdruck soll nun die Seite des Kubus $512x^3$ sein; also ist

rationale Lösungen zu und verwirft Gleichungen, die solche nicht geben. Wie die negativen, so sind auch die irrationalen Zahlen für ihn keine veri numeri. Dafs eine quadratische Gleichung zwei Wurzeln hat, ist ihm völlig unbekannt; er nimmt die Wurzelgröfse immer nur mit dem positiven Zeichen.

$$8x = 637x^3 - 5x,$$

und daraus ergiebt sich

$$x = \frac{1}{7}.$$

Somit wird der Kubus $\frac{125}{343}$, die Seite desselben $\frac{5}{7}$, die zu addierende Zahl $\frac{267}{343}$ sein*).

---

11. Aufgabe. Zwei Kuben zu finden, deren Summe gleich der Summe ihrer Seiten ist.

Auflösung. Wir drücken die Seiten der Kuben durch die Unbekannte x aus, die eine durch $2x$, die andere durch $3x$. Dann ist die Summe der Kuben $35x^3$. Das soll gleich der Summe der Seiten, also gleich $5x$ sein. Wird alles durch x dividiert, so folgt

$$35x^2 = 5,$$

und für x ergiebt sich kein rationaler Wert. Der Koeffizient von $35x^2$ ist aber durch Addition zweier Kuben, nämlich 8 und 27, entstanden und die Zahl 5 durch Addition der Seiten derselben. Wir sind also zu der Aufgabe geführt:

Zwei Kuben zu finden, deren Summe, wenn man sie durch die Summe der Seiten dividiert, eine Quadratzahl als Quotienten giebt.

Diese Aufgabe ist aber schon [in IV, 10] gelöst worden, und es haben sich als Seiten der Kuben 8 und 5 ergeben.

---

*) Wird der Kubus gleich a^3x^3, die zu addierende Zahl gleich $b^3x^3 - ax$ gesetzt, so soll

$$[(a^3 + b^3)x^3 - ax]^3 = b^3x^3,$$

also

$$(a^3 + b^3)x^2 = a + b$$

sein; daraus folgt

$$x^2 = \frac{1}{a^2 - ab + b^2}.$$

Es ist also $a^2 - ab + b^2$ in ein Quadrat zu verwandeln, was keine Schwierigkeit macht. Man erhält $b = a \cdot \frac{1 + 2k}{1 - k^2}$, wo k unbestimmt bleibt.

Ich gehe jetzt zu der ursprünglich gestellten Aufgabe zurück und setze die Seiten der Kuben gleich $8x$ und $5x$. Dann wird die Summe der Kuben $637x^3$. Das soll gleich der Summe der Seiten, d. i. $13x$ sein. Daraus ergiebt sich

$$x = \frac{1}{7}.$$

Somit wird die Seite des ersten Kubus $\frac{5}{7}$, die des andern $\frac{8}{7}$ sein, die Kuben selbst aber werden $\frac{125}{343}$ und $\frac{512}{343}$ betragen*).

---

*) Allgemein soll

$$x^3 + y^3 = x + y$$

oder

$$x^2 - xy + y^2 = 1$$

sein. Wird

$$x^2 - xy + y^2 = (x + ky)^2$$

gesetzt, wo k unbestimmt bleibt, so ergiebt sich leicht

$$y = x \cdot \frac{1 + 2k}{1 - k^2},$$

und da jetzt unsere Gleichung $x + ky = \pm 1$ oder

$$x + kx \cdot \frac{1 + 2k}{1 - k^2} = \pm 1$$

lautet, so ist entweder

$$x = \frac{1 - k^2}{1 + k + k^2} \quad \text{und} \quad y = \frac{1 + 2k}{1 + k + k^2}$$

oder

$$x = \frac{-1 + k^2}{1 + k + k^2} \quad \text{und} \quad y = -\frac{1 + 2k}{1 + k + k^2}.$$

Diophants Werte gehen aus der ersten Lösung für $k = \frac{1}{2}$ hervor.

Bachet schliefst hieran die Aufgabe:

Zwei Kuben zu finden, deren Summe zur Summe der Seiten in einem gegebenen Verhältnisse stehe. Er fügt die Determination bei: Die Verhältniszahl mufs eine Quadratzahl oder der dritte Teil eines Quadrats sein. Dazu bemerkt Fermat:

„Von dieser Determination ist dasselbe zu bemerken, was ich in der Anmerkung zur folgenden Aufgabe gesagt habe, und ich wundere mich nicht darüber, dafs Bachet die allerdings schwierige allgemeine Methode nicht gesehen hat, sondern darüber, dafs er nicht wenigstens dem Leser mitgeteilt hat, dafs die von ihm gegebene Methode nicht allgemein ist."

12. Aufgabe. Zwei Kuben zu finden, deren Differenz gleich der Differenz ihrer Seiten ist.

Auflösung. Es seien die Seiten der Kuben $2x$ und $3x$, so wird die Differenz der Kuben $19x^3$, die der Seiten x sein. Es ist also

$$x = 19x^3,$$

und diese Gleichung liefert keinen rationalen Wert von x, weil beide Zahlen sich nicht wie zwei Quadratzahlen zu einander verhalten. Wir sind auf diese Weise zu der Aufgabe geführt:

Zwei Kuben von der Beschaffenheit zu finden, dafs die Differenz derselben und die Differenz ihrer Seiten sich wie zwei Quadratzahlen zu einander verhalten.

Wir nehmen die Seiten dieser Kuben gleich x und $x + 1$ an, damit die Differenz ihrer Seiten ein Quadrat, nämlich 1, sei. Wenn aber die Seite des einen Kubus x, die des andern $x + 1$ ist, so wird die Differenz der Seiten 1, die der Kuben $3x^2 + 3x + 1$ sein. Wir wollen nun, dafs $3x^2 + 3x + 1$ und die Differenz der Seiten, d. i. 1, sich wie zwei Quadratzahlen zu einander verhalten. Dann mufs auch das Produkt beider Zahlen ein Quadrat sein. Dies Produkt ist aber $3x^2 + 3x + 1$. Setzen wir dasselbe gleich dem Quadrat über der Seite $1 - 2x$, so ergiebt sich

$$x = 7.$$

Es sind also die Kuben 343 und 512, ihre Seiten 7 und 8.

Jetzt gehe ich zu der ursprünglich gestellten Aufgabe zurück und setze die Seite des einen Kubus gleich $7x$, die des andern gleich $8x$. Dann ist die Differenz der Seiten x, die der Kuben $169x^3$. Es ist folglich

$$169x^3 = x,$$

und daraus ergiebt sich

$$x = \frac{1}{13}.$$

Folglich werden die Seiten der Kuben $\frac{7}{13}$ und $\frac{8}{13}$ sein*).

---

*) Es soll

$$x^3 - y^3 = x - y,$$

also

13. Aufgabe. Zwei Zahlen von solcher Beschaffenheit zu finden, daſs der Kubus der gröſseren, wenn er um die kleinere Zahl vermehrt wird, gleich dem um die gröſsere Zahl vermehrten Kubus der kleineren werde.

Auflösung. Es sei die eine Zahl $2x$, die andere $3x$. Der Kubus der gröſseren Zahl wird, wenn man ihn um die kleinere

---

$$x^2 + xy + y^2 = 1$$

sein. Wird

$$x^2 + xy + y^2 = (x + ky)^2$$

gesetzt, so erhält man leicht

$$x = \pm \frac{1 - k^2}{1 - k + k^2}, \quad y = \pm \frac{2k - 1}{1 - k + k^2},$$

wo k unbestimmt bleibt.

Anmerkung von Fermat:

„Ob sich aber zwei Biquadrate bestimmen lassen, deren Differenz gleich der Differenz ihrer Seiten ist, diese Aufgabe versuche man nach meiner Methode zu lösen, die ohne Zweifel zum Ziel führen wird.

Man suche nämlich zwei Biquadrate von der Beschaffenheit, daſs die Differenz der Seiten gleich 1, die Differenz der Biquadrate selbst ein Kubus ist. Die erste Operation liefert für die Seiten $-\frac{9}{22}$ und $\frac{13}{22}$. Da aber die erste der beiden Zahlen das Zeichen — hat, so wiederhole man die Operation nach meiner Methode und setze die erste Seite gleich $x - \frac{9}{22}$; dann wird die zweite gleich $x + \frac{13}{22}$ sein, und man wird eine neue Gleichung erhalten, welche durch wirkliche [rationale positive] Zahlen der Aufgabe genügen wird."

Bachet stellt nun noch die Aufgabe: „Zwei Kuben zu finden, deren Differenz zur Differenz der Seiten in einem gegebenen Verhältnisse steht. Die Verhältniszahl muſs aber ein Quadrat oder der dritte Teil eines Quadrats sein." Dazu bemerkt Fermat:

„Die Determination ist unrichtig, weil nicht allgemein. Es ist derselben noch hinzuzufügen, daſs die Verhältniszahl auch das Produkt einer Quadratzahl in Primzahlen von der Form $3n + 1$ oder in Produkte von 3 und Primzahlen dieser Form, wie 7, 13, 19, 37, u. s. w., 21, 91, u. s. w. sein darf. Der Beweis und die Lösung ergeben sich aus meiner Methode."

vermehrt, $27x^3 + 2x$; der um die gröfsere Zahl vermehrte Kubus der kleineren ist dagegen $8x^3 + 3x$. Es ist also

$$8x^3 + 3x = 27x^3 + 2x,$$

und wenn alles durch x dividiert wird, so erhält man

$$19x^2 = 1,$$

was keinen rationalen Wert für x liefert. $19x^2$ ist aber aus der Differenz zweier Kuben entstanden, 1 aus der Differenz der Seiten derselben. Wir sind also zu der Aufgabe geführt:

Zwei Kuben von solcher Beschaffenheit zu finden, dafs die Differenz der Kuben und die Differenz ihrer Seiten sich wie zwei Quadratzahlen zu einander verhalten.

Diese Aufgabe ist aber schon [in IV, 12] gelöst worden, und es hat sich für die Seiten der Kuben 7 und 8 ergeben.

Jetzt gehe ich zu der ursprünglich gestellten Aufgabe zurück und setze die eine Zahl gleich $7x$, die andere gleich $8x$. Dann wird

$$343x^3 + 8x = 512x^3 + 7x,$$

und daraus folgt

$$x = \frac{1}{13}.$$

Die eine Zahl wird also $\frac{7}{13}$, die andere $\frac{8}{13}$ sein, und diese Werte genügen offenbar der Aufgabe*).

---

14. Aufgabe. Zwei Zahlen von solcher Beschaffenheit zu finden, dafs man eine Quadratzahl erhält, wenn jede von beiden, oder ihre Summe, oder ihre Differenz um 1 vermehrt wird.

Auflösung. Wenn ich von irgend einer Quadratzahl 1 subtrahiere, so werde ich die erste Zahl erhalten. Ich bilde demnach das Quadrat eines um 1 vermehrten beliebigen Viel-

---

*) Da aus

$$x^3 + y = y^3 + x$$

sofort

$$x^3 - y^3 = x - y$$

folgt, so ist diese Aufgabe mit der vorhergehenden identisch.

fachen von x, etwa das Quadrat von $3x + 1$. Dasselbe wird $9x^2 + 6x + 1$ sein, und indem ich davon 1 subtrahiere, setze ich die erste Zahl gleich $9x^2 + 6x$.

Weiter soll die Summe der beiden Zahlen, wenn sie um 1 vermehrt wird, ein Quadrat geben. Es ist aber auch die um 1 vermehrte zweite Zahl ein Quadrat. Daher habe ich ein Quadrat zu suchen, welches eine Quadratzahl bleibt, wenn es zu $9x^2 + 6x$ addiert wird.

Zu diesem Zwecke wähle ich zwei Zahlen, deren Produkt $9x^2 + 6x$ ist. Es seien dies $9x + 6$ und x. Die Differenz beider Zahlen ist $8x + 6$, die Hälfte der Differenz $4x + 3$ und das Quadrat dieses Ausdrucks $16x^2 + 24x + 9$. Davon subtrahiere ich 1 und setze den Rest, d. i. $16x^2 + 24x + 8$, gleich der zweiten Zahl. Es ist aber die erste Zahl $9x^2 + 6x$, und jede dieser beiden Zahlen, ebenso wie ihre Summe, giebt, wenn sie um 1 vermehrt wird, ein Quadrat.

Jetzt erübrigt noch, dafs auch die Differenz der Zahlen, wenn sie um 1 vermehrt wird, ein Quadrat gebe. Wenn man diese Differenz um 1 vermehrt, so erhält man

$$7x^2 + 18x + 9.$$

Setzen wir dies gleich dem Quadrat über der Seite $3 - 3x$, so ergiebt sich

$$x = 18.$$

Folglich wird die erste Zahl 3024, die zweite 5624 sein, und diese Werte genügen offenbar der Aufgabe*).

---

*) Wir wollen Diophants Verfahren allgemeiner betrachten: Er setzt $\mathrm{I} = (mx + 1)^2 - 1 = m^2x^2 + 2mx$ und $\mathrm{II} = p^2 - 1$; dann giebt jede der beiden Zahlen, wenn sie um 1 vergröfsert wird, ein Quadrat. Damit nun die dritte Bedingung erfüllt, d. i. $\mathrm{I} + \mathrm{II} + 1 = m^2x^2 + 2mx + p^2$ ein Quadrat werde, benutzt er die Identität

$$ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

zerlegt also $m^2x^2 + 2mx$ in zwei Faktoren, etwa x und $m^2x + 2m$, und setzt p gleich der halben Differenz dieser beiden Faktoren, also $p = \frac{m^2 - 1}{2}x + m$.

Jetzt ist nur noch $\mathrm{II} - \mathrm{I} + 1$, also der Ausdruck

15. Aufgabe. Drei Quadratzahlen von solcher Beschaffenheit zu finden, daſs die Summe derselben gleich der Summe ihrer drei Differenzen ist.

Auflösung. Man soll die Differenz zwischen der gröſsten und mittleren, diejenige zwischen der mittleren und kleinsten, endlich diejenige zwischen der gröſsten und kleinsten Quadratzahl nehmen. Die Summe dieser drei Differenzen soll gleich der Summe der drei Zahlen sein. Die Summe dieser drei Differenzen ist aber das Doppelte der Differenz zwischen der gröſsten und kleinsten Zahl. Das Doppelte der Differenz zwischen der gröſsten und kleinsten Zahl ist also gleich der Summe der drei Zahlen.

Es werde jetzt die kleinste Quadratzahl gleich 1 gesetzt, die gröſste gleich $x^2 + 2x + 1$; dann ist das Doppelte der Differenz zwischen der gröſsten und kleinsten Zahl $2x^2 + 4x$. Folglich ist die Summe der drei Quadratzahlen $2x^2 + 4x$. Die Summe zweier derselben ist aber $x^2 + 2x + 2$; somit bleibt für das mittlere Quadrat $x^2 + 2x - 2$. Dieser Ausdruck muſs gleich einem Quadrat sein. Derselbe sei gleich dem Quadrat über der Seite $x - 4$; dann ergiebt sich

$$x = \frac{9}{5}.$$

Es wird also das gröſste Quadrat $\frac{196}{25}$, das mittlere $\frac{121}{25}$, das kleinste 1 sein, und wenn alles mit 25 multipliziert wird, so ist das gröſste Quadrat 196, das mittlere 121, das kleinste 25*).

$$\left(\frac{m^2-1}{2}x + m\right)^2 - 1 - (m^2x^2 + 2mx) + 1$$
$$= \frac{m^4 - 6m^2 + 1}{4}x^2 + m(m^2 - 3)x + m^2$$

in ein Quadrat zu verwandeln, und da das von x unabhängige Glied eine Quadratzahl ist, so hat dies keine Schwierigkeit.

*) Sind allgemein x^2, y^2, z^2 die gesuchten Quadrate und $x > y > z$, so soll

$$(x^2 - y^2) + (y^2 - z^2) + (x^2 - z^2) = x^2 + y^2 + z^2$$

oder

$$x^2 - 3z^2 = y^2$$

sein. Setzen wir

16. Aufgabe. Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs man gegebene Zahlen erhält, wenn man die Summe je zweier mit der dritten Zahl multipliziert.

Auflösung. Es wird verlangt, dafs die Summe der ersten und zweiten Zahl, wenn sie mit der dritten multipliziert wird, 35 gebe; die Summe der zweiten und dritten Zahl soll, wenn sie mit der ersten multipliziert wird, 27 geben; endlich soll die Summe der ersten und dritten Zahl, wenn sie mit der zweiten multipliziert wird, 32 werden.

Wir setzen die dritte Zahl gleich x; dann mufs die Summe der ersten und zweiten $\frac{35}{x}$ sein. Es sei nun die erste gleich $\frac{10}{x}$, die zweite also gleich $\frac{25}{x}$, so bleiben noch zwei Forderungen zu erfüllen, nämlich dafs die Summe der zweiten und dritten Zahl, wenn sie mit der ersten multipliziert wird, 27 gebe, und dafs die mit der zweiten Zahl multiplizierte Summe der dritten und ersten gleich 32 sei.

Wenn man aber die Summe der zweiten und dritten Zahl mit der ersten multipliziert, so erhält man $10 + \frac{250}{x^2}$. Es ist also

$$10 + \frac{250}{x^2} = 27.$$

Wird die Summe der dritten und ersten Zahl mit der zweiten multipliziert, so ergiebt sich $25 + \frac{250}{x^2}$. Es ist also

$$25 + \frac{250}{x^2} = 32.$$

$$x^2 - 3z^2 = (x - kz)^2,$$

so ergiebt sich leicht

$$z = \frac{2kx}{3 + k^2}$$

und

$$y = x - kz = \frac{3 - k^2}{3 + k^2}\, x,$$

wo k unbestimmt bleibt. Die gesuchten Zahlen sind also

$$x^2, \quad \left(\frac{3 - k^2}{3 + k^2}\, x\right)^2, \quad \left(\frac{2kx}{3 + k^2}\right)^2.$$

Diophants Lösung entspricht den Werten $k = 5$, $x = 14$.

Es ist aber auch $10 + \frac{250}{x^2} = 27$, und die Differenz der rechten Seiten der Gleichungen ist 5. Wenn also auch $25 + \frac{250}{x^2}$ und $10 + \frac{250}{x^2}$ die Differenz 5 hätten, so würden beide Seiten der Gleichungen dieselbe Differenz haben. Nun rührt 25 von der zweiten, 10 von der ersten Zahl her, und die Differenz beider Zahlen soll 5 betragen. Die erste und zweite Zahl sind aber nicht beliebig, sondern ihre Summe ist 35. Es kommt also darauf an, 35 in zwei Zahlen zu teilen, deren Differenz 5 ist. Diese Zahlen sind 15 und 20.

Daher setze ich die erste Zahl gleich $\frac{15}{x}$, die zweite gleich $\frac{20}{x}$. Dann wird die Summe der zweiten und dritten, wenn man sie mit der ersten multipliziert, gleich $15 + \frac{300}{x^2}$, und das soll gleich 27 sein. Ferner ist die mit der zweiten Zahl multiplizierte Summe der ersten und dritten $20 + \frac{300}{x^2}$, und das soll gleich 32 sein. Aus

$$15 + \frac{300}{x^2} = 27$$

folgt aber

$$x = 5.$$

Somit wird die erste Zahl 3, die zweite 4, die dritte 5 sein*).

---

*) Werden die Zahlen x, y, z genannt, so sind die Gleichungen

$$(x + y)z = a$$
$$(y + z)x = b$$
$$(x + z)y = c$$

zu erfüllen. Aus der zweiten und dritten Gleichung folgt durch Subtraktion leicht

$$x - y = \frac{b}{z} - \frac{c}{z}.$$

Ferner ist nach der ersten Gleichung

$$x + y = \frac{a}{z}.$$

Somit bleibt z unbestimmt, und es ist

$$x = \frac{1}{2z}(a + b - c), \quad y = \frac{1}{2z}(a - b + c).$$

17. Aufgabe. Drei Zahlen zu finden, deren Summe eine Quadratzahl ist, und welche die Eigenschaft haben, dafs das Quadrat einer jeden, wenn es um die nächstfolgende Zahl vermehrt wird, ebenfalls ein Quadrat giebt.

Auflösung. Wir setzen die mittlere Zahl gleich x mit einem beliebigen Koeffizienten, etwa gleich $4x$. Da ich nun will, dafs das Quadrat der ersten Zahl, wenn es um die zweite vermehrt wird, ein Quadrat gebe, so bin ich dazu geführt, ein Quadrat zu suchen, welches eine Quadratzahl bleibt, wenn es um $4x$ vermehrt wird.

Zu diesem Zwecke suche ich zwei Zahlen, deren Produkt $4x$ ist. Es sind dies die Divisoren $2x$ und 2 von $4x$. Wenn ich nun die halbe Differenz dieser Divisoren gleich der ersten Zahl setze, so wird diese $x - 1$ sein, und dann habe ich die Forderung erfüllt, dafs das um die zweite Zahl vermehrte Quadrat der ersten eine Quadratzahl sei.

Nun soll noch das Quadrat der zweiten Zahl, d. i. $16x^2$, bei Addition der dritten Zahl ein Quadrat geben. Wenn ich also von irgend einem Quadrat $16x^2$ subtrahiere, so werde ich die dritte Zahl erhalten. Ich bilde das Quadrat über der Seite, welche 1 gröfser ist als die Seite von $16x^2$, d. i. $4x$, also das Quadrat über $4x + 1$. Dieses Quadrat wird

$$16x^2 + 8x + 1$$

betragen. Wenn ich hiervon $16x^2$ subtrahiere, so bleibt die dritte Zahl übrig, nämlich $8x + 1$.

Weiter will ich, dafs die Summe der drei Zahlen ein Quadrat sei; diese Summe ist aber $13x$. Das soll gleich einem Quadrat sein. Ich nehme als Wert desselben x^2 mit einer Quadratzahl als Koeffizienten, etwa $169x^2$. Dann ergiebt sich

$$x = 13x^2.$$

Die erste Zahl wird also $13x^2 - 1$, die zweite $52x^2$, die dritte $104x^2 + 1$ betragen, und nun sind drei der gestellten Forderungen in allgemeinen Ausdrücken erfüllt.

Jetzt erübrigt noch, dafs das Quadrat der dritten Zahl, d. i. $10\,816x^4 + 208x^2 + 1$, wenn es um die erste Zahl, d. i. $13x^2 - 1$, vermehrt wird, ein Quadrat gebe. Es soll also der

Ausdruck $10\,816x^4 + 221x^2$ oder, wenn wir alles durch x^2 dividieren, $10\,816x^2 + 221$ gleich einem Quadrat sein. Wir nehmen als Seite dieses Quadrats $104x + 1$ an. Aus

$$10\,816x^2 + 221 = (104x + 1)^2,$$

folgt dann

$$x = \frac{55}{52},$$

und somit wird die erste Zahl $\frac{36\,621}{2704}$, die zweite $\frac{157\,300}{2704}$, die dritte $\frac{317\,304}{2704}$ sein*).

---

18. Aufgabe. Drei Zahlen zu finden, deren Summe eine Quadratzahl ist, und welche die Eigenschaft

---

*) Die allgemeine Darstellung des von Diophant eingeschlagenen Verfahrens führt zwar zu unbequemen Ausdrücken, bietet aber keine Schwierigkeit. Fermat bemerkt hier: „Diese Aufgabe wird vielleicht eleganter auf folgende Weise gelöst: Man setze die erste Zahl gleich x und die zweite, damit sie mit dem Quadrate der ersten zusammen ein Quadrat bilde, gleich $2x + 1$; die dritte Zahl setze man gleich der Summe eines Vielfachen von x und einer bestimmten Zahl, die jedoch der Bedingung genügen, dafs die dritte Zahl mit dem Quadrate der zweiten zusammen ein Quadrat gebe; es sei z. B. die dritte Zahl gleich $4x + 3$. Auf diese Weise ist schon zwei Forderungen der Aufgabe genügt, und es erübrigt noch, dafs die Summe aller drei Zahlen ein Quadrat sei, und dafs ferner das Quadrat der dritten Zahl ein Quadrat bleibe, wenn man die erste Zahl dazu zählt. Die Summe aller drei Zahlen ist $4 + 7x$, das Quadrat der dritten Zahl und die erste Zahl geben zusammen $9 + 25x + 16x^2$. Es entsteht also eine doppelte Gleichung, deren Lösung man sofort erhält, wenn man die von x unabhängigen Glieder, welche Quadratzahlen sind, auf eine und dieselbe Quadratzahl reduziert.

Auf dieselbe Weise läfst sich die Aufgabe sehr leicht auf vier oder beliebig viele Zahlen ausdehnen; man hat nur dafür Sorge zu tragen, dafs die von x unabhängigen Zahlen, welche man bei Bildung der Ausdrücke für die einzelnen Zahlen nimmt, zur Summe eine Quadratzahl haben, und das macht gar keine Schwierigkeit."

haben, dafs das Quadrat einer jeden, wenn es um die nächstfolgende Zahl vermindert wird, ebenfalls ein Quadrat giebt.

Auflösung. Ich setze wieder die mittlere Zahl gleich $4x$. Da nun das Quadrat der ersten Zahl, wenn die zweite davon subtrahiert wird, ein Quadrat geben soll, so kommt es darauf an, ein Quadrat zu suchen, welches bei Subtraktion von $4x$ ein Quadrat als Rest giebt.

Zunächst suche ich zwei Zahlen, deren Produkt $4x$ ist. Es sind dies die Divisoren $2x$ und 2. Nun nehme ich die Hälfte der Summe dieser beiden Zahlen und setze dieselbe, d. i. $x + 1$, gleich der ersten Zahl. Dann ist eine der gestellten Forderungen erfüllt.

Weiter soll das Quadrat der zweiten Zahl, d. i. $16x^2$, wenn es um die dritte Zahl vermindert wird, ein Quadrat geben. Wenn wir also von $16x^2$ ein beliebiges Quadrat subtrahieren, so werden wir die dritte Zahl erhalten. Wir nehmen zu diesem Zwecke das Quadrat über der Seite $4x - 1$. Dasselbe ist $16x^2 + 1 - 8x$. Wenn wir dies von $16x^2$ subtrahieren, so bleibt für die dritte Zahl $8x - 1$ übrig, und jetzt ist eine zweite Forderung erfüllt.

Nun soll auch die Summe der drei Zahlen, d. i. $13x$, ein Quadrat sein. Es sei

$$13x = 169x^2,$$

so wird

$$x = 13x^2.$$

Folglich wird die erste Zahl $13x^2 + 1$, die zweite $52x^2$, die dritte $104x^2 - 1$ sein, und damit sind drei Forderungen durch allgemeine Ausdrücke erfüllt.

Es erübrigt noch, dafs das Quadrat der dritten Zahl, wenn die erste davon subtrahiert wird, ein Quadrat gebe. Das um die erste Zahl verringerte Quadrat der dritten ist

$$10\,816x^4 - 221x^2.$$

Das soll gleich einem Quadrat sein. Wird alles durch x^2 dividiert, so erhält man $10\,816x^2 - 221$. Setzen wir diesen Ausdruck gleich dem Quadrat über der Seite $104x - 1$, so erhalten wir

$$x = \frac{111}{104}.$$

Folglich wird die erste Zahl $\frac{170\,989}{10\,816}$, die zweite $\frac{640\,692}{10\,816}$, die dritte $\frac{1\,270\,568}{10\,816}$ sein*).

---

19. Aufgabe. Zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs der Kubus der ersten, wenn er um die zweite Zahl vermehrt wird, einen Kubus, dagegen das Quadrat der zweiten Zahl, wenn es um die erste vermehrt wird, ein Quadrat gebe.

Auflösung. Setzen wir die erste Zahl gleich x, so mufs die zweite gleich der Differenz sein, die entsteht, wenn man x^3 von irgend einer Kubikzahl, etwa 8, subtrahiert, also gleich $8 - x^3$; denn dann wird der Kubus der ersten Zahl ein Kubus bleiben, wenn man ihn um die zweite Zahl vermehrt.

Es erübrigt noch, dafs das Quadrat der zweiten Zahl, wenn es um die erste vermehrt wird, ein Quadrat gebe. Das um die erste Zahl vermehrte Quadrat der zweiten ist aber $x^6 + x + 64 - 16x^3$. Dies setzen wir gleich dem Quadrat über der Seite $x^3 + 8$, d. i. gleich $x^6 + 16x^3 + 64$. Indem wir nun [in der Gleichung

$$x^6 + x + 64 - 16x^3 = x^6 + 16x^3 + 64]$$

die abzuziehende Gröfse beiderseits addieren und dann Gleiches von Gleichem subtrahieren, so bleibt

$$32x^3 = x$$

oder, wenn alles durch x dividiert wird,

$$32x^2 = 1.$$

Nun ist 1 eine Quadratzahl; wenn also auch $32x^2$ ein Quadrat wäre, so wäre die Gleichung gelöst.

$32x^2$ ist aber aus 2mal $16x^3$ entstanden und $16x^3$ aus 2mal $8x^3$, d. h. aus 2mal 8; daher ist $32x^2$ aus 4mal 8 ent-

---

*) Anmerkung von Fermat: „Durch das in der vorhergehenden Aufgabe angewandte Schlufsverfahren läfst sich auch diese Aufgabe lösen und auf beliebig viele Zahlen ausdehnen.“

standen. Es kommt also darauf an, einen Kubus zu suchen, dessen Vierfaches ein Quadrat ist.

Es sei x^3 der gesuchte Kubus. Das Vierfache desselben, d. i. $4x^3$, soll ein Quadrat geben, etwa $16x^2$. Dann ergiebt sich

$$x = 4.$$

Der Kubus wird also 64 sein.

Ich setze daher die zweite Zahl gleich $64 - x^3$. Dann ist noch zu bewirken, dafs das Quadrat der zweiten Zahl, wenn es um die erste vermehrt wird, ein Quadrat gebe. Das um die erste Zahl vermehrte Quadrat der zweiten ist aber

$$x^6 + 4096 + x - 128x^3;$$

das setzen wir gleich dem Quadrat über der Seite $x^3 + 64$, also gleich $x^6 + 4096 + 128x^3$. Dann bleibt

$$256x^3 = x,$$

und daraus ergiebt sich

$$x = \frac{1}{16}.$$

Folglich wird die erste Zahl $\frac{1}{16}$, die zweite $\frac{262\,143}{4096}$ sein*).

---

20. Aufgabe. Drei Zahlen in allgemeinen Ausdrücken zu finden, die so beschaffen sind, dafs das um 1 vermehrte Produkt je zweier derselben ein Quadrat sei.

Auflösung. Ich will, dafs das Produkt der ersten und

---

*) Wird die erste Zahl mit x bezeichnet, so mufs die zweite $a^3 - x^3$ sein, und es ist nur noch die Bedingung zu erfüllen, dafs $(a^3 - x^3)^2 + x$ ein Quadrat gebe. Diophant setzt

$$(a^3 - x^3)^2 + x = (a^3 + x^3)^2$$

und erhält

$$4a^3x^3 = x,$$

also

$$x^2 = \frac{1}{4a^3}, \quad x = \frac{1}{2a\sqrt{a}}.$$

Sollen sich daher rationale Werte ergeben, so mufs a eine Quadratzahl sein. Für $a = 4$ wird z. B. $x = \frac{1}{16}$.

zweiten Zahl, wenn 1 dazu addiert wird, ein Quadrat werde. Wenn ich also 1 von irgend einem Quadrat subtrahiere, so werde ich das Produkt aus der ersten und zweiten Zahl erhalten. Ich bilde nun das Quadrat über der Summe von 1 und x mit einem beliebigen Koeffizienten, etwa das Quadrat über $1 + x$. Dasselbe wird $x^2 + 2x + 1$ sein. Subtrahiere ich davon 1, so bleibt $x^2 + 2x$, und das wird das Produkt aus der ersten und zweiten Zahl sein.

Es sei die zweite Zahl x, die erste also $x + 2$.

Weiter soll auch das Produkt aus der zweiten und dritten Zahl bei Addition von 1 ein Quadrat werden. Wenn ich also wieder von irgend einem Quadrat 1 subtrahiere, so werde ich das Produkt aus der zweiten und dritten Zahl erhalten.

Es werde das Quadrat über $3x + 1$ gebildet. Dasselbe wird $9x^2 + 6x + 1$ betragen, und wenn davon 1 subtrahiert wird, so bleibt $9x^2 + 6x$. Es mufs also das Produkt aus der zweiten und dritten Zahl gleich $9x^2 + 6x$ sein, und da die zweite Zahl gleich x ist, so wird die dritte $9x + 6$ sein müssen.

Ferner soll das um 1 vermehrte Produkt der ersten und dritten Zahl ein Quadrat geben. Dasselbe ist $9x^2 + 24x + 13$, und dieser Ausdruck soll gleich einem Quadrat sein.

Nun ist der Koeffizient von x^2 eine Quadratzahl; wenn daher auch das von x unabhängige Glied eine Quadratzahl und das doppelte Produkt der Seiten des Koeffizienten von x^2 und des von x unabhängigen Gliedes gleich dem Koeffizienten von x wäre, so hätten wir den drei Forderungen durch allgemeine Ausdrücke genügt.

Die Zahl 13 ist dadurch entstanden, dafs man 2 mit 6 multipliziert und das Produkt um 1 vermehrt hat. Weiter ist 2 entstanden, indem man x mit 1 multipliziert und das Produkt verdoppelt hat; ebenso hat man 6 erhalten durch Verdoppelung des Produkts von $3x$ und 1.

Ich will nun, dafs das Doppelte eines Koeffizienten von x, wenn man dasselbe mit dem Doppelten eines anderen Koeffizienten von x multipliziert und das Produkt um 1 vermehrt, ein Quadrat gebe. Wenn man aber das Doppelte eines Koeffizienten mit dem Doppelten eines anderen Koeffizienten multipliziert, so erhält man das Vierfache des Produkts dieser Koeffizienten. Es soll also das um 1 vermehrte Vierfache des Produkts der Koeffizienten eine Quadratzahl sein.

Nun giebt aber das Vierfache des Produkts zweier ganz beliebigen Zahlen, wenn es um das Quadrat der Differenz derselben vermehrt wird, ein Quadrat. Wenn wir also das Quadrat der Differenz gleich 1 annehmen, so bildet das um 1 vermehrte Vierfache der Zahlen ein Quadrat. Wenn aber das Quadrat der Differenz 1 ist, so mufs auch die Differenz selbst 1 sein. Wir müssen daher die Quadrate von Zahlen bilden, bei denen die Koeffizienten von x um 1 verschieden sind, also etwa das Quadrat von $x + 1$ und dasjenige von $2x + 1$.

Das Quadrat von $x + 1$ wird $x^2 + 2x + 1$ sein. Wird davon 1 subtrahiert, so bleibt $x^2 + 2x$. Es mufs also das Produkt aus der ersten und zweiten Zahl $x^2 + 2x$ sein. Wird die zweite Zahl gleich x gesetzt, so bleibt für die erste $x + 2$.

Weiter ist das Quadrat von $2x + 1$ gleich $4x^2 + 4x + 1$. Wird auch davon 1 subtrahiert, so bleibt $4x^2 + 4x$. Es mufs also das Produkt aus der zweiten und dritten Zahl $4x^2 + 4x$ sein, und da die zweite gleich x ist, so wird die dritte $4x + 4$ sein müssen.

Auf diese Weise ist der Forderung, dafs das um 1 vermehrte Produkt je zweier der drei Zahlen ein Quadrat sei, durch allgemeine Ausdrücke, in denen der Unbekannten jeder beliebige Wert beigelegt werden kann, genügt. Denn eine Aufgabe unbestimmt oder in allgemeinen Ausdrücken lösen, heifst für die gesuchten Zahlen Ausdrücke ermitteln, welche der Aufgabe genügen, welchen Wert man auch für die Unbekannte in diese Ausdrücke einsetzen mag*).

*) Wird allgemein $\mathrm{I} = a^2x + 2a$, $\mathrm{II} = x$, $\mathrm{III} = b^2x + 2b$ gesetzt, so ist nur noch

$$(a^2x + 2a)(b^2x + 2b) + 1$$

zu einem Quadrat zu machen. Setzt man zu diesem Zwecke

$$(a^2x + 2a)(b^2x + 2b) + 1 = (abx + k)^2,$$

wo auch k unbestimmt bleibt, so ergiebt sich

$$x = \frac{k^2 - 4ab - 1}{2ab(a + b - k)},$$

also

21. Aufgabe. Vier Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daſs das Produkt je zweier derselben, wenn es um 1 vermehrt wird, ein Quadrat gebe.

Auflösung. Ich will zunächst, daſs das um 1 vermehrte Produkt der ersten und zweiten Zahl ein Quadrat sei. Wenn ich also von irgend einem Quadrat 1 subtrahiere, so werde ich das Produkt der ersten und zweiten Zahl erhalten. Ich bilde nun das Quadrat über $x + 1$. Dieses Quadrat ist

$$x^2 + 2x + 1,$$

und wenn ich davon 1 subtrahiere, so bleibt $x^2 + 2x$ als Produkt der ersten und zweiten Zahl. Es sei nun die erste Zahl x, so wird die zweite $x + 2$ sein.

Weiter soll das um 1 vermehrte Produkt der ersten und dritten Zahl ein Quadrat sein. Ich bilde nun das Quadrat

---

$$\mathrm{I} = \frac{a(k^2 + 4b^2 - 4bk - 1)}{2b(a + b - k)}, \quad \mathrm{II} = \frac{k^2 - 4ab - 1}{2ab(a + b - k)},$$

$$\mathrm{III} = \frac{b(k^2 + 4a^2 - 4ak - 1)}{2a(a + b - k)}.$$

Fermat bemerkt:

„Es sei die Aufgabe gestellt, drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daſs das um 1 vermehrte Produkt je zweier derselben ein Quadrat bilde, daſs aber auch jede der drei Zahlen selbst ein Quadrat werde, wenn man sie um 1 vergröſsert.

Wir lösen zunächst die vorliegende Aufgabe Diophants in der Weise, daſs das von x unabhängige Glied in dem Ausdrucke für die erste Zahl und ebenso dasjenige in dem Ausdrucke für die dritte Zahl ein Quadrat wird, wenn man 1 dazu zählt. Es seien z. B. die allgemeinen Ausdrücke für die gesuchten Zahlen

$$\frac{169}{5184}x + \frac{13}{36}, \quad x, \quad \frac{7225}{5184}x + \frac{85}{36},$$

so leuchtet ein, daſs diese unbestimmte Lösung den ersten Forderungen der neuen Aufgabe genügt.

Jetzt erübrigt noch, daſs jede einzelne dieser Zahlen ein Quadrat wird, wenn man sie um 1 vermehrt. Es entsteht also eine dreifache Gleichung, die jedoch leicht nach meiner Methode gelöst wird, da das von x unabhängige Glied in jedem der drei Ausdrücke durch Addition von 1 ein Quadrat wird."

über $2x + 1$, da nach dem in der vorhergehenden Aufgabe Gezeigten der Koeffizient von x um 1 gröfser sein mufs, und subtrahiere von dem Quadrat 1. Den Rest $4x^2 + 4x$ setze ich gleich dem Produkt der ersten und dritten Zahl. Da nun die erste Zahl x ist, so mufs die dritte $4x + 4$ sein.

Ferner soll das um 1 vermehrte Produkt der ersten und vierten Zahl ein Quadrat sein. Ich bilde nun, da der Koeffizient von x wieder um 1 gröfser sein mufs, das Quadrat über $3x + 1$ und subtrahiere 1 von diesem Quadrat. Der Rest $9x^2 + 6x$ wird das Produkt der ersten und vierten Zahl sein, und da die erste x ist, so mufs die vierte $9x + 6$ sein.

Nun trifft es schon zu, dafs das Produkt [der zweiten und dritten Zahl und ebenso das Produkt] der dritten und vierten Zahl, wenn es um 1 vermehrt wird, ein Quadrat giebt.

Wenn man aber die zweite Zahl mit der vierten multipliziert und zum Produkt 1 addiert, so erhält man

$$9x^2 + 24x + 13.$$

Das soll gleich einem Quadrat sein, etwa gleich dem Quadrat über $3x - 4$. Dann ergiebt sich

$$x = \frac{1}{16}.$$

Somit wird die erste Zahl $\frac{1}{16}$, die zweite $\frac{33}{16}$, die dritte $\frac{68}{16}$, die vierte $\frac{105}{16}$ sein*).

---

*) Wenn eine Zahl gleich $a^2x + 2a$, eine zweite gleich $(a+1)^2x + 2(a+1)$ ist, so wird das Produkt beider bei Addition von 1 ein Quadrat, nämlich $[a(a+1)x + (2a+1)]^2$ geben. Deshalb setzt Diophant

$$\mathrm{I} = x, \quad \mathrm{II} = a^2x + 2a, \quad \mathrm{III} = (a+1)^2x + 2(a+1),$$
$$\mathrm{IV} = (a+2)^2x + 2(a+2).$$

Dann sind schon 5 Bedingungen der Aufgabe erfüllt, und es ist nur noch $\mathrm{II} \cdot \mathrm{IV} + 1$ oder

$$[a(a+2)x]^2 + 4a(a^2 + 3a + 2)x + 4a(a+2) + 1$$

zu einem Quadrat zu machen; da x^2 eine Quadratzahl zum Koeffizienten hat, so macht dies keine Schwierigkeit.

Fermat bemerkt: „Man ermittle drei beliebige Zahlen

22. Aufgabe. Drei proportionale Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daſs die Differenz je zweier ein Quadrat sei.

Auflösung. Wir setzen die kleinste Zahl gleich x, die mittlere gleich $x + 4$, damit die Differenz beider ein Quadrat sei. Ferner setzen wir die dritte Zahl gleich $x + 13$, damit dieselbe um ein Quadrat gröſser sei als die mittlere Zahl.

Wenn nun auch die Differenz zwischen der gröſsten und der kleinsten Zahl ein Quadrat wäre, so wäre der Forderung, daſs je zwei der Zahlen eine Quadratzahl zur Differenz haben sollen, durch allgemeine Ausdrücke genügt. Die gröſste Zahl ist aber um 13 gröſser als die kleinste, und 13 ist die Summe der Quadratzahlen 4 und 9. Es kommt also darauf an, zwei Quadratzahlen zu suchen, deren Summe ein Quadrat ist. Das geschieht aber leicht vermittels der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks. Die Quadrate dieser Seiten sind 9 und 16.

Ich setze daher die kleinste Zahl gleich x, die mittlere gleich $x + 9$, die dritte gleich $x + 25$. Dann haben je zwei der Zahlen ein Quadrat zur Differenz.

Es erübrigt noch, daſs die Zahlen proportional seien. Wenn aber drei Zahlen proportional sind, so ist das Produkt der beiden äuſseren Zahlen gleich dem Quadrat der mittleren. Das Produkt der gröſsten und kleinsten, d. i. der beiden äuſseren Zahlen, ist aber $x^2 + 25x$, und das Quadrat der mittleren Zahl ist $x^2 + 18x + 81$. Setzt man diesen letzteren Ausdruck gleich $x^2 + 25x$, so erhält man $x = \frac{81}{7}\cdot$

---

von der Beschaffenheit, daſs das Produkt je zweier derselben bei Addition von 1 eine Quadratzahl wird. Diese Zahlen seien z. B. 3, 1, 8. Die vierte Zahl muſs dann der Bedingung genügen, daſs ihr Produkt in jede einzelne der bereits gefundenen Zahlen ein Quadrat wird, wenn man es um 1 vermehrt. Wird die zu ermittelnde vierte Zahl gleich x gesetzt, so muſs jeder der drei Ausdrücke $3x + 1$, $x + 1$, $8x + 1$ zu einem Quadrat gemacht werden; es entsteht also eine dreifache Gleichung, die nach der von mir erfundenen Methode gelöst wird. Man sehe die Anmerkung zur 24. Aufgabe des 6. Buches.“

Die erste Zahl wird also $\frac{81}{7}$, die zweite $\frac{144}{7}$, die dritte $\frac{256}{7}$ sein*).

---

23. Aufgabe. Drei Zahlen zu finden, deren Produkt ein Quadrat giebt, wenn es um jede der drei Zahlen vermehrt wird.

Auflösung. Wir setzen das Produkt der drei Zahlen gleich $x^2 + 2x$, und damit dasselbe bei Addition der ersten Zahl ein Quadrat werde, nehmen wir die erste Zahl gleich 1 an. Nun soll das Produkt der drei Zahlen, auch wenn die zweite dazu addiert wird, ein Quadrat geben. Wenn ich also von irgend einem Quadrat $x^2 + 2x$ subtrahiere, so werde ich die zweite Zahl erhalten.

Ich bilde daher das Quadrat über $x + 3$ und subtrahiere von diesem Quadrat $x^2 + 2x$. Dann erhalte ich $4x + 9$. Ich setze also die zweite Zahl gleich $4x + 9$.

Nun ist das Produkt der drei Zahlen $x^2 + 2x$, das Produkt der ersten und zweiten $4x + 9$. Wenn ich also $x^2 + 2x$ durch $4x + 9$ dividiere, so werde ich die dritte Zahl erhalten.

Diese Division ist aber unmöglich, und damit sie möglich werde, mufs man bewirken, dafs sich x^2 zu $4x$ verhalte wie $2x$ zu 9, oder umgestellt, wie x^2 zu $2x$, so mufs sich $4x$ zu 9 verhalten. Der Koeffizient von x^2 ist aber die Hälfte desjenigen von $2x$; wenn also auch der Koeffizient von $4x$

---

*) Wird allgemein $\mathrm{I} = x$, $\mathrm{II} = x + a^2$, $\mathrm{III} = x + b^2$ gesetzt, so sind schon die Differenzen $\mathrm{II} - \mathrm{I}$, $\mathrm{III} - \mathrm{I}$ Quadrate. Damit nun noch $\mathrm{III} - \mathrm{II} = b^2 - a^2$ ein Quadrat sei, mufs b Hypotenuse, a Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, also b von der Form $m^2 + n^2$, a von der Form $m^2 - n^2$ (oder auch $2mn$) sein. Es ist also

$$\mathrm{I} = x, \quad \mathrm{II} = x + (m^2 - n^2)^2, \quad \mathrm{III} = x + (m^2 + n^2)^2.$$

Nun soll noch II die mittlere Proportionale zwischen I und III, d. h.

$$[x + (m^2 - n^2)^2]^2 = x \,.\, [x + (m^2 + n^2)^2]$$

sein. Daraus ergiebt sich leicht

$$x = \frac{(m^2 - n^2)^4}{6m^2n^2 - m^4 - n^4}.$$

die Hälfte von 9 wäre, so würde die Division möglich sein. Nun ist hier $4x$ die Differenz von $6x$ und $2x$, und $6x$ ist dadurch erhalten worden, daſs man das Produkt aus 3 und x zweimal genommen hat, das heiſst 6 ist aus 2mal 3 entstanden. Die Zahl 9 ist aber das Quadrat von 3.

Es kommt also darauf an, statt 3 eine Zahl von der Beschaffenheit zu suchen, daſs das um 2 verminderte Doppelte derselben gleich der Hälfte ihres Quadrates sei. Es sei x diese gesuchte Zahl; wird dieselbe mit 2 multipliziert und das Produkt um 2 vermindert, so erhält man $2x - 2$. Das Quadrat der Zahl ist aber x^2. Wir wollen nun, daſs

$$2x - 2 = \frac{x^2}{2},$$

also

$$x^2 = 4x - 4$$

sei. Daraus ergiebt sich

$$x = 2.$$

Jetzt gehe ich zu der ursprünglich gestellten Aufgabe zurück. Ich hatte die erste Zahl gleich 1, das Produkt der drei Zahlen gleich $x^2 + 2x$ gesetzt. Es soll nun auch das Produkt der drei Zahlen, wenn es um die zweite Zahl vermehrt wird, ein Quadrat geben. Wenn ich also von irgend einem Quadrat $x^2 + 2x$ subtrahiere, so werde ich die zweite Zahl erhalten. Ich bilde nun das Quadrat von x, vermehrt um eine solche Zahl, daſs das um 2 verminderte Doppelte dieser Zahl gleich der Hälfte ihres Quadrats sei; wie soeben gezeigt worden, ist dies die Zahl 2. Ich bilde daher das Quadrat über $x + 2$. Dasselbe ist $x^2 + 4x + 4$. Wenn ich hiervon das Produkt der drei Zahlen, nämlich $x^2 + 2x$, subtrahiere, so bleibt $2x + 4$, und das ist die zweite Zahl. Wenn ich weiter das Produkt der drei Zahlen durch das Produkt der ersten und zweiten Zahl, d. i. $2x + 4$ dividiere, so erhalte ich die dritte Zahl, nämlich $\frac{x}{2}$.

Es erübrigt noch, daſs das Produkt der drei Zahlen, auch wenn die dritte dazu addiert wird, ein Quadrat gebe. Das um die dritte Zahl vermehrte Produkt der drei Zahlen ist aber $x^2 + 2\frac{1}{2}x$. Das soll gleich einem Quadrat, etwa gleich $4x^2$ sein. Dann ergiebt sich

$$x = \frac{5}{6}.$$

Die erste Zahl wird also $\frac{6}{6}$, die zweite $\frac{34}{6}$, die dritte $\frac{2\frac{1}{2}}{6}$ sein*).

---

*) Wird allgemeiner das Produkt der drei Zahlen gleich $x^2 + 2ax$ und $\mathrm{I} = a^2$ gesetzt, so werden wir II erhalten, wenn wir $x^2 + 2ax$ von einem vorläufig noch unbestimmten Quadrat $(x + b)^2$ subtrahieren. Es ist also $\mathrm{II} = 2(b - a)x + b^2$. Weiter mufs III der Quotient der Division von $x^2 + 2ax$ durch

$$a^2 . [2(b - a)x + b^2]$$

sein. Damit diese Division aufgehe, mufs, wie sich leicht ergiebt, $b = 2a$ angenommen werden. Dann erhält man $\mathrm{III} = \frac{x}{2a^3}$.

Nun ist noch die so ermittelte dritte Zahl zum Produkte der drei Zahlen zu addieren und die Summe in ein Quadrat zu verwandeln. Setzt man

$$x^2 + \left(2a + \frac{1}{2a^3}\right)x = (kx)^2,$$

so ergiebt sich

$$x = \frac{2a + \frac{1}{2a^3}}{k^2 - 1};$$

also ist

$$\mathrm{I} = a^2, \quad \mathrm{II} = \frac{4a^2k^2 + \frac{1}{a^2}}{k^2 - 1}, \quad \mathrm{III} = \frac{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^6}}{k^2 - 1}.$$

Fermat bemerkt: „Die Aufgabe kann auch ohne die von Diophant angewandte Hilfsaufgabe vermittels einer doppelten Gleichung gelöst werden: Man setze das Produkt der drei Zahlen gleich $x^2 - 2x$, die erste Zahl gleich 1, die zweite gleich $2x$, so ist schon zwei Forderungen der Aufgabe genügt. Um die dritte Zahl zu erhalten, dividieren wir das Produkt der drei Zahlen, d. i. $x^2 - 2x$, durch das Produkt der ersten und zweiten, d. i. $2x$; diese Division ergiebt $\frac{x}{2} - 1$. Wird dies zum Produkt der drei Zahlen addiert, so erhält man

$$x^2 - \frac{3}{2}x - 1,$$

und dieser Ausdruck ist zu einem Quadrat zu machen.

24. Aufgabe. Drei Zahlen zu finden, deren Produkt, wenn es um jede der Zahlen vermindert wird, ein Quadrat bildet.

Auflösung. Wir setzen die erste Zahl gleich x, das Produkt der drei Zahlen gleich $x^2 + x$; dasselbe bildet dann, wenn es um die erste Zahl vermindert wird, ein Quadrat. Da nun das Produkt der drei Zahlen $x^2 + x$ und die erste Zahl x ist, so wird das Produkt aus der zweiten und dritten $x + 1$ sein.

Es sei die zweite Zahl 1, so muſs die dritte $x + 1$ sein, und es erübrigt noch, daſs das Produkt der drei Zahlen ein Quadrat gebe, sowohl wenn es um die zweite, als auch wenn es um die dritte Zahl vermindert wird. Subtrahiert man die zweite Zahl, so bleibt $x^2 + x - 1$, und das soll gleich einem Quadrat sein. Subtrahiert man die dritte Zahl, so bleibt $x^2 - 1$, und das soll ebenfalls ein Quadrat sein.

Es entsteht also eine doppelte Gleichung. Ich nehme die Differenz der beiden Ausdrücke, d. i. x, und wähle zwei Zahlen, deren Produkt gleich dieser Differenz ist; es sind dies zwei Zahlen, die in x aufgehen, nämlich $\frac{1}{2}$ und $2x$ (das Doppelte der Seite des Quadrats x^2). Dann besteht, wie du weiſst, eine Gleichung $\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = x^2 - 1\right]$, und man erhält

$$x = \frac{17}{8}.$$

Somit wird die erste Zahl $\frac{17}{8}$, die zweite 1, die dritte $\frac{25}{8}$ sein*).

Es muſs jedoch wegen der getroffenen Bestimmungen der Wert von x gröſser als 2 sein. Wir setzen daher $x^2 - \frac{3}{2}x - 1$ gleich dem Quadrat über der Differenz von x und irgend einer Zahl, die gröſser als 2 ist. Alles andere ist bekannt." Es ergiebt sich

$$\mathrm{I} = 1, \quad \mathrm{II} = \frac{4(1+k^2)}{4k-3}, \quad \mathrm{III} = \frac{(k-2)^2}{4k-3},$$

wo k unbestimmt ist.

*) Wird das Produkt der drei Zahlen gleich $x^2 + ax$ und die erste gleich ax gesetzt, so muſs das Produkt der zweiten und dritten $\frac{x}{a} + 1$ betragen. Diophant nimmt nun, um die Aufgabe zu

25. Aufgabe. Eine gegebene Zahl in zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu teilen, dafs das Produkt derselben gleich der Differenz zwischen einem Kubus und seiner Seite werde.

Auflösung. Die gegebene Zahl sei 6. Wird die erste der gesuchten Zahlen gleich x gesetzt, so bleibt für die zweite $6 - x$, und es soll das Produkt beider ein um seine Seite verringerter Kubus sein. Das Produkt ist aber $6x - x^2$. Das soll gleich einem Kubus sein, der um seine Seite verringert worden ist.

Ich bilde nun den Kubus über der Differenz, die entsteht, wenn ich von x mit einem beliebigen Koeffizienten 1 subtrahiere, etwa den Kubus über $2x - 1$. Dieser Kubus giebt, wenn ich seine Seite davon subtrahiere, $8x^3 + 4x - 12x^2$. Das soll gleich $6x - x^2$ sein.

Wenn jetzt die Koeffizienten von x in beiden Ausdrücken einander gleich wären, so würde ein Vielfaches von x^3 gleich

---

erleichtern, die zweite Zahl gleich 1 an, so dafs die dritte gleich $\frac{x}{a} + 1$ wird. Dann sind noch die beiden Bedingungen

$$x^2 + ax - 1 = u^2$$

$$x^2 + ax - \frac{x}{a} - 1 = v^2$$

zu erfüllen. Diese geben

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{2a} \cdot 2x = u^2 - v^2 = (u + v)(u - v);$$

also erhalten wir, wenn wir

$$\frac{1}{2a} = u + v$$

$$2x = u - v$$

annehmen,

$$u = x + \frac{1}{4a}$$

und

$$x^2 + ax - 1 = \left(x + \frac{1}{4a}\right)^2.$$

Daraus folgt leicht

$$x = \frac{16a^2 + 1}{8a(2a^2 - 1)},$$

wo a jede Zahl sein kann.

einem Vielfachen von x^2 bleiben, und dann wäre x rational angebbar.

Nun ist $4x$ aus der Differenz von 3mal $2x$ und $2x$ entstanden, und wenn 3mal $2x$ um $2x$ vermindert wird, so giebt das 2mal $2x$. Die Zahl 6 dagegen ist in der Aufgabe gegeben. Es kommt also darauf an, statt $2x$ ein anderes Vielfaches von x zu nehmen, so daſs der doppelte Koeffizient von x 6 sei. Dieser Koeffizient ist 3.

Indem ich daher suche, $6x - x^2$ gleich einem Kubus zu machen, der um seine Seite verringert worden ist, bilde ich den Kubus über der Seite $3x - 1$. Wenn ich von diesem Kubus die Seite selbst subtrahiere, so erhalte ich

$$27x^3 + 6x - 27x^2.$$

Wird dies gleich $6x - x^2$ gesetzt, so folgt

$$x = \frac{26}{27}.$$

Daher wird die erste Zahl $\frac{26}{27}$, die zweite $\frac{136}{27}$ sein*).

---

26. Aufgabe. Eine gegebene Zahl in drei Zahlen von solcher Beschaffenheit zu teilen, daſs das Produkt derselben ein Kubus ist, welcher die Summe der Differenzen je zweier dieser Zahlen als Seite hat.

Auflösung. Die gegebene Zahl sei 4. Das Produkt der

---

*) Ist die gegebene Zahl a, so setze man die gesuchten Zahlen gleich x und $a - x$, so daſs das Produkt beider $ax - x^2$ ist. Wird jetzt

$$ax - x^2 = (mx - 1)^3 - (mx - 1)$$

angenommen, so ergiebt sich

$$ax - x^2 = m^3x^3 - 3m^2x^2 + 2mx,$$

also für

$$2m = a$$

$$x = \frac{3\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1}{\left(\frac{a}{2}\right)^3}.$$

Zahlen, welches ein Kubus sein soll, sei $8x^3$; die Seite dieses Kubus ist $2x$.

Wenn man die Differenz zwischen der zweiten und ersten Zahl, diejenige zwischen der dritten und zweiten und diejenige zwischen der dritten und ersten addiert, so erhält man das Doppelte der Differenz zwischen der dritten und ersten Zahl, d. h. wenn man drei ungleiche Zahlen hat, so ist die Summe der Differenzen je zweier dieser Zahlen das Doppelte der Differenz der beiden äufseren Zahlen.

Nun haben wir aber oben die Seite des Kubus gleich $2x$ vorausgesetzt. Es mufs also $2x$ die Summe der Differenzen je zweier der Zahlen und daher die dritte um x gröfser sein als die erste. Es sei die erste Zahl gleich einem beliebigen Vielfachen von x, etwa $2x$, so wird die dritte $3x$ sein. Da nun das Produkt der drei Zahlen $8x^3$, das Produkt der ersten und dritten $6x^2$ ist, so mufs die zweite Zahl $1\frac{1}{3}x$ sein. Wenn also die zweite Zahl gröfser als die erste und kleiner als die dritte wäre, so wäre die Aufgabe gelöst.

Die zweite Zahl ist dadurch erhalten worden, dafs wir $8x^3$ durch das Produkt der ersten und dritten dividiert haben. Die erste und die dritte Zahl sind nicht beliebig angenommen, sondern [ihre Koeffizienten] unterscheiden sich um 1. Es kommt also darauf an, zwei um 1 verschiedene Zahlen von der Beschaffenheit zu suchen, dafs, wenn ich mit ihrem Produkt in 8 dividiere, der erhaltene Quotient gröfser sei als die kleinere und kleiner als die gröfsere der beiden Zahlen.

Wird die kleinere dieser Zahlen gleich x gesetzt, so wird die gröfsere $x + 1$ sein, und wenn ich 8 durch das Produkt derselben, d. i. $x^2 + x$ dividiere, so erhalte ich die mittlere Zahl, nämlich $\frac{8}{x^2 + x}$. Diese Zahl soll nun gröfser als x, aber kleiner als $x + 1$ sein. Da die Differenz zwischen diesen beiden letzten Zahlen 1 ist, so wird die Differenz zwischen der ersten [gröfsten] und zweiten Zahl kleiner als 1 sein; daher wird die zweite Zahl, wenn sie um 1 vermehrt wird, gröfser sein als die erste [gröfste].

Wenn aber die zweite Zahl um 1 vermehrt und auf den Nenner $x^2 + x$ gebracht wird, so wird dieselbe gleich

$\frac{x^2+x+8}{x^2+x}$. Dies wird gröfser als $x+1$ sein, oder, wenn alles mit dem Nenner multipliziert wird, x^2+x+8 wird gröfser als x^3+2x^2+x sein. Wird jetzt Gleiches gegen Gleiches weggelassen, so bleibt, dafs 8 gröfser als x^3+x^2 sein mufs.

Jetzt bilde ich den Kubus, welcher den Bestandteil x^3+x^2 enthält; die Seite desselben wird $x+\frac{1}{3}$ sein. Da nun 8 gröfser als x^3+x^2 und der Kubus über $x+\frac{1}{3}$ auch gröfser als x^3+x^2 ist, so kann ich die Seiten beider Kuben, d. i. 2 und $x+\frac{1}{3}$, einander gleich setzen und erhalte $x=\frac{5}{3}$. Es wird also die erste Zahl $\frac{8}{3}$, die zweite $\frac{9}{5}$, die dritte $\frac{5}{3}$, oder, wenn alles mit 15 multipliziert wird, die erste Zahl 40, die zweite 27, die dritte 25 sein. Der gemeinschaftliche Nenner 15 ist durch die Multiplikation weggefallen, und wir haben drei Zahlen gefunden, deren Produkt ein Kubus ist, welcher die Summe der Differenzen dieser Zahlen zur Seite hat.

Nun setze ich die erste der gesuchten Zahlen gleich $40x$, die zweite gleich $27x$, die dritte gleich $25x$. Dann ist das Produkt der Zahlen ein Kubus und die Seite desselben gleich der Summe der Differenzen der Zahlen. Wir wollen jetzt noch, dafs die Summe der drei Zahlen gleich der gegebenen Zahl, d. i. 4 sei. Es ist also

$$92x=4,$$

und daraus folgt

$$x=\frac{1}{23}.$$

Die erste Zahl wird also $\frac{40}{23}$, die zweite $\frac{27}{23}$, die dritte $\frac{25}{23}$ sein*).

---

*) Es werde $\mathrm{I} > \mathrm{II} > \mathrm{III}$ und $\mathrm{I}\,.\,\mathrm{II}\,.\,\mathrm{III} = (mx)^3$ vorausgesetzt; dann soll

$$(\mathrm{I}-\mathrm{II})+(\mathrm{I}-\mathrm{III})+(\mathrm{II}-\mathrm{III}), \text{ d. i.}$$

$$2(\mathrm{I}-\mathrm{III}) = mx,$$

also

27. Aufgabe. Zwei Zahlen von solcher Beschaffenheit zu finden, dafs das Produkt derselben, wenn es um jede der Zahlen vermehrt wird, einen Kubus gebe.

Auflösung. Ich setze die erste Zahl gleich x mit einer beliebigen Kubikzahl als Koeffizienten, etwa gleich $8x$, die zweite gleich $x^2 - 1$. Dann ist die eine Forderung erfüllt,

---

$$\mathrm{I} = \frac{m}{2} x + \mathrm{III}$$

sein. Wir setzen nun $\mathrm{III} = kx$, so ist

$$\mathrm{I} = \left(\frac{m}{2} + k\right) x$$

und

$$\mathrm{II} = \frac{\mathrm{I}.\mathrm{II}.\mathrm{III}}{\mathrm{I}.\mathrm{III}} = \frac{m^3 x^3}{\left(\frac{m}{2} + k\right) k x^2} = \frac{m^3 x}{\left(\frac{m}{2} + k\right) k}.$$

Über k ist jetzt so zu verfügen, dafs zunächst $\mathrm{II} > \mathrm{III}$, d. h.

$$\frac{m^3}{\left(\frac{m}{2} + k\right) k} > k$$

oder

$$m^3 > \frac{m k^2}{2} + k^3$$

sei. Da $k^3 + \frac{m k^2}{2} + \frac{m^2 k}{12} + \frac{m^3}{216}$, d. i. $\left(k + \frac{m}{6}\right)^3 > k^3 + \frac{m k^2}{2}$ ist, so wird diese Bedingung sicherlich erfüllt, wenn wir

$$k + \frac{m}{6} = m \quad \text{oder} \quad k = \frac{5m}{6}$$

annehmen. Für diesen Wert von k wird

$$\mathrm{I} = \frac{4m}{3} x, \quad \mathrm{II} = \frac{9m}{10} x, \quad \mathrm{III} = \frac{5m}{6} x,$$

und es stellt sich heraus, dafs die zweite Bedingung, nämlich $\mathrm{I} > \mathrm{II}$ schon von selbst erfüllt ist. Nun soll die Summe der drei Zahlen gleich der gegebenen Zahl a, also

$$\frac{46 m x}{15} = a$$

sein. Daraus folgt $x = \frac{15a}{46m}$ und

$$\mathrm{I} = \frac{40a}{92}, \quad \mathrm{II} = \frac{27a}{92}, \quad \mathrm{III} = \frac{25a}{92}.$$

da das Produkt der beiden Zahlen, wenn es um die erste vermehrt wird, einen Kubus giebt.

Es bleibt noch zu bewirken, dafs das um die zweite Zahl vermehrte Produkt ebenfalls ein Kubus werde. Wenn man aber beide Zahlen multipliziert und zum Produkt die zweite Zahl addiert, so erhält man $8x^3 + x^2 - 8x - 1$. Das soll gleich einem Kubus sein. Als Seite dieses Kubus nehme ich $2x - 1$ an; dann ergiebt sich

$$x = \frac{14}{13}.$$

Die erste Zahl wird also $\frac{112}{13}$, die zweite $\frac{27}{169}$ sein*).

---

28. Aufgabe. Zwei Zahlen von solcher Beschaffenheit zu finden, dafs das Produkt derselben, wenn es um jede der Zahlen vermindert wird, einen Kubus gebe.

Auflösung. Es werde wieder die erste Zahl gleich $8x$, die zweite gleich $x^2 + 1$ gesetzt, so wird das um die erste Zahl verminderte Produkt beider Zahlen ein Kubus sein.

Das um die zweite Zahl verminderte Produkt beider Zahlen ist aber $8x^3 + 8x - x^2 - 1$. Dieser Ausdruck soll gleich einem Kubus werden. Das ist jedoch unmöglich [x würde negativ werden]. Daher setze ich die erste Zahl gleich der Summe von 1 und x mit einer beliebigen Kubikzahl als Koeffizienten, etwa gleich $8x + 1$, die zweite Zahl aber gleich x^2. Dann wird das

---

*) Diophant setzt, um eine Forderung sofort zu erfüllen,

$$\mathrm{I} = a^3x, \quad \mathrm{II} = x^2 - 1;$$

dann ist noch

$$a^3x(x^2 - 1) + (x^2 - 1)$$

in einen Kubus zu verwandeln. Setzt man

$$a^3x^3 - a^3x + x^2 - 1 = (ax - 1)^3,$$

so ergiebt sich

$$x = \frac{a(a^2 + 3)}{1 + 3a^2},$$

also

$$\mathrm{I} = \frac{a^4(a^2 + 3)}{1 + 3a^2}, \quad \mathrm{II} = \left[\frac{a(a^2 + 3)}{1 + 3a^2}\right]^2 - 1.$$

Produkt bei Subtraktion der zweiten Zahl ein Kubus. Wenn man aber die erste Zahl subtrahiert, so erhält man $8x^3+x^2-8x-1$. Das setzen wir gleich dem Kubus über der Seite $2x-1$. Dann ergiebt sich

$$x=\frac{14}{13}.$$

Die erste Zahl wird also $\frac{125}{13}$, die zweite $\frac{196}{169}$ sein*).

---

29. Aufgabe. Zwei Zahlen zu finden, deren Produkt sowohl bei Addition, als auch bei Subtraktion der Summe derselben ein Kubus wird.

Auflösung. Das Produkt der beiden Zahlen, addiert zur Summe derselben, soll einen Kubus geben; dieser sei 64. Es soll aber auch das Produkt, wenn es um die Summe der Zahlen vermindert wird, ein Kubus werden; dieser Kubus sei 8. Dann ist die doppelte Summe der beiden Zahlen gleich der Differenz dieser Kuben, also gleich 56, die Summe selbst daher 28. Nun ist aber das Produkt und die Summe der Zahlen zusammen 64; also mufs das Produkt 36 sein.

Ich bin daher zu der Aufgabe geführt, zwei Zahlen zu finden, deren Summe 28 und deren Produkt 36 ist. Wird die gröfsere Zahl gleich $x+14$ gesetzt, so wird die kleinere $14-x$ sein, und es mufs noch bewirkt werden, dafs das Produkt der Zahlen, d. i.

---

*) Würde $\mathrm{I}=a^3x$, $\mathrm{II}=x^2+1$ angenommen und

$$a^3x(x^2+1)-(x^2+1)=(ax-1)^3$$

gesetzt, so würde sich

$$x=\frac{a(a^2-3)}{1-3a^2}$$

ergeben. Da dieser Ausdruck nur negative Werte darstellt, so nimmt Diophant $\mathrm{I}=a^3x+1$, $\mathrm{II}=x^2$ an. Dann ist noch $\mathrm{I}.\mathrm{II}-\mathrm{I}$ zu einem Kubus zu machen, und die Gleichung

$$(a^3x+1)x^2-(a^3x+1)=(ax-1)^3$$

liefert wieder

$$x=\frac{a(a^2+3)}{1+3a^2}.$$

$$196 - x^2 = 36$$

sei. Daraus ergiebt sich

$$x^2 = 160.$$

Wenn also 160 eine Quadratzahl wäre, so wäre die Aufgabe gelöst.

Nun ist 160 die Differenz zwischen 196 und 36; 196 ist das Quadrat von 14, und 14 ist die Hälfte von 28, so daſs 196 das Quadrat der Hälfte von 28 ist. 28 ist aber die Hälfte von 56, so daſs 14 der 4te Teil von 56 ist, und 56 ist die Differenz der beiden Kuben 64 und 8, während 36 die halbe Summe dieser Kuben ist. Es kommt also darauf an, zwei Kuben von der Beschaffenheit zu suchen, daſs, wenn ich den vierten Teil ihrer Differenz mit sich selbst multipliziere, und von dem Produkt die halbe Summe derselben subtrahiere der Rest ein Quadrat sei.

Es sei $x + 1$ die Seite des gröſseren Kubus, $x - 1$ die des kleineren, so wird der gröſsere Kubus

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1,$$

der kleinere $x^3 + 3x - 3x^2 - 1$ betragen, und der vierte Teil der Differenz beider ist $1\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\cdot$ Wenn man dies mit sich selbst multipliziert, so erhält man $2\frac{1}{4}x^4 + 1\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\cdot$ Wird hiervon die halbe Summe der beiden Kuben, welche gleich $x^3 + 3x$ ist, subtrahiert, so bleibt

$$2\tfrac{1}{4}x^4 + 1\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4} - x^3 - 3x,$$

und dieser Ausdruck soll gleich einem Quadrat werden. Um keinen Bruch zu behalten, multiplizieren wir alles mit 4, so wird unser Ausdruck $9x^4 + 6x^2 + 1 - 4x^3 - 12x$. Diesen setzen wir gleich dem Quadrat über der Seite $3x^2 + 1 - 6x$. Wenn man dies Quadrat, d. i.

$$9x^4 + 42x^2 + 1 - 36x^3 - 12x = 9x^4 + 6x^2 + 1 - 4x^3 - 12x$$

setzt, darauf die abzuziehenden Gröſsen beiderseits addiert und dann Gleiches von Gleichem subtrahiert, so bleibt

$$32x^3 = 36x^2,$$

und daraus ergiebt sich

$$x = \frac{9}{8}\cdot$$

Nun hatte ich die Seite des einen Kubus gleich $x + 1$, die des andern gleich $x - 1$ gesetzt; die Seite des einen wird also $\frac{17}{8}$, die des andern $\frac{1}{8}$ sein, und der erste Kubus selbst wird $\frac{4913}{512}$, der zweite $\frac{1}{512}$ betragen.

Jetzt gehe ich zu der ursprünglich gestellten Aufgabe zurück und suche zwei Zahlen, deren Produkt, wenn es um die Summe derselben vermehrt wird, den Kubus $\frac{4913}{512}$, wenn es aber um dieselbe Summe vermindert wird, den Kubus $\frac{1}{512}$ giebt. Da das um die Summe der Zahlen vermehrte Produkt derselben ein Kubus, nämlich $\frac{4913}{512}$, und das um dieselbe Summe verminderte Produkt ebenfalls ein Kubus, nämlich $\frac{1}{512}$ ist, so ist die doppelte Summe beider Zahlen gleich der Differenz dieser Kuben, d. i. gleich $\frac{4912}{512}$, so dafs die Summe der Zahlen selbst $\frac{2456}{512}$ beträgt. Das Produkt mit der Summe zusammen giebt aber $\frac{4913}{512}$, und da die Summe $\frac{2456}{512}$ ist, so wird das Produkt gleich $\frac{2457}{512}$ sein.

Das weitere Verfahren ist zwar schon im ersten Buche gelehrt worden; wir wollen es jedoch für die vorliegende Aufgabe nochmals darlegen. Wir setzen die erste Zahl gleich x, vermehrt um die halbe Summe der beiden Zahlen, also um $\frac{1228}{512}$, so wird die zweite Zahl $\frac{1228}{512} - x$ sein, und dann ist die Summe beider wirklich $\frac{2456}{512}$. Das Produkt beider Zahlen ist aber $\frac{1\,507\,984}{262\,144} - x^2$. Das soll gleich $\frac{2457}{512}$ sein. Wird alles mit dem Nenner 262 144 multipliziert und sodann Gleiches von Gleichem subtrahiert, so erhält man

$$262\,144 x^2 = 250\,000,$$

und daraus folgt

$$x = \frac{500}{512}.$$

Die erste Zahl wird also $\frac{1728}{512}$, die zweite $\frac{728}{512}$ sein, und diese Werte genügen offenbar der Aufgabe*).

---

30. Aufgabe. Zwei Zahlen zu finden, deren Produkt sowohl bei Addition, als auch bei Subtraktion der Summe derselben ein Kubus wird.

Auflösung. Hier ist folgender Satz anzuwenden: Wenn irgend eine Quadratzahl in zwei Teile geteilt ist, von denen der eine die Seite des Quadrats, der andere der Rest ist, so bilden das Produkt und die Summe der Teile zusammen einen Kubus. Es werde nun das Quadrat gleich x^2 gesetzt und in zwei Teile geteilt, von denen der eine die Seite, der andere der Rest, also der eine x, der andere $x^2 - x$ ist, so giebt das Produkt beider Teile, bei Addition der Summe derselben, einen Kubus.

Es erübrigt noch, dafs das Produkt, auch wenn die Summe davon subtrahiert wird, einen Kubus gebe. Das um die Summe verringerte Produkt ist aber $x^3 - 2x^2$. Das soll gleich einem Kubus sein und zwar gleich einem Kubus, der kleiner als x^3 sein mufs. Ich bilde daher den Kubus über der Seite $\frac{1}{2}x$; derselbe ist $\frac{1}{8}x^3$. Nun multipliziere ich alles mit 8 und erhalte

$$8x^3 - 16x^2 = x^3;$$

daraus ergiebt sich

$$x = \frac{16}{7}.$$

Die erste Zahl wird also $\frac{16}{7}$, die zweite $\frac{144}{49}$ sein*).

---

*) Sind die gesuchten Zahlen x, y, so soll

$$xy + (x + y) = a^3$$
$$xy - (x + y) = b^3,$$

also

$$x + y = \frac{1}{2}(a^3 - b^3)$$

sein; dann bleibt

31. Aufgabe. Vier Quadratzahlen zu finden, deren Summe, wenn man die Summe der Seiten dazu addiert, gleich einer gegebenen Zahl wird.

Auflösung. Die gegebene Zahl sei 12. Jede Quadratzahl wird, wenn man sie um ihre Seite und $\frac{1}{4}$ vermehrt, gleich einem Quadrat, dessen Seite bei Subtraktion von $\frac{1}{2}$ gleich der Seite des anfänglichen Quadrats wird.

Nun giebt die Summe der vier gesuchten Quadratzahlen, wenn sie um die Summe der Seiten derselben vermehrt wird, 12. Fügt man noch vier Viertel hinzu, so erhält man vier Quadrate, und wenn 12 um vier Viertel, d. i. 1, vermehrt wird, so giebt das 13.

Ich mufs also 13 in 4 Quadrate zerlegen, und wenn ich dann die Seite jedes derselben um $\frac{1}{2}$ vermindere, so erhalte ich die Seiten der vier gesuchten Quadrate. 13 zerfällt in die beiden Quadrate 4 und 9, und jedes der letzteren läfst sich wieder in zwei Quadrate zerlegen, nämlich das eine in $\frac{64}{25}$ und $\frac{36}{25}$, das andere in $\frac{144}{25}$ und $\frac{81}{25}$. Ich nehme jetzt die Seiten dieser Quadrate, nämlich $\frac{8}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{9}{5}$, und verringere jede

---

$$xy = a^3 - \frac{1}{2}(a^3 - b^3),$$

oder es ist

$$xy = \frac{1}{2}(a^3 + b^3).$$

Die Aufgabe ist daher auf I, 30 zurückgeführt. In Nr. 30 behandelt Diophant dieselbe Aufgabe auf andere Weise. Damit $\mathrm{I} . \mathrm{II} + (\mathrm{I} + \mathrm{II})$ ein Kubus sei, nimmt er $\mathrm{I} = x^2 - x$, $\mathrm{II} = x$ an. Dann ist noch $\mathrm{I} . \mathrm{II} - (\mathrm{I} + \mathrm{II})$, d. i. $x^3 - 2x^2$ in einen Kubus zu verwandeln. Setzt man

$$x^3 - 2x^2 = a^3x^3,$$

so ergiebt sich

$$x = \frac{2}{1 - a^3};$$

also ist

$$\mathrm{I} = \frac{2(1 + a^3)}{(1 - a^3)^2}, \quad \mathrm{II} = \frac{2}{1 - a^3}.$$

um $\frac{1}{2}$, so sind die Reste, nämlich $\frac{11}{10}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{19}{10}$, $\frac{13}{10}$, die Seiten der vier gesuchten Quadrate, und diese Quadrate selbst werden $\frac{121}{100}$, $\frac{49}{100}$, $\frac{361}{100}$, $\frac{169}{100}$ sein*).

---

*) Ist allgemein a die gegebene Zahl, so zerfälle man $a + 1$ in 4 Quadrate (die auch Brüche sein können)

$$a + 1 = p^2 + q^2 + r^2 + s^2;$$

dann ist, wenn

$$p = p_1 + \frac{1}{2}, \quad q = q_1 + \frac{1}{2}, \quad r = r_1 + \frac{1}{2}, \quad s = s_1 + \frac{1}{2}$$

gesetzt wird,

$$a + 1 = \left(p_1^2 + p_1 + \frac{1}{4}\right) + \left(q_1^2 + q_1 + \frac{1}{4}\right) + \left(r_1^2 + r_1 + \frac{1}{4}\right) + \left(s_1^2 + s_1 + \frac{1}{4}\right),$$

also

$$a = (p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 + s_1^2) + (p_1 + q_1 + r_1 + s_1).$$

Dabei ist von Diophant stillschweigend vorausgesetzt worden, dafs sich jede ganze Zahl, die nicht selbst ein Quadrat ist, in vier oder weniger Quadrate zerfällen lasse. (Wenn es weniger als 4 sind, so kann man durch — nötigenfalls wiederholte — Anwendung der Aufgabe II, 8 doch vier Quadrate bilden, deren Summe die zu zerfällende Zahl ist.) Bachet hat den Satz auf seine Richtigkeit geprüft, indem er die Zahlen von 1 bis 325 wirklich in Quadrate zerlegte. Einen Beweis hat er nicht gefunden. Fermat bemerkt: „Ich habe sogar den schönen und ganz allgemeinen Satz entdeckt, dafs jede Zahl entweder eine Dreieckzahl oder die Summe von zwei oder drei Dreieckzahlen; entweder eine Quadratzahl oder die Summe von zwei oder drei oder vier Quadratzahlen; entweder eine Fünfeckzahl oder die Summe von zwei oder drei oder vier oder fünf Fünfeckzahlen ist, und dafs weiter derselbe allgemeine und wunderbare Satz für Sechseckzahlen, Siebeneckzahlen, überhaupt beliebige Polygonalzahlen gilt. Den Beweis desselben, der aus vielen mannigfaltigen und ganz verborgenen Geheimnissen der Zahlen hergenommen wird, kann ich hier nicht beifügen. Ich habe nämlich vor, ein besonderes Werk diesem Gegenstande zu widmen und die Arithmetik in diesem Teile über die alten und bekannten Grenzen hinaus in wunderbarer Weise zu er-

32. Aufgabe. Vier Quadratzahlen zu finden, deren Summe, wenn man sie um die Summe ihrer Seiten vermindert, gleich einer gegebenen Zahl wird.

Auflösung. Die gegebene Zahl sei 4. Nun sollen das erste Quadrat, vermindert um seine Seite, das zweite Quadrat, vermindert um seine Seite, und ebenso das dritte und vierte Quadrat, jedes vermindert um seine Seite, zusammen 4 geben. Es wird aber jede Quadratzahl, wenn man sie um ihre Seite verringert und um ein Viertel vergröſsert, zu einem neuen Quadrat, dessen Seite um $\frac{1}{2}$ vergröſsert werden muſs, um der Seite des anfänglichen Quadrats gleich zu werden. Daher werden auch die vier Quadrate, wenn sie um die Summe ihrer Seiten verringert und um 4 Viertel, d. i. 1, vermehrt werden, vier neue Quadrate bilden. Wird aber die Summe der vier Quadrate um die Summe der Seiten vermindert, so erhält man 4, und wenn 1 dazu gezählt wird, so giebt das 5.

Es kommt also darauf an, die Zahl 5 in vier Quadrate zu teilen. Vermehre ich dann die Seite jedes dieser Quadrate um $\frac{1}{2}$, so erhalte ich die Seiten der gesuchten Quadrate. 5 zerfällt aber in die vier Quadrate

$$\frac{9}{25}, \frac{16}{25}, \frac{64}{25}, \frac{36}{25}.$$

Die Seiten dieser Quadrate sind

$$\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \frac{6}{5}.$$

Addiere ich zu jeder dieser Seiten $\frac{1}{2}$, so erhalte ich die Seiten

$$\frac{11}{10}, \frac{13}{10}, \frac{21}{10}, \frac{17}{10},$$

---

weitern.“ Das hier versprochene Werk Fermats ist leider nicht erschienen. Den Satz hat, soweit es sich um die hier allein in Betracht kommende Zerfällung der Zahlen in Quadrate handelt, erst Lagrange (Nouv. Mémoires de l'Acad. de Berlin, 1770) bewiesen. Vergl. auch Legendre, théorie des nombres, 3. édition, I. p. 218ff. Ich lasse Lagrange's Beweis im Anhange in möglichst einfacher Darstellung folgen.

und daher werden die gesuchten Quadrate selbst

$$\frac{121}{100}, \quad \frac{169}{100}, \quad \frac{441}{100}, \quad \frac{289}{100}$$

sein*).

---

33. Aufgabe. Die Zahl 1 in zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu teilen, dafs, wenn man zu jeder derselben eine gegebene Zahl addiert und die so erhaltenen Zahlen multipliziert, das Produkt ein Quadrat wird.

Auflösung. Man soll die Zahl 1 in zwei Zahlen teilen und zu der einen 3, zur andern 5 addieren; das Produkt der so gebildeten Zahlen soll ein Quadrat werden. Setzen wir die erste Zahl gleich x, so wird die zweite $1 - x$ sein. Wird zur ersten Zahl 3 addiert, so erhält man $x + 3$, und wenn die zweite Zahl um 5 vermehrt wird, so wird sie $6 - x$. Das Produkt der beiden neuen Zahlen wird also $3x + 18 - x^2$, und das soll zu einem Quadrat gemacht werden. Dies Quadrat sei $4x^2$. Wird dann die abzuziehende Zahl beiderseits addiert, so erhält man

$$3x + 18 = 5x^2,$$

und diese Gleichung liefert keinen rationalen Wert von x.

Nun ist [der Koeffizient von] $5x^2$ dadurch entstanden, dafs wir eine Quadratzahl um 1 vermehrt haben; wird diese Zahl 5 mit 18 multipliziert und zum Produkt das Quadrat der Hälfte des Koeffizienten 3 von x, d. i. $2\frac{1}{4}$, addiert, so soll das ein Quadrat geben**). Es kommt somit darauf an, statt

---

*) Ist wieder a die gegebene Zahl und

$$a + 1 = p^2 + q^2 + r^2 + s^2,$$

so wird

$$a = \left[\left(p + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(q + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(r + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(s + \tfrac{1}{2}\right)^2\right]$$
$$- \left[\left(p + \tfrac{1}{2}\right) + \left(q + \tfrac{1}{2}\right) + \left(r + \tfrac{1}{2}\right) + \left(s + \tfrac{1}{2}\right)\right]$$

sein.

**) Diophant hat folgende Lösung der Gleichung

$$5x^2 = 3x + 18$$

im Auge:

4 eine andere Quadratzahl zu suchen, die so beschaffen ist, daſs sich ein Quadrat ergiebt, wenn ich zu derselben 1 addiere, die Summe mit 18 multipliziere und zum Produkt $2\frac{1}{4}$ addiere.

Es sei x^2 diese gesuchte Quadratzahl. Wird dieselbe um 1 vermehrt, die erhaltene Summe mit 18 multipliziert und zum Produkt $2\frac{1}{4}$ addiert, so erhält man $18x^2 + 20\frac{1}{4}$. Das soll gleich einem Quadrat sein. Ich nehme alles 4 mal; dann soll $72x^2 + 81$ zu einem Quadrat gemacht werden. Als Seite dieses Quadrats nehme ich $8x + 9$ an; aus

$$72x^2 + 81 = (8x + 9)^2$$

ergiebt sich dann $x = 18$. Das gesuchte Quadrat wird also 324 sein.

Jetzt gehe ich zu der ursprünglich hergeleiteten Gleichung zurück. Es soll $3x + 18 - x^2$ zu einem Quadrat gemacht werden. Als dieses Quadrat nehme ich nun $324x^2$ an, und dann wird

$$x = \frac{78}{325} = \frac{6}{25}.$$

Folglich wird die erste Zahl $\frac{6}{25}$, die zweite $\frac{19}{25}$ sein*).

$$25x^2 - 15x = 90,$$

$$(5x)^2 - 3(5x) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 90 + 2\tfrac{1}{4},$$

u. s. w.

*) Sind die gegebenen Zahlen a, b, so soll

$$(x + a)(1 - x + b)$$

zu einem Quadrat gemacht werden. Wird

$$(x + a)(1 - x + b) = \frac{m^2}{n^2}(1 - x + b)^2$$

angenommen, so ergiebt sich

$$x = \frac{m^2(1 + b) - n^2 a}{m^2 + n^2}, \quad 1 - x = \frac{n^2(1 + a) - m^2 b}{m^2 + n^2},$$

wo m, n nur den beiden Bedingungen

$$m^2(1 + b) > n^2 a, \quad n^2(1 + a) > m^2 b$$

unterworfen sind. Für $a = 3$, $b = 5$ ist z. B.

34. Aufgabe. [Vieta, Zet. V, 13.] Die Zahl 1 in zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu teilen, daſs, wenn man zu jeder derselben eine gegebene Zahl addiert und die so erhaltenen Zahlen multipliziert, das Produkt ein Quadrat sei. [Andere Auflösung.]

Auflösung. Es soll wieder die Zahl 1 in zwei Zahlen geteilt werden, die so beschaffen sind, daſs, wenn die eine um 3, die andere um 5 vermehrt wird, das Produkt beider ein Quadrat giebt.

Wir setzen die erste Zahl, welche um 3 vergröſsert werden soll, gleich $x - 3$, so bleibt für die zweite noch $4 - x$. Wenn ich nun 3 zur ersten Zahl addiere, so erhalte ich x, und wenn die zweite um 5 vergröſsert wird, so giebt das $9 - x$. Das Produkt dieser beiden Zahlen ist $9x - x^2$, und das soll gleich einem Quadrat sein.

Dieses Quadrat sei $4x^2$, so ergiebt sich $x = \frac{9}{5}$. Für diesen Wert von x kann ich aber von x nicht 3 subtrahieren; vielmehr muſs der Wert von x gröſser als 3 und kleiner als 4 sein.

Nun ist x dadurch gefunden worden, daſs wir 9 durch 5 dividiert haben, und letztere Zahl ist ein um 1 vergröſsertes Quadrat. Wenn aber 9, durch eine um 1 vermehrte Quadratzahl dividiert, eine Zahl giebt, die gröſser als 3 ist, so muſs jener Divisor kleiner als 3 sein. Der Divisor von 9 ist aber eine um 1 vermehrte Quadratzahl; es ist also die Summe dieser Quadratzahl und der Zahl 1 kleiner als 3, und, wenn man 1 subtrahiert, so ergiebt sich, daſs die Quadratzahl kleiner als 2 sein muſs.

Weiter wollen wir, daſs die Division von 9 durch die um 1 vergröſserte Quadratzahl eine Zahl gebe, die kleiner als 4 sei. Folglich muſs der Divisor gröſser als $2\frac{1}{4}$ sein. Dieser

---

$$x = \frac{6m^2 - 3n^2}{m^2 + n^2}, \quad 1 - x = \frac{4n^2 - 5m^2}{m^2 + n^2},$$

und diese Ausdrücke geben Diophants Lösung der vorliegenden Aufgabe für $m = 3$, $n = 4$, diejenige der folgenden Aufgabe für $m = 4$, $n = 5$.

Divisor von 9 ist aber eine um 1 vermehrte Quadratzahl; die Summe dieser Quadratzahl und der Zahl 1 ist folglich größer als $2\frac{1}{4}$, und wenn wir 1 subtrahieren, so ergiebt sich, daſs die Quadratzahl gröſser als $1\frac{1}{4}$ sein muſs. Es ist aber schon gezeigt worden, daſs dieselbe Quadratzahl kleiner als 2 sein muſs. Ich habe also nur irgend ein Quadrat zu suchen, das gröſser als $1\frac{1}{4}$ und kleiner als 2 ist. Verwandle ich diese Zahlen in Brüche, welche eine Quadratzahl, z. B. 64, zum Nenner haben, so werden dieselben $\frac{80}{64}$ und $\frac{128}{64}$; dann ist aber die Aufgabe leicht, und das verlangte Quadrat ist $\frac{100}{64} = \frac{25}{16}$.

Jetzt gehe ich zu der ursprünglich gestellten Aufgabe zurück. Es sollte $9x - x^2$ zu einem Quadrat gemacht werden. Ich setze den Ausdruck gleich dem gefundenen Quadrat $\frac{25}{16}x^2$; dann ergiebt sich

$$x = \frac{144}{41}.$$

Die erste Zahl wird also $\frac{21}{41}$, die zweite $\frac{20}{41}$ sein.

---

35. Aufgabe. Eine gegebene Zahl in drei Zahlen von der Beschaffenheit zu teilen, daſs das Produkt der ersten und zweiten Zahl sowohl bei Addition, als auch bei Subtraktion der dritten Zahl ein Quadrat werde.

Auflösung. Die gegebene Zahl sei 6. Wir setzen die dritte Zahl gleich x, die zweite gleich irgend einer bestimmten Zahl, die kleiner als 6 ist, etwa gleich 2. Dann wird die erste $4 - x$ sein. Es sind nun noch die beiden Forderungen zu erfüllen, daſs das Produkt aus der ersten und zweiten Zahl, sowohl wenn es um die dritte Zahl vermehrt, als auch wenn es um dieselbe vermindert wird, ein Quadrat bilde. Es entsteht also eine doppelte Gleichung, indem sowohl $8 - x$, als auch $8 - 3x$ zu einem Quadrat gemacht werden muſs. Diese doppelte Gleichung ist aber nicht lösbar, da sich die Koeffizienten von x nicht wie zwei Quadratzahlen zu einander verhalten.

Es ist aber der Koeffizient von x um 1 kleiner als 2 und derjenige von $3x$ um 1 gröfser als 2. Ich bin also dazu gebracht, anstatt [der willkürlich angenommenen Zahl] 2 eine Zahl zu suchen, die so beschaffen ist, dafs eine um 1 gröfsere und eine um 1 kleinere Zahl sich zu einander wie zwei Quadratzahlen verhalten.

Es sei x diese gesuchte Zahl; die um 1 gröfsere Zahl ist $x + 1$, die um 1 kleinere Zahl $x - 1$. Diese beiden Zahlen sollen sich wie zwei Quadratzahlen, etwa wie 4 zu 1 verhalten. Da man nun, wenn man $x - 1$ mit 4 multipliziert, $4x - 4$, und wenn man $x + 1$ mit 1 multipliziert, $x + 1$ erhält, so mufs, damit die genommenen Zahlen sich wie die beiden Quadratzahlen verhalten,

$$4x - 4 = x + 1$$

sein, und daraus ergiebt sich

$$x = \frac{5}{3}.$$

Ich setze demgemäfs die zweite Zahl gleich $\frac{5}{3}$, und da die dritte x ist, so wird die erste $\frac{13}{3} - x$ sein.

Nun sind die Forderungen zu erfüllen, dafs das Produkt aus der ersten und zweiten Zahl bei Addition der dritten ein Quadrat bilde und bei Subtraktion der dritten Zahl ebenfalls ein Quadrat werde. Wenn man aber die erste und zweite Zahl multipliziert und zum Produkt die dritte Zahl addiert, so erhält man $\frac{65}{9} - \frac{2}{3}x$; das soll ein Quadrat sein. Wird die dritte Zahl von dem Produkte subtrahiert, so bleibt $\frac{65}{9} - \frac{8}{3}x$, und das soll ebenfalls ein Quadrat sein. Multiplizieren wir die Ausdrücke mit 9, so werden dieselben $65 - 6x$ und $65 - 24x$, und auch jeder dieser Ausdrücke mufs gleich einem Quadrat sein. Ich mache nun die Koeffizienten von x in beiden Ausdrücken gleich, indem ich den einen mit 4 multipliziere; es mufs dann jeder der Ausdrücke $260 - 24x$ und $65 - 24x$ zu einem Quadrat gemacht werden.

Ich nehme demnach die Differenz der beiden Ausdrücke, d. i. 195, und wähle zwei Zahlen, deren Produkt 195 ist; es sind dies 15 und 13. Multipliziere ich nun die halbe Differenz dieser beiden Zahlen mit sich selbst und setze das Produkt gleich dem kleineren Ausdruck, so erhalte ich

$$x = \frac{8}{3}.$$

Die erste Zahl wird also $\frac{5}{3}$, die zweite $\frac{5}{3}$, die dritte $\frac{8}{3}$ sein, und diese Werte genügen offenbar der Aufgabe*).

---

36. Aufgabe. Zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs, wenn jede um denselben Bruchteil der andern vermehrt worden ist, sie zu dem Reste der andern in einem gegebenen Verhältnis stehe.

Auflösung. Es wird verlangt, dafs die erste Zahl, nachdem sie um einen bestimmten Bruchteil der zweiten vermehrt worden ist, das Dreifache des Restes der zweiten, und dafs die zweite Zahl, nachdem sie um eben denselben Bruchteil

---

*) Fermat bemerkt: „Leichter wird die Lösung auf folgende Weise: Die gegebene Zahl 6 werde in zwei ganz beliebige Teile, etwa 5 und 1, zerlegt. Darauf bilde man das Produkt dieser Teile, subtrahiere von demselben 1 und dividiere den Rest 4 durch die gegebene Zahl 6. Den Quotienten $\frac{2}{3}$ subtrahiere man sowohl von 5, als auch von 1, so werden die beiden Reste $\frac{13}{3}$ und $\frac{1}{3}$ die beiden ersten Teile der zu zerlegenden Zahl sein; der dritte Teil wird somit $\frac{4}{3}$ betragen."

Fermat setzt also, wenn die gegebene Zahl a ist,

$$a = x + (a - x)$$

und nimmt dann

$$\mathrm{I} = x - \frac{ax - x^2 - 1}{a} = \frac{x^2 + 1}{a}$$

$$\mathrm{II} = a - x - \frac{ax - x^2 - 1}{a} = \frac{(a - x)^2 + 1}{a}$$

an, so dafs sich

$$\mathrm{III} = \frac{2(ax - x^2 - 1)}{a}$$

ergiebt.

der ersten vermehrt worden ist, das Fünffache des Restes der ersten sei.

Wir setzen die zweite Zahl gleich $x + 1$; der Teil aber, den dieselbe an die erste abgeben soll, sei gleich 1. Dann wird die erste $3x - 1$ sein, da bei dieser Annahme die erste Zahl, wenn sie um einen Teil der zweiten, der gleich 1 ist, vermehrt wird, das Dreifache des Restes der zweiten wird.

Wir wollen nun noch, dafs die zweite Zahl, wenn sie um eben denselben Bruchteil der ersten vermehrt wird, das Fünffache des Restes der ersten sei. Da nun die beiden Zahlen zusammen $4x$ sind, da ferner die zweite Zahl das erhält, was die erste abgiebt, und dadurch das Fünffache des Restes der ersten wird, so mufs auch die vergröfserte zweite Zahl und der Rest der ersten zusammen $4x$ geben, und wir werden diesen Rest der ersten dadurch erhalten, dafs wir den sechsten Teil von $4x$, d. i. $\frac{2}{3}x$, nehmen. Wenn wir also $\frac{2}{3}x$ von $3x - 1$ subtrahieren, so werden wir den von der ersten Zahl abgegebenen Betrag erhalten. Bei dieser Subtraktion bleibt aber $\frac{7}{3}x - 1$. Dies ist also der Teil, den die erste hergiebt. Wird dies nämlich von der ersten Zahl subtrahiert und zur zweiten addiert, so wird die zweite Zahl 5mal so grofs sein wie der Rest der ersten.

Es erübrigt noch zu untersuchen, ob 1 derselbe Bruchteil von $x + 1$, wie $\frac{7}{3}x - 1$ von $3x - 1$ ist [ob

$$(x + 1) : 1 = (3x - 1) : \left(\frac{7x}{3} - 1\right)$$

ist]. Wenn man das untersuchen will, mufs man sehen, ob das Produkt aus $\frac{7}{3}x - 1$ und $x + 1$ gleich demjenigen von $3x - 1$ und 1 ist, d. h. man mufs jede der beiden Zahlen mit dem von der andern abgegebenen Betrage multiplizieren und die Produkte gleich setzen. Man erhält

$$\frac{7}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - 1 = 3x - 1,$$

und daraus folgt

$$x = \frac{5}{7}.$$

Die erste Zahl wird also $\frac{8}{7}$, die zweite $\frac{12}{7}$ sein. Nun war aber der von der zweiten Zahl abgegebene Betrag gleich 1, und wenn wir sehen, welcher Bruchteil der zweiten dies ist, so ergiebt sich $\frac{7}{12}$. Multipliziere ich beide Zahlen mit 7, so ergiebt sich für die erste 8, für die zweite 12, und jede giebt an die andere $\frac{7}{12}$ ihres Betrages ab. Da aber die erste Zahl sich nicht durch 12 teilen läſst, so multipliziere ich, um Brüche zu vermeiden, die Zahlen mit 3. Es wird dann die erste Zahl 24, die zweite 36 sein, der Bruchteil, d. i. $\frac{7}{12}$ der ersten wird 14, derselbe Bruchteil der zweiten 21 betragen, und dadurch ist der Aufgabe offenbar genügt*).

---

37. Aufgabe. Zwei Zahlen in allgemeinen Ausdrücken zu finden, deren Produkt und Summe zusammen gleich einer gegebenen Zahl sind**).

*) Damit die erste Bedingung erfüllt sei, nehmen wir $\mathrm{I} = 3x - k$, $\mathrm{II} = x + k$ an; denn bei dieser Annahme wird I das Dreifache von II, wenn I um k vergröſsert, II um k verringert wird. Nun ist k das $\frac{k}{x+k}$ fache von II. Wenn jetzt I das $\frac{k}{x+k}$ fache abgiebt, so bleibt $(3x-k)\left(1 - \frac{k}{x+k}\right) = \frac{(3x-k)x}{x+k}$, und wenn II, d. i. $x+k$, um $\frac{(3x-k)k}{x+k}$ vermehrt wird, so ergiebt sich $\frac{(x+5k)x}{x+k}$. Es soll nun

$$\frac{(x+5k)x}{x+k} = 5 \cdot \frac{(3x-k)x}{x+k}$$

sein, und daraus folgt

$$x = \frac{5k}{7},$$

wo k unbestimmt bleibt. Somit ist $\mathrm{I} = \frac{8k}{7}$, $\mathrm{II} = \frac{12k}{7}$, und der Bruchteil, den jede abgiebt, $\frac{7}{12}$.

**) Nur an sehr wenigen Stellen und auch da nur, um die Lösung anderer Aufgaben vorzubereiten, löst Diophant Aufgaben *allgemein* auf. Von den Gleichungen der Form $ax + by = c$, die in ganzen Zahlen x, y gelöst werden sollen, und die man *diophantische* nennt, kommt in seinem Werke nicht eine einzige vor. Die Lösung derselben ist in Europa erst von Bachet de Méziriac gefunden worden.

Auflösung. Die gegebene Zahl sei 8. Wir setzen die erste Zahl gleich x, die zweite gleich 3. Dann ist das Produkt und die Summe beider zusammen $4x + 3$. Wird dies gleich 8 gesetzt, so erhält man $x = \frac{5}{4}$. Es wird also die erste Zahl $\frac{5}{4}$, die zweite 3 sein.

Nun überlege ich, wie der Wert $\frac{5}{4}$ von x entstanden ist. Offenbar indem ich 5 durch 4 dividiert habe. 5 ist aber die Differenz zwischen 8 und 3, und 4 ist um 1 gröſser als die zweite Zahl. Wenn ich also die zweite Zahl ganz beliebig annehme, sie von 8 subtrahiere und den Rest durch eine Zahl dividiere, welche um 1 gröſser als die zweite ist, so werde ich die erste Zahl erhalten.

Es sei z. B. die zweite Zahl gleich $x - 1$. Wird dies von 8 subtrahiert, so bleibt $9 - x$, und wenn man dies durch eine Zahl dividiert, die um 1 gröſser als die zweite ist, d. i. durch x, so erhält man $\frac{9-x}{x}$; dies wird die erste Zahl sein. Es ist also durch allgemeine Ausdrücke bewirkt, daſs das Produkt und die Summe der beiden Zahlen zusammen 8 geben. Denn eine Lösung in allgemeinen (unbestimmten) Ausdrücken ist eine solche, bei welcher der Unbekannten in den Ausdrücken für die gesuchten Zahlen jeder beliebige Wert beigelegt werden kann*).

---

38. Aufgabe. Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daſs das Produkt je zweier derselben, wenn es um die Summe dieser beiden Zahlen vermehrt wird, einen gegebenen Wert annimmt.

Es muſs aber jede der drei gegebenen Zahlen eine um 1 verringerte Quadratzahl sein.

---

*) Sind die gesuchten Zahlen x, y, so soll

$$xy + (x + y) = a$$

sein, und daraus folgt

$$x = \frac{a - y}{y + 1},$$

während y unbestimmt bleibt.

Auflösung. Es werde verlangt, dafs das Produkt aus der ersten und zweiten Zahl, wenn es um die Summen dieser beiden vermehrt worden ist, 8 betrage; dafs das Produkt aus der zweiten und dritten Zahl durch Addition der Summe dieser beiden Zahlen gleich 15 werde; dafs endlich das Produkt aus der ersten und dritten Zahl mit der Summe dieser beiden zusammen 24 ausmache.

Das Produkt aus der ersten und zweiten Zahl soll, wenn es um die Summe beider vermehrt wird, 8 geben. Wenn ich daher die zweite Zahl beliebig annehme, ihren Wert von 8 subtrahiere und den Rest durch eine Zahl dividiere, die um 1 gröfser als die zweite Zahl ist, so werde ich die erste Zahl erhalten. Ich setze die zweite Zahl gleich $x - 1$. Wird dies von 8 subtrahiert und der Rest durch eine Zahl dividiert, die um 1 gröfser als die zweite ist, so ergiebt sich $\frac{9}{x} - 1$, und das wird der Wert der ersten Zahl sein.

Weiter soll ebenso das Produkt aus der zweiten und dritten Zahl, wenn es um die Summe beider vermehrt wird, 15 geben. Wenn ich also $x - 1$ von 15 subtrahiere und den Rest durch eine Zahl, die um 1 gröfser als die zweite ist, d. i. durch x, dividiere, so werde ich die dritte Zahl erhalten; diese wird daher gleich $\frac{16}{x} - 1$.

Es erübrigt noch, dafs das Produkt aus der ersten und dritten Zahl, wenn es um die Summe dieser beiden vermehrt wird, 24 gebe. Dasselbe giebt aber $\frac{144}{x^2} - 1$. Wird dies gleich 24 gesetzt, so ergiebt sich $x = \frac{12}{5}$. Folglich wird die erste Zahl $\frac{33}{12}$, die zweite $\frac{7}{5}$, die dritte $\frac{68}{12}$ sein, und wenn alle Zahlen auf denselben Nenner gebracht werden, so ist die erste $\frac{165}{60}$, die zweite $\frac{84}{60}$, die dritte $\frac{340}{60}$ *).

*) Werden die gesuchten Zahlen x, y, z genannt, so soll

$$xy + (x + y) = a$$
$$yz + (y + z) = b$$
$$xz + (x + z) = c$$

sein, und durch Auflösung dieser Gleichungen erhält man

39. Aufgabe. Zwei Zahlen in allgemeinen Ausdrücken zu finden, deren Produkt, wenn es um die Summe beider vermindert wird, eine gegebene Zahl giebt.

Auflösung. Die gegebene Zahl sei 8. Setzen wir die erste Zahl gleich x, die zweite gleich 3, so wird das Produkt der Zahlen, wenn man es um die Summe derselben vermindert, $2x - 3$. Wird dieser Ausdruck gleich 8 gesetzt, so ergiebt sich

$$x = 5\tfrac{1}{2}.$$

Also wird die erste Zahl $5\frac{1}{2}$, die zweite 3 sein.

Nun sehe ich wieder nach, woher der Wert $x = 5\frac{1}{2}$ entstanden ist. Dadurch, dafs ich 11 durch 2 dividiert habe. 11 ist aber die Summe der gegebenen und der zweiten Zahl, und der Koeffizient 2 in $2x$ ist um 1 kleiner als die zweite Zahl. Wenn wir also die zweite Zahl beliebig annehmen, sie zur gegebenen Zahl addieren und die erhaltene Summe durch eine Zahl dividieren, die um 1 kleiner als die zweite Zahl ist, so werden wir die erste Zahl erhalten.

Es sei die zweite Zahl gleich $x + 1$. Wird dies zu 8 addiert, so ergiebt sich $x + 9$. Dies wird durch eine Zahl dividiert, die um 1 kleiner als die zweite Zahl, also gleich x ist. Dann erhält man $1 + \frac{9}{x}$. Auf diese Weise ist die Aufgabe in unbestimmten Ausdrücken gelöst; denn das Produkt

---

$$x = -1 + \sqrt{\frac{(a+1)(c+1)}{b+1}}$$

$$y = -1 + \sqrt{\frac{(a+1)(b+1)}{c+1}}$$

$$z = -1 + \sqrt{\frac{(b+1)(c+1)}{a+1}}.$$

Jeder dieser Ausdrücke ist rational, wenn $(a+1)(b+1)(c+1)$ eine Quadratzahl ist; es braucht aber nicht, wie Diophant voraussetzt, jeder einzelne der drei Faktoren dieses Produkts eine Quadratzahl zu sein.

beider Zahlen giebt, wenn es um die Summe derselben vermindert wird, 8*).

---

40. Aufgabe. Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daſs das Produkt je zweier derselben, wenn es um die Summe dieser beiden Zahlen vermindert wird, einen gegebenen Wert annehme.

Es muſs aber jede der drei gegebenen Zahlen um 1 kleiner als eine Quadratzahl sein.

Auflösung. Es werde verlangt, daſs das Produkt aus der ersten und zweiten Zahl, wenn es um die Summe dieser beiden Zahlen vermindert wird, 8 gebe; daſs das Produkt aus der zweiten und dritten Zahl, wenn man es um die Summe dieser beiden Zahlen vermindert, gleich 15 werde; endlich daſs das Produkt aus der ersten und dritten Zahl, wenn man die Summe dieser beiden Zahlen davon subtrahiert, 24 werde.

Ich will, daſs das Produkt aus der ersten und zweiten Zahl, wenn es um die Summe dieser beiden Zahlen vermindert wird, 8 gebe. Wenn ich also für die zweite Zahl einen beliebigen Wert annehme, denselben zu 8 addiere und die erhaltene Summe durch eine Zahl dividiere, die um 1 kleiner als die zweite Zahl ist, so werde ich nach der vorhergehenden Hilfsaufgabe [IV, 39] die erste Zahl erhalten.

Es sei $x + 1$ die zweite Zahl; dies zu 8 addiert, giebt $x + 9$. Wird dies durch eine Zahl, die um 1 kleiner als die zweite ist, also durch x dividiert, so ergiebt sich $1 + \frac{9}{x}$, und dies ist die erste Zahl. Ebenso erhält man für die dritte Zahl $1 + \frac{16}{x}$, und damit sind zwei Forderungen der Aufgabe erfüllt.

---

*) Die Gleichung

$$xy - (x + y) = a$$

giebt

$$x = \frac{a + y}{y - 1},$$

wo y unbestimmt bleibt.

Nun erübrigt noch, dafs das Produkt aus der ersten und dritten Zahl, wenn es um die Summe dieser beiden Zahlen vermindert wird, 24 gebe. Dasselbe wird aber $\frac{144}{x^2} - 1$. Wenn man diesen Ausdruck gleich 24 setzt, so erhält man

$$x = \frac{12}{5}.$$

Die erste Zahl wird also $\frac{57}{12}$, die zweite $\frac{17}{5}$, die dritte $\frac{92}{12}$ sein. Will man die Brüche gleichnamig machen, so mufs man alle auf den Nenner 60 bringen; die erste Zahl wird dann $\frac{285}{60}$, die zweite $\frac{204}{60}$, die dritte $\frac{460}{60}$ sein*).

---

41. Aufgabe. Zwei Zahlen in allgemeinen Ausdrücken zu finden, deren Produkt und Summe in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen.

Auflösung. Es werde verlangt, dafs das Produkt das Dreifache der Summe der beiden Zahlen sei. Setzen wir die erste Zahl gleich x, die zweite gleich 5, so ist das Produkt beider $5x$, und dies soll das Dreifache von $x + 5$ sein, so dafs

$$3x + 15 = 5x,$$

also

$$x = 7\tfrac{1}{2}$$

ist. Es wird somit die erste Zahl $7\frac{1}{2}$, die zweite 5 sein.

---

*) Die Gleichungen

$$xy - (x + y) = a$$
$$yz - (y + z) = b$$
$$xz - (x + z) = c$$

geben

$$x = 1 + \sqrt{\frac{(a+1)(c+1)}{b+1}}$$

$$y = 1 + \sqrt{\frac{(a+1)(b+1)}{c+1}}$$

$$z = 1 + \sqrt{\frac{(b+1)(c+1)}{a+1}},$$

wonach wieder Diophants Determination zu berichtigen ist.

Sehen wir jetzt, wie der Wert $x = 7\frac{1}{2}$ entstanden ist. Offenbar dadurch, dafs wir 15 durch 2 dividierten. 15 ist aber das Produkt aus der zweiten Zahl und der gegebenen Verhältniszahl, und 2 ist die Differenz zwischen der zweiten Zahl und der gegebenen Verhältniszahl. Wenn wir also die zweite Zahl beliebig annehmen, ihren Wert mit der Verhältniszahl multiplizieren und das Produkt durch die Differenz zwischen der zweiten Zahl und der Verhältniszahl dividieren, so werden wir die erste Zahl erhalten.

Es sei die zweite Zahl gleich x; wird dies mit der Verhältniszahl multipliziert, so erhält man $3x$, und wenn man dies Produkt durch die Differenz zwischen der zweiten Zahl und der Verhältniszahl, d. i. durch $x - 3$ dividiert, so erhält man $\frac{3x}{x-3}$; das ist der Ausdruck für die erste Zahl*).

---

42. Aufgabe. Drei Zahlen von solcher Beschaffenheit zu finden, dafs das Produkt und die Summe je zweier derselben in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen.

Auflösung. Es werde verlangt, dafs das Produkt aus der ersten und zweiten Zahl das Dreifache der Summe dieser beiden, das Produkt aus der zweiten und dritten Zahl das Vierfache der Summe dieser beiden, endlich das Produkt aus der ersten und dritten Zahl das Fünffache des Summe dieser beiden Zahlen sei.

Wird die zweite Zahl gleich x gesetzt, so ist nach der vorhergehenden Hilfsaufgabe die erste Zahl $\frac{3x}{x-3}$. Auf dieselbe Weise erhält man für die dritte Zahl $\frac{4x}{x-4}$.

Es erübrigt noch, dafs das Produkt aus der ersten und

---

*) Aus der Annahme

$$xy = m(x + y)$$

folgt

$$x = \frac{my}{y-m}.$$

dritten Zahl das Fünffache der Summe dieser beiden Zahlen sei. Das Produkt aus der ersten und dritten Zahl ist aber $\frac{12x^2}{x^2 + 12 - 7x}$, und die Summe der ersten und dritten Zahl ist $\frac{7x^2 - 24x}{x^2 + 12 - 7x}$. Wenn man nämlich zwei Brüche, wie $\frac{3x}{x-3}$ und $\frac{4x}{x-4}$ addieren soll, so multipliziert man den Zähler eines jeden Bruches mit dem Nenner des andern, also $3x$ mit dem Nenner des zweiten Bruchs, d. i. $x - 4$, und ebenso $4x$ mit dem Nenner des ersten Bruchs, d. i. $x - 3$. Auf diese Weise bildet man den Zähler $7x^2 - 24x$ der Summe der Brüche. Der Nenner derselben wird durch Multiplikation der Nenner der Brüche erhalten, welche $x^2 + 12 - 7x$ ergiebt. Wir haben aber als Produkt der ersten und dritten Zahl $\frac{12x^2}{x^2 + 12 - 7x}$ erhalten. Daher ist $\frac{12x^2}{x^2 + 12 - 7x}$ das Fünffache der Summe beider Zahlen. Wenn man aber diese Summe 5 mal nimmt, so erhält man $\frac{35x^2 - 120x}{x^2 + 12 - 7x}$. Das ist gleich $\frac{12x^2}{x^2 + 12 - 7x}$. Wird Alles mit dem gemeinschaftlichen Nenner $x^2 + 12 - 7x$ multipliziert, so ergiebt sich

$$12x^2 = 35x^2 - 120x,$$

und daraus folgt

$$x = \frac{120}{23}.$$

Nun war die erste Zahl $\frac{3x}{x-3}$, die zweite x, die dritte $\frac{4x}{x-4}$. Es ist aber $x = \frac{120}{23}$ gefunden worden. Wenn wir diesen Wert in den Ausdruck für die erste Zahl einsetzen, so wird $3x$ gleich $\frac{360}{23}$ sein, und es bleibt noch der Nenner zu berechnen. Für den Wert $x = \frac{120}{23}$ wird $x - 3$ gleich $\frac{51}{23}$; es ergiebt sich also für die erste Zahl $\frac{360}{51}$. Die zweite Zahl, deren Ausdruck kein x im Nenner hat, ist $\frac{120}{23}$. Die dritte Zahl wird ähnlich wie die erste bestimmt. Für $x = \frac{120}{23}$ wird $4x = \frac{480}{23}$, und ebenso wird für $x = \frac{120}{23}$ der Nenner $x - 4 = \frac{28}{23}$; es ergiebt sich also für die dritte Zahl $\frac{480}{28}$, und diese Werte genügen offenbar der Aufgabe*).

---

43. Aufgabe. Drei Zahlen von solcher Beschaffenheit zu finden, dafs das Produkt je zweier derselben zur Summe aller drei Zahlen in einem gegebenen Verhältnisse stehe.

Auflösung. Es werde verlangt, dafs das Produkt aus der ersten und zweiten Zahl das Dreifache der Summe aller drei Zahlen sei; dafs das Produkt aus der zweiten und dritten Zahl das Vierfache dieser Summe sei; dafs endlich das Produkt aus der dritten und ersten Zahl das Fünffache der Summe aller drei Zahlen sei.

Es soll das Produkt je zweier Zahlen zur Summe der drei Zahlen in einem gegebenen Verhältnisse stehen. Daher nehme ich zunächst eine Zahl ganz willkürlich an und suche drei Zahlen von der Beschaffenheit, dafs das Produkt je zweier der letzteren zur willkürlich angenommenen Zahl in dem gegebenen Verhältnisse stehe. Die willkürlich angenommene Zahl sei 5. Da nun das Produkt aus der ersten und zweiten Zahl das Dreifache der willkürlich angenommenen Zahl, d. i.

---

*) Es soll allgemein

$$\mathrm{I}.\mathrm{II} = k(\mathrm{I} + \mathrm{II}), \quad \mathrm{II}.\mathrm{III} = m(\mathrm{II} + \mathrm{III}), \quad \mathrm{I}.\mathrm{III} = n(\mathrm{I} + \mathrm{III})$$

sein. Wird $\mathrm{II} = x$ gesetzt, so mufs $\mathrm{I} = \frac{kx}{x-k}$, $\mathrm{III} = \frac{mx}{x-m}$ sein, und die letzte der drei Bedingungen $\mathrm{I}.\mathrm{III} = n(\mathrm{I} + \mathrm{III})$, d. i.

$$\frac{kx}{x-k} \cdot \frac{mx}{x-m} = n\left[\frac{kx}{x-k} + \frac{mx}{x-m}\right]$$

liefert dann

$$x = \frac{2kmn}{-km + kn + mn},$$

so dafs sich

$$\mathrm{I} = \frac{2kmn}{-kn + km + mn}, \quad \mathrm{II} = \frac{2kmn}{-km + kn + mn},$$

$$\mathrm{III} = \frac{2kmn}{-mn + km + kn}$$

ergiebt.

5, ist, so wird das Produkt aus der ersten und zweiten Zahl 15 sein. Setzen wir also die zweite Zahl gleich x, so wird die erste $\frac{15}{x}$ betragen. Da weiter das Produkt aus der zweiten und dritten Zahl das Vierfache von 5 ist, so ist das Produkt aus der zweiten und dritten Zahl gleich 20; es ist aber die zweite Zahl gleich x; folglich wird die dritte $\frac{20}{x}$ sein.

Es erübrigt noch, dafs das Produkt aus der ersten und dritten Zahl, d. i. $\frac{300}{x^2}$, das Fünffache von 5 sei; dies giebt

$$300 = 25x^2,$$

und wenn sich diese beiden Ausdrücke wie zwei Quadratzahlen zu einander verhielten, so wäre die Aufgabe gelöst.

Die Zahl 300 ist durch Multiplikation von 15 mit 20 entstanden. 15 ist aber das Dreifache von 5, und 20 ist das Vierfache von 5. Wir wollen nun, dafs das Dreifache von 5, wenn es mit dem Vierfachen von 5 multipliziert wird, eine Zahl giebt, die sich zum Fünffachen von 5 verhalte, wie eine Quadratzahl zu einer andern Quadratzahl. Die Zahl 5 ist dabei willkürlich angenommen. Ich bin also dazu geführt, eine Zahl von der Beschaffenheit zu suchen, dafs das Dreifache derselben, multipliziert mit ihrem Vierfachen, ein Produkt giebt, welches sich zum Fünffachen derselben Zahl wie ein Quadrat zu einem andern Quadrat verhält.

Diese gesuchte Zahl sei x. Multipliziert man das Dreifache mit dem Vierfachen derselben, so erhält man $12x^2$. Dies soll sich zum Fünffachen von x wie eine Quadratzahl zu einer andern Quadratzahl verhalten. Es sollen sich also $12x^2$ und $5x$ wie zwei Quadratzahlen verhalten. Es wird folglich das Produkt beider Zahlen selbst ein Quadrat sein müssen, oder $60x^3$ mufs gleich einer Quadratzahl sein. Diese sei $900x^2$, so ergiebt sich $x = 15$. Die gesuchte Zahl wird also 15 sein.

Ich nehme daher 15 statt der willkürlichen Zahl. Dann wird das Produkt aus der ersten und zweiten Zahl 45 sein, und da die zweite x sein soll, so wird die erste $\frac{45}{x}$ sein.

Ebenso ergiebt sich für die dritte Zahl $\frac{60}{x}$. Es erübrigt noch, dafs das Produkt aus der ersten und dritten Zahl, d. i. $\frac{2700}{x^2}$, das Fünffache von 15, also

$$\frac{2700}{x^2} = 75$$

sei; daraus folgt

$$x = 6.$$

Es wird somit die erste Zahl $7\frac{1}{2}$, die zweite 6, die dritte 10 sein. Wäre nun die Summe dieser drei Zahlen gleich 15, so wäre die Aufgabe gelöst.

Ich setze jetzt die Summe der drei Zahlen gleich $15x^2$, die Zahlen selbst aber gleich x mit den gefundenen Werten als Koeffizienten, nämlich die erste gleich $7\frac{1}{2}x$, die zweite gleich $6x$, die dritte gleich $10x$; dann ist noch zu bewirken, dafs die Summe der Zahlen $15x^2$ sei. Diese Summe ist aber $23\frac{1}{2}x$. Also ist

$$23\tfrac{1}{2}x = 15x^2,$$

und daraus folgt

$$x = \frac{47}{30}.$$

Daher wird die erste Zahl $\frac{352\frac{1}{2}}{30}$, die zweite $\frac{282}{30}$, die dritte $\frac{470}{30}$ sein*).

---

*) Wenn man die gesuchten Zahlen mit x, y, z, ihre Summe (vorläufig) mit s bezeichnet, so soll

$$xy = ks, \quad yz = ms, \quad xz = ns$$

sein. Daraus folgt

$$x = \sqrt{\frac{kns}{m}}, \quad y = \sqrt{\frac{kms}{n}}, \quad z = \sqrt{\frac{mns}{k}};$$

also ist

$$x + y + z, \text{ d. i. } s = \sqrt{s}\left[\sqrt{\frac{kmn}{k^2}} + \sqrt{\frac{kmn}{m^2}} + \sqrt{\frac{kmn}{n^2}}\right],$$

$$\sqrt{s} = \sqrt{kmn}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right),$$

$$s = kmn\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)^2.$$

44. Aufgabe. Drei Zahlen von solcher Beschaffenheit zu finden, dafs die Summe derselben, wenn sie mit der ersten Zahl multipliziert wird, eine dreieckige Zahl giebt; wenn sie mit der zweiten multipliziert wird, eine Quadratzahl; wenn sie mit der dritten multipliziert wird, einen Kubus.

Auflösung. Wir setzen die Summe der drei Zahlen gleich x^2,*) die erste Zahl gleich einem quadratischen Bruch mit einer dreieckigen Zahl als Zähler, etwa gleich $\frac{6}{x^2}$, die zweite Zahl gleich einem quadratischen Bruch mit einer Quadratzahl als Zähler, etwa gleich $\frac{4}{x^2}$, endlich die dritte Zahl gleich einem quadratischen Bruch mit einer Kubikzahl als Zähler, etwa gleich $\frac{8}{x^2}$. Wird dann x^2 mit der ersten Zahl multipliziert, so giebt das 6, also eine dreieckige Zahl; wird x^2 mit der zweiten Zahl multipliziert, so erhält man 4, also ein Quadrat, und wird x^2 mit der dritten Zahl multipliziert, so erhält man 8, also einen Kubus.

Es erübrigt noch, dafs die Summe der Zahlen gleich x^2 sei. Diese Summe ist aber $\frac{18}{x^2}$. Das soll gleich x^2 sein. Wird alles mit x^2 multipliziert, so ergiebt sich $x^4 = 18$. Es müfste also 18 ein Biquadrat sein. 18 ist aber die Summe einer dreieckigen Zahl, eines Quadrats und eines Kubus. Es kommt also darauf an, ein Quadrat zu suchen, dessen Seite eine Quadratzahl ist, und dasselbe in eine dreieckige Zahl, ein Quadrat und einen Kubus zu zerfällen.

Dieses Biquadrat sei x^4, das Quadrat aber $x^4 + 1 - 2x^2$.

Es ergiebt sich also

$$x = kn\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right), \quad y = km\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right),$$
$$z = mn\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right).$$

*) Die Bedingung, dafs die Summe eine Quadratzahl sein solle, ist in der Aufgabe nicht ausgesprochen und erschwert die Lösung.

Wenn man nun $x^4 + 1 - 2x^2$ von x^4 subtrahiert, so bleibt $2x^2 - 1$, und dieser Ausdruck soll wiederum in einen Kubus und eine dreieckige Zahl zerlegt werden. Der Kubus sei 8; dann bleibt für die dreieckige Zahl $2x^2 - 9$. Nun giebt jede dreieckige Zahl, wenn man sie mit 8 multipliziert und das Produkt um 1 vermehrt, ein Quadrat. Folglich mufs $16x^2 - 71$ gleich einem Quadrat sein. Setze ich diesen Ausdruck gleich dem Quadrat über $4x - 1$, so erhalte ich

$$x = 9.$$

Somit wird die dreieckige Zahl 153, das Quadrat 6400, der Kubus 8 sein.

Jetzt gehe ich zu der ursprünglich gestellten Aufgabe zurück und setze das Quadrat, welches gleich der Summe der drei Zahlen sein soll, gleich x^2, die erste Zahl gleich $\frac{153}{x^2}$, damit durch Multiplikation mit der Summe eine dreieckige Zahl entstehe. Die zweite Zahl setze ich gleich $\frac{6400}{x^2}$, damit durch Multiplikation mit der Summe ein Quadrat entstehe; die dritte Zahl endlich setze ich gleich $\frac{8}{x^2}$, damit sie, wenn sie mit der Summe multipliziert wird, einen Kubus gebe. Wenn ich jetzt jede der drei Zahlen mit x^2 multipliziere, so wird die erste Zahl zu einer dreieckigen Zahl, die zweite zu einem Quadrat, die dritte zu einem Kubus. Es müssen nun noch alle drei Zahlen zusammen gleich x^2 sein. Es ist also ihre Summe

$$\frac{6561}{x^2} = x^2.$$

Wird alles mit x^2 multipliziert, so erhält man

$$x^4 = 6561$$

und daraus

$$x = 9.$$

Folglich wird die erste Zahl $\frac{153}{81}$, die zweite $\frac{6400}{81}$, die dritte $\frac{8}{81}$ sein, und diese Werte genügen offenbar der Aufgabe*).

---

*) Es soll oben $2x^2 - 1$ in einen Kubus und eine Dreieckzahl zerlegt werden. Wird der Kubus gleich a^3 gesetzt, so soll

45. Aufgabe. Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs die Differenz zwischen der gröfsten und der mittleren zur Differenz zwischen der mittleren und der kleinsten Zahl in einem gegebenen

---

$2x^2 - a^3 - 1$ eine Dreieckzahl, also, nach dem angewandten Satze, $16x^2 - 8a^3 - 7$ ein Quadrat sein. Da eine Dreieckzahl kein Bruch sein kann, so hat man die Seite dieses Quadrats so zu wählen, dafs man für x eine ganze Zahl erhält. Das wird immer durch die Annahme

$$16x^2 - 8a^3 - 7 = (4x - 1)^2$$

erreicht, denn diese liefert $x = a^3 + 1$. Bachet meint nun, dafs die Seite des gesuchten Quadrats überhaupt kaum eine andere Form haben könne; davon habe er sich durch den Versuch überzeugt. Hierauf erwidert Fermat: „Der von Bachet angestellte Versuch ist nicht genau genug. Wenn man eine beliebige Kubikzahl, z B. eine solche, deren Seite von der Form $3n + 1$, etwa 7 ist, benutzt, so hat man $2x^2 - 344$ in eine Dreieckzahl, also $16x^2 - 2751$ in ein Quadrat zu verwandeln, und als Seite dieses Quadrats kann man etwa $4x - 3$ nehmen. Auch hindert nichts, statt 3 jede beliebige andere ungerade Zahl zu gebrauchen, wenn andere und andere Kubikzahlen genommen werden."

Werden übrigens die Zahlen mit x, y, z bezeichnet und die Summe derselben, die keine Quadratzahl zu sein braucht, gleich s gesetzt, so soll

(1) $$xs = \frac{m(m+1)}{2}$$

(2) $$ys = p^2$$

(3) $$zs = q^3$$

sein. Aus (1) folgt

$$8xs + 1 = 4m^2 + 4m + 1 = (2m + 1)^2;$$

also ist, wenn $2m + 1 = n$ gesetzt wird,

$$x = \frac{n^2 - 1}{8s}, \quad y = \frac{p^2}{s}, \quad z = \frac{q^3}{s},$$

und somit

$$\frac{n^2 - 1}{8s} + \frac{p^2}{s} + \frac{q^3}{s} = s,$$

d. h.

$$s^2 = \frac{n^2 - 1}{8} + p^2 + q^3,$$

oder für $n = 4k \pm 1$

Verhältnisse stehe, und dafs zugleich die Summe je zweier dieser Zahlen ein Quadrat sei.

Auflösung. Es werde verlangt, dafs die Differenz zwischen der gröfsten und der mittleren Zahl das Dreifache der Differenz zwischen der mittleren und der kleinsten Zahl sei.

Weiter soll die Summe der mittleren und der kleinsten Zahl ein Quadrat geben; dieses Quadrat sei 4; dann ist also die mittlere Zahl gröfser als 2; dieselbe sei $x + 2$, so wird die kleinste Zahl $2 - x$ sein. Nun soll die Differenz zwischen der gröfsten und der mittleren Zahl dreimal so grofs sein, wie die Differenz zwischen der mittleren und der kleinsten. Die Differenz zwischen der mittleren und der kleinsten Zahl ist aber $2x$, die Differenz zwischen der gröfsten und der mittleren wird folglich $6x$ sein, und daher wird die gröfste Zahl $7x + 2$ betragen.

Es sind jetzt noch zwei Forderungen zu erfüllen, nämlich dafs die Summe der gröfsten und der mittleren Zahl ein Quadrat sei, und dafs ebenso die gröfste und die kleinste Zahl zusammen ein Quadrat geben. Es entsteht also eine doppelte Gleichung; es mufs nämlich sowohl $8x + 4$, als auch $6x + 4$ ein Quadrat sein. Da die von x unabhängigen Glieder beider Ausdrücke Quadratzahlen sind, so ist die Gleichung leicht zu lösen.

Ich wähle zwei Zahlen, deren Produkt $2x$ ist; denn so ist, wie wir wissen, mit der doppelten Gleichung zu verfahren. Diese Zahlen seien $\frac{1}{2}x$ und 4; dann ergiebt sich $x = 112$. Wenn ich nun aber diesen Wert in die Ausdrücke für die gesuchten Zahlen einzusetzen versuche, so ergiebt sich, dafs es unmöglich ist, den Wert von x, d. i. 112, von 2 zu subtrahieren. Ich will daher einen Wert von x ermitteln, der kleiner als 2 ist. Für einen solchen Wert wird $6x + 4$

$$s^2 = 2k^2 \pm k + p^2 + q^3,$$
$$(s + p)(s - p) = 2k^2 \pm k + q^3.$$

Hierin sind k, q völlig willkürlich [allerdings mufs k eine ganze Zahl sein], und jede Zerlegung von $2k^2 \pm k + q^3$ in zwei Faktoren giebt ein Paar zusammengehöriger Werte von s und p.

kleiner als 16 sein. Wenn nämlich in $6x$ der Wert $x = 2$ eingesetzt und darauf 4 addiert wird, so giebt das 16.

Wenn ich nun jeden der Ausdrücke $8x + 4$ und $6x + 4$ zu einem Quadrat mache, so sind, da auch 4 ein Quadrat ist, drei Quadrate da, nämlich $8x + 4$, $6x + 4$ und 4, und die Differenz zwischen dem gröſsten und dem mittleren ist der dritte Teil der Differenz zwischen dem mittleren und dem kleinsten*).

Es kommt also darauf an, drei Quadrate von der Beschaffenheit zu suchen, daſs die Differenz zwischen dem gröſsten und dem mittleren der dritte Teil der Differenz zwischen dem mittleren und dem kleinsten ist, und daſs dabei das kleinste 4 beträgt, das mittlere aber kleiner als 16 ist.

Wir setzen das kleinste Quadrat gleich 4, die Seite des mittleren aber gleich $x + 2$, so wird dieses mittlere Quadrat selbst $x^2 + 4x + 4$ sein. Da nun die Differenz zwischen dem gröſsten und dem mittleren Quadrat der dritte Teil der Differenz zwischen dem mittleren und dem kleinsten ist, und da die Differenz zwischen dem mittleren und dem kleinsten $x^2 + 4x$ beträgt, also die Differenz zwischen dem gröſsten und dem mittleren $\frac{1}{3}x^2 + 1\frac{1}{3}x$ sein wird, da ferner das mittlere Quadrat $x^2 + 4x + 4$ ist, so wird das gröſste gleich

$$1\tfrac{1}{3}x^2 + 5\tfrac{1}{3}x + 4$$

sein. Dieser Ausdruck soll ein Quadrat sein. Multipliziert man denselben mit 9, so ergiebt sich $12x^2 + 48x + 36$, und das muſs auch ein Quadrat sein; dann muſs aber auch der vierte Teil, d. i. $3x^2 + 12x + 9$ ein Quadrat sein.

Nun soll aber das mittlere Quadrat kleiner als 16, also seine Seite kleiner als 4 sein. Die Seite des mittleren Quadrats ist aber $x + 2$. Es ist also $x + 2$ kleiner als 4, und wenn beiderseits 2 subtrahiert wird, so folgt, daſs x kleiner als 2 sein muſs. Ich will jetzt $3x^2 + 12x + 9$ in ein Quadrat verwandeln. Zu diesem Zwecke bilde ich das Quadrat

---

*) Wenn $\mathrm{I} - \mathrm{II} = 3\,(\mathrm{II} - \mathrm{III})$ ist, so ist auch

$$(\mathrm{I} + \mathrm{II}) - (\mathrm{I} + \mathrm{III}) = \tfrac{1}{3}\,[(\mathrm{I} + \mathrm{III}) - (\mathrm{II} + \mathrm{III})]$$

und umgekehrt.

über der Differenz von 3 und x mit einem beliebigen Koeffizienten. Dann erhalte ich als Wert von x das um 12 vermehrte Sechsfache dieses Koeffizienten, dividiert durch die Differenz zwischen dem Quadrat jener willkürlich gewählten Zahl und dem Koeffizienten 3 von x^2 in dem Ausdruck, welcher in ein Quadrat verwandelt werden soll*).

Ich bin also dazu geführt, eine Zahl von der Beschaffenheit zu suchen, dafs, wenn man sie mit 6 multipliziert, zum Produkt 12 addiert und die Summe durch die Differenz dividiert, die erhalten wird, indem man das Quadrat der Zahl um 3 vermindert, der entstandene Quotient kleiner als 2 sei.

Es sei x diese gesuchte Zahl. Wird dieselbe mit 6 multipliziert und zum Produkt 12 addiert, so giebt das $6x + 12$; das um 3 verminderte Quadrat der Zahl ist aber $x^2 - 3$. Ich will nun, dafs, wenn $6x + 12$ durch $x^2 - 3$ dividiert wird, der Quotient kleiner als 2 sei. Wenn man aber 2 durch 1 dividiert, so erhält man 2 zum Quotienten. Es soll also das Verhältnis von $6x + 12$ zu $x^2 - 3$ kleiner sein, als das Verhältnis von 2 zu 1. Daher ist auch das Produkt der äufseren Glieder nicht gleich demjenigen der inneren, nämlich das Produkt aus $6x + 12$ und 1 kleiner als das Produkt aus 2 und $x^2 - 3$, d. h. es ist

$$6x + 12 \quad \text{kleiner als} \quad 2x^2 - 6.$$

Wird die abzuziehende Zahl beiderseits addiert, so folgt, dafs

$$2x^2 \quad \text{gröfser als} \quad 6x + 18$$

sein mufs.

Um jetzt eine Vergleichung anzustellen, multiplizieren wir den halben Koeffizienten von x mit sich selbst und erhalten 9; darauf multiplizieren wir 18 mit dem Koeffizienten 2 von x^2 und erhalten 36. Wird dazu 9 addiert, so erhält man 45; die Seite des Quadrats, welches gleich 45 ist, ist nicht kleiner als 7 [d. h. liegt zwischen 6 und 7]. Zu 7 addieren wir den halben Koeffizienten von x und dividieren die Summe durch den Koeffizienten von x^2, so ergiebt sich,

*) Die Annahme $3x^2 + 12x + 9 = (3 - kx)^2$ liefert

$$x = \frac{6k + 12}{k^2 - 3}.$$

dafs x nicht kleiner als 5 sein darf [zwischen 4 und 5 liegen mufs]*). Ich finde somit, dafs $3x^2 + 12x + 9$ gleich dem Quadrat über der Seite $3 - 5x$ zu setzen ist, und aus

$$3x^2 + 12x + 9 = (3 - 5x)^2$$

folgt

$$x = \frac{42}{22} = \frac{21}{11}.$$

Ich hatte aber die Seite des mittleren Quadrats gleich $x + 2$ gesetzt; die Seite dieses Quadrats wird also $\frac{43}{11}$, das Quadrat selbst somit $\frac{1849}{121}$ sein.

Jetzt gehe ich zu der ursprünglich gestellten Aufgabe über und setze das Quadrat

$$\frac{1849}{121} = 6x + 4.$$

Wird alles mit 121 multipliziert, so ergiebt sich

$$x = \frac{1365}{726},$$

was weniger als 2 ist.

Diesen Wert setzen wir in die Ausdrücke für die ursprünglich gesuchten Zahlen ein. Wir hatten die mittlere Zahl gleich $x + 2$, die kleinste gleich $2 - x$, die gröfste gleich $7x + 2$ gesetzt. Es wird also die gröfste $\frac{11\,007}{726}$, die zweite $\frac{2817}{726}$, die dritte oder kleinste $\frac{87}{726}$ sein. Da der Nenner 726 keine Quadratzahl ist, während ihr sechster Teil, d. i. 121, eine solche ist, so heben wir jede der drei Zahlen durch 6; es wird sich dann für die erste $\frac{1834\frac{1}{2}}{121}$, für die zweite $\frac{469\frac{1}{2}}{121}$, für die dritte $\frac{14\frac{1}{2}}{121}$ ergeben. Will man Zahlen mit ganzen Zählern erhalten, d. h. den Bruch $\frac{1}{2}$ fortschaffen, so hat man alle Zahlen mit 4 zu erweitern. Es ergiebt sich dann für die erste Zahl

---

*) $$2x^2 > 6x + 18, \quad (2x)^2 - 6(2x) > 36,$$
$$(2x)^2 - 6(2x) + 9 > 45,$$

$2x - 3$ liegt zwischen den ganzen Zahlen 6 und 7, $2x$ zwischen 9 und 10, x zwischen 4 und 5.

$\frac{7338}{484}$, für die zweite $\frac{1878}{484}$, für die dritte $\frac{58}{484}$, und diese Werte genügen offenbar der Aufgabe*).

---

46. Aufgabe. Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs die Differenz zwischen dem Quadrat der gröfsten und dem Quadrat der mittleren Zahl

---

*) Bachet lehrt bei der Besprechung dieser Aufgabe sein Verfahren, Ausdrücke wie

$$ax + b, \quad cx + d,$$

in welchen a, c von einander verschieden sind und sich nicht wie zwei Quadratzahlen zu einander verhalten, und in welchen auch b, d ungleich sind, zu Quadraten zu machen. Er hält die Aufgabe aber nur in den beiden folgenden Fällen für möglich:

1) Wenn die Differenz der beiden Ausdrücke, nachdem sie mit einer geeigneten Zahl multipliziert oder durch eine solche Zahl dividiert worden ist, um eine Quadratzahl kleiner ist als der kleinere der beiden Ausdrücke. Das ist z. B. der Fall bei den Ausdrücken $3x + 13$, $x + 7$. Die halbe Differenz beider ist nämlich um 4 kleiner als $x + 7$.

2) Wenn die Differenz beider Ausdrücke nach Multiplikation oder Division mit einer geeigneten Zahl gröfser als der kleinere Ausdruck ist und zwar um eine Zahl, deren Verhältnis zu der als Multiplikator oder Divisor benutzten ein quadratisches ist. Das ist z. B. der Fall bei den Ausdrücken $6x + 25$, $2x + 3$; die halbe Differenz derselben beträgt 8 mehr als $2x + 3$, und es ist $8 : 2 = 2^2 : 1^2$.

Fermat bemerkt dazu: „Es sei aber aufgegeben, jeden der beiden Ausdrücke $2x + 5$, $6x + 3$ zu einem Quadrat zu machen. Die Quadratzahl, welcher man $2x + 5$ gleich zu setzen hat, ist 16, und diejenige, welcher man $6x + 3$ gleich zu setzen hat, ist 36; auch lassen sich noch unendlich viele andere Quadratzahlen bestimmen, welche gleichfalls der Aufgabe genügen. Es ist auch nicht schwierig, eine allgemeine Regel für die Lösung von Aufgaben dieser Art zu geben, so dafs jene Beschränkung Bachet's kaum eines solchen Mannes würdig ist; denn was er für zwei Fälle gefunden hat, läfst sich sehr leicht auf unendlich viele andere, ja sogar auf alle überhaupt möglichen Fälle ausdehnen."

zur Differenz zwischen der mittleren und der kleinsten Zahl in einem gegebenen Verhältnisse stehe, und dafs zugleich die Summe je zweier der Zahlen ein Quadrat gebe.

Auflösung. Die Differenz zwischen dem Quadrat der gröfsten und dem Quadrat der mittleren Zahl soll das Dreifache der Differenz zwischen der mittleren und der kleinsten Zahl sein. Ferner sollen die gröfste und die mittlere Zahl zusammen ein Quadrat geben; dies Quadrat sei $16x^2$; dann ist die gröfste Zahl gröfser als $8x^2$; dieselbe sei $8x^2 + 2$. Da nun die Summe der gröfsten und der mittleren Zahl gröfser ist als die Summe der gröfsten und der kleinsten Zahl, und da die Summe der gröfsten und der mittleren Zahl $16x^2$ ist, so mufs die Summe der gröfsten und der kleinsten Zahl kleiner als $16x^2$, aber gröfser als $8x^2$ sein. Die Summe der gröfsten und kleinsten Zahl sei gleich $9x^2$. Es ist aber die Summe der gröfsten und der mittleren Zahl $16x^2$ und die gröfste Zahl gleich $8x^2 + 2$; also wird die mittlere Zahl gleich $8x^2 - 2$ und die dritte Zahl $x^2 - 2$ sein.

Da ich nun will, dafs die Differenz zwischen dem Quadrat der gröfsten und dem Quadrat der mittleren Zahl das Dreifache der Differenz zwischen der mittleren und der kleinsten Zahl sei, die Differenz zwischen dem Quadrat der gröfsten und dem Quadrat der mittleren Zahl aber $64x^2$ beträgt, während die Differenz zwischen der mittleren und kleinsten Zahl $7x^2$ ist, so mufs $64x^2$ das Dreifache von $7x^2$ sein. Wenn ich aber $7x^2$ mit 3 multipliziere, so giebt das $21x^2$, und der Koeffizient 64 von $64x^2$ ist durch Multiplikation von 32 mit 2 entstanden.

Es liegt mir also ob, eine Zahl zu suchen, welche mit 32 multipliziert, 21 giebt. Es ist das $\frac{21}{32}$. Ich setze also die erste Zahl gleich $8x^2 + \frac{21}{32}$, die mittlere gleich $8x^2 - \frac{21}{32}$, die dritte gleich $x^2 - \frac{21}{32}$.

Dann bleibt noch eine Forderung zu erfüllen, dafs nämlich die Summe der mittleren und kleinsten Zahl ein Quadrat gebe. Die mittlere und die kleinste Zahl haben aber zur

Summe $9x^2 - \frac{42}{32}\cdot$ Setzen wir diesen Ausdruck gleich dem Quadrat über der Seite $3x - 6$, so ergiebt sich

$$x = \frac{597}{576}.$$

Die erste Zahl wird also $\frac{3\,069\,000}{331\,776}$, die zweite $\frac{2\,633\,544}{331\,776}$, die dritte $\frac{138\,681}{331\,776}$ sein*).

---

*) Es sei b^2 eine Quadratzahl, die kleiner als $4a^2$ und größer als $2a^2$ ist; ferner sei k eine noch zu bestimmende Zahl. Dann nimmt Diophant

$$\mathrm{I} = 2a^2x^2 + k, \quad \mathrm{II} = 2a^2x^2 - k, \quad \mathrm{III} = (b^2 - 2a^2)x^2 - k$$

an. Die Gleichung $\mathrm{I}^2 - \mathrm{II}^2 = 3(\mathrm{II} - \mathrm{III})$ liefert ihm den Wert

$$k = \frac{12a^2 - 3b^2}{8a^2},$$

und es bleibt nur noch $\mathrm{II} + \mathrm{III}$, d. i. $b^2x^2 - 2k$ in ein Quadrat zu verwandeln. Da der Koeffizient von x^2 eine Quadratzahl ist, so macht dies keine Schwierigkeit.

V. Buch.

1. Aufgabe. Drei in geometrischer Proportion stehende Zahlen zu finden, von denen jede, wenn sie um eine gegebene Zahl vermindert wird, ein Quadrat giebt.

Auflösung. Die gegebene Zahl sei 12. Es besteht aber eine geometrische Proportion, wenn das Produkt der beiden äufseren Zahlen ein Quadrat ist, dessen Seite die mittlere Zahl ist.

Ich suche zuerst eine Quadratzahl, welche ein Quadrat bleibt, wenn sie um 12 vermindert wird. Das ist leicht, und es ergiebt sich $42\frac{1}{4}$. Daher setze ich die eine der äufseren Zahlen gleich $42\frac{1}{4}$, die andere gleich x^2. Dann wird die mittlere Zahl $6\frac{1}{2}x$ sein.

Es erübrigt noch, dafs jede dieser beiden Zahlen, wenn sie um 12 vermindert wird, ein Quadrat giebt. Es mufs also $x^2 - 12$ gleich einem Quadrat sein, und ebenso mufs $6\frac{1}{2}x - 12$ ein Quadrat werden. Die Differenz dieser beiden Ausdrücke ist $x^2 - 6\frac{1}{2}x$. Dieselbe ist das Produkt aus x in $x - 6\frac{1}{2}$. Wird die halbe Differenz dieser beiden Faktoren mit sich selbst multipliziert, so ergiebt sich $\frac{169}{16}$, und wenn man diese Zahl gleich dem kleineren Ausdruck, d. i. gleich $6\frac{1}{2}x - 12$ setzt, so erhält man

$$x = \frac{361}{104}.$$

Somit wird die erste Zahl $42\frac{1}{4}$, die zweite $\frac{2346\frac{1}{2}}{104}$, die dritte $\frac{130\,321}{10\,816}$ sein*).

---

2. Aufgabe. Drei Zahlen zu finden, die in geometrischer Proportion stehen, und von denen jede, wenn sie um eine gegebene Zahl vermehrt wird, ein Quadrat giebt.

---

*) Ist a die gegebene Zahl, so folgt aus der Annahme
$$x^2 \mp a = (x \mp k)^2 \text{**)},$$
dafs
$$x = \frac{a \pm k^2}{2k}$$
sein mufs, wo k unbestimmt bleibt. Setzen wir also mit Diophant
$$\mathrm{I} = \left(\frac{a \pm k^2}{2k}\right)^2, \quad \mathrm{II} = \left(\frac{a \pm k^2}{2k}\right)x, \quad \mathrm{III} = x^2,$$
so sind bereits die Forderungen
$$\mathrm{I}\,.\,\mathrm{III} = \mathrm{II}^2, \quad \mathrm{I} \mp a \text{ gleich einem Quadrat}$$
erfüllt, und es ist nur noch jeder der beiden Ausdrücke
$$\left(\frac{a \pm k^2}{2k}\right)x \mp a, \quad x^2 \mp a$$
zu einem Quadrat zu machen. Da die Differenz beider Ausdrücke
$$x^2 - \frac{a \pm k^2}{2k}x = x\left(x - \frac{a \pm k^2}{2k}\right)$$
ist, so haben wir
$$\left(\frac{a \pm k^2}{4k}\right)^2 = \frac{a \pm k^2}{2k}x \mp a$$
zu setzen und erhalten leicht
$$x = \frac{a^2 \pm 18ak^2 + k^4}{8k(a \pm k^2)},$$
so dafs sich
$$\mathrm{I} = \left(\frac{a \pm k^2}{2k}\right)^2, \quad \mathrm{II} = \frac{a^2 \pm 18ak^2 + k^4}{16k^2},$$
$$\mathrm{III} = \left(\frac{a^2 \pm 18ak^2 + k^4}{8k(a \pm k^2)}\right)^2$$
ergiebt. Diophants Lösung der ersten Aufgabe folgt hieraus für $a = 12$, $k = 1$, die der zweiten für $a = 20$, $k = 1$.

**) Das obere Vorzeichen gilt für die erste, das untere für die zweite (folgende) Aufgabe.

Auflösung. Die gegebene Zahl sei 20. Ich suche nun wieder eine Quadratzahl, welche ein Quadrat bleibt, wenn sie um 20 vermehrt wird. Es ergiebt sich 16. Daher setze ich eine der beiden äufseren Zahlen gleich 16, die andere gleich x^2; dann wird die mittlere Zahl $4x$ sein, und nach dem in der vorhergehenden Aufgabe Bemerkten ist sowohl $4x + 20$, als auch $x^2 + 20$ zu einem Quadrat zu machen.

Die Differenz dieser beiden Ausdrücke ist $x^2 - 4x$, und dieselbe ist das Produkt aus x in $x - 4$. Wird die halbe Differenz dieser beiden Faktoren mit sich selbst multipliziert, so erhält man 4. Diese Zahl setzen wir gleich dem kleineren Ausdruck, nämlich gleich $4x + 20$. Das ist jedoch ungereimt, denn 4 darf nicht kleiner als 20 sein.

Nun ist 4 der vierte Teil von 16; 16 ist aber keine willkürlich angenommene Zahl, sondern eine Quadratzahl, welche, wenn sie um 20 vermehrt wird, ein Quadrat bleibt. Es kommt also darauf an, ein Quadrat zu suchen, dessen vierter Teil gröfser als 20 ist, und welches, wenn es um 20 vermehrt wird, ein Quadrat bleibt.

Das gesuchte Quadrat mufs gröfser als 80 sein. Es ist aber 81 ein Quadrat, welches gröfser als 80 ist. Daher setze ich die Seite des gesuchten Quadrats gleich $x + 9$; das Quadrat selbst wird dann $x^2 + 18x + 81$ sein, und dieser Ausdruck soll, wenn er um 20 vermehrt wird, ein Quadrat geben. Es ist also $x^2 + 18x + 101$ zu einem Quadrat zu machen. Die Seite dieses Quadrats sei $x - 11$; dann wird das Quadrat selbst $x^2 + 121 - 22x$ sein. Wird dies gleich $x^2 + 18x + 101$ gesetzt, so ergiebt sich $x = \frac{1}{2}$. Es war aber die Seite des gesuchten Quadrats $x + 9$; das Quadrat selbst wird daher $90\frac{1}{4}$ sein.

Jetzt gehe ich zur ursprünglichen Aufgabe zurück und setze die erste der beiden äufseren Zahlen gleich $90\frac{1}{4}$, die dritte Zahl gleich x^2. Dann wird die mittlere Zahl $9\frac{1}{2}x$ sein, und ich habe sowohl $x^2 + 20$, als auch $9\frac{1}{2}x + 20$ zu einem Quadrat zu machen. Die Differenz beider Ausdrücke ist $x^2 - 9\frac{1}{2}x$, und diese Differenz ist gleich dem Produkt aus x

in $x - 9\frac{1}{2}$. Die halbe Differenz dieser beiden Faktoren, mit sich selbst multipliziert, giebt $\frac{361}{16}$. Wird diese Zahl gleich dem kleineren Ausdruck, d. i. $9\frac{1}{2}x + 20$ gesetzt, so ergiebt sich
$$x = \frac{41}{152}.$$
Folglich wird die erste Zahl $90\frac{1}{4}$, die zweite $\frac{389\frac{1}{2}}{152}$, die dritte $\frac{1681}{23104}$ sein.

---

3. Aufgabe. Zu einer gegebenen Zahl drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs sowohl jede derselben, als auch das Produkt je zweier derselben bei Addition der gegebenen Zahl zu einem Quadrat wird.

Auflösung. Die gegebene Zahl sei 5. In den Porismen*) haben wir den Satz, dafs, wenn sowohl jede von zwei Zahlen, als auch ihr Produkt bei Addition einer gegebenen Zahl ein Quadrat wird, diese Zahlen von zwei unmittelbar auf einander folgenden Quadratzahlen herrühren.

Daher wähle ich zwei auf einander folgende Quadrate; das eine habe die Seite $x + 3$, das andere die Seite $x + 4$; dann wird das eine Quadrat $x^2 + 6x + 9$, das andere $x^2 + 8x + 16$ sein. Ich subtrahiere nun von jedem derselben

---

*) Die hier, wie auch in V, 5 und V, 19 erwähnten Porismen waren entweder ein Teil der Arithmetik oder ein besonderes Werk Diophants. Der Verlust derselben ist besonders zu beklagen, da sie wahrscheinlich eine Zusammenstellung der Diophant bekannten Eigenschaften der Zahlen enthielten.

Übrigens ist das hier von Diophant ausgesprochene Porisma nicht ganz korrekt. Sind nämlich x, y zwei gesuchte Zahlen, a eine gegebene Zahl, und ist $x + a = p^2$, $y + a = q^2$, so ergiebt sich
$$xy + a = p^2q^2 - a(p^2 + q^2 - 1) + a^2.$$
$xy + a$ wird also erstens ein Quadrat, nämlich $(pq - a)^2$, wenn
$$p^2 + q^2 - 1 = 2pq, \quad \text{also} \quad p = q \pm 1$$
ist, und das sagt Diophant. Es ist dies aber nicht die einzige Art, den Ausdruck $xy + a$ zu einem Quadrat zu machen.

5 und setze die eine Zahl gleich dem ersten Rest, also gleich $x^2 + 6x + 4$, die zweite Zahl gleich dem zweiten Rest, also gleich $x^2 + 8x + 11$, und die dritte Zahl gleich der um 1 verminderten doppelten Summe der beiden ersten Zahlen, also gleich $4x^2 + 28x + 29$.

Dann ist noch zu bewirken, dafs auch diese letzte Zahl bei Addition von 5 ein Quadrat werde. Es soll also

$$4x^2 + 28x + 34$$

ein Quadrat sein. Der Ausdruck sei gleich dem Quadrat über der Seite $2x - 6$. Es wird also das Quadrat

$$4x^2 + 36 - 24x = 4x^2 + 28x + 34$$

sein, und daraus ergiebt sich

$$x = \frac{1}{26}.$$

Die erste Zahl wird somit $\frac{2861}{676}$, die zweite $\frac{7645}{676}$, die dritte $\frac{20\,336}{676}$ sein.

---

4. **Aufgabe.** Zu einer gegebenen Zahl drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs sowohl jede derselben, als auch das Produkt je zweier derselben bei Subtraktion der gegebenen Zahl zu einem Quadrat wird.

Auflösung. Die gegebene Zahl sei 6. Ich wähle wieder zwei auf einander folgende Quadrate, nämlich x^2 und $x^2 + 2x + 1$, addiere zu jedem derselben die gegebene Zahl und setze die erste der gesuchten Zahlen gleich $x^2 + 6$, die zweite gleich $x^2 + 2x + 7$, die dritte gleich der um 1 verminderten doppelten Summe der beiden ersten Zahlen, also gleich

$$4x^2 + 4x + 25.$$

Dann erübrigt noch, dafs auch diese dritte Zahl bei der Subtraktion von 6 ein Quadrat gebe, dafs also $4x^2 + 4x + 19$ gleich einem Quadrat sei. Setzen wir den Ausdruck gleich dem Quadrat über der Seite $2x - 6$, also das Quadrat

$$4x^2 + 36 - 24x = 4x^2 + 4x + 19,$$

so ergiebt sich

$$x = \frac{17}{28}.$$

Die erste Zahl wird folglich $\frac{4993}{784}$, die zweite $\frac{6729}{784}$, die dritte $\frac{22\,660}{784}$ sein*).

*) In der nachstehenden Anmerkung zu den Aufgaben 3 und 4 bezieht sich das obere Vorzeichen auf die 3., das untere auf die 4. Aufgabe.

Setzt man mit Diophant

$$\mathrm{I} = x^2 \mp a, \quad \mathrm{II} = (x+1)^2 \mp a, \quad \mathrm{III} = (2x+1)^2 \mp 4a,$$

wo a die gegebene Zahl ist, so sind schon 5 Bedingungen erfüllt, da

$$\mathrm{I} \pm a = x^2, \quad \mathrm{II} \pm a = (x+1)^2,$$
$$\mathrm{I}\,.\,\mathrm{II} \pm a = [x(x+1) \mp a]^2,$$
$$\mathrm{I}\,.\,\mathrm{III} \pm a = [x(2x+1) \mp 2a]^2,$$
$$\mathrm{II}\,.\,\mathrm{III} \pm a = [(x+1)(2x+1) \mp 2a]^2$$

ist. Es ist also nur noch $\mathrm{III} \pm a$ zu einem Quadrat zu machen. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$(2x+1)^2 \mp 4a \pm a = (2x \mp k)^2$$

und erhalten leicht

$$x = \frac{k^2 \pm 3a - 1}{4(\pm k + 1)},$$

womit auch die gesuchten Zahlen bestimmt sind.

Fermat bemerkt zur 3. Aufgabe: „Aus dem von Diophant benutzten Satze ergiebt sich leicht die Lösung der folgenden Aufgabe: Vier Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs das Produkt je zweier derselben ein Quadrat wird, wenn man es um eine gegebene Zahl vermehrt. Man bestimme drei der vorhergehenden Aufgabe genügende Zahlen, so dafs also jede derselben ein Quadrat wird, wenn man sie um die gegebene Zahl vermehrt. Darauf setze man die vierte gesuchte Zahl gleich $x + 1$. Dann entsteht eine dreifache Gleichung, deren Lösung nach meiner Methode keine Schwierigkeit macht. (Siehe die Anmerkung zur 24. Aufgabe des 6. Buches.) Auf diese Weise wird also die Aufgabe gelöst, welche Bachet bei Besprechung der 12. Aufgabe des 3. Buches gestellt hat, und meine Methode ist nicht nur viel allgemeiner, sondern hat auch vor Bachets Verfahren noch den Vorzug, dafs bei meiner Lösung jede der drei ersten Zahlen

5. **Aufgabe.** Drei Quadratzahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs das Produkt je zweier derselben, sowohl wenn es um die Summe dieser beiden, als auch wenn es um die dritte Zahl vermehrt wird, ein Quadrat bildet.

Auflösung. Wir haben wieder in den Porismen den Satz, dafs, wenn man zu zwei beliebigen unmittelbar auf einander folgenden Quadratzahlen eine andere Zahl bestimmt, welche um 2 gröfser als die doppelte Summe dieser beiden Quadrate ist, man drei Zahlen von der Beschaffenheit hat, dafs das Produkt je zweier derselben, sowohl wenn es um die Summe dieser beiden, als auch wenn es um die dritte Zahl vermehrt wird, ein Quadrat giebt.

Daher setze ich das erste der drei gesuchten Quadrate gleich $x^2 + 2x + 1$, das zweite gleich $x^2 + 4x + 4$, die dritte Zahl aber gleich $4x^2 + 12x + 12$. Dann bleibt noch die dritte Zahl, d. i. $4x^2 + 12x + 12$ zu einem Quadrat zu machen. Es mufs aber auch der vierte Teil dieses Ausdrucks, d. i. $x^2 + 3x + 3$ gleich einem Quadrat sein. Ich setze denselben gleich dem Quadrat über $x - 3$; dann wird das Quadrat

$$x^2 + 9 - 6x = x^2 + 3x + 3$$

sein, und daraus ergiebt sich

$$x = \frac{2}{3}.$$

Folglich wird die erste Zahl $\frac{25}{9}$, die zweite $\frac{64}{9}$, die dritte $\frac{196}{9}$ sein*).

---

bei Addition der gegebenen Zahl selbst ein Quadrat wird. Ob sich übrigens die Aufgabe so lösen läfst, dafs auch die vierte Zahl ein Quadrat wird, wenn man sie um die gegebene Zahl vermehrt, das weifs ich noch nicht; ich werde darüber weitere Untersuchungen anstellen."

*) Wird nach Diophants Angabe

$$\mathrm{I} = x^2, \quad \mathrm{II} = (x+1)^2, \quad \mathrm{III} = 4x^2 + 4x + 4$$

gesetzt, so ist, wie man leicht erkennt,

$$\mathrm{I} \,.\, \mathrm{II} + (\mathrm{I} + \mathrm{II}) = (x^2 + x + 1)^2$$
$$\mathrm{I} \,.\, \mathrm{II} + \mathrm{III} = (x^2 + x + 2)^2$$

6. Aufgabe. Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs jede derselben, wenn sie um 2 vermindert wird, ein Quadrat bildet, und dafs zugleich das Produkt je zweier derselben, sowohl wenn man es um die Summe dieser beiden, als auch wenn man es um die dritte Zahl vermindert, ein Quadrat wird.

Auflösung. Wenn ich zu jeder der in der vorhergehenden Aufgabe gefundenen Zahlen 2 addiere, so genügen die erhaltenen Zahlen der vorliegenden Aufgabe. Dies giebt folgende Lösung:

Wir setzen die eine der gesuchten Zahlen gleich $x^2 + 2$, die andere gleich $x^2 + 2x + 3$, die dritte gleich $4x^2 + 4x + 6$, so sind die Forderungen der Aufgabe erfüllt*). Es erübrigt nur noch, dafs $4x^2 + 4x + 4$, also auch der vierte Teil dieses Ausdrucks, d. i. $x^2 + x + 1$ ein Quadrat werde. Wenn wir die Seite dieses Quadrats gleich einer Differenz annehmen, etwa gleich $x - 2$, so wird das Quadrat

$$x^2 + 4 - 4x = x^2 + x + 1$$

sein, und daraus folgt

$$x = \frac{3}{5}.$$

Folglich wird die erste Zahl $\frac{59}{25}$, die zweite $\frac{114}{25}$, die dritte $\frac{246}{25}$ sein, und diese Werte genügen offenbar der Aufgabe.

$$\begin{aligned} \mathrm{I}\,.\,\mathrm{III} + (\mathrm{I} + \mathrm{III}) &= (2x^2 + x + 2)^2 \\ \mathrm{I}\,.\,\mathrm{III} + \mathrm{II} &= (2x^2 + x + 1)^2 \\ \mathrm{II}\,.\,\mathrm{III} + \mathrm{I} &= (2x^2 + 3x + 2)^2 \\ \mathrm{II}\,.\,\mathrm{III} + (\mathrm{II} + \mathrm{III}) &= (2x^2 + 3x + 3)^2. \end{aligned}$$

Man hat also nur noch III zu einem Quadrat zu machen. Setzt man

$$4x^2 + 4x + 4 = (2x + k)^2,$$

so ergiebt sich

$$x = \frac{k^2 - 4}{4(1 - k)}.$$

*) Es ist nämlich

$$\mathrm{I}\,.\,\mathrm{II} - \mathrm{III} = [x(x+1)]^2, \quad \mathrm{I}\,.\,\mathrm{II} - (\mathrm{I} + \mathrm{II}) = (x^2 + x + 1)^2,$$

u. s. w.

7. Aufgabe. (Vorbereitung für die folgenden Aufgaben.) Zwei Zahlen zu finden, deren Produkt ein Quadrat wird, wenn man es um die Summe der Quadrate der beiden Zahlen vermehrt.

Auflösung. Die erste Zahl sei x, die zweite eine beliebige bestimmte Zahl, etwa 1; dann ist das Produkt beider x, und die Summe der Quadrate $x^2 + 1$. Wird diese Summe zum Produkt x addiert, so erhält man $x^2 + x + 1$, und dieser Ausdruck soll ein Quadrat werden. Es sei dies das Quadrat über der Seite $x - 2$; dann wird das Quadrat

$$x^2 + 4 - 4x = x^2 + x + 1$$

sein, und daraus folgt

$$x = \frac{3}{5}.$$

Folglich wird die erste Zahl $\frac{3}{5}$, die zweite $\frac{5}{5}$ sein, und wenn man den Nenner wegwirft, so ist die erste Zahl 3, die zweite 5. Diese Zahlen genügen der Aufgabe, da ihr Produkt, wenn es um die Summe ihrer Quadrate vermehrt wird, ein Quadrat giebt. Ebenso genügen der Aufgabe auch diejenigen Zahlen, die entstehen, wenn man 3 und 5 mit einer ganz beliebigen Zahl multipliziert*).

---

8. Aufgabe. [Vieta, Zet. IV, 11.] Drei rechtwinklige Dreiecke von gleichem Flächeninhalt zu finden.

Auflösung. Wir müssen zuerst zwei Zahlen suchen, deren Produkt ein Quadrat wird, wenn man es um die Summe ihrer Quadrate vermehrt. Diese Aufgabe ist oben behandelt worden, und es sind 3 und 5 die Zahlen, deren Produkt, vermehrt um die Summe ihrer Quadrate, ein Quadrat giebt, nämlich das Quadrat über die Seite 7.

---

*) Setzt man $xy + x^2 + y^2 = (x - ky)^2$, so ergiebt sich

$$x = \frac{y(k^2 - 1)}{1 + 2k}.$$

Ist etwa $y = 1 + 2k$, so wird $x = k^2 - 1$ sein, z. B. für $k = 2$ ist $x = 3$, $y = 5$.

Ich bilde nun drei rechtwinklige Dreiecke vermittels je zweier Zahlen, nämlich das eine vermittels der Zahlen 7 und 3, das zweite vermittels der Zahlen 7 und 5, das dritte vermittels 7 und der Summe der gefundenen Zahlen 3 und 5, d. i. 8, also vermittels 7 und 8.

Die Seiten des ersten dieser Dreiecke werden 40, 42, 58, die des zweiten 24, 70, 74, die des dritten 15, 112, 113 sein, und alle diese Dreiecke haben gleichen Flächeninhalt, nämlich 840*).

---

*) Es seien x, y, z Zahlen, welche der Aufgabe 7, also der Gleichung

$$xy + x^2 + y^2 = z^2$$

genügen. Das mittels der Zahlen x, z gebildete rechtwinklige Dreieck hat die Katheten $z^2 - x^2$, $2xz$, also die Fläche

$$xz(z^2 - x^2) = xz(xy + y^2) = xyz(x + y).$$

Ebenso hat das mittels der Zahlen y, z gebildete rechtwinklige Dreieck die Fläche

$$yz(z^2 - y^2) = yz(xy + x^2) = xyz(x + y).$$

Endlich hat das mittels der Zahlen $x + y$, z gebildete rechtwinklige Dreieck die Fläche

$$(x + y)z(x^2 + 2xy + y^2 - z^2) = (x + y)z \,.\, xy = xyz(x + y).$$

Die Dreiecke haben also gleichen Flächeninhalt.

Fermat bemerkt zur 8. Aufgabe: „Ob aber vier oder mehr, ja unendlich viele rechtwinklige Dreiecke von gleichem Flächeninhalt gefunden werden können? Es scheint nichts im Wege zu stehen, dafs die Aufgabe möglich sei, und ich will der Sache weiter nachgehen.

Ich habe sogar folgende Aufgabe gelöst: Es ist die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks gegeben; man soll unendlich viele andere rechtwinklige Dreiecke ermitteln, welche dieselbe Fläche haben. So z. B. ist 6 die Fläche des Dreiecks, welches die Seiten 3, 4, 5 hat; dieselbe Fläche hat das Dreieck, dessen Seiten $\frac{7}{10}$, $\frac{120}{7}$, $\frac{1201}{70}$ oder, wenn man gleichnamige Brüche nehmen will, $\frac{49}{70}$, $\frac{1200}{70}$, $\frac{1201}{70}$ sind.

Die zur Ermittlung dieser Dreiecke fortgesetzt anzuwendende Methode ist folgende: Wir nehmen ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse z

9. **Aufgabe.** Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs das Quadrat einer jeden sowohl bei Addition, als auch bei Subtraktion der Summe der drei Zahlen ein Quadrat bleibt.

---

sein möge, während die Basis b, das Lot d ist. Um nun ein demselben unähnliches rechtwinkliges Dreieck von gleichem Flächeninhalt zu erhalten, nehmen wir die Zahlen z^2 und $2bd$. Die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks, welches vermittels dieser Zahlen gebildet wird, dividieren wir durch $2z(b^2-d^2)$, wo $b>d$ sein möge. Dadurch erhalten wir ein neues rechtwinkliges Dreieck, dessen Fläche gleich der des gegebenen ist. Nach derselben Methode leiten wir aus diesem zweiten ein drittes, aus dem dritten ein viertes, aus dem vierten ein fünftes rechtwinkliges Dreieck her, u. s. w. Alle diese unendlich vielen Dreiecke werden unähnlich und von demselben Flächeninhalt wie das erste sein. Damit du nicht daran zweifelst, dafs es noch mehr als die drei von Diophant gefundenen rechtwinkligen Dreiecke

[40, 42, 58; 24, 70, 74; 15, 112, 113]

der Fläche 840 giebt, füge ich ein viertes hinzu, welches jenen unähnlich und doch von demselben Flächeninhalt ist. Dasselbe hat die Hypotenuse $\frac{1\,412\,881}{1189}$, die Basis $\frac{1\,412\,880}{1189}$, das Lot $\frac{1681}{1189}$. Wenn man die Seiten aller Dreiecke auf denselben Nenner bringt und diesen Nenner dann unterdrückt, so erhält man folgende vier Dreiecke von gleicher Fläche:

I.	47 560,	49 938,	68 962.
II.	28 536,	83 230,	87 986.
III.	17 835,	133 168,	134 357.
IV.	1681,	1 412 880,	1 412 881.

Nach derselben Methode lassen sich beliebig viele rechtwinklige Dreiecke von gleicher Fläche ermitteln, und auch die 9. Aufgabe wird über die von Diophant gesteckten Grenzen hinaus erweitert.

Folgendes sind die nach einer andern Methode gefundenen Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Fläche, wie diejenige von 3, 4, 5, das Sechsfache einer Quadratzahl ist:

2 896 804, 7 216 803, 7 776 485.“

Auflösung. Wir wollen, dafs das Quadrat der ersten Zahl, sowohl wenn die Summe der drei Zahlen addiert, als auch wenn dieselbe subtrahiert wird, ein Quadrat gebe. Nun liefert in jedem rechtwinkligen Dreieck das Quadrat der Hypotenuse sowohl bei Addition, als auch bei Subtraktion des vierfachen Flächeninhalts ein Quadrat. Die drei gesuchten Zahlen werden also die Hypotenusen von rechtwinkligen Dreiecken gleicher Fläche, und die Summe der drei Zahlen wird der vierfache Flächeninhalt der Dreiecke sein, deren Hypotenusen diese Zahlen sind.

Es kommt somit darauf an, drei rechtwinklige Dreiecke von gleichem Flächeninhalt zu suchen. Diese Aufgabe ist oben gelöst worden, und es sind beziehungsweise 40, 42, 58; 24, 70, 74; 15, 112, 113 die Seiten dieser Dreiecke.

Indem ich nun zu der ursprünglich gestellten Aufgabe übergehe, drücke ich die gesuchten Zahlen durch x mit den Hypotenusen der rechtwinkligen Dreiecke als Koeffizienten aus; es wird also die erste Zahl $58x$, die zweite $74x$, die dritte $113x$ sein. Die Summe der drei Zahlen dagegen setze ich gleich x^2 mit dem vierfachen Flächeninhalt eines der drei Dreiecke als Koeffizienten. Dann wird also

$$3360x^2 = 245x$$

sein, und daraus ergiebt sich

$$x = \frac{7}{96}.$$

Folglich wird die erste Zahl $\frac{406}{96}$, die zweite $\frac{518}{96}$, die dritte $\frac{791}{96}$ sein*).

*) Fermat bemerkt: „Aus dem oben Gesagten erhellt, dafs ich allgemein die Aufgabe lösen kann: Beliebig viele Zahlen von der Beschaffenheit zu ermitteln, dafs das Quadrat einer jeden eine Quadratzahl bleibt, mag man nun die Summe aller Zahlen zu demselben addieren oder von demselben subtrahieren. Die Lösung dieser Aufgabe war Bachet vielleicht nicht bekannt. Denn wenn er dieselbe entdeckt hätte, so würde er hier wohl Diophant erweitert haben, wie er es bei der 31. Aufgabe des 4. Buches und an anderen Stellen gethan hat."

Was nun die allgemeine Lösung der Aufgabe betrifft, so

10. Aufgabe. Wenn drei Quadratzahlen gegeben sind, so ist es möglich, drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs die Produkte je zweier derselben gleich den gegebenen Quadratzahlen seien.

Auflösung. Die gegebenen Quadrate seien 4, 9 und 16. Setzen wir die eine der gesuchten Zahlen gleich x, so wird die eine der beiden anderen $\frac{4}{x}$, die zweite $\frac{9}{x}$ sein. Dann erübrigt noch, dafs das Produkt der zweiten und dritten Zahl 16 betrage. Das Produkt aus der zweiten und dritten Zahl ist aber $\frac{36}{x^2}$. Wird dies gleich 16 gesetzt, so ergiebt sich

$$x = 1\tfrac{1}{2}.$$

Somit wird die erste Zahl $1\frac{1}{2}$, die zweite $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$, die dritte 6 sein.

Ich will dies jedoch methodisch entwickeln; ich fand

$$\frac{36}{x^2} = 16.$$

Wird alles mit x^2 multipliziert, so folgt

$$16x^2 = 36$$

und daraus

$$x^2 = \frac{36}{16}.$$

Daher ist die Seite

$$x = \frac{6}{4}.$$

6 entsteht aber durch Multiplikation der Seiten von 4 und 9,

---

seien c_1, c_2, c_3 ... die Hypotenusen der rechtwinkligen Dreiecke, welche dieselbe Fläche i haben. Setzen wir dann die gesuchten Zahlen

$$\mathrm{I} = c_1 x, \quad \mathrm{II} = c_2 x, \quad \mathrm{III} = c_3 x, \ldots$$

und die Summe derselben gleich $4ix^2$, so erhalten wir die Gleichung

$$4ix^2 = c_1 x + c_2 x + c_3 x + \cdots,$$

und diese liefert

$$x = \frac{c_1 + c_2 + c_3 + \cdots}{4i},$$

so dafs sich

$$\mathrm{I} = \frac{c_1}{4i}(c_1 + c_2 + c_3 + \cdots), \quad \mathrm{II} = \frac{c_2}{4i}(c_1 + c_2 + c_3 + \cdots),$$

u. s. w. ergiebt.

d. i. der Seiten des ersten und zweiten Quadrats, und der Nenner 4 ist die Seite des dritten Quadrats 16.

Wenn dir also die Aufgabe gestellt ist, drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs die Produkte je zweier derselben gleich gegebenen Quadratzahlen, wie 4, 9 und 16 seien, so hast du die Seite von 4 mit derjenigen von 9 zu multiplizieren; das giebt 6. Diese Zahl dividierst du durch die Seite des Quadrats 16, so erhältst du $x = \frac{6}{4}$. Nun dividierst du wieder das Quadrat 4 durch $\frac{6}{4}$; da ergiebt sich $\frac{16}{6}$. Ebenso wird das Quadrat 9 durch $\frac{6}{4}$ dividiert; das giebt 6. Es wird also die erste Zahl $\frac{6}{4}$, die zweite $\frac{16}{6}$, die dritte 6 sein*).

---

11. Aufgabe. Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs das Produkt je zweier derselben sowohl bei Addition, als auch bei Subtraktion der Summe der drei Zahlen ein Quadrat wird.

Auflösung. Wir suchen zuerst wieder drei rechtwinklige Dreiecke von gleichem Flächeninhalt. Nachdem wir diese gefunden haben, nehmen wir die Quadrate der Hypotenusen, also die Zahlen 3364, 5476, 12 769, und hierauf ermitteln wir, wie oben gelehrt worden ist, drei Zahlen von der Beschaffenheit, dafs die Produkte je zweier derselben gleich gegebenen Quadratzahlen seien. Diese Quadratzahlen sollen die oben gefundenen sein. Wir haben aber diese gewählt, weil jedes dieser drei Quadrate sowohl bei Addition, als auch bei Subtraktion von 3360 ein Quadrat bleibt. 3360 ist nämlich der vierfache Flächeninhalt jedes der Dreiecke. Deshalb drücke ich die gesuchten Zahlen durch x aus, und zwar die erste durch $\frac{4292}{113}x$, die zweite durch $\frac{4181}{29}x$, die dritte durch $\frac{3277}{37}x$; denn die Produkte der Koeffizienten je zweier dieser Zahlen geben die oben angegebenen Quadrate.

---

*) Sind a^2, b^2, c^2 die gegebenen Quadratzahlen, so ergiebt sich

$$\mathrm{I} = \frac{ab}{c}, \quad \mathrm{II} = \frac{ac}{b}, \quad \mathrm{III} = \frac{bc}{a}.$$

Nun erübrigt noch, dafs die Summe dieser drei Zahlen gleich $3360x^2$ sei. Wir bringen die Zahlen auf einen Nenner, nämlich auf 121 249. Die erste Zahl wird $\frac{4\,605\,316}{121\,249}x$, die zweite $\frac{17\,480\,761}{121\,249}x$, die dritte $\frac{10\,738\,729}{121\,249}x$ sein. Es ist also die Summe der drei Zahlen

$$\frac{32\,824\,806}{121\,249}x = 3360x^2,$$

oder, wenn alles mit 121 249 multipliziert wird,

$$32\,824\,806\,x = 407\,396\,640x^2,$$

und daraus ergiebt sich

$$x = \frac{32\,824\,860}{407\,396\,640};$$

durch Einsetzung dieses Wertes in die Ausdrücke für die gesuchten Zahlen erhält man für die erste Zahl [Der auch sonst verstümmelte Text bricht ab]*).

---

12. Aufgabe. Die Zahl 1 in zwei Teile von der Beschaffenheit zu teilen, dafs, wenn zu jedem Teile eine gegebene Zahl addiert wird, die erhaltenen Summen Quadrate seien.

Es darf jedoch die gegebene Zahl weder ungerade sein, noch darf der Quotient, den man erhält, wenn man das um 1 vermehrte Doppelte derselben durch

---

*) Es seien c_1, c_2, c_3 die Hypotenusen der rechtwinkligen Dreiecke, welche dieselbe Fläche $i = \frac{a_1 b_1}{2} = \frac{a_2 b_2}{2} = \frac{a_3 b_3}{2}$ haben. Wir bezeichnen die gesuchten Zahlen mit I, II, III und setzen

$$\mathrm{I} = \frac{c_1 c_2}{c_3}x, \quad \mathrm{II} = \frac{c_2 c_3}{c_1}x, \quad \mathrm{III} = \frac{c_1 c_3}{c_2}x,$$
$$\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} = 4ix^2.$$

Dann ist

$$\mathrm{I}\,.\,\mathrm{II} \pm (\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}) = c_2{}^2x^2 \pm 4ix^2 =$$
$$(a_2{}^2 + b_2{}^2 \pm 2a_2b_2)x^2 = (a_2 \pm b_2)^2x^2,$$

also eine Quadratzahl. Ebenso zeigt man, dafs jeder der Ausdrücke $\mathrm{II}\,.\,\mathrm{III} \pm (\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III})$, $\mathrm{I}\,.\,\mathrm{III} \pm (\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III})$ ein Quadrat ist. Zur Bestimmung von x hat man dann noch die Gleichung

$$\left(\frac{c_1 c_2}{c_3} + \frac{c_2 c_3}{c_1} + \frac{c_1 c_3}{c_2}\right)x = 4ix^2.$$

die gröſste in ihm als Faktor enthaltene Quadratzahl dividiert, durch eine Primzahl von der Form $4n - 1$ teilbar sein.

Auflösung. Es wird verlangt, daſs zu jedem Teile 6 addiert werde, und daſs die erhaltenen Summen Quadrate seien.

Da wir wollen, daſs die Zahl 1 in zwei Teile geteilt, daſs jeder Teil um 6 vergröſsert werde, und daſs jede so gebildete Summe ein Quadrat sei, so muſs die Summe dieser beiden Quadrate 13 sein. Wir haben also 13 in zwei Quadrate zu teilen, von denen jedes gröſser als 6 ist. Wenn ich also 13 in zwei Quadrate teile, deren Differenz kleiner als 1 ist, so ist damit die Aufgabe gelöst.

Dies zu thun, nehme ich die Hälfte von 13, d. i. $6\frac{1}{2}$, und untersuche, welchen Bruch ich zu $6\frac{1}{2}$ zu addieren habe, um ein Quadrat zu erhalten. Ich multipliziere alles mit 4 und untersuche, welchen quadratischen Bruch ich zu 26 zu addieren habe, damit ein Quadrat entstehe. Der zu addierende Bruch sei $\frac{1}{x^2}$; dann soll $26 + \frac{1}{x^2}$, oder, wenn alles mit x^2 multipliziert wird, $26x^2 + 1$ ein Quadrat werden. Die Seite dieses Quadrats sei $5x + 1$. Dann ergiebt sich $x = 10$, also $x^2 = 100$. Der quadratische Bruch wird folglich $\frac{1}{100}$ sein. Zu 26 ist daher $\frac{1}{100}$, zu $6\frac{1}{2}$ folglich $\frac{1}{400}$ zu addieren, und es entsteht dadurch das Quadrat über der Seite $\frac{51}{20}$.

Wir müssen daher 13 [$= 3^2 + 2^2$] so in zwei Quadrate zerlegen, daſs die Seite eines jeden möglichst nahe an $\frac{51}{20}$ liegt. Zu diesem Zwecke suche ich, um welche Zahl 3 verringert und 2 vergröſsert werden muſs, damit man $\frac{51}{20}$ erhält.

Ich bilde also zwei Quadrate, das eine über $11x + 2$, das andere über $3 - 9x$ $\left[\text{da } \frac{51}{20} = 3 - \frac{9}{20} = 2 + \frac{11}{20} \text{ ist}\right]$. Die Summe dieser beiden Quadrate wird $202x^2 + 13 - 10x$ sein. Wird dies gleich 13 gesetzt, so ergiebt sich $x = \frac{5}{101}$. Es wird also die Seite des einen Quadrats $\frac{257}{101}$, die des andern $\frac{258}{101}$ sein, und wenn man von dem Quadrate jeder dieser Seiten

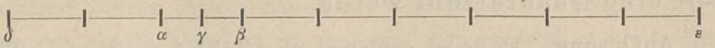
6 subtrahiert, so ergeben sich die gesuchten Teile der Zahl 1, nämlich $\frac{5358}{10\,201}$ und $\frac{4843}{10\,201}$. Dafs jeder dieser Teile, wenn er um 6 vermehrt wird, ein Quadrat giebt, liegt auf der Hand*).

---

*) Der Text der Determination dieser Aufgabe ist durchaus verstümmelt und hat alle Schriftsteller über Diophant beschäftigt. Ich habe dieselbe einfach so gegeben, wie sie Fermat formuliert; denn so ist sie wirklich „allgemein und schliefst alle unbrauchbaren Zahlen aus". Worauf es dabei ankommt, dafs nämlich, wenn die gegebene Zahl a ist, sich $2a + 1$ in zwei Quadrate zerfällen lassen müsse, hatte auch Bachet erkannt. Aber welche Zahlen diese Zerlegung zulassen und welche nicht, das blieb ihm verborgen. In seiner Polemik gegen Xylander, der behauptet hatte, die gegebene Zahl müsse das Doppelte einer Primzahl sein, sagt Bachet, die Zahl 10 sei von dieser Beschaffenheit, und doch lasse sich die Zahl 21, da sie weder eine Quadratzahl sei, noch aus zwei ganzen Quadraten bestehe, wie er glaube, nicht in zwei gebrochene Quadrate zerfällen. Fermat bemerkt dazu: „Die Zahl 21 kann nicht in zwei gebrochene Quadrate zerfällt werden. Das kann ich leicht beweisen. Allgemein kann eine durch 3 teilbare Zahl weder in zwei ganze, noch in zwei gebrochene Quadrate zerlegt werden, wofern sie nicht durch 9 teilbar ist." Allgemeiner äufsert sich Fermat darüber in einem Briefe an Roberval (Opera, p. 161). Bei der grofsen Wichtigkeit des Gegenstandes lasse ich die betreffende Stelle des Briefes folgen:

— — „Hierauf werde ich Ihnen sagen, dafs Herr Frenicle in mir seit einiger Zeit die Lust erweckt hat, die Geheimnisse der Zahlen zu ergründen, worin er, wie mir scheint, aufserordentlich bewandert ist. Ich habe ihm die schönen Sätze über die mit der Einheit beginnenden geometrischen Progressionen geschickt, welche ich nicht blofs gefunden, sondern auch bewiesen habe, obgleich der Beweis derselben ziemlich verborgen ist; ich bitte Sie, den Beweis zu versuchen, da Sie die Sätze gesehen haben. Aber das Folgende habe ich seitdem in Betreff der 12. Aufgabe des 5. Buches von Diophant entdeckt; ich habe darin ergänzt, was Bachet gesteht nicht gewufst zu haben, und habe zugleich den verdorbenen Text Diophants wieder hergestellt. Es würde zu weit führen, Ihnen die Begründung zu geben; es genügt, dafs Sie meinen Satz sehen, und dafs ich Sie an das erinnere, was ich früher schon bewiesen habe, nämlich dafs eine Zahl von der Form $4n - 1$ weder eine Quadratzahl, noch

13. Aufgabe*).



Die Zahl 1 so in zwei Teile zu teilen, dafs, wenn zu dem einen Teil eine gegebene Zahl, zum andern

---

die Summe von zwei — ganzen oder gebrochenen — Quadratzahlen ist. Damals blieb ich bei diesem Resultat stehen, obgleich es viele Zahlen giebt, welche zwar die Form $4n + 1$ haben, aber doch keine Quadratzahlen sind und sich auch nicht in zwei Quadrate zerfällen lassen, wie 21, 33, 77, u. s. w. Dies läfst Bachet in Betreff der Zerlegung von 21 in zwei Quadrate sagen: quod quidem impossibile est, ut reor, cum is neque quadratus sit, neque suapte natura compositus ex duobus quadratis. Der Ausdruck „ut reor", den Bachet gebraucht, drückt offenbar aus, dafs er den Beweis dieser Unmöglichkeit nicht gewufst hat. Ich habe denselben endlich gefunden und die Sache allgemein in den folgenden Satz zusammengefafst:

Wenn eine gegebene Zahl durch die gröfste in ihr als Faktor enthaltene Quadratzahl dividiert wird, und es zeigt sich, dafs der Quotient durch eine Primzahl von der Form $4n - 1$ teilbar ist, so ist die gegebene Zahl weder eine Quadratzahl, noch läfst sie sich in zwei — ganze oder gebrochene — Quadrate zerlegen. Es sei z. B. 84 gegeben; das gröfste darin enthaltene Quadrat ist 4; der Quotient 21 ist durch 3, wie auch durch 7 teilbar, und da jeder dieser Faktoren die Form $4n - 1$ hat, so behaupte ich, dafs 84 weder eine Quadratzahl ist, noch sich in zwei — ganze oder gebrochene — Quadrate zerlegen läfst.

Es sei 77 gegeben; das gröfste darin enthaltene Quadrat ist 1; der Quotient 77, der in diesem Falle gleich der gegebenen Zahl ist, ist durch zwei Primzahlen der Form $4n - 1$, nämlich 7 und 11 teilbar. Ich behaupte daher, dafs 77 weder eine Quadratzahl ist, noch sich in zwei — ganze oder gebrochene — Quadrate zerlegen läfst.

---

*) Dies ist die einzige Aufgabe in Diophants Arithmetik, in welcher die lineare Methode Euklids angewendet wird. Die Aufgabe wird aus diesem Grunde von Hankel (p. 159) für eingeschoben erklärt.

Teil eine zweite gegebene Zahl addiert wird, jeder Teil eine Quadratzahl werde.

Auflösung. Es wird verlangt, die Zahl 1 so in zwei Teile zu teilen, daſs, wenn der eine Teil um 2, der andere um 6 vermehrt wird, jeder Teil ein Quadrat werde.

Wir nehmen eine Einheit $\alpha\beta$ und teilen sie im Punkte γ. Zu dem Teil $\alpha\gamma$ fügen wir zwei Einheiten, nämlich $\alpha\delta$, zu dem Teil $\beta\gamma$ sechs Einheiten, nämlich $\beta\varepsilon$ hinzu. Dann ist also jeder der Teile $\gamma\delta$, $\gamma\varepsilon$ eine Quadratzahl. Da nun $\alpha\beta = 1$ und die Summe $\alpha\delta + \beta\varepsilon = 8$ ist, so ist die ganze Strecke $\delta\varepsilon = 9$, und diese Zahl soll man in zwei Quadratzahlen, nämlich $\gamma\delta$ und $\gamma\varepsilon$ zerlegen. Da aber das eine dieser Quadrate gröſser als $\alpha\delta$, d. i. 2, und zugleich kleiner als $\beta\delta$, d. i. 3 ist, so bin ich dazu geführt, ein gegebenes Quadrat 9 in zwei Quadrate $\gamma\delta$ und $\gamma\varepsilon$ zu teilen, so daſs das eine, nämlich $\gamma\delta$, gröſser als 2 und kleiner als 3 wird. Wenn dann $\gamma\delta$ gefunden ist, so wird, da $\alpha\delta = 2$, also gegeben ist, auch $\alpha\gamma$ ermittelt sein. Es ist aber $\alpha\beta = 1$, und daher ist dann auch $\beta\gamma$, folglich auch der Punkt γ bestimmt, in welchem die Einheit geteilt wird.

Jetzt wollen wir das Verfahren im Einzelnen darstellen. Es sei das eine Quadrat, nämlich dasjenige, welches zwischen 2

Ich gestehe Ihnen offen, daſs ich in der Zahlenlehre nichts gefunden habe, was mir so sehr gefallen hat, wie der Beweis dieses Satzes, und es wird mich freuen, wenn Sie sich bemühen, ihn zu finden, wäre es auch nur um zu erfahren, ob ich meine Erfindung mehr schätze, als sie es verdient.

Ich habe sodann den folgenden Satz bewiesen, welcher zur Auffindung der Primzahlen dient:

Wenn eine Zahl die Summe zweier Quadrate ist, die prim zu einander sind, so ist sie durch keine Primzahl von der Form $4n - 1$ teilbar.

Wenn man z. B. 1 zu einem geraden Quadrat, etwa zu 10 000 000 000 addiert, was 10 000 000 001 giebt, so ist diese Summe durch keine Primzahl von der Form $4n - 1$ teilbar. Will man also untersuchen, ob dieselbe eine Primzahl ist, so hat man sie nicht erst durch 3, 7, 11, u. s. w. zu dividieren.“ — — —

und 3 liegen mufs, gleich x^2; dann wird das andere $9 - x^2$ sein, und dieser Ausdruck mufs ein Quadrat werden. Denselben zu einem Quadrat zu machen, ist an sich zwar leicht; man mufs es aber so einrichten, dafs x^2 zwischen 2 und 3 zu liegen kommt. Wir nehmen zwei Quadrate, von denen das eine etwas gröfser als 2, das andere etwas kleiner als 3 ist; solche Quadrate sind z. B. $\frac{289}{144}$ und $\frac{361}{144}$.

Wenn wir es nun so einrichten, dafs x^2 zwischen diese beiden Quadrate fällt, so ist die Aufgabe gelöst. Es mufs dann aber die Seite von x^2, d. i. x, gröfser als $\frac{17}{12}$ und kleiner als $\frac{19}{12}$ sein. Wir müssen also, wenn wir $9 - x^2$ zu einem Quadrat machen, x so bestimmen, dafs es gröfser als $\frac{17}{12}$ und zugleich kleiner als $\frac{19}{12}$ werde.

Wenn wir aber $9 - x^2$ zu einem Quadrat machen, so setzen wir die Seite dieses Quadrats gleich 3, vermindert um x mit einem gewissen Koeffizienten. Dann finden wir, dafs x gleich dem Sechsfachen einer gewissen Zahl ist, dividiert durch das um 1 vermehrte Quadrat dieser Zahl. Es kommt also darauf an, eine Zahl zu suchen, deren Sechsfaches, wenn es durch das um 1 vermehrte Quadrat der Zahl dividiert wird, einen Quotienten giebt, der gröfser als $\frac{17}{12}$ und zugleich kleiner als $\frac{19}{12}$ ist.

Diese gesuchte Zahl sei x. Es soll also $\frac{6x}{x^2+1}$ gröfser als $\frac{17}{12}$ und kleiner als $\frac{19}{12}$ werden. Nun ist der Bruch $\frac{17}{12}$ gleich dem Verhältnis von 17 zu 12. Folglich mufs das Verhältnis von $6x$ zu $x^2 + 1$ gröfser sein als das Verhältnis 17 zu 12; somit mufs auch das Produkt aus $6x$ und 12, d. i. $72x$ gröfser sein als das Produkt aus $x^2 + 1$ und 17, d. i. $17x^2 + 17$.

Ich multipliziere den halben Koeffizienten von x mit sich selbst; das giebt 1296. Von dieser Zahl subtrahiere ich das Produkt aus dem Koeffizienten von x^2 und der von x unabhängigen Zahl, also 289; dann bleibt der Rest 1007. Die Seite des Quadrats, welches gleich dieser Zahl ist, ist nicht grösser als 31 [liegt zwischen 31 und 32], und wenn ich den halben Koeffizienten von x zu dieser Seite addiere, so erhalte ich eine Zahl, die nicht grösser als 67 ist [zwischen 67 und 68 liegt]. Wird endlich durch den Koeffizienten von x^2 dividiert, so ergiebt sich, dass x nicht grösser als $\frac{67}{17}$ sein kann. Ebenso finden wir, da das Verhältnis von $6x$ zu x^2+1 kleiner sein muss als dasjenige von 19 zu 12, dass x nicht kleiner als $\frac{69}{19}$ sein kann. x kann aber auch nicht grösser als $\frac{67}{17}$ sein. Es sei daher $x = 3\frac{1}{2}$.

Ich bilde also das Quadrat über der Seite $3 - 3\frac{1}{2}x$; dies Quadrat wird $12\frac{1}{4}x^2 + 9 - 21x$ sein. Wird dasselbe gleich $9 - x^2$ gesetzt, so ergiebt sich

$$x = \frac{84}{53}.$$

Daraus folgt

$$x^2 = \frac{7056}{2809},$$

und wenn hiervon 2 subtrahiert wird, so bleibt der eine Teil der Zahl 1, nämlich $\frac{1438}{2809}$; der andere Teil wird dann $\frac{1371}{2809}$ sein, und durch diese Werte wird der Aufgabe genügt*).

---

*) Bei der Eigentümlichkeit des angewandten Lösungsverfahrens und den Schwierigkeiten, die es bietet, scheint es mir am Platze, die Lösung in aller Kürze zu wiederholen:

Wenn die gesuchten Teile der Einheit mit x und $1 - x$ bezeichnet werden, so soll $x + 2 = p^2$, $1 - x + 6 = q^2$ sein, wo p^2, q^2 rationale Brüche sein werden. Da nun $1 > x > 0$ ist, so muss offenbar p^2 zwischen 2 und 3 liegen. Weiter folgt $p^2 + q^2 = 9$, $q^2 = 9 - p^2$. Wir haben also den Ausdruck $9 - p^2$ in ein Quadrat zu verwandeln, dabei aber im Auge zu behalten, dass $2 < p^2 < 3$ werde.

Statt 2 und 3 wählt Diophant zwei Quadratzahlen, von denen die eine etwas grösser als 2, die andere etwas kleiner als 3 ist, als engere Grenzen für p^2, um mittels derselben Grenzen für p zu erhalten; als untere Grenze nimmt er $\frac{289}{144}$, als obere $\frac{361}{144}$; dann liegt also p zwischen $\frac{17}{12}$ und $\frac{19}{12}$.

14. Aufgabe. Die Zahl 1 in drei Teile von der Beschaffenheit zu teilen, dafs jeder Teil, wenn er um eine und dieselbe gegebene Zahl vermehrt wird, ein Quadrat bilde.

Jetzt verwandelt er den Ausdruck $9 - p^2$ auf die gewöhnliche Weise in ein Quadrat. Er setzt

$$9 - p^2 = (3 - kp)^2,$$

wo k vorläufig unbestimmt bleibt, und erhält

$$p = \frac{6k}{1 + k^2}.$$

k ist nun erstens so zu wählen, dafs

$$\frac{6k}{1 + k^2} > \frac{17}{12}$$

sei. Daraus folgt

$$17k^2 - 72k < -17$$

$$(17k)^2 - 72(17k) < -289$$

$$(17k)^2 - 72(17k) + 1296 < 1007$$

$$17k - 36 < 31{,}7\ldots$$

$$k < \frac{67{,}7\ldots}{17},$$

d. i.

$$k < 3{,}9\ldots$$

Zweitens soll $\frac{6k}{1 + k^2} < \frac{19}{12}$ sein; daraus würde sich

$$k > 3{,}5\ldots$$

ergeben; Diophant setzt aber $k = 3{,}5$. Obwohl nun diese Zahl kleiner als die untere Grenze ist, ist sie doch nicht falsch, da die gewählte obere Grenze von p^2, nämlich $\left(\frac{19}{12}\right)^2$ nicht nahe genug an 3 liegt. Hätte man z. B. $\frac{400}{144}$, welches auch noch < 3 ist, als Grenze für p^2, also $\frac{20}{12}$ als Grenze für p genommen, so würde sich für k die Zahl 3,2 ... als untere Grenze ergeben haben. Die Annahme $k = 3{,}5$ ist somit zulässig; auf Grund derselben findet man nun leicht

$$p = \frac{84}{53}, \qquad p^2 = \frac{7056}{2809},$$

$$x = p^2 - 2 = \frac{1438}{2809}, \quad 1 - x = \frac{1371}{2809}.$$

Es darf jedoch die gegebene Zahl weder 2, noch ein um 2 vermehrtes Vielfache von 8 sein.

Auflösung. Es wird verlangt, die Zahl 1 in drei Teile zu teilen und jeden Teil um 3 zu vermehren; dadurch soll jeder Teil eine Quadratzahl werden.

Es ist also wieder 10 in drei Quadrate von der Beschaffenheit zu zerlegen, dafs jedes derselben gröfser als 3 sei. Wenn ich also 10 nach der Methode der Beinahegleichheit*) in drei Quadrate teile, von denen jedes gröfser als 3 ist, und von jedem dieser Quadrate 3 subtrahiere, so werde ich die drei Teile erhalten, in welche die Zahl 1 zerlegt werden soll.

Wir nehmen also den dritten Teil von 10, d. i. $3\frac{1}{3}$, und untersuchen, welcher quadratische Bruch zu $3\frac{1}{3}$ zu addieren ist, damit ein Quadrat entstehe. Wird alles mit 9 multipliziert, so haben wir zu sehen, welchen quadratischen Bruch wir zu 30 zu addieren haben, damit die Summe ein Quadrat werde. Der zu addierende Bruch sei $\frac{1}{x^2}\cdot$ Wird alles mit x^2 multipliziert, so ist $30x^2 + 1$ in ein Quadrat zu verwandeln. Dieser Ausdruck sei gleich dem Quadrat über der Seite $5x + 1\cdot$ Dann ist das Quadrat

$$25x^2 + 10x + 1 = 30x^2 + 1,$$

und daraus ergiebt sich

$$x = 2, \quad x^2 = 4, \quad \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}\cdot$$

Wenn aber 30 um $\frac{1}{4}$ vergröfsert wird, so wird $3\frac{1}{3}$ um $\frac{1}{36}$ vermehrt, und durch diese Addition entsteht das Quadrat $\frac{121}{36}\cdot$ Man mufs daher 10 in drei Quadrate von der Beschaffenheit teilen, dafs die Seite jedes derselben nahezu gleich $\frac{11}{6}$ ist.

Nun besteht aber 10 aus den beiden Quadraten 9 und 1. Wir teilen jetzt 1 in zwei Quadrate, nämlich $\frac{9}{25}$ und $\frac{16}{25}$, so

*) Das Wesen dieser eigentümlichen Methode (παρισότης oder παρισότητος ἀγωγή) ist in V, 12 und V, 14 von Diophant selbst hinlänglich deutlich aus einander gesetzt.

dafs 10 die Summe der drei Quadrate 9, $\frac{9}{25}$, $\frac{16}{25}$ ist. Dann haben wir es so einzurichten, dafs die Seite jedes dieser Quadrate nahezu gleich $\frac{11}{6}$ werde. Die Seiten sind aber 3, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ oder, wenn alles mit 30 multipliziert wird, 90, 24, 18. Durch dieselbe Multiplikation wird $\frac{11}{6}$ zu 55. Wir müssen also jede Seite nahezu gleich 55 zu machen suchen.

Zu diesem Zwecke setzen wir die Seite des ersten Quadrats gleich $3 - 35x$, die des zweiten gleich $31x + \frac{4}{5}$, die des dritten gleich $37x + \frac{3}{5}$,

$$\left[\text{da } \frac{55}{30} = 3 - \frac{35}{30} = \frac{4}{5} + \frac{31}{30} = \frac{3}{5} + \frac{37}{30} \text{ ist}\right].$$

Die Summe der Quadrate über diesen Seiten wird dann $3555x^2 + 10 - 116x$ sein. Wird dieser Ausdruck gleich 10 gesetzt, so ergiebt sich

$$x = \frac{116}{3555}.$$

Wenn man diesen Wert in die Ausdrücke für die Seiten einsetzt, so erhält man die Seiten der Quadrate, folglich auch die Quadrate selbst, und das übrige ist an sich klar*).

*) $$\left[3 - 35x = \frac{1321}{711}, \quad 31x + \frac{4}{5} = \frac{1288}{711},\right.$$
$$37x + \frac{3}{5} = \frac{1285}{711};$$
$$(3 - 35x)^2 = \frac{1\,745\,041}{505\,521}, \quad \left(31x + \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{1\,658\,944}{505\,521},$$
$$\left(37x + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{1\,651\,225}{505\,521};$$
$$\mathrm{I} = (3 - 35x)^2 - 3 = \frac{228\,478}{505\,521}$$
$$\mathrm{II} = \left(31x + \frac{4}{5}\right)^2 - 3 = \frac{142\,381}{505\,521}$$
$$\left.\mathrm{III} = \left(37x + \frac{3}{5}\right)^2 - 3 = \frac{134\,662}{505\,521}.\right]$$

Von besonderem Interesse bei dieser Aufgabe ist die Determination. Die gegebene Zahl a mufs so beschaffen sein, dafs sich

15. Aufgabe. Die Zahl 1 in drei Teile von der Beschaffenheit zu teilen, daſs, wenn man den ersten um

---

$3a + 1$, falls es nicht selbst eine Quadratzahl ist, in zwei oder drei Quadrate zerlegen läſst. Diophant sagt nun, a dürfe nicht von der Form $8k + 2$ sein, wo k jede ganze Zahl, die Null nicht ausgeschlossen, sein kann. Für dieses a wird $3a + 1 = 24k + 7$. Nun ist der Divisor 3 hier ohne Bedeutung, da

$$24k + 7 \equiv 3k' + 1 \pmod{3}$$

ist und Zahlen von der Form $3k' + 1$ Quadrate, wie auch Summen von zwei oder drei Quadraten sein können. Diophant schlieſst also nur alle Zahlen a aus, für welche $3a + 1$ von der Form $8k + 7$ ist, und da es auch unbrauchbare Zahlen giebt, die nicht diese Form haben, so ist seine Determination nicht genügend. Das hat schon Bachet bemerkt, aber erst Fermat hat eine erschöpfende Determination gegeben; er sagt:

„Die Determination Bachets ist ungenügend, ja seine Versuche sind nicht einmal genau; denn die Zahl 37 fällt auf die Grenze, nicht in die Regel.

Die richtige Determination muſs so abgefaſst werden:

Man bilde zwei geometrische Reihen mit dem Exponenten 4, von denen die eine mit 1, die andere mit 8 beginnt; die letztere schreibe man in folgender Weise unter die erstere:

1, 4, 16, 64, 256, 1024, 4 096, ...

8, 32, 128, 512, 2048, 8192, 32 768, ...

Nun betrachten wir zuerst das erste Glied der zweiten Reihe, d. i. 8; über demselben steht 1; also darf die gegebene Zahl weder das Doppelte von 1 sein, noch ein Vielfaches von 8 um das Doppelte von 1 übertreffen.

Sodann betrachten wir das zweite Glied der zweiten Reihe, d. i. 32. Nehmen wir die darüber stehende Zahl 4 doppelt, so erhalten wir 8; werden alle vorhergehenden Glieder der ersten Reihe (in diesem Falle ist das nur 1) dazu gezählt, so giebt das 9. Wir nehmen daher die beiden Zahlen 32 und 9 und sagen: Die gegebene Zahl darf weder 9 sein, noch um 9 gröſser als ein Vielfaches von 32.

Weiter nehmen wir das dritte Glied der zweiten Reihe, d. i. 128. Das Doppelte der in der ersten Reihe darüber stehenden Zahl 16 ist 32; werden alle vorhergehenden Glieder der oberen Reihe, nämlich 1 und 4, eine gegebene Zahl, den zweiten um eine zweite gegebene Zahl und ebenso den dritten um eine dritte gegebene Zahl vermehrt, jeder Teil ein Quadrat werde.

Auflösung. Die gegebenen Zahlen seien 2, 3 und 4. Dann läuft die Aufgabe wieder darauf hinaus, die Zahl 10 in drei Quadrate zu zerlegen, von denen das erste gröfser als 2, das zweite gröfser als 3, das dritte gröfser als 4 ist. Wenn wir also die Einheit halbieren und jede der drei Zahlen um $\frac{1}{2}$ vermehren, so haben wir ein Quadrat zu suchen, welches

---

dazu gezählt, so erhält man 37. Wir nehmen daher die Zahlen 128 und 37 und sagen: Die gegebene Zahl darf weder 37, noch um 37 gröfser sein als ein Vielfaches von 128.

Betrachten wir weiter das vierte Glied der zweiten Reihe, so finden wir auf die dargelegte Weise die Zahlen 512 und 149; die gegebene Zahl darf also weder 149 sein, noch ein Vielfaches von 512 um 149 übertreffen.

Diese Methode, welche unverändert und ins Unendliche fortgesetzt anzuwenden ist, hat weder Diophant allgemein angegeben, noch Bachet entdeckt, dessen Versuche sogar, wie ich schon oben bemerkt habe, fehlerhaft sind, nicht blofs hinsichtlich der Zahl 37, welche innerhalb der Grenzen der Versuche liegt, die er für genau hält, sondern auch hinsichtlich der Zahl 149 und anderer."

Da über $2 \cdot 4^{n+1}$ die Potenz 4^n steht, und da

$$1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{n-1} = \frac{4^n - 1}{3}$$

ist, so sagt Fermat:

Die gegebene Zahl a kann weder

$$2 \cdot 4^n + \frac{4^n - 1}{3} = \frac{7 \cdot 4^n - 1}{3}$$

noch

$$2k \cdot 4^{n+1} + \frac{7 \cdot 4^n - 1}{3} = \frac{24k \cdot 4^n + 7 \cdot 4^n - 1}{3}$$

sein; also darf $3a + 1$ nicht die Form

$$4^n(24k + 7)$$

haben.

grölser als 2 und kleiner als $2\frac{1}{2}$ ist, ein zweites Quadrat, welches grölser als 3 und kleiner als $3\frac{1}{2}$ ist, endlich ein drittes Quadrat, welches zwischen 4 und $4\frac{1}{2}$ liegt.

Es kommt somit alles darauf an, die Zahl 10, welche die Summe von zwei Quadraten ist, in zwei andere Quadrate zu zerlegen, von denen das eine grölser als 2 und kleiner als $2\frac{1}{2}$ ist; wenn wir von diesem Quadrat 2 subtrahieren, so erhalten wir den einen der gesuchten Teile der Zahl 1. Weiter haben wir das andere der beiden Quadrate [aus denen 10 besteht] aufs Neue in zwei Quadrate zu zerlegen, von denen das eine grölser als 3 und kleiner als $3\frac{1}{2}$ ist; wird von diesem Quadrat 3 subtrahiert, so ergiebt sich der zweite gesuchte Teil der Zahl 1. Auf diese Weise finden wir dann auch den dritten Teil*).

---

*) Das erste der drei Quadrate, in welche 10 zerfällt werden soll, mufs zwischen 2 und 3 liegen, also in der Nähe von $2\frac{1}{2}$. Wir suchen daher $2\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}$ oder auch $4\left(2\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}\right)$, d. i. $10+\left(\frac{2}{x}\right)^2$, oder, wenn $\frac{1}{y}$ statt $\frac{2}{x}$ geschrieben wird, $10+\frac{1}{y^2}$ zu einem Quadrat zu machen. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$10y^2+1=(3y+1)^2;$$

dann ergiebt sich $y=6$, $y^2=36$, $x^2=144$, also

$$2\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}=\frac{361}{144}=\left(\frac{19}{12}\right)^2.$$

Dies ist ein Näherungswert der Seite des ersten Quadrats.

Weiter suchen wir, da 10 die Summe zweier Quadratzahlen, nämlich 1 und 9, ist, einen Näherungswert für die Seite eines zweiten (nicht des gesuchten zweiten) Quadrats, welches mit dem ersten zusammen 10 beträgt. Zu diesem Zwecke machen wir

$$7\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2} \quad \text{oder} \quad 4\left(7\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}\right)=30+\left(\frac{2}{x}\right)^2$$

oder, wenn $\frac{1}{y}$ statt $\frac{2}{x}$ geschrieben wird, $30+\frac{1}{y^2}$ zu einem Quadrat, indem wir

$$30y^2+1=(5y+1)^2$$

setzen. Es ergiebt sich

16. Aufgabe. Eine gegebene Zahl in drei Zahlen von der Beschaffenheit zu teilen, dafs die Summe je zweier dieser Teile ein Quadrat sei.

$$y = 2, \quad y^2 = 4, \quad x^2 = 16,$$

und es ist

$$7\tfrac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{121}{16} = \left(\frac{11}{4}\right)^2 = \left(\frac{33}{12}\right)^2.$$

Ein Näherungswert der Seite des zweiten Quadrats ist also $\frac{33}{12}$.

Da nun $10 = 1^2 + 3^2$ und $\frac{19}{12} = 1 + \frac{7}{12}$, $\frac{33}{12} = 3 - \frac{3}{12}$ ist, so setzen wir

$$(1 + 7x)^2 + (3 - 3x)^2 = 10$$

und erhalten leicht

$$x = \frac{2}{29},$$

$$(1 + 7x)^2 = \left(1 + \frac{14}{29}\right)^2 = \left(\frac{43}{29}\right)^2 = \frac{1849}{841}$$

$$(3 - 3x)^2 = \left(3 - \frac{6}{29}\right)^2 = \left(\frac{81}{29}\right)^2 = \frac{6561}{841}.$$

Das erste Quadrat ist also $\frac{1849}{841}$; dasselbe liegt in der That zwischen 2 und 3.

Den Rest von 10, d. i. das Quadrat $\frac{6561}{841}$, haben wir jetzt in zwei Quadrate zu teilen, von denen das eine, das wir x^2 nennen wollen, zwischen 3 und 4 liegt. Statt dieser Grenzen nehmen wir $\frac{49}{16}$ und $\frac{64}{16}$. Es soll also

$$\frac{49}{16} < x^2 < \frac{64}{16},$$

oder

$$\frac{7}{4} < x < \frac{8}{4}$$

sein. Das dritte gesuchte Quadrat wird $\frac{6561}{841} - x^2$ sein. Setzen wir

$$\frac{6561}{841} - x^2 = \left(\frac{81}{29} - kx\right)^2,$$

so ergiebt sich

$$x = \frac{162k}{29\,(1 + k^2)}.$$

Nun mufs k so gewählt werden, dafs erstens

$$\frac{162k}{29\,(1 + k^2)} > \frac{7}{4}$$

Auflösung. Die gegebene Zahl sei 10. Da nun die gröfste und die mittlere der gesuchten Zahlen, ebenso die mittlere und die kleinste, endlich auch die dritte und die erste Zahl je ein Quadrat bilden, so ist die doppelte Summe der drei Zahlen gleich der Summe von drei Quadraten, von denen jedes kleiner als 10 ist. Die doppelte Summe der drei Zahlen ist aber gleich 20. Wir müssen also 20 in drei Quadrate zerlegen, von denen jedes kleiner als 10 ist.

Nun besteht 20 aus zwei Quadraten, nämlich 16 und 4, und wenn wir eins der gesuchten Quadrate gleich 4 setzen, so haben wir noch 16 in zwei Quadrate zu teilen, von denen jedes kleiner als 10 ist. Wir haben aber schon [in V, 13] gelernt, ein gegebenes Quadrat [hier 16] so in zwei Quadrate zu teilen, dafs das eine [folglich auch das andere] gröfser als 6 und kleiner als 10 sei. Wird also 16 in dieser Weise zerlegt, so ist 20 in drei Quadrate geteilt, von denen jedes

---

ist; daraus folgt

$$k < 2{,}8\ldots$$

Zweitens mufs

$$\frac{162k}{29(1+k^2)} < 2$$

sein; daraus folgt

$$k > 2{,}3\ldots$$

Wir dürfen also

$$k = 2{,}5$$

annehmen. Für diesen Wert ist

$$x = \frac{1620}{841}, \quad x^2 = \frac{2\,624\,400}{707\,281}$$

$$\frac{6561}{841} - x^2 = \frac{2\,893\,401}{707\,281}.$$

Die drei gesuchten Quadrate sind also

$$\frac{1849}{841}, \quad \frac{2\,624\,400}{707\,281}, \quad \frac{2\,893\,401}{707\,281},$$

und wenn wir vom ersten 2, vom zweiten 3, vom dritten 4 subtrahieren und alle Resultate gleichnamig machen, so erhalten wir die gesuchten Zahlen, nämlich

$$\mathrm{I} = \frac{140\,447}{707\,281}, \quad \mathrm{II} = \frac{502\,557}{707\,281}, \quad \mathrm{III} = \frac{64\,277}{707\,281}.$$

kleiner als 10 ist, und wenn wir jedes dieser Quadrate von 10 subtrahieren, so bilden die Summen je zweier der erhaltenen Reste Quadrate*).

---

17. Aufgabe. Eine gegebene Zahl so in vier Teile zu teilen, dafs die Summe je dreier derselben ein Quadrat sei.

Auflösung. Die gegebene Zahl sei 10. Da nun die Summe der ersten Zahl und der beiden folgenden ein Quadrat giebt, und da dasselbe der Fall ist mit der Summe der zweiten Zahl und der beiden folgenden, der Summe der dritten Zahl und der beiden folgenden, sowie endlich der Summe der vierten Zahl und der beiden folgenden, so wird die dreifache Summe der vier Zahlen gleich einer Summe von vier Quadraten sein.

---

*) Die Zahl 16 soll in zwei Quadrate geteilt werden,

$$16 = x^2 + (16 - x^2),$$

von denen jedes kleiner als 10 ist; also mufs das eine, etwa x^2, zwischen 6 und 10 oder auch zwischen $\frac{25}{4}$ und 9, also x zwischen $\frac{5}{2}$ und 3 liegen.

Um nun $16 - x^2$ zu einem Quadrat zu machen, setzen wir

$$16 - x^2 = (4 - kx)^2$$

und erhalten

$$x = \frac{8k}{1 + k^2}.$$

Über k haben wir so zu verfügen, dafs erstens

$$\frac{8k}{1 + k^2} > \frac{5}{2}$$

und zweitens

$$\frac{8k}{1 + k^2} < 3$$

werde. Dadurch ergeben sich für k die Grenzen 2,84 . . . und 2,21 . . . . Wir dürfen also z. B. $k = 2{,}5$ annehmen. Für diesen Wert ist $x = \frac{80}{29}$, $x^2 = \frac{6400}{841}$, $16 - x^2 = \frac{7056}{841}$, und wir erhalten für die gesuchten Zahlen

$$\mathrm{I} = 6 = \frac{5046}{841}, \quad \mathrm{II} = \frac{2010}{841}, \quad \mathrm{III} = \frac{1354}{841}.$$

Die dreifache Summe der vier Zahlen ist aber 30. Wir haben also die Zahl 30 in vier Quadrate zu zerlegen, von denen jedes kleiner als 10 ist. Das geschieht auf folgende Weise:

Wenn wir jedes der vier Quadrate möglichst nahe an $7\frac{1}{2}$ bringen und darauf jedes dieser Quadrate von 10 subtrahieren, so erhalten wir die gesuchten Zahlen. Wenn ich aber die Zahl 30 betrachte, so sehe ich, dafs sie die Summe von 16, 9, 4 und 1 ist. Von diesen vier Quadraten nehmen wir 9 und 4, da jedes derselben schon kleiner als 10 ist. Dann erübrigt noch, 17 in zwei Quadrate zu zerlegen, von denen jedes kleiner als 10 sei.

Wenn wir nun, wie wir es schon gelernt haben, 17 so in zwei Quadrate teilen, dafs das eine dieser Quadrate gröfser als $8\frac{1}{2}$ und kleiner als 10 ist, so wird jedes derselben kleiner als 10 sein, und wenn wir jedes dieser Quadrate von 10 subtrahieren, so werden wir die beiden noch fehlenden gesuchten Zahlen erhalten. Zwei dieser Zahlen hatten wir nämlich schon ermittelt, da sich für die eine 6, für die andere 1 ergeben hat. Die Aufgabe ist somit gelöst*).

---

*) Um 17 in zwei Quadrate zu zerlegen, von denen jedes kleiner als 10 ist, machen wir

$$8\tfrac{1}{2} + \frac{1}{x^2} \quad \text{oder} \quad 4\left(8\tfrac{1}{2} + \frac{1}{x^2}\right) = 34 + \left(\frac{2}{x}\right)^2$$

oder, wenn $\frac{2}{x} = \frac{1}{y}$ gesetzt wird, $34 + \frac{1}{y^2}$ zu einem Quadrat. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$34y^2 + 1 = (6y - 1)^2$$

und erhalten

$$y = 6, \quad y^2 = 36, \quad \frac{1}{x^2} = \frac{1}{144}.$$

In der That ist

$$8\tfrac{1}{2} + \frac{1}{144} = \frac{1225}{144} = \left(\frac{35}{12}\right)^2,$$

also $\frac{35}{12}$ ein Näherungswert der Seite jedes der beiden gesuchten Quadrate.

Da nun $17 = 1^2 + 4^2$ und

$$\frac{35}{12} = 1 + \frac{23}{12} = 4 - \frac{13}{12}$$

18. Aufgabe. Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs der Kubus ihrer Summe, wenn er um jede der Zahlen vermehrt wird, wieder einen Kubus giebt.

Auflösung. Wir setzen die Summe der drei gesuchten Zahlen gleich x und die erste dieser Zahlen gleich $7x^3$, die zweite gleich $26x^3$, die dritte gleich $63x^3$. Dann ist schon die Bedingung erfüllt, dafs der Kubus der Summe der drei Zahlen, wenn er um jede derselben vermehrt wird, einen Kubus bildet.

Es erübrigt noch, dafs die Summe der drei Zahlen gleich x sei. Diese Summe ist aber $96x^3$. Es soll also

$$96x^3 = x$$

sein. Wird alles durch x dividiert, so folgt

$$96x^2 = 1.$$

Nun ist 1 eine Quadratzahl; wenn daher auch 96 ein Quadrat wäre, so wäre die Aufgabe gelöst.

Ich untersuche nun, auf welche Weise 96 entstanden ist. 96 ist die Summe von drei Zahlen, von denen jede, wenn sie um 1 vermehrt wird, einen Kubus bildet. Die Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, drei Zahlen von der Beschaffenheit zu suchen, dafs eine jede, wenn sie um 1 vermehrt wird, einen Kubus gebe, und dafs zugleich ihre Summe ein Quadrat sei.

---

ist, so setzen wir

$$17 = (1 + 23x)^2 + (4 - 13x)^2$$

und erhalten

$$x = \frac{29}{349}.$$

Daraus ergiebt sich dann

$$1 + 23x = \frac{1016}{349}, \qquad (1 + 23x)^2 = \frac{1\,032\,256}{121\,801}.$$

$$4 - 13x = \frac{1109}{349}, \qquad (4 - 13x)^2 = \frac{1\,038\,361}{121\,801}.$$

Die beiden letzten gesuchten Teile von 10 sind somit

$$\text{III} = \frac{185\,754}{121\,801}, \qquad \text{IV} = \frac{179\,649}{121\,801}.$$

Wird die Seite des ersten Kubus gleich $x+1$, die des zweiten gleich $2-x$, die des dritten gleich 2 gesetzt, so wird der erste Kubus x^3+3x^2+3x+1, der zweite $6x^2+8-x^3-12x$, der dritte 8 sein. Ich subtrahiere von jedem dieser Kuben 1 und setze die erste Zahl gleich x^3+3x^2+3x, die zweite gleich $6x^2+7-x^3-12x$, die dritte gleich 7. Dann erübrigt noch, daſs die Summe dieser Zahlen ein Quadrat bilde. Diese Summe ist aber

$$9x^2+14-9x.$$

Wird dieser Ausdruck gleich dem Quadrat über der Seite $3x-4$ gesetzt, so ergiebt sich

$$x=\frac{2}{15}.$$

Folglich wird die erste der gesuchten Zahlen $\frac{1538}{3375}$, die zweite $\frac{18\,577}{3375}$, die dritte 7 sein.

Jetzt gehe ich zur ursprünglich gestellten Aufgabe zurück und setze die erste Zahl gleich $\frac{1538}{3375}x^3$, die zweite gleich $\frac{18\,577}{3375}x^3$, die dritte gleich $7x^3$ und die Summe der Zahlen gleich x. Dann wird

$$\frac{43\,740}{3375}x^3=x.$$

Wenn man den Koeffizienten von x^3 durch 15 hebt und beide Seiten durch x dividiert, so folgt

$$2916x^2=225,$$

und daraus erhält man

$$x=\frac{15}{54}.$$

Diesen Wert setzt man in die Ausdrücke für die gesuchten Zahlen ein, und dann ist die Aufgabe gelöst*).

*) Wird $\mathrm{I}=(a^3-1)x^3$, $\mathrm{II}=(b^3-1)x^3$, $\mathrm{III}=(c^3-1)x^3$ und $\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}=x$ gesetzt, so ergiebt sich die Gleichung

(1) $$(a^3+b^3+c^3-3)x^2=1;$$

es ist also $a^3+b^3+c^3-3$ in ein Quadrat zu verwandeln.

Diophant stellt nun eine Abhängigkeit zwischen a, b, c fest, und zwar in der Weise, daſs aus dem in ein Quadrat zu verwandelnden Ausdruck die dritte Potenz der Unbekannten verschwindet und der Koeffizient der zweiten Potenz eine Quadratzahl wird,

19. Aufgabe. Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daſs der Kubus ihrer Summe, wenn er um jede der Zahlen vermindert wird, einen Kubus giebt.

Auflösung. Wir setzen wieder die Summe der Zahlen gleich x, die erste Zahl gleich $\frac{7}{8}x^3$, die zweite gleich $\frac{26}{27}x^3$ und die dritte gleich $\frac{63}{64}x^3$. Dann erübrigt noch, daſs die Summe dieser Zahlen gleich x sei. Es wird also

$$\frac{4877}{1728}x^3 = x,$$

oder, wenn beide Seiten durch x dividiert werden,

$$\frac{4877}{1728}x^2 = 1.$$

Da nun 1 eine Quadratzahl ist, so müſste auch der Koeffizient von x^2 ein Quadrat sein. Wie ist aber dieser Koeffizient entstanden? Dadurch, daſs wir die Summe von drei Kuben, von denen jeder kleiner als 1 ist, von 3 subtrahierten. Es kommt also darauf an, drei Kuben zu finden, von denen jeder kleiner als 1 ist, und deren Summe, wenn sie von 3 subtrahiert wird, ein Quadrat als Rest liefert.

Wir wollen, daſs jeder Kubus kleiner als 1 sei; wenn wir es also so einrichten, daſs die drei Kuben zusammen kleiner als 1 sind, so wird jeder einzelne gewiſs kleiner als 1 sein. Es muſs dann das [bei der Subtraktion von 3] übrig bleibende Quadrat gröſser als 2 sein. Setzen wir dieses übrig bleibende Quadrat gleich $2\frac{1}{4}$, so haben wir $\frac{3}{4}$ in drei Kuben zu zerlegen. Wir erweitern diesen Bruch in der Weise, daſs

---

Das geschieht z. B., wenn a als die Unbekannte angesehen, $b = 3\beta^2 - a$ gesetzt wird, wo β eine beliebige Zahl ist, und für c eine beliebige bestimmte Zahl γ genommen wird. Dann wird

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3 = 9\beta^2 a^2 - 27\beta^4 a + (27\beta^6 + \gamma^3 - 3).$$

Dieser Ausdruck ist auf die gewöhnliche Weise in ein Quadrat zu verwandeln. Dadurch wird a, also auch b bestimmt, und durch Einsetzung der Werte von a, b, c in Gleichung (1) erhält man einen rationalen Wert von x, der seinerseits rationale Werte von I, II, III liefert.

sein Nenner eine Kubikzahl, etwa 216 wird. Dann müssen wir 162 in drei Kuben zerlegen. 162 ist die Summe aus der Kubikzahl 125 und der Differenz der Kuben 64 und 27. Wir haben aber in den Porismen den Satz, dafs die Differenz zweier Kuben immer auch eine Summe von zwei Kuben ist.

Jetzt gehen wir zu der ursprünglich gestellten Aufgabe zurück, nehmen jede der gefundenen Kubikzahlen und subtrahieren dieselbe von 1. Die Reste nehmen wir als die [Koeffizienten von x^3 in den Ausdrücken der] gesuchten Zahlen an, deren Summe wir gleich x setzen; dann trifft es schon zu, dafs der Kubus der Summe der drei Zahlen, wenn er um jede der Zahlen vermindert wird, einen Kubus giebt.

Es erübrigt noch, dafs die Summe der drei Zahlen gleich x sei. Diese Summe ist aber $2\frac{1}{4}x^3$. Wird dieser Ausdruck gleich x gesetzt, so ergiebt sich

$$x = \frac{2}{3},$$

und diesen Wert hat man in die Ausdrücke für die gesuchten Zahlen einzusetzen*).

---

*) Setzen wir

$$\mathrm{I} = \frac{a^3-1}{a^3}x^3, \quad \mathrm{II} = \frac{b^3-1}{b^3}x^3, \quad \mathrm{III} = \frac{c^3-1}{c^3}x^3,$$

$\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} = x$, so ergiebt sich die Gleichung

$$(1) \qquad \left(\frac{a^3-1}{a^3} + \frac{b^3-1}{b^3} + \frac{c^3-1}{c^3}\right)x^2 = 1;$$

es ist also der Ausdruck

$$3 - \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right)$$

in ein Quadrat zu verwandeln, und zwar mufs dieses Quadrat < 3 sein.

Diophant nimmt für dasselbe willkürlich $2\frac{1}{4}$; dann ist

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{4}.$$

Wenn also $\frac{3}{4}$ in drei Kuben zerfällt wird, so ist die Aufgabe gelöst. Nun ist

$$\frac{3}{4} = \frac{162}{216} = \frac{125}{216} + \frac{64}{216} - \frac{27}{216},$$

20. Aufgabe. Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs eine jede, wenn sie um den Kubus der

---

also nach IV, 2, Anmerkung, 1. Aufgabe von Bachet, p. 177

$$\frac{3}{4} = \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \left(\frac{101}{182}\right)^3 + \left(\frac{20}{273}\right)^3.$$

Wir erhalten daher, da $x^3 = \frac{8}{27}$ ist,

$$\mathrm{I} = \frac{91}{216} \cdot \frac{8}{27}, \quad \mathrm{II} = \frac{4\,998\,267}{6\,028\,568} \cdot \frac{8}{27}, \quad \mathrm{III} = \frac{20\,338\,417}{20\,346\,417} \cdot \frac{8}{27}.$$

An Bachets Besprechung der Lösung dieser Aufgabe knüpft Fermat die folgende Bemerkung, die wohl verstanden werden wird, auch wenn ich von einer Wiedergabe der Bachet'schen Erörterungen Abstand nehme.

„Diophant giebt die Art der Lösung nicht an, oder der griechische Text ist verdorben. Bachet glaubt, Diophant sei [bei der Wahl von $2\frac{1}{4}$] durch den Zufall unterstützt worden, was ich aber nicht zugebe, da ich die Methode Diophants nicht für schwer zu finden halte. Es ist ein Quadrat zu suchen, welches zwischen 2 und 3 liegt, und welches, wenn es von 3 subtrahiert wird, einen Rest giebt, der sich in drei Kuben zerfällen läfst. Wird die Seite des gesuchten Quadrats gleich einem um 1 verminderten beliebigen Vielfachen von x, z. B. gleich $x - 1$ gesetzt, so giebt die Subtraktion des Quadrats von 3 den Rest $2 - x^2 + 2x$. Die drei Kuben, deren Summe diesem Ausdruck gleich sein soll, hat man so zu bilden, dafs zuletzt eine Gleichung zwischen zwei allgemeinen Ausdrücken bleibt, in welchen die Exponenten von x um 1 verschieden sind. Dies kann auf unzählig viele Arten bewirkt werden. Der eine dieser Kuben habe die Seite $1 - \frac{1}{3}x$, die andere (damit x in der Summe beider den Koeffizienten 2 erhalte) $1 + x$; dann ist die Summe der beiden ersten Kuben $2 + 2x + 3\frac{1}{3}x^2 + \frac{26}{27}x^3$. Wird dies von $2 + 2x - x^2$ subtrahiert, so bleibt für den dritten Kubus $-4\frac{1}{3}x^2 - \frac{26}{27}x^3$. Die Seite dieses dritten Kubus darf also nur ein Vielfaches von x und mufs mit dem Zeichen — behaftet sein. Auch macht es keine Schwierigkeit, den Koeffizienten von x hierbei so zu wählen, dafs der Wert von $\frac{1}{3}x$ positiv und kleiner als 1

Summe der drei Zahlen vermindert wird, einen Kubus als Rest gebe.

Auflösung. Wir setzen wieder die Summe der drei Zahlen gleich x, die erste Zahl gleich $2x^3$, die zweite gleich $9x^3$, die dritte gleich $28x^3$. Dann erübrigt noch, dafs die Summe der Zahlen x sei. Diese Summe ist aber $39x^3$. Es mufs daher

$$39x^3 = x$$

sein, oder, wenn beide Seiten durch x dividiert werden,

$$39x^2 = 1.$$

Wenn also der Koeffizient 39 von x^2 eine Quadratzahl wäre, so wäre die Aufgabe gelöst. 39 ist aber die um 3 vermehrte Summe von drei Kubikzahlen. Wir müssen also drei Kubikzahlen suchen, deren Summe, wenn man sie um 3 vermehrt, eine Quadratzahl wird.

Wir nehmen an, die Seite des ersten Kubus sei x, die des zweiten $3 - x$, die des dritten irgend eine bestimmte

---

werde, und dafs die Seite des dritten Kubus kleiner als die des zweiten sei. Nachdem dies geschehen, wird der erste der Kuben offenbar kleiner als 1 sein, wie es verlangt wurde. Da nun der zweite Kubus gröfser als 1 und der dritte mit dem Zeichen — behaftet ist, so ist offenbar noch die Differenz zwischen dem zweiten und dritten in die Summe zweier Kuben zu verwandeln, aus welchem Grunde sowohl bei Diophant, wie bei mir dies die zweite Operation ist, die vorgenommen werden mufs.

Wir haben aber, sagt Diophant, in den Porismen den Satz, dafs die Differenz zweier beliebigen Kuben gleich der Summe zweier Kuben ist.

Hier bleibt Bachet wieder stecken, und da ihm die Porismen Diophants fehlen, so behauptet er, diese zweite Aufgabe bedürfe einer Determination. Er lehrt nämlich die Differenz zweier Kuben nur unter der Bedingung in die Summe zweier Kuben verwandeln, dafs der gröfsere der gegebenen Kuben mehr als das Doppelte des kleineren beträgt. Denn er weifs nicht, wie er freimütig gesteht, dafs die Differenz zweier ganz beliebigen Kuben in die Summe zweier Kuben verwandelt werden kann. Ich habe oben bei der 2ten Aufgabe des 4ten Buches glücklich das Verfahren entdeckt, diese und die übrigen Aufgaben dieser Art allgemein zu lösen."

Zahl, etwa 1. Dann ist die Summe der drei Kuben gleich $9x^2 + 28 - 27x$. Wird hierzu 3 addiert, so erhalten wir $9x^2 + 31 - 27x$. Diesen Ausdruck setzen wir gleich dem Quadrat über der Seite $3x - 7$, so ergiebt sich

$$x = \frac{6}{5}.$$

Das ist die Seite des ersten Kubus; die des zweiten ist $\frac{9}{5}$, die des dritten 1. Den Kubus jeder dieser Seiten vermehre ich um 1 und setze, indem ich zur ursprünglichen Aufgabe übergehe, jede der gesuchten Zahlen gleich x^3 mit je einer der erhaltenen Zahlen als Koeffizienten. Dann erübrigt noch, dafs die Summe der drei Zahlen gleich x werde. Es wird also

$$11\tfrac{14}{25}x^3 = x,$$

und daraus folgt

$$x = \frac{5}{17}.$$

Dieser Wert ist in die Ausdrücke für die gesuchten Zahlen einzusetzen*).

---

21. Aufgabe. Drei Zahlen zu finden, die so beschaffen sind, dafs ihre Summe ein Quadrat ist, und dafs der Kubus ihrer Summe, wenn er um jede der Zahlen vermehrt wird, ebenfalls ein Quadrat giebt.

Auflösung. Damit die Summe der drei Zahlen ein Quadrat sei, setzen wir dieselbe gleich x^2; ferner nehmen wir an,

---

*) Wird $\mathrm{I} = (a^3 + 1)x^3$, $\mathrm{II} = (b^3 + 1)x^3$, $\mathrm{III} = (c^3 + 1)x^3$ und $\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} = x$ gesetzt, so ergiebt sich wie in V, 18, dafs

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3$$

in ein Quadrat verwandelt werden mufs. Um diesen Ausdruck zu einer Funktion zweiten Grades für eine Unbekannte, etwa a, zu machen und dabei zu bewirken, dafs der Koeffizient von a^2 eine Quadratzahl werde, setzen wir $b = 3\beta^2 - a$ und c gleich irgend einer bestimmten Zahl γ, so wird

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3 = 9\beta^2 a^2 - 27\beta^4 a + (27\beta^6 + \gamma^3 + 3);$$

hat man diesen Ausdruck in ein Quadrat verwandelt und dadurch a, b bestimmt, so giebt die Gleichung $\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} = x$ den Wert von x.

die erste der gesuchten Zahlen sei $3x^6$, die zweite $8x^6$, die dritte $15x^6$. Dann ist die Bedingung schon erfüllt, dafs der Kubus der Summe der Zahlen, wenn er um jede der Zahlen vermehrt wird, ein Quadrat gebe.

Es erübrigt noch, dafs die Summe der Zahlen gleich x^2 sei. Ihre Summe ist aber $26x^6$. Wird

$$26x^6 = x^2$$

gesetzt und beiderseits durch x^2 dividiert, so folgt

$$26x^4 = 1.$$

Nun ist 1 eine Quadratzahl, deren Seite ebenfalls ein Quadrat ist. Daher müfste auch $26x^4$ ein Biquadrat sein. Der Koeffizient 26 von x^4 ist aber die Summe dreier Zahlen, von denen jede, wenn sie um 1 vermehrt wird, eine Quadratzahl giebt. Es kommt also darauf an, drei Zahlen zu suchen, von denen jede, wenn sie um 1 vermehrt wird, ein Quadrat giebt, und deren Summe ein Biquadrat ist.

Wir setzen die eine der gesuchten Zahlen gleich $x^4 - 2x^2$, die zweite gleich $x^2 + 2x$, die dritte gleich $x^2 - 2x$. Jede dieser Zahlen bildet bei Addition von 1 ein Quadrat, und da die Summe derselben aufserdem ein Biquadrat ist, so ist die Aufgabe durch allgemeine Zahlenausdrücke gelöst.

Wird $x = 3$ angenommen, so wird die eine der gesuchten Zahlen 63, die zweite 15, die dritte 3.

Jetzt gehen wir zur ursprünglich gestellten Aufgabe zurück und setzen wieder die Summe der drei Zahlen gleich x^2, die erste Zahl gleich $63x^6$, die zweite gleich $15x^6$, die dritte gleich $3x^6$. Da nun die Summe der Zahlen x^2 sein soll, so mufs

$$81x^6 = x^2$$

sein, und daraus folgt

$$x = \frac{1}{3}.$$

Wie man weiter zu verfahren hat, liegt auf der Hand*).

---

*) Wird $\mathrm{I} = (a^2 - 1)x^6$, $\mathrm{II} = (b^2 - 1)x^6$, $\mathrm{III} = (c^2 - 1)x^6$ und $\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} = x^2$ gesetzt, so ergiebt sich

$$(a^2 + b^2 + c^2 - 3)x^4 = 1.$$

Es ist also $a^2 + b^2 + c^2 - 3$ zu einem Biquadrat zu machen. Zu diesem Zwecke setzt Diophant

22. Aufgabe. Drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, dass ihre Summe eine Quadratzahl ist, und dass der Kubus ihrer Summe ebenfalls ein Quadrat wird, wenn man jede der Zahlen davon subtrahiert.

[Die Lösung dieser Aufgabe fehlt im Original. Wie Nesselmann (p. 410 ff.) überzeugend nachweist, sind hier ausserdem noch zwei Aufgaben mit ihren Lösungen und der Wortlaut einer dritten Aufgabe:

Drei Zahlen zu finden, die so beschaffen sind, dass ihre Summe gleich einer gegebenen Zahl ist, und dass der Kubus ihrer Summe, wenn er um jede der Zahlen vermindert wird, ein Quadrat giebt.

vom Schreiber weggelassen worden und gleich die Lösung dieser letzteren (weggelassenen) Aufgabe in noch dazu verstümmelter Form gegeben. Diese letztere Aufgabe soll uns also hier beschäftigen.]

Auflösung. [Die gegebene Zahl sei 2. Da also die Summe der gesuchten Zahlen 2 ist, so ist] der Kubus ihrer Summe 8. Dieser soll ein Quadrat geben, wenn er um jede der Zahlen vermindert wird. [Wenn wir also 24 um die Summe der drei Zahlen, d. i. 2, vermindern, so werden wir die Summe dreier Quadrate erhalten. Somit ist 22 die Summe von drei Quadraten, und man sieht leicht, dass jedes derselben zwischen 6 und 8 liegen muss.] Wir haben daher 22 in drei Quadrate zu zerfällen, von denen jedes [kleiner als 8 und]

$$a^2 = (u^2-1)^2 = u^4 - 2u^2 + 1$$
$$b^2 = (u+1)^2 = u^2 + 2u + 1$$
$$c^2 = (u-1)^2 = u^2 - 2u + 1,$$

wo u unbestimmt bleibt; dann wird

$$a^2 + b^2 + c^2 - 3 = u^4 \quad \text{und} \quad x = \frac{1}{u},$$

also

$$\mathrm{I} = \frac{(u^2-1)^2 - 1}{u^6}, \quad \mathrm{II} = \frac{(u+1)^2 - 1}{u^6}, \quad \mathrm{III} = \frac{(u-1)^2 - 1}{u^6};$$

z. B. ist für $u = 3$

$$\mathrm{I} = \frac{63}{729}, \quad \mathrm{II} = \frac{15}{729}, \quad \mathrm{III} = \frac{3}{729}.$$

größer als 6 ist. Wenn wir dann jedes dieser Quadrate von 8 subtrahieren, so erhalten wir die drei gesuchten Zahlen. Wie man aber 22 in drei Quadrate zerlegt, von denen jedes zwischen 6 und 8 liegt, ist schon gezeigt worden *).

---

23. Aufgabe. Einen gegebenen Bruch so in drei Brüche zu zerlegen, dass jeder derselben, wenn er um den Kubus ihrer Summe vermindert wird, ein Quadrat bilde.

Auflösung. Der gegebene Bruch sei $\frac{1}{4}$. Derselbe soll auf die vorgeschriebene Weise in drei Brüche zerlegt werden. Es soll also jeder der letzteren, wenn er um $\frac{1}{64}$ vermindert wird, ein Quadrat geben. Folglich wird die Summe der

---

*) Um die Aufgabe im Sinne Diophants zu Ende zu führen, untersuchen wir, welchen quadratischen Bruch wir zu $\frac{22}{3}$ oder $\frac{66}{9}$, also zu 66 zu addieren haben, um ein Quadrat zu erhalten, d. h. für welchen Wert von x der Ausdruck $66 + \frac{1}{x^2}$, also auch $66x^2 + 1$ ein Quadrat wird. Setzen wir

$$66x^2 + 1 = (1 + 8x)^2,$$

so ergiebt sich

$$x = 8, \quad x^2 = 64.$$

Es ist also 66 um $\frac{1}{64}$ und daher $7\frac{1}{3}$ um $\frac{1}{576}$ zu vermehren, um ein Quadrat zu geben. In der That ist $7\frac{1}{3} + \frac{1}{576} = \left[\frac{65}{24}\right]^2$.

Da weiter $22 = 3^2 + 3^2 + 2^2$ und $65 - 48 = 17$, $72 - 65 = 7$ ist, so haben wir

$$22 = (3 - 7x)^2 + (3 - 7x)^2 + (2 + 17x)^2$$

zu setzen und erhalten

$$x = \frac{16}{387}.$$

Es sind also die Seiten der gesuchten Quadrate $\frac{1049}{387}$, $\frac{1049}{387}$, $\frac{1046}{387}$, die Quadrate selbst $\frac{1\,100\,401}{149\,769}$, $\frac{1\,100\,401}{149\,769}$, $\frac{1\,094\,116}{149\,769}$, und die gesuchten Zahlen $\frac{97\,751}{149\,769}$, $\frac{97\,751}{149\,769}$, $\frac{104\,036}{149\,769}$.

Brüche, wenn man sie um $\frac{3}{64}$ vermindert, gleich der Summe von drei Quadraten, und wenn ich zu jedem dieser Quadrate $\frac{1}{64}$ addiere, so werde ich die gesuchten Brüche erhalten. Das ist aber leicht. Es kommt nämlich nur darauf an, $\left[\frac{1}{4}-\frac{3}{64}=\right]\frac{13}{64}$ in drei Quadrate zu zerlegen, was keine Schwierigkeit macht*).

---

24. Aufgabe. Drei Quadratzahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs das Produkt derselben, wenn es um jede der Zahlen vermehrt wird, ein Quadrat bildet.

Auflösung. Wir setzen das Produkt der drei Zahlen gleich x^2 und suchen drei Quadrate, von denen jedes, wenn es um 1 vermehrt wird, wieder ein Quadrat giebt. Das kann vermittels jedes rechtwinkligen Dreiecks geschehen.

Ich wähle also drei rechtwinklige Dreiecke; wenn ich bei einem jeden derselben das Quadrat der einen Kathete durch das Quadrat der zweiten Kathete dividiere, so erhalte ich die verlangten Quadrate. [Nehme ich die Dreiecke mit beziehungsweise den Seiten 3, 4, 5; 5, 12, 13; 8, 15, 17], so wird das eine Quadrat $\frac{9}{16}x^2$, das zweite $\frac{25}{144}x^2$, das dritte $\frac{64}{225}x^2$ sein, und jedes derselben bleibt ein Quadrat, wenn es um x^2 vermehrt wird.

Nun soll noch das Produkt der drei Zahlen gleich x^2 sein. Dies Produkt ist aber $\frac{14\,400}{518\,400}x^6$. Das soll gleich x^2 sein. Wird alles durch x^2 dividiert, so folgt

$$\frac{14\,400}{518\,400}x^4 = 1.$$

---

*) Man erhält leicht

$$\frac{13}{64}=\frac{9}{64}+\frac{1}{25}+\frac{9}{400},$$

und daraus ergeben sich für die gesuchten Brüche die Werte $\frac{250}{1600}, \frac{89}{1600}, \frac{61}{1600}$.

Es müssen dann auch die Seiten beider Quadratzahlen einander gleich sein, also

$$\frac{120}{720}x^2 = 1.$$

Nun ist die Einheit eine Quadratzahl. Wenn daher auch $\frac{120}{720}x^2$ ein Quadrat wäre, so wäre die Aufgabe gelöst. Dem ist aber nicht so.

Die Aufgabe ist somit darauf zurückgeführt, drei rechtwinklige Dreiecke von der Beschaffenheit zu finden, daſs das Produkt aus den drei Loten, multipliziert mit dem Produkt aus den drei Basen derselben ein Quadrat bildet*). Dieses Quadrat wird also das Produkt aus den beiden Katheten des einen rechtwinkligen Dreiecks zum Faktor haben, und wenn wir alles durch das Produkt aus den Katheten eines der gefundenen Dreiecke dividieren, so erhalten wir das Produkt aus den Katheten des zweiten Dreiecks, multipliziert mit dem Produkt aus den Katheten des dritten. Wenn wir daher 3, 4, 5 als Seiten des ersten Dreiecks annehmen, so haben wir noch zwei rechtwinklige Dreiecke zu suchen, bei denen das Produkt aus den Katheten des einen das Zwölffache von dem Produkt der Katheten des andern ist. Es wird dann auch die Fläche des einen das Zwölffache der Fläche des andern sein. Wenn sie aber das Zwölffache sein muſs, so darf sie auch das Dreifache derselben sein. Solche Dreiecke sind nun aber leicht zu bestimmen, und man erhält als Seiten des einen 9, 40, 41, als Seiten des andern 8, 15, 17.

Nachdem wir die drei rechtwinkligen Dreiecke ermittelt haben, kehren wir zur ursprünglich gestellten Aufgabe zurück und setzen das erste gesuchte Quadrat gleich $\frac{9}{16}x^2$, das zweite gleich $\frac{64}{225}x^2$, das dritte gleich $\frac{81}{1600}x^2$. Wenn wir dann das Produkt der Zahlen gleich x^2 setzen, so erhalten wir für x einen rationalen Wert, der in die Ausdrücke für die Quadrate einzusetzen ist.

---

*) Wenn $\frac{a}{b}$ ein Quadrat ist, so muſs auch $\frac{a}{b} \cdot b^{2} = ab$ ein Quadrat sein, und umgekehrt.

$\left[\frac{729}{90\,000}x^6 = x^2, \ \frac{81}{10\,000}x^4 = 1, \ \frac{3}{10}x = 1, \ x = \frac{10}{3}\right.$; also sind die gesuchten Quadrate $\frac{25}{4}, \frac{256}{81}, \left.\frac{9}{16}\right]$.*)

*) Werden die gesuchten Quadratzahlen u^2, v^2, w^2 genannt, und sind a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3 beziehungsweise die Katheten und die Hypotenuse dreier rechtwinkligen Dreiecke, so setzt Diophant

$$u = \frac{a_1}{b_1}x, \qquad v = \frac{a_2}{b_2}x, \qquad w = \frac{a_3}{b_3}x$$

und $u^2v^2w^2 = x^2$. Dann ist

$$u^2v^2w^2 + u^2 = x^2 + \frac{a_1^{\,2}}{b_1^{\,2}}x^2 = \frac{c_1^{\,2}x^2}{b_1^{\,2}}, \text{ u. s. w.};$$

also hat man nur noch der Bedingung

$$\left(\frac{a_1\,a_2\,a_3}{b_1\,b_2\,b_3}\right)^2 x^6 = x^2 \quad \text{oder} \quad \frac{a_1\,a_2\,a_3}{b_1\,b_2\,b_3}\,x^2 = 1$$

zu genügen, und damit sich für x ein rationaler Wert ergebe, mufs $\frac{a_1\,a_2\,a_3}{b_1\,b_2\,b_3}$, also auch $a_1b_1a_2b_2a_3b_3$ eine Quadratzahl sein.

Anmerkung von Fermat:

„Ich will die Methode Diophants, welche Bachet nicht begreift, wieder herstellen und erläutern: Da das erste rechtwinklige Dreieck 3, 4, 5 und das aus seinen Katheten gebildete Rechteck gleich 12 ist, so haben wir, sagt Diophant, zwei rechtwinklige Deiecke von der Beschaffenheit zu suchen, dafs das Produkt aus den Katheten des einen das Zwölffache des Produkts aus den Katheten des andern sei. (Der Grund ist der, weil dann das Produkt aus den Katheten des einen in das Produkt aus den Katheten des andern eine Zahl liefert, welche eine 12 ähnliche Flächenzahl*) ist, so dafs durch Multiplikation derselben, wie die Aufgabe fordert, eine Quadratzahl entsteht.) Auf diese Weise, fährt Diophant fort, wird dann auch die Fläche des einen das Zwölffache der Fläche des andern sein. Diese Worte bedürfen keiner Erläuterung. Diophant fährt fort: Wenn sie aber das Zwölffache sein mufs, so darf sie auch das Dreifache sein.

*) Euklid VII, Erklärungen 16 und 21. Wenn zwei Zahlen einander vervielfältigen, so nennt man das Produkt aus denselben eine Flächenzahl und die Zahlen, welche einander vervielfältigen, Seiten derselben. — Ähnlich sind Flächenzahlen, welche proportionierte Seiten haben.

25. Aufgabe. Drei Quadratzahlen von der Beschaffenheit zu finden, dass das Produkt derselben, wenn es um jede der Zahlen vermindert wird, ein Quadrat giebt.

Denn wenn man 12 durch die Quadratzahl 4 dividiert, so erhält man 3, und beim Multiplizieren entsteht immer ein Quadrat, da der Quotient zweier Quadratzahlen eine Quadratzahl ist. Die weitere Lösung der Aufgabe giebt Diophant nicht; ich werde daher das Fehlende ergänzen. Es möge in diesem Falle das eine Dreieck vermittels der Zahlen 7 und 2, das andere vermittels 5 und 2 gebildet werden. Dann ist die Fläche des ersten Dreiecks [28, 45, 53] das Dreifache der Fläche des andern [20, 21, 29], und beide genügen der Aufgabe. Die allgemeine Regel, zwei rechtwinklige Dreiecke zu finden, deren Flächen in einem gegebenen Verhältnis zu einander stehen, ist folgende: Wenn sich das gröfsere Dreieck zum kleineren wie $R:S$ verhalten soll, so bilden wir das gröfsere Dreieck vermittels der Zahlen $2R+S$ und $R-S$, das kleinere vermittels $R+2S$ und $R-S$; oder auch das erste Dreieck vermittels $2R-S$ und $R+S$, das zweite vermittels $2S-R$ und $R+S$; oder auch das erste Dreieck vermittels $6R$ und $2R-S$, das zweite vermittels $4R+S$ und $4R-2S$; oder auch das erste Dreieck vermittels $R+4S$ und $2R-4S$, das zweite vermittels $6S$ und $R-2S$.

Aus dem Gesagten kann eine Methode entnommen werden, drei rechtwinklige Dreiecke zu finden, deren Flächen sich wie drei gegebene Zahlen verhalten, wofern nur die Summe zweier dieser Zahlen das Vierfache der dritten ist. Sind z. B. R, S, T die drei gegebenen Zahlen und $R+T=4S$, so bildet man die drei rechtwinkligen Dreiecke auf folgende Weise:

Das erste vermittels $R+4S$ und $2R-4S$, das zweite vermittels $6S$ und $R-2S$, das dritte vermittels $4S+T$ und $4S-2T$; dabei haben wir aber $R>T$ vorausgesetzt.

Hieraus läfst sich auch eine Methode entnehmen, drei rechtwinklige Dreiecke zu finden, deren Flächen ein rechtwinkliges Dreieck bilden*). Die Aufgabe läuft nämlich darauf hinaus, ein rechtwinkliges Dreieck von der

---

*) Das heifst hier, wie bei Diophant, dafs die Zahlen, welche die Gröfse der Flächen angeben, der Gleichung $x^2+y^2=z^2$ genügen.

Auflösung. Wir setzen das Produkt der gesuchten Zahlen gleich x^2 und drücken diese Zahlen selbst durch x^2 mit Koeffizienten aus, welche wir wieder mit Hülfe rechtwinkliger Dreiecke bilden. Die eine Zahl sei $\frac{16}{25}x^2$, die andere $\frac{25}{169}x^2$, die dritte $\frac{64}{289}x^2$. Dann ist die Bedingung erfüllt, dass das Produkt der Zahlen, d. i. x^2, wenn es um jede der Zahlen vermindert wird, ein Quadrat giebt.

Es erübrigt noch, dafs das Produkt der drei Zahlen gleich x^2 sei. Dies Produkt ist aber $\frac{25\,600}{1\,221\,025}x^6$. Wird dasselbe gleich x^2 gesetzt und alles durch x^2 dividiert, so folgt

$$\frac{25\,600}{1\,221\,025}x^4 = 1.$$

Nun ist 1 ein Quadrat, dessen Seite wieder ein Quadrat ist. Es müfste also auch $\frac{25\,600}{1\,221\,025}x^4$ ein Biquadrat sein.

Wir sind somit wieder zu der Aufgabe geführt, drei rechtwinklige Dreiecke von der Beschaffenheit zu finden, dafs das Produkt der drei Hypotenusen durch Multiplikation mit dem Produkt der drei Lote ein Quadrat werde*):

Beschaffenheit zu finden, dafs die Summe der Hypotenuse und der Basis das Vierfache des Lotes sei. Das ist aber leicht, und dieser Forderung genügt jedes Dreieck, welches dem Dreieck mit den Seiten 17, 15, 8 ähnlich ist. Von den drei verlangten Dreiecken wird das erste vermittels 49 und 2, das zweite vermittels 47 und 2, das dritte vermittels 48 und 1 gebildet.

Weiter ergiebt sich hieraus eine Methode, drei rechtwinklige Dreiecke zu finden, deren Flächen sich wie drei gegebene Quadrate verhalten, von denen zwei zusammen das Vierfache der dritten sind, und ebenso kann man auf diesem Wege drei rechtwinklige Dreiecke von derselben Fläche ermitteln.

Ja wir können sogar auf unendlich viele Arten zwei rechtwinklige Dreiecke bilden, deren Flächen in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen, indem wir die eine Verhältniszahl oder beide mit gegebenen Quadraten multiplizieren."

*) Die gewählten Dreiecke haben die Seiten 3, 4, 5; 12, 5,

Wenn jetzt alles durch das Produkt aus der Hypotenuse und dem Lote des einen Dreiecks dividiert wird, so mufs der Quotient das Produkt sein, welches erhalten wird, indem man das Produkt aus der Hypotenuse und dem Lot eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem Produkt aus der Hypotenuse und dem Lot eines andern Dreiecks multipliziert.

Das eine rechtwinklige Dreieck habe die Seiten 3, 4, 5; dann haben wir noch zwei rechtwinklige Dreiecke von der Beschaffenheit zu suchen, dass das Produkt aus der Hypotenuse und dem Lot des einen das 20fache des Produkts aus der Hypotenuse und dem Lot des andern sei. Wenn das eine Produkt aber das 20fache des andern sein muss, so darf es auch das Fünffache sein.

Solche Dreiecke zu erhalten ist aber leicht. [Gehen wir nämlich von dem Dreieck mit den Seiten 3, 4, 5 und von dem gröfseren mit den Seiten 5, 12, 13 aus, so können wir vermittels der Katheten jedes derselben ein neues rechtwinkliges Dreieck bilden; diese Dreiecke werden beziehungsweise die Seiten 7, 24, 25; 119, 120, 169 haben.] Jetzt kehren wir zu der ursprünglich gestellten Aufgabe zurück und setzen das Produkt der drei Quadratzahlen gleich x^2, diese selbst aber gleich $\frac{16}{25}x^2$, $\frac{576}{625}x^2$, $\frac{14\,400}{28\,561}x^2$.

Dann erübrigt noch, dafs das Produkt der Zahlen, d. i.

$$\frac{16.576.14\,400}{25.625.28\,561}x^6 = x^2$$

werde; wir dividieren beide Seiten durch x^2 und setzen die Seiten der beiden erhaltenen Quadrate einander gleich; dies giebt

$$\frac{4.24.120}{5.25.169}x^2 = 1,$$

und daraus folgt

$$x = \frac{65}{48}.$$

13; 15, 8, 17. Wenn nun $\frac{25\,600}{1\,221\,025}x^4 = 1$ ist, so mufs auch $\frac{160}{1105}x^2 = 1$ sein. Dann würde x rational werden, wenn $\frac{160}{1105} = \frac{4.5.8}{5.13.17}$, also auch $(4.5.8).(5.13.17)$ ein Quadrat wäre.

Durch Einsetzung dieses Wertes erhält man die gesuchten Quadratzahlen $\left[\frac{169}{144}, \frac{169}{100}, \frac{625}{676}\right]$ *).

---

*) Sind die gesuchten Quadratzahlen wieder u^2, v^2, w^2, so setzt Diophant unter Benutzung der Seiten

$$a_1, b_1, c_1; \quad a_2, b_2, c_2; \quad a_3, b_3, c_3$$

dreier rechtwinkligen Dreiecke

$$u = \frac{a_1}{c_1}x, \quad v = \frac{a_2}{c_2}x, \quad w = \frac{a_3}{c_3}x$$

und $u^2v^2w^2 = x^2$. Dann ist

$$u^2v^2w^2 - u^2 = x^2 - \frac{a_1{}^2}{c_1{}^2}x^2 = \frac{b_1{}^2x^2}{c_1{}^2}, \quad \text{u. s. w.}$$

Man hat also nur noch der Bedingung

$$\left(\frac{a_1\,a_2\,a_3}{c_1\,c_2\,c_3}\right)^2 x^6 = x^2 \quad \text{oder} \quad \frac{a_1\,a_2\,a_3}{c_1\,c_2\,c_3}x^2 = 1$$

zu genügen, und damit sich für x ein rationaler Wert ergebe, mufs $\frac{a_1\,a_2\,a_3}{c_1\,c_2\,c_3}$, also auch $a_1c_1a_2c_2a_3c_3$ eine Quadratzahl sein.

Anmerkung von Fermat:

„Bachet hat die Aufgabe 25 ebenso wie die vorhergehende verfehlt. Ich will Diophants Lösungsmethode erläutern und darlegen. Es sind zwei rechtwinklige Dreiecke von der Beschaffenheit zu suchen, dafs das Produkt aus der Hypotenuse und dem Lot des einen zum Produkt aus der Hypotenuse und dem Lot des andern in einem gegebenen Verhältnis stehe.

Diese Aufgabe hat mich lange gequält, und jeder, der sie in Angriff nimmt, wird finden, dafs sie wirklich eine sehr schwierige ist; aber zuletzt eröffnete sich mir doch eine allgemeine Methode zu ihrer Lösung.

Es sollen zwei rechtwinklige Dreiecke von der Beschaffenheit ermittelt werden, dafs das Rechteck aus der Hypotenuse und dem Lot des einen das Doppelte des Rechtecks aus der Hypotenuse und dem Lot des andern sei.

Bilden wir das eine dieser Dreiecke vermittels der Zahlen A und B, das andere vermittels A und D, so ist das Rechteck aus der Hypotenuse und dem Lot des ersten $B\,.\,2A^3 + B^3\,.\,2A$, das Rechteck aus der Hypotenuse und dem Lot des andern $D\,.\,2A^3 + D^3\,.\,2A$. Da nun

$$B\,.\,2A^3 + B^3\,.\,2A = 2(D\,.\,2A^3 + D^3\,.\,2A)$$

26. Aufgabe. Drei Quadratzahlen von der Beschaffenheit zu finden, daſs, wenn jede derselben um das Produkt der Zahlen vermindert wird, die entstandenen Reste Quadrate seien.

Auflösung. Wir setzen wieder das Produkt der drei Zahlen gleich x^2 und bilden die [Koeffizienten der] Zahlen

---

sein soll, so wird

$$B \,.\, A^3 + B^3 \,.\, A = D \,.\, 2A^3 + D^3 \,.\, 2A$$

sein. Wird beiderseits durch A dividiert, so folgt hieraus

$$B \,.\, A^2 + B^3 = D \,.\, 2A^2 + D^3 \,.\, 2$$

oder

$$2D^3 - B^3 = B \,.\, A^2 - 2D \,.\, A^2.$$

Wenn also

$$\frac{2D^3 - B^3}{B - 2D} \; [= A^2]$$

zu einem Quadrat gemacht wird, so wird die Aufgabe gelöst sein.

Wir haben also statt B und D zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu suchen, daſs, wenn man den doppelten Kubus der zweiten um den Kubus der ersten vermindert und die Differenz durch die Differenz zwischen der ersten und dem Doppelten der zweiten Zahl*) dividiert oder (was auf dasselbe hinausläuft) mit dieser Differenz multipliziert, ein Quadrat sich ergebe. Wird $D = x + 1$, $B = 1$ gesetzt, so ist

$$2D^3 - B^3 = 1 + 6x + 6x^2 + 2x^3,$$

$$2B - D = 1 - x.$$

Es soll also das Produkt aus $1 - x$ in $1 + 6x + 6x^2 + 2x^3$ zu einem Quadrat werden. Das Produkt ist aber gleich $1 + 5x - 4x^3 - 2x^4$. Wenn wir

$$1 + 5x - 4x^3 - 2x^4 = \left(\frac{5}{2}\,x + 1 - \frac{25}{8}\,x^2\right)^2$$

setzen, so wird x sofort rational bestimmt.

Das Verfahren [welches wir für das Verhältnis 2 : 1 befolgten] läſst sich für jedes andere Verhältnis anwenden.

---

*) Hier begeht Fermat eine Verwechselung, indem er statt $B - 2D$ im Folgenden $2B - D$ nimmt, wodurch die ganze Rechnung hinfällig wird. Brassinne's Versuch (p. 107), die Sache richtig zu stellen, ist verfehlt.

selbst vermittels dreier beliebigen rechtwinkligen Dreiecke. Dann werden wir auch hier dazu geführt, rechtwinklige Dreiecke von derselben Beschaffenheit wie in der vorhergehenden Aufgabe zu suchen. Wenn wir dieselben Dreiecke wie dort benutzen und das eine gesuchte Quadrat gleich $\frac{25}{16}x^2$, das zweite gleich $\frac{625}{576}x^2$, das dritte gleich $\frac{28\,561}{14\,400}x^2$ setzen, so ist die Bedingung erfüllt, dafs jede der Zahlen, wenn man sie um das Produkt derselben, d. i. x^2 vermindert, zu einem Qua-

---

Man hat statt der einen gesuchten Zahl die Summe aus A und dem Überschufs der gröfseren Verhältniszahl über die kleinere, statt der andern diesen Überschufs selbst zu setzen, wie wir es schon für das Verhältnis 2 : 1 gethan haben. Denn auf diese Weise wird das von der Unbekannten unabhängige Glied immer eine Quadratzahl werden, und die Gleichung wird leicht zu lösen sein. Hat man so zwei Zahlen gefunden, welche B und D ersetzen, so wird man zur ursprünglichen Aufgabe zurückgehen.

Als ich die vorstehende Anmerkung zur 25. Aufgabe wieder vornahm, schien es mir geraten, alles sofort wieder auszulöschen, weil diese Aufgabe gar nicht auf die von mir behandelte zurückgeführt werden kann. Da mir aber die Lösung einer andern Aufgabe, zu welcher ich das nicht hierher gehörige Problem behandelt habe, gelungen ist, so habe ich nichts Unnützes, sondern nur etwas am ungehörigen Orte gethan, und daher mag die Randbemerkung stehen bleiben.

Als ich die Aufgabe Diophants einer neuen Prüfung unterwarf und meine Methode sorgfältig überlegte, habe ich die Aufgabe endlich allgemein gelöst. Ich werde nur ein Beispiel mitteilen, aber Zahlen, welche selbst zur Genüge angeben, dafs ich die Lösung nicht dem Zufall, sondern der Kunst verdanke. In der Aufgabe Diophants sind zwei rechtwinklige Dreiecke von der Beschaffenheit zu suchen, dafs das Produkt aus der Hypotenuse und dem Lot des einen zum Produkt aus der Hypotenuse und dem Lot des andern sich wie 5 : 1 verhalte. Zwei solche Dreiecke sind folgende: Das erste hat die Hypotenuse 48 543 669 109, die Basis 36 083 779 309, das Lot 32 472 275 580, das zweite die Hypotenuse 42 636 752 938, die Basis 41 990 695 480, das Lot 7 394 200 038."

drat wird. Es mufs nun noch das Produkt der drei Zahlen gleich x^2 gesetzt werden; diese Bedingung liefert

$$x = \frac{48}{65},$$

[so dafs sich für die gesuchten Quadrate die Werte $\frac{144}{169}$, $\frac{100}{169}$, $\frac{676}{625}$ ergeben].*)

27. **Aufgabe.** Drei Quadratzahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs das um 1 vergröfserte Produkt je zweier derselben ein Quadrat sei.

Auflösung. Das um 1 vermehrte Produkt aus der ersten und zweiten Zahl soll ein Quadrat bilden. Wird alles mit der dritten Zahl, welche selbst ein Quadrat ist, multipliziert, so ergiebt sich, dafs das mit der dritten Zahl multiplizierte Produkt der beiden ersten Zahlen, d. i. das Produkt der drei Zahlen, wenn man es um die dritte Zahl vermehrt, zu einem Quadrat werden mufs. Ebenso mufs ein Quadrat entstehen, wenn die erste oder die zweite Zahl zum Produkt der Zahlen addiert wird. Diese Aufgabe haben wir aber schon vorher [V, 24] gelöst, und die oben gefundenen Zahlen genügen auch der vorliegenden Aufgabe.

---

*) Sind wieder u^2, v^2, w^2 die gesuchten Quadratzahlen, so setzt Diophant unter Benutzung der oben benutzten drei rechtwinkligen Dreiecke

$$u = \frac{c_1}{a_1}x, \quad v = \frac{c_2}{a_2}x, \quad w = \frac{c_3}{a_3}x$$

und

$$u^2 v^2 w^2 = x^2;$$

dann ist

$$u^2 - u^2v^2w^2 = \frac{c_1^{\,2}}{a_1^{\,2}}x^2 - x^2 = \frac{b_1^{\,2}}{a_1^{\,2}}x^2, \quad \text{u. s. w.}$$

Man hat also nur noch die Bedingung

$$\left(\frac{c_1\,c_2\,c_3}{a_1\,a_2\,a_3}\right)^2 x^6 = x^2 \quad \text{oder} \quad \frac{c_1\,c_1\,c_3}{a_1\,a_2\,a_3}x^2 = 1$$

zu erfüllen, d. h. $\frac{c_1\,c_2\,c_3}{a_1\,a_2\,a_3}$ oder auch $a_1c_1a_2c_2a_3c_3$ zu einem Quadrat zu machen.

28. Aufgabe. Drei Quadratzahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs das um 1 verminderte Produkt je zweier derselben ein Quadrat sei.

Auflösung. [Das um 1 verminderte Produkt aus der ersten und zweiten Zahl soll ein Quadrat sein.] Wenn wir alles mit der dritten Quadratzahl multiplizieren, so ergiebt sich, dafs das Produkt aus den beiden ersten Zahlen, multipliziert mit der dritten Zahl, d. i. das Produkt der drei Zahlen, wenn es um die dritte Zahl vermindert wird, ein Quadrat giebt. Ebenso mufs das Produkt der drei Zahlen, sowohl wenn die erste, als auch wenn die zweite Zahl davon subtrahiert wird, ein Quadrat werden. Diese Aufgabe ist aber schon [V, 25] gelöst worden, und die oben gefundenen Zahlen genügen auch der vorliegenden Aufgabe.

---

29. Aufgabe. Drei Quadratzahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs, wenn man das Produkt je zweier derselben von 1 subtrahiert, der Rest ein Quadrat sei.

Auflösung. Es soll ein Quadrat erhalten werden, wenn das Produkt je zweier der Zahlen von 1 subtrahiert wird. Wenn wir die Gleichung mit der dritten [der nicht genommenen] Zahl multiplizieren, so führen wir die Sache auf die Aufgabe zurück, drei Quadratzahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs eine jede, wenn sie um das Produkt der Zahlen vermindert wird, ein Quadrat als Rest giebt. Diese Aufgabe ist aber schon [V, 26] gelöst worden.

---

30. Aufgabe. Es ist eine Zahl gegeben. Man soll drei Quadratzahlen ermitteln, die so beschaffen sind, dafs die Summe je zweier derselben und der gegebenen Zahl ein Quadrat sei.

Auflösung. Die gegebene Zahl sei 15, eine der gesuchten Zahlen 9. Dann haben wir noch zwei Quadratzahlen zu ermitteln, von denen jede, wenn sie um 24 vermehrt wird, ein

Quadrat giebt, und deren Summe bei Addition von 15 ebenfalls ein Quadrat wird. Wir müssen folglich zunächst zwei Quadrate suchen, von denen jedes bei Addition von 24 ein Quadrat bleibt.

Wir nehmen zu diesem Zwecke Zahlen, welche Divisoren von 24 und zugleich Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind. Der eine Faktor sei $\frac{4}{x}$, der zugehörige also $6x$; dann ist die Hälfte des einen Faktors $\frac{2}{x}$, die Hälfte des andern $3x$. Ferner sei ein Faktor $\frac{3}{x}$, also der zugehörige $8x$; dann ist die Hälfte des einen Faktos $\frac{1\frac{1}{2}}{x}$, die Hälfte des andern $4x$. Nun sei die Seite des einen Quadrats die Differenz $\frac{2}{x} - 3x$, die Seite des andern Quadrats $\frac{1\frac{1}{2}}{x} - 4x$. Dann ist die Bedingung erfüllt, dafs jedes der beiden Quadrate, wenn es um 24 vermehrt wird, wieder ein Quadrat giebt.

Nun soll noch die Summe der beiden Quadrate, wenn sie um 15 vermehrt wird, ein Quadrat werden. Man erhält auf diese Weise $\frac{6\frac{1}{4}}{x^2} + 25x^2 - 9$; dieser Ausdruck soll gleich einem Quadrat sein. Wird derselbe gleich $25x^2$ gesetzt, so ergiebt sich $x = \frac{5}{6}$, und diesen Wert hat man in die Ausdrücke für die gesuchten Zahlen einzusetzen. [Man erhält für dieselben $9, \frac{1}{100}, \frac{529}{225}$] *).

---

*) Da Diophant die eine der gesuchten Quadratzahlen willkürlich gleich 9 annimmt, so hat man nur noch x^2, y^2 so zu bestimmen, dafs jeder der drei Ausdrücke

$$15 + 9 + x^2, \quad 15 + 9 + y^2, \quad 15 + x^2 + y^2$$

ein Quadrat werde. Ist nun $15 + 9$, d. i.

$$24 = a \,.\, b = a' \,.\, b',$$

so setzt Diophant

$$x = \frac{a}{2u} - \frac{bu}{2}, \quad y = \frac{a'}{2u} - \frac{b'u}{2};$$

31. Aufgabe. Es ist eine Zahl gegeben. Man soll drei Quadratzahlen ermitteln, die so beschaffen sind, dafs die Summe je zweier derselben, wenn man sie um die gegebene Zahl vermindert, ein Quadrat werde.

---

bei dieser Annahme wird nämlich

$$24 + x^2 = \frac{a^2}{4u^2} - \frac{ab}{2} + \frac{b^2u^2}{4} + ab = \left(\frac{a}{2u} + \frac{bu}{2}\right)^2,$$

$$24 + y^2 = \frac{a'^2}{4u^2} - \frac{a'b'}{2} + \frac{b'^2u^2}{4} + a'b' = \left(\frac{a'}{2u} + \frac{b'u}{2}\right)^2.$$

Es erübrigt also nur, den Ausdruck

$$15 + x^2 + y^2 = \frac{a^2 + a'^2}{4u^2} + \frac{b^2 + b'^2}{4}u^2 - 9$$

zu einem Quadrat zu machen; das ist aber leicht, wenn, wie Diophant voraussetzt, $a^2 + a'^2$ und $b^2 + b'^2$ Quadratzahlen sind; denn dann hat man nur

$$15 + x^2 + y^2 = \frac{a^2 + a'^2}{4u^2} \quad \text{oder auch} \quad = \frac{b^2 + b'^2}{4}u^2$$

zu setzen, um einen rationalen Wert von u und somit auch von x zu erhalten.

Zusatz von Fermat: „Mit Hülfe dieser Aufgabe werde ich die Lösung der folgenden Aufgabe geben, die sonst recht schwierig erscheinen würde:

Es ist eine Zahl gegeben. Man soll vier andere Zahlen von der Beschaffenheit ermitteln, dafs die Summe je zweier derselben zu einem Quadrat wird, wenn man sie um die gegebene Zahl vermehrt.

Die gegebene Zahl sei 15, und es seien bereits nach der Aufgabe Diophants drei Quadratzahlen von der Beschaffenheit ermittelt, dafs die Summe je zweier derselben durch Addition der gegebenen Zahl ein Quadrat wird. Diese drei Quadratzahlen sind 9, $\frac{1}{100}$, $\frac{529}{225}$.

Wir setzen nun die erste der vier gesuchten Zahlen gleich $x^2 - 15$, die zweite gleich $6x + 9$ (weil 9 eine der Quadratzahlen und 6 das Doppelte ihrer Seite ist); aus demselben Grunde setzen wir die dritte Zahl gleich $\frac{1}{5}x + \frac{1}{100}$, die vierte endlich gleich $\frac{46}{15}x + \frac{529}{225}$. Durch diese Annahme werden schon drei Forderungen der Aufgabe erfüllt, da jede der drei letzten Zahlen, wenn man die Summe der ersten Zahl und 15 dazu zählt, ein Quadrat wird. Es erübrigt noch, dafs auch die Summe der

Auflösung. Die gegebene Zahl sei 13, und es werde eins der gesuchten Quadrate gleich 25 angenommen. Dann haben wir zwei andere Quadratzahlen zu ermitteln, von denen jede bei Addition von 12 ein Quadrat wird, und deren Summe bei Subtraktion von 13 ebenfalls ein Quadrat giebt.

Wir nehmen wieder die Divisoren von 12, welche die Division mit 3 und 4 ergiebt, und setzen die Seite des einen Quadrats gleich der Differenz $1\frac{1}{2}x - \frac{2}{x}$, die Seite des andern gleich $2x - \frac{1\frac{1}{2}}{x}$; dann ist die Bedingung erfüllt, dafs jedes der beiden Quadrate, bei Addition von 12, ein Quadrat bleibe. Es soll nun noch die Summe beider Quadrate, wenn 13 davon subtrahiert wird, ein Quadrat als Rest geben, d. h. es soll der Ausdruck $\frac{6\frac{1}{4}}{x^2} + 6\frac{1}{4}x^2 - 25$ ein Quadrat sein. Wird derselbe gleich $\frac{6\frac{1}{4}}{x^2}$ gesetzt, so ergiebt sich $x = 2$, und diesen Wert hat man in die Ausdrücke für die gesuchten Zahlen einzusetzen. [Man erhält 25, 4, $\frac{169}{16}$] *).

zweiten und dritten Zahl bei Addition von 15, ebenso die Summe der dritten und vierten Zahl bei Addition von 15, endlich die Summe der zweiten und vierten Zahl bei Addition von 15 ein Quadrat werde.

Diese dreifache Gleichung ist aber leicht zu lösen, da jeder der Ausdrücke, die zu Quadraten werden sollen, nur ein Glied in x und, als von x unabhängiges Glied, eben in Folge der Anwendung der von Diophant in seiner Aufgabe ermittelten Zahlen eine Quadratzahl enthält. Ich verweise also auf das, was ich zur 24. Aufgabe des 6. Buches bemerkt habe."

*) Sind a die gegebene Zahl, k^2 das willkürlich angenommene, x^2, y^2 die noch zu ermittelnden Quadrate, so soll jeder der Ausdrücke

$$x^2 + k^2 - a, \quad y^2 + k^2 - a, \quad x^2 + y^2 - a$$

zu einem Quadrat gemacht werden. Ist nun $k^2 - a = \alpha . \beta$, und wird

$$x = \frac{\alpha u}{2} - \frac{\beta}{2u}, \quad y = \frac{\beta u}{2} - \frac{\alpha}{2u}$$

gesetzt, so ergiebt sich leicht

32. Aufgabe. Drei Quadratzahlen von der Beschaffenheit zu finden, dafs die Summe ihrer Quadrate wieder ein Quadrat sei.

Auflösung. Wir setzen das eine der gesuchten Quadrate gleich x^2, das andere gleich 4, das dritte gleich 9; dann wird die Summe ihrer Quadrate gleich $x^4 + 97$ sein. Dieser Ausdruck soll ein Quadrat sein. Setzen wir denselben gleich dem Quadrat über der Seite $x^2 - 10$, so erhalten wir $20x^2 = 3$, und wenn das Produkt der Zahlen 20 und 3 $\Big[$also auch der Quotient $\frac{3}{20}\Big]$ ein Quadrat wäre, so wäre die Aufgabe gelöst.

Es kommt somit darauf an, zwei Quadratzahlen und irgend eine Zahl zu suchen, die so beschaffen sind, dafs, wenn die Summe der Quadrate jener Quadratzahlen von dem Quadrat der Zahl subtrahiert wird, der Rest und das Doppelte der Zahl sich wie zwei Quadrate zu einander verhalten.

Wir setzen das eine gesuchte Quadrat gleich x^2, das zweite gleich 4, die willkürliche Zahl gleich $x^2 + 4$. Wird dann

---

$$x^2 + k^2 - a = \left(\frac{\alpha u}{2} + \frac{\beta}{2u}\right)^2,$$

$$y^2 + k^2 - a = \left(\frac{\beta u}{2} + \frac{\alpha}{2u}\right)^2.$$

Es ist also nur noch

$$x^2 + y^2 - a = \frac{u^2}{4}(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{4u^2}(\alpha^2 + \beta^2) - k^2$$

zu einem Quadrat zu machen, und wenn wieder α, β die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind, d. h. wenn $\alpha^2 + \beta^2$ eine Quadratzahl ist, so macht dies keine Schwierigkeit.

Zusatz Fermats:

„Dasselbe Verfahren, dessen wir uns in der vorhergehenden Aufgabe bedient haben, um vier Zahlen zu ermitteln, von denen die Summe je zweier, wenn sie um eine gegebene Zahl vermehrt wird, ein Quadrat bildet, kann hier angewandt werden zur Bestimmung von vier Zahlen, von denen die Summe je zweier ein Quadrat wird, wenn man sie um eine gegebene Zahl vermindert. Es ist nämlich die erste Zahl gleich $x^2 + a$ zu setzen, wo a die gegebene Zahl bedeutet, die zweite gleich $k^2 + 2kx$, wo k^2 die erste der drei in Diophants Aufgabe erhaltenen Quadratzahlen bezeichnet; alles andere ist klar.“

das Quadrat dieser Zahl um die Summe der Quadrate jener beiden Quadratzahlen vermindert, so bleibt der Rest $8x^2$. Dieser und das Doppelte von $x^2 + 4$, d. i. $2x^2 + 8$, sollen sich wie zwei Quadrate zu einander verhalten. Dasselbe mufs dann mit den Hälften beider Zahlen der Fall sein, d. h. $4x^2$ und $x^2 + 4$ müssen sich gleichfalls wie zwei Quadrate verhalten. Da nun $4x^2$ ein Quadrat ist, so mufs auch $x^2 + 4$ ein Quadrat sein. Wird dieser Ausdruck gleich dem Quadrat über der Seite $x + 1$ gesetzt, so ergiebt sich $x = 1\frac{1}{2}$. Es wird also das eine gesuchte Quadrat $2\frac{1}{4}$, das andere 4, die willkürliche Zahl $\frac{25}{4}$ sein, und wenn alle diese Zahlen vervierfacht werden, so sind die gesuchten Quadrate 9 und 16, die willkürliche Zahl 25.

Jetzt gehen wir zu der ursprünglich gestellten Aufgabe zurück und setzen die eine gesuchte Quadratzahl gleich x^2, die zweite gleich 9, die dritte gleich 16. Die Summe der Quadrate dieser Quadratzahlen wird dann $x^4 + 337$ sein. Diesen Ausdruck setzen wir gleich dem Quadrat über der Seite $x^2 - 25$; dann ergiebt sich $x = \frac{12}{5}$. Das übrige ist einleuchtend $\left[\frac{144}{25}, 9, 16\right]$*).

*) Werden die gesuchten Quadratzahlen x^2, y^2, z^2 genannt, so soll $x^4 + y^4 + z^4$ ein Quadrat sein. Wir setzen

$$x^4 + y^4 + z^4 = (x^2 - k)^2;$$

dann ergiebt sich

$$x^2 = \frac{k^2 - (y^4 + z^4)}{2k}.$$

Diophant nimmt nun $k = y^2 + z^2$ an; dann ist

$$x^2 = \frac{y^2 z^2}{y^2 + z^2},$$

und damit dieser Ausdruck ein Quadrat sei, müssen y, z Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sein.

Anmerkung Fermats: „Warum sucht aber Diophant nicht zwei Biquadrate, deren Summe ein Quadrat sei? Diese Aufgabe ist allerdings unmöglich, wie mein Beweisverfahren in aller Strenge darthun kann."

Dafs weder die Summe, noch die Differenz zweier Biquadrate

33. Aufgabe [Vieta, Zet., V, Schlufs].

Zweierlei Wein, die Mafs*) des bessern zu acht, die des schlechtern
Zu fünf Drachmen jedoch mischte der kundige Herr.
Was er für beide Sorten bezahlt, war eine Quadratzahl.
Fügst du zu diesem Quadrat eine gegebene Zahl,
So erhältst du ein andres Quadrat, und es sagt dessen Seite
Dir die Menge des Weins, den er im ganzen vermischt.
Nun, mein Knabe, bestimm' mir, wie viel von der besseren Sorte
Und von der schlechtern wie viel jener zusammengemischt.

Auflösung. Der Sinn dieses Epigramms ist folgender: Es hat Jemand zwei Krüge Wein gekauft; von dem einen kostet die Mafs 8, von dem andern 5 Drachmen. Die Zahl der Drachmen, die er im ganzen bezahlt, war eine Quadratzahl. Wird dieselbe um 60 vermehrt, so entsteht eine zweite Quadratzahl, und die Seite der letzteren giebt an, wie viel Mafs Wein er im ganzen gekauft hat. Man soll bestimmen, wie viel Mafs zu 8 und wie viel zu 5 Drachmen es gewesen sind.

Wir setzen die Anzahl der Mafs gleich x; dann wird der Preis, den er im ganzen bezahlt hat, $x^2 - 60$ sein, und dieser Ausdruck soll zu einem Quadrat gemacht werden. Die Seite dieses Quadrats wird gleich der Differenz zwischen x und irgend einer von x unabhängigen Zahl sein. Nun ist $x^2 - 60$ aus zwei Teilen zusammengesetzt, nämlich aus dem Preis des Weines, von dem die Mafs 8 Drachmen kostet, und dem Preis desjenigen, von welchem die Mafs 5 Drachmen kostet. Da nun der fünfte Teil vom Preise dieses schlechteren Weines uns die Zahl der Mafs liefert, die von dieser

---

ein Quadrat sein kann, ist von Euler (Commentatt. Alg. Collect. I, p. 24, sowie Algebra, II, Kap. XIII) bewiesen.

*) $Xo\tilde{v}\varsigma$ = 3,28 Liter.

Sorte genommen sind, da ebenso der achte Teil vom Preise der besseren Sorte die Anzahl der Mafs giebt, die von dieser Sorte genommen sind, und da von beiden Sorten zusammen x Mafs genommen wurden, so liegt uns ob, $x^2 - 60$ in zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu teilen, dafs ein Fünftel der ersten und ein Achtel der zweiten die Summe x geben. Das ist aber nicht möglich, wenn nicht x gröfser als $\frac{x^2-60}{8}$ und zugleich kleiner als $\frac{x^2-60}{5}$, also $x^2 - 60$ gröfser als $5x$ und kleiner als $8x$ wird*).

Es soll also $x^2 - 60$ gröfser als $5x$ sein; wird zu beiden Zahlen 60 addiert, so sieht man, dafs x^2 gröfser als $5x + 60$ sein mufs. Daher mufs x^2 gleich der Summe von $5x$ und einer Zahl sein, die mehr als 60 beträgt. Dann mufs aber x gröfser oder wenigstens nicht kleiner als 11 sein.

$$\left[x^2 - 5x > 60, \qquad x^2 - 5x + \tfrac{25}{4} > 66{,}25,\right.$$

$$\left. x - 2{,}5 > 8{,}13\ldots, \qquad x > 10{,}63\ldots\right].$$

Ferner soll $x^2 - 60$ kleiner als $8x$ sein. Wird zu beiden Zahlen 60 addiert, so ergiebt sich, dafs x^2 gleich der Summe von $8x$ und einer Zahl ist, die weniger als 60 beträgt. Daher darf x nicht gröfser als 12 werden.

$$[x^2 - 8x < 60, \qquad x^2 - 8x + 16 < 76,$$

$$x - 4 < 8{,}71\ldots, \qquad x < 12{,}71\ldots].$$

Es ist aber schon gezeigt worden, dafs x nicht kleiner als 11 sein darf; der Wert von x mufs also zwischen 11 und 12 liegen.

---

*) Ist $x^2 - 60 = a + b$ und zugleich $\frac{a}{5} + \frac{b}{8} = x$, so ist erstens $a = 5x - \frac{5b}{8}$, also $x^2 - 60 = 5x + \frac{3b}{8}$ oder

$$x^2 - 60 > 5x.$$

Ebenso ergiebt sich zweitens $b = 8x - \frac{8a}{5}$, also

$$x^2 - 60 = 8x - \frac{3a}{8},$$

so dafs $x^2 - 60 < 8x$ sein mufs.

Wenn wir nun $x^2 - 60$ zu einem Quadrat machen wollen, so bilden wir das Quadrat, dessen Seite die Differenz zwischen x und irgend einer von x unabhängigen Zahl ist. Dann erhalten wir für x das um 60 vermehrte Quadrat dieser Zahl, dividiert durch das Doppelte der Zahl. Es kommt somit darauf an, eine Zahl zu ermitteln, die so beschaffen ist, dafs, wenn wir ihr Quadrat um 60 vermehren und die erhaltene Summe durch das Doppelte der Zahl dividieren, der Quotient gröfser als 11 und kleiner als 12 werde. Wird diese Zahl gleich x gesetzt, so mufs danach der Quotient $\frac{x^2+60}{2x}$ zwischen 11 und 12 liegen.

Soll nun zunächst $\frac{x^2+60}{2x}$ gröfser als 11 sein, so mufs $x^2 + 60$ gröfser als $22x$, also $22x$ gleich der Summe von x^2 und einer Zahl sein, die weniger als 60 beträgt. Daher wird x nicht kleiner als 19 sein dürfen.

$$[x^2 - 22x > -60,$$
$$x - 11 > 7{,}1\,..,$$
$$x > 18{,}1\,..].$$

Weiter soll aber $\frac{x^2+60}{2x}$ kleiner als 12 werden, also $x^2 + 60$ kleiner als $24x$ oder $24x$ gleich der Summe von x^2 und einer Zahl sein, die mehr als 60 beträgt. Daraus geht hervor, dafs x kleiner als 21 sein mufs.

$$[x^2 - 24x < -60,$$
$$x - 12 < 9{,}1\,..,$$
$$x < 21{,}1\,...].$$

Wir haben aber schon gefunden, dafs x gröfser als 19 sein mufs. Wenn wir daher den Ausdruck $x^2 - 60$ in ein Quadrat verwandeln, so haben wir als Seite dieses Quadrats $x - 20$ anzunehmen. Dann ergiebt sich $x = 11\frac{1}{2}$.

Das Quadrat dieser Zahl ist $132\frac{1}{4}$. Wird davon 60 subtrahiert, so bleibt $72\frac{1}{4}$. Diese Zahl $72\frac{1}{4}$ haben wir in zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu zerlegen, dafs, wenn man ein Fünftel der einen und ein Achtel der andern addiert, die

Summe $11\frac{1}{2}$ werde. Wird ein Fünftel der ersten Zahl gleich x gesetzt, so ist ein Achtel der zweiten gleich $11\frac{1}{2} - x$; die erste Zahl selbst wird dann $5x$, die zweite $92 - 8x$ sein. Die Summe dieser beiden Zahlen soll $72\frac{1}{4}$ betragen. Dann wird $x = \frac{79}{12}$. Es waren also $\frac{79}{12}$ Mafs, jede zu 5 Drachmen, und $\frac{59}{12}$ Mafs, jede zu 8 Drachmen, vorhanden, und alles andere ist einleuchtend.

VI. Buch.

1. Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, dafs die Differenz zwischen der Hypotenuse und jeder der Katheten ein Kubus sei.

Auflösung. Das gesuchte rechtwinklige Dreieck sei vermittels zweier Zahlen gebildet, von denen die eine x, die andere 3 sein möge. Dann wird die Hypotenuse $x^2 + 9$, das Lot $6x$, die Basis $x^2 - 9$ sein. Wird nun die Hypotenuse um die eine Kathete, nämlich um $x^2 - 9$, vermindert, so bleibt der Rest 18, und das ist keine Kubikzahl.

Wie ist nun die Zahl 18 entstanden? Dadurch, dafs wir das Quadrat von 3 verdoppelt haben. Wir müssen also eine Zahl ermitteln, deren doppeltes Quadrat eine Kubikzahl ist. Wird diese Zahl x genannt, so soll $2x^2$ gleich einem Kubus, etwa gleich x^3 sein, und daraus ergiebt sich $x = 2$.

Daher bilde ich das rechtwinklige Dreieck vermittels der Zahlen x und (statt 3) 2. Die Hypotenuse desselben wird $x^2 + 4$, das Lot $4x$, die Basis $x^2 - 4$ sein, und jetzt ist die Bedingung erfüllt, dafs die Differenz zwischen der Hypotenuse und der Basis, d. i. $x^2 - 4$, ein Kubus sei.

Es soll nun aber auch ein Kubus erhalten werden, wenn man das Lot, d. i. $4x$, von der Hypotenuse subtrahiert, d. h. der Ausdruck $x^2 + 4 - 4x$ soll gleich einem Kubus sein. Dieser Ausdruck ist das Quadrat über der Seite $x - 2$. Die Aufgabe wird also gelöst, wenn wir die Zahl $x - 2$ zu einem Kubus machen. Dieser Kubus sei 8, so ist $x = 10$.

Das Dreieck wird also das vermittels der Zahlen 10 und

2 gebildete sein; die Hypotenuse desselben ist 104, das Lot 40, die Basis 96, und dieses Dreieck erfüllt die Bedingungen der Aufgabe*).

---

2. Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, dafs die Summe der Hypotenuse und jeder der Katheten ein Kubus sei.

Auflösung. Wenn wir, wie in der vorhergehenden Aufgabe, das gesuchte Dreieck vermittels zweier Zahlen bilden, so wird es darauf ankommen, ein Quadrat zu ermitteln, durch dessen Verdoppelung ein Kubus entsteht. Es ist dies das Quadrat über der Seite 2.

Daher bilden wir wieder das rechtwinklige Dreieck vermittels der Zahlen x und 2; die Hypotenuse desselben wird $x^2 + 4$, die eine Kathete $4x$, die andere Kathete $4 - x^2$ sein. Dann ist noch zu bewirken, dafs die Summe der Hypotenuse und der ersten Kathete ein Kubus werde. Damit ferner der gefundene Wert von x^2 in die Ausdrücke für die Seiten eingesetzt werden könne, mufs derselbe kleiner als 4, also x kleiner als 2 sein.

Es kommt somit darauf an, einen Kubus zu suchen, der kleiner als 4 und gröfser als 2 ist. Ein solcher Kubus ist $\frac{27}{8}$. Wird nun

$$x + 2 = \frac{27}{8}$$

gesetzt, so ergiebt sich

$$x = \frac{11}{8}.$$

---

*) Werden die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks vermittels der Zahlen x, y gebildet, so ist die Hypotenuse $x^2 + y^2$, während die Katheten $x^2 - y^2$ und $2xy$ sind. Es soll nun jeder der Ausdrücke $2y^2$ und $(x - y)^2$ ein Kubus werden. $2y^2$ wird ein Kubus, wenn $y = 2a^3$ angenommen wird, wo a jede Zahl sein kann. Nun soll noch $(x - 2a^3)^2$, also auch $x - 2a^3$, zu einem Kubus gemacht werden. Das geschieht, wenn man $x = 2a^3 + b^3$ setzt, wo b gleichfalls eine beliebige Zahl bedeutet. Die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks sind also

$$8a^6 + 4a^3b^3 + b^6, \quad b^3(4a^3 + b^3), \quad 4a^3(2a^3 + b^3).)$$

Die Hypotenuse wird folglich $\frac{377}{64}$, die eine Kathete $\frac{135}{64}$, die andere Kathete $\frac{352}{64}$ sein, und dieses Dreieck genügt den Bedingungen der Aufgabe*).

---

3. **Aufgabe.** Ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, daſs die Zahl, welche den Flächeninhalt desselben ausdrückt, eine Quadratzahl wird, wenn man sie um eine gegebene Zahl vermehrt.

Auflösung. Die gegebene Zahl sei 5, und das Dreieck sei der Form nach bestimmt durch die Seiten $3x$, $4x$ und $5x$; dann wird die Fläche desselben durch die Zahl $6x^2$ ausgedrückt. Es soll also $6x^2 + 5$ ein Quadrat werden. Dies Quadrat sei $9x^2$, so erhält man, indem man Gleiches von Gleichem subtrahiert, $3x^2 = 5$. Es müſsten nun [wenn sich für x ein rationaler Wert ergeben sollte] diese beiden Gröſsen, folglich auch ihre Koeffizienten, sich wie zwei Quadrate zu einander verhalten.

Daher kommt es darauf an, ein rechtwinkliges Dreieck und eine Quadratzahl von der Beschaffenheit zu finden, daſs, wenn man den Flächeninhalt des Dreiecks von der Quadratzahl subtrahiert, der Rest der fünfte — da die gegebene Zahl 5 ist — Teil eines Quadrats sei.

Wir bilden jetzt das rechtwinklige Dreieck vermittels der Zahlen x und $\frac{1}{x}$. Der Flächeninhalt desselben wird $\left[\text{da die Katheten } x^2 - \frac{1}{x^2} \text{ und } 2 \text{ sind}\right]$ $x^2 - \frac{1}{x^2}$ sein. Die Seite

---

*) Sind wieder $x^2 + y^2$, $x^2 - y^2$, $2xy$ die Seiten des gesuchten Dreiecks, so ist sowohl $2x^2$, als auch $(x + y)^2$ zu einem Kubus zu machen. Die erste Bedingung erfordert, daſs $x = 2a^3$ sei, und dann wird $x + y$, also auch $(x + y)^2$ ein Kubus, wenn man $y = b^3 - 2a^3$ annimmt. Die Seiten sind demnach

$$4a^6 + (b^3 - 2a^3)^2, \quad b^3(4a^3 - b^3), \quad 4a^3(b^3 - 2a^3),$$

und negative Werte werden vermieden, wenn b^3 zwischen $2a^3$ und $4a^3$ liegt.

des Quadrats sei die Summe von x und dem Bruch $\frac{1}{x}$, letzterer mit dem Doppelten der gegebenen Zahl als Koeffizienten, also $\frac{10}{x}$. Das Quadrat wird dann $x^2 + \frac{100}{x^2} + 20$ sein. Wenn wir hiervon den Flächeninhalt, d. i. $x^2 - \frac{1}{x^2}$ subtrahieren, so bleibt $\frac{101}{x^2} + 20$. Das Fünffache dieses Ausdrucks ist

$$\frac{505}{x^2} + 100,$$

und das soll ein Quadrat werden. Durch Multiplikation mit x^2 erhält man $505 + 100x^2$, und auch dieser Ausdruck mufs ein Quadrat sein. Wird derselbe gleich dem Quadrat über der Seite $10x + 5$ gesetzt, so findet man $x = \frac{24}{5}$.

Wir haben also das rechtwinklige Dreieck vermittels der Zahlen $\frac{24}{5}$ und $\frac{5}{24}$ zu bilden, und die Seite des Quadrats wird $\frac{413}{60}$ sein. Wenn wir dann die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks durch x mit den erhaltenen Zahlen als Koeffizienten ausdrücken und den um 5 vergröfserten Flächeninhalt desselben gleich $\frac{170\,569}{3600}x^2$ setzen, so macht die Aufgabe weiter keine Schwierigkeit. [Die Katheten werden

$$\left(\frac{24^2}{5^2} - \frac{5^2}{24^2}\right)x = \frac{331\,151}{14\,400}x$$

und $2x$ sein, und da die Gleichung

$$\frac{331\,151}{14\,400}x^2 + 5 = \frac{170\,569}{3600}x^2$$

den Wert

$$x = \frac{24}{53}$$

liefert, so erhält man für die Seiten des Dreiecks

$$\frac{331\,151}{31\,800}, \quad \frac{48}{53}, \quad \frac{332\,401}{31\,800}\Big]\ ^{*)}.$$

---

*) Ich will Diophants Verfahren etwas allgemeiner darstellen. Als Katheten des Dreiecks nimmt er $(m^2 - n^2)x$ und $2mnx$ an; dann ist die Fläche $(m^2 - n^2)mnx^2$. Wird hierzu die gegebene Zahl a addiert, so soll ein Quadrat entstehen, das mit b^2x^2 bezeichnet werden möge. Es ist also

4. Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, dessen Flächeninhalt eine Quadratzahl wird, wenn man eine gegebene Zahl davon subtrahiert.

$$(m^2 - n^2)mnx^2 + a = b^2x^2$$

oder

(1) $$x^2[b^2 - (m^2 - n^2)mn] = a.$$

Nun nimmt Diophant $n = \frac{1}{m}$ und $b = m + \frac{2a}{m}$ an. Da dann $(m^2 - n^2)mn = m^2 - \frac{1}{m^2}$ wird, so geht (1) über in

$$x^2\left[4a + \frac{4a^2 + 1}{m^2}\right] = a$$

oder

(2) $$x^2\left[4a^2 + \frac{4a^3 + a}{m^2}\right] = a^2.$$

m mufs daher so bestimmt werden, dafs der in Klammer stehende Ausdruck, also auch $4a^2m^2 + 4a^3 + a$ ein Quadrat werde, was keine Schwierigkeit macht. Ist nun m (also auch n und b) bestimmt, so giebt die Gleichung (1) den Wert von x, und damit ist die Aufgabe gelöst.

Vieta behandelt (Zetet. V, 9) die Aufgabe: Ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, dafs die Fläche desselben durch Addition einer gegebenen Zahl, welche aber die Summe zweier Quadrate sein mufs, zu einer Quadratzahl wird.

Seine Lösung ist folgende: Wenn die gegebene Zahl

$$a = b^2 + c^2$$

ist, so bildet er das rechtwinklige Dreieck vermittels der beiden Zahlen $(b + c)^2$ und $(b - c)^2$. Es wird dann

die Hypotenuse $= (b + c)^4 + (b - c)^4 = 2b^4 + 12b^2c^2 + 2c^4$,

die Basis $= (b + c)^4 - (b - c)^4 = 8b^3c + 8bc^3 = 8abc$,

das Lot $= 2(b + c)^2(b - c)^2$

sein, oder, wenn jede Seite durch $2(b + c)(b - c)^2$ dividiert wird,

die Hypotenuse $= \frac{b^4 + 6b^2c^2 + c^4}{(b + c)(b - c)^2}$,

die Basis $= \frac{4abc}{(b + c)(b - c)^2}$,

das Lot $= b + c$,

Auflösung. Die gegebene Zahl sei 6. Wir nehmen an, das Dreieck sei der Form nach gegeben, und zwar habe es

---

also die Fläche gleich $\frac{2abc}{(b-c)^2}$. In der That ist

$$\frac{2abc}{(b-c)^2} + a = \frac{2abc + a(b-c)^2}{(b-c)^2} = \frac{a(b^2+c^2)}{(b-c)^2} = \left(\frac{b^2+c^2}{b-c}\right)^2.$$

Vieta hat also die Aufgabe Diophants ihrer Allgemeinheit beraubt. Bachet löst die Aufgabe auch für 6 als gegebene Zahl, um Vieta's Beschränkung als unnötig zu erweisen. Zum Verständnis von Fermats Bemerkung sei darauf hingewiesen, dafs das mittels der Zahlen x und $\frac{1}{x}$ gebildete rechtwinklige Dreieck die Fläche $x^2 - \frac{1}{x^2}$ hat, dafs es also darauf ankommt,

$$x^2 - \frac{1}{x^2} + a = \frac{1}{x^2}(x^4 - 1 + ax^2),$$

also $x^4 - 1 + ax^2$ in ein Quadrat zu verwandeln. Fermat bemerkt nun:

„Der Irrtum Vieta's hat ohne Zweifel folgenden Grund: Er setzt voraus, der Ausdruck für die Fläche, das ist die Differenz zweier Biquadrate, wie $x^4 - 1$, werde durch Hinzufügung des 5fachen eines Quadrats zu einer Quadratzahl, wenn die gegebene Zahl 5 die Summe zweier Quadrate sei; denn dann könne das 5fache eines Quadrats gefunden werden, welches bei Subtraktion der Zahl 1 ein Quadrat als Rest gebe.

Nehmen wir an, die Seite des zu verfünffachenden Quadrats sei $1 . x + 1$ oder auch die Summe von 1 und irgend einem andern Vielfachen von x, so ist das 5fache des Quadrats $5x^2 + 10x + 5$, und wenn man hierzu den Ausdruck für die Fläche $x^4 - 1$ addiert, so erhält man $x^4 + 5x^2 + 10x + 4$. Diese Summe in ein Quadrat zu verwandeln, macht keine Schwierigkeit, da das von x unabhängige Glied nach der der Aufgabe beigefügten Beschränkung eine Quadratzahl ist. Vieta sieht aber nicht, dafs die Aufgabe ebenso gelöst werden kann, wenn nicht $x^4 - 1$, sondern $1 - x^4$ für die Fläche genommen wird; denn die Aufgabe läfst sich alsdann sofort darauf zurückführen, dafs eine gegebene Zahl 5 oder 6 oder irgend eine andere Zahl ein Quadrat liefere, wenn man sie mit einer Quadratzahl multipliziert und das Produkt um 1 vermehrt, was immer sehr leicht ist, da die Einheit eine Quadratzahl ist.

die Seiten $3x$, $4x$ und $5x$. Dann soll nach der Voraussetzung $6x^2 - 6$ eine Quadratzahl, etwa gleich $4x^2$ sein. Es kommt also wieder darauf an, ein rechtwinkliges Dreieck und eine Quadratzahl von der Beschaffenheit zu finden, daſs, wenn man die Quadratzahl von der Fläche des Dreiecks subtrahiert und den Rest mit 6 multipliziert, das Produkt ein Quadrat werde.

Wir bilden nun wieder das rechtwinklige Dreieck vermittels der Zahlen x und $\frac{1}{x}$ und nehmen als Seite des Quadrats die Differenz an, die erhalten wird, wenn man von x den Bruch $\frac{1}{x}$ mit der Hälfte der gegebenen Zahl, also mit 3, als Koeffizienten subtrahiert. Das Quadrat wird dann

$$x^2 + \frac{9}{x^2} - 6$$

sein. Wird dies Quadrat von dem Flächeninhalt des Dreiecks, d. i. $x^2 - \frac{1}{x^2}$, subtrahiert, so bleibt $6 - \frac{10}{x^2}$. Das Sechsfache dieses Restes, mit x^2 multipliziert, wird $36x^2 - 60$, und wenn wir diesen Ausdruck gleich dem Quadrat über der Seite $6x - 2$ setzen, so erhalten wir

$$x = \frac{8}{3}.$$

Das rechtwinklige Dreieck ist also vermittels der Zahlen $\frac{8}{3}$ und $\frac{3}{8}$ zu bilden, und die Seite des Quadrats wird $\frac{37}{24}$ sein.

Ich habe diese und die beiden folgenden Aufgaben nach einer besondern Methode gelöst, welche den Vorteil bietet, nicht bloſs überhaupt ein Dreieck zu geben, dessen Fläche bei Addition einer gegebenen Zahl, z. B. 5, ein Quadrat wird, sondern dieses Dreieck in den kleinsten Zahlen, in diesem Falle $\frac{9}{3}$, $\frac{40}{3}$, $\frac{41}{3}$ zu liefern. Die Fläche dieses Dreiecks ist 20, und diese Zahl wird bei Addition von 5 die Quadratzahl 25. Doch ist hier nicht der Ort, über die Begründung und Anwendung dieser meiner Methode weiteres hinzuzufügen; denn der Rand würde nicht ausreichen, da ich vieles zu berichten habe."

Ich drücke nun die Seiten des gesuchten Dreiecks durch x mit den Zahlen als Koeffizienten aus [welche sich vermittels der Werte $\frac{8}{3}$ und $\frac{3}{8}$ ergeben haben], und wenn ich dann die Aufgabe weiter verfolge, werde ich einen rationalen Wert von x erhalten.

[Die Katheten werden $\frac{4015}{576}x$ und $2x$ sein, und da die Gleichung

$$\frac{4015}{576}x^2 - 6 = \frac{1369}{576}x^2$$

den Wert

$$x = \frac{8}{7}$$

liefert, so erhält man für die Seiten des Dreiecks

$$\frac{4015}{504}, \quad \frac{16}{7}, \quad \frac{4177}{504}\Big]^{*)}.$$

---

5. Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, dafs, wenn man den Flächeninhalt desselben von einer gegebenen Zahl subtrahiert, der Rest eine Quadratzahl sei.

Auflösung. Die gegebene Zahl sei 10. Wir bilden wieder das rechtwinklige Dreieck, dessen Seiten $3x$, $4x$ und $5x$ sind. Dann soll $10 - 6x^2$ ein Quadrat werden. Setzen wir diesen Ausdruck gleich x^2 mit einer Quadratzahl als Koeffizienten, so erkennen wir, dafs es wieder darauf ankommt, ein recht-

---

*) Unter denselben Voraussetzungen wie in der vorhergehenden Aufgabe kommen wir zu der Gleichung

$$(1) \qquad x^2\,[(m^2 - n^2)mn - b^2] = a,$$

welche, wenn

$$n = \frac{1}{m}, \quad b = m - \frac{a}{2m}$$

angenommen wird, in

$$(2) \qquad x^2\left[a^2 - \frac{a^3 + 4a}{4m^2}\right] = a^2$$

übergeht, so dafs hier der Ausdruck $4a^2m^2 - (a^3 + 4a)$ in ein Quadrat zu verwandeln ist.

winkliges Dreieck und eine Quadratzahl von der Beschaffenheit zu finden, dafs die Quadratzahl, wenn sie um die Fläche des Dreiecks vermehrt wird, den zehnten Teil einer Quadratzahl bilde.

Wir bilden das rechtwinklige Dreieck vermittels der Zahlen x und $\frac{1}{x}$ und nehmen als Seite des Quadrats $\frac{1}{x} + 5x$; wird das Quadrat dieses Ausdrucks zum Flächeninhalt des Dreiecks addiert, so ergiebt sich $26x^2 + 10$. Das Zehnfache dieser Summe, d. i. $260x^2 + 100$, soll ein Quadrat werden; dann mufs auch der vierte Teil dieses Ausdrucks, nämlich $65x^2 + 25$ ein Quadrat sein. Wird derselbe gleich dem Quadrat über der Seite $5 + 8x$ gesetzt, so erhält man $x = 80$. Diesen Wert setzen wir in die Ausdrücke für die Zahlen ein, vermittels welcher das rechtwinklige Dreieck gebildet wird, und verfahren darauf ganz wie in der vorhergehenden Aufgabe.

[Die Katheten werden $\left(6400 - \frac{1}{6400}\right)x$ und $2x$ sein; nun liefert die Gleichung

$$10 - \left(6400 - \frac{1}{6400}\right)x^2 = \left(\frac{1}{80} + 400\right)^2 x^2$$

den Wert

$$x = \frac{1}{129}.$$

Also sind die Seiten des Dreiecks

$$\frac{40\,959\,999}{825\,600},\quad \frac{2}{129} = \frac{12\,800}{825\,600},\quad \frac{40\,960\,001}{825\,600}$$]*).

---

*) Unter denselben Voraussetzungen, wie in den beiden vorhergehenden Aufgaben, erhalten wir die Gleichung

$$x^2\left[(m^2 - n^2)mn + b^2\right] = a,$$

welche für

$$n = \frac{1}{m},\quad b = \frac{1}{m} + \frac{am}{2}$$

in

$$x^2\left[a + \frac{a^2m^2}{4} + m^2\right] = a$$

oder

$$x^2(4a^2 + a^3m^2 + 4am^2) = 4a^2$$

übergeht. Es ist also $4a^2 + a^3m^2 + 4am^2$ in ein Quadrat zu

6. Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, daſs die Summe des Flächeninhalts und der einen Kathete gleich einer gegebenen Zahl sei.

Auflösung. Die gegebene Zahl sei 7. Das Dreieck sei wieder der Form nach gegeben, und zwar habe es die Seiten $3x$, $4x$ und $5x$. Dann soll

$$6x^2 + 3x = 7$$

sein. Es müſste also [damit x rational werde] das Quadrat des halben Koeffizienten von x, vermehrt um das Siebenfache des Koeffizienten von x^2, eine Quadratzahl sein, was nicht der Fall ist*). Wir müssen daher ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit ermitteln, daſs das Quadrat der Hälfte der einen Kathete, wenn man es um das Siebenfache des Flächeninhalts vermehrt, eine Quadratzahl bleibt.

Es sei die eine Kathete x, die andere 1, so wird die in Rede stehende Zahl $3\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$, und diese, also auch das Vierfache derselben, d. i. $14x + 1$, soll ein Quadrat werden. Damit nun auch die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks rational werden, muſs $x^2 + 1$ ebenfalls ein Quadrat sein. Die Differenz dieser beiden Ausdrücke ist $x^2 - 14x$ und hat die Divisoren x und $x - 14$. Multipliziert man die halbe Differenz dieser beiden Divisoren mit sich selbst, so erhält man 49. Diese Zahl ist dem kleineren Ausdruck gleich zu setzen, wodurch sich $x = \frac{24}{7}$ ergiebt.

---

verwandeln, und da das von m unabhängige Glied $4a^2$ eine Quadratzahl ist, so macht dies keine Schwierigkeit.

*) Diophant löst, wie es scheint, die Gleichung

$$ax^2 + bx = c,$$

indem er

$$(ax)^2 + b(ax) = ac$$

setzt, woraus sich

$$ax = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac}$$

ergiebt.

Ich setze daher die eine Kathete gleich $\frac{24}{7}$, die andere gleich 1, oder, wenn beide mit 7 multipliziert und durch x mit den gefundenen Zahlen als Koeffizienten ausgedrückt werden, die eine Kathete gleich $24x$, die andere gleich $7x$; die Hypotenuse wird dann $25x$ und die Summe der Fläche und der zweiten Kathete $84x^2 + 7x$ sein. Diese Zahl soll gleich 7 sein. Daraus ergiebt sich $x = \frac{1}{4}$. Folglich sind die Seiten des Dreiecks $6, \frac{7}{4}, \frac{25}{4}$, und diese Werte genügen der Aufgabe*).

---

7. Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, dafs, wenn man den Flächeninhalt um eine Kathete vermindert, die Differenz gleich einer gegebenen Zahl sei.

Auflösung. Die gegebene Zahl sei 7. Wir sehen wieder das Dreieck als der Form nach gegeben an. Dann stellt es sich heraus, dafs es darauf ankommt, ein Dreieck von der Beschaffenheit zu ermitteln, dafs das Quadrat der Hälfte der einen Kathete, vermehrt um das Siebenfache des Flächeninhalts, eine Quadratzahl sei. Nun haben sich in der vorigen

*) Anmerkung von Fermat: „Diese Aufgabe und die folgenden lassen sich auch auf andere Weise lösen: Man bilde in diesem Falle das rechtwinklige Dreieck vermittels der gegebenen Zahl und der Zahl 1. Das gesuchte Dreieck entsteht dann, wenn man jede Seite des ersteren durch die Summe von 1 und der gegebenen Zahl dividiert."

Werden nämlich die Seiten des gesuchten Dreiecks gleich

$$(a^2 - 1)x, \quad 2ax, \quad (a^2 + 1)x$$

angenommen, wo a die gegebene Zahl bezeichnet, so ist die Gleichung

$$(a^2 - 1)ax^2 + 2ax = a$$

zu lösen, deren eine Wurzel $x = \frac{-1}{a^2 - 1} + \frac{a}{a^2 - 1}$ oder $x = \frac{1}{a + 1}$ ist. Die gesuchten Seiten sind daher

$$\frac{a^2 - 1}{a + 1}, \quad \frac{2a}{a + 1}, \quad \frac{a^2 + 1}{a + 1}.$$

Aufgabe 7, 24, 25 als Seiten eines solchen rechtwinkligen Dreiecks ergeben.

Drücke ich jetzt die Seiten des gesuchten Dreiecks durch x mit den genannten Zahlen als Koeffizienten aus, so erhalte ich für den um eine Kathete verminderten Flächeninhalt $84x^2 - 7x$. Dieser Ausdruck soll gleich 7 sein; dann wird $x = \frac{1}{3}$, und diesen Wert haben wir in die Ausdrücke für die Seiten einzusetzen*).

$$\left[\frac{7}{3},\ 8,\ \frac{25}{3};\ \frac{7}{3}\cdot 4 - \frac{7}{3} = 7\right].$$

---

*) Ist a die gegebene Zahl, und nimmt man $(a^2 - 1)x$, $2ax$, $(a^2 + 1)x$ als Seiten des gesuchten Dreiecks an, so soll

$$a(a^2 - 1)x^2 - 2ax = a$$

oder

$$(a^2 - 1)x^2 - 2x = 1$$

sein. Diese Gleichung hat die positive Wurzel $x = \frac{1}{a-1}$, so dafs sich für die Seiten des Dreiecks die Zahlen

$$\frac{a^2-1}{a-1},\quad \frac{2a}{a-1},\quad \frac{a^2+1}{a-1}$$

ergeben. Daher sagt Fermat:

„Man bilde das rechtwinklige Dreieck vermittels der gegebenen Zahl und der Zahl 1; wenn man dann jede Seite dieses Dreiecks durch die Differenz zwischen der gegebenen Zahl und 1 dividiert, so erhält man die Seiten des gesuchten Dreiecks. Diese Aufgabe erhält nach der Methode, nach welcher ich doppelte Gleichungen dieser Art auf unendlich viele Weisen löse, unendlich viele Lösungen. Die Methode, die ich anwende, habe ich unten bei der 24. Aufgabe berührt und erläutert. Jene unendlich vielen Lösungen passen sogar für die vier folgenden Aufgaben, was weder Diophant noch Bachet bemerkt hat. Warum hat aber weder Diophant, noch Bachet die folgende Aufgabe hier hinzugefügt: Ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, dafs eine seiner Katheten, wenn man den Flächeninhalt davon subtrahiert, gleich einer gegebenen Zahl wird? Sie scheinen dieselbe nicht gekannt zu haben, weil sie sich nicht sogleich bei der Lösung der doppelten Gleichung darbietet. Nach meiner Methode kann sie jedoch

8. Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, dafs man eine gegebene Zahl erhält, wenn man den Flächeninhalt um die Summe der beiden Katheten vermehrt.

Auflösung. Die gegebene Zahl sei 6. Wir gehen wieder davon aus, das Dreieck sei der Form nach gegeben [Es habe die Seiten $3x$, $4x$, $5x$]. Dann finden wir, dafs es darauf ankommt, ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu ermitteln, dafs das Quadrat der halben Summe der beiden Katheten eine Quadratzahl bleibt, wenn man das Sechsfache des Flächeninhalts dazu zählt*).

Setzen wir wieder die eine Kathete gleich x, die andere gleich 1, so liegt uns ob, den Ausdruck $\frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{1}{4}$ zu einem Quadrat zu machen. Dann mufs auch das Vierfache desselben, d. i. $x^2 + 14x + 1$ ein Quadrat werden. Es mufs aber auch $x^2 + 1$ ein Quadrat sein. Die Differenz beider Ausdrücke $14x$ hat die Divisoren $2x$ und 7. Das Quadrat der halben Differenz dieser beiden Divisoren ist $x^2 + 12\frac{1}{4} - 7x$. Wird dies gleich $x^2 + 1$ gesetzt, so erhält man $x = \frac{45}{28}$. Die Seiten des Dreiecks werden also $\frac{45}{28}$, 1, $\frac{53}{28}$ sein, oder, wenn wir alle mit 28 multiplizieren und durch x mit den erhaltenen Zahlen als Koeffizienten ausdrücken, $45x$, $28x$, $53x$.

Addiert man jetzt die Summe der beiden Katheten zum Flächeninhalt, so ergiebt sich $630x^2 + 73x$. Wird dies gleich 6 gesetzt, so findet man für x einen rationalen Wert, durch dessen Einsetzung in die Ausdrücke für die Seiten die Lösung der Aufgabe beendet wird.

$$\left[x = \frac{1}{18}; \quad \text{Seiten } \frac{45}{18}, \frac{28}{18}, \frac{53}{18}\right].$$

---

leicht gefunden werden, und in ähnlicher Weise kann man bei den folgenden Aufgaben noch diesen dritten Fall ergänzend hinzufügen.“

*) Die Gleichung $6x^2 + 7x = 6$ liefert nämlich

$$6x = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 6 \cdot 6}.$$

9. Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, dessen Flächeninhalt gleich einer gegebenen Zahl wird, wenn man ihn um die Summe der beiden Katheten vermindert.

Auflösung. Die gegebene Zahl sei 6. Wir nehmen wieder an, das verlangte Dreieck sei der Form nach gegeben. Dann stellt es sich heraus, dafs es darauf ankommt, ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu ermitteln, dafs das Quadrat der halben Summe der beiden Katheten eine Quadratzahl bleibt, wenn man das Sechsfache des Flächeninhalts dazu zählt. Diese Aufgabe ist aber schon gelöst worden, und es haben sich die Zahlen 28, 45, 53 ergeben.

Ich drücke nun die Seiten des gesuchten Dreiecks durch x mit diesen Zahlen als Koeffizienten aus und erhalte durch Lösung der Gleichung

$$630x^2 - 73x = 6$$

den Wert

$$x = \frac{6}{35},$$

welcher in die Ausdrücke für die Seiten einzusetzen ist.

$$\left[\frac{168}{35}, \frac{270}{35}, \frac{318}{35}\right]$$ *).

---

10. Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, dessen Fläche gleich einer gegebenen Zahl wird, wenn man die Summe der Hypotenuse und der einen Kathete dazu zählt.

Auflösung. Die gegebene Zahl sei 4. Wir nehmen wieder an, das Dreieck sei der Form nach gegeben. Dann stellt sich heraus, dafs wir ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu ermitteln haben, dafs, wenn man die halbe Summe

---

*) Fermat bemerkt: „Hier ist die nach meiner Methode zu lösende Aufgabe hinzuzufügen: Ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, dafs die Summe der Katheten gleich einer gegebenen Zahl wird, wenn man den Flächeninhalt davon subtrahiert.“

der Hypotenuse und der einen Kathete mit sich selbst multipliziert und die erhaltene Zahl um das Vierfache der Fläche vermehrt, die Summe ein Quadrat werde.

Wir bilden jetzt das rechtwinklige Dreieck vermittels der Zahlen x und $x+1$. Dann ist [die eine Kathete $2x+1$, die andere Kathete $2x(x+1)$, die Hypotenuse $2x^2+2x+1$, die Summe der Hypotenuse und der ersten Kathete $2x^2+4x+2$, also] das Quadrat der halben Summe der Hypotenuse und der einen Kathete $x^4+4x^3+6x^2+4x+1$, und das Vierfache des Flächeninhalts $8x^3+12x^2+4x$. Wir haben somit $x^4+12x^3+18x^2+8x+1$ zu einem Quadrat zu machen. Setzen wir diesen Ausdruck gleich dem Quadrat über der Seite x^2+6x-1, so ergiebt sich $x=\frac{5}{4}\cdot$ Das rechtwinklige Dreieck ist also mittels der Zahlen $\frac{5}{4}$ und $\frac{9}{4}$, oder, wenn alles viermal genommen wird, mittels 9 und 5 zu bilden. Von den so bestimmten ähnlichen Dreiecken nehmen wir das kleinste und drücken die Seiten desselben durch x mit den erhaltenen Zahlen als Koeffizienten, also durch $28x$, $45x$, $53x$ aus. Wenn wir jetzt den Flächeninhalt um die Summe der Hypotenuse und der einen Kathete vermehren und das Resultat gleich 4 setzen, so erhalten wir

$$630x^2+81x=4,$$

woraus sich

$$x=\frac{4}{105}$$

ergiebt. Diesen Wert haben wir dann noch in die Ausdrücke für die Seiten einzusetzen.

$$\left[\frac{112}{105},\ \frac{180}{105},\ \frac{212}{105}\right].$$

---

11. Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, dafs der Flächeninhalt desselben gleich einer gegebenen Zahl wird, wenn man ihn um die Summe der Hypotenuse und der einen Kathete vermindert.

Auflösung. Die gegebene Zahl sei 4. Wir nehmen wieder an, das Dreieck sei der Form nach gegeben. Es kommt dann darauf an, ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, dafs die vierfache Fläche desselben ein Quadrat wird, wenn man sie um das Quadrat der halben Summe der Hypotenuse und der einen Kathete vermehrt. Es ist nun oben gezeigt worden, dafs die Seiten 28, 45, 53 dieser Bedingung genügen.

Ich drücke jetzt die Seiten des Dreiecks durch x [mit diesen Zahlen als Koeffizienten] aus; dann wird

$$630x^2 - 81x = 4,$$

und daraus ergiebt sich

$$x = \frac{1}{6},$$

welcher Wert in die Ausdrücke für die Seiten einzusetzen ist *).

---

12. Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, dafs die Differenz der Katheten ebenso wie die gröfsere Kathete selbst ein Quadrat sei, und dafs ferner die Fläche zu einem Quadrat wird, wenn man die kleinere Kathete dazu zählt.

Auflösung. Wir bilden die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks vermittels zweier Zahlen und setzen voraus, das

---

*) Bachet fügt hier die Aufgabe hinzu: Ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, dessen Flächeninhalt, wenn man ihn um die Hypotenuse vermindert, gleich einer gegebenen Zahl wird.

Fermat bemerkt: „Es kann hier die nach meiner Methode zu behandelnde Aufgabe hinzugefügt werden: Ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, dafs die Summe der Hypotenuse und der einen Kathete gleich einer gegebenen Zahl wird, wenn man die Fläche davon subtrahiert. Ebenso kann der Bachetschen Besprechung folgende Aufgabe zugefügt werden: Ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, dessen Hypotenuse gleich einer gegebenen Zahl wird, wenn man den Flächeninhalt davon subtrahiert.“

doppelte Produkt dieser beiden Zahlen gebe die gröſsere Kathete. Es sind also zwei Zahlen zu ermitteln, die so beschaffen sind, daſs sowohl das doppelte Produkt, als auch die Differenz zwischen diesem doppelten Produkt und der Differenz der Quadrate derselben eine Quadratzahl sei. Diesen beiden Bedingungen genügen aber stets zwei Zahlen, von denen die gröſsere das Doppelte der kleineren ist. Wird also das Dreieck vermittels der Zahlen x und $2x$ gebildet, so sind schon zwei der gestellten Forderungen erfüllt.

Es soll nun noch die Fläche des Dreiecks eine Quadratzahl werden, wenn man die kleinere Kathete dazu zählt. Man erhält dann aber $6x^4 + 3x^2$, und wenn wir durch x^2 dividieren, so wird daraus $6x^2 + 3$. Diesen Ausdruck haben wir in ein Quadrat zu verwandeln. Wir werden also eine Zahl von der Beschaffenheit suchen, daſs das Sechsfache des Quadrats derselben zu einer Quadratzahl wird, wenn man 3 hinzuzählt. Dieser Bedingung genügen 1 und unendlich viele andere Zahlen. Das gesuchte Dreieck ist also dasjenige, welches vermittels der Zahlen 1 und 2 gebildet wird*).

Hilfssatz. Wenn zwei Zahlen gegeben sind, deren Summe eine Quadratzahl ist, so lassen sich unendlich viele Quadrate ermitteln, von denen jedes eine Quadratzahl bleibt, wenn man es mit der einen gegebenen Zahl multipliziert und das Produkt um die andere Zahl vermehrt.

Die gegebenen Zahlen seien 3 und 6. Man soll ein Quadrat finden, welches eine Quadratzahl bleibt, wenn man es mit 3 multipliziert und das Produkt um 6 vermehrt. Wird das gesuchte Quadrat gleich $x^2 + 2x + 1$ gesetzt, so soll $3x^2 + 6x + 9$ zu einem Quadrate gemacht werden. Da das von x unabhängige Glied eine Quadratzahl ist, so ist dies auf

*) Wird das rechtwinklige Dreieck vermittels der Zahlen $2x$, x gebildet, so sind die Seiten $3x^2$, $4x^2$, $5x^2$, die Fläche $6x^4$, und es ist $6x^4 + 3x^2 = x^2(6x^2 + 3)$, also $6x^2 + 3$ zu einem Quadrat zu machen. Da nun $6 + 3 = 9$ eine Quadratzahl ist, so findet der folgende Hilfssatz hier Anwendung.

unendlich viele Arten möglich. Wird z. B. die Seite des Quadrats gleich $3-3x$ angenommen, so ergiebt sich $x=4$. Die Seite des Quadrats wird also 5 sein, und es lassen sich noch unendlich viele andere Lösungen ermitteln*).

---

13. Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, dessen Flächeninhalt ein Quadrat wird, wenn man jede der Katheten dazu zählt.

Auflösung. Wir nehmen an, das Dreieck sei der Form nach gegeben, habe z. B. die Seiten $5x$, $12x$, $13x$; dann soll [zunächst] $30x^2+12x$ ein Quadrat sein. Wird dieser Ausdruck gleich $36x^2$ gesetzt, so ergiebt sich $x=2$. Nun sollte für diesen Wert $x=2$ auch $30x^2+5x$ ein Quadrat sein, und das ist nicht der Fall. Es kommt also darauf an, ein Quadrat von der Beschaffenheit zu ermitteln, dafs sich eine Quadratzahl ergiebt, wenn man es um 30 vermindert, mit dem Rest in 12 dividiert, den Quotienten ins Quadrat erhebt und zum Dreifsigfachen dieses Quadrats das Fünffache seiner Seite addiert**).

Wird dies gesuchte Quadrat x^2 genannt, so ergiebt sich, wenn man dasselbe um 30 vermindert und mit dem Rest in

---

*) Ist $a+b=m^2$, so kann man den Ausdruck ax^2+b zu einem Quadrat machen, indem man $x=1+y$ setzt. Es wird dann

$$ax^2+b=a+2ay+ay^2+b=m^2+2ay+ay^2.$$

Wir setzen jetzt

$$m^2+2ay+ay^2=(m+ky)^2=m^2+2mky+k^2y^2$$

und erhalten

$$y=\frac{2mk-2a}{a-k^2}, \quad x=\frac{k^2-2mk+a}{k^2-a},$$

wo k jede Zahl sein kann.

**) Wird nämlich $30x^2+12x=k^2x^2$ angenommen, so folgt

$$x=\frac{12}{k^2-30};$$

also ist

$$30x^2+5x=30\left(\frac{12}{k^2-30}\right)^2+5\left(\frac{12}{k^2-30}\right).$$

12 dividiert, $\frac{12}{x^2 - 30}$. Das Quadrat dieses Quotienten ist $\frac{144}{x^4 + 900 - 60x^2}$. Wird dasselbe mit 30 multipliziert und zum Produkt das Fünffache seiner Seite addiert, so erhält man $\frac{60x^2 + 2520}{x^4 + 900 - 60x^2}$, und dies soll gleich einem Quadrat sein. Da nun der Nenner ein Quadrat ist, so hat man nur den Zähler $60x^2 + 2520$ zu einem solchen zu machen. Es soll also eine Quadratzahl gefunden werden, deren Sechzigfaches, vermehrt um 2520, wieder ein Quadrat sei. Wenn wir es daher bei Bildung des Dreiecks so eingerichtet hätten, dafs $60 + 2520$ ein Quadrat wäre, so wäre die Aufgabe gelöst.

Die Zahl 60 entsteht nun durch Multiplikation der beiden Katheten, und 2520 ist das Produkt aus drei Faktoren, nämlich der gröfseren Kathete, der Differenz der beiden Katheten und dem Flächeninhalt des Dreiecks. Es kommt also darauf an, ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu ermitteln, dafs das Produkt der beiden Katheten eine Quadratzahl wird, wenn man das Produkt aus der gröfseren Kathete, der Differenz beider Katheten und dem Flächeninhalt des Dreiecks dazu zählt. Wenn wir daher die gröfsere Kathete gleich einer Quadratzahl setzen und alles [den ganzen Ausdruck, der ein Quadrat werden soll] durch dieselbe dividieren, so mufs die Summe der kleineren Kathete und des Produkts aus der Differenz beider Katheten in die Fläche des Dreiecks ein Quadrat werden. Die Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, zu zwei gegebenen Zahlen, nämlich dem Flächeninhalt und der kleineren Kathete, ein Quadrat zu ermitteln, welches ein Quadrat bleibt, wenn man es mit der einen der gegebenen Zahlen multipliziert und die zweite gegebene Zahl dazu zählt. Diese Aufgabe löst aber der obige Hilfssatz, und zwar giebt er als Seiten des Dreiecks die Zahlen 3, 4, 5.

Ich drücke jetzt die Seiten des Dreiecks durch x mit den erhaltenen Zahlen als Koeffizienten aus; dann soll sowohl $6x^2 + 4x$, als auch $6x^2 + 3x$ ein Quadrat werden. Wenn wir die Gleichung mit dem gröfseren Koeffizienten

$$[6x^2 + 4x = k^2x^2]$$

auflösen, so erhalten wir

$$x = \frac{4}{k^2 - 6}.$$

Es ist also

$$x^2 = \frac{16}{k^4 + 36 - 12k^2}$$

und

$$6x^2 + 3x = \frac{12k^2 + 24}{k^4 + 36 - 12k^2}.$$

Daher mufs $12k^2 + 24$ [also auch $3k^2 + 6$] zu einem Quadrate gemacht werden.

Wir sind somit zu der Aufgabe geführt, eine Quadratzahl zu ermitteln, die ein Quadrat bleibt, wenn man sie mit der kleineren der gegebenen Zahlen [3] multipliziert und zum Produkt die gröfsere gegebene Zahl [6] addiert. Eine solche Quadratzahl ist 25. Folglich ist $k^2 = 25$, $k = 5$. Wir haben daher, um $6x^2 + 4x$ in ein Quadrat zu verwandeln,

$$6x^2 + 4x = 25x^2$$

zu setzen; dann ergiebt sich

$$x = \frac{4}{19},$$

und wir erhalten als Seiten des Dreiecks $\frac{12}{19}, \frac{16}{19}, \frac{20}{19}$, welche Werte auch der Aufgabe genügen*).

---

*) Wird die gröfsere Kathete gleich ax, die kleinere gleich $2bx$ gesetzt, so soll zunächst $abx^2 + ax$ ein Quadrat, etwa

$$abx^2 + ax = m^2x^2$$

sein. Daraus folgt

$$x = \frac{a}{m^2 - ab}.$$

Es soll aber auch $abx^2 + 2bx$ ein Quadrat werden. Setzt man den für x erhaltenen Wert in diesen Ausdruck ein, so reduziert sich die Aufgabe darauf, $\frac{a^3b + 2ab(m^2 - ab)}{(m^2 - ab)^2}$ zu einem Quadrat zu machen. Da nun der Nenner ein Quadrat ist, so mufs der Zähler, d. i.

$$2abm^2 + a \,.\, ab \,.\, (a - 2b)$$

ein Quadrat werden.

Diophant wählt jetzt a und b so, dafs der Aufgabe 12 genügt wird. Es ist also erstens a eine Quadratzahl; daher ist nur

$$2bm^2 + ab(a - 2b)$$

14. Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, dessen Flächeninhalt ein Quadrat wird, wenn man jede der Katheten davon subtrahiert.

Auflösung. Wenn wir das Dreieck wieder wie in der vorhergehenden Aufgabe als der Form nach gegeben voraussetzen, so kommt es darauf an, ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, welches dem Dreieck mit den Seiten 3, 4, 5 ähnlich ist. Werden die Seiten desselben durch x mit diesen

---

in ein Quadrat zu verwandeln. Weiter nimmt Diophant $a - 2b = 1$ an (was den in 12 von ihm gefundenen Werten $a = 4$, $2b = 3$ entspricht), und da nach (12) auch $ab + 2b$ eine Quadratzahl ist, so liefert der Hilfssatz in (12) unendlich viele Werte von m, welche

$$2bm^2 + ab(a - 2b)$$

zu einem Quadrat machen. Hat man m bestimmt, so kennt man auch den Wert von x, und damit ist die Aufgabe gelöst.

Anmerkung Fermats:

„Diophant giebt uns nur eine Art von (einander ähnlichen) Dreiecken, welche der Aufgabe genügen. Nach meiner Methode sind aber unendlich viele Dreiecke verschiedener Art vorhanden, welche der Reihe nach aus dem von Diophant gegebenen hergeleitet werden.

Es sei nämlich das Dreieck mit den Seiten 3, 4, 5 gefunden, welches die Eigenschaft hat, dafs das Produkt der beiden Katheten ein Quadrat wird, wenn man das Produkt aus der gröfseren Kathete, der Differenz beider Katheten und dem Flächeninhalt dazu zählt. Um aus demselben ein zweites Dreieck von derselben Beschaffenheit herzuleiten, nehmen wir die gröfsere der beiden Katheten des gesuchten Dreiecks gleich 4, die kleinere dagegen gleich $3 + x$ an. Dann sind das Produkt beider Katheten und das Produkt aus der gröfseren Kathete, der Differenz beider Katheten und der Fläche zusammen gleich $36 - 12x - 8x^2$, und dieser Ausdruck soll ein Quadrat werden. Da aber 4 und $3 + x$ die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind, so mufs auch die Summe ihrer Quadrate eine Quadratzahl sein. Diese Summe ist aber $25 + 6x + x^2$, und auch dieser Ausdruck ist zu einem Quadrat zu machen. Es entsteht also eine doppelte Gleichung; denn sowohl $36 - 12x - 8x^2$, als auch $25 + 6x + x^2$ mufs ein Quadrat werden. Die Lösung dieser doppelten Gleichung macht aber keine Schwierigkeit.“

Zahlen als Koeffizienten, also durch $3x$, $4x$, $5x$ ausgedrückt, so soll zunächst $6x^2 - 4x$ ein Quadrat sein.

Wenn wir nun voraussetzen, dafs dies Quadrat kleiner als $6x^2$ sei, so ergiebt sich*) für x der Bruch, der entsteht, wenn man 4 durch die Differenz zwischen 6 und einer gewissen Quadratzahl dividiert. Wird dies Quadrat mit k^2 bezeichnet, so soll noch für den erhaltenen Wert von x auch der Ausdruck $6x^2 - 3x$ ein Quadrat werden. Es ist aber

$$6x^2 = \frac{96}{k^4 + 36 - 12k^2};$$

ferner ist

$$3x = \frac{12}{6 - k^2} = \frac{72 - 12k^2}{k^4 + 36 - 12k^2},$$

und wenn wir diesen letzten Bruch von $\frac{96}{k^4 + 36 - 12k^2}$ subtrahieren, so bleibt $\frac{12k^2 + 24}{k^4 + 36 - 12k^2}$. Da nun der Nenner dieses Bruches ein Quadrat ist, so mufs auch $12k^2 + 24$ ein Quadrat werden, und das geschieht für $k = 1$.

Ich setze daher $6x^2 - 4x = x^2$ und erhalte

$$x = \frac{4}{5}.$$

Die Seiten des gesuchten rechtwinkligen Dreiecks werden folglich $\frac{12}{5}$, $\frac{16}{5}$ und 4 sein.

Will man für k nicht den Wert 1 benutzen, so hat man [um $12k^2 + 24$, also auch $3k^2 + 6$ zu einem Quadrat zu machen] k durch $l + 1$ zu ersetzen. Dann wird

$$3k^2 + 6 = 3l^2 + 6l + 9,$$

und diesen Ausdruck in ein Quadrat zu verwandeln ist sehr leicht. Man findet dabei, dafs l nicht gröfser als $\frac{13}{9}$ sein darf; dann wird die Seite des Quadrats, d. i. $l + 1$, nicht gröfser als $\frac{22}{9}$ sein, und wenn man das so ermittelte Quadrat von 6

---

*) $$6x^2 - 4x = k^2x^2,$$

$$x = \frac{4}{6 - k^2}.$$

subtrahiert, so erhält man gleichfalls einen rationalen Wert von x*).

15. Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, dessen Flächeninhalt eine Quadratzahl wird, sowohl wenn man die Hypotenuse, als auch wenn man die eine Kathete davon subtrahiert.

Auflösung. Das Dreieck sei der Form nach gegeben durch seine Seiten $3x$, $4x$ und $5x$; dann soll jeder der Ausdrücke $6x^2 - 5x$ und $6x^2 - 3x$ ein Quadrat werden.

Wenn ich nun zunächst $6x^2 - 3x$ zu einem Quadrat mache $[6x^2 - 3x = k^2x^2]$, so wird $x = \frac{3}{6 - k^2}$. Für diesen Wert von x wird

$$6x^2 = \frac{54}{k^4 + 36 - 12k^2}.$$

Von diesem Bruche $\frac{54}{k^4 + 36 - 12k^2}$ ist nun

$$[5x =] \frac{90 - 15k^2}{k^4 + 36 - 12k^2}$$

zu subtrahieren und der Rest zu einem Quadrat zu machen. Da der Nenner des Restes eine Quadratzahl ist, so hat man nur $15k^2 - 36$ in ein Quadrat zu verwandeln.

Diese Forderung ist jedoch nicht zu erfüllen, da sich 15 nicht in zwei Quadrate zerfällen lässt**). Daraus folgt aber

*) Die Lösung dieser Aufgabe ist im wesentlichen dieselbe wie die der vorhergehenden.

Zusatz von Fermat: „Nach meiner Methode läſst sich die folgende sonst sehr schwierige Aufgabe lösen: Ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu ermitteln, daſs jede der Katheten eine Quadratzahl als Rest giebt, wenn man den Flächeninhalt von ihr subtrahiert.“

**) Der Ausdruck $ax^2 - b^2$ läſst sich allerdings nur dann in ein Quadrat verwandeln, wenn a in zwei — ganze oder gebrochene — Quadratzahlen zerfällt werden kann. Ist nämlich $\frac{m}{n}$ ein Wert von x, für welchen dieser Ausdruck ein Quadrat c^2 wird, also nicht, dafs auch die ursprüngliche Aufgabe unmöglich sei; wir haben nur über das Dreieck nähere Bestimmungen zu treffen.

Nun ist $15k^2$ dadurch entstanden, dafs wir ein Quadrat, welches kleiner als der Flächeninhalt ist, mit dem Produkt aus der Hypotenuse und der einen Kathete multipliziert haben. Die von $15k^2$ zu subtrahierende Zahl 36 ist aber das Produkt aus drei Faktoren: dem Flächeninhalt, einer der Katheten und der Differenz zwischen der Hypotenuse und eben dieser Kathete. Es kommt also zunächst darauf an, ein rechtwinkliges Dreieck und eine Quadratzahl zu ermitteln, die kleiner als die Fläche des Dreiecks und so beschaffen ist, dafs, wenn man das Quadrat mit dem Produkt aus der Hypotenuse und der einen Kathete multipliziert und von dem Resultat das Produkt aus dem Flächeninhalt, der nämlichen Kathete und der Differenz zwischen der Hypotenuse und eben dieser Kathete subtrahiert, der Rest ein Quadrat sei.

[Bachet, welcher die hier vorhandene Lücke des Originals ausfüllt, zeigt, dafs allen diesen Bedingungen genügt wird,

---

$$a\frac{m^2}{n^2} - b^2 = c^2,$$

so ergiebt sich

$$a = (b^2 + c^2)\frac{n^2}{m^2} = \left(\frac{bn}{m}\right)^2 + \left(\frac{cn}{m}\right)^2.$$

Auch hat es keine Schwierigkeit, einen Ausdruck $(a^2 + b^2)x^2 - c^2$ in ein Quadrat zu verwandeln. Setzt man nämlich

$$(a^2 + b^2)x^2 - c^2 = (ax + k)^2,$$

so erhält man leicht

$$x = \frac{ak + \sqrt{(a^2 + b^2)k^2 + b^2c^2}}{b^2},$$

und es ist noch die Wurzelgröfse rational zu machen. Das geschieht durch die Annahme

$$(a^2 + b^2)k^2 + b^2c^2 = (bc + ku)^2,$$

welche

$$k = \frac{2bcu}{a^2 + b^2 - u^2}$$

giebt, wo u unbestimmt bleibt. Für jedes rationale u wird sowohl k wie x rational.

wenn man ein rechtwinkliges Dreieck wählt, welches vermittels zweier ähnlichen Flächenzahlen ab^2 und a gebildet wird. Dieses Dreieck hat die Hypotenuse $a^2b^4 + a^2$, die Katheten $a^2b^4 - a^2$ und $2a^2b^2$, den Flächeninhalt $(a^2b^4 - a^2)\,a^2b^2$. Als Quadrat haben wir das Produkt zu nehmen, dessen einer Faktor die Differenz zwischen der Hypotenuse und derjenigen Kathete ist, welche gleich dem doppelten Produkt der beiden benutzten Zahlen ist, während der zweite Faktor die Hälfte eben derselben Kathete ist. Dies Quadrat ist also gleich

$$(a^2b^4 + a^2 - 2a^2b^2)\,a^2b^2 = (ab^2 - a)^2\,a^2b^2.$$

Es ist nun erstens zu zeigen, dafs das gewählte Quadrat kleiner als die Fläche des Dreiecks, d. h. dafs

$$(ab^2 - a)^2\,a^2b^2 < (a^2b^4 - a^2)\,a^2b^2,$$

oder

$$a^2b^4 + a^2 - 2a^2b^2 < a^2b^4 - a^2,$$

oder

$$2a^2 < 2a^2b^2$$

ist; das ist aber offenbar der Fall, wenn, wie es hier geschieht, $b > 1$ vorausgesetzt wird.

Zweitens haben wir darzuthun, dass das Produkt aus der Hypotenuse und der gewählten Kathete gleich der Summe zweier Quadrate ist. Das geht aus der Identität

$$(x^2 + y^2)\,(u^2 + v^2) = (xu + yv)^2 + (xv - yu)^2$$

hervor, welche

$$(a^2b^4 + a^2)\cdot 2a^2b^2, \text{ d. i. } (a^2b^4 + a^2)\,(a^2b^2 + a^2b^2)$$
$$= (a^2b^3 + a^2b)^2 + (a^2b^3 - a^2b)^2$$

liefert.

Endlich ist noch zu zeigen, dafs das Produkt aus dem Quadrat, der Hypotenuse und der gewählten Kathete, vermindert um das Produkt aus dem Flächeninhalt, derselben Kathete und der Differenz zwischen der Hypotenuse und eben dieser Kathete, also der Ausdruck

$$(ab^2 - a)^2a^2b^2(a^2b^4 + a^2)2a^2b^2 - (a^2b^4 - a^2)a^2b^2\cdot 2a^2b^2(ab^2 - a)^2$$

ein Quadrat sei. Derselbe ist aber offenbar gleich

$$(ab^2 - a)^2\,a^4b^4\,(2a^2b^4 + 2a^2 - 2a^2b^4 + 2a^2)$$
$$= (ab^2 - a)^2\,a^4b^4\cdot 4a^2,$$

und somit ist bewiesen, dafs unter der gemachten Voraussetzung auch die letzte Bedingung erfüllt ist.]

Wir werden also die Aufgabe lösen, wenn wir voraussetzen, dafs die Zahlen, vermittels welcher die Seiten des Dreiecks gebildet werden, ähnliche Flächenzahlen sind. Es werde z. B. das Dreieck vermittels der Zahlen 4 und 1 gebildet, so ist das Quadrat, welches kleiner als die Fläche sein soll, gleich 36 zu setzen. Wenn wir nun die Seiten des Dreiecks durch x mit den erhaltenen Zahlen als Koeffizienten, also durch $8x$, $15x$, $17x$ ausdrücken, so ergiebt sich für die Differenz zwischen dem Flächeninhalt und der einen Kathete $60x^2 - 8x$. Wird dieser Ausdruck gleich $36x^2$ gesetzt, so erhält man

$$x = \frac{1}{3}.$$

Wenn man diesen Wert in die Ausdrücke für die Seiten einsetzt, so erhält man für dieselben die Werte $\frac{8}{3}$, $\frac{15}{3}$, $\frac{17}{3}$, welche der Aufgabe auch genügen*).

---

16. Hilfssatz. Wenn eine Quadratzahl dadurch erhalten wird, dafs man ein Quadrat mit der einen von

---

*) Hat das Dreieck die Katheten mx, $2nx$ und die Hypotenuse px, so soll zunächst $mnx^2 \mp 2nx$ ein Quadrat, etwa gleich k^2x^2 sein. Daraus folgt

$$x = \frac{2n}{\pm mn \mp k^2}.$$

Ferner soll auch $mnx^2 \mp px$ ein Quadrat werden; für den erhaltenen Wert von x geht dieser Ausdruck über in

$$\frac{4mn^3 - 2mn^2p + 2npk^2}{(mn - k^2)^2},$$

und da der Nenner ein Quadrat ist, so hat man nur den Zähler zu einem solchen zu machen; das geschieht aber, wie oben gezeigt worden ist, wenn man

$$m = a^2(b^4 - 1), \quad 2n = 2a^2b^2, \quad p = a^2(b^4 + 1)$$

und

$$k^2 = a^2(b^2 - 1)^2 \cdot a^2b^2$$

annimmt. [Die unteren Zeichen beziehen sich auf die 17. Aufgabe.]

zwei gegebenen Zahlen multipliziert und von dem Produkt die zweite gegebene Zahl subtrahiert, so läſst sich noch eine andere Quadratzahl ermitteln, welche gröſser als die zuerst genommene ist und dasselbe leistet.

Auflösung. Es seien die Zahlen 3 und 11 gegeben. Wenn wir das Quadrat über der Seite 5 mit 3 multiplizieren und vom Produkt 11 subtrahieren, so erhalten wir wieder ein Quadrat, nämlich dasjenige über der Seite 8. Man soll nun ein anderes Quadrat ermitteln, welches gröſser als 25 ist und dasselbe leistet.

Wird die Seite des gesuchten Quadrats gleich $x + 5$ angenommen, so wird das Quadrat selbst $x^2 + 10x + 25$ sein. Wenn man dasselbe mit 3 multipliziert und das Produkt um 11 verringert, so erhält man $3x^2 + 30x + 64$. Setzen wir diesen Ausdruck gleich dem Quadrat über der Seite $8 - 2x$, so wird $x = 62$. Die Seite des gesuchten Quadrats ist also 67, das Quadrat selbst 4489, und diese Zahl genügt der gestellten Forderung*).

---

17. Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, dessen Flächeninhalt ein Quadrat wird, sowohl wenn man die Hypotenuse, als auch wenn man die eine Kathete dazu zählt.

Auflösung. Wenn wir annehmen, das Dreieck sei der Form nach gegeben, so haben wir ein rechtwinkliges Dreieck näher zu bestimmen und dazu eine Quadratzahl zu suchen, die gröſser als die Fläche des Dreiecks und zugleich so be-

---

*) Wenn $ax^2 - b$ für $x = k$ eine Quadratzahl c^2 wird, so liefert die Annahme $x = k + y$

$$ax^2 - b = ay^2 + 2aky + c^2,$$

und wird dieser Ausdruck gleich $(c - ly)^2$ gesetzt, so erhält man

$$y = \frac{2ak + 2cl}{l^2 - a}, \quad x = \frac{ak + 2cl + l^2k}{l^2 - a} = k + \frac{2(ak + cl)}{l^2 - a},$$

wo l unbestimmt ist und stets so angenommen werden kann, daſs der Wert von x gröſser als k wird.

schaffen ist, dafs, wenn wir diese Quadratzahl mit dem Produkt aus der Hypotenuse und der einen Kathete multiplizieren und von dem Resultat das Produkt aus dem Flächeninhalt, der genommenen Kathete und der Differenz zwischen der Hypotenuse und eben dieser Kathete subtrahieren, der Rest ein Quadrat werde.

Wir bilden daher das rechtwinklige Dreieck vermittels der Zahlen 4 und 1 und nehmen als Quadrat die Zahl 36 an. Diese ist aber nicht gröfser als der Flächeninhalt. Wir haben dann aber zwei Zahlen, nämlich erstens das Produkt aus der Hypotenuse und der einen Kathete, d. i. 136, zweitens das Produkt aus dem Flächeninhalt, der genommenen Kathete und der Differenz zwischen der Hypotenuse und eben dieser Kathete, also 4320. Da wir nun ein Quadrat erhalten, wenn wir die Quadratzahl 36 mit 136 multiplizieren und von dem Produkte 4320 subtrahieren, so können wir ein anderes Quadrat bestimmen, welches gröfser als 36 ist und dasselbe leistet. Wenn wir dasselbe gleich $x^2 + 12x + 36$ setzen und dem oben dargelegten Verfahren folgen, so finden wir unendlich viele Quadratzahlen, welche der Aufgabe genügen; eine derselben wird 676 sein. Wir drücken nun die Seiten des Dreiecks durch $8x$, $15x$, $17x$ aus; dann wird

$$60x^2 + 8x = 676x^2,$$

und daraus folgt

$$x = \frac{1}{77},$$

welcher Wert in die Ausdrücke für die Seiten einzusetzen ist*).

---

18. Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, dafs die Zahl, welche die

*) Das Verfahren ist schon in der Anmerkung zur 15. Aufgabe skizziert.

Fermat fügt hinzu:

„Man versuche mit Hülfe meiner Methode die sonst sehr schwierige Aufgabe zu lösen: Ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, dafs sowohl die Hypotenuse, als auch die eine Kathete eine Quadratzahl wird, wenn man sie um die Fläche vermindert."

Länge der Halbierungslinie eines der spitzen Winkel ausdrückt, eine rationale sei.

Auflösung. Wir setzen die Halbierungslinie des spitzen Winkels gleich $5x$ und einen [den im Scheitel des rechten Winkels endigenden] Abschnitt der Basis [gegenüberliegenden Kathete] gleich $3x$, so wird das Lot gleich $4x$ sein. Ferner nehmen wir von vorn herein an, die Basis sei gleich einer beliebigen durch 3 teilbaren Zahl, etwa gleich 3, so wird der zweite Abschnitt derselben $3 - 3x$ sein. Da nun der Winkel halbiert und das Lot $1\frac{1}{3}$ mal so grofs wie der [anliegende] Abschnitt der Basis ist, so mufs auch die Hypotenuse $1\frac{1}{3}$ mal so grofs wie der Rest der Basis sein [Euklid, VI, 3]. Dieser Rest ist aber gleich $3 - 3x$; folglich ist die Hypotenuse gleich $4 - 4x$.

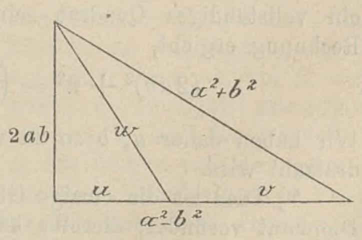
Es ist jetzt noch zu bewirken, dafs das Quadrat der Hypotenuse, d. i. $16x^2 + 16 - 32x$ gleich der Summe der beiden Kathetenquadrate, d. i. gleich $16x^2 + 9$, werde; dann wird

$$x = \frac{7}{32}.$$

Alles andere ist klar. Wenn wir die Zahlen, die sich ergeben, sämtlich mit 32 multiplizieren, so erhalten wir für das Lot 28, für die Basis 96, für die Hypotenuse 100 und für die Halbierungslinie 35*).

---

*) Ist das rechtwinklige Dreieck vermittels der Zahlen a, b gebildet, so dafs es die Katheten $a^2 - b^2$, $2ab$, die Hypotenuse $a^2 + b^2$ hat, und werden die Teile, in welche die Winkelhalbierende w die Kathete $a^2 - b^2$ zerlegt, mit u, v bezeichnet, so können wir



$$u = (a^2 - b^2)\,\xi,$$
$$v = (a^2 - b^2)\,(1 - \xi)$$

setzen. Dann ergiebt sich aus der Proportion

$$2ab : (a^2 + b^2) = u : v,$$

dafs
$$\xi = \frac{2ab}{(a+b)^2}$$

19. Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, daſs die Summe des Flächeninhalts und der Hypotenuse eine Quadratzahl, der Umfang ein Kubus sei.

Auflösung. Wir nehmen an, der Flächeninhalt des Dreiecks sei x und die Hypotenuse gleich der Differenz zwischen irgend einer Quadratzahl und x, etwa gleich $16 - x$. Da wir nun den Flächeninhalt gleich x gesetzt haben, so wird das Produkt der Katheten $2x$ sein. $2x$ ist aber das Produkt aus x und 2. Wenn wir daher die eine Kathete gleich 2 annehmen, so wird die andere x sein. Der Umfang ist dann 18, und das ist keine Kubikzahl.

Nun ist 18 dadurch entstanden, daſs wir eine willkürlich angenommene Quadratzahl um 2 vermehrt haben. Wir müssen also eine Quadratzahl suchen, die zu einem Kubus wird, wenn man 2 dazu zählt, so daſs also der Kubus die Quadratzahl um 2 übertrifft.

Wird die Seite dieses Quadrats gleich $x + 1$, die des Kubus gleich $x - 1$ angenommen, so wird das Quadrat $x^2 + 2x + 1$, der Kubus $x^3 + 3x - 3x^2 - 1$ sein. Nun soll der Kubus um 2 gröſser als das Quadrat sein, oder das Quadrat soll gleich dem Kubus werden, wenn man es um 2 vergröſsert; es soll also

$$x^2 + 2x + 3 = x^3 + 3x - 3x^2 - 1\text{*)}$$

sein, und daraus ergiebt sich

$$x = 4.$$

---

sein muſs. Nun soll w eine rationale Zahl, also $(2ab)^2 + u^2$ ein vollständiges Quadrat sein. Es ist aber, wie eine leichte Rechnung ergiebt,

$$(2ab)^2 + u^2 = \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 \cdot 2(a^2 + b^2).$$

Wir haben daher a, b so zu wählen, daſs $2(a^2 + b^2)$ eine Quadratzahl wird.

*) Dies ist die einzige Gleichung dritten Grades, die sich im Diophant vorfindet; dieselbe kann auch in der Form

$$4x^2 + 4 = x^3 + x$$

geschrieben werden, und es ist wahrscheinlich, daſs Diophant seine Lösung durch Division mit $x^2 + 1$ erhalten hat.

Somit wird die Seite des Quadrats 5, die des Kubus 3, also das Quadrat 25, der Kubus 27 sein. Ich ändere daher das rechtwinklige Dreieck, und indem ich die Fläche desselben gleich x annehme, setze ich die Hypotenuse gleich $25 - x$. Die Basis bleibt 2, das Lot x. Es mufs nun noch das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der beiden Kathetenquadrate, also

$$x^2 + 625 - 50x = x^2 + 4$$

sein. Daraus erhält man

$$x = \frac{621}{50},$$

und durch Einsetzung dieses Wertes in die Ausdrücke für die Seiten erhält man Zahlen, welche der Aufgabe genügen*).

---

*) Diophant setzt den Inhalt des Dreiecks gleich x und, um die erste Forderung sogleich zu erfüllen, die Hypotenuse gleich $a^2 - x$. Da nun das Produkt der Katheten gleich $2x$ ist, so wird, wenn die eine Kathete gleich 2, die andere gleich x angenommen wird, der Umfang $a^2 + 2$ betragen, und es ist a so zu wählen, dafs dieser Ausdruck ein Kubus sei. Sobald a bestimmt ist — Diophant wählt $a = 5$ —, liefert die Gleichung

$$x^2 + 4 = (a^2 - x)^2$$

den Wert von x, nämlich

$$x = \frac{(a^2 + 2)(a^2 - 2)}{2a^2}.$$

Zusatz von Fermat:

„Ob sich aber aufser 25 noch eine andere ganze Quadratzahl ermitteln läfst, welche durch Addition von 2 zu einem Kubus wird? Dies scheint auf den ersten Blick eine recht schwierige Untersuchung zu erheischen. Ich kann jedoch durch einen unanfechtbaren Beweis darthun, dafs von allen ganzen Zahlen 25 das einzige Quadrat ist, das ein Kubus wird, wenn man es um 2 vermehrt. Unter den Brüchen giebt es freilich unendlich viele, welche diese Eigenschaft haben, und Bachets Verfahren lehrt sie zu finden. Um die Lehre von den ganzen Zahlen, welche so ungemein schön ist und so viele Feinheiten enthält, hat sich weder Bachet noch irgend ein anderer, dessen Schriften zu mir gelangt sind, bis jetzt bemüht."

Dafs die Gleichung $x^2 + 2 = y^3$ nur die eine Lösung (in ganzen Zahlen) $x = 5$, $y = 3$ hat, und dafs ebenso $x^2 + 4 = y^3$

20. Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, dass die Summe der Fläche und der Hypotenuse eine Kubikzahl, der Umfang eine Quadratzahl sei.

Auflösung. Wenn wir, wie in der vorhergehenden Aufgabe, die Fläche gleich x und die Hypotenuse gleich der Differenz zwischen irgend einer Kubikzahl und x setzen, so finden wir, dass es darauf ankommt, einen Kubus zu finden, welcher ein Quadrat wird, wenn man ihn um 2 vermehrt.

Wir setzen die Seite des Kubus gleich $x - 1$; dann wird die Summe des Kubus und der Zahl 2 gleich

$$x^3 + 3x + 1 - 3x^2.$$

Dieser Ausdruck soll ein Quadrat werden; derselbe sei gleich dem Quadrat über der Seite $1\frac{1}{2}x + 1$, so wird $x = \frac{21}{4}$. Folglich wird die Seite des Kubus $\frac{17}{4}$, also der Kubus selbst $\frac{4913}{64}$ sein.

Daher setze ich den Flächeninhalt des Dreiecks wieder gleich x, die Hypotenuse gleich $\frac{4913}{64} - x$. Es ist aber die Basis gleich 2, das Lot x, und wenn wir das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der beiden Katheten-Quadrate setzen, so werden wir für x einen rationalen Wert finden*).

---

21. Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, dafs die Summe des Flächeninhalts und einer der Katheten eine Quadratzahl, der Umfang ein Kubus sei.

---

nur die beiden Lösungen $x = 2$, $y = 2$; $x = 11$, $y = 5$ besitzt, was Fermat in einem Briefe an Digby (Opera, p. 192) ausspricht, hat Euler (Algebra II, 192) bewiesen.

*) Diophant setzt wieder den Flächeninhalt gleich x, aber die Hypotenuse gleich $a^3 - x$. Weiter nimmt er wieder die Katheten gleich 2 und x an. Dann bleibt noch der Umfang, d. i. $a^3 + 2$ in ein Quadrat zu verwandeln. Sobald a bestimmt ist, giebt die Gleichung

$$(a^3 - x)^2 = 4 + x^2$$

den Wert von x.

Auflösung. Wir bilden das rechtwinklige Dreieck vermittels einer unbestimmten Zahl x und einer um 1 gröfseren Zahl, also vermittels x und $x + 1$. Es wird dann das Lot $2x + 1$, die Basis $2x^2 + 2x$, die Hypotenuse $2x^2 + 2x + 1$ sein.

Nun soll der Umfang ein Kubus und die Summe des Flächeninhalts und einer der Katheten eine Quadratzahl sein. Der Umfang $4x^2 + 6x + 2$, welcher ein Kubus sein soll, ist eine zusammengesetzte Zahl, nämlich das Produkt der Faktoren $4x + 2$ und $x + 1$. Wenn wir also jede Seite des Dreiecks durch $x + 1$ dividieren [die Katheten werden dann $\frac{2x + 1}{x + 1}$, $\frac{2x^2 + 2x}{x + 1}$, die Hypotenuse $\frac{2x^2 + 2x + 1}{x + 1}$ sein], so wird der Umfang gleich $4x + 2$, und dieser Ausdruck soll in einen Kubus verwandelt werden.

Weiter soll die Summe des Flächeninhalts und der einen Kathete eine Quadratzahl sein. Nun wird der Flächeninhalt $\frac{2x^3 + 3x^2 + x}{x^2 + 2x + 1}$, die eine Kathete ist $\frac{2x + 1}{x + 1}$, und wenn ich beide Brüche auf denselben Nenner bringe und dann addiere, so erhalte ich $\frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2x + 1}$ oder, wenn ich mit dem Nenner in den Zähler dividiere, $2x + 1$. Die Summe der beiden Brüche ist also $2x + 1$, und das soll ein Quadrat werden, während zugleich $4x + 2$ zu einem Kubus gemacht wird.

Die Aufgabe ist somit darauf zurückgeführt, einen Kubus zu suchen, welcher das Doppelte eines Quadrats ist. Diese Beziehung besteht zwischen 8 und 4. Es sei also

$$4x + 2 = 8,$$

so ergiebt sich

$$x = 1\tfrac{1}{2}.$$

Die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks werden daher

$$\frac{8}{5}, \quad \frac{15}{5}, \quad \frac{17}{5}$$

sein, und diese Werte genügen der Aufgabe*).

---

22. Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, dafs die Summe des Flä-

*) Siehe die Anmerkung zur folgenden Aufgabe.

cheninhalts und einer der Katheten ein Kubus, der Umfang eine Quadratzahl sei.

Auflösung. Wenn wir uns wieder des in der vorhergehenden Aufgabe angewandten Verfahrens bedienen, so finden wir, dafs es darauf ankommt, $4x + 2$ zu einem Quadrat und $2x + 1$ zu einem Kubus zu machen. Wir haben also ein Quadrat zu suchen, welches das Doppelte eines Kubus ist. Das ist der Fall mit den Zahlen 16 und 8. Wir setzen daher

$$16 = 4x + 2$$

und erhalten

$$x = 3\tfrac{1}{2}.$$

Das rechtwinklige Dreieck wird also die Seiten $\frac{16}{9}$, $\frac{63}{9}$, $\frac{65}{9}$ haben*).

---

23. Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, dafs der Umfang eine Quadratzahl, die Summe des Umfangs und des Flächeninhalts ein Kubus sei.

Auflösung. Wir bilden das rechtwinklige Dreieck vermittels der Zahlen x und 1. Dann wird die eine Kathete $2x$, die andere Kathete $x^2 - 1$, die Hypotenuse $x^2 + 1$ sein, und wir haben $2x^2 + 2x$ zu einem Quadrat, $x^3 + 2x^2 + x$ zu einem Kubus zu machen.

---

*) Wird das Dreieck vermittels der Zahlen x, y gebildet, so sind die Katheten $x^2 - y^2$, $2xy$, die Hypotenuse $x^2 + y^2$; das ähnliche Dreieck mit den Seiten $\frac{x^2 - y^2}{x}$, $2y$, $\frac{x^2 + y^2}{x}$ hat den Umfang $2(x + y)$, den Inhalt $\frac{(x + y)(x - y)y}{x}$. Wird zu letzterem die Kathete $\frac{x^2 - y^2}{x}$ addiert, so ergiebt sich als Summe

$$\frac{(x + y)(x - y)(y + 1)}{x}.$$

Nun soll in Nr. 21 der Umfang $2(x + y)$ ein Kubus, die Summe $\frac{(x + y)(x - y)(y + 1)}{x}$ ein Quadrat werden, während in der 22. Aufgabe das Umgekehrte verlangt wird. In beiden Aufgaben nimmt Diophant $x = y + 1$ an, wodurch die in Rede stehenden Ausdrücke sich in $2(2y + 1)$ und $2y + 1$ verwandeln.

Den Ausdruck $2x^2 + 2x$ in ein Quadrat zu verwandeln, ist leicht. Man erhält nämlich

$$\left[2x^2 + 2x = k^2x^2, \quad x = \frac{2}{k^2 - 2}\right]$$

den Wert von x, indem man 2 durch irgend eine um 2 verminderte Quadratzahl dividiert. x mufs dabei aber so bestimmt werden, dafs die Summe aus dem Kubus, dem Doppelten des Quadrats und der Zahl x selbst ein Kubus sei. Da nun $x = \frac{2}{k^2 - 2}$ ist, so ist

$$x^3 = \frac{8}{(k^2 - 2)^3}, \quad 2x^2 = \frac{8}{(k^2 - 2)^2}, \quad x = \frac{2}{k^2 - 2}.$$

Werden diese drei Brüche auf denselben Nenner gebracht und addiert, so erhält man $\frac{2k^4}{(k^2 - 2)^3}$. Da der Nenner dieses Bruches ein Kubus ist, so haben wir nur $2k^4$ oder, indem wir durch k^3 dividieren, $2k$ zu einem Kubus zu machen. Setzen wir $2k$ gleich irgend einer Kubikzahl, so erhalten wir für k die Hälfte dieser Zahl. Wenn wir z. B. 8 als diese Kubikzahl annehmen, so wird k die Hälfte von 8, d. i. 4, und $k^2 = 16$. Dann geht die Gleichung $2x^2 + 2x = k^2x^2$ über in

$$16x^2 = 2x^2 + 2x,$$

und daraus erhält man

$$x = \frac{1}{7}, \quad x^2 = \frac{1}{49}.$$

Hiervon müfste man nun 1 subtrahieren, da die eine Kathete $x^2 - 1$ ist. Die Aufgabe ist also [damit x positiv sei, mufs $k^2 > 2$, und damit $x > 1$ sei, mufs $k^2 < 4$ angenommen werden; k^2 ist aber der vierte Teil eines Kubokubus] darauf zurückgeführt, einen Kubus von der Beschaffenheit zu suchen, dafs ein Viertel seines Quadrats gröfser als 2 und kleiner als 4 sei.

Wenn wir diesen Kubus mit x^3 bezeichnen, so soll $\frac{1}{4}x^6$ gröfser als 2 und kleiner als 4 werden. Es mufs also x^6 gröfser als 8 und kleiner als 16 sein. Von dieser Beschaffenheit ist $\frac{729}{64}$, so dafs also der gesuchte Kubus $\frac{27}{8}$ ist.

Ich setze daher

$$2k = \frac{27}{8};$$

dann wird

$$k = \frac{27}{16}, \quad k^2 = \frac{729}{256},$$

und wenn wir 2 durch $k^2 - 2$ dividieren, so erhalten wir

$$x = \frac{512}{217}.$$

Von dem Quadrat dieses Ausdrucks läſst sich 1 subtrahieren*).

---

24. Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, daſs sein Umfang eine Kubikzahl, die Summe des Umfangs und des Flächeninhalts eine Quadratzahl sei.

Auflösung. Wir müssen zunächst folgende Aufgabe lösen: Es sind zwei Zahlen gegeben. Man soll ein rechtwinkliges Dreieck ermitteln, dessen Umfang gleich der einen und dessen Flächeninhalt gleich der anderen dieser Zahlen ist. Die gegebenen Zahlen seien 12 und 7, und es wird verlangt, daſs der Umfang des Dreiecks gleich 12, der Inhalt gleich 7 werde. Das Produkt der beiden Katheten wird dann 14 sein, und wenn wir die eine gleich $\frac{1}{x}$

---

*) Wird das Dreieck vermittels der Zahlen x, y gebildet, so ergiebt sich für den Umfang $2x^2 + 2xy$. Dieser Ausdruck soll ein Quadrat sein. Setzt man

$$2x^2 + 2xy = k^2 x^2,$$

so erhält man $x = \frac{2y}{k^2 - 2}$, so daſs der Umfang gleich $\frac{4k^2y^2}{(k^2-2)^2}$ wird.

Weiter ergiebt sich für den Inhalt

$$xy\,(x^2 - y^2) = \frac{8k^2y^4 - 2k^4y^4}{(k^2-2)^3},$$

also für die Summe von Umfang und Inhalt

$$\frac{4k^4y^2 - 8k^2y^2 + 8k^2y^4 - 2k^4y^4}{(k^2-2)^3}.$$

Da der Nenner dieses Ausdrucks schon ein Kubus ist, so hat man nur den Zähler zu einem solchen zu machen.

annehmen, so mufs die andere gleich $14x$ sein. Es ist aber der Umfang gleich 12, folglich die Hypotenuse gleich

$$12 - \frac{1}{x} - 14x.$$

Nun mufs noch das Quadrat dieses Ausdrucks, d. i.

$$\frac{1}{x^2} + 196x^2 + 172 - \frac{24}{x} - 336x$$

gleich der Summe der beiden Katheten-Quadrate, d. i. gleich $\frac{1}{x^2} + 196x^2$ sein. Wenn man die abzuziehenden Zahlen beiderseits addiert, dann Gleiches von Gleichem subtrahiert und endlich alles mit x multipliziert, so erhält man

$$172x = 336x^2 + 24.$$

$$[336x^2 - 172x = -24$$
$$(336x)^2 - 172(336x) = -24 \cdot 336$$
$$336x = 86 + \sqrt{86^2 - 24 \cdot 336}].$$

Diese Gleichung durch einen rationalen Wert von x zu befriedigen, ist unmöglich, wenn nicht das Quadrat des halben Koeffizienten von x, vermindert um das Produkt aus dem Koeffizienten von x^2 in das von x unabhängige Glied, ein Quadrat wird. Nun ist der Koeffizient von x die Summe, die sich ergiebt, wenn man das Quadrat des Umfangs und das Vierfache der Fläche zusammenzählt, und das Produkt aus dem Koeffizienten von x^2 in das von x unabhängige Glied ist das Achtfache des Produkts aus dem Quadrat des Umfangs und dem Inhalt. Wenn also Zahlen gegeben wären, welche den ausgesprochenen Bedingungen genügten, so würde die Aufgabe gelöst sein.

Es sei der Inhalt des Dreiecks gleich x, der Umfang eine Zahl, welche zugleich ein Kubus und eine Quadratzahl ist, z. B. 64. Um nun das Dreieck zu bestimmen, mufs man $4x$ zum Quadrat von 64 addieren, die Hälfte der erhaltenen Summe mit sich selbst multiplizieren, von dem Resultat das Achtfache des Produkts aus dem Quadrat des Umfangs und x subtrahieren und den Rest zu einem Quadrat machen. Man erhält auf diese Weise $4x^2 + 4\,194\,304 - 24\,576x$. Der vierte Teil dieses Ausdrucks ist

$$x^2 + 1\,048\,576 - 6144x,$$

und das soll ein Quadrat werden. Ferner soll aber auch $x + 64$ ein Quadrat sein. Man mache also in beiden Ausdrücken die von x unabhängigen Glieder einander gleich, nehme die Differenz der erhaltenen Ausdrücke, zerlege diese Differenz in zwei Faktoren und beendige die Lösung auf die bekannte Weise*).

---

*) Ist der Umfang des gesuchten Dreiecks u, der Inhalt f, so wird die eine Kathete $\frac{1}{x}$, die andere $2fx$, also die Hypotenuse $u - \frac{1}{x} - 2fx$ sein. Es mufs nun

$$\left(u - \frac{1}{x} - 2fx\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + (2fx)^2$$

sein. Diese Gleichung liefert

$$4fux = \frac{u^2 + 4f}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{u^2 + 4f}{2}\right)^2 - 8fu^2}.$$

Wir haben also f und u so zu wählen, dafs der unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck eine Quadratzahl wird. Aufserdem soll aber auch $f + u$ ein Quadrat und dabei u ein Kubus sein.

Diophant wählt nun für u die Zahl 64; für diese ist $\frac{u^2 + 4f}{2} = 2^{11} + 2f$. Es soll also $2^{22} + 2^{13}f + 2^2f^2 - 2^{15}f$, daher auch $2^{20} + 2^{11}f + f^2 - 2^{13}f$ ein Quadrat sein. Wir setzen diesen Ausdruck, d. i.

$$f^2 - 6144f + 2^{20} = w^2.$$

Ferner sei

$$f + 2^6 = v^2.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$f^2 - 22\,528f = w^2 - 2^{14}v^2.$$

Es liegt nun nahe

$$f = w + 2^7v$$

$$f - 22\,528 = w - 2^7v$$

anzunehmen. Daraus würde $v = 88$, $f = 7680$ folgen, was, wie sich leicht ergiebt, unmöglich ist. Da aber 22 528 durch 11 teilbar ist, so kann man nach Bachets Vorschlag auch

$$f^2 - 22\,528f = 11f\left(\frac{f}{11} - 2048\right) = w^2 - 2^{14}v^2$$

setzen, also

$$11f = w + 128v,$$

25. Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, dafs das Quadrat der Hypo-

---

$$\frac{f}{11} - 2048 = w - 128v.$$

Daraus folgt leicht

$$\frac{15f}{11} + 256 = 32v$$

oder

$$v = \frac{15f}{352} + 8,$$

und wenn man $f + 2^6 = \left(\frac{15f}{352} + 8\right)^2$ setzt, so erhält man

$$f = 175\tfrac{49}{225}.$$

Für diesen Wert und für $u = 2^6$ geht die Gleichung

$$\left(u - \frac{1}{x} - 2fx\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + (2fx)^2$$

über in

$$78\,848x^2 - 8432x = -225,$$

und diese hat die beiden Wurzeln

$$x_1 = \frac{25}{448}, \quad x_2 = \frac{9}{176}.$$

Bei Anwendung der ersten Wurzel erhält man für die Hypotenuse $26\frac{118}{225}$, für die Katheten $17\frac{23}{25}$, $19\frac{5}{9}$; die Anwendung der zweiten Wurzel würde eine Vertauschung der Katheten zur Folge haben.

Anmerkung von Fermat:

„Wo doppelte Gleichungen (διπλοϊσότητες) nicht genügen, mufs man sich der dreifachen Gleichungen (τριπλοϊσότητες) bedienen, die meine Erfindung sind und den Weg zu sehr vielen schönen Aufgaben erhellen. Soll z. B. jeder der drei Ausdrücke $x + 4$, $2x + 4$, $5x + 4$ zu einem Quadrat gemacht werden, so entsteht eine dreifache Gleichung, deren Lösung mittels einer doppelten Gleichung bewirkt werden kann. Wird statt x eine Zahl gesetzt, die mit 4 zusammen ein Quadrat giebt, z. B. $y^2 + 4y$, so wird der erste jener in ein Quadrat zu verwandelnden Ausdrücke $y^2 + 4y + 4$, der zweite $2y^2 + 8y + 4$, der dritte $5y^2 + 20y + 4$. Der erste ist nun schon seiner Zusammensetzung nach ein Quadrat; daher haben wir nur $2y^2 + 8y + 4$, sowie $5y^2 + 20y + 4$ zu Quadraten zu machen, und so liegt eine doppelte Gleichung vor, welche zunächst freilich nur eine Lösung bietet; aber aus dieser einen Lösung geht wieder eine neue hervor, aus der tenuse gleich der Summe eines andern Quadrats und der Seite dieses letzteren sei, und daſs ferner das

---

zweiten ergiebt sich eine dritte, u. s. f. ins Unendliche. Das Verfahren besteht darin, daſs man, sobald für eine Unbekannte x ein Wert a gefunden ist, $x = y + a$ in die Ausdrücke einsetzt. Auf diese Weise kommen zu den bereits gefundenen Lösungen noch unendlich viele neue Lösungen hinzu, und zwar wird die letzte immer von der zunächst vorhergehenden hergeleitet. Mit Hülfe dieser Erfindung kann ich unendlich viele rechtwinklige Dreiecke von gleichem Flächeninhalt ermitteln, was selbst Diophant nicht im Stande gewesen zu sein scheint, wie aus der 8ten Aufgabe des 5ten Buches hervorgeht, in welcher er nur drei Dreiecke gleicher Fläche bestimmt, um in der folgenden Aufgabe mittels derselben drei Zahlen zu bilden, eine Aufgabe, welche, wie ich zuerst gefunden habe, sich auf unendlich viele Zahlen ausdehnen läſst.“

Im Anschluſs an die vorliegende Aufgabe giebt Bachet eine Theorie der doppelten Gleichungen. Fermat bemerkt dazu:

„Dieser Untersuchung über die doppelten Gleichungen könnte ich noch vieles hinzufügen, was weder die alten, noch die neueren Schriftsteller entdeckt haben. Um den Wert und Nutzen meiner Methode ans Licht treten zu lassen, genügt es, die folgende recht schwere Aufgabe zu lösen: Ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, daſs die Hypotenuse eine Quadratzahl ist, und daſs die Summe der Katheten ebenfalls ein Quadrat ist. Das gesuchte Dreieck hat die Seiten 4687298610289, 4565486027761, 1061652293520 und wird vermittels der Zahlen 2150905 und 246792 gebildet. Nach einer anderen Methode habe ich die Lösung der folgenden Aufgabe entdeckt: Ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, daſs das Quadrat der Differenz der Katheten ein Quadrat bleibt, wenn man das Doppelte des Quadrats der kleineren Kathete davon subtrahiert. Eines der Dreiecke, welche dieser Aufgabe genügen, hat die Seiten 1525, 1517, 156; dasselbe wird vermittels der Zahlen 39 und 2 gebildet.

Ja, ich füge zuversichtlich hinzu, daſs die beiden rechtwinkligen Dreiecke, welche ich als Lösungen der beiden genannten Aufgaben gegeben habe, die kleinsten in ganzen Zahlen sind, welche den Bedingungen der Aufgaben genügen.

Quadrat der Hypotenuse, wenn man es durch eine Kathete dividiert, gleich der Summe eines Kubus und der Seite desselben wird.

Auflösung. Wir setzen eine der Katheten gleich x, die andere gleich x^2; dann sind schon die beiden Bedingungen erfüllt, dafs das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe eines Quadrats und der Seite desselben sei, und dafs das Quadrat der Hypotenuse, wenn man es durch eine Kathete dividiert, gleich der Summe eines Kubus und der Seite desselben wird.

Wir haben also nur noch zu bewirken, dafs $x^4 + x^2$ gleich einem Quadrat wird. Wenn wir diesen Ausdruck durch x^2 dividieren, so erhalten wir $x^2 + 1$, und das soll ein Quadrat werden. Wird der letzte Ausdruck gleich dem Quadrat

---

Meine Methode ist folgende: Man suche, die vorgelegte Aufgabe nach der gewöhnlichen Methode zu lösen. Wenn die Lösung schliefslich nicht gelingt, weil der Wert der Unbekannten mit dem Zeichen — versehen ist und daher kleiner als Null sein soll, so braucht man deshalb, sage ich zuversichtlich, nicht den Mut zu verlieren (eine Trägheit, welche, wie Vieta sagt, ihm und den alten Mathematikern innewohnte); sondern man versuche die Aufgabe von neuem und ersetze die Unbekannte x durch die Differenz, deren Minuend die neue Unbekannte y, deren Subtrahend der absolute Wert der bei der ersten Operation für x erhaltenen Zahl ist. Dadurch entsteht eine neue Gleichung, welche sicherlich die Lösung der Aufgabe in wahren (rationalen positiven) Zahlen geben wird. Auf diese Weise habe ich die beiden obigen Aufgaben, die sonst sehr schwer gewesen sein würden, gelöst. Ebenso habe ich bewiesen, dafs eine Zahl, welche die Summe zweier Kuben ist, sich in zwei andere Kuben zerfällen läfst, und habe zugleich gezeigt, wie man diese neuen Kuben findet; freilich ist dazu manchmal eine dreimalige Vornahme der Operation erforderlich. Oft ereignet es sich nämlich, dafs die wirkliche Lösung den geschickten und fleifsigen Rechner zu vielfachen Wiederholungen der Operation zwingt, wie man sehr leicht bei der Beschäftigung mit solchen Aufgaben erfahren wird."

über der Seite $x - 2$ gesetzt, so ergiebt sich $x = \frac{3}{4}$. Wie man dann weiter zu verfahren hat, liegt auf der Hand.

---

26. Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, dafs die eine seiner Katheten ein Kubus, die andere die Differenz zwischen einem Kubus und seiner Seite, endlich die Hypotenuse gleich der Summe eines Kubus und seiner Seite sei.

Auflösung. Wir setzen die Hypotenuse gleich $x^3 + x$, die eine Kathete gleich $x^3 - x$; dann wird die andere Kathete $2x^2$ sein. Nun mufs noch $2x^2$ gleich einem Kubus sein. Es sei $2x^2 = x^3$, so wird $x = 2$. Durch Einsetzung dieses Wertes erhält man für die Seiten des Dreiecks 6, 8, 10, und diese Zahlen genügen der Aufgabe*).

---

*) Auf diese letzte Aufgabe des 6. Buches läfst Bachet eine Reihe von Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck folgen, von denen ich No. 20 hervorhebe, weil Fermat an die Determination derselben eine längere Bemerkung knüpft. Die Aufgabe lautet: Ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, dessen Fläche gleich einer gegebenen Zahl ist.

Denkt man sich das Dreieck vermittels der relativen Primzahlen m, n gebildet, so ist die Fläche $(m^2 - n^2)mn$, und dabei wird $m^2 - n^2$ prim zu mn sein. Wäre nun der Ausdruck für die Fläche eine Quadratzahl, so müfste sowohl $m^2 - n^2$, als auch mn ein Quadrat sein. Wenn aber mn ein Quadrat ist, so mufs, da m prim zu n ist, auch m und ebenso n eine Quadratzahl sein. Setzen wir nun $m = \mu^2$, $n = \nu^2$, so geht der Ausdruck für die Fläche über in $(\mu^4 - \nu^4)\mu^2\nu^2$, und dies wird ein Quadrat sein, sobald die Differenz $\mu^4 - \nu^4$ ein solches ist.

Es giebt aber keine zwei Biquadrate, deren Differenz (oder Summe) ein Quadrat wäre. Diesen Satz spricht Fermat in der nachstehenden Anmerkung aus. Den Beweis deutet er nur an. Vielleicht ist es Euler gerade durch Ausführung der Fermat'schen Andeutungen gelungen, den Satz, sowie eine Reihe damit in Zusammenhang stehender Sätze streng und mit gewohnter Einfachheit und Klarheit zu beweisen (Commentationes Algebraicae Collectae, I. p. 24 ff.). Fermats Anmerkung lautet:

„Die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Seiten rationale Zahlen sind, kann keine Quadratzahl sein. Den Beweis dieses von mir gefundenen Satzes habe ich selbst erst durch mühevolles und eifriges Nachdenken entdeckt. Ich lasse den Beweis hier folgen, da diese Art der Beweisführung wunderbare Fortschritte in der Arithmetik ermöglichen wird.

Wenn die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks eine Quadratzahl wäre, so gäbe es zwei Biquadrate, welche eine Quadratzahl zur Differenz hätten. Es würde folglich zwei Quadratzahlen geben, deren Summe sowohl wie Differenz ein Quadrat wäre. Daher würden wir eine Quadratzahl haben, welche gleich der Summe eines Quadrats und des Doppelten eines Quadrats wäre, während zugleich die beiden Quadrate, aus denen sie gebildet ist, selbst eine Quadratzahl zur Summe hätten. Wenn aber eine Quadratzahl in ein Quadrat und das Doppelte eines zweiten Quadrats zerfällt werden kann, so ist, wie ich sehr leicht beweisen kann, auch ihre Seite gleich der Summe eines Quadrats und des Doppelten eines Quadrats.

Daraus schliefsen wir, dafs diese Seite die Summe der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dafs nämlich das einfache Quadrat, welches sie enthält, die Basis, das doppelte Quadrat das Lot ist.

Dieses rechtwinklige Dreieck wird somit von zwei Quadraten gebildet, deren Summe und Differenz Quadrate sein werden. Aber diese beiden Quadrate sind, wie sich zeigen läfst, kleiner als die ersteren, anfangs angenommenen Quadrate, deren Summe und Differenz Quadrate sind. Wenn es also zwei Quadrate giebt, deren Summe und Differenz Quadrate sind, so giebt es auch zwei andere ganze Quadratzahlen von derselben Beschaffenheit wie jene, welche aber eine kleinere Summe haben. Durch dieselben Schlüsse findet man, dafs es eine noch kleinere Summe als die vermittels der ersteren gefundene giebt, und so werden ins Unendliche fort immer kleinere ganze Quadratzahlen gefunden werden, welche dasselbe leisten. Das ist aber unmöglich, weil es nicht unendlich viele ganze Zahlen geben kann, welche kleiner sind als eine beliebig gegebene ganze Zahl. Den Beweis ganz und ausführlicher hier mitzuteilen, dazu reicht der Rand nicht aus.

Durch diese Überlegung habe ich auch gefunden und bewiesen, dafs keine Dreieckzahl aufser 1 ein Biquadrat sein kann.“

Auch dieser letzte Satz ist von Euler in der angegebenen Arbeit bewiesen worden.

Hier möge auch die (einzige) Anmerkung Platz finden, welche Fermat zu Bachets Porismen macht. Dieselbe bezieht sich auf die 6^te^ Definition des dritten Buches der Porismen, welche lautet: „Man sagt, ein rechtwinkliges Dreieck wird vermittels zweier beliebigen Zahlen gebildet, wenn es die Summe und die Differenz der Quadrate dieser Zahlen sowie das doppelte Produkt der Zahlen zu Seiten hat.“ Fermat bemerkt:

„Wir können ein rechtwinkliges Dreieck aus drei in arithmetischer Proportion stehenden Zahlen bilden, wenn wir dasselbe nach dieser 6^ten^ Definition vermittels der mittleren Zahl und der Differenz darstellen. Das Produkt der drei Zahlen giebt, wenn es mit der Differenz multipliziert wird, den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks, und daher wird, wenn die Differenz gleich 1 ist, das Produkt der drei Zahlen gleich der Fläche des Dreiecks sein.“

Die Polygonalzahlen*).

I. Einleitung.

Jedes Glied der Reihe der natürlichen Zahlen, von der Zahl 3 an, ist eine Polygonalzahl, und zwar die erste auf 1 folgende. Die Zahl der Einheiten, die sie enthält, ist gleich der Anzahl der Ecken des Polygons, und die Seite ist gleich der auf 1 folgenden Zahl, d. i. 2. Es ist also 3 eine Dreieckzahl, 4 eine Viereckzahl, 5 eine Fünfeckzahl, u. s. w.

Von den Quadratzahlen ist es bekannt, dafs sie entstehen, wenn man eine Zahl mit sich selbst multipliziert. So wird auch gezeigt werden, dafs jede Polygonalzahl, wenn man sie mit einer von der Zahl ihrer Ecken abhängigen Zahl multipliziert und das Produkt um das Quadrat einer Zahl vermehrt, welche ebenfalls von der Zahl der Ecken abhängig ist, eine Quadratzahl liefert.

Dies wollen wir beweisen und zeigen, wie aus einer Seite die zugehörige Polygonalzahl, und wie umgekehrt, wenn die Polygonalzahl gegeben ist, die zugehörige Seite gefunden wird. Vorher wollen wir jedoch die dazu erforderlichen Sätze herleiten.

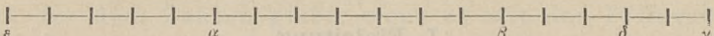
---

*) Dem Leser, welchem der hier behandelte Gegenstand fremd geworden ist, empfehle ich, vor dem Studium der Schrift Diophants das im Anhang über figurierte Zahlen Gesagte durchzugehen. Er wird darin das zum Verständnis dieser Schrift Erforderliche (nicht eine erschöpfende Behandlung der Sache) finden, und sein Studium wird ein genufsreicheres sein.

II. Satz.

Hat man drei Zahlen von gleicher Differenz, so wird das Achtfache des Produkts aus der gröfsten und der mittleren, wenn man es um das Quadrat der kleinsten vermehrt, eine Quadratzahl, und zwar ist die Seite dieser Quadratzahl gleich der Summe der gröfsten und des Doppelten der mittleren Zahl.

Beweis. Die drei in gleichen Abständen



liegenden Zahlen seien $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$. Es ist zu zeigen, dafs das Achtfache des Produkts aus $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$, wenn es um das Quadrat von $\beta\delta$ vermehrt wird, ein Quadrat bildet, dessen Seite gleich der Summe von $\alpha\beta$ und dem Doppelten von $\beta\gamma$ ist.

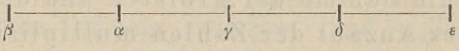
Da $\alpha\beta = \beta\gamma + \gamma\delta$ ist, so zerfällt das Achtfache des Produkts aus $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$ in das Achtfache des Quadrats von $\beta\gamma$ und das Achtfache des Produkts aus $\beta\gamma$ und $\gamma\delta$. Wir nehmen jetzt von jedem der angegebenen Ausdrücke die Hälfte; es ist dann [das Achtfache des Produkts aus $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$] gleich der Summe aus dem Vierfachen des Produkts von $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$, dem Vierfachen des Quadrats von $\beta\gamma$ und dem Vierfachen des Produkts von $\beta\gamma$ und $\gamma\delta$. Die Summe, welche durch das Vierfache des Produkts aus $\beta\gamma$ in $\gamma\delta$ und durch das Quadrat über $\delta\beta$ gebildet wird, ist aber gleich dem Quadrat über $\alpha\beta$ [Euklid, II, 8]. Wir müssen daher sehen, wie die Summe aus dem Quadrat über $\alpha\beta$, dem Vierfachen des Produkts von $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$ und dem Vierfachen des Quadrats über $\beta\gamma$ ein Quadrat bildet.

Setzen wir $\alpha\varepsilon = \beta\gamma$, so vertauschen wir das Vierfache des Produkts von $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$ gegen das Vierfache des Produkts von $\beta\alpha$ und $\alpha\varepsilon$. Dieses letztere Vierfache wird, wenn das Vierfache des Quadrats über $\beta\gamma$, oder, was dasselbe ist, über $\alpha\varepsilon$ dazu addiert wird, gleich dem Vierfachen des Produkts über $\beta\varepsilon$ und $\varepsilon\alpha$. Wird hierzu das Quadrat über $\alpha\beta$ gezählt, so wird die Summe gleich dem Quadrat über $\beta\varepsilon$ und $\varepsilon\alpha$ als einer einzigen Linie [Euklid, II, 8]. Die Summe der Linien $\beta\varepsilon$ und $\varepsilon\alpha$ ist aber gleich der Summe von $\alpha\beta$ und dem Doppelten von $\alpha\varepsilon$, d. i. dem Doppelten von $\beta\gamma$. Der Satz ist somit bewiesen*).

III. Satz.

Sind beliebig viele Zahlen von gleichen Abständen gegeben, so wird die Differenz zwischen der gröfsten und der kleinsten erhalten, indem man die Differenz zweier auf einander folgenden Zahlen mit der um 1 verringerten Anzahl der gegebenen Zahlen multipliziert.

Beweis. Es seien $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$, $\beta\varepsilon$ eine beliebige Menge Zahlen gleicher Differenz,



so ist zu zeigen, dafs die Differenz zwischen $\beta\varepsilon$ und $\alpha\beta$ erhalten wird, indem man die Differenz zwischen $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$ mit der um 1 verringerten Anzahl der Zahlen $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$, $\beta\varepsilon$ multipliziert.

Da die vorgelegten Zahlen $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$, $\beta\varepsilon$ von gleicher Differenz sind, so müssen die Differenzen $\alpha\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\varepsilon$ einander gleich sein. Folglich ist $\varepsilon\alpha$ ein Vielfaches von $\alpha\gamma$, und zwar

---

*) Sind $a - d$, a, $a + d$ die drei Zahlen gleicher Differenz, so enthält der Satz die Identität

$$8(a + d)\,a + (a - d)^2 = (3a + d)^2.$$

Der Gang des Beweises ist folgender: Es ist

$$\begin{aligned} 8(a + d)a &= 4(a + d)a + 4(a + d)a \\ &= 4(a + d)a + 4a^2 + 4ad, \end{aligned}$$

also

$$8(a + d)a + (a - d)^2 = 4(a + d)a + 4a^2 + 4ad + (a - d)^2$$

oder, weil

$$4ad + (a - d)^2 = (a + d)^2 \quad \text{ist},$$

$$\begin{aligned} 8(a + d)a + (a - d)^2 &= 4(a + d)\,a + 4a^2 + (a + d)^2 \\ &= 4a(\overline{a + d} + a) + (a + d)^2, \end{aligned}$$

oder, wegen der Identität $4u(u + v) + v^2 = (2u + v)^2$,

$$8(a + d)\,a + (a - d)^2 = (2a + \overline{a + d})^2 = (3a + d)^2.$$

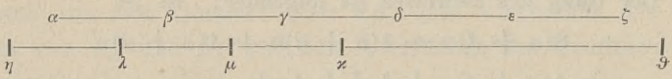
ist es so viel mal $\alpha\gamma$, als die Anzahl der Differenzen $\alpha\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\varepsilon$ angiebt. Die Anzahl der Differenzen $\alpha\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\varepsilon$ ist aber um 1 kleiner als die Anzahl der Zahlen $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$, $\beta\varepsilon$; daher wird $\varepsilon\alpha$ dadurch erhalten, daſs man $\alpha\gamma$ mit einer Zahl multipliziert, welche um 1 kleiner als die Anzahl der Zahlen $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$, $\beta\varepsilon$ ist. $\alpha\varepsilon$ ist aber die Differenz zwischen der gröſsten und der kleinsten, $\alpha\gamma$ die Differenz zweier auf einander folgenden Zahlen.

IV. Satz.

Sind beliebig viele Zahlen von gleichen Abständen gegeben, so ist das Produkt, das erhalten wird, wenn man die Summe der gröſsten und der kleinsten Zahl mit der Anzahl der Zahlen multipliziert, gleich dem Doppelten der Summe aller Zahlen.

Beweis. Es seien α, β, γ, δ, ε, ζ eine beliebige Anzahl Zahlen von gleicher Differenz; dann ist zu zeigen, daſs, wenn man die Summe von α und ζ mit der Anzahl der Zahlen α, β, γ, δ, ε, ζ multipliziert, man eine Zahl erhält, welche das Doppelte der Summe dieser Zahlen ist.

Die Anzahl der Zahlen α, β, γ, δ, ε, ζ kann nun gerade oder ungerade sein. Dieselbe sei zunächst gerade. Dann möge $\eta\vartheta$ so viele Einheiten enthalten, als die Anzahl der vorgelegten Zahlen beträgt; $\eta\vartheta$ ist also gerade und habe die Mitte $\varkappa$. Ferner sei $\eta\varkappa$ durch die Punkte λ, μ in ihre Einheiten



zerlegt. Da nun die Differenz zwischen ζ und δ gleich der Differenz zwischen γ und α ist, so ist die Summe $\zeta + \alpha$ gleich $\gamma + \delta$. Die Summe $\zeta + \alpha$ ist aber gleich dem Produkt aus $\zeta + \alpha$ und $\eta\lambda$ [$\eta\lambda = 1$]; daher ist auch $\gamma + \delta$ gleich dem Produkt aus $\zeta + \alpha$ und $\lambda\mu$.

Aus demselben Grunde ist die Summe $\varepsilon + \beta$ gleich dem Produkt aus $\zeta + \alpha$ und $\mu\varkappa$. Daher wird die Summe

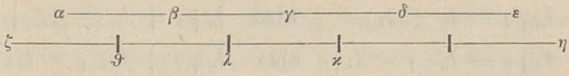
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta$$

gleich dem Produkt aus $\zeta + \alpha$ und $\eta\varkappa$ sein. Das Doppelte des Produkts aus $\zeta + \alpha$ und $\eta\varkappa$ ist aber das Produkt aus $\zeta + \alpha$ und $\eta\vartheta$. Es ist also auch das Doppelte der Summe $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta$ gleich dem Produkt aus der Summe $\zeta + \alpha$ in $\eta\vartheta$, d. i. in die Anzahl der Zahlen α, β, γ, δ, ε, ζ. Dies war zu beweisen.

V. [Fortsetzung].

Unter denselben Voraussetzungen sei jetzt die Anzahl der vorgelegten Zahlen α, β, γ, δ, ε eine ungerade, und es enthalte $\zeta\eta$ so viele Einheiten, als Zahlen α, β, γ, δ, ε vorhanden sind. Es ist also auch $\zeta\eta$ ungerade. Wir tragen auf $\zeta\eta$ die Einheit $\zeta\vartheta$ ab, halbieren $\vartheta\eta$ in $\varkappa$ und zerlegen $\vartheta\varkappa$ durch λ in die Einheiten, die es enthält.

Da nun die Differenz zwischen ε und γ gleich der Differenz zwischen γ und α ist, so ist die Summe $\varepsilon + \alpha$ das Doppelte von γ, d. i. gleich dem Doppelten des Produkts aus γ und $\varkappa\lambda$.



Aus demselben Grunde ist die Summe $\beta + \delta$ gleich dem Doppelten des Produkts aus γ und $\lambda\vartheta$, so dafs die Summe $\alpha + \varepsilon + \beta + \delta$ gleich dem Doppelten des Produkts aus γ in $\vartheta\varkappa$ ist. Das Doppelte von $\vartheta\varkappa$ ist aber $\vartheta\eta$. Daher ist $\alpha + \varepsilon + \beta + \delta$ gleich dem Produkt aus γ in $\vartheta\eta$. Ferner ist γ gleich dem Produkt aus γ in $\vartheta\zeta$, somit die Summe

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$$

gleich dem Produkt aus γ in $\zeta\eta$. Das Doppelte des Produkts aus γ und $\zeta\eta$ ist aber gleich dem Produkt aus der Summe $\alpha + \varepsilon$ in $\zeta\eta$. Daher ist auch das Doppelte der Summe $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$ gleich dem Produkt der Summe $\alpha + \varepsilon$ in $\zeta\eta$, d. i. in die Anzahl der vorgelegten Zahlen, und das sollte bewiesen werden*).

---

*) In IV und V leitet Diophant die Summenformel der arithmetischen Reihe in folgender Weise her:

Es sei zunächst eine gerade Anzahl $2n$ Zahlen von gleicher Differenz

VI. Satz.

Liegt eine mit 1 beginnende Reihe beliebig vieler Zahlen gleicher Differenz vor, so wird die mit dem Achtfachen dieser Differenz multiplizierte Summe aller Zahlen, wenn man sie um das Quadrat der um 2 verringerten Differenz vermehrt, eine Quadratzahl, deren Seite bei Subtraktion von 2 ein Vielfaches der Differenz ist, nämlich gleich der Differenz, multipliziert mit einer Zahl, welche, wenn man sie um 1 vermehrt, das Doppelte der Anzahl aller Zahlen, die Zahl 1 mitgerechnet, wird.

Beweis. Die auf 1 folgenden Zahlen gleicher Differenz seien $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\varepsilon\zeta$. Dann behaupte ich, daſs der ausgesprochene Satz bestehe.

$$t_1,\ t_2, \ldots t_n,\ t_{n+1}, \ldots,\ t_{2n-1},\ t_{2n}$$

gegeben. Dann ist

$$t_{2n} - t_{n+1} = t_n - t_1, \qquad \text{also} \quad t_{n+1} + t_n = t_{2n} + t_1$$

$$t_{2n} - t_{n+2} = t_{n-1} - t_1, \qquad \text{also} \quad t_{n+2} + t_{n-1} = t_{2n} + t_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$t_{2n} - t_{2n-1} = t_2 - t_1, \qquad \text{also} \quad t_{2n-1} + t_2 = t_{2n} + t_1.$$

Da nun noch

$$t_{2n} + t_1 = t_{2n} + t_1$$

ist, so ergiebt sich für die Summe aller Glieder $(t_{2n} + t_1)n$, also für die doppelte Summe $(t_{2n} + t_1)\,2n$.

Ist dagegen die Anzahl der Glieder eine ungerade, liegt also die Reihe

$$t_1,\ t_2,\ t_3, \ldots t_n,\ t_{n+1},\ t_{n+2}, \ldots,\ t_{2n},\ t_{2n+1}$$

vor, so schlieſst Diophant in folgender Weise:

Es ist

$$t_{2n+1} - t_{n+1} = t_{n+1} - t_1, \qquad \text{also} \quad t_{2n+1} + t_1 = 2\,t_{n+1}$$

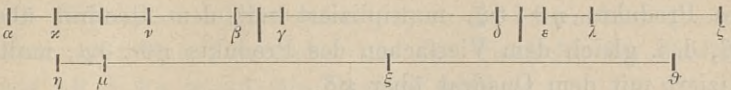
$$t_{2n} - t_{n+1} = t_{n+1} - t_2, \qquad \text{also} \quad t_{2n} + t_2 = 2\,t_{n+1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$t_{n+2} - t_{n+1} = t_{n+1} - t_n, \qquad \text{also} \quad t_{n+2} + t_n = 2\,t_{n+1}.$$

Da nun noch $t_{n+1} = 1 \,.\, t_{n+1}$ ist, so ergiebt sich für die Summe aller Zahlen $(2n + 1)\,t_{n+1}$, für die doppelte Summe $(2n+1)\,2\,t_{n+1}$, d. i. $(t_{2n+1} + t_1)(2n + 1)$.

So viele Zahlen, die Zahl 1 mitgerechnet, vorhanden sind, so viele Einheiten möge $\eta\vartheta$ enthalten. Nun ist die Differenz zwischen $\varepsilon\zeta$ und 1



ein Vielfaches der Differenz zwischen $\alpha\beta$ und 1, und zwar ist sie gleich dieser Differenz, multipliziert mit einer Zahl, die 1 weniger als $\eta\vartheta$ beträgt. Wenn wir daher jede der Zahlen $\alpha\varkappa$, $\varepsilon\lambda$, $\eta\mu$ gleich 1 setzen, so wird $\lambda\zeta$ gleich $\varkappa\beta$, multipliziert mit $\mu\vartheta$, also ist $\lambda\zeta$ gleich dem Produkt aus $\varkappa\beta$ in $\mu\vartheta$. Wird aufserdem $\varkappa\nu = 2$ angenommen, so haben wir zu untersuchen, ob die Summe aller Zahlen, multipliziert mit dem Achtfachen von $\varkappa\beta$ (welches die Differenz der Zahlen ist) und vermehrt um das Quadrat von $\nu\beta$ (welches um 2 kleiner als diese Differenz ist), eine Quadratzahl wird, deren Seite, wenn man sie um 2 vermindert, eine Zahl giebt, welche gleich dem Produkt aus der Differenz $\varkappa\beta$ in die Summe $\eta\vartheta + \vartheta\mu$ ist.

Was die Summe aller Zahlen betrifft, so ist dieselbe die Hälfte des Produkts der Summe $\zeta\varepsilon + \varepsilon\lambda$ in $\vartheta\eta$; das Produkt aus der Summe $\zeta\varepsilon + \varepsilon\lambda$ in $\vartheta\eta$ zerfällt aber in das Produkt aus $\lambda\zeta$ in $\eta\vartheta$ und das Doppelte des Produkts aus $\varepsilon\lambda$ in $\eta\vartheta$, welches letztere gleich dem Doppelten von $\eta\vartheta$ ist. Daher ist die Summe aller Zahlen die Hälfte der Summe, deren erstes Glied das Produkt aus $\lambda\zeta$ in $\eta\vartheta$, und deren zweites Glied das Doppelte von $\eta\vartheta$ ist. Es ist aber gezeigt worden, dafs $\lambda\zeta$ gleich dem Produkt aus $\varkappa\beta$ in $\mu\vartheta$ ist. Daher ist die Summe aller Zahlen die Hälfte der Summe, deren erstes Glied das Produkt der drei Faktoren $\varkappa\beta$, $\mu\vartheta$, $\vartheta\eta$, und deren zweites Glied das Doppelte von $\eta\vartheta$ ist. Ist also ξ die Mitte von $\mu\vartheta$, so wird die Summe aller Zahlen gleich dem um $\eta\vartheta$ vermehrten Produkt der drei Faktoren $\varkappa\beta$, $\eta\vartheta$, $\vartheta\xi$ sein.

Wir haben also zu untersuchen, ob die Summe von $\eta\vartheta$ und dem Produkt der drei Faktoren $\varkappa\beta$, $\eta\vartheta$, $\vartheta\xi$, wenn man sie mit dem Achtfachen von $\varkappa\beta$ multipliziert und zum Resultat das Quadrat über $\nu\beta$ addiert, ein Quadrat wird.

Das Produkt $\varkappa\beta \,.\, \eta\vartheta \,.\, \vartheta\xi$, multipliziert mit $\varkappa\beta$, giebt das Produkt aus $\eta\vartheta \,.\, \vartheta\xi$ in das Quadrat über $\varkappa\beta$; also ist das Produkt $\varkappa\beta \,.\, \eta\vartheta \,.\, \vartheta\xi$, multipliziert mit dem Achtfachen von $\varkappa\beta$, gleich dem Produkt $\eta\vartheta \,.\, \vartheta\xi$, multipliziert mit dem Achtfachen des Quadrats über $\varkappa\beta$ oder gleich dem Achtfachen des Produkts $\eta\vartheta \,.\, \vartheta\xi$, multipliziert mit dem Quadrat über $\varkappa\beta$, d. i. gleich dem Vierfachen des Produkts $\eta\vartheta \,.\, \vartheta\mu$, multipliziert mit dem Quadrat über $\varkappa\beta$.

Wir haben also zu zeigen, dafs das Vierfache des Produkts $\eta\vartheta \,.\, \vartheta\mu$, multipliziert mit dem Quadrat von $\varkappa\beta$ und vermehrt um die Summe, deren erstes Glied das Produkt aus $\eta\vartheta$ in das Achtfache von $\varkappa\beta$, und deren zweites Glied das Quadrat über $\nu\beta$ ist, ein Quadrat wird.

Das Achtfache des Produkts aus $\eta\vartheta$ in $\varkappa\beta$ zerfällt in das Vierfache des Produkts $\eta\mu \,.\, \varkappa\beta$ und das Vierfache des Produkts aus $\eta\vartheta + \vartheta\mu$ in $\varkappa\beta$.

Es fragt sich somit, ob man ein Quadrat erhält, wenn man folgende vier Zahlen addiert: erstens das Vierfache des Produkts aus $\eta\vartheta . \vartheta\mu$ in das Quadrat über $\varkappa\beta$; zweitens das Vierfache des Produkts $\eta\mu \,.\, \varkappa\beta$; drittens das Vierfache des Produkts aus $\eta\vartheta + \vartheta\mu$ in $\varkappa\beta$; viertens das Quadrat über $\nu\beta$.

Das Vierfache des Produkts $\eta\mu \,.\, \varkappa\beta$ ist gleich dem Doppelten des Produkts $\nu\varkappa \,.\, \varkappa\beta$, und wenn das Quadrat über $\nu\beta$ hinzugefügt wird, so erhält man die Summe der Quadrate über $\varkappa\beta$ und $\varkappa\nu$.

Wir werden daher überlegen, ob das Vierfache des Produkts aus $\eta\vartheta \,.\, \vartheta\mu$ in das Quadrat über $\varkappa\beta$, vermehrt erstens um das Vierfache des Produkts aus $\eta\vartheta + \vartheta\mu$ in $\varkappa\beta$ und zweitens um die Summe der Quadrate über $\varkappa\beta$ und $\varkappa\nu$ ein Quadrat wird.

Das Quadrat über $\beta\varkappa$ geht über in das Produkt aus dem Quadrat über $\eta\mu$ in das Quadrat über $\varkappa\beta$. Wird dazu das Vierfache des Produkts aus $\eta\vartheta \,.\, \vartheta\mu$ in das Quadrat über $\varkappa\beta$ addiert, so erhält man das Produkt aus dem Quadrat über $\eta\vartheta + \vartheta\mu$ in das Quadrat über $\varkappa\beta$.

Es ist also zu untersuchen, ob das Produkt aus dem Quadrat über $\eta\vartheta + \vartheta\mu$ in das Quadrat über $\varkappa\beta$, wenn dazu erstens das Vierfache des Produkts aus $\eta\vartheta + \vartheta\mu$ in $\varkappa\beta$ und zweitens das Quadrat über $\varkappa\nu$ addiert wird, ein Quadrat bildet.

Wenn wir das Produkt aus $\eta\vartheta + \mu\vartheta$ in $\varkappa\beta$ gleich der

Zahl $\nu\varrho$ annehmen, so wird das Produkt aus dem Quadrat über $\eta\vartheta + \mu\vartheta$ in das Quadrat über $\varkappa\beta$ gleich dem Quadrat über $\nu\varrho$ sein, wie im nächsten Satze gezeigt werden wird.

Wir haben folglich zu sehen, ob die Summe der Quadrate über $\nu\varrho$ und $\varkappa\nu$, vermehrt um das Vierfache des Produkts aus $\eta\vartheta + \vartheta\mu$ in $\varkappa\beta$, ein Quadrat wird.

Das Vierfache des Produkts aus $\eta\vartheta + \vartheta\mu$ in $\varkappa\beta$ ist gleich dem Vierfachen von $\nu\varrho$, da das Produkt aus $\eta\vartheta + \vartheta\mu$ in $\varkappa\beta$ gleich $\nu\varrho$ gesetzt worden ist. Das Vierfache von $\nu\varrho$ ist aber gleich dem Doppelten des Produkts aus $\nu\varrho$ in $\nu\varkappa$, weil $\nu\varkappa$ gleich 2 angenommen wurde.

Daher müssen wir sehen, ob die Summe der Quadrate über $\nu\varrho$ und $\nu\varkappa$, wenn sie um das Doppelte des Produkts aus $\nu\varrho$ in $\nu\varkappa$ vermehrt wird, ein Quadrat bildet. Das ist nun in der That der Fall, und zwar erhält man das Quadrat über $\varrho\varkappa$. Die Seite $\varrho\varkappa$ dieses Quadrats wird bei Subtraktion von 2, d. i. $\nu\varkappa$, gleich einer Zahl $\nu\varrho$. Diese letztere ist das Produkt aus der Differenz $\varkappa\beta$ der Zahlen in die Summe $\eta\vartheta + \vartheta\mu$, welche, wenn sie um 1, d. i. um $\eta\mu$ vermehrt wird, das Doppelte der Anzahl der vorgelegten Zahlen wird*).

---

*) Sind $1,\ 1 + d,\ 1 + 2d, \ldots,\ 1 + (n - 1)d$ n Zahlen gleicher Differenz, welche die Summe s haben, so soll bewiesen werden, dafs

$$s \,.\, 8d + (d - 2)^2 = [2 + (2n - 1)d]^2$$

ist. Der Gang, den Diophant beim Beweise einschlägt, ist folgender: Es ist

$$s = \frac{[2 + (n - 1)d]n}{2} = \frac{d(n - 1)n + 2n}{2} = n + d \cdot n \cdot \left(\frac{n - 1}{2}\right);$$

also haben wir uns mit dem Ausdruck

$$\left[n + dn \cdot \frac{n - 1}{2}\right] 8d + (d - 2)^2 = A$$

zu beschäftigen. Da

$$d \cdot n \cdot \frac{n - 1}{2} \cdot 8d = 8 \cdot n \cdot \frac{n - 1}{2} d^2 = 4n(n - 1)d^2$$

ist, so wird

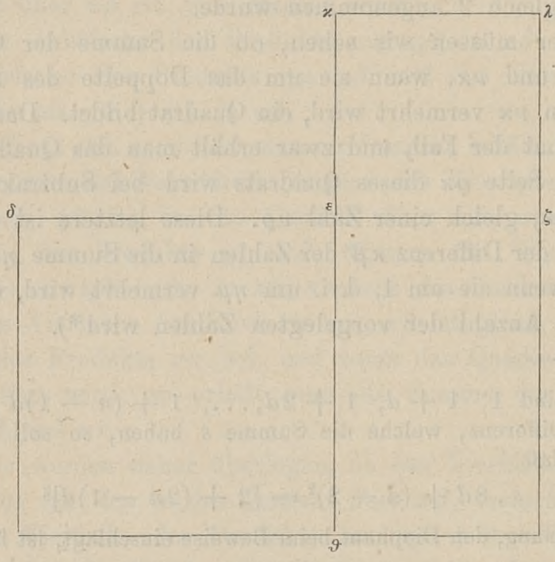
$$A = 4n(n - 1)d^2 + 8nd + (d - 2)^2.$$

Ferner ist $8n = 4 + 4(2n - 1)$, also

VII. Satz.

Wenn α gleich der Summe $\eta\vartheta + \vartheta\mu$, β gleich $\varkappa\beta$ und γ gleich dem Produkt der Summe $\eta\vartheta + \vartheta\mu$ in $\varkappa\beta$ ist, so behaupte ich, dafs auch das Produkt aus dem Quadrate über $\eta\vartheta + \vartheta\mu$, d. i. über α, in das Quadrat über $\varkappa\beta$, d. i. über β, gleich dem Quadrate über γ ist.

Beweis. Wir tragen auf einer geraden Linie zwei Strecken $\delta\varepsilon$ und $\varepsilon\zeta$ an einander, welche gleich α und β sind, und beschreiben die Quadrate über denselben, nämlich $\delta\vartheta$ und $\varepsilon\lambda$; ferner bilden wir das Ergänzungsparallelogramm $\vartheta\zeta$.



Nun verhält sich $\delta\vartheta$ zu der Ergänzung $\vartheta\zeta$, wie sich $\delta\varepsilon$ zu $\varepsilon\zeta$ verhält. Ferner verhält sich die Ergänzung $\vartheta\zeta$ zu $\varepsilon\lambda$

$$A = 4n(n-1)d^2 + 4d + 4(2n-1)d + (d-2)^2,$$

und da $(4d$, d. i.$)\ 2 \,.\, 2d + (d-2)^2 = d^2 + 2^2$ ist,

$$A = 4n(n-1)d^2 + 4(2n-1)d + d^2 + 2^2.$$

Weiter ist $4n(n-1)d^2 + d^2 = (2n-1)^2d^2$, oder da $x^2y^2 = (xy)^2$ ist, wie im folgenden Satze gezeigt wird,

$$\begin{aligned} A &= [(2n-1)d]^2 + 4(2n-1)d + 2^2 \\ &= [(2n-1)d]^2 + 2\,.\,(2n-1)d\,.\,2 + 2^2 \\ &= [2 + (2n-1)d]^2. \end{aligned}$$

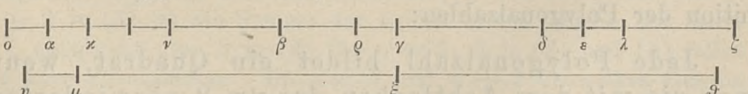
wie $\vartheta\varepsilon$ zu $\varepsilon\varkappa$. Das Ergänzungsparallelogramm $\vartheta\zeta$ ist also die mittlere Proportionale zwischen den Quadraten $\delta\vartheta$ und $\zeta\varkappa$; daher ist das Produkt aus den Quadraten $\delta\vartheta$ und $\zeta\varkappa$ gleich dem Quadrat des Ergänzungsparallelogramms $\vartheta\zeta$.

Das Quadrat $\delta\vartheta$ ist aber gleich dem Quadrat über der Summe $\eta\vartheta + \vartheta\mu$, das Quadrat $\zeta\varkappa$ gleich dem Quadrat über $\varkappa\beta$, das Ergänzungsparallelogramm $\vartheta\zeta$ gleich $\nu\varrho$, und somit ist das Produkt aus dem Quadrat über $\eta\vartheta + \vartheta\mu$ in das Quadrat über $\varkappa\beta$ gleich dem Quadrat über $\nu\varrho$.

VIII. Satz.

Nach diesen Vorbemerkungen behaupte ich, daſs, wenn eine beliebige Anzahl von Zahlen gleicher Differenz, von denen 1 die erste ist, vorliegt, die Summe derselben eine Polygonalzahl ist und zwar von so viel Ecken, als die um 2 vermehrte Differenz der Zahlen Einheiten enthält, während die Seite gleich der Anzahl der Zahlen, die Zahl 1 mitgerechnet, ist.

Beweis. Wir haben gezeigt, daſs die Summe aller vorgelegten Zahlen, wenn man sie mit dem Achtfachen von $\varkappa\beta$ multipliziert und das Produkt zum Quadrat über $\nu\beta$ addiert, das Quadrat über $\varrho\varkappa$ giebt. Wenn wir nun noch eine Einheit αo der Reihe anfügen, so wird $\varkappa o = 2$ sein, wie auch $\varkappa\nu = 2$ ist. Es werden daher $o\beta$, $\beta\varkappa$, $\beta\nu$ Zahlen von gleicher Differenz sein, und somit wird des Achtfache der gröſsten dieser Zahlen, d. i. $o\beta$, wenn man es mit der mittleren, d. i. $\beta\varkappa$, multipliziert und das Produkt zum Quadrat über der kleinsten, d. i. $\beta\nu$, addiert, eine Quadratzahl geben, deren Seite gleich der Summe der gröſsten, $o\beta$, und des Doppelten der mittleren, $\beta\varkappa$, ist. Wird also das Produkt aus $o\beta$ in das Achtfache von $\varkappa\beta$ um das Quadrat über $\nu\beta$ vermehrt, so wird das Resultat gleich dem Quadrat über der Summe von $o\beta$ und dem Doppelten von $\varkappa\beta$.



Wird aber die Seite dieses Quadrats $[o\beta + 2 . \varkappa\beta]$ um $2 = o\varkappa$

vermindert, so bleibt das Dreifache von $\varkappa\beta$, d. i. das Produkt von $\varkappa\beta$ in 3, übrig; 3 ist aber um 1 kleiner als das Doppelte von 2 [d. i. der Differenz der Zahlen βo, $\beta\varkappa$, $\beta\nu$]. Da nun die Summe der vorgelegten Zahlen, die Zahl 1 mitgerechnet, demselben Gesetze unterliegt wie $o\beta$, die Zahl $o\beta$ aber beliebig und immer die erste Polygonalzahl nach 1 ist (da $\alpha o = 1$, $\alpha\beta$ aber die zweite Zahl ist), also die Seite 2 hat, so ist auch die Summe aller vorgelegten Zahlen eine Polygonalzahl von derselben Eckenzahl wie $o\beta$, und zwar von so viel Ecken, als die um 2, d. i. $o\varkappa$, vermehrte Differenz $\varkappa\beta$ der Zahlen Einheiten enthält, während die Seite gleich $\eta\vartheta$, d. i. gleich der Anzahl der gegebenen Zahlen, die Zahl 1 mitgerechnet, ist.

So ist bewiesen, was Hypsikles in der Definition sagt:

Wenn eine mit 1 beginnende Reihe beliebig vieler Zahlen gleicher Differenz vorliegt, so ist die Summe aller Zahlen eine Dreieckzahl, wenn die Differenz gleich 1 ist, eine Viereckzahl, wenn die Differenz 2 ist, eine Fünfeckzahl, wenn die Differenz 3 ist. Die Zahl der Ecken ist um 2 gröſser als die Differenz, und die Seite ist gleich der Anzahl aller Zahlen, die Zahl 1 mitgerechnet.

Daraus folgt für die Dreieckzahlen, die entstehen, wenn die Differenz 1 ist, daſs ihre Seiten die gröſsten der vorgelegten Zahlen sind, und das Produkt aus der gröſsten dieser Zahlen in die um 1 gröſsere Zahl ist das Doppelte der bezeichneten Dreieckzahl.

Da nun $o\beta$ eine Polygonalzahl von so viel Ecken ist, als darin Einheiten enthalten sind, und da ferner eine Quadratzahl entsteht, wenn man $o\beta$ mit dem Achtfachen einer Zahl, welche um 2 kleiner als $o\beta$ ist, d. i. $\varkappa\beta$ multipliziert und zum Produkt das Quadrat der Zahl, welche um 4 kleiner ist, d. i. das Quadrat über $\nu\beta$ addiert, so ist folgendes die Definition der Polygonalzahlen:

Jede Polygonalzahl bildet ein Quadrat, wenn man sie mit dem Achtfachen der um 2 verminderten Anzahl der Ecken multizipliert und zum Produkt das Quadrat der um 4 verminderten Anzahl der Ecken addiert.

Nachdem wir so die Definition des Hypsikles und auch die zuletzt gegebene Definition der Polygonalzahlen erwiesen haben, liegt uns weiter ob, zu zeigen, wie bei gegebener Seite die zugehörige Polygonalzahl gefunden wird.

Wenn wir die Seite $\eta\vartheta$ irgend einer Polygonalzahl und auch die Anzahl der Ecken haben, so ist $\varkappa\beta$ bestimmt; wir kennen folglich auch das Produkt aus der Summe $\eta\vartheta + \mu\vartheta$ in $\varkappa\beta$, welches gleich $\nu\varrho$ ist, und da $\nu\varkappa = 2$ ist, so ist uns auch $\varkappa\varrho$ bekannt. Dann ist auch das Quadrat über $\varkappa\varrho$ bestimmt, und wenn wir von demselben das gleichfalls bekannte Quadrat über $\nu\beta$ subtrahieren, so wird auch der Rest bestimmt sein; dieser ist aber gleich dem Produkt der gesuchten Polygonalzahl in das Achtfache von $\varkappa\beta$, so dafs die verlangte Polygonalzahl ermittelt ist.

Auf ähnliche Weise werden wir auch, wenn die Polygonalzahl gegeben ist, die Seite $\eta\vartheta$ derselben finden, und dies war zu zeigen*).

IX. Satz.

Denjenigen, welche in aller Kürze hören wollen, was wir methodisch hergeleitet haben, wollen wir jetzt ein zum Lehren bequemeres Verfahren zeigen:

---

*) Wenn S die Summe der Reihe

(1) $\qquad 1,\ 1 + d,\ 1 + 2d, \ldots,\ 1 + (n - 1)d$

ist, so besteht nach Satz VI die Formel

(2) $\qquad 8dS + (d - 2)^2 = [2 + (2n - 1)d]^2.$

Weiter liefert Satz II für die drei Zahlen gleicher Differenz $d - 2,\ d,\ d + 2$ die Formel

(3) $\qquad 8d(d + 2) + (d - 2)^2 = [2 + (2 . 2 - 1)d]^2.$

Diophant vergleicht nun die Formeln (2) und (3). Der Faktor $d + 2$ in (3) ist die Summe der beiden ersten Glieder der Reihe (1), entspricht also S in (2) für $n = 2$, d. h. (2) und (3) fallen für $n = 2$ zusammen. Da also S und $d + 2$ demselben Gesetze unterliegen, und da $d + 2$ eine Polygonalzahl von $d + 2$ Ecken ist, so ist auch S eine (und zwar die n^{te}) Polygonalzahl von $d + 2$ Ecken.

Wir nehmen die Seite des Polygons, verdoppeln dieselbe, ziehen vom Resultat 1 ab, multiplizieren den Rest mit der um 2 verminderten Anzahl der Ecken des Polygons, addieren 2 zum Produkt und erheben die Summe ins Quadrat. Von diesem Quadrat subtrahieren wir das Quadrat der um 4 verminderten Anzahl der Ecken und dividieren den Rest durch das Achtfache der um 2 verminderten Anzahl der Ecken. So erhalten wir die Polygonalzahl.

Wenn umgekehrt die Polygonalzahl gegeben ist, so finden wir auf folgende Weise die Seite derselben:

Wir multiplizieren die Polygonalzahl mit dem Achtfachen der um 2 verminderten Anzahl der Ecken und addieren zum Produkt das Quadrat der um 4 verminderten Anzahl der Ecken; auf diese Weise entsteht, wenn die vorgelegte Zahl eine Polygonalzahl ist, ein Quadrat. Von der Seite dieses Quadrats subtrahieren wir 2, dividieren den Rest durch die um 2 verminderte Anzahl der Ecken, addieren 1 zum Quotienten und nehmen die Hälfte der erhaltenen Summe; dann haben wir die gesuchte Seite der gegebenen Polygonalzahl*).

---

*) Wird die n^{te} a-eckzahl mit P bezeichnet, so ist nach der Definition in VIII

$$P\,.\,8(a-2)+(a-4)^2=[2+(2n-1)(a-2)]^2,$$

und daraus folgt

$$(1)\qquad P=\frac{[2+(2n-1)(a-2)]^2-(a-4)^2}{8(a-2)},$$

$$(2)\qquad n=\frac{\dfrac{\sqrt{P\,.\,8(a-2)+(a-4)^2}-2}{a-2}+1}{2}.$$

Anmerkung von Fermat:

„Ein schöner und wunderbarer Satz, den ich gefunden habe, möge hier ohne Beweis angeführt werden: Wenn man irgend eine Zahl n der mit 1 beginnenden Reihe der natürlichen Zahlen mit der nächstfolgenden Zahl $n+1$ multipliziert, so erhält man das Doppelte der n^{ten} Dreieckzahl; multipliziert man n mit der $(n+1)^{\text{ten}}$

X. Aufgabe.

Man soll bestimmen, auf wie viele Arten eine gegebene Zahl eine Polygonalzahl sein kann.

Auflösung. Die gegebene Zahl sei $\alpha\beta$, die Anzahl ihrer Ecken $\beta\gamma$; ferner nehmen wir an, dafs in $\beta\gamma$ die Strecke $\gamma\delta = 2$ und ebenso $\gamma\varepsilon = 4$ liege. Da nun die Polygonalzahl $\alpha\beta$ so viele Ecken hat, als $\beta\gamma$ Einheiten enthält, so wird das Achtfache des Produkts aus $\alpha\beta$ in $\beta\delta$, wenn es um das Quadrat über $\beta\varepsilon$ vermehrt wird, ein Quadrat. Die Seite dieses Quadrats sei $\zeta\eta$, so dafs also das Quadrat über $\zeta\eta$ gleich der Summe ist, die man erhält, wenn man das Achtfache des Produkts $\alpha\beta\,.\,\beta\delta$ und das Quadrat über $\beta\varepsilon$ addiert.

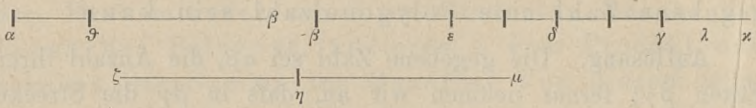
Weiter nehmen wir in $\alpha\beta$ die Strecke $\alpha\vartheta = 1$ an; dann zerfällt das Achtfache des Produkts $\alpha\beta\,.\,\beta\delta$ in das Vierfache des Produkts $\alpha\vartheta\,.\,\beta\delta$ und das Vierfache des Produkts aus der Summe $\alpha\beta + \vartheta\beta$ in $\beta\delta$. Nun möge das Vierfache der Summe $\alpha\beta + \vartheta\beta$ gleich $\delta\varkappa$ sein; dann verwandelt sich das Vierfache des Produkts der Faktoren $\alpha\beta + \vartheta\beta$ und $\beta\delta$ in das Produkt aus $\varkappa\delta$ und $\delta\beta$. Ferner geht das Vierfache des Produkts $\alpha\vartheta\,.\,\beta\delta$ über in das Doppelte des Produkts $\beta\delta\,.\,\delta\varepsilon$, da $\varepsilon\delta = 2$ ist. Das Quadrat über $\zeta\eta$ ist folglich gleich dem Produkt aus $\varkappa\delta$ in $\delta\beta$, vermehrt um das Doppelte des Produkts $\beta\delta\,.\,\delta\varepsilon$ und ferner vermehrt um das Quadrat über $\beta\varepsilon$. Nun wird aber das Doppelte des Produkts $\beta\delta\,.\,\delta\varepsilon$, wenn man es um das Quadrat über $\beta\varepsilon$ vermehrt, gleich der Summe der Quadrate über $\beta\delta$ und $\delta\varepsilon$; also ist auch das Quadrat über $\zeta\eta$ gleich dem Produkt $\varkappa\delta\,.\,\delta\beta$, vermehrt um die Summe der

---

Dreieckzahl, so erhält man das Dreifache der n^{ten} Tetraedralzahl; wird n mit der $(n+1)^{\text{ten}}$ Tetraedralzahl multipliziert, so erhält man das Vierfache der n^{ten} figurierten Zahl 4^{ter} Ordnung, u. s. w. ins Unendliche. Ich glaube nicht, dafs es einen schöneren und allgemeineren Satz als diesen in der Zahlenlehre geben könne. Den Beweis desselben hier auf dem Rande mitzuteilen, dazu fehlt es mir an Zeit und Platz."

Denselben Satz spricht Fermat in einem Briefe an Roberval (Varia Opera, p. 146) aus. Der Beweis wird sich unten aus der allgemeinen Betrachtung der figurierten Zahlen ergeben.

Quadrate über $\beta\delta$ und $\delta\varepsilon$. Das Produkt $\varkappa\delta \,.\, \delta\beta$, vermehrt um das Quadrat über $\delta\beta$, ist aber gleich dem Produkt $\varkappa\beta \,.\, \beta\delta$;



folglich ist das Quadrat über $\zeta\eta$ gleich dem Produkt $\varkappa\beta \,.\, \beta\delta$, vermehrt um das Quadrat über $\delta\varepsilon$. Da nun $\delta\varkappa$ gleich dem Vierfachen der Summe $\alpha\beta + \beta\vartheta$, also gröfser als das Vierfache von $\alpha\vartheta$, d. i. gröfser als 4 ist, und da $\delta\gamma = 2$ ist, so mufs der Rest $\gamma\varkappa$ gröfser als $\gamma\delta = 2$ sein, folglich die Mitte von $\delta\varkappa$ zwischen γ und $\varkappa$, etwa in λ liegen. Das Quadrat über $\beta\lambda$ geht also über in die Summe des Quadrats über $\lambda\delta$ und des Produkts $\varkappa\beta \,.\, \beta\delta$. Wird daher $\delta\varkappa$ in λ halbiert und $\delta\beta$ zugefügt, so ist das Produkt $\varkappa\beta \,.\, \beta\delta$, vermehrt um das Quadrat über $\lambda\delta$ gleich dem Quadrat über $\lambda\beta$, also das Quadrat über $\lambda\beta$ um das Produkt $\varkappa\beta \,.\, \beta\delta$ gröfser als das Quadrat über $\lambda\delta$, folglich das Quadrat über $\zeta\eta$ gleich der Differenz der Quadrate über $\beta\lambda$ und $\lambda\delta$, vermehrt um das Quadrat über $\delta\varepsilon$.

Wird auf beiden Seiten das Quadrat über $\delta\lambda$ addiert, so ist die Summe der Quadrate über $\zeta\eta$ und $\delta\lambda$ gleich der Summe der Quadrate über $\beta\lambda$ und $\delta\varepsilon$. Wenn aber die Summe zweier Zahlen gleich der Summe zweier anderen Zahlen ist, so sind auch die durch Vesetzung derselben entstehenden Differenzen einander gleich, also das Quadrat über $\lambda\delta$, vermindert um dasjenige über $\delta\varepsilon$, gleich dem Quadrat über $\lambda\beta$, vermindert um dasjenige über $\zeta\eta$. Da nun $\varepsilon\delta = \delta\gamma$ ist, so ergiebt sich bei Hinzunahme von $\gamma\lambda$, dafs das Produkt aus $\varepsilon\lambda$ in $\lambda\gamma$, wenn man das Quadrat über $\gamma\delta$ dazu addiert, gleich dem Quadrat über $\delta\lambda$ wird. Folglich ist die Differenz der Quadrate über $\lambda\delta$ und $\delta\gamma$, d. i. die Differenz der Quadrate über $\lambda\delta$ und $\delta\varepsilon$, welche gleich dem Produkt aus $\varepsilon\lambda$ in $\lambda\gamma$ ist, gleich der Differenz der Quadrate über $\lambda\beta$ und $\zeta\eta$.

Wir nehmen jetzt $\zeta\mu = \beta\lambda$ an. $\beta\lambda$ ist grösser als $\zeta\eta$; es ist nämlich gezeigt worden, dafs die Summe der Quadrate über $\zeta\eta$ und $\delta\lambda$ gleich der Summe der Quadrate über $\lambda\beta$ und $\varepsilon\delta$ ist; nun ist aber das Quadrat über $\delta\lambda$, da es gröfser als dasjenige über $\delta\gamma$ ist, auch gröfser als das Quadrat über $\delta\varepsilon$, und daher mufs das Quadrat über $\beta\lambda$ gröfser als das Quadrat über $\zeta\eta$ sein.

Wenn nun $\beta\lambda = \zeta\mu$ ist, so mufs auch die Differenz der Quadrate über $\zeta\mu$ und $\zeta\eta$ gleich dem Produkt aus $\varepsilon\lambda$ in $\lambda\gamma$ sein. $\delta\varkappa$ ist das Vierfache der Summe $\alpha\beta + \beta\vartheta$, und λ ist die Mitte von $\delta\varkappa$; daher ist $\delta\lambda$ das Doppelte der Summe $\alpha\beta + \beta\vartheta$. Da nun noch $\delta\gamma$ das Doppelte von $\alpha\vartheta$ ist, so ergiebt sich, dafs $\gamma\lambda$ das Doppelte von zweimal $\beta\vartheta$ ist; $\gamma\lambda$ ist also das Vierfache von $\vartheta\beta$, oder $\vartheta\beta$ ist der vierte Teil von $\gamma\lambda$. Es ist aber auch $\alpha\vartheta$ als Einheit der vierte Teil von $\varepsilon\gamma = 4$; somit ist die ganze Zahl $\alpha\beta$ der vierte Teil von $\varepsilon\lambda$. Da nun, wie wir gezeigt haben, auch $\vartheta\beta$ der vierte Teil von $\lambda\gamma$ ist, so wird das Produkt aus $\alpha\beta$ in $\beta\vartheta$ ein Sechszehntel des Produkts aus $\varepsilon\lambda$ in $\lambda\gamma$, oder das Produkt $\varepsilon\lambda\,.\,\lambda\gamma$ wird das Sechszehnfache des Produkts $\alpha\beta\,.\,\beta\vartheta$ sein. Es ist aber gezeigt worden, dafs das Produkt $\varepsilon\lambda\,.\,\lambda\gamma$ gleich der Differenz der Quadrate über $\mu\zeta$ und $\zeta\eta$ ist; folglich ist das Sechszehnfache des Produkts $\alpha\beta\,.\,\beta\vartheta$ gleich der Differenz der Quadrate über $\mu\zeta$ und $\zeta\eta$, d. i. gleich dem Quadrat über $\mu\eta$, vermehrt um das Doppelte des Produkts aus $\zeta\eta$ in $\eta\mu$. Es ist also auch das Sechszehnfache des Produkts $\alpha\beta\,.\,\beta\vartheta$ gleich dem Quadrat über $\eta\mu$, vermehrt um das Doppelte des Produkts aus $\zeta\eta$ in $\eta\mu$. Daher ist $\eta\mu$ eine gerade Zahl und kann halbiert werden; ihre Mitte sei ν. — — —

[Hier bricht das Original ab, und es läfst sich nicht erkennen, wie Diophant die vorliegende Aufgabe gelöst hat. Ob dieselbe überhaupt von Diophant herrührt oder ein fremdartiger Zusatz ist, bleibe dahingestellt.

So weit das Bruchstück reicht, ist der Gang folgender:

Bezeichnet a die Anzahl der Ecken, n die Seite, so sollen alle zusammengehörigen Werte von a und n bestimmt werden, für welche eine gegebene Zahl P eine Polygonalzahl ist.

Zu Grunde gelegt wird die Gleichung

$$8P(a-2) + (a-4)^2 = [2 + (a-2)(2n-1)]^2,$$

deren rechte Seite der Kürze wegen mit A^2 bezeichnet werden möge. Da

$$8P = 4 + 4(2P - 1),$$

also

$$8P(a-2) = 4(a-2) + 4(a-2)(2P-1)$$

ist, so ist

$$A^2 = 4(a-2)(2P-1) + 4(a-2) + (a-4)^2,$$

oder, wegen der Identität

$$(a-4)^2 + 4(a-2) = (a-2)^2 + 2^2,$$

$$A^2 = 4(a-2)(2P-1) + (a-2)^2 + 2^2$$
$$= (a-2)[4(2P-1) + a - 2] + 2^2.$$

Nun ist allgemein

$$(y+x)x = \left(\frac{y}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2,$$

also, wenn A^2 wieder durch seinen Wert ersetzt wird,

$$[2+(a-2)(2n-1)]^2 = [2(2P-1)+a-2]^2 - [2(2P-1)]^2 + 2^2,$$
$$[2(2P-1)]^2 - 2^2 = [2(2P-1)+a-2]^2 - [2+(a-2)(2n-1)]^2,$$

und hieraus folgt, wenn rechts die Identität

$$u^2 - v^2 = (u-v)^2 + 2(u-v)v,$$

links die Identität $u^2 - v^2 = (u+v)(u-v)$ angewendet wird,

$$16P(P-1) = [4P + 2a - 2an + 4n - 8]^2$$
$$+ 2[4P + 2a - 2an + 4n - 8] \cdot [2an - 4n - a + 4].$$

Nun ist $4P + 2a - 2an + 4n - 8$ eine gerade Zahl. — — —

Bachet behandelt die Aufgabe in seinem noch zu besprechenden Anhang zur Schrift Diophants über die Polygonalzahlen. Die einfachste Lösung ist wohl folgende: Wird die n^{te} a-eckzahl mit P bezeichnet, so ist

$$P = \frac{[2 + (n-1)(a-2)]n}{2},$$

und daraus folgt

$$(1) \qquad 4 + an - a - 2n = \frac{2P}{n},$$

$$(2) \qquad a = 2 + \frac{2(P-n)}{n(n-1)}.$$

Nun mufs sowohl $\frac{2P}{n}$, als auch $\frac{2(P-n)}{n(n-1)}$ eine **ganze** Zahl sein, und da $a \geqq 3$ ist, so mufs

$$\frac{2(P-n)}{n(n-1)} \geqq 1$$

sein. Diese letzte Bedingung liefert

$$(3) \qquad n \leqq \frac{-1+\sqrt{1+8P}}{2}.$$

Will man nun bestimmen, welche Polygonalzahl eine gegebene Zahl P ist, so substituiere man in (2) für n die Werte 2, 3, ... bis zu dem durch die Formel (3) gelieferten Grenzwerte; dabei bleiben die Zahlen, für welche $\frac{2P}{n}$ ein Bruch ist, von vorn herein ausgeschlossen. Jedes n, dessen Einsetzung in (2) für a eine ganze Zahl ergiebt, liefert eine Lösung.

Beispiele. I. Welche Polygonalzahl ist 325? Da $\sqrt{1+8.325} = 51$, also $n \leqq 25$ sein mufs, und da ferner von den Zahlen 2, 3, 4, ... 25 in $2.325 = 2.5.5.13$ nur 2, 5, 10, 13, 25 aufgehen, so hat man auch nur diese in (2) einzusetzen; es ergeben sich die zusammengehörigen Werte

n	2	5	10	13	25
a	325	34	9	6	3

II. $P = 120$.

n	2	3	4	5	6	8	10	12	15
a	120	41	—	—	—	6	—	—	3

Bachet hat zu Diophants Schrift über die Polygonalzahlen einen Anhang in zwei Büchern geschrieben, von denen ich die wichtigsten Sätze nur in Formeln, nicht in Worten anführe, den Beweis dem Leser als Übung überlassend. Dabei soll a stets die Anzahl der Ecken, P_n also die n^{te} a-eckzahl bezeichnen. Die Dreieckzahlen seien $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$

I. Buch.

Satz 7. $\quad P_{n+1} = P_n + n(a-2) + 1.$

10. $\quad P_{k+n} = P_k + P_n + kn(a-2).$

11. $\quad P_n = \Delta_n + (a-3)\Delta_{n-1}.$

15. $\quad P_1 + P_2 + \cdots + P_n$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (a-2)\,[(n-1).1 + (n-2).2 + (n-3).3 + \cdots + 1.(n-1)].$$

16. $P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n$
$$= (a-2)[\varDelta_1 + \varDelta_2 + \cdots + \varDelta_{n-1}] + \varDelta_n.$$

17. $(n+1)P_n + \frac{n(n+1)}{2} = 3[P_1 + P_2 + \cdots + P_n].$

II. Buch.

Satz 18. $P_k \varDelta_n + k^2(a-2)[\varDelta_1 + \varDelta_2 + \cdots + \varDelta_{n-1}]$
$$= P_k + P_{2k} + P_{3k} + \cdots + P_{nk}.$$

21. $P_k \varDelta_n + (n+1)P_{nk} = 3[P_k + P_{2k} + \cdots + P_{nk}].$

24. $n^3 = n^2 + 2n . [1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)].$

25. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \varDelta_n^2.$

28. $n^3 + 6\varDelta_n + 1 = (n+1)^3.$

31. u. 32. $k^3 + (2k)^3 + \cdots + (nk)^3$
$$= k^3 . \varDelta_n^2 = k(k + 2k + \cdots + nk)^2.$$

Hier macht Fermat die folgende Bemerkung, deren Richtigkeit sich leicht darthun läſst:

„Hieraus ergiebt sich, daſs der Kubus des gröſsten Gliedes, multipliziert mit der Anzahl der Glieder, weniger als das Vierfache der Summe aller Kuben ist."

In Nr. 27 wird der Satz des Nikomachus über die Zerlegung der Kubikzahlen in ungerade Zahlen hergeleitet. Um den Satz zu verallgemeinern, lösen wir die Aufgabe:

Welche n auf einander folgenden ungeraden Zahlen haben die Summe n^α, wo α eine beliebige ganze positive Zahl ist?

Werden die n gesuchten Zahlen mit
$$2x+1, \quad 2x+3, \quad \cdots, \quad 2x+2n-1$$
bezeichnet, so soll
$$(2x+n)n = n^\alpha, \quad \text{also} \quad 2x = n^{\alpha-1} - n$$
sein. Die gesuchten Zahlen sind also
$$n^{\alpha-1} - n + 1, \quad n^{\alpha-1} - n + 3, \quad \cdots, \quad n^{\alpha-1} + n - 1.$$
Hieraus ergiebt sich für $\alpha = 3$
$$(n^2 - n + 1) + (n^2 - n + 3) + \cdots + (n^2 + n - 1) = n^3,$$

also für $n = 1 \quad 1 = 1^3$

$= 2 \quad 3 + 5 = 2^3$

$= 3 \quad 7 + 9 + 11 = 3^3$

. . . .

Auf diesen Satz läfst Fermat eine Anmerkung folgen, deren Wortlaut mir ganz unverständlich geblieben ist. Bei der ungemein grofsen Menge von Fehlern, welche die Fermat'sche Ausgabe des Diophant enthält, vermute ich, dafs eine arge Verstümmelung vorliegt und gebe den Satz in folgenden Worten: „In jeder Reihe von Polygonalzahlen ist die Zahl 1 das erste Glied; das zweite Glied ist die Summe der beiden ersten ungeraden Zahlen, vermehrt um das Produkt aus der ersten Dreieckzahl in die um 4 verminderte Anzahl der Ecken; das dritte Glied ist die Summe der drei ersten ungeraden Zahlen, vermehrt um das Produkt aus der zweiten Dreieckzahl in die um 4 verminderte Anzahl der Ecken; u. s. w. ins Unendliche."

Der Satz würde also die Formel

$$P_n = [1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)] + \Delta_{n-1}(a - 4)$$

liefern, deren Richtigkeit sich leicht darthun läfst.]

Anhang.

I. Figurierte Zahlen.

Die Koeffizienten der Potenzen von x in der Entwicklung

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2 + \cdots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1\,.\,2\ldots k}x^k + \cdots$$

dienen auch zur Definition der figurierten Zahlen. Werden diese Koeffizienten der Kürze wegen mit

$$\binom{m}{0} = 1,\ \binom{m}{1},\ \binom{m}{2}, \ldots,\ \binom{m}{k}, \ldots$$

bezeichnet, wird also allgemein

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1\,.\,2\ldots k}$$

gesetzt, so ergiebt sich durch Erweiterung mit $1.2.3\ldots(m-k)$

$$\binom{m}{k} = \frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots m}{1\,.\,2\ldots k\,.\,1\,.\,2\ldots(m-k)}.$$

Denselben Wert erhält man aber auch für den $(m-k)^{\text{ten}}$ Koeffizienten; also ist

(1) $$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}.$$

Weiter ist

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{k-1}\cdot\frac{m-k+1}{k},$$

also

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \binom{m}{k-1}\left(1 + \frac{m-k+1}{k}\right) = \binom{m}{k-1}\cdot\left(\frac{m+1}{k}\right),$$

oder

(2) $$\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \binom{m+1}{k}.$$

Eine wiederholte Anwendung der Formel (2) liefert

$$\binom{m+n-1}{m} = \binom{m+n-2}{m} + \binom{m+n-2}{m-1},$$

$$\binom{m+n-2}{m} = \binom{m+n-3}{m} + \binom{m+n-3}{m-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\binom{m+1}{m} = \binom{m}{m} + \binom{m}{m-1},$$

und durch Addition dieser Gleichungen erhält man

$$(3)\qquad \binom{m+n-1}{m} = \binom{m}{m} + \binom{m}{m-1} + \binom{m+1}{m-1} + \cdots + \binom{m+n-2}{m-1}.$$

Die in den Formeln (1), (2), (3) enthaltenen Sätze genügen hier für die Betrachtung der figurierten Zahlen.

Man versteht nämlich unter der n^{ten} figurierten Zahl m^{ter} Odnung den Ausdruck

$$\binom{m+n-1}{m} = \frac{(m+n-1)(m+n-2)\ldots n}{1.2\ldots.m}.$$

Die figurierten Zahlen m^{ter} Ordnung sind also

$$\binom{m}{m}, \binom{m+1}{m}, \binom{m+2}{m}, \ldots, \binom{m+n-1}{m}$$

oder

$$1, \frac{m+1}{1}, \frac{(m+2)(m+1)}{1.2}, \ldots, \frac{(m+n-1)(m+n-2)\ldots n}{1.2\ldots m}.$$

Für $m = 1, 2, 3, \ldots$ giebt diese Reihe die figurierten Zahlen der verschiedenen Ordnungen.

m							
1	1	2	3	4	5	...	n
2	1	3	6	10	15	...	$\frac{n(n+1)}{1.2}$
3	1	4	10	20	35	...	$\frac{(n+2)(n+1)n}{1.2.3}$
4	1	5	15	35	70	...	$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{1.2.3.4}$
5	1	6	21	56	126	...	$\frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n}{1.2.3.4.5}$
.	.	.	.	.	.	.	. . . .

Die figurierten Zahlen erster Ordnung sind die natürlichen Zahlen; die figurierten Zahlen zweiter Ordnung heifsen auch Dreieckzahlen, weil ihre Einheiten in parallelen Linien zu gleichseitigen Dreiecken zusammengestellt werden können, wie aus Fig. 1 auf Seite 322 ersichtlich ist. Ebenso können die figurierten Zahlen dritter Ordnung mittels dreiseitiger Pyramiden zur Anschauung gebracht werden; sie heifsen deshalb Tetraedralzahlen. Die figurierten Zahlen höherer Ordnung lassen sich auf diese Weise nicht veranschaulichen.

Die obige Tabelle der figurierten Zahlen kann mittels der in den Formeln (1), (2), (3) enthaltenen Sätze mit Leichtigkeit beliebig weit ausgedehnt werden. Die Formel (1), die auch in folgender Weise geschrieben werden kann:

$$\binom{k+(m-k+1)-1}{k} = \binom{m-k+(k+1)-1}{m-k},$$

drückt aus, dafs die $(m-k+1)^{\text{te}}$ Zahl k^{ter} Ordnung gleich der $(k+1)^{\text{ten}}$ Zahl $(m-k)^{\text{ter}}$ Ordnung ist.

Die Formel (2) lehrt, dafs man durch Addition der k^{ten} Zahl n^{ter} Ordnung und der $(k-1)^{\text{ten}}$ Zahl $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung die k^{te} Zahl $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung erhält.

Endlich geht aus (3) hervor, dafs die k^{te} Zahl n^{ter} Ordnung sich ergiebt, wenn man die k ersten Zahlen $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung addiert.

Auch macht jetzt der Beweis des von Fermat in der Anmerkung zu IX gegebenen Satzes keine Schwierigkeit. Derselbe lautet in ganz allgemeiner Fassung:

Wenn man die $(n+1)^{\text{te}}$ figurierte Zahl m^{ter} Ordnung mit n multipliziert, so erhält man das $(m+1)$-fache der n^{ten} figurierten Zahl $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Da nämlich die n^{te} figurierte Zahl m^{ter} Ordnung gleich

$$\frac{(m+n-1)(m+n-2)\ldots n}{1\,.\,2\ldots m}$$

ist, so wird die $(n+1)^{\text{te}}$ figurierte Zahl m^{ter} Ordnung gleich

$$\frac{(m+n)(m+n-1)\ldots(n+1)}{1\,.\,2\ldots m}$$

und die n^{te} figurierte Zahl $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung gleich

$$\frac{(m+n)(m+n-1)\ldots n}{1.2\ldots m(m+1)}$$

sein; offenbar ist aber

$$n\cdot\frac{(m+n)\ldots(n+1)}{1.2\ldots m}=(m+1)\cdot\frac{(m+n)\ldots n}{1.2\ldots m(m+1)}.$$

Polygonalzahlen.

Zu den figurierten Zahlen im weiteren Sinne des Wortes gehören die Polygonalzahlen. Wie wir oben aus der Formel (3) entnommen haben, ist die n^{te} Dreieckzahl gleich der Summe der Zahlen 1, 2, 3, ..., n, also gleich $\frac{n(n+1)}{1.2}$. Die Dreieckzahlen gehen also aus der Reihe der natürlichen Zahlen, d. i. der mit 1 beginnenden arithmetischen Reihe, deren Differenz 1 ist, hervor.

Wenn wir ebenso, von der Reihe mit der Differenz 2

(4) $$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ldots$$

ausgehend, eine neue Reihe bilden, deren k^{tes} Glied die Summe der k ersten Glieder von (4) ist, so erhalten wir die Viereckzahlen, und da das k^{te} Glied von (4) gleich

$$1+(k-1)2=2k-1$$

ist, so ist die k^{te} Viereckzahl $[1+(2k-1)]\frac{k}{2}=k^2$, die Reihe der Viereckzahlen also

(5) $$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots,\ k^2.$$

Auf dieselbe Weise entsteht aus der Reihe

(6) $$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ \ldots,\ 1+(k-1)3=3k-2$$

die Reihe der Fünfeckzahlen

(7) $$1,\ 5,\ 12,\ 22,\ \ldots,\ \frac{(3k-1)k}{2},$$

aus der Reihe

(8) $$1,\ 5,\ 9,\ 13,\ \ldots,\ 4k-3$$

die Reihe der Sechseckzahlen

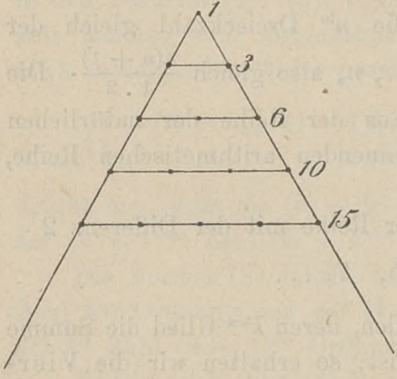
$$(9) \qquad 1,\ 6,\ 15,\ 28,\ \ldots,\ (2k-1)k,$$

und allgemein ist

$$(10) \quad 1,\ a,\ 3a-3,\ 6a-8,\ 10a-15,\ \ldots,\ \frac{ak-2k-a+4}{2}k$$

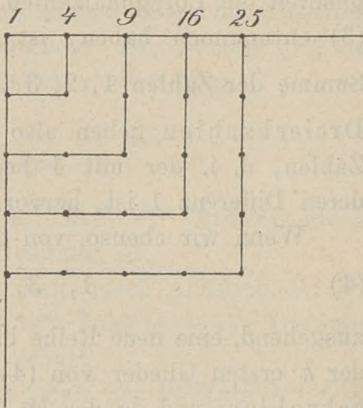
die Reihe der *a*-eckzahlen. Der gemeinsame Namen der Dreieckzahlen und der Zahlen der Reihen (5), (7), (9), (10) ist Polygonalzahlen. Sie lassen sich durch die nachstehenden Figuren veranschaulichen:

Fig. 1.



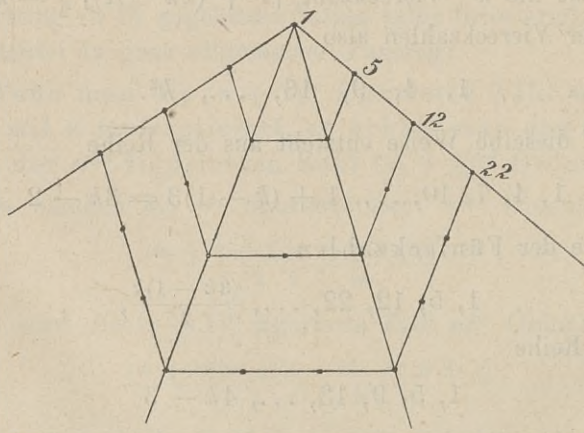
Dreieckzahlen.

Fig. 2.



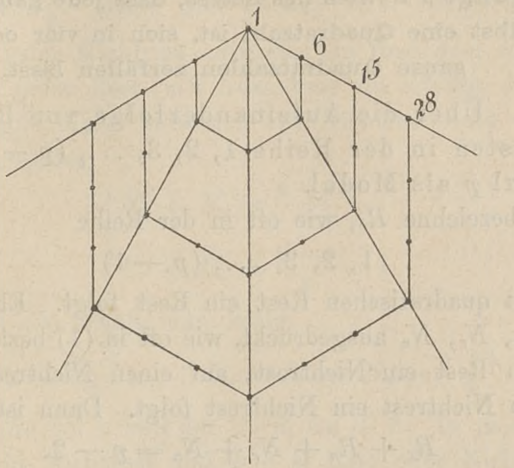
Viereckzahlen.

Fig. 3.



Fünfeckzahlen.

Fig. 4.



Sechseckzahlen.

Da die k^{te} $(a+1)$eckzahl $= \frac{2+(k-1)(a-1)}{2}k$, die k^{te} a-eckzahl $= \frac{2+(k-1)(a-2)}{2}k$ ist, so ergiebt sich für die Differenz beider $\frac{k(k-1)}{2}$, d. i. die $(k-1)^{\text{te}}$ Dreieckzahl. Dieser Satz erleichtert die Bildung der Polygonalzahlen:

					$k =$						
a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	· ·
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	· ·
4	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	· ·
5	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	· ·
6	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190	· ·
7	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235	· ·
8	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280	· ·
9	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325	· ·
10	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370	· ·
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	. .
Differenz	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	· ·

II. Lagrange's Beweis des Satzes, dass jede ganze Zahl, die nicht selbst eine Quadratzahl ist, sich in vier oder weniger ganze Quadratzahlen zerfällen lässt.

§ 1. Über die Aufeinanderfolge von Resten und Nichtresten in der Reihe 1, 2, 3, ..., $(p-1)$ für die Primzahl p als Modul.

Es bezeichne R_r, wie oft in der Reihe

$$(1) \qquad 1, 2, 3, \ldots, (p-1)$$

auf einen quadratischen Rest ein Rest folgt. Ebenso werde durch R_n, N_r, N_n ausgedrückt, wie oft in (1) beziehungsweise auf einen Rest ein Nichtrest, auf einen Nichtrest ein Rest, auf einen Nichtrest ein Nichtrest folgt. Dann ist offenbar

$$(2) \qquad R_r + R_n + N_r + N_n = p - 2.$$

Ist nun α ein Nichtrest der Reihe (1), der aber $< p - 1$ sein möge, und wird eine zweite Zahl β durch die Kongruenz

$$\alpha\beta \equiv 1 \pmod{p}$$

bestimmt, so mufs auch β ein Nichtrest sein, da das Produkt $\alpha\beta$ ein Rest, nämlich 1 sein soll. Wäre nun $\beta = p - 1$, also $\alpha(p-1) \equiv 1 \pmod{p}$, so müfste $\alpha \equiv -1 \equiv p - 1 \pmod{p}$ sein, was der Voraussetzung widerspricht. Es ist daher auch $\beta < p - 1$. Wenn jetzt $\alpha + 1$ ein Nichtrest ist, so mufs $\beta + 1 \equiv \beta + \alpha\beta \equiv \beta(\alpha + 1)$ als Produkt zweier Nichtreste ein Rest sein. Ist dagegen $\alpha + 1$ ein Rest, so mufs $\beta + 1$ ein Nichtrest sein. So oft also die Zahlen der Reihe (1) α, $\alpha + 1$ eine Einheit für N_n (oder N_r) liefern, so oft liefern β, $\beta + 1$ eine Einheit für N_r (oder N_n), und daher ist

$$(3) \qquad N_r = N_n.$$

Es sei jetzt erstens p von der Form $4n + 1$, in welchem Falle bekanntlich $p - 1$ ein Rest ist und die Zahlen m und $p - m$ gleichzeitig Reste oder Nichtreste sind. Ist dann α ein Rest und $\alpha + 1$ ein Nichtrest, so wird $p - \alpha - 1$ ein Nichtrest, $p - \alpha$ ein Rest sein. Jeder durch die Folge α, $\alpha + 1$ gelieferten Einheit von R_n entspricht also eine durch die Folge $p - \alpha - 1$, $p - \alpha$ gelieferte Einheit von N_r, und somit ist in diesem Falle

$$(4) \qquad R_n = N_r.$$

Da es ferner $\frac{p-1}{2}$ Reste und ebenso viele Nichtreste giebt, und da auf jeden Nichtrest entweder ein Rest oder ein Nichtrest und auf jeden Rest (mit Ausnahme des letzten, der gleich $p-1$ ist) gleichfalls entweder ein Nichtrest oder ein Rest folgt, so ist weiter

$$(5)\qquad \begin{cases} N_r + N_n = \frac{p-1}{2} \\ R_r + R_n = \frac{p-1}{2} - 1. \end{cases}$$

Aus (3), (4), (5) erhält man leicht

$$(6)\qquad R_r = \frac{p-5}{4}, \qquad R_n = N_r = N_n = \frac{p-1}{4}.$$

Zweitens sei p von der Form $4n+3$. In diesem Falle ist $p-1$ ein Nichtrest und $p-m$ Rest oder Nichtrest, jenachdem m Nichtrest oder Rest ist. Wenn daher α ein Nichtrest, $\alpha+1$ ebenfalls ein Nichtrest ist, so dafs die Folge α, $\alpha+1$ eine Einheit für N_n liefert, so wird $p-\alpha-1$ ein Rest und $p-\alpha$ ebenfalls ein Rest sein, so dafs die Folge $p-\alpha-1$, $p-\alpha$ eine Einheit für R_r giebt. Es ist also

$$(7)\qquad N_n = R_r.$$

Da nun ferner jetzt

$$(8)\qquad \begin{cases} R_r + R_n = \frac{p-1}{2} \\ N_r + N_n = \frac{p-1}{2} - 1 \end{cases}$$

ist, so ergiebt sich leicht [aus (3), (7), (8)]

$$(9)\qquad R_r = N_r = N_n = \frac{p-3}{4},\ R_n = \frac{p+1}{4}.$$

Die Ausdrücke (6), (9) lassen erkennen, dafs für $p>5$ jede der Zahlen R_r, R_n, N_r, N_n einen von Null verschiedenen Wert hat.

Wird statt (1) die Reihe

$$(10)\qquad c,\ 2c,\ 3c,\ \ldots,\ (p-1)c$$

genommen, wo c eine beliebige durch p nicht teilbare Zahl bedeutet, so sind zwei entsprechende Glieder von (1) und (10) gleichzeitig Reste oder Nichtreste, wenn c ein Rest von p ist. Ist dagegen c ein Nichtrest von p, so ist von zwei entsprechenden Gliedern von (1) und (10) das eine ein Rest, das andere ein Nichtrest.

§ 2. Auflösung der Kongruenz
$$ax^2 + by^2 + c \equiv 0 \pmod{p}.$$

Wenn b und $-c$ denselben quadratischen Charakter in Beziehung auf den Modul p haben (zugleich Reste oder Nichtreste sind), so ist die Kongruenz
$$by^2 + c \equiv 0 \pmod{p}$$
möglich und liefert zwei Werte für y, die in Verbindung mit $x = 0$ zwei Lösungen der vorgelegten Kongruenz ausmachen.

Haben a und $-c$ denselben quadratischen Charakter für den Modul p, so kann man $y = 0$ annehmen und die zugehörigen Werte von x durch die Kongruenz
$$ax^2 + c \equiv 0 \pmod{p}$$
bestimmen.

Um die übrigen Lösungen zu erhalten, bilden wir die Reihe der Vielfachen von c
$$c,\ 2c,\ 3c,\ \ldots,\ (p-1)c$$
und wählen zwei auf einander folgende Glieder dieser Reihe α und $\alpha + c$, von denen das erste von demselben quadratischen Charakter wie a, das zweite von demselben quadratischen Charakter wie $-b$ ist. Für jedes Paar solcher Werte α und $\alpha + c$ liefern dann die Kongruenzen
$$ax^2 \equiv \alpha, \quad -by^2 \equiv \alpha + c \pmod{p}$$
Werte von x, y, welche die vorgelegte Kongruenz befriedigen; denn da
$$-by^2 - ax^2 \equiv \alpha + c - \alpha \equiv c,$$
also
$$ax^2 + by^2 \equiv -c \pmod{p}$$
ist, so wird
$$ax^2 + by^2 + c \equiv 0 \pmod{p}$$
sein.

Wenn umgekehrt ξ, η Lösungen der vorgelegten Kongruenz sind, also
$$(-b\eta^2) - (a\xi^2) \equiv c \pmod{p}$$
ist, so sind $a\xi^2$ und $-b\eta^2$, da die Reihe
$$c,\ 2c,\ 3c,\ \ldots,\ (p-1)c$$

die Reste aller Zahlen von 1 bis $p-1$ enthält, auch zwei auf einander folgenden Gliedern dieser Reihe nach dem Modul p kongruent. Es wird also jede Wurzel auf dem dargelegten Wege erhalten werden.

Beispiele.

$$\text{I.}\quad 5x^2 + 11y^2 \equiv 10 \pmod{19}.$$

Da 5 Rest, 11 Rest, 10 Nichtrest von 19 ist, so kann weder x noch y gleich 0 angenommen werden. Wir bilden jetzt die Reihe der Vielfachen von $-10 \equiv 9$ und fügen der Deutlichkeit halber jeder Zahl ihren quadratischen Charakter bei, indem wir unter jeden Rest $+$, unter jeden Nichtrest $-$ schreiben:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 9, & 18, & 8, & 17, & 7, & 16, & 6, & 15, & 5, & 14, & 4, & 13, & 3, \\ + & - & - & + & + & + & + & - & + & - & + & - & - \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 12, & 2, & 11, & 1, & 10. \\ - & - & + & + & - \end{array}$$

Nun ist 5 Rest, $-11 \equiv 8$ Nichtrest; wir haben also die Kongruenzen

$$\left\{\begin{array}{r|c|c|c|c} 5x^2 \equiv 9 & 6 & 5 & 4 & 1 \\ -11y^2 \equiv 18 & 15 & 14 & 13 & 10 \end{array}\right.$$

zu lösen, und diese liefern

$$\left\{\begin{array}{r|c|c|c|c|} \pm x \equiv 13 & 9 & 18 & 4 & 2 \\ \pm y \equiv 8 & 16 & 4 & 2 & 14 \end{array}\right. .$$

$$\text{II.}\quad 3x^2 + 5y^2 \equiv 13 \pmod{19}.$$

$$\left\{\begin{array}{r|c|c|c|c|} \pm x \equiv 6 & 2 & 9 & 8 & 3 \\ \pm y \equiv 0 & 2 & 7 & 5 & 1 \end{array}\right. .$$

$$\text{III.}\quad x^2 + y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{43}.$$

$$\left\{\begin{array}{r|c|c|c|c|c|} \pm x \equiv 1 & 2 & 7 & 21 & 19 & 8 \\ \pm y \equiv 16 & 9 & 6 & 17 & 5 & 8 \end{array}\right. .$$

[Natürlich lassen sich in diesem letzten Beispiel auch x und y gegen einander vertauschen].

§ 3. Über die Zerfällung der Zahlen in vier Quadrate. Nach diesen Vorbemerkungen gebe ich Lagrange's Beweis des Satzes, dafs sich jede ganze Zahl, die nicht selbst eine Quadratzahl ist, in vier oder weniger ganze Quadratzahlen zerfällen läſst.

Die von Euler (Commentationes Algebraicae Collectae, I, p. 543) gegebene Identität

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) =$$
$$(a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta)^2 + (a\beta - b\alpha - c\delta + d\gamma)^2$$
$$+ (a\gamma + b\delta - c\alpha - d\beta)^2 + (a\delta - b\gamma + c\beta - d\alpha)^2$$

lehrt, daſs der Satz von jeder zusammengesetzten Zahl gilt, sobald er für die einzelnen in dieselbe aufgehenden Primzahlen besteht. Unsere Betrachtung kann also auf Primzahlen beschränkt werden.

Hilfssatz. Jede Zahl, welche in die Summe von vier Quadraten aufgeht, die prim zu einander sind, ist selbst die Summe von vier Quadraten.

Beweis. Die Zahl p möge in die Summe

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2$$

aufgehen, und es seien A, B, C, D prim zu einander. Sind dann a, b, c, d die absolut kleinsten Reste von A, B, C, D für den Modul p, also der absolute Wert jeder der Zahlen $a, b, c, d \leqq \frac{1}{2}p$, so geht p auch in $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ auf, d. h. es ist

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = pp_1, \tag{1}$$

wo p_1 eine ganze Zahl bedeutet. Da nun

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < 4\left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

also

$$pp_1 < p^2$$

ist, so muſs

$$p_1 < p$$

sein.

Wäre $p_1 = 1$, so würde (1) in

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = p$$

übergehen, der Satz wäre also bewiesen. Ist dagegen $p_1 > 1$, so mögen a_1, b_1, c_1, d_1 die absolut kleinsten Reste von a, b, c, d für den Modul p_1 bezeichnen, so daſs also der absolute Wert jeder der Zahlen $a_1, b_1, c_1, d_1 \leqq \frac{1}{2}p_1$ ist. Da nun p_1 wegen (1) in $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ aufgeht, so mufs auch $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2$ durch p_1 teilbar, etwa

$$(2) \qquad a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = p_1 p_2$$

sein, wo p_2 eine ganze Zahl bedeutet, die $< p_1$ ist. Durch Multiplikation von (1) und (2) erhält man jetzt

$$(3) \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = p p_1^2 p_2,$$

wo nach der oben angegebenen Identität

$$(4) \qquad \begin{cases} \alpha = a a_1 + b b_1 + c c_1 + d d_1 \\ \beta = a b_1 - b a_1 - c d_1 + d c_1 \\ \gamma = a c_1 + b d_1 - c a_1 - d b_1 \\ \delta = a d_1 - b c_1 + c b_1 - d a_1 \end{cases}$$

ist. Nun können a_1, b_1, c_1, d_1 als Reste von a, b, c, d für den Modul p_1 beziehungsweise durch

$$a - k p_1,\ b - k_1 p_1,\ c - k_2 p_1,\ d - k_3 p_1$$

ersetzt werden, wo k, k_1, k_2, k_3 ganze Zahlen bedeuten; dann ergiebt sich leicht

$$\alpha = p_1 (p - ak - bk_1 - ck_2 - dk_3),$$
$$\beta = p_1 (- ak_1 + bk + ck_3 - dk_2),$$
$$\gamma = p_1 (- ak_2 - bk_3 + ck + dk_1),$$
$$\delta = p_1 (- ak_3 + bk_2 - ck_1 + dk).$$

Da somit jede der Gröfsen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ den Faktor p_1 enthält, so kann die Gleichung (3) durch p_1^2 gehoben werden, und man erhält

$$(5) \qquad a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2 = p p_2,$$

wo a_2, b_2, c_2, d_2 die durch Unterdrückung von p_1 aus $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ entstandenen Zahlen sind. Die Gleichung (5) hat dieselbe Form wie (1); es ist aber $p_2 < p_1$. Wenn jetzt $p_2 = 1$ ist, so ist p nach (5) die Summe von vier Quadraten. Ist dagegen $p_2 > 1$, so verfahren wir mit (5), wie wir mit (1) verfuhren, und gelangen zu einer neuen Gleichung

$$(6) \qquad a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 + d_3^2 = p p_3,$$

wo $p_3 < p_2$ ist. Da $p_1, p_2, p_3, \ldots$ eine abnehmende Reihe ganzer positiver Zahlen bilden, so mufs endlich einmal ein $p_m = 1$ erscheinen, d. h. es mufs sich

$$a_m^2 + b_m^2 + c_m^2 + d_m^2 = p$$

ergeben. p ist somit die Summe von vier Quadraten.

Lehrsatz. Jede Primzahl ist die Summe von vier oder weniger Quadraten.

Beweis. Wir betrachten die Kongruenz

$$x^2 + y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Da 1 ein Rest und -1 ein Rest oder Nichtrest ist, je nachdem p die Form $4n + 1$ oder $4n + 3$ hat, so giebt es jedesmal eine Lösung, so oft in der Reihe

$$1, 2, 3, \ldots, p - 1$$

im ersteren Falle auf einen Rest ein Rest, im zweiten Falle auf einen Rest ein Nichtrest folgt. Die Kongruenz hat daher, sobald $p > 5$ ist, immer wenigstens eine Lösung. Jede Primzahl, die > 5 ist, geht also in $x^2 + y^2 + 1$, allgemeiner in die Summe von vier Quadraten auf, die prim zu einander sind, ist somit selbst die Summe von vier oder weniger Quadraten. (Vgl. auch Gauss, Disquisitiones, 293.)

III. Die arithmetischen Epigramme der griechischen Anthologie.

Im Anschlufs an die 33. Aufgabe des 5ten Buches teilte Bachet 45 damals zum gröfsten Teil noch unveröffentlichte Epigramme aus dem Palatinischen Kodex der griechischen Anthologie mit, welche, um das Epigramm 46 vermehrt, in den Ausgaben dieser Anthologie von Brunck-Jacobs (Leipzig 1813—1817) und Dübner (Paris 1864—1872) abgedruckt sind. Eine vollständige Übersetzung hat Zirkel 1853 im Programm des Bonner Gymnasiums gegeben. Wenngleich einige dieser Epigramme keinen grofsen Wert beanspruchen können, so wird vielleicht doch dem einen oder anderen Leser eine vollständige Mitteilung derselben willkommen sein. Einige sind von Zirkel so vortrefflich übersetzt, dafs ich nichts daran zu ändern hatte. Die übrigen habe ich neu übersetzt.

Dabei habe ich es für richtig gehalten, lieber einen unwichtigen Ausdruck, den der Dichter wohl nur des Versmafses wegen eingeschoben hat, unübersetzt zu lassen, als der deutschen Sprache allzusehr Gewalt anzuthun. Der Vollständigkeit wegen habe ich auch eine Übersetzung des von Lessing 1773 aus einem Kodex der Bibliothek zu Wolfenbüttel veröffentlichten „Rinderproblem des Archimedes“ beigefügt. Was das Geschichtliche betrifft, so sei auf Nesselmann, p. 477 ff. und Cantor, p. 393 ff. verwiesen. Das Problema bovinum haben Krumbiegel und Amthor (Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 25) sowohl in philologischer, als auch in mathematischer Hinsicht erschöpfend behandelt.

1.

Edler Pythagoras, du Helikonischer Spröfsling der Musen,
Sag' mir, ich bitte dich d'rum, wie viel auf der Wissenschaft Ringplatz
Jünger dir weilen im Haus, gar eifrig erstrebend den Kampfpreis.
Sagen will ich es dir, o Polykrates. Siehe, die Hälfte
Treibet die schöne Mathematik; dagegen ein Viertel
Mühet sich um die Natur, die unsterbliche; weiter ein Siebtel
Gänzlich im Schweigen verharrt, bedenkend, was sie vernehmen.
Zähl' drei Frauen hinzu, aus denen Theano hervorragt:
So viel leite zu Priestern ich an der Pierischen Musen.

[28]

2.

Einst sprach Kypris zu Eros, der niedergeschlagen daher kam:
Welcher Kummer beschwert dich, mein Kind? Er entgegnete also:
Eben kam ich vom Helikon her, mit Äpfeln beladen;
Doch die haben die Musen geraubt und sind dann entflohen.
Kleio nahm mir ein Fünftel, Euterpe ein Zwölftel der Äpfel;
Ferner ein Achtel Thaleia, die hehre; ein Zwanzigstel dann noch
Nahm Melpomene weg; Terpsichore stahl mir ein Viertel,
Und Erato ergriff als ihren Anteil ein Siebtel.
Polyhymnia hat mir dreifsig Äpfel geraubet,
Hundert und zwanzig sodann Urania; mächtig belastet

Schlich Kalliope fort mit dreimal hundert der Äpfel.
Heim nun komm' ich zu dir, schau' her! mit leichteren Händen;
Liefsen die Göttinnen doch blofs fünfzig Äpfel mir übrig.

[3360]

3.

Körbe mit Äpfeln trugen die Chariten einst, und in jedem
Waren der Äpfel die nämliche Zahl. Es begegneten ihnen
Die neun Musen und baten um Obst. Da gaben sie jeder,
So dafs jede der neun und der drei dann hatte dasselbe.
Sag', wieviel sie verteilt, dafs allen die nämliche Zahl ward.

[Hatte jede Charis anfangs k Äpfel, so kam $\frac{k}{4}$ auf jede der 12 Göttinnen.]

4.

Schmied' mir die Krone und mische das Gold mit dem Kupfer zusammen,
Zinn auch nimm noch dazu und mühsam bereitetes Eisen.
Sechzig Minen sei das Gewicht. Das Gold und das Kupfer
Wieg' zwei Drittel des Ganzen; das Gold mit dem Zinn dagegen
Sei drei Viertel; aber das Gold und das Eisen zusammen
Wiege der Fünftel drei. Wohlan, nun sage genau mir,
Wieviel Gold du mufst nehmen und Kupfer, zu treffen die Mischung,
Welches Gewicht an Zinn und welches endlich an Eisen,
Dafs du schmiedest genau von sechzig Minen die Krone.

[Gold $30\frac{1}{2}$, Kupfer $9\frac{1}{2}$, Zinn $14\frac{1}{2}$, Eisen $5\frac{1}{2}$]

5.

Von der silbernen Schale, o Schmied, ein Drittel und Viertel
Sollst du nehmen, und dann thu' noch ein Zwölftel dazu.
Wirf das Metall in den Ofen und rühre die Masse gehörig.
Eine Mine er wieg', ziehst du den Klumpen heraus.

[$1\frac{1}{2}$]

6.

a. Ich bin dem zweiten und des dritten Drittel gleich.
b. Ich bin dem dritten und des ersten Drittel gleich.
c. Und ich des zweiten Drittel und der Minen zehn.

[45, $37\frac{1}{2}$, $22\frac{1}{2}$]

7.

Die tausend Statern, die ich mir erworben hab',
Befehl' ich, sollen beide Söhn' sich teilen so:
Des echten Sohnes Fünftel um zehn gröfser sei,
Als von des Bastards Erbe ist der vierte Teil.

[$577\frac{7}{9}$, $422\frac{2}{9}$]

8.

Krösus hat sechs Schalen gewidmet; sie wiegen sechs Minen,
Eine Drachme dabei wiegt jede folgende mehr.

[Die leichteste $97\frac{1}{2}$ Drachmen; 1 Mine = 100 Drachmen]

9.

a. Trefflichster Künd'ger der Zeit, wieviel ist vom Tage verflossen?
b. Doppelt so viel bleibt als zwei Drittel der Zeit, die verstrichen.

[$5\frac{1}{7}$]

10.

Warum drohest du denn mit Schlägen mir wegen der Nüsse,
Mutter? Es haben darein sich die artigen Mädchen geteilet.
Siehe, Melission hat zwei Siebtel der Nüsse genommen,
Titane drauf ein Zwölftel; ein Sechstel und Drittel dagegen
Nahmen Astyoche sich und Philinna, die lustigen; zwanzig
Packte Thetis sodann, die Räuberin, zwölfe noch Thisbe;
Glauke jedoch — da schau, wie sie lacht — sie hält in den Händen
Elf. So ist dies die einzige Nufs, die mir noch geblieben.

[336]

11.

Wo sind die Äpfel geblieben, mein Kind? Zwei Sechstel besitzet
  Ino, ein Achtel jedoch nahm sich Semele hin.
Autonoe ein Viertel mir raubt', Agaue dagegen
  Rifs mir ein Fünftel vom Schofs, macht' sich dann schleunigst davon.
Für dich sind zehn Äpfel noch da; für mich selber dagegen
Wahrlich, bei Kypris ich schwör's, hab' ich den einen nur noch.

[120]

12.

Myrto verteilt' an die Freundinnen einst die gepflücketen Äpfel.
Chrysis erhielt ein Fünftel davon und Hero ein Viertel,
Dann den neunzehnten Teil Psamathe, Kleopatra ein Zehntel;
Aber ein Zwanzigstel gab sie der lieblichen Parthenopeia.
Zwölf blofs erhielt Euadne; es blieben nunmehr für sie selber
Hundert und zwanzig nur noch von der grofsen Menge der Äpfel.

[380]

13.

Ino und Semele teilten an zwölf befreundete Jungfrau'n,
  Die sehr baten darum, liebliche Äpfel einst aus.
Grad war die Zahl der Äpfel, die Semele schenkte den sechsen,
  Ungrad Inos Zahl; freilich verteilte sie mehr.
Ino gab drei Siebtel an drei der Freundinnen; ferner
  Wurde ein Fünftel noch zweien von ihnen zu teil.
Astynome nahm elf der Äpfel; es blieben für Ino
  Nur noch zwei, die sie konnt' bringen den Schwestern nach Haus.
Semele gab an der Freundinnen vier zwei Viertel der Äpfel,
  Und ein Sechstel sodann schenkt' sie der fünften als Teil;
Eurychore erhielt vier Äpfel; es blieben zuletzt ihr
  Vier von der ganzen Zahl, deren sie konnt' sich erfreun.

[Ino 35, Semele 24]

14.

Schwer mit Nüssen belastet dort stand der gewaltige Nufsbaum.
Nun hat Einer ihn plötzlich gefällt; jedoch was erzählt er?

Von den Nüssen mir nahm ein Fünftel Parthenopeia,
Und ein Achtel trug Philinna davon; Aganippe
Raubt' ein Viertel; es freut sich des siebenten Teils Orithyia,
Und Eurynome pflückt' ein Sechstel sich ab von den Nüssen.
Hundert und sechs ergriffen die drei Chariten; die Musen
Nahmen sich neun mal neun. Nur sieben blieben noch übrig,
Welche du hangen dort siehst an den höchsten Spitzen der Äste.

[1680]

15.

Wer von Gades zur Stadt auf den sieben Hügeln will gehen,
Hat ein Sechstel des Wegs, bis an den Bätis er kommt;
Von da ist ein Fünftel zu Pylades Phokischem Lande,
Das von Rindern voll, hat auch den Namen davon.
Weiter ein Achtel des Wegs, und er kommt zum Pyrenegebirge,
Ein Hundertzwanzigstel braucht's dann, um hinüber zu gehn.
Zwischen Pyrene darauf und den hochgegipfelten Alpen
Liegt ein Viertel, und nun kommt schon Ausonisches Land.
Jetzt ein Zwölftel es ist, bis erscheint des Eridanos Bernstein.
Hast du der Stadien zweitausend zurück noch gelegt
Und fünfhundert dazu, o Glücklicher, wende den Schritt dann
Hin zum ersehneten Ziel, zu der Tarpejischen Burg.

[15 000]

16.

Weh', ich habe entweiht der Dike heilige Binde,
Zu sehr schauend nach dir, alles bezwingendes Gold.
Nichts besitze ich nun; denn trotz ungünstiger Zeichen
Gab ich ohne Bedacht vierzig Talente dem Freund.
O des wechselnden Glücks! Noch die Hälft' und ein Drittel und Achtel
War mir geblieben, nun ist alles in Feindes Besitz.

[960]

17.

Nimm ein Fünftel des Erbes, mein Sohn; dir aber, o Gattin,
Werd' ein Zwölftel zu Teil; doch des verstorbenen Kinds
Söhne, vier an der Zahl, die beiden Brüder, die Mutter,

Jeder von meinem Geld' nehme ein Elftel sich hin.
Zwölf Talente sollen die lieben Vettern erhalten,
Und der traute Freund Eubulos nehme sich fünf.
Freiheit und Ersatz erhalte das treue Gesinde,
Lohn für geleistete Dienst'; ihnen gebe ich dies:
Fünf und zwanzig der Minen sei des Onesimos Erbe,
Du, mein Daos, jedoch sollst dich an zwanzig erfreun.
Fünfzig erhalte Syros, zehn Synete, Tibios achte,
Synetos, Syros Sohn, werden noch sieben zu Teil.
Dreifsig Talente sodann nehmt für die Schmückung des Grabes,
Und damit ihr dem Gott opfert der Unterwelt;
Zwei Talente sei'n für den Scheiterhaufen, die Mahlzeit
Und das Linnen, und zwei sei'n für die Schmückung des Leibs.

[660; 1 Talent = 60 Minen]

18.

Ich Grabhügel, ich berge die Unglückskinder Philinnas,
Welche deren so viel brachte vergeblich zur Welt.
Jünglinge waren ein Fünftel, ein Drittel waren noch Jungfraun,
Dann der Töchter noch drei, welche erst kürzlich vermählt.
Endlich waren noch vier, des Lichts und der Stimme entbehrend,
Welche zum Acheron hin sanken der Mutter vom Schofs.

[15]

19.

Hier dies Grabmal deckt Diophantos — ein Wunder zu schauen!
Durch arithmetische Kunst lehret sein Alter der Stein.
Knabe zu sein gewährt ein Sechstel des Lebens der Gott ihm,
Als dann ein Zwölftel dahin, liefs er ihm sprossen die Wang';
Noch ein Siebtel, da steckt' er ihm an die Fackel der Hochzeit,
Und fünf Jahre darauf teilt' er ein Söhnlein ihm zu.
Weh! unglückliches Kind! Halb hatt' es das Alter des Vaters
Erst erreicht, da nahm's Hades, der schaurige, auf.
Noch vier Jahre ertrug er den Schmerz, der Wissenschaft lebend,
Und nun sage das Ziel, welches er selber erreicht.

[84]

20.

Sage, wie lange gelebt hat Demochares, welcher ein Viertel
Knabe war, Jüngling ein Fünftel und Mann ein Drittel des Lebens.
Als er dann wurde ein Greis mit grauem Haare, da lebte
Dreizehn Jahre er noch, und erreicht war die Grenze des Daseins.

[60]

21.

Wie mich der Bruder betrog, der die vom Vater ererbten
Fünf Talente durchaus wider das Recht hat geteilt.
Von dem, was er sich nahm, sieben Fünftel des Elftels nur hab' ich,
Thränen vergiefsend. O Zeus, tief ist der Schlaf, den du schläfst.

$\left[4\frac{27}{62}, \frac{35}{62}\right]$

22.

Jemand, welcher durchfuhr die weite Fläche des Meeres,
Sprach zum Lenker des Schiffs: Wie weit noch ist es zum Hafen?
Der erwiderte ihm: Sechs tausend Stadien sind es
Vom Kretäischen Fels zum Sikelischen Berge Peloros.
Nimm zwei Fünftel des Wegs, den, Schiffer, du jetzt bist gefahren:
Doppelt so viel noch bleibt, bis in Sicilien wir landen.

[Zurückgelegt $3333\frac{1}{3}$, übrig $2666\frac{2}{3}$]

23.

Vier Springbrunnen sind's. Der erste füllt den Behälter
Täglich, der zweite in zwei, der dritte in drei und der vierte
In vier Tagen. Wie lange wohl währt's, wenn alle geöffnet?

$\left[\frac{12}{25}\text{ Tag}\right]$

24.

In vier Stunden vermag zu füllen den ganzen Behälter,
Was ich ströme hinein, darum öffne mich gleich.
Doch den Behälter zu füllen, um gleich viel Stunden mir nach steht
Dieser zur Rechten, der Dritt' hier um das Doppelte gar.

Wenn du beide mit mir vereint läſst flieſsen, so füllen
Wir den Behälter dir flink. Nenne die Zeit, die es währt.
[$2\frac{2}{11}$ Stunden]

25.

Schau, wie in Erz dasteht der Kyklop Polyphemos. Wie kunstreich
Hat ihm bereitet der Schmied Auge und Mund und die Hand,
Röhren versteckend darin. Zu triefen scheinet der Riese
Gänzlich fürwahr! Noch jetzt strömt aus dem Mund ihm der Quell.
Jegliche Röhr' ist geordnet: es wird der Behälter gefüllet
Durch die Röhre der Hand, wenn drei Tage sie flieſst.
Einen gebrauchet das Auge, zwei Fünftel genügen dem Munde.
Wer kann nennen die Zeit, welche sie brauchen zu dritt?
$\left[\frac{6}{23}\text{ Tag}\right]$

26.

Wie sie vermischen so flink in dem Becken die herrlichen Fluten,
Die zwei Flüsse mitsamt Bromios' edlem Geschenk.
Ganz verschieden jedoch ist der Strömung Stärke; denn Neilos,
Flieſst er allein einen Tag, füllt er das Becken zum Rand,
So viel Wasser entströmet der Brust. Dagegen des Bakchos
Thyrsos, ergieſsend den Wein, braucht drei Tage dazu.
Doch, Acheloos, dein Horn vollbringt es in zweien. Nun flieſset
Alle vereint, und ihr füllt sicher das Becken geschwind.
$\left[\frac{6}{11}\text{ Tag}\right]$

27.

Weib, wie hast du der Armut vergessen! Es lastet doch immer
Bittere Not auf dir, bringend den Stachel der Müh'n.
Wolle spannst du doch früher für eine Mine des Tages,
Und dein älteres Kind wob für ein Drittel und Ein';
Auch die jüngere Tochter erwarb eine halbe. Zusammen
Eine Min' ihr jetzt habt, ist das zum Leben genug?
$\left[\frac{6}{17}, \frac{8}{17}, \frac{3}{17}\right]$

28.

Wasser zum Bad ergiefsend wir drei Eroten hier stehen,
Sendend dahin die Fluten des schön hingleitenden Grabens.
Ich hier rechts, ich fülle aus weitgespanneten Flügeln
Dir das Bad schon in dem sechsten Teile des Tages.
Jener links aus der Urne in vier der Stunden es anfüllt.
Der in der Mitt' aus dem Bogen die Hälfte des Tages erfordert.
Sage, wie kurz ist die Zeit, in der wir alle es füllen,
Wenn das Wasser entströmt den Flügeln, der Urn' und dem Bogen.

[$1\frac{1}{11}$ Stunde]

29.

Backsteinfert'ger, ich wünsche gar sehr, das Haus zu vollenden.
Wolkenlos ist der heutige Tag, und nicht viele der Backstein'
Brauche ich noch; drei hundert im ganzen nur sind es, die fehlen.
So viel' hast allein du in einem Tage gefertigt,
Und zwei hundert brachte die tägliche Arbeit des Sohnes;
Ebenso viele und fünfzig der Eidam lieferte. Wie viel
Stunden nun währt's, wenn vereint ihr drei euch macht an die Arbeit?

[$4\frac{4}{5}$ Stunden]

30.

Thränen vergiefst, eh' weiter ihr geht. Hier sind wir begraben,
Die des Antiochus Haus niederstürzend erschlug.
Schmausend safsen wir da, als der Gott den Ort uns des Mahles
Schnell verwandelt zum Grab. Vier Tegeaten es sind,
Die hier liegen, Messenier zwölf und fünf noch aus Argos,
Aber die Hälfte der Gäst' war aus Sparta der Stadt.
Auch Antiochus selbst kam um, von dem Fünftel ein Fünftel
Waren Athener. Korinth weint um den Hylas allein.

[50]

31.

Mit fünf Freundinnen spielt' Nikarete einst und verteilte
Nüsse an sie. Sie gab Kleïs ein Drittel davon.

Sappho erhielt ein Viertel, Aristodike ein Fünftel,
Aber Theano ein Zwölftel und Zwanzigstel auch.
Der Philinnis sie schenkt' vom Sechstel ein Viertel; da waren
Übrig geblieben für sie fünfzig der Nüsse nur noch.

[1200]

32.

O Diodor, du Leuchte der Astronomie, welche Zeit ist's?
Nimm drei Fünftel der Zeit, die verfloſs, seit vom Osten am Himmel
Rollten des Helios Räder dahin, und zähle das viermal:
Dies ist übrig vom Lauf bis hin zum hesperischen Meere.

[$3\frac{9}{17}$ Stunden sind verflossen]

33.

Seliger Zeus, gefiel es dir denn, daſs thessalische Weiber
So weit trieben ihr Spiel? Ich sah's, das Auge Selenes
War entschwunden dem Blick. Es blieb von der Nacht bis zum Morgen
Zweimal so viel als ein Drittel und Siebtel der Zeit, die dahin war.

[$6\frac{6}{41}$ Stunden der Nacht sind verflossen]

34.

Sag' mir der Fixstern' Stand, und wie die Planeten an ihnen
Zogen vorbei, als zur Welt kam mir gestern das Kind.
Nimm zwei Siebtel der Zeit, die seit dem Morgen verflossen:
Sechsmal so viel noch bleibt bis zum hesperischen See.

[$4\frac{8}{19}$ Stunden des Tages sind verflossen]

35.

Auf, Arbeiter, erwacht! Es ist hell und verstrichen ein Fünftel
Von drei Achteln der Zeit, welche der Tag uns noch währt.

[$\frac{36}{43}$ Stunden des Tages sind verflossen]

36.

Weh! der Vater ertrank in der Syrtis Lachen. Nach Hause
Fünf Talente jedoch hat der Bruder gebracht
Uns von der Fahrt. Er gab als Teil mir doppelt so viel als
Zweimal ein Drittel von dem, was er selber behielt.
Doch die Mutter erhielt zwei Achtel unseres Anteils,
Und so wurde fürwahr! wider das Recht nicht gefehlt.

[$1\frac{5}{7}$, $2\frac{2}{7}$, 1]

37.

a. Ich und der Sockel, worauf ich stehe, wir wiegen nicht wenig.
b. Ebenso viele Talent' wieget der Sockel mit mir.
a. Ich allein bin doppelt so schwer als der Sockel, der dir dient.
b. Und ich wiege sogar dreimal den Sockel von dir.

[Die erste Bildsäule $4k$, ihr Sockel k, die zweite $3k$, ihr Sockel $2k$]

38.

a Gieb mir der Minen zehn, so faſs' ich dreimal dich.
b. Gieb du mir zehn, so hab' ich fünfmal deinen Wert.

[$15\frac{5}{7}$, $18\frac{4}{7}$]

39.

a. Zwei Minen gieb, und doppelt hab' ich deinen Rest.
b. Gieb du mir zwei, und viermal faſs' ich dich.

[$3\frac{5}{7}$, $4\frac{6}{7}$]

40.

Homer an Hesiod auf die Frage, wie groſs die Zahl der Hellenen war, die gegen Ilion zu Felde zogen.

Sieben Herde es waren, gewaltig die Glut; denn es faſste
Fünfzig Spieſse der Herd, und an jedem Spieſs war ein Fleischstück.
Aber ein jegliches Stück neunhundert Achäer umgaben.

[315000]

41.

Ich bin Pallas, geschmiedet aus Gold. Dies brachten zum Opfer
Jünglinge, liebend den Sang, dar mir als Weihegeschenk.
Siehe, die Hälfte des Golds gab her Charistios; Thespis
Schenkte ein Achtel sodann, Solon den zehenten Teil;
Aber ein Zwanzigstel drauf noch Themison. Endlich, was fehlte,
Neun der Talent' und das Werk gab Aristodikos her.

[40 Talente]

42.

Den Augeias einmal die gewaltige Kraft des Alkiden
Fragt' nach der Rinder Zahl, und jener entgegnete also:
Um des Alpheios Flut, des schnellen, weidet die Hälfte,
Aber der achte Teil am Hügel, geweihet dem Kronos;
Am Taraxippos sodann ein Zwölftel noch, fern an der Grenze;
Auch ein Zwanzigstel grast im altehrwürdigen Elis,
Und der dreifsigste Teil blieb in Arkadiens Fluren.
Was noch übrig der Herd', schaust hier du: fünfzig im ganzen.

[240]

43.

Ich bin ein Löwe von Erz. Am rechten Fufse die Sohle,
Beide Augen, der Mund sprudeln das Wasser hervor.
In zwei Tagen füllet das rechte Aug' den Behälter
Und das linke in drei, aber die Sohle in vier.
Schon sechs Stunden genügen dem Mund. Wie lange wohl dauert's,
Wenn geöffnet zugleich Augen und Sohle und Mund?

[$3\frac{33}{37}$ Stunden]

44.

Auf die drei Bildsäulen des Zethos, des Amphion und ihrer Mutter.

Wir beide sind zusammen zwanzig Minen schwer,
Ich Zethos und der Bruder. Wenn ein Drittel mir
Und Amphion den vierten Teil du nimmst, so kommt
Der Mutter Schwere, sechs der Minen, grad' heraus.

[Zethos 12, Amphion 8]

45.

Schwer bepackt mit Wein eine Eselin ging und ein Maultier.
Und die Eselin stöhnte gar sehr ob der Schwere der Bürde.
Ihr Gefährte es sah und sprach zu dem ächzenden Tiere:
Mutter, was jammerst du doch nach Art der weinenden Mägdlein?
Giebst ein Pfund du mir ab, so trag ich doppelt so viel, als
Du trägst; nimmst du mir eins, gleich viel dann tragen wir beide.
Rechne mir aus, Mathematiker du, was jeder getragen.

[5, 7]

46.

Sonne, Mond und Gestirne im ringsum schweifenden Tierkreis
Haben solches Geschick dir verliehn: ein Sechstel des Lebens
Sollst bei der lieben Mutter du sein, des Vaters beraubet.
Dann ein Achtel um Lohn zu dienen zwinget die Not dich
Leuten, welche dir feind. Drauf kehrst du heim und erfreuest
Dich ein Drittel der Zeit an Weib und Kind nach der Götter
Willen. Es fallen jedoch durch Skythische Speere die Gattin
Und der geliebte Sohn. Du weinst voll Gram um die Teuren,
Bis der Tod dich ereilt nach sieben und zwanzig der Jahre.

[72 Jahre]

47.

Aufgabe, welche Archimedes unter den Epigrammen fand und den in Alexandrien mit der Untersuchung derartiger Dinge Beschäftigten übersandte, in dem an Eratosthenes den Kyrenäer gerichteten Briefe.

Sage, Freund, mir genau die Zahl von Helios Rindern.
Sorgsam rechne mir aus, wenn dir Weisheit nicht fremd,
Wieviel deren es waren, die auf der Insel Sicilien
Fluren weideten einst, vierfach in Herden geteilt.
Jede Herde war anders gefärbt; die erste war milchweiſs,
Aber die zweite erglänzt' von ganz dunkelem Schwarz.
Braun war die dritte sodann, die vierte scheckig; in jeder
Hatten die Stiere an Zahl weit das Übergewicht.
Und in solchem Verhältnis nun standen diese: die weiſsen
Glichen den braunen an Zahl und noch dem dritten Teil

Samt der Hälfte der schwarzen, o Freund, zusammengenommen.
Weiter der schwarzen Meng' war gleich dem vierten Teil
Und dem fünften der scheck'gen, vermehrt um sämtliche braune.
Endlich der scheckigen Stier' Zahl gleichsetzen du mufst,
Freund, dem sechsten und auch dem siebten Teile der weifsen,
Noch gerechnet dazu sämtlicher braunen Meng'.
Anders verhielt sich's jedoch mit den weiblichen Rindern: es waren
Die mit weifslichem Haar gleich dem dritten Teil
Und dem vierten der schwärzlichen Rinder, der Kühe wie Stiere.
Ferner die schwarzen Küh' waren dem vierten Teil
Und dem fünften der Herde der scheckigen gleich, wenn gerechnet
Wurden sowohl die Küh' als auch die Stiere dazu.
Ebenso waren die scheckigen Küh' ein Fünftel und Sechstel
Aller mit braunem Haar, wenn zur Weide es ging.
Endlich die braunen Küh' ein Sechstel waren und Siebtel
Von der gesamten Herd', welcher weifslich das Haar.
Kannst du sagen genau, mein Freund, wie viele der Rinder
Dort nun waren vereint, auch wie viele es gab
Kühe von jeder Farb' und wohlgenährete Stiere,
Dann recht tüchtig fürwahr nennet im Rechnen man dich.
Doch noch zählt man dich nicht zu den Weisen; aber wohlan nun,
Komm und sage mir an, wie sich dies weiter verhält:
Wenn die ganze Zahl der weifsen Stier' und der schwarzen
Sich vereint', alsdann standen geordnet sie da
Gleich nach Tiefe und Breite; die weiten Fluren Siciliens
Wurden völlig gefüllt durch die Menge der Stier'.
Stellte man aber zusammen die braunen und scheckigen, alsdann
Wurde ein Dreieck erzeugt, einer stand an der Spitz',
Und es fehlte keiner der braunen und scheckigen Stiere,
Noch darunter man fand einen von anderer Farb'.
Hast du auch dies ausfindig gemacht und im Geiste erfasset,
Giebst das Verhältnis mir an, Freund, das bei jeder Herd'
Findet statt, dann magst du stolz als Sieger einhergehn,
Denn hell strahlet dein Ruhm nun in der Wissenschaft.

Register.