LEHRBUCH
DER
VERMESSUNGSKUNDE

ZWEITE AUFLAGE

LEHRBUCH

DER

VERMESSUNGSKUNDE

VON

DR. ANTON BAULE,
PROFESSOR AN DER FORSTAKADEMIE ZU HANN. MÜNDEN.

ZWEITE ERWEITERTE UND UMGEARBEITETE AUFLAGE.

MIT 280 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1901.

Vorwort.

Die vorliegende zweite Auflage verfolgt den gleichen Zweck wie die erste: sie soll den Studierenden in die niedere Vermessungskunde einführen und dem Lehrer die Möglichkeit geben, das umfangreiche Gebiet zu bewältigen. Das Letztere wird nur gelingen, wenn sich der Gang des Vortrags einem Lehrbuche anschliefst und der Zuhörer nicht gezwungen ist, durch Nachschreiben seine Aufmerksamkeit abzulenken.

Es wird auf diese Weise auch Zeit gewonnen, unter anderem die nicht aufgenommene Theorie der Beobachtungsfehler eingehend zu behandeln. Wir haben vorzügliche Handbücher der Vermessungskunde (Jordan, Bauernfeind), in denen die genannte Theorie in ausführlicher Form gegeben und angewandt ist; auch kleinere und gröfsere (Koll) selbständige Werke sind darüber zur Genüge vorhanden. Es ist jedoch mit der Theorie der Fehlerausgleichung eine eigene Sache. Der Studierende findet sich ohne mündliche Belehrung und durchgerechnete Beispiele nur schwer in dieselbe hinein, und fast jeder Lehrer geht bei ihrer Behandlung seinen besonderen Weg. Der Verfasser glaubte deshalb, sich auf einige kleinere Anwendungen beschränken zu sollen.

Von den Instrumenten sind die typischen Formen gewählt und diese nur nach den wesentlichen Teilen besprochen; viele neuere sind mit Rücksicht auf den Umfang des Buches ausgeschlossen. Dem Studierenden sei empfohlen, sich von einigen mechanischen Werkstätten die Verzeichnisse zu erbitten, in denen er gute Abbildungen der Instrumente nebst Beschreibung, oft mit Berichtigungs- und Gebrauchsanweisung finden wird.

Als neuer Abschnitt ist die Umwandlung der geographischen Koordinaten in rechtwinklig sphärische hinzugekommen. Es wurde die Aufnahme gewünscht und der Verfasser hat sich selbst mehrfach von ihrer Notwendigkeit überzeugen müssen.

Auf den höheren Lehranstalten werden mit Recht immer mehr die Aufgaben bevorzugt, die der Praxis entnommen sind. Der Verfasser hofft dem Lehrer im vorliegenden Buche eine Anleitung darbieten zu können, welche zur Belebung des trigonometrischen Unterrichts beitragen wird.

Es ist zu beklagen, daſs auf dem geschichtlichen Gebiete der Vermessungskunde noch manche Unsicherheit herrscht, eine Übereinstimmung in den Zeichen der Formeln noch fehlt und besonders daſs beim Koordinatensystem die Grundrichtung, der Drehungssinn und die Bezeichnung je nach Wissenschaften und Staaten von einander abweichen. Auch für die Fehlergrenzen wäre, wenigstens innerhalb des Deutschen Reiches eine Gleichmäſsigkeit wünschenswert und durchführbar. Im Folgenden sind die Vorschriften der Anweisungen VIII und IX vom 25. Oktober 1881 zugrunde gelegt.

Sollte jemand an einigen Zusätzen anstoſsnehmen, weil sie, z. B. S. 184 oder 409, nicht in unmittelbarer Beziehung zur Vermessungskunde stehen, so möge er bedenken, daſs es sich hier nicht um reine Mathematik handelt, in welcher kein Platz für „Delikatessen" ist. Die Vermessungstechnik verzweigt sich nach vielen Richtungen, und da ist es angenehm und lehrreich, mitunter eine anregende Zugabe zu finden. Das gilt auch von den vielen eingestreuten Bemerkungen, die zur Erholung dienen (S. 419) und Veranlassung geben können (S. 270), auf benachbarte Gebiete überzutreten und durch den gefundenen Zusammenhang die Freude am Studium zu erhöhen.

Der Verfasser ist bemüht gewesen, das Passende für den Unterricht in der niederen Vermessungskunde auszuwählen. Ob er alles Passende getroffen und alles passend dargestellt hat, darüber mögen die verehrten Fachgenossen, unter Beachtung des *πᾶσιν ἁδεῖν χαλεπόν*, freundlichst entscheiden.

Hann. Münden, im August 1901.

Inhaltsverzeichnis.

F. Instrumente für Wassermessungen.

G. Instandhaltung der Instrumente.

Zweite Abteilung.

Die Lehre von den Messungen.

A. Horizontalmessungen.

B. Vertikalmessungen.

Dritte Abteilung.

Zur Lehre vom Planzeichnen.

Einleitung.

§ 1. Das Messen.

Die Thätigkeit des Messens besteht in der mit Zählen verbundenen Abtragung einer Maſseinheit auf der zu messenden Gröſse. Messen heiſst demnach eine Zahl suchen, welche angiebt, wie oft die Maſseinheit in der zu messenden Gröſse enthalten ist.

Die unmittelbare Messung beruht auf der wirklichen Anlegung der Maſseinheit; die mittelbare Messung ist die Ermittelung des Maſses auf dem Wege der Rechnung oder der Zeichnung mit Hilfe der unmittelbar gefundenen Zahlen.

§ 2. Die Maſseinheiten.

Die Längeneinheit ist das Meter (μέτρον, das Maſs). Nach dem Beschlusse der französischen Nationalversammlung 1793 sollte die neue Längeneinheit ein unveränderliches, unverlierbares und ein für jedes Land der Erde gleiches Naturmaſs sein, indem man den zehnmillionten Teil des Meridianquadranten einführen wollte. Da aber später nachgewiesen wurde, daſs die Meridiane nicht gleich lang sind, und auſserdem andere Messungen andere Ergebnisse liefern würden, so ist die ursprüngliche Definition unhaltbar geworden, und es verdient die Erklärung den Vorzug: Das Meter ist für uns der Abstand der Endstriche des von der Normal-Eichungskommission in Berlin aufbewahrten Prototyp des internationalen Pariser Urmaſsstabes bei 0^0 C.

Die Vorteile des Metermaſses sind in der Dezimalteilung, der passenden Verknüpfung mit der Gewichtseinheit und durch diese mit dem spezifischen Gewichte begründet.

Das Meter ist in Deutschland 1872 eingeführt. Die geographische Meile ist 7420^{m} lang; die englische oder See-Meile hat die Länge einer Äquatorminute $= 15 \cdot 7420^{\mathrm{m}} : 60 = 7420^{\mathrm{m}} : 4 = 1855^{\mathrm{m}}$; $1'' = 0{,}001^{\mathrm{mm}}$ heiſst Mikromillimeter.

Die Quadrate der Längenmafse bilden die Flächenmafse. Die Flächeneinheit ist also das Quadratmeter (qm). Für Land und Wald wird gerechnet nach Ar (a) = 100 qm und nach Hektar (ha) = 100 a; 1 qkm = 100 ha.

Die Kuben oder Würfel der Längenmafse geben die Körpermafse. Die Körpereinheit ist also das Kubikmeter (cbm), wobei man noch zwischen Festmeter (fm) und Raummeter (rm) unterscheiden kann. Die Einheit für Flüssigkeit ist das Liter (l) oder der Inhalt des Kubikdezimeter, also 1 l = 0,001 cbm.

Flächen- und Körpermafse können nach dem Gesetze vom 26. April 1893 auch durch cm^2 oder mm^2 bezw. cm^3 oder mm^3 bezeichnet werden.

Die Gewichtseinheit ist bei uns das Kilogramm (kg). Als Urgewicht gilt dasjenige von dem internationalen Prototyp des Kilogramm abgeleitete Gewichtsstück aus Platin-Iridium, welches dem Deutschen Reiche als nationales Prototyp überwiesen ist und von der Normal-Eichungskommission aufbewahrt wird. In Frankreich ist die Einheit das Gramm (g), das Gewicht von 1 ccm reinen Wassers bei 4^0 C. im luftleeren Raume. Das Ungewöhnliche bei der früheren Festsetzung der Gewichtseinheit liegt in der Verschiedenheit der Temperatur: 0^0 des Mafses und 4^0 des Wassers. Es wird für uns diese Schwierigkeit durch das obige Gesetz gehoben, nach welchem das Liter der Raum ist, den ein Kilogramm Wasser bei der gröfsten Dichtigkeit unter dem absoluten Druck einer Atmosphäre einnimmt.

Die Zeiteinheit ist die Sekunde. Sie ist aus dem Urmafse der Zeit, nämlich der Umdrehungszeit der Erde um ihre Achse hergenommen. Die Sekunde ist der 86 400ste Teil der Zeit, welche zwischen zwei gleichen Kulminationen eines Sternes liegt. Ob im Laufe der Jahrtausende die Zeit einer vollen Achsendrehung die gleiche bleibt, ist bei der fortwährenden, wenn auch langsamen Veränderung des Erdkörpers und der Bremswirkung von Flut und Ebbe zu bezweifeln.

Die Winkeleinheit ist der Winkel, welcher durch die volle Drehung einer Geraden in der Ebene um einen ihrer Punkte entsteht. Man teilt diesen Winkel in 360^0 zu $60'$ zu $60''$ oder in 400^g zu 100^c zu 100^{cc}. Hiernach ist $1^g = 1$ Centesimalgrad $= 0{,}9^0 = 0^0\,54'$ Sexagesimalteilung; $1^c = 0{,}54' = 0^0\,0'\,32{,}4''$; $1^{cc} = 0{,}324''$.

Die Sexagesimalteilung (a. T.) verdankt ihre Entstehung hauptsächlich dem Umstande, dafs sich die Erde in ihrer Bahn täglich um etwa einen gradus, Schritt, fortbewegt. Die neue Teilung (n. T) hat den Vorzug der dezimalen Schreibweise: $5^g\,6^c\,17^{cc} = 5{,}0617^g$. Die Bezeichnung für die neue Teilung rührt her von W. Jordan: Logarithmisch-trigonometrische Tafeln für neue Teilung mit sechs Dezimalstellen. 1894.

Behufs Überführung von Winkelmaſs in Bogenmaſs, also der Bogengröſse in Bogenlänge ist Folgendes zu merken.

Beschreibt man um den Scheitel des Winkels φ mit dem Radius r einen Kreis, so sei das zwischen den Schenkeln liegende Bogenstück b. Nach einem Satze der Planimetrie verhalten sich zwei Bogenstücke b_1 und b_2 desselben Kreises zu einander wie die zugehörigen Centriwinkel φ_1 und φ_2; also verhält sich auch der Bogen b zum ganzen Kreisumfange $2r\pi$ wie Winkel φ zum ganzen Centriwinkel 360^0, d. h.

$$b : 2r\pi = \varphi^0 : 360^0;$$

hieraus:

$$b = \frac{2\pi}{360^0} \cdot \varphi^0 \cdot r; \quad \varphi^0 = \frac{360^0}{2\pi} \cdot \frac{b}{r}; \quad r = \frac{360^0}{2\pi} \cdot \frac{1}{\varphi^0} \cdot b.$$

Der Bequemlichkeit wegen hat man den konstanten Faktor $\frac{360^0}{2\pi}$ ein für allemal berechnet; es ist

$$\frac{360^0}{2\pi} = 57{,}296^0 = 3438' = 206\,265''$$

$$\frac{400^g}{2\pi} = 63{,}662^g = 6366^c = 636\,620^{cc}.$$

Diese Zahlen bezeichnet man mit ϱ und nennt ϱ den Reduktionsfaktor für Winkel und Bogen, weil man mit dessen Hilfe die Winkelgröſse in Bogenlänge und umgekehrt verwandelt. Der Faktor ϱ findet vielfache Verwendung.

Sind von Gröſsen b, φ und r zwei bekannt, so läſst sich die dritte finden. Sind in $\varphi = \frac{b}{r} \cdot \varrho$ der Bogen b und der Radius r gegeben und will man φ in Gradmaſs haben, so giebt ϱ die Benennung: Grad oder Minuten oder Sekunden, während der Quotient $\frac{b}{r}$ als Ergebnis einer vergleichenden Division unbenannt ist.

In $b = \frac{2\pi}{360} \cdot \varphi \cdot r = \frac{\varphi''}{206\,265''} \cdot r$ liefert der Radius oder die Schenkellänge r die Benennung Meter, während Sekunden durch Sekunden dividiert ein unbenannter Faktor wird. Ebenso ist es bei der Berechnung von r.

Am häufigsten ist aus b und r der Winkel φ zu berechnen.

Es handelt sich dann um sehr kleine Winkel, für welche der Bogen b gleich der zugehörigen Sehne oder Tangente gesetzt werden darf. Die Gröſse b kann man als Grundlinie eines Dreiecks mit den Schenkeln r und dem Scheitelwinkel φ betrachten oder als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit gegenüberliegendem φ und r als der anderen Kathete. Man setzt also $\sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi = b$. Solches ist aus den Logarithmentafeln ersichtlich, wonach $\sin 1' = \operatorname{tg} 1' = 0{,}000\,2909$ und noch $\sin 13' = \operatorname{tg} 13' = 0{,}003782$ ist; ebenso ist für $r = 1$ der zu $13'$ gehörige Bogen

$$b = \frac{2\pi}{360 \cdot 60} \cdot 13 = \frac{13}{3438} = 0{,}003\,782.$$

Für kleine Winkel ist nach gleicher Überlegung

$$\sin x'' = x \cdot \sin 1'' = \frac{x}{206\,265}.$$

Ist die Kathete φ gegenüber s, während die andere $41s$ ist, oder setzt man die Grundlinie s und die Schenkellänge $41s$ und berechnet

$$\sin\varphi = \frac{s}{41s} = \frac{1}{41} \text{ oder } \varphi = \frac{s}{41s} \cdot 206\,264{,}806 = \frac{206\,264{,}806}{41},$$

so ergiebt sich ein Unterschied von weniger als $0{,}5''$. Aus $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{41}$ würde sich ein Unterschied von $1''$, dagegen aus $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{52}$ nach den beiden Berechnungen weniger als $0{,}5''$ herausstellen.

Sobald also die dem Winkel φ gegenüberliegende Seite kleiner ist als $\frac{1}{41}$ oder $\frac{1}{52}$ jeder anderen Seite, kann man zur Berechnung des Winkels φ die Gröſse ϱ'' benutzen. In den fraglichen Fällen ist das Verhältnis der betreffenden Seiten meist viel kleiner.

§ 3. Die Aufgabe der Vermessungskunde.

Die Vermessungskunde oder praktische Geometrie oder Geodäsie (ἡ γῆ, die Erde und δαίζω, ich teile) ist die Lehre von der Ausmessung und Abbildung der Erdoberfläche oder einzelner Teile derselben. Die Elemente derselben sind im engsten Sinne Linien- und Winkelmessungen, im weiteren Sinne Flächen- und Körpermessungen, bei Änderung der Lage des zu messenden Gegenstandes auch Geschwindigkeits- und Zeitmessungen (Wasser-Kataster, Kulturtechnik).

Das Wort Geodäsie kommt seit Aristoteles in der griechischen Litteratur vor. Die erste wissenschaftliche Behandlung erfuhr die Feldmefskunst durch Heron von Alexandrien 100 v. Chr.

Das Bestreben, die Gestalt und Gröfse der Erde kennen zu lernen, hat die Gradmessungen veranlafst. Aus den Ergebnissen dieser Messungen hat Bessel 1841 gefunden, dafs die Erde nahezu ein Körper ist, welcher durch die Umdrehung einer Ellipse um die kleine Achse entsteht. Die grofse Halbachse derselben ist $a = 6\,377\,400^{\,\mathrm{m}}$, die kleine $b = 6\,356\,080^{\,\mathrm{m}}$. Dieses Ellipsoid weicht wenig von einer Kugel ab, da der Unterschied der beiden Halbachsen nur etwa den dreihundertsten Teil der grofsen Halbachse ausmacht. Das Verhältnis dieses Unterschiedes zur grofsen Halbachse heifst die Abplattung und ist

$$A = \frac{a - b}{a} = \frac{1}{299{,}15} \text{ rund } = \frac{1}{300},$$

d. h. man mufs zu der kleinen Halbachse den dreihundertsten Teil der grofsen setzen, um diese zu erhalten. Die kleine Achse der die Oberfläche erzeugenden Ellipse heifst die Erdachse und geht durch die Pole. Jede durch sie gelegte Ebene heifst Meridianebene, ihre Schnittkurve mit der Erdoberfläche Meridian (meridies, Mittag). Die Meridiane sind in Wirklichkeit verschieden, werden aber als gleich lang betrachtet. Die Achse der Pole braucht nicht die Drehungsachse der Erde zu sein, da die Verteilung der Erdmasse sich ändert.

In vielen Fällen kann man das Erdsphäroid als Kugel mit $r = 6\,370\,300^{\,\mathrm{m}}$ ansehen. Diese Kugel hat mit der Erde gleiche Oberfläche; die Kugel mit $r = 6\,370\,283^{\,\mathrm{m}}$ hat mit ihr gleichen Inhalt. Im allgemeinen ist in Rechnung zu setzen $r = 6\,366\,740^{\,\mathrm{m}}$ und $\log r = 6.80392$ oder auch $r = 6\,370\,000^{\,\mathrm{m}}$, $\log r = 6.80414$. Die einzelnen Teile eines Meridians als Kreise betrachtet haben Radien, die nach den Polen hin wachsen. Für den Meridianbogen der Provinz Hannover hat man einen Kreisradius von der Länge $6\,380\,000^{\,\mathrm{m}}$.

Bei den Logarithmen wird nach der Kataster-Anweisung VIII und IX vom 25. Oktober 1881 zur Abtrennung der Charakteristik von der Mantisse der Punkt benutzt, im übrigen zur Trennung von Einern und Zehnteln das Komma.

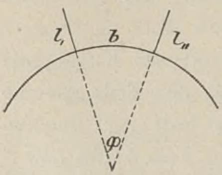
§ 4. Zur Orientierung auf der Erdoberfläche.

Um einen Punkt der Erdoberfläche ohne Rücksicht auf seine Entfernung vom Erdmittelpunkte eindeutig festzulegen, bedient man sich der Meridiane und Parallelkreise und zählt nach Längen- und Breitengraden, wobei die Himmelsrichtungen das Vorzeichen der Mathematik vertreten. Anfangsmeridian ist derjenige von Greenwich; von diesem ausgehend zählt man bis jetzt nach östlicher und westlicher Länge bis 180^0. Der nullte Breitengrad ist der Äquator.

Die Bezeichnung Länge und Breite rührt von der Anschauung der Alten her, nach welcher die Erdscheibe in der Richtung Ost-West doppelt so ausgedehnt war, als in der Richtung Nord-Süd. Die im letzten Jahrzehnt nachgewiesene Veränderlichkeit der geographischen Breite bezw. der Polhöhe ist ohne Belang.

Die unmittelbaren Messungen werden meist in einer gedachten vertikalen oder horizontalen Ebene vorgenommen. Lotrecht oder vertikal ist jede Ebene, welche durch einen Radius der Erde gelegt ist, wenn man dieselbe als Kugel ansieht. Lotrechte Linien sind diejenigen, welche in der Richtung der Schwerewirkung liegen. Alle diese lotrechten Linien gehen durch den Mittelpunkt der Erde, sind also nicht parallel; der von ihnen gebildete Winkel ist jedoch häufig so klein, daſs er gleich Null gesetzt werden kann. Denn wenn zwei Lote l_1 und l_{11} um den Bogen b von einander abstehen und r der Erdradius ist, so ist

Fig. 1.



$$\varphi = 206\,265'' \cdot \frac{b}{r} \cdot$$

Ist nun $b = 1000\,^{\mathrm{m}}$, so ist

$$\varphi = 206\,265 \cdot \frac{1000}{6\,366\,740} = 32'';$$

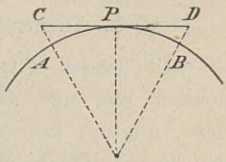
also zwei Lote im Abstande von $1\,^{\mathrm{km}}$ bilden einen Winkel von $32''$ mit einander. Ist der Abstand eine Meile, so ist $\varphi = 4'$.

Wagerecht und horizontal ist jede Linie, welche auf einer lotrechten senkrecht steht, d. h. mit dem Lote einen Winkel von 90^0 bildet. Die horizontale Ebene eines Punktes P ist diejenige, welche mit dem Erdradius von P bezw. seiner Verlängerung einen Winkel von 90^0 bildet.

Legt man durch den Punkt P der Erdoberfläche eine lotrechte Ebene, so heiſst die Kreislinie durch P mit dem Erdmittelpunkte als Centrum die wahre Horizontallinie des Punktes P. Alle wahren Horizontallinien von P zu einer Kugelschale vereinigt geben den wahren Horizont. Die Gerade, welche in P Tangente des Kreises ist, liefert eine scheinbare Horizontallinie, die Gesamtheit der Tangenten, also die Berührungsebene der Kugelschale, bildet den scheinbaren Horizont. Der wahre Horizont der Astronomen ist die Ebene, welche im Erdmittelpunkte zum scheinbaren Horizonte parallel ist; er ist also verschieden vom obigen.

Um zu untersuchen, welche Flächengröfse man statt in den wahren Horizont in den scheinbaren verlegen kann, d. h. einen wie grofsen Teil der Erdoberfläche man als Ebene ohne merklichen Fehler behandeln kann, denke man sich zwei Punkte A und B, welche auf der kugelförmigen Erde fünf geographische Meilen von einander entfernt sind. (Fig. 2)

Fig. 2.



Der zu AB gehörige Centriwinkel ist $\varphi = 20'$, die Tangente

$$CD = 2 \cdot PD = 2 \cdot 6\,366\,740 \cdot \operatorname{tang} 10',$$

der Bogen

$$AB = \frac{\varphi}{360 \cdot 60} \cdot 2r\pi = \frac{20'}{3438'} \cdot 6\,366\,740\ ^{\mathrm{m}}.$$

Der Unterschied zwischen CD und AB ist erst mit siebenstelligen Logarithmen zu ermitteln; derselbe ist so gering, dafs er bei Anwendung gewöhnlicher Mefsinstrumente nicht hervortritt. Man kann deshalb einen Bogen von fünf Meilen Länge, auf welche Entfernung unter besonderen Umständen (§ 22) ein gutes Mefsfernrohr bequem reicht, noch als eine Gerade betrachten.

Ein reguläres Dreieck von fünf Meilen Seitenlänge hat den Inhalt $5^2 \cdot \sqrt{3} : 4 = 10{,}8$ Quadratmeilen. Diese Fläche auf dem Erdsphäroid liefse sich also noch ohne erheblichen Fehler als ebene Fläche ansehen, um so mehr, wenn man solch lange Linien durch Messung in einzelnen Teilen erhalten hätte, welche sich von selbst der Erdoberfläche anschmiegen. Der sogen. sphärische Excefs bleibt weit hinter dem statthaften Winkelfehler zurück, kann also unbeachtet gelassen werden.

Der Landmesser braucht bei der Flächenberechnung auf die Erdkrümmung keinerlei Rücksicht zu nehmen. Inbetreff des sphärischen Excefs ist zu merken, dafs die Winkelsumme in einem von gröfsten Kugelkreisen gebildeten Dreieck oder n-Eck gröfser ist als 180^0 oder $(n - 2) \cdot 180^0$. Der Überschufs über diese Summe wird sphärischer Excefs genannt. Er wächst mit der Fläche in gleichem Verhältnis und beträgt bei einer Fläche von einer Quadratmeile $0{,}279''$ oder $0{,}861^{cc}$ nach der Formel

$$\varepsilon = \frac{F}{r^2} \cdot \varrho = \frac{7420^2}{r^2} \cdot \varrho ,$$

wo für unsere Breiten $r = 6\,380\,000$ ist. Es ist $\varepsilon = 1''$ oder 1^{cc} für

$$F = \frac{r^2}{260\,265} \quad \text{oder} \quad \frac{r^2}{636\,620} \cdot$$

Bei der Winkelmessung eines ebenen Dreiecks ist als Abweichung von der theoretischen Winkelsumme der Betrag $2{,}6'$ a. T. oder $5{,}2^c$ n. T. gestattet. Der sphärische Exceſs erreicht diese Gröſse erst bei einer Dreiecksfläche von etwa 600 Quadratmeilen.

Die Kenntnis des sphärischen Exceſs hat der Landmesser bei der Umrechnung der Koordinaten zu verwerten.

§ 5. Darstellung von Teilen der Erdoberfläche.

In einem Punkte der Erdoberfläche, etwa dem Nordpole, denken wir uns die Berührungsebene gelegt; sie ist zur Ebene des Äquators und der Breitenkreise parallel. Von den Punkten der Parallelkreise fällen wir nun die Lote auf diese Ebene. In derselben entstehen dann um P herum ebenfalls koncentrische Kreise, die den gleichen Abstand der Erdkreise haben, solange die Entfernung von P nicht zu groſs ist. In gleicher Weise kann man mit einer Anzahl Punkte verfahren, welche innerhalb der Parallelkreise liegen. Die Fuſspunkte der Lote in der Ebene denkt man sich durch Gerade verbunden oder entsprechend bezeichnet, so erhält man ein Bild der Erdfläche um P, welches der natürliche Grundriſs genannt wird. Das verjüngte Bild dieses Risses, also die geometrisch ähnliche Abbildung heiſst kurz Grundriſs oder Situationsplan der betreffenden Gegend.

Schneidet man die Berührungsebene vermittelst einer Vertikalebene durch P, so ergiebt sich in der letzteren bei vollkommener Kugelgestalt ein Kreis als Schnittlinie mit der Erde. Ist jedoch die Oberfläche der Erde längs des Vertikalschnitts ungleichförmig, so kann man die Unebenheiten durch ihren Abstand von der Berührungsebene zur Anschauung bringen. Wir haben dann eine Gerade in dem scheinbaren Horizont, in ihr die Abstände der Erdpunkte unter einander und in der vertikalen Durchschnittsebene eine Reihe von parallelen Geraden verschiedener Länge. Diese Geraden liefern den natürlichen Aufriſs der gekrümmten Schnittlinie. Das verjüngte Bild hiervon nennt man kurz Aufriſs oder Nivellementsplan oder Profil des Erdbodens in der Richtung der schneidenden Vertikalebene.

Für eine Gegend von grofser Ausdehnung ist die Berührungsebene nicht mehr als Horizontalebene für die einzelnen Punkte der Erde zu betrachten. Die Projektionen je zweier Punkte der Erdoberfläche würden nicht mehr die Entfernungen behalten, welche den wirklichen Entfernungen der projizierten Punkte entsprechen. Während in der Nähe des Berührungspunktes die Projektionen zweier Punkte mit der Bogenlänge von fünf Meilen annähernd die gleiche Entfernung fünf Meilen von einander haben, würden die Projektionen zweier Punkte desselben Abstandes weit vom Berührungspunkte ab vielleicht nur drei Meilen Abstand haben. Um daher ein richtiges Bild eines ganzen Landes zu schaffen, mufs man geeignete Liniennetze zugrunde legen. Die sich hierauf stützenden Bilder heifsen Karten, Landkarten. Die Abbildung ganzer Erdteile geschieht mit Hilfe der sogen. perspektivischen (stereographischen und orthographischen) und der abwickelbaren (cylindrischen oder Merkator- und konischen) Projektionen.

§ 6. Einteilung der Vermessungskunde.

Man teilt die gesamte Vermessungskunde wohl in eine niedere und eine höhere. Die niedere beschäftigt sich mit der Aufnahme von Plänen, dieselbe beschränkt sich also auf Arbeiten inbezug auf den ebenen, scheinbaren Horizont. Sie umfafst die Arbeiten des heutigen Landmessers und berücksichtigt die Erdkrümmung nur bei Vertikalmessungen. Die höhere Geodäsie hat die Aufgabe, Karten herzustellen, hat also die sphärischen Triangulierungen, sowie Gradmessungen in Verbindung mit astronomischen Beobachtungen vorzunehmen. Diese Unterscheidung von niederer und höherer Geodäsie ist jedoch nach den heute bestehenden Vorschriften ohne besondere Bedeutung, da man von den Teilen durch Zusammensetzung zum Ganzen übergehen kann.

Der besseren Übersicht wegen soll in diesem Lehrbuche im allgemeinen an folgender Haupteinteilung festgehalten werden.

1. Die Lehre von den Hilfsmitteln des Landmessers im Felde oder die Theorie der Mefsinstrumente.
2. Die Lehre von der Anwendung der Mefsinstrumente oder die Theorie der Messungen.
3. Die Lehre von der Darstellung des Gemessenen oder die Theorie des Planzeichnens.

Die Besprechung der spezifisch bergmännischen Instrumente, welche unter Tage zur Aufnahme der Mineralfelder und Gruben-räume dienen, ist ausgeschlossen, zumal die wichtigeren Instrumente des Markscheiders diejenigen des Landmessers sind und sich meist nur durch Material (keine Stahlachsen) und Handhabung (Aufstellungsweise) unterscheiden.

Aufserdem sei bemerkt, dafs sich Beschreibung und Gebrauch der Instrumente und einzelner Teile derselben nicht immer trennen läfst. Man kann sagen, Anatomie und Physiologie gehen bei der Instrumentenkunde häufig ineinander über, da erst die Funktionen der einzelnen Teile das volle Verständnis ihrer Form, ihrer Befestigung und ihrer Zugehörigkeit zu den anderen Teilen des Ganzen ermöglichen.

Erste Abteilung.

Die Lehre von den Mefsinstrumenten.

---

§ 7. Übersicht.

Um die Arbeiten mit hinreichender Genauigkeit ausführen zu können, mufs der Landmesser mit seinem Handwerkszeuge genügend vertraut sein. Er mufs also wissen, welchem Zwecke die verschiedenen Instrumente und deren einzelne Teile dienen, nach welchen Gesetzen dieselben eingerichtet sind, wie sie gebraucht, geprüft und nötigenfalls berichtigt (justiert) werden. Er mufs den Mechaniker überwachen und selbständig untersuchen können, welchen Grad von Genauigkeit seine Instrumente besitzen, d. h. mit welchem mittleren zu befürchtenden Fehler dieselben behaftet sind. Schliefslich mufs sich seine Kenntnis auch darauf erstrecken, die Instrumente in gutem Zustande zu erhalten.

Nach diesen Gesichtspunkten sollen im folgenden die für den Geometer notwendigen Hilfsmittel betrachtet werden. Es ergeben sich daraus die nachstehenden Unterabteilungen:

A. Bestandteile der Mefsinstrumente;
B. Mittel zur Bezeichnung der Mefspunkte;
C. Instrumente zum Abstecken und Messen von Winkeln;
D. Instrumente zum Streckenmessen;
E. Instrumente zum Höhenmessen;
F. Instrumente zum Messen der Geschwindigkeit eines Wasserlaufes;
G. Instandhaltung der Instrumente.

Bei der Anschaffung von Instrumenten thut man gut, eine Probezeit festzusetzen. Winkelinstrumente unterwerfe man sofort einer eingehenden Prüfung; eichfähige Längenmafse kann man geeicht beziehen, es gelten jedoch für die in der Landmessung gebrauchten Maſse besondere Bestimmungen mit engeren Fehlergrenzen, als für die Verkehrsmaſse.

Die zur Verwertung kommenden physikalischen Gesetze sind, soweit es notwendig ist, an den betreffenden Stellen angeführt.

A. Bestandteile der Meſsinstrumente.

a. Die Schraube.

§ 8. Einteilung der Schrauben.

Man unterscheidet flach- und scharfgängige Schrauben, je nachdem der Durchschnitt des Schraubenganges ein Rechteck oder Dreieck ist. Rechtsgängig ist die Schraube, wenn sich die Spindel in die Mutter oder diese auf die Spindel schiebt bei einer Drehung im Sinne des Uhrzeigerganges. Der Weg, welchen die Spindel bei einer vollen Umdrehung zurücklegt, heiſst die Ganghöhe oder Steigung der Schraube. Es ist dieser Weg gleich dem Abstande zweier benachbarter Schraubengänge und im Abdruck auf einen Papierstreifen durch wiederholte Messung zu finden. Bei den Meſsinstrumenten kommt nur die rechtsgängige Schraube mit scharfem Gewinde zur Anwendung, was man sich für die Berichtigung von Instrumenten zu merken hat, wenn man die linke Hand gebraucht oder der Schraubenkopf vom Beobachter abgewandt ist.

In der Bewegungsrichtung macht die Spitze der rechtsgängigen Schraube offenbar eine Linksum-Drehung, wie die Granate oder die Spitze des Korkziehers beim sogen. Rechtsdrall, und umgekehrt macht die linksgängige Schraubenbüchse an der linken Seite des Wagens eine Rechtsum-Bewegung. Eine Übereinstimmung in der Bezeichnung von Rechts- und Linksgewinde in der Mechanik, Botanik, Zoologie und Artillerie besteht bisher nicht.

1. Die Zugschraube. Die Spindel geht durch zwei Instrumententeile. Der dem Kopfe zunächst liegende Teil ist ein glatter Cylinder, das andere Ende trägt das Gewinde. Die beiden Instrumententeile haben dementsprechend ein glattes Loch bezw. die Mutter.

   Hierher gehören:

   a. die Befestigungsschraube, welche zur dauernden Verbindung zweier Teile dient; der Kopf ist versenkt.

   b. die Schraube, welche zur vorübergehenden Verbindung zweier Teile dient. Der Kopf liegt frei und ist erweitert zur bequemen Bewegung mit der Hand. Der glatte Teil der Spindel ist oft mit einem Ansatz oder Wulst zum Anlegen gegen den Instrumententeil versehen.

α. Die Klemmschraube zum Festklemmen zweier Platten oder der Enden eines aufgeschnittenen Ringes.

β. Die Prefsschraube zur Vermeidung des toten Ganges einer anderen Schraube, deren Mutter in den zwei Instrumententeilen liegt.

γ. Die Zugschraube bei Justiervorrichtungen. Dieselbe hat meist einen cylindrischen Kopf und wird mit durchgestecktem Stift oder Schraubenzieher bewegt.

Bei diesen Schrauben gleitet die Spindel beim Drehen fort, bis der Kopf oder Ansatz gegen den nächsten Instrumententeil kommt. Bei weiterem Anziehen hört das Gleiten der Spindel auf, sie dreht sich um sich selbst und die Mutter mit dem zweiten Instrumententeile bewegt sich nach dem Kopfe hin. Bei manchen Zugschrauben findet sich eine derartige Lage, dafs statt der Drehung der Spindel am Kopfe eine Drehung der Mutter erforderlich ist.

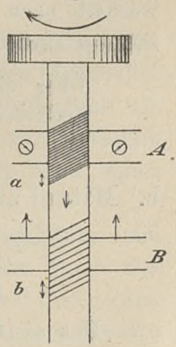
2. Die Druckschraube. Die Spindel geht nur durch einen Instrumententeil.

Hierher gehören:

a. die Stellschraube, welche die feinen gleichmäfsigen Bewegungen von Instrumententeilen vermittelt: die Stellschraube am Dreifufs, die Mikrometerschraube bei Federspannung und die Berichtigungs-Druckschraube z. B. bei Röhrenlibellen.

b. die Bremsschraube mit oder ohne Platte zur Aufhebung einer mit der Hand bewirkten Achsendrehung

Fig. 3.



Zu erwähnen ist die häufig vorkommende Differenzialschraube (Fig 3), welche die Feinheit des Ganges einer Mikrometerschraube noch erhöhen soll. Dieselbe hat zwei rechtläufige Gewinde von verschiedenen Ganghöhen, demnach auch zwei Muttern, von denen die eine fest ist, die andere beweglich sein mufs. Ist die nach dem Kopfe hin bewegliche Mutter A fest und die Höhe des Schraubenganges in ihr a^{mm}, die Ganghöhe in der beweglichen Mutter B dagegen b^{mm}, so wird bei einer vollen Umdrehung der Schraube nach rechts die Spindel mit der losen Mutter B um a^{mm} fortgehen, während gleichzeitig die Mutter B um b^{mm} sich nach dem Schraubenkopfe hinbewegt oder auf der schiefen Ebene emporklettert. Ist $a < b$, so wird B sich der Mutter A nähern, $a > b$, so wird sich B von A entfernen. Die Feinheit der Bewegung hängt nicht von der Feinheit der beiden Schraubengänge, sondern von dem Unterschiede ihrer Höhen ab.

Da die Herstellung der Differentialschraube schwierig und die Anbringung der entsprechenden Muttern umständlich ist, so wählen die Mechaniker heutzutage gern das Mikrometerwerk mit Feder. Dieses ist jedoch für den Beobachter nicht so angenehm, weil die Spiralfeder oft nicht stetig, sondern stofsweise wirkt, also nachzieht.

Bei der Integralschraube, die sich für Stativköpfe der Nivellierinstrumente empfehlen dürfte und in besonderer Anordnung der Muttern (Spindel in hohler Spindel) bei den Richtmaschinen der Geschütze vorkommt, ist das untere Gewinde B dem oberen A entgegengesetzt. Während sich also die ganze Spindel mit B um a^{mm} in der Figur 3 senkt, gleitet hier die Mutter B aufserdem noch um b^{mm} abwärts, so dafs bei einer ganzen Umdrehung ein Fortschreiten der Mutter B um $(a + b)^{mm}$ stattfindet.

Schliefslich sei die Schraube ohne Ende (zeitlich) oder Schnecke hier ebenfalls angeführt, da dieselbe neuerdings wieder Eingang findet. Eine Schraube mit nur wenigen Gängen setzt eine gezähnte Scheibe in Drehung.

Erfordernis für eine gute Schraube ist das Fortgleiten der Spindel in der Mutter bei der geringsten Drehung. Drückt eine Feder gegen die Spindel, so leiden Schraubengänge und Feder, weshalb nach Beendigung der Arbeit die Mikrometerschraube vollständig zurückzudrehen ist.

Über einheitliche Schraubengewinde in der Feintechnik siehe Zeitschrift für Instrumentenkunde 1892, S. 329 und 1893, S. 244.

b. Mittel zur Bestimmung vertikaler und horizontaler Richtungen.

§ 9. Das Lot oder der Senkel.

Das einfache Lot besteht aus einem Faden, welcher an dem einen Ende frei, an dem anderen durch ein Gewicht beschwert ist und freihängend dem gespannten Faden die Richtung nach dem Centrum der Erde, also eine lotrechte Linie giebt. Die Spitze des kegel- oder birnförmigen Körpers muſs in der Verlängerug des Fadens liegen. Das Lot dient dazu, Latten und Stangen in die vertikale Lage zu bringen oder einen Punkt auf eine unter ihm liegende Ebene zu projizieren. Das Doppellot ist vom einfachen dadurch verschieden, daſs das freie Ende des Fadens mit einem zweiten Körper versehen ist, der dem ersten Körper das Gleichgewicht hält; dasselbe hat den Vorzug, daſs es sich verlängern und verkürzen läſst.

Zum Gebrauch in Bergwerken macht man den eigentlichen Lotkörper hohl, versieht ihn mit Öl und Docht und erhält so zugleich eine Signallampe, deren Licht anvisiert wird.

Befindet sich zwischen den zwei Punkten, welche ins Lot gebracht werden sollen, ein Hindernis, z. B. das horizontalliegende Zeichenbrett, so wendet man die Lotgabel an. Dieselbe ist ein gabelförmiger Rahmen, dessen längere Seitenleisten durch ein kleineres Zwischenstück an dem einen Ende verbunden sind. In einen Haken des unteren Schenkels wird ein Lot gehängt, während der obere Schenkel bei wagerechter Lage mit seinem Ende sich genau über dem Aufhängepunkte des Lotes befinden muſs.

Die Lotgabel wird dadurch geprüft, daſs man das Lot auf einen bestimmten Punkt einspielen läſst und darauf die Gabel in die entgegengesetzte Richtung bringt. Der Abstand der Punkte auf dem horizontalen Zeichenbrette, welche bei diametraler Stellung der Lotgabel zu demselben Punkte unterhalb centrisch sind, giebt den doppelten Fehler an.

§ 10. Die Libellen.

1. Die Dosenlibelle besteht aus einem cylindrischen Messinggefäſse, welches mit einem auf der Innenseite konkaven Glasdeckel geschlossen und mit Alkohol oder Schwefeläther bis auf einen als Blase erscheinenden Raum gefüllt ist. Im Boden hat das Gefäſs ein Loch zum Einfüllen der erwärmten Flüssigkeit; die Blase bildet sich bei der Abkühlung und besteht aus Dampf.

Die untere Seite des Glasdeckels ist eine Kugelfläche mit einem Radius von etwa 1^{m}. Der Radius nach der Mitte des Deckels soll auf der Ebene senkrecht stehen, welche durch den untern Rand des Libellenfuſses bestimmt wird. Nach dem Gesetze der Hydrostatik wird dann die Blase den mittlern Teil des kreisförmigen Glasdeckels einnehmen, wenn die genannte Ebene horizontal ist.

Ist diese Mittelmarke der höchste Punkt oder Spielpunkt für die Fufsebene, so umgiebt man ihn mit einigen koncentrischen Kreisen.

Kleinere Dosenlibellen kann man auf die Kugelform der inneren Glasdeckelseite prüfen, indem man sie auf die geneigte Alhidade eines Theodolit stellt oder denselben durch untergeschobene Streichhölzer eine schiefe Lage giebt. Die Blase darf den Rand nicht berühren; ihr Ort ist beliebig. Hat man nun auf andere Weise die Achse der Alhidade lotrecht gestellt, so darf die Blase, deren Mitte man sich durch einen Tintenpunkt merken kann, ihren Ort beim Drehen der Alhidade nicht verlassen oder mufs immer wieder dahin zurückkehren.

Umgekehrt kann man die Achse der Alhidade grob vertikal stellen, ohne dafs die Blase den Ort der Mittelmarke einnimmt.

Beim Gebrauch wird die Libelle auf die wagerecht zu stellende Ebene gesetzt und letztere durch Stellschrauben oder untergelegte Keile soweit gehoben oder gesenkt, bis die Blase in der Mitte der Kreise steht. An Latten, welche beim Gebrauch lotrecht gehalten werden sollen, befestigt man die Dosenlibelle auf einer senkrecht zur Skala befestigten Ebene. Zur Prüfung bringt man die Lattenmitte in die Ebene des Vertikalfadens eines Nivellierinstruments, und mit einem dünnen Lotfaden stellt man den Rand der Latte vertikal.

Hat man eine Dosenlibelle, bei welcher die Mittelmarke durch Kreise zum Spielpunkte gemacht ist, so prüft man dieselbe, indem man sie auf eine ebene Unterlage setzt, die Blase zum Einspielen bringt und mit einem Bleistift einen Kreis um den Libellenfufs zieht. Dreht man die Libelle in diesem Kreise ganz herum, so mufs die Blase fortwährend einspielen. Thut sie das nicht, so steht der Radius der Deckelmitte nicht senkrecht zur Grundebene. Die Fufsebene ist durch Abschleifen bezw. durch Schrauben in ihrer Stellung zum Hauptradius zu berichtigen. Giebt man der Unterlage eine Neigung zur Horizontalen, so weicht die Blase aus und die Gröfse der Abweichung von der Mitte ist zugleich das Mafs der Neigung. Dreht man nun die Libelle um 360^0, so mufs die Blasenmitte einen Kreis um die Mittelmarke beschreiben.

Die Blase darf nicht zu klein sein, damit sie beweglich genug ist. Eine kleine Blase ist nur in dem Falle vorzuziehen, wenn die Libelle an einem Instrumente zum Freihandgebrauche sitzt, also eine schwache Beweglichkeit erwünscht ist.

Wasser und atmosphärische Luft werden nicht mehr zur

Füllung genommen, weil das Wasser wegen der Adhäsion an den Gefäſswänden weniger beweglich ist, im Winter friert und bei kleiner Luftblase sogar das Gefäſs zersprengen könnte, während die eingeschlossene Luft bei hoher Temperatur eine groſse Spannung erhalten und durch den Druck die Dichtungen gefährden würde.

2. Die Röhrenlibelle hat eine innere Form, welche man sich mathematisch entstanden denken kann durch Drehung eines sehr flachen Kreisbogens um seine Sehne oder um eine zur Sehne parallele Gerade; diese Drehungsachse ist die Achse der Libelle. Die Herstellung dieser Form geschieht durch Ausschleifen einer cylindrischen Röhre über einen Metalldorn und ist äuſserst mühsam. Die Füllung ist bei feinen Libellen Äther, der mit $+35^0$ C. eingegossen wird. Unter derselben Temperatur wird das Rohr durch Zuschmelzen geschlossen.

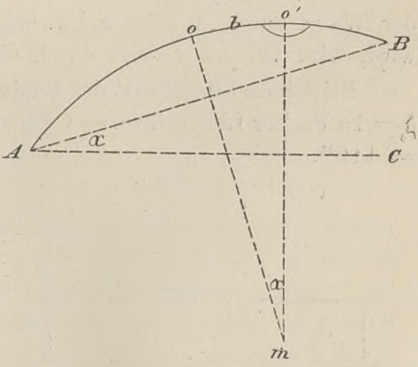
Das Rohr ist von der Mitte aus nach beiden Seiten in gleichen Abständen oder von einem Ende durchlaufend mit Teilstrichen versehen, und die Achse ist horizontal, wenn die Blasenenden gleich weit von der Mitte entfernt sind d. h. wenn die Blase einspielt.

Die Teilung geschieht nach Pariser Linien zu $2{,}26^{\mathrm{mm}}$.

Libella bedeutet eine kleine Wage. Die Röhrenlibelle ist eine Erfindung des französischen Gelehrten Thévenot 1660.

Die Empfindlichkeit der Libelle ist der Weg, der Ausschlag, welchen die Blasenmitte bei einer bestimmten Achsenneigung macht. Je kleinere Abweichungen ihrer Achse von der wagerechten Lage die Libelle noch anzeigt, desto empfindlicher ist sie. Es sei die Libellenachse AB horizontal und die Blase spiele ein d. h. ihre Mitte stehe im höchsten Punkte o. Es werde nun AB um den Winkel α geneigt, so wird die Blasenmitte von o nach o' gehen und es wird mo' mit mo denselben Winkel $BAC = \alpha$ bilden, weil ihre Schenkel gegenseitig auf einander senkrecht stehen. Der Ausschlag oder der Bogen $oo' = b$ ist die Empfindlichkeit für den Winkel α.

Fig. 4.



Ist α in Sekunden gegeben, so ist für $mo = r$

$$\frac{b}{2r\pi} = \frac{\alpha''}{360 \cdot 60 \cdot 60''} \text{ d. h. } b = \frac{1}{206\,265}\alpha \cdot r.$$

Für $\alpha = 1''$ ist $b = \frac{1}{206\,265} \cdot r$; für $\alpha = 1'$ ist $b = \frac{1}{3438} \cdot r$; hieraus $r = 3438 \cdot b$, wenn die Länge des Weges $oo' = b$ für $\alpha = 1$ Min. gegeben ist.

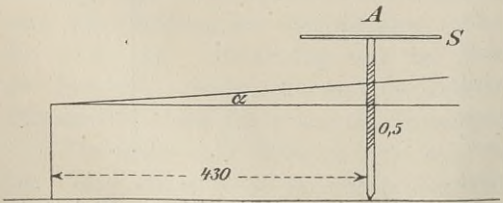
Auf feinen Libellen ist das Mafs der Empfindlichkeit angegeben z. B. $15'''$ Par. für $\alpha = 1'$ d. h. bei einer Achsenneigung von 1 Minute giebt die Libelle einen Ausschlag von 15 Pariser Linien. Kürzer drückt man die Empfindlichkeit aus, indem man den Winkelwert für 1 Skalenteil angiebt. Für das genannte Beispiel hat also 1 Skalenteil den Wert von $\frac{1'}{15} = \frac{60''}{15} = 4''$. Diesen Winkelwert für 1 Par. Linie nennt man die Angabe der Libelle.

Der Ausdruck für $b = \frac{\alpha \cdot r}{206\,265}$ ist bei konstantem α, also hier für eine gewisse Anzahl Sekunden, abhängig vom Krümmungsradius r. Je gröfser r ist, desto gröfser ist b. Ist r unendlich grofs, so geht der Kreis in die gerade Linie über, oder der innere Raum der Libellenröhre hat die Cylinderform. In diesem Falle ist die Empfindlichkeit b ebenfalls unendlich grofs; bei der geringsten Achsenneigung wird die Blase bis ans Ende gehen, bei horizontaler Achse dagegen an jeder Stelle stehen bleiben. Eine solche Libelle ist unbrauchbar.

Es ist dieses derselbe Vorgang wie bei der gemeinen Wage, wenn der Schwerpunkt in den Unterstützungspunkt fällt. Was bei der Wage durch das im Schwerpunkte gedachte Gewicht bewirkt wird, wird bei der Libelle durch die kreisförmige Biegung erzielt.

Bei feinen Libellen ist der Radius 100 und mehr Meter lang. Ist $b = 15$ Pariser Linien für $\alpha = 1$ Minute, so ist $r = 15 \cdot 2{,}26 \cdot 3\,438^{\mathrm{mm}} = 116^{\mathrm{m}}$.

Fig. 5.



Die Empfindlichkeit und Genauigkeit der Libelle untersucht man meist mit einem Libellenprüfer, dem sog. Lege- oder Justierbrett. Dasselbe ist ein starkes eisernes Lineal, welches auf drei Stellschrauben steht und zwei Lager für die Libelle trägt. Die einzelne Schraube A an dem einen Ende hat eine senkrecht zu ihr stehende Scheibe S, welche an ihrem Umfange in 120 gleiche Teile geteilt ist, so dafs man an einem Index $\frac{1}{120}$ Umdrehung ablesen kann. Diese Schraube hat bei dem Instrumente der hiesigen Sammlung eine Ganghöhe $h = 0{,}5^{\mathrm{mm}}$; der Abstand ihrer Spitze von der Mitte der geraden Verbindungslinie der Schraubenspitzen am anderen Ende des Lineals, also die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks der Schraubenspitzen beträgt $e = 430^{\mathrm{mm}}$.

Bei einer ganzen Umdrehung der Schraube mit Scheibe wird dieses Ende des Lineals um einen Winkel α aus der ursprünglichen Lage gehoben oder gesenkt. Es ist

$$\alpha = \frac{0{,}5}{430} \cdot 206\,265'' = 240''.$$

Der Wert eines Scheibenteiles ist also $240'' : 120 = 2''$. Dreht man demnach z. B. um 2 Scheibenteile und beobachtet ein Fortschreiten der Blase um 1 Libellenstrich, so ist die Angabe der Libelle $4''$. Um die Blasenmitte zu verfolgen, hat man sich den Stand der Enden zu merken.

Ist die Libelle mit einem Mefsfernrohre verbunden, welches sich in der Vertikalebene bewegen läfst, so stellt man in der Entfernung von etwa $a = 20^{\mathrm{m}}$ eine in Zentimeter geteilte Latte auf und richtet den Horizontalfaden des Fernrohrs auf einen bestimmten Lattenstrich, so dafs die ganze Blase sichtbar ist, richtet nun das Fernrohr auf den folgenden Zentimeter-Strich und liest an beiden Enden der Blase ab u. s. w. Macht die Blase für jeden Lattenteil l einen Ausschlag b, so haben wir den zu b gehörigen Neigungswinkel α zu suchen. Es ist $\alpha = \frac{l}{a} \cdot 206\,265''$; für dieses α ist die beobachtete Empfindlichkeit b, also die Angabe der Libelle $\frac{\alpha}{b}$. Um den Radius der Libelle zu finden, setzt man in $b = \frac{1}{206\,265} \cdot \alpha \cdot r$ den Wert von α und erhält $r = \frac{a \cdot b}{l}$.

Nach Jordan ist die erforderliche Empfindlichkeit der Libellen für eine Hauptnivellierung $5''$, für einen grofsen Theodolit $10''$, für einen kleinen Feldmefstheodolit $20''$, für eine Dosenlibelle $1'$, Setzlattenlibelle $2'$, Dosenlibelle an Nivellierlatten $5'$, auf 1 Strich $= 2{,}26^{\mathrm{mm}}$.

Bei der Prüfung der Röhrenlibelle ist es vor allem wichtig, sich über die Wirkung des Umsetzens klar zu werden. Denken wir uns die Setzlibelle, welche mit Lineal oder Richtscheit vom Handwerker benutzt wird. Sind die Enden des Libellenfufses A und B, so versteht man unter dem Umsetzen der Libelle auf der

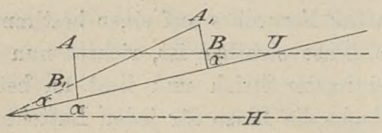
Unterlage die Vertauschung der Enden, so dafs A an die Stelle von B und B an die von A kommt. Nimmt man in der Mitte von A und B einen Punkt an, um welchen man die Libelle dreht, so entspricht dem Umsetzen eine Drehung um 180^0.

Es sei nun bei vollkommen horizontaler Unterlage die Achse der Libelle nicht parallel zur Unterlage, so zeigt die Libelle einen Ausschlag. Die Blasenmitte stehe 6 Linien vom Normalpunkte entfernt nach rechts. Beim Drehen um den Mittelpunkt AB wird die Blase ihren Stand innehalten und nach einer Drehung von 180^0 wird ihre Mitte 6 Linien links vom Normalpunkte stehen. Die ganze Abweichung in beiden Stellungen beträgt also 12 Linien. Diese Abweichung liest man ab, sie ist der Durchmesser eines Kreises, die Hälfte ist der zu verbessernde Fehler an der Libelle selbst.

Ist die Libellenachse zur horizontalen Unterlage parallel, so wird die Blase beim Drehen den Normalpunkt nicht verlassen.

Ist die Unterlage MU nicht horizontal, während die Libelle einspielt, so bildet die horizontale Libellenachse AB mit der Unterlage denselben Winkel, den die Unterlage MU mit der Horizontalen MH bildet. Nach Umsetzung der Libelle wird der Winkel α von U nach M verlegt (man denke sich MU als Doppellinie), die Libellenachse wird nun mit der Horizontalen den $\sphericalangle 2\alpha$ bilden. Die Blase wird einen Ausschlag nach rechts machen, welcher dem $\sphericalangle 2\alpha$ entspricht. Die Hälfte des Ausschlages ist verschuldet durch den Winkel $A_1MU = \alpha$, die andere Hälfte durch $UMH = \alpha$.

Fig. 6.



Um deshalb B_1A_1 parallel zu MH zu machen, mufs man die eine Hälfte des Ausschlages an der Libelle selbst durch ihre Berichtigungsschrauben, die andere Hälfte durch Neigen der Unterlage fortschaffen.

Gewöhnlich bedient man sich der Libelle zur Horizontalstellung von Linien und Ebenen; bei letzteren, indem man sie in zwei sich kreuzenden Richtungen zum Einspielen bringt. Der Radius nach dem höchsten Punkte steht dann senkrecht auf zwei sich schneidenden Geraden, also nach einem Satze der Stereometrie senkrecht auf deren Ebene, oder die Ebene ist senkrecht zur Schwererichtung.

Kennt man die Angabe der Libelle, so läfst sich dieselbe auch zur Messung kleiner Vertikalwinkel gebrauchen.

Befindet sich die Libelle auf einer Unterlage mit Stellschrauben wie beim Theodolit, so merke man sich für die Einstellung der Libelle folgende Regel: beim Drehen der Schraube bewegt sich die Blase in der gleichen Richtung mit dem Zeigefinger der rechten oder dem Daumen der linken Hand, möge die Stellschraube mit dem Kopf nach oben oder unten stehen.

Die Fassungen der Libellen sind verschieden, je nachdem sie liegend (Setzlibelle) oder hängend (Hängelibelle) oder stehend (Reiterlibelle) benutzt werden.

Als Ersatz für die Dosenlibelle benutzt man wohl der gröſsern Genauigkeit wegen eine Kreuzlibelle, bei welcher in derselben Fassung zwei Röhrenlibellen zu einander senkrecht stehen. Bei ihrem Gebrauch erspart man sich die Drehung der einfachen Röhrenlibelle um 90^0 und 180^0. Dasselbe gilt, wenn zwei Libellen in getrennten Fassungen senkrecht zu einander angebracht sind.

Wende- oder Reversionslibelle ist eine solche, welche an zwei Seiten, oben und unten, gleiche Teilungen hat und sich um die Längsachse drehen oder auf dem Fernrohre sitzend sich oberhalb und unterhalb desselben verwenden läſst. Bei dieser Wendelibelle sind zwei Achsen zu unterscheiden, für jede Teilung eine. Die Achsen dürfen nicht zu einander geneigt sein oder sich kreuzen. Die Herstellung einer fehlerfreien Wendelibelle mit parallelen Achsen ist ungemein schwierig. Ist sie in dieser Beziehung richtig, so ist sie vorteilhaft zu gebrauchen Die Einstellung mit Hilfe eines über der Libelle angebrachten Spiegels ist nicht ratsam, da die beiderseitigen Striche durchscheinen und sich abspiegeln. Die sofortige sorgfältige Prüfung eines Instruments mit Wendelibelle ist zu empfehlen.

An feinen Nivellierinstrumenten läſst man oft bei der Arbeit die Blase absichtlich nicht ganz einspielen, sondern die Enden der Blase ablesen. Aus den Aufzeichnungen berechnet man vermittelst der Angabe und Entfernung das Mehr oder Weniger der Lattenablesung. Es ist dann wünschenswert, immer mit der gleichen Blasenlänge zu thun zu haben. Deshalb hat man Libellen mit Reservoir oder Kammerlibellen angefertigt.

Auf die Libellen übt die ungleichmäſsige Erwärmung der Enden einen schädlichen Einfluſs aus. Spielt die Blase ein, so wird sie sich nach dem Ende hin in Bewegung setzen, welches erwärmt wird. Feine Libellen sind daher mit doppelten Fassungen und Schutzdeckeln versehen.

Die Libellen zeigen oft an der Innenseite des Glases kleine wie Nadelstiche erscheinende Punkte. Es sind das Ausscheidungen des zu weichen Glases, durch welche die Beweglichkeit der Blase beeinträchtigt und die Libelle in kurzer Zeit unbrauchbar wird. Die billigen Dosenlibellen leiden vielfach an diesem Fehler. Bleibt die Blase hängen und schnellt plötzlich fort, so mufs der Glasdeckel gereinigt und das Gefäfs neu gefüllt werden.

c. Mittel zur Vergröfserung naher Gegenstände.

§ 11. Allgemeines über Linsen und Lichtstrahlen.

Die Mittel, welche uns das Ablesen der sehr feinen Teilungen an vielen Mefsinstrumenten und die Beobachtung sehr entfernter Gegenstände ermöglichen, erhalten wir durch die sphärischen Linsen, deren Grenzflächen Teile von Kugelflächen sind, wie ihr Name sagt. Man unterscheidet Konvexlinsen: bikonvex, plankonvex und konkavkonvex und Konkavlinsen: bikonkav, plankonkav und konvexkonkav. Bei der konkavkonvexen Linse hat die konvexe Fläche den kürzern Radius, bei den konvexkonkaven die konkave.

Die Mittelpunkte der Kugelflächen heifsen geometrische Mittelpunkte; jede Linse hat deren zwei. Die gerade Verbindungslinie derselben heifst die Achse der Linse. Die Schnittpunkte der Achse mit den Linsenflächen sind die Scheitelpunkte. Der Abstand dieser Punkte von einander bestimmt die Dicke der Linse.

Die Konvexlinse drängt die von einem Punkte ausgehenden Lichtstrahlen zusammen, so dafs von einem entfernten Punkte auf der andern Seite der Linse wieder ein Punkt als Bild entsteht. Die Linse heifst deshalb Sammellinse. Bei der Konkavlinse gehen die Strahlen hinter derselben auseinander, weshalb man sie Zerstreuungslinse nennt. An den Mefsinstrumenten kommen hauptsächlich bikonvexe, plankonvexe und plankonkave Linsen vor.

Schneiden sich die Lichtstrahlen nach ihrem Durchgange durch die Linse selbst in einem Punkte, so ist dieser Punkt das physische oder reelle Bild des Objektpunktes. Man kann das Bild auffangen, wie es der Photograph thut. Wenn sich die austretenden Lichtstrahlen hinter der Linse nicht selbst schneiden, sondern erst, nachdem sie nach rückwärts verlängert sind, so giebt es ein geometrisches oder virtuelles Bild. Den letztern Fall haben wir beim gewöhnlichen Spiegel.

Nach dem Brechungsgesetze wird der Lichtstrahl beim Übergange aus einem dünnern in ein dichteres Mittel zum Einfallslote gebrochen und umgekehrt. Geht also in Fig. 7 der Lichtstrahl AB aus Luft z. B. in Glas über und gelangt nach C, so ist $\alpha > \beta$. Das Gröfsenverhältnis dieser Winkel drückt man durch die zugehörigen halben Sehnen oder ihre Sinus aus und nennt $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$ den Brechungsexponent für Luft und Glas.

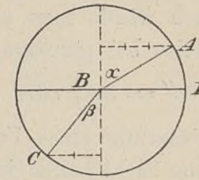


Fig. 7.

Diese optischen Vorgänge haben die Eigenschaft der Umkehrbarkeit; man kann die Bezeichnungen von Objekt und Auge oder Gegenstand und Bild mit einander vertauschen. So wird der Strahl, der von A aus über B den Punkt C trifft, derselbe Weg sein, den der Strahl von C aus über B macht. Vergröfsern wir nun den Winkel β, so wird auch α gröfser werden. Hat β eine bestimmte Gröfse erreicht, so wird der Strahl BA in der Richtung BD austreten. Diesen Grenzwert von β finden wir für Luft und Glas aus

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{3}{2}; \text{ es ist } \sin \beta = \frac{2}{3} \sin 90^0; \ \beta = 41^0\,48'.$$

Wird β gröfser, so geht der Lichtstrahl von C gar nicht in das dünnere Mittel über, sondern wird an der Grenze der beiden Mittel zurückgeworfen, wie an einem Spiegel. Diese Erscheinung heifst die totale Reflexion des Lichtes. Sie tritt ein, wenn ein Lichtstrahl in einem dichtern Mittel unter passendem Winkel auf ein dünneres Mittel trifft. Die Helligkeitseinbufse ist gering, weshalb man oft Spiegel durch Prismen ersetzt.

Durch die Lichtstrahlen, welche von einem Gegenstande in unser Auge gelangen, wird er sichtbar. Die Wellenbewegung des Lichts setzt die feinen Stäbchen der Netzhaut in Schwingungen und dieser Bewegungsreiz kommt im Gehirn als das zum Bewufstsein, was wir Licht nennen.

Hornhaut, Linse und Glaskörper unseres Auges haben in ihrer Gesamtwirkung als Linsen einen Centralpunkt. Verbinden wir diesen mit den Endpunkten eines Gegenstandes, oder denken wir uns von seinen Enden die Lichtstrahlen nach dem Centralpunkte gehend, so entsteht der Gesichtswinkel oder, richtiger gesagt, der Sehwinkel.

Der Sehwinkel mufs eine gewisse Gröfse haben, wenn der Gegenstand überhaupt sichtbar sein soll. Als untere Grenze nimmt man bei mittlerer Helligkeit 30″ an. Er ist nach seiner Erklärung von der Ausdehnung und Entfernung des Gegenstandes abhängig.

Wenn nun für ein normales Auge als deutlichste Sehweite 25^{cm} angenommen werden, so ist ein Körper noch sichtbar, wenn er die Ausdehnung x hat aus $\frac{x}{25} \cdot 206\,265'' = 30''$ oder $x = 0{,}04^{\text{mm}}$. Demnach würde man einen Gegenstand von 1^{m} Länge und genügender Breite bei günstiger Beleuchtung und reiner Luft noch sehen auf $\frac{1}{y} \cdot \varrho'' = 30''$ oder auf $y = 7000^{\text{m}}$ Entfernung. Die lineare Vergröfserung eines Fernrohrs setzt die Ausdehnung für die noch mögliche Sichtbarkeit in dem Verhältnisse der Vergröfserungszahl herab. Selbst wenn man einen Gegenstand mit freiem Auge nicht mehr sehen kann, werden wir von einem Sehwinkel sprechen können.

Ist die Linse des Auges zu stark gekrümmt und der Augapfel zu lang, so wird das Auge kurzsichtig. Durch eine passende Zerstreuungslinse wird ein deutliches Sehen ermöglicht, und wir betrachten dann das mit Brille versehene Auge als normales. Für ein kurzsichtiges Auge wird in vielen Fällen der Sehwinkel gröfser als für ein normales, weil man unwillkürlich die Sehweite kleiner macht.

Unter der scheinbaren Gröfse eines Gegenstandes verstehen wir den besprochenen Sehwinkel, aus dem wir mit Hinzunahme der Entfernung die wirkliche Gröfse des Gegenstandes berechnen können. Zwei Objekte von verschiedener wirklicher Gröfse und ungleicher Entfernung haben die gleiche scheinbare Gröfse, wenn die Sehwinkel gleich sind. Die Sonne hat für mittlere Entfernung einen scheinbaren Durchmesser von $32'$; ist die Entfernung 150 Millionen Kilometer, so ist der wirkliche Durchmesser 109 Erddurchmesser, wie aus den früher gegebenen Zahlen leicht zu berechnen ist. Die scheinbare Gröfse ist es auch, welche bewirkt, dafs die mit dem Fernrohr gesehenen Gegenstände näher erscheinen, sozusagen herangezogen werden

§ 12. **Theorie der Konvexlinsen.**

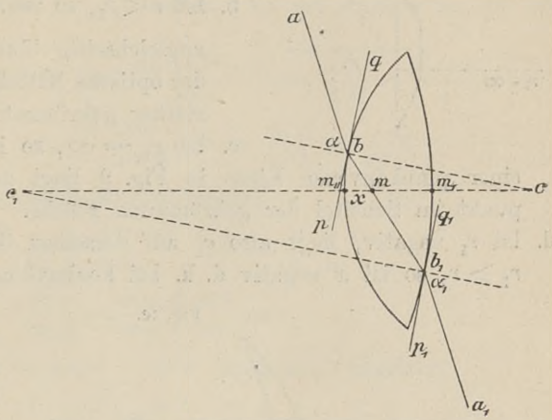
I. Der optische Mittelpunkt.

Diejenigen Strahlen, welche nach dem Durchgange durch die Linse ihre Richtung nicht ändern, sich also wie bei Gläsern mit parallelen Begrenzungsflächen verhalten, heifsen Hauptstrahlen. Der Schnittpunkt derselben mit der Achse ist der optische Mittelpunkt der Linse.

Es ist wichtig, die Lage des optischen Mittelpunkts zu kennen, weil man durch ihn einen Hauptstrahl bekommt, also eine Richtung, in welcher der Bildpunkt liegen mufs, und weil ferner in ihm der Gegenstand und sein Bild unter dem gleichen Winkel erscheinen.

Um den optischen Mittelpunkt einer ungleichseitigen und damit auch den der gleichseitig bikonvexen Linse zu finden, ziehe man in Fig. 8 die beiden Radien cb und $c_1 b_1$ nach dem Eintritts- und Austrittspunkte des Lichtstrahls ab d. h. die Einfallslote. Soll ab ein Hauptstrahl, also $ab \parallel a_1 b_1$ sein, so mufs auch, da die Linse sich als Glas mit parallelen Grenzflächen verhalten soll, $pq \parallel p_1 q_1$ sein. Nun ist

Fig. 8.



$$cb \perp pq \text{ und } c_1 b_1 \perp p_1 q_1$$

also
$$cb \parallel c_1 b_1 \text{ und } \sphericalangle \beta = \sphericalangle \beta_1$$

wo $\beta = cbb_1$ und $\beta_1 = c_1 b_1 b$ ist. Ferner ist $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha_1$, d. h. der eintretende Strahl bildet mit dem Einfallslote denselben Winkel, den der austretende mit seinem Einfallslote bildet. Wir könnten also auch die Radien cb und $c_1 b_1$ als Grenzflächen des Glases auffassen und so durch Ziehen einer Anzahl von parallelen Radienpaaren und Verbinden ihrer Endpunkte zeigen, dafs der optische Mittelpunkt von allen diesen Verbindungsgeraden getroffen wird.

Der Schnittpunkt von bb_1 mit der Achse cc_1 ist der optische Mittelpunkt, dessen Entfernung x vom Scheitel m_2 wir suchen. Es sei $cb = r$; $c_1 b_1 = r_1$; $m_1 m_2 = d$ und $mm_2 = x$, so folgt aus $\triangle\, mbc \sim \triangle\, mb_1 c_1$ die Proportion:

$$\frac{cb}{cm} = \frac{c_1 b_1}{c_1 m} \text{ oder } \frac{r}{cm_2 - mm_2} = \frac{r_1}{c_1 m_1 - mm_1}$$

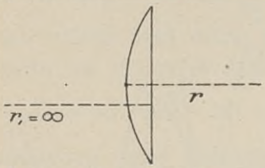
oder
$$\frac{r}{r - x} = \frac{r_1}{r_1 - (d - x)}$$

1) . . . . $x = \dfrac{r \cdot d}{r + r_1}.$

Aus der Formel 1) ergiebt sich:

a. Ist $r = r_1$, so ist $x = \frac{d}{2}$ d. h. in einer gleichseitig bikonvexen Linse liegt der optische Mittelpunkt in der Mitte der Linse.

Fig. 9.

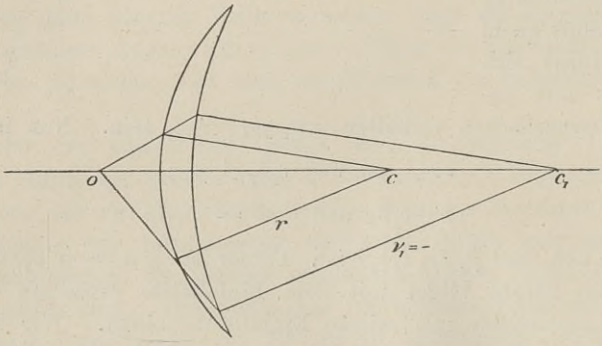


b. Ist $r < r_1$, so ist $x < \frac{d}{2}$ d. h. in einer ungleichseitig bikonvexen Linse liegt der optische Mittelpunkt näher an der stärker gekrümmten Fläche.

c. Ist $r_1 = \infty$, so ist $x = 0$, d. h. bei einer plankonvexen Linse in Fig. 9 liegt der optische Mittelpunkt im Scheitel der gekrümmten Fläche.

d. Ist r_1 negativ, liegt also c_1 auf derselben Seite mit c und ist $r_1 > r$, so ist x negativ d. h. bei konkavkonvexen Linsen liegt

Fig. 10.

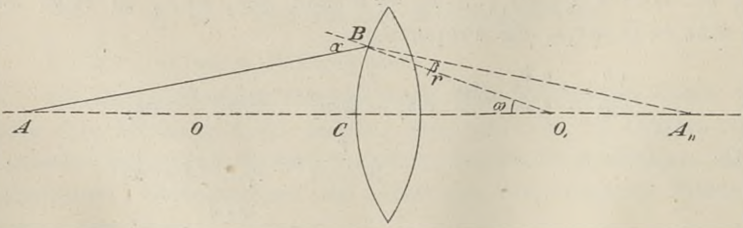


der optische Mittelpunkt vor der stärker gekrümmten Fläche in o der Fig. 10.

II. Die Hauptformel für die Linsen.

Ist AB der auffallende Strahl, so wird er beim Übergange

Fig. 11.



aus der Luft in die Linse zum Einfallslote O_1B gebrochen und es ist $\sin\alpha : \sin\beta = n$.

Der Punkt B liege nahe bei C, so daſs $AB = AC = a$ ist. Die Dicke der Linse sei gleich Null, dann ist $O_1 B = r$, $A O_1 = a + r$. Wir denken uns nun die zweite, rechte Hälfte der Linse vorläufig fehlend, so wird der Lichtstrahl AB von B ungehindert weitergehen und die Achse in A_2 treffen. Es sei $A_2 B = a_2$, so ist $A_2 O_1 = a_2 - r$.

Im Dreiecke $A B O_1$ ist: $\frac{\sin(180^0 - \alpha)}{\sin\omega} = \frac{A O_1}{AB} = \frac{a + r}{a}$;

im Dreiecke $A_2 B O_1$ ist: $\frac{\sin(180^0 - \alpha)}{\sin\beta} = \frac{A_2 B}{A_2 O_1} = \frac{a_2}{a_2 - r}$;

hieraus ergiebt sich durch Multiplikation:

$$\frac{\sin(180^0 - \alpha) \cdot \sin(180^0 - \omega)}{\sin\beta \cdot \sin\omega} = \frac{(a + r) \cdot a_2}{a \cdot (a_2 - r)}$$

oder
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a a_2 + a_2 r}{a a_2 - a r} = n$$

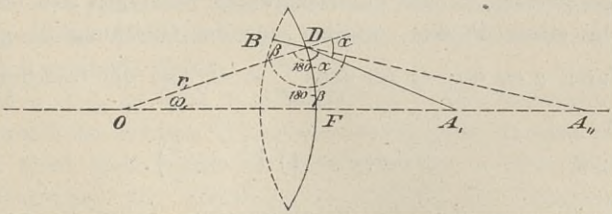
$$a a_2 + a_2 r = a a_2 n - a r n \text{ durch } a a_2 r \text{ dividiert}$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{a} = \frac{n}{r} - \frac{n}{a_2} \text{ oder}$$

$$\alpha) \quad \frac{1}{a} + \frac{n}{a_2} = \frac{1}{r}(n - 1)$$

Nehmen wir nun die rechte Hälfte der Linse hinzu, so geht der Lichtstrahl von B nicht in der Richtung $B A_2$ fort, sondern wird beim Übergange von Glas in Luft vom Einfallslote $OD = r_1$ gebrochen. Er schneidet die Achse bereits in A_1 und es sei $A_1 F = A_1 D = a_1$.

Fig. 12.



Im Dreiecke $O D A_1$ ist: $\frac{\sin(180^0 - \alpha)}{\sin\omega_1} = \frac{O A_1}{D A_1} = \frac{r_1 + a_1}{a_1}$;

im Dreiecke $O D A_2$ ist: $\frac{\sin\omega_1}{\sin(180^0 - \beta)} = \frac{D A_2}{O A_2} = \frac{a_2}{r_1 + a_2}$.

Durch Multiplikation wird: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{(r_1 + a_1) \cdot a_2}{(r_1 + a_2) \cdot a_1} = n$;

$$a_2 r_1 + a_1 a_2 = a_1 r_1 n + a_1 a_2 n.$$

Da die Gröfse a_2 unter der willkürlichen Annahme eingeführt ist, dafs die rechte Hälfte der Linse fehlte, so mufs sie wieder verschwinden. Damit dies geschieht, verschaffen wir uns dieselbe Gröfse $\frac{n}{a_2}$, die in Gleichung α) vorkommt, durch Division der letzten Gleichung durch $a_1 a_2 r_1$:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{r_1} = \frac{n}{a_1} + \frac{n}{r_1}$$

$$\beta) \quad \ldots \ldots \quad \frac{1}{a_1} - \frac{n}{a_2} = \frac{1}{r_1}(n-1).$$

Die Addition von α) und β) liefert die Hauptformel:

$$2) \quad \ldots \ldots \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right).$$

Hierin ist a der Abstand des leuchtenden Punktes A, a_1 derjenige seines Bildes A_1 von der Linse; zu a gehört die konvexe Linsenfläche mit dem Radius r, nach a_1 gekehrt ist die mit r_1.

Aus der Formel 2) erhält man leicht die Formeln für die übrigen Linsenformen, indem man für r und r_1 die entsprechenden Werte einsetzt; z. B. $r_1 = \infty$ und $r =$ negativ liefert die Formel für die plankonkave Linse; sind beide Radien negativ, so wird die Linse bikonkav und die rechte Seite in 2) negativ.

III. Die Brennpunkte und der Ort des Bildes.

Liegt der leuchtende Punkt A unendlich weit entfernt, so sind die von ihm ausgehenden Strahlen unter sich und mit der Achse der Linse parallel. Diese Parallelstrahlen vereinigen sich hinter der Linse in einem Punkte, welcher aus der Gleichung 2) gefunden wird durch $a = \infty$; es ist dann $\frac{1}{a} = 0$, und die Gleichung geht über in

$$\frac{1}{a_1} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right).$$

Der Vereinigungspunkt der Parallelstrahlen heifst Brennpunkt, seine Entfernung von der Linse sei f, also $f = a_1$; dieses f ist die sog. Brennweite. Durch Einsetzen von f erhält man

$$3) \quad \ldots \ldots \quad \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right).$$

Für die gleichmäfsig gekrümmte bikonvexe Linse ist $r = r_1$ und für Luft und Glas $n = \frac{3}{2}$, deshalb $\frac{1}{f} = \left(\frac{3}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}$ d. h.

$f = r$, die Brennweite ist gleich dem Radius; für $r_1 = \infty$ d. h. für plankonvexe Linsen und für Luft und Glas ist $f = 2r$.

Da die rechten Seiten der Gleichungen 2) und 3) einander gleich sind, so folgt die Gleichheit der linken Seiten; man erhält dadurch die wichtigste Gleichung für die Linsenbrechung, in anderer Form die obige dioptrische Hauptformel

$$A) \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1} = \frac{1}{f}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man, da die Brennweite f für dieselbe Linse konstant ist, über den Ort des Bildes näheren Aufschlufs; es ist

$$4) \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{a_1} = \frac{a-f}{af} \text{ und}$$

$$5) \quad \ldots\ldots \quad a_1 = \frac{af}{a-f}.$$

Aus der letzten Gleichung ergiebt sich:

a. Ist a unendlich grofs, so kann man $a = a - f$ setzen und im Zähler und Nenner fortheben; es wird $a_1 = f$.

b. Rückt der leuchtende Punkt näher, wird also a kleiner, so wird $a - f$ kleiner und damit a_1 gröfser d. h. das Bild entfernt sich und zwar um so mehr, je näher der leuchtende Punkt rückt.

c. Ist $a = 2f$, so ist auch $a_1 = 2f$.

d. Solange $a > f$ ist, bleibt a_1 positiv, d. h. solange der leuchtende Punkt aufserhalb der Brennweite sich befindet, entsteht hinter der Linse ein physisches Bild, a_1 bleibt in der alten Richtung.

e. Wird $a = f$, so wird $a_1 =$ unendlich d. h. die vom Brennpunkte ausgehenden Strahlen treten parallel aus, sie vereinigen sich nicht zu einem Bilde.

f. Wird $a < f$, so wird $a_1 =$ negativ d. h. die von einem Punkte innerhalb der vordern Brennweite ausgehenden Strahlen schneiden sich nicht mehr hinter der Linse, sondern in ihrer Rückwärtsverlängerung vor derselben; es entsteht ein geometrisches Bild; a_1 kommt, von der Linse aus gerechnet, in die entgegengesetzte Richtung.

Diese Regeln gelten für Punkte, welche in der Achse und nahe an derselben liegen, also auch für kleine Gegenstände.

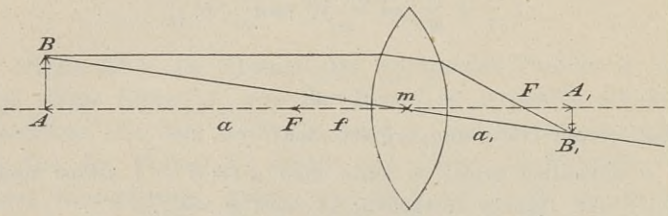
Gegenstandspunkt und Bildpunkt heifsen konjugierte Punkte. Es trifft hier wieder das zu, was von der Umkehrbarkeit gesagt wurde. Das Bild als Gegenstand betrachtet liefert den Gegenstand als Bild.

IV. Stellung und Gröſse des Bildes; Vergröſserung und Sehweite.

1. Der Gegenstand befindet sich auſserhalb der vordern Brennweite.

Um das Bild von AB zu konstruieren, verfolge man von einigen Punken aus je zwei Strahlen, von denen man weiſs, in welcher Richtung dieselben aus der Linse austreten. Diese beiden Strahlen sind ein Hauptstrahl durch den optischen Mittelpunkt und ein Parallelstrahl zur Achse; der erstere ändert die Richtung nicht, der zweite geht durch den hintern Brennpunkt. Der Schnitt-

Fig. 13.



punkt beider Strahlen liefert uns das Bild des betreffenden Punktes. Verfährt man in derselben Weise mit mehreren Punkten von AB, so erhält man das umgekehrte physische Bild A_1B_1 Setzt man die Linsendicke gleich Null, so gilt

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{mA_1}{mA} = \frac{a_1}{a}.$$

Versteht man unter dem Verhältnis der Bildgröſse zur Objektgröſse die Vergröſserung v und setzt für a_1 den Wert aus 5) ein, so ist

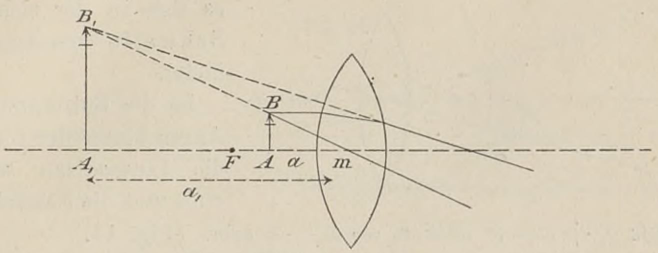
$$6) \quad \ldots\ldots \quad v = \frac{af}{a-f} \cdot \frac{1}{a} = \frac{f}{a-f};$$

also ist $A_1B_1 = \frac{f}{a-f} \cdot AB$, d. h. die Vergröſserung ist der Brennweite f direkt und dem Abstande des Gegenstandes vom Brennpunkte $(a-f)$ umgekehrt proportional.

2. Der Gegenstand befindet sich innerhalb der vorderen Brennweite.

Die von je einem Punkte des Gegenstandes AB ausgehenden Strahlen, der Hauptstrahl und der Parallelstrahl zur Achse, schneiden sich hinter der Linse nicht, wohl aber die Verlängerungen der austretenden Strahlen nach rückwärts, so daſs ein aufrechtes geometrisches Bild auf der Seite des Gegenstandes entsteht. Dadurch wird das a_1 in den Formeln 4) und 5) ein negatives.

Fig. 14.



Sie lauten nun

7) . . . . . . $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a} - \frac{1}{f} = \frac{f-a}{af}$

8) . . . . $a_1 = \frac{af}{f-a}$.

Inbetreff der Vergröfserung folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke

$$\frac{A_1 B_1}{AB} = \frac{A_1 m}{Am} = \frac{a_1}{a}.$$

Hat v dieselbe Bedeutung wie oben, so ist $v = \frac{a_1}{a} = \frac{af}{f-a} \cdot \frac{1}{a}$ deshalb

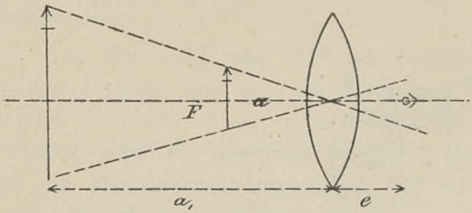
9) . . . . $v = \frac{f}{f-a}$;

also $A_1 B_1 = \frac{f}{f-a} \cdot AB$, d. h. die Vergröfserung ist der Brennweite direkt und dem Abstande des Gegenstandes vom Brennpunkte umgekehrt proportional.

Die Gesetze 6) und 9) lauten also überein; nur befindet sich der Gegenstand das eine Mal links, das andere Mal rechts vom Brennpunkte. Nehmen wir dieselbe Linse, also dasselbe f, so hängt beide Male die Vergröfserung von dem Abstande des Gegenstandes vom Brennpunkte ab, von $a - f$ und $f - a$. Je kleiner dieser Abstand, je näher also der Gegenstand dem Brennpunkte ist, desto stärker ist die Vergröfserung v. Während im ersten Falle $a - f$ meist $>$ f, also das Bild kleiner sein wird, ist im zweiten Falle stets $f > f - a$, also das Bild gröfser, worauf die Benutzung der konvexen Linse als Vergröfserungsglas oder Lupe beruht.

Man kann jedoch den Nenner $f - a$ in 9) nicht beliebig d. h. unendlich klein und damit v unendlich grofs machen, weil mit der Annäherung des Gegenstandes AB an den Brennpunkt das Bild $A_1 B_1$ für das auf der andern Seite der Linse befindliche Auge zu weit fortrücken würde. Es kann das Bild nur deutlich gesehen werden, so lange es sich in der richtigen Sehweite vom Auge befindet.

Fig. 15.



Ist die Entfernung des Auges hinter der Linse e, die Linsendicke wieder Null und die Sehweite w, so mufs $a_1 + e = w$ oder $a_1 = w - e$ sein. (Fig. 15.)

Da durch die Sehweite der Ort des Bildes gegeben ist, so können wir aus 7) den Ort des Gegenstandes berechnen. Dies ist jedoch bei der Lupe nicht nötig, da man dieselbe dem Gegenstande solange nähert, bis das Bild am deutlichsten erscheint.

Die Vergröfserung war $v = a_1 \cdot \frac{1}{a}$; nach Formel 7) ist $\frac{1}{a} = \frac{1}{f} + \frac{1}{a_1}$, oder durch Einsetzen von $a_1 = w - e$ ist

10) $$v = \frac{w - e}{f} + 1.$$

Ist $e = 0$, also das Auge dicht hinter der Lupe, so ist

11) $$v = \frac{w}{f} + 1.$$

Befindet sich das Auge im hintern Brennpunkte, ist also $e = f$, so ist

12) $$v = \frac{w}{f}.$$

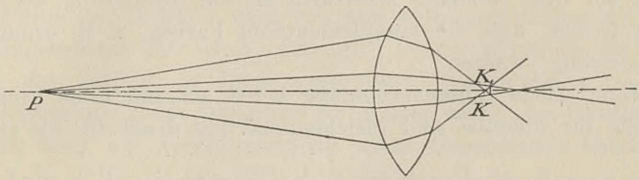
Dieses ist die Formel, nach der man oberflächlich eine Lupe beurteilt. Je kleiner eine Linse und je stärker die Krümmung, je kleiner also f ist, desto bedeutender ist die Vergröfserung. Es mufs $w > f$ sein, damit es durch $\frac{w}{f} > 1$ eine Vergröfserung giebt. Was ferner der Kurzsichtige durch w verliert, gewinnt er wieder durch das Wachsen des Sehwinkels.

V. Die Kugel- und Farbenabweichung.

Nur diejenigen von einem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen werden durch die sphärische Linse in einem Punkte vereinigt, welche nahe der Achse auffallen. Die übrigen Strahlen werden sich hinter der Linse früher vereinigen, die äufsersten

Randstrahlen am frühesten. Das Bild des Punktes P wird sich daher zu einer Kreisfläche KK_1 ausdehnen. Ein neben P liegender Punkt wird sich ebenso abbilden, die Bilder werden in einander

Fig. 16.



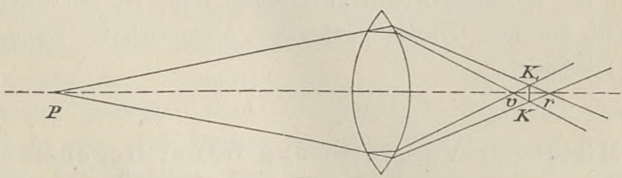
übergehen, wodurch das Bild eines kleinen Gegenstandes in P an Deutlichkeit verliert.

Diese von der Kugelgestalt der Linsenflächen herrührende Störung heifst sphärische Aberration oder Kugelabweichung.

Die ganze Linse kann man als eine Reihe aneinander gesetzter Prismenzonen betrachten; am Rande ist die Prismenform am schärfsten ausgebildet. Das weifse Licht wird daher beim Durchgange, besonders am Rande, in verschieden gefärbte Strahlen mit ungleichen Wellenlängen zerlegt, welche ein verschiedenes Brechungsvermögen besitzen. Die stärkste Brechbarkeit haben die violetten, die schwächste die roten Strahlen; zwischen ihnen liegen die blau, grün, gelb und orange gefärbten Strahlen.

Während in Fig. 17 die roten Strahlen die Achse in r treffen, schneiden sich die violetten in v und die übrigen zwischen diesen

Fig. 17.



beiden Punkten. Das Bild des Punktes P erweitert sich so zu einem farbigen Kreise KK_1.

Diese Störung, noch schädlicher als die Kugelabweichung, heifst chromatische Aberration oder Farbenabweichung.

Es läfst sich diese Abweichung nur beseitigen durch zwei Linsen aus verschiedenen Glassorten mit ungleichem Brechungsvermögen, nämlich durch eine bikonvexe Kronglas- und eine plankonkave oder bikonkave Flintglaslinse. Die beiden Linsen stehen dicht aneinander, ohne sich jedoch zu berühren, und die bikonvexe Linse ist dem Gegenstand zugekehrt.

Ungleiches Brechungsvermögen ist erforderlich, damit überhaupt ein Bild entsteht; aufserdem ist die Anordnung der Linsen so zu treffen, dafs die komplementären Farben, z. B. orange und blau vereinigt werden.

Eine solche Linsenverbindung heifst achromatische Linse; die Formeln für dieselbe sind gleichlautend mit denen für die einfache Linse.

Kugel- und Farbenabweichung werden durch zweckmäfsige Wahl der Krümmungsradien und durch Zurückhaltung der Randstrahlen abgeschwächt. Letzteres geschieht durch die Blendungen oder Diaphragmen, wie beim Auge durch die Regenbogenhaut. Der Photograph benutzt besonders bei architektonischen Innenaufnahmen ebenfalls starke Blendungen, mufs aber dann infolge der Verringerung der Lichtmenge für eine einzige Aufnahme seinen Apparat oft stunden-, ja tagelang aufgestellt lassen. Ein zu grelles Licht ist bei Benutzung von Linsen unangenehm.

Als Fassung der Lupen dient entweder ein Ring oder bei zusammengesetzten Linsen ein Messingcylinder. Eine von Aberrationen ziemlich freie und bei den Winkelmessern oft gebrauchte Lupe ist die Wilsonsche. Sie besteht aus zwei plankonvexen Linsen, deren gekrümmte Flächen einander zugekehrt sind. Die Brennweiten derselben sind nahezu gleich und ihr Abstand ist etwas weniger als die Hälfte der Brennweite. Die Fassung dieser und der ihr ähnlichen Fraunhoferschen Lupe ist oft derart, dafs das dicht auf den Cylinder gebrachte Auge sich im Brennpunkte ($e = f$) befindet.

d. Mittel zur Vergröfserung ferner Gegenstände.

§ 13. Das astronomische oder Keplersche Fernrohr.

Das von Kepler erfundene und 1611 zuerst beschriebene Fernrohr besteht in seiner einfachen Gestalt aus zwei bikonvexen Linsen, die in zwei gegen einander verschiebbaren Röhren enthalten sind. Die gröfsere, dem Objekte zugekehrte Linse heifst das Objektiv oder die Objektivlinse in der Objektivröhre; die dem Auge zugewandte Linse heifst Okular in der Okularröhre. Die

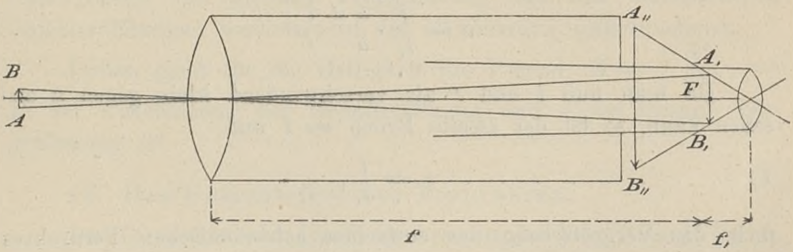
Achsen beider Röhren sollen zusammenfallen. Die Achse der Objektivröhre heifst die mechanische Achse des Fernrohres, die Achse der Objektivlinse die optische Achse.

I. Die Lage des Bildes.

Durch das Objektiv wird von dem entfernten Gegenstande AB ein umgekehrtes Bild $A_1 B_1$ erzeugt. Dieses physische Bild wird durch das Okular als Lupe vergröfsert und erscheint in $A_2 B_2$. Die Brennweite f des Objektivs ist gröfser als f_1 des Okulars. Da es sich stets um verhältnismäfsig weite Gegenstände handelt, so wird nach § 12, III das Bild $A_1 B_1$ aufserhalb der Brennweite und nahe am Brennpunkte entstehen.

Die Formel für den Ort des Bildes ist $a_1 = \frac{af}{a-f}$. Setzen wir für a die Werte 300, 500, 600 $^{\mathrm{m}}$ und $f = 40$ $^{\mathrm{cm}}$ ein, so wird $a_1 = 40{,}05$, $40{,}032$ und $40{,}026$ $^{\mathrm{cm}}$, also wird das Bild nur einige Zehntelmillimeter vom Brennpunkte entfernt sein.

Fig. 18.



Nach § 12 IV, 2 mufs nun das Bild innerhalb der Brennweite des Okulars stehen und zwar möglichst nahe an dessen Brennpunkte. Die Brennpunkte von Objektiv und Okular werden also nahezu in F zusammenfallen. Auf einen sehr entfernten Gegenstand gerichtet wird demnach die Länge des Fernrohres $= f + f_1$ sein. Für kürzere Entfernungen ist das Okular herauszuziehen, das Fernrohr wird also länger. Man findet auch wohl verschiebbare Objektive.

II. Die Gröfse des Bildes.

Die Vergröfserung des Fernrohres wird durch das Verhältnis der Sehwinkel des Bildes und des Gegenstandes, d. h. durch das Verhältnis ihrer scheinbaren Gröfsen bestimmt. Nach § 11 ist der Sehwinkel der Höhe des Gegenstandes direkt und seiner Entfernung vom Centralpunkte des Auges umgekehrt proportional. Es sei h

die Höhe des Gegenstandes, a seine Entfernung vom Objektiv und l die Länge des Fernrohres vom Objektiv bis zum Auge, das sich im Brennpunkte des Okulars, also etwa 1 cm davor befindet.

Der Sehwinkel des Gegenstandes ist

$$\gamma = \frac{h}{a+l} \cdot \varrho.$$

Hat das Bild die Höhe h_1, so erscheint es in der deutlichen Sehweite mit Berücksichtigung von Formel 12) aus § 12 unter dem Winkel

$$\gamma_1 = h_1 \cdot \frac{w}{f_1} \cdot \frac{1}{w} \cdot \varrho = \frac{h_1}{f_1} \cdot \varrho.$$

Folglich ist die Vergröſserung des Fernrohres

$$v = \frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{h_1}{f_1} \cdot \frac{a+l}{h}.$$

Nach § 12 IV, 1 ist $\frac{h_1}{h} = \frac{f}{a-f}$, also

$$v = \frac{f}{f_1} \cdot \frac{a+l}{a-f}.$$

Da man nun l und f als verschwindend klein gegen a ansehen kann, so ist der zweite Bruch $= 1$ und

1) . . . . $v = \frac{f}{f_1}$,

d. h. die Vergröſserung des einfachen astronomischen Fernrohres ist gleich dem Quotienten aus der Brennweite des Objektivs und derjenigen des Okulars.

Da in 1) die Sehweite w nicht vorkommt, so folgt daraus, daſs die Vergröſserung des Fernrohres für jedes Auge die gleiche ist.

III. Die Deutlichkeit und Helligkeit des Bildes.

Unter der Deutlichkeit des Bildes versteht man die Schärfe, mit der sich jeder einzelne Punkt dem Auge zeigt. Sie ist um so gröſser, je mehr das Bild von der Kugel- und Farbenabweichung frei ist, wenn also jedem Punkte des Objekts nur ein Punkt des Bildes entspricht. Im Fernrohr macht man die Randstrahlen durch Blenden unschädlich, bevor sie sich zum Bilde vereinigen; der Photograph hält die Randstrahlen von vorn herein zurück, er läſst keine Strahlen auf den Rand des Objektivs fallen.

Unter der Helligkeit des Bildes versteht man die stärkere oder schwächere Beleuchtung, in welcher sich das vergröſserte Bild dem Auge darstellt.

Von dem Gegenstande fallen auf das Objektiv Strahlenkegel, welche die Objektivöffnung zur Grundfläche haben. Alle diese Strahlen werden zum physischen Bilde vereinigt; ein Teil derselben wird verschluckt, geht also für die Beleuchtung verloren. Die natürliche Helligkeit für das Auge ist proportional der Pupillenöffnung. Diese ist jedoch sehr verschieden nach der Stärke des Lichtes überhaupt. Daraus folgt, daſs wir für die Helligkeit des Bildes im Fernrohr keine mathematische Formel mit genau bestimmten Gröſsen aufstellen können

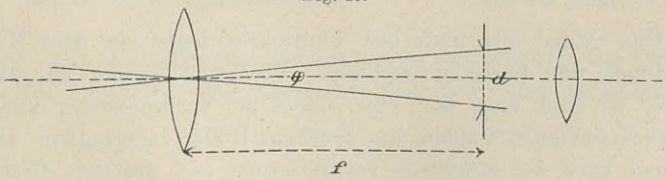
Man kann nur allgemein sagen, daſs die Helligkeit mit der Gröſse der Objektivöffnung wächst und mit der Vergröſserung durch das Okular abnimmt. Letzteres ist leicht zu sehen, wenn man einen Tubus auf den Mond oder einen Planeten richtet und Okulare mit verschiedener Vergröſserung einschiebt. Was man an Gröſse gewinnt, geht an Helligkeit verloren. Das Umgekehrte ist an Operngläsern von gleicher Vergröſserung und mit verschiedenen Objektivöffnungen besonders in der Dämmerung wahrzunehmen.

Jordan giebt für die Helligkeit die Formel $H = \frac{1}{5}\frac{R^2}{v^2}$, wo R der Durchmesser der Objektivöffnung und v die lineare Vergröſserung ist.

IV. Das Gesichtsfeld des Fernrohres.

Das Gesichtsfeld des Fernrohres ist der kegelförmige Raum, den man mit dem Fernrohre auf einmal übersehen kann. Die Gröſse desselben wird gemessen durch den Winkel φ, dessen Scheitel

Fig. 19.



im optischen Mittelpunkte des Objektivs liegt, und dessen Schenkel an den inneren Rändern der Okularblendung vorbeigehen. Da die Okularblendung das Gesichtsfeld begrenzt, so rechnen wir bis dorthin die Schenkellänge des Winkels φ. Die Blende steht nahe dem Brennpunkte des Objektivs und ihre Öffnung hat ungefähr den Durchmesser $d = 0{,}5\, f_1$. Deshalb ist

$$\varphi = \varrho \cdot \frac{d}{f} = \varrho \cdot \frac{0{,}5\, f_1}{f} = 0{,}5\, \varrho \cdot \frac{f_1}{f} = 0{,}5\, \varrho \cdot \frac{1}{v}.$$

In Graden ist $\varrho = 57{,}296$ oder rund $= 60$, also

$$\varphi = \frac{0{,}5 \cdot 60^0}{v} = \frac{30^0}{v}.$$

Ist demnach	$v = 10$	20	30	40
so ist	$\varphi = 3^0$	$1^0\, 30'$	1^0	$0^0\, 45'$

Die Gröſse des Gesichtsfeldes steht im umgekehrten Verhältnis zur Vergröſserung des Fernrohres.

Vergröſserung einerseits, Helligkeit und Gesichtsfeld andererseits beschränken sich also gegenseitig; nach dem jedesmaligen Zwecke ist die Einrichtung des Fernrohres zu treffen. Bei dem Keplerschen Meſsfernrohre kommt es meist nur auf deutliche Sichtbarkeit einzelner Punkte an. Man verzichtet deshalb auf eine starke Vergröſserung, um an Helligkeit zu gewinnen, wobei freilich eine zu grelle Beleuchtung häufig auch unangenehm sein kann und durch ein Blendglas abzuschwächen ist.

Um die Gröſse des Gesichtsfeldes unmittelbar zu messen, merkt man sich zwei Punkte, welche diametral an den Grenzen des Gesichtsfeldes liegen und miſst den Winkel zwischen den Strahlen nach den beiden Punkten. Oder man bestimmt den Abstand der beiden Punkte und die Länge des Strahls nach einem derselben, dann ist $\varphi = \frac{\text{Abstand}}{\text{Strahl}} \cdot \varrho$.

Hieraus läſst sich nun die Vergröſserung $v = \frac{0{,}5\, \varrho}{\varphi}$ finden.

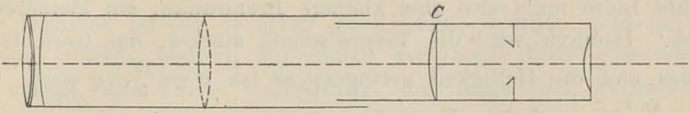
V. Das Okular.

Das Okular des einfachen Fernrohres leidet an dem Mangel der Kugel- und Farbenabweichung. Will man diesem Mangel abhelfen, so darf man nur eine schwache Vergröſserung und ein kleines Gesichtsfeld wählen, um deutliche Bilder zu erhalten. Damit letzteres auch bei stärkerer Vergröſserung und gröſserm Gesichtsfelde möglich ist, setzt man das Okular aus mehreren Linsen zusammen.

1. Das Okular von Huygens oder Campani.

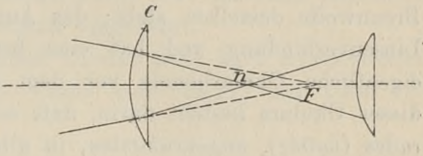
Dasselbe besteht aus zwei plankonvexen Linsen mit unveränderlicher Entfernung, deren ebene Flächen dem Auge zugekehrt sind; die innere Linse C heiſst die Kollektivlinse und befindet sich innerhalb der Brennweite des Objektivs. Die Lichtstrahlen vereinigen sich deshalb nicht dicht hinter dem Brennpunkte F des Objektivs, sondern früher in n, sodaſs die Bildweite hinter dem

Fig. 20.



Objektiv verkürzt wird, Objektiv und Kollektiv wirken wie eine Linse, die zwischen beiden steht. Das Bild steht fast in der Mitte zwischen Kollektiv- und Augenglas, wo sich auch die Okularblendung befindet. Es wird das physische Bild des Objektivs durch das Kollektiv verkleinert, und zwar von 3 auf 2, also ist die Vergröſserung $\frac{2}{3}$ des Keplerschen Fernrohres. Damit wird die Helligkeit $\frac{9}{4}$ und das Gesichtsfeld $\frac{3}{2}$ mal so groſs.

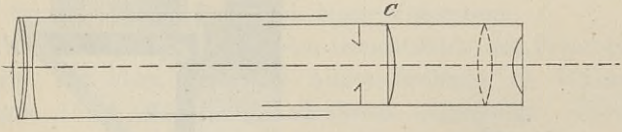
Fig. 21.



2. Das Okular von Ramsden.

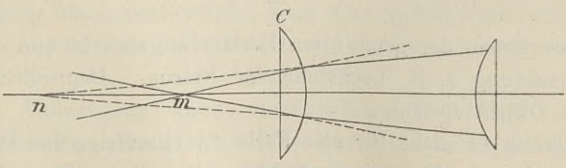
Dasselbe besteht aus zwei plankonvexen Linsen, welche ihre konvexen Seiten einander zukehren und in starrer Verbindung

Fig. 22.



stehen. Das Kollektivglas befindet sich auſserhalb der Brennweite des Objektivs; das physische Bild steht also zwischen Ob-

Fig. 23.



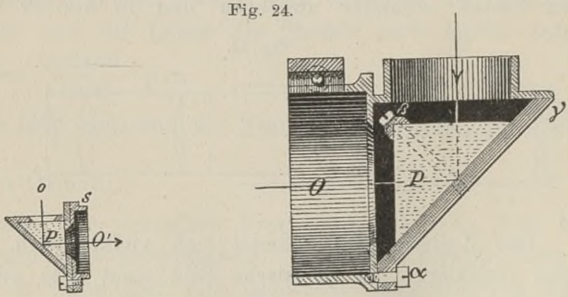
jektiv und Kollektiv, wo es auch beim einfachen Fernrohre stehen würde. Die Linse C drängt die vom Bilde m ausgehenden Strahlen zusammen, und das Bild wird dadurch nach dem Objektive, nach n, hingeschoben. Diejenige Linse, welche genau so wirken würde, wie das Kollektiv- und Augenglas zusammen, mufs also näher dem Objektiv stehen, als es die einfache Okularlinse müfste. Die äquivalente Linse mufs also eine kleinere Brennweite, ein kleineres f_1 haben. Dadurch wird die Vergröfserung stärker, das Gesichtsfeld kleiner und die Helligkeit geringer; es ist $v = \frac{10}{9}$, $\varphi = \frac{9}{10}$ und $H = \frac{81}{100}$ des einfachen Fernrohres.

3. Das orthoskopische Okular von Kellner.

Das Kollektivglas ist eine ungleiche bikonvexe Linse, welche die flachere Krümmung dem Objektive zukehrt und aufserhalb der Brennweite desselben steht; das Augenglas ist eine achromatische Linsenverbindung und hat eine besondere Blende, während die eigentliche Okularblende vor dem Kollektiv steht. Der Vorzug dieses Okulars besteht darin, dafs es achromatisch ist und ein gerades (ὀρθός), ungekrümmtes, in allen Teilen scharfes Bild liefert.

Das sogen. prismatische Okular hat mit der Funktion eines Okulars nichts zu thun. Dasselbe hat seinen Namen von dem gleichschenklig-rechtwinkligen Glasprisma, welches mit der einen Kathetenfläche senkrecht zur Fernrohrachse steht und mit der Hypotenusenfläche die Lichtstrahlen um 90^0 ablenkt. Es ist vor

Fig. 24.



Okularprisma. Objektivprisma.

oder hinter einem der genannten Okulare angebracht und erleichtert die Beobachtung z. B. hochstehender Sterne. Demselben Zwecke dient das Objektivprisma.

Ich halte es nicht für alle Fälle zweckmäfsig, das Prisma um die Längsachse des Fernrohres drehbar zu machen. Beim Anvisieren eines einzelnen Punktes ist die Stellung des Prisma gleichgiltig. Bei der Einstellung auf einen Gegenstand, z. B. die Sonne bedarf es schon einiger Überlegung, das gesehene Bild richtig zu zeichnen, wenn nicht der Horizontalfaden im Fernrohr der Verbindungslinie der beiden Augen des Beobachters parallel ist.

4. Das terrestrische Okular.

Dasselbe ist ein Fernrohr im Kleinen, welches nicht auf das äufsere Objekt, sondern auf dessen verkehrtes Bild gerichtet ist. Es erfolgt eine zweite Umkehrung, das Auge sieht deshalb den Gegenstand in seiner natürlichen Stellung. Es genügen also drei Linsen: die Objektivlinse, die bikonvexe Linse, welche das Bild umkehrt, und das bikonvexe Augenglas, welches als Lupe dient. Gewöhnlich hat jedoch das Gesamtokular drei, also das Fernrohr im ganzen vier Linsen. Im letztern Falle wird das erste physische Bild zunächst vergröfsert und dann umgekehrt.

Das Fernrohr mit genanntem Okular wird kurz terrestrisches oder Erdfernrohr genannt. Es wurde von Schyrl um 1640 erfunden.

VI. Das Fadenkreuz.

Unter dem Zielen auf einen Punkt oder dem Anvisieren eines Punktes P versteht man die Herstellung einer einzigen geraden Linie zwischen dem fernen Punkte P und zwei gegebenen nahen Punkten. Oder das Zielen ist das Einrichten einer gegebenen Absehlinie auf einen fernen Punkt. Kann man mit der Absehlinie eine Ebene beschreiben, so kann das Anvisieren auch darin bestehen, dafs man einen fernen Punkt oder eine Gerade in die gegebene Ebene bringt. Man spricht von einer Visierebene.

Um einen einzigen Punkt im Gesichtsfelde des Fernrohres unabhängig von dem Orte des Auges festlegen zu können, hat Gascoigne 1640 das sogen. Fadenkreuz angebracht. Durch dasselbe wird ein Punkt bezeichnet, welcher mit dem Visier des Gewehres gleichbedeutend ist. Das Korn wird durch den optischen Mittelpunkt des Objektivs vertreten. Diesen selbst erblickt man nicht, auch wenn er durch eine dunkle Scheibe von halber Objektivöffnung bezeichnet würde, aber man visiert doch unwillkürlich über ihn, wenn das Bild des fernen Punktes deutlich und scharf erscheint.

Das Fadenkreuz kann verschiedene Formen je nach dem Zwecke des Fernrohres haben. In der einfachsten Gestalt besteht es aus zwei sich senkrecht schneidenden Geraden, welche entweder auf einer dünnen Glasplatte eingerissen sind oder durch zwei zarte Spinnfäden dargestellt werden.

Das Fadenkreuz befindet sich auf der Okularblende, und die Ebene des Fadennetzes mufs mit der Ebene des vom Objektiv erzeugten Bildes zusammenfallen.

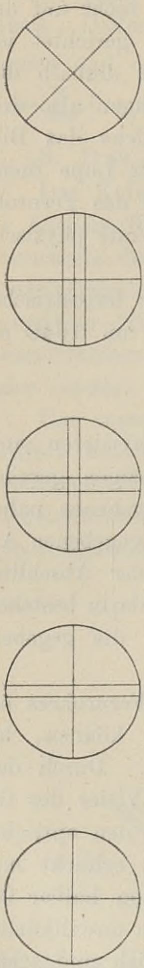


Fig. 25.

Bei den Okularen von Ramsden und Kellner kann man die Fadenkreuzvorrichtung leicht in Augenschein nehmen oder durch die äufseren Schräubchen auf die Verstellbarkeit schliefsen und auch die Wirkungsweise der entgegengesetzt gerichteten Schrauben sich denken. Daraus ergiebt sich dann auch, dafs die Visierlinie nicht dauernd dieselbe zu sein braucht, während die optische Achse des Objektivs ein für allemal festliegt. Die beiden Geraden sind deshalb nicht identisch.

Da bei Ramsden und Kellner das Fadenkreuz vor dem Okular steht, so bildet es mit dem Objektiv ein zusammengehöriges Ganze, während Auge und Okular ein System für sich bilden. Die Verschiedenheit des Auges läfst sich dem Fadenkreuz durch Verstellen des Okulars anpassen, ohne etwas an dem Orte der Bildebene zu ändern. Beim Okular von Huygens ist das Fadenkreuz mit vom Auge abhängig, weshalb ein durch dasselbe festgelegter Sehwinkel je nach der Beschaffenheit des Auges verschieden ausfallen würde. Es würden also zwei parallele Fäden im Fadennetze dem kurzsichtigen Auge einen anderen Sehwinkel liefern, als dem normalen Auge.

Solange das Fernrohr nicht mit irgendwelchen Mefsvorrichtuugen verbunden ist, hat man sich inbetreff der Stellung des Fadenkreuzes Folgendes zu merken.

Man richte das Fernrohr gegen den hellen Himmel und verschiebe bei Huygens das Fadenkreuz, bei Ramsden und Kellner die Fassung des Gesamtokulars vor- oder rückwärts, bis die Fäden oder die Risse auf der Glasplatte als eine schwarze Linie erscheinen, nicht etwa als Doppellinien.

Es ist nun zu untersuchen, ob Fadenkreuzebene und Bildebene zusammenfallen. Hierbei sei nochmals betont, dafs bei Huygens der Brennpunkt des Okulars festliegt und der Fadenkreuzring in einem Schlitze verschiebbar ist, während bei Ramsden und Kellner das Fadenkreuz feststeht und der Brennpunkt verschiebbar ist.

Bei dieser Prüfung stellt man den Kreuzpunkt der Fäden auf einen Punkt in der Entfernung von hundert oder mehr Metern ein, oder noch besser läfst man eine deutlich erscheinende vertikale Linie, etwa eine Hauskante oder Mauerfuge oder dünne Fensterleiste vom Vertikal- oder Horizontalfaden verdecken, nachdem man sich von der Schärfe des Bildes überzeugt hat. Nun bewegt man das Auge vor dem Okular hin und her, nach rechts und links oder nach oben und unten. Nimmt die Fadenkreuzebene den richtigen Ort ein, so mufs das Bild fortwährend vom Kreuzpunkt oder dem betreffenden Faden bedeckt werden. Ist das nicht der Fall, so sehe man nach, was dem Auge folgt, das Fadenkreuz oder das Bild. Was bei der Rechtsbewegung des Auges rechts ausweicht, ist zu weit entfernt, wie man leicht an zwei vertikal vors Auge gehaltenen Bleistiften beobachten kann.

Angenommen, bei Huygens geht das Fadenkreuz mit dem Auge, so zieht man dasselbe zu sich heran. Geschieht das Gleiche bei Ramsden oder Kellner, so mufs das Okular hinein, damit das Fadenkreuz vom Brennpunkte ab nach der äquivalenten Linse hin kommt und sich somit auch das Bild des Fadenkreuzes dem Objektivbilde in der Richtung zum Okulare nähert. Man wiederhole jedoch die Bewegungen des Auges auch für verschiedene Zielweiten und auch bei etwas geänderter Einstellung des Okulars und lasse es nicht bei einer einzigen Prüfung bewenden.

Trägt man eine Brille, so gewöhne man sich daran, entweder immer durch die Brille oder stets drüber weg ins Fernrohr zu sehen, jedenfalls mufs man so verfahren wie bei der Prüfung. Es giebt einfache Fernrohre, bei denen das feststehende Fadenkreuz nur vom normalen Auge oder mit der Brille deutlich sichtbar ist.

Die Abweichung der Bildebene aus der Ebene des Fadenkreuzes heifst Parallaxe, d. h. Verschiebung. Besteht eine solche beim Zielfernrohr, so verursacht sie verschiedene Einstellungen je nach der Stellung des Auges, demgemäfs auch verschiedene Ablesungen, wenn das Fernrohr etwa mit einem Kreise in Verbindung steht.

Auch beim gewöhnlichen Ablesen an einem Mafsstab oder der Uhr spricht man von einer Parallaxe, die schädlich wirken kann. Dieselbe tritt immer auf, wenn man nicht senkrecht zur Teilung sieht, wie man sich leicht an der Uhr überzeugen kann.

VII. Die Prüfung des Fernrohres.

Um zu untersuchen, ob die Bilder hinlänglich deutlich sind, richtet man bei mittlerer Beleuchtung, nicht grellem Sonnenschein, das Fernrohr auf eine in etwa 50^{m} Entfernung aufgestellte Tafel, auf welcher regelmäſsige schwarze Figuren, Kreisflächen oder Quadrate, gezeichnet sind. Für gewöhnlich genügt eine Nivellierlatte mit Zentimeterteilung. Erscheinen die Figuren bei richtiger Einstellung gleichmäſsig schwarz, ohne farbigen, höchstens mit blauem Saume und unverzerrt, oder kann man an der Nivellierlatte noch Zehntel der Teilung, also Millimeter, genau schätzen, so genügt das Fernrohr den Ansprüchen des Landmessers inbezug auf Deutlichkeit.

Die Vergröſserung des Fernrohres kann man auf verschiedene Weise bestimmen. Man sieht mit dem einem Auge durch das Fernrohr, mit dem anderen frei nach einer Nivellierlatte, auf welcher je zehn Zentimeter durch einen schwarzen Streifen zusammengefaſst sind. Den vergröſserten Dezimeterstreifen bringt man nach einiger Übung leicht zur Deckung mit dem frei gesehenen Lattenstück. Auf diesem zählt man die unvergröſserten Dezimeter ab, welche die gleiche Ausdehnung einnehmen; man erhält so die Vergröſserungszahl. Hat man zwei Latten, so stelle man sie nebeneinander. Es wird vorausgesetzt, daſs beide Augen die gleiche Sehschärfe haben.

Kann man wegen der Achsenlager des Fernrohres mit dem freien Auge nicht nach der Latte sehen, so öffnet man etwa in der Entfernung des Objektivs einen Zirkel und drückt ihn zusammen, bis zwischen die Spitzen das Fernrohrbild eines Dezimeters kommt. Besser noch befestigt man einen weiſsen Papierstreifen vertikal auf dunklem Grunde und verfährt wie vorhin. Ist die Entfernung des Papiers vom Auge 35^{m}, die Länge des Streifens 10^{cm}, so ist der Sehwinkel $\frac{0,1}{35} \cdot \varrho$. Haben die Zirkelspitzen in dem Abstande 45^{cm} vom Auge die Öffnung $5,2^{cm}$ als Höhe des Fernrohrbildes, so ist der Sehwinkel $\frac{5,2}{45} \cdot \varrho$. Demnach ist die Vergröſserung $\frac{5,2}{45} : \frac{0,1}{35} = 40$.

Bei Meſsfernröhren findet man eine zehn bis fünfzigfache Vergröſserung.

Das Objektiv muſs centriert sein, d. h. seine optische Achse muſs in der mechanischen Achse der Objektivröhre liegen. Die einfachste Prüfung nach dieser Richtung besteht darin, daſs man das Fernrohr auf einen scharf markierten Punkt einstellt und darauf das Objektiv mit seiner Fassung eine volle Umdrehung machen läſst. Während man die Objektivlinse mit der Hand dreht, wird man beobachten, ob der Kreuzpunkt der Fäden stets den anvisierten Punkt deckt oder ob der Bildpunkt einen Kreis beschreibt.

Da die Entfernung des Objektivs vom Fadenkreuze durch die Drehung eine andere wird, so ist neu einzustellen. Aber auch nach dieser Einstellung wird das Bild bei den meisten Fernröhren etwas aus der ursprünglichen Lage ausgewichen sein. Dieses zeigt an, daſs das Objektiv nicht centriert ist. Es ist darauf zu achten, daſs während der Arbeit das Objektiv stets fest eingeschraubt ist und in derselben Stellung bleibt, die es bei der Prüfung hatte. Von Wichtigkeit ist solches bei der Messung von mehreren Winkeln auf derselben Station oder bei Wiederholung der Winkelmessung und besonders beim Nivellieren.

Bei dieser Prüfung findet man deutlich das bestätigt, was über die Festlegung der Zielachse gesagt wurde: Das Fadenkreuz ist das Visier und der optische Mittelpunkt des Objektivs, wenn auch unsichtbar, das Korn der Visierlinie.

Ferner kann man sich bei dieser Gelegenheit überzeugen, ob das Okular centriert und die Verschiebung der Okularröhre eine parallele ist.

Durch das Drehen des Getriebes wird ein Druck auf die Zahnstange der Okularröhre ausgeübt und dadurch die letztere leicht aus ihrer Richtung verschoben. Jenachdem man vertikale oder horizontale Linien anvisieren muſs, ist der vertikale oder horizontale Faden des Kreuzes der wichtigere, dessen Stellung möglichst unverändert bleiben muſs. Deshalb stellt man das Getriebe im ersteren Falle horizontal, im letzteren vertikal.

VIII. Genauigkeit des Zielens mit dem Fernrohre.

Der wahrscheinliche Fehler, der von einem gesunden und geübten Auge frei oder etwa bei Visier und Korn gemacht wird, beträgt nach Bauernfeind etwa 15 Sekunden. Der Zielfehler eines guten astronomischen Fernrohres wird gefunden, indem man $15''$ durch die Vergröſserungszahl dividiert. Dieses gilt für ein achromatisches Fernrohr mit mäſsiger Vergröſserung, mit einem astronomischen Okular und einem Objektiv, das nicht gröſser ist, als die notwendige Helligkeit erfordert. Für geometrische Instrumente soll eine Vergröſserungszahl genügend sein, welche der in Zollen zu $2{,}5^{\text{cm}}$ ausgedrückten Brennweite des Objektivs gleich ist oder höchstens doppelt so viel beträgt, um die gröſste Zielgenauigkeit zu erreichen.

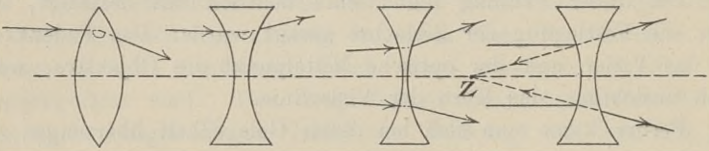
Jordan hat als mittleren Zielfehler des freien Auges bei 18^{m}

Entfernung $\pm 52''$ gefunden. Eine Reihe von Versuchen des Ingenieur R. Wagner mit einem Fernrohre von 25facher Vergröſserung ergab einen mittleren Zielfehler von $\pm 0{,}287''$; für das freie Auge würde das einen Fehler von $25 \cdot \pm 0{,}287'' = \pm 7{,}2''$ bedeuten.

§ 14. Das holländische oder Galileische Fernrohr.

Trifft ein Lichtstrahl auf eine konvexe Linse, so tritt er so aus, daſs der von dem ein- und austretenden Strahle gebildete, nach der Achse hin liegende Winkel hohl ($< 180^0$) ist; derselbe Winkel ist bei Konkavlinsen ein erhabener ($> 180^0$). Divergieren

Fig. 26a.



die auf eine Konkavlinse treffenden Lichstrahlen, so divergieren die austretenden noch mehr; sind die auftreffenden unter sich und zur Achse parallel, so divergieren sie hinter der Linse so, als kämen sie von dem vorderen Zerstreuungspunkte, dem geometrischen Brennpunkte Z her. — Konvergieren die Strahlen vor der Linse nach dem hintern Zerstreuungspunkte, so treten sie parallel zur Achse aus; konvergieren sie stärker, so konvergieren sie auch hinter der Linse; konvergieren sie schwächer, so divergieren sie hinter der Linse.

Fig. 26b.

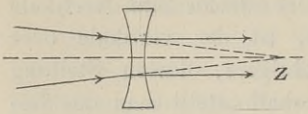
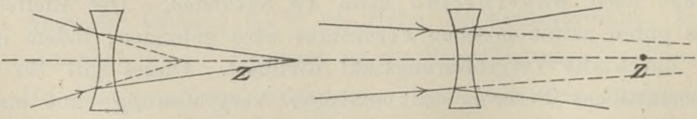


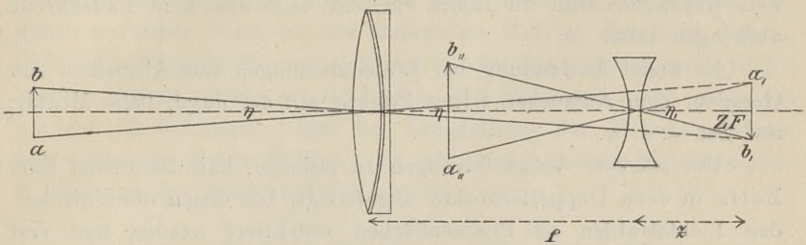
Fig. 26c.



Dieser letztere Fall trifft bei dem Galileischen Fernrohre zu. Es handelt sich da um die Strahlen, welche vom Gegenstande nach ihrem Durchgange durch das Objektiv zum Okulare hingehen.

Das Objektiv ist meist eine achromatische Linsenverbindung mit groſser Öffnung und kleiner Brennweite f. Das Okular ist eine achromatische oder einfache bikonvexe Linse mit der Zerstreuungsweite z; dieselbe steht innerhalb der Brennweite des Objektivs. Brennpunkt F und Zerstreuungspunkt Z fallen nahe zusammen. Von dem Gegenstande ab würde dicht hinter F das physische Bild $a_1 b_1$ entstehen. Bevor es jedoch entsteht, werden

Fig. 27.



die durch die bikonkave Linse divergent gemachten Strahlen vom Auge aufgefangen und man erblickt wie beim freien Sehen das Bild $a_2 b_2$ in der Stellung des Gegenstandes.

Stellt man das Fernrohr auf einen fernen Punkt ein, so ist die Länge des Rohres oder der Abstand der beiden Linsen gleich der Differenz $f - z$.

Die Vergröfserung v ist wieder das Verhältnis der Sehwinkel, unter denen das Bild $a_1 b_1$ und der Gegenstand ab dem Auge erscheinen. Es ist

$$\eta_1 = \frac{a_1 b_1}{z} \cdot \varrho \quad \text{und} \quad \eta = \frac{a_1 b_1}{f} \cdot \varrho, \quad \text{also}$$

$$v = \frac{\eta_1}{\eta} = \frac{f}{z}.$$

Die Physik lehrt, dafs die bikonkave Linse verkleinert. Im vorliegenden Falle wolle man jedoch bedenken, dafs man nicht wie beim astronomischen Fernrohre mit dem Okulare das Bild betrachtet. Das gröfsere Bild entsteht durch die Divergenz der Strahlen. Zur Veranschaulichung ziehe man die Okularröhre ganz heraus, schraube das Okular ab und fange das Bild des Fensters oder der Lampe mit einem Schirm auf. Man beachte dann die Entfernung des scharfen Bildes vom Objektiv und Okularplatze.

Ein Doppelperspektiv mufs so gehalten werden, dafs die Augenachsen in diejenigen der Fernrohre fallen; bei bebrillten Augen ist besonders hierauf zu achten. Man öffne die Augen möglichst weit. Sieht man einen Stern doppelt, so haben die Achsen der Röhren nicht den Abstand der Augen; es werden dann nicht korrespondierende Punkte der Netzhaut getroffen. Der richtige Gebrauch erfordert wie beim Stereoskop einige Übung.

Das holländische Fernrohr hat ein kleines Gesichtsfeld, nur bis achtfache Vergröſserung, liefert aber helle Bilder.

Als geometrisches Instrument ist es nicht zu gebrauchen, weil kein physisches Bild im Rohre entsteht, sich also kein Fadenkreuz anbringen läſst.

Es findet Anwendung bei Linienmessungen zum Abstecken von Geraden, zum Aufsuchen ferner Punkte, auf der Jagd, beim Militär, auf See u. s. w.

Um stärkere Vergröſserungen zu erzielen, hat die Firma Karl Zeiſs in Jena Doppelfernrohre angefertigt, bei denen die eintretenden Lichtstrahlen an Prismenflächen reflektiert werden und erst ins Auge gelangen, nachdem sie das Vierfache des gewöhnlichen Weges zurückgelegt haben. Es wird dadurch erreicht, daſs in der Vergröſserungsformel $v = f : z$ die Brennweite des Objektivs gröſser genommen werden kann, ohne das Rohr durch Länge unhandlich zu machen. Da zur Anbringung der Prismen die Objektive weiter auseinander gestellt werden müssen als die Augenweite, so wird auſserdem das körperliche Sehen erhöht. Man kann von den rechten und linken Seitenflächen der Körper einen gröſsern Teil übersehen als mit den freien Augen. Um dies besser zu verstehen, halte man mit ausgestrecktem Arm die flache Hand vertikal zwischen die Augen, so daſs der Zeigefinger der Nase zugekehrt ist. Durch abwechselndes Schlieſsen des einen oder anderen Auges wird das sogen. körperliche Sehen verständlich. Bei Tageslicht ist die Leistung dieser Gläser vorzüglich, in der Dämmerung leiden sie unter dem Mangel der Helligkeit infolge der geringen Objektivöffnung. Die Okulare sind einzeln verstellbar.

Das holländische Fernrohr ist 1608 von dem Brillenmacher Joh. Lippershey zu Middelburg erfunden. Im Jahre darauf wurde es von Galilei nachgebildet und zu astronomischen Beobachtungen benutzt; 1610 entdeckte derselbe damit die Juppitermonde.

e. Mittel zur Messung sehr kleiner Linien und Winkel.

§ 15. Der Nonius oder Vernier.

Der Nonius besteht aus einem kleinen geraden oder bogenförmigen Maſsstabe, welcher an dem ebenso geformten eigentlichen Maſsstabe verschiebbar ist und Teile trägt, von denen n so lang sind wie $n - 1$ oder $n + 1$ Teile des Hauptmaſsstabes. Hiernach sind zwei Arten von Nonien zu unterscheiden.

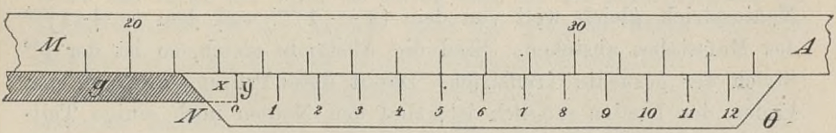
1. Der nachtragende Nonius.

Bei diesem Nonius sind n Teile genau so lang wie $n - 1$ Teile der Hauptteilung. Stellt man einen Teilstrich des Nonius NO genau auf einen Teilstrich des Maſsstabes MA, so wird man finden, daſs jeder folgende Noniusstrich rechts oder links hinter dem gleichvielten Maſsstabstriche zurückbleibt; die Noniusteile sind kleiner als die Maſsstabteile. Bei der Kreisteilung der Meſsinstrumente hat man nur diesen Nonius. Es sei die Länge des Maſsstabteiles l, diejenige des Noniusteiles l_1, so ist

$$n \cdot l_1 = (n - 1) \cdot l = nl - l \quad \text{oder} \quad l - l_1 = \frac{1}{n} \cdot l;$$

d. h. ein Noniusteil ist um den n^{ten} Teil des Maſsstabteiles kleiner als dieser. Der Unterschied zwischen einem Teile von MA und einem Teile von NO, also $a = l - l_1 = \frac{1}{n} l$, heiſst die Angabe

Fig. 28.



des Nonius. Der Unterschied U zwischen m Teilen von MA und ebensoviel Teilen von NO ist $U = m \cdot \frac{1}{n} l = m \cdot a =$ der $m$fachen Angabe.

Soll die Länge eines Gegenstandes g gemessen werden, so bringt man das eine Ende von g mit Null des Maſsstabes zusammen; genau bis an das andere Ende schiebt man Null des Nonius. Am Maſsstabe liest man bis zu dem Teilstriche ab, welcher dem Nullstriche des Nonius vorangeht, also in der Figur bis 22; das Stück xy ist nun durch den Nonius zu ermitteln. Der Strich 5 trifft genau mit einem Maſsstabstriche zusammen, deshalb ist

$$\text{am Maſsstabe: } 5x = 5l, \quad \text{am Nonius: } 5y = 5l_1,$$

$$\text{also } xy = 5x - 5y = 5l - 5l_1 = 5 \cdot (l - l_1) = 5 \cdot a.$$

Die Zahl, welche an dem mit dem Maſsstabstriche zusammenfallenden Noniusstriche steht, ist also mit der

Angabe zu multiplizieren und das Produkt zur Rohablesung hinzuzuzählen. Die Angabe erhält man bei ganzer Teilung durch die letzte Zahl am Nonius, dieselbe ist hier also $\frac{1}{12}$, demnach die Länge des Gegenstandes g: $22 + \frac{5}{12}$.

Ist bei einer Kreisteilung $l = \frac{1^0}{3} = 20'$, trägt der letzte Noniusstrich die Zahl 20, so ist $a = 1'$; ist aber jeder Noniusteil durch 2 kürzere Striche weiter in 3 gleiche Teile geteilt, so ist $n = 60$ und die Angabe für die kürzeren Striche

$$a = \frac{1}{60} \cdot 20' = \frac{1'}{3} = 20'';$$

also lassen sich $20''$ unmittelbar ablesen.

Damit man nicht lange den Treffstrich zu suchen braucht, schätzt man die Stellung des Nonius-Nullstriches innerhalb der beiden benachbarten Maſsstabstriche. Steht z. B. der Nullstrich in der ersten Hälfte des Maſsstabteiles, so wird der Treffstrich in der ersten Hälfte des Nonius stehen.

Hat man zwei Teilstriche, von denen man glaubt, daſs sie zusammentreffen, z. B. der p^{te} des Nonius mit dem q^{ten} des Maſsstabes, so sieht man nach, ob der $(p-1)^{\text{te}}$ und der $(p+1)^{\text{te}}$ Noniusstrich gleich weit von dem $(q-1)^{\text{ten}}$ und dem $(q+1)^{\text{ten}}$ des Maſsstabes abstehen. Sind die Abstände gleich, so ist der p^{te} Strich der gesuchte Treffstrich. Damit diese Prüfung auch an den Enden des Nonius möglich ist, sind den Nonien noch einige Teilstriche vor Null und hinter dem letzten Striche zugegeben, die sogen. Überstriche, die Überteilung (Excedenz). Die Prüfung ist wegen der etwaigen Parallaxe des Auges immer nötig.

Bei Höhenkreisen, welche von Null nach beiden Seiten bis 90^0 oder 180^0 geteilt sind, hat man doppelte Nonien mit gemeinschaftlicher Null, um in beiden Lagen des Fernrohres die Höhen- bezw. Tiefenwinkel bequem ablesen zu können. Es ist zum Ablesen derjenige Nonius zu wählen, dessen Bezifferung mit der Kreisteilung gleichlaufend ist.

2. Der vortragende Nonius.

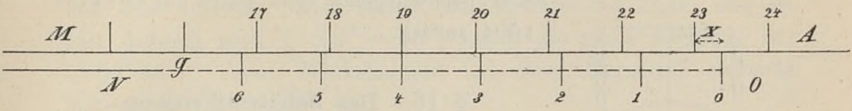
Bei diesem Nonius sind n Teile genau so lang wie $n + 1$ Maſsstabteile. Hat der Teil auf MA die Länge l, derjenige auf NO die Länge l_1, so ist

$$n \cdot l_1 = (n+1)\, l = nl + l,$$

$$l_1 = l + \frac{1}{n} l;$$

d. h. ein Noniusteil ist um $\frac{1}{n}$ eines Maſsstabteiles länger, als dieser. In der Figur sind 10 NO-Teile so lang, wie 11 MA-Teile, also $l_1 = l + \frac{1}{10} l$; die Differenz $a = l_1 - l = \frac{1}{n} l$ ist wieder die

Fig. 29.



Angabe des Nonius. Der Unterschied zwischen p Teilen jeder Teilung ist $pl_1 - pl = p \cdot a$, wie man solches in der Figur rechts von 4 sehen kann.

Beim Gebrauche liegt das eine Ende des zu messenden Gegenstandes g bei Null von MA, das andere Ende bei Null von NO; es ist die Länge von g: $23 + x$; am Nonius ist 4 der Treffstrich, folglich $x = 4 \cdot a$; also ist g lang 23,4.

Hieraus ergiebt sich auch die Anordnung von Maſsstab und Nonius: die Bezifferung läuft in entgegengesetzter Richtung. Wäre das nicht der Fall, so würde man bei der Multiplikation der Treffstrichzahl mit der Angabe nicht das gesuchte Stück von MA, sondern die Ergänzung zu einem Maſsstabteile erhalten.

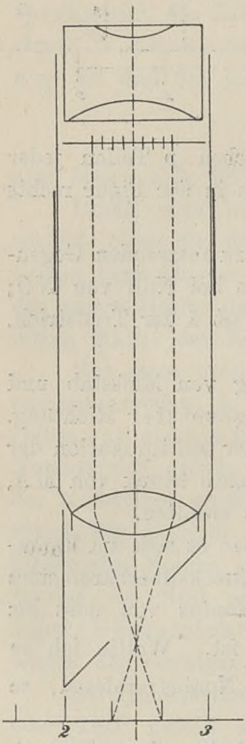
Man wählt den vortragenden Nonius da, wo es sich um Raumersparnis handelt. Soll z. B. die Skala eines Quecksilberbarometers bis 820 reichen, so geht der vortragende Nonius von dort bis 799 zurück, wenn die Angabe $\frac{1}{20} = 0{,}05^{\text{mm}}$ ist. Wollte ich in der Nähe von 820 mit dem nachtragenden Nonius ablesen, so müſste die Skala bis 840 reichen.

Ist die Angabe des Nonius das Vielfache einer Einheit, so ist meist die Multiplikation schon am Nonius angedeutet. Ist z. B. der Kreis nach halben Graden oder 30 Minuten geteilt und die Angabe des Nonius $\frac{1}{15}$ oder 2 Minuten, so trägt der 5. Strich die Zahl 10. Dasselbe geschieht, wenn man statt der Angabe $\frac{1}{20}$ die Hundertel notieren will; am 5. Strich wird die Zahl 25 stehen.

Der Anfänger überzeuge sich von der Schädlichkeit der schrägen Stellung des Auges zu den Teilungen, indem er mit dem Auge bezw. der Lupe langsam darüber hinweggeht. Er wird die Verschiebung der Striche von Maſsstab und Nonius gegen einander wahrnehmen und erkennen, daſs nur bei senkrechtem Draufsehen der richtige Treffstrich gefunden wird.

Der Name Nonius rührt her von dem Portugiesen Pedro Nuñez, Petrus Nonius, der 1542 ein Verfahren zur Messung kleiner Winkel angab. Dasselbe wurde von Peter Werner 1631 verbessert und unter dem Namen Pierre Vernier bekannt gegeben. Die älteste, der heutigen Einrichtung nächstliegende Spur führt auf Clavius 1604 zurück.

Fig. 30.

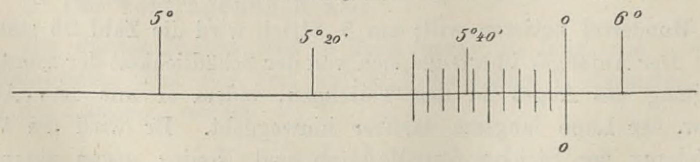


§ 16. Das Schätzmikroskop.

Das Mikroskop ist wie ein astronomisches Fernrohr eingerichtet, das Okular ist gewöhnlich dasjenige von Ramsden. Vor der Kollektivlinse steht ein aus elf parallelen Fäden gebildetes Liniennetz. Das Objektiv ist eine achromatische Linsenverbindung. Die Fassung der Okulargläser läfst sich in der Objektivröhre und diese in einem Ringe gegen den Mafsstab hin verschieben. Das untere Ende der Objektivröhre trägt einen Ring mit lichtzerstreuender Fläche zur Beleuchtung des Mafsstabes, welcher ganze Grade mit mikroskopischen Ziffern und Drittelgrade, also Kreisteile von je 20 Minuten tragen möge.

Die Vergröfserung des Mikroskops ist nun derartig, dafs der Abstand der äufsersten Fäden des Netzes genau gleich einem Kreisteile von 20′ ist. Sollte das nicht zutreffen, so wird nach scharfer Einstellung des Okulars auf das Fadennetz die Objektivröhre passend gegen den Mafsstab verstellt. Durch einen Arm ist das Mikroskop in fester Verbindung mit dem Fernrohre des Winkelmessers und macht mit diesem die Drehung um denselben Winkel mit

Fig. 31.



Bei der Ablesung ist der längste Faden der Nullfaden, er vertritt den Nullstrich des Nonius; bis an denselben wird im Sinne der wachsenden Zahlen gezählt. Da die 11 Fäden 10 Lücken haben, hat jede Lücke im Fadennetze den Wert $\frac{20'}{10} = 2'$; die Schätzung gestattet $0{,}2' = 12''$ Ablesung. In der Figur liest man ab: $5^0\ 40'$, bis zum Nullfaden hat man 6 Lücken, dieselben haben den Wert $12'$. Aufserdem kommt noch das Stück hinzu zwischen dem Striche $5^0\ 40'$ und dem nächsten Faden rechts, man schätzt 0,4 Lücke und erhält dadurch noch $4 \cdot 12'' = 48''$, sodafs die ganze Ablesung ist: $5^0\ 52'\ 48''$. Jeder Winkelmesser hat zwei diametral stehende Mikroskope.

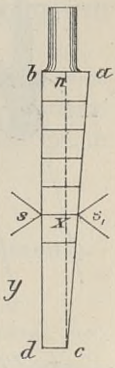
Zur Veranschaulichung und Übung kann man in einen Rahmen 11 parallele Fäden mit beliebigem aber gleichem Abstande spannen, welche genau auf einen Teil des danach angefertigten Mafsstabes passen; der Nullfaden sei von besonderer Farbe.

Die Figur 30 ist absichtlich nicht geändert. Welches wird bei dem eingezeichneten Netze und bei der zugrunde gelegten Kreisteilung der Wert einer Lücke sein und wieviel Sekunden lassen sich schätzen?

Wird die Teilung des Kreises bis auf 6 oder 5 Minuten hergestellt, so genügt unter Umständen ein einziger Schätzstrich.

An den grofsen Winkelmessern hat man Mikroskope mit Mikrometerschraube und Trommelablesung. Der Abstand des Index oder des Ablesepunktes vom letzten Strich der Kreisteilung wird durch eine feine Schraube ermittelt. Die Gröfse ihrer Drehung, die nötig ist, um eine Linie im Gesichtsfelde des Mikroskops vom Teilstrich bis zum Index zu bewegen, wird auf eine Trommel übertragen und dort der zurückgelegte Weg in Sekunden der Kreisteilung abgelesen.

Fig. 32.



Im Anschlufs an das Vorstehende sei der sogen. Mefskeil erwähnt, weil man z. B. auch Fadennetze in Form eines Keils in dem tachymetrischen Fernrohre von Tichy hat. Bei der unmittelbaren Messung einer Basis der Landesvermessung werden die Mefsstangen nicht bis zur Berührung aneinander gelegt, man läfst vielmehr einen kleinen Abstand zwischen je zweien. Die Gröfse desselben mifst man, indem man einen Keil sanft in die Lücke einschiebt. (Fig. 32). Aus der Länge bd, der obern und untern Dicke des Keils und der Strecke y, bis zu welcher er einsinkt, berechnet man die Breite x der Lücke. Da man bis auf halbe Millimeter das Einsinken schätzen kann, so kann man aus der Ähnlichkeit der Dreiecke den Abstand der Latten bis auf Tausendstel Millimeter berechnen.

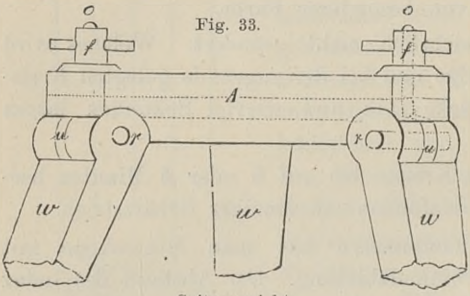
f. Die Unterlagen der Mefsinstrumente.

§ 17. Die feste Unterlage, das Stativ.

Von einem Stativ verlangt man Festigkeit der einzelnen Teile unter sich, Standfestigkeit, leichte Transportfähigkeit und bequeme Aufstellungsweise. Je nach der Gröfse der Instrumente hat man verschiedene Stativformen.

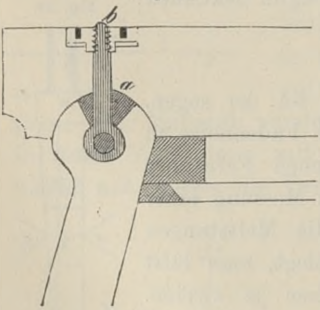
1. Das Scheibenstativ besteht aus dem Kopfe und drei Beinen. Der Kopf ist bei den älteren Formen eine mehr oder weniger dicke cylindrische Scheibe von Holz. Die Mitte ist kreisförmig durchbohrt und an der Unterseite nehmen drei Pfannen die obern abgerundeten Enden der Beine auf. In diese ist eine Scheibe *u* eingelassen und wird durch den Bolzen *r* festgehalten. Die Scheibe läuft nach oben in die Spindel *f* aus, welche durch den Kopf gesteckt mit der Schraubenmutter *o* festgehalten wird. Statt der freiliegenden Muttern hat man jetzt versenkte, um auf dem Kopfe freiern Raum zu haben. (Fig. 33 u. 34). Ein Vorsprung am untern Ende der Beine dient zum Eintreten des eisernen Schuhes.

Fig. 33.



Seitenansicht.

Fig. 34.



Durchschnitt.

Mit Rücksicht auf die Haltbarkeit hat man heutzutage die hölzernen Köpfe vielfach durch Platten von Eisen oder Messing ersetzt. Die Beine sind nicht mehr massiv, sondern bestehen aus zwei Backen, wie aus späteren Abbildungen zu ersehen ist. Die Öffnung in der Kopfplatte ermöglicht eine Verschiebung des Instrumentes um mehrere Centimeter, was für die Centrierung angenehm ist. Metallene Platte und durchbrochene Beine verhüten eine Drehung des Stativs infolge einseitiger Erwärmung durch die Sonne.

Auf dem Stativkopfe für Nivellierinstrumente hat man wohl zur Beschleunigung der Arbeit eine Dosenlibelle von geringer Empfindlichkeit angebracht. Ist der Ort für grobe Horizontalstellung der Kopfplatte ungünstig, ist also das Eintreten der Stativlinie notwendig und schwierig, so sind die Stative am Platze, deren Beine verlängert und verkürzt werden können, oder diejenigen, welche zur Aufnahme des Instrumentes eine zweite Kopfplatte tragen, die sich durch Stellschrauben von grofser Ganghöhe schnell horizontieren läfst. Für das Aufstellen dieser Stative, wenn es sich nicht um Centrieren handelt, merke man sich als Regel: zwei Beine trete man fest ein, darauf wird nur das dritte Bein zum Einstellen der Dosenlibelle benutzt.

Bleiben Instrumente auch beim Stationswechsel auf dem Stative, so empfiehlt es sich, an einem Stativbeine unterseits ein aufklappbares Tragstück zu befestigen, welches sich mit einer Wölbung bequem der Schulter anschliefst.

2. Das Zapfenstativ gehört zu den leichtern Instrumenten. Statt der auf den Beinen ruhenden Kopfplatte haben wir hier einen unten prismatischen Kopf, an dessen Seitenflächen die drei Beine durch Flügelmuttern gehalten werden. Das Prisma setzt sich nach oben als Cylinder fort, welcher einen abgestumpften Kegel zur Aufnahme des Instrumentes trägt. Statt des Kegels, auf welchem das Instrument durch eine Bremsschraube befestigt wird, hat man auch wohl eine Schraube oder Schraubenmutter zur Befestigung. Die genaue Centrierung, sofern dieselbe von Wichtigkeit ist, kann nur durch das ganze Stativ geschehen, weil eine Verschiebung des Instrumentes ausgeschlossen ist.

3. Das Stockstativ besteht aus einem Stabe, welcher oben eine Vorrichtung: abgestumpften Kegel oder Loch oder Schraube zur Befestigung des Instrumentes und unten einen eisernen Schuh zum Einstecken in die Erde trägt.

§ 18. Unterlagen zum Horizontalstellen der Instrumente.

1. Der Dreifufs.

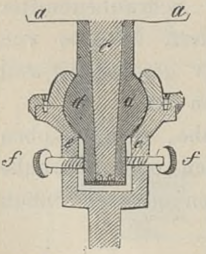
Derselbe ist meist mit dem eigentlichen Mefsinstrumente fest verbunden, bei einigen ist er frei und man kann ihn beim Wechseln der Stationen auf dem Stativ belassen. Er besteht aus einem Mittelstücke und drei Armen, durch deren Enden die als Füfse dienenden Fufs- oder Stellschrauben hindurchgehen. Das Mittelstück ist entweder ein massiver abgestumpfter Kegel, welcher als Achse für die aufzusteckende Büchse des Instruments dient, oder es ist ein kegelförmig ausgebohrter Cylinder, der die Achse des Instruments aufnimmt. Die Wände von Achse und Büchse sind so geneigt, dafs zwischen ihnen nur oben und unten Reibung stattfindet; siehe Fig. 36 und 67. Die mit dem Kopfe aufwärts oder abwärts gerichteten Fufsschrauben tragen meist an einem Kugelgelenk Unterlageplatten. Die Muttern der Fufsschrauben sind aufgeschlitzt und können durch Prefsschrauben enger gestellt werden.

Zur Befestigung des Dreifufses auf dem Stativ ist das untere Ende des Mittelstücks mit einer Schraubenspindel oder einer Öse versehen. Auf die Schraubenspindel wird die durch den Stativkopf gehende Centralstange geschraubt, in die Öse der Stengelhaken eingehängt. Der Haken am untern Ende der Centralstange dient zum Einhängen des Lotes; durch Spannen einer Spiralfeder wird der Dreifufs fest auf den Stativkopf gedrückt. Die Centralstange bildet immer die Verlängerung der Instrumentenachse, weshalb das Einloten der Achse auf einen Punkt und das Horizontalstellen mit der Libelle Hand in Hand gehen mufs.

2. Die Nufsvorrichtung.

Dieselbe vertritt bei kleinen Instrumenten den Dreifufs. Die Achse *c*, welche die Ebene *aa* des Instruments trägt, ist von einer Kugel *dd* umschlossen; diese setzt sich nach oben in einen Cylinder fort und trägt unten ein drei- oder vierseitiges Prisma. Das Lager der Nufs wird gebildet von einer kugelförmig ausgedrehten Höhlung des Cylinders *ee* und den ebenso geformten aufgeschraubten Hülsen. Beim vierseitigen Prisma wirken gegen die Seitenflächen entweder zwei Schrauben und diesen gegenüber zwei Spiralfedern oder vier Stellschrauben *ff*. In letzterm Falle ist beim Horizontalstellen die eine Schraube zu lockern, während die gegenüberstehende angezogen wird; beim dreiseitigen Prisma hat man zwei Schrauben und eine Spiralfeder. Die Stellschrauben können auch auf derselben Seite mit *aa*, also oberhalb der Nufs stehen.

Fig. 35.

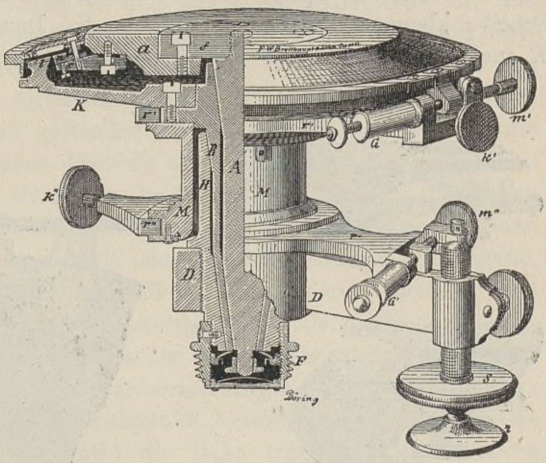


g. Mittel zur Hemmung der groben und zur Ausführung der feinen Achsendrehungen.

§ 19. Der geschlossene Ring mit der Bremsschraube.

Die festzustellende Achse B ist in fester Verbindung mit dem Mantel MM; um den Mantel legt sich der geschlossene Ring r'', links befindet sich am Ringe ein Ansatz, durch welchen die Bremsschraube k'' geht, rechts ist der Ring zu einem Scheibenstücke erweitert, welches zwei Ansätze trägt. Durch den einen derselben geht die Mikrometerschraube m'', durch den andern geht ein Stift, welcher durch eine Spiralfeder in der Hülse G' der Schraube m'' entgegengedrückt wird. Zwischen den Enden der Schraube und des Stiftes steht fest auf dem Dreifuſsarme D ein Zapfen. Wird die Bremsschraube angezogen, so wird der Mantel M und damit die Achse B durch Reibung mit dem Ringe verbunden und beide werden durch den Zapfen am Dreifuſse festgehalten. Zieht man nun die Schraube m'' an, so muſs ihre Mutter und zugleich Ring und Mantel sich nach dem Kopfe von m'' bewegen; dreht man m'' linksum, so zieht die Feder in G' den Ring nach der entgegengesetzten Richtung, so daſs eine Bewegung des Mantels rechtsum eintritt.

Fig. 36.



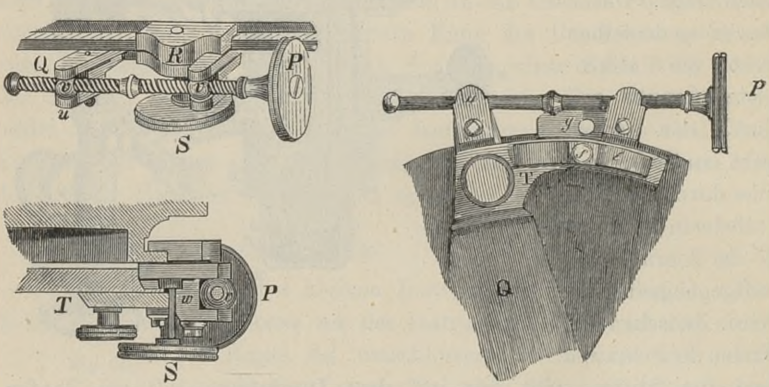
Der Klemmring mit der Klemmschraube ist im wesentlichen dasselbe, was der geschlossene Ring ist, nur ist derselbe an einer Stelle, etwa da, wo die Bremsschraube sitzt, aufgeschnitten und die beiden Enden sind mit Ansätzen versehen, durch welche eine Zugschraube hindurchgeht. Der Ring ist federnd und legt sich so lose um die Achse, daſs dieselbe ohne Mühe gedreht werden kann; wird jedoch die Schraube angezogen, so kommen die Ringteile mit der

Achse in Berührung, und infolge der auftretenden Reibung ist eine weitere grobe Drehung unmöglich. Die übrige Einrichtung zur feinen Bewegung kann wie beim geschlossenen Ringe beschaffen sein.

§ 20. **Die Klemmplatten mit der Klemmschraube.**

Die an der Achse befindliche Scheibe bewegt sich zwischen zwei Platten R hindurch, von denen die untere einen Vorsprung und gegenüber ein Ansatzstück hat zur Aufnahme der kugelförmigen Mutter v. Beide Platten lassen sich gegen die zwischenliegende Scheibe klemmen durch die Schraube S. Damit nun die Platten R und die Schrauben S und P sich nicht mit der Scheibe mit-

Fig. 37.



bewegen können, mufs alles mit dem feststehenden Dreifufse verbunden werden. Dies geschieht durch einen Arm Q, welcher ebenfalls eine kugelförmige Mutter v trägt. Durch beide Muttern vv geht die Mikrometerschraube P; wird diese bei angezogener Schraube S gedreht, so tritt eine feine Bewegung ein. Die Muttern vv sind kugelförmig und können sich um vertikale Stifte in ihren Lagern drehen, was notwendig ist, weil die Spindel von P bei der kreisförmigen Bewegung der Scheibe ihre Richtung ändert. Die Schraube P ist eine einfache Mikrometer- oder Differenzialschraube.

Die Hemmvorrichtungen sind in ihren Einzelheiten je nach Bau und Zweck des Instruments verschieden, aber leicht als eine der genannten zu erkennen.

B. Mittel zur Bezeichnung der Meſspunkte.

§ 21. Signale.

Um Punkte während der Messung weithin sichtbar zu machen, bedient man sich der Absteckstäbe, Fluchtstäbe oder Baken; sie sind meist rund, 3 cm und mehr dick und bis 3 m lang. Sie werden aus gut getrockneten Fichtenstangen angefertigt, von halben zu halben Metern oder in viertel Metern weiſs und rot oder weiſs und schwarz angestrichen, so daſs das obere Ende weiſs ist, und sind unten mit eisernen Spitzen beschlagen. Zum leichteren Auffinden steckt man oben eine Fahne auf. Soll ein Meſspunkt von verschiedenen Seiten anvisiert werden, so muſs die Signalstange auf dem als Scheitel geltenden Punkte des Pfahles oder Steines stehen, was durch einen Dreifuſs oder durch zwei Hilfsbaken und Doppelringe bewirkt wird. In Drainröhren halten sich die Baken ohne Dreifuſs. Die senkrechte Stellung des Stabes erzielt man durch das Lot oder die Libelle oder durch cardanische Aufhängung.

Um Punkte in bestimmter Höhe anzuvisieren, benutzt man Scheiben, welche an Pfählen befestigt sind oder sich an Signalstangen verschieben lassen. Nachts und in Bergwerken verwendet man Feuersignale, bei den Landesvermessungen polierte Metallbolzen, welche den oberirdischen Meſspunkt bezeichnen, oder vierseitige Pyramiden, welche als Spitze die Bake tragen. Als natürliche Signale sind Turmspitzen, Schornsteine, Blitzableiter, Mauerkanten zu nennen.

Die Vermessungszeichen sind gesetzlich geschützt durch das Feld- und Forstpolizeigesetz vom 1. April 1880; die bezügliche Bestimmung des § 30 lautet:

„Mit Geldstrafe bis zu einhundertundfünfzig Mark oder mit Haft wird bestraft, wer unbefugt ...... 3. abgesehen von den Fällen des § 274 Nr. 2 des Strafgesetzbuches, Steine, Pfähle, Tafeln, Stroh- und Hegewische, Hügel, Gräben oder ähnliche zur Abgrenzung, Absperrung oder Vermessung von Grundstücken oder Wegen dienende Mark- oder Warnungszeichen, desgleichen Merkmale, die zur Bezeichnung eines Wasserstandes bestimmt sind, sowie Wegweiser fortnimmt, vernichtet, umwirft, beschädigt oder unkenntlich macht.“

§ 22. Das Heliotrop.

Das Heliotrop (ἥλιος, Sonne und τρέπω, ich wende) ist eine Vorrichtung, welche auf sehr grofse Entfernungen dem Beobachter den Punkt kennzeichnen soll, welchen er anzuvisieren hat. Man benutzt dabei zugewandtes Sonnenlicht. Das einfachste Heliotrop ist dasjenige von Bertram. (Fig. 38). Es besteht aus einem hölzernen Brette AA, welches auf der Stellschraube b und zwei Füfsen a links ruht; das Centrum der Station wird durch einen Metallbolzen bezeichnet, auf den sich die Leuchtachse D schrauben läfst; über die Leuchtachse setzt man das Brett, welches sich in horizontaler Richtung um die Leuchtachse drehen und durch die Stellschraube heben und senken läfst. An dem einen Ende trägt das Brett die Achse d mit dem Fadenkreuze und dem Rohre e, an dem andern Ende einen Spiegel, der um eine horizontale und vertikale Achse drehbar ist; in der Mitte des Spiegels, im Schnittpunkte beider Achsen, befindet sich ein kleines Loch. Zubehör ist der Hilfsspiegel und das Blendglas h'' im Rahmen H; zwei Stifte J dienen dazu, auf der Unterlage zwei Punkte zu bemerken, welche nach etwaiger Unterbrechung der Arbeit die neue Aufstellung erleichtern.

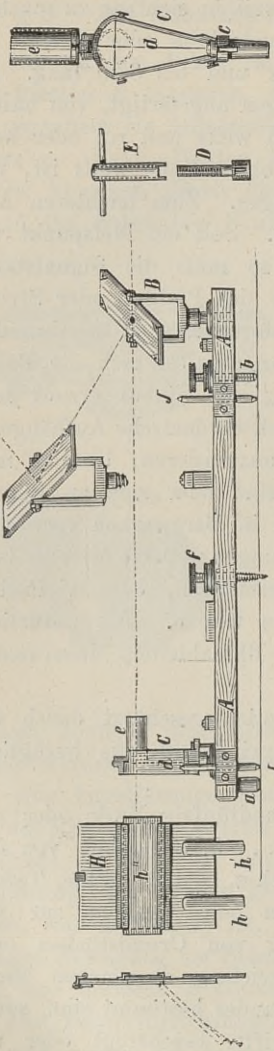


Fig. 38.

Beim Gebrauch stellt sich nach Befestigung der Leuchtachse der Beobachter hinter dem Spiegel auf, sieht durch das Loch des Spiegels über das Fadenkreuz hin und dreht das Brett, hebt und senkt es, bis die Visierlinie auf die Station gerichtet ist, welcher das Licht zugeworfen werden soll. Der Spiegel mufs darauf so gedreht werden, dafs das Sonnenlicht in der Richtung der Visierlinie reflektiert wird. Um dies zu erkennen, kippt man das Rohr *e* vor das Fadenkreuz, dann mufs der Boden des Rohres beleuchtet sein bis auf einen Punkt, welcher dem Loche des Spiegels entspricht; diese dunkle Stelle mufs im Kreuzpunkte der Fäden liegen. Sobald dieses der Fall ist, kippt man das Rohr auf. Das Fortrücken der Sonne erfordert neue Einstellungen des Spiegels. Die Leuchtachse mufs hoch genug über das Brett emporragen.

Besonders fein braucht der Spiegel nicht zu sein; etwas diffuses Licht erleichtert die Auffindung. Als beste Beobachtungszeit sind die letzten Stunden vor Sonnenuntergang zu betrachten. Durch zeitweises Verdecken des Spiegels läfst sich eine Zeichensprache, Heliographie, verabreden.

Erfinder des Heliotrop ist C. F. Gaufs 1821. Das im Solling häufiger beobachtete sogen. Brockenglühen ist nichts anderes als Sonnenlicht, welches von den Fenstern des Brockenhauses reflektiert wird. Unter günstigen Umständen hat Gaufs das Heliotropenlicht noch auf 9,3 deutsche Meilen mit dem blofsen Auge gesehen, auf 14,2 Meilen mit dem Fernrohre scharf anvisiert. Bei der Gradmessung am Kap hat man auf 150 km und bei der geodätischen Verbindung von Spanien und Algier 1879 unter Anwendung von elektrischem Lichte auf 270 km mit dem Heliotrop signalisiert.

Sollte mit dem Heliotrop von Steinheil jemand zu arbeiten haben, der kurzsichtig ist und eine Brille trägt, so möge er sich nicht täuschen lassen durch das Sonnenbild, welches durch die konkave Linse der Brille entsteht.

C. Instrumente zum Abstecken und Messen von Winkeln.

a. Instrumente für konstante Winkel.

§ 23. Die Diopter im allgemeinen.

Die Diopter dienen wie das Fadenkreuz im Fernrohre zur Festlegung der Visierlinie; es sind also zwei feste Punkte erforderlich. Diese liegen in dem Okular- und Objektivdiopter. Das erstere ist eine Metallplatte mit einem engen Schauloch oder einer feinen Schauritze; das letztere eine gleiche Platte mit einer gröfseren Öffnung, in welcher ein Fadenkreuz steht, oder mit einem breiteren Spalt, in welchem ein Haar oder Metallfaden ausgespannt ist. Gewöhnlich sind beide Platten als Okular und Objektiv eingerichtet. Die Absehlinien liegen in derselben Ebene übereinander, so dafs man vor- und rückwärts visieren kann, wenn die Diopter durch ein Lineal fest miteinander verbunden sind. Der Durchmesser des Schauloches soll nicht kleiner als $\frac{3}{4}$ und nicht gröfser als 1^{mm}, die Schauritze nicht schmäler als 0,4 und nicht breiter als $0{,}75^{mm}$ sein.

Hat man Schauritze und Objektivfaden, so sollen beide die Visierebene bestimmen; diese mufs senkrecht zur Grundfläche des Lineals sein. Die beiden Linien dürfen nicht windschief sein. Um ein solches Diopter in dieser Beziehung zu prüfen, hängt man an einer weifsen Wand ein Lot auf, richtet das in einiger Entfernung mit einer Libelle wagerecht gestellte Diopter auf den Faden und sieht nach, ob Schauritze und Objektivfaden in ihrer ganzen Länge sich mit dem Lotfaden decken.

Die Ungenauigkeit der Diopter rührt daher, dafs der Beobachter sein Auge nicht der geringen Entfernung des Objektivfadens und der gröfsern Entfernung des anzuvisierenden Punktes gleichzeitig anpassen und dadurch die Bilder auf der Netzhaut zur Deckung bringen kann. Hierauf gründet sich auch die Unsicherheit im Schiefsen bei Weitsichtigen. Der schädliche Einflufs der sogen. Beugung des Lichtes ist bei obiger Gröfse der Spalten nicht zu fürchten.

Röhrendiopter, bei denen sich Okular und Objektiv an den Enden einer inwendig geschwärzten Röhre befinden, sind den offenen Diopteren vorzuziehen. Auf Fernröhren hat man wohl Diopter zum Aufsuchen des anzuvisierenden Punktes.

Erfinder des Diopter (*διά*, durch und *ὁ ὀπτήρ*, der Seher) ist Heron von Alexandrien 100 v. Chr.

§ 24. Das Winkelkreuz.

In der einfachsten Form besteht das Winkelkreuz aus einer kreisförmigen Scheibe, welche in ihrem Mittelpunkte auf einem Stocke befestigt ist und auf der oberen Fläche an den Enden zweier senkrecht zu einander stehenden Durchmesser vier Stifte trägt. Die Scheibe kann man durch ein Kreuz und die Stifte durch Diopter ersetzen. Die Stifte oder die Diopter gewähren zwei senkrecht zu einander stehende Absehlinien.

Man wendet das Winkelkreuz an, um zu einer Geraden in einem Punkte derselben das Lot zu errichten und um von einem Punkte aufserhalb einer Geraden auf diese das Lot zu fällen. Bei der ersten Arbeit stellt man das Instrument im Punkte C der Geraden AB auf, bringt die eine Visierlinie in die Richtung AB

und winkt in der Richtung der anderen einen Stab, der von Gehilfen lotrecht schwebend zwischen den Fingern gehalten wird, ein. Bei der zweiten Arbeit geht man mit der einen Visierlinie so lange in AB fort, bis der Stab D in der der anderen erscheint. Es läſst sich ferner mit dem Kreuz ein Punkt in einer abgesteckten Geraden einschalten, und wenn die Diopterarme gleich lang sind, lassen sich auch Winkel von 45^0 abstecken.

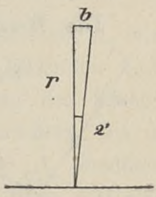
Zur Prüfung des Kreuzes läſst man in jeder der beiden Visierlinien nach vorwärts und rückwärts oder in derselben Richtung je einen Stab aufstellen, dreht das Kreuz um 90^0 und überzeugt sich, ob die Stäbe wieder in den Diopterlinien erscheinen. Ist das der Fall, so sind die Nebenwinkel gleich, d. h. jeder ein rechter Winkel.

Das Winkelkreuz war den Egyptern schon lange vor Heron bekannt; sie bildeten die Visierlinie durch herabhängende Lote.

§ 25. Die Winkeltrommel oder der Winkelkopf.

Die Einrichtung beruht auf derjenigen des Winkelkreuzes. Die Diopter sind in dem Mantel eines von der Seite und meist auch von oben geschlossenen Gehäuses angebracht, welches eine konische oder cylindrische oder prismatische Form hat. Die Diopter gestatten Visierlinien, welche sich unter Winkeln von 90^0 oder auch 45^0 schneiden. Jedes Diopter enthält zugleich Schauritze und Objektivfaden, oder beide Diopter sind Spalten, welche nach J o r d a n am besten $0{,}5^{\text{mm}}$ breit sind. Die Trommel ist unten mit einer Hülse zum Aufstecken auf ein Stockstativ versehen. Die Trommel von konischer Form hat den Vorzug, ein gröſseres Gesichtsfeld in der Vertikalebene zu ermöglichen, sie ist deshalb in unebenem Gelände allgemeiner verwendbar. Auf geeignetem Terrain muſs jedoch die Grundebene w a g e r e c h t sein, um sicher als Horizontalprojektion einen Winkel von 90^0 zu erhalten. Auf dem obern Boden der Trommel hat man wohl einen Orientierungskompaſs; auch kann man auf dem Rande der Grundfläche einen geteilten Kreisring anbringen, um mit der drehbaren Trommel Winkel von beliebiger Gröſse zn messen und abzustecken.

Fig. 39.



Von dem Gebrauch und der Prüfung gilt das vom Winkelkreuz und den Dioptern Gesagte.

Der mittlere Zielfehler bei der Winkeltrommel ist nach J o r d a n etwa 2 Minuten. Die dadurch verursachte Abweichung ist bei der Entfernung r durch

$$b = \frac{2'}{3438'} \cdot r^{\mathrm{m}}$$

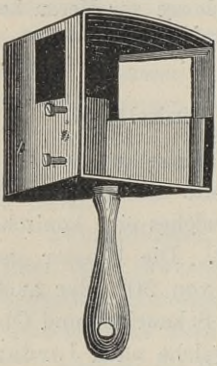
zu finden.

§ 26. Der Winkelspiegel.

Derselbe hat den grofsen Vorteil, dafs er kein Stativ erfordert, und einen rechten Winkel durch einmaliges Visieren liefert. Ein Stockstativ oder Lotstab mit schwerer Spitze ist zu empfehlen.

In einem vorne offenen Messinggehäuse befinden sich zwei ebene Spiegel, welche senkrecht zur Grundplatte stehen und einen Winkel von 45^0 mit einander bilden. Der eine Spiegel ist fest mit dem Gehäuse verbunden, der andere ist durch eine Zugschraube und durch eine oder zwei Druckschrauben verstellbar, so dafs der Winkel der spiegelnden Ebenen sich ändern läfst. Ebenso bequem ist die Vorrichtung, bei welcher beide Spiegel fest auf einem Streifen Stahlband sitzen, welcher durch die federnde Kraft die Spiegel an das Gehäuse drückt. Die Berichtignng geschieht durch Anziehen oder Lösen einer einzigen Zugschraube. Über den Spiegeln hat das Gehäuse zwei fensterartige Öffnungen und unterhalb einen Handgriff, an dem ein Lot angehängt werden kann. Notwendig ist der obere Teil des Gehäuses nicht.

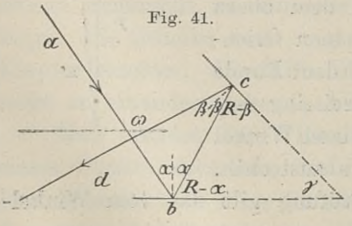
Fig. 40.



Der Winkelspiegel ist um die Mitte des vorigen Jahrhunderts von George Adams in London erfunden und von dessen Sohne 1791 zuerst beschrieben.

Die Brauchbarkeit des Winkelspiegels gründet sich auf das Reflexionsgesetz. (Fig. 41). Macht der Lichtstrahl a infolge der Spiegelung bei b und c den Weg $abcd$, so ist ω der Winkel, um welchen der eintretende Lichtstrahl von der ursprünglichen Richtung a abgelenkt wird. Der Winkel ω steht in einem bestimmten Verhältnis zu dem Winkel γ der spiegelnden Ebenen. Es ist nach dem Satze vom Aufsenwinkel

Fig. 41.



$$\omega = 2\alpha + 2\beta$$

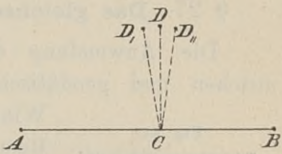
$$90^0 + \alpha = \gamma + 90^0 - \beta \quad \text{oder} \quad \alpha = \gamma - \beta, \quad \text{also}$$

$$\omega = 2\gamma.$$

Soll demnach $\omega = 90^0$ werden, so mufs $\gamma = 45^0$ sein; für $\omega = 45^0$ müfste $\gamma = 22{,}5^0$ sein.

Um den Spiegel zu prüfen, visiert man sein Stativ im Punkte C der Geraden AB ein und steckt den Winkel ACD_1 ab; nun dreht man den Spiegel mit der Öffnung nach B und steckt BCD_2 ab. (Fig. 42). Fallen D_1 und D_2 zusammen, so sind die beiden Nebenwinkel gleich und der Spiegel ist richtig. Erhält man zwei getrennte Punkte D_1 und D_2, so steckt man einen Stab in ihrer Mitte D ein und stellt den beweglichen Spiegel so, dafs das Instrument von beiden Seiten den Schenkel CD giebt.

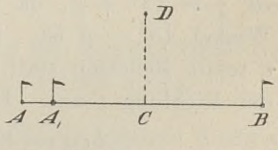
Fig. 42.



Bezeichnet man die Punkte A und B durch Lote, welche von schräg eingestofsenen Baken herabhängen, so kann man sich zugleich überzeugen, ob die Bilder unverzerrt sind und die Spiegelebenen sich lotrecht zur Bodenplatte schneiden.

Erfüllt der Winkelspiegel die Bedingung $\gamma = 45^0$ und soll im Punkte C der Geraden AB das Lot errichtet werden, so schaltet man zunächst A_1 ein und stellt sich mit dem Spiegel über C auf. Man kehrt nun die Öffnung nach A_1 und sieht vorn in der Richtung dc in das Gehäuse, (Fig. 41), nicht etwa durch das Fenster. Decken sich die Signale A_1 und A im gegenüberstehenden Spiegel, so ist der Scheitel von ω in der Geraden AB. Nun sieht man über den Spiegel weg und winkt den Stab D so ein, dafs er die Verlängerung des Bildes von A_1 wird.

Fig. 43.



Soll der Fufspunkt des von D auf AB zu fällenden Lotes gesucht werden, so schreitet man mit der Öffnung des Spiegels nach D in der Linie BA nach A_1 hin solange vorwärts, bis das Bild von D unter dem direkt gesehenen Signale A_1 erscheint. Ebenso kann man „links oder rechts schliefst euch“ über AB einen Kreisbogen abstecken.

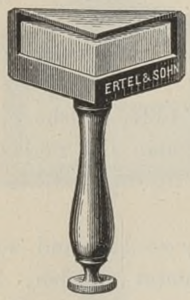
Das Fällen des Lotes kommt meist vor, wenn es sich um Streckenmessung in der Richtung AB handelt. Es ist dann auch die Länge von CD zu ermitteln. Benutzt man hierzu ein Mefsband, so kann man den Fufspunkt C dadurch finden, dafs man mit dem Bande um D einen Kreis beschreibt und dabei das in der Richtung AB liegende Stahlband als Tangente betrachtet. Nötigenfalls kann die genaue Festlegung von C nachher mit dem Winkelspiegel erfolgen.

Die Signalstangen müssen lotrecht stehen und gehalten werden, um leicht und sicher mit dem Spiegel arbeiten zu können. Seine Genauigkeit beträgt nach Jordan etwa zwei Minuten.

§ 27. Das gleichschenklig rechtwinklige Glasprisma.

Die Anwendung der Glasprismen als Spiegel an astronomischen und geodätischen Instrumenten ist alt; als selbständige Winkelinstrumente sind die Prismen durch Bauernfeind 1851 in die Mefskunde eingeführt. Wir beschränken uns hier auf das gleichschenklig rechtwinklige Prisma und erinnern an das in § 11 Gesagte. Das in Fig. 44 abgebildete Prisma kostet 11 Mk.

Fig. 44.



I. Der im Innern des Prisma **ein**mal, an der Hypotenuse, reflektierte Lichtstrahl.

Das rechtwinklig gleichschenklige Dreieck der Fig. 45 sei der senkrecht zu den Seitenkanten des Prisma gelegte Querschnitt. Der unter dem $\sphericalangle\, \alpha$ auf die Kathetenfläche treffende Lichtstrahl a wird zum Einfallslote gebrochen und gelangt nach c. Der Einfallswinkel ist $\gamma = 45^0 + \beta$, da der neben γ an der Hypotenuse liegende Winkel $45^0 - \beta$ ist. Es ist also $\gamma > 41^0\, 48'$, deshalb findet bei c totale Reflexion statt. Der Lichtstrahl geht nach d und tritt in der Richtung f aus. Es ist

$$\sphericalangle\, bcp = 45^0 - \beta = \sphericalangle\, dcn = 45^0 - \beta_1,$$

folglich

$$\sphericalangle\, \beta = \sphericalangle\, \beta_1,$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1}$$

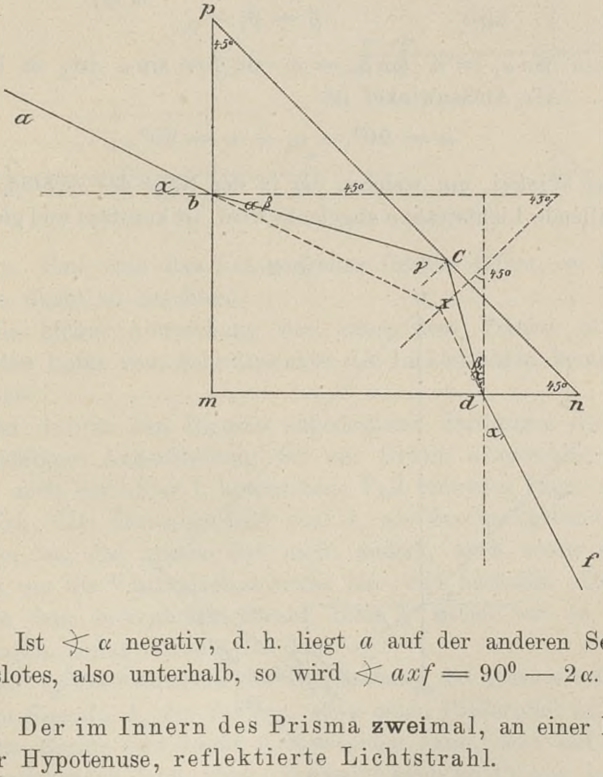
$$\sin \alpha = \sin \alpha_1 \quad \text{oder} \quad \alpha = \alpha_1 .$$

Nach dem Satze vom Aufsenwinkel ist der Winkel $axf = 45^0 + \alpha + 45^0 + \alpha_1 = 90^0 + 2\alpha$; d. h. der Winkel, um welchen der eintretende Strahl von seiner Richtung abgelenkt wird, oder der Winkel, welchen eintretender und austretender Strahl mit einander bilden, ist $90^0 + 2\alpha$.

1. Ist $\sphericalangle \alpha = 0$, fällt also a unter 90^0 auf, so ist der Ablenkungswinkel an der Hypotenuse, bis zu welcher er ungebrochen durchgeht, 90^0; es ist $a \perp f$.

2. Ist $\sphericalangle a = 45^0$, so wird $\sphericalangle axf = 180^0$, d. h. der parallel zur Hypotenuse auf die Kathetenfläche auftreffende Lichtstrahl tritt parallel zur Hypotenuse aus.

Fig. 45.



3. Ist $\sphericalangle \alpha$ negativ, d. h. liegt a auf der anderen Seite des Einfallslotes, also unterhalb, so wird $\sphericalangle axf = 90^0 - 2\alpha$.

II. Der im Innern des Prisma **zwei**mal, an einer Kathete und der Hypotenuse, reflektierte Lichtstrahl.

Der Lichtstrahl unter I. erreicht nach der ersten Brechung die Hypotenuse in c; fällt dagegen der Strahl in der Nähe des rechten Winkels m auf die Kathete, so wird er zunächst die andere Kathete treffen. Er möge fast parallel zur Hypothenuse, also $\sphericalangle \alpha$ fast 45^0 oder etwas kleiner sein. Es wird dann $\beta < 45^0$, also $\gamma > 41^0\,48'$ sein, folglich mufs bei Punkt c totale Reflexion stattfinden. Von c geht der Lichtstrahl nach d und wird dort, weil die Hypotenusenfläche mit Folie belegt ist, ebenfalls reflektiert nach f, wo er unter $\sphericalangle \alpha_1$ austritt. (Fig. 46).

Der Belag an der Hypotenuse ist nicht unbedingt nötig, aber zur Erlangung hellerer Bilder zweckmäfsig.

Im Dreieck cdn ist: $\beta + \eta + 90^0 + 45^0 = 180^0$,

also $\eta = 45^0 - \beta$;

im Dreieck cdf ist: $\beta + 2\eta + 90^0 + \beta_1 = 180^0$

$$\beta + 2(45^0 - \beta) + \beta_1 = 90^0$$

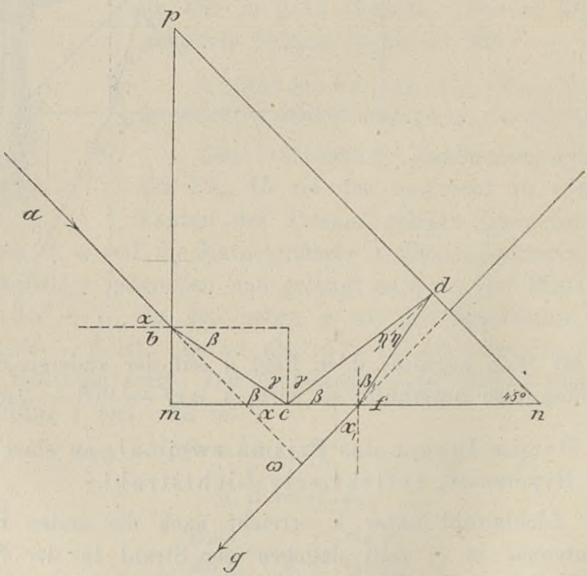
also $\beta = \beta_1$.

Weil nun $\sin\alpha_1 = n \cdot \sin\beta_1 = n \cdot \sin\beta = \sin\alpha$ ist, so ist auch $\alpha = \alpha_1$. Als Aufsenwinkel ist

$$\omega = 90^0 - \alpha_1 + \alpha = 90^0,$$

d. h. der Winkel, um welchen der in der Nähe des rechten Winkels m auffallende Lichtstrahl a abgelenkt wird, ist konstant und gleich 90^0.

Fig. 46.



Hierauf beruht die Anwendbarkeit des nach den obigen Formeln gleichschenklig rechtwinkligen Glasprisma zum Abstecken eines rechten Winkels.

Soll in C das Lot zu AB errichtet werden, so stellt man sich über C auf und winkt dem Stab D, über das Prisma hinwegsehend, in der Richtung des von A_1 ausgehenden, im Prisma zweimal gebrochenen und zweimal reflektierten, Lichtstrahles ein. Hält man die Hypotenuse nahezu parallel der Geraden AB in Fig. 47, so hat man das Bild von A_1 in der Nähe des spitzen Winkels zu suchen. Steht die Hypotenuse nahezu senkrecht zu AB in Fig. 48, so mufs man in der Nähe des rechten Winkels hinein-

Fig. 47.

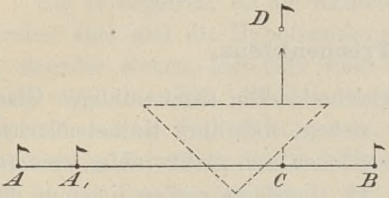
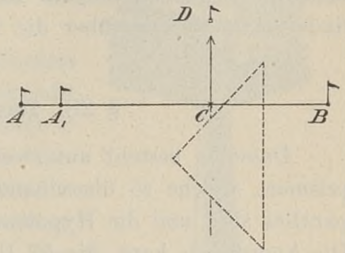


Fig. 48.



schauen. Soll man das Lot auf eine Gerade fällen, so hat man dieselbe Regel zu beachten.

Die kleine Abweichung des unter dem Prisma etwa eingehängten Lotes vom Schnittpunkte der Lichtstrahlen kommt nicht inbetracht.

Bei den in den Figuren angedeuteten Stellungen des Prisma und richtiger Augenstellung ist ein Irrtum ausgeschlossen. Da jedoch auch der unter I. besprochene Fall eintreten kann, so merke man sich, dafs dasjenige Bild von A_1 als das mafsgebende zu betrachten ist, das seinen Ort nicht ändert, auch wenn man das Prisma um die Vertikalachse etwas hin- und herdreht. Im Gegensatz zu dem beweglichen Strahl unter I. haben wir es hier mit dem sogen. festen Strahle zu thun.

Zur ersten Übung in der Handhabung des Prisma bringe man an dem Signale A_1 ein Zeichen, etwa einen Papierpfeil an, an dem man ein Rechts und Links unterscheiden kann, oder auf welchem Schriftzeichen zu lesen sind. Erscheint auch im Prisma das Rechts wieder rechts und ist die Schrift lesbar, so ist das richtige Bild gewählt.

Die Prüfung geschieht wie beim Winkelspiegel; einmal richtig, bleibt das Prisma richtig.

Da beim Gebrauche des Prisma mindestens ein Schenkel horizontal sein mufs, so ist es in unebenem Gelände nicht immer verwendbar.

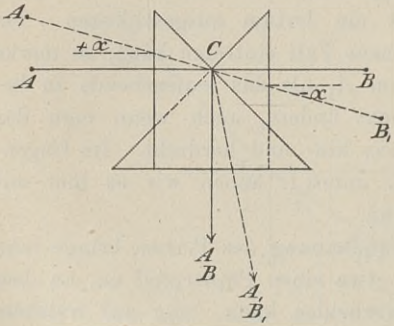
Die besprochenen Instrumente: Winkelkopf, Winkelspiegel und Prisma müssen nach Anw. VIII. § 81 benutzt werden, wenn die rechtwinkligen Abstände zur Bestimmung von Grenzen dienen und über 5 m lang sind, im übrigen bei Längen von 10 m und darüber. Sind aber die Abstände über 40 m lang, so mufs ihre Lage noch anderweit sicher gestellt werden, etwa durch Messung einer in der Mefslinie liegenden längern Kathete und der Hypotenuse. Ebenda findet man Näheres über die Länge der Lote bei Parzellengrenzen.

§ 28. **Das Prismenkreuz.**

Dasselbe besteht aus zwei gleichschenklig rechtwinkligen Glasprismen, welche so übereinander stehen, dafs ihre Kathetenflächen parallel sind und die Hypotenusenflächen sich rechtwinklig kreuzen. Die Anordnung kann die in Fig. 49 angedeutete oder diejenige der Fig. 50 sein. Die beiden an der ganz offenen Seite des Gehäuses in einer Ebene liegenden Kathetenflächen bilden die Okularebene. Seitwärts ist das Gehäuse nur je für eine Kathetenfläche offen.

Es soll das Prismenkreuz dazu dienen, in der Geraden zweier nicht zugänglicher oder gegenseitig nicht anvisierbarer Punkte einen Punkt einzuschalten, also einen Winkel von 180^0 abzustecken.

Fig. 49.

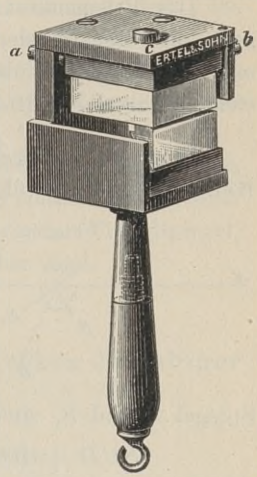


Die Theorie gründet sich auf die Betrachtung des vorigen Paragraphen und im Falle der Fig. 49 zugleich auf das unten über das Spiegelkreuz Gesagte. Der Ablenkungswinkel des im Innern an der Hypotenuse einmal reflektierten Lichtstrahls ist $90^0 + 2\alpha$. Ist für beide Strahlen von A und B $\alpha = 0$, so liegt im Punkte C links und rechts ein Winkel von 90^0. Dreht man beide Prismen um die Vertikalaxe, so dafs der Lichtstrahl von A_1 unter dem Winkel $+ \alpha$ und der Strahl von B_1 unter $- \alpha$ auftrifft, so ist die Summe beider Ablenkungswinkel $90^0 + 2\alpha + 90^0 - 2\alpha = 180^0$.

In der Fig. 51 haben wir in jedem Prisma den festen Strahl vor uns, den zweimal gebrochenen und zweimal reflektierten; beide Strahlen von A und B treten in dem einen Strahle C aus.

Nehmen wir an, dafs die Kanten der Prismen an ihren Ecken senkrecht aufeinander stehen, so müssen beide Prismen so übereinander liegen, dafs alle entsprechenden Kanten parallel sind. Um daraufhin das Prismenkreuz zu prüfen, halte man das Instrument zwischen zwei aufgehängte Lote und sehe nach, ob die Bilder der Lotfäden parallel sind. Ist das nicht der Fall, so sind die Schrauben auf der obern Fläche zu benutzen.

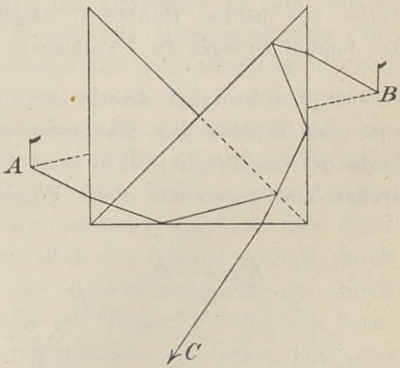
Fig. 50.



Um zu erfahren, ob die Kathetenebenen parallel sind und die Hypotenusen senkrecht zu einander stehen, legt man einen Punkt C in der Geraden AB mit dem Kreuze fest; mit vertauschter Front macht man dasselbe und sieht nach, ob die Punkte C zusammen- und in die gemeinsame Gerade fallen. Eine Ausweichung aus AB giebt den doppelten Fehler an, der zur Hälfte an den Schräubchen a und b in Fig. 50 zu beseitigen ist.

Beim Gebrauche stellt man sich da, wo der Punkt eingeschaltet werden soll, annähernd in der Geraden AB auf, sieht auf die beiden freiliegenden Kathetenflächen und geht solange vor- oder rückwärts, bis das Bild von A über oder unter demjenigen von B erscheint. Sind beide Signale lotrecht stehende Baken, so müssen die Bilder eine gerade Linie bilden. Ein Lot oder Stock unter dem Instrument bezeichnet den eingeschalteten Punkt.

Fig. 51.

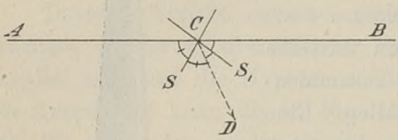


Als Verhaltungsmafsregel kann man nach der obigen Theorie folgende aufstellen. Hält man die Okularebene parallel zur gegebenen Geraden, benutzt man also den beweglichen Strahl in Fig. 49, so ist man noch vor der Geraden, solange das Signal links auch im Prisma noch links steht. Beim Überschreiten der Linie gehen die Bilder aneinander vorüber, so dafs das Bild vom Signal links auf die rechte Seite des anderen Bildes rückt. Im zweiten Falle hält man die eine Hypotenuse senkrecht, die andere parallel zur Geraden und sieht gleichzeitig in der Nähe des spitzen bezw. des rechten Winkels hinein. Die gegenseitige Lage der Bilder vor und hinter der Linie ist umgekehrt wie vorhin.

Das Prismenkreuz, das 23 Mk. kostet, hat den Vorteil, daſs man mit ihm in der Geraden zweier Punkte das Lot errichten und sich zugleich überzeugen kann, ob man noch in der Linie steht. Dasselbe gilt vom Aufsuchen des Fuſspunktes eines Lotes.

Statt der spiegelnden Hypotenusenflächen hat der Geometer Berlin 1844 gewöhnliche Spiegel senkrecht gegen- und übereinander gestellt. Mit diesem Spiegelkreuz kann man Winkel von 180⁰ abstecken. Die Wirkungsweise beruht auf dem Reflexionsgesetz nnd ist aus Fig. 52 ersichtlich. Die Spiegel S und S_1 sind gegenseitig die Einfallslote. Es ist

Fig. 52.

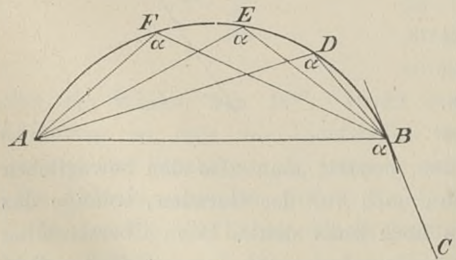


$$SCD + DCS_1 = 90^0 \text{ nach der Konstruktion;}$$
$$ACS + BCS_1 = 90^0 \text{ nach dem Reflexionsgesetz;}$$
also $$ACD + BCD = 180^0.$$

Zur Prüfung sucht man den Punkt C in AB auf mit A zur Linken und dann von der anderen Seite mit B zur Linken. Fallen die beiden Punkte C nicht zusammen, so ist der Winkel der beiden Spiegel zu berichtigen.

O. Decher hat 1882 das untere Prisma des Prismenkreuzes auf eine Scheibe mit Zahnrand gesetzt und eine Schraube ohne Ende so angebracht, daſs man dasselbe um die vertikale Achse drehen und gegen das obere Prisma verstellen kann. Die Achsen der Prismen bleiben parallel, während die Seitenflächen gegeneinander verdreht werden. Diese Prismentrommel, die nur in der Ebene mit Dosenlibelle benutzt werden kann, dient zur Festlegung von Kreiskurven.

Fig. 53.



Die Richtung BC in Fig. 53 soll vom Berührungspunkte B aus durch einen Kreisbogen mit A verbunden werden. In A und C stehen Signale, in B stöſst man den Stock der

Winkeltrommel ein oder hält ihn so schwebend, dafs seine Spitze über B ist. Nun dreht man an der Schraube ohne Ende, bis die Signale von A und C in beiden Prismen als einzige Gerade erscheinen. Der Winkel ABC liegt damit im Instrument fest. Ist die Signalstange in B aufgestellt, so hat man im Gelände Punkte D, E, F zu suchen, in denen die Bilder der Stangen A und B durch beide Prismen zu gehen scheinen. Man thut gut, in der Nähe von A oder B anzufangen.

Die Theorie beruht auf dem Satze der Planimetrie, nach welchem Peripheriewinkel über demselben Bogen einander gleich sind.

Die Aufgabe kann man auch lösen mit einem Winkelspiegel, dessen Spiegel beliebig gegeneinander verstellbar sind.

b. Instrumente zum Messen und Abstecken beliebiger Winkel im Gradmafs.

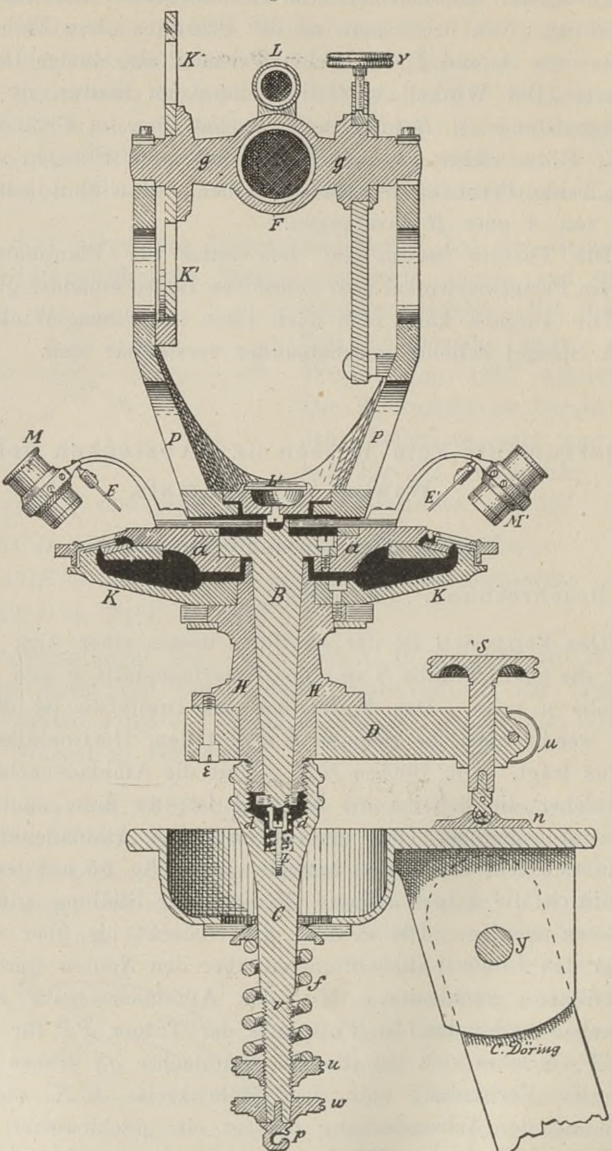
§ 29. Der einfache Theodolit.

Beschreibung. (Fig. 54).

Das Fufsgestell ist der Dreifufs, dessen einer Arm D in der Figur die Stellschraube S mit der Unterlageplatte n und die Prefsschraube μ zeigt. Das Mittelstück des Dreifufses ist die Büchse HH, welche oben die Scheibe KK mit dem Horizontalkreise oder Limbus trägt. Die Büchse HH nimmt die Alhidadenachse B auf, an welcher die Scheibe aa befestigt ist; an diese sind einander diametral gegenüber Teile eines Kreises, des Alhidadenkreises, geschraubt, welche als Nonien auftreten (n in Fig. 65 auf der Platte s) und durch die Lupen M und M_1 in ihrer Stellung zum Limbus abgelesen werden. Die Scheibe aa verdeckt bis über den Rand hinaus den Limbus; die Öffnungen über den Nonien werden durch Fensterchen geschlossen. Mit der Alhidadenscheibe ist durch Schrauben verbunden die Fufsplatte der Träger PP für das Fernrohr F, welches sich um die Horizontalachse gg drehen läfst und in fester Verbindung mit dem Höhenkreise $K'K'$ steht. Die Hemmung der Achsendrehung besorgt ein geschlossener Ring mit der Bremsschraube γ. Handelt es sich nur um Horizontalwinkel, wie es meist der Fall ist, so ist der Höhenkreis überflüssig.

Zur groben Horizontalstellung des Limbus benutzt man die Dosenlibelle L'. Die genaue Horizontierung erfolgt bei den meisten Theodoliten mit der sogen. Alhidadenlibelle, welche entweder auf

Fig. 54.



der Platte *aa* oder an den Trägern angebracht ist und in der Richtung des Fernrohres oder quer dazu steht. Oder es läſst sich auf die Drehachse eine Reiterlibelle stellen. Ist der Höhenkreis vorhanden, so ist die Fernrohrlibelle L am Platze. An manchen Instrumenten findet man gleichzeitig mehrere dieser Libellen.

Die Verbindung und Befestigung des Instrumentes mit dem Stativ geschieht vermittelst der Centralstange C und der Spiralfeder f.

Die Träger müssen hoch genug sein, damit sich das Fernrohr durchschlagen läfst. Oder es mufs sich das Fernrohr mit demselben Zapfen in dasselbe Lager umlegen lassen. Bei vielen Theodoliten läfst sich das Fernrohr in der Weise umlegen, dafs die Zapfen in ihren Lagern vertauscht werden, was bei der Prüfung des Instrumentes zu verwerten ist.

Theodolite mit durchschlagbarem oder umlegbarem Fernrohre nennt man Kompensationstheodolite, weil sich manche Fehler mit demselben kompensieren oder ausgleichen lassen.

Das Durchschlagen oder das entsprechende Umlegen des Fernrohres hat zur Folge, dafs das Objektiv an Stelle des Okulars kommt. Die Messung eines Winkels in der ursprünglichen Lage des Fernrohres und diejenige mit dem durchgeschlagenen oder umgelegten Fernrohre nennt man kurz die Messung in beiden Lagen des Fernrohres. Jeder Theodolit mufs diese Messung gestatten.

Will man nachts oder in Bergwerken Signale anvisieren, so mufs man für Beleuchtung des Fadenkreuzes sorgen, was durch eingeführtes Lampenlicht geschieht. Neuerdings geschieht dies dadurch, dafs man die Drehachse und Fernrohrwand durchbohrt und im Fernrohr einen Spiegel von 2 bis 3 ^{mm} Durchmesser anbringt, der seitwärts angebrachtes Licht auffängt, und zum Fadenkreuze schickt. Auf kurze Entfernungen genügt meist das Lichtsignal selbst. Oft kann man sich dadurch helfen, dafs man weifses Papier schräg vor das Objektiv hält.

An grofsen Theodoliten findet man wohl auf den Armen des Dreifufses ein nur wenig verstellbares Fernrohr, das den Beobachter von der unveränderten Stellung seines Theodolit während der Messung überzeugen soll. Es ist dies ein sogen. Versicherungsfernrohr.

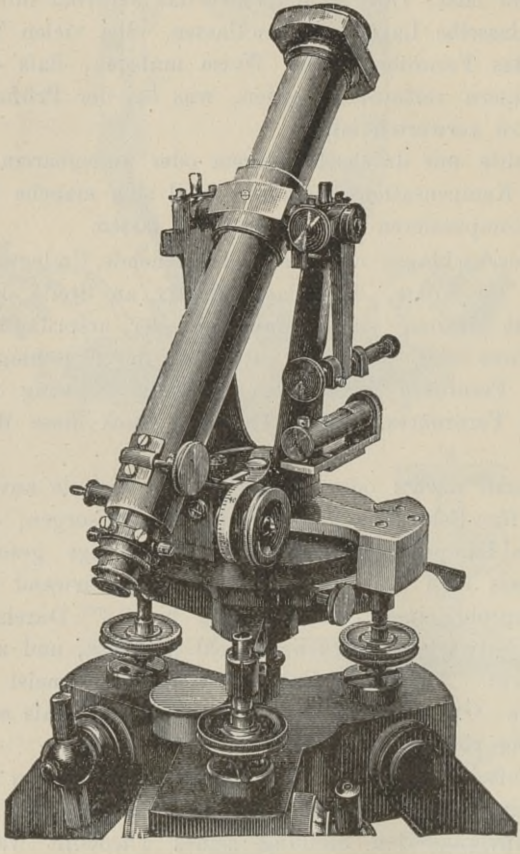
Die Herleitung des Wortes Theodolit ist zweifelhaft; es kam um die Mitte des achtzehnten Jahrhunderts aus England zu uns herüber. Das Wort Alhidade oder Alidade soll nach neueren Forschungen von al-'idâda herkommen und ein Lineal, das Diopterlineal bezeichnen. Limbus heifst einfassender Saum, Rand.

Als neue und eigenartige Konstruktion sei diejenige des

Zahnkreis-Theodolit von G. Heyde in Dresden erwähnt. (Fig. 55).

Der Limbus hat am äufseren Rande 360 Zähne, in deren Lücken ein Zahn einschnappt, welcher an einer Feder sitzend durch den in der Abbildung rechts hervorstehenden Hebel zurückgehalten

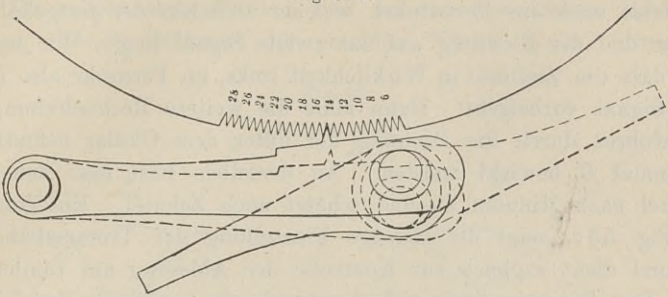
Fig. 55.



werden kann. Der Hebel trägt an der Achse, (Fig. 55 a.), eine excentrische Scheibe, durch deren Drehung die Feder zurück- und damit der Zahn aus der Lücke der Kreiszähne herausgezogen wird. Sind die Vertikalachse und Zähne sorgfältig eingefettet, so legt sich der Hemmzahn leicht und voll in die Lücken ein und eine schnelle Abnutzung ist nicht zu fürchten. Der sich an den Zähnen ablagernde Schmutz ist von Zeit zu Zeit zu entfernen.

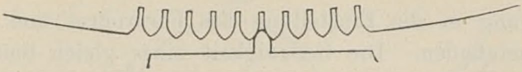
Aufser den Gradzähnen trägt der Limbus auf der Oberseite eine Strichteilung nach ganzen Graden. Über diese bewegt sich

Fig. 55 a.



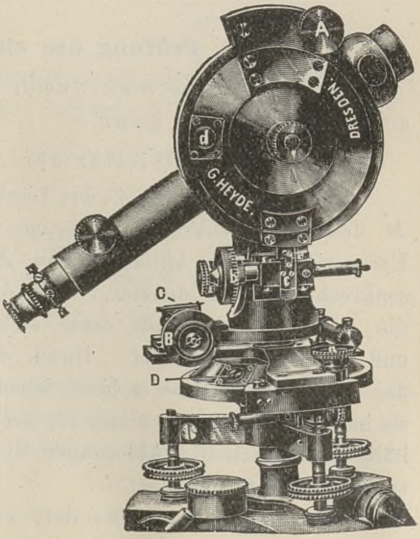
mit der Alhidade ein Index, an welchem man die Zahl der Grade abliest. Die Ablesung geschieht durch eine Lupe, welche bei der

Fig. 55 b.



verbesserten Konstruktion, (Fig. 55 c.), für den Beobachter bequemer bei D angebracht ist. Dort ist auch der Excenterhebel durch ein excentrisches Rädchen ersetzt, welches am Knopfe a und für den Höhenkreis am Knopfe A gedreht wird.

Fig. 55 c.



Ist der Theodolit zur Repetition eingerichtet, so kann man die Alhidade geklemmt lassen und mit dem Limbusmikrometer ein einzelnes Signal genau anzielen. Dadurch erhält man eine Ablesung in ganzen Graden; sie möge 0^0 sein. Zieht man nun den Einlegerzahn zurück und dreht das Fernrohr auf ein zweites Signal nach rechts, so wird nur selten nach dem Einspringen des Hemmzahnes das

Fernrohr auf das Signal genau gerichtet bleiben. Durch die Ablesung am Index erhält man daher nicht den Winkel, der durch das Centrum der Station und die beiden Signale festgelegt ist. Es fehlt noch ein Restwinkel, welcher zwischen der festgehaltenen Visur und der Richtung auf das zweite Signal liegt. Wir nehmen an, dafs die Ziellinie in Wirklichkeit links, im Fernrohr also rechts am Signal vorbeigeht. Dann mufs die weitere Rechtsdrehung des Fernrohres durch die Drehung der unter dem Okular befindlichen Trommel *B* bewirkt werden. An derselben liest man den Restwinkel nach Minuten ab und schätzt noch Zehntel. Ein Zeiger *C* in Fig. 55c. zeigt die richtige Einstellung der Trommelschraube an und dient zugleich zur Kontrolle der Ablesung am Limbus.

Das Fernrohr mufs sich durchschlagen lassen, da der Limbus nur an einer Stelle abgelesen wird und eine Excentricität der Visierlinie vorhanden sein kann.

Eine gewisse Schwierigkeit des Visierens besteht; wer jedoch mit einem solchen Theodolit zu arbeiten hat, wird sich nach einiger Übung in die Einstellung des Fernrohres und in die Ablesung hineinfinden. Die Genauigkeit eines gleich teuren Noniustheodolit wird nicht erreicht, aber die Arbeit geht schnell von statten, da nur je eine Ablesung in der Nähe und eine unterhalb des Okulars zu machen ist. Über die Dauerhaftigkeit der Gradzähne, des Hemmwerks und der Trommelvorrichtung läfst sich noch kein Urteil abgeben.

§ 30. Prüfung des einfachen Theodolit.

I. Fehler, die man durch das Messungsverfahren unschädlich machen kann.

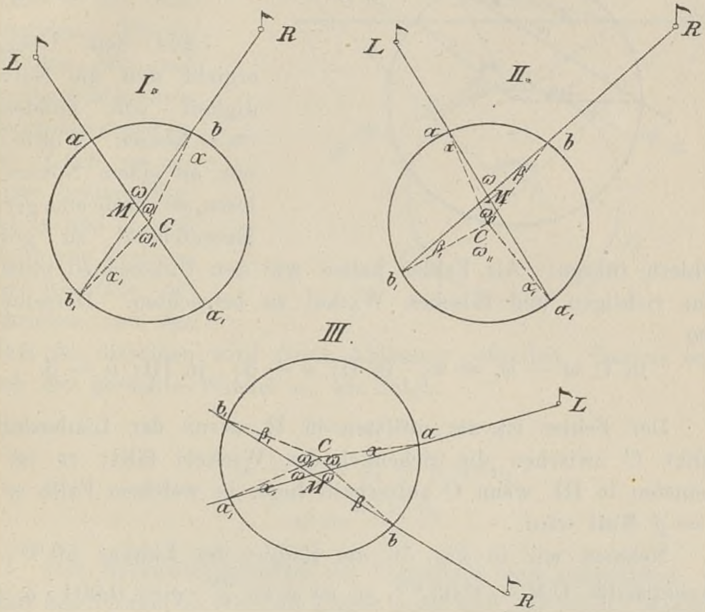
1. Die Excentricität der Alhidade. (Fig. 56).

Fällt das Centrum C des Limbus nicht mit dem Mittelpunkte M des Alhidadenkreises zusammen, so heifst die Gerade CM die Excentricität der Alhidade. In M müssen wir uns die Achse senkrecht stehend denken, wenn der Limbus horizontal ist. Um die Achse der Alhidade dreht sich die Visierlinie, wenn man L und darauf R anvisiert. Durch die Drehung der Ziellinie wird der Winkel $LMR = \omega$ beschrieben. Da wir am Limbus ablesen, so hat der Bogen ab nicht M, sondern C zum Centrum; man erhält also durch die Ablesungen nicht den richtigen Winkel aMb, sondern den falschen aCb.

Wir nehmen nun an, dafs zwei Nonien mit Null diametral gegenüber stehen und zwar unter der Visierlinie bezw. in entgegengesetzter Richtung. Der erste Nonius habe den Nullstrich in a bezw. in b, der zweite in a_1 bezw. b_1.

Die abgelesenen Winkel sind in den drei Fällen $\omega_1 = ab$ und $\omega_2 = a_1 b_1$, während der gesuchte Winkel ω ist. Nun hat

Fig. 56.



man als Aufsenwinkel bezw. Scheitelwinkel oder als Dreieckswinkel je nach Lage der Winkelschenkel folgendes:

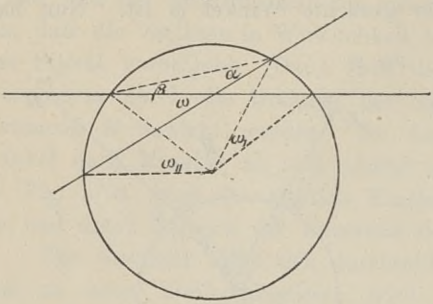
$$\text{in I: } \omega = \omega_1 + \alpha \qquad \text{in II: } \omega = \omega_1 + \alpha + \beta$$
$$\omega = \omega_2 - \alpha_1 \qquad \omega = \omega_2 - \alpha_1 - \beta_1$$
$$\text{in III: } \omega + \beta = \omega_1 + \alpha$$
$$\omega + \alpha_1 = \omega_2 + \beta_1 .$$

in allen drei Fällen ist: $$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

Man erhält also auch bei excentrischer Alhidade den richtigen Winkel, wenn man bei jeder Einstellung an beiden Nonien abliest und aus den erhaltenen Winkeln das arithmetische Mittel nimmt.

Man kann der vorstehenden Betrachtung auch folgende Form geben, die aus Figur 57 ersichtlich ist. Der durch Drehung der Visierlinie gebildete Winkel ω ist ein Sehnenwinkel und als solcher gleich der halben Summe der Centriwinkel, die auf den zwischen den Sehnen liegenden Bogenstücken stehen.

Fig. 57.



$$\omega = \alpha + \beta = \frac{\omega_1 + \omega_{11}}{2}.$$

Aus dem Gesagten ergiebt sich die Notwendigkeit von mindestens zwei Nonien. Wollte man nur an einem Nonius ablesen, so würde eine geringe Excentricität zu grofsen Fehlern führen. Als Fehler haben wir den Unterschied zwischen dem richtigen und falschen Winkel zu betrachten. Derselbe ist also

$$\text{in I: } \omega - \omega_1 = \alpha; \quad \text{in II: } \alpha + \beta; \quad \text{in III: } \alpha - \beta.$$

Der Fehler ist am gröfsten in II, wenn der Limbusmittelpunkt C zwischen die Schenkel des Winkels fällt; er ist am kleinsten in III, wenn C aufserhalb liegt, in welchem Falle er für $\alpha = \beta$ Null wird.

Nehmen wir in Fig. 56 als Radius des Limbus 50^{mm}, die Excentricität $CM = 0{,}05^{\text{mm}}$, so ist $\alpha = \frac{0{,}05}{50} \cdot \varrho = 0{,}001 \cdot \varrho$, d. h. der Fehler ist $\omega - \omega_1 = 206{,}265'' = 3'\,26''$. Ist β ebenso grofs, was eintritt, wenn in II die Strecke CM den Winkel ω halbiert, so kann der Fehler infolge der verschwindend kleinen Excentricität über $6'$ betragen.

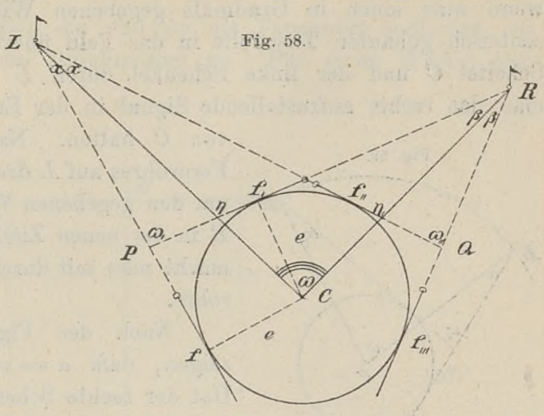
Wie aus der Figur ersichtlich ist, läfst sich auch bei einem einzigen Nonius der besprochene Fehler dadurch ausgleichen, dafs man den Winkel in beiden Lagen des Fernrohres mifst.

2. Die Excentricität der Visierlinie. (Fig. 58).

Im Vorhergehenden haben wir angenommen, dafs die Visierlinie von der Alhidadenachse geschnitten wird. Das ist jedoch nur selten der Fall, meist wird die Projektion der Absehlinie auf den Alhidadenkreis nicht durch den Mittelpunkt desselben gehen, sondern daran vorbei. Der Abstand $Cf = e$ ist die Excentricität der Visierlinie oder des Fernrohres. Die Mittelpunkte von Limbus und Alhidade mögen in C zusammenfallen, der Scheitel des durch L und R abgesteckten Winkels liegt lotrecht unter C.

Die auf die Signale L und R gerichteten Visuren liefern nun nicht den Winkel LCR, sondern bilden den Winkel $LPR = \omega_1$ miteinander. Ebenso erhalten wir mit durchgeschlagenem Fernrohre den Winkel $LQR = \omega_2$. Diese beiden Winkel ω_1 und ω_2 sind durch die Drehung der Alhidade beschrieben und das Mafs für dieselben wird durch Ablesung gefunden. Daraus ergiebt sich der gesuchte Winkel ω, wie folgt:

Fig. 58.



$$\omega + \beta = \omega_1 + \alpha = \eta$$

$$\omega + \alpha = \omega_2 + \beta = \eta_1$$

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

Der Excentricitätsfehler der Visierlinie wird aufgehoben, wenn man den Winkel in beiden Lagen mifst und aus beiden Messungen das Mittel nimmt.

Der Fehler ist $\omega - \omega_1 = \alpha - \beta = \varphi$. Setzt man $Cf = e$, die Länge der Winkelschenkel $LC = l_1$ und $RC = l_2$, so ist der Fehler

$$\varphi = \left(\frac{e}{l_1} - \frac{e}{l_2}\right) \cdot 206\,265''.$$

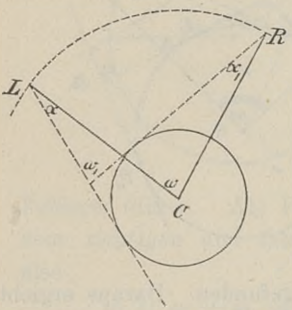
Sind also die Schenkel gleich lang, so ist $\varphi = 0$. Der Fehler ist um so gröfser, je mehr die Schenkel in ihrer Länge verschieden sind. Ist $e = 5^{\text{cm}}$, also das Fernrohr absichtlich excentrisch, $l_1 = 50^{\text{m}}$ und $l_2 = 100^{\text{m}}$, so ist

$$\varphi = \left(\frac{5}{5000} - \frac{5}{10\,000}\right) \cdot 206\,265'' = 1'\,43''.$$

Man fertigt Theodolite mit excentrischem Fernrohr an, um dieselben leichter und kleiner machen zu können. Man kann das Fernrohr bequemer durchschlagen, gröfsere Höhenwinkel messen und die Ablesevorrichtungen am Höhenkreise (Mikroskope) zugänglicher anbringen.

Das über diesen Fehler Gesagte wird man zu beachten haben, wenn man einen in Gradmafs gegebenen Winkel mit einem excentrisch gebauten Theodolit in das Feld übertragen soll. Ist der Scheitel C und der linke Schenkel durch L bezeichnet, so wird man das rechts aufzustellende Signal in der Entfernung des linken von C halten. Nach Einstellung des Fernrohres auf L dreht man die Alhidade um den gegebenen Winkel ω und richtet R in der neuen Ziellinie auf. Die Probe macht man mit durchgeschlagenem Fernrohre.

Fig. 59.



Nach der Fig. 59 ist leicht zu zeigen, dafs $\alpha = \alpha_1$ und $\omega = \omega_1$ ist. Hat der rechte Schenkel nicht die Länge des linken, so sind aus den Entfernungen und der Excentricität die Winkel α und α_1 zu berechnen. Hat man auf L eingestellt, so mufs man die Alhidade um $\omega_1 = \omega + \alpha_1 - \alpha$ drehen.

Ist man behufs Halbierung des Winkels LCR auf einen excentrisch gebauten Theodolit angewiesen, so kann man mit demselben die Halbierungslinie CM in Fig. 60 nicht unmittelbar abstecken, weil sich das Fernrohr am Umfange des um C beschriebenen Kreises befindet. Man kann jedoch die Parallelen xu und yv festlegen, ihren senkrechten Abstand uv in M halbieren und dadurch CM erhalten.

Denken wir uns den einen Nonius unter dem Fernrohre am Ende des Radius Cf_0 stehen und lassen wir den anderen Nonius ganz aus dem Spiele; die Ablesungen bei den einzelnen Einstellungen seien f_0, f_1, f_2, f_3. Ohne an das Centrum C zu denken, zählen wir die Grade des Winkels auf der Peripherie des Kreises. Es ist die Frage zu beantworten: Um wieviel Grade müssen wir drehen, damit der Nonius von f_0 in die Stellung x bezw. y kommt?

Es ist $$p = \tfrac{1}{2}(f_0 + f_2); \quad q = \tfrac{1}{2}(f_1 + f_3)$$

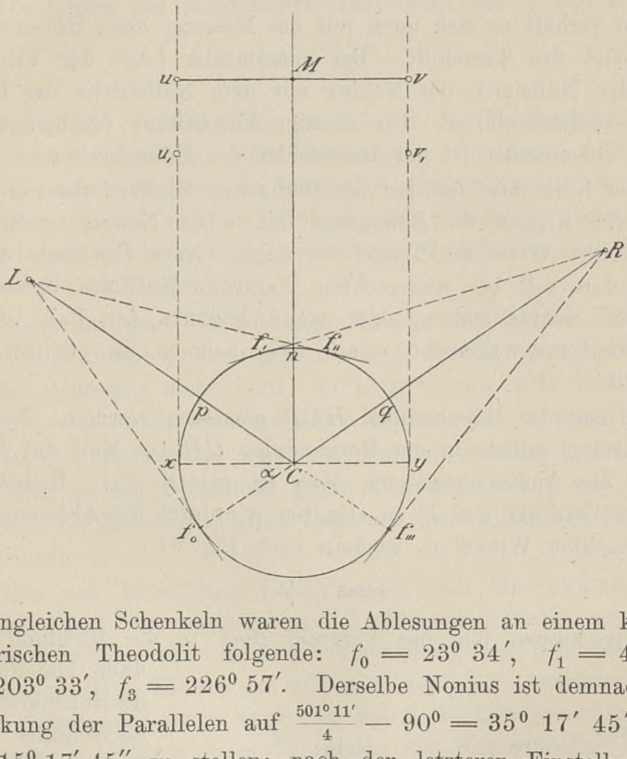
$$n = \tfrac{1}{2}(p + q) = \tfrac{1}{4}(f_0 + f_2 + f_1 + f_3) = \text{Bogen } f_0 n.$$

$$x = \tfrac{1}{4}(f_0 + f_1 + f_2 + f_3) - 90^0$$

$$y = \tfrac{1}{4}(f_0 + f_1 + f_2 + f_3) + 90^0$$

Da die Visierlinien xu und yv als Tangenten auftreten, so sind sie senkrecht zum Durchmesser xy. Für einen Winkel mit

Fig. 60.



sehr ungleichen Schenkeln waren die Ablesungen an einem kleinen excentrischen Theodolit folgende: $f_0 = 23^0\ 34'$, $f_1 = 47^0\ 7'$, $f_2 = 203^0\ 33'$, $f_3 = 226^0\ 57'$. Derselbe Nonius ist demnach zur Absteckung der Parallelen auf $\frac{501^0\ 11'}{4} - 90^0 = 35^0\ 17'\ 45''$ und auf $215^0\ 17'\ 45''$ zu stellen; nach der letzteren Einstellung ist das Fernrohr durchzuschlagen.

Die Ablesung bei p ist $\frac{1}{2}(f_2 - f_0) + f_0 = \frac{1}{2}(f_0 + f_2)$.

Nach Festlegung des Punktes M wird man zur Prüfung den Winkel LCM in beiden Lagen des Fernrohres messen.

Eine solche Aufgabe ist beim Abstecken von Kreiskurven in gewissen Fällen zu lösen.

3. Der Indexfehler des Höhenkreises.

Denken wir uns eine Zeigerwage, an welcher in unbelastetem Zustande der Zeiger nicht auf Null steht. Legen wir nun einen

Brief auf die Schale, so giebt die am Zeiger abgelesene Zahl nicht das richtige Gewicht des Briefes an. Die Wage ist mit einem Indexfehler behaftet, den ich entweder auf mechanischem Wege oder vielleicht durch Rechnung nach zweimaliger Ablesung fortschaffen kann. Nur wenn unbelastet der Index auf Null zeigt, liefert mir die Wage durch einmalige Ablesung das Gewicht des Briefes.

So verhält es sich auch mit der Messung eines Höhenwinkels vermittelst des Theodolit. Bei horizontaler Lage der Visierlinie mufs der Nullstrich des Nonius mit dem Nullstriche des Höhenkreises zusammenfallen. Die etwaige Abweichung der beiden Nullstriche voneinander ist der Indexfehler des Höhenkreises.

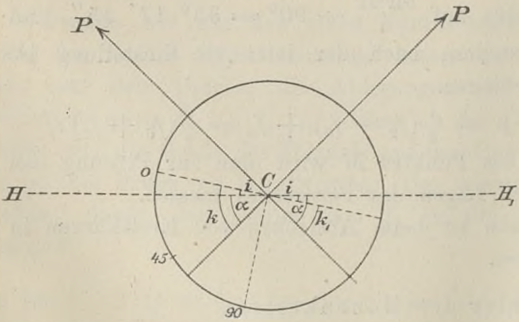
Der Kreis sitze fest auf der Drehachse des Fernrohrs; er macht also beim Kippen die Bewegung mit. Der Nonius ist dann in irgend einer Weise am Träger befestigt. Nach Horizontalstellung des Limbus soll bei wagerechtem Fernrohr Null des Kreises auf Null des Nonius stehen, oder wenn letzteres der Fall ist, soll die Visierlinie wagerecht sein. Wir nehmen an, es sei nicht der Fall.

Es soll der Höhenwinkel HCP gemessen werden. Null des Höhenkreises müfste in der Horizontalen CH bei Null des Nonius liegen; die Abweichung nach oben ist jedoch $\sphericalangle\, i$. Richten wir nun das Fernrohr auf P, so erhalten wir durch die Ablesung nicht den gesuchten Winkel α, sondern nach Fig. 61

1) . . . . $\varkappa = \alpha + i.$

Wir kippen nun das Fernrohr über in die Richtung CH_1, dann kommt Null des Höhenkreises bei horizontaler Ziellinie soviel unter HH_1 zu liegen, als sie früher drüber lag. Richten wir das Fernrohr nach Drehung der Alhidade um 180^0 auf P, so wird die Ablesung um i zu klein ausfallen.

Fig. 61.



2) . . . . $\varkappa_1 = \alpha - i.$

Aus den beiden Ablesungen $\varkappa$ und $\varkappa_1$ erhalten wir durch Addition

$$\alpha = \frac{\varkappa + \varkappa_1}{2}.$$

Der Indexfehler hebt sich fort und man erhält den richtigen Höhenwinkel, indem man ihn in beiden Lagen des Fernrohrs mifst und aus den Ablesungen das Mittel nimmt.

Die Gröfse des Indexfehlers erhält man aus 1) und 2); er ist

$$3) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad i = \frac{\varkappa - \varkappa_1}{2}.$$

Nach dem Vorstehenden können wir das Vorhandensein eines Indexfehlers feststellen. Zur Beseitigung desselben müssen wir entweder das Fadenkreuz in vertikaler Richtung verstellen, oder es mufs der Nonius sich am Höhenkreise verschieben lassen. Die Gröfse und Richtung der Verschiebung findet man aus den bezeichneten Gleichungen.

Steht auf dem Fernrohr eine Libelle und ist bei ihrem Einspielen die Zielachse horizontal, so mufs der Höhenwinkel 0^0 sein. Ist die Ablesung nicht Null, so notiert man sich dieselbe und vermehrt oder vermindert die spätere Ablesung um die gemerkte Zahl.

Ist der Höhenkreis mit zwei Nonien versehen, so überzeuge man sich, ob die Nullstriche genau diametral stehen und begnüge sich mit der Messung in einer Lage und dem Mittel aus den beiden Ablesungen.

Um den Indexfehler zu vermeiden, hat Breithaupt-Cassel an manchen Instrumenten eine Versicherungslibelle angebracht. Dieselbe befindet sich in fester Verbindung mit den Nonien und parallel zu ihrer Ebene; sie läfst sich durch eine besondere Mikrometerschraube mit ihnen bewegen. Spielt die Libelle auf dem Fernrohr ein, so müssen beim Einspielen der Nonienlibelle die Nullstriche auf 0^0 bezw. 180^0 stehen. Hiernach sind die Libellen zu berichtigen. Ist keine Fernrohrlibelle vorhanden, sondern nur eine Alhidaden- oder Reiterlibelle, so kann man zunächst die Nonienlibelle einspielen lassen. Man stellt nun Null auf Null am Höhenkreise und visiert eine Latte in etwa 50^m Entfernung an und merkt sich an dieser die Ablesung. Mit durchgeschlagenem Fernrohr visiert man denselben Punkt an und sieht nach, ob die Ablesung wieder Null ist. Ist das nicht der Fall, so verstelle man den Nonius um die halbe Abweichung und bringe die dadurch abgelenkte Blase an der Libelle selbst wieder zum Einspielen.

4. Die Fehler der Kreisteilungen.

Die Teilmaschine ist das wichtigste Werkzeug des Mechanikers; sie kostet viele Tausende und von ihrer Güte hängt die Brauchbarkeit der Winkelmesser ab. Sie wird deshalb mit der gröſsten Vorsicht und unter Berücksichtigung aller etwa schädlichen Einflüsse hergestellt und behandelt, besonders gegen ungleichmäſsige Erwärmung geschützt. Desgleichen wird der Mechaniker bei der Anwendung der Maschine zur Teilung eines neuen Kreises mit möglichster Schärfe vorgehen, so daſs Fehler infolge etwaiger excentrischer Lage der neuen Kreisscheibe oder schiefer Beleuchtung bei Benutzung der Mikroskope oder eines seitlichen Druckes beim Einreiſsen der Teilstriche kaum zu befürchten sind. Immerhin ist es möglich, daſs Fehler in bestimmten Abständen des Kreises wiederkehren oder auch an einer einzigen oder einzelnen Stellen zufällig auftreten.

Auſserdem kann es vorkommen, daſs die Nonien oder Schätzmikroskope nicht genau der Kreisteilung angepaſst sind oder sich mit der Zeit gelockert haben. Letzteres wird sich beim Messen eines Winkels in beiden Lagen oder durch ein Klaffen des Nonius sofort kundthun. Eine eingehende Prüfung von Kreisteilung und Nonien führt man aus, indem man den Nullstrich des Nonius mit Hilfe der Überstriche genau auf einen Teilstrich des Limbus einstellt und nachsieht, ob auch der letzte Noniusstrich mit einem Teilstriche zusammentrifft. Diese Vergleichung der Noniuslänge mit dem entsprechenden Limbusstück wird von Strich zu Strich fortgeführt.

Zugleich wird hierbei der Nonius in seinen innern Teilen untersucht, indem man einen beliebigen Noniusstrich zum Treffstrich macht und sich überzeugt, ob die gleichvielten Striche rechts und links den gleichen Abstand von den betreffenden Limbusstrichen haben. Ebenso sieht man nach, ob die Ablesungen am zweiten Nonius den Unterschied von 180^0 oder 200^0 ergeben und ob sich die Nonien immer gut an den Kreis anschlieſsen.

Sollte sich wider Erwarten an irgend einer Stelle des Kreises eine grobe Unregelmäſsigkeit finden, so gebe man das Instrument dem Mechaniker zurück. Oder man muſs sich dadurch helfen, daſs man den Theodolit so auf dem Stative dreht, daſs die fehlerhafte Stelle beim Ablesen nicht getroffen wird. Mit kleinen Ungenauigkeiten wird man immer rechnen müssen. Kommt es auf sehr genaue Messungen an, so macht man dieselben unschädlich, indem man die Winkel in verschiedenen Teilen des Limbus miſst, wie wir später sehen werden.

Bei den Höhenkreisen liegt der Nonius oft auf der Teilung. Es ist bei der Prüfung darauf zu achten, ob keine Excentricität des Noniuskreises vorhanden ist, was an dem Verlauf der Striche zu sehen ist. Liegt die Noniusebene etwas tiefer oder höher zur Limbusebene, so kann auch eine schiefe Stellung des Auges zu Irrtümern führen.

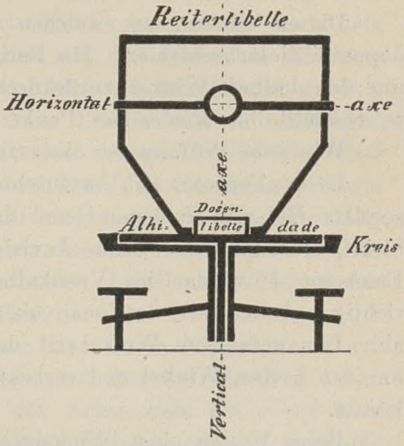
II. Fehler, die am Theodolit selbst zu beseitigen sind.

A. Die Libelle steht auf der Drehachse des Fernrohrs.

1. Steht die Zielachse senkrecht zur Drehachse?

Diese Frage mufs bejaht werden können, damit nach Horizontalstellung der Drehachse HH_1 in Fig. 62 die Visierlinie beim Kippen eine Vertikalebene beschreibt, damit man also bei Winkelschenkeln mit verschiedener Neigung die verlangte Horizontalprojektion des Winkels erhält. Dies geschieht, wenn die Ziellinie in ZZ_1 senkrecht zu HH_1 liegt.

Fig. 62.



Der Vorgang hierbei läfst sich leicht veranschaulichen. Man stelle vor sich auf den horizontalen Tisch einen Bleistift lotrecht und gebe den Schenkeln eines Zirkels etwa die Öffnung HZP. Den einen Schenkel halte man wagerecht und die Spitze des andern richte man auf den höchsten und auf tiefere Punkte des Bleistifts. Beim Kippen wird man sehen, dafs der Schenkel einen Kegel beschreibt und je nach der Höhe der anvisierten Punkte verschiedene Punkte des Tisches trifft. Der Schenkel bleibt nur dann beim Kippen stets auf den Bleistift gerichtet, wenn er senkrecht zu dem andern horizontalen Schenkel steht. Würden nun die Schenkel eines im Felde zu messenden Winkels die gleiche Neigung haben, so

Fig. 63a.

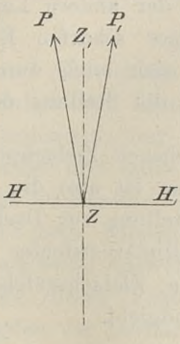
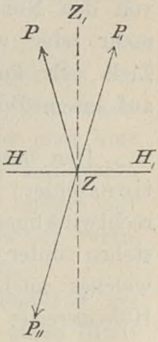


Fig. 63b



würde aus der falschen Stellung der beiden Achsen kein Fehler erwachsen, da die Ausweichung aus der Vertikalebene beidemal auf dem Limbus die gleiche sein würde. Eine solche Voraussetzung ist jedoch nicht statthaft.

Zur Prüfung richte man das Fernrohr auf einen Punkt P, so dafs derselbe vom Vertikalfaden bedeckt wird (Fig. 63b) und lese an den Nonien ab. Man schlage nun das Fernrohr durch, so wird es nach P_{11} gerichtet sein. Nach einer Drehung um 180^0 mufs der Punkt P wieder im Vertikalfaden erscheinen. Ist das nicht der Fall, so wird die Zielachse nach P_1 zeigen. Aus dieser Stellung dreht man die Alhidade zurück, bis man wieder den Punkt P anzielt.

Dieser Winkel, um welchen man zurückgedreht hat, ist der doppelte Zielachsenfehler. Die Berichtigung besteht darin, dafs man um den halben Winkel zurückdreht und das Fadenkreuz seitlich so verstellt, bis wieder der Punkt P getroffen wird.

Wie jede Prüfung ist diese zu wiederholen.

Ist das Fernrohr mit Vertauschung der Lager umlegbar (Fig. 63a), so dafs H nach H_1 kommt und das Objektiv nach vorn gerichtet bleibt, so nehme man nach Anvisierung von P die Umlegung vor. Erscheint P wieder im Vertikalfaden, so ist die Achsenstellung richtig. Andernfalls lese man ab, stelle auf P ein und lese wieder ab. Der gefundene Winkel ist der doppelte Fehler. Man drehe um den halben Winkel und verbessere die andere Hälfte am Fadenkreuze.

Beim Messen eines Winkels in beiden Lagen müssen die Ablesungen des ersten und zweiten Nonius einander gleich sein. Weichen beide Nonien der einen Lage um denselben kleinen Winkel von den Nonien der andern Lage ab, so liegt der Fehler an der mehr oder weniger scharfen Einstellung des Fernrohrs auf das Ziel. Es kann sich auch durch die Bewegung des Beobachters auf losem Boden die Stellung des Theodolit etwas geändert haben.

Den besprochenen Zielachsenfehler nennt man auch Kollimationsfehler; dieser ist also die Abweichung der Zielachse aus der rechtwinkligen Stellung zur Drehachse. Manche Schriftsteller verstehen unter Kollimationsfehler den Indexfehler am Höhenkreise, welches auch ein Zielachsenfehler ist und sich am Nonius des Höhenkreises kundgiebt.

2. Ist die Libellenachse parallel zur Drehachse?

Würde diese Frage verneint werden, so würde nach Horizontalstellung der Libellenachse die Drehachse des Fernrohrs nicht horizontal sein, und die Zielachse würde beim Kippen keine Vertikalebene beschreiben.

Man bringe die Libelle über eine Stellschraube des Dreifufses und durch diese zum Einspielen und setze dieselbe um. Zeigt sich ein Ausschlag, so ist dieser gleich dem doppelten Fehler in der Stellung der Libellenachse zur Unterlage, hier zur Drehachse. Man schaffe die Hälfte des Ausschlages durch die vertikal wirkende Berichtigungsschraube der Libelle, die andere Hälfte durch die Stellschraube fort.

Um zu sehen, ob die beiden Achsen nicht etwa in windschiefer Lage sich befinden, sich also über einander kreuzen, bewege man die einspielende Libelle nach dem Objektiv und ebenso nach dem Okular hin, so dafs die Libellenfüfse auf der Drehachse schleifen, und beobachte die Blase. Denkt man sich vor dem Okular stehend, so kann man ein rechtes und linkes Libellenende unterscheiden. Neigt man nun die Libelle dem Okular zu und weicht die Blase nach rechts aus, so stand das rechte Ende der Libellenachse beim Einspielen jenseits der Drehachse und hat sich nun beim Herüberneigen gehoben, während sich das linke Ende gesenkt hat. Es mufs durch die seitwärts wirkenden Libellenschräubchen das rechte Ende dem Beobachter genähert werden.

Ist die Libelle richtig, so kann man durch Kippen des Fernrohres auch die Zapfen der Drehachse auf ihre Cylinderform untersuchen. Sobald der Querschnitt der Achse kein Kreis ist, wird beim Kippen eine Hebung oder Senkung und dadurch ein Ausschlag der Blase eintreten.

3. Steht die Libellenachse und damit die Drehachse senkrecht zur Vertikalachse?

Auch hierbei handelt es sich um die richtige Projektion der Winkelschenkel im Felde auf den horizontalen Limbus. Man kann sich den Vorgang wie unter 1. klarmachen, nur stelle man hier die Zirkelschenkel senkrecht zu einander und halte den von rechts nach links gerichteten Schenkel nicht wagerecht. Der andere auf den Bleistift gerichtete Schenkel wird beim Kippen aus der vertikalen Ebene von Bleistift und Zirkelscheitel ausweichen.

Am Theodolit selbst kann man diesen Fehler dadurch erzeugen, dafs man um den einen Zapfen der Drehachse einen Bindfaden von etwa 1^{mm} Dicke schlingt, was beim Vorhandensein der Reiterlibelle möglich ist. Man visiert nun nach einer Lotschnur und kippt das Fernrohr. Die Bedeutung des Fehlers wird ersichtlich, wenn man die Schnur in verschiedener Höhe anvisiert und bedenkt, dafs der gesuchte Winkel auf den horizontalen Limbus projiciert werden soll. Würde man einen Winkel zu messen haben, dessen Schenkel durch das Centrum der Alhidade und zwei Lote gegeben ist, so würde man verschiedene Winkel erhalten, je nachdem man die Lote in verschiedenen Höhen anzielte.

Nehmen wir an, die Forderungen unter 1. und 2. seien erfüllt und die Alhidadenachse stehe senkrecht zur Limbusebene, so kann ein Fehler nur dadurch eintreten, dafs der eine Zapfen der Drehachse tiefer liegt als der andere. Man bringe die Libelle über zwei Stellschrauben zum Einspielen und drehe die Alhidade um 180^0. Spielt die Libelle wieder ein, so ist die gegenseitige Achsenstellung richtig. Giebt die Libelle einen Ausschlag, so ist die eine Seite des Limbus durch die Stellschraube mehr gehoben, als die andere. Nach der Drehung um 180^0 kam das niedrigere Achsenlager über die niedrigere Stellschraube und damit das geneigte Libellenende.

Man verbessere den Ausschlag zunächst um die Hälfte an den beiden Stellschrauben des Dreifufses. Um sich zu vergewissern, dafs die Verbesserung die Hälfte beträgt, drehe man mit dem noch vorhandenen Ausschlage im Kreise herum, dann mufs die Blase an derselben Stelle bleiben. Hierauf beseitige man die andere Hälfte des Ausschlages durch Hebung oder Senkung des einen Endes der Drehachse. Die Einrichtungen für letztere Arbeit sind verschieden, aber leicht am Instrumente zu verstehen. Schliefslich mache man durch Anvisieren einer Lotschnur und Kippen die Probe. Statt des Lotes kann man einen künstlichen Horizont von Quecksilber oder Öl oder Rotwein benutzen, indem man einen hochgelegenen Punkt direkt anvisiert und nachsieht, ob die Zielachse auch dessen Spiegelbild trifft.

B. Die Libelle ist mit der Alhidade verbunden.

Die im Vorigen unter 1. und 3. gestellten Fragen gelten auch hier und finden wie dort ihre Erledigung. Für die Alhidadenlibelle haben wir die besondere Frage zu beantworten:

Ist die Libellenachse senkrecht zur Alhidadenachse?

Setzen wir voraus, dafs die Alhidadenachse senkrecht zur Limbusebene steht, so bringe man die Libelle parallel zu zwei Stellschrauben und durch diese zum Einspielen. Nun drehe man die Alhidade um 90^0, so dafs die Libelle über die dritte Fufsschraube und durch diese wieder zum Einspielen kommt. Damit die schiefe Stellung des Stativkopfes oder der Unterlage nicht schadet, drehe man in die erste Stellung zurück und stelle die Libelle nötigenfalls durch gleichmäfsiges entgegengesetztes Drehen beider Schrauben wieder ein und bringe sie wieder über die dritte Schraube. Aus dieser letzten Stellung drehe man die Alhidade um 180^0. Der etwaige Ausschlag ist zur Hälfte an der dritten Fufsschraube und zur Hälfte durch die Justierschraube der Libelle fortzuschaffen. Ist die Berichtigung vollkommen, so mufs die Libelle in allen Richtungen einspielen.

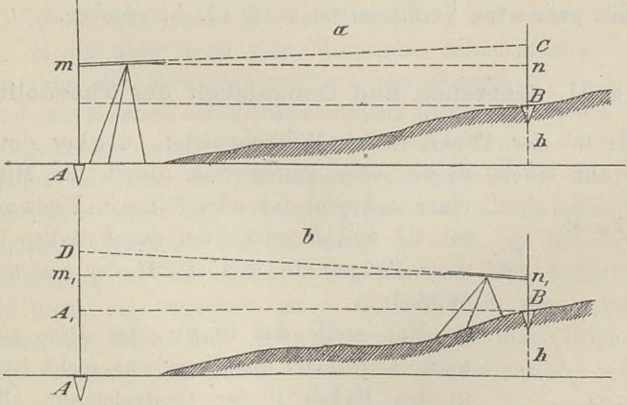
Inbetreff der Dosenlibelle läfst man die Röhrenlibelle mafsgebend sein und nimmt danach die Verbesserung vor, indem man den Spielpunkt in den Kreis der Mitte bringt.

C. Die Libelle steht auf dem Fernrohre.

Aufser den Prüfungen unter A. 1. und 3. ist hier zu untersuchen, ob die Zielachse parallel zur Libellenachse ist. (Fig. 64.)

Ist das Fadenkreuz auf Parallaxe und Stellung zur Drehachse geprüft, so mufs die Zielachse horizontal sein, wenn die Libelle einspielt. Zur Prüfung stecke man auf etwas geneigtem Boden eine Linie von etwa 100^m Länge ab und bezeichne die Endpunkte A und B durch Grundpfähle. Über A stelle man den

Fig. 64.



Theodolit im allgemeinen horizontal auf, lasse über B eine fein geteilte Latte lotrecht halten, richte das Fernrohr auf die Teilung und bringe die Libelle zum Einspielen. Das Okular m soll nun lotrecht über A stehen; den Abstand Am bestimme man, es sei $Am = i$ und das über B abgelesene Lattenstück sei $BC = l$. Ist mn die Horizontale durch das Okular, so ist $Cn = \delta$ der Fehler

Man stelle nun den Theodolit über B auf, richte das Fernrohr auf die Teilung der in A lotrecht stehenden Latte, bringe die Libelle zum Einspielen und lese ab. Das Lattenstück sei $AD = l_1$ und die Instrumentenhöhe $Bn_1 = i_1$. Ist $m_1 n_1$ horizontal, so ist der Fehler wieder $Dm_1 = \delta$.

Der Höhenunterschied zwischen A und B ist in beiden Fällen derselbe.

In a. ist: $h = Am - Bn = i - (BC - Cn) = i - l + \delta$;

in b. ist: $h = AA_1 = AD - A_1 D = AD - (A_1 m_1 + m_1 \mathrm{D})$
$= l_1 - i_1 - \delta$;

also ist $$i - l + \delta = l_1 - i_1 - \delta$$

oder $$\delta = \frac{l + l_1}{2} - \frac{i + i_1}{2}.$$

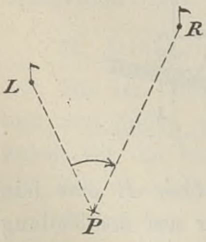
Aus den gemessenen i und i_1 und den abgelesenen l und l_1 berechnet man den Wert von δ; ist derselbe Null, so ist die Zielachse parallel zur Libellenachse. Ist δ nicht $= 0$, so berechnet man $l_1 - \delta = Am_1$ und richtet das Fernrohr auf den Punkt m_1; dadurch tritt die Blase aus dem Einspielpunkte heraus. Durch die Berichtigungsschraube muſs man nun die Libelle wieder zum Einspielen bringen oder man muſs sich den seitlichen Standpunkt der Blase merken.

Ein genaueres Verfahren ist in § 42. A. gegeben.

§ 31. Gebrauch und Genauigkeit des Theodolit.

Es sei der Punkt P der Winkelscheitel, welcher durch ein Kreuz auf einem Steine oder Pfahle oder durch die Mittellinie einer senkrecht stehenden Röhre im Felde markiert sei. L und R seien zwei durch Baken bezeichnete Meſspunkte und LPR der zu messende Winkel.

Fig. 65.



Man stelle das Stativ über P so auf, daſs nach Augenmaſs der Kopf wagerecht ist. Das in den Haken p der Centralstange (Fig. 54 in § 29) eingehängte Lot wird man möglichst auf P einspielen lassen. Man setzt nun den Theodolit auf, schraubt die Centralstange fest und zieht durch die Mutter u die Spiralfeder f an, so daſs noch eine Verschiebung des Instruments auf dem Stativ möglich ist. Mit Hilfe der Stellschrauben S des Dreifuſses bringt man die Dosenlibelle zum Einspielen und verschiebt den Theodolit, bis das Lot genau auf den Winkelscheitel P zeigt.

Beim Horizontieren des Instruments ist also gleichzeitig das Centrieren im Auge zu halten.

Nun erst wird die Spiralfeder gehörig gespannt, um eine Verschiebung des Theodolit zu verhüten. Die genaue Horizontalstellung des Limbus bewirkt man mit der Röhrenlibelle in zwei sich kreuzenden Richtungen, wobei man sich der früher genannten Regel erinnert: die Blase folgt dem Zeigefinger der rechten Hand. Das Nähere hierüber findet sich bei der Prüfung des Theodolit, wozu noch bemerkt sei, dafs eine ungenaue Horizontierung gerade so schädlich wirkt, wie eine mangelhafte Stellung der Vertikal- und Kippachse, besonders bei steilen Visuren.

Da im allgemeinen die Bezifferung des Limbus von links nach rechts läuft, so richtet man zum Messen des Horizontalwinkels LPR in Fig. 65 das Fernrohr zunächst auf Signal links, klemmt die Alhidade fest und stellt mit der Mikrometerschraube das Fernrohr fein ein. Der Limbus wird an beiden Nonien abgelesen. Jetzt löst man die Alhidade, stellt das Fernrohr auf Signal rechts fein ein und liest wieder an den beiden Nonien ab. Die erste Ablesung zieht man von der entsprechenden zweiten ab und erhält zwei Werte des Winkels, von denen man das Mittel nimmt. Geht ein Nonius bei der Einstellung auf rechts über 360^0 hinaus, so ist diese Zahl zum Minuendus hinzuzufügen. In der zweiten Lage des Fernrohrs verfährt man ebenso.

Bei der Messung eines Höhenwinkels hat man sich die Teilung des Höhenkreises genau anzusehen. Ist die Teilung derart, dafs die Zahlen im Sinne des Uhrzeigers wachsen und bei einspielender Fernrohrlibelle oder einer ebenso gerichteten Alhidadenlibelle und horizontaler Visierlinie die Ablesung 90^0 ist, so hat man von jeder Ablesung 90^0 abzuziehen. Ein positiver Rest bedeutet einen Winkel über, ein negativer einen Winkel unter dem scheinbaren Horizonte der Drehachse. Den erstern nennt man Höhen- oder Elevationswinkel, den letzten Tiefen- oder Inklinations- oder Depressionswinkel.

Ist die an der Drehachse feste Kreisteilung so eingerichtet dafs bei horizontalem Fernrohr Null auf Null des Nonius steht und von da die Bezifferung nach beiden Seiten läuft, so ist ein Zwillingsnonius nötig und jedesmal derjenige zu gebrauchen, dessen Zahlen in der Richtung der betreffenden Kreisteilung wachsen.

Soll die Neigung einer durch Grundpfähle bezeichneten Geraden AB gegen den Horizont ermittelt werden, so stellt man den Theodolit über A horizontal auf und bestimmt hier die Höhe der Fernrohrdrehachse über dem Pfahlkopfe. Dieses geschieht am genauesten mit dem sog. Stativhöhenmesser, welchen man in den Haken der Centralstange einhängt und bis auf den Pfahl auszieht. Zu dem gefundenen Abstande ist die ein für allemal gemessene Entfernung vom Haken bis zur Mitte der Drehachse hinzuzuzählen. Man kann statt dessen auch mit einem Meſsbande den Abstand von Haken und Pfahl messen oder mit einer Nivellierlatte die Höhe des Okulars über dem Boden, nachdem das Fernrohr horizontal gestellt ist.

Der Stativhöhenmesser möge $1{,}12^{\mathrm{m}}$ angeben, die Entfernung vom Haken bis zur Drehachse sei $i = 0{,}44^{\mathrm{m}}$, so ist die Instrumentenhöhe $h = 1{,}56^{\mathrm{m}}$. Über dem Pfahle in B bringt man nun eine Tafel mit einer Marke an, die man auf die genannte Höhe schiebt. Oder man visiert den Strich $1{,}56^{\mathrm{m}}$ an einer über B lotrecht aufgestellten Nivellierlatte an. Die Visierlinie wird auf diese Weise der Geraden AB parallel, und der abgelesene Winkel giebt die vertikale Neigung der Verbindungslinie der Pfahlköpfe.

Trotz der sorgfältigsten Prüfungen und Berichtigungen wird ein Theodolit noch Mängel haben; und wäre er auch fehlerfrei, so würde die Unvollkommenheit des Beobachters dafür sorgen, daſs die mit ihm erzielten Meſsergebnisse mit Fehlern behaftet sind. Grobe Fehler oder konstante Fehler, die durch geeignetes Meſsverfahren oder durch Rechnung beseitigt werden können, lassen wir hier auſser acht. Bei den Messungen kann es sich nur um unvermeidliche oder unregelmäſsige Fehler handeln oder um schädliche Einflüsse, die sich wie bei der vis major des Juristen ohne unser Zuthun geltend machen und sich bei gröſster Sorgfalt nicht abwenden lassen. Wir werden nie behaupten können, daſs wir durch Messung die wahre Gröſse eines Winkels erhalten haben. Sollten wir bei der Messung der Winkel eines Dreiecks 180^0 als Summe gefunden haben, so wird uns gerade dieses Ergebnis stutzig machen; wir werden erst recht die Messung wiederholen. Thun wir solches zehnmal, so werden wir voraussichtlich zehn verschiedene Werte finden. Weichen die zehn Ergebnisse von der Wahrheit nach der einen oder andern Seite um den gleichen Betrag ab, so haben wir Messungen von gleicher Genauigkeit; oder sie sind von derselben Wahrscheinlichkeit, wenn es sich z. B. um die Messung eines einzigen Winkels handelt und die Abweichungen von dem wahrscheinlichsten Werte gleich sind.

Mit Rücksicht auf das Vorstehende wird der Landmesser wohl dran thun, nach Vornahme der früher geschilderten Prüfungen seinen Theodolit von Zeit zu Zeit einer allgemeinen Prüfung zu unterwerfen, die sich auf die Genauigkeit desselben bezieht.

Unter der Genauigkeit eines Instruments, hier des Theodolit, versteht man den mittlern zu befürchtenden Fehler, den man bei der Messung eines Winkels macht, oder die Abweichung des durch Messung erhaltenen Winkels von der wahrscheinlichen Gröfse desselben. Wie man sich ein Urteil über den Theodolit verschafft, möge folgendes Beispiel zeigen. Die Begründung der Formeln fällt aus dem Rahmen dieses Buches heraus. Nur sei der von altersher bekannte Satz als Grundsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung hergesetzt: das arithmetische Mittel ist der wahrscheinlichste Wert der unbekannten Gröfse.

Ein Winkel wurde siebenmal in verschiedenen Teilen des Limbus mit gleicher Sorgfalt und unter Ausschlufs von Centrierungsfehlern (siehe folg. §) gemessen. Es war

	α_i	v_i	v_i^2
1.	$13^0\ 55'\ 30''$	$-\ 11{,}43$	130,6449
2.	55 25	$-\ 6{,}43$	41,3449
3.	55 27,5	$-\ 8{,}93$	79,7449
4	55 22,5	$-\ 3{,}93$	15,4449
5.	55 10	$+\ 8{,}57$	73,4449
6.	54 55	$+\ 23{,}57$	555,5449
7.	55 20	$-\ 1{,}43$	2,0449
$\alpha =$	$13^0\ 55'\ 18{,}57''$	$+\ 32{,}14$	898,2143
		$-\ 32{,}15$	

Der Wert von α ist das arithmetische Mittel aus den sieben Messungen; die Fehler v sind durch Subtraktion des Haben α_i vom Soll α gebildet. Die algebraische Summe der Fehler mufs theoretisch Null sein. Der hier auftretende Unterschied Eins, in der negativen Summe als mehr erscheinend, erklärt sich aus der Vernachlässigung von Eins bei der Bildung des arithmetischen Mittels, da bei der Division durch 7 der Rest 1 blieb.

Der mittlere Fehler des Theodolit für eine einzelne Messung ist

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{898{,}2143}{6}} = \pm\ 12{,}24.$$

Der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels ist

$$M = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n\,(n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{898,2143}{7 \cdot 6}} = \pm 4,62.$$

Für eine folgende Beobachtung desselben Winkels unter Voraussetzung gleicher Sorgfalt und gleicher äufserer Verhältnisse können wir also annehmen, dafs sie einen Winkel nicht unter $13^0\ 55'\ 6,33''$ und nicht über $55'\ 30,81''$ liefert. Ferner wird die wahre Gröfse des Winkels zwischen $18,57 - 4,62 = 13,95''$ und $18,57 + 4,62 = 23,19''$ liegen.

Um jedoch ein möglichst vollständiges Urteil über die Genauigkeit des Theodolit zu gewinnen, dürfen wir es nicht bei einer einzigen Reihe von so wenigen Beobachtungen, wie die vorstehende, bewenden lassen. Es sind die Messungen in gröfserer Zahl und unter möglichst verschiedenen Verhältnissen zu wiederholen. — Die Gröfse des Winkels thut nichts zur Sache, sobald regelmäfsige oder konstante Fehler ausgeschlossen sind, wie es sein mufs. Als Maximalfehler nimmt man den dreifachen mittleren Fehler an.

In gleicher Weise würde man ein Längenmafs, etwa eine 5^m lange Mefslatte prüfen. Man mifst eine Strecke n mal und berechnet aus den Ergebnissen die obigen Gröfsen. Der mittlere Fehler der Längeneinheit d. h. der auf 1^m entfallende Fehler ist dann nicht $\frac{m}{5}$, sondern $m_1 = \frac{m}{\sqrt{5}}$.

Es diene noch folgendes Beispiel zur Erläuterung. Ein Klafter Scheitholz halte 5 Raummeter; die einzelnen Scheite sind viermal gezählt und man hat gefunden:

		v	v^2
1.	217	$-\ 4$	16
2.	225	$-\ 12$	144
3.	209	$+\ 4$	16
4.	201	$+\ 12$	144
	$\frac{852}{4} = 213$	$+\ 16$ $-\ 16$	320

Der mittlere Fehler einer Zählung ist $m = \pm \sqrt{\frac{320}{3}} = \pm 10$; der mittlere Fehler des Mittels aus allen Zählungen ist

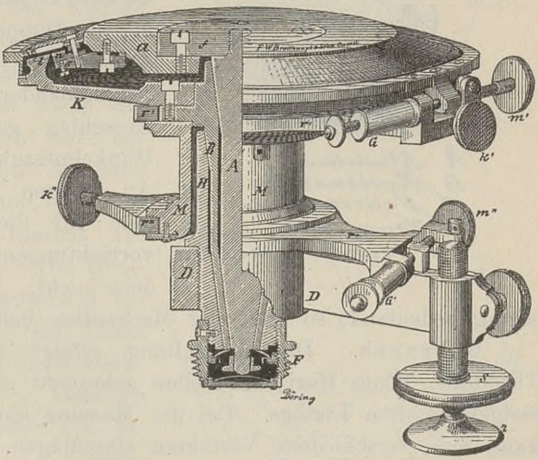
$$M = \pm \sqrt{\frac{320}{4 \cdot 3}} = \pm 5;$$

der mittlere Fehler der Zählung eines einzigen Raummeter in den fünf ist $m_1 = \frac{m}{\sqrt{5}} = \pm 4$. Mit dem mittlern Fehler ist der durchschnittliche nicht zu verwechseln. Dieser ist das Mittel aus der absoluten Summe der Fehler; im ersten Beispiele $\frac{64,29}{7} = 9,18''$, im letzten $\frac{32}{4} = 8$.

§ 32. Der Repetitionstheodolit.

Um die Ungenauigkeiten der Limbusteilung unter die unvermeidlichen Fehler zu bringen, mifst man den Winkel in verschiedenen Sektoren des Kreises. Dies kann man dadurch bewirken, dafs man den ganzen Theodolit nach der Messung auf dem Stativkopfe dreht und den Winkel abermals beobachtet, oder dadurch, dafs man den Limbus zum Drehen mit der Hand einrichtet, ohne den Dreifufs verschieben zu müssen. Am vollkommensten wird der Zweck erreicht, wenn der Limbus drehbar und zugleich mit einem Mikrometerwerke versehen ist. Durch diese Abänderung wird der einfache Theodolit zum Repetitionstheodolit.

Fig. 66.

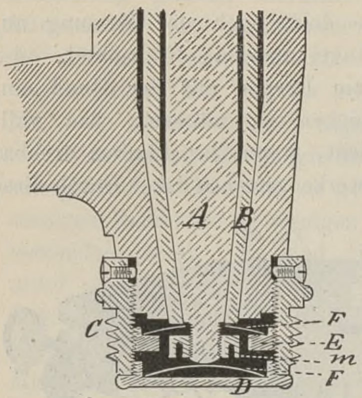


Der Dreifufs hat als Mittelstück die Büchse H; in dieser dreht sich die Büchse B, an welcher die Scheibe K mit dem Limbus l und behufs Anbringung der Hemmvorrichtung der Mantel M festsitzt. In der Limbusbüchse steckt die Alhidadenachse A, welche die Kreisscheibe mit den Nonien n trägt. Die geschlossenen Ringe r' und r'' mit ihren Bremsschrauben k' und k'' und den Mikrometerwerken bei m' und m'' ermöglichen die feine Bewegung der Alhidade bezw. des Limbus. In Fig. 67 ist die Verbindung der Achsen und Büchsen deutlicher sichtbar; man erkennt daraus zugleich, was man zu thun hat, um nötigenfalls die Achsen einzufetten.

Aufser den Prüfungen, die beim einfachen Theodolit vorzunehmen sind, kommt hier die folgende inbetracht. Der Horizontalkreis ist drehbar, er hat also eine Achse. Diese mufs mit der Achse der Alhidade zusammenfallen, mindestens ihr parallel sein. Sind beide Achsen parallel, so hat man eine Excentricität der Alhidade bezw. des Fernrohrs vor sich, welche durch Ablesen an beiden Nonien und Messen in beiden Lagen unschädlich wird.

Sind die beiden Achsen gegen einander geneigt, so wird nach Vertikalstellung der Limbusachse die Alhidadenachse nicht lotrecht stehen und das Fernrohr beim Kippen keine Vertikalebene beschreiben. Um den etwaigen Fehler zu entdecken, schraubt man den Horizontalkreis fest und stellt mit Hilfe der Röhrenlibelle die Achse der Alhidade lotrecht. Darauf klemmt man die Alhidade und löst den Limbus, dann mufs bei langsamem Drehen desselben die Blase fortwährend einspielen; weicht sie aus, so sind die beiden Achsen um das Doppelte des zum gröfsten Ausschlage gehörigen Winkels gegeneinander geneigt. Ist der Ausschlag gering, so wird die Winkelmessung wenig beeinflufst. An einigen Instrumenten findet man für diesen Fehler Justiervorrichtungen, im allgemeinen jedoch nicht. Ist deshalb der Ausschlag bedeutend, so mufs der Mechaniker helfen.

Fig. 67.



A Alhidadenaxe
B Kreisaxe
C Federgehäuse
F Tragfedern
m. Mutter d. Alhid. Axe.

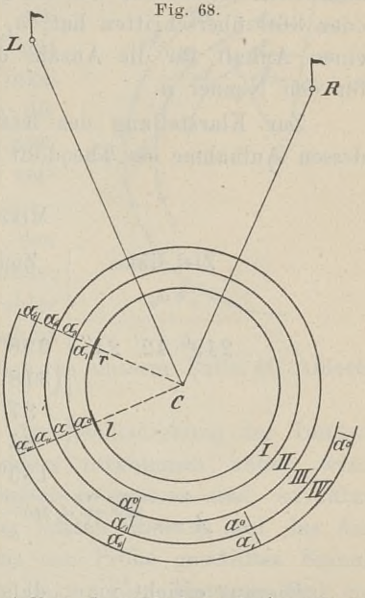
Gebrauch. Die Aufstellung erfolgt wie beim einfachen Theodolit. Zum Horizontalstellen gebraucht man die Alhidade mit festgeklemmtem Limbus. Bei der Messung eines Horizontalwinkels kann man verschiedene Verfahren einschlagen.

1. Man läfst während der Messung den Limbus geklemmt und arbeitet wie mit dem einfachen Theodolit. Um hierbei nicht die falsche, also die Limbusschraube zum feinen Einstellen zu greifen, umwickele man sie mit etwas Zeug oder Papier. Hat man aber eine Reihe von Winkeln nach einander zu messen, so kann man sich die Ablesungen und Subtraktionen erleichtern und die Arbeit beschleunigen. Man kann leichter den Nonius auf einen ganzen Grad einstellen, als ihn nach Teilen eines Grades ablesen.

Vor dem Verlassen einer Station bringe man Null des Nonius auf eine runde Zahl des Limbus, lese auch den zweiten Nonius ab und bewirke auf der folgenden Station die erste feine Einstellung auf Signal links mit dem Limbusmikrometer. Die übrige Arbeit ist die gewöhnliche, nur wird in der zweiten Lage die erste Ablesung wieder leichter.

2. Das von Tobias Mayer in Göttingen 1752 eingeführte Repetitionsverfahren hatte vorzugsweise den Zweck, sehr kleine, nicht mehr ablesbare Noniusteile nach mehrmaliger Anhäufung noch ermitteln zu können und den Einfluſs der unvermeidlichen Beobachtungsfehler möglichst gering zu machen. Es soll der Winkel LCR gemessen werden. Die Ablesungen geschehen an beiden Nonien; es genügt jedoch zur Erläuterung des Verfahrens, den Gang eines Nonius zu verfolgen. (Fig. 68.)

Fig. 68.



Man stellt das Fernrohr bei festem Limbus auf Ziel L ein und liest bei l am Nonius ab, nämlich a_0. Die feine Einstellung geschah mit dem Alhidadenmikrometer. Man läſst den Limbus fest, löst die Alhidade und führt das Fernrohr auf Ziel R. Die Ablesung a_1 bei r ist nicht unbedingt nötig, geschieht aber der Kontrolle wegen. Die Alhidade bleibt jetzt festgeklemmt und wird mit dem gelösten Limbus auf Ziel L zurückgeführt. Die Hemmung und feine Einstellung erfolgt von jetzt ab auf Ziel Links stets mit dem Mikrometerwerke des Limbus (links — Limbus). Dadurch, daſs CR nach CL gekommen ist, ist $\sphericalangle rCl$ zurückgedreht, a_0 ist nach a_1 des Kreises II gelangt; (die konzentrischen Kreise stellen den Limbus dar). Nach Lösung der Alhidade und abermaliger Einstellung auf R könnte man ablesen, man erhielte a_{11} und es wäre der Winkel $LCR = \frac{a_{11} - a_0}{2}$; nach viermaliger Messung würde er $= \frac{a_{\mathrm{IV}} - a_0}{4}$ sein.

In Fig. 69 denke man sich den einen Nonius unter der Visierlinie, um die Zurückdrehung des gemessenen Winkels noch deutlicher zu erkennen; die $n$te Ablesung sei a_n; dann ist

$$a_1 - a_0 = A_1$$
$$a_{11} - a_1 = A_{11}$$
$$a_{111} - a_{11} = A_{111}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n - a_{n-1} = A_n$$

Da die Differenzen A_i stets denselben Winkel $LCR = A$ geben sollen, so ist durch Addition

$$\frac{a_n - a_0}{n} = A.$$

Obgleich die Zwischenablesungen wegfallen, so ist es doch empfehlenswert, die Ablesung nach der ersten Einstellung auf R, nämlich a_1, zu machen. Man ersieht daraus am Schlusse der Rechnung, ob nicht ein grober Fehler untergelaufen ist und kann aufserdem feststellen, wie oft der betreffende Nonius den Punkt 0 oder 360 überschritten hat; $a_1 - a_0$ giebt auch nachträglich noch einen Anhalt für die Anzahl der Messungen, also eine Kontrolle für den Nenner n.

Zur Klarstellung des letzteren diene folgendes Beispiel, zu dessen Aufnahme ein Theodolit mit Schätzmikroskop benutzt wurde.

Mikroskop I.

Ziel links. a_0	Ziel rechts. a_n	Winkel. A_1
$249^0\ 42'\ 24''$	$298^0\ 51'\ 36''$	$49^0\ 9'\ 12''$
	(348 0 48	
	37 9 36	
	86 18 36)	
	$135^0\ 28'$	

$$\sphericalangle A = \frac{135^0\ 28' + 360^0 - 249^0\ 42'\ 24''}{5} = 49^0\ 9'\ 7{,}2''.$$

Hieraus ersieht man, dafs bei der dritten Einstellung rechts der Nullpunkt bezw. Punkt 360 zum ersten Male überschritten wird; denn es ist $249^0\ 42'\ 24'' + 3 \cdot 49^0 > 360^0$. Ferner kann nur die Zahl 5 Teiler sein; denn bei jedem anderen Teiler würde nicht annähernd 49^0 herauskommen. Angenommen, es sei die letzte Ablesung $a_n = 70^0\ 22'\ 41''$. Wie oft mufs 360^0 zu a_n hinzugezählt werden und ist der Winkel zehn- oder elfmal gemessen? Es ist Null zweimal überschritten und

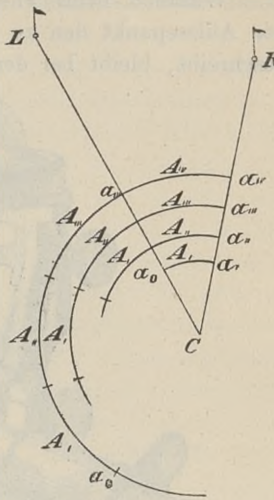
$$720^0 + 70^0\ 22'\ 41'' - 249^0\ 42'\ 24''$$

ist zu teilen. Die Division durch 10 ergiebt ein viel zu grofses Resultat, während der elfte Teil bis auf einige Sekunden mit A_1 übereinstimmt.

Um sich die Berechnung etwas bequemer zu machen, kann man $a_0 = 0^0\ 0'\ 0''$ nehmen. Die Ausrechnung für den Nonius II ist ebenfalls notwendig.

3. Will man mit dem Repetitionstheodolit einen Winkel etwa zehnmal in jeder Lage des Fernrohrs messen, so stelle man Nonius I mit Null auf Null des Limbus und visiere mit dem Limbusmikrometer Signal links genau an. Nun löse man die Alhidade und richte mit dem obern Mikrometer das Fernrohr auf Ziel rechts. Die Ablesung liefert für jeden Nonius den Winkel. Man stelle nun Nonius I mit Null auf 36^0 und messe den Winkel wiederum; darauf wiederhole man die Messung aus der Stellung 72^0, 108^0 u. s. w. In der zweiten Lage des Fernrohrs verfährt man ebenso.

Fig. 69.



Man mifst auf diese Weise den Winkel in allen Teilen des Limbus; Teilungsfehler des Kreises und Fehler in den Achsenstellungen des Theodolit werden ausgeglichen. Aus sämtlichen, in unserm Falle 40 Ableseergebnissen nimmt man das Mittel.

Fürchtet man, es möchte bei der Rechtsdrehung der Limbus etwas mitgezerrt sein, was besonders vorkommen kann, wenn mehrere Winkel um denselben Scheitel zu messen sind, so führe man das Fernrohr rechtsum aus der letzten Stellung auf das Anfangsziel oder ein beliebiges, eigens zur Probe gewähltes Signal. Die gleichen Ablesungen wie bei Beginn der Messung sind ein Zeichen für die unveränderte Stellung des Theodolit.

Vom Gebrauch des Repetitionstheodolit mit distanzmessendem Fernrohr handelt § 36.

§ 33. Die Bussole.

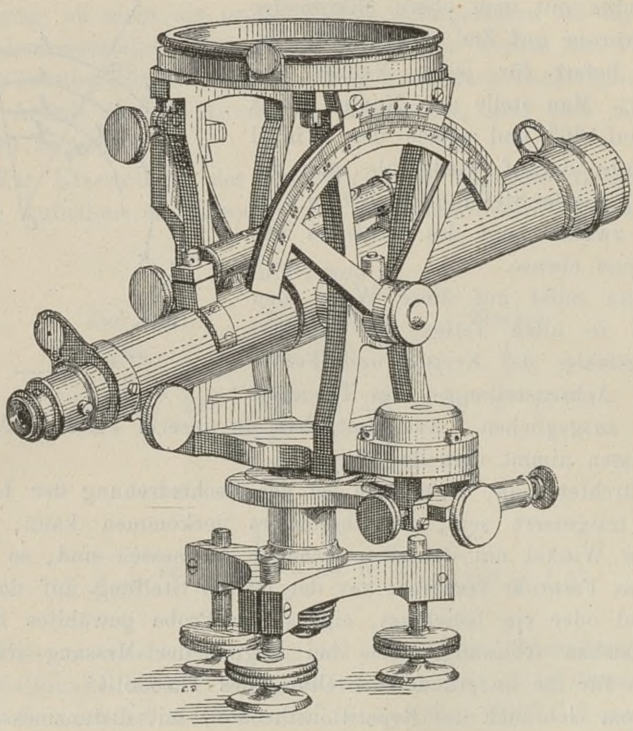
Die Bussole besteht aus einem Landkompafs mit einem Gradring statt der Strichrose, aus der Visiervorrichtung und dem Gestell.

1. Bei der Diopterbussole ist die Zielvorrichtung ein Diopter. Die einfachste derartige Einrichtung ist die Verbindung eines Kompasses mit der Winkeltrommel. Man befestigt denselben auf dem obern Boden der Trommel. Die Teile des Kompasses

sind das Messinggehäuse, die auf einem Stift schwebende Magnetnadel und der von 0^0 bis 360^0 geteilte Ring. Wird die Nadel nicht gebraucht, so wird sie von der Stahlspitze abgehoben und gegen den Glasdeckel gedrückt.

Während beim Theodolit der Limbus fest stehen bleibt und der Ablesepunkt den zu messenden Winkel von links nach rechts beschreibt, bleibt bei der Bussole der Ablesepunkt d. h. das Ende

Fig. 70.

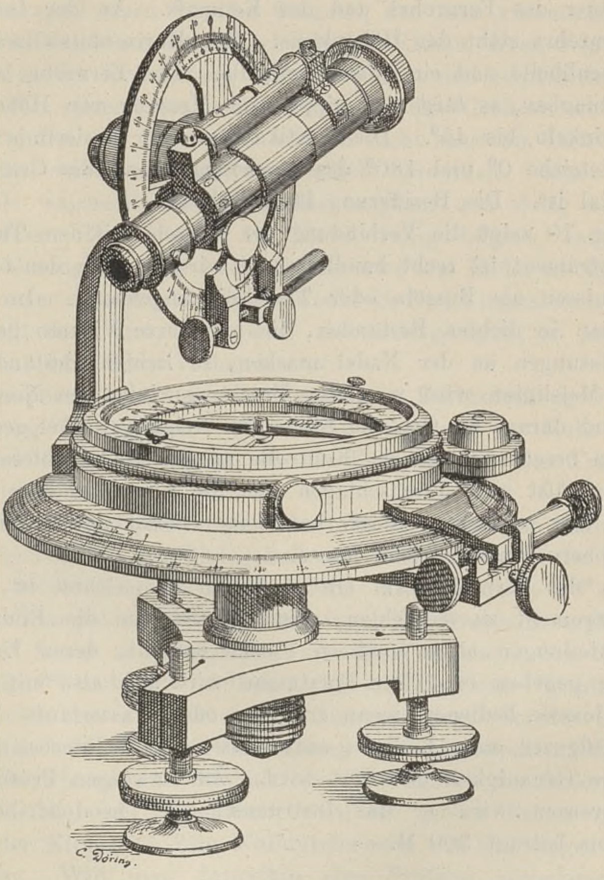


der Nadel unverändert stehen und der ganze Kreis dreht sich von links nach rechts. Weil man nun durch die Ablesungen einen positiven Winkel erhalten will, so mufs der Ablesepunkt bei der Einstellung auf Ziel rechts an höhere Zahlen kommen. Daraus erklärt sich der verschiedene Lauf der Bezifferung: beim Theodolit rechtsum, bei der Bussole linksum.

Zur Horizontierung der Bodenplatte des Kompasses oder zur Vertikalstellung des Tragstifts der Nadel benutzt man eine Dosenlibelle.

Je nach der Genauigkeit, die man mit der Bussole erzielen will, ist die Nadel und damit der Kreisdurchmesser verschieden lang und danach hat man das Instrument für ein entsprechendes Stativ eingerichtet. Für flüchtige Aufnahmen genügt oft ein Stockstativ. Zum Freihandgebrauch ist die Schmalkaldersche Bussole

Fig. 71.



geeignet. Der Kreisring ist auf dem Magnet befestigt, wie beim Schiffskompaſs und mit demselben drehbar; er bleibt also bei der Drehung des Gehäuses um die Vertikale in gleicher Lage. Die Absehlinie ist so angebracht, daſs man in dem unter dem Okulardiopter stehenden Prisma Null abliest, wenn dieselbe im magnetischen Meridian liegt. Dreht man die Absehlinie aus dem Meridian nach rechts heraus, so erblickt man unter dem Okular die Zahlen des Gradrings, welche die horizontale Neigung der Visur gegen den magnetischen Meridian ausdrücken. Die Bezifferung läuft hier rechtsum.

2. Die Fernrohrbussole wird durch die Fig. 70 und 71 veranschaulicht. In der Büchse des Dreifufses dreht sich der Vertikalzapfen der Bussole, auf demselben befindet sich die Platte für die Träger des Fernrohrs und des Kompafs. An der Drehachse des Fernrohrs steht der Höhenkreis. Zur Horizontalstellung dient die Dosenlibelle und eine Fernrohrlibelle. Das Fernrohr ist nicht durchschlagbar, es läfst sich kippen zur Messung von Höhen- und Tiefenwinkeln bis 45^0. Die Vertikalebene der Visierlinie enthält die Teilstriche 0^0 und 180^0 des Gradrings, wenn die Grundplatte horizontal ist. Die Bezifferung läuft linksum.

Fig. 70 zeigt die Verbindung der Bussole mit dem Theodolit. Das Instrument ist recht handlich und wird je nach den örtlichen Verhältnissen als Bussole oder Theodolit angewandt. Im Walde wird man in dichten Beständen, die nur kurze Visuren gestatten, die Ablesungen an der Nadel machen, in lichten Beständen mit langen Mefslinien wird man den Brechungswinkel am Nonius ablesen und daraus an Ort und Stelle den Neigungswinkel gegen den Meridian berechnen und zur Kontrolle an der Nadel ablesen. Das Fernrohr läfst sich durchschlagen und die Kompafsbüchse herausheben. Das zugehörige Stativ hat Beine, deren untere Teile sich in die obern hineinschieben lassen.

Da das Fernrohr zum Distanzmessen eingerichtet ist, so ist das Instrument zu empfehlen, wenn es sich um die Einmessung von Abteilungen einer gröfsern Fläche handelt, deren Umfangsmessung gegeben ist. Der Forstmann wird sich also mit Vorteil dieser Bussole bedienen, wenn er Wege oder Wasserläufe oder die Bestandsfiguren eines Revieres aufzumessen hat, da hierbei nur eine geringere Genauigkeit gefordert wird. Zur etwaigen Prüfung der Aufsengrenzen wird er das Instrument als Theodolit benutzen. Der Preis beträgt 300 M.

Die Prüfung, welche von Zeit zu Zeit wiederholt werden mufs, bezieht sich auf die Empfindlichkeit der Nadel.

Vermittelst der Libelle stelle man die Grundplatte des Kompafs horizontal, lasse die Nadel zur Ruhe kommen und lese an beiden Enden ab. Durch genähertes Eisen bringe man die Nadel aus der Ruhelage, entferne das Eisen und lese, wenn die Nadel wieder stillsteht, abermals ab. Hat die Nadel den frühern Stand nicht wieder eingenommen, so ist entweder der Tragstift stumpf oder der Magnetismus geschwächt. Der Stift ist zu ersetzen und nötigenfalls die Nadel neu zu magnetisieren.

Sollte sich bei horizontiertem Instrument zeigen, dafs die Enden der Nadel nicht in der Ebene des Kreisringes stehen, so ist das leichtere Ende zu beschweren. Man schneidet sich von einer Weinkapsel einen Streifen Stanniol, den man zusammenbiegt und auf die Nadel schiebt. Hochstehende Nadeln, deren Schneiden sich dicht an der Kreisteilung vorbei bewegen, sind empfehlenswert.

Ein für allemal ist nachzusehen, ob das Gehäuse und die Grundplatte frei von Eisen sind, oder ob nicht sonst am Instrument oder Stativ etwaige Eisenteile schädlich einwirken. Man stelle die Bussole wagerecht und drehe sie langsam und stetig um die Vertikalachse. Dann mufs die Nadel ruhig bleiben und eine baldige Ablesung möglich sein. Etwas wird die Nadel infolge der Reibung immer mitgezogen werden. Bleibt die Nadel irgendwo hängen und schnellt dann fort, oder wird sie niedergezogen, so ist dies ein Zeichen, dafs Eisen vorhanden ist.

Es empfiehlt sich, aus der langsamen Rechtsdrehung in die Linksdrehung überzugehen. Man sieht dann aus der Ruhe oder dem Zurückbleiben der Nadel, ob die Reibung auf dem Tragstift nicht zu grofs ist.

Ist der Kompafs mit einem Theodolit verbunden, so kann man die Prüfung zugleich auf Eisengehalt und Empfindlichkeit der Nadel anstellen, indem man die Alhidade um Winkel von je 10^0 dreht und die Ablesungen an der Nadel mit denen am Theodolit vergleicht.

Es ist ferner zu untersuchen, ob die Visierebene den Durchmesser mit 0^0 und 180^0 enthält. Es ist dies von Wichtigkeit, wenn es sich um die horizontale Neigung einer Geraden gegen den Meridian handelt. Auf die Messung eines abgesteckten Winkels ist die Abweichung ohne Einflufs, da die Differenz der Ablesungen dieselbe bleibt. Im allgemeinen wird ein grober Fehler in der Stellung der Kippebene zum Nulldurchmesser des Gradringes nicht vorkommen. Will man daraufhin eine Prüfung vornehmen, so mufs man die geographische Nordrichtung für den Ort und die Mifsweisung der Nadel für Zeit und Ort kennen. Ist das der Fall, so stelle man die Absehlinie in den Meridian und überzeuge sich, ob die Nadel um den bekannten Winkel aus der Kippebene abweicht. Annähernd genau kann man verfahren, indem man das Fernrohr auf den Polarstern richtet und die Mifsweisung abliest.

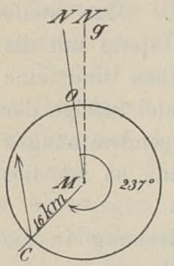
Die Excentricität der Nadel kann daher rühren, dafs die

Achse des Magneten nicht durch den Mittelpunkt des Gradrings geht oder der Tragstift nicht im Centrum steht. Dieser Fehler wird unschädlich durch Ablesen an beiden Enden der Nadel.

Der Gebrauch der Bussole ist begründet in der unveränderlich gegebenen Grundrichtung der Nadel.

Von einem bekannten Punkte M aus soll die Lage eines Punktes C in Fig. 72 bestimmt werden. Die Luftlinie von Münden nach Cassel sei 16^{km} lang. Damit ist C noch nicht festgelegt, es kann auf dem Kreise um M mit dem Radius 16^{km} liegen. Es muſs auch die Richtung MC bekannt sein, in der man zu gehen hat. Diese Richtung bezieht man auf eine Grundrichtung, welche überall zwischen M und C festliegt. Es ist das die Richtung nach dem magnetischen Nordpole, welche durch die Magnetnadel angezeigt wird, nämlich MN. Ist nun die Abweichung von MC aus der Richtung MN d. h. der Winkel $NMC = 237^0$ gegeben, etwa auf der Karte einschlieſslich Miſsweïsung abgemessen, so hat man unter diesem Winkel zur Nord-Südrichtung zu gehen, um von Münden aus Cassel aufzufinden.

Fig. 72.



Trägt man den Kompaſs in der Hand, so lasse man das Nordende der Nadel auf Null zeigen und gehe in der Richtung des Radius, der bei rechtsläufiger Bezifferung zu 237^0, bei linksläufiger zu 123^0 gehört.

Ist C von M aus mit dem Fernrohre zu erreichen, so miſst man den Winkel NMC, indem man die Bussole über M horizontal aufstellt. Die Nadel stehe auf dem Nulldurchmesser, dann ist gleiches mit der Visierlinie des Fernrohrs der Fall. Nun drehe man nach rechts, bis das Fernrohr auf C gerichtet ist. Die Nadel zeigt noch immer nach N, aber der Kreisring hat sich unter der Nadel um 237^0 fortgedreht.

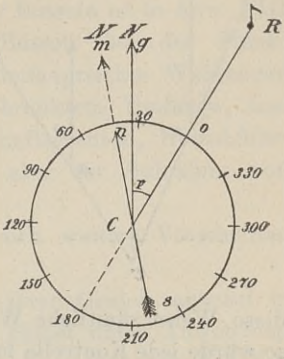
Dieser Winkel NMC ist ein Element für die Punktbestimmung durch Polarkoordinaten, es ist der Richtungswinkel mit der Grundrichtung.

Amtlich heiſst der genannte Winkel Neigungswinkel oder das Azimuth; er wird bezeichnet mit v und ist nicht auf die magnetische, sondern auf die geographische Nordrichtung zu beziehen, wie es in Fig. 73 geschehen ist. Auſserdem besteht die

Vorschrift, daſs der Neigungswinkel durch Rechtsdrehung der Nordrichtung, also durch Drehung über Ost entsteht.

Diese Vorschrift hat Veranlassung gegeben, die Bezeichnung für Ost und West auf dem Kompaſs zu vertauschen, was besonders dem Markscheider bei der Bestimmung des Streichwinkels zu statten kommt.

Fig. 73.



Soll man den richtigen Neigungswinkel für die Richtung oder Strecke CR in Fig. 73 messen, so hat man die sog. **Deklination** oder **Miſsweisung** der Magnetnadel zu berücksichtigen. Die Nadel steht heutzutage bei uns nicht im geographischen Meridian, sondern weicht aus demselben nach links ab. Die Richtung nach dem magnetischen Pole bildet mit der geographischen Nordrichtung einen Winkel, welcher auf der Westseite des Meridians liegt und in diesem Jahre für Münden die Gröſse 11^0 hat.

Stellt man nun die Bussole über C auf und läſst die Nadel auf Null einspielen, so muſs man zunächst das Fernrohr um die Gröſse der Miſsweisung nach rechts drehen, um es in den geographischen Meridian zu bringen. Nun erst beschreibt man bis CR den gesuchten Neigungswinkel. In der Ablesung steckt deshalb die Miſsweisung; sie ist abzuziehen.

Ist die Ablesung 44^0 und die Miſsweisung 11^0, so ist das richtige Azimuth von CR: $\nu = 44^0 - 11^0 = 33^0$.

Will man einen im Felde abgesteckten Winkel LAR messen, so hat man für den Scheitel A die Neigungswinkel ν_r und ν_l der beiden Schenkel zu messen. Ihre Differenz giebt in Fig. 74 ohne weiteres den $\sphericalangle LAR = \nu_r - \nu_l$.

Fig. 74.

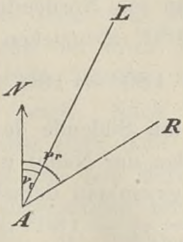
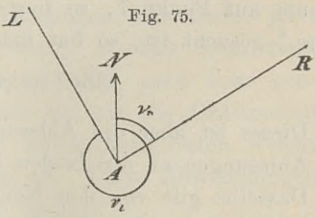


Fig. 75.



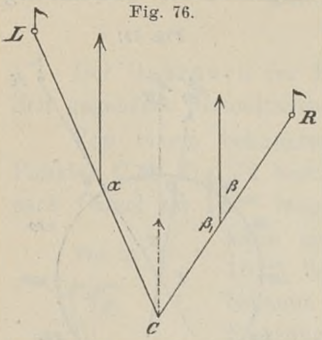
Wird die Differenz negativ, so sind 360^0 zu addieren, wie Fig. 75 zeigt.

$$LAR = 360^0 - \nu_l + \nu_r = \nu_r - \nu_l + 360^0.$$

Die Miſsweisung der Nadel ist hierbei gleichgiltig.

Um in Fig. 76 den Winkel C zu messen, braucht man sich nicht im Scheitel aufzustellen, sondern kann irgendwo in jedem Schenkel einen Punkt wählen und dort die Azimuthe von LC und CR bestimmen. Dann ist

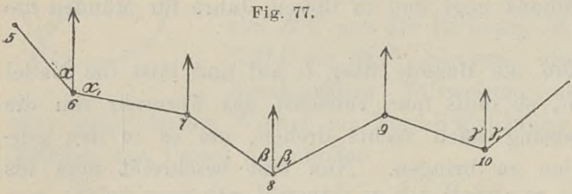
Fig. 76.



$$C = 180^0 - \alpha + \beta.$$

Aus diesem Grunde braucht man, um die Winkel eines Meſszuges zu finden, die Bussole nicht in jedem Eckpunkte aufzustellen, sondern kann immer eine Ecke überschlagen, man kann in sogen. Sprungständen messen (Fig. 77). Wollte man auf diese Weise sämtliche Winkel eines geschlossenen Polygons messen, so würde jede Kontrolle fortfallen. Die Berechnung der theoretischen Winkelsumme $(n - 2) \cdot 180^0$ wird stets herauskommen. Aber die Brechungswinkel will man auch nicht haben, es wird nur der Neigungswinkel einer jeden Strecke gesucht. Und dabei kann man das Verfahren der Sprungstände mit Vorteil verwerten.

Fig. 77.



Stellt man sich mit Überspringen von Punkt 7 in 8 auf, so erhält man durch Visieren auf Punkt 9 am Nordende der Nadel $\nu_8{}^9 = \beta_1$. Dreht man das Fernrohr aus der Nordrichtung rechtsum auf Punkt 7, so liest man am Nordende $360^0 - \beta$ ab. Da $\nu_7{}^8$ gesucht ist, so hat man 180^0 abzuziehen und erhält

$$360^0 - \beta - 180^0 = 180^0 - \beta.$$

Dieses ist aber die Ablesung am Südende der Nadel, da sich die Ablesungen an den beiden Enden der Nadel um 180^0 unterscheiden. Dasselbe gilt von den Neigungswinkeln derselben Strecke in ihren beiden Endpunkten; es ist $\nu_a^b = \nu_b^a - 180^0$ oder $\nu_b^a = \nu_a^b + 180^0$.

Daraus ergiebt sich die Regel für die Messung in Sprungständen: Bei der Visur vorwärts lese man am Nordende, und bei der Visur rückwärts am Südende der Nadel ab. Die Deklination ziehe man sofort ab.

Zur Vermeidung von Irrtümern fertige man sich zugleich bei den Richtungsbestimmungen oder Peilungen eine möglichst genaue Handzeichnung an.

Ein Urteil über die Genauigkeit der Bussole ist in Anw. VIII § 84 enthalten: Die Anwendung der Bussole bei der Stückvermessung ist nur bei der Aufnahme umfangreicher Waldungen und auch hierbei nur in möglichst beschränktem Umfange, insbesondere zur Aufnahme von Forstwirtschaftsgrenzen, Holzabfuhrwegen, Wasserläufen u. dgl. m., niemals aber zur Aufnahme von Eigentumsgrenzen gestattet.

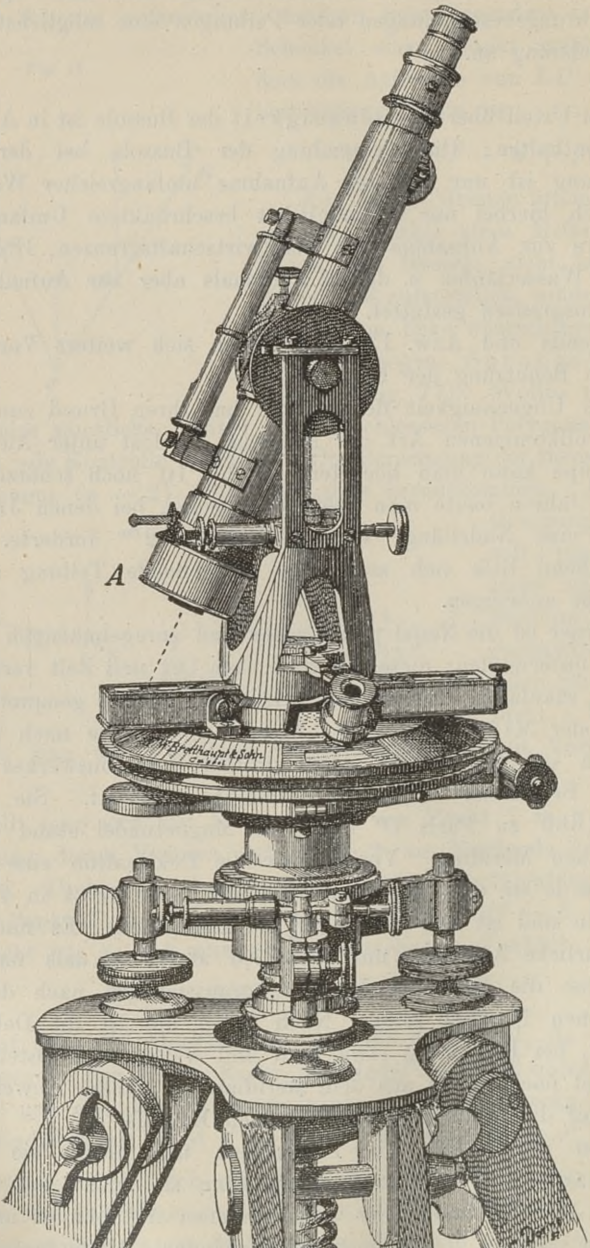
Ebenda und Anw. IX § 53 finden sich weitere Vorschriften über die Benutzung der Bussole.

Die Ungenauigkeit der Bussole hat ihren Grund zunächst in der unvollkommenen Art des Ablesens. Selbst unter Anwendung einer Lupe kann man höchstens 15 bis 10′ noch schätzen. Vor hundert Jahren baute man gröfsere Bussolen, bei denen Joh. Tob. Mayer eine Nadellänge von mindestens 12^{cm} forderte. Dementsprechend liefs sich auch eine weitgehende Teilung auf dem Gradringe anbringen.

Ferner ist die Nadel periodischen und unregelmäfsigen Schwankungen unterworfen; dieselben sind nach Ort und Zeit verschieden. Zu den säkularen Änderungen gehört die bereits genannte Deklination oder Mifsweisung der Nadel. Sie wurde nach den Mitteilungen im vierten Bande des grofsen Columbuswerkes (1894) am 13. September 1492 von Columbus entdeckt. Sie war im Jahre 1663 zu Paris 0^0 d. h. die Magnetnadel stand im geographischen Meridian. Vorher war die Deklination eine östliche, dann wurde sie eine westliche, erreichte gegen 1814 in Paris das Maximum und ist seit dieser Zeit im Abnehmen. Es findet jetzt eine jährliche Abnahme um etwa 7,5′ statt, so dafs nach rund 90 Jahren die Nadel in Münden voraussichtlich nach dem geographischen Nordpol zeigt. Nach Osten hin ist die Deklination geringer, bei Petersburg etwa Null und weiter nach Osten weicht die Nadel nach rechts aus dem Meridian ab. Diese Abweichungen haben auf die Winkelmessungen keinen Einflufs.

Man merke sich die Deklination und bringe sie an den Bussolenazimuthen in Abzug. Man kann sie auch ganz vernachlässigen, die Zeichnung der aufgemessenen Abteilungen anfertigen und diese dann in den Rahmen der vorhandenen Umfassungsmessung hineinpassen. Hat man Wege oder Wasserläufe aufzunehmen, so

Fig. 78.



kann man ebenso verfahren, wenn man die erforderlichen Anschlufspunkte auf der Karte und im Felde hat.

Mehr als die genannten wirken die Schwankungen der Nadel während des Jahres und Tages auf die Messungen ein. Nimmt man einen mittlern magnetischen Meridian an, so kann man einen westlichen und östlichen Stand zu beiden Seiten dieses Meridians unterscheiden. Der Winkel, zwischen dessen Schenkeln sich die Nadel im Laufe des Jahres bewegt, beträgt im Durchschnitt $10'$; er ist am gröfsten im Sommer.

Um die täglichen Schwankungen bequem zu beobachten, hat die Werkstatt Breithaupt-Cassel das Instrument in Fig. 78 hergestellt. Dasselbe ist ein Repetitionstheodolit mit einem Limbus von 15^{cm} Durchmesser und $30''$ Ablesung. Den genannten Zweck erfüllt es dadurch, dafs zwischen die Träger ein Kastenkompafs geschoben wird, dessen Nadel mit Indexstrichen versehen ist und durch das Fernrohr mit Hilfe einer Vorsetzlinse einvisiert werden kann. Entfernt man Kompafs und Vorsetzlinse, so kann man das Instrument wie jeden Repetitionstheodolit gebrauchen.

Um die Magnetnadel in ihren Schwankungen, also die Richtungen des Erdmagnetismus zu kontrollieren, bringt man den Index der in Ruhelage befindlichen Nadel zwischen die zwei Vertikalfäden des Fadenkreuzes und liest an den beiden Nonien ab. Nach Verlauf von je einer Stunde etwa wiederholt man die Beobachtung. Der Indexstrich der Nadel hat sich aus dem Fadenkreuze entfernt; vermittelst des Alhidadenmikrometers stellt man die Visierlinie wieder ein und liest die Nonien wieder ab. Der Unterschied der Ablesungen ergiebt die Gröfse der magnetischen Schwankung in der betreffenden Zeit.

Die Ablesungen können auch direkt geschehen an den Strichen, welche auf dem Kompafsringe dem Indexstriche gegenüberstehen, oder an einer in etwa 20^{m} angebrachten Skala, für welche man den Winkelwert der Teile gemessen oder berechnet hat.

Bisweilen zeigen sich aufsergewöhnliche Abweichungen der Nadel, die von elektrischen Erscheinungen in der Atmosphäre herrühren können, meist aber durch Vorgänge auf der Sonne hervorgerufen werden. Verfasser hat das Instrument so aufgestellt, dafs zu einer bestimmten Stunde vor- und nachmittags der Strich auf der Nadel zwischen den Fäden des Fernrohrs steht. Ist das nicht der Fall und die Abweichung auffallend grofs, so läfst sich mit einiger Gewifsheit behaupten, dafs entweder ein grofser Fleck am Ostrande der Sonne erscheint oder sich plötzlich ein solcher auf der zugewandten Seite bildet. Die Schwankungen der Nadel sind besonders stark alle 11 Jahre, zur Zeit des häufigsten Auftretens der Flecken.

In Europa haben nachweislich die Italiener im dreizehnten Jahrhundert die Magnetnadel zuerst benutzt, sie mit der Windrose verbunden und damit den Schiffskompaſs eingeführt. Aus der Windrose wurde die Strichrose der Schiffer. Das Wort bussola ist spätlateinisch und bedeutet Büchse. Die Bussole oder der Kompaſs diente zur Orientierung, wie auch heute noch. Diese Bezeichnung rührt nicht davon her, daſs die Nadel in frühern Jahrhunderten etwa nach Ost zeigte. Es war vielmehr auf der Strichrose des Kompasses die Richtung Ost, die Richtung nach dem Orient, durch ein Kreuz bezeichnet. Es war dies die Richtung nach dem Lande, auf das sich die Blicke des damaligen Abendlandes richteten.

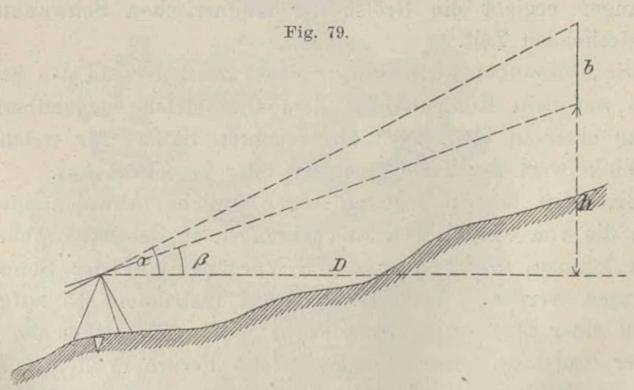
§ 34. **Der Höhenkreis als Distanzmesser.**

Die für den Landmesser in Frage kommenden Distanzmesser sind Instrumente, mit denen man von einem Punkte aus die Entfernung eines zweiten Punktes bestimmen kann, ohne den Beobachtungspunkt zu verlassen.

Da es sich um die Bestimmung einer Gröſse handelt, die in Metern ausgedrückt werden soll, so muſs eine gleichbenannte Gröſse, die Basis, gegeben sein. Diese kann eine konstante oder veränderliche Länge haben. Umgekehrt wird dann der Sehwinkel veränderlich oder konstant sein.

Es soll im Folgenden der erste Fall besprochen werden. Die

Fig. 79.



Basis von gegebener Länge befindet sich in dem Punkte, dessen Entfernung man sucht; es sei eine lotrecht stehende Gerade.

Würde die Basis horizontal liegen, etwa die bekannte Breite eines Hauses sein, so könnte man den Horizontalkreis zum Messen des Sehwinkels benutzen. Man müfste dann aber wissen, welchen Winkel die Basis mit der Visierlinie nach dem einen Ende derselben bildet. Das ist nur sehr selten der Fall. Nur wenn man das Azimuth der Basis kennt und die Nordrichtung am Beobachtungsort gegeben ist, oder wenn die Basis aus zwei bekannten Teilen besteht, läfst sich der betreffende Winkel finden. Ein Beispiel hierzu findet sich unter 7. des § 50.

Die vertikale Basis wird mit der Visierlinie nach dem einen Ende derselben je nach Entfernung und Erhebung auch verschiedene Winkel bilden; derselbe läfst sich aber in jedem Falle messen, da die vertikale Grundrichtung vorhanden ist. Deshalb kann nur vom Höhenkreise als Distanzmesser die Rede sein.

Die bekannte Basis: eine Latte, ein Fenster, die Fangstange eines Blitzableiters sei b in Fig. 79. Man findet den Sehwinkel als die Differenz der beiden Höhenwinkel α und β. Es ist

$$h + b = D \cdot \operatorname{tg}\alpha, \quad h = D \cdot \operatorname{tg}\beta;$$

$$b = D \cdot \operatorname{tg}\alpha - D \cdot \operatorname{tg}\beta$$

$$D = \frac{b}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} = \frac{b \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Durch Einsetzung von D in die erste Formel erhält man

$$h = \frac{b \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta}{\sin(\alpha - \beta)} \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{b \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Als hinreichend genaues Ergebnis bei grofser Entfernung und kleinem Sehwinkel kann man setzen

$$\text{Visierlinie} = \frac{\varrho}{\alpha - \beta} \cdot b^{m}$$

$$D = \frac{\varrho}{\alpha - \beta} \cdot b \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Um den Höhenunterschied der beiden Geländepunkte zu erhalten, mufs die Basis auf dem Boden stehen. Es ist die Instrumentenhöhe zu h hinzuzuzählen.

Eine horizontale konstante Basis benutzt der Artillerist. Er mifst aber mit einem Sextanten an beiden Enden seiner Batterie die Winkel, welche von der Basis und den Visierlinien nach einem Punkte der Festung gebildet werden.

§ 35. Das Fernrohr als Distanzmesser.

Im vorigen Paragraphen war der Sehwinkel für die bekannte Basis veränderlich und wurde gemessen; hier soll die Basis veränderlich sein und ihre Länge durch einen unveränderlichen Sehwinkel bestimmt werden. Die jedesmalige Basis soll ein Teil einer Nivellierlatte sein, die in dem entfernt liegenden Punkte lotrecht aufgestellt ist. Der konstante Sehwinkel wird durch die eigenartige Einrichtung des Fadenkreuzes gebildet, welche in den siebziger Jahren des vorigen Jahrhunderts durch William Green eingeführt wurde.

Das Fernrohr mufs mit einem Höhenkreise verbunden sein, um die geneigte Entfernung der beiden Punkte auf den Horizont projicieren zu können.

Zu leichterem Verständnis sei daran erinnert, dafs bei dem Fadenkreuze mit zwei Vertikalfäden die angezielte Bake um so dünner erscheint, je gröfser die Zielweite ist. Während bei 50^{m} Entfernung die Bake rechts und links über die beiden Fäden hinausragt, wird bei 400^{m} der Raum zwischen ihnen gar nicht ausgefüllt.

Oder will man den Durchmesser eines Baumes in Brusthöhe finden, so strecke man den Arm seitwärts leicht aus, halte den Daumen nach oben und wähle die Entfernung so, dafs der Durchmesser des Baumes vom Daumen genau gedeckt wird. Nun schreite man die Strecke bis zum Baume mit gleichen Schritten ab und multipliziere die Zahl der Schritte mit einer durch Versuche gefundenen Zahl; man bekommt so in Centimetern den gesuchten Durchmesser. Hier ist der Sehwinkel durch den Daumen und seine Entfernung vom Auge konstant. Je gröfser der Abstand vom Baume sein mufs, desto gröfser ist der Durchmesser.

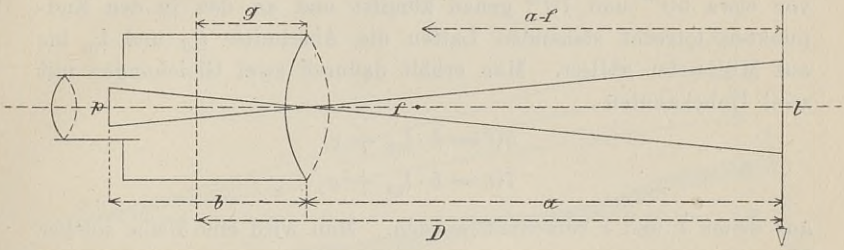
Um an einer lotrechten Latte ein Stück in ihrer Länge abzulesen, sind mindestens zwei Horizontalfäden erforderlich, die den Sehwinkel bestimmen. Zwischen seine Schenkel kommt ein um so längeres Lattenstück zu liegen, je weiter die Latte entfernt ist.

Beim distanzmessenden Fernrohr hat man nun drei Horizontalfäden oder drei auf einer Glasplatte eingerissene Striche: den gewöhnlichen langen Strich in der Mitte des Gesichtsfeldes und oben und unten einen kürzeren Strich in gleichem Abstande vom Mittelstrich. Die beiden kürzern Fäden sind die eigentlichen Distanzfäden. Man kann sie bei abgeschraubtem Okular leicht in Augenschein nehmen.

Der Abstand der Distanzfäden von einander läſst sich messen, er ist konstant; dasselbe gilt von der Brennweite des Objektivs. Die Entfernung des Fadenkreuzes oder des Bildes vom Objektiv richtet sich nach der Entfernung der anvisierten Latte. Der Zusammenhang zwischen beiden ist in § 12 gefunden. Das von den Distanzfäden begrenzte Lattenstück wird abgelesen.

Die Entfernung der Latte von der Drehachse des Fernrohrs wird gesucht. Es sei a der Abstand der Latte vom Objektiv,

Fig. 80.



b der Abstand des Bildes vom Objektiv, p die Entfernung der Distanzfäden von einander und l der zwischen diesen Fäden liegende Lattenabschnitt. Dann ist in Fig. 80

$$a : b = l : p.$$

Nach Formel 5) in § 12 ist $b = a_1 = \frac{af}{a-f}$

daher $$a : \frac{af}{a-f} = l : p \text{ oder } \frac{a-f}{f} = \frac{l}{p}$$

1) . . . . $$a - f = \frac{f}{p} \cdot l.$$

Ist die Entfernung der Drehachse vom Objektiv gleich g, so ist der Abstand der Latte von der Drehachse

$$D = a - f + f + g$$

$$D = \frac{f}{p} \cdot l + f + g$$

Es seien die konstanten Gröſsen $\frac{f}{p} = k$ und $f + g = c$, so ist

2) . . . . $$D = k \cdot l + c.$$

Diese Formel gilt für das einfache Fernrohr und für die Okulare von Ramsden und Kellner, weil das Lattenbild zwischen den Distanzfäden unabhängig vom Okular ist. Beim Okular von Huygens müſste dagegen für verschiedene Augen das Fadenkreuz verschoben werden und damit würden verschieden lange Lattenstücke in die Formel kommen.

Für die schnelle Berechnung ist es angenehm, wenn die Konstante k eine runde Zahl, etwa 100 oder 50 ist. Die Zahl c schwankt zwischen 15^{cm} und 50^{cm} je nach der Gröfse des Fernrohrs; sie läfst sich für jedes Instrument genau genug abgreifen.

Immerhin ist es notwendig, das Instrument auf die Konstanten k und c zu prüfen. Das geschieht in der Weise, dafs man auf horizontalem Boden vom Lotpunkte des Instruments zwei Strecken von etwa 50^{m} und 70^{m} genau abmifst und an den in den Endpunkten lotrecht stehenden Latten die Abschnitte l_{50} und l_{70} bis auf Millimeter abliest. Man erhält dadurch zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten

$$50 = k \cdot l_{50} + c$$
$$70 = k \cdot l_{70} + c,$$

aus denen k und c berechnet werden. Man wird eine Reihe solcher Versuche anstellen.

Hat der Mechaniker $k = 100$ und $c = 0{,}40^{\text{m}}$ angegeben, so kann man auch Strecken von etwa $65{,}40^{\text{m}}$ oder $73{,}40^{\text{m}}$ oder $107{,}40^{\text{m}}$ abstecken und nachsehen, ob die Ablesungen an der Latte $l = 65^{\text{cm}}$ oder 73^{cm} oder 107^{cm} sind.

Es kann vorkommen, dafs man nicht das ganze Lattenstück mit dem Auge übersehen kann, welches zwischen den beiden Distanzfäden liegt. Es rage z. B. das obere Lattenende in die Zweige von Fichten hinein; dadurch wird es unmöglich, an dem untern Faden abzulesen. Man lese am Mittelfaden und obern Distanzfaden ab und nehme den Unterschied der Ablesungen doppelt. Man ersieht hieraus, dafs die Distanzfäden daraufhin zu prüfen sind, ob ihre Abstände vom Mittelfaden gleich sind.

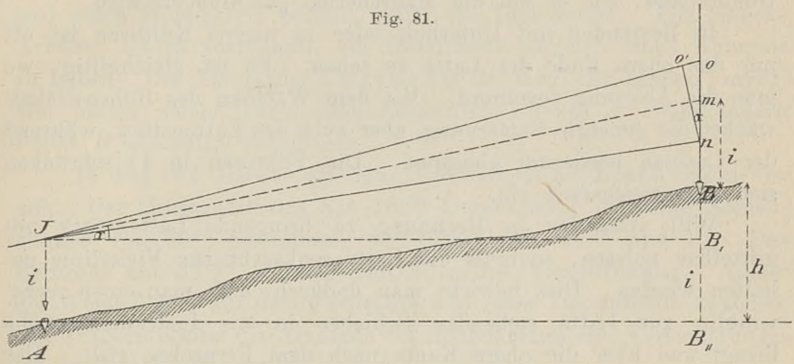
Aus dem Vorstehenden ergiebt sich ohne weiteres der Gebrauch des Distanzmessers auf horizontalem Boden oder für den Fall, dafs die lotrechte Latte von der wagerechten Absehlinie senkrecht getroffen wird. Liest man ab $u = 1{,}654$ und $o = 0{,}347$, so ist für $k = 100$ und $c = 0{,}18^{\text{cm}}$

$$D = k \cdot (u - o) + c = 100 \cdot 1{,}307 + 0{,}18 = 130{,}88^{\text{m}}.$$

Man merke sich bei der Einstellung auf die Latte zunächst den Mittelfaden; ist die Abweichung aus der Horizontalen nur gering, so stelle man ihn auf eine runde Zahl. Im Beispiele stand er auf dem Lattenstrich 1,000; man kann dadurch schnell die Ablesungen kontrollieren. Die halbe Summe derselben mufs die Zahl am Mittelfaden geben.

Ist die Linie zwischen A und B eine geneigte, so bestimmt man in A die Instrumentenhöhe bis zur Drehachse und richtet den Mittelfaden auf den Punkt dieser Höhe an der in B lotrecht stehenden Latte. Man liest am untern und obern Faden ab und erhält $l = ou$. Darauf ermittelt man am Höhenkreise den Elevationswinkel α, welcher die Neigung von AB giebt, da $Bm = i$ ist (Fig. 81).

Fig. 81.



Es ist $uo' \perp Jm$, deshalb $\sphericalangle ouo' = mJB_1 = \alpha$ als Winkel mit gegenseitig senkrechten Schenkeln. Nahezu wird uo' auch senkrecht zu Jo sein, weshalb

1) . . . . $uo' = uo \cdot \cos\alpha$

gesetzt werden kann. Dieses ist das Lattenstück, welches wie auf horizontalem Boden als senkrecht zur Zielachse anzusehen ist. Hierzu gehört die geneigte Entfernung

2) . . . $Jm = k \cdot uo' + c = k \cdot uo \cdot \cos\alpha + c\,.$

Nun ist $JB_1 = Jm \cdot \cos\alpha$, also

3) . . . $JB_1 = D = (k \cdot uo \cdot \cos\alpha + c) \cdot \cos\alpha$

oder genau genug

4) . . . $D = k \cdot uo \cdot \cos^2\alpha + c$ oder

$$D = (k \cdot uo + c) \cdot \cos^2\alpha\,.$$

Der Höhenunterschied der beiden Punkte A und B ergiebt sich leicht aus der Figur; es ist

$$h = i + BB_1 = i + B_1m - Bm = i + B_1m - i$$

5) . . . $h = D \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = Jm \cdot \sin\alpha\,.$

Visiert man die Latte nicht im Punkte der Instrumentenhöhe i, sondern in der Höhe i_1 an, etwa eine Marke, die man ein für allemal in derselben Höhe angebracht hat, so ist

6) . . . . . $h = D \cdot \operatorname{tg} \alpha + i - i_1$.

Man hat Latten, die an dem einen Rande besondere Marken tragen zum leichtern Ablesen der ganzen Meter und am andern Rande eine verschiebbare Marke haben, die man auf das jedesmalige i einstellen kann. Statt der letztern genügt meist ein Gummiband, wie es um die Manschetten geschlungen wird.

In Beständen mit Unterholz oder in jungen Kulturen ist oft nur das obere Ende der Latte zu sehen. Es ist gleichgiltig, wo man die Ablesung vornimmt. Mit dem Wachsen des Höhenwinkels wächst die geneigte Entfernung, aber auch das Lattenstück, während der Cosinus wiederum abnimmt. Die Faktoren in 4) schränken sich also gegenseitig ein.

Will man das in Rechnung zu bringende Lattenstück unmittelbar ablesen, so mufs die Latte senkrecht zur Visierlinie gehalten werden. Dies bewirkt man dadurch, dafs man einen rechtwinklig zur Latte stehenden Schieber in die Instrumentenhöhe bringt und über die obere Kante nach dem Fernrohre zielt. Der Beobachter selbst kann mit dem Fernrohre die Lattenstellung überwachen. Er darf weder von der untern noch der obern Schieberfläche etwas sehen.

Rechnet man nach der Formel 4), so macht man einen bebelanglosen Fehler, der bei $\alpha < 11^0$ kaum 1^{cm} beträgt. Wollte man den Fehler berechnen, so hat man den Ausdruck in 4) von demjenigen in 3) abzuziehen Die Differenz wird den Faktor $1 - \cos\alpha$ enthalten Nun ist von 0^0 bis 11^0 der $\cos\alpha > 0{,}98$, $1 - \cos\alpha < 1 - 0{,}98$ oder $< 0{,}02$, was mit $c < 1$ multipliziert Unbedeutendes giebt

Die Genauigkeit des Distanzmessers hängt ab von der Genauigkeit des Zielens, der Schärfe des Ablesens und der Stellung der Latte, welche bei freihändiger Aufstellung immer einiger Schwankung unterworfen sein wird. Da mit der Entfernung infolge der Luftbewegung und der Lichtabnahme auch die Lattenfelder weniger deutlich erscheinen, so wird auch bei gröfseren Entfernungen ein gröfserer Fehler entstehen. Für kleinere Entfernungen von etwa 100^{m} und geringer Neigung kann man als mittleren Distanzmesserfehler $\pm 0{,}25^{\text{m}}$ oder $\frac{1}{4}\%$ der Entfernung annehmen, ein Fehler, der für die Zwecke des Distanzmessers nicht ins Gewicht fällt. Auch bei Zielweiten von mehr als 100^{m} wird der Fehler nicht weit über das angegebene Maſs hinausgehen, wenn für eine feste Aufstellung der Latte durch Streben gesorgt und auch sonst die Beobachtung begünstigt wird.

§ 36. Der Tachymeter.

Ein Repetitionstheodolit, der ein Fernrohr zum Distanzmessen und einen Höhenkreis besitzt, heiſst ein Tachymeter. Für manche Arbeiten ist es vorteilhaft, am Instrument zugleich einen Kompaſs zu haben. Der Zweck des Tachymeters ist, möglichst schnell (ταχύς) von einem seiner Lage nach bekannten Punkte A einen andern Punkt B eindeutig festzulegen.

In Fig. 82 haben wir eine Breithauptsche Konstruktion vor uns. Der Horizontalkreis hat 18^{cm} Durchmesser und eine Nonienangabe von 50^{cc} centesimal, der Höhenkreis 14^{cm} und 1^{c}. Das Fernrohr hat 34^{mm} Öffnung und 30malige Vergröſserung. Auſser der Wendelibelle auf dem Fernrohre und einer Dosenlibelle zwischen den Trägern besitzt die Alhidade des Höhenkreises eine Versicherungslibelle für Höhenvisuren.

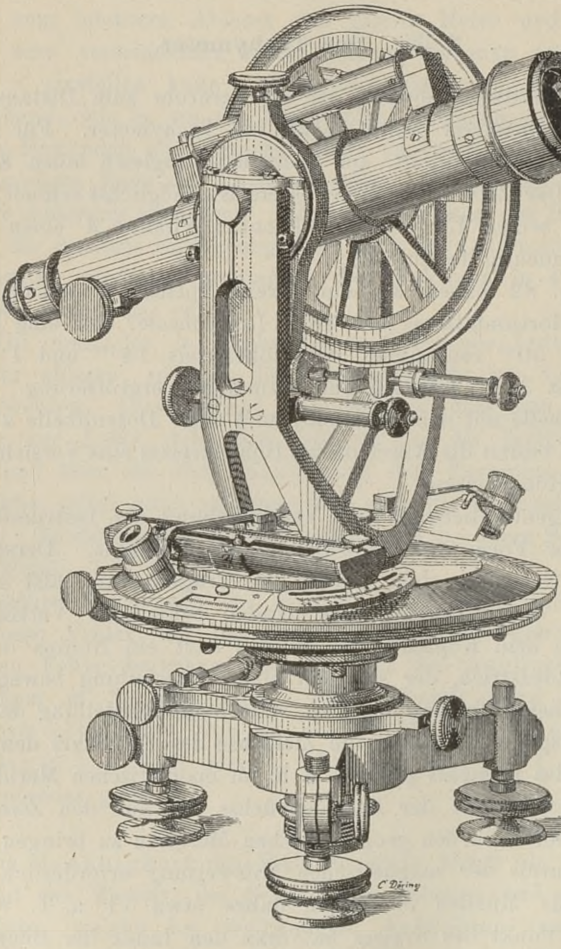
Die Eigentümlichkeit und Vereinfachung des Instruments besteht in der Form und Anbringung des Kompaſs. Derselbe ist ein halber Cylinder, steht neben den Trägern und läſst sich um eine unter dem Tragstifte der Nadel befindliche Vertikalachse drehen. An dem Kopfende der Büchse sitzt ein Nonius oder ein einfacher Indexstrich, der sich auf einer Kreisteilung bewegt. Der Nullstrich dieser Teilung liegt so, daſs nach Einstellung des Index und bei einspielender Nadel die Zielachse des Fernrohrs dem Nord-Südstriche des Kompaſs parallel d. h. im magnetischen Meridian ist.

Die Drehbarkeit der Bussolenbüchse hat nun den Zweck, die Visierlinie sofort in den geographischen Meridian zu bringen. Dazu ist die Kenntnis der magnetischen Miſsweisung erforderlich. Dieselbe ist für Münden in diesem Jahre etwa 11^{0} a. T. westlich. Auf diesen Punkt des Kreises hat man den Index der Büchse einzustellen und zwar nach links bei nordwärts gerichtetem Objektiv. Spielt jetzt die Nadel ein, so bildet die Zielachse des Fernrohrs mit der Nadel den Winkel 11^{0} und zeigt nach geographisch Norden.

Die Bussole wird dadurch in ihrer Stellung festgehalten, daſs durch eine Zugschraube eine kleine Platte mit keilförmigen Kanten in den Schlitz der Kreisscheibe gezogen wird.

Die Anwendung des Instruments zur Messung des Azimuths wird dadurch eine bequemere, dafs man Null des ersten Nonius auf Null des Limbus stellt und die festgeklemmte Alhidade mit

Fig. 82.

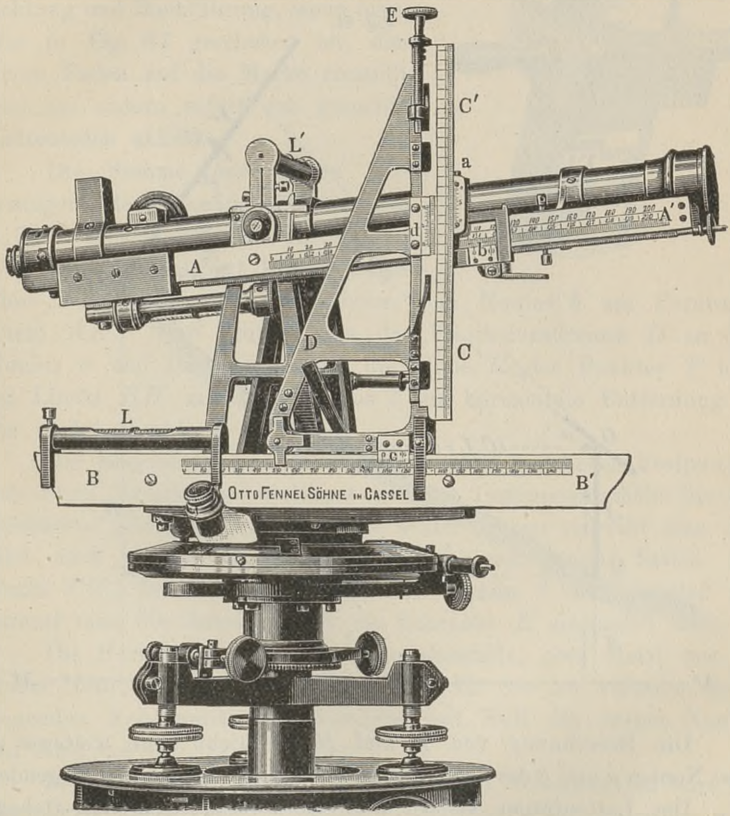


dem Limbus dreht, bis die Nadel einspielt. Führt man nun das Fernrohr auf das Ziel, so giebt die Ablesung sofort den Azimuthalwinkel.

Das Nähere über den Gebrauch wird bei Besprechung der tachymetrischen Aufnahme mitgeteilt.

Beim Gebrauch des Tachymeter-Theodolit sind Entfernung und Höhe des Punktes B aus den Ablesungen an der Latte und dem Höhenkreise durch Berechnung oder mit Hilfe von Tafeln zu finden. Beim Instrument Fig. 83 wird die Rechnung zuhause erspart und sofort am Tachymeter selbst ausgeführt.

Fig. 83.



Die Theorie ist dieselbe wie oben. Wie aus der Fig. 84 ersichtlich ist, wird die Latte senkrecht zur Visierlinie gehalten. Die Länge der Visierlinie ist also $C \cdot L + c$. Um die horizontale Entfernung der beiden Punkte Q und P zu erhalten, hat man noch die Projektion des Lattenstücks S hinzuzuzählen. Es ist deshalb

$$1) \quad \ldots \ldots \quad E = (C \cdot L + c) \cdot \cos \alpha + S \cdot \sin \alpha .$$

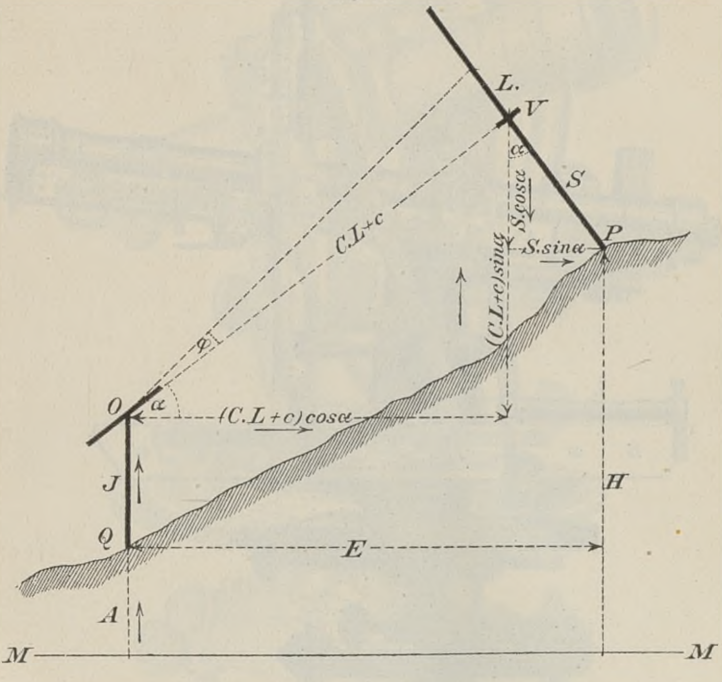
Die Meereshöhe von P ist nach der Figur

2) . . $H = A + J + (C \cdot L + c) \cdot \sin\alpha - S \cdot \cos\alpha,$

wenn A die Meereshöhe des Punktes Q ist.

Würde man von P aus die Lage des Punktes Q bestimmen, so würde in Q die Latte nach hintenüber zu halten sein. Es wird dann in 1) $S \cdot \sin\alpha$ und in 2) $(C \cdot L + c) \cdot \sin\alpha$ negativ.

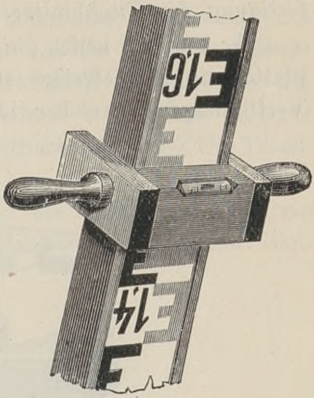
Fig. 84.



Die Berechnung von E und H geschieht ohne weiteres an den Nonien a und c des Tachymeters. Das Meſsverfahren ist folgendes:

Der Lattenträger visiert über die Oberkante des Brettchens, in welchem die Handgriffe sitzen, nach dem Fernrohre und läſst die Röhrenlibelle einspielen. Der Beobachter darf im Fernrohr von der obern oder untern Seite des Visierbrettchens nichts sehen, wenn die Latte senkrecht zur Absehlinie stehen soll. Beim Einwinken ist daran zu denken, daſs das Fernrohr umkehrt. Auf der dem Instrument zugewandten Seite der Latte ist die Höhe 1,5$^{\mathrm{m}}$ durch eine Marke bezeichnet. Von dieser als Nullmarke läuft die Centimeterteilung nach unten und oben, nicht wie auf der in Fig. 85 sichtbaren Seite. Der Beobachter richtet den Mittelfaden auf die Marke und liest an beiden Distanzfäden ab. Bei genauer Einstellung müſste er die gleichen Zahlen erhalten. Die beiden Ablesungen werden addiert.

Fig. 85.



Es ist jedoch auch hinreichend genau und vereinfacht die Beobachtung und Buchführung, wenn man, wie in Fig. 84 geschehen ist, den obern Faden auf die Marke einstellt und am untern sofort das gesuchte Lattenstück abliest.

Die Summe der beiden Ablesungen oder die eine Ablesung sei 1,734 und mit der Konstanten $C = 100$ multipliziert 173,40. Auf diese Zahl stellt man Null bezw. den Nonius b am Fernrohrlineal AA'. Man schiebt nun das Projektionsdreieck D an den Nonius a und liest an diesem die Höhe H des Punktes P und am Lineal BB' mit dem Nonius c die horizontale Entfernung E der beiden Punkte Q und P ab

Die Meereshöhe von Q wird von einem gegebenen Festpunkte aus durch Nivellement bestimmt und die Instrumentenhöhe bis zur Drehachse gemessen. Die Summe beider Höhen schreibt man mit Blei nach ganzen Einheiten auf denjenigen ganzen Strich der Skala CC', der dem Nullstriche des Nonius d am nächsten ist, worauf man die Zehntel durch die Schraube E einspielen läſst.

Die Horizontalwinkel liest man ebenfalls, aber meist nur an einem Nonius ab, wobei man gut thut, für den am weitesten links liegenden Nebenpunkt die Alhidade mit Null des ersten Nonius auf Null des Limbus zu stellen

Inbetreff der Aufnahme von Haupt- und Nebenpunkten wird im zweiten Teile das Nähere mitgeteilt. Die Firma giebt auſserdem gern Theorie und Gebrauchsanweisung nebst Feldbuch dem Instrumente bei.

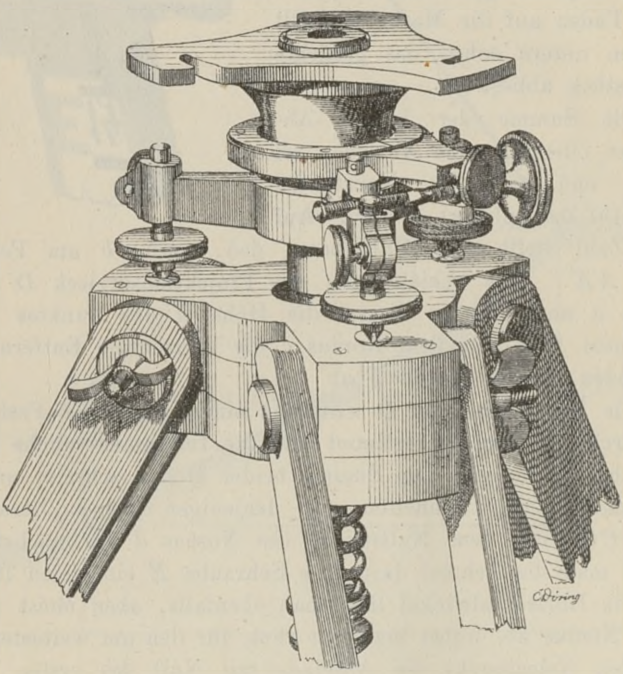
c. Instrumente zur Aufnahme der Winkel durch Zeichnung.

§ 37. Der Meſstisch.

Der Meſstisch besteht aus dem Stativ, dem Dreifuſs mit Zeichenbrett und der Vorrichtung zum Visieren und zum Auf-zeichnen der Visierlinie. Zum Horizontieren der Zeichenplatte dient die Libelle. Die Dreifufskonstruktionen sind sehr verschiedenartig, dementsprechend auch die Hemmvorrichtungen und die Befestigung des Tischblattes.

In Fig. 86 heifst die obere dreieckige Metallplatte die Wendeplatte; sie ist befestigt an dem äufsern Mantel und dem hohlen Vertikalzapfen, welcher in der Büchse des Dreifufses sitzt. Die

Fig. 86.

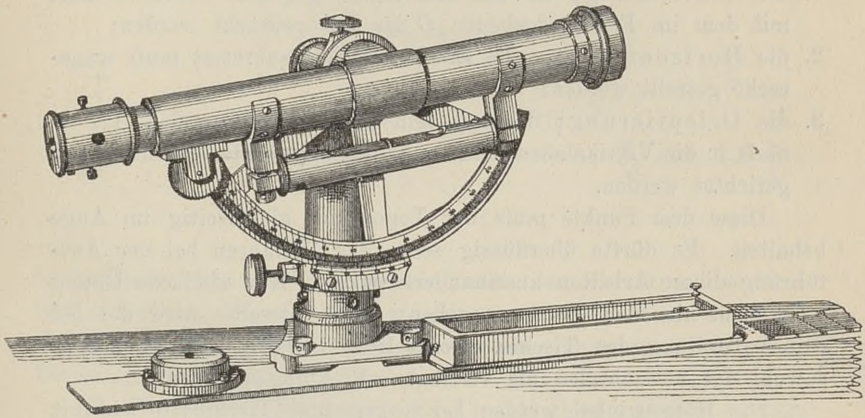


drei Ausschnitte der Wendeplatte dienen zur Aufnahme der obern glatten Enden dreier Zugschrauben, mit denen das Zeichenbrett befestigt wird. Das Zeichenbrett ist eine Tafel von 56$^{\text{cm}}$ im Quadrat, wird von Linden- oder Ahornholz angefertigt und besteht aus einem Rahmen und mehreren Platten, deren Faserrichtungen sich kreuzen. Die obere Ebene wird mit Zeichenpapier überzogen, welches man mit der stark angefeuchteten Seite auf das mit geschlagenem Eiweifs überstrichene Brett glatt niederlegt, vermittelst eines Tuches aufdrückt und durch seitliches Anleimen der überstehenden Ränder festmacht.

Die Visuren geschahen früher mit einem Diopterlineal, heutzutage bedient man sich der Kippregel (Regel = Lineal). Das Lineal von Messing (Fig. 87) trägt eine metallene Säule, welche oben in einer konischen Durchbohrung die horizontale Drehachse des Fernrohres aufnimmt; letzteres trägt die Libelle und den Höhenkreis, welche die Messung von Vertikalwinkeln ermöglichen; das Fernrohr ist zum Distanzmessen eingerichtet. Auf dem Lineale befinden sich eine Dosenlibelle, eine Orientierbussole und ein Transversalmaſsstab.

Zum Meſstischapparat gehört ferner die Lotgabel (§ 9), ein Taschenzirkel mit Hülse, ein Transversalmaſsstab, ein harter Blei-

Fig. 87.



stift und einige feine sog. Anschlagnadeln. Statt der Bussole auf dem Lineale der Kippregel hat man auch wohl einen besondern Kompaſs auf einer Platte, das sog. Zulegezeug. Gegen unerwarteten Regen und grellen Sonnenschein schützt ein Lederüberzug und Schirm.

Gebrauch.

Um einen auf dem Felde abgesteckten Winkel LCR durch Zeichnung zu erhalten, stellt man den Tisch über C auf, bringt das Meſstischblatt nach zwei sich kreuzenden Richtungen mit der Röhrenlibelle oder mit der Dosenlibelle in die wagerechte Lage, sucht mit der Lotgabel den zu C lotrecht liegenden Punkt c auf dem Zeichenbrette und bezeichnet diesen durch einen Punkt oder durch eine eingestochene Nadel. Man legt nun die Linealkante an die Nadel, richtet das Fernrohr auf das Signal R und zieht mit dem Bleistift eine Gerade längs des Lineals. Nach Verschiebung des Lineals und Anvisierung des Signals L zieht man den zweiten Winkelschenkel. Das Anlegen des Lineals an den Punkt c muſs mit Vorsicht geschehen, der Bleistift hart und spitz sein. Ist bereits eine Gerade cr auf dem Zeichenbrette gegeben, welche dem Schenkel CR im Felde entsprechen soll, so hat man an diese Gerade das Lineal zu legen, die ganze Meſstischplatte mit Kippregel zu drehen, bis die Zielachse auf R gerichtet und c zu C centrisch ist. Nun verschiebt man am Punkte c die Kippregel, bis das Fernrohr auf L zielt.

Die Vorarbeiten mit dem Meſstische beziehen sich also, wenn der Scheitel und der Schenkel auf dem Zeichenbrette gegeben sind, auf folgende Punkte:

1. die Centrierung; der auf dem Blatte gegebene Punkt c muſs mit dem im Felde gegebenen C ins Lot gebracht werden;
2. die Horizontierung; die Ebene des Zeichenbrettes muſs wagerecht gestellt werden;
3. die Orientierung; der auf dem Blatte gegebene Schenkel cr muſs in die Vertikalebene der im Felde abgesteckten Richtung CR gerichtet werden.

Diese drei Punkte muſs der Topograph gleichzeitig im Auge behalten. Es dürfte überflüssig sein, das Verfahren bei der Ausführung dieser Arbeiten auseinanderzusetzen. Nur vielfache Übung wird auch hier den Meister machen; durch dieselbe wird die bei der Aufstellung des Tisches erforderliche Sicherheit im Schätzen sowohl der horizontalen als vertikalen Richtungen erzielt.

Die Höhenwinkel werden bei wagerechter Tischplatte wie mit dem Theodolit gemessen. Hat die Kippregel eine Röhrenlibelle, so ist dieselbe zum Einspielen zu bringen, der Nonius abzulesen, darauf der betreffende Punkt über oder unter der Horizontalen anzuzielen und der Nonius wiederum abzulesen. Steht der Nonius bei wagerechtem Fernrohre auf 90^0 und steigen die Zahlen des Höhenkreises nach der Seite des Objektivs, so hat man den abgelesenen Winkel von 90^0 abzuziehen; wachsen die Zahlen nach dem Okular hin, so hat man 90^0 von dem gefundenen Winkel abzuziehen. Die Höhenwinkel sind notwendig, wenn das Fernrohr zum Messen der Entfernungen benutzt wird. Im allgemeinen genügt ein einfacher Indexstrich zum Ablesen der Winkel.

Prüfung.

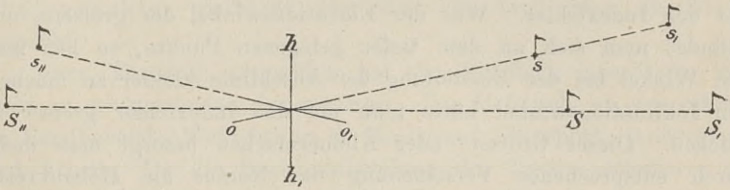
1. Um zu sehen, ob die Kante des Lineals eine gerade Linie ist, ziehe man an derselben eine Linie, setze das Lineal um

und ziehe abermals eine Linie. Die beiden Linien müssen sich decken oder parallel sein.

2. Legt man das als gut befundene Lineal in verschiedenen Richtungen mit der Kante auf das Zeichenbrett, so kann man aus dem etwa durchscheinenden Lichte schlieſsen, daſs die obere Fläche des Brettes keine Ebene ist.

5. Die Zielachse des Fernrohrs muſs rechtwinklig zur horizontalen Achse sein. Man richte auf ebenem Boden mit dem Fernrohre nach Horizontalstellung des Tisches zwei Stäbe S und S_1 ein, schlage das Fernrohr durch oder lege es an zwei Anschlagnadeln um und richte den dritten Stab S_{11} ein, so werden die 3 Stäbe von S_1 und S_{11} aus gesehen in gerader Linie erscheinen, wenn die Zielachse senkrecht zur Drehachse hh_1 steht.

Fig. 88.



Ist letzteres nicht der Fall, so wird nach dem Umsetzen des Okulars o nach o_1 kommen und s_{11} mit s und s_1 nicht in derselben Geraden liegen. Bei geringer Abweichung kann man von einer Berichtigung des Fadenkreuzes absehen.

4. Die Visierebene soll die Linealkante enthalten oder ihr parallel sein. Man stelle den Tisch wagerecht, steche zwei Nadeln etwa 50 $^{\text{cm}}$ von einander ein und richte ihre Gerade auf einen etwa 60 $^{\text{m}}$ entfernten Punkt. Legt man nun das Lineal an die beiden Nadeln, so muſs das Fernrohr auf denselben Punkt zeigen. Eine Berichtigung ist nicht gerade nötig, weil man die vom Tische abgelöste Zeichnung nach der Natur orientieren kann. Soll die Berichtigung dennoch vorgenommen werden, so müssen wenigstens zwei Schrauben des Säulenfuſses sich in einem Schlitze des Lineals verschieben lassen.

5. Die horizontale Achse muſs parallel der Tischebene sein, oder mit anderen Worten, die Visierebene muſs zur Tischebene oder Linealebene senkrecht stehen. Nach Horizontierung des Tisches visiere man nach einem langen, ruhig hängenden Lote und sehe nach, ob beim Kippen der Fadenkreuzpunkt stets am Lotfaden bleibt. Ist das nicht der Fall, so ist die unbedingt not-

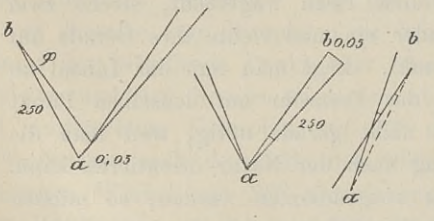
wendige Berichtigung an den Schrauben der Fuſsplatte vorzunehmen. Man überzeuge sich jedoch vorher, ob auch die Befestigungsmutter der Horizontalachse gehörig angezogen ist. Da nämlich die Drehachse meist konisch ist, so wird bei gelockerter Schraubenmutter die Achse aus der Höhlung der Säule etwas herausgleiten und das Fernrohr senken, trotz der federnden Platte in der Mutter.

6. Um den Höhenkreis auf den Indexfehler zu untersuchen, um also zu sehen, ob bei wagerechter Tischplatte und Visierlinie der Nonius mit Null auf Null oder 90^0 des Kreises stehen würde, bestimme man die Neigung einer durch Grundpfähle bezeichneten Strecke aus beiden Enden. Das arithmetische Mittel beider Neigungen giebt den richtigen Winkel, ihr halber Unterschied den Indexfehler. Man bleibe nun in dem einen Endpunkte, stelle das Fernrohr ein und vergröſsere oder verkleinere den Winkel um den Indexfehler. War der Elevationswinkel der gröſsere, und befindet man sich an dem tiefer gelegenen Punkte, so hat man den Winkel bei der Einstellung der Absehlinie kleiner zu machen, den Inklinationswinkel hätte man um den Indexfehler gröſser zu machen. Dieses Gröſser- oder Kleinermachen besorgt man meist durch entsprechende Verschiebung des Nonius am Höhenkreise. Übrigens kommt es auf eine Minute mehr oder weniger nicht an.

Genauigkeit, Vorzüge und Nachteile.

Nimmt man an, daſs ein im Felde abgesteckter Winkel mit einem fehlerfreien Apparate unter den günstigsten Verhältnissen, also auf festem Boden und bei guter Beleuchtung, mit gröſster Vorsicht und Schärfe aufgenommen wird, so wird zunächst eine Unsicherheit infolge der Zeichnung entstehen können. Hat der Schenkel ab die Dicke $0{,}05^{\text{mm}}$ und die Länge 250^{mm}, so ist die Ungenauigkeit oder die Genauigkeit, mit welcher die Richtung ab bestimmt ist,

Fig. 89.



$$\varphi = 206\,265 \cdot \frac{0{,}05''}{250} = 41{,}25'';$$

für beide Schenkel oder für beide Enden desselben Schenkels ergiebt sich daraus das Doppelte oder wenigstens $41{,}25\sqrt{2}''$.

Das ungenaue Anlegen des Lineals an den durch einen

Punkt oder eine Nadel bezeichneten Scheitel des Winkels hat dieselben Folgen, wie die Dicke der Bleifederspitze. Da die Längenzahl im Nenner steht, so ist die Ungenauigkeit um so gröſser, je kürzer die Schenkel des gezeichneten Winkels sind.

Bei gut horizontiertem Tische, richtiger Orientierung und Visur soll nach Bauernfeind ein Centrierungsfehler von 3 ^{cm} noch innerhalb der Genauigkeitsgrenze der Meſstischaufnahme liegen.

Die Anwendung des Meſstisches zu polygonometrischen Arbeiten des preuſsischen Grundsteuerkatasters ist unbedingt untersagt. Bei der topographischen Abteilung des Generalstabes wird derselbe vorzugsweise benutzt und hat dabei den Vorteil, jederzeit eine klare Übersicht über den Verlauf und den Stand der Arbeit zu gewähren und eine Handzeichnung entbehrlich zu machen. Vielleicht wird in Zukunft die Meſstischaufnahme unterstützt durch Photographie, vielleicht hier und da auch ganz überflüssig gemacht.

Dem Theodolit gegenüber hat der Meſstisch eine Reihe von nicht zu verkennenden Schwächen. Der Meſstisch ist eine schwer zu handhabende Vorrichtung in Bezug auf Transport, Aufstellung und Arbeit. Da die Horizontalstellung des Tisches schwierig ist, so tritt leicht eine Neigung der Fernrohrdrehachse gegen die Horizontale ein, es wird dadurch die Projektion von Winkeln, besonders mit stark geneigten Schenkeln, ungenau. Die Meſstischarbeit erfordert günstiges Wetter, sie ist deshalb langwierig und auſserdem, weil sie vorwiegend im Felde ausgeführt wird, sehr teuer. Endlich ist das Ergebnis der Arbeit eine veränderliche und vergängliche Zeichnung, welche, einmal verdorben, eine Wiederherstellung der ersten Aufnahme nicht möglich macht, wogegen die Zahlen einer Theodolitaufnahme ihren ursprünglichen Wert behalten.

Die Erfindung des Meſstisches gehört in das Ende des sechszehnten oder den Anfang des siebzehnten Jahrhunderts. Die Kippregel mit Distanzmesser wurde in Preuſsen 1852 eingeführt. Die Photographie dient zur Aufnahme unzugänglicher Gegenden, steiler Hänge, tief eingeschnittener Thäler, von Inselgruppen und Küsten vom Schiffe oder vom Luftballon aus. Allgemeine Vorarbeiten etwa für einen Bahnbau lassen sich durch Bildaufnahmen beschleunigen. — Die Meſstischblätter des preuſsischen Generalstabes sind in 1 : 25 000 hergestellt; jedes Blatt umfaſst eine Fläche von 2,25 Quadratmeilen und seine Herstellung entspricht ungefähr der jährlichen Arbeit eines Aufnehmers.

D. Instrumente zum Streckenmessen.

§ 38. Mafsstäbe.

1. Die Mefslatten oder Mefsstangen sind bis 5 ^{m} lang; ist der Raum beschränkt, wie im Bergwerk, so bedient man sich kürzerer Latten. Sie bestehen aus gut getrocknetem Holze und haben je nach ihrer Länge einen rechteckigen oder kreisrunden oder elliptischen Querschnitt. Die langen Latten sind in der Mitte dicker und verjüngen sich nach den Enden hin. Oft sind sie auf zwei gegenüberstehenden Stellen der Mitte abgeebnet zum Aufsetzen einer Röhrenlibelle. Sie sind meist meterweise rot und weifs oder schwarz und weifs mit Ölfarbe dick gestrichen. Die Unterteilung geschieht nach Dezimetern durch Striche oder Nägel. Die Enden sind mit Metallplatten beschlagen. Des leichtern Transports wegen fertigt man Latten an, die sich zusammenklappen lassen.

Zur Lattenmessung sind zwei Latten erforderlich, die man durch den Anstrich unterscheidet. Fängt die rot-weifse Latte an, so wird der sie führende Arbeiter beim jedesmaligen Aufnehmen nur ungerade Zahlen laut nennen, während dem anderen die geraden Zahlen zufallen. Bei nicht zu langen Linien empfiehlt sich eine grobe Nachprüfung durch Schrittmafs.

Auf horizontalem Boden werden die Latten in der Richtung der abgesteckten Linie dicht vor einander gelegt. Eine Neigung von 2 bis 3^0 wird schon auffallen; man wird ab und zu mit einer Libelle die Lage der Latte prüfen und bei gröfserer Neigung das Ende der Latte herabloten. Statt der Libelle kann man die Setzwage mit Pendel benutzen oder das Lot als Tangente betrachten, während man mit der Latte als Radius um das aufliegende Ende einen Kreis beschreibt. Im Augenblicke der Berührung ist die Latte wagerecht. Bei sehr starker Neigung der Mefslinie hat man sogen. Staffellatten statt des Lotes, wodurch man auch die Höhenunterschiede in der Linie festlegen kann.

Die Latten kann man auf dem Eichamte prüfen lassen. Die dort zulässigen Abweichungen sind jedoch gröfser als die von der Vermessungsbehörde gestatteten Fehler. Der Landmesser soll sich amtlich ein Normalmafs von der Genauigkeit der Gebrauchsnormale des Eichamts verschaffen und danach selbst sein Feldgebrauchsmafs prüfen. Die zulässige Abweichung bei etwa 15^0 C. darf sein: bei einer Meſslatte von 5 ^{m} Länge 1,6 ^{mm}; von 3 ^{m} Länge 1,3 ^{mm}; von 2 ^{m} Länge 1,1 ^{mm}. Stellt der Landmesser nicht selbst die Prüfung an, so hat der Eichmeister nach dieser Vorschrift zu verfahren, während er sonst bei einer 5 ^{m} Latte eine Abweichung von $\pm$ 4 ^{mm} dulden muſs.

2. Die Drehlatte oder der Feldzirkel dient zu flüchtigen Längenmessungen und ist nicht eichungsfähig. Es ist das bequemste Längenmaſs in der Hand des Landwirts zum Abstecken von Kulturflächen.

3. Die Basisapparate sind ein Werkzeug des Geodäten; der Landmesser kommt nicht in die Lage, damit zu arbeiten. Aber sie spielen die wichtigste Rolle beim Legen des Fundaments, auf dem sich alle Vermessungen aufbauen. Deshalb sei hier Einiges darüber bemerkt. Die Meſsstangen zur Basismessung sind von Metall und 4 bis 5 ^{m} lang, ihre Länge ist genau nach dem Urmaſse ermittelt; die Enden sind keilförmig. Die vier bis fünf Stangen, die bei der Messung zur Verwendung kommen, werden mit dem Theodolit in die Richtung der Basis gebracht. Als Unterlage dienen Gestelle mit Schrauben und die Libelle dient zum Horizontieren der Latten. Diese kommen nicht in unmittelbare Berührung, der Abstand ihrer Enden wird mit dem Meſskeil ermittelt. An jeder Stange wird die Temperatur zum Zweck der Längenreduktion vermittelst des Ausdehnungskoefficienten beobachtet. Jede Basis wird im ganzen oder in einzelnen Absätzen mehrere Mal, hin und her, gemessen. Die Gesamtlänge der Basis aus jeder Richtung ergiebt sich als die Summe der auf 0^0 C. reduzierten Stangenlängen und der Meſskeilstärken.

Man hat bei den Basismessungen eine sehr groſse Genauigkeit erreicht; als mittlerer Fehler gilt 1,5 ^{mm} auf 1 ^{km}. Die Messung erfordert eine auſsergewöhnliche Sorgfalt, und deshalb muſste auch z. B. auf die Messung der Basis bei Göttingen 1880 von 5193 ^{m} Länge und derjenigen bei Meppen 1883 von 7039 ^{m} Länge eine Zeit von je drei Wochen verwandt werden. Die eigentliche Messung bei Göttingen dauerte das erste Mal 4, das zweite Mal 3 Tage. Vgl. Landestriangulation, 6. Teil, 1894. Zeitschr. für Verm. 1880.

§ 39. **Meſsbänder.**

1. Das Stahlband ist ein allgemein verbreitetes Werkzeug zum Streckenmessen. Es ist 10 oder 20 ^{m} lang, etwa 2 ^{cm} breit und 0,5 ^{mm} dick. Durch Niete oder Löcher ist es in Meter und

Dezimeter geteilt und trägt an den Enden Ringe, welche auf zwei Stäbe geschoben werden und bis auf deren eiserne Schuhe hinabfallen. Der eine Ring muſs ein drehbares Gelenk haben, um das Band bequem in die flache Lage zu bringen. Vermittelst der Stäbe wird das Band von zwei Arbeitern in der zu messenden Linie gespannt und fortgezogen. Zum Zählen der Bandlängen dienen zehn Kettennägel oder Markierstäbchen oder Zähler, welche in Taschen oder an Karabinerhaken oder Ringen getragen werden.

Die Prüfung auf dem Eichamte mit dem Normalbandmaſse darf bei 20 ^{m} Länge einen Fehler von 4 ^{mm}, bei 10 ^{m} Länge einen solchen von 3 ^{mm} zulassen. Für Katasterzwecke dürfen die Fehler bei 15^{0} C. nur 3,5 ^{mm} und 2,4 ^{mm} betragen.

Die Art der Verwendung auf horizontalem Boden ergiebt sich von selbst. Ob der Hintermann durchgehends den Vordermann in die abgesteckte Linie einwinkt, oder ob in der zweiten Hälfte der Vordermann sich selbst einrichtet, hängt von der Übung der Arbeiter ab. Es ist gut, wenn der Vordermann sich über den hintern Stab annähernd in die Linie bringt. Der Landmesser wird dann schneller mit dem genauen Einrichten fertig werden. Die Zähler, welche der Hintermann aufnimmt, geben die Zahl der hinter ihm liegenden Bandlängen.

In geneigtem Gelände ist jede Bandlänge auf den Horizont zu projizieren. Dies geschieht meist durch Messung des Neigungswinkels mit Hilfe eines Gefällmessers oder Gradbogens.

Als Gefällmesser ist derjenige der Firma C. Sickler, Karlsruhe, zu empfehlen. Die Kreisteilung dreht sich um die horizontale Achse im Mittelpunkte. Ein Gewicht hält dem Kreise das Gleichgewicht und stellt die Teilung stets so, daſs bei horizontaler Ziellinie der Nullradius auch horizontal ist, also Null abgelesen wird. Bei irgend einer Neigung kommt in die Ziellinie die Zahl, welche im Gradmaſs den gesuchten Winkel angiebt.

Man hat diese auf dem gleichen Prinzip beruhenden Instrumente in verschiedener Form. Es giebt solche, bei denen die Teilung senkrecht zur Absehlinie steht und wie auf dem Reifen eines Rades vor dem Auge auf- und abschwingt. Bei anderen hat man dicht unter dem Okular ein Prisma stehen, in welchem man die Neigung abliest.

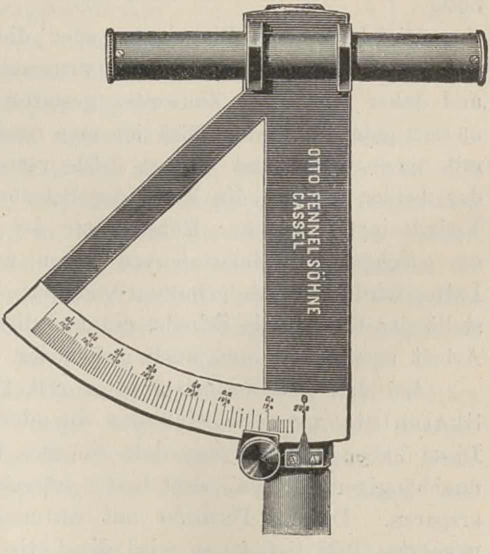
Die Prüfung dieser Instrumente geschieht dadurch, daſs man die Neigung einer Strecke aus beiden Enden miſst, das Mittel aus beiden Neigungen nimmt und danach den Hebelarm des Gewichts nötigenfalls verlängert oder verkürzt.

Der anzuvisierende Punkt muſs in der Höhe des Auges liegen. Man hält deshalb den Gefällmesser entweder an das obere Ende des hintern Stabes und visiert den obern Punkt des vordern Stabes an, oder man merkt sich einen entsprechenden Punkt, Nase oder Mützenschirm, am vordern Bandzieher.

Ebenso bequem ist ein Gradbogen mit Pendel, den man am hintern Stabe befestigt oder auf einem Stockstative daneben stellt. Bei wagerechter Visierlinie muſs der Lotfaden durch Null gehen. Die geneigte Absehlinie muſs dem gespannten Bande parallel sein. Die Teilung nach Drittel-Graden ist ausreichend.

In Anw. VIII. S. 143 ist die Beschreibung eines Gradbogens oder Horizontalmessers und eine Anleitung zur Herstellung und für seine Verwendung gegeben. Fertigt man sich denselben selber an, so achte man darauf, daſs bei Anbringung von Dioptern das Schauloch nicht zu groſs, der Objektivfaden nicht zu dick wird und die Absehlinie senkrecht zum Nullradius steht. Durch den kurzen Abstand der beiden Diopter macht ein kleiner Fehler sich unangenehm bemerkbar. Die beiden Stahlbandstäbe sind lotrecht zu halten, nicht senkrecht zum gespannten Bande, wie es für den vordern Bandstab auf S. 146 der Anw. VIII vorgeschrieben ist.

Fig. 90.



In Fig. 90 liest man auf dem Kreisbogen sofort die Anzahl Meter ab, die von 20 abzuziehen sind, um die Projektion der Bandlänge zu erhalten oder man notiert die abgelesene Projektion.

2. Das M e ſ s b a n d von Z w i r n ist nach Centimetern geteilt und wird zum Messen kurzer Nebenstrecken benutzt. Statt der leinenen Bänder hat man heutzutage vielfach dünne schmale Stahlbänder, welche ebenfalls in einer Trommel aufgewickelt werden. Für den Forstmann sind die Meſsbänder empfehlenswert, die auf der Rückseite der Längenteilung

den entsprechenden Kreisdurchmesser tragen. Sie können im Notfalle die Kluppe ersetzen, ohne durch 3,14 dividieren zu müssen.

3. Die Mefsschnur ist 25^{m} lang und länger; sie besteht aus Hanf, ist in Wachs und Öl gekocht und durch farbige Streifen von fünf zu fünf Meter geteilt. Man benutzt sie wohl bei Lattenmessungen, indem man sie in der Mefslinie ausspannt.

4. Die Mefskette ist beim preufsischen Kataster abgeschafft. Sie wird wie das Stahlband gebraucht, ist nicht eichungsfähig und erfordert eine öftere Prüfung und grofse Aufmerksamkeit in der Handhabung.

E. Instrumente zum Höhenmessen.

§ 40. Nivellierlatten.

Unter Nivellieren oder dem Einwägen zweier Punkte versteht man die Bestimmung ihres Höhenunterschiedes in der gemeinschaftlichen Vertikalebene, also die Ermittlung des Abstandes ihrer wahren Horizonte. Handelt es sich um den Höhenunterschied zweier Punkte, die etwa 50^{m} von einander entfernt sind, so hat man beim Gebrauch vieler Instrumente sogenannte Nivellierlatten nötig.

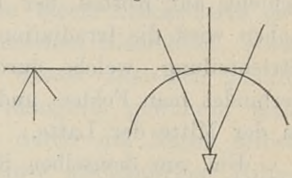
Die Latte mit Zielscheibe oder die Schiebelatte ist nur noch im Gebrauche bei Nivellierinstrumenten, welche Diopter haben und daher nur kleine Zielweiten gestatten. Auf einer nach Centimetern geteilten Stange läfst sich eine runde oder viereckige Scheibe mit einem roten und weifsen Felde verschieben. Der Grenzstrich der beiden Felder, die Mitte der Scheibe bestimmt die Lage der Visierlinie; in gleicher Höhe hinter der Scheibe ist ein Zeichen, an welchem der Mafsstab von unten auf abgelesen wird. Die Latte wird lotrecht gehalten und auf Winken des Beobachters stellt der Gehilfe die Scheibe ein und liest ab. Dadurch wird die Arbeit umständlich und auch mehr oder weniger zuverlässig.

Bei den Nivellierinstrumenten mit Fernrohr benutzt man die Skalenlatten zum Selbstablesen, die mires parlantes der Franzosen. Diese haben den Vorzug, dafs sie den Beobachter vom Gehilfen unabhängiger machen, sich besser lotrecht halten lassen und Zeit ersparen. Da das Fernrohr mit astronomischem Okular ein umgekehrtes Bild liefert, so wird die Latte mit umgekehrten Zahlen aufgestellt. Null steht unten und die auf dem Kopfe stehenden Zahlen wachsen nach oben. Durch das Fernrohr gesehen ist das

Umgekehrte der Fall; man liest in der Richtung der wachsenden Zahlen von oben nach unten. Die Lattenzahlen sind keine Spiegelzahlen. Stellt man Spiegelzahlen auf den Kopf, so erscheinen sie im Fernrohr wieder als aufrechte Spiegelbilder. Durch den Spiegel findet eine Kehrtwendung, eine Drehung um die vertikale Achse, durch das Fernrohr eine Drehung um die von vorn nach hinten gehende horizontale Achse um 180^0 statt. Man sehe auf die Innenfläche der vor die Augen gehaltenen Hand, die Fingerspitzen nach oben gerichtet. Dreht man die Hand, so dafs die Finger nach oben bleiben und der Handrücken dem Auge zugekehrt wird, so hat man das Spiegelbild. Dreht man die Finger nach unten und bleibt die Innenfläche dem Auge zugewandt, so ist oben und unten, links und rechts vertauscht, wie es im astronomischen Fernrohre geschieht.

Zum Lotrechtstellen der Latte bedient man sich meist einer Dosenlibelle, welche fest mit ihr verbunden ist, oder eines Lotes, welches mit der Spitze auf eine an der Latte sitzende Spitze zeigen mufs. Hat man weder Libelle noch Lot, so kann man die horizontale Absehlinie selbst zur Beurteilung der Lattenstellung benutzen. Die Latte steht lotrecht, wenn die wagerechte Absehlinie zu ihr senkrecht ist. Das ist der Fall, wenn das abgelesene Lattenstück am kürzesten ist, wie die Fig. 91 zeigt. Der hinter der Latte stehende Gehilfe braucht deshalb nur die Latte langsam zum Instrumente hin und zurück, also von sich und zu sich herzubewegen, während der Beobachter den Augenblick zum Ablesen wahrnimmt, in welchem die abnehmenden Zahlen wieder anfangen zu wachsen. Die kleinste am Horizontalfaden erscheinende Zahl ist die gesuchte. Der mit ihr um den Fufspunkt beschriebene Kreis hat die Absehlinie zur Tangente, vorausgesetzt, dafs der Aufsetzpunkt in der Ebene der Teilung liegt.

Fig. 91.



Zum Vertikalstellen der Latte empfiehlt es sich, dem Gehilfen ein oder zwei etwa 2 m lange fingerdicke Stöcke mit eiserner Spitze zu geben, die er in den Boden stellt und durch die Hand gleiten läfst. Beim Einspielen der Libelle hält er Latte und Spreizen fest.

Nach der Teilung unterscheidet man Latten mit Felderteilung, Strichteilung, Felder- und zugleich Strichteilung und Schachbrett-Felderteilung.

Die Kastenlatte der trig. Abteilung der Landesaufnahme hat eine Felderteilung nach halben Centimetern und eine doppelte Bezifferung; die Zahlen an den beiden Seiten der Teilung ergänzen sich zu hundert.

Die Anordnung der Felder ist sehr verschiedenartig, je nachdem man die schwarzen und weifsen Centimeterfelder auf derselben Seite hat oder abwechselnd je fünf rechts und links auf einander folgen läfst und wieder seitwärts oder in der Mitte zusammenfafst. Bald sind die Grenzen von fünf, bald die von zehn Centimetern durchgehende Striche; bald stehen die Zahlen seitwärts, bald in der Mitte.

Es empfiehlt sich, zu den Zahlen der ganzen Meter die Null hinzuzusetzen, also 2,0 oder 3,0 und diese Zahlen im Vergleich zu den übrigen 2,1 oder 2,2 lieber kleiner als gröfser zu machen.

Die Felderteilung hat bei greller Beleuchtung den Nachteil der sogen. Irradiation. Die weifsen Felder zwischen dunkeln Flächen erscheinen nämlich gröfser und die dunkeln kleiner. Durch die Schachbrettfelder wird der Übelstand gemildert, aber es geschieht auf Kosten der Ruhe des Lattenbildes. Vollständig gehoben wird die Irradiation und Unruhe des Lattenbildes durch die Strichteilung, welche durch ihr Einerlei wieder schadet. Deshalb verbindet man Felder- und Strichteilung und benutzt beide zugleich in der Mitte der Latte.

Um von demselben Standpunkte aus gleich zwei Ablesungen zu machen, verwendet man Unterlageplatten oder Dreifüfse mit zwei darauf stehenden Bolzen von verschiedener Höhe oder mit verstellbarem Bolzen. Dies kann dann geschehen, wenn die Terrainpunkte nicht allgemein durch Pfähle oder Nägel markiert sind und es sich nur um den Höhenunterschied der Endpunkte einer Linie handelt, während die Zwischenpunkte keine besondere Bedeutung haben. Der Lattenträger tritt die Füfse der Platte in den Boden und setzt die Latte stets in derselben Folge erst auf den niedrigeren, dann auf den höheren Bolzen. Die Ablesungsunterschiede werden nicht dem Höhenunterschiede der Bolzen bei wagerechter Lage gleich sein, da bald die eine, bald die andere Seite des Dreifufses tiefer stehen wird. Aber beim Rückblick wird der Unterschied derselbe sein, der beim Vorblick vorhanden war, wenn der Gehilfe die Latte beim Wechsel der Bolzen nicht hart aufgestofsen hatte.

Statt der Bolzen benutzt man wohl die Wendelatte, welche auf der Vorder- und Hinterseite eine Teilung trägt. Auf der einen Seite wird die Teilung unten mit Null anfangen, während auf der anderen Seite zur untern Kante eine ganz beliebige Zahl nach Teilen eines Centimeters gehört.

Des bequemern Transportes wegen hat man Latten, bei denen der obere Teil sich in den untern hineinschieben läſst.

In Bergwerken und Tunnels wird die Latte wie eine Kegelbahn durch eine Reflektorlampe erleuchtet.

Da die Feuchtigkeit einen schädlichen Einfluſs auf die Längenausdehnung der Latte ausüben kann, so ist darauf bei der Auswahl des Materials, dem Anstriche und der Aufbewahrung bedacht zu nehmen und häufiger die Lattenteilung zu untersuchen.

§ 41. **Nivellierinstrumente ohne Fernrohr.**

Das in früheren Zeiten gebräuchlichste Instrument zum Abwägen kurzer Strecken war die Kanalwage; sie wird auch heute noch besonders beim Drainieren benutzt. Ihre Brauchbarkeit beruht auf dem Gesetze von dem Flüssigkeitsstande in kommunizierenden Röhren und besteht aus zwei von einem Stockstative getragenen und durch ein Blechrohr verbundenen Glasröhren, etwa Lampencylindern, welche mit gefärbtem Wasser zum Teil gefüllt werden. Die beiden Oberflächen der Flüssigkeit gewähren eine horizontale Absehlinie. Da diese Linie durch die Natur selbst gegeben ist und ihre Horizontierung keiner mechanischen Hilfsmittel bedarf, so erklärt sich daraus die Beliebtheit des Apparates für manche Zwecke.

Mit Hilfe einer Setzlibelle lassen sich an beiden Cylindern Zeichen anbringen, welche benutzt werden können, um den Stativstock lotrecht zu stellen. Das ist wünschenswert, wenn die Absehlinie eine konstante Höhe haben soll.

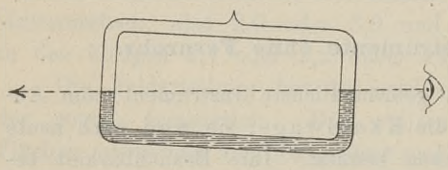
Ist das Gefälle gesucht, so miſst man die Höhe der Absehlinie und bestimmt die Höhe derselben an der Schiebelatte des folgenden Punktes. Hier angelangt verfährt man ebenso. Oder man stellt sich ungefähr in der Mitte zweier Punkte auf und läſst rückwärts und darauf vorwärts die Tafel in die Höhe der Visierlinie schieben.

Ist das Gefälle des Strecke durch der Höhenunterschied der Endpunkte gegeben, so läſst man in Abständen von etwa 40^{m} Pfähle einschlagen, stellt die Kanalwage nach Schrittmaſs in der Mitte auf, bringt rückwärts die Tafel in die Ziellinie und läſst die Latte mit der festen Tafel auf den Pfahl vorwärts stellen.

Der Pfahl wird nun so tief eingeschlagen, bis wieder der Zielpunkt der Tafel getroffen wird. Bei der Aufstellung zwischen dem zweiten und dritten Punkte braucht das Niveau nicht das gleiche wie vorher zu sein, aber über beiden Pfahlköpfen mufs die Ziellinie gleich hoch liegen. An den Pfählen wird nun das Gefälle auf je 40 ^{m} abgemessen. Ist die Strecke lang, so kann man nach 200 ^{m} von neuem anfangen, um nicht übermäfsig lange Pfähle nötig zu haben.

Zum Freihandgebrauch hat man auch geschlossene Kanalwagen von Glas, wie Fig. 92 zeigt. Eine 15 bis 20 ^{mm} weite Röhre wird zu einem Rechteck von 20 : 12 Centimeter zusammengebogen, zur Hälfte mit gefärbtem Alkohol gefüllt und zugeschmolzen.

Fig. 92.



Benutzt man dieses Instrumentchen freihändig, so mufs man die Augenhöhe kennen. Man ermittelt dieselbe im Zimmer, indem man mit der Kanalwage eine lotrecht stehende Latte anvisiert oder neben die Latte einen lotrecht hängenden Spiegel hält und in die Pupille des Spiegelbildes dicht an der der Latte vorbeisieht. Ebenso wie das Korn des Gewehres eine ganz bestimmte Höhe, die Augenhöhe, hat und nicht etwa gehoben oder gesenkt werden kann, so entspricht auch bei dieser Kanalwage die Visierhöhe der jedesmaligen Augenhöhe.

Man kann das kleine Instrument zum groben Nivellieren und zur Bestimmung des Gefälles mäfsig geneigter Linien benutzen. Zu letzterm Zwecke merkt man sich den Punkt auf dem Boden, der von der Absehlinie getroffen wird, schreitet die Strecke bis dahin ab und multipliziert das Verhältnis von Augenhöhe zur Strecke mit 100, um das Gefällprozent zu erhalten. Ist die Augenhöhe 1,6 ^{m}, die Schrittlänge 0,8 ^{m} und die Zahl der Schritte n, so ist das Gefällprozent $\frac{1,6}{n \cdot 0,8} \cdot 100 = \frac{100}{n : 2} \cdot$ Man hat also die halbe Anzahl der Schritte in 100 zu dividieren.

Die Kanalwage von Blondat hat als Verbindungsröhre der beiden Flüssigkeitssäulen einen 50 oder mehr Meter langen Schlauch von 1 ^{cm} und mehr Durchmesser. An den Enden befinden sich Glasröhren von 2 ^{m} Höhe, an denen der Wasserstand mit einem Mafsstabe abgelesen wird. Der Vorzug dieser Schlauch-Kanalwage besteht darin, dafs man auch nachts und in Bergwerken nivellieren kann, ohne besondere Beleuchtung und Aufstellung von Instrument und Latte nötig zu haben. Die Resultate werden durch die Temperaturunterschiede der Enden und Zwischenpunkte des Apparates beeinflufst.

Die Pendelinstrumente sind sehr zahlreich vertreten; sie werden meist in Verbindung mit einem Stockstativ oder freihändig gebraucht. Die Genauigkeit dieser Instrumente ist nicht grofs, aber für ihre Zwecke ausreichend.

Die Setzwage mit Lot, wie sie der Maurer braucht, hat als Unterlage das Richtscheit. Ihre Prüfung geschieht durch Umsetzen. Der etwaige Ausschlag oder der Unterschied in den Ausschlägen giebt den doppelten Fehler an. Entweder hängt das Lot nicht in der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks oder das Dreieck bis zur Unterkante ist nicht gleichschenklig. Danach ist bei der Berichtigung zu verfahren.

Die Setzwage mit Röhrenlibelle, welche der Bauhandwerker gebraucht, läfst sich wie die kurze Setzlibelle zum Horizontieren der Mefslatten benutzen. Man kann damit die Höhenunterschiede naher Punkte des Bodens bestimmen. Sie findet beim Wegebau Verwendung.

Der Höhenmesser von Weise beruht auf der Ähnlichkeit der Dreiecke und unterscheidet sich von dem Winklerschen Höhenmesser durch die weit bequemere Einrichtung. Die Theorie ist folgende.

Es soll die Länge der vertikalen Linie AB gemessen werden. Zu dem Zwecke zielt man mit der oberen Kante ab des rechteckigen Brettes auf B; xy ist $\perp dc$; durch die Neigung der Absehlinie geht das Lot nach z und es ist

$$\underline{\triangle\, xyz \sim \triangle\, aDB}$$

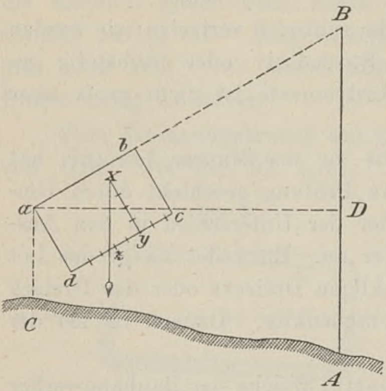
$$\frac{yz}{xy} = \frac{BD}{aD}$$

$$BD = \frac{aD}{xy} \cdot yz.$$

Das Verhältnis $aD : xy$ mufs bekannt sein, cd ist nach derselben Mafseinheit von xy geteilt und yz wird abgelesen. Man mifst in der Horizontalen von A aus so viele Meter oder halbe Meter oder doppelte Meter ab, als xy Teile hat, dann giebt yz die Höhe von BD in der Mafseinheit der Basis aD. Mit AD

wird geradeso verfahren, indem man die Zielkante auf A richtet. Kommt das Lot auf die andere Seite von y, so ist die Summe der Teile auf cd zu nehmen, bleibt das Lot auf derselben linken Seite, liegt also a unter der Horizontalen von A, so wird durch die Differenz der Teile die Höhe von AB ausgedrückt.

Fig. 93.



Bei der Einrichtung nach Weise oder Faustmann ist xy senkrecht zur Visierlinie verstellbar. Ist das Basisstäbchen xy nach Millimetern geteilt und hat man als Basis 20 ^{m} abgemessen, so ist $xy = 20$ zu machen, jedem Millimeter auf cd entspricht dann ein Meter von BD.

Um die Neigung von aB in Prozenten ihrer Projektion anzugeben, macht man $xy = 100$ und liest bei z ab. Macht man $xy = 25$, so hat man yz mit 4 zu multiplizieren. Es ist dabei ganz gleichgiltig, welche Maſseinheit man für die Basis, die gar nicht gemessen wird, zu Grunde gelegt denkt.

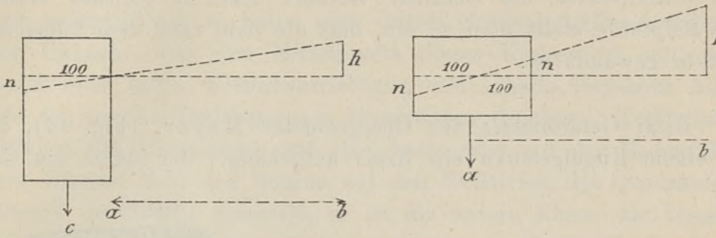
Behufs Prüfung des Instrumentes miſst man mit ihm verschiedene bekannte Höhen und vergleicht auſserdem die Teilungen der beiden Skalen.

Die Basis macht man schätzungsweise am besten gleich der zu messenden Höhe, da der Fehler beim Visieren, d. h. der Fehler am Höhenwinkel in diesem Falle am geringsten auf die gegenüberliegende Seite, also auf die Höhe einwirkt.

Die Pendelwagen von Bose und Sickler geben die Neigung einer Linie in Prozenten ihrer projizierten Länge und dienen hauptsächlich zum Abstecken von Wegelinien mit gegebenem Gefälle, welches man aus Terrainkarten mit Schichtenlinien oder aus barometrischen Höhenmessungen berechnet hat.

Beim Boseschen Instrumente wird ein Metallrahmen an einem Stockstative aufgehängt und durch ein Gewicht so schwebend gehalten, daſs der Nullpunkt der auf dem einen lotrechten Rahmen angebrachten Teilung und der wagerechte Objektivfaden in der Horizontalebene liegen. Das feste Objektivdiopter ist vom Okular in der Nullstellung um 100 Skalenteile entfernt. Das Okulardiopter ist verschiebbar; stellt man dasselbe auf 8 unter Null, so

Fig. 94.



hat die Visierlinie 8 % Steigung. Ein Nonius gestattet die Einstellung auf Zehntel Prozent. Es ist

$$h : ab = n : 100; \quad h = \frac{ab}{100} \cdot n; \quad n = \frac{h}{ab} \cdot 100.$$

Da der Stativstock in c steht, so hätte müssen bc in Rechnung gesetzt werden, was jedoch nach der Figur unmöglich ist.

Um den durch die Vernachlässigung von ac entstandenen, für die Praxis gleichgültigen Fehler zu beseitigen, hat Sickler sein Instrument so eingerichtet, dafs Absehlinie und Horizontale sich über dem Aufstellungspunkte a schneiden Er hat auf beiden lotrechten Rahmen die gleiche Teilung angebracht und die Nullpunkte stehen 200 Skalenteile von einander. Es sind beide Diopter verschiebbar, und um einen Weg mit 8 % abzustecken, hat man das eine Diopter 8 Striche unter und das andere 8 Striche über Null einzustellen. Es ist wieder

$$h : ab = n : 100, \quad h = \frac{ab}{100} \cdot n; \quad n = \frac{h}{ab} \cdot 100.$$

Die Prüfung beider Instrumente geschieht durch Abwägen einer Strecke aus beiden Endpunkten.

Zu den Instrumenten gehört eine Zieltafel, welche verschiedenfarbige Felder trägt. Die horizontale Grenzlinie beider Farben mufs die gleiche Höhe mit Null des hängenden Rahmens haben.

Um eine Wegelinie mit etwa 5 % Steigung abzustecken, stelle man beim Boseschen Instrument, (Fig. 95), das Okular auf die Zahl 5 unter Null. Lasse nun den Gehilfen mit der Zieltafel je nach Beschaffenheit des Geländes 20 oder mehr Meter den Hang hinaufgehen und winke ihn ein, bis die Absehlinie die Grenze der Farben auf der Tafel trifft. In dem Ausgangspunkte schlägt man einen Grundpfahl von 20 bis 30 ^{cm} Länge ein, bis der Kopf in der Höhe des Bodens ist. Daneben kommt ein Beipfahl oder Tagespfahl, den man mit der Prozentzahl versieht. Am Standpunkte des Gehilfen verfährt man in gleicher Weise. Die Beipfähle stellt man so ein, daſs die Zahl nach dem folgenden Punkte gewandt ist.

Beim Gefällmesser des Obergeometer Mayer, (Fig. 96), ist an einem Kugelgelenke ein Kreis aufgehängt, der durch ein Ge-

Fig. 95.

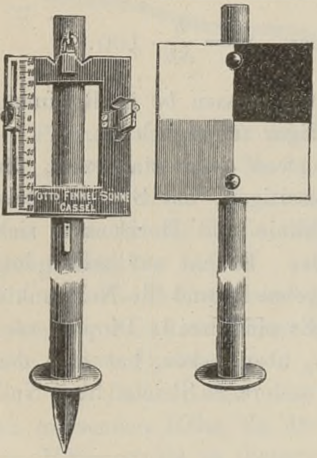
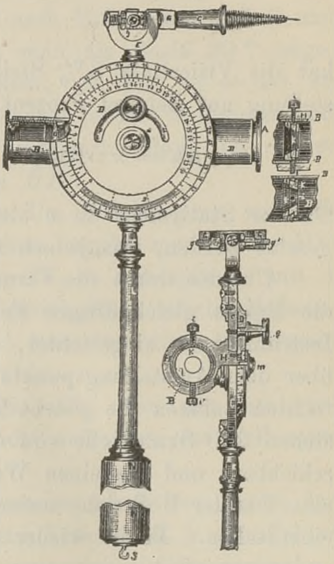


Fig. 96.



wicht in einer bestimmten Lage schwebend gehalten wird. In diesem Kreise dreht sich ein zweiter, der im Mittelpunkte mit einer Visiervorrichtung verbunden ist. Statt eines einfachen Diopterrohrs ist ein kleines Fernrohr genommen; an beiden Enden sind Auszugsröhren mit bikonvexen Linsen; in der Mitte steht das Fadenkreuz.

Die Teilung auf beiden Kreisen ist derartig, daſs beim Zusammenfallen der beiden Nullpunkte die Absehlinie horizontal ist. Treffen die gleichvielten halben oder ganzen Striche, z. B. 7,5 des innern Kreises mit 7,5 des äuſsern zusammen, so hat die Absehlinie 7,5 % Gefälle.

Zum Instrumente gehört eine Schiebelatte, an der man die

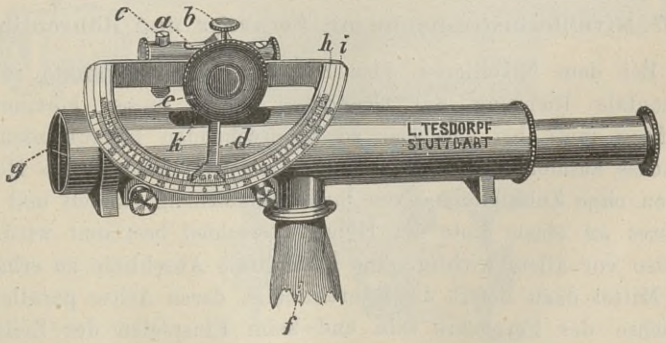
Tafel in Augenhöhe, bezw. in Höhe der wagerechten Visierlinie anbringt.

Das Setzniveau von Weisbach. Auf einem Messinglineale steht senkrecht ein in halbe oder drittel Grade geteilter Quadrant oder Oktant. Um den Mittelpunkt dieses Kreises ist eine mit Nonius oder Index, Klemmvorrichtung und Libelle versehene Alhidade in der Vertikalebene am Quadranten drehbar. Trifft beim Auflegen des Instruments auf eine Latte oder auf das Bodenstück einer Kanone Null des Nonius auf den Nullstrich des Quadranten, während die Libelle einspielt, so ist die untere Ebene des Lineals und damit die Unterlage, bei der Kanone auch die Seelenachse, horizontal und umgekehrt.

Der Gebrauch ergiebt sich von selbst. Die Prüfung geschieht dadurch, dafs man die Libelle in der Nullstellung der Alhidade zum Einspielen bringt und das Instrument umsetzt. Die etwa notwendige Verbesserung nimmt man vor zur Hälfte an der Berichtigungsschraube der Libelle, zur Hälfte an der Mikrometerschraube der Alhidade, wodurch ein Indexfehler entsteht. Die Gröfse des letzteren erhält man durch Ablesen am Nonius. Man hat sich dabei zu merken, ob er im positiven oder negativen Sinne zu nehmen ist. Er ist zu addieren, wenn bei horizontaler Lage Null des Nonius unter Null des Kreises steht.

Das Spiegel-Diopter der Firma Tesdorpf in Stuttgart ist ein sehr handliches Instrument zum Messen der Neigung einer Linie nach Graden und Prozenten (Fig. 97). Über dem Diopter-

Fig. 97.



rohre befindet sich die Libelle in einem auch nach unten geöffneten Gehäuse. An der Libelle ist ein mit Nonius versehener Arm befestigt, welcher sich als Alhidade zugleich mit der Libelle in einem am Diopterrohre stehenden Kreise drehen läfst. Auf der oberen Seite ist das Rohr unter der Libelle aufgeschnitten und im Rohre ein Spiegel angebracht, welcher die eine Hälfte der Rohröffnung ausfüllt und so steht, dafs die Lichtstrahlen von der Libellenblase nach dem Okulare hin geworfen werden. Der Beobachter kann also beim Zielen zugleich die Libellenblase verfolgen.

Da auf dem Kreise die Grade und Prozente in koncentrischen Streifen aufgetragen sind, so hat der Beobachter sich vor Ablesefehlern zu hüten. Die Grade liest er bei Null des Nonius, die Prozente an der Kante der Noniussscheibe ab. Zeigt die Null auf 45^0, so liefert die Kantenablesung $100\,^0/_0$. Die Prozente beziehen sich auf die Horizontale, sie geben also die trigonometrische Tangente.

Beim Gebrauche visiert man den in Höhe der wagerechten Absehlinie befindlichen Punkt an und dreht an einem Knopfe die Libelle, bis sie einspielt; darauf liest man an dem einen bezw. andern Kreise ab. Man wird dabei sofort die Übereinstimmung dieses Instruments mit dem Gradbogen mit Pendel erkennen, was nicht überraschen kann, da Lot und Libelle bezüglich der auf sie wirkenden Kraft identisch sind. Gute Beleuchtung ist erforderlich, um die kleine Blase im Spiegel des Rohres verfolgen zu können. In dunkeln Beständen versagt oft das Instrument.

Die genannte Werkstatt liefert das Instrument auch mit Horizontalkreis und leichtem Stative, so dafs man es bei Messungen von untergeordneter Bedeutung für Horizontalwinkel benutzen kann.

§ 42. Nivellierinstrumente mit Fernrohr und Röhrenlibelle.

Bei dem Nivellieren oder Einwägen zweier Punkte ist die horizontale Richtung die Grundlage. Mit dieser horizontalen Richtung mufs bei den hier zu besprechenden Instrumenten die Zielachse zusammenfallen, da es sich um das unmittelbare Höhenmessen ohne Zuhilfenahme von Rechnungsformeln handelt und ohne weiteres an einem Lote der Höhenunterschied bestimmt wird. Es ist also vor allem wichtig, eine horizontale Absehlinie zu erhalten. Das Mittel dazu liefert die Röhrenlibelle, deren Achse parallel zur Zielachse des Fernrohrs sein und beim Einspielen der Zielachse die horizontale Lage geben mufs. Das Verfahren der Horizontalstellung ist verschieden je nach der Verbindung der drei Hauptteile des Instruments: Fernrohr, Libelle und Fufsgestell.

Hiernach werden wir unterscheiden

A. Nivellierinstrumente mit festem Fernrohr.

a. Fernrohr, Libelle und Fufsgestell sind in fester Verbindung untereinander.

b. Fernrohr und Libelle sind fest verbunden, beide sind durch eine Kippschraube an dem einen Ende zu heben und zu senken.

B. Nivellierinstrumente mit umlegbarem Fernrohr und

a. mit freier Aufsatzlibelle;

b. mit Wendelibelle;

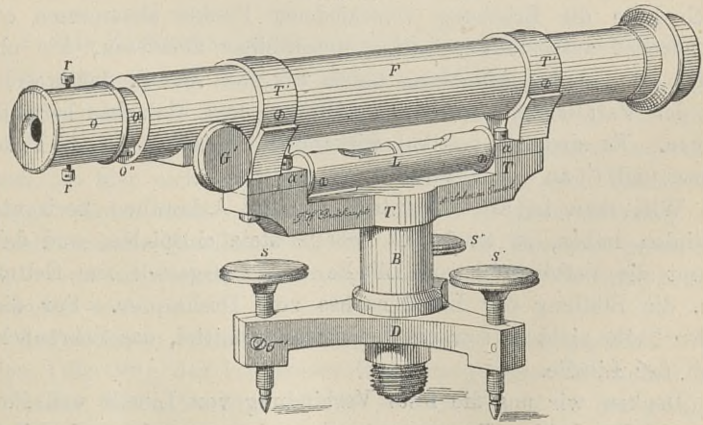
c. mit Aufsatz- oder Wendelibelle und Kippschraube.

Eine Dosenlibelle am Instrument ist wünschenswert, um die Lotrechtstellung der Vertikalachse zu erleichtern. Ebenso wird die Arbeit beschleunigt, wenn der Kopf des Stativs mit einer Dosenlibelle von geringer Empfindlichkeit versehen ist. Für die Aufstellung des Stativs befolge man die früher angegebene Regel wonach man zwei Beine fest eintritt und die annähernde Horizontierung mit dem dritten Beine allein besorgt.

A. Nivellierinstrumente mit festem Fernrohr.

a. Wenn das Fernrohr in fester Verbindung mit dem Fufsgestell ist, sei es der Dreifufs oder die Nufsvorrichtung, so mufs auch die Röhrenlibelle mit einem der beiden Teile fest verbunden sein.

Fig. 98.



In der Fig. 98 sitzt die Libelle auf dem horizontalen Träger T; das flache Ende a rechts ruht auf einer Wölbung oder Schneide;

die Durchbohrung für die festhaltende Schraube hat etwas Spielraum, damit durch die unter dem andern Ende a' wirkende Feder bezw. durch die Schraube l' ein geringes Heben und Senken möglich ist. Bei andern Instrumenten steht die Libelle fest auf dem Fernrohre.

In der Büchse B dreht sich der Vertikalzapfen, der nur im obern und untern konischen Teile mit der Büchse in Berührung ist und am Ende durch eine Schraubenmutter festgehalten wird. Dieser Zapfen ist die Drehachse, um welche sich das Fernrohr im Azimuth bewegen läſst.

Zur Vertikal- bezw. Horizontalstellung dienen die Stellschrauben S des Dreifuſses. Entweder haben sie Fuſsplatten, wie in Fig. 101, oder sie haben abgerundete Spitzen, die in die Rinnen von Metallplatten der Stativscheibe gestellt werden wie in Fig. 100.

Diese Art von Instrumenten hat den Vorzug der Einfachheit und Dauerhaftigkeit. Einmal richtig konstruiert, bleiben sie lange Zeit richtig und liefern für die meisten Arbeiten des Technikers genügende Resultate. Man kann sie bei der Arbeit ohne Gefahr auf dem Stative belassen und leicht von Stand zu Stand transportieren. Bei Sonnenschein empfiehlt sich zum Schutze der Libelle gegen einseitige Erwärmung ein Überzug von hellem Zeug und ein Schirm.

Um eine horizontale Zielachse zu erhalten, bedient man sich der Libelle. Ist ihre Achse parallel zur Zielachse, so braucht man sie nur zum Einspielen zu bringen, um von der Ziellinie aus durch Lote die Erhebung verschiedener Punkte abzumessen oder an lotrecht aufgestellten Latten unmittelbar abzulesen, wie oben gesagt ist. In der Abbildung haben wir zwei Mittel, durch welche wir den Parallelismus zwischen Libellen- und Zielachse herstellen können. Es sind die vertikal wirkenden Schrauben rr am Fadenkreuze und l' an der Libelle.

Will man in allen Richtungen oder Azimuthen horizontale Ziellinien haben, so muſs die Libelle stets einspielen, und dabei kommt die Verbindung von Libelle und Fuſsgestell zur Geltung, d. h. die Stellung der Libellenachse zum Drehzapfen. Für diese beiden Teile giebt es nur ein Berichtigungsmittel, das Schräubchen l' an der Libelle.

Denken wir uns die feste Verbindung von Libelle und Fernrohr auf Quecksilber liegen, so werden wir zunächst an die Libelle denken und diese zum Einspielen bringen, was nur durch l' geschehen kann. Oder wir werden uns sagen: die Libelle wird durch das Quecksilberniveau ersetzt, aber dieses mufs zuerst da sein. Dann erst werden wir die Zielachse durch rr berichtigen, ohne die Lage der Libellenachse zu ändern.

Würde man nur die Zielachse parallel zur Libellenachse stellen, so müfste man bei jeder Visur mit Hilfe der Stellschrauben des Dreifufses die Libelle zum Einspielen bringen. Dadurch würde aber der Horizont der Zielachse jedesmal ein anderer werden, was für das mehrfache Einwägen von einem Stande aus zu Fehlern führen würde.

Die Genauigkeit und der rasche Fortgang der Arbeit verlangt also die Prüfung in der angegebenen Folge.

1. Die Libellenachse soll rechtwinklig zur Drehachse sein.

Ist eine Dosenlibelle am Instrument vorhanden, so bringt man dieselbe zum Einspielen oder man stellt das Instrument mit Röhrenlibelle grob horizontal. Nun dreht man die Libelle in die Richtung zweier Stellschrauben und läfst sie mit ihrer Hilfe einspielen. Nach einer Drehung um 180^0 beseitigt man die Hälfte des auftretenden Ausschlags der Blase durch die Libellenschraube, die andere Hälfte durch eine oder beide Stellschrauben. Hierauf dreht man die Libelle um 90^0, also über die dritte Stellschraube und schafft den nun auftretenden ganzen Ausschlag mit dieser Schraube fort. Hierdurch ist die Libellenachse senkrecht zur Drehachse gemacht und diese vertikal gestellt.

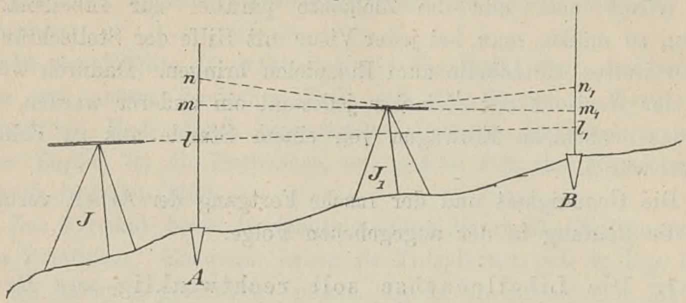
2. Die Zielachse mufs parallel zur Libellenachse sein.

Zur Erledigung dieser wichtigsten Forderung kann man wie beim Theodolit mit Fernrohrlibelle verfahren, § 30. II. C., allein die Visierhöhe bei einspielender Libelle am Instrument selbst zu messen, ist hier nicht statthaft, weil die Messung nach Millimetern verlangt werden mufs. Man benutzt daher zu dieser Messung das Fernrohr und die Nivellierlatte, was auch beim Theodolit geschehen mufs, wenn man denselben zum Einwägen von Geländepunkten verwenden will.

Angenommen, die beiden Achsen seien nicht parallel. Wir stellen, (Fig. 99), das Instrument in genau gleichen Abständen von den beiden festen Punkten A und B auf, sei es in der geraden Verbindungslinie derselben oder seitwärts. Da die Bedingung 1) erfüllt ist, richten wir das Fernrohr vom Stande J_1 mit einspielender Libelle auf die lotrechten Latten und lesen n und n_1

ab. Die horizontale Visierlinie würde m und m_1 gegeben haben. Da die Entfernungen gleich sind, so sind auch die Zielfehler gleich;

Fig. 99.



diese treten im Minuend und Subtrahend auf, also ist der Höhenunterschied der beiden Punkte A und B:

1) . . . . $h = n - n_1$.

Nun stellen wir das Instrument in J möglichst nahe an A auf, so nahe, als das Okulargetriebe es zuläfst. In 4 bis 5 ^{m} ist die Ablesung möglich, während der Abstand AB etwa 100 ^{m} ist. Man liest bei einspielender Libelle l und l_1 ab. Also ist jetzt

2) . . . . $h_1 = l - l_1$.

Soll nun h_1 der richtige Höhenunterschied sein, was der Fall ist, wenn die Zielachse horizontal ist, so mufs

$$n - n_1 = l - l_1$$

sein, oder $$l_1 = l - (n - n_1).$$

Ergiebt die Ablesung an der Latte in B die Zahl l_1 nicht, so ist das Fadenkreuz an den Schrauben rr vertikal so zu verstellen, dafs am Horizontalfaden die Ablesung l_1 erscheint.

Ist z. B. $n - n_1 = 0{,}565$ und die Instrumentenhöhe, also $l = 1{,}578$, so mufs $l_1 = 1{,}578 - 0{,}565 = 1{,}012$ werden.

Man kann das Verfahren auf § 30. II. C. zurückführen, indem man das Instrument in der Nähe von A aufstellt und die Ablesungen an beiden Latten l und l_1 macht und darauf dasselbe aus der Nähe von B wiederholt. Erhält man aus dem letztern Stande L_1 und L an den Latten von B und A, so müfste $l - l_1 = L - L_1$ sein. Ist das nicht der Fall, so nimmt man als richtigen Höhenunterschied das arithmetische Mittel

$$h = \frac{l - l_1 + L - L_1}{2},$$

weil der Fehler das eine Mal in l_1 und das andere Mal in L steckt und sich folglich forthebt. Kennt man den richtigen Höhenunterschied, so braucht man ihn nur zu der Ablesung an der nächsten Latte hinzuzuzählen, um die Ablesung an der entfernten Latte zu berechnen. Erhält man diese nicht, so ist das Fadenkreuz entsprechend zu verstellen. War die Zahl am Faden kleiner als die berechnete, so ist das Fadenkreuz zu heben.

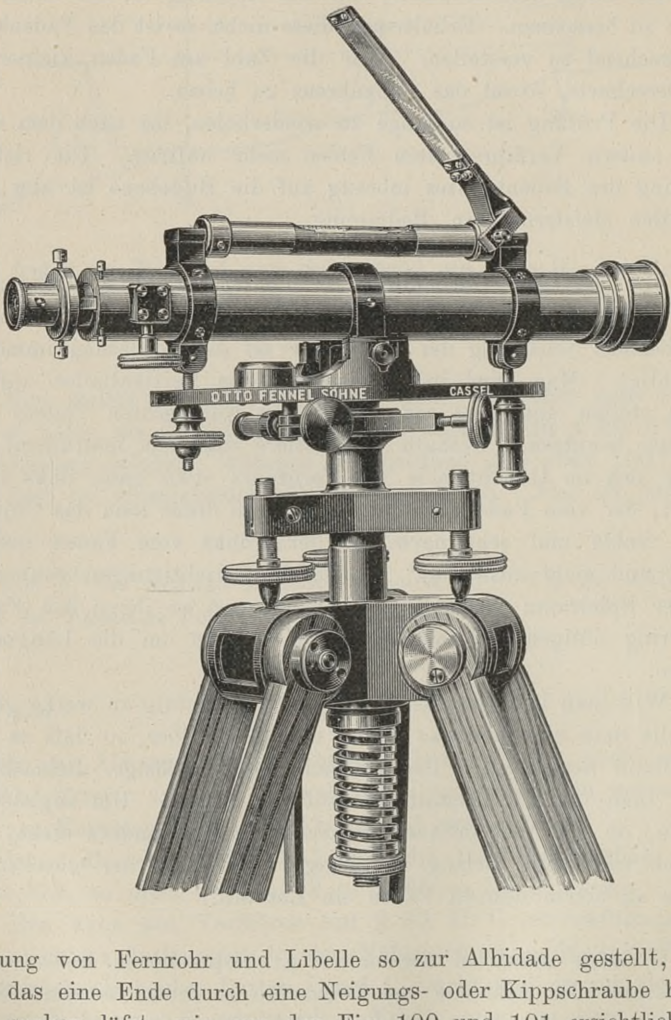
Die Prüfung ist so lange zu wiederholen, bis nach dem einen oder andern Verfahren kein Fehler mehr auftritt. Die richtige Stellung des Fadenkreuzes inbezug auf die Bildebene ist hier, wie bei allen Meſsfernrohren, Bedingung.

Von geringerer Bedeutung ist die wagerechte Stellung des Nivellierfadens nach bewirkter Horizontalstellung des Instruments. Zur bessern Schätzung der Millimeter ist die Forderung immerhin berechtigt. Man wird im allgemeinen den Vertikalfaden auf die Latte stellen und gern jede Stelle des wagerechten Fadens zum Ablesen benutzen. Deshalb horizontiere man das Instrument und merke sich im Gesichtsfelde des Fernrohrs etwa ganz links einen Punkt, der vom Faden bedeckt wird. Nun drehe man das Objektiv nach rechts und sehe nach, ob der Punkt vom Faden gedeckt bleibt und nicht ausweicht. Ist für die Berichtigungsschrauben ein kleiner Spielraum vorhanden, so kann man an ihnen den Fadenkreuzring nötigenfalls nach rechts oder links um die Längsachse drehen.

Will man in dieser Beziehung recht vorsichtig zu werke gehen, so fülle man eine hölzerne Rinne mit Quecksilber, so daſs es über den Rand hervorragt. Bei schwacher gleichmäſsiger Beleuchtung stelle man den Horizontalfaden auf die Kuppe. Um zugleich zu prüfen, ob der Vertikalfaden senkrecht zu dem andern steht, was freilich hier ohne Belang ist, hänge man hinter der Quecksilberkuppe an einem dünnen Faden ein Lot auf.

b. Möge auch bei den unter a) besprochenen Instrumenten Trägerarm oder Alhidade und Drehachse in einem einzigen Stück gegossen und abgedreht, oder die Achse von Stahl dauernd fest in die Alhidade eingeschraubt sein, so ist doch keine Bürgschaft vorhanden, daſs nicht mit der Zeit eine ungleichmäſsige Abnutzung in der Büchse oder bei etwas lockerer Achse an der Auflageplatte der Alhidade eintritt. In diesem Falle hat man kein Mittel, für jedes Azimuth die Libellenachse senkrecht zur Drehachse zu behalten, ohne den Horizont der Zielachse durch Benutzung der Fufsstellschrauben ändern zu müssen. Deshalb hat man die feste Ver-

Fig. 100.

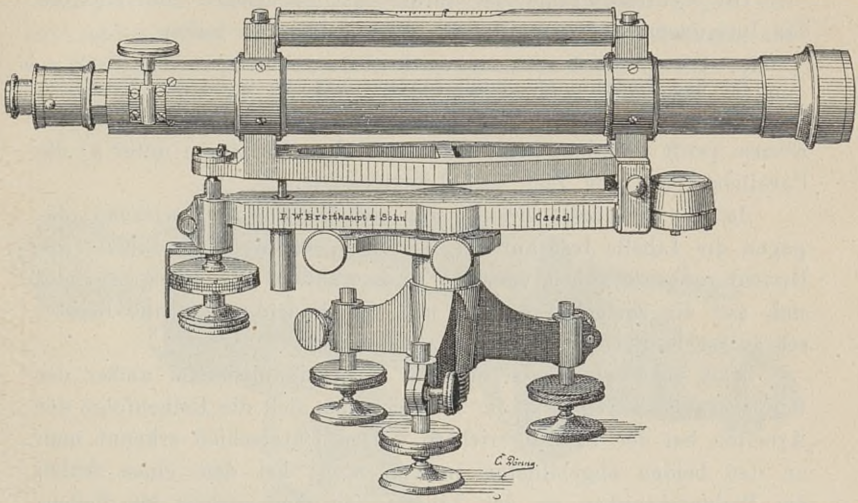


bindung von Fernrohr und Libelle so zur Alhidade gestellt, dafs sich das eine Ende durch eine Neigungs- oder Kippschraube heben und senken läfst, wie aus den Fig. 100 und 101 ersichtlich ist.

Der Trägerarm läfst sich wie beim Theodolit durch eine Bremsschraube festhalten und durch eine zweite Schraube fein bewegen. Der Kippschraube links in Fig. 100 wirkt eine Feder rechts entgegen. Der Schraube läfst sich durch eine Frictionsmutter eine feste Stellung geben. Stöfst der Kopf derselben unter die Alhidade, so soll die Libellenachse senkrecht zur Drehachse sein.

Bei dem Instrument Fig. 101 ist auf einem Stäbchen des

Fig. 101.



Fernrohrträgers links eine Marke angebracht, welche diese Stellung anzeigt.

Die Grundstellung der Kippschraube oder ihre Markenstellung ist zu prüfen bzw. zu berichtigen.

Man gebe der Schraube die Stellung, welche vom Mechaniker geliefert ist. Zur Beschleunigung der Prüfung benutze man zuerst die Dosenlibelle und bringe dann die Röhrenlibelle über eine Stellschraube des Dreifufses und mit dieser zum Einspielen. Ist die Libellenachse senkrecht zur Drehachse, so mufs die Blase auch nach einer Drehung um 180^0 einspielen. Thut sie das, so ist die Marke richtig. Ist es aber nicht der Fall, so ist wie beim Umsetzen der Röhrenlibelle zu verfahren. Die eine Hälfte des Ausschlags wird durch die Kippschraube beseitigt. Die Stellung der Libellenachse zur Drehachse ist nun die verlangte. Damit die Libellenachse auch horizontal wird, schafft man die andere Hälfte des Ausschlags mit der Fufsschraube fort. Dieses Verfahren ist so lange zu wiederholen, bis die Libelle in beiden Stellungen genau einspielt.

Diese so gewonnene Stellung der Kippschraube ist am Instrument selbst festzumachen oder, wenn eine Skala vorhanden ist, zu notieren.

Von dieser Grundstellung der Kippschraube ist beim allgemeinen Horizontieren des Instruments auszugehen, indem man die Libelle in zwei um 90^0 verschiedenen Azimuthen zum Einspielen bringt.

Die Centralschraube ist darauf fest anzuziehen und dadurch das Instrument auf dem Stative unverrückbar zu halten.

Ist das Instrument genau horizontiert, so mufs der Nivellierfaden wagerecht sein. Man prüft ihn, wie oben angegeben ist. Ebenso prüft und berichtigt man nach dem Verfahren unter a) die Parallelstellung von Ziel- und Libellenachse.

Ist die Neigungsschraube nur auf das Fernrohr wirkend, dagegen die Libelle fest auf der Alhidade, so mufs die Libelle mit Berichtigungsschrauben versehen sein, während die Markenstellung sich auf die Zielachse bezieht und das Fadenkreuz keine Richteschrauben besitzt.

Man sehe also nach, welche Berichtigungsmittel aufser der Kippschraube gegeben sind. Danach mufs sich die Reihenfolge der Arbeiten bei der Prüfung richten. Den Unterschied erkennt man an den beiden abgebildeten Instrumenten; bei dem einen fehlen die Richteschrauben an der Libelle, bei dem andern am Fadenkreuze. An die Stelle der fehlenden ist die Kippschraube getreten.

B. Nivellierinstrumente mit umlegbarem Fernrohr.

a. Die Aufsatzlibelle ruht frei auf dem Fernrohr.

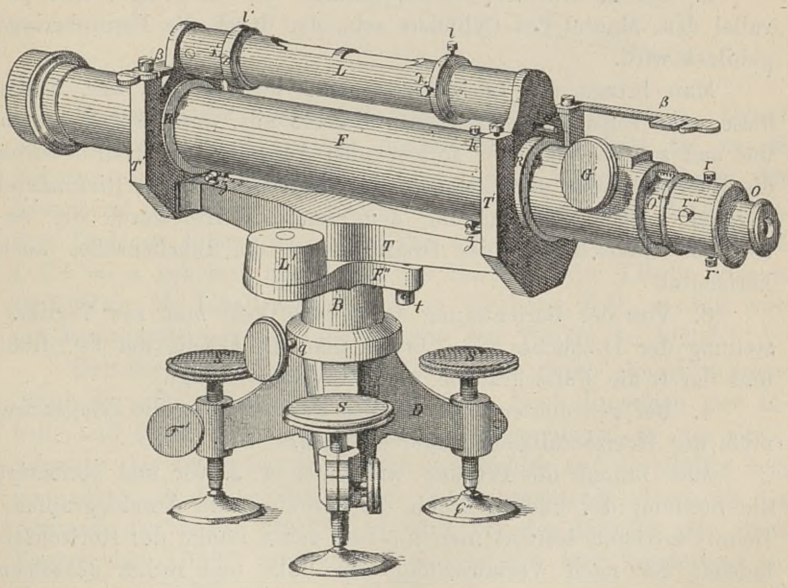
Man hat die freiere Beweglichkeit von Fernrohr und Libelle und die Lösbarkeit der drei Teile gewählt, um die Prüfung einfacher gestalten und besonders den Parallelismus von Ziel- und Libellenachse bewirken zu können, ohne den Standpunkt verlassen zu müssen. Teils sind die Fernrohre nur umlegbar, so dafs oben und unten vertauscht wird, teils sind sie mit vertauschten Lagern umlegbar und ferner ganz oder um 180^0 um die Längsachse drehbar.

Das in der Fig. 102 abgebildete Instrument hat ein umlegbares Fernrohr, das sich in den cylindrischen Lagern um die geometrische Achse der Fernrohrringe um 180^0 drehen läfst. Die Drehung wird dadurch gehemmt, dafs der Schraubenkopf k gegen die Spitze einer auf der Alhidade befindlichen Schraube stöfst. Diese letztere läfst sich in einem Ansatze z so einstellen, dafs der Nivellierfaden eine bestimmte Lage erhält, wenn die Schraube k anschlägt.

Die Libelle hat cylindrisch ausgedrehte Füfse, die auf die Ringe des Fernrohrs passen. Sie läfst sich umsetzen und in der Quererichtung etwas verschieben. Durch die Vorleger β wird sie in fester Stellung gehalten.

Der horizontale Träger T ruht auf einem Halbcylinder der Grundplatte F'' und kann gegen dieselbe und damit gegen den Drehzapfen etwas verstellt werden, ohne dafs an dem Auflager auf der Büchse etwas geändert wird. Dies geschieht durch die Schraube t, welcher an der andern Seite eine gleiche gegenüber steht. Die

Fig. 102.



Schrauben vertreten gewissermafsen die Kippschraube, sie sind in Fig. 104 deutlich sichtbar.

Die Prüfung des Instruments hat es hier mit einer neuen Achse zu thun, nämlich der geometrischen Achse der Lagerringe des Fernrohrs.

1. Die Zielachse mufs mit der geometrischen Achse der Ringe zusammenfallen oder ihr in sehr geringem Abstande parallel sein. Da die Zielachse durch das Fadenkreuz und den optischen Mittelpunkt des Objektivs festgelegt wird, so mufs letzteres centriert sein d. h. sein optischer Mittelpunkt mufs in die mechanische Achse der Objektivröhre fallen. Es sei dies der Fall, dann visiere man in

grofser Entfernung einen deutlichen Punkt scharf an und drehe das Fernrohr um seine Achse. Der Punkt mufs vom Fadenkreuze bedeckt bleiben, widrigenfalls man die Hälfte des gröfsten Abstandes unten oder seitwärts durch die Richteschrauben des Fadenkreuzes beseitigt.

Bei sehr grofser Entfernung des angezielten Punktes war eine Excentrizität des Objektivs belanglos; sie wird zutage treten, wenn man einen sehr nahen Punkt anvisiert. Weicht beim nunmehrigen Drehen des Fernrohrs der angezielte Punkt vom Fadenkreuze ab, so ist das Objektiv nicht centriert und das Fernrohr unbrauchbar.

2. Die Libellenachse mufs parallel der Unterlage, also parallel dem Mantel des Cylinders sein, der durch die Fernrohrringe gebildet wird.

Man bringe die Libelle über eine Fufsschraube und durch diese zum Einspielen, setze nun dieselbe mit vertauschten Enden um und schaffe den etwa auftretenden Ausschlag zur Hälfte durch die Richteschraube der Libelle fort. Sie ist damit dem Ringmantel parallel. Nach Fortschaffung der andern Hälfte durch die betreffende Stellschraube des Dreifufses ist die Libellenachse auch horizontal.

3. Von der Berichtigung der Libelle geht man zur Vertikalstellung der Drehachse über, indem man die Libelle um 90^0 dreht und durch die Fufsschrauben zum Einspielen bringt.

4. Bei gehemmter Drehung des Fernrohrs um die Längsachse mufs der Horizontalfaden wagerecht sein.

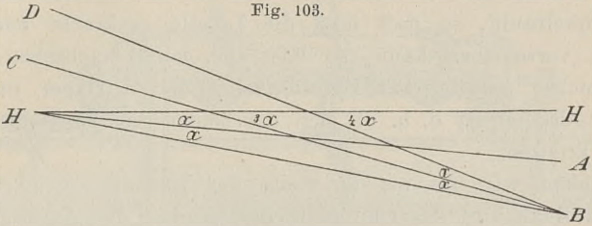
Man nimmt die Prüfung wie unter A. a. vor und berichtigt die Stellung des Fadens durch die Schraube des Anschlagzapfens. Beim Centrieren benutzt man nun die ganze Länge des Horizontalfadens, der nach Vertauschung von links und rechts denselben Strich der Latte treffen mufs, wenn die Visierebene der Libellenachse parallel sein soll. Man braucht jetzt zum Centrieren des Fadenkreuzes nicht seinen Mittelpunkt zu wählen.

5. Es ist zu untersuchen, ob die Fernrohrlagerringe gleiche Durchmesser haben.

Hat man die Libellenachse nach 2. berichtigt, so bringe man die Libelle zum Einspielen und setze behutsam das Fernrohr mit der Libelle in den Lagern um. Sollte dann der eine Ringdurchmesser gröfser sein als der andere, so wird das eine Ende tiefer einsinken als das andere und die Blase einen Ausschlag machen, der dem vierfachen Neigungswinkel der Ringachse gegen die Libellenachse entspricht.

Da die Ungleichheit der Ringdurchmesser wohl selten vorkommt, so sei dieselbe durch etwa eingedrungenen Staub verschuldet. In dem einen Lager liege ein Staubkörnchen von $0{,}01^{mm}$ Dicke, dadurch wird man gezwungen, das betreffende Ende um den Winkel α zu neigen, so daſs die Achse der einspielenden Libelle

Fig. 103.



mit der Achse der Lager den Winkel $HHA = \alpha$ bildet. Denkt man nun das Staubkörnchen fortgenommen, so tritt die zweite Neigung um den Winkel $AHB = \alpha$ ein. Durch Einlegen des Körnchens in das andere Lager, welche beide letzte Handlungen dem Umlegen entsprechen, wird das andere Ende um den Winkel $CBH = \alpha$ gehoben und durch das Umsetzen der Libelle kommt schlieſslich die Libellenachse HH in die Lage BD, so daſs nun die Horizontale mit der Libellenachse den Winkel 4α bildet.

Derselbe Fehler wird auftreten, wenn durch eingedrungenen Staub der eine Libellenfuſs gehoben ist. Nach Umsetzen der Libelle und durch Beseitigen des halben Ausschlages an der Stellschraube des Dreifuſses kann man den Fehler auf die Hälfte herabmindern, er bleibt aber immer noch bedeutend. Denn ist der Abstand der Lager 200^{mm}, so wird bei der Hebung des einen Lagers um $0{,}01^{mm}$ und einer Zielweite von 50^{m} mindestens ein Fehler von $\frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}01}{200} \cdot 50^{m} = 1{,}25^{mm}$ entstehen.

Es läſst sich nun freilich durch die Angabe der Libelle aus dem Ausschlage der Winkel α berechnen und bei der Lattenablesung berücksichtigen; auch die Zielachse läſst sich danach berichtigen, aber dadurch wird die Centrierung des Fernrohrs wieder aufgehoben, und damit verschwindet die ganze Annehmlichkeit des umlegbaren Fernrohrs. Hat man nämlich die Libelle berichtigt, das Fernrohr centriert und sind die Ringdurchmesser gleich, so fallen Zielachse und geometrische Achse der Lagerringe zusammen und sind der Libellenachse parallel bei beliebiger Lage des Fernrohrs, was durch die angedeutete Berichtigung wieder vereitelt würde.

Um den Fehler unschädlich zu machen, mufs man aus der Mitte mit stets gleichliegendem Fernrohr nivellieren und die Zielweiten ganz gleich machen. Zugleich ersieht man aus dem Gesagten, dafs es von Wichtigkeit ist, die Lager, Fernrohrringe und Libellenfüfse sorgfältig von Staub und Schmutz frei zu halten.

6. Haben die Libellenfüfse zwischen den Gabeln der Träger etwas Spielraum, so dafs man die Libelle senkrecht zur Längsrichtung verschieben kann, so läfst sich leicht nachsehen, ob die Libellenachse parallel zur Cylinderachse der Auflager und nicht etwa windschief ist d. h. ob sich die beiden Achsen nicht etwa im Raume kreuzen.

Denken wir uns an der Seite des Instrumentes stehen, das Objektiv links und das Okular rechts, so dafs das Auge gegen die Längenausdehnung der Libelle gerichtet ist. Wir bringen die Libelle zum Einspielen. Sind nun die betreffenden Achsen nicht parallel, sondern windschief, so sei das rechte Ende der Libellenachse jenseits der Vertikalebene der Cylinderachse, das linke Ende diesseits. Da die Libelle auf den Cylindern etwas von uns ab oder zu uns her verschoben werden kann, ohne dafs die Füfse zum Teil aufser Berührung mit der Unterlage kommen, so schieben wir die Libelle etwas von uns weg. Dadurch wird das rechte Ende der Libellenachse noch weiter auf die abgewandte Seite des Fernrohrs gebracht und gesenkt, das linke dagegen gehoben. Die Blase wird folglich nach links gehen. Dies ist das Zeichen für die vorzunehmende Bewegung der Libelle im Gehäuse. Wir müssen mit der horizontal wirkenden Libellenschraube das rechte Ende zu uns her bzw. das linke von uns fort bewegen.

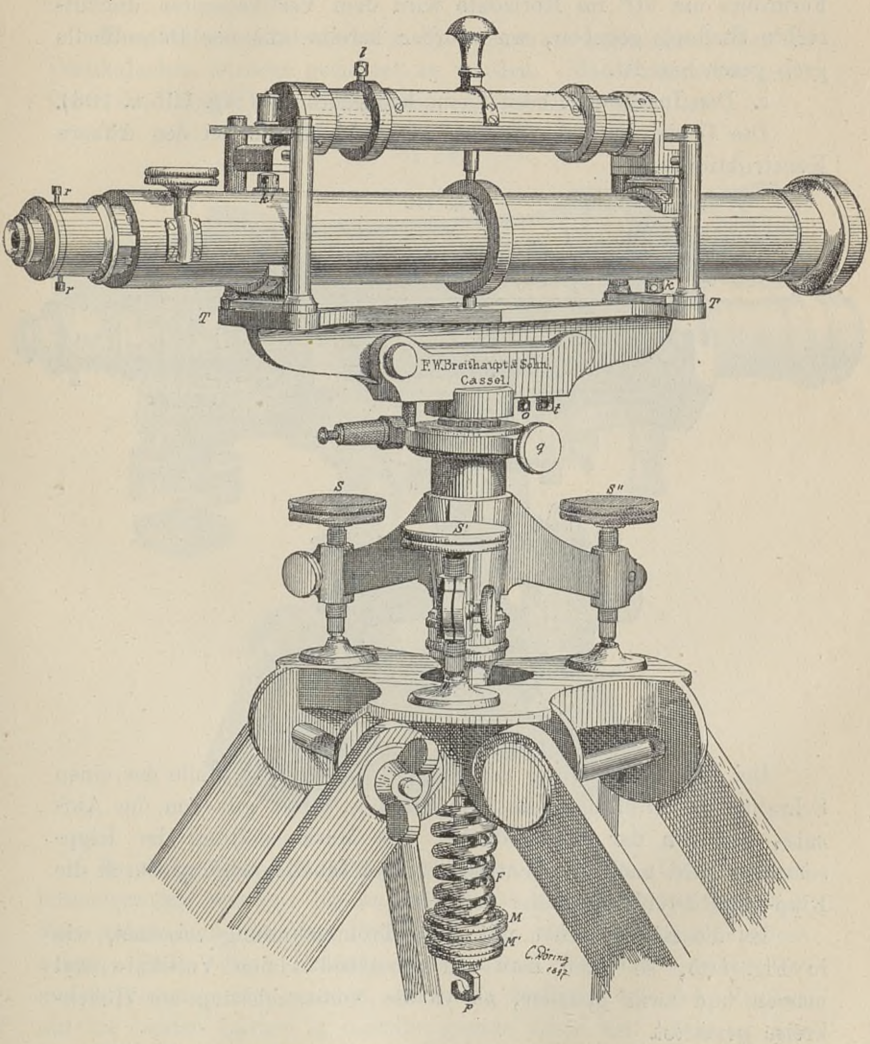
Eine Konstruktion besonderer Art ist diejenige in Fig. 102a. Das Fernrohr ruht in den Gabeln mit dem einen Ende auf einer Stahlschneide und mit dem andern auf einem Schraubenkopfe. Die Auflagerplatten p sind von Stahl. Dasselbe gilt von den Libellenfüfsen. Durch die verstellbaren Schrauben gewinnt man ein Mittel, den unter 5. besprochenen Übelstand zu vermeiden.

b. Die Wendelibelle ist mit dem Fernrohr fest verbunden. (Fig. 104.)

Es wird vorausgesetzt, dafs die beiden Achsen der Wende- oder Doppellibelle parallel sind. Die wagerechte Lage des Querfadens wird durch die Anschlagschrauben bewirkt. Darauf wird die Zielachse mit der Ringachse in eine Gerade gebracht, indem man die Latte am Nivellierfaden abliest, das Fernrohr um die

Längsachse um 180^0 dreht und wieder abliest. Stellt man nun den Faden auf das arithmetische Mittel der Ablesungen, so fällt die Ringachse in die Visierebene.

Fig. 102a.



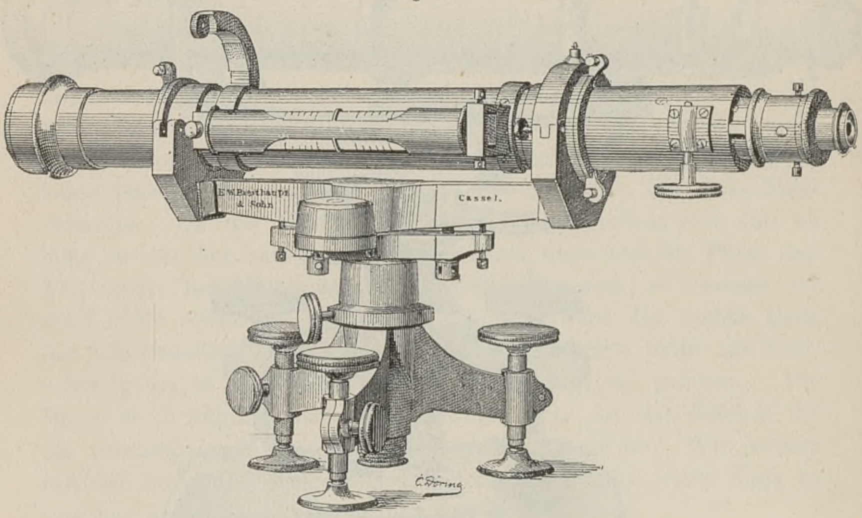
Die Zielebene macht man horizontal, indem man die Libelle über einer Fufsschraube einspielen läfst. Man dreht nun das Fernrohr mit Libelle um 180^0, so dafs die letztere an die andere Seite zu liegen kommt. Zeigt sich ein Ausschlag, so ist die

Hälfte desselben durch die Berichtigungsschrauben der Libelle zu beseitigen, wodurch die Libellenachse parallel zur Ringachse wird. Nach Fortschaffung der andern Hälfte durch die Schraube des Dreifufses sind die Achsen horizontal gestellt. Nach Drehung des Fernrohrs um 90^0 im Horizonte wird dem Vertikalzapfen die lotrechte Stellung gegeben, was vorher bereits mit der Dosenlibelle grob geschehen ist.

c. Das Instrument besitzt eine Kippschraube (Fig. 105 u. 106).

Die Centrierung des Fernrohrs geschieht wie bei den frühern Konstruktionen.

Fig. 104.



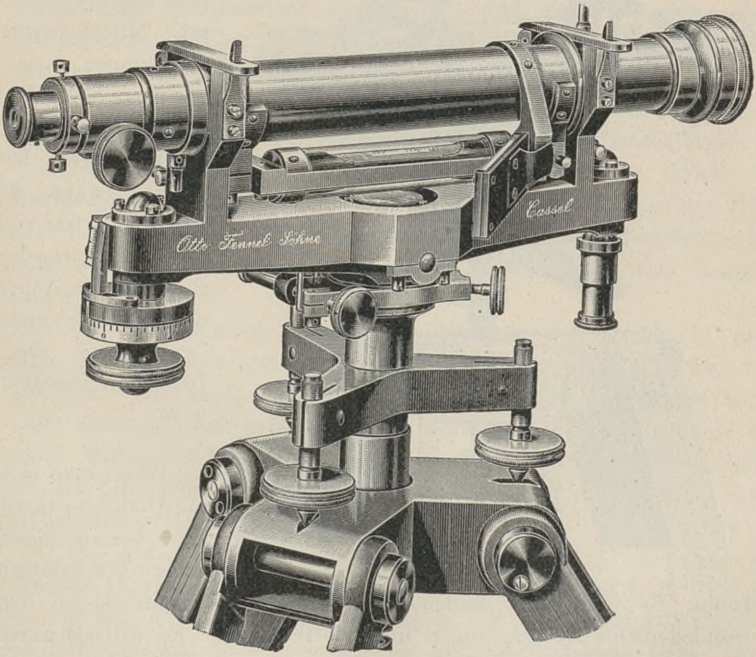
Bei der Berichtigung der Libelle tritt an die Stelle der einen Schraube des Dreifufses die Kippschraube. Das gilt von der Aufsatz- und von der Wendelibelle. Die Markenstellung der Kippschraube wird nach der Centrierung und Libellenprüfung durch die Kipp- und Dreifufsschraube gefunden.

Ist die Kippschraube mit einer Trommelteilung versehen, wie in Fig. 105, so kann man mit derselben kleine Vertikalwinkel messen und zwar genauer, als es die Nonienablesung am Höhenkreise gestattet.

Das Fernrohr in Fig. 106 liegt in einer Wiege, in welcher es sich um die Längsachse beliebig drehen läfst. Die sehr empfindliche Libelle kann auf den Fernrohrringen zwischen den Gabeln in der Quererichtung hin- und hergeschoben und dadurch eine Kreuzung der Achsen leicht nachgewiesen werden. Liegt eine solche vor, so ist nach Centrierung des Fadenkreuzes in der Ringachse der Parallelismus zwischen Libellenachse und Zielachse durch die wagerecht wirkenden Schrauben der Libellenlagerung herzustellen.

Das Instrument braucht nicht im ganzen horizontiert oder die Vertikalachse lotrecht gerichtet zu werden. Man bringt vor jeder Visur die Libelle zum Einspielen, was schnell besorgt ist.

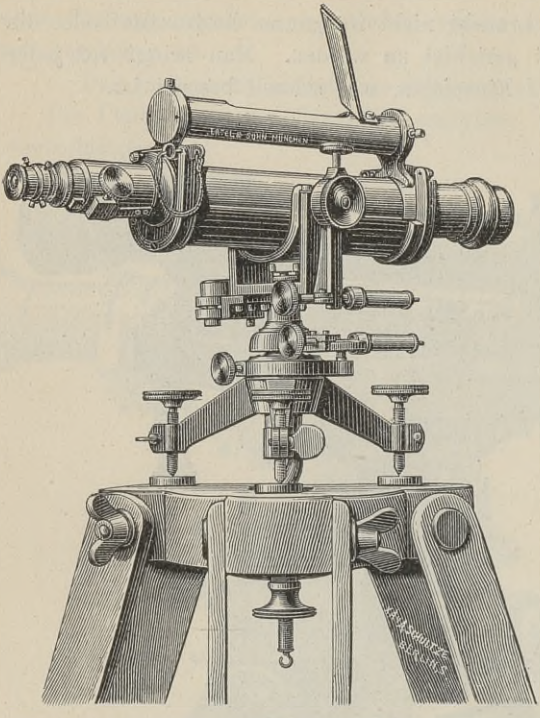
Fig. 105.



Je näher das Ziel ist, desto mehr mufs die Okularröhre herausgezogen werden; bis an die Grenze der Möglichkeit geschah dies unter A. a. bei der Parallelstellung von Ziel- und Libellenachse. Sollte diese Prüfung ein genaues Resultat ergeben, so mufste vorausgesetzt werden, dafs die Ziellinie bei den Visuren auf die beiden Latten in dieselbe gerade Linie fiel. Das ist nur der Fall, wenn sich der Gang des Okularrohres ohne jede Auf- und Abwärtsbewegung vollzieht. Befürchtet man ein Ausweichen des Fadenkreuzes aus der festgelegten Zielachse, so mufs man beim Nivellieren diejenigen Zielweiten beibehalten, die man bei der

Prüfung benutzte. Läfst sich das Fernrohr um seine Längsachse drehen und hat man mit sehr verschiedenen Zielweiten zu arbeiten, so mache man die Ablesungen doppelt und zwar in der ursprünglichen und in der umgekippten Lage des Querfadens. Wird die Latte nicht in gleicher Höhe getroffen, so notiert man das arithmetische Mittel beider Ablesungen.

Fig. 106.



Man halte die Zahnstange des Okulartriebes, besonders wenn sie oben liegt, frei von Staub und sorge dafür, dafs die Achse des Zahnrades stets gut durch den Deckel aufgedrückt wird.

Wenn man sich die Abbildungen der Preisverzeichnisse einiger Werkstätten ansieht, so wird man finden, dafs die Nivellierinstrumente den verschiedensten Abänderungen unterworfen sind. Es will scheinen, als ob die Sucht nach Verbesserungen oft zu weit geht und in vieler Beziehung das Bessere der Feind des Guten wird. Den Behörden dürfte zu empfehlen sein, nur die einfachsten Formen den Beamten in die Hände zu geben, damit nicht die Arbeiten unter dem Gefühl der Unsicherheit leiden.

§ 43. **Das Quecksilber-Barometer.**

Der bekannte von Torricelli 1643 angestellte Versuch führte zur Erfindung des Barometers (*τὸ βάρος*, die Schwere oder das Gewicht und *μέτρειν*, messen). Die erste Anregung, dasselbe zu

Höhenmessungen zu benutzen, gab Pascal 1648. Man hat sog. Reisebarometer konstruiert, welche mit Hilfe leichter Stative cardanisch aufgehängt werden. Trotz aller Vervollkommnung verlangen jedoch die Quecksilberbarometer grofse Vorsicht beim Transport und eine ganze Reihe mühsamer Hantierungen, wohin das jedesmalige Einstellen der Skala, das Stürzen, die geschützte Aufhängung und bei manchen das Abgiefsen des Quecksilbers gehören. Sie beanspruchen auf jeder Station ein Zuwarten bis zum Temperaturausgleich und sind aufserdem recht teuer. Man benutzt sie deshalb zur Aufsenarbeit nur ungern und zieht im allgemeinen die kleinen, bei der Fortschaffung und Behandlung wenig Mühe verursachenden Feder- oder Aneroid-Barometer vor.

Um die Höhenformel abzuleiten, legen wir das Quecksilberbarometer zugrunde und sehen vorläufig von allen Nebeneinflüssen ab.

Die Länge der Quecksilbersäule hängt von der Gröfse des Luftdrucks, dieser bei sonst gleichen Verhältnissen von der Höhe der Luftsäule ab. Wird die Luftsäule dadurch verkürzt, dafs man mit dem Barometer in die Höhe steigt, so wird dasselbe fallen.

Um die Abnahme der Quecksilbersäule zu berechnen, mufs man die Gewichte von Quecksilber und Luft mit einander vergleichen. Man mufs also die Frage beantworten: um wieviel Meter mufs man die Luftsäule verkürzen, damit die Quecksilbersäule um einen Millimeter kürzer wird? Oder umgekehrt: um wieviel Meter ist die Luftsäule verkürzt worden, wenn das Quecksilber um einen Millimeter gefallen ist?

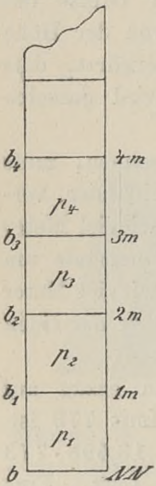
Da das specifische Gewicht des Quecksilbers in bezug auf Wasser 13,596, dasjenige des Wassers in bezug auf Luft 773 ist, so ist das Quecksilber im Vergleich mit der Luft $13{,}596 \cdot 773 = 10\,509{,}7$ mal so schwer als ein gleiches Volumen Luft. Eine Luftsäule von $10\,509{,}7^{\text{mm}}$ Länge ist also grade so schwer wie eine Quecksilbersäule von 1^{mm} Länge mit gleichem Querschnitt. Beobachtet man demnach den Barometerstand an einem Punkte und findet an einem höher gelegenen Punkte, dafs das Quecksilber in der Röhre um 1^{mm} gefallen ist, so schliefst man daraus, dafs der zweite Punkt $10{,}5^{\text{m}}$ höher liegt als der erste. Bei der Ausführung dieses Versuches wolle man den Nullpunkt am offenen Schenkel beachten.

Das Gewicht der Luft, also auch ihr Druck nimmt jedoch nicht in dem gleichen Verhältnisse mit der Höhe ab. Wäre dies der Fall, so könnte für den Barometerstand 760^{mm} an der Erdoberfläche die Höhe der Atmosphäre nur $760 \cdot 10{,}5^{\mathrm{m}}$ d. h. etwas über eine Meile betragen. Das widerspricht der Erfahrung. Aus den Erscheinungen der Strahlenbrechung hat man sogar das Zehnfache berechnet und aus der Höhe der Meteore und des Nordlichts hat man auf das Vierzigfache, also auf etwa 300^{km} Höhe geschlossen.

Die Dichtigkeit der Luft ist nicht überall gleich, sie nimmt mit der Höhe ab und zwar bedeutend schneller als die Höhe zunimmt. Deshalb ist folgende Untersuchung anzustellen, um aus den Barometerständen auf die Erhebungen über den Meeresspiegel bzw. auf die Höhenunterschiede zweier Punkte schliefsen zu können.

Der Barometerstand in der Höhe des Meeresspiegels oder bei NN in Fig. 107 sei b; die Stände in 1, 2, 3^{m} u. s. w. Höhe seien b_1, b_2, b_3 u. s. w. Für die Höhenunterschiede von 1^{m} sind also die Differenzen der Barometerstände

Fig. 107.



1) . . . . .
$$\begin{aligned} b - b_1 &= p_1 \\ b_1 - b_2 &= p_2 \\ b_2 - b_3 &= p_3 \\ \ldots & \ldots \end{aligned}$$

Es ist demnach die Differenz p_1 die Länge derjenigen Quecksilbersäule, welche mit der untersten Luftschicht von 1^{m} Länge gleiches Gewicht hat; p_2 ist das Gewicht des zweiten Meters Luft, p_3 dasjenige des dritten Meters u. s. w.

Nun verhalten sich nach dem Mariotte schen Gesetze bei konstanter Temperatur die Dichtigkeiten, also auch die Gewichte der trockenen Luftschichten wie die drückenden Kräfte. Diese letztern sind unmittelbar durch die Quecksilbersäulen, welche den Luftsäulen das Gleichgewicht halten d. h. durch die Barometerstände gegeben. Es ist also

2) . . . . .
$$\begin{aligned} p_1 : p_2 &= b_1 : b_2 \text{ oder } \frac{p_1}{b_1} = \frac{p_2}{b_2} \\ p_2 : p_3 &= b_2 : b_3 \text{ oder } \frac{p_2}{b_2} = \frac{p_3}{b_3} \\ \ldots & \ldots \end{aligned}$$

Aus den letzten Proportionen wird durch Addition von Eins auf beiden Seiten und nach Vertauschung der innern Glieder

$$\frac{p_1 + b_1}{p_2 + b_2} = \frac{b_1}{b_2}; \quad \frac{p_2 + b_2}{p_3 + b_3} = \frac{b_2}{b_3}; \text{ u. s. w.}$$

Nach 1) ist:

$$p_1 + b_1 = b; \quad p_2 + b_2 = b_1; \quad p_3 + b_3 = b_2; \cdots$$

Setzt man diese Werte ein, so erhält man

$$3) \quad \ldots\ldots \quad \frac{b}{b_1} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_2}{b_3} = \cdots = q.$$

Diese Gröfse q ist also das Verhältnis zweier Barometerstände bei dem Höhenunterschiede von einem Meter. Es ist q nicht überall dasselbe; es kommt darauf an, von welchem b wir ausgehen, aber immer ist $q > 1$, da der gröfsere Barometerstand im Zähler steht.

Nehmen wir die einzelnen Proportionen aus 3) und schreiben dieselben umgekehrt, so ist

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{b}{b_1}; \quad \frac{b_2}{b_3} = \frac{b_1}{b_2}; \quad \frac{b_3}{b_4} = \frac{b_2}{b_3}; \ldots$$

Hieraus ergeben sich die Barometerstände

$$b_1 = b \cdot \frac{b_2}{b_1} = b \cdot \frac{1}{q}; \quad b_2 = b_1 \cdot \frac{b_3}{b_2} = b \cdot \frac{1}{q^2}; \quad b_3 = b_2 \cdot \frac{b_4}{b_3} = b \cdot \frac{1}{q^3} \cdots$$

oder sie sind

$$4) \quad \ldots \quad b; \quad b_1 = b \cdot \frac{1}{q}; \quad b_2 = b \cdot \frac{1}{q^2}; \quad b_3 = b \cdot \frac{1}{q^3}; \ldots$$

Die Barometerstände bilden eine abnehmende geometrische Reihe, während die zugehörigen Höhen eine zunehmende arithmetische Reihe bilden.

Aus den Gleichungen 4) ergiebt sich

$$b = q \cdot b_1 = q^2 \cdot b_2 = q^3 \cdot b_3 \ldots$$

Sind wir h Meter gestiegen und ist der Barometerstand in dieser Höhe β, so ist die einfachste barometrische Höhenformel für trockene Luft und 0^0 C. ohne Rücksicht auf geographische Breite und Schwereabnahme mit der Erhebung

$$5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad b = q^h \cdot \beta.$$

Hieraus

$$6) \quad \ldots\ldots\ldots \quad h = \frac{\log b - \log \beta}{\log q} \text{ Meter.}$$

Den Wert von q berechnen wir für 760, für den Barometerstand am Ausgangspunkte. Wie wir oben gesehen haben, ist die Luft rund 10500 mal so leicht als Quecksilber. Das Stück, um welches die Quecksilbersäule bei einer Erhebung von 1^m fällt, ist also $(1:10500)^{\mathrm{m}} = 0{,}095^{\mathrm{mm}}$. Das Barometer wird also von 760^{mm} auf $759{,}905^{\mathrm{mm}}$ fallen. Der Wert von q ist demnach

$$q = \frac{b}{b_1} = \frac{760}{759{,}905} \text{ und } \log q = 0{,}000\,0543.$$

Die Formel 6) lautet nun

$$7) \quad . \quad . \quad h = \frac{\log b - \log \beta}{0{,}000\,0543} = 18\,416\,(\log b - \log \beta).$$

Die Zahl 18 416 oder rund 18 400 ist für Mitteleuropa als Konstante zu bezeichnen. Für Deutschland ist nach Jordan 18 464 zu setzen; für die Provinz Hannover und auch für Mitteleuropa ist als mittlerer, auf 0^0 reduzierter Barometerstand in Meereshöhe 762^{mm} zu betrachten.

Die Gleichung 7) gilt für die Lufttemperatur 0^0 C. Bei dieser Temperatur finden jedoch die barometrischen Beobachtungen selten statt, jedenfalls ist dieselbe nicht auf beiden Stationen die gleiche. Man hat daher bei jeder Barometerablesung die Temperatur der Luft zu notieren. Aus den Temperaturen beider Beobachtungsorte nimmt man das Mittel. Sind dieselben t bzw. τ, so ist $\frac{t+\tau}{2}$ in Rechnung zu setzen.

Nach dem Gay Lussacschen Gesetze dehnt sich bei konstantem Druck für jeden Grad des hundertteiligen Thermometers die trockne Luft um 0,003 665 ihres Volumens aus oder sie zieht sich zusammen. Das Umgekehrte dieses Bruches liefert uns die bekannte Zahl 273, den absoluten Nullpunkt — 273^0 C. Statt der obigen Zahl können wir als Ausdehnungskoeffizienten genau genug $\alpha = 0{,}004$ setzen.

Da sich also die Dichtigkeit der Luft und entsprechend ihr Gewicht mit der Temperatur ändert, so wird man bei Aufstellung der Höhenformel die Temperatur gemäſs dem genannten Gesetze berücksichtigen müssen.

Setzen wir voraus, daſs das Mittel von t und τ über Null ist, so liefert die Formel 7) ein zu kleines Resultat. Für jeden Temperaturgrad ist die Luft um das 0,004 fache ihres Volumens dünner, also leichter geworden. Die Luftsäule ist daher um $0{,}004 \cdot \frac{t+\tau}{2}$ mal höher zu nehmen, sodaſs jetzt die Höhenformel lautet

$$8) \quad . \quad . \quad H = 18\,400 \cdot (\log b - \log \beta) \cdot \{1 + 0{,}002 \cdot (t + \tau)\}.$$

Die Temperaturgrade sind als algebraische Zahlen zu behandeln d. h. über Null als positiv, unter Null als negativ in die Rechnung einzuführen.

Die Formel 8) giebt den Höhenunterschied der beiden Orte mit den Barometerständen b und β; setzt man $b = 760$, so erhält man die Höhenlage über dem Meeresspiegel.

Eine Näherungsformel ist diejenige von Fischer-Babinet, zu deren Berechnung man keine Logarithmen gebraucht:

$$H = 16\,000 \cdot \frac{b - \beta}{b + \beta} \cdot \{1 + 0{,}002 \cdot (t + \tau)\}.$$

Verstehen wir unter Korrektion die Verbesserung eines Fehlers, der ohne unsere Schuld auftritt und sich bei aller Sorgfalt nicht vermeiden läſst (im Gegensatz zu Korrektur), so sind an den Barometerablesungen eine Reihe von Korrektionen vorzunehmen, von denen zwei näher besprochen werden sollen.

Die Länge der Quecksilbersäule wird nicht allein durch den Luftdruck, sie wird auch durch die Temperatur t des Quecksilbers beeinfluſst. Für je 1^0 Wärmezunahme oder Abnahme wird die Flüssigkeitssäule um $\lambda = 0{,}00018$ ihrer Länge linear ausgedehnt bzw. verkürzt. Um also jeden Barometerstand auf 0^0 C. zu reduzieren, muſs man ihn mit λt multiplizieren und dieses Produkt von ihm algebraisch abziehen d. h. bei $+ t$ abziehen und bei $- t$ hinzuzählen. Gehen wir von b_0 aus, so ist es umgekehrt; es ist

$$b = b_0 \cdot (1 + \lambda t), \text{ hieraus}$$

$$b_0 = \frac{b}{1 + \lambda t} = b \cdot (1 - \lambda t),$$

welche Formel durch Division erhalten ist und der Reduzierung entspricht.

Neben der linearen Ausdehnung bzw. Zusammenziehung der Quecksilbersäule durch die Zu- bzw. Abnahme der Wärme findet eine Veränderung des Maſsstabes statt, welche für die Reduzierung des Barometerstandes je nach der Konstruktion des Instruments als der ersten Änderung entgegen- oder gleichwirkend zu betrachten ist.

Die Skala möge auf der Glasröhre selbst aufgeätzt sein, so ist für den Ausdehnungskoeffizienten des Glases $\mu = 0{,}000\,011$ und seine Temperatur t der reduzierte Stand

9) . . $b_0 = b - b \cdot \lambda t + b \cdot \mu t = b \cdot \{1 - (\lambda - \mu) \cdot t\}$.

Für die Glasskala ist also

$$b_0 = b \cdot (1 - 0{,}000\,169\, t).$$

Ist die Messingskala mit $\mu = 0{,}000\,018$ unten fest, so dafs die Ausdehnung von unten nach oben, die Zusammenziehung von oben nach unten stattfindet, so ist $b_0 = b\,(1 - 0{,}000\,162\ t)$.

Die Erklärung ist einfach, wenn wir wieder die Skala auf das Glasrohr setzen, das unten in der Biegung befestigt ist, oder wenn wir beim Gefäfsbarometer die Glasskala unten und neben der Röhre festklemmen. Die Ausdehnung geht nach oben und stellt in die Höhe der Quecksilberkuppe eine niedrigere Zahl, als ohne Ausdehnung dort stehen würde. Bei der Zusammenziehung nach dem festen Ende unten kommt eine zu hohe Zahl in die Höhe der Kuppe.

Wollte man ganz genau verfahren, so müfste man aufserdem die Temperatur kennen, bei welcher die Teilung angefertigt wurde.

An dem im Kugelgelenk hängenden Gefäfsheberbarometer von R. Fuefs verlängert sich die Skala bei steigender Temperatur nach unten. Es mufs also in 9) $b_1 \cdot \mu t$ negativ eingeführt werden, wenn $b + b_1$ die Länge der ganzen Skala ist. Hierbei müfste nur möglich sein, das Stück Gehäuse von der obern Grundplatte bis zur Kuppe d. h. b_1 abzulesen.

Jordan sagt in seinem Handbuch, 2. Bd. 5. Aufl. auf S. 559: „Fortgesetzte Vergleichungen von Quecksilberbarometern zeigen Widersprüche, welche sich durch die Ungenauigkeiten des Einstellens und Ablesens allein nicht erklären lassen“. Sollte wohl nicht die Einwirkung der Temperatur auf den Mafsstab mit schuld daran sein? Bei der cardanischen Aufhängung des Barometers von Fuefs z. B. findet eine Veränderung nach oben und unten statt.

Die Temperaturen in 8) beziehen sich auf die Luft, diejenige in 9) gilt für das Quecksilber und die Skala. Die erstere beobachtet man an einem Thermometer, welches frei, aber gegen die Wärmestrahlen der Sonne und des Bodens geschützt hängt, oder an einem Aspirationsthermometer. Oder man benutzt ein Schleuderthermometer von Glas, das an einer Schnur etwa hundertmal im Kreise geschwungen die Lufttemperatur schnell annimmt. Die Temperatur in 9) wird an einem Thermometer abgelesen, das im Gehäuse des Barometers angebracht ist. Diese Ablesung geschieht vor der Barometerablesung.

Die Korrektionen, die an den Barometerständen infolge der Luftfeuchtigkeit, der Schwereabnahme mit der Höhe, der Schwerezunahme mit der geographischen Breite und infolge der Kapillardepression vorzunehmen sind, lassen sich hier nicht eingehender erörtern. Es sei nur kurz angedeutet, weshalb die genannten Verbesserungen notwendig sind.

Der in der Luft enthaltene Wasserdampf hat das Bestreben sich auszudehnen, er übt eine gewisse Spannkraft, also auch einen Druck auf das Quecksilber in dem offenen Schenkel des Barometers aus. Die Höhe der Quecksilbersäule wird demnach davon beeinflufst. Die Spannkraft des Wasserdampfs ist verschieden je nach seiner Temperatur und Menge, weshalb man bei genauen barometrischen Höhenmessungen auch einen Feuchtigkeitsmesser zur Hand haben mufs.

Das Gewicht der Quecksilbersäule hält dem Drucke der Luft das Gleichgewicht. Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze nimmt die Anziehungskraft der Erde d. h. die Schwere mit dem Quadrate der Entfernung vom Mittelpunkte ab. Je weiter man sich deshalb von der Oberfläche der Erde nach oben entfernt, desto geringer wird das Gewicht des Quecksilbers. Dem gleichen Luftdrucke entspricht daher nicht in jeder Höhe die gleiche Quecksilbersäule.

Dieselbe Bewandnis hat es mit der geographischen Breite. Am Äquator ist die Schwere am geringsten sowohl wegen der gröfsern Entfernung vom Mittelpunkte der Erde, als auch wegen der Gröfse und Richtung der Centrifugalkraft; nach den Polen hin nimmt die Schwere zu. Deshalb wird für den gleichen Luftdruck an Punkten verschiedener geographischer Breite sich ein verschiedener Barometerstand ergeben.

Wichtiger als die beiden letztgenannten Einflüsse ist die Kapillardepression. Man versteht darunter das Zurückdrängen des Quecksilbers in der Glasröhre. Taucht man eine beiderseits offene Glasröhre von geringer, etwa 5 bis 10^{mm} Weite in Quecksilber, so wird, weil zwischen den beiden Körpern keine Adhäsion stattfindet, das Quecksilber in der Röhre niedriger stehen als aufserhalb derselben. Das Quecksilber wird niedergedrückt und zwar umsomehr, je enger die Röhre ist. Bei einem Gefäfsbarometer kommt die Depression voll zur Geltung. Bei einem Heberbarometer tritt dieselbe in beiden Schenkeln auf, kann also unbeachtet gelassen werden, wenn beide Röhren den gleichen Durchmesser haben. Ist letzteres nicht der Fall, so ist die Differenz der Depressionen zu bestimmen. Die Kuppenhöhen sind jedoch selbst bei gleichem Kaliber verschieden, da im offenen Schenkel durch Feuchtigkeit und Oxydation eine Verunreinigung des Quecksilbers eintritt.

Beim Gefäfsbarometer ist die in Millimetern ausgedrückte

Depression stets zur Ablesung zu addieren. Ist beim Heberbarometer der untere Schenkel enger als der obere, so hat man die Differenz der Depressionen von der Ablesung abzuziehen, im umgekehrten Falle zuzuzählen.

Die Korrektionen für die vorstehend genannten Einflüsse entnimmt man besonderen Tafeln.

Man hat zu den Höhenmessungen zwei Barometer notwendig: das Standbarometer, welches auf der untern Station bleibt, und das Wander- oder Feldbarometer. Beide werden zu gleichen Zeiten, etwa alle 15 Minuten, abgelesen und die Ablesungen nebst den Temperaturen der Luft und des Instruments aufgeschrieben. Um die Zahlen als Grundlage der Berechnung benutzen zu können, müssen alle zugleich im Gebrauch befindlichen Barometer vor und nach der Messung verglichen werden. Die nach gleichgehenden Uhren gleichzeitig gemachten Ablesungen am Barometer werden auf Null reduziert und in die Höhenformel eingesetzt. Die Beobachtungen sind bei möglichst ruhiger Luft anzustellen. Denn würde man bei starkem Winde das Barometer in einem Hause oder etwa hinter einer Schutzwand aufhängen, so könnte der über sie hinwegfahrende Wind als Deckelstrom den Luftdruck vergröfsern oder auch saugend vermindern. Dasselbe gilt für das Wanderbarometer, mit dem man Schluchten und enge Thäler durchzieht, während über den Bergen eine der Richtung nach unberechenbare Luftströmung herrscht. Auch vor Gewittern soll man keine barometrischen Messungen machen, da mit denselben stets eine Beunruhigung und Gleichgewichtsstörung der Atmosphäre verbunden ist

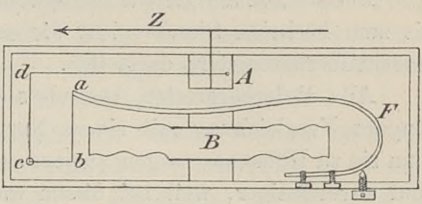
§ 44. Das Feder-Barometer.

Das Feder- oder Aneroidbarometer wurde vom Engländer Vidi 1847 erfunden; auf dem Vidischen Principe beruhen die Konstruktionen von Bourdon, Naudet und Goldschmid. Aneroid wurde das Barometer genannt, weil keine Flüssigkeit zur Verwendung kommt (das verneinende ἀ und νηρός, feucht). Die innere Einrichtung dieses Barometers mit Zeigerwerk läſst sich leicht an den als Zimmerschmuck dienenden, sonst aber zu wissenschaftlichen Zwecken meist unbrauchbaren Aneroid- oder Holosterikbarometern erkennen.

Der wesentliche Bestandteil ist die luftleere oder fast luftleere Büchse *B*. Sie ist meist cylindrisch, besteht aus dünnem Blech von Argentan und ruht zum teil mit dem Boden auf der Wand eines umschliefsenden Gefäfses. Der Deckel oder beide Böden der Büchse sind wellenförmig, um den Druck gleichmäfsig aufzunehmen und auf die in ihrer Mitte stehende Säule senkrecht zu übertragen. Die Seitenwand ist stark und steif. Die Elasticität dieser Büchse tritt an die Stelle des Gewichts der Quecksilbersäule. Die vollständige Einbiegung des Deckels durch den Luftdruck wird durch die entgegenwirkende Feder *F* verhütet. Die Veränderungen in der Lage des Deckels werden auf ein Hebelwerk übertragen und vergröfsert durch den Zeiger *Z* sichtbar gemacht.

In Fig. 108 ist *abcd* ein Winkelhebel; die vier Punkte sind in starrer Verbindung und *c* ist der Drehpunkt; *dA* ist die Kette, die durch eine in der Büchse *A* befindliche Spiralfeder gespannt wird. An der Achse der Büchse sitzt der Zeiger *Z*. Statt der Büchse hat man meist die Achse des Zeigers auf einen Arm gestellt, der seitwärts von einer Säule des Bodens getragen wird.

Fig. 108.



Um die Wirkungsweise des Instruments zu verstehen, denken wir uns die Kette auf der dem Auge zugekehrten Seite aufliegen. Wird nun die Kette angezogen, was bei abnehmendem Luftdrucke durch die Feder *F* geschieht, so wird der Zeiger rechtsum gedreht. Bei wachsendem Drucke geht *a* nach unten und *d* nach rechts, die Kette wird also schlaff und die Spiralfeder in *A* dreht den Zeiger nach links. Soll der Zeiger, wie es gebräuchlich ist, nach rechts den höhern Luftdruck anzeigen, so mufs die Anordnung von Kette und Spiralfeder umgekehrt sein.

Bei dem Aneroid von Naudet ist im Boden des Gehäuses eine Berichtigungsschraube angebracht, durch welche die Spannung der Feder *F* geregelt werden kann. Während des Gebrauchs bleibt das Instrument bei offener oder leicht verdeckter Skala in einem Futteral, damit einem schnellen Temperaturwechsel und einseitiger Erwärmung vorgebeugt wird. Vor jedem Ablesen ist sanft auf den Deckel zu klopfen.

Die Quecksilber- und Federbarometer verhalten sich zu einander wie Pendel- und Federuhren oder wie die gemeine Wage zur Federwage. Die Genauigkeit der ersteren wird durch die letzteren nicht erreicht, und der Gang der Federinstrumente wird mehr und vielseitiger beeinflufst. Die Elastizität des federnden Körpers ändert sich schnell mit der Temperatur, was man leicht an der Taschenuhr beobachten kann, wenn dieselbe keine Kompensation besitzt; oder die Elastizität äufsert sich nicht bei jedem Drucke gleichmäfsig. Die Zeigerwage, welche bei einer Belastung bis zu fünf Kilogramm für je 100 Gramm einen stets gleichen Ausschlag giebt, wird unzuverlässig bei gröfserer Belastung, die Strichabstände sind nicht mehr entsprechend derselben Mehrbelastung. Um die Wage für gröfsere Gewichte benutzen zu können, mufs man unter Zuhilfenahme einer gemeinen Wage entweder die Abstände der Striche vermindern oder sich für die einzelnen Abschnitte der Teilung eine ziffermäfsige Berichtigung merken.

Ebenso können gleiche Skalenteile am Aneroid vom niedrigsten bis zum höchsten Stande nicht die entsprechenden Bewegungen des Quecksilberbarometers darstellen.

Alle Federbarometer, besonders die neuen, bedürfen erst einer längern Vergleichung mit einem Normal-Quecksilberbarometer, ehe man sie zu Höhenmessungen anwenden darf. Die ältern Instrumente sind zuverlässiger, weil bei diesen wahrscheinlich die Lagerung der Moleküle eine beständigere ist und die gegenseitigen Spannungen sich mehr ausgeglichen haben.

Es handelt sich vor allem darum, die Ablesungen am Aneroid mit denjenigen am Quecksilberbarometer in Einklang zu bringen, um sie in die Höhenformel 8) einsetzen zu können.

Im allgemeinen kann man sich auf die Federbarometer der renommierten Werkstätten verlassen, da nur geprüfte Instrumente mit Korrektionszahlen abgegeben werden. Allein diese Barometer ändern leicht, schon durch die Erschütterungen der Postbeförderung, ihren Charakter. Eine Wiederholung der Prüfung ist deshalb notwendig.

Es wird vorausgesetzt, dafs zur Prüfung der Federbarometer ein gutes Quecksilberbarometer zur Verfügung steht. Aufserdem sei vorweg bemerkt, dafs alle an dem letzteren gemachten Ablesungen, welche bei der Prüfung in Frage kommen, nach dem vorigen § auf 0^0 C. reduziert werden müssen. Da es ferner in der Absicht liegt, das Federbarometer zu Höhenmessungen zu verwerten, so sind vorzugsweise die Barometerstände ins Auge zu fassen, welche unter 760^{mm} liegen.

Die zuerst festzustellende Korrektion ist die auf die Temperatur bezügliche. Es ist die T e m p e r a t u r k o n s t a n t e zu suchen d. h. die Anzahl von Skalenteilen, um welche die Ablesung zu grofs wird, wenn die Temperatur des Instrumentes um 1^0 C. steigt bzw. zu klein wird bei abnehmender Temperatur. Mit Hilfe dieser Konstanten wird der Barometerstand auf 0^0 C. reduziert; würde dieser dann mit dem auf 0^0 C. reduzierten Stande in Millimetern am Quecksilberbarometer übereinstimmen, so könnte man ihn ohne weiteres in die Formel 8) einsetzen.

Dafs die Ablesung am Federbarometer von der Temperatur beeinflufst wird, erkennt man, wenn man bedenkt, dafs sich mit der Erwärmung der wellenförmige Deckel ausdehnt, seine Oberfläche und folglich auch der Druck auf dieselbe gröfser wird. Wirkte bei Null Grad auf jeden Quadratcentimeter ein Druck von einem Kilogramm, so wird bei gleichem Luftdrucke und $+ 15^0$ die Zahl der drückenden Kilogramme gröfser, weil die Fläche gröfser geworden ist. Umgekehrt ist es bei abnehmender Temperatur. Wenn man die Temperatur als algebraische Zahl betrachtet, so ist demnach die Korrektion als subtraktiv einzusetzen.

Mit hinreichender Genauigkeit für unsere Zwecke kann man bei den Naudetschen und Goldschmidschen Aneroiden die Temperaturkonstante für 1^0 C. zu $0{,}15^{mm}$ annehmen. Es ist dabei sogleich die weitere und ebenfalls heutzutage meist zutreffende Voraussetzung gemacht, dafs die Teilungen am Aneroid und Quecksilberbarometer übereinstimmend nach Millimetern zu rechnen sind.

Will man durch Beobachtung und Rechnung die Temperaturkonstante genau bestimmen, so wählt man dazu am bequemsten die Zeit des Winters. Man läfst das Quecksilberbarometer im geheizten Zimmer, während man das zu untersuchende Aneroid verschiedenen Temperaturen im geheizten, ungeheizten Zimmer und im Freien längere Zeit aussetzt. Die Ablesungen geschehen bei gleichem Luftdrucke, also gleichzeitig.

Machen wir wieder die Übereinstimmung der Teilungen zur Bedingung, so können wir zunächst annehmen, der Stand am Quecksilberbarometer sei, bei der ersten und zweiten Ablesung auf Null reduziert, jedesmal derselbe. Er sei

$b_1 = 745{,}1 = b_2$; am Aneroid sei $a_1 = 744{,}6$ bei $t_1 = 5{,}4$
und $a_2 = 745{,}3$ bei $t_2 = 9{,}4$.

Die Konstante y für die Temperatur erhalten wir dann aus

$$744{,}6 + 5{,}4 \cdot y = b_1$$
$$745{,}3 + 9{,}4 \cdot y = b_2$$

durch Subtraktion, nämlich $y = -0{,}175$.

$$\text{Ist } b_1 = 745{,}1 \quad a_1 = 744{,}6 \quad t_1 = 5{,}4$$
$$b_2 = 744{,}4 \quad a_2 = 745{,}4 \quad t_2 = 16{,}0,$$

so ist der Unterschied der reduzierten Barometerstände $b_1 - b_2 = 0{,}7$ infolge der Luftdruckänderung entstanden. Um dasselbe hat sich aus demselben Grunde der Stand am Aneroid geändert; das Übrige kommt auf Rechnung der Temperatur. Zählen wir zu a_2 den Unterschied 0,7, so beziehen wir beide Aneroidablesungen auf denselben Normalstand. Es hätte müssen das Aneroid ebenfalls um 0,7 fallen infolge der Abnahme des Luftdruckes; es ist jedoch gestiegen, folglich haben wir auf $t_2 - t_1 = 10{,}6^0$ die Wirkung

$$0{,}7 + 745{,}4 - 744{,}6 = 1{,}5$$

zu rechnen und $y = -0{,}141$ einzuführen.

$$\text{Oder es sei } b_1 = 761{,}73 \quad a_1 = 764{,}25 \quad t_1 = 17{,}1^0$$
$$b_2 = 762{,}03 \quad a_2 = 763{,}25 \quad t_2 = 9{,}5.$$

Das Aneroid ist bei der Temperaturabnahme um 1^{mm} gefallen, während das Quecksilberbarometer um $0{,}3^{mm}$ gestiegen ist. Der auf die Temperatur entfallende Unterschied ist demnach $1{,}3^{mm}$ auf $7{,}6^0$. In diesem Falle ist für jeden Grad $0{,}17^{mm}$ zu rechnen, um die Aneroidablesung auf Null zu reduzieren. Die übrigen Vergleiche desselben Naudet mit einem Fuefs'schen Barometer lieferten Zahlen, aus denen die Temperaturkonstante $y = 0{,}17$ hervorging.

Um auch bei sehr verschiedenen Barometerständen den Einfluſs der Temperatur zu bestimmen, muſs man entweder Berge besteigen oder die Luftpumpe benutzen. Auſserdem hat man zur gröſseren Bequemlichkeit für diese Untersuchungen Schränke angefertigt, deren Inneres man nach Wunsch erwärmen oder durch Eis und Kältemischungen abkühlen kann. Die Temperatur kann durch besondere Vorkehrungen auf gleicher Höhe erhalten werden; das Aneroid muſs längere Zeit in dem Raume verbleiben und läſst sich ohne Ortsänderung nach leichter Erschütterung ablesen.

Eine weitere Korrektion bezieht sich auf die Teilung des Federbarometer. Ist z die Teilungskonstante, so verstehen wir darunter die Reduktion des Skalenteils in der Gegend der Ablesung.

Die Notwendigkeit dieser Korrektion versteht man, wenn man erwägt, daſs die luftleere Büchse die gleiche Änderung des Luftdrucks nicht immer in gleicher Weise aufnimmt und auf den Zeiger überträgt. Bei einem von 680 bis 700^{mm} steigenden Drucke wird die Zeigerspitze einen andern Weg machen, als bei einem Steigen von 760 bis 780^{mm}. Um die Teilungskorrektion entbehren zu können, müfste man die Teilstriche der Skala, den ersten etwa bei 640, den folgenden bei 650, dann bei 660^{mm} u. s. w. Luftdruck machen und die Zwischenräume in 10 oder 20 gleiche Abschnitte teilen. Wegen der zu befürchtenden Änderung des Instruments ist jedoch dies Verfahren zu verwerfen; deshalb mufs Rechnung eintreten. Die Teilungskorrektion wird um so kleiner ausfallen, je näher die Ablesung dem Punkte 760 ist, für welche das Instrument geprüft wurde. Je weiter von 760 entfernt, desto ungleichmäfsiger wird der Gang der Elasticität, also auch derjenige des Zeigers sein. Diese Entfernung tritt in der folgenden Formel als $(760 - a)$ auf; z ist mit der Angabe des Nonius vergleichbar.

Endlich ist die Stand- oder absolute Korrektion x zu ermitteln. Es ist dies die Gröfse, um welche der Stand des Federbarometers nach der Reduzierung auf Null von dem auf Null reduzierten Stande des Quecksilberbarometers abweicht; x ist also gleichsam der Indexfehler.

Zur Berechnung der drei Konstanten hat man die Gleichung aufgestellt

$$b = a + x + y \cdot t + z \cdot (760 - a).$$

Hierin ist b die reduzierte Ablesung in Millimetern am Quecksilberbarometer, a die unmittelbare Ablesung am Federbarometer und t die innere Temperatur des letztern; x, y und z sind die dem betreffenden Aneroid zukommenden Konstanten, also x, $y \cdot t$ und $z . (760 - a)$ die Korrektionen. Die drei Unbekannten lassen sich aus den drei von einander unabhängigen Gleichungen berechnen, welche man durch dreimalige gleichzeitige Ablesungen erhalten hat. Man wird es jedoch bei den drei Beobachtungen nicht bewenden lassen.

Da die Elasticität der Büchse unabhängig von der Anziehungskraft der Erde ist, so kann von einer Schwerekorrektion beim Aneroid keine Rede sein.

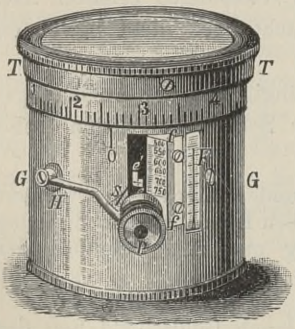
Es sei verwiesen auf die Vermessungskunde von Jordan; ferner auf
Schoder: Hilfstafeln zur barometrischen Höhenbestimmung nebst einer Anleitung zur Untersuchung und zum Gebrauch der Federbarometer. 1874.
Höltschl: Die Aneroide von Naudet und Goldschmid. 1872.
Koppe: Die Aneroidbarometer von Jakob Goldschmid und das barometrische Höhenmessen. 1877.
Jordan: Barometrische Höhentafeln. 1886 und dazu diejenigen von 1896.

Die Aneroide finden hauptsächlich Verwendung, wenn es sich um die Aufsuchung und vorläufige Festlegung einer Wegelinie handelt. Vor allem wird es darauf ankommen, den Höhenunterschied zwischen dem Ausgangspunkte und dem höchsten Punkte zu finden, um daraus in Verbindung mit der horizontalen Entfernung das Gefällprozent zu berechnen. Ist das im Gelände liegende Prozent zu hoch, so wird man sich für ein niedrigeres entscheiden und mit diesem die beiden Punkte zu verbinden suchen. Oder man fertigt zunächst eine Karte von der Gegend an und trägt in diese möglichst viele Höhenpunkte ein, um danach Kurven einzuzeichnen, deren Punkte die gleiche Erhebung haben. Man wird dann mit dem Zirkel Linien mit verschiedenen Neigungsverhältnissen einlegen und nachsehen, auf welcher man am bequemsten und billigsten zum Sattel des Gebirges oder auf die zu übersteigende Höhe kommt.

Benutzt man zur Höhenbestimmung ein Aneroid nach der Konstruktion Naudet, so empfiehlt es sich, das Instrument mit einer gröſsern Tasche zu versehen, die wie ein Tornister auf dem Rücken getragen wird. Die Innenseite der auf dem Körper liegenden Fläche wird mit einem schlechten Wärmeleiter dick ausgefüttert und die nach hinten lose über der Skala hängende Klappe wird nur zum Ablesen aufgehoben. Der Träger, etwa ein starker Schulknabe, hat sonstige Arbeiten nicht zu verrichten, damit nicht plötzliche Erschütterungen den Gang des Instruments stören.

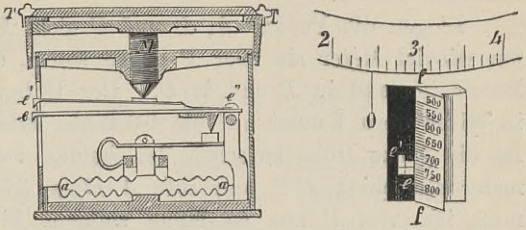
Das Aneroid von Goldschmid trägt man selbst, weil es eine besonders vorsichtige Behandlung erfordert und zum Ablesen beide Hände notwendig sind. In Fig. 109 und 110 ist das Instrument als Ganzes und im Vertikalschnitt dargestellt. Es ist GG das Gehäuse, T die drehbare Trommel mit Teilung, e das Ende des Hebelarmes, auf welchen die Veränderungen der Büchse übertragen werden, e' das Ende des Fühlhebels, welcher durch Drehung der Trommel vermittelst der Mikrometerschraube M so gestellt werden kann, daſs die Indexstriche auf e und e' eine gerade Linie bilden. Der Fühlhebel ist unentbehrlich, um Gewiſsheit zu haben, daſs die Spitze des Hebels e auf der Feder der Büchse aa ruht. Durch die Schraube M übt man einen sanften Druck aus und beim Einspielen der Indexstriche ist die Berührung von Schraube und Hebel e hergestellt.

Fig. 109.



Die Skala ff ist so beschaffen, dafs ein Teil von ihr der Ganghöhe der Mikrometerschraube, also einer vollen Umdrehung der Trommel entspricht und 10^{mm} angiebt. Die horizontale Skala an TT trägt 10 Teile, welche wieder in Zehntel geteilt sind. Man liest also die ganzen Millimeter an ff und an den langen Strichen der Trommel ab, die Zehntel an den kurzen Strichen und schätzt die Hundertel. In Fig. 109 ist die Ablesung $702{,}63^{mm}$ und in Fig. 110: $722{,}44^{mm}$. Die Lupe P dient zum Ablesen und ist gegen die Skala passend verstellbar. Das Thermometer F giebt die Temperatur des Instruments an.

Fig. 110.



Wird das Barometer nicht gebraucht, so dreht man die Trommel linksum zurück, so dafs die Spitze der Schraube M ein Stück vom Fühlhebel absteht. Beim Gebrauche hält man das Instrument horizontal, klopft leicht auf den obern Deckel und dreht die Trommel rechtsum, bis die Indexstriche in gleicher Höhe stehen. Sollte vorher der Strich des Fühlhebels schon tiefer stehen, so ist zurückzudrehen, bis er wieder höher steht.

Zur Berechnung der Höhenunterschiede ist auf dem obern Deckel eine Tabelle der Korrektionen für Teilung und Temperatur und im Futteral eine Gebrauchsanweisung nebst Höhentafel beigegeben.

Man hat heutzutage ungemein empfindliche Aneroide hergestellt, mit denen man Höhenunterschiede von 1^{m} feststellen kann, und welche die vertikalen Bewegungen eines Schiffes durch Kurven dem Auge vorführen. Aber auch mit weniger feinen Instrumenten lassen sich mit genügender Genauigkeit Punkte festlegen, wenn sie zwischen Punkten liegen, deren Höhenunterschied durch Nivellement oder trigonometrische Messung genau bekannt ist. Es seien dies P und Q; A, B und C sollen eingeschaltet werden. Ist ihre Lage bekannt und sind die Höhen über P gesucht, so geht man von P aus und notiert die Ablesungen. Bei A, B, C und Q thut man dasselbe und ebenso wieder auf dem Rückwege über C, B, A nach P. Man erhält auf diese Weise für jeden Punkt zwei Höhenzahlen, von denen man das Mittel nimmt. Ist nun die Summe der Höhen von A, B, C und Q gröfser als der Höhenunterschied zwischen P und Q, so verteilt man den Fehler im Verhältnis der einzelnen Höhen.

Liegen die Punkte A, B und C nicht fest, ist aber bestimmt, um wieviel Meter sie über P liegen sollen, so beobachtet man den Barometerstand in P und in Q. Der Unterschied der Ablesungen in Millimetern kommt auf die bekannte Erhebung von Q über P. Ist die ganze Höhe zwischen den beiden Punkten h^{m}, der Barometerunterschied d^{mm} und soll A etwa 37^{m} über P liegen, so mufs ich von P aus so lange steigen, bis das Barometer um $\frac{d}{h} \cdot 37^{\mathrm{mm}}$ gefallen ist.

Man kann sich auch eine Tafel anfertigen, in der man den Höhenwert für 1^{mm} bei den verschiedenen Temperaturen verzeichnet; es ist jedoch von Zeit zu Zeit eine Nachprüfung derselben mit dem gleichen Aneroid nötig.

Sowohl für Quecksilber- als auch für Federbarometer darf die horizontale Entfernung vom Ausgangspunkte nur so grofs sein, dafs die auftretenden Luftschwankungen noch gleichzeitig wirken und sich beim Stand- und Wanderbarometer zugleich äufsern. Die Ansichten über die zulässige Entfernung gehen weit auseinander. Rühlmann giebt dieselbe zu $37{,}5^{\mathrm{km}}$ und Bauernfeind zu 60 bis 70^{km} an unter der Voraussetzung, dafs die korrespondierenden Beobachtungsstationen nicht durch Gebirge getrennt sind. In der Praxis wird die Entfernung nach Heusinger von Waldegg 10 bis 15^{km}, bei der ersten generellen Bereisung kaum mehr als 30 bis 40^{km} betragen. Wieder andere wollen nicht über 5 bis 10^{km} gehen.

Zum Verständnis der Höhentafeln von Jordan: Stuttgart 1886 und Ergänzung dazu Hannover 1896 diene Folgendes:

In der Bemerkung zu Formel 8) des vorigen Paragraphen ist gesagt, dafs man durch sie die Erhebung über dem Meeresspiegel erhält, wenn man $b = 760$ oder für Mitteleuropa $b = 762$ einführt. Den Höhenunterschied zweier Punkte kann man nun dadurch finden, dafs man für beide die genäherten oder rohen Seehöhen berechnet und ihre Differenz bildet. Die an dem untern und obern Punkte abgelesenen Barometerstände seien b und β, so sind die rohen Meereshöhen ohne Rücksicht auf die Temperatur der Luft nach Formel 7)

$$h_2 = 18\,464 \cdot (\log 762 - \log \beta)$$
$$h_1 = 18\,464 \cdot (\log 762 - \log b)$$

also $h = h_2 - h_1 = 18\,464 \left\{ \log \frac{762}{\beta} - \log \frac{762}{b} \right\}$

oder mit Temperaturkorrektion

$$h = 18\,464 \cdot \left\{ \log \frac{762}{\beta} - \log \frac{762}{b} \right\} \left\{ 1 + 0{,}002\,(t + \tau) \right\}.$$

Die Ausrechnung der ersten grofsen Klammer würde die Formel 8) liefern. Man hat den Umweg der rohen Seehöhen gewählt, um die Tafeln anfertigen zu können, die man mit b und β allein nicht übersichtlich und handlich herstellen kann, zumal nicht unter Berücksichtigung der Temperatur. In den genannten Tafeln finden sich auch die Höhendifferenzen für 1^{mm} je nach Barometerstand und Temperatur.

Erwähnt sei noch als Höhenmesser der Siede-Apparat mit Kochthermometer. Das Sieden einer Flüssigkeit tritt ein, wenn der entwickelte Dampf den Luftdruck überwindet. Will man also den Siedepunkt für brauchbare Thermometer festlegen, so kann man dies nur mit Hilfe des Barometers. Umgekehrt kann man aus der Temperatur, bei welcher das Wasser siedet, auf den Barometerstand d. h. auf die Gröfse des Luftdrucks schliefsen. Aus diesem ergiebt sich dann die Höhenlage. Kocht das Wasser in einem Punkte bei 760^{mm} und 100^0 C., so kocht es 30^m höher bereits bei $99{,}9^0$; das Barometer würde dort auf rund 757^{mm} stehen. Die Unterschiede in der Temperatur im Vergleich zu den Höhen und den betreffenden Barometerständen sind also sehr gering. Man müfste den Grad am Thermometer schon in dreifsig Teile teilen, um Höhen von 10^m ablesen zu können. Aufserdem bleibt bei niedrigen Temperaturen nicht das gleiche Verhältnis bestehen. Es ist deshalb die Herstellung solcher Siedeapparate schwierig.

Was die Genauigkeit der barometrischen Höhenmessungen im allgemeinen betrifft, so kann man nach Jordan bis 200^m den mittlern Fehler der Aneroidmessung zu 1 bis 2^m annehmen. Bei gröfsern Höhen, besonders über 1000^m nimmt der Fehler rasch zu. Meist kommt es dann auf einige Meter mehr oder weniger nicht an.

F. Instrumente für Wassermessungen.

§ 45. Geschwindigkeitsmesser.

Die Aufmessung und das Nivellieren der fliefsenden Gewässer geschieht mit den früher besprochenen Instrumenten. Neben der horizontalen und vertikalen Aufnahme ist jedoch, besonders heutzutage, oft auf Anlagen bedacht zu nehmen, welche die Bestimmung der Wassermenge verlangen. Die Wegenetzlegung, Ent- und Bewässerung, Brückenbauten, Durchlässe, Festlegung des Überschwemmungsgebietes u. s. w. erfordern die Kenntnis der von den Bächen und Flüssen geführten Wassermassen. Die vielen dabei in betracht kommenden Fragen technischer Art: Abschwemmung des Bodens bei einem bestimmten Gefälle, Geschiebeführung, Rückstauungen u. s. w., ferner Röhrenweite für Tagewasserableitung und Berieselung, Entwässerungskanäle für Sümpfe u. s. w. gehören in die eigentliche Kultur- und Wasserbautechnik. Es sei verwiesen auf Perels: Handbuch des landwirtschaftlichen Wasserbaues. Parey. Berlin, woselbst ein ausführliches Verzeichnis der Litteratur zu finden ist.

Ein vertikal und senkrecht zur Richtung des fliefsenden Wassers gelegter ebener Schnitt liefert das sogenannte Querprofil des Wasserlaufes. Dasselbe ist begrenzt oben durch die horizontale Gerade in der Wasseroberfläche und unten durch die Schnittlinie der Ebene mit dem Bette des Wasserlaufes. Aus dieser Erklärung ergeben sich die Messungen, welche vorzunehmen sind, um die Fläche des Profils zu berechnen. Es sei bemerkt, dafs man häufig die vom Wasser hinterlassenen Spuren z. B. das auf Eisbrechern oder am Ufer oder im benachbarten Gebüsche hängen gebliebene Gras benutzen kann, um nachträglich mit Hilfe eines Nivellier-Instrumentes das Profil für einen bestimmten Wasserstand zu ermitteln.

Das Querprofil nimmt man auf, indem man senkrecht zum Stromstrich eine Leine spannt, die Teilung derselben durch farbige Bänder kenntlich macht und an diesen Marken die Tiefenmessungen mit der Peilstange oder bei gröfsern Tiefen mit dem Peillote ausführt.

Um die Wassermenge M zu finden, welche in einer Sekunde durch das Profil fliefst, mufs man die Geschwindigkeit v des Wassers kennen. Ist die Fläche des Profils f, so ist

$$M = v \cdot f,$$

wobei vorausgesetzt ist, daſs v überall in f dasselbe ist. Das ist nun nicht der Fall; die Geschwindigkeit ist für die verschiedenen Teile des Profils je nach der Entfernung von den Ufern und vom Bette des Flusses verschieden. Man müſste demnach die Geschwindigkeit v_i für jeden Profilteil f_i messen; es würde dann die Wassermenge sein

$$M = v_1 \cdot f_1 + v_2 \cdot f_2 + v_3 \cdot f_3 + \cdots\cdots$$

Wir begnügen uns mit einer Näherungsformel. Haben wir die Geschwindigkeit des Stromstriches d. h. die gröſste Geschwindigkeit V festgestellt, so wählen wir als durchschnittliche Geschwindigkeit für das ganze Profil

$$v = 0{,}83 \cdot V, \text{ sodaſs}$$
$$M = 0{,}83\, V \cdot f$$

wird. Die Konstante 0,83 ist im allgemeinen hinreichend genau für einigermaſsen regelmäſsige Gerinne.

Ein Gesetz für die Abnahme der Geschwindigkeit nach der Sohle und den Seitenwänden hin giebt es nicht.

Der einfachste Geschwindigkeitsmesser eines Wasserlaufes im Stromstriche ist eine passend beschwerte und zugekorkte Flasche oder die Schwimmkugel, eine hohle, rot angestrichene Kugel von Blech, welche man durch Sand oder Wasser so beschwert, daſs nur ein kleiner Teil der Oberfläche oder eine aufgesetzte Spitze aus dem Wasser hervorragt. An dem einen Ufer wird eine Strecke parallel dem Stromstriche ausgewählt und durch Baken bezeichnet; in den Endpunkten derselben errichtet man kurze Lote, so daſs man Absehlinien senkrecht zum Stromstriche erhält. Die Kugel wird etwa 10^{m} oberhalb der ersten Profilebene eingesetzt und an einer Sekundenuhr genau die Zeit beobachtet, welche zwischen den Durchgängen der Kugel durch das erste und zweite Profil verstreicht. Die Geschwindigkeit des Wassers ist dann

$$v = \frac{s}{t},$$

wo s die Länge der Strecke und t die Anzahl Sekunden ist. Der Versuch ist bei ruhiger Luft anzustellen, auſserdem gelingt er nur selten seitwärts des Stromstriches.

Es ist wohl zu beachten, daſs die Wahl der beiden Profile nicht beliebig sein kann. Man muſs dieselben so einlegen, daſs zwischen ihnen die Geschwindigkeit möglichst gleich ist, um eins der Profile als f in die Formel einsetzen zu können. Bei gleichem

Pegelstande ist die Wassermenge in der Nähe der Mündung immer die gleiche. Es ist deshalb aus $M = v \cdot f$ ersichtlich und auch aus der Erfahrung bekannt, dafs v mit abnehmendem f wächst. Wird das Flufsbett enger, so findet eine Stauung des Wassers statt, die horizontale Profillinie wird gehoben und die Geschwindigkeit durch den Druck der höhern Wassersäule vergröfsert. Im allgemeinen wird das Profil kleiner, wenn die Ufer näher an einander treten. Es ist demnach unzulässig, eine Verengung des Flufsbettes zwischen die beiden Profile zu legen.

Von der Zeitbestimmung unabhängig ist der Beobachter bei Anwendung des Stromquadranten und der Pitotschen Röhre.

Der Quadrant besteht aus einem Gradbogen, in dessen Mittelpunkte eine bis ins Wasser reichende Kugel aufgehängt ist. Bei stillstehendem Wasser mufs der Kugelfaden mit dem Nullradius zusammenfallen; bei fliefsendem Wasser soll der Nullradius dieselbe lotrechte Stellung erhalten, was durch eine Libelle erzielt wird. Je nach der Geschwindigkeit des Wassers wird der Kugelfaden an dem parallel zum Wasserlaufe stehenden Gradbogen in die Höhe getrieben Die Kugel mufs so tief hängen, dafs sie bei gespanntem Faden nicht an die Oberfläche kommt. Durch Versuche und Vergleiche mit andern Geschwindigkeitsmessern ist festzustellen, welche Geschwindigkeit dem jedesmaligen Ausschlagswinkel entspricht.

Die Verwendung der Pitotschen Röhre beruht auf dem Satze, dafs ruhiges Wasser in kommunizierenden Röhren gleich hoch steht. Dieses gilt, einige Schwankungen abgerechnet, von einer beiderseits offenen und weiten Glasröhre, welche man lotrecht in fliefsendes Wasser hält. Biegt man das Rohr rechtwinklig und hält das offene Ende des kürzern Schenkels in der Richtung des Wasserlaufs und diesem gerade entgegengesetzt, so wird das Wasser in der senkrechten Röhre sich über den äufsern Wasserstand erheben und zwar um so mehr, je stärker der Druck in das untere Ende, je gröfser also die Geschwindigkeit ist. Aus der Erhebung der innern Wassersäule schliefst man auf die Geschwindigkeit.

Um die Geschwindigkeit des Wasserlaufes besser zur Geltung zu bringen und den Widerstand für den Eintritt des Wassers in die Röhre aufzuheben, giebt man dem eingetauchten, horizontal zu haltenden Ende die Trichterform. Bei langsamer Drehung des obern Rohres um die vertikale Achse wird an einer Stelle das Wasser im Rohre den höchsten Punkt erreichen; dieses geschieht, wenn die Achse des Trichters genau im Wasserfaden steht. Um diese Stellung dem Apparate ohne Mühe geben zu können, versieht man ihn mit einem Steuer.

Da die Beobachtnng dicht über dem Wasser schwierig ist, hat Reichenbach eine zweite Röhre angebracht, deren Trichter senkrecht zum Wasserlaufe steht, und welche den äufsern Wasserstand anzeigt. Beide Röhren lassen sich durch einen Hahn vermittelst Hebelvorrichtung zugleich schliefsen; eine sichere Stütze erhält der Apparat durch eine Fufsstange, welche auf den Grund gesetzt wird und zugleich eine Tiefenmessung ermöglicht. Nach Aushebung des Instrumentes liest man den Längenunterschied der Wassersäulen ab und entnimmt einer Tabelle die entsprechende Zahl für die gesuchte Geschwindigkeit. Durch die Verbesserung von Darcy, welcher eine Verdünnung der Luft in den Röhren bezweckt, ist der Beobachter imstande, die Ablesung sogleich während der Aufstellung im Wasser vorzunehmen.

Beide genannten Instrumente haben den Nachteil, dafs man bei ihrer Anwendung nicht die mittlere Geschwindigkeit des Wasserlaufes erhält. Da sich das Wasser wegen der Unebenheiten auf dem Grunde des Bettes in Stöfsen bewegt, so wird der höchste Ausschlag beim Quadranten und der höchste Stand in der Hauptröhre leicht die Folge eines augenblicklichen Stofses sein, was zu fehlerhaften Bestimmungen führt, zumal bei der Pitotschen Röhre der Stofs aufserdem noch eine Verringerung der Wassersäule in der Nebenröhre verursachen kann.

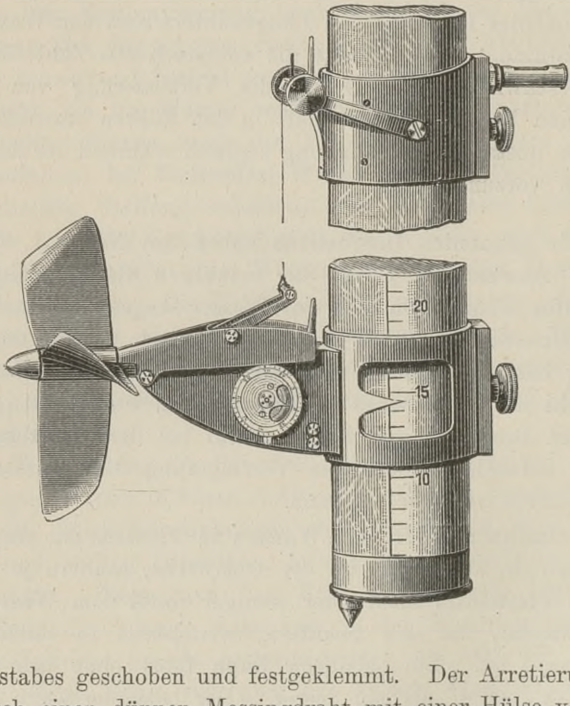
Die Geschwindigkeit des Wassers in Flüssen ist am gröfsten im Stromstrich, aber nicht an der Oberfläche, sondern je nach der Form des Flufsbettes mehr oder weniger unter dem Wasserspiegel, eine Thatsache, die den Schiffern, wenigstens in ihren Folgen, wohl bekannt ist. Ein beladener Kahn fährt ohne jede Zugkraft schneller thalwärts, als ein leerer. Der beladene Kahn reicht in die gröfsere Flufsgeschwindigkeit hinein, der leere nicht, wobei freilich auch der Luftwiderstand gegen den aus dem Wasser hervorragenden Teil des Kahns in dem einen Falle ein geringeres, in dem andern ein gröfseres Hindernis bildet.

Diejenige Vorrichtung, welche die Geschwindigkeitsmessung in jeder Tiefe und an jedem Orte seitwärts des Stromstriches am zuverlässigsten gestattet und die mittlere Geschwindigkeit liefert, ist der Woltmansche Flügel.

Eine Darstellung der äufseren Einrichtung ist durch Fig. 111

gegeben. Die Welle oder Achse der drei Flügel ist oberhalb des Zifferblattes mit einer Schraube ohne Ende versehen, welche in die Zähne eines Rades greift und bei einer vollen Umdrehung das äufsere Zifferblatt um einen Strich an dem auf dem Gehäuse befindlichen Index weiter bewegt; das innere Zifferblatt zählt die vollen Umdrehungen des äufseren. Die Figur 111 stellt die Konstruktion von Ertel & Sohn dar. Der eigentliche Flügel wird an einer Stange bis auf die zur Tiefenmessung gewünschte Zahl

Fig. 111.



des Mafsstabes geschoben und festgeklemmt. Der Arretierungshebel wird durch einen dünnen Messingdraht mit einer Hülse verbunden, welche an derselben Stange so befestigt wird, dafs sie aufserhalb des Wassers stehend den Draht spannt. Durch Anziehen des Drahtes kann man den untern Hebel auslösen und eine an der obern Hülse angebrachte Feder ermöglicht auf bequeme Weise eine dauernde Auslösung und auch eine augenblickliche Arretierung der Flügelachse; mit Hilfe einer Röhrenlibelle bringt man die Flügelachse in die horizontale Stellung.

Um zu erkennen, wie die Zahl der Umdrehungen der Flügel in einer bestimmten Zeit zur Berechnung der Geschwindigkeit des

Wassers dienen kann, denken wir uns zunächst ein gewöhnliches unterschlächtiges Schiffsmühlenrad. Von allen passiven Widerständen abgesehen würde ein solches Rad bei richtiger Einrichtung und Stellung schliefslich die Geschwindigkeit des fliefsenden Wassers annehmen. Bei dem genannten Mühlenrade soll des gröfsten Effektes wegen die Geschwindigkeit der Schaufelmitten mathematisch genau 0,5 der Geschwindigkeit des Flusses sein. Man braucht also nur den Radius der Schaufelmitte zu messen, den Umfang zu berechnen und die Umdrehungen in einer Minute zu zählen, um die Flufsgeschwindigkeit daraus zu erhalten.

Bei dem Woltmanschen Flügel ist es ähnlich. Haben die Flügel zu ihrer Achse eine Neigung von 45^0, so haben sie dieselbe Neigung gegen die Wasserfäden. Das fliefsende Wasser wird so lange gegen die Flügel drücken, bis die Geschwindigkeit derselben so grofs ist, dafs das Wasser ohne Hindernis darüber hinwegfliefst. Von diesem Augenblicke an wird die Drehungsgeschwindigkeit der Flügel gleich sein der Geschwindigkeit des Wassers. Kennt man nun den Weg, welchen die Flügel in einer gewissen Zeit zurücklegen, so hat man damit auch den Weg, den das Wasser in derselben Zeit gemacht hat. Es handelt sich also darum, den Weg oder die Anzahl Meter zu finden, welche einer Umdrehung der Flügel entspricht. Diese Konstante hängt ab von der Gröfse der Flügel und ihrer Stellung zur Achse.

Die Zahl n der Umdrehungen in einer Sekunde liest man ab, die Konstante k sei vom Mechaniker geliefert, so ist die Geschwindigkeit

$$v = k \cdot n.$$

Um k zu prüfen, mufs man v auf anderm Wege ermitteln. Entweder wählt man in einem gleichmäfsig geneigten, möglichst glatten Rinnsal fliefsendes Wasser, dessen Geschwindigkeit man mit der Schwimmkugel festsetzt, oder stillstehendes Wasser, durch welches man den Flügel von einem Kahne aus mit bekannter Geschwindigkeit hindurchbewegt. Es sei die Geschwindigkeit eines Wasserlaufes $v = 100^{\text{cm}}$, die Zahl der Flügelumdrehungen in einer Minute sei 150, oder in einer Sekunde $n = 2{,}5$, so ist

$$100 = k \cdot 2{,}5 \text{ d. h. } k = 40^{\text{cm}}.$$

Der hydrometrische Flügel von Amsler-Laffon (1873) weicht in Einrichtung und Gebrauch nur insofern vom Woltmanschen ab, als eine gewisse Anzahl Umdrehungen, etwa je 100, durch ein elektrisches Läutewerk gemeldet werden, und man die Zeit an einer

Sekundenuhr abzulesen hat, welche zwischen je zwei Glockenzeichen verstrichen ist; die Umläufe werden also nicht gezählt, sie melden sich selbst an. Es mögen, nachdem man die ersten zwei bis drei Zeichen unberücksichtigt gelassen hat, 100 Umläufe in 50 Sekunden geschehen, so kommen auf eine Sekunde zwei Umläufe. Ist nun die Konstante wie bei dem Flügel der hiesigen Sammlung $k = 0{,}34^{\text{m}}$, so ist $v = 0{,}34 \cdot 2 = 0{,}68^{\text{m}}$ die Geschwindigkeit des Wassers.

Der ganze Apparat ist wegen der dabei erforderlichen elektrischen Batterie, der Leitungen von derselben nach dem Räderwerke des Flügels, nach dem Läutewerke und Tourenzähler weit umständlicher, als der oben beschriebene Ertelsche Flügel. Rechnet man noch hinzu, daſs die verwickeltere Einrichtung an dem Flügelgehäuse, der Schleifkontakt u. s. w. viel leichter durch eingedrungene Fremdkörper einer Störung unterworfen sind, so möchte der Verfasser dem Ertelschen Apparate den Vorzug geben.

Hat man die Wassermenge aus dem Profil und der Geschwindigkeit berechnet, so ist es oft wünschenswert, die mechanische Arbeit zu finden, die durch das Wasser geleistet werden kann. Ist das Wasser aufgestaut, so ergiebt sich die Arbeit aus dem Gewicht und dem Gefälle des Wassers. Stürzen über ein Wehr in jeder Sekunde a^{cbm} und zwar h^{m} hinab, oder ist das Wasser h^{m} aufgestaut und stoſsen sekundlich a^{cbm} gegen die unten befindlichen Flügel einer Turbine, so ist die Wasserkraft d. h. die Arbeitsfähigkeit oder die Energie gleich dem Produkte aus Gewicht und Weg; also

$$A = (a \cdot h \cdot 1000)\, mkg\,,$$

wo mkg ein Meterkilogramm oder eine Kraft bedeutet, welche imstande ist, 1^{kg} in 1 Sek. 1^{m} zu heben.

Es ist eine Pferdestärke $PS = 75\, mkg$, also ist die Arbeitsgröſse des Wassers

$$A = \frac{a \cdot h \cdot 1000}{75} = (13{,}33\, a \cdot h)\, PS.$$

Wirkt das Wasser nur als stoſsender Körper, ist also vor und hinter dem Motor der Wasserstand annähernd der gleiche, wie bei einem unterschlächtigen Mühlenrade, so ist die Arbeitsgröſse als kinetische Energie zu betrachten und

$$A_1 = \frac{1}{2}\, m v^2 = \frac{1}{2}\, \frac{a \cdot 1000}{9{,}81}\, v^2,$$

wo m die sog. Masse des auftreffenden Wassers und v seine Geschwindigkeit in der Sekunde ist.

Will man v aus der Stauhöhe entnehmen, so hat man $v = \sqrt{2gh}$ zu setzen, wo $g = 9{,}81$ ist. Führen wir hieraus $h = \frac{v^2}{2g}$ in den Wert von A ein, so erhalten wir A_1.

Die Werte von A und A_1 geben den absoluten Arbeitswert. Ein grofser Teil davon geht jedoch durch die unvermeidlichen Mängel des Motors verloren und als Nutzeffekt kommt vielleicht nur 0,35 bis 0,75 von A oder A_1 zur Verwertung.

G. Instandhaltung der Instrumente.

§ 46. Behandlung der Instrumente in und aufser dem Gebrauch.

Jedes gröfsere Instrument wird vom Mechaniker in sorgfältiger Kastenverpackung geliefert. Die Einrichtung des Kastens ist derartig, dafs das Instrument sowie alles Zubehör festgehalten wird durch Schrauben, angebrachte Schieber, Leisten und Holzklötze. Häufig sind noch Lederstreifen, Tuchfütterungen und Federn vorhanden, um etwa noch mögliche Stöfse zu mildern. Der Raum ist so ausgenützt, dafs sich die Thüre oder der Deckel des Kastens nur schliefsen läfst, wenn alles den zugewiesenen Platz hat. Man hat sich also die vorgesehene Anordnung zu merken; nötigenfalls erleichtert man sich, wenn es nicht bereits vom Mechaniker geschehen ist, durch Zeichen oder eingeschriebene Bemerkungen die Verpackung. Für eine Verschickung auf der Eisenbahn oder Post wird man durch Polster von eingewickeltem Werg oder Holzwolle jede Erschütterung zu vermeiden suchen.

Zum Transport beim Feldgebrauche werden alle Klemmen und Schrauben an den sonst beweglichen Teilen des Instrumentes vor der Verpackung angezogen, wenn man die Stellung im Kasten kennt, andernfalls geschieht es nach dem Hineinschieben. Ist das Instrument in den Kasten hineingeschoben oder gestellt, so soll man sich vergewissern, ob nicht irgend ein Zubehörteil sich von seiner Stelle entfernen kann oder nicht irgend ein Teil, etwa der Objektivdeckel des Fernrohres, noch lose im Kasten liegt. Nie soll man die Thüre oder den Deckel mit Kraftaufwand zu schliefsen versuchen, ehe man sich überzeugt hat, dafs wirklich die Ränder der Thüre die Klemmung verursachen.

Um kein für den Gebrauch im Felde notwendiges Hilfsmittel zu vergessen, gehe man zu Hause die einzelnen Arbeiten durch und schreibe sich sämtliche mitzunehmenden Sachen auf. Der Lehrer lasse dieses auch die Studierenden ab und zu besorgen. Nach Beendigung der Feldarbeit überzeugt man sich an der Hand des Verzeichnisses, ob alle mitgenommenen Teile vorhanden sind und nicht ein etwa ausnahmsweise mitgenommenes Beil liegen oder eine Bake irgendwo stehen geblieben ist.

Sollte ein Instrument beim Gebrauche nafs geworden sein, so trockne man es mit einem weichen leinenen Lappen, den man im Kasten mit aufbewahrt, ab. Ebenso entferne man etwaigen Staub nach Möglichkeit schon im Felde; eine gründliche Reinigung nimmt man zuhause vor. Hat man dabei einzelne Teile zu trennen, so sehe man zu, ob nicht irgendwo noch eine Verbindung besteht, oder ob nicht beim Auseinandernehmen irgend ein loser Teil, etwa die Libelle, abfallen kann.

Bringt man das Instrument aus kalter in warme Luft, so bildet sich auf demselben reichlicher Tau; bei bewegter Luft verschwindet er freilich bald wieder, kann jedoch bisweilen unangenehm werden, weshalb man vor dem Gebrauche daran denken möge. Man erinnere sich der oft unklaren Bilder des Photographen bei Aufsenaufnahmen.

Die Prüfung des Instrumentes hat sich auch auf die genügende Beweglichkeit einzelner Teile zu erstrecken. Im Laufe der Zeit ist das vorhandene Fett steif geworden, es hat sich in demselben Schmutz angesammelt und die Folge davon ist ein Mangel an leichter Drehbarkeit der Achsen und Schrauben. Um die Geläufigkeit in der Bewegung wieder herzustellen, mufs man schmieren. Hierbei ist Mäfsigung anzuempfehlen. Zum Schmieren der Achsen nimmt man Uhrmacheröl, für die beweglichen Schrauben nimmt man das vom Mechaniker gelieferte Zirkelwachs.

Das dick gewordene Fett entferne man mit Petroleum und Lederlappen. Die Achsen mache man nicht zu läufig. Ein etwas schwerer Achsgang ist meist angenehmer, als ein zu leichter, weil bei zu läufiger Bewegung die grobe Einstellung durch Anziehen der Hemmung sofort wieder gestört wird.

Beim Schmieren achte man darauf, ob sich nicht Spuren von Rost zeigen; ist das der Fall, so beseitige man dieselben durch Betupfen mit Öl und Abreiben mit einer harten Bürste oder durch Abreiben vermittelst eines Leinwandlappens unter Anwendung von Öl und pulverisierter Holzkohle.

Wird das Instrument nicht gebraucht, so bewahrt man es am besten im Kasten auf, den man vielleicht noch mit einem Tuche überdeckt; Glasschränke schützen nicht gegen Verstaubung. Vor Feuchtigkeit bewahrt man die Instrumente nötigenfalls durch Chlorcalcium, das man in einer offenen Schale in den Kasten stellt.

Die Instrumente im einzelnen und ihre Teile geben zu folgenden Bemerkungen Anlafs.

Um nicht unnütz Zeit zu verlieren, mache man sich die Wirkung der Rechts- und Linksdrehung jeder Schraube klar, mag dieselbe mit dem Kopfe nach oben, unten oder nach der Seite gerichtet sein. Alle Schrauben gehen bei der Rechtsdrehung in den Instrumententeil hinein. Beim Justieren empfiehlt es sich, möglichst nur die rechte Hand zu gebrauchen.

Löst man Teile von einander, welche durch Schrauben verbunden sind, so merke man sich die den einzelnen Schrauben zugehörigen Stellen.

Damit sehr kleine Schrauben beim Ausziehen nicht fortfallen, drücke man zuvor auf ihren Kopf etwas Wachs und setze dann den Schraubenzieher an; sie bleiben schliefslich hängen und lassen sich später wieder bequem anbringen.

Die Schraubengewinde an dünnwandigen Röhren sind sehr oberflächlich eingeschnitten, die einzelnen Gänge deshalb sehr zart, man hüte sich daher beim Eindrehen der Spindel vor dem Überdrehen, damit die Schraube nicht toll wird; man drehe erst, wenn sie gut läuft. Durch anfängliches Linksdrehen erhält man meist erst den richtigen Eingangspunkt. Besonders gilt dieses von den Schraubengewinden an Fernröhren.

Die Stellschrauben an den Dreifufsarmen werden leicht locker; man vermeidet einen toten Gang durch Benutzung der Prefsschraube.

Die Differenzialschraube benutze man nicht immer an derselben Stelle; man achte dabei auch auf die Drehbarkeit der Kugelmuttern.

Mikrometerschrauben, denen Federn entgegenwirken, drehe man nach dem Gebrauche ganz zurück, dadurch versetzt man auch die Feder in die notwendige Ruhe.

Die freiliegenden Schrauben sind ab und zu mit einer weichen Bürste zu reinigen.

Zum Putzen der Linsen verwendet man weiches Leder oder Leinen. Die Teile des achromatischen Objektivs nehme man nicht auseinander; sollte sich zwischen dieselben Staub eingedrängt haben, so überlasse man die Reinigung dem Mechaniker wegen der Schwierigkeit, welche sowohl das Aus- und Ineinanderschrauben der Ringe, als auch die richtige Anbringung der Staniolblättchen verursacht.

Das Einschrauben des Okulars geschehe mit Vorsicht; durch zu festes Andrehen wird leicht die vertikale bzw. horizontale Stellung des Fadenkreuzes verdorben. Man sehe, ehe man das Okular ganz festdreht, nach Horizontierung des Instrumentes in das Fernrohr hinein nach einem lotrechten Gegenstande. Nötigenfalls lege man beim Okular von Huygens zwischen beide Röhren einen Zwirnsfaden. Das Objektiv mufs festgeschraubt sein und die Stellung, die es bei der Prüfung hatte, während der Arbeit behalten.

Da das Okular von Ramsden und Kellner selbst verstellbar sein mufs und die Verschiebung durch Drehen eine bequemere ist als diejenige durch Ziehen oder Drücken, so lasse man bei Neubeschaffung den Schlitz für die Befestigungsschraube des Okulars schräglaufend machen.

Die Achse der Okularröhre mufs beim Verschieben in der Fernrohrachse bleiben. Man achte deshalb darauf, dafs das Getriebe richtig arbeitet, nicht schlottert und dadurch eine wellenförmige Bewegung des Fadenkreuzes verursacht. Da beim Theodolit der Vertikalfaden der wichtigste ist, so legt man bei ihm die Zahnstange oben bzw. unten hin, während man beim Nivellier-Instrument das Heben und Senken des Horizontalfadens durch seitliche Anbringung des Getriebes vermeidet. Bei dem geringsten Hindernisse sehe man nach, ob sich nicht etwa eine Schraube des Zahnraddeckels gelöst hat. Heutzutage wählt man wohl schräg stehende Zähne. Die Zahnstange halte man frei von Schmutz.

Das Fadenkreuz ist sorgfältig vor Staub zu schützen. Kommt man in die unangenehme Lage, ein neues Fadenkreuz herstellen zu müssen, so sucht man eine kurzbeinige schwarze Spinne, setzt sie auf den einen Schenkel eines gabelförmigen Zweiges, wo sie bald einen Faden befestigen wird, und läfst sie darauf fallen. Durch Drehen der Gabel wickelt man den Spinnenfaden auf und sucht unter der Lupe Stellen von gleichmäfsiger Dicke aus. Von diesen legt man zwei über den Fadenkreuzring, beschwert die Enden mit zusammengedrückten Bleiplättchen, bringt die Fäden unter der Lupe mit einer Nadel in die vorhandenen Ritze und befestigt sie dort durch Aufkleben von Wachs.

Sehr vorsichtig sei man, wenn man Staubteilchen entfernen will, die sich in den Strichen der Fadenkreuzplatte abgelagert haben. Man streiche mit einem weichen Pinsel nicht in der Richtung der Striche, sondern senkrecht dazu, weil zu leicht die Striche auf der Glasplatte ganz verschwinden.

Beim Ausheben der Alhidade des Theodolit denke man an die Hemmvorrichtung; beim Einsetzen ebenfalls und sorge dafür, dafs die Kanten des Limbus und der Nonien nicht leiden. Letzteres gilt auch vom Umlegen des Fernrohres mit Höhenkreis. Ein Nonius zum Aufklappen ist für diesen Fall angenehm.

Schwerere Instrumente hebe man nie so, dafs ein Teil hängt; den Theodolit, das Nivellier-Instrument u. s. w. trage man in der Weise, dafs die eine gespreizte Hand unter den Dreifufs greift, während die andere an etwas höherer Stelle unterstützt.

Das Drehen der Alhidade geschieht mit der einen Hand womöglich am Fufse der Träger, die andere besorgt die Hemmung; um die Hände hierzu frei zu haben, hängt man das Manual an einem Bindfaden um den Hals oder steckt es etwa zwischen die Knöpfe des Rockes.

Den blendenden Glanz der Silberteilungen beseitigt man durch einen möglichst feinen Überzug von gutem Öl. Meist kann man sich helfen durch geeignete Stellung der über den Nonien befindlichen Schirmchen. Cylindrisch gebogene Blenden gewähren ein gleichmäfsig zerstreutes Licht und hindern nicht die Drehung der Lupe, wie es wohl bei den ebenen Celluloidscheiben vorkommt.

Der Silberlimbus ist sehr weich. Ist er etwa angelaufen, was sehr oft der Fall ist, so reinige man ihn durch Abreiben mit dem Finger. Dasselbe gilt vom Nonius. Man benutze nur kein hartes Leinen, oder wenn man weiches nimmt, wickele man es nicht um einen harten Gegenstand.

Bei Sonnenbeobachtungen mit dem Theodolit vergesse man nicht, zum Schutze des Auges sich eines Blendglases zu bedienen.

Der Stativkopf darf in horizontaler Richtung nicht wackeln; man ziehe die Schraubenmuttern entsprechend an.

Die Spiralfeder der Centralstange spanne man von Anfang an nicht zu sehr, damit man das Instrument beim Centrieren noch etwas verschieben kann und bei der Horizontierung die Stellschrauben des Dreifufses nicht zu viel leiden. Die Schraube der Centralstange kann man aufser dem Gebrauche durch einen leinenen Beutel gegen Staub und auch, was leicht vorkommen kann, gegen den Verlust des Lothakens schützen.

Bei der Nufsvorrichtung sehe man sich vor, dafs man nicht durch zu starkes Anziehen der Schrauben die gegenwirkenden Federn zu sehr lähmt.

Die Nadel der Bussole mufs beim Wechsel der Stationen stets arretiert werden, damit nicht die Spitze des Tragstiftes stumpf wird und der Magnetismus durch die Erschütterungen schwindet. Wird die Bussole nicht gebraucht, so lasse man die Nadel zur Ruhe kommen, stelle sie dann fest und bringe kein Eisen in ihre Nähe.

Für das Zeichenbrett des Mefstisches ist ein Futteral unentbehrlich, damit die Zeichnung nicht durch Staub oder Feuchtigkeit oder Stöfse beschädigt wird. In der Ruhe soll es gut aufliegen, damit es sich nicht wirft oder zieht.

In horizontaler Lage, möglichst in allen Punkten ruhend, nicht schräg stehend, bewahre man die Signalstangen, Nivellierlatten, Mefslatten und Mefsstäbe auf; auch in möglichst trockner Luft.

Stahlband und Ketten reinige man nach dem Gebrauche; von Zeit zu Zeit fette man sie ein, besonders an den Nieten. Sollte sich beim Gebrauche eine Verbindungsniete losgelöst haben, so schiebt sich zwischen die beiden Blätter Gras und Zweigwerk; man wird die Enden des Stahlbandes vertauschen, damit das lose Blatt nach hinten gerichtet ist. Die Zähler von Eisendraht mache man nicht zu spitz; die Spitze dringt dem Arbeiter leicht in die Waden und wird bei Benutzung auf hartem Boden durch Umbiegen zu stumpf.

Bei Höhenmessungen mit dem Quecksilber-Barometer trägt man das Instrument am sichersten selbst. Im Zimmer schliefse man den offenen Schenkel, wenn möglich, mit Watte. Es schleicht sich sehr leicht Staub hinein, wodurch das Quecksilber schmutzig und die Einstellung auf Null erschwert wird.

Das Aneroidbarometer ist hauptsächlich vor starken Erschütterungen zu bewahren. Hat man ein solches zu verschicken, so bette man es in Watte oder Holzwolle ein. Das dazu gehörige, in dem Futteral befindliche Thermometer für Beobachtung der Lufttemperatur ist aufserdem fest zu umwickeln, damit die Quecksilberkugel nicht abbricht.

Mit besonderer Sorgfalt sind die Differenzialräder, die unendliche Schraube und die Achsen bei dem hydrometrischen Flügel zu reinigen.

Die später zu besprechenden Hilfsmittel zum Zeichnen, Zirkel und eisernen Lineale, ferner die Laufrollen und Achsen der Polarplanimeter, die man mit den Fingern anfassen mufs, oder die in den Bereich des Athems kommen, können durch Rost ganz unbrauchbar werden. Man trockne sie deshalb nach dem Gebrauche stets sorgfältig ab.

Irgendwelche Mängel, die man während der Arbeit an einem Instrumente wahrnimmt, merke man sich im Tagebuche an, um sie zuhause zu untersuchen und abzustellen.

Bringt man ein Instrument aus kalter Luft in ein warmes Zimmer, so löse man die etwa festgeklemmten Teile.

Zweite Abteilung.

Die Lehre von den Messungen.

A. Horizontalmessungen.

§ 47. Vermarkung der Meſspunkte.

Je nach der Bedeutung, welche die Punkte für die Vermessung haben, unterscheidet man trigonometrische Punkte, Polygonpunkte und Kleinpunkte. Der Wichtigkeit entsprechend werden die einzelnen Punkte festgelegt oder vermarkt

Die auſserhalb der zu vermessenden Fläche liegenden trigonometrischen Punkte sollen, wenn irgend möglich, natürliche Festpunkte (Türme, Brückenpfeiler) sein, keine Grenzsteine. Die im Felde ausgewählten Punkte werden dauerhaft vermarkt, in der Regel durch Drainröhren von 10 ^{cm} lichter Weite und etwa 30 ^{cm} Länge, welche 30 bis 50 ^{cm} senkrecht unter die Bodenoberfläche gestellt mit ihrer Mittellinie den trigonometrischen Punkt, den Winkelscheitel angeben. In der Entfernung 2 ^{m} vom Hauptpunkte versenkt man übers Kreuz kleinere Röhren von etwa 3 ^{cm} lichter Weite. Die Numerierung erfolgt durch Anwendung arabischer Ziffern.

Die Polygonpunkte sind möglichst unterirdisch durch senkrecht gestellte Drainröhren von 4,5 ^{cm} lichter Weite zu vermarken; die Länge derselben soll mindestens 20 ^{cm} betragen und der obere Rand bis 50 ^{cm} unter der Oberfläche stehen. Als äuſseres Merkmal kann man einen Erdhügel aufwerfen oder eine zweite Röhre oder einen Pfahl verwenden. Die Numerierung geschieht gemarkungsweise mit arabischen Ziffern.

Die Vermarkung der Kleinpunkte (eingeschaltete Meſspunkte, Kreuzungspunkte der Meſslinien, Bussolenpunkte) geschieht unterirdisch und durch Tagezeichen, wie die der Polygonpunkte.

Bei allen Punkten hat die Vermarkung vor Beginn der eigentlichen Messung zu geschehen.

Neuerdings fertigt man Grenzsteine von Cement an, welche die Form der gewöhnlichen Grenzsteine haben und aus zwei Teilen bestehen. Der untere unregelmäſsige Fuſs trägt ein kurzes vierseitiges Prisma mit einer kugelförmigen Höhlung auf der obern Fläche. Der Mittelpunkt dieser Höhlung, ein Kreuz oder Loch, soll die Grenze bezeichnen. Das obere Prisma mit der vierseitigen Pyramide ist unten mit einer Halbkugel versehen, welche in die Höhlung des untern Prisma paſst. Selbst wenn der obere Teil durch Anfahren aus der lotrechten Lage verschoben wird, bleibt der eigentliche Grenzpunkt unverändert liegen. Solche Steine würden sich auch zur Festlegung wichtiger Meſspunkte eignen.

Vorschriften über die Vermarkung der Meſspunkte sind gegeben in Anw. IX. § 8 u. ff. § 30. 31 und Anw. VIII. § 79.

§ 48. Das Abstecken gerader Linien.

Eine gerade Linie oder Strecke des Feldes wird in ihren Endpunkten durch Baken oder Fluchtstäbe bezeichnet. Drei Punkte liegen in einer Geraden, wenn sie in derselben Vertikalebene liegen. Um demnach Baken zum Abstecken verwenden zu können, müssen sie lotrecht stehen, dürfen höchstens in der Vertikalebene selbst geneigt sein, oder es sind ihre Fuſspunkte als maſsgebend zu betrachten. Daraus ergiebt sich die Lehre für die Handhabung der Baken: sie müssen schwebend zwischen den Fingern gehalten und nach dem Einstecken mit einem Lote oder einer Libelle (Lattenrichter) vertikal gestellt werden.

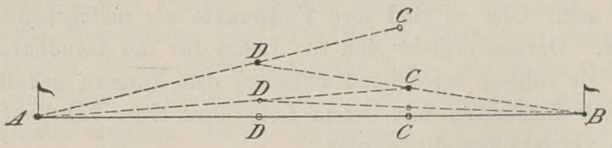
1. Sind in der Geraden zweier Punkte A und B neue Punkte festzulegen, so geschieht das gewöhnlich nach der Erklärung von der geraden Linie: eine Gerade ist eine Linie, bei welcher die äuſseren Punkte den inneren im Lichte stehen. Man stelle sich einige Schritte von der Bake des Punktes A auf, sehe an den äuſseren Kanten beider Baken vorbei und winke die neue Bake mit der einen Kante in diese Ziellinie ein. Man unterweise den Gehilfen, daſs er auf entgegengesetztes Winken zwischen den beiden letzten Stellungen seiner Bake die Mitte nimmt; ferner lege man die entfernteren Punkte zuerst fest. Zur Prüfung der abgesteckten Linie neige man den Körper langsam seitwärts, dann müssen der Reihe nach die einzelnen Baken zum Vorschein kommen.

Eine Beschleunigung der Arbeit läſst sich erzielen, wenn man die Gehilfen daran gewöhnt, auf die Gröſse des Winkes mit dem Arm oder mit der Hand oder nur mit den Fingern zu achten. Ferner ist die innere Handfläche stets nach der Seite zu halten, nach welcher die Verschiebung der Bake vorzunehmen ist. Soll also die Bake nach rechts heraus, so ist das Innere der rechten Hand beim Winken nach auſsen zu kehren. Jedes Wort wird auf diese Weise gespart.

Um ohne Gehilfen fertig zu werden, kann man den Winkelkopf, das Prismen- oder das Spiegelkreuz benutzen. Bei sehr langen Linien wird man beim Einschalten den Theodolit anwenden. Man stelle denselben annähernd in der Geraden und grob horizontal auf, visiere nach der einen Endbake und schlage das geprüfte Fernrohr durch. Man sehe nun nach, an welcher Seite der andern Bake die Ziellinie vorbeigeht. Man mache sich hierbei klar, daſs wenn die Bake links vom Fadenkreuze erscheint, wenn also die Ziellinie rechts vorbeigeht, man nach rechts zu rücken hat. Zur Kontrolle drehe man die Alhidade um 180^0, nachdem man den Theodolit genau horizontiert hat.

Ist zwischen den Endpunkten A und B ein Hügel, so daſs man nicht frei von A nach B hinsehen kann, oder sind A und B

Fig. 112.



unzugänglich, so wählt man annähernd in der Geraden AB zwei Punkte C und D, von denen aus die Endpunkte sichtbar sind, (Fig. 112). Von C winkt man D in die Gerade CA, von D aus C in die Gerade DB u. s. w., bis keine Ortsveränderung von C und D mehr notwendig ist. A und B liegen dann in derselben Geraden CD, also auch umgekehrt.

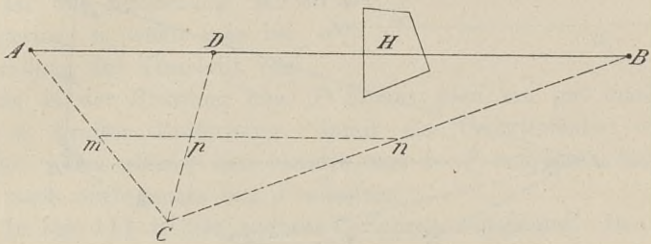
Man kann in diesem Falle auch die konische Winkeltrommel oder den Theodolit anwenden.

2. Ist die Gerade AB zu verlängern, so kann man nach der obigen Erklärung von der geraden Linie, also nach „richt' euch!“ mit und ohne Gehilfen verfahren oder die Winkeltrommel oder auf groſse Entfernungen den Theodolit anwenden.

Das Fernrohr ist stets auf den Fufspunkt der Bake zu richten, damit eine etwaige schiefe Stellung derselben nicht schadet.

3. Befindet sich zwischen A und B ein Hindernis H, etwa ein Gebäude, (Fig 113), so dafs man die Endpunkte von keinem Zwischenpunkte sehen kann, ist aber das Gelände nebenan über-

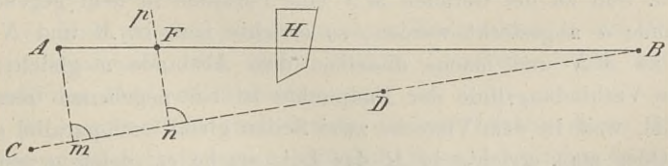
Fig. 113.



sehbar, so kann man den Punkt D in der Geraden einschalten nach dem Satze der Planimetrie: Zieht man aus der Mitte einer Dreieckseite zu einer der beiden andern eine Parallele, so trifft diese die dritte Seite im Mittelpunkte. Man wähle einen Punkt C seitwärts, messe die Geraden CA und CB, halbiere dieselben in m und n, wähle auf mn den beliebigen Punkt p und verlängere Cp um sich selbst bis D, so ist D ein Punkt der Geraden AB, weil mn parallel AB ist.

Oder (Fig. 114): Man stecke an dem Hindernisse vorbei die

Fig. 114.



Gerade BCD ab, fälle von A das Lot Am auf BC, errichte in dem beliebigen Punkte n zu BD das Lot np und berechne nF aus $nF: mA = Bn : Bm$; es ist

$$nF = \frac{mA \cdot Bn}{Bm},$$

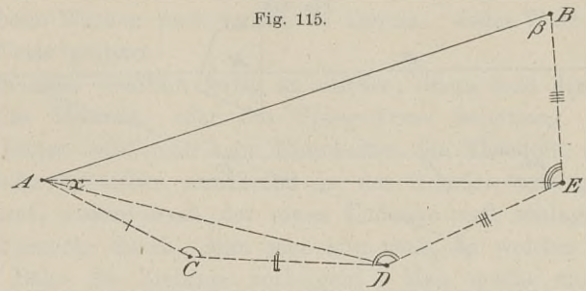
worin die drei Strecken der rechten Seite sich durch Messung ergeben. In gleicher Weise würde man Punkte auf der andern Seite des Hindernisses erhalten.

4. Die Punkte A und B mögen am Saume eines dicht be-

standenen Waldes oder zu beiden Seiten eines isoliert stehenden Berges liegen; man soll die beiden Punkte auf dem kürzesten Wege mit einander verbinden,

Man lege (Fig. 115) um den Wald oder Berg den Polygonzug $ACDEB$, messe die Seiten AC, CD, DE, EB und die

Fig. 115.



Winkel C, D und E, so sind in dem Fünfeck 7 Stücke bekannt, aus denen man die Winkel α und β berechnen kann. Die einzelnen Dreiecke, welche zur Berechnung dienen, sind in der Figur angedeutet Entweder stellt man in A einen Theodolit auf und richtet das Fernrohr so, dafs die Visierlinie mit AC den Winkel α bildet und geht in dieser Richtung vor, oder man kann sich mit Hilfe des Winkels α und β die Richtung aufserhalb abstecken, wenn es sich nur um die vorläufige Fortsetzung der Geraden AB handelt.

5. Soll zu der Geraden MN eine Parallele in dem gegebenen Abstande a abgesteckt werden, so errichte man in M und N die Lote zu MN und mache dieselben dem Abstande a gleich; die gerade Verbindungslinie der Endpunkte ist zur gegebenen Geraden parallel, weil in dem Vierecke zwei Seiten gleich und parallel sind.

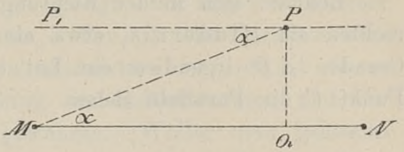
Oder man errichte in M das Lot, mache es gleich a und errichte wieder im Endpunkte dieses Lotes die Senkrechte.

Kann man in den Endpunkten die Lote nicht errichten, weil man noch keine Zwischenpunkte hat, so mufs man solche erst aufsuchen.

6. Ist aufserhalb der Geraden MN ein Punkt P gegeben, durch welchen die Parallele zu MN abgesteckt werden soll, so fällt man das Lot PQ auf MN und macht $PP_1 \perp PQ$.

Sind die Linie MN und die geforderte Parallele sehr lang, handelt es sich z. B. um Wege, welche eine ganze Feldmark durchschneiden, wobei auch der Abstand PQ grofs, etwa 400^{m} lang ist, so mufs man den Theodolit nehmen. Man mifst (Fig. 116) den Winkel $PMN = \alpha$ und legt diesen Winkel in P an die Gerade PM an. Wie man dabei mit einem excentrischen Theodolit verfahren mufs, ist in § 30 gezeigt.

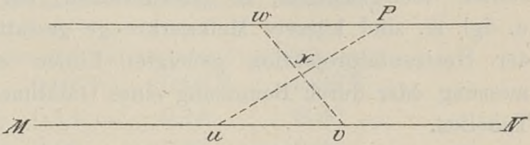
Fig. 116.



Ist die Entfernung MP nur gering, so wählt man bei Anwendung des Theodolit von M aus in der Richtung über P hinaus gern ein gut markiertes Ziel in grofser Entfernung, damit ein Centrierfehler weniger schadet. Das gleiche Ziel benutzt man in P und mufs dann den $\sphericalangle\ \alpha$ nach oben rechts von P absetzen.

In Fig. 117 ist ein anderes Verfahren angedeutet. Der Punkt P ist mit einem beliebigen Punkte u der Geraden MN verbunden; ein zweiter willkürlich gewählter Punkt v ist mit einem Punkte x der Geraden Pu verbunden und wx durch Rechnung zu finden.

Fig. 117.



$$wx = \frac{Px \cdot vx}{ux}.$$

Wählt man den Punkt x in der Mitte von Pu, so ist $wx = vx$.

7. Eine gerade Linie ist in ihren Endpunkten A und B durch Baken bezeichnet; von einem Punkte C aufserhalb soll auf diese Gerade das Lot gefällt werden.

Im ersten Teile sind bereits die zur Lösung dieser Aufgabe anzuwendenden Instrumente bezüglich ihres Gebrauches besprochen. Mit Vorteil bedient man sich des Prismenkreuzes, um sich zu überzeugen, dafs man in der Linie AB bleibt, und um zugleich unter Benutzung des einen der beiden Prismen das Lot zu errichten bezw. zu fällen.

Sind die beiden Punkte A und B nicht zugänglich, befindet sich etwa ein Flufs zwischen der Geraden und dem Punkte C, ist aber sonst das Gelände genügend frei, so kann man die Richtung des Lotes von C auf AB nach dem Satze finden: Die drei Höhen eines Dreieckes schneiden sich in einem Punkte. Man steckt also die beiden Seiten CA und CB ab, fällt auf jede das

Lot von der gegenüberliegenden Ecke und verbindet den Schnittpunkt der Lote mit C, so ist diese Verbindungslinie die Richtung der gesuchten Senkrechten.

Befindet sich in der Richtung der von C zu ziehenden Senkrechten ein Hindernis, etwa ein Gebäude, so kann man in der Geraden AB irgendwo ein Lot errichten und hierzu durch den Punkt C die Parallele ziehen.

§ 49. Die unmittelbare Messung gerader Linien.

Die unmittelbare Messung von Strecken geschieht mit den im ersten Teile beschriebenen Werkzeugen zum Längenmessen. Nach Anw. VIII. § 36 sind alle Längenmessungen im Felde ausnahmslos mit dem Stahlbande oder der Latte auszuführen. Das Stahlband mufs in der Regel 20^{m}, die Latte 5^{m} lang sein. An steilen Gebirgshängen, in geschlossenen, eng bebauten Ortslagen u. dgl. m. sind kürzere Mefswerkzeuge gestattet. Die Bestimmung der Horizontalprojektion geneigter Linien erfolgt durch Staffelmessung oder durch Benutzung eines Gafällmessers und zugehöriger Tabellen.

Nach Anw. IX. § 33 ist die Länge jeder Polygonseite (Strecke) bezw. jeder etwaigen besonderen Anschlufsstrecke nach einem trigonometrischen Punkte zweimal, und zwar möglichst jedesmal in einer anderen Richtung zu messen.

Die Längen der Polygonseiten sind bis auf Centimeter, jedoch nur in grader Anzahl derselben für jede Messung, anzugeben.

Die Richtung, in welcher jede Strecke gemessen ist, soll ersichtlich gemacht und die Ergebnisse beider Messungen sollen in besonderen Heften oder Zeichnungen gleich im Felde mit Tinte, ausnahmsweise mit einem harten Bleistifte, niedergeschrieben werden.

Die Abweichung beider Messungen von einander, d. h. ihr Unterschied darf betragen

I. in ebenem oder wenig unebenem und auch sonst nicht ungünstigem Terrain höchstens $a = 0{,}01\sqrt{4s + 0{,}005s^2}$,

II. in mittlerem Terrain höchstens $a = 0{,}01\sqrt{6s + 0{,}0075s^2}$,

III. in sehr unebenem oder sonst ungünstigem Terrain höchstens $a = 0{,}01\sqrt{8s + 0{,}01s^2}$,

wo unter s die Streckenlänge zu verstehen ist. Mit Zugrundelegung dieser Zahlen sind Tafeln zusammengestellt.

Gröfsere Abweichungen sind durch örtliche Nachmessung zu untersuchen und zu beseitigen. Das arithmetische Mittel der richtig gestellten Ergebnisse beider Streckenmessungen ist für die spätere Koordinatenberechnung maſsgebend.

Es ist in der Anweisung nicht gesagt, das Ergebnis welcher Messung, der ersten oder zweiten, oder ob das kleinere oder gröſsere Ergebnis in die Formeln einzusetzen ist; es ist dieses überflüssig, weil die Unterscheidung der Geländeformen und die Tafeln einen weiten Spielraum gewähren. Wollte man jedesmal die Formeln berechnen, so würde man passend an die Stelle von s das arithmetische Mittel der beiden Meſsergebnisse setzen.

Um einen Überblick zu erhalten, seien aus der Anw. IX einige Zahlen hierhergesetzt, wobei unter s eine einzelne Strecke oder auch die Gesamtlänge eines ganzen Polygonzuges gedacht werden kann.

s	Zulässige Abweichung beider Messungen.		
	I	II	III
10 m	0,06 m	0,08 m	0,09 m
50	0,14	0,18	0,20
100	0,21	0,26	0,30
150	0,27	0,33	0,38
200	0,32	0,39	0,45
300	0,41	0,50	0,58
400	0,49	0,60	0,69
500	0,57	0,70	0,81
600	0,65	0,79	0,91
1000	0,95	1,16	1,34
2000	1,67	2,05	2,36
3000	2,39	2,92	3,38
4000	3,10	3,80	4,38

Aus C. Bohn: Die Landmessung. Berlin 1886, entnehme ich folgende amtliche Bestimmungen:

a. Bayern. Die Längen der Strecken sind mit 5 Meter Meſslatten doppelt zu messen. Das Verhältnis der gefundenen Differenz zur Länge der Linie darf 1 : 3000 bei günstiger, 2 : 3000 bei ungünstiger Bodenbeschaffenheit nicht übersteigen.

b. In Württemberg wird auf ziemlich wagerechtem, bei 2 Prozent geneigtem Boden 0,001; bei 2—7 Prozent Gefälle 0,002, bei gröſserer Steigung 0,003 der Länge, wozu noch je 10 Centimeter für jeden Endpunkt kommen, als Unsicherheit geduldet.

c. Die badische Vorschrift gestattet eine Unsicherheit in der Ebene bezw. im Gebirge für die Länge

unter	30	Meter	0,004	bezw.	0,005
„	60	„	0,003	„	0,004
„	150	„	0,0017	„	0,0025
„	200	„	0,0012	„	0,002

der Länge der gemessenen Linie.

Jede gemessene Strecke und Fläche mufs auf den Horizont projiziert werden. Unebenheiten sind schwer aufzumessen, und die Oberfläche des Geländes ist den Einwirkungen des Wetters und den Eingriffen des Menschen unterworfen. Wollten wir eine noch so kleine Berggegend nach der vorhandenen Fläche ausmessen, so würde es uns wiederum nicht gelingen, das Gemessene auf einem einzigen Kartenblatte in gleichem Mafsstabe zur Darstellung zu bringen. Ein einzelner Bergkegel würde eine grofse Anzahl Sektionen verlangen. Es ist ferner zu bedenken, dafs Halmfrüchte, Bäume und Bauten im Lote stehen, also den gleichen Lichtraum verlangen wie auf horizontalem Boden. Niedrige Früchte, wie Gras, Kartoffeln und Rüben lassen sich offenbar mehr auf der geneigten Fläche bauen, als auf ihrer Projektion. Insofern ist die Neigung je nach der Himmelsrichtung nicht ohne Bedeutung für den Landmann. Auch die Bearbeitung (Säemaschinen, Wasserabzug, Düngung) mufs sich der geneigten Fläche anpassen. Im Walde wird durch das Abrutschen des Laubes und das Abfliefsen des Wassers die Bildung der Humusschicht erschwert, andererseits je nach der Neigungsrichtung die Beleuchtung der Baumkronen eine stärkere oder schwächere; auch der Wurzelraum wird ein gröfserer.

Auf alle diese Umstände kann jedoch der Landmesser keine Rücksicht nehmen, selbst wenn ein Grundbesitzer bei der Zusammenlegung mehrere Ar einbüfsen oder gewinnen würde. Es kann für ihn nur die horizontale Fläche mafsgebend sein. So hat man es von jeher gehalten, wie daraus hervorgeht, dafs man vor hundert Jahren bei der Messung von geneigten Linien einen besondern gröfsern Schuh benutzte.

Die Entfernungen der Kilometersteine auf ausgebauten Strafsen gelten für die wirkliche, geneigte Strecke, weil ihre Zahlen Anhaltspunkte für die Unterhaltung der Strafse und für die Reise sein sollen.

Benutzt man zur Reduktion der geneigten Strecke auf den Horizont einen Gefällmesser, der die Neigung im Winkelmafs nach halben und ganzen Graden angiebt, so ist es ratsam, sich eine Tabelle anzufertigen. In der folgenden Übersicht sind die Zahlen in Metern gegeben, welche für den betreffenden Neigungswinkel von je 20^{m} abzuziehen sind.

Ist α gemessen, so ist $20 \cdot \cos\alpha$ die Projektion der Bandlänge; der Unterschied zwischen der geneigten Strecke und ihrer Projektion ist also

$$20 - 20 \cdot \cos\alpha = 20 \cdot (1 - \cos\alpha)$$

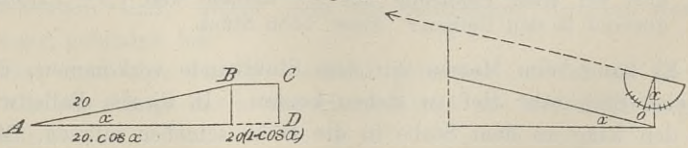
oder $$20 - 20 \cdot (1 - \cos\alpha) = 20 \cdot \cos\alpha.$$

Man wird also den Subtrahenden für jedes α aus der Tabelle herausschreiben und ihre Summe von der Gesamtstrecke abziehen. Für Teile des Bandes nimmt man die entsprechenden Teile der Verbesserung oder man beschränkt sich darauf, die Hälfte oder ein Viertel zu nehmen. So ist die Projektion von $3{,}6^{\mathrm{m}}$ bei 8^0 Neigung $3{,}6 - \frac{1}{5} \cdot 0{,}20 = 3{,}56^{\mathrm{m}}$.

Für die Messungen mit der Latte von 5^{m} und mit dem Stahlbande von 10^{m} Länge fertigt man ebenfalls eine Tabelle an. Man nimmt von den Zahlen der folgenden Tabelle den vierten Teil bezw. die Hälfte.

Hat man eine gegebene Anzahl Meter in das Feld zu übertragen, so schreibt man sich sofort bei der Messung von α aus der Tabelle die Verbesserung für jede Bandlänge auf und addiert sie. Am Schlufs macht man einen Zuschlag, d. h. man steckt den Zähler nicht an den Ort des Bandstabes, sondern in horizontaler Richtung um die Summe aller $20\,(1 - \cos\alpha)$ weiter nach vorwärts.

Fig. 118.



Man kann auch dem vordern Bandzieher einen in Centimeter geteilten Mafsstab beigeben, um bei je 20^{m} den Zuschlag zu machen. Man ruft ihm die Zahl Centimeter zu, um welche infolge der Neigung die Bandlänge verkürzt ist. Der Stahlbandstab ist um die zugerufene Strecke nach vorwärts einzusetzen. (Fig. 118).

α	$20\,(1 - \cos\alpha)$	α	$20\,(1 - \cos\alpha)$	α	$20\,(1 - \cos\alpha)$
1^0	$0{,}003^{\,m}$	6^0	$0{,}11^{\,m}$	11^0	$0{,}37^{\,m}$
1,5	0,007	6,5	0,13	11,5	0,40
2	0,012	7	0,15	12	0,44
2,5	0,019	7,5	0,17	12,5	0,47
3	0,03	8	0,20	13	0,51
3,5	0,04	8,5	0,22	13,5	0,55
4	0,05	9	0,25	14	0,59
4,5	0,06	9,5	0,27	14,5	0,64
5	0,08	10	0,30	15	0,68
5,5	0,09	10,5	0,34	15,5	0,73

Für gröſsere Neigungen benutze man die Tafel der natürlichen Zahlen der trigonometrischen Funktionen.

Man findet wohl das Gefälle einer Strecke zweifach nach Prozenten ausgedrückt. Die eine Zahl bezieht sich auf die Strecke selbst, wie sie im Gelände liegt; es ist also das Gefällprozent für die Hypotenuse Hundert gemeint oder die trigonometrische Funktion sinus zur Berechnung des Neigungswinkels anzuwenden. Die andere Zahl liefert das Gefälle für die Kathete Hundert oder die Funktion tangens.

Beispiel. Ein Hang, der in seinem unteren Teile gleichmäſsig unter 12,278 % oder unter 7^0 gegen den Horizont geneigt ist, soll aufgeforstet werden. Die Breite der Fläche längs dem Fuſse ist die Horizontale $a = 105^{\,m}$, die Länge derselben den Hang hinauf und senkrecht zu a ist $b = 191{,}93^{\,m}$. Auf der rechteckigen Fläche steht nach oben auſserdem ein Dreieck mit der Höhe $h = 96{,}71^{\,m}$ und einer Steigung von 17,365 % ihrer Länge. Wieviel Pflanzen sind erforderlich bei einem $\frac{3{,}0}{1{,}5}$ Meter Verbande, also bei einer Pflanzung mit $3^{\,m}$ Reihen- und $1{,}5^{\,m}$ Pflanzenabstand in den Reihen? Antw. 5555 Stück.

Es kann beim Messen mit dem Stahlbande vorkommen, daſs der eine Stab sehr tief zu stehen kommt. In diesem Falle wird man den Ring an dem Stabe in die Höhe schieben müssen. Man läuft dabei Gefahr, daſs der Stab aus der lotrechten Stellung gezogen wird. Auſserdem muſs man zur Bestimmung des Neigungswinkels daran denken, daſs die Visierlinie des Gefällmessers parallel zum Bande sein muſs. Es ist also, wenn der vordere Stab niedriger steht, der anzuzielende Punkt höher zu legen, etwa durch Aufsetzen eines Zählers. Steht der hintere Stab niedriger, so daſs sich etwa der Ring des Bandes in der Mitte befindet, so ist auch die Mitte des vorderen Stabes anzuvisieren.

Mit dem Bande staffeln zu wollen, ist verkehrt; es führt die Einbiegung des Bandes zu neuen Fehlern, und die Ausführung der Messung (Senkrechtstellen der Stäbe, Heben des Bandes) ist mühsamer, als die Berechnung der Projektion nach obiger Tabelle.

Ein richtiges Stahlband vorausgesetzt, können bei der Streckenmessung Fehler entstehen, wenn auf geneigtem Boden die Neigung nicht genügend berücksichtigt wird; wenn ferner das Band nicht gehörig gespannt wird und daher eine krumme Linie, einen Bogen nach unten bildet; wenn drittens die Messung nicht genau in der Meſslinie geschieht und wenn endlich der hintere Bandstab etwas aus der lotrechten Stellung fortgezogen wird. In den drei ersten Fällen wird das Meſsergebnis zu groſs, im letzten Falle zu klein.

Bei der Lattenmessung können Fehler entstehen durch Temperaturunterschiede der Latte, durch ungenaues oder zu starkes Anlegen der einen Latte an die andere oder durch fehlerhaftes Anlegen der Latte an das Lot. Diese Fehler wirken bald in positivem, bald in negativem Sinne. Wird beim Messen aus der geraden Linie ausgewichen, sei es seitwärts oder in vertikaler Richtung nach oben und unten, so giebt es ein zu groſses Maſs für die Strecke.

Nach Jordan ist die Genauigkeit des Stahlbandes $0{,}005^{\mathrm{m}}$ für 1^{m} und diejenige der Lattenmessung $0{,}003^{\mathrm{m}}$. Allgemein ist demnach der mittlere Fehler einer Messung $0{,}005\sqrt{l}$ oder $0{,}003\sqrt{l}$, wenn die gemessene Strecke l^{m} lang ist.

Der Gesamtfehler wächst mit der Länge der Strecke und muſs dementsprechend verteilt werden, wenn es sich um die Verbesserung von Teilstrecken handelt, oder wenn Strecken gemeinsam zu verbessern sind, welche man aus gemessenen Strecken durch Rechnung gefunden hat.

Hat man eine Strecke zweimal gemessen, so ist als bester Wert für ihre Länge das arithmetische Mittel aus beiden Messungen anzusehen.

Die Strecke AB sei durchlaufend mit dem Stahlbande von A nach B gemessen und ihre Länge $l = 517{,}28^{\mathrm{m}}$ gefunden; darauf hat man von B nach dem Punkte C der Geraden und, in C wieder beginnend, die Strecke CA gemessen und erhalten $BC = l_1 = 214{,}12^{\mathrm{m}}$ und $CA = l_2 = 302{,}52^{\mathrm{m}}$. Welches ist die Länge von AB? Wie findet man die Längen von BC und CA?

In Rechnung zu setzen ist $AB = \frac{1}{2}(l + l_1 + l_2) = 516{,}96^{\,m}$. Betrachten wir als Fehler der Teilstrecken die Differenz zwischen dem Minuendus „Soll" und dem Subtrahendus „Haben", um gleich das Vorzeichen für die Verbesserungen zu haben, so ist der Fehler $516{,}96 - 516{,}64 = +\,0{,}32^{\,m}$. Diese $32^{\,cm}$ sind auf die beiden Strecken im Verhältnis ihrer Längen zu verteilen; es ist

$$BC = \frac{+\,0{,}32}{516{,}96} \cdot 214{,}12 + 214{,}12 = +\,0{,}133 + 214{,}12;$$

$$CA = \frac{+\,0{,}32}{516{,}96} \cdot 302{,}52 + 302{,}52 = +\,0{,}187 + 302{,}52;$$

ihre Summe ist $AB = 516{,}96^{\,m}$.

Ist durch Stahlbandmessung die Strecke $AB = 516{,}96^{\,m}$ und durch Lattenmessung zu $516{,}90^{\,m}$ gefunden, so ist ihre wahrscheinlichste Länge nicht das arithmetische Mittel aus beiden Zahlen, da nach dem Früheren die Genauigkeiten von Latte und Stahlband verschieden sind. Macht man mit der Latte den Fehler 3, so macht man mit dem Bande den Fehler 5. Der Unterschied $6^{\,cm}$ ist im Verhältnis $3:5$ zu verteilen und zwar ist $\frac{6}{8} \cdot 3 = 2{,}25^{\,cm}$ zu $516{,}90^{\,m}$ zu addieren und $\frac{6}{8} \cdot 5 = 3{,}75^{\,cm}$ von $516{,}96^{\,m}$ zu subtrahieren; jedes giebt $516{,}9225^{\,m}$.

Legen wir nicht den als Fehler betrachteten Unterschied, sondern die Meſsergebnisse selbst zu Grunde, so muſs bei der Berechnung des Endresultates die Lattenmessung mehr berücksichtigt werden, als die Bandmessung. Setze ich den Wert, das Gewicht der ersteren $= 1$, so ist dasselbe bei der letzteren $= \frac{3}{5}$; oder führe ich in der Summe das Ergebnis der Lattenmessung 5 mal auf, so muſs ich dasjenige der Bandmessung 3 mal einsetzen, wie aus der Rechnung ersichtlich ist.

$$AB = \frac{516{,}90 \cdot 5 + 516{,}96 \cdot 3}{5 + 3} = \frac{0{,}0 \cdot 5 + 0{,}96 \cdot 3}{8} + 516{,}90 = 516{,}9225$$

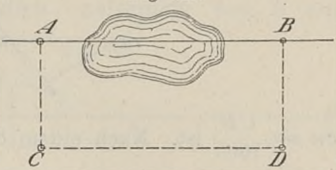
oder
$$AB = \frac{516{,}90 \cdot 1 + 516{,}96 \cdot \frac{3}{5}}{1 + \frac{3}{5}} = 516{,}9225^{\,m}.$$

§ 50. Die mittelbare Messung gerader Linien.

Die mittelbare Messung von Strecken besteht in der Auffindung ihrer Länge auf dem Wege der Rechnung oder Konstruktion. Wenden wir Instrumente an, mit denen wir die dabei in Frage kommenden Winkel nach Gradmaſs ermitteln, so werden die gesuchten Strecken **berechnet**; wenden wir Instrumente für konstante Winkel oder den Meſstisch an, so geschieht die Ermittlung der Streckenlänge auf dem Wege der Konstruktion, möge dieselbe nun im Felde selbst mit dem Stahlbande u. s. w. oder auf dem Papiere des Meſstischbrettes ausgeführt werden.

Da durch die beigefügten Zeichnungen die Aufgaben hinreichend erläutert werden, so ist auf den vollen Wortlaut verzichtet und sind nur die unterscheidenden Merkmale angedeutet.

Fig. 119.



1. Die Punkte A und B sind zugänglich, zwischen ihnen befindet sich ein Teich; im übrigen ist das Gelände offen (Fig. 119).

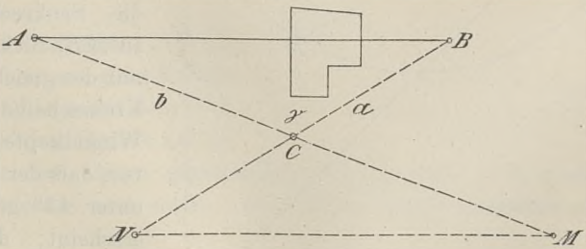
Man errichtet in den Punkten A und B zu AB die Senkrechten, macht diese gleich lang und miſst die Strecke zwischen ihren Endpunkten; $CD = AB$.

2. Die Linie AB ist wegen eines Gebäudes oder eines kleinen Tannenhorstes nicht übersehbar; das übrige Gelände ist offen.

Wenn es möglich ist, legt man entsprechend der Fig. 113 ein Dreieck ABC fest, in welchem man die Mittellinie mn miſst, dann ist $AB = 2mn$.

Oder man wählt einen Punkt C (Fig. 120), von dem aus man nach A und B sehen und messen kann, verlängert AC und BC

Fig. 120.



über C hinaus um sich selbst bis M bezw. N, so ist $MN = AB$ als Gegenseiten in einem Parallelogramm.

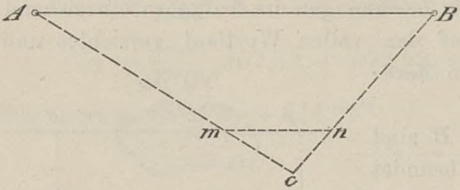
Ist die Verlängerung der Linien AC und BC nicht ausführbar, so messe man die Strecken $AC = b$ und $BC = a$, auſserdem mit dem Theodolit den $\sphericalangle ACB = \gamma$. Es ist

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (A - B) = \frac{a - b}{a + b} \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (A + B) = \frac{a - b}{a + b} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2},$$

$$AB = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin A}.$$

Mit dem Meſstische verfährt man nach Fig. 121. Man stellt ihn über C horizontal auf, bestimmt mit der Lotgabel den lotrecht über C liegenden Punkt c, zieht die Visierstrahlen cA und cB, miſst CA und CB und trägt dieselben im verjüngten Maſsstabe etwa 1:1000 auf den Strahlen ab, sodaſs $cm = \frac{CA}{1000}$ und

Fig. 121.

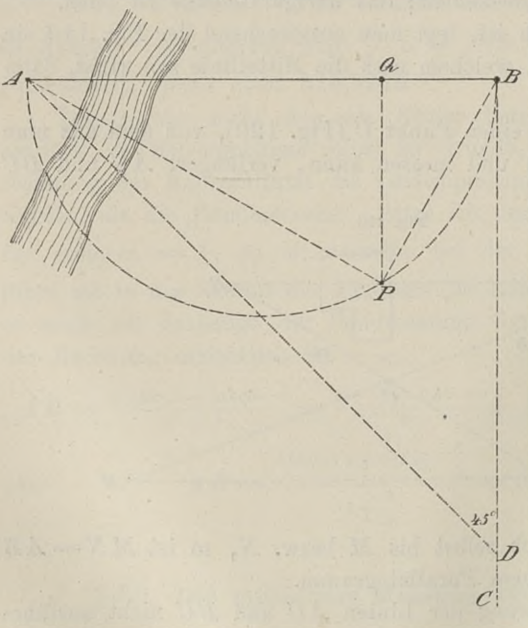


$cn = \frac{CB}{1000}$ ist. Nach einem Satze der Planimetrie ist nun $mn \parallel AB$ und

$$AB = 1000 \cdot mn,$$

wo mn mit dem Zirkel abzugreifen und an einem Maſsstabe zu messen ist.

Fig. 122.



3. Der Punkt A liegt jenseits eines Flusses, ist also unzugänglich; das ganze Terrain ist übersehbar (Fig. 122).

Man errichte in B die Senkrechte BC zu AB, rücke in BC mit der gleicharmigen Kreuzscheibe oder dem Winkelkopfe so weit vor, daſs der Punkt A unter 45^0 gegen CB erscheint, dann ist Dreieck ABD gleichschenklig-rechtwinklig, also $DB = AB$.

Oder man betrachte AB als Durchmesser eines Kreises, suche mit dem Winkelspiegel einen Punkt P der Kreislinie auf, mache also $\sphericalangle APB = 90^0$, fälle das Lot PQ auf AB, so ist

$$BP^2 = BA \cdot BQ \quad \text{oder} \quad BA = \frac{BP^2}{BQ},$$

worin BP und BQ unmittelbar zu messen sind.

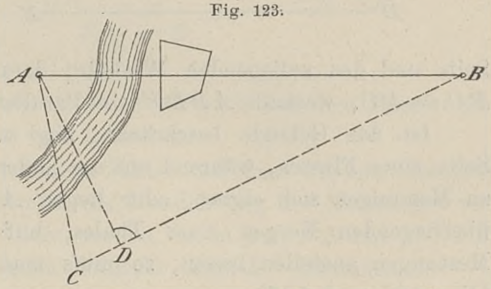
Ist die Messung von PQ bequemer, so hat man

$$PQ^2 = AQ \cdot BQ \quad \text{oder} \quad AQ = \frac{PQ^2}{BQ},$$

$$AB = AQ + BQ.$$

4. Der Punkt A ist unzugänglich, aufserdem von B aus wegen eines Gebäudes nicht sichtbar; das übrige Gelände ist offen. (Fig. 123).

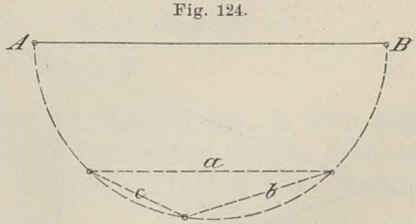
Fig. 123.



In einem Punkte C messe man den Winkel ACB, fälle von A das Lot AD auf BC und messe CD, so ist $AD = CD \cdot \operatorname{tg} C$; mifst man nun noch BD, so ist AB die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreiecke mit bekannten Katheten.

5. Die Gerade AB ist ganz unzugänglich, sie liegt jenseits eines Flusses; das Gelände diesseits ist vollständig frei und A und B sind überall sichtbar.

Fig. 124.



Man betrachte AB als den Durchmesser eines Kreises, (Fig. 124), lege mit dem Winkelspiegel drei Punkte auf der Kreislinie fest, deren gegenseitige Entfernungen a, b, c als Seiten eines Dreieckes man mifst. Der Inhalt dieses Dreieckes ist

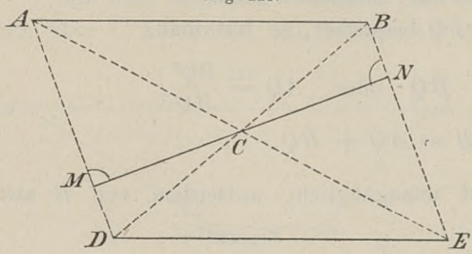
$$\triangle = \frac{a \cdot b \cdot c}{4r}, \text{ also } 2r = AB = \frac{a \cdot b \cdot c}{2\triangle}.$$

Zum Beweise setze man $\dfrac{a \cdot h}{2} = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4r}$ oder $h = \dfrac{b \cdot c}{2r}$; es mufs also $h : b = c : 2r$ sein, was aus der Ähnlichkeit der Dreiecke mit den Seiten h und b bzw. c und $2r$ ersichtlich ist.

Eine andere Lösung liegt in Fig. 125, bei welcher ebenfalls nur Winkelspiegel, Baken und Meſsband notwendig sind.

Auf die beliebige Grade MN fällt man von A und B die Lote AM und $B'N$; MN wird in C halbiert, AC und BC werden verlängert bis zu den Schnittpunkten E und D mit den verlängerten Loten, so ist $DE = AB$. Es ist nämlich $AMC \cong ENC$ und $BNC \cong DMC$, weil sie je übereinstimmen in einer Seite und den anliegenden Winkeln; daraus folgt $AC = EC$ und $BC = DC$, weshalb $ABDE$ ein Parallelogramm ist.

Fig. 125.



Ist das Gelände beschränkt, liegt z. B. AB auf der einen Seite eines Flusses, während auf der anderen Seite nur eine Straſse zu Messungen sich eignet, oder liegen A und B auf den gegenüberliegenden Bergen eines Thales, auf dessen Sohle sich nur Messungen anstellen lassen, so muſs man zum Theodolit greifen. (Fig. 126 und 127).

Man messe eine Standlinie MN, von deren Endpunkten aus man A und B anvisieren kann, messe die Winkel $\varkappa$, λ, μ, ν und

Fig. 126.

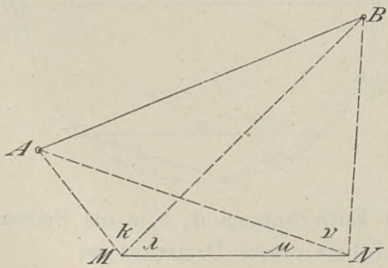
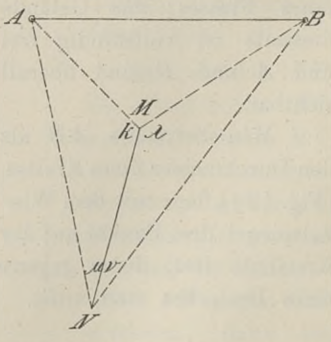


Fig. 127.

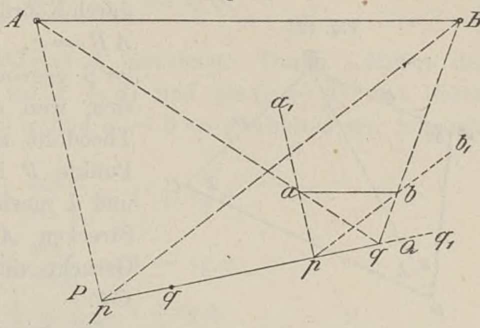


berechne nach dem Sinussatze zwei Seiten, welche mit AB ein Dreieck bilden; in demselben ist dann genügend zur Berechnung der gesuchten Strecke bekannt.

Lösung mit dem Meſstische. (Fig. 128).

Man wähle im Gelände eine beliebige Standlinie PQ und messe dieselbe; stelle den Tisch über P horizontal auf, centriere p zu P, ziehe die Visierstrahlen nach A, B und Q, nämlich pa_1, pb_1 und pq_1; schneide auf pq_1 das Stück pq ab, so daſs etwa $pq : PQ = 1 : 1000$ ist. Trage nun den Meſstisch nach Q, horizontiere und centriere q zu Q, wobei zugleich der Tisch nach QP orientiert werden muſs. Die Visierstrahlen nach A und B werden von den vorhandenen Strahlen pa_1 und pb_1 in den Punkten a und b geschnitten. Es ist dann ab das verjüngte Maſs von AB; es wird ab auf dem Papiere gemessen und $AB = 1000 \cdot ab$ gefunden.

Fig. 128.



Da nämlich die Richtungsstrahlen auf dem Papiere dieselben Winkel bilden, welche gemäſs der Handhabung des Meſstisches von den Linien des Feldes gebildet werden, so ist $pa \parallel PA$ und $pb \parallel PB$, folglich sind die betreffenden Dreiecke ähnlich. Demnach ist

$$PQ : pq = AQ : aq \text{ und } PQ : pq = BQ : bq$$

$$\frac{AQ : aq = BQ : bq}{AB \parallel ab},$$

$$AB : ab = AQ : aq = PQ : pq = 1000 : 1$$

$$AB = 1000 \cdot ab.$$

Da man den Strahl ba auf dem Papiere hat, so kann man auch durch q die Parallele zu ba konstruieren und im Felde in der Richtung derselben zu BA durch den Punkt Q eine Parallele abstecken.

6. Die Linie AB ist sehr lang und auf derselben befindet sich ein dichter Wald.

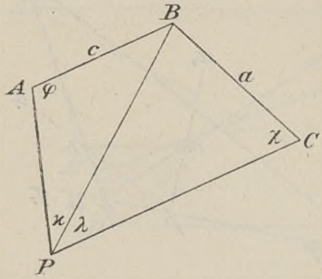
Die Berechnung erfolgt nach Fig. 115. In dem um den Wald gelegten Polygonzuge werden die Dreiecke der Reihe nach berechnet, bis man schlieſslich in dem Dreiecke mit AB die erforderlichen Stücke kennt. Am einfachsten gestaltet sich die Lösung dieser Aufgabe bei Zugrundelegung von rechtwinkligen Koordinaten; siehe § 58. Fig. 186.

7. Die Aufgabe von Snellius (1617) oder die Aufgabe der

drei unzugänglichen Punkte. Diese Aufgabe wird auch nach Pothenot (1692) benannt.

Es sind die Punkte A, B und C ihrer Lage nach entweder durch Koordinaten oder durch Strecken $AB = c$, $BC = a$ und $\sphericalangle ABC = \beta$ gegeben. In den Punkten läſst sich, weil es Turmspitzen sind, der Theodolit nicht aufstellen; aber im Punkte P lassen sich die Winkel $\varkappa$ und λ messen, unter denen dort die Strecken AB und BC erscheinen. Gesucht sind die Strecken AP, BP, CP.

Fig. 129.



Die trigonometrische Lösung.

In den Dreiecken ABP und BCP ist nach dem Sinussatze

$$BP = \frac{c}{\sin \varkappa} \cdot \sin \varphi = \frac{a}{\sin \lambda} \cdot \sin \chi$$

$$\frac{\sin \chi}{\sin \varphi} = \frac{c \cdot \sin \lambda}{a \cdot \sin \varkappa}.$$

Eine zweite Gleichung für die beiden Unbekannten ist

$$\chi + \varphi = 360^0 - (\beta + \varkappa + \lambda) = \omega$$

$$\chi = \omega - \varphi$$

$$\frac{\sin \chi}{\sin \varphi} = \frac{\sin (\omega - \varphi)}{\sin \varphi} = \frac{\sin \omega \cdot \cos \varphi - \cos \omega \sin \varphi}{\sin \varphi}$$

$$\sin \omega \cdot \operatorname{cotg} \varphi - \cos \omega = \frac{c \cdot \sin \lambda}{a \cdot \sin \varkappa}$$

1) . . . . $\operatorname{cotg} \varphi = \dfrac{c \cdot \sin \lambda}{a \cdot \sin \varkappa \sin \omega} + \operatorname{cotg} \omega.$

Da dieser Ausdruck logarithmisch unbequem ist, so setzen wir

$$\frac{c \cdot \sin \lambda}{a \cdot \sin \varkappa \sin \omega} = \operatorname{cotg} \eta$$

$$\operatorname{cotg} \varphi = \operatorname{cotg} \eta + \operatorname{cotg} \omega = \frac{\cos \eta}{\sin \eta} + \frac{\cos \omega}{\sin \omega}$$

2) . . $\operatorname{cotg} \varphi = \dfrac{\sin (\eta + \omega)}{\sin \eta \cdot \sin \omega}.$

Aus den beiden Formeln 1) und 2) ergiebt sich für φ ein einziger Wert. Ist $\omega > 180^0$, so wird $\sin \omega$ negativ; das Vorzeichen für den Wert von $\operatorname{cotg} \varphi$ ist damit noch nicht bestimmt. Ist dasselbe aber negativ, so ist $\varphi > 90^0$ und als Winkel eines Dreiecks $< 180^0$.

Eine andere logarithmisch bequeme Formel liefert die Einführung des Hilfswinkels durch

$$\frac{\sin \chi}{\sin \varphi} = \frac{c \cdot \sin \lambda}{a \cdot \sin \varkappa} = \operatorname{tg} \vartheta.$$

Hieraus wird der Winkel ϑ berechnet. Durch Addition der bekannten Formeln für $\sin(\alpha + \beta)$ und $\sin(\alpha - \beta)$ und durch Einführung von $\alpha + \beta = \varphi$ und $\alpha - \beta = \chi$ erhalten wir folgende Entwicklung:

$$1 + \frac{\sin \chi}{\sin \varphi} = 1 + \operatorname{tg} \vartheta$$

$$1 - \frac{\sin \chi}{\sin \varphi} = 1 - \operatorname{tg} \vartheta$$

$$\frac{\sin \varphi + \sin \chi}{\sin \varphi - \sin \chi} = \frac{1 + \operatorname{tg} \vartheta}{1 - \operatorname{tg} \vartheta}$$

$$\frac{2 \sin \frac{\varphi + \chi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi - \chi}{2}}{2 \cos \frac{\varphi + \chi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi - \chi}{2}} = \frac{\operatorname{tg} 45^0 + \operatorname{tg} \vartheta}{1 - \operatorname{tg} 45^0 \cdot \operatorname{tg} \vartheta}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi + \chi}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\varphi - \chi}{2} = \operatorname{tg}(45^0 + \vartheta)$$

$$\operatorname{cotg} \frac{\varphi - \chi}{2} = \operatorname{tg}(45^0 + \vartheta) \cdot \operatorname{cotg} \frac{\varphi + \chi}{2}$$

3) . . . . $$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \chi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi + \chi}{2} \cdot \operatorname{cotg}(45^0 + \vartheta).$$

Fig. 130.

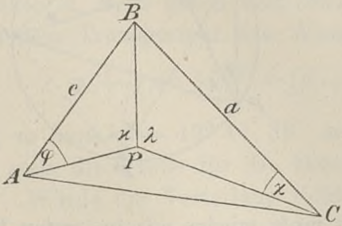
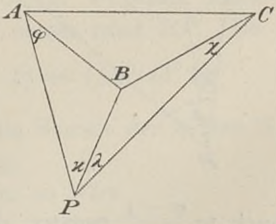


Fig. 131.



Da $\frac{\varphi + \chi}{2} = \frac{\omega}{2}$ und ϑ bekannt sind, so sind auch φ und χ eindeutig bestimmt. Die Berechnung von AP, BP, CP erfolgt nach dem Sinussatze.

Um nur mit der Funktion tangens zu arbeiten, läfst sich Gleichung 3) auch in der Form schreiben:

4) . . . . $$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \chi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi + \chi}{2} \cdot \operatorname{tg}(45^0 - \vartheta).$$

Die Lage des Punktes P zu den drei gegebenen Punkten kann verschieden sein, wie die Figuren zeigen; demnach werden auch die Gröſsenverhältnisse der Winkel verschieden sein. Bei der Lage in Fig. 132 sorge man, daſs $\varkappa$ nicht zu klein wird.

a. Ist $\frac{\varphi + \chi}{2} < 90^0$ und $\vartheta > 45^0$, so wird der zweite Faktor in 3) und 4) negativ, also auch $\operatorname{tg} \frac{\varphi - \chi}{2}$ negativ. Da nun $\varphi - \chi$ als Differenz zweier Dreieckswinkel $< 180^0$ sein muſs, so ist $\frac{\varphi - \chi}{2} < 90^0$; $\operatorname{tg} \frac{\varphi - \chi}{2}$ kann also nur durch $\varphi < \chi$ negativ werden.

b. Ist $\frac{\varphi + \chi}{2} < 90^0$ und $\vartheta < 45^0$, so ist $\frac{\varphi - \chi}{2}$ der den Tafeln entnommene Winkel und $\varphi > \chi$.

c. Ist $\frac{\varphi + \chi}{2} > 90^0$ und $\vartheta < 45^0$, so wird die rechte Seite in 3) und 4) negativ, weil der erste Faktor negativ wird; also wird

Fig. 132.

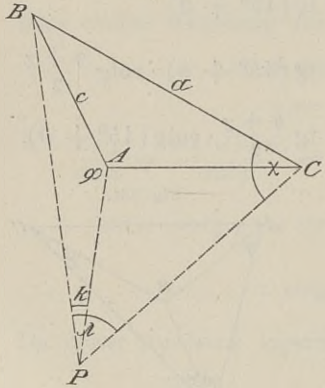
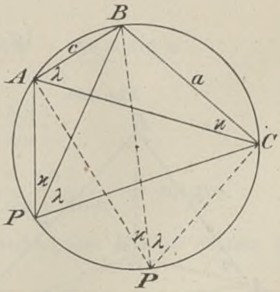


Fig. 133.



auch $\operatorname{tg} \frac{\varphi - \chi}{2}$ negativ, deshalb muſs wieder wie im ersten Falle $\varphi < \chi$ sein.

d. Ist $\frac{\varphi + \chi}{2} = 90^0$, so ist $\operatorname{tg} \frac{\varphi + \chi}{2} = \infty$, also $\operatorname{tg} \frac{\varphi - \chi}{2}$ unbestimmt. Die Annahme $\varphi + \chi = 180^0$ macht das Viereck $ABCP$ zu einem Sehnenviereck. Der Kreis durch die drei Punkte geht auch durch P und es ist (Fig. 133) als Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen $\varkappa = BCA$ und $\lambda = BAC$, folglich

$$c \cdot \sin \lambda = a \cdot \sin \varkappa$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = 1 \quad \text{und} \quad \vartheta = 45^0.$$

In beiden Gleichungen 3) und 4) ist also $\operatorname{tg} \frac{\varphi - \chi}{2} = \infty \cdot 0$. Diese Unbestimmtheit besagt, dafs P auf dem sogenannten gefährlichen Kreise liegt, dafs der Punkt P tausend verschiedene Lagen haben kann, in denen AB und BC unter den gleichen Winkeln $\varkappa$ und λ erscheinen.

In den Figuren 130 und 131 ist jede Gefahr der Vieldeutigkeit für die Lage von P ausgeschlossen.

Eine trigonometrische Lösung durch Näherung, welche zugleich als Vorbereitung für die spätere Fehlerverbesserung in den Winkeln dienen möge, sei an folgenden Beispielen erläutert.

Es sei $AB = 841{,}56 \qquad \varkappa = 24^0\, 58'\, 47''$

$BC = 1553{,}66 \qquad \lambda = 41 \quad 2 \quad 58$

$ABC = \beta = 174^0\, 13'\, 47''$.

Die Punkte B und P liegen auf derselben Seite von AC, wie in Fig. 131.

Man zeichne sich in irgend einem Mafsstabe mit Hilfe des Transporteurs das Dreieck ABC, die Winkel $\varkappa$ und λ lege man neben einander auf Pauspapier und verschiebe dasselbe in der Ebene des Dreiecks, bis die drei Schenkel von $\varkappa$ und λ durch die Punkte A, B, C gehen und steche P durch. Ungefähr messe man mit dem Transporteur den Winkel φ, er sei rund 70^0. Da

$$\varphi + \chi = 360^0 - (\beta + \varkappa + \lambda) = 119^0\, 44'\, 38''$$

ist, so mufs $\chi = 49^0\, 44'\, 38''$ sein. Die Summe der beiden Winkel ist stets die Probe für die Berechnung.

Würde die Verteilung richtig sein, so wäre

$$BP = \frac{841{,}56}{\sin \varkappa} \cdot \sin 70^0 = \frac{1553{,}66}{\sin \lambda} \cdot \sin 49^0\, 44'\, 38''.$$

An den gegebenen Gröfsen aufser φ und χ läfst sich nichts ändern, wenn die Gleichung nicht besteht. Eine Änderung darf nur an φ und χ vorgenommen werden und zwar unter der Bedingung, dafs $\varphi + \chi$ die obige Gröfse behält. Für die negativen $\log \sin \varkappa$ und $\log \sin \lambda$ sind ihre dekadischen Ergänzungen (D. E.) eingesetzt, welche man auch Komplement (cpl.) nennt.

$$
\begin{array}{lrl}
 & \log 841{,}56 & = 2.92\,509 \\
\text{D. E.} & \log\sin 24^0\,58'\,47'' & = 0.37\,438 \\
 & \log\sin 70^0 & = 9.97\,299 \;(4) \\
\hline
 & & \, 3.27\,246
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrl}
 & \log 1553{,}66 & = 3.19\,136 \\
\text{D. E.} & \log\sin 41^0\;\;2'\,58'' & = 0.18\,263 \\
 & \log\sin 49\;\;44\;\;38 & = 9.88\,262 \;(11) \\
\hline
 & & \, 3.25\,661
\end{array}
$$

Die Differenz in den beiden log BP beträgt 1585; dieselbe ist nach den Regeln der Gesellschaftsrechnung im Verhältnis der Minutendifferenzen 4 und 11 zu verteilen.

$$1585 : 15 = 105{,}667' = 1^0\,45'\,40''$$

Wir haben den Quotient sofort als Minuten bezw. als Gradmaſs behandelt. Das ist erklärlich, weil wir durch die Summe der Differenzen für eine Minute dividiert haben. Auf die Differenz von 4 bezw. 11 im Logarithmus kommt $1'$ im Winkel. Verringern wir 9.97 299 um 4, so wird φ um $1'$ kleiner, verringern wir um $2 \cdot 4$, so wird φ um $2'$ kleiner, verringern wir den log um $105{,}667 \cdot 4$, so wird der Winkel um $105{,}667'$ kleiner. Ebenso ist es mit $\log\sin\chi$. Eine Vermehrung des $\log\sin\chi$ um $105{,}667 \cdot 11$ bedeutet eine Vergröſserung von χ um $1^0\,45'\,40''$. Wir haben nun

$$
\begin{array}{rl}
\varphi = & 68^0\,14'\,20'' \\
\chi = & 51\;\;30\;\;18 \\
\hline
\varphi + \chi = & 119^0\,44'\,38''.
\end{array}
$$

Für die folgende Berechnung sind nur die letzten zwei Logarithmen neu aufzuschlagen; mit Kreide an der Tafel ist die Arbeit noch einfacher. An die Stelle der frühern φ und χ treten die neuen.

$$
\begin{array}{lll}
2.92\,509 & 3.19\,136 & \\
0.37\,438 & 0.18\,263 & 19 : 15 = 1{,}2667' \\
9.96\,790\;(5) & 9.89\,357\;(10) & = 1'\,16'' \\
\hline
3.26\,737 & 3.26\,756 &
\end{array}
$$

$$\varphi = 68^0\,15'\,36''; \quad \chi = 51^0\,29'\,2''; \quad \varphi + \chi = 119^0\,44'\,38''$$

2.92 509	3.19 136
0.37 438	0.18 263
9.96 796 (5)	9.89 344 (10)
3.26 743	3.26 743

Damit ist aus beiden Dreiecken der gleiche Wert $BP = 1851{,}09$ gefunden, und φ und χ hatten bereits bei der zweiten Verbesserung die richtigen Werte erhalten.

Die Ausgleichung in der vorstehenden Aufgabe bietet keine Schwierigkeit, weil die beiden Winkel φ und χ kleiner als 90^0 und deshalb die Tafeldifferenzen positive Zahlen sind. Wird eine der Differenzen negativ, so ist algebraisch zu rechnen. Der Unterschied zwischen 122 und 82 soll z. B. im Verhältnis von -2 zu $+7$ ausgeglichen werden. Es ist $(122 - 82) : (-2 + 7) = 40 : 5 = 8$; die Ausgleichung liefert $122 - (-2 \cdot 8) = 138$ und $82 + (7 \cdot 8) = 138$.

Ist $\alpha > 90^0$, etwa $\alpha = 124^0$, so ist $\log \sin 124^0 = \log \sin 56^0 = 9.91\,857$; die zugehörige Differenz ist $+9$, für α ist sie jedoch -9. Denn eine Verkleinerung des Logarithmus bedeutet eine Verkleinerung des Nebenwinkels und eine Vergröſserung von α. Sind beide Winkel gröſser als 90^0, so wird die Differenz ausgeglichen wie bei positiven Tafeldifferenzen; das bedeutet aber eine umgekehrte Verbesserung in den Winkeln.

Es sei nach Fig. 129: $AB = 126$, $BC = 72$, $\beta = 75^0$, $\varkappa = 23^0$, $\lambda = 12^0$. Demnach ist $\varphi + \chi = 360^0 - 110^0 = 250^0$; setzen wir $\varphi = 122^0\ 30'$, so muſs $\chi = 127^0\ 30'$ sein. In der nach dem obigen Beispiel verständlichen Berechnung sind unter 2) die ersten Reihen von 1) addiert und die eingeklammerten Zahlen sind die negativen Tafeldifferenzen.

1)	2.10 037	1.85 733	$440 : 17 = 25{,}882'$
	0.40 812	0.68 212	$= 25'\ 53''$
	9.92 603 (—8)	9.89 947 (—9)	$\left.\begin{aligned}\varphi &= 122^0\ 4'\ 7''\\ \chi &= 127\ \ 55\ \ 53\end{aligned}\right\}\ 250^0.$
	2.43 452	2.43 892	
2)	2.50 849	2.53 945	$19 : 16 = 1'\ 11''$
	9.92 809 (—7)	9.89 694 (—9)	$\left.\begin{aligned}\varphi &= 122^0\ 5'\ 18''\\ \chi &= 127\ \ 54\ \ 42\end{aligned}\right\}\ 250^0.$
	2.43 658	2.43 639	

Die Fortsetzung der Rechnung bietet nichts neues. Auch der Fall mit Minutendifferenzen von verschiedenen Vorzeichen läſst sich nach dem oben Gesagten leicht erledigen. Eine Schwierigkeit könnte nur der Fall bereiten, in welchem die Differenzen für $1'$ gleich und entgegengesetzt sind. Die Ausgleichung ist nicht möglich, weil der Divisor, der vorstehend 17 bezw. 16 war, jetzt Null wird. Der Punkt P liegt auf dem gefährlichen Kreise.

Übungsbeispiele.

1. In zwei Dreiecken sind

$$a = 12, \quad b = 15, \quad \gamma = ? \qquad \text{und} \qquad a_1 = 20, \quad b_1 = 25, \quad \gamma_1 = ?.$$

Es sollen die beiden Dreiecke gleichen Inhalt haben und die Werte von γ und γ_1 gesucht werden, wenn $\gamma + \gamma_1 = 160^0$ sein soll.

Man setze $\gamma = 150^0$, dann mufs $\gamma_1 = 10^0$ sein, und führe die Verbesserung an der Formel $\frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$, also hier an $90 \cdot \sin 150^0 = 250 \cdot \sin 10^0$ aus.

2. Man visiert von einem Punkte P aus das linke Ende A, die Mitte M und das rechte Ende B einer horizontal liegenden 5^{m} langen Latte an. AM und MB erscheinen unter den Winkeln $\varkappa = 6^0$ und $\lambda = 5^0$. Wie lang ist MP? Es ist

$$MP = \frac{2{,}5}{\sin 6^0} \cdot \sin A = \frac{2{,}5}{\sin 5^0} \cdot \sin B; \quad A + B = 169^0.$$

Man zeichne die Winkel $\varkappa$ und λ neben einander auf Pauspapier und lasse die Schenkel durch A, M, B gehen. Der Einfachheit wegen nehme man zwei beliebige gleiche Strecken. Man wird sehen, welch falsche Vorstellung man von der Gröfse eines Grades hat und wie sehr das Dreieck ABP von einem gleichschenkligen abweicht.

Die Rechnung möge mit $A = 120^0$, $B = 49^0$ beginnen; durch Gabelbildung gelangt man zu $A = 127^0 45' 48''$, $B = 41^0 14' 12''$ und $MP = 18{,}91$.

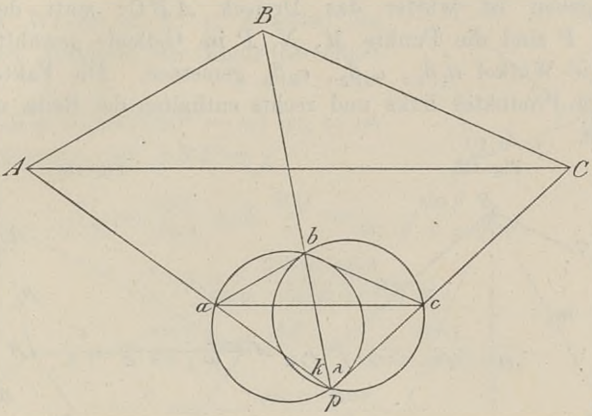
Die planimetrische Lösung.

Man zeichne ABC im verjüngten Mafsstabe, so dafs $AB : ab = BC : bc = CA : ca$ ist. Nach dem Satze: der Tangentenwinkel ist gleich dem Peripheriewinkel im entgegengesetzten Kreisabschnitte, zeichne man über ab als Sehne einen Kreis, der den $\sphericalangle\, \varkappa$, und über bc einen solchen, der den $\sphericalangle\, \lambda$ fafst. Beide Kreise schneiden sich in einem Punkte p, der dem Punkte P des Feldes entspricht.

Denkt man (Fig. 134) die Dreiecke ABC und abc mit den homologen Seiten parallel liegend, so ist P der Ähnlichkeitspunkt und es gilt auch hier $AP : ap = BP : bp = CP : cp = AB : ab$.

Greift man also ap, bp, und cp auf dem Maſsstabe ab, so erhält man die Entfernung des Punktes P von den drei gegebenen Punkten.

Fig. 134.



Will man die Aufgabe mit dem Meſstische lösen, so hat man das Dreieck $abc \sim ABC$ auf dem Tische zu zeichnen, den Tisch über P horizontal aufzustellen und dafür zu sorgen, daſs die Richtungen Aa, Bb und Cc sich in einem Punkte schneiden. Es ist also der Tisch so zu orientieren, daſs ein Schnittpunkt der Strahlen entsteht und dieser Punkt über P liegt. Nach einigen Versuchen wird dieses annähernd gelingen; meist wird ein sogen. fehlerzeigendes Dreieck entstehen, die von a, b, c aus rückwärts gezogenen Visierstrahlen werden sich in drei Punkten schneiden.

Schneller zum Ziele gelangt man durch folgendes Verfahren, dessen Genauigkeit nach Bauernfeind wenig zu wünschen übrig läſst.

Man stelle den Tisch über P horizontal auf, breite auf der Tischplatte ein hinreichend groſses Stück Pauspapier aus, bestimme den zu P centrisch liegenden Punkt p und zeichne mit Hilfe der Visierstrahlen nach A, B, C die Winkel $\varkappa$ und λ. Das Felddreieck ABC ist auf dem Zeichenbrette als ähnliches Dreieck abc gegeben. Das Pauspapier verschiebt man nun so, daſs der Strahl pA durch a, pB durch b, pC durch c geht; es wird dann der Punkt p entsprechend zu abc liegen, und aus dem gewählten Verhältnis wird man die Entfernungen PA u. s. w. berechnen können. Will man zu weitern Aufnahmen den Tisch orientieren, so bringt man p über P und pa in die Vertikalebene mit PA.

Die Bezeichnung Rückwärtseinschneiden auf drei Punkte ergiebt sich aus Obigem.

8. Die erweiterte Snellsche Aufgabe (Fig. 135).

Gegeben ist wieder das Dreieck ABC; statt des einen Punktes P sind die Punkte M, N, P im Gelände gewählt und in ihnen die Winkel $\alpha_1 \beta_1$, $\alpha_2 \beta_2$, $\alpha_3 \beta_3$ gemessen. Die Faktoren des folgenden Produktes links und rechts enthalten der Reihe nach den Sinussatz.

Fig. 135.

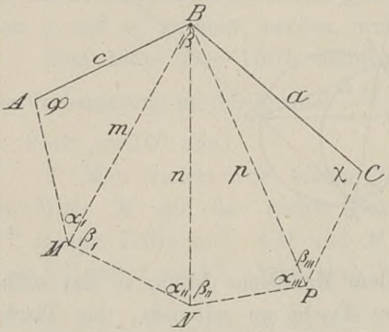
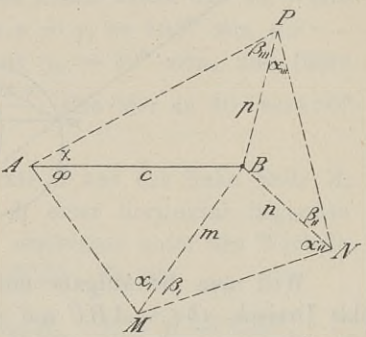


Fig. 136.



$$\frac{c}{m} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{p} \cdot \frac{p}{a} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \varphi} \cdot \frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_1} \cdot \frac{\sin \alpha_3}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \chi}{\sin \beta_3} \cdot$$

$$\frac{\sin \chi}{\sin \varphi} = \frac{c \cdot \sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2 \cdot \sin \beta_3}{a \cdot \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \sin \alpha_3} = U$$

$$\chi + \varphi = 8R - (\beta + \alpha_1 + \beta_1 + \cdots) = \omega$$

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{U}{\sin \omega} + \operatorname{cotg} \omega .$$

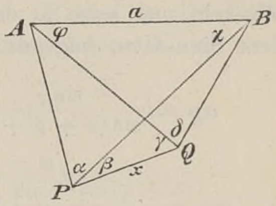
In Fig. 136 haben φ und χ die dort bezeichnete Lage. Die Gröfse c hebt sich fort und es ist $\varphi + \chi = 360^0 - (\alpha_1 + \beta_1 + \cdots)$. Die einzelnen Strecken sind leicht zu berechnen. Der Ausdruck läfst sich wie früher logarithmisch bequem machen, und φ und χ können näherungsweise gefunden werden.

9. Die Aufgabe der zwei unzugänglichen Punkte oder des unzugänglichen Abstandes.

Diese Aufgabe wird wohl nach Hansen (1841) benannt, sie war jedoch schon früher gelöst. Es ist die Aufgabe der Figuren 126 und 127, mit dem Unterschiede, dafs nicht die Winkel an der bekannten Standlinie, sondern in den Endpunkten der gesuchten Strecke gemessen sind.

In Fig. 137 sind die beiden Punkte A und B unzugänglich, aber ihr Abstand a ist bekannt; man kann sie von P und Q aus und diese unter sich mit dem Fernrohr anvisieren. Durch a und die gemessenen Winkel α, β, γ, δ sollen die sämtlichen Abstände der Figur berechnet werden.

Fig. 137.



Da $\sin\psi = \sin(180^0 - \psi)$ ist, so ist für $BAQ = \varphi$ und $ABP = \chi$

$$\frac{a}{BQ} = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi} \text{ und } \frac{BQ}{x} = \frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma+\delta)}$$

$$\frac{a}{x} = \frac{\sin\beta\cdot\sin\delta}{\sin\varphi\cdot\sin(\beta+\gamma+\delta)}$$

$$\frac{a}{AP} = \frac{\sin\alpha}{\sin\chi} \text{ und } \frac{AP}{x} = \frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$$

$$\frac{a}{x} = \frac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin\chi\cdot\sin(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Durch Gleichstellung der beiden Werte wird

$$\frac{\sin\chi}{\sin\varphi} = \frac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma\cdot\sin(\beta+\gamma+\delta)}{\sin\beta\cdot\sin\delta\cdot\sin(\alpha+\beta+\gamma)} = N$$

Aus der Winkelsumme der Dreiecke folgt

$$\varphi+\chi = \beta+\gamma = \omega;\ \chi = \omega - \varphi$$

$$\operatorname{cotg}\varphi = \frac{N}{\sin\omega} + \operatorname{cotg}\omega.$$

Der logarithmisch bequeme Ausdruck wird wie oben durch Einführung des Hilfswinkels aus $\operatorname{tg}\eta = N$ entwickelt. Auch hier ist

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi-\chi}{2} = \operatorname{tg}\frac{\varphi+\chi}{2}\cdot\operatorname{cotg}(45^0+\eta) = \operatorname{tg}\frac{\varphi+\chi}{2}\cdot\operatorname{tg}(45^0-\eta).$$

Damit sind φ und χ gefunden, und die Entfernungen der Punkte P und Q von A und B, sowie $PQ = x$ lassen sich berechnen.

In der vorstehenden Entwicklung sind wir vom Dreieck ABQ ausgegangen; dadurch wird die Einschätzung des einzelnen Winkels φ oder χ schwierig. Fangen wir mit dem Dreieck ABP an, so wird der ganze Winkel $PAB = \varphi$, und φ und χ werden Winkel desselben Dreiecks. Jetzt können wir näherungsweise die beiden Winkel in die Gabel fassen, wie es bei der Snellschen Aufgabe geschah. Das soll jedoch hier nicht geschehen. Die Rechnung soll uns vielmehr auf einem kleinen Umwege zunächst auf das richtige PQ führen.

Man zeichne sich die Nebenfigur 137a mit den gleichen Winkeln und setze in derselben $pq = 100$, dann lassen sich nach dem Sinussatze folgende Berechnungen ausführen:

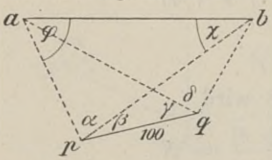
$$ap = \frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)} \cdot 100; \quad bp = \frac{\sin(\gamma+\delta)}{\sin(\beta+\gamma+\delta)} \cdot 100$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi-\chi}{2} = \frac{bp-ap}{bp+ap} \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi+\chi}{2}.$$

$$ab = \frac{\sin\alpha}{\sin\chi} \cdot ap = \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} \cdot bp.$$

Der Wert von ab wird nun nicht dem gegebnen Werte von AB gleich sein; ab gehört zu $pq = 100$. Da jedoch die Winkel in $abpq$ den Winkeln in $ABPQ$ gleich sind, so haben wir lauter ähnliche Dreiecke. Die wahren Entfernungen werden wir also durch das Verhältnis $AB : ab$ aus den obigen ap und bp u. s. w. finden.

Fig. 137a.



Beispiel: $AB = 392$, $\alpha = 58^0\,4'$, $\beta = 50^0\,56'$, $\gamma = 32^0\,46'$, $\delta = 64^0\,44'$.

$$ap = \frac{\sin 32^0\,46'}{\sin 38^0\,14'} \cdot 100 = 87{,}45; \quad bp = \frac{\sin 97^0\,30'}{\sin 31^0\,34'} \cdot 100 = 189{,}39$$

$$\frac{\varphi+\chi}{2} = \frac{180^0 - 58^0\,4'}{2} = 60^0\,58'$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi-\chi}{2} = \frac{189{,}39 - 87{,}45}{189{,}39 + 87{,}45} \cdot \operatorname{tg} 60^0\,58'$$

$$\varphi = 94^0\,31'\,33'', \quad \chi = 27^0\,24'\,27''.$$

$$ab = \frac{\sin 58^0\,4'}{\sin 27^0\,24'\,27''} \cdot 87{,}45 = \frac{\sin 58^0\,4'}{\sin 90^0\,31'\,33''} \cdot 189{,}39 = 161{,}23.$$

Die wahre Länge von AB ist 392; um nun PQ zu erhalten, ist

$PQ : 100 = 392 : 161{,}23$ oder $PQ = 243{,}13$; ebenso ist
$AP : ap = 392 : 161{,}23$ oder $AP = 392 \cdot 87{,}45 : 161{,}23 = 212{,}62$.

Dasselbe gilt von den übrigen Strecken, wobei zu merken ist, daſs auch $PQ = pq = 1$ angenommen werden kann.

Die gegenseitige Lage der vier Punkte kann sehr verschieden sein; die Aufstellung der Formeln ist jedoch leicht. Man fange mit a an und wähle dazu irgend eine Strecke der Figur zur Aufstellung des Sinussatzes. Die gewählte Strecke bringe man mit x in ein Dreieck, um denselben Satz hinzuschreiben. Solches mache man zweimal und bezeichne die betreffenden Winkel in der Figur mit φ und χ. Die zweite Gleichung für diese beiden Winkel wird sich dann auch finden lassen.

In Fig. 138 ist

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{a}{BQ}=\dfrac{\sin(\gamma+\delta)}{\sin\varphi}, & \dfrac{BQ}{x}=\dfrac{\sin\beta}{\sin(\beta+\delta)} \\ \dfrac{a}{AP}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\chi}, & \dfrac{AP}{x}=\dfrac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\dfrac{\sin\beta\cdot\sin(\gamma+\delta)}{\sin(\beta+\delta)\cdot\sin\varphi}= \\ \dfrac{\sin\gamma\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\gamma)\cdot\sin\chi}.\end{array}$$

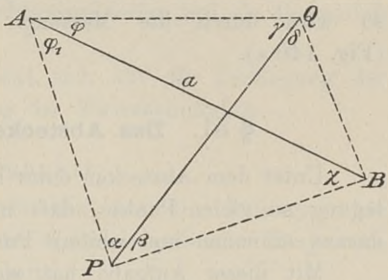
und

$$\varphi+\gamma=\chi+\beta$$

oder

$$\varphi-\chi=\beta-\gamma.$$

Fig. 138.



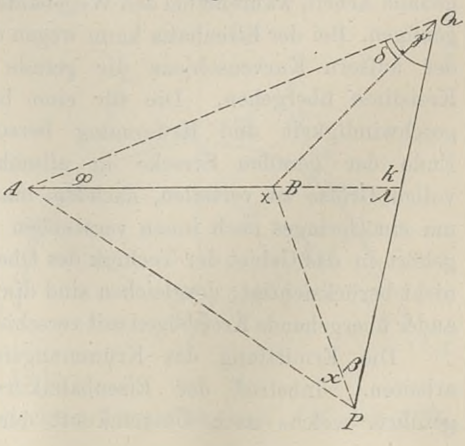
Würden wir anfangen mit $a:BP$, so würden wir etwa erhalten

$$a:BP=\sin(\alpha+\beta):\sin\varphi_1;$$
$$BP:x=\sin\delta:\sin(\beta+\delta)$$
$$a:AP=\sin(\alpha+\beta):\sin\chi;\qquad AP:x=\sin\gamma:\sin(\alpha+\gamma).$$

Die Formel wird hier einfacher, nämlich

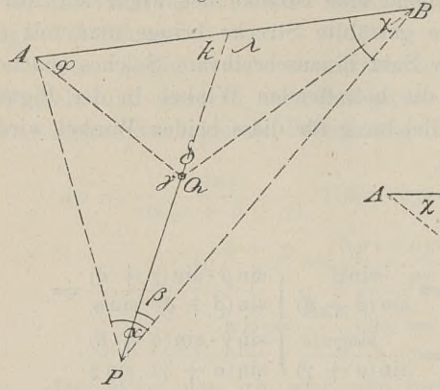
$$\frac{\sin\delta}{\sin(\beta+\delta)}\cdot\sin\chi$$
$$=\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}\cdot\sin\varphi_1;$$
$$\varphi_1+\chi=180^0-(\alpha+\beta).$$

Fig. 139.



Haben die beiden Strecken die Lage der Fig. 139 und treten bei der wiederholten Anwendung des Sinussatzes die in der Figur bezeichneten Winkel φ und χ auf, so $\lambda=\varphi+\gamma=\chi-\beta$ oder $\chi-\varphi=\beta+\gamma$.

Fig. 140.



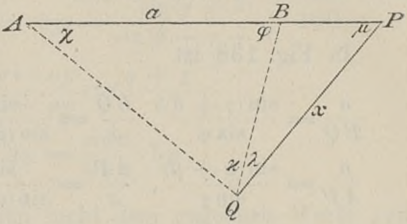
In Figur 140 ist

$$k = \gamma - \varphi = \chi + \beta,$$

also

$$\varphi + \chi = \gamma - \beta.$$

Fig. 140 a.



Wenn der Punkt P in AB oder deren Verlängerung liegt, so wird durch die Messung von k, λ, μ auch φ bekannt. (Fig. 140 a).

§ 51. Das Abstecken von Kreiskurven.

Unter dem Abstecken eines Kreisbogens versteht man die Festlegung so vieler Punkte, dafs man die Eigenschaft der Kreislinie daraus erkennen und weitere Punkte ohne Mühe einschalten kann.

Mit dieser Aufgabe hat sich der Geometer zu beschäftigen, der eine Eisenbahnlinie oder einen Weg aus einer Richtung in eine andere überführen soll. Die Sicherheit des Betriebs auf Eisenbahnen, die Überwindung der Bewegungshindernisse, die Schonung des festliegenden und rollenden Materials erfordert eine äufserst genaue Arbeit, während bei den Wegebauten häufig Näherungsmethoden genügen. Bei der Eisenbahn kann wegen der notwendigen Überhöhung der äufsern Kurvenschiene die gerade Linie nicht sofort in die Kreislinie übergehen. Die für eine bestimmte Spurweite, Fahrgeschwindigkeit und Krümmung berechnete Überhöhung ist am Ende der geraden Strecke in allmählicher Steigerung bis zur vollen Gröfse zu verteilen, nachdem man die eigentliche Kreiskurve um ein Geringes nach innen verschoben hat. Diese Übergangskurve gehört in das Gebiet der Technik des Oberbaues und ist im Folgenden nicht berücksichtigt; desgleichen sind die sog. Korbbögen, d. h. in einander übergehende Kreisbögen mit verschiedenen Radien ausgeschlossen.

Die Ermittlung des Krümmungsradius ist Sache der Vorarbeiten. Inbetreff der Eisenbahnkurven seien die Zahlen angeführt, welche nach Übereinkunft der Techniker als Grenzwerte zu betrachten sind. Danach soll der Halbmesser der Kurven bei Hauptbahnen im flachen Lande womöglich nicht unter 1100^m, im Hügellande nicht unter 600^m, bei Gebirgsbahnen nicht unter 300^m betragen. Radien unter 180^m sind unzulässig.

Diese Zahlen sind mit Rücksicht auf die Neigungsverhältnisse festgesetzt, welche entsprechend den genannten Geländeformen durchschnittlich zu 5^{mm} oder 1 : 200 bzw. zu 10^{mm} oder 1 : 100 bzw. zu 25^{mm} oder 1 : 40 angenommen sind.

Aufserdem ist für diese Grenzwerte die volle Fahrgeschwindigkeit der Schnellzüge vorausgesetzt. Für geringere Geschwindigkeiten z. B. in der Nähe der Bahnhöfe ist es bei günstigen Neigungen gestattet, schärfere Kurven einzulegen.

Wir nehmen nun an, dafs der Krümmungsradius bekannt ist und die Richtungen gegeben sind, welche durch einen Kreisbogen verbunden werden sollen. Die Richtungen treten auf als Tangenten der Kurve.

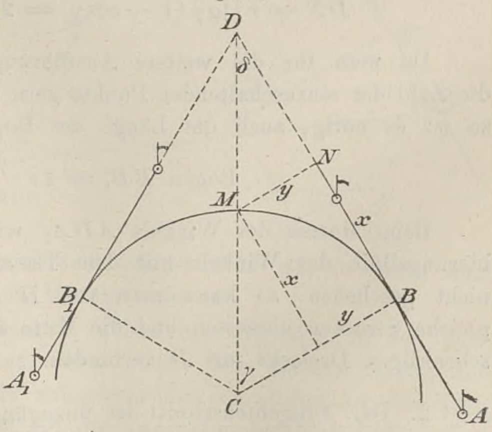
Die Kurvenabsteckung erstreckt sich auf die Festlegung der Hauptpunkte und die Einschaltung der Zwischenpunkte.

I. Festlegung der Hauptpunkte.

Unter den Hauptpunkten verstehen wir die Anfangspunkte der Kurve, also die Endpunkte der Geraden oder der Tangenten, und den Scheitel oder die Kurvenmitte.

Die zur Anwendung kommenden Sätze der Planimetrie sind: Der Berührungsradius steht senkrecht zur Tangente; die gerade Verbindungslinie des Schnittpunkts der Tangenten und des Centrum halbiert den Richtungswinkel der Tangenten und den Winkel am Centrum; die von einem Punkte an den Kreis gezogenen Tangenten sind gleich.

Fig. 141.



1. Der Tangentenschnitt ist zugänglich (Fig. 141).

Die durch Baken abgesteckten Tangenten sind AB und A_1B_1.

Man suche den Schnittpunkt D auf und messe mit dem Theodolit den Winkel $ADA_1 = 2\delta$, dann ist $\gamma = 90^0 - \delta$ und

$$1) \quad \ldots\ldots \quad DB = DB_1 = r \cdot \operatorname{tg}\gamma.$$

In der Richtung DA und DA_1 lassen sich diese berechneten Strecken von D aus mit dem Stahlbande oder der Meſslatte abmessen, um die Berührungspunkte zu erhalten.

Die Kurvenmitte M ergiebt sich aus

$$DM = DC - MC = \frac{r}{\cos\gamma} - r = r \cdot \frac{1 - \cos\gamma}{\cos\gamma}$$

$$DM = 2r \frac{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}{\cos\gamma} = r \frac{2 \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\gamma \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$2) \quad \ldots\ldots \quad DM = r \cdot \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Denken wir das Lot MN auf die Tangente AD gefällt, so ist

$$BN = x = r \cdot \sin\gamma$$

$$MN = y = r - r \cdot \cos\gamma = 2r \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

Man miſst also von B aus die Abscisse x ab und errichtet im Endpunkte die Ordinate y. Ist die Strecke von D aus nach N kleiner und vielleicht auch bequemer meſsbar als BN, so berechnet man

$$DN = DB - x = r \cdot \operatorname{tg}\gamma - r \cdot \sin\gamma$$

$$DN = r \cdot \operatorname{tg}\gamma\,(1 - \cos\gamma) = 2r \operatorname{tg}\gamma \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

Da man für die weitere Ausführung der Kurvenabsteckung die Zahl der einzuschaltenden Punkte gern von vornherein bestimmt, so ist es nötig, auch die Länge des Bogens zu kennen. Es ist

$$\text{Bogen } BB_1 = 2r \cdot \frac{\gamma}{\varrho}.$$

Beim Messen des Winkels ADA_1 wird man bereits die Halbierungslinie des Winkels mit dem Theodolit abstecken. Ist das nicht geschehen, so kann man von D aus auf den Tangenten gleiche Strecken abmessen und die Mitte der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks mit D verbinden.

2. Der Tangentenschnitt ist unzugänglich (Fig. 142).

a) Dieser Fall kann eintreten, wenn auf der konvexen Seite der Kurve ein steiler Bergabhang oder dichter Wald liegt, oder wenn der Schnittpunkt ins Wasser oder in Sumpf fällt, oder wenn die Meſsarbeiten wegen zu groſser Entfernung des Schnittpunkts zu umständlich sind.

Man wähle eine beliebige Gerade, welche die beiden Tangenten auf günstigem Boden in den Punkten P und Q schneidet, messe PQ und die Winkel k und λ, wodurch

$$2\delta = k + \lambda - 180^0$$

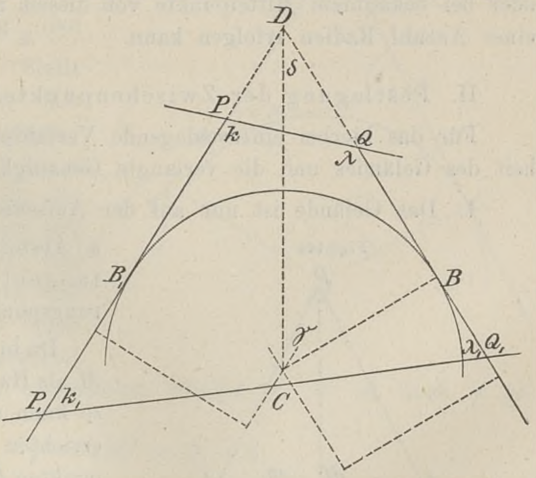
wird. Der Winkel γ ist damit bekannt, und die obigen Formeln gelten auch hier. Da man von P und Q aus die Berührungspunkte aufsuchen muſs, so hat man

$$DP = \frac{\sin\lambda}{\sin 2\delta} \cdot PQ \text{ und } DQ = \frac{\sin\varkappa}{\sin 2\delta} \cdot PQ$$

von der ganzen Tangente abzuziehen.

Erfordert das Gelände die Wahl von $P_1 Q_1$, so wird an der Rechnung wesentlich nichts geändert. Wenn PQ oder $P_1 Q_1$ nicht unmittelbar zu messen sind, so muſs man irgendwo einen passend gelegenen Punkt S wählen und genügend Stücke im Dreieck PQS messen.

Fig. 142.

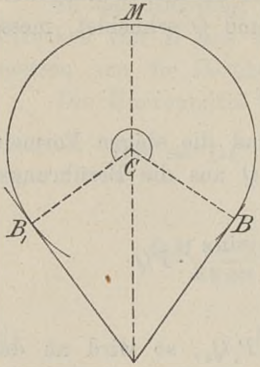


b) Ist das Gelände auf der konvexen Seite der Kurve überhaupt nicht zugänglich, weil die Bahnlinie in der Kurve den Hang eines Berges anschneiden wird, während auf der konkaven Seite offenes Feld ist, so suche man die Berührungspunkte vom Mittelpunkte aus.

Den Punkt C findet man, indem man irgendwo in den Tangenten die Lote errichtet, diese gleich dem Radius macht und durch ihre Endpunkte die entsprechenden Parallelen zu den Tangenten zieht. Die von C auf die Tangenten gefällten Lote liefern die Berührungspunkte, wodurch der Centriwinkel abgesteckt und meſsbar wird.

In beiden unter 1. und 2. besprochenen Fällen kann es vorkommen, dafs (Fig. 143) die Tangenten sich nicht auf der erhabenen Seite der Kurve schneiden, dafs also der Bogen gröfser als der Halbkreis wird.

Fig. 143.



Die Messungen und Berechnungen bleiben für die Hauptpunkte dieselben, für die Festlegung der Zwischenpunkte ist eins der spätern Verfahren zu wählen.

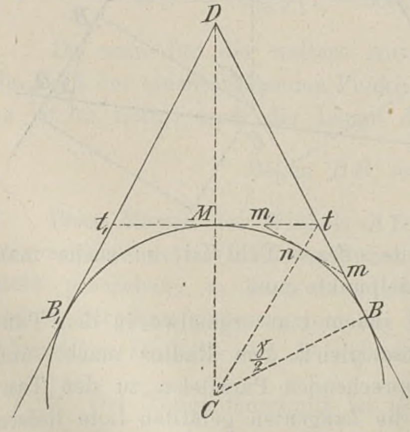
Laufen die Tangenten in derselben Richtung, so ist die Gerade der Berührungspunkte Durchmesser der Kurve, diese selbst ein Halbkreis; aber wo liegen die Punkte B und B_1? Die obigen Formeln sind nicht anwendbar. Man mufs sich für irgend einen Punkt der Tangente als Anfangspunkt der Kurve entscheiden, worauf in ebenem und offenem Gelände die Absteckung mit dem Winkelspiegel oder bei bekanntem Mittelpunkte von diesem aus durch Abmessung einer Anzahl Radien erfolgen kann.

II. Festlegung der Zwischenpunkte.

Für das hierbei einzuschlagende Verfahren ist die Beschaffenheit des Geländes und die verlangte Genauigkeit mafsgebend.

1. Das Gelände ist nur auf der Aufsenseite der Kurve offen.

Fig. 144.



a) Absteckung der Zwischentangenten und ihrer Berührungspunkte.

Da in Fig. 144 der Scheitel M als Hauptpunkt bekannt ist, so kann man zu DM das Lot errichten bis zu den Schnittpunkten t und t_1 mit den ursprünglichen Tangenten.

Oder man hat

$$Bt = B_1 t_1 = tM = r \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

Die Punkte t und t_1 werden durch Abmessung gefunden, es wird tt_1 abgesteckt und die Tangenten tB und tM treten an die Stelle der ersten Tangenten.

Der Punkt n ergiebt sich wie früher. Es ist

$$nt = \frac{r}{\cos\frac{\gamma}{2}} - r = 2\,r \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{4}$$

$$x_n = r \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$$

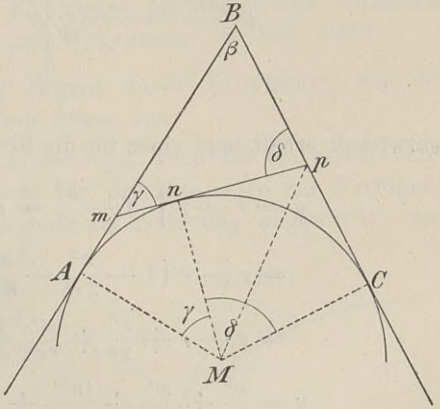
$$y_n = 2\,r \cdot \sin^2\frac{\gamma}{4}$$

$$\text{Bogen } BM = \frac{\gamma}{\varrho} \cdot r.$$

Dieses Verfahren läſst sich in gleicher Weise fortsetzen.

Gestattet das Gelände nicht die Einlegung von Zwischentangenten, welche Fig. 144 im Berührungspunkte halbiert werden, so kann man andere Tangenten der Örtlichkeit anpassen. Der Punkt p (Fig. 145) ist gewählt, und es soll pm eine Tangente der Kurve werden. Miſst man Cp genau ab, so kann man aus $Cp = r \cdot \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}$ den Winkel δ berechnen. Stellt sich nachher heraus, daſs der Punkt p nicht günstig liegt, so hat man doch schon einen Anhaltspunkt für die Lage von p. Man kann sich auch eine Zeichnung anfertigen, p hineinlegen und danach den Winkel δ ungefähr messen. Entscheidet man sich für einen bestimmten Winkel δ, so ist auch γ gegeben durch

Fig. 145.



$$\gamma = 180^0 - \beta - \delta.$$

Es ist nun
$$Am = mn = r \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

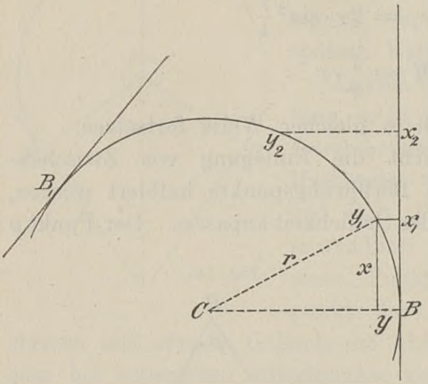
$$Cp = pn = r \cdot \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\cdot$$

Da $AB = CB = r \cdot \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}$ bekannt ist, so findet man durch Subtraktion auch Bm und Bp. Die Winkel bei A, n und C sind rechte Winkel, deshalb sind auch die Winkel im Dreieck Bmp gegeben, und es läſst sich zur Probe die Strecke $mp = mn + np$ messen und aus dem Dreiecke Bmp doppelt berechnen.

b) Die Methode der rechtwinkligen Koordinaten.

Den Berührungspunkt B nehmen wir als Koordinaten-Nullpunkt, die Richtung BD als Abscisse und die senkrechten Abstände hierzu als Ordinaten. Die Koordinaten werden von dem Punkte B_1 ebenso gelten, da es sich um absolute Mafse handelt. Die zu einander gehörigen Koordinaten seien $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ u. s. w.; die Abscissen werden in passender Länge angenommen und abgemessen, die Ordinaten aus denselben und dem Radius r berechnet, wie folgt (Fig. 146).

Fig. 146.



$$y = r - \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$= r - \sqrt{(r + x)(r - x)}.$$

Nach der binomischen Reihe entwickelt erhält man einen für die Rechnung bequemeren Ausdruck:

$$y = r - r\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} = r - r\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= r - r\left(1 - \frac{x^2}{2r^2} - \frac{x^4}{8r^4} - \frac{x^6}{16r^6} - \cdots\right)$$

$$= r - r + \frac{x^2}{2r} + \frac{x^4}{8r^3} + \frac{x^6}{16r^5} + \cdots$$

$$y = \frac{x^2}{2r} + \frac{x^4}{8r^3} + \frac{x^6}{16r^5} + \cdots$$

In den meisten Fällen genügt das erste Glied

$$y = \frac{x^2}{2r};$$

denn z. B. für $x = 50^{\text{m}}$ und $r = 500^{\text{m}}$ ist $y = \frac{2500}{1000} = 2{,}5^{\text{m}}$. Dieser Wert ist zu klein und zwar zunächst um $\frac{50^4}{8 \cdot 500^3} = 6^{\text{mm}}$. Bei $x = 25^{\text{m}}$ und $r = 100^{\text{m}}$ würde man das zweite Glied hinzunehmen, obgleich es auch nur 5^{cm} ausmacht.

Die Abscissen von B aus seien x_1; $x_2 = 2x_1$; $x_3 = 3x_1$, so ist $y_1 = \frac{x_1^{\,2}}{2r}$; $y_2 = \frac{x_2^{\,2}}{2r} = \frac{(2x_1)^2}{2r} = 4y_1$; $y_3 = 9y_1$.

Für die Praxis empfiehlt sich die Benutzung von Tafeln. Jordan: Kreiskoordinaten für 200 Radien. 1881.

Da ein Fehler in den Abscissen sich fortpflanzt, so ist y_1 möglichst genau zu ermitteln.

In vorstehender Betrachtung sind die Unterschiede der Abscissen einander gleich, folglich haben die nach einander folgenden Bogenstücke verschiedene Längen. Will man zwischen den Endpunkten der Ordinaten gleiche Bogenstücke haben, so wird man den Bogen $BM = \frac{\gamma}{\varrho} \cdot r$ in Fig. 141, also auch γ je nach der Gröfse des Bogens in eine geringere oder gröfsere Anzahl gleicher Teile zerlegen. Man berechnet

$$x_1 = r \cdot \sin \frac{\gamma}{n}; \quad x_2 = r \cdot \sin \frac{2\gamma}{n}; \quad x_3 = r \cdot \sin \frac{3\gamma}{n}$$

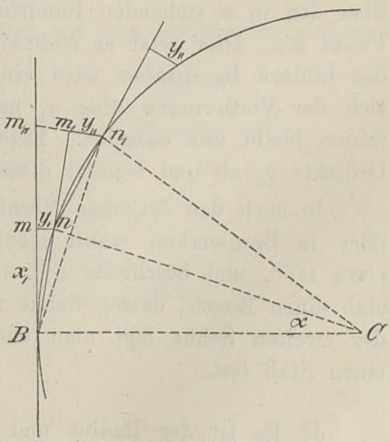
$$y_1 = r \cdot \sin^2 \left(\frac{\gamma}{2n}\right); \quad y_2 = r \cdot \sin^2 \left(\frac{\gamma}{n}\right); \quad y_3 = r \cdot \sin^2 \left(\frac{3\gamma}{2n}\right).$$

Diese Stücke werden abgemessen. Auf grund dieser Formeln sind Tafeln hergestellt von Kröhnke: Handbuch zum Abstecken von Kurven auf Eisenbahn- und Wegelinien. 6. Aufl. 1869.

c) Die Absteckung des Bogens durch Einrücken von der Tangente bzw. der verlängerten Sehne aus.

Dieses Verfahren findet Anwendung, wenn nur ein beschränkter Raum in der Nähe der Kurve für die Messungen zur Verfügung steht. Es wird im Notfalle und als Näherung angewandt, weil durch die Fortpflanzung und Anhäufung der Fehler die Ergebnisse weniger genau sind. Die Arbeit selbst geht jedoch rasch von statten.

Fig. 147.



Der von den Berührungsradien der ersten Tangenten gebildete Winkel am Centrum ist bekannt; man teilt ihn in eine passende Anzahl gleicher Teile, jeder sei α. Es ist nach Fig. 141 und 147

$$x_1 = Bm = r \cdot \sin \alpha$$

$$y_1 = mn = 2r \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Legt man von n aus die Sehne $nn_1 = Bn$ in den Kreis, verlängert Bn bis m_1, so dafs $m_1 n_1 \perp Bm_1$ ist, so ist Winkel $m_1 n n_1 = \alpha$ als Aufsenwinkel an der

Spitze des gleichschenkligen Dreiecks Bnn_1 mit den Winkeln $\frac{\alpha}{2}$ an der Grundlinie.

Setzt man nun voraus, dafs x_1 im Verhältnis zum Radius klein genug angenommen oder der Bogen sehr flach ist, so kann man an Stelle der Abscisse den Bogen bzw. die Sehne setzen. Es ist nach dem Satze von der Gleichheit der Peripheriewinkel über gleichen Bogen

$$y_1 = x_1 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$y_2 = Bm_1 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2x_1 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2y_1 .$$

Ist z. B. $x_1 = 20^m$ und $r = 300^m$, so ist $y_1 = 0{,}67^m$, $y_2 = 1{,}33^m$.

Nachdem die Theorie gezeigt hat, dafs $y_2 = 2y_1$ für die gemachten Voraussetzungen ist, kann man y_1 nach der Methode der Koordinaten berechnen. Es ist $y_1 = \frac{x_1^2}{2r} + \frac{x_1^4}{8r^3}$. Diesen Ausdruck berechnet man auf Centimeter genau, dann ist die Arbeit der Absteckung folgende.

Man wählt als Abscisse etwa $Bm = 20^m$; für $r = 300^m$ ist $y_1 = 0{,}67^m$ und $y_2 = 1{,}33^m$. Man spannt das Stahlband von B in der Tangente aus, rückt vom vordern Bandstab um $0{,}67^m$ senkrecht ein und findet n. Hier steckt man vorläufig einen Zähler ein und zieht das Band weiter. Der Vordermann richtet sich über den in n stehenden Bandstab nach B ein und erhält so den Punkt m_1. Hier setzt er rechtwinklig $1{,}33^m$ ab. An der Stelle des hintern Bandstabes wird ein Tagespfahl eingeschlagen, damit sich der Vordermann über n_1 nach n einrichten kann. Das Verfahren bleibt nun dasselbe. Einen Stock längt man auf die zweite Ordinate y_2 ab und benutzt diesen zum Einrücken.

Je nach den örtlichen Verhältnissen z. B. in dichten Wäldern oder in Bergwerken wählt man die erste Abscisse noch kleiner, etwa 10^m, und beschreibt mit dem Bande um den hintern Bandstab einen Bogen, dessen Sehne man gleich y_1 macht. Die Länge der zweiten Sehne legt man wieder auf einer Latte oder durch einen Stab fest.

d) Es ist der Radius und ein Punkt P der Kurve gegeben, aufserdem eine Gerade MN in der Nähe von P abgesteckt, die von dem Kreisbogen berührt werden kann und soll; wie findet man den Berührungspunkt? (Fig. 148).

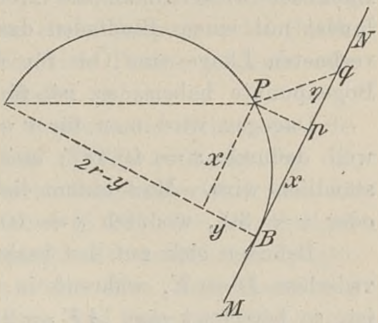
Man fälle von P das Lot auf MN, messe $Pp = y$, so ist als Hypotenusenhöhe

$$x^2 = y \cdot (2r - y),$$

welche Strecke x von p aus nach M hin abzumessen ist, um B zu erhalten.

Ist Pp zu lang oder zwischen P und MN in der Richtung des Lotes ein Hindernis, so wähle man in MN einen beliebigen Punkt q, messe den Winkel η und die Strecke Pq und berechne

Fig. 148.



$$qp = Pp \cdot \cos \eta$$

und $Pp = Pq \cdot \sin \eta = y$;

daraus findet man x und qB.

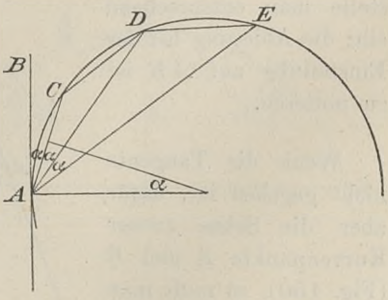
2. Das Gelände ist nur auf der Innenseite der Kurve offen.

a) Abstecken der Kurve mit dem Theodolit.

Entweder sind die einzulegenden Peripheriewinkel von vorneherein gewählt und haben eine runde Gröſse, etwa 1^0 oder 2^0, oder man hat den einzulegenden Sehnen eine konstante Gröſse, etwa 15^m oder 20^m Länge gegeben.

Im ersten Falle berechnet man aus dem Peripheriewinkel und Radius die Sehne, im zweiten aus Sehne und Radius den Winkel. Beides geschieht nach der Formel

Fig. 149.



$$\sin \alpha = \frac{s}{2r}.$$

In beiden Fällen stellt man den Theodolit in A auf und bringt die Zielachse in die Richtung der Tangente AB (Fig. 149). Die Gröſse des zu wählenden Winkels, ob 1^0 oder 2^0 oder 3^0, hängt vom Radius und dem Gelände ab, ferner von der Zahl der festzulegenden Punkte und dem zur Verfügung stehenden Längenmaſse. Man wird die Sehne nicht gern länger werden lassen, als das Meſsband oder die Meſsschnur ist, damit man um den bereits festgelegten Bogenpunkt einen Kreis beschreiben kann, bis er die Visierlinie schneidet. Die Sehnen sind alle gleich lang, da sie zu gleichen Bogen desselben Kreises gehören.

Hat man eine Meſsschnur von 30^{m} Länge und ist $r = 400^{\mathrm{m}}$, so kann man $\alpha = 2^0$ setzen; es ist dann

$$s = 2 \cdot 400 \cdot \sin 2^0 = 27{,}92^{\mathrm{m}}.$$

Entweder wickelt man die $2{,}08^{\mathrm{m}}$ um den einen Stab oder man bindet mit einem Bindfaden das Ende zurück, so daſs bei der berechneten Länge eine Öse für den Stab bleibt. Will man mehr Bogenpunkte haben, so ist für $\alpha = 1^0$ die Sehne $s = 13{,}96^{\mathrm{m}}$.

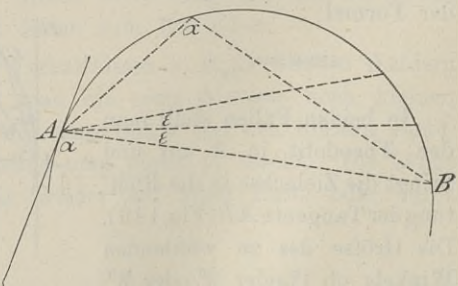
Dagegen wird man für $r = 580^{\mathrm{m}}$ nicht gern $\alpha = 2^0$ wählen, weil dadurch $s = 40{,}48^{\mathrm{m}}$ und das Eintragen dieser Sehne umständlich wird. Man nimmt lieber $\alpha = 1^0$, wodurch $s = 20{,}25^{\mathrm{m}}$ oder $\alpha = 30'$, wodurch $s = 10{,}12^{\mathrm{m}}$ wird.

Befinden sich auf der beabsichtigten Kurve Hindernisse, etwa zwischen $D = E$, während in der Richtung AE günstiges Feld ist, so berechnet man $AE = 2r \cdot \sin 3\alpha$ besonders und miſst diese Strecke von A aus in der Richtung der Ziellinie ab.

Ist die Sehne von konstanter Länge, etwa 20^{m} lang, so gehört zu jeder Sehne der gleiche Peripheriewinkel α, den man aus $\sin \alpha = \frac{20}{2r}$ berechnet. Um diesen Winkel dreht man die Ziellinie aus der Tangente und bringt den vordern Bandstab stets von neuem in die Ziellinie hinein.

Die Anfertigung einer Tabelle ist in jedem Falle leicht und die Arbeit rasch ausführbar. Die Mikrometerschraube der Alhidade stelle man entsprechend ein; die Ablesung bei der Einstellung auf AB ist zu notieren.

Fig. 150.



Wenn die Tangente nicht gegeben ist, dafür aber die Sehne zweier Kurvenpunkte A und B (Fig. 150), so muſs man zunächst AB messen und aus ihr und dem bekannten Radius den Winkel α aus

$$\sin \alpha = \frac{AB}{2r}$$

berechnen. Man kann nun mit Hilfe von α oder $180^0 - \alpha$ die Tangente in A festlegen und wie oben verfahren. Man kann aber auch sofort von AB als Grundrichtung ausgehen und die gewählten oder berechneten Winkel ε anlegen.

b) Abstecken der Kurve mit wanderndem Instrument.

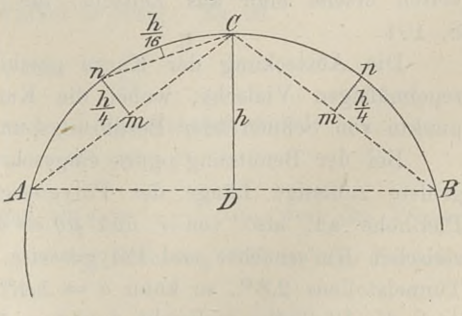
Der einfachste Fall dieser Art von Kurvenabsteckung ist die Festlegung eines Halbkreises über gegebenem Durchmesser. Man benutzt dazu den Winkelspiegel für 90^0 oder das gleichschenklig rechtwinklige Prisma. Dicht bei dem einen Endpunkte des Durchmessers beginnend kann man beliebig viele Punkte festlegen oder mit dem Absatze den Kreis in den Boden ziehen.

Wenn nicht der Durchmesser, sondern die Sehne der Berührungspunkte gegeben ist, wie etwa in Fig. 150 oder Fig. 53, so lassen sich die Scheitel der konstanten Peripheriewinkel über der Sehne entweder mit der Prismentrommel (§ 28) oder dem Spiegelsextant auffinden. Auch der Winkelspiegel mit verstellbaren Spiegelebenen läſst sich verwenden. Man stellt diese Instrumente auf den Winkel ein, der von der Tangente und Sehne gebildet wird. Beim Ablegen des Winkels muſs je eine einzige Visur genügen, um sie bei der Vor- und Rückwärtsbewegung leicht festhalten zu können. Sind Visuren nach jedem Signale nötig, so wird die Arbeit durch die häufige Änderung des Standes und damit durch den Verlust der ersten Visur sehr mühsam.

c) Die Viertelsmethode.

Ist in Fig. 151 die Sehne $AB = s$ im Felde gegeben und soll über derselben ein sehr f l a c h e r Kreisbogen mit dem bekannten Radius r abgesteckt werden, so kann man die Pfeilhöhe h des Bogens finden. Es ist als Hypotenusenhöhe

Fig. 151.



$$BD^2 = \frac{s^2}{4} = h\,(2r - h)$$

$$r = \frac{s^2}{8h} + \frac{h}{2}.$$

oder da unter der gemachten Voraussetzung $\frac{h}{2}$ vernachlässigt werden kann,

$$h = \frac{s^2}{8r}.$$

Für die Pfeilhöhe mn ist aus demselben Grunde

$$mn = \frac{BC^2}{8r} = \frac{BD^2}{8r} = \frac{s^2}{32r} = \frac{1}{4}h.$$

Ebenso ist, wenn man wieder $Cn = Cm$ setzt, die Höhe des Bogens Cn ein Viertel von mn, also $\frac{h}{16}$ u. s. w.

Man halbiere also AB, errichte in D das Lot und mache es gleich h; verbinde C mit A und B und errichte in deren Mitten Lote, welche $\frac{1}{4}h$ sind u. s. w.

Ist der Punkt C nicht Scheitel des Bogens, sondern ein beliebiger Punkt, durch welchen die Kurve gehen soll, so kann man sich r berechnen. Sind die Seiten des Dreiecks ABC meſsbar und a, b, c gefunden, so ist

$$r = \frac{a \cdot b \cdot c}{4\,ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}}.$$

3. Der Raum ist nur auf wenige Meter zu beiden Seiten der Kurvenachse frei.

Dieser Fall tritt bei der Absteckung von Tunnelkurven ein oder bei Bahnen, die an einem hohen und steilen Abhange in einem Einschnitte um einen Berg herumgeführt werden sollen. Die Anfangsrichtung, also die Tangente und der Radius der Kurve sind aus den Vorarbeiten bekannt. Die bedeutenden Kosten der Anlage verlangen eine äuſserst genaue Absteckung der Achse des Tunnels, zumal wenn von beiden Enden die Richtstollen vorgetrieben werden.

Die Schwierigkeit und geforderte Genauigkeit dieser Art Arbeiten ersehe man aus Zeitschr. für Vermessungskunde. 1880. S. 101.

Die Absteckung der Kurve geschieht durch Einlegung eines regelmäſsigen Vielecks, wobei die Kurvenpunkte entweder Endpunkte von Sehnen oder Berührungspunkte von Tangenten werden.

Bei der Benutzung eines eingeschriebenen Vielecks hängt die gröſste zulässige Länge der Polygonseite vom Radius und der Pfeilhöhe ab, also von r und $pq = a$, dem gröſsten Abstande zwischen Kurvenachse und Polygonseite. Ist z. B. die Weite des Tunnelstollens $2{,}8^{\text{m}}$, so kann $a = 1{,}4^{\text{m}}$ betragen. Man wird jedoch die Pfeilhöhe vielleicht nur $a = 1^{\text{m}}$ setzen, um nicht durch etwaige Vorsprünge der konvexen Stollenwand behindert zu werden. Es ist also aus r und a die Sehne s, und aus s und r der Winkel α zu berechnen.

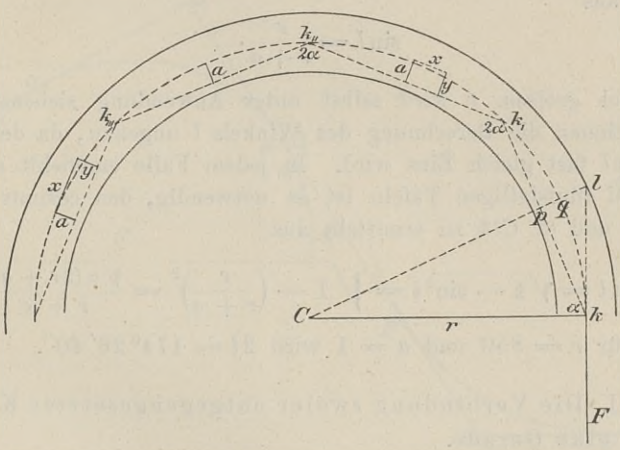
Nach Fig. 152 ist für $kk_1 = s$

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = r^2 - (r - a)^2$$

$$s = 2\sqrt{a(2r - a)}.$$

Ist $r = 850$, $a = 1{,}4$, so ist $s = 97{,}54$; für $a = 1$ ist $s = 82{,}44$. Die Absteckung der Kurve erfordert einen guten Theodolit, mit dem man die einzelnen Sehnen in den Kreis hineinlegt. Die Anfangsrichtung KF ist mit besonderer Sorgfalt be-

Fig. 152.



stimmt und derart festgelegt, daſs man stets wieder darauf zurückgreifen und von dort aus die Absteckung kontrollieren kann.

Dazu hat man den Winkel α nötig. Es ist

$$\cos\alpha = \frac{s}{2r}$$

und für $r = 850$ und $a = 1$ ist der Polygonwinkel

$$2\alpha = 174^0\ 26'\ 26''.$$

Man wende nicht die Formel $\sin\alpha = \dfrac{r-a}{r}$ an, weil der Winkel zu nahe an 90^0 kommt. Aus der Richtung kF ist das Fernrohr zuerst um $90^0 + \alpha$ zu drehen.

Die Zwischenpunkte zwischen k und q u. s. w. legt man nach der Koordinatenmethode fest. Man berechnet das kleine Stück, welches von a für den jedesmaligen Punkt abzuziehen ist, um den Kurvenpunkt zu erhalten.

Statt des Sehnenpolygons kann man ein Vieleck um den Kreis legen und von der Tangente einrücken. Dieses Verfahren hat jedoch gegen das beschriebene den Nachteil, dafs die Brechpunkte an der Stollenwand liegen, das Instrument schwieriger aufzustellen ist und die tief liegenden Visuren in Tunnels leicht durch die Stützen der Gerüste und durch Schutthaufen unmöglich sind, während beim eingeschriebenen Vieleck die Stationspunkte in die Mittellinie des Stollens fallen. Bei Anwendung des Tangentenvielecks würde die erste Aufstellung des Theodolit in k, die zweite in l u. s. w. erfolgen. Der halbe Polygonwinkel wird sich ergeben aus

$$\sin l = \frac{r}{r + a}.$$

Bei grofsem r wird selbst unter Anwendung siebenstelliger Logarithmen die Berechnung des Winkels l ungenau, da der Wert von $\sin l$ fast gleich Eins wird. In jedem Falle empfiehlt es sich, und bei fünfstelligen Tafeln ist es notwendig, den cosinus einzuführen und $\sphericalangle\, Clk$ zu ermitteln aus

$$\cos l = \sqrt{1 - \sin^2 l} = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{r + a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a\,(2r + a)}}{r + a}.$$

Für $r = 850$ und $a = 1$ wird $2l = 174^0\,26'\,40''$.

III. Die Verbindung zweier entgegengesetzter Kurven durch eine Gerade.

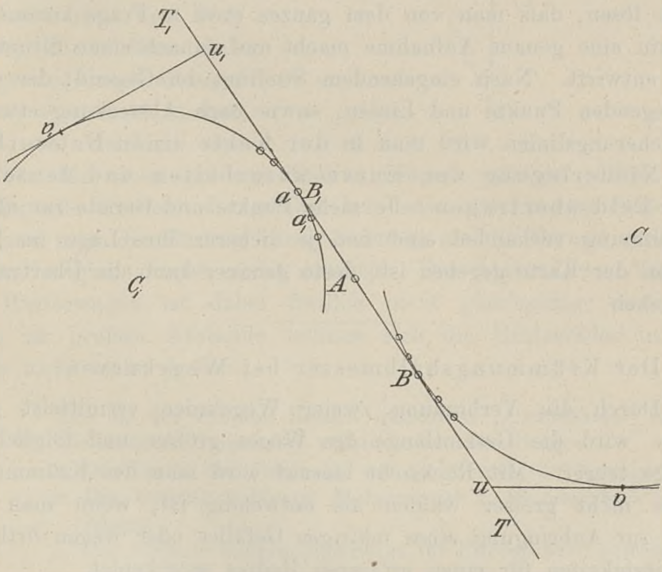
In Gebirgsgegenden wird es häufig vorkommen, dafs eine Kurve in eine entgegengesetzt liegende überzuführen ist; die Verbindung beider Kurven ist durch eine gerade Linie herzustellen, welche als gemeinschaftliche Tangente der beiden Bögen auftritt. Die Länge dieser Tangente mufs bei Eisenbahnlinien ohne die Übergangskurven mindestens 50^m betragen, bei Strafsen und Wegen mindestens der gröfsten Länge der bespannten und beladenen Fuhrwerke gleich sein. Sind die Kreisbögen bereits abgesteckt, so ist demnach die Aufgabe zu lösen, an zwei Kreise die gemeinsame und zwar die innere Tangente zu legen.

Wären die Mittelpunkte der Kurven gegeben, so könnte man die Centrale abstecken und im Verhältnis der Radien teilen; man erhielte dadurch den inneren Ähnlichkeitspunkt, von dem aus man die Tangente an einen der Kreise legen könnte.

In Gegenden, welche derartige Kurven notwendig machen, ist die Absteckung der Centrale jedoch meist unmöglich; man mufs daher die Berührungspunkte durch Probieren aufsuchen. Im allgemeinen wird bei einigermafsen ebenem und offenem Gelände folgendes Verfahren zum Ziele führen.

An den Stellen, an welchen voraussichtlich die Berührungspunkte liegen werden, bezeichnet man in kurzen Abständen von wenigen Metern eine grofse Anzahl Kurvenpunkte durch Baken (Fig. 153), stellt sich aufserhalb der Kurve C etwa in der

Fig. 153.



Richtung aa_1 auf und rückt langsam gegen die Kurve hin, bis die äufsersten Baken beider Bögen sich decken und nur zwei Baken mit dem Auge in einer Geraden liegen. Diese beiden Baken merkt man sich und zur Prüfung steckt man in ihrer Nähe neue Baken ein, um das Verfahren von beiden Kurven aus zu wiederholen; es wird mit genügender Genauigkeit schliefslich TT_1 die gesuchte Tangente werden.

Zur weiteren Prüfung legt man an beide Kurven zwei Tangenten, von denen TT_1 in den Punkten u und u_1 geschnitten wird. Man mifst die Längen uv und u_1v_1, ebenso uB und u_1B_1 und vergleicht die entsprechenden Strecken. Die etwaigen kleinen Unterschiede werden durch Verlegung der Berührungspunkte ausgeglichen.

Bei hinreichend ebenem Gelände und gröſserer Entfernung läſst sich mit dem Prismenkreuze ein Punkt A in der Linie der äuſsersten Baken einschalten, der auf seine richtige Lage durch näher an einander gesteckte Baken ebenso wie vorhin geprüft wird. Nötigenfalls kann letzteres, sowie das Verfahren überhaupt, auch mit einem Theodolit geschehen, mit dem man ein gröſseres Feld rechts und links deutlicher übersehen kann.

Viele der vorstehend angeführten Aufgaben lassen sich dadurch lösen, daſs man von dem ganzen etwa in Frage kommenden Terrain eine genaue Aufnahme macht und danach einen Situationsplan entwirft. Nach eingehendem Studium der Gegend, der darin festliegenden Punkte und Linien, sowie nach Absteckung etwaiger Versicherungslinien wird man in der Karte einen Entwurf für die Niederlegung der Kurve ausarbeiten und denselben aufs Feld übertragen. Je mehr Punkte und Gerade zur nähern Bestimmung vorhanden sind und je sicherer ihre Lage im Felde und in der Karte gegeben ist, desto genauer kann die Übertragung geschehen.

Der Krümmungshalbmesser bei Wegekurven.

Durch die Verbindung zweier Wegelinien vermittelst einer Kurve wird die Gesamtlänge des Weges gröſser und folglich die Anlage teurer. Mit Rücksicht hierauf wird man den Krümmungsradius nicht gröſser wählen als notwendig ist, wenn man sich nicht zur Anbringung eines mäſsigen Gefälles oder wegen örtlicher Schwierigkeiten für einen gröſseren Radius entscheidet.

Die Länge des Krümmungsradius hängt ab von der Breite des Weges und der Länge des beladenen Fuhrwerks, wobei die Bespannung wegen der vorteilhaftesten Zugrichtung mit einzurechnen ist. Die Breite des Weges sei $AD = w$, die Länge des Fuhrwerks $AE = l$, so ist für den Radius der Kurvenachse (Fig. 154)

$$CB^2 = CA^2 - AB^2$$

$$r^2 = \left(r + \frac{w}{2}\right)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = r^2 + rw + \frac{w^2}{4} - \frac{l^2}{4}$$

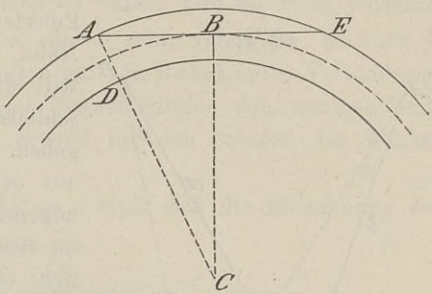
$$r = \frac{l^2}{4w} - \frac{w}{4}.$$

Da sich $\frac{w}{4}$ meist vernachlässigen läſst, so ist der kleinste zulässige Radius

$$r = \frac{l^2}{4w}.$$

Aus dieser Formel ergiebt sich, daſs man zu einem möglichst kleinen Radius gelangt, wenn man in der Kurve den Weg breiter macht. Nimmt man als Länge einer Langholzfuhre mit Bespannung 30^m an, so erfordert ein 4^m breiter Weg einen Krümmungshalbmesser von $56{,}25^m$, ein 5^m breiter Weg $r = 45^m$.

Fig. 154.



Macht man den Weg breiter, so erhöhen sich Anlage- und Unterhaltungskosten, aber nicht in dem Maſse, in welchem sich dieselben für einen gröſsern Radius steigern würden. Für ganz frei liegende Kurven oder solche, bei denen die konvexe Seite frei ist, kann man den Radius kürzer nehmen, als die Formel verlangt, da das Langholz hinten nicht anstöſst. Der Abstand von Vorder- und Hinterwagen ist dabei freilich nicht gleichgiltig; denn bei einem zu groſsen Abstande können sich die Hinterräder in der Kurve nicht mehr drehen.

Die in der Provinz Hessen geltenden „Grundsätze" lauten für die mehrere Gemeinden verbindenden Landwege:

a. Die Breite der Fahrbahn soll nicht unter 6^m betragen.
b. Die höchste zulässige Steigung ist 1 : 16 oder 6,25 % der Länge.
c. Der kleinste Krümmungsradius für Kurven wird gewöhnlich zu $25-30^m$ angenommen und nur in Ausnahmefällen bis auf 20^m unter entsprechender Verbreiterung der Fahrbahn ermäſsigt.

Bei Wirtschaftswegen ist das Maximum der Steigung 10 % der Länge.

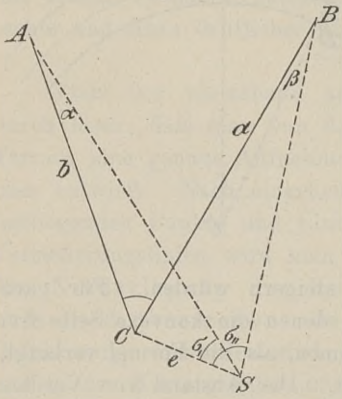
§ 52. Die mittelbare Winkelmessung.
Scheitel- und Zielfehler.

Ist der Scheitel C eines zu messenden Winkels ACB, also das Centrum der Station unzugänglich, so muſs man in der Nähe einen Punkt S suchen, von dem aus nach C, A und B visiert werden kann. Es findet dann eine excentrische Winkelmessung statt, und die Berechnung des Winkels C aus den anderweit gemessenen Winkeln und Strecken nennt man Centrierung des

Winkels oder Reduzierung des Winkels auf den Scheitel oder auf das Centrum der Station.

Diese Aufgabe ist bei der Festlegung von Dreiecksnetzen oft zu lösen. Man ist z. B. mit einer Kette von Dreiecken bis zu den Punkten A und B (Fig. 155) in der Nähe eines Dorfes gekommen und will die Kirchturmspitze C mit einschliefsen, um von da weiter zu gehen. Die Seiten AC und BC sind aus den benachbarten Dreiecken genügend bekannt, die Winkelmessung im Scheitet C ist jedoch nicht möglich; es läfst sich auch der Theodolit nicht lotrecht unter der Turmspitze aufstellen. Man stellt ihn deshalb auf der steinernen Bank eines Turmfensters auf, von wo man die anzuzielenden Punkte sehen kann.

Fig. 155.



Ein anderes Beispiel bietet der trigonometrische Punkt Rauenberg, 8^{km} südlich von Berlin; es ist dies der Ausgangspunkt für die Koordinaten der preufsischen Landesaufnahme. Der daselbst im Jahre 1859 errichtete Sandsteinpfeiler wurde 1884 mit einem Leuchtbolzen versehen. Dieser Punkt erwies sich jedoch im folgenden Jahre zur Bestimmung der Polhöhe und des Azimuths nicht geeignet, weshalb man in der Nähe zwei Hilfspfeiler zur Aufnahme der Instrumente aufstellte. Man mufste nun die Lage des Centrums eines jeden Pfeilers in bezug auf den Leuchtbolzen genau bestimmen, um auf den letztern die gemessenen Winkel zu reduzieren.

Es kann ferner vorkommen, dafs ein früher festgelegter Winkelpunkt gerade zur Zeit der Messung unzugänglich ist.

Endlich kann der Scheitel des Winkels zugänglich und auch zur Aufstellung des Theodolit geeignet sein. Man will nun absichtlich den Winkel nicht centrisch messen, um ganz unbefangen bei der Arbeit zu sein. Sind zwei Winkel eines Dreiecks gemessen, so kann man den dritten durch Rechnung finden. Will man ihn jedoch unabhängig von dem bereits bekannten Resultate aufsuchen, so mifst man ihn excentrisch.

In Fig. 155 ist C das Centrum der Station, in der Nähe ist der Hilfspunkt S gewählt. In S werden die Richtungswinkel σ gemessen, indem man von der Anfangsrichtung SC die Winkel σ

durch Rechtsdrehung beschreibt. Die eigentlichen Centrierungselemente sind e und σ; als Hilfselemente kommen a und b hinzu.

Die Excentricität e wird unmittelbar oder von einer Standlinie aus gemessen; in den meisten Fällen wird sie klein, jedenfalls kleiner als $\frac{1}{41}$ der Strecken a oder b sein; vgl. § 2. Es kann jedoch vorkommen, dafs sie gröfser ist. In Reinhertz: Verbindungs-Triangulation 1889 finden sich Excentricitäten von wenigen Centimetern bis über 60^{m}, was sowohl für den Scheitel des Winkels als auch für das Ziel gilt.

Nach der Länge von $SC = e$ mufs sich die Berechnung verschieden gestalten. Es ist

$$1) \quad \ldots \quad \sin\alpha = \frac{e}{b}\cdot\sin\sigma_1 \quad \text{und} \quad \sin\beta = \frac{e}{a}\cdot\sin\sigma_2$$

oder für kleines e im Verhältnis zu a und b ist

$$\alpha'' = \frac{e}{b}\cdot\sin\sigma_1\cdot\varrho'' \quad \text{und} \quad \beta'' = \frac{e}{a}\cdot\sin\sigma_2\cdot\varrho''.$$

$$2) \quad \ldots\ldots \quad C = (\sigma_2 - \sigma_1) + (\beta - \alpha).$$

Die Entfernungen a und b lassen sich aus AB und den in A und B nach C oder S gemessenen Winkeln berechnen. Bei geringer Excentricität kommt es auf sehr genaue Resultate von a und b nicht an.

In Fig. 156 sind die Winkel σ erhaben, dadurch die $\sin\sigma$ negativ, also auch α und β negativ. Man kann auch von vorn-

Fig. 156.

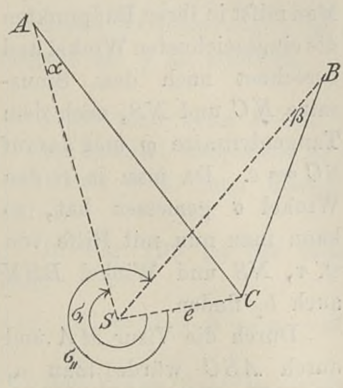
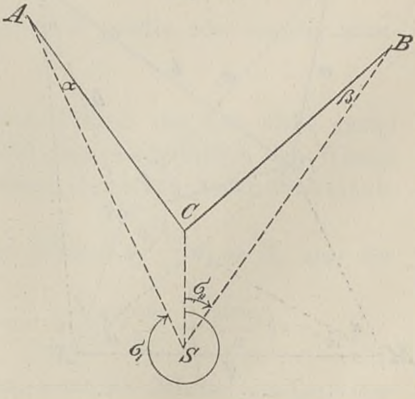


Fig. 157.



herein das Abkommen treffen, dafs α und β als positiv einzusetzen sind, wenn sie rechts von a und b liegen.

Aus der Formel für C und auch aus der Figur folgt

$$C = (\sigma_2 - \sigma_1) - (\beta - \alpha).$$

Für die Fig. 157 folgt nach dem Satze vom Aufsenwinkel

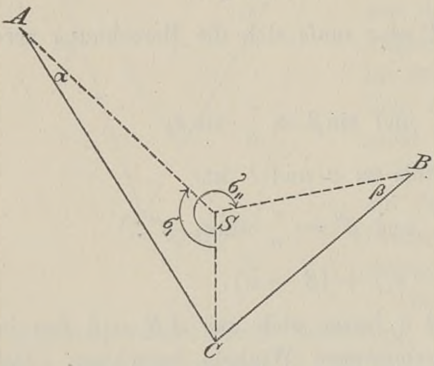
$$C = (\sigma_2 - \sigma_1) + (\beta + \alpha) + 360^0.$$

In der Fig. 158 ist $ASB = \sigma_2 - \sigma_1$ der Aufsenwinkel, deshalb

$$C = (\sigma_2 - \sigma_1) - (\beta + \alpha).$$

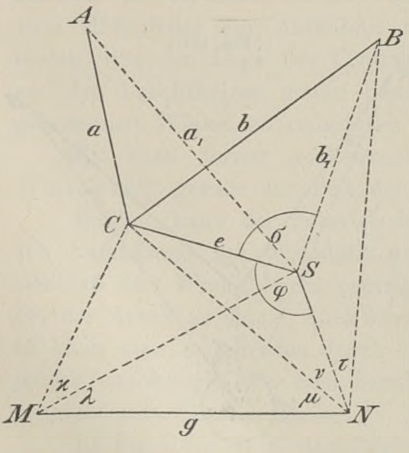
Die Formeln 1) und 2) liefern also allgemein den Wert des Winkels C. Es ist jedoch ratsam, sich auf grund einer Zeichnung zu orientieren, zuerst die Ergänzungswinkel von σ in die Rechnung einzuführen und aus den berechneten α und β nach der Figur den Winkel C zu suchen. Nach einiger Übung wird man das Vorzeichen von α und β sofort in das Schema einsetzen können, indem die Lage der beiden Winkel zu den Schenkeln a und b berücksichtigt wird.

Fig. 158.



Läfst sich die Excentricität nicht unmittelbar mit einem Mafsstab ermitteln, so mufs man nach Fig. 159 von einer Standlinie $MN = g$ ausgehen. Man mifst in ihren Endpunkten die eingezeichneten Winkel und berechnet nach dem Sinussatze NC und NS, nach dem Tangentensatze φ und darauf $SC = e$. Da man in S den Winkel σ gemessen hat, so kann man nun mit Hilfe von $\sphericalangle \tau$, NS und Winkel BSN auch b_1 finden.

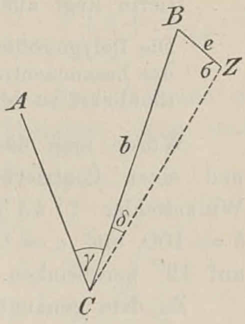
Fig. 159.



Durch die Visur MA und durch ASC würde man a_1 finden und schliefslich auch AB berechnen können. Weitere etwa notwendige Strecken a und b ergeben sich durch bekannte trigonometrische Rechnungen.

Im Vorstehenden war der Scheitel des Winkels unzugänglich und die Messung geschah in einem Hilfsscheitel. Im Folgenden ist das Ziel für das Auge unsichtbar, man mufs deshalb ein seitliches Hilfsziel wählen. Es handelt sich dann um eine *Centrierung des Zieles*. Dieser Fall kann auch unabsichtlich eintreten, wenn durch einen Irrtum ein falsches Signal anvisiert war und man wegen der schwierigen Aufstellung des Theodolit die Winkelmessung nicht gern wiederholt oder zu einem vorläufigen Resultat kommen will. Ist der Abstand des richtigen und angenommenen oder falschen Ziels, also die Excentricität genau zu messen und die Länge der Visur nach dem eigentlichen Ziel bekannt, so nimmt man an dem gefundenen Winkel eine Verbesserung vor.

Fig. 160.



In Fig. 160 ist $ACB = \gamma$ der gesuchte Winkel; da B von C aus nicht sichtbar ist, wird Z angezielt und ACZ gemessen; die Korrektion δ ist zu berechnen. Von den Centrierungselementen ist $BZ = e$ genau zu ermitteln und $\sphericalangle\, \sigma$ annähernd zu messen. Die Strecke $BC = b$ ist bekannt oder roh aus sonstigen Messungen zu berechnen. Allgemein wird e im Vergleich zu b sehr klein sein. Es ist

$$\sin\delta = \frac{e}{b}\cdot\sin\sigma \quad \text{oder} \quad \delta'' = \frac{e}{b}\cdot\sin\sigma\cdot\varrho''.$$

Diese Verbesserung δ ist an ACZ positiv oder negativ anzubringen, um γ zu erhalten.

Läfst man beim Messen eines Winkels das Lot nicht genau auf den Scheitel einspielen, so mifst man unabsichtlich den Winkel excentrisch d. h. man macht einen *Centrier- oder Scheitelfehler*.

In Fig. 155 ist der falsche Winkel $\sigma_2 - \sigma_1 = S$, also der Fehler

$$F = C - S = \alpha - \beta = e\cdot\varrho''\cdot\left(\frac{\sin\sigma_1}{b} - \frac{\sin\sigma_2}{a}\right).$$

Der Fehler wird am gröfsten, wenn die Scheitel die Lage der Fig. 157 u. 158 haben; in beiden Fällen ist er $\pm(\alpha + \beta)$, wie aus den frühern Werten von C hervorgeht. Und $(\alpha + \beta)$ wird wiederum den gröfsten Wert annehmen, wenn $\sigma_1 = 90^0$ und

$\sigma_2 = 270^0$ oder $CSB = 90^0$ wird. Es bildet dann ACB oder ASB eine gerade Linie, auf welcher e senkrecht steht; es ist

$$F = e \cdot \varrho'' \cdot \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) = e \cdot \varrho'' \cdot \frac{a+b}{ab}.$$

Aus den beiden Werten von F folgt, daſs der Fehler infolge mangelhaften Centrierens um so kleiner wird, je gröſser die Zielweiten sind, daſs er mit der Abnahme von a und b schnell wächst und bei gleichen Zielweiten auch Null werden kann.

Hierin liegt auch die Vorschrift Anw. IX. § 29. 8 begründet:

> Die Polygonseiten sind möglichst lang auszuwählen, jedoch ist das Zusammentreffen unverhältnismäſsig langer und kurzer Seiten thunlichst zu vermeiden.

Würde man die Schenkel eines Winkels 20, 30, 100 ^{m} lang und einen Centrierfehler von nur 5 ^{mm} machen, so kann der Winkelfehler $1' \, 43''$, $1' \, 8''$ und $20''$ betragen. Für $a = 20$, $b = 100$ und $e = 0{,}005$ kann er noch $1' \, 2''$ sein und höchstens auf $42''$ herabsinken.

Zu dem genannten Scheitelfehler kann noch schädlich wirkend der Zielfehler hinzukommen. Dieser entsteht, wenn der angezielte Punkt nicht in der Vertikalebene des Winkelschenkels liegt. Die Berechnung geschieht nach Fig. 160; es ist e immer sehr klein, deshalb

$$\delta'' = \frac{e}{s} \cdot \varrho''.$$

Je gröſser also die Zielweite ist, desto kleiner wird der Fehler. Hieraus folgt wiederum die Richtigkeit der obigen Vorschrift und besonders des zweiten Teiles. Eine gut beleuchtete ferne Bake läſst sich genauer anzielen als eine nahe, deren Seitenkanten über den oder die Fäden des Fadenkreuzes hinausragen. Macht man bei einer 20 ^{m} fernen Bake einen Zielfehler von 5 ^{mm}, während die Bake des zweiten Schenkels in 200 ^{m} Entfernung richtig angezielt wird, so wird durch den Fehler der Endpunkt dieses Schenkels um 5 ^{cm} verschoben.

Der Zielfehler wird entweder durch ungenaues Einstellen des Fadenkreuzes auf das Signal hervorgerufen, was schon durch die Phasenbildung der Bake geschehen kann, oder die Stellung des Signals ist mangelhaft, indem etwa die Bake seitwärts geneigt ist. Hierauf bezieht sich die Vorschrift der Anw. IX, welche fordert,

> daſs bei der Messung der Polygonwinkel die zur Signalisierung dienenden Meſsstangen an ihrem Fuſsende anvisiert werden können.

§ 53. Die Aufnahme eines Dreiecks.

Dieser Abschnitt soll den Übergang zu den gröfseren Aufnahmen vermitteln. Derselbe ist aber aufserdem von Wichtigkeit, weil man häufig unter Zugrundelegung eines Dreiecks die Einzelaufnahme der eingeschlossenen und benachbarten Flächen bewerkstelligt.

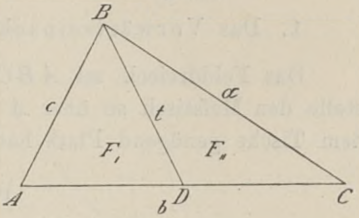
a) Die Aufnahme mit dem Stahlbande.

Man mifst alle drei Seiten doppelt und berechnet den Inhalt nach der Formel

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \text{wo} \quad s = \frac{a+b+c}{2} \quad \text{ist.}$$

Zur Prüfung mifst man (Fig. 161) eine Schwerlinie BD und ermittelt die Inhalte F_1 und F_2 beider Dreiecke, dann mufs $F_1 + F_2 = F$ sein.

Fig. 161.



Um das Dreieck aufzutragen, legt man die verjüngte längste Seite AC zuerst hin und beschreibt mit den anderen Seiten um die Endpunkte Kreise; ebenso beschreibt man um die Mitte D mit t einen Kreis, welcher durch den Schnittpunkt der beiden ersten Kreise gehen sollte, aber selten geht. Es entsteht meist ein Fehlerdreieck; ist dasselbe klein, so nimmt man seinen Schwerpunkt als dritte Ecke an; ist es grofs, so ist die Messung zu wiederholen.

b) Mit dem Theodolit und Stahlbande.

Nach den trigonometrischen Formeln für den Inhalt des Dreiecks braucht man nur zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel oder eine Seite und zwei Winkel zu messen, um nach

$$F = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} \quad \text{oder} \quad = \frac{a^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2 \cdot \sin\alpha}$$

den Inhalt berechnen zu können. Man wird jedoch gut thun, alle drei Winkel zu messen. Der Winkelfehler darf $1{,}5' \cdot \sqrt{3} = 2{,}6'$ a. T. und $3^c \cdot \sqrt{3} = 5{,}2^c$ n. T. betragen.

c) Mit dem Mefstische.

Wollte man nur ein dem Felddreiecke ähnliches Bilddreieck haben, so brauchte man nur mit Hilfe der Kippregel nach richtiger Orientierung u. s. w. die Winkel zu zeichnen. Will man jedoch die Länge der drei Seiten und den Inhalt kennen lernen, so mufs man mindestens das Verhältnis einer Seite des Felddreiecks zu der homologen Seite des Bildes entweder nachträglich feststellen oder nach Messung einer Seite bei der Zeichnung von vornherein wählen. Das letztere ist gebräuchlich und am bequemsten.

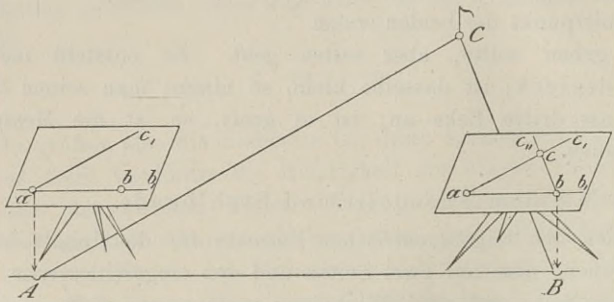
Folgende drei Fälle sind zu besprechen:

1. Die Aufnahme des Dreiecks aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln oder das Vorwärtseinschneiden.
2. Die Aufnahme aus einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel oder das Rückwärtseinschneiden.
3. Die Aufnahme aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel oder das Seitwärtseinschneiden.

1. Das Vorwärtseinschneiden. (Fig. 162).

Das Felddreieck sei ABC, die gemessene Seite AB. Man stelle den Mefstisch so über A auf, dafs das Bild des Dreiecks auf dem Tische genügend Platz hat. Mit Hilfe der Lotgabel bestimmt

Fig. 162.

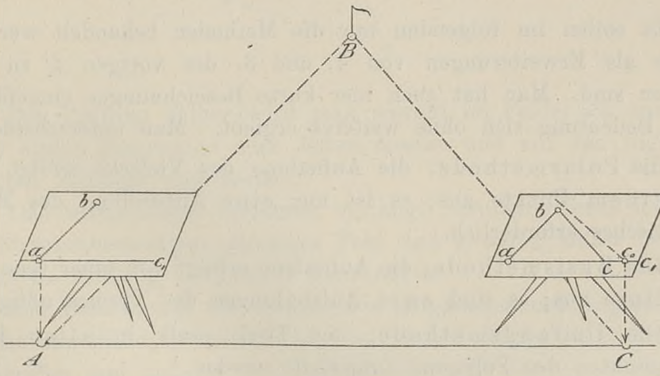


man den zu A centrisch liegenden Punkt a, richtet die Kippregel auf B und zieht mit einem harten Bleistifte die Gerade ab_1, ebenso zieht man den Strahl ac_1. Die Strecke AB trägt man in verjüngtem Mafsstabe auf ab_1 ab und erhält ab. Jetzt stellt man den Tisch horizontal über B auf, centriert b zu B und orientiert nach BA; richtet das Fernrohr auf C und zieht den Strahl bc_{11}, welcher ac_1 im Punkte c schneidet. Das Bilddreieck abc ist gemäfs der Gleichheit zweier Winkel dem Dreiecke ABC ähnlich, und aus dem bekannten Verhältnisse $AB : ab$ ergeben sich die Seiten AC und BC, nachdem man ac und bc abgemessen hat. Dafs nicht gerade AB als Standlinie genommen werden mufs, sehen wir beim Vieleck.

2. Das Rückwärtseinschneiden. (Fig. 163).

Die gemessene Seite AB sei auf dem Tische nach dem Mafsstabe $\frac{AB}{ab} = \frac{m}{n}$ gezeichnet; es soll der Punkt C auf dem Tische festgelegt werden, ohne eine Aufstellung in B vorzunehmen. Über A centriere man a zu A, orientiere ab nach AB und ziehe den Strahl ac_1 nach C. Man schätze nun die Seite AC und trage ac_0 ab, so dafs $ac_0 : AC = n : m$ ist. Darauf centriert man c_0 zu C und orientiert $c_0 a$ nach CA. Würde man nun die Kippregel an c_0 legen und nach B zielen, so würde durch etwaige Ver-

Fig. 163.

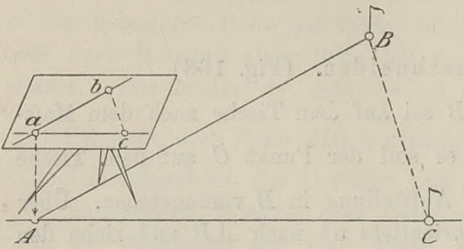


längerung von ab wohl ein ähnliches Bilddreieck entstehen, aber für die homologen Seiten würde das Verhältnis $m : n$ nicht gelten. Deshalb müssen wir das Lineal an b legen, das Fernrohr auf B richten und nachsehen, ob der rückwärts verlängerte Strahl durch c_0 geht. Zum ersten Male wird das schwerlich der Fall sein, es wird der Visierstrahl nach B in einem anderen Punkte c den Strahl ac_1 treffen. Der Winkel acb ist dann aber dem Winkel C des Feldes nicht gleich, folglich sind die Dreiecke nicht ähnlich. Man verschiebt deshalb den Tisch und centriert c zu C u. s. w., bis der rückwärts verlängerte Strahl bB durch den lotrecht über C liegenden Punkt geht.

3. Das Seitwärtseinschneiden. (Fig. 164).

Die beiden gegebenen und gemessenen Seiten seien AB und AC. Man stelle den Tisch über A auf und lege als Projektion des Punktes A den Bildpunkt a fest, ziehe die Visierstrahlen nach B und C und trage auf beiden in demselben Verhältnisse die Seiten AB und AC ab; verbindet man b mit c, so ist abc das dem Felddreiecke ähnliche Dreieck, weil die den gleichen Winkel einschlieſsenden Seiten in Proportion stehen.

Fig. 164.



§ 54. Die Aufnahme eines Vielecks mit dem Meſstische.

Es sollen im folgenden nur die Methoden behandelt werden, welche als Erweiterungen von 1. und 3. des vorigen § zu betrachten sind. Man hat auch hier kurze Bezeichnungen eingeführt, deren Bedeutung sich ohne weiteres ergiebt. Man unterscheidet

1. die Polarmethode; die Aufnahme des Vielecks erfolgt von einem Punkte aus; es ist nur eine Aufstellung des Meſstisches erforderlich.
2. Die Basismethode; die Aufnahme erfolgt von einer Grundlinie aus; es sind zwei Aufstellungen des Tisches nötig.
3. Die Umfangsmethode; der Tisch muſs in allen Eckpunkten des Polygons aufgestellt werden.

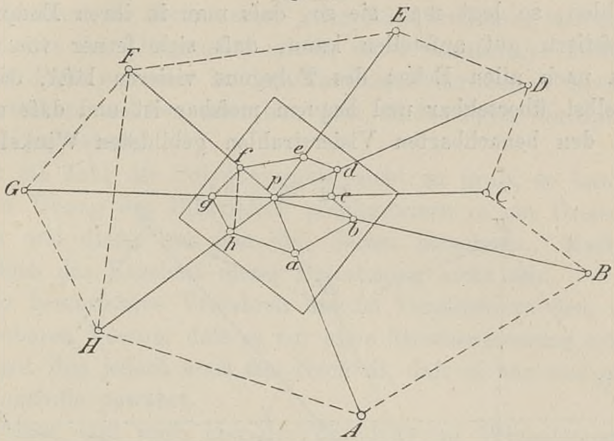
Welche der drei Methoden anzuwenden ist, hängt von der Beschaffenheit des Geländes und der verlangten Genauigkeit ab.

1. Die Polarmethode. (Fig. 165).

Diese Methode läſst sich nur anwenden, wenn wenigstens von einem Punkte innerhalb oder auſserhalb des Vielecks sich nach allen Eckpunkten visieren und messen läſst. Um möglichst kurze Strecken für die Messung zu haben, wählt man den Punkt P, den Pol, thunlichst im Innern des aufzunehmenden Polygons. Über demselben stellt man den Tisch horizontal und so auf, daſs das Bild auf demselben Platz hat; sucht den zu P centrisch liegenden Punkt p, visiert nach allen Eckpunkten und zieht die Visierstrahlen.

Darauf miſst man von P aus alle Strecken nach den Eckpunkten doppelt und trägt die verjüngten Maſse von p aus auf den Strahlen ab. Verbindet man die Endpunkte a, b, c . . . mit einander, so ist $abcdefgh \sim ABCDEFGH$, weil beide der Reihe nach aus ähnlichen Dreiecken mit dem Ähnlichkeitspunkte p bestehen.

Fig. 165.



Der Prüfung halber wird man sowohl im Felde, als auch im Bilde einige Diagonalen oder Seiten messen und auf den zugrunde gelegten Maſsstab untersuchen.

Das beschriebene Verfahren verlangt ziemlich offenes und für die Streckenmessungen günstiges Feld und gewährt auſser der angeführten Prüfung keinerlei Kontrolle.

Die Berechnung der Fläche des aufgenommenen Vielecks geschieht am Bilde, nachdem man je die drei Seiten eines Dreiecks abgegriffen und auf den gewöhnlichen Maſsstab übertragen hat; die anzuwendende Formel lautet

$$\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \text{wo} \quad s = \frac{a+b+c}{2} \text{ ist.}$$

Da die Berechnung nicht in den unmittelbar im Felde gewonnenen Maſszahlen ausgeführt wird, so ist sie mit den Mängeln der Zeichnung und Übertragung behaftet.

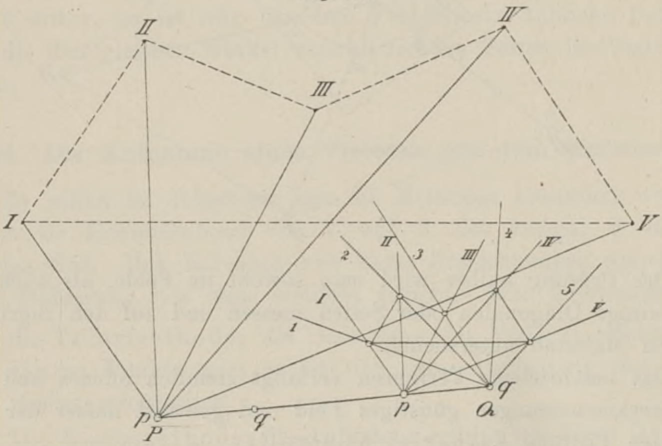
Wesentlich genauer wird die Aufnahme, ohne mehr Arbeit zu erfordern, bei Anwendung des Theodolit, mit dem man von P aus sämtliche Richtungswinkel nach den Ecken miſst, worauf die Berechnung der einzelnen Dreiecke aus den Strecken PA, PB u. s. w. und den eingeschlossenen Winkeln nach $\triangle = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$ erfolgt.

Wird auf die Flächengröſse wenig Gewicht gelegt, so benutzt man eine Kippregel mit distanzmessendem Fernrohre.

2. Die Basismethode. (Fig. 166).

Die Aufnahme geschieht von einer Standlinie, Basis, aus und hat offenes Feld zur Voraussetzung. Kann man die Basis frei wählen, so legt man sie so, daſs man in ihren Endpunkten den Meſstisch gut aufstellen kann, daſs sich ferner von diesen Punkten nach allen Ecken des Polygons visieren läſst, daſs die Basis selbst übersehbar und bequem meſsbar ist und daſs endlich die von den benachbarten Visierstrahlen gebildeten Winkel nicht

Fig. 166.



kleiner als 20^0 und nicht gröſser als 160^0 werden. Ob man die Standlinie in das Vieleck oder auf eine Seite desselben oder auſserhalb legt, hängt von den örtlichen Verhältnissen ab.

In der Figur liegt die Standlinie PQ auſserhalb. Man stelle den Tisch über P horizontal auf und ziehe von dem centrisch gelegenen Punkte p die Visierstrahlen nach sämtlichen Ecken und nach Q. Nun messe man PQ zweimal und trage sie verjüngt als pq ab. Über dem Punkte Q centriere man q zu Q und orientiere den Tisch nach QP, worauf man wieder die Strahlen nach den Ecken I, II u. s. w. zieht. Die Strahlen von p und q aus, nach denselben Ecken gezogen, schneiden sich in Punkten, welche den Punkten des Feldes entsprechen; ihre geraden Verbindungen liefern das gesuchte Bild. Daſs dieses Bild dem Feldpolygon ähnlich ist, folgt daraus, daſs alle über pq stehenden kleinen Dreiecke aus

Gleichheit zweier Winkel denjenigen Felddreiecken ähnlich sind, welche als eine Seite PQ, als zweite und dritte die Visierstrahlen nach den einzelnen Ecken des Polygons haben. Es gilt deshalb für die Seiten der beiden Polygone im Felde und Bilde dasselbe Verhältnis $PQ : pq$.

Die Flächenberechnung geschieht wie vorhin entweder in den Maſszahlen der Seiten eines jeden Bilddreieckes, welches man durch Ziehen der Diagonalen erhält, unter nachheriger Multiplikation mit $PQ^2 : pq^2$ oder in den Maſszahlen der Seiten eines jeden Felddreieckes, welches man aus dem Bilde durch Multiplikation mit $PQ : pq$ erhält.

Ist die Zahl der Polygonpunkte nicht zu groſs, so kann man wohl zur Übung das Bildvieleck planimetrisch in ein Dreieck verwandeln und dieses aus den drei Seiten berechnen. Maſsgebend darf jedoch das Ergebnis dieser Berechnung nicht sein.

Das beschriebene Verfahren hat im Vergleich zu dem vorigen den offenbaren Vorzug, daſs es nur eine Streckenmessung erfordert, es hat mit ihm jedoch auch den Nachteil, daſs es nur eine mangelhafte Kontrolle gewährt.

Es läſst sich auch hier der Theodolit zur Winkelmessung in P und Q verwenden. Um das ähnliche Bild zu zeichnen, muſs man wie unter 1. einen guten Transporteur mit Nonius zur Hand haben oder sich der Tangententafel zur Auftragung der Winkel p und q bedienen.

3. Die Umfangsmethode. (Fig. 167).

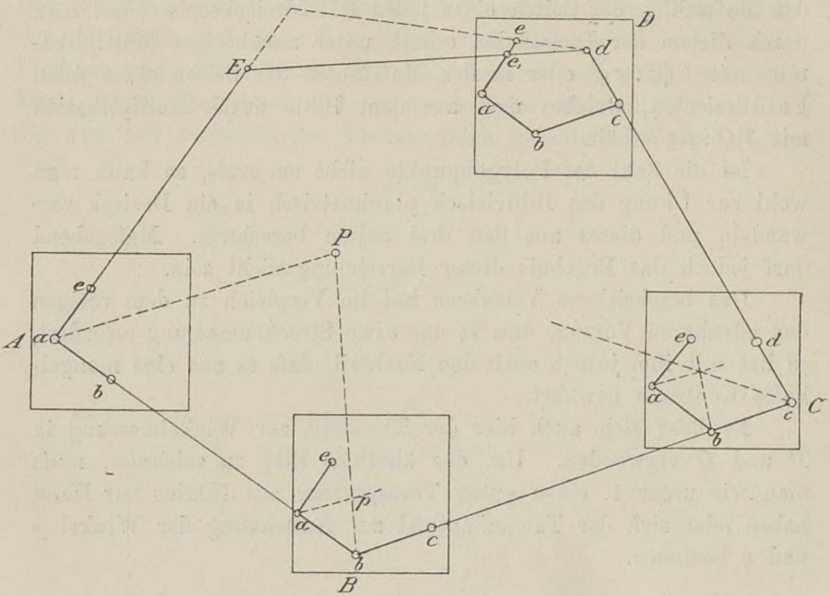
Das aufzunehmende Vieleck sei $ABCDE$; P ist ein Punkt irgendwo im Felde, der sich von einigen Punkten des Vielecks anvisieren läſst.

Man stelle den Tisch über A auf und wähle den zu A centrisch liegenden Bildpunkt so, daſs das ganze Bild auf dem Zeichenbrette Platz findet. Um einen Anhaltspunkt hierfür zu haben, messe man zuerst sämtliche Seiten mit dem Stahlbande oder der Latte doppelt, entwerfe nach Schätzung der Winkel eine Zeichnung in dem für den Meſstisch beabsichtigten Maſsstabe und lege dieselbe auf den Tisch. Ist die Ebene des Tisches zu klein, so muſs man einen kleineren Maſsstab wählen oder das Vieleck in Teilen aufnehmen, die man nachträglich zusammensetzt.

Ist der Platz ausreichend, so lege man das Lineal an a, visiere nach E und B und trage auf den Strahlen die Strecken AE und AB als ae und ab ab. Kann man von A den Punkt P

sehen, so ziehe man auch aP; ist P von mehreren Punkten sichtbar, so ist eine Messung von AP nicht notwendig. Über B centriert man nach b und orientiert ba und BA, zieht den Strahl nach C und erhält als verjüngtes Maſs von BC die Linie bc u. s. w. Im vorletzten Punkte D erhält man, wenn man nicht durch die Visier-

Fig. 167.



strahlen nach P bereits aufmerksam gemacht ist, Gewiſsheit darüber, ob man gut gearbeitet hat. Geht nämlich der Visierstrahl dE durch den Punkt e, so ist das Polygon geschlossen und $abcde \sim ABCDE$ gemäſs der Gleichheit der Winkel und der Proportionalität der homologen Seiten. Zur weiteren Prüfung nimmt man auch die letzte Aufstellung über E noch vor.

Trifft der Visierstrahl dE, wie in der Figur, nicht den Punkt e, so findet kein Schluſs statt; es besteht der lineare Schluſsfehler ee_1. Das Maſs von ee_1 ist in das Feldmaſs zu verwandeln und mit dem Gesamtumfange des Feldpolygons oder die wirkliche unmittelbare Länge von ee_1 mit dem Umfange des Bildes zu vergleichen. Ist der Schluſsfehler nach Bauernfeind in günstigem Terrain kleiner als $\frac{1}{800}$ oder in ungünstigem Terrain kleiner als $\frac{1}{400}$ des ganzen Umfanges, so darf man durch geometrische Konstruktion das Polygon zum Schluſs bringen. Ist der Fehler gröſser, so ist eine neue Messung nötig, bei welcher es sich empfiehlt, zur Vermeidung einer zu groſsen Fehleranhäufung von einem Punkte ausgehend die Hälfte des Vielecks linksum, die andere Hälfte rechtsum aufzunehmen.

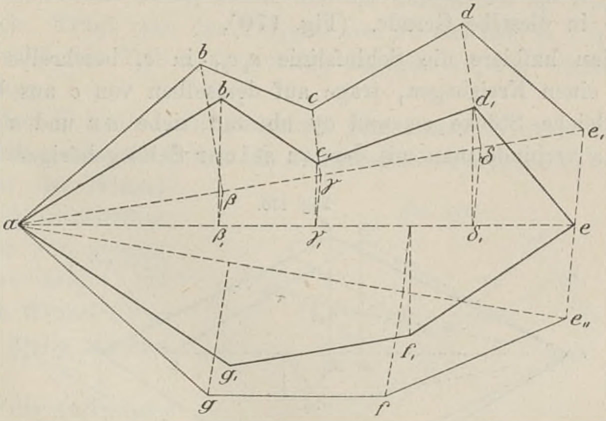
a. Der Schluſsfehler übersteige die vorgeschriebene Grenze nicht; man soll das Polygon zum Schluſs bringen.

Der Schluſsfehler trete bei e auf; man zeichne das Polygon in zwei getrennten Teilen von dem Punkte aus, der von e ungefähr um die gleiche Anzahl Seiten entfernt liegt.

1. Die beiden Teile $abcde_1$ und $agfe_{11}$ stehen von einander ab. (Fig. 168).

Man verbinde e_1 mit e_{11} und halbiere die Verbindungslinie in e, ziehe ae_1, ae und ae_{11}; fälle von b, c, d . . . die Lote $b\beta$,

Fig. 168.

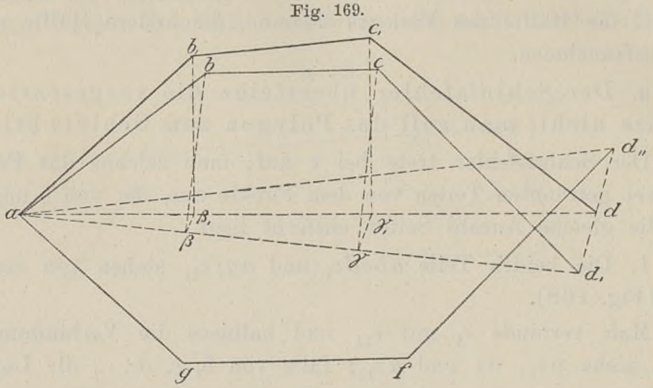


$c\gamma$, $d\delta$ . . . auf ae_1 bezw. ae_{11}, ziehe zu e_1e_{11} die Parallelen $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$, $\delta\delta_1$ . . . und errichte zu ae die Lote in β_1, γ_1, δ_1 . .; diese Lote mache man den ersten gleich, so sind ihre Endpunkte b_1, c_1, d_1 . . . e die Eckpunkte des gesuchten Polygons.

2. Die beiden Teile $abcd_1$ und $agfd_{11}$ greifen in einander über. (Fig. 169).

Man halbiere wieder die Schluſslinie d_1d_{11} in d, ziehe ad_1, ad, ad_{11} und fälle die Lote von b, c, f . . . auf die zugehörige ad_1 und von f, g auf ad_{11}; durch ihre Fuſspunkte ziehe man die Parallelen zu d_1d_{11} bis ad und errichte dort Lote, welche man den entsprechenden ersten Loten gleich macht; der Punkt d bildet wieder eine Ecke des neuen Polygons, beide Teile werden von einander gezogen.

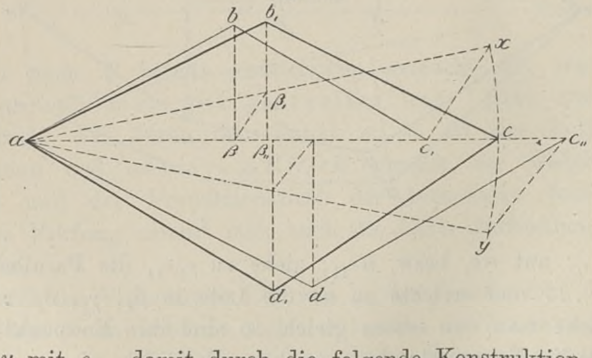
Fig. 169.



3. Die Endpunkte der beiden Teile fallen mit dem Ausgangspunkte in dieselbe Gerade. (Fig. 170).

Man halbiere die Schluſslinie $c_1 c_{11}$ in c, beschreibe mit ac um a einen Kreisbogen, trage auf demselben von c aus beliebige aber gleiche Stücke cx und cy ab und ziehe ax und ay. Den Punkt x verbinde man mit dem zu seiner Seite gehörigen Zugende

Fig. 170.



c_1 und y mit c_{11}, damit durch die folgende Konstruktion der eine Zug von ac ab, der andere nach ac hin gezogen wird. Von b fälle man das Lot $b\beta$, ziehe $\beta\beta_1 \parallel c_1 x$ und mache $\beta_{11} b_1$ parallel und gleich βb. Der neue Punkt b_1 ist mit c zu verbinden. Ebenso wird der Punkt d_1 gefunden.

b. Der Schluſsfehler übersteigt die zulässige Grenze um ein Bedeutendes.

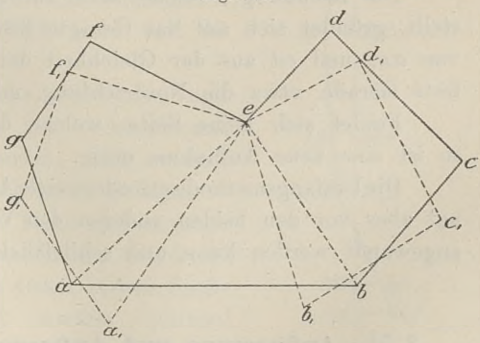
Die Vorschrift für diesen Fall lautet: Die Messung ist zu wiederholen. Bedenkt man jedoch die äuſserst mühsame Arbeit einer Meſstischaufnahme und ist man sich bewuſst, im allgemeinen vorsichtig und gewissenhaft gearbeitet zu haben, so untersucht man, ob der Schluſsfehler die Anhäufung aller unvermeidlichen Messungsfehler ist, oder ob er die Folge einer einzigen falschen Winkelmessung oder einer einzigen falschen Seitenmessung ist. Die Aufsuchung eines einzigen groben Messungsfehlers geschieht hier durch Zeichnung oder, wie wir später sehen werden, durch Rechnung.

1. Ein einzelner Winkel ist fehlerhaft gemessen: welcher? (Fig. 171).

Man trage das Polygon von einer Seite ab ausgehend über c, d u. s. w. auf. Sind die Winkel bis e richtig, so wird auch, da sämtliche Seiten als richtig vorausgesetzt werden, der Teil $abcde$ richtig Ist nun der Winkel bei e mit einem groben Fehler behaftet, so wird der zweite Schenkel von e nicht, wie es sich gehörte, in ef, sondern in ef_1 fallen, und der übrige Teil des Polygons wird falsch. Trägt man das Polygon von ab aus über g, f u. s. w. auf, so wird der Teil $agfe$ richtig, dagegen $ed_1c_1b_1$ erhält eine falsche Lage.

In dem Scheitel des fehlerhaft gemessenen Winkels werden sich also die nach zwei Seiten hin aufgetragenen Polygone kreuzen. Der Fehler des Winkels ergiebt sich unmittelbar; hier ist er $fef_1 = ded_1 = aea_1 = beb_1$. Der betreffende Winkel ist an Ort und Stelle nachzumessen.

Fig. 171.



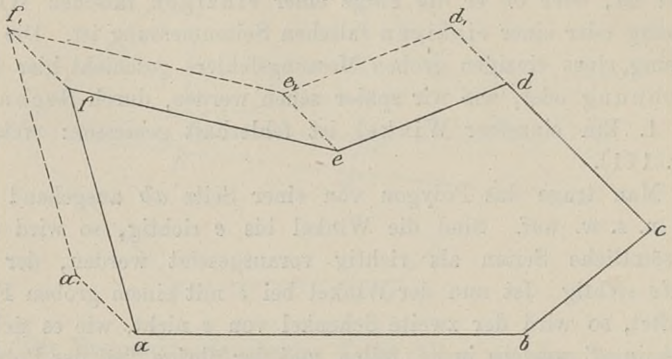
Um für die Auffindung des Fehlers durch Rechnung vorzubereiten, beachte man, daſs bei den beiden vollständigen Auftragungen linksum und rechtsum der senkrechte Abstand von der Seite ab oder von einer sonstigen festen Geraden nur für e derselbe bleibt.

Wenn die besprochene Durchkreuzung nicht stattfindet, so ist die ganze Messung zu wiederholen.

2. Eine einzelne Seite ist fehlerhaft gemessen: welche? (Fig. 172).

Ist $abcdef$ das richtige Polygon und nur cd falsch aufgenommen, so wird, da alles Übrige richtig gemessen ist, von d ab der folgende Teil verschoben; man erhält nicht den Punkt d, sondern d_1. Da der Winkel d richtig ist, so wird $d_1 e_1$ gleich und

Fig. 172.



parallel de, ebenso $e_1 f_1 \# ef$ und $f_1 a_1 \# fa$ sein; deshalb mufs auch $dd_1 \# aa_1$ sein.

Die Schlufslinie ist demnach der falsch gemessenen Seite parallel und giebt zugleich die Gröfse des Fehlers an. Die betreffende Seite ist nachzumessen.

Die Rechnung, welche man zur Auffindung des Fehlers anstellt, gründet sich auf das Gesagte insofern, als der Parallelismus von aa_1 und cd aus der Gleichheit der Winkel folgt, welche eine feste Gerade, etwa die Nordrichtung, mit ihnen bildet.

Findet sich keine Seite, welche der Schlufslinie parallel ist, so ist eine neue Aufnahme nötig.

Die Umfangsmethode erfordert viele Aufstellungen und Messungen, hat aber vor den beiden anderen den Vorzug, dafs sie allgemeiner angewandt werden kann und schliefslich eine Kontrolle bietet.

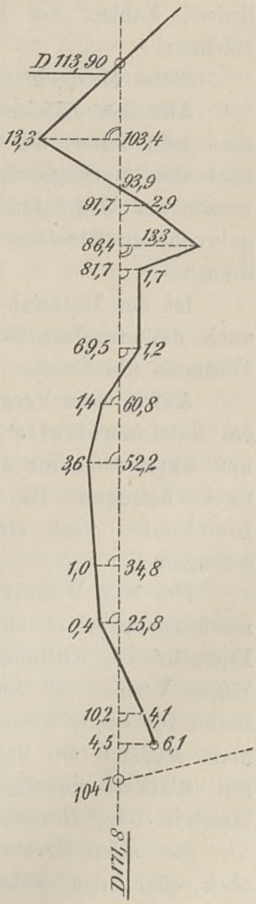
§ 55. Aufmessung und Auftragung krummer Linien. Feldbuch und Kartenrisse.

Eine krumme Linie läfst sich nicht mit derselben Genauigkeit wie eine gerade messen. Man erhält deren Länge nur annähernd, da man sie nur dadurch messen kann, dafs man an ihre Stelle eine mehrfach gebrochene Gerade setzt. Je mehr sich letztere der krummen Linie anschmiegt, desto näher kommt man ihrer wahren

Länge. Man wird also überall da einen Meſspunkt festlegen, wo eine Richtungsänderung stark hervortritt.

Die Hauptsache ist, eine krumme oder mehrfach gebrochene Gerade, z. B. einen Weg, einen Wasserlauf oder krummlinige Grenze genau in eine Zeichnung einzutragen. Man legt zu dem Zwecke mehrere unter sich zusammenhängende Gerade so in die krumme Linie, daſs ihre Punkte nicht über 40 m von der betreffenden Geraden entfernt sind. Der Ausgangs- und Endpunkt muſs seiner Lage nach durch sonstige Messungen bekannt sein. Auf die eingelegte Gerade, die Abscisse, fällt man von allen bemerkenswerten Punkten der aufzunehmenden Linie die Lote, die Ordinaten, miſst die Abscissen vom Anfangspunkte bis zu den Fuſspunkten der Lote und die Lote selbst und trägt im Felde die Meſszahlen für beide in die Handzeichnung ein. Die genaue Eintragung in die eigentliche Karte erfolgt dann auf grund dieses Handrisses.

Fig. 173.



Umgekehrt lassen sich Punkte und Linien der Karte auf dieselbe Weise ins Feld übertragen.

Fig. 173 zeigt die ausgeführten Messungen und die Schreibweise der Zahlen im Vermessungsrisse, worüber die wichtigsten Vorschriften aus Anw. VIII. § 89 und 90 hier folgen mögen.

Zu dem Feldbuche ist gutes und starkes weiſses Papier in Aktenformat (38×21 cm) zu verwenden, und es darf stets nur eine Seite beschrieben werden.

Das Feldbuch ist in Tinte und so deutlich zu führen, daſs danach die Stückvermessungsrisse auch durch jeden andern Sachverständigen angefertigt werden können. Die ausnahmsweise gestattete Bleischrift darf mit Tinte nicht überschrieben werden.

Die Übertragung der Meſslinien u. s. w. aus dem Feldbuche in die Vermessungsrisse hat möglichst noch an demselben Tage zu geschehen.

Die auf dem Felde gefundenen Maſse sind — in schwarzer Tinte — rechtwinklig gegen die Messungslinie, welcher sie angehören, fortlaufend zu schreiben, dergestalt, dafs der Fufs der Zahlen nach dem Anfangspunkte der Messung (Abscissen) hinweist; die Abscissenzahlen kommen an den Fufspunkt der Ordinate und zwar auf die Seite, auf welcher die Ordinate nicht liegt. Die Ordinatenzahlen stehen parallel der Ordinate am Ende oder daneben.

Die Zahl für die ganze Länge einer Linie wird doppelt, die Zahl an einem Einbindepunkte einmal unterstrichen mit vorgesetztem lateinischen *D*.

Der ungefähre Mafsstab ist unten rechts anzugeben.

Die die Mefspunkte umgebenden kleinen Kreise, sowie die Mefslinien, Zahlen der Mefspunkte und Zeichen sind karminrot zu zeichnen.

Siehe Musterblätter zu Anw. VIII.

Aus den Zahlen der Abscissen- und Ordinatenmessung kann man nun leicht die Strecken der gebrochenen Linien berechnen nach dem pythagoreischen Lehrsatze; die Katheten sind als Differenzen der Ordinaten bezw. der Abscissen bekannt. Hat man die gebrochenen Strecken gemessen, so kann die Rechnung als Probe dienen.

Ist der Mafsstab der Zeichnung nicht zu klein, so lassen sich auch die einzelnen Strecken mit dem Zirkel abgreifen und in das Feldmafs übersetzen.

Aufser dem Vermessungsrisse ist in skizzenartiger Darstellung ein Liniennetzrifs anzufertigen; der Mafsstab ist ein ungefährer und kann etwa die Hälfte des für die Gemarkungskarte beabsichtigten betragen. Die Polygonpunkte u. s. w. werden mittelst ihrer Koordinaten nach einem Quadratnetze von 5 ^{cm} Seitenlänge eingetragen.

Der sog. Vorrifs, der eine Kopie der etwa vorhandenen Gemarkungskarte ist, enthält den Namen, Hausnummer, Wohnort des Eigentümers, Kulturart, Klasse u. s. w. und hat mit der eigentlichen Vermessung insofern zu thun, als das Netz der Messungslinien für die Stückvermessung mit allen Mefspunkten nach Augenmafs sogleich bei der Absteckung und Vermarkung in denselben mit Bleistift eingetragen wird. Der Vorrifs ist das, was sonst Handrifs oder Handzeichnung genannt wird.

Bei allen Rissen und Karten ist Norden die Richtung nach oben oder nach links; bei den Forstkarten in Preufsen zeigt die Nordrichtung stets nach oben. Die genaue Orientierung nach Norden geschieht durch einen Pfeil.

In Württemberg schreibt man im Handrisse die Länge der

Ordinate am Ende senkrecht zu ihr, die Abscissen wie in Preufsen.

In Baden stehen die Zahlen senkrecht neben der Ordinate; die Zahlen für die Abscissen gelten vom Fufspunkte der einen Ordinate bis zum Fufspunkte der folgenden und stehen senkrecht zur Abscisse etwa in der Mitte.

In Bayern zeigt ein der Mafszahl nachgesetztes *D* die Benutzung eines Distanzmessers an. Die Zahl wird blau unterstrichen.

§ 56. Die Aufnahme eines Vielecks mit Stahlband und Winkelspiegel. (Stückvermessung.)

Nach dem Grundsatze: „Vom Grofsen ins Einzelne“ gehört dieser Abschnitt an eine spätere Stelle. Die Stückvermessung beginnt, nachdem die Gesamtfläche mit Mefslinien umspannt und überzogen ist und die Aufnahme der zu vermessenden Fläche im grofsen bereits stattgefunden hat. Die Einfachheit der Arbeiten und der dabei notwendigen Hilfsmittel rechtfertigt jedoch in einem Lehrbuche eine frühere Besprechung der Einzelaufnahme.

Der oben ausgesprochene Grundsatz ist in Anw. VIII. § 76 zur Geltung gebracht, wie folgt:

Die Stückvermessung ist auf das trigonometrische und polygonometrische Netz zu gründen; von trigonometrischen oder polygonometrischen Punkten oder von Punkten, welche durch Abmessung auf einer Linie des genannten Netzes bestimmt sind, ist auszugehen und sind von dort in der Regel gerade Messungslinien bis zu anderen derartigen, in gleicher Weise bestimmten Punkten zu legen und zu messen.

Zwischen diesen Messungslinien bezw. zwischen diesen und den Linien oder Punkten des Hauptnetzes sind dann weitere Messungslinien in solcher Anzahl und Auswahl zu bestimmen, dafs von denselben ab mit Hilfe kurzer rechtwinkliger Abstände oder durch unmittelbare Schnitte u. s. w. die aufzunehmenden Grenzen und sonstigen Gegenstände mit Genauigkeit aufgemessen werden können.

Das Netz der Messungslinien mufs möglichst frei von gekünstelten Linienkombinationen sein, vielmehr von den Hauptlinien und bzw. den Linien des polygonometrischen Netzes und den in das Liniennetz fallenden trigonometrischen Punkten ausgehend, von Stufe zu Stufe bis zur untersten Linienordnung absteigend möglichst einfach und so gegliedert sein, dafs nirgend Anhäufungen von unvermeidlichen Messungsfehlern entstehen können.

Die Anzahl der Bindepunkte der Messungslinien ist zu beschränken, dergestalt, daſs ein und derselbe Bindepunkt für möglichst viele Messungslinien benutzt wird.

Die End- und Kreuzungspunkte der Messungslinien, soweit es nicht trigonometrische oder polygonometrische Punkte sind, ferner die auf lange Messungslinien noch besonders eingeschalteten Meſspunkte heiſsen Kleinpunkte.

Über die Vermarkung derselben ist früher das Erforderliche gesagt; über die Schreibweise der Maſszahlen, Länge der Lote u. s. w. ebenfalls. Es sei aus § 80 noch erwähnt, daſs alle Messungslinien ihrer ganzen Länge nach zu messen und die Messungszahlen durchlaufend zu zählen sind; daſs ferner die später einzuschaltenden Einbindepunkte durch Messungen von beiden Endpunkten der Linie festgelegt werden.

Vorzügliche Musterblätter für die Stückvermessung finden sich in den Anlagen zu Anw. VIII.

Die Flächenberechnung bei dieser Aufnahme geschieht nach der Formel für den Inhalt des Trapezes bzw. des Dreiecks aus den Originalzahlen der Stückvermessungsrisse und unter Anwendung der später zu besprechenden Quadratglastafel oder der Harfe oder des Polarplanimeters.

Da von einer Messungslinie aus die rechtwinkligen Abstände aufgemessen sind, so kann man erstere als Abscisse und die letzteren als Ordinaten betrachten. Man nennt deshalb die Einzelberechnung der Parzellen auch die Flächenberechnung durch rechtwinklige Koordinaten. Dieselbe ist nicht verschieden von der Berechnung aus den Koordinaten der Meſspunkte, welche man auf ein Koordinaten-System bezieht. Die letztere wird in allgemeiner Form und für groſse Flächen bei der Aufnahme der Polygone eingehender behandelt werden.

a) In Fig. 174 verbindet die Meſslinie die Punkte 1 und 4; vom Punkte 1 aus ist gemessen, folglich wachsen die Abscissen der Punkte auf der oberen Seite, nehmen dagegen auf der unteren Seite ab. Die Fläche des Siebenecks setzt sich aus Dreiecken und Trapezen zusammen; der aus den absoluten Zahlen berechnete doppelte Inhalt ist

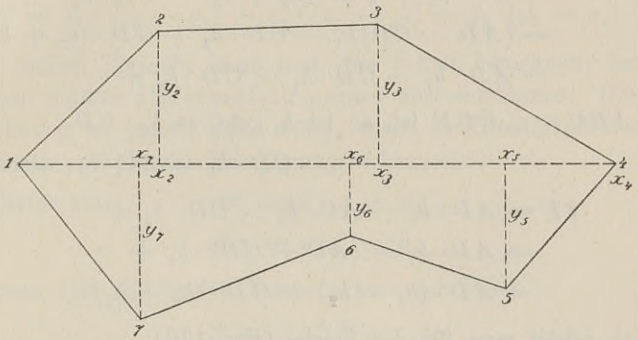
$$\begin{aligned}2F &= x_2 y_2 + (x_3 - x_2)\cdot(y_3 + y_2) + (x_4 - x_3)\cdot y_3 + (x_4 - x_5)\cdot y_5 \\ &\quad + (x_5 - x_6)\cdot(y_5 + y_6) + (x_6 - x_7)\cdot(y_6 + y_7) + x_7\cdot y_7 \\ &= y_2\cdot x_3 + y_3\cdot(x_4 - x_2) + y_5\cdot(x_4 - x_6) + y_6\cdot(x_5 - x_7) + y_7\cdot x_6.\end{aligned}$$

Wollten wir die Koordinaten für die Punkte 1 und 4 einführen, die z. t. hier freilich Null sind, so könnten wir schreiben

$$2F = y_2 \cdot (x_3 - x_1) + y_3(x_4 - x_2) + y_4(x_5 - x_3) + y_5(x_4 - x_6)$$
$$+ y_6(x_5 - x_7) + y_7(x_6 - x_1) + y_1(x_7 - x_2).$$

Eine Regelmäſsigkeit läſst sich in diesem Ausdrucke nicht ver-

Fig. 174.

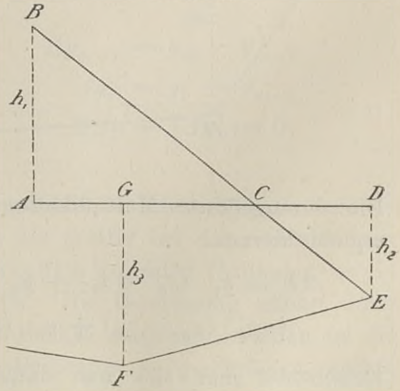


kennen. Im ersten Teile wird die Ordinate eines Punktes mit dem Unterschiede der Abscissen je des folgenden und vorhergehenden Punktes multipliziert; im zweiten Teile ist es umgekehrt. Um hier dasselbe zu erhalten, um also $y_5(x_6 - x_4)$ u. s. w. schreiben zu können, haben wir nur die y als negativ zu betrachten; es werden dadurch beide Faktoren negativ und die Produkte behalten den Wert der Formel.

Allgemeiner gestaltet sich demgemäſs die Berechnung, wenn wir die Ordinaten als algebraische Zahlen einführen, dieselben also je nach der Richtung mit plus oder minus bezeichnen.

b) Die Messungslinie schneidet zwei Seiten. In Fig. 176 sind die Abscissen von M aus gemessen; die unmittelbaren Schnitte mit den Seiten I II und III IV sind jedoch nicht festgelegt. Es fragt sich deshalb, wie wir die bei M und N sowohl innerhalb als auſserhalb liegenden Dreiecke in die Berechnung einschlieſsen.

Fig. 175.



Zu dem Zwecke betrachtet man die beiden Dreiecke ABC und CDE (Fig. 175 S. 261) als verschränktes Trapez und berechnet es nach der gewöhnlichen Formel, in welche man ED als negativ einsetzt, worauf man das Trapez $DEFG$ hinzufügt. Es ist

$$\begin{aligned} 2 \cdot ABEFG &= \text{Dreieck } ABC + \text{Trapez } DEFG - \text{Dreieck } DEC \\ &= AC \cdot h_1 + GD \cdot (h_2 + h_3) - CD \cdot h_2 \\ &= (AD - CD) h_1 - CD \cdot h_2 + GD \cdot (h_2 + h_3) \\ &= AD \cdot h_1 - CD \cdot h_1 - CD \cdot h_2 + \cdots \end{aligned}$$

Da $\triangle ABC \sim \triangle CDE$ ist, so ist $h_1 : AC = h_2 : CD$

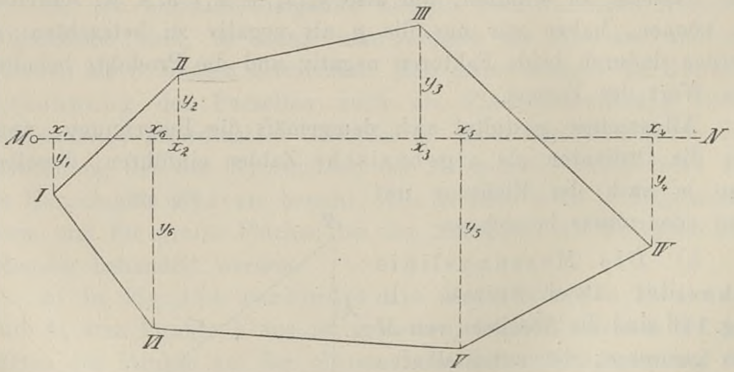
$CD \cdot h_1 = AC \cdot h_2$; deshalb ist

$$\begin{aligned} 2F &= AD \cdot h_1 - AC \cdot h_2 - CD \cdot h_2 + \cdots \\ &= AD \cdot h_1 - (AC + CD) \cdot h_2 + \cdots \\ &= AD \cdot (h_1 - h_2) + GD \cdot (h_2 + h_3). \end{aligned}$$

Demnach erhält man für die Fläche (Fig. 176):

$$2F = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + (x_3 - x_2)(y_3 + y_2) + (x_4 - x_3)(y_3 - y_4) + (x_4 - x_5)(y_5 + y_4) + (x_5 - x_6)(y_6 + y_5) + (x_6 - x_1)(y_6 + y_1).$$

Fig. 176.



Die durchgeführte Multiplikation und Absonderung der Faktoren ergiebt hieraus

$$\begin{aligned} 2F = y_1 \cdot (x_6 - x_2) + y_2 \cdot (x_3 - x_1) + y_3 \cdot (x_4 - x_2) \\ + y_4 \cdot (x_3 - x_5) + y_5 \cdot (x_4 - x_6) + y_6 \cdot (x_5 - x_1). \end{aligned}$$

Entscheidet man sich nun dafür, dafs die Ordinaten nach oben, also y_2 und y_3 negativ sein sollen, so kann man mit -1 in die Klammer multiplizieren; es wird

$$2F = y_1 \cdot (x_6 - x_2) + y_2 \cdot (x_1 - x_3) + y_3 \cdot (x_2 - x_4)$$
$$+ y_4 \cdot (x_3 - x_5) + y_5 \cdot (x_4 - x_6) + y_6 \cdot (x_5 - x_1).$$

Damit hat man einen vollständig symmetrischen Ausdruck, der nach x geordnet folgende Gestalt annimmt:

$$-2F = x_1 \cdot (y_6 - y_2) + x_2 \cdot (y_1 - y_3) + x_3 \cdot (y_2 - y_4) + \cdots$$

Nach beiden Formeln kann man den Inhalt berechnen; beide Ergebnisse müssen ziffermäſsig genau übereinstimmen. Die zweite Berechnung ist jedoch nicht nötig, wenn die Richtigkeit der ersten durch eine graphische Berechnung sichergestellt ist.

Setzt man
$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_{n-1}$$
$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_{n-1},$$
so lassen sich die beiden Formeln kurz schreiben
$$F = \pm \tfrac{1}{2} \sum y_n \cdot \Delta x_n$$
$$F = \mp \tfrac{1}{2} \sum x_n \cdot \Delta y_n.$$

Eine Rechenprobe erhält man aus den Formeln für ein m-Eck auf folgende Weise; es ist

$$\begin{array}{ll}
\Delta x_1 = x_2 - x_m & \Delta y_1 = y_2 - y_m \\
\Delta x_2 = x_3 - x_1 & \Delta y_2 = y_3 - y_1 \\
\Delta x_3 = x_4 - x_2 & \Delta y_3 = y_4 - y_2 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\Delta x_{m-1} = x_m - x_{m-2} & \Delta y_{m-1} = y_m - y_{m-2} \\
\Delta x_m = x_1 - x_{m-1} & \Delta y_m = y_1 - y_{m-1} \\
\hline
\Sigma \Delta x = [\Delta x] = 0 & \Sigma \Delta y = [\Delta y] = 0,
\end{array}$$

wo Σ und [] Summe bedeutet.

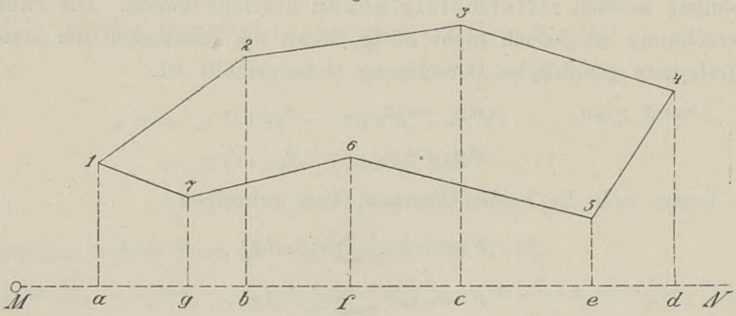
Geht man von dem Anfangspunkte der Messungslinie aus, so zählt man von da die Abscissen als positiv bei der rechtsläufigen Punktaufnahme und nimmt die rechts liegenden Ordinaten positiv, die links liegenden negativ. Die Berechnung erfolgt dann ebenfalls rechtsum; von einem Punkte ausgehend werden in die eine Spalte der Reihe nach die Ordinaten y_n geschrieben, rechts daneben in die Spalte $x_{n+1} - x_{n-1}$ oder umgekehrt; siehe unten. Die algebraische Summe der Zahlen in der rechten Spalte mufs Null sein. Vgl. Anw. VIII. S. 211 und 225.

c) Die Messungslinie liegt aufserhalb der Fläche. (Fig. 177).

Die Fläche des Siebenecks ist zunächst ohne Rücksicht auf die Richtungen von Abscisse und Ordinaten

$$F = a12b + b23c + c34d - d45e - e56f - f67g - g71a.$$

Fig. 177



Durch Einführung der entsprechenden Koordinaten ist

$$2F = (x_2 - x_1)(y_2 + y_1) + (x_3 - x_1)(y_3 + y_2) + (x_4 - x_3)(y_4 + y_3)$$
$$- (x_4 - x_5)(y_4 + y_5) - (x_5 - x_6)(y_5 - y_6) - \cdots$$

Multipliziert man diese Produkte aus und ordnet nach den Zeigern von y bzw. x, so ist

1) . . . $2F = y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_4 - x_2) + \cdots$

2) . $-2F = x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + \cdots$

Nach Anw. VIII. S. 224 soll die Ordinate jedes Brechungspunktes mit dem Abscissenunterschiede zwischen dem vorhergehenden (+) und dem folgenden (—) Brechungspunkte multipliziert und die Summe der Produkte durch 2 dividiert werden. Dasselbe erhalten wir, wenn wir die Gleichung 1) mit -1 multiplizieren; es ist

3) . . . . . . $F = \frac{1}{2} \sum y_n (x_{n-1} - x_{n+1})$.

Oder man soll die Abscisse jedes Brechungspunktes mit dem Ordinatenunterschiede zwischen dem vorhergehenden (—) und dem folgenden (+) Brechungspunkte multiplizieren. Dadurch erhält die Summe der Produkte dasselbe Vorzeichen wie in 1); es ist

$$4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad F = \tfrac{1}{2} \sum x_n(-\, y_{n-1} + x_{n+1}).$$

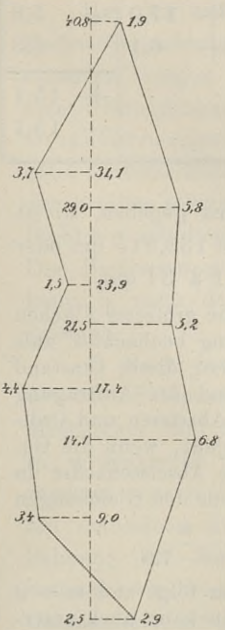
Die Formeln 3) und 4) stimmen mit den obigen Formeln überein.

Sind die Abscissen von M aus nach N gemessen, so sind nach Anw. VIII sämtliche Ordinaten als negativ einzusetzen, während die Abscissen positiv sind.

So überraschend einfach sich die Formeln gestaltet haben und dem Kundigen in ihrer Anwendung sind, so notwendig ist für den Anfänger die Einübung derselben an Zahlenbeispielen. Er möge ein beliebiges Vieleck zeichnen, die Messungslinie irgendwo festlegen, alle Abscissen und Ordinaten ziehen und nach irgend einem Maſsstabe ihre Längen bestimmen. Die Ordinaten erhalten das Vorzeichen nach der Bemerkung unter b.

In Fig. 178 sind die Messungszahlen in 1 : 500 aufgetragen und gemäſs der Vorschrift mit dem Fuſse nach dem Ausgangspunkte hinzugesetzt; die Berechnung erfolgt nach 3) und 4).

Fig. 178.



Faktoren			
±	y	±	Δx
—	3,4	—	14,9
—	4,4	—	14,9
—	1,5	—	13,7
—	3,7	—	16,9
+	1,9	+	2,1
+	5,8	+	19,3
+	5,2	+	14,9
+	6,8	+	19,0
+	2,9	+	5,1
		+	60,4
		—	60,4

Faktoren			
±	x	±	Δy
+	9,0	—	7,3
+	17,4	+	1,9
	23,9	+	0,7
	31,1	+	3,4
	40,8	+	9,5
	29,0	+	3,3
	21,5	+	1,0
	14,1	—	2,3
	2,5	—	10,2
		+	19,8
		—	19,8

In der ersten Tafel sind sämtliche Teilprodukte positiv, ihre halbe Summe ist 268,35; in der zweiten Tafel erhält man

$$\tfrac{1}{2}\,(660{,}33 - 123{,}63) = 268{,}35.$$

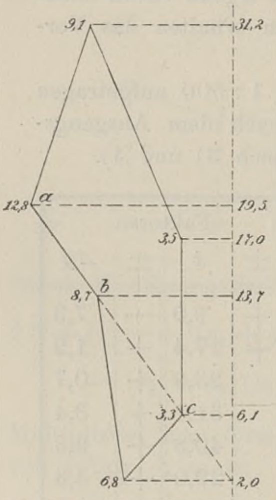
Die Bildung der Abscissenunterschiede ergiebt sich ohne weiteres; die Ordinatenunterschiede der zweiten Tabelle sind:

$$
\begin{aligned}
-(+2,9)+(-4,4) &= -\ \ 7,3\\
-(-3,4)+(-1,5) &= +\ \ 1,9\\
-(-4,4)+(-3,7) &= +\ \ 0,7\\
-(-3,7)+(+5,8) &= +\ \ 9,5\\
-(+5,2)+(+2,9) &= -\ \ 2,3\\
-(+6,8)+(-3,4) &= -10,2.
\end{aligned}
$$

Die Unterschiede sowohl der Abscissen wie der Ordinaten genügen der Bedingung, dafs ihre algebraische Summe Null ist.

Die Berechnung der Fläche in Fig. 179 geschieht nach denselben Formeln.

Fig. 179.



Faktoren			
±	y	±	$\varDelta x$
—	6,8	—	7,6
—	8,7	—	17,5
—	12,8	—	17,5
—	9,1	+	2,5
—	3,5	+	25,1
—	3,3	+	15,0
		+	42,6
		—	42,6

Faktoren			
±	x	±	$\varDelta y$
+	2,0	—	5,4
+	13,7	—	6,0
+	19,5	—	0,4
+	31,2	+	9,3
+	17,0	+	5,8
+	6,1	—	3,3
		+	15,1
		—	15,1

Sind die Strecken in Metern gegeben, so ist in beiden Fällen die Fläche 133,915 qm oder in die Tabelle zu setzen 1 a 34 qm.

In Fig. 179 tritt ein Fall ein, der bei Aufnahme gröfserer Flächen Beachtung verdient. Es sei bei der Aufmessung beobachtet, dafs die Punkte a, b, c in derselben Geraden liegen; dieser Umstand kann zur Kontrolle der Längenmessungen und der Auftragung benutzt werden. Sind im vorliegenden Falle Abscissen und Ordinaten richtig gemessen? Die Frage wird bejaht, wenn die Geraden ab und bc in ihrer Verlängerung die Abscissenachse in demselben Punkte treffen. Dies ersieht man aus den Gleichungen

$$\frac{12,8}{8,7} = \frac{m+5,8}{m} \quad \text{und} \quad \frac{8,7}{3,3} = \frac{n}{n-7,6},$$

wo die Bedeutung von m und n aus der Figur folgt und $m = n$ der Beweis für die richtige Messung ist. Man kann auch untersuchen, ob

$$\frac{12,8-8,7}{12,8-3,3} = \frac{19,5-13,7}{19,5-6,1} \quad \text{ist.}$$

Bei Parzellen bis zu 1 Ar Gröfse sind beide Einzelberechnungen nach den vorstehenden Formeln auszuführen; bei der Stückvermessung ist hierauf bereits bedacht zu nehmen. Bei gröfseren Flächen, besonders solchen mit krummlinigen Grenzen, darf das Polarplanimeter angewandt werden. Die Berechnung der Wege, Bäche u. s. w. von wechselnder Breite aus der Gesamtlänge und einer mittleren Breite ist unstatthaft; sie ist in exakter (ex actis) Weise d. h. in den thatsächlichen Messungszahlen auszuführen.

Man kann die Fläche auch in Form von Determinanten hinschreiben:

$$2F = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_3 & y_4 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} y_n & y_1 \\ x_n & x_1 \end{vmatrix}$$

Im Koordinatenverzeichnis würde man mit den Zahlen für den ersten Punkt anfangen und schliefsen, darauf von oben bis unten kreuzweise multiplizieren.

§ 57. Bestimmung der Nordrichtung und der geographischen Lage.

Um sich auf den Karten orientieren und um Karten benachbarter Gemarkungen und Gebiete leichter in die richtige Lage zu einander bringen zu können, ist auf denselben, wenn nicht bereits eine Übersichtskarte mit entsprechenden Festpunkten vorliegt, eine Orientierungsrichtung unerläfslich. Es genügt, für jede Karte eine Himmelsrichtung festgelegt zu haben. Die gebräuchliche, durch einen schwarzen Pfeil auf den Spezialkarten zu kennzeichnende Richtung ist diejenige, welche man geographisch Norden nennt. Die Bestimmung der Nordrichtung für den Punkt A des Feldes kann je nach dem Zwecke der Aufnahme auf verschiedene Weise erfolgen.

a) Nach der Methode des kürzesten Schattens macht man den zum Feldpunkte A centrisch liegenden Punkt a des horizontalen Mefstisches zum Mittelpunkte mehrerer konzentrischer Kreise, stellt in a senkrecht zum Mefstischblatte ein Stäbchen auf und bezeichnet vor- und nachmittags die Endpunkte des Schattens, welche auf demselben Kreise liegen. Diese Punkte verbindet man durch Sehnen; ihre Mittelsenkrechten liefern die Nordrichtung. Fallen mehrere der Senkrechten zusammen, so ist es ein Zeichen für die Genauigkeit der Arbeit.

Diese Methode wurde bereits von den Ägyptern zur Orientierung der Pyramiden angewandt.

Die Schwierigkeit liegt in der lotrechten Aufstellung des Gnomon über dem Mittelpunkte der Kreise und der scharfen Unterscheidung des Kern- und Halbschattens. Statt des Stäbchens nimmt man deshalb eine kleine undurchsichtige Scheibe mit einer feinen Öffnung, welche lotrecht über a liegt Die Scheibe stellt man mit der Breitseite nach Süden; sie mufs dünn genug sein, damit die Lichtstrahlen durch die Öffnung ungehindert hindurchgehen.

b) Die Anwendung der Bussole ist wegen der sehr veränderlichen Deklination der Magnetnadel nach der Tages- und Jahreszeit, der Bodenbeschaffenheit u. s. w. und wegen der Unsicherheit im Ablesen nur bei kleinen Waldvermessungen gestattet, wenn die Grenzen durch Spezialvermessungen bereits aufgenommen sind. Die Bussole eignet sich zur Orientierung bei flüchtigen Messungen auf Reisen.

c) Zu genaueren Ergebnissen führt die Beobachtung der Circumpolarsterne. Der Polarstern, der hellste und letzte Stern im Schwanze des kleinen Bären, steht nicht genau im Himmelspole oder in der verlängerten Erdachse. Man findet ihn, wenn man die Verbindungslinie der Bauchsterne α und β des grofsen Bären oder der Hinterräder des Wagens um das Fünffache ihres Abstandes nach oben verlängert. Der Polarstern hat vom Pole einen Abstand von etwas über 1^0 und beschreibt um denselben einen Kreis. Er geht deshalb in 24 Stunden zweimal durch die Meridianebene. Den Zeitpunkt dieses Durchgangs müfste ich kennen, um ihn anzuvisieren und die Nordrichtung zu erhalten.

Ist die gröfste seitliche Abweichung in diesem Jahre $1^0\ 12'$, so stellt man den Theodolit genau horizontal über A auf, visiert den Polarstern an und verfolgt ihn, bis er am Vertikalfaden zu kleben scheint und eine zeitlang nicht mehr seitlich ausweicht. Dies ist der Zeitpunkt, in welchem der Stern die obige Abweichung hat. Um diesen Winkel, der alle drei Jahre um $1'$ abnimmt, ist die Alhidade nach rechts oder links zu drehen, um die Absehlinie in die Nordrichtung zu bringen; nach rechts, wenn der Stern von unten links herankommt.

Durch einen Punkt und eine gerade Linie ist die Ebene bestimmt. Wenn nun der Polarstern genau im Pole stände, so brauchten wir über A nur das Lot aufzuhängen und in die gemeinsame Ebene von Stern und Lot ein Signal zu bringen. Wegen der obigen Abweichung ist solches jedoch nicht angängig. Man hat einen Stern gesucht, welcher zugleich mit dem Polarstern kulminiert. Einen solchen giebt es nun nicht. Für gewöhnlich nimmt man deshalb den Stern ε des grofsen Bären hinzu. Es ist dies der Stern, welcher an der Schwanzwurzel des Bären oder am Anfange der Deichsel des Wagens hinter dem Reiterlein steht.

Über dem Punkte A des Feldes hängt man ein langes Lot auf, dessen Körper man bei unruhiger Luft in ein Gefäfs mit Wasser tauchen läfst. Man stellt sich in einiger Entfernung hinter dem Lote, also an der Südseite auf und nimmt den Zeitpunkt wahr, in welchem die beiden Sterne von der Lotschnur bedeckt werden. Der bessern Beobachtung wegen wählt man die untere Kulmination des Sterns ε, also die Zeit von Oktober bis Dezember. In dem Augenblicke, in welchem der Polarstern, darunter Stern ε und der Lotfaden in einer Ebene liegen, läfst man in möglichst grofser Entfernung, nötigenfalls unter Benutzung einer Laterne, eine Signalstange in der Vertikalebene des Lotes aufstellen. Diese giebt von A aus die geographische Nordrichtung an.

d) Am genauesten läfst sich die NS-Richtung mit dem Theodolit durch Beobachtung korrespondierender Stern- oder Sonnenhöhen festlegen.

Um die Drehachse der Erde und ihre Verlängerung bewegt sich scheinbar die Himmelskugel mit den Fixsternen; diese beschreiben also sämtlich Parallelkreise. Weil sich unser Auge nicht in der Achse befindet und wir die Bewegung der Sterne auf den scheinbaren Horizont beziehen, so haben die Parallelkreise einen höchsten Punkt, der im Meridian liegt. Man denke sich auf einem Karussel stehend. Der Kopf einer aufserhalb stehenden Stange wird dem Auge am höchsten oder tiefsten erscheinen, wenn Auge, Drehachse und Stangenkopf in einer Ebene sind. Hat der Stern nun auch den höchsten Stand erreicht, so sagen wir: er kulminiert. In gleichen Zeitabständen vor und nach der Kulmination steht er gleich weit vom Meridian und gleich hoch. So können wir umgekehrt aus den beiden gleichen Höhen des Sterns durch Halbierung des dazwischen liegenden Bogens den Kulminationspunkt d. h. den Meridian finden. Hieraus ergiebt sich die Anwendung des Theodolit.

Mit der Bewegung der Sonne verhält es sich ebenso. Wegen der schiefen Stellung der Erdachse zur Ebene der Bahn ist jedoch der höchste Punkt der Sonne nicht der Halbierungspunkt des Tagebogens d. h. die gleichen Sonnenhöhen haben vom Meridian nicht den gleichen Abstand.

Will man aufserdem mit der Festlegung des Meridians durch die Sonne zugleich die Zeitbestimmung verknüpfen, so hat man den Lauf der Erde in ihrer Bahn zu berücksichtigen. Inbetreff des Unterschiedes zwischen Sonnenzeit und Sternzeit sei hervorgehoben, dafs die Zeiten zwischen den Kulminationen der Sonne und den gleichen Kulminationen eines Sterns nicht dieselben sind. Ein Stern möge in demselben Augenblicke mit dem Mittelpunkte der Sonne im Meridian eines Ortes stehen. Würde die Erde ihren Platz beibehalten, so würden nach 24 Stunden beide Sterne wiederum zu gleicher Zeit kulminieren. Nun verläfst aber die Erde ihren Ort, folglich wird der eine oder andere Stern früher im Meridian erscheinen, je nachdem die Richtung der Bewegung mit der Richtung der Drehung übereinstimmt oder nicht. Das erstere trifft bei der Erde zu; vom Polarstern gesehen dreht sich die Erde entgegen dem Uhrzeiger um sich selbst und läuft auch ebenso um die Sonne.

Es mögen die Knöpfe der Weste auf zwei hinter einander stehende Bäume zeigen. Bewege ich mich im Kreise entgegengesetzt dem Uhrzeiger einige Schritte weiter, während ich mich um meine Längsachse ebenfalls linksum drehe, so wird der fernere Baum früher den Knöpfen gegenüber stehen, als der nähere. Ich mufs noch eine kleine Drehung machen, bis der nähere Baum im Meridian der Knöpfe steht. Ist der nahe Baum die Sonne und der entfernte der Fixstern, so heifst dies: der Sonnentag ist länger als der Sterntag und derselbe wird immer länger d. h. die Kulmination der Sonne tritt immer später ein, je weiter ich im Kreise linksum komme. Bin ich zwischen den beiden Bäumen angelangt, so wird der eine in oberer Kulmination stehen, während der andere im Rücken oder in unterer Kulmination ist. Es wird also hier der Unterschied in der Zahl der Umdrehungen einen halben Tag ausmachen. In der zweiten Hälfte des Kreises setzt sich die Anhäufung des Unterschiedes fort, und nach Vollendung der Bahn wird die Sonne mit dem Stern oder mit dem Frühlingspunkte wieder in oberer Kulmination sein.

Während dieses Umlaufs, also während des Jahres ist im ganzen ein voller Sonnentag gegen die Zahl der Sterntage eingebüfst. Würde sich die Erde während der Bewegung um die Sonne nur ein einziges Mal um ihre Achse drehen, so würden die Sonnenstrahlen nur einmal den ganzen Kreis um die Erde beschreiben. In der gleichen Zeit haben die Strahlen des Sterns den Weg um die Erde zweimal gemacht. Nehmen wir die scheinbare Bewegung der Sonne, so rückt diese jeden Tag um ungefähr einen Grad von ihrer Stelle fort, der Erdort bleibt also hinter dem

Sonnenstande täglich bei seiner Drehung um einen Grad zurück, im Jahre also um den ganzen Umkreis oder um einen Tag zurück gegen die Anzahl oberer Kulminationen des unendlich fernen Frühlingspunktes. Hat also das Jahr 366 Sterntage, so hat es nur 365 Sonnentage.

Der Sterntag ist gleichbedeutend mit der Umdrehungszeit der Erde. Steht der Stundenzeiger der richtigen Uhr auf zwölf, wenn der Meridian durch einen Stern geht, so wird nach einer vollen Umdrehung beides wieder der Fall sein. Der Sterntag hat eine unveränderliche Länge, er ist das Urmafs der Zeit. Da nun aber die bürgerliche Thätigkeit durch die Sonne geregelt wird, so hat man von der Sternzeit abgesehen und eine andere Zeitbestimmung gewählt. Man könnte die Sonne allein zur Zeiteinteilung in der Weise benutzen, dafs man als Tag die Zeit zwischen zwei gleichen Kulminationen einführte und die Uhr im Augenblicke der obern Kulmination auf Null stellte. Allein wegen der Schiefe der Ekliptik und der elliptischen Erdbahn wird nach einer Reihe von Tagen beim höchsten Stande der Sonne der Zeiger nicht wieder auf Null stehen. Die Abweichungen können bis zu 16 Minuten betragen, und nur viermal im Jahre werden Sonnen- und Pendeluhr übereinstimmen.

Aus diesen Gründen hat man eine sog. mittlere Zeit eingeführt. Dieselbe wird auf eine fingierte Sonne bezogen, welche sich mit gleicher Geschwindigkeit scheinbar im Äquator bewegt. Auf diese mittlere Zeit oder mittlere Sonne beziehen sich die Angaben unserer Uhren, und das danach benannte tropische Jahr hat 365,2422 mittlere Tage.

Es folgt ferner aus dem Gesagten, dafs man den Gang seiner Uhr auf die Gleichmäfsigkeit nicht durch die Uhrzeichen der Post oder Bahn oder des Zeitballs prüfen kann. Die gute Uhr, sei es Pendel- oder Taschenuhr mit Kompensation, mufs in kurzer Zeit von der Postuhr abweichen; ihr Gang läfst sich nur durch die Sternbeobachtung des Astronomen kontrollieren.

Der Meridian eines Ortes wird mit Hilfe der Sonne in folgender Weise festgelegt.

Man stelle den Theodolit vormittags über *A* centrisch und horizontal auf, versehe das Okular mit einem Blendglase und richte das Fernrohr so auf die Sonnenscheibe, dafs der Horizontalfaden den untern oder obern Sonnenrand berührt, während der Vertikalfaden die Scheibe halbiert. Nach genauer Einstellung lese man an den Nonien des Limbus ab. Die Ablesung am Höhenkreise ist bei einer einzigen Beobachtung am Vormittage nicht erforderlich, weil man denselben festgeklemmt läfst. Die Zeit der Einstellung merkt man sich an der Uhr, sie sei geschehen um 10 Uhr. Etwas vor 2 Uhr nachmittags begiebt man sich wieder an den Theodolit, löst die Alhidade und dreht das Fernrohr nach rechts. Ohne an der Höhenstellung das Geringste zu ändern, wartet man den Augenblick ab, in welchem das Fadenkreuz auf der Sonnenscheibe wieder die Stellung vom Vormittage hat. Von der nunmehrigen Ablesung am Limbus subtrahiert man die erste Ablesung, berechnet den halben Winkel beider Sonneneinstellungen und dreht die Alhidade um denselben aus der letzten Stellung zurück. Die Visierlinie zeigt nun nach Süden bzw. rückwärts nach Norden; sie wird durch Aufstellung einer Bake für den Punkt A festgelegt.

Stellt man morgens das Fadenkreuz so ein, dafs der Vertikalfaden den rechten Sonnenrand in der Mitte berührt, so mufs nachmittags dasselbe mit dem linken Rande geschehen.

Bei einer einmaligen Beobachtung des Morgens setzt man sich der Gefahr aus, dafs die Einstellung am Nachmittage wegen etwaiger Wolken nicht gelingt. Man thut deshalb gut, mehrere Beobachtungen am Vormittage zu machen. Es ist dabei Erfordernis, die jedesmaligen Höhenwinkel mit aller Schärfe abzulesen und sich dazu die Zeit für jede Einstellung zu notieren. Auch ist es ratsam, an dem folgenden Tage die Beobachtungen in der zweiten Lage des Fernrohres zu wiederholen. Ist der Höhenkreis frei von einem Indexfehler, so kann man morgens in der einen und nachmittags in der anderen Fernrohrlage beobachten. Aus allen abgelesenen Winkeln nimmt man das arithmetische Mittel, bringt die Nonien in die Lage der ersten Sonneneinstellung und dreht um den halben erhaltenen Winkel nach rechts, wodurch die Visierlinie in den Meridian kommt.

Die letzte Elevation vormittags wird durch Klemmung des Höhenkreises beibehalten; für die folgenden Beobachtungen stellt man den Höhenkreis frühzeitig ein. Beim Verfolgen der Sonne kann man das Auge dadurch schonen, dafs man ohne Blendglas das Sonnenlicht in die vor das Okular gehaltene Hand fallen läfst und den hellen Punkt der Hand beobachtet. Beim prismatischen Okular sieht man aus einiger Entfernung hinein und schiebt erst kurz vor der Beobachtung die Blende vor. Die Okularstellung mufs scharf sein und bleibt unverändert; man hat hierzu wohl Okularbremsschrauben.

Hat man den Winkel zwischen den gleichen Sonnenhöhen gefunden und halbiert, so hat man die Süd- und damit auch die Nordrichtung. Aus dieser letzten dreht man nach rechts auf das Signal B, wodurch man das gesuchte Azimuth ν_a^b erhält.

Da die Sonne nicht eine Kreislinie über dem Horizonte beschreibt, die scheinbare Bewegung derselben vielmehr eine Schraubenlinie ist, so ist an dem Ergebnisse der obigen Beobachtungen eine Korrektion anzubringen Vom 22. Dezember bis zum 21. Juni steigt die Sonne, vom 22. Juni bis 21. Dezember geht sie wieder zurück in einer Schraubenlinie. Dieses Aufwärts- bzw. Abwärtssteigen findet auch zwischen den beiden Sonnenbeobachtungen morgens und nachmittags statt und macht sich um so mehr geltend, je mehr Zeit zwischen den beiden Einstellungen liegt und je weiter man in der Zeit von den Solstitien entfernt ist.

Die Beobachtungen mögen an einem Tage des April geschehen, um 10 Uhr morgens die erste auf der Ostseite des Meridians. Die Sonne erreicht etwas nach 12 Uhr den höchsten Stand und steht um 2 Uhr noch zu hoch für die Richtung der Visierlinie. Erst später wird der Horizontalfaden dieselbe Stellung vom Morgen haben. Der Horizontalwinkel auf der Westseite des Meridians wird gröſser als der auf der Ostseite. Würde man die Halbierungslinie des Winkels der beiden Einstellungen als Südrichtung wählen, so würde diese nach Westen aus der Meridianebene heraustreten. Der ganze Winkel ist also zu groſs.

Nach dem 21. Juni ist es umgekehrt. Im September z. B. steht die Sonne schon vor 2 Uhr so hoch wie um 10 Uhr; der Winkel auf der rechten Seite wird zu klein und damit auch der ganze Winkel; die Halbierungslinie wird nach Osten von der Südrichtung abweichen.

Demnach ist vor der Halbierung des Winkels zwischen den korrespondierenden Sonnenhöhen in der Zeit vom 22. Dezember bis 21. Juni der gemessene Winkel um die Korrektion $\varkappa$ zu vermindern, in der übrigen Zeit zu vermehren.

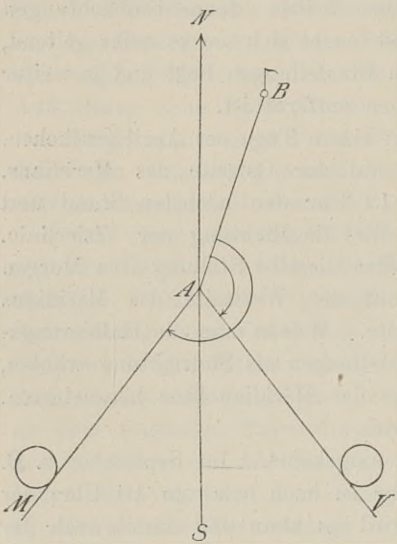
Die Gröſse $\varkappa$ hängt ab von der geographischen Breite φ des Beobachtungsortes, von der in Zeitminuten ausgedrückten Zwischenzeit t zwischen den korrespondierenden Beobachtungen und von der Änderung D der Sonnendeklination an dem betreffenden Tage in einer Zeitminute. Verwandelt man die Anzahl Zeitminuten t in das sexagesimale Bogenmaſs $15t$ und versteht man unter D Bogensekunden, so ist

$$\varkappa = \frac{t \cdot D}{\cos\varphi \cdot \sin 15t}.$$

Den Breitengrad φ entnimmt man einer geographischen Karte, t beobachtet man an der Taschenuhr und D bzw. $\log D$ liest man aus einer Tafel ab.

F. G. Gaufs: Die trigonometrischen etc. Rechnungen in der Feldmefskunst. 2. Aufl. 1893. Die Logarithmen von D auf S. 65 2. Teil sind negativ, weil D für eine Zeitminute ein echter Bruch ist; sie sind in Form dekadischer Ergänzungen geschrieben. — W. Jordan: Grundzüge der astronomischen Zeit- und Ortsbestimmung, 1885, enthält S. 17 des Anhanges eine Tafel von D für ganze Stunden und für je drei Tage eines jeden Monats.

Fig. 180.



An zwei Beispielen soll gezeigt werden, wie man nach dem Vorstehenden das Azimuth ν_a^b der Geraden AB im Punkte A findet (Fig. 180).

1. Unter Anwendung eines einfachen Theodolit hat man am 22. April morgens 10 Uhr und nachmittags 2 Uhr 3 Min. folgende Ablesungen notiert:

bei der Einstellung auf Signal B:

$$230^0\ 48'\ 20'' = b$$

bei der Einstellung auf die Sonne vormittags: $340^0\ 30'\ 50'' = v$

bei der Einstellung auf die Sonne nachmittags: $44^0\ 38'\ 30'' = n$.

Die geographische Breite von Münden ist rund $\varphi = 51^0\ 25'$; die ganze Zwischenzeit der Beobachtungen war 4 Stunden 3 Minuten = 243 Minuten; in Bogenmafs ist also

$$15 \cdot t = 243 \cdot 15' = \tfrac{1}{4} \cdot 243^0 = 60^0\ 45'$$

und

$$\varkappa = \frac{243 \cdot D}{\cos 51^0\ 25' \cdot \sin 60^0\ 45'}.$$

Die Berechnung lautet

$$\begin{aligned}
\log 243 &= 2 \cdot 386 \\
\log D &= 9 \cdot 926 - 10 \\
\text{dek. Erg. } \log\cos 51^0\ 25' &= 0 \cdot 205 \\
\text{dek. Erg. } \log\sin 60^0\ 45' &= 0 \cdot 059 \\
\hline
\log \varkappa &= 2 \cdot 576 \\
\varkappa &= 377'' = 6'\ 17''.
\end{aligned}$$

Der Winkel zwischen AB und der Einstellung vormittags ist $v - b$; der verbesserte Winkel zwischen der Vormittags- und Nachmittagseinstellung ist $n - v - \varkappa$; der Winkel zwischen AB nach rechts und der Südrichtung AS ist

$$BAS = v - b + \frac{n - v - \varkappa}{2} = \frac{n + v - \varkappa}{2} - b$$

$$v_a^b = NAB = 180^0 - BAS.$$

Durch Einsetzung der numerischen Werte erhält man

$$BAS = \frac{404^0\ 38'\ 30'' + 340^0\ 30'\ 50'' - 0^0\ 6'\ 17''}{2} - 230^0\ 48'\ 20''$$

$$= 141^0\ 43'\ 11''$$

$$v_a^b = 38^0\ 16'\ 49''$$

das nach der Anw. IX zu rechnende Azimuth der Linie AB.

2. Am 20. Juni hat man durch Beobachtung entsprechender Sonnenhöhen am Horizontalkreise eines Repetitionstheodolit in der ersten Fernrohrlage als Mittel beider Noniusablesungen erhalten:

	vormittags	nachmittags
$\alpha_v =$	$281^0\ \ 5'\ 10''$	$61^0\ \ 5'\ 20''$.
	$285^0\ 47'\ 15''$	$56^0\ 22'\ 47''$
	$294^0\ 17'\ 23''$	$47^0\ 53'\ 19''$
	$305^0\ 36'\ 45''$	$\alpha_n = 36^0\ 33'\ 12''$

Am 22. Juni waren die Ablesungen in der zweiten Fernrohrlage:

$\alpha_v =$	$281^0\ \ 5'\ 50''$	$61^0\ \ 5'\ 24''$.
	$288^0\ 11'\ 20''$	Sonne bedeckt
	$294^0\ 12'\ 58''$	$47^0\ 58'\ 24''$
	$305^0\ 26'\ 52''$	$\alpha_n = 36^0\ 34'\ 34''$

An beiden Tagen, vor und nach dem Solstitium, hatte man vor der ersten Sonnenbeobachtung Nonius I auf Null des Limbus gestellt und mit festgeklemmter Alhidade nach dem Signal in B visiert und darauf durch Rechtsdrehung der gelösten Alhidade die Einstellungen auf die Sonne vorgenommen. Wie grofs ist das Azimuth v_a^b, oder welche Rechtsdrehung mufs die Nordrichtung machen, um in die Richtung AB zu kommen?

Da das positive D vom 20. Juni durch das negative D am 22. Juni aufgehoben wird, so können wir die Korrektion $\varkappa$ vernachlässigen. Die Südrichtung ist die Halbierungslinie je eines Winkels zwischen den entsprechenden Sonneneinstellungen. Die Rechtsdrehung der Geraden AB bis in die Südrichtung hat also die Gröfse

$$\alpha = \alpha_v + \tfrac{1}{2}(\alpha_n - \alpha_v) = \tfrac{1}{2}(\alpha_v + \alpha_n).$$

Aus den zusammengehörigen Gröfsen α beider Fernrohrlagen nehmen wir das Mittel, also von

$$\tfrac{1}{2} \cdot (281^0\ 5'\ 10'' + 421^0\ 5'\ 20'') = 351^0\ 5'\ 15'' \quad \text{und}$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot (281^0\ 5'\ 50'' + 421^0\ 5'\ 24'') = 351^0\ 5'\ 37'' \quad \text{u. s. w.}$$

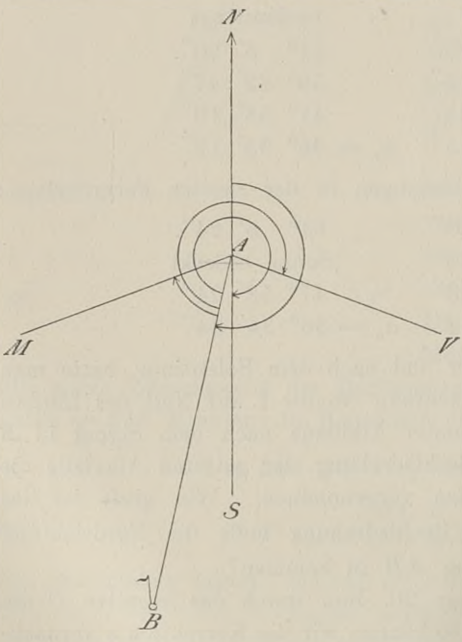
Von	$351^0\ 5'\ 15''$	und	$351^0\ 5'\ 37''$	das Mittel	$351^0\ 5'\ 26''$
„	$5'\ 21''$	„	$5'\ 41''$	„ „	$5'\ 31''$
„	$4'\ 59''$	„	$5'\ 43''$	„ „	$5'\ 21''$

Das Mittel hiervon giebt $BAS = \alpha = 351^0\ 5'\ 26''$; demnach ist nach Fig. 181

$$v_a^b = 180^0 + (360^0 - 351^0\ 5'\ 26'') = 188^0\ 54'\ 34''.$$

Wäre die Figur nicht beigegeben, so würde man sich dieselbe herstellen, indem man den Nullradius des Transporteurs auf AB legt, darauf α_v zeichnet; wieder von AB als Nullradius ausgehend, zeichnet man α_n, erhält dadurch den Winkel MAV, der als Halbierungslinie AS hat.

Fig. 181.

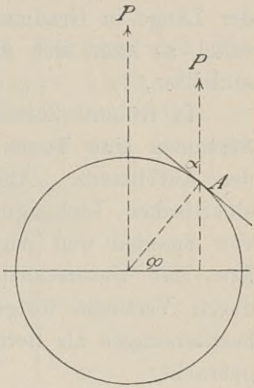


Die atmosphärische Strahlenbrechung ist nicht berücksichtigt, da es sich vor- und nachmittags um gleiche Höhen handelt, obschon durch die verschiedene Erwärmung der Luft zu beiden Zeiten der Gang der Lichtstrahlen ohne Zweifel ein etwas anderer wird.

Im Anschlusse an das Vorstehende läfst sich nun die g e o g r a p h i s c h e B r e i t e eines Ortes in einer Weise bestimmen, die für die gegenseitige Orientierung von Spezialkarten hinreichend genau ist.

Unter der P o l h ö h e des Punktes A versteht man den Winkel, der von der Horizontalen im Punkte A, also der Tangente, und von der Richtung nach dem Himmelspole gebildet wird. Die letztere Richtung von A aus ist in Hinsicht der unendlichen Entfernung des Poles der Erdachse parallel. Es folgt daraus, dafs die Polhöhe von A demjenigen Winkel gleich ist, der eingeschlossen wird von dem Erdradius nach A und dem Radius des Äquators, dafs also die Polhöhe der geographischen Breite gleich ist. Aus der Fig. 182 ist dies ohne weiteres ersichtlich, da die Schenkel des Winkels α auf denjenigen von φ senkrecht stehen.

Fig. 182.



Wie wir oben gesehen haben, befindet sich im Pol keine sichtbare Marke, die wir anvisieren können. Wir benutzen daher den Polarstern, welchen wir mit dem Fernrohr verfolgen. Im Augenblick seines gröfsten Abstandes rechts oder links stellen wir den Horizontalfaden auf ihn ein und lesen am Höhenkreise ab.

Wählt man die untere oder obere Kulmination, indem man den Stern mit dem Horizontalfaden verfolgt und abwartet, bis die Bewegung nach oben oder unten die entgegengesetzte wird, so ist der Polabstand $1^0\ 12'$ zu addieren bzw. zu subtrahieren. Ist der gefundene Höhenwinkel $50^0\ 13'\ 5''$ und trat der Stern von unten nach oben an den Faden, so ist die geographische Breite des Ortes $\varphi = 51^0\ 25'\ 5''$.

Zur Bestimmung des Meridians sind besondere Instrumente konstruiert von Prof. Schmidt in Freiberg: Der Zeit- und Meridiansucher und von Sägmüller: the Saegmuller Solar Attachment. Ztschr. für Instrumentenkunde. 1888 und 1889.

Die geographische Länge eines Ortes A aus der bekannten Länge des Ortes B findet man heutzutage durch telegraphische Signale und richtig gehende Uhren. Ist z. B. der Meridian von Münden festgelegt und die Uhr nach Sonnenzeit gestellt, so zeigt sie 12 Uhr, wenn die Sonne mit ihrem Mittelpunkte durch den Meridian geht. Wird in Berlin um 12 Uhr Sonnenzeit ein Signal gegeben, welches $14^m\ 58^s$ vor 12^h in Münden eintrifft, so liefert die Multiplikation dieses Zeitunterschiedes mit 15 das Bogenmafs $3^0\ 44'\ 30''$. Die geographische Länge der Berliner Sternwarte östlich von Greenwich ist $13^0\ 23'\ 43''$, also diejenige von Münden $\lambda = 9^0\ 39'\ 13''$ ö. Gr.

Inbetreff der Benutzung der Mondfinsternisse, des Verschwindens und Auftauchens der Juppitermonde und der Sternbedeckung durch den Mond sei nur hervorgehoben, dafs dieselbe in dem gleichzeitigen Eintreten dieser Erscheinungen an den verschiedenen Orten der Erde begründet ist. In dem Augenblicke, in welchem derselbe Trabant in den Schatten des Juppiter eintaucht oder an der anderen Seite hervorleuchtet, werden an den Orten A und B die Ortszeiten notiert. Ihr Unterschied dient wieder zur Bestimmung der Länge in Gradmafs. Liegen A und B auf dem gleichen Parallel, so kann sich die Messung des Bogens AB nach Metern anschliefsen.

In frühern Zeiten entzündete man nachts zwischen den beiden Stationen eine Tonne Schiefspulver und merkte sich die Ortszeit des Aufblitzens. Ähnlich hat es Oberst Perrier neuerdings mit elektrischen Lichtsignalen bei der trigonometrischen Verbindung von Spanien und Algier gemacht. Die sog. physiologische Zeit bzw. der Unterschied in der Nervenleitung der Beobachter wird durch Versuche festgestellt und bei den telegraphischen Längenbestimmungen als Betrag der persönlichen Gleichung in Anrechnung gebracht.

§ 58. **Die Koordinaten.**

Um einen Punkt auf der Erdoberfläche seiner horizontalen Lage nach eindeutig zu bestimmen, mufs man seine geographische Breite und Länge kennen Beide Begriffe unterscheidet man wieder nach der Himmelsrichtung und spricht von nördlicher und südlicher Breite und östlicher und westlicher Länge. Die Linien, von denen man bei der Zählung ausgeht, sind der Äquator und der Nullmeridian, bei uns der Meridian von Greenwich. Diese beiden Linien bilden das geographische Koordinatensystem; die Abstände eines Punktes von diesen Linien werden, als Teile von Kreisen betrachtet, in Gradmafs ausgedrückt.

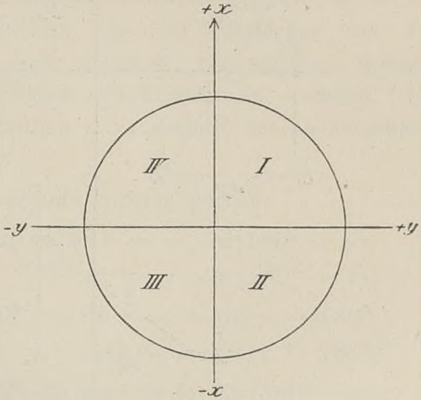
Ganz analog geschieht die Orientierung auf den Spezialkarten oder Plänen. Da auf denselben sich die Teile der Erdoberfläche als ebene Flächen darstellen, so werden wir die Abstände von den als Anfangslinien gewählten Richtungen nicht mehr im Gradmafse, sondern im Längenmafse, d. h. in Metern ausdrücken und werden der bequemeren Rechnung wegen nicht vom Äquator und dem Nullmeridian zählen, sondern für jedes Gebiet ein näher liegendes Koordinatensystem zugrunde legen. So galt für die Spezialvermessungen in der hiesigen Gegend bis jetzt der Parallel und

Meridian der Göttinger Sternwarte als Koordinatensystem und werden von diesen Linien die Abstände nicht mehr als sphäroidische, sondern als ebene betrachtet und demnach in Metern gegeben.

Der ebene Abstand des Turmknopfes einer Mündener Kirche vom Meridian der Göttinger Sternwarte ist $y = -20\,306{,}58^{\mathrm{m}}$, vom Parallel $x = -12\,395{,}90^{\mathrm{m}}$. Dabei ist y der Abstand von der Abscissenachse, der Nordrichtung, und x der Abstand von der Ordinatenachse, die Wahl der Vorzeichen entspricht der Vorschrift in Anw. IX. § 4.

Nach dieser sind die Abscissen nach Norden und die Ordinaten nach Osten positiv, diejenigen nach Süden bzw. Westen negativ zu zählen. Die Quadranten folgen in rechtläufiger Ordnung auf einander, und zwar wird der erste von der Nord- und Ostrichtung eingeschlossen (Figur 183). Der genannte Punkt Mündens liegt also im dritten Quadranten.

Fig. 183.



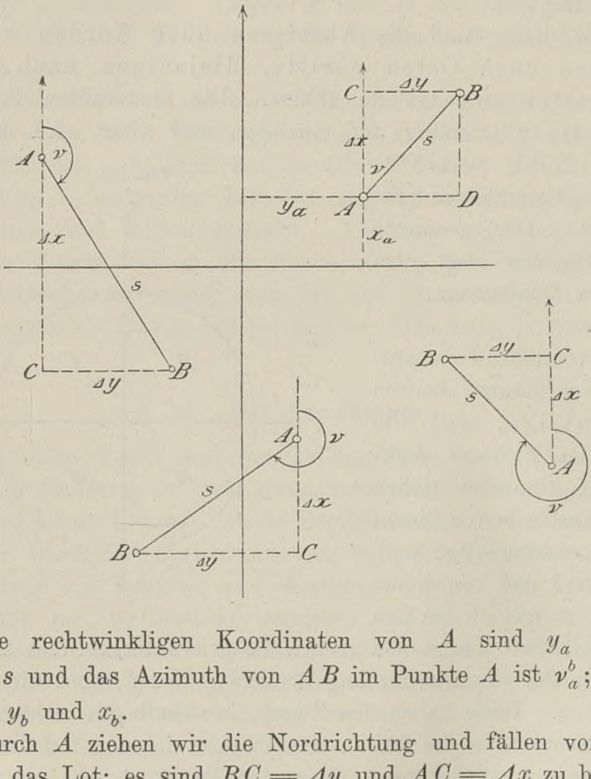
Die vorstehend besprochenen Koordinaten heifsen rechtwinklige, weil die Achsen des Systems senkrecht auf einander stehen und die Abstände von diesen ebenfalls rechtwinklige sind. Eine andere Art von Koordinaten, die freilich bei den späteren Betrachtungen den rechtwinkligen untergeordnet sind und als Hilfsmittel zur Bestimmung derselben dienen, sind die Polarkoordinaten. Diese haben den Zweck, innerhalb des rechtwinkligen Koordinatensystems die Lage eines Punktes inbezug auf den nächst benachbarten zu berechnen. Der eine Punkt A ist jedesmal der Ausgangspunkt für den folgenden B. Kennt man durch Messung die Entfernung AB, so kann B überall auf dem Kreise liegen, den man mit AB um A beschreibt. Um B sicher zu finden, mufs man die Richtung wissen, in welcher man sich zu bewegen hat.

Zur Orientierung durch Polarkoordinaten mufs also gegeben sein: der Ausgangspunkt oder Pol A, die Entfernung AB des gesuchten Punktes vom Pol oder der Radiusvektor und der Winkel, den der Radiusvektor mit einer durch den Pol gehenden Grundrichtung bildet, d. h. das Azimuth oder die Neigung v_a^b der Geraden AB.

Die Grundrichtung ist für uns stets die Nordrichtung, der Azimuthalwinkel liegt stets rechts von der Nordrichtung zwischen ihr und der betreffenden Strecke.

1. Aus den Polarkoordinaten eines Punktes sollen seine rechtwinkligen Koordinaten berechnet werden.

Fig. 184.



Die rechtwinkligen Koordinaten von A sind y_a und x_a; $AB = s$ und das Azimuth von AB im Punkte A ist v_a^b; es sind gesucht y_b und x_b.

Durch A ziehen wir die Nordrichtung und fällen von B auf dieselbe das Lot; es sind $BC = \Delta y$ und $AC = \Delta x$ zu berechnen aus s und v. Da der Anfänger leicht in Versuchung kommen kann, diese Stücke aus dem Dreiecke ABD zu berechnen, so sei ein für allemal gesagt: Erst ist die Nordrichtung durch A und dann auf diese das Lot von B zu ziehen. Absolut genommen sind die Stücke in beiden Dreiecken gleich, aber da wir die Lage von B auf A beziehen müssen, so muſs auch die Richtung von BC und AC bekannt sein. Das Ergebnis der Rechnung muſs ein Vorzeichen bekommen, welches anzeigt, ob der Punkt B rechts oder links, ober- oder unterhalb A liegt. Das Vorzeichen hängt ab vom Winkel ν bzw. von der trigonometrischen Funktion des $\sphericalangle \nu$.

Für jede Gröfse des Azimuth ν und für jede gegenseitige Lage von A und B in irgend einem oder zwei Quadranten ist

$$\text{I.} \qquad \varDelta y_b = s \cdot \sin \nu \qquad \text{und} \qquad \varDelta x_b = s \cdot \cos \nu ,$$

also

$$y_b = y_a + \varDelta y_b \qquad\qquad x_b = x_a + \varDelta x_b$$

die Koordinaten von B.

Die Gröfsen $\varDelta y$ und $\varDelta x$ heifsen die Koordinatenstücke oder -unterschiede; $\varDelta y$ ist der Ordinatenunterschied oder das Sinusprodukt und $\varDelta x$ der Abscissenunterschied oder das Cosinusprodukt.

Da s als absolute Länge stets positiv ist, so müssen die Vorzeichen der Koordinatenstücke durch sinus ν bzw. cosinus ν bestimmt werden. Wollte man jedesmal im Punkte A den Neigungswinkel ν zeichnen, so würde das von B auf die Nordlinie gefällte Lot sofort die Richtung von A aus gerechnet, also die Vorzeichen von $\varDelta y$ und $\varDelta x$ liefern; man würde auch erkennen, von welchem spitzen Winkel man die trigonometrischen Funktionen zu nehmen hat. Das würde jedoch sehr umständlich sein; deshalb sei an folgendes aus der Trigonometrie erinnert.

Ist $\nu < 90^0$, so sind sinus und cosinus positiv;

ist $\nu > 90^0$ und $< 180^0$, so $\sin \nu = + \sin(180^0 - \nu)$,
$\cos \nu = - \cos(180^0 - \nu)$;

ist $\nu > 180^0$ und $< 270^0$, so $\sin \nu = - \sin(\nu - 180^0)$,
$\cos \nu = - \cos(\nu - 180^0)$;

ist $\nu > 270^0$ und $< 360^0$, so $\sin \nu = - \sin(360^0 - \nu)$,
$\cos \nu = + \cos(360^0 - \nu)$.

Beispiel. $\sin 100^0 = \sin 80^0$; $\cos 100^0 = - \cos 80^0$;
$\sin 200^0 = - \sin 20^0$; $\cos 200^0 = - \cos 20^0$;
$\sin 300^0 = - \sin 60^0$; $\cos 300^0 = + \cos 60^0$.

In Fig. 184 oben links sei $\nu = 149^0$, $s = 161$, $y_a = - 130$, $x_a = + 69$, so ist

$$\varDelta y_b = + 161 \cdot \sin 31^0 = + 82{,}91;$$
$$y_b = - 130 + 82{,}91 = - 47{,}09.$$
$$\varDelta x_b = - 161 \cdot \cos 31^0 = - 138{,}01;$$
$$x_b = + 69 - 138{,}01 = - 69{,}01.$$

In der Fig. 184 unten rechts sei $\nu = 316^0$, $s = 100$, $y_a = + 196$, $x_a = - 129$, so ist

$$\Delta y = -100 \cdot \sin 44^0 = -69{,}47; \quad y_b = +126{,}53$$
$$\Delta x = +100 \cdot \cos 44^0 = +71{,}93; \quad x_b = -57{,}07.$$

Wären weitere Punkte C, D u. s. w. durch die Entfernungen von dem jedesmal vorhergehenden Punkte und durch die Neigungswinkel gegeben, so würde man in gleicher Weise die Koordinaten dieser Punkte finden.

2. Aus den rechtwinkligen Koordinaten zweier Punkte sollen die Polarkoordinaten des einen berechnet werden, wenn der andere der Pol ist.

Es sind die Koordinaten $y_a x_a$ und $y_b x_b$ gegeben; es wird die Strecke $AB = s$ und ihr Azimuth ν gesucht.

In den einzelnen Dreiecken ABC der Fig. 184 ist

$$\text{II.} \qquad \operatorname{tg} \nu_a^b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}.$$

Da der Winkel ν jeden Wert von 0^0 bis 360^0 haben kann, die Logarithmentafeln jedoch nur spitze Winkel liefern, so müssen die Vorzeichen im Zähler und Nenner den gewünschten Aufschlufs geben. Bei den Unterschieden der Koordinaten, bei Δy und Δx, erhielten wir die Vorzeichen durch den Winkel, hier finden wir den Winkel durch die Vorzeichen.

Die Funktion tangens kann man so definieren: Die Tangente eines Winkels ist das geometrische Verhältnis der Ordinate zur Abscisse. Diese Linien erhält man, indem man wieder durch den Scheitel A des Winkels die Nordrichtung zieht und von B auf dieselbe das Lot fällt. Die Katheten des zunächst zu suchenden spitzen Winkels erscheinen als die Koordinatenunterschiede von A und B oder, A als Nullpunkt betrachtet, als die Koordinaten von B. Die Vorzeichen dieser Koordinaten weisen hin auf den Quadranten, in welchem B von A aus liegt.

Im ersten Quadranten liegt B oben rechts von A, Ordinate und Abscisse sind positiv; im zweiten liegt B unten rechts von A, die Ordinate ist positiv, die Abscisse negativ; im dritten liegt B unten links von A, beide Koordinaten sind negativ; im vierten liegt B oben links von A, die Ordinate ist negativ, die Abscisse positiv.

Ist also $\operatorname{tang} \nu = \frac{+}{+}$, so $\nu < 90^0$;

$\operatorname{tang} \nu = \frac{+}{-}$, so $\nu > 90^0$ und $< 180^0$;

$\operatorname{tang} \nu = \frac{-}{-}$, so $\nu > 180^0$ und $< 270^0$;

$\operatorname{tang} \nu = \frac{-}{+}$, so $\nu > 270^0$ und $< 360^0$.

Ist ν_1 der in den Tafeln gefundene spitze Winkel, so ist der Reihe nach

$$\nu = \nu_1;\quad \nu = 180^0 - \nu_1;\quad \nu = 180^0 + \nu_1;\quad \nu = 360^0 - \nu_1.$$

Betrachten wir B als Pol, so ist

$$\operatorname{tg} \nu_b^a = \frac{y_a - y_b}{x_a - x_b}.$$

Die Unterschiede im Zähler und Nenner bekommen das entgegengesetzte Vorzeichen; es wird dadurch das bestätigt, was bei der Benutzung der Bussole gesagt wurde: die Azimuthe in den beiden Enden einer Strecke unterscheiden sich um 180^0.

Nach der Fig. 184 ist ferner

$$\text{III.} \qquad AB = \frac{y_b - y_a}{\sin \nu_a^b} = \frac{x_b - x_a}{\cos \nu_a^b}.$$

Die Formeln II und III, welche für die Figur oben rechts ohne weiteres verständlich sind, gelten für jede von B auf A bezogene Lage.

Die Formel III bietet die Annehmlichkeit, die Rechnung kontrollieren zu können; man berechnet AB nach beiden Ausdrücken. Die Berechnung von ν hat die Logarithmen der Zähler bereits geliefert, und für die Logarithmen der Nenner sind die Tafeln noch aufgeschlagen.

Da es sich bei $AB = s$ um eine absolute Länge handelt, die immer positiv sein mufs, so mufs, wenn der Zähler negativ ist, auch der Nenner negativ sein. Man kümmert sich um die Vorzeichen überhaupt nicht.

Bei der Berechnung der Formel II wird sich auch herausstellen, dafs man das Vorzeichen sowohl im Zähler als auch im Nenner stehen lassen mufs und die Brüche auch mit Rücksicht auf III nicht kürzen darf.

Sind die Koordinatenunterschiede nur gering, betragen sie nur wenige Meter oder nur Centimeter, so ist nach dem Pythagoras

$$AB = s = \sqrt{(y_b - y_a)^2 + (x_b - x_a)^2}.$$

Für Centimeter schreibt man näherungsweise

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + 0{,}3y,$$

wenn $x > y$ ist; $x = 0{,}98$, $y = 0{,}38$ liefert die Hypotenuse 1,05, während sie nach der Näherungsformel 1,09 ist.

Beispiele:

1. Die Koordinaten von M sind $y_m = +37$, $x_m = -111$; von N: $y_n = -68$, $x_n = -183$; gesucht ν_m^n und ν_n^m.

$$\operatorname{tg} \nu_m^n = \frac{y_n - y_m}{x_n - x_m} = \frac{-68-(+37)}{-183-(-111)} = \frac{-105}{-72}$$

$$\nu_m^n = 180^0 + 55^0\ 33'\ 40'' = 235^0\ 33'\ 40''.$$

$$\operatorname{tg} \nu_n^m = \frac{y_m - y_n}{x_m - x_n} = \frac{+37-(-68)}{-111-(-183)} = \frac{+105}{+72}$$

$$\nu_n^m = 55^0\ 33'\ 40''.$$

$$MN = \frac{-105}{\sin \nu_m^n} = \frac{-72}{\cos \nu_m^n} = \frac{+105}{\sin \nu_n^m} = 127{,}3.$$

2. Es sei $y_p = -47{,}09$, $x_p = -69{,}01$; $y_q = -130$, $x_q = +69$; ? ν_p^q und s.

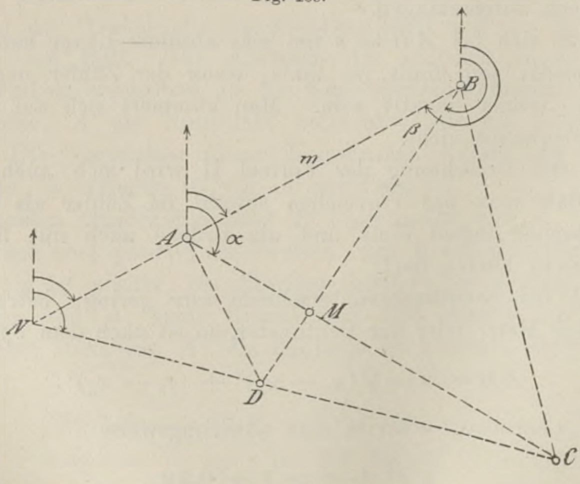
$$\operatorname{tg} \nu_p^q = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \frac{-130-(-47{,}09)}{+69-(-69{,}01)} = \frac{-82{,}91}{+138{,}01}$$

$$\nu_p^q = 360^0 - 30^0\ 59'\ 45'' = 329^0\ 0'\ 15''$$

$$\nu_q^p = 149^0\ 0'\ 15''$$

$$s = 161$$

Fig. 185.



3. Die Koordinaten der vier unzugänglichen aber sichtbaren Dreieckspunkte A, B, C, D seien:

$$y_a = -150 \quad y_b = +100 \quad y_c = +280 \quad y_d = -60$$
$$x_a = +155 \quad x_b = +250 \quad x_c = -110 \quad x_d = -50;$$

welches sind die Koordinaten des Durchschnittspunktes M der Diagonalen AC und BD? welches diejenigen von N, des Schnittpunktes von AB und CD? (Fig. 185).

$$\operatorname{tg} \nu_a^c = \frac{y_c - y_a}{x_c - x_a}$$
$$\nu_a^c - \nu_a^b = \alpha = BAM.$$
$$\operatorname{tg} \nu_a^b = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

$$\operatorname{tg} \nu_b^a = 180^0 + \nu_a^b$$
$$\nu_b^a - \nu_b^c = \beta = ABM.$$
$$\operatorname{tg} \nu_b^c = \frac{y_c - y_b}{x_c - x_b}$$

$$AB = m = \frac{y_b - y_a}{\sin \nu_a^b} = \frac{x_b - x_a}{\cos \nu_a^b}.$$

$$AM = \frac{m \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

$$\varDelta y_m = AM \cdot \sin \nu_a^c; \quad \varDelta x_m = AM \cdot \cos \nu_a^c.$$

$$y_m = -150 + \varDelta y_m = 0{,}02; \quad x_m = +155 + \varDelta x_m = 62{,}5.$$

Die Koordinaten des Punktes N findet man nach Berechnung des Dreiecks ADN. Zur Kontrolle kann man die Werte von verschiedenen Punkten aus berechnen.

Sind die Koordinaten eines beliebigen Punktes y und x, so lauten die Gleichungen von AC und BD:

$$\frac{y - y_a}{x - x_a} = \frac{y_a - y_c}{x_a - x_c} \quad \text{und} \quad \frac{y - y_b}{x - x_b} = \frac{y_b - y_d}{x_b - x_d}$$

Läſst man die beiden Gleichungen zugleich bestehen, so gehört der Punkt mit den Koordinaten y und x beiden Geraden an, d. h. y und x sind die Koordinaten des Schnittpunkts M. Es sind

$$\frac{y + 150}{x - 155} = \frac{-430}{+265} \quad \text{und} \quad \frac{y - 100}{x - 250} = \frac{160}{300}$$

nach y und x aufzulösen.

Die Aufgabe kann man auch so einkleiden: Die folgenden 4 Geraden bilden der Reihe nach die Seiten eines Vierecks

$$AB:\ 19y - 50x = -10600 \qquad CD:\ 3y + 17x = -1030$$
$$BC:\ 2y + x = 450 \qquad DA:\ 41y + 18x = -3360.$$

Welches sind die Seiten und Winkel des Vierecks und die Koordinaten des Schnittpunkts je zweier Seiten?

4. Um den Weg von A nach E durch einen dichten Bestand abzustecken, hat man gemessen (Fig. 186):

$$AB = 96, \quad BC = 98, \quad CD = 114, \quad DE = 81$$

und die Brechungswinkel

$$ABC = \beta_1 = 139^0\,30', BCD = \beta_2 = 139^0, CDE = \beta_3 = 154^0\,45'.$$

Welches ist der Durchhiebswinkel $EAB = \alpha$ und wie lang ist AE?

Diese Aufgabe, welche bereits in § 48 Fig. 115 auftrat, möge dazu dienen, aus einem Anfangsazimuth und den Brechungs-

Fig. 186.

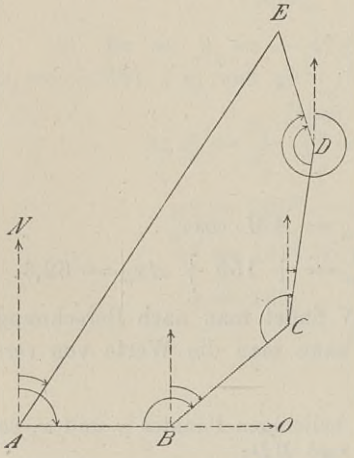
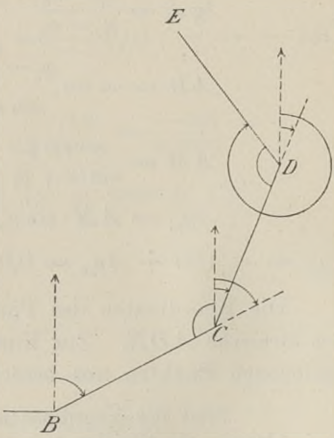


Fig. 187.



winkeln die Azimuthe der übrigen Seiten zu berechnen. Man lege das Fünfeck so, daſs A der Nullpunkt rechtwinkliger Koordinaten und AB die positive Ordinatenachse wird. Das Anfangsazimuth ν_a^b wird dadurch 90^0; können wir nun $NAE = \nu_a^e$ berechnen, so ist $\alpha = \nu_a^b - \nu_a^e$. Dazu sind die Koordinaten von E erforderlich.

Die Azimuthe sind:

$\nu_a^b = 90^0$; $\nu_b^c = \beta_1 - 90^0$; $\nu_c^d = \nu_b^c - (180^0 - \beta_2) = \nu_b^c + \beta_2 - 180^0$; $\nu_d^e = \nu_c^d + \beta_3 + 180^0$ (Fig. 187). In Zahlen ist

$$\nu_a^b = 90^0; \quad \nu_b^c = 49^0\ 30'; \quad \nu_c^d = 8^0\ 30'; \quad \nu_d^e = 343^0\ 15'.$$

Die Koordinaten sind:

$$y_a = 0 \quad y_b = 96 \quad y_c = 96 + 98 \cdot \sin 49^0\, 30' = 170{,}52$$

$$x_a = 0, \quad x_b = 0, \quad x_c = \qquad 98 \cdot \cos 49^0\, 30' = 63{,}65,$$

$$y_d = 170{,}52 + 114 \cdot \sin \ 8^0\, 30' = 187{,}37$$

$$x_d = 63{,}65 + 114 \cdot \cos \ 8^0\, 30' = 176{,}40,$$

$$y_e = 187{,}37 - 81 \cdot \sin 16^0\, 45' = 164{,}03$$

$$x_e = 176{,}40 + 81 \cdot \cos 16^0\, 45' = 253{,}96.$$

$$\operatorname{tg} \nu_a^e = \frac{164{,}03}{253{,}96}; \quad \nu_a^e = 32^0\, 51'\, 29''.$$

Die Durchhiebswinkel $\alpha = 57^0\, 8'\, 31''$ und $E = 49^0\, 36'\, 29''$;

$$AE = 302{,}33 = \frac{y_e - y_a}{\sin \nu_a^e} = \frac{x_e - x_a}{\cos \nu_a^e}.$$

§ 59. Anschlufs an die Landesvermessung.

Eine Vermessung an die Landesvermessung anschliefsen heifst: für die Koordinaten der trigonometrischen und polygonometrischen Punkte des Vermessungsgebietes ein Koordinatensystem zugrunde legen, für welches von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme der Koordinatennullpunkt bestimmt ist.

Solcher Systeme giebt es in Preufsen vierzig, welche im Anhange zu Anw. IX aufgeführt sind; ebendort S. 337 ff. finden sich auch die gesetzlichen Bestimmungen über den Anschlufs, vom 29. Dezember 1879, sowie die Ausführungsvorschriften für die Katasterverwaltung. § 1 der Bestimmungen lautet:

Jede im Auftrage oder unter der Leitung von Staatsbehörden ausgeführte Spezialvermessung (Neumessung), welche in geschlosssener Lage einen Flächenraum von hundert Hektaren oder mehr umfafst, mufs an die Detailtriangulation der Landesaufnahme angeschlossen werden.

Wenn bei der Vermessung von Waldungen die Herstellung des Anschlusses an die trigonometrischen Punkte der Landesaufnahme einen unverhältnismäfsigen Kostenaufwand bedingen würde, so wird der Anschlufs erst bei einem Flächenraume von fünfhundert Hektaren und mehr erfordert.

In denjenigen Landesteilen, in welchen seitens der Landesaufnahme eine Detailtriangulation noch nicht zur Ausführung gebracht worden, aber eine anderweit ausgeführte Detailtriangulation vorhanden ist, ist — bis ersteres geschehen — der Anschlufs möglichst an die letztere zu bewirken.

Bei den Katasterneumessungen soll in der Regel schon bei Flächen unter 100 ha der Anschlufs stattfinden.

Es sei eine Gemarkung neu zu vermessen. Der Landmesser hat sich zu erkundigen, ob die angrenzende Gemarkung bereits nach den Grundsätzen der Anw. IX trianguliert ist. Ist das der Fall, so hat er sich (§ 8) auf die zunächst der Grenze gelegenen Punkte zu stützen und ihre Koordinaten unverändert beizubehalten. Ist in der Nachbarschaft noch keine Triangulation ausgeführt, so hat er in dem von der betr. Abteilung der Regierung gelieferten Verzeichnisse nachzusehen, ob innerhalb oder in der Nähe seiner Gemarkung trigonometrische Punkte liegen. Dieser Fall trifft im allgemeinen zu und soll uns hier beschäftigen.

Der Landmesser wählt zunächst möglichst aufserhalb der Grenzen seines Vermessungsdistriktes die Punkte aus, welche trigonometrische werden sollen. Die Anzahl derselben mit Einschlufs der im Innern festgelegten Hauptpunkte soll so grofs sein, dafs durchschnittlich ein trigonometrischer Punkt I. bis IV. Ordnung auf 25 Polygonpunkte entfällt. Wo der Anschlufs an einen Punkt der Landesaufnahme möglich ist, soll er bewirkt werden.

Der Punkt A sei als trigonometrischer Punkt vermarkt, die benachbarten sind B und Z. Ist im Punkte A der Anschlufs möglich, so ist es nicht genug, die Koordinaten von A in dem für die Gegend geltenden Systeme zu berechnen; es mufs für sämtliche Punkte das betr. System mafsgebend sein. Deshalb ist in A auch die Neigung von AB bzw. AZ gegen den Meridian des Koordinatennullpunktes zu ermitteln.

Da ferner die selbständige Messung einer Basis in unserem Falle nicht zulässig ist, so ist dieselbe ebenfalls aus der Landesaufnahme herzuleiten. Es müssen demnach mindestens zwei Punkte der Landesvermessung zum eigentlichen Anschlusse zugleich verwendbar sein.

1. Zwei Punkte P und Q der Landesaufnahme sind zugänglich und von A sichtbar (Fig. 188).

Durch die Koordinaten von P und Q werden bekannt

$$\operatorname{tg} \nu_p^q = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p} \quad \text{und} \quad PQ = \frac{y_q - y_p}{\sin \nu_p^q}.$$

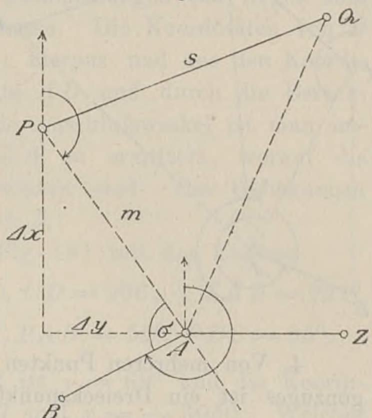
Durch Messung werden unmittelbar gefunden die drei Winkel des

Dreiecks APQ; dadurch $\nu_p^a = \nu_p^q + APQ$ und nach dem Sinussatze $PA = m$; hieraus

$$y_a = y_p + \varDelta y_a = y_p + m \cdot \sin \nu_p^a$$
$$x_a = x_p + \varDelta x_a = x_p + m \cdot \cos \nu_p^a.$$

Um die Koordinaten von B, C u. s. w. zu erhalten, mufs man AB, $BC\ldots$ und ihre Neigungswinkel zum Meridian des Nullpunktes kennen. Die Längen der Seiten AB, BC im Dreiecksnetze werden berechnet, als Strecken eines Polygonzuges gemessen. Ferner ist zu messen der Anschlufswinkel $PAB = \sigma$ oder PAZ oder QAB. Dann ist nach der Figur

Fig. 188.



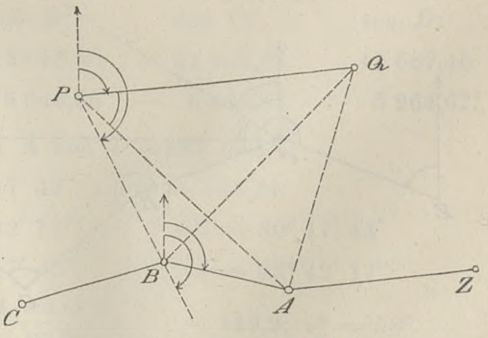
$$\nu_a^b = \nu_p^a + 180^0 - \sigma.$$

Da diese Neigung, sowie alle folgenden Neigungen aus den Koordinaten von P und Q hergeleitet werden, so werden AB, BC u. s. w. in die richtige Lage zum System kommen.

2. Zwei Punkte P und Q sind unzugänglich, aber von A und B sichtbar (Fig. 189).

Wir haben hier die Aufgabe des unzugänglichen Abstandes vor uns. Es sind in A und B alle Winkel zu messen, welche von AB und den Visierstrahlen nach P und Q gebildet werden; unter diesen Winkeln befindet sich zugleich der Anschlufswinkel. Will man

Fig. 189.



$$\sphericalangle PBA = \sigma$$

als solchen benutzen, so berechnet man ν_p^b und erhält

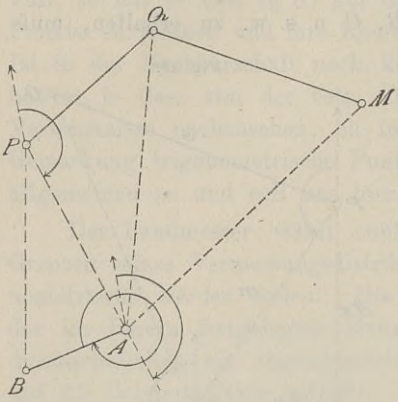
$$\nu_b^a = \nu_p^b - (180^0 - PBA) = \nu_p^b + \sigma - 180^0.$$

3. Drei Punkte P, Q, M sind unzugänglich, aber von A sichtbar. (Fig. 190).

Die zu lösende Aufgabe stimmt im ersten Teile mit der Snellschen überein. Durch die Koordinaten findet man die Längen von PQ und QM, desgleichen als Differenz zweier Azimuthe den Winkel $PQM = \nu_q^p - \nu_q^m$, durch Rechnung $\sphericalangle APQ = \varphi$ und PA und durch Messung $\sphericalangle PAB = \sigma$. Aus ν_p^a und PA erhält man die Koordinaten von A; endlich ist

$$\nu_a^b = \nu_p^a + 180^0 - \sigma.$$

Fig. 190.

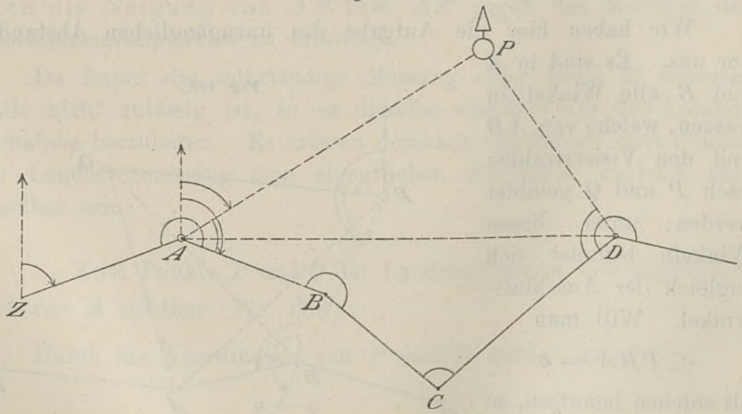


Die Seite AB mufs entweder durch Winkelmessung in B, etwa aus PA, $\sphericalangle PAB$ und $\sphericalangle PBA$ durch Rechnung ermittelt werden, oder durch anderweitigen Anschlufs bekannt sein.

4. Von mehreren Punkten eines bereits angeschlossenen Polygonzuges ist ein Dreieckspunkt der Landesaufnahme sichtbar, er soll zur Kontrolle der Messung dienen, soll „heruntergebracht" werden. (Fig. 191).

Der Anschlufs des Polygonzuges hat irgendwo stattgefunden

Fig. 191.



und ist aus demselben das Azimuth der Seite ZA hergeleitet. Da die nach oben liegenden Brechungswinkel sowie die Strecken des Zuges gemessen sind, so sind der Reihe nach die Koordinaten der

Polygonpunkte bis D berechnet. Der Polygonzug führt in der Nähe des trigonometrischen Punktes P vorbei und ist, um gleich den verwickelteren Fall zu behandeln, von A und D sichtbar, während die Visuren von B und C nach P wegen eines Hügels nicht möglich sind. Man soll aus den Koordinaten von A diejenigen von P berechnen und dadurch den ganzen Zug bis D prüfen. Welche Messungen und Rechnungen sind nötig?

Aufser den Winkel- und Streckenmessungen des Zuges sind die Winkel PAB und PDC zu messen. Die Koordinaten von D findet man nach § 58. Aufgabe 4; hieraus und aus den Koordinaten von A ergiebt sich die Seite AD und durch die Berechnungen der Azimuthe und durch die Anschlufswinkel ist man imstande, die Winkel PAD und PDA zu ermitteln, worauf die Seiten AP und PD leicht zu berechnen sind. Die Gleichungen § 58 I. liefern die Koordinaten von P.

Als Rechenbeispiel diene die Fig. 191 mit den Zahlen:

$$ZA = 220,\ AB = 200,\ BC = 190,\ CD = 296;\ \sphericalangle ZAB = 221^0,$$
$$ABC = 198^0,\ BCD = 99^0,\ \sphericalangle PAB = 52^0,\ PDC = 95^0;$$

das Anschlufsazimuth im Punkte Z ist $\nu = 69^0$ und die Koordinaten von Z sind: $y = -12\,447$ und $x = -6060$. Welches sind die Koordinaten von P? „Die Zahlenwerte aller rechtwinkligen Koordinaten sind bis auf einzelne Centimeter zu berechnen".

Die Neigungswinkel der Polygonseiten sind der Reihe nach

$$69^0,\quad 110^0,\quad 128^0,\quad 47^0;$$

die Koordinaten

	von A:	von B:	von C:	von D:
$y =$	$-12\,241{,}60$	$-12\,053{,}66$	$-11\,903{,}94$	$-11\,687{,}46$
$x =$	$-5\,981{,}16$	$-6\,049{,}56$	$-6\,166{,}54$	$-5\,964{,}67.$

Aus den Koordinaten von A und D erhält man

$$\nu_a^d = 88^0\,17'\,43'',\quad AD = 554{,}24.$$
$$\sphericalangle DAB = 21^0\,42'\,17'',\quad \sphericalangle PAD = 30^0\,17'\,43''$$
$$\sphericalangle ADC = 41^0\,17'\,43'',\quad \sphericalangle PDA = 53^0\,42'\,17''.$$
$$AP = \frac{554{,}24 \cdot \sin 53^0\,42'\,17''}{\sin 84^0} = 449{,}2;\ \nu_a^p = 58^0.$$
$$y_p = -12\,241{,}60 + 380{,}90 = -11\,860{,}70$$
$$x_p = -5\,981{,}16 + 238{,}04 = -5\,743{,}12.$$

Stimmen diese Koordinaten von P mit denen der Landesaufnahme überein, so ist der Polygonzug richtig gemessen und zwar bis D, da wir den Zug von A bis D zur Berechnung von P schon benutzt haben.

Die Koordinaten von P sind zu schreiben: ˣ88 139,30 und ˣ4256,88, d. h. nach Art dekadischer Ergänzungen. Ein vorgesetztes liegendes Kreuz bedeutet eine negative Einheit der Stelle, in welcher es steht, z. B. ˣ4,56 = — 5,44; ˣ45,67 = — 54,33; ˣ2345,78 = — 7654,22. Anw. IX. § 3.

§ 60. Berechnung der rechtwinkligen sphärischen Koordinaten aus den geographischen Koordinaten.

Die trigonometrischen Punkte der Landesvermessung werden durch geographische Koordinaten bestimmt, welche in den Veröffentlichungen der trig. Abteilung der Landesaufnahme enthalten sind. Der Landmesser, welcher mit rechtwinkligen ebenen Koordinaten innerhalb des vorgeschriebenen Systems arbeitet, hat deshalb behufs Anschlusses die geographischen Koordinaten in rechtwinklig sphärische umzuwandeln. Diese werden bei der weitern Berechnung und Kartierung in ihrer wirklichen Länge als gerade Linien betrachtet. Das trig. Formular 6. Anw. IX giebt eine Anleitung für die verlangte Umrechnung; sie geschieht mit Hülfe der Tafeln in Gaufs: Die trig. und polyg. Rechnungen u. s. w. II. Teil. 2. Aufl. 1893.

Als Beispiel diene die Berechnung der rechtwinklig sphärischen Koordinaten eines Punktes in Münden und des trig. Punktes der Göttinger Sternwarte, wenn der trig. Punkt II. Ordnung Kaltenborn als Nullpunkt des Systemes gilt. Die geographische Lage der drei Punkte ist durch Breite und Länge gegeben, welch letztere auf einen beliebigen Nullmeridian, hier auf Ferro, bezogen ist.

$$\begin{array}{rlll} \text{Kaltenborn } P_0\text{:} & \varphi_0 = 51^0\ 47'\ 46{,}545'' & & \lambda_0 = 27^0\ 56'\ 24{,}362'' \\ \text{Münden } P_1\text{:} & \varphi_1 = 51\ \ 25\ \ \ 5{,}417 & & \lambda_1 = 27\ \ 18\ \ 57{,}121 \\ \text{Göttingen } P_2\text{:} & \varphi_2 = 51\ \ 31\ \ 47{,}850 & & \lambda_2 = 27\ \ 36\ \ 28{,}200. \end{array}$$

Nehmen wir zunächst Kaltenborn P_0 und Münden P_1; letzteres liegt südsüdwestlich vom erstern. Denken wir uns durch die beiden Punkte die Meridiane und Parallelkreise gelegt, so kommt nur der Meridian von P_0 als Abscissenachse inbetracht. Die vier Bogenseiten des Vierecks sind nicht je zwei einander gleich und auch nicht gesucht. Gesucht sind vielmehr die Bogenstücke, welche auftreten, wenn man durch P_1 einen größsten Kreis legt, der auf dem Meridiane von P_0 rechtwinklig steht. Die letztern beiden Kreise mögen sich in P_f schneiden, so daſs P_f der Fuſspunkt der von P_1 gezogenen Ordinate y_1 wird.

Die beiden gesuchten Linien sind also $P_1 P_f = y_1$ und $P_0 P_f = x_1$. (Fig. 192).

Der Punkt P_f rückt bei uns stets nach Norden, kommt also stets nördlich vom Parallelkreise des Punktes P_1 zu liegen, so daſs die Breite φ_f auf dem Meridiane von P_0 immer gröſser als φ_1 ist.

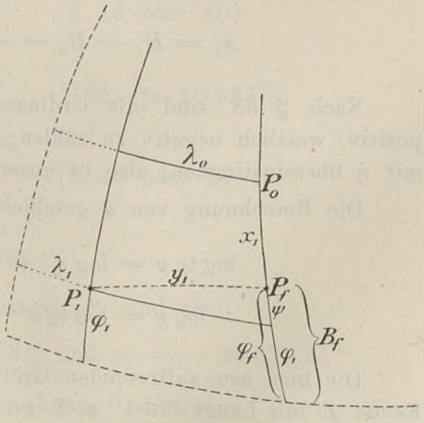
Beginnen wir mit der Berechnung von x_1. Münden P_1 liegt unten links von P_0, also im dritten Quadranten. Würde P_1 auf demselben Meridiane mit P_0 liegen, so würden wir aus den Tafeln: Gauſs S. 18 die in Metern ausgedrückten Bogenlängen vom Äquator bis P_1 und P_0 nämlich B_1 und B_0, nehmen und die Differenz $B_1 - B_0$ bilden, um x_1 ohne weiteres zu haben. Da nun P_1 westlich von P_0 gelegen ist, so stellt sich $P_0 P_f$ als Abscisse dar, und es ist zu berechnen, um wieviel φ_f gröſser als φ_1 ist. Darauf ist das Bogenstück B_f vom Äquator bis P_f zu suchen.

Die Gröſse des zu φ_1 zu addierenden Winkels ψ, welcher $\varphi_f = \varphi_1 + \psi$ macht, hängt ab von dem Längenunterschiede der beiden Punkte P_1 und P_0, d. h. von

$$\eta = \lambda_1 - \lambda_0 = -37'27{,}241'' \\ = -2\,247{,}241''$$

und vom Breitengrade φ_1 des Punktes P_1. Je gröſser der Längenunterschied der beiden Punkte P_1 und P_0 ist, desto weiter ist der Punkt P_f vom Parallel des Punktes P_1 entfernt; und je gröſser die Breite φ_1 ist, desto näher rücken die Meridiane an einander heran und desto kleiner wird der Abstand vom Parallel φ_1.

Fig. 192.



In den Tafeln S. 19, in der Zeile hinter 25′ steht der Logarithmus der Zahl, mit welcher η^2 zu multiplizieren ist, um ψ zu finden. Es ist

$$\psi'' = q \cdot \eta^2 = \text{num. log}\,(4.07\,365 - 10) \cdot 2\,247{,}241^2 \text{ Sek. a. T.}$$

$$\psi'' = 5{,}983'', \quad \text{demnach}$$

$$\varphi_f = \varphi_1 + \psi = 51^0\,25'\,11{,}4''.$$

Die Bogenlänge B_f setzt sich zusammen aus der Bogenlänge für ganze Minuten $B_t = 5\,697\,855{,}381$, die aus der Tafel S. 18 für $51^0\,25'$ gewonnen ist, und aus dem Stücke für $11{,}4''$. Die Länge des Meridians für $1''$ und die Breite φ_1 steht als Logarithmus auf derselben Seite in der folgenden Spalte; der Numerus dazu würde mit 11,4 zu multiplizieren sein.

$$\log \varDelta 1'' = 1.489\,9730$$

$$\log 11{,}4 = 1.056\,9049$$

$$\log \varDelta B = 2.546\,8779$$

$$\varDelta B = 352{,}272$$

$$B_f = B_t + \varDelta B = 5\,697\,855{,}381 + 352{,}272 = 5\,698\,207{,}653$$

$$B_0 = B_t + \varDelta B = 5\,738\,645{,}954 + 1438{,}776 = 5\,740\,084{,}730$$

Da die Abscissen nach Norden von P_0 aus positiv sind, so ergiebt sich zugleich mit dem Vorzeichen, möge P_1 nördlich oder südlich von P_0 liegen, die Abscisse

$$x_1 = B_f - B_0 = -\,41\,877{,}077.$$

Nach § 58 sind die Ordinaten östlich der Abscissenachse positiv, westlich negativ zu zählen; folglich wird y im Vorzeichen mit η übereinstimmen, also in unserm Falle negativ werden.

Die Berechnung von y geschieht nach den Formeln

$$\log \operatorname{tg} y = \log \eta'' + 2\,A_\eta + \log L_f$$

$$\log y = \log \operatorname{tg} y - 2\,A_y.$$

Die hier neu auftretenden Gröſsen findet man in den Tafeln. Es ist L die Länge für $1''$ a. T. auf dem Parallelkreise; L nimmt mit wachsendem φ ab. Man nimmt deshalb das L hinter der nächsten vollen Minute und zählt den Betrag für $60'' - \varDelta\varphi$, hier für $60'' = 11{,}4'' - 48{,}6''$ hinzu, um additive Zahlen zu haben.

$$
\begin{array}{lrl}
 & \log \eta'' = \log 2\,247{,}241 & = 3.351\,6497_n \\
 & 2A_\eta = & \;\;172 \quad \text{(S. 46 oder 41 hinter 3.35 und unter 2)} \\
\log L_f \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. & \log L_t = \log L(51^0\,26') & = 1.285\,8903 \\
 & \varDelta \log L = \log L(48{,}6'') & = 1279 \\
\hline
 & \log \operatorname{tg} y & = 4.637\,6851_n \\
 & -2A_y = & \;\;67 \quad \text{(S. 46 oder 45 hinter 4.63 und unter 7)} \\
\hline
 & \log y & = 4.637\,6784_n \\
 & y & = -43\,418{,}86.
\end{array}
$$

Die rechtwinkligen Koordinaten von Münden P_1 sind also

$$y_1 = -43\,418{,}86^{\,\mathrm{m}} \quad \text{und} \quad x_1 = -41\,877{,}08^{\,\mathrm{m}}.$$

Die in Rechnung kommenden Gröſsen für Göttingen P_2 sind:

$$\eta'' = -19'\,56{,}162'' = -1\,196{,}162''$$

$$\psi'' = \text{num.}\log(4.07\,326 - 10) \cdot 1\,196{,}162^2 \text{ Sek. a. T.}$$

$$\psi'' = 1{,}694''$$

$$\varphi_f = 51^0\,31'\,49{,}544''.$$

$$B_f = 5\,710\,510{,}817; \quad B_0 = 5\,740\,084{,}730$$

$$x = B_f - B_0 = -29\,573{,}913.$$

$$
\begin{array}{lrl}
 & \log \eta'' = & 3.077\,7899_n \\
 & 2A_\eta = & 49 \quad \text{(S. 46 oder 40)} \\
\log L_f \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. & \log L_t = & 1.284\,9404 \\
 & \varDelta \log L = & 277 \quad \text{(Diff. für 10,456'')} \\
\hline
 & \log \operatorname{tg} y = & 4.362\,7629_n \\
 & -2A_y = & 19 \quad \text{(S. 46 oder 44)} \\
\hline
 & \log y = & 4.362\,7610_n \\
 & y = & -23\,054{,}78
\end{array}
$$

Die Koordinaten von Göttingen P_2 sind also:

$$y_2 = -23\,054{,}78^{\,\mathrm{m}} \quad \text{und} \quad x_2 = -29\,573{,}91^{\,\mathrm{m}}.$$

In der vorstehenden Berechnung ist k e i n e P r o b e ihrer Richtigkeit enthalten; dieselbe wird gewährt durch Ableitung der Neigungen und Entfernungen aus den rechtwinkligen Koordinaten und durch Vergleichung derselben mit den Polarkoordinaten, welche in den Verzeichnissen der Landestriangulation gegeben sind. Im

Folgenden ist die Rechnung nach dem trig. Form. 7. Anw. IX ohne Anwendung von Hilfstafeln ausgeführt.

Es ist $\log \varrho'' = 5.31\,443$ und für Norddeutschland

$$\log\left(\frac{1}{2\,r^2}\right) = 6.0891 - 20.$$

Die Formeln sind:

$$\mathfrak{y} = \varDelta y + (B + A); \quad A = y_a \cdot \varDelta x^2 \cdot \frac{1}{2\,r^2}; \quad B = \tfrac{1}{3}\,\varDelta y \cdot \varDelta x^2 \cdot \frac{1}{2\,r^2};$$

$$\mathfrak{x} = \varDelta x + (D - C); \quad C = \varDelta x \cdot y_b^2 \cdot \frac{1}{2\,r^2}; \quad D = \tfrac{1}{3}\,\varDelta x \cdot \varDelta y^2 \cdot \frac{1}{2\,r^2};$$

$$\operatorname{tg} \nu_a = \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}}; \quad E'' = \mathfrak{x} \cdot \frac{\varrho''}{2\,r^2} \cdot 2\,y_a; \quad s = \frac{\mathfrak{y}}{\sin \nu_a} = \frac{\mathfrak{x}}{\cos \nu_a};$$

$$\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{4}\,\pi + \nu_a\right) = \frac{\mathfrak{x} + \mathfrak{y}}{\mathfrak{x} - \mathfrak{y}}; \quad \varepsilon'' = \mathfrak{x} \cdot \frac{\varrho''}{2\,r^2} \cdot \mathfrak{y}; \quad \nu_b = \nu_a \pm \pi - (E + \varepsilon).$$

Nach diesen Formeln soll die sphärische Neigung und die Länge der Linie $P_1 P_2$ aus den vorhin gefundenen rechtwinkligen Koordinaten ermittelt werden; ν_a oder ν_1 ist die Neigung im Punkte Münden P_1. Die Vorzeichen von A, B, C, D stimmen mit denjenigen der nicht quadratischen Faktoren in den betreffenden Formeln überein. Es haben gleiches Vorzeichen: A mit y_a, B mit $\mathfrak{y}$, C mit $\mathfrak{x}$ und D mit $\mathfrak{x}$. Es genüge die volle Ausrechnung für A und B, die unten folgt.

$$\begin{aligned}
y_2 &= -\,23\,054{,}78 & x_2 &= -\,29\,573{,}91\\
y_1 &= -\,43\,418{,}86 & x_1 &= -\,41\,877{,}08\\
\varDelta y = y_2 - y_1 &= +\,20\,364{,}08 & \varDelta x = x_2 - x_1 &= +\,12\,303{,}17\\
B + A &= -\quad 0{,}07 & D - C &= -\quad 0{,}06\\
\mathfrak{y} &= +\,20\,364{,}01 & \mathfrak{x} &= +\,12\,303{,}11\\
\mathfrak{x} + \mathfrak{y} &= +\,32\,667{,}12 & \mathfrak{x} - \mathfrak{y} &= -\quad 8\,060{,}90
\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \nu_1 = \frac{+\,20\,364{,}01}{+\,12\,303{,}11} \qquad \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{4}\,\pi + \nu_1\right) = \frac{+\,32\,667{,}12}{-\,8\,060{,}90}$$

$$\nu_1 = 58^0\,51'\,40{,}78'' \qquad \tfrac{1}{4}\,\pi + \nu_1 = 180^0 - 76^0\,8'\,19{,}22'',$$

woraus für $\nu_1 = 103^0\;51'\;40{,}78'' - 45^0$ derselbe Wert folgt.

Die beiden Werte von s stimmen überein; es ist s stets positiv; hier

$$s = \frac{20\,364{,}01}{\sin \nu_1} = \frac{12\,303{,}11}{\cos \nu_1} = 23\,792{,}00^{\mathrm{m}}.$$

Die Berechnung von A und B ist folgende.

$$A = -43\,418{,}86 \cdot 12\,303{,}17^2 \cdot \frac{1}{2r^2};$$

$$B = \tfrac{1}{3} \cdot 20\,364{,}08 \cdot 12\,303{,}17^2 \cdot \frac{1}{2r^2}.$$

$$\begin{aligned} \log 43\,418{,}86 &= 4.6377 \\ 2 \log 12\,303{,}17 &= 8.1800 \\ \log \frac{1}{2r^2} &= 6.0891 - 20 \\ \hline \log A &= 0.9068 - 2 \\ A &= -0{,}0807. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cpl} \log 3 &= 0.5229 - 1 \\ \log 20\,364{,}08 &= 4.3089 \\ 2 \log 12\,303{,}17 &= 8.1800 \\ \log \frac{1}{2r^2} &= 6.0891 - 20 \\ \hline \log B &= 0.1009 - 2 \\ B &= +0{,}0126 \end{aligned}$$

Ferner ist $C = +0{,}0803$ und $D = +0{,}0209$; die vier Gröſsen sind mit zwei Stellen oben eingesetzt.

Die Ermittlung der Neigung ν_1 ist durch die Berechnung von $\frac{1}{4}\pi + \nu_1$ sichergestellt; die doppelte Berechnung von s enthält ebenfalls eine Probe.

Die Berechnung von E'' und ε'' gestaltet sich einfach, da die Logarithmen schon vorhanden sind, es ist

$$E'' = -2{,}699''; \quad \varepsilon'' = +0{,}634''; \quad E + \varepsilon = -2{,}065'';$$

$$\nu_2 = 58^0\,51'\,40{,}78'' + 180^0 + 2{,}065'' = 238^0\,51'\,42{,}85''.$$

Die Neigungen ν_1 und ν_2 sind mit Berücksichtigung der Krümmung der Erdoberfläche ermittelt; wird die Erdkrümmung nicht berücksichtigt, so erfolgt die Berechnung nach

$$\operatorname{tg} \nu_a^b = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{\varDelta y}{\varDelta x}, \text{ sichergestellt durch } \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi + \nu_a^b\right) = \frac{\varDelta x + \varDelta y}{\varDelta x - \varDelta y}$$

$$s = \frac{\varDelta y}{\sin \nu_a^b}, \text{ sichergestellt durch } s = \frac{\varDelta x}{\cos \nu_a^b}.$$

Diese letztern Formeln werden nach dem trig. Form. 8. Anw. IX benutzt.

Es liegt die Versuchung nahe, nach der obigen Berechnung von s im Systeme Kaltenborn die Koordinaten von Münden für den Nullpunkt Göttingen zu suchen, abermals die Entfernung s zwischen Münden und Göttingen zu berechnen und aus der Gleichheit beider s auf die Richtigkeit der Rechnung schlieſsen zu wollen. Dazu sei bemerkt, daſs die Entfernung zweier Punkte von einander nicht die gleiche zu sein braucht, wenn sie sich auf verschiedene Systeme bezieht. Ein geringer Unterschied wird auftreten können.

Die Formel $\operatorname{tg}(45^0 + \nu) = \frac{\varDelta x + \varDelta y}{\varDelta x - \varDelta y}$ folgt aus $\operatorname{tg}\nu = \frac{\varDelta y}{\varDelta x}$ durch

$$\operatorname{tg}(45^0 + \nu) = \frac{\operatorname{tg}45^0 + \operatorname{tg}\nu}{1 - \operatorname{tg}45^0 \cdot \operatorname{tg}\nu} = \frac{1 + \frac{\varDelta y}{\varDelta x}}{1 - \frac{\varDelta y}{\varDelta x}}.$$

Als geogr. Koordinaten von Göttingen und Münden sind die von Gaufs berechneten φ und λ benutzt; diejenigen von Göttingen sind heute in den Sekunden 47,67 und 38,34.

§ 61. Aufnahme der Vielecke mit Theodolit und Stahlband.
(Geschlossenes Polygon.)

Geschlossene Polygone treten in der Landmessung als von vornherein festgelegte wenig auf. Sie sind, sofern die Messung auf ein trigonometrisches Netz gegründet wird, nur ausnahmsweise unter ganz besonderen Umständen zulässig. Auch wenn dem Polygonnetze die Unterlage eines trigonometrischen Netzes mangelt, ist die Berechnung der Polygonpunkte in einfachen geschlossenen Polygonen möglichst zu vermeiden; vgl. Anw. IX. § 42. Die Gründe für diese Vorschrift liegen in der Fortpflanzung und Anhäufung der unvermeidlichen Messungsfehler.

Wenn trotzdem das geschlossene Polygon überhaupt und zunächst behandelt wird, so geschieht es mit Rücksicht auf den Anfänger, dem die geschlossene Figur näher liegt, und dem sie den Übergang zu den offenen Polygonzügen erleichtert.

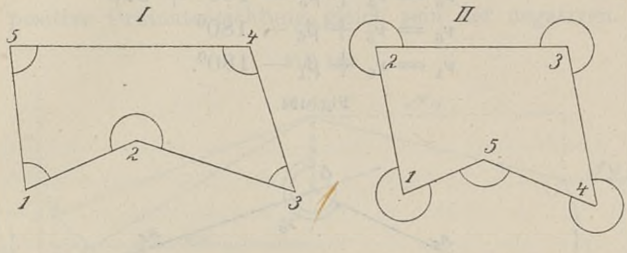
Es sei vorausgeschickt, dafs vorläufig der Flächeninhalt des Polygons Nebensache ist, dafs es vielmehr darauf ankommt, die Koordinaten sämtlicher Polygonpunkte zu berechnen. Ist die Vermarkung nach § 47 geschehen, so sind folgende Messungen und Berechnungen auszuführen.

1. Jede Polygonseite ist zweimal und zwar möglichst jedesmal in einer anderen Richtung zu messen. In betreff der zulässigen Unterschiede beider Messungen siehe § 49.

2. Die Polygonwinkel werden auf jedem Punkte mit dem Theodolit wenigstens einmal in jeder Lage des Fernrohres gemessen. Anw. IX. § 35.

Ist die mit arabischen Ziffern bewirkte Nummerierung linksum erfolgt, so liegen die gemessenen Winkel im Inneren des Polygons, da die Einstellung des Fernrohres erst links und dann rechts fortlaufend geschieht. Bei der Bezifferung rechtsum werden die Winkel aufserhalb liegen; sie liegen stets linker Hand, wenn man in der Richtung der steigenden Nummern sieht. (Fig. 193).

Fig. 193.



Der Gesamtwinkelfehler wird gefunden durch Vergleichung der gemessenen Winkelsumme

in I mit: $(n - 2) \cdot 180^0$, also im 5-eck mit $3 \cdot 180^0$

in II mit: $(n + 2) \cdot 180^0$, also im 5-eck mit $7 \cdot 180^0$.

Die Abweichung von der mathematisch richtigen Summe darf den Betrag von $1{,}5 \cdot \sqrt{n}$ Minuten sexagesimal oder von $3 \cdot \sqrt{n}$ Minuten centesimal nicht übersteigen. In einem Fünfeck ist also der höchste zulässige Gesamtwinkelfehler 3,4 bzw. 6,7 Minuten; vgl. Tafel 4. Anw. IX. S. 40. Erreicht der Fehler, was meist der Fall ist, diesen Grenzwert nicht, so ist er auf sämtliche Winkel gleichmäfsig zu verteilen. Ist z. B. die Winkelsumme im Fünfeck gefunden zu $540^0\ 2'\ 5''$, so ist der Fehler $540^0 - 540^0\ 2'\ 5'' = -\ 2'\ 5''$; jeder Winkel ist um $25''$ kleiner zu machen.

3. Der Anschlufs an die Landesvermessung ist nach dem § 59 hergestellt und im Punkte 1 das Azimuth der Seite $(1, 2) = s_1$ gefunden zu ν_1; welches sind die Azimuthe oder Neigungen $\nu_2, \nu_3 \ldots \nu_6$ der übrigen Seiten, wenn die Brechungswinkel in den betreffenden Punkten $\beta_2, \beta_3 \ldots \beta_6$ sind? (Fig. 194).

Aus der Figur ergiebt sich:

$$\nu_2 = \nu_1 - (180^0 - \beta_2) = \nu_1 + \beta_2 - 180^0;\ \nu_3 = \nu_2 + \beta_3 - 180^0;$$

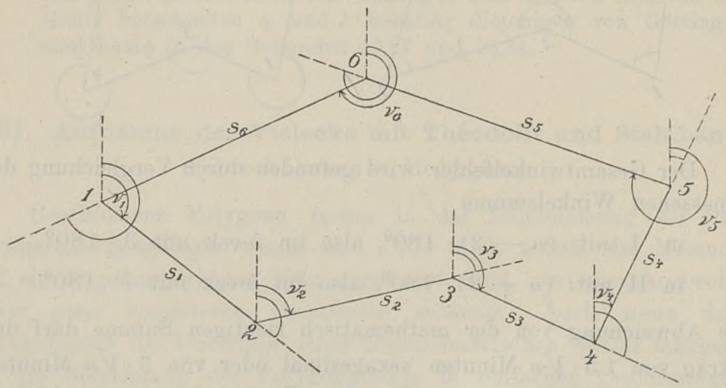
allgemein: $\nu_n = \nu_{n-1} + \beta_n - 180^0$.

Für den Punkt 5 oder für die Seite s_5 ist, wie in jedem geschlossenen Polygone einmal, die vorstehende Formel nicht anwendbar; ν_5 wird danach negativ. In diesem Falle sind 360^0 hinzuzuzählen. Es ist wieder $\nu_6 = \nu_5 + \beta_6 - 180^0$.

Demnach sind die Neigungswinkel aller Strecken:

$$\begin{aligned}
\nu_2 &= \nu_1 + \beta_2 - 180^0 \\
\nu_3 &= \nu_2 + \beta_3 - 180^0 \\
\nu_4 &= \nu_3 + \beta_4 - 180^0 \\
\nu_5 &= \nu_4 + \beta_5 - 180^0 + 360^0 \\
\nu_6 &= \nu_5 + \beta_6 - 180^0 \\
\nu_1 &= \nu_6 + \beta_1 - 180^0.
\end{aligned}$$

Fig. 194.



Das Anschlufsazimuth ν_1 mufs schliefslich wieder herauskommen; durch Addition erhält man $[\beta] = 4 \cdot 180^0$, was richtig ist und beweist, dafs einmal 360^0 addiert werden mufs.

Im Vorstehenden sind die Neigungswinkel linksum berechnet; die Brechungswinkel sind Innenwinkel des Polygons. Wollte man die Neigungen rechtsum berechnen, so sind die Brechungswinkel als äufsere zu betrachten. Die vorige Formel gilt auch dann, so dafs ganz allgemein ist

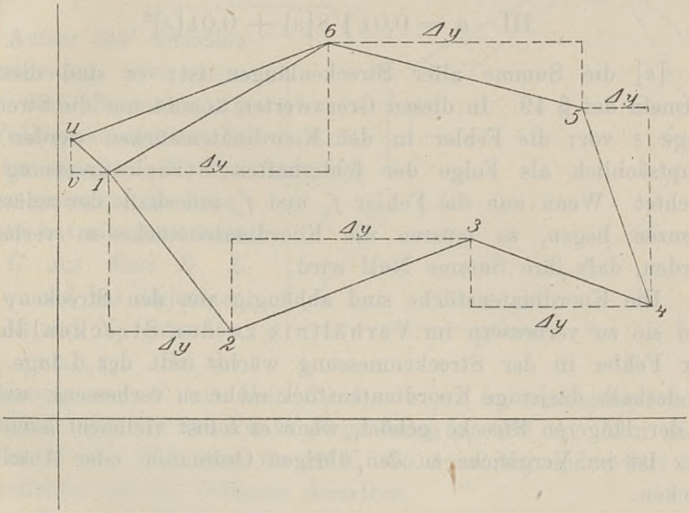
$$\nu_n = \nu_{n-1} + \beta_n \mp 180^0.$$

4. Die Koordinaten vom Punkte 1 sind $y_1 x_1$, welches sind die K o o r d i n a t e n aller übrigen Punkte? Nach § 58. I. sind die Koordinatenunterschiede $\varDelta\mathfrak{y}$ und $\varDelta\mathfrak{x}$. (Fig. 195).

$$\begin{array}{ll}
y_2 - y_1 = s_1 \cdot \sin \nu_1 & x_2 - x_1 = s_1 \cdot \cos \nu_1 \\
y_3 - y_2 = s_2 \cdot \sin \nu_2 & x_3 - x_2 = s_2 \cdot \cos \nu_2 \\
y_4 - y_3 = s_3 \cdot \sin \nu_3 & x_4 - x_3 = s_3 \cdot \cos \nu_3 \\
y_5 - y_4 = s_4 \cdot \sin \nu_4 & x_5 - x_4 = s_4 \cdot \cos \nu_4 \\
y_6 - y_5 = s_5 \cdot \sin \nu_5 & x_6 - x_5 = s_5 \cdot \cos \nu_5 \\
\underline{y_1 - y_6 = s_6 \cdot \sin \nu_6} & \underline{x_1 - x_6 = s_6 \cdot \cos \nu_6} \\
0 = [s_n \cdot \sin \nu_n] = [\varDelta\mathfrak{y}] & 0 = [s_n \cdot \cos \nu_n] = [\varDelta\mathfrak{x}].
\end{array}$$

In einem geschlossenen Polygone soll also die algebraische Summe der Ordinatenunterschiede und die der Abscissenunterschiede Null sein. Mathematisch ist dies an der Figur sofort als richtig zu erkennen, besonders für die Ordinatenstücke. Man geht von 1 nach rechts bis 4˙ und von da zurück bis 1, folglich mufs die ganze positive Ordinatenrichtung gleich sein der negativen.

Fig. 195.



Bei den wirklichen Vermessungen werden die Bedingungen jedoch nur in vereinzelten Fällen erfüllt sein; meist sind die genannten Summen nicht Null, sondern es ist

$$[\Delta \mathfrak{y}] = f_y \quad \text{und} \quad [\Delta \mathfrak{x}] = f_x.$$

Diese Fehler sind die Folgen der fehlerhaften Messung sowohl der Winkel als auch der Strecken. Streng genommen mufs $y_6 + \Delta y_6 = y_1$ und $x_6 + \Delta x_6 = x_1$ wieder herauskommen, wenn man von $x_1 y_1$ ausgegangen ist und der Reihe nach die Koordinaten berechnet hat. Durch die fehlerhafte Winkel- und Streckenmessung ist eine Verschiebung eingetreten; der Endpunkt der letzten Strecke fällt bei der Auftragung nicht in den Anfangspunkt, sondern irgendwo in u; es schliefst sich das Polygon nicht. Die Entfernung u von 1 ist der lineare Schlufsfehler, hervorgerufen durch f_y und f_x, welche, als Überschüsse der Koordinatenstücke, Katheten in dem Dreiecke $u1v$ sind. Es ist $1u$ oder

$$f_s = \sqrt{f_y^2 + f_x^2}.$$

Wie bei der Meſstischaufnahme darf auch hier der lineare Schluſsfehler eine gewisse Grenze nicht überschreiten. Er darf nach Anw. IX. § 40, jenachdem die Verhältnisse günstige, mittlere oder ungünstige sind, höchstens betragen:

$$\text{I.} \quad a = 0{,}01 \sqrt{4[s] + 0{,}005[s]^2}$$

$$\text{II.} \quad a = 0{,}01 \sqrt{6[s] + 0{,}0075[s]^2}$$

$$\text{III.} \quad a = 0{,}01 \sqrt{8[s] + 0{,}01[s]^2},$$

wo $[s]$ die Summe aller Streckenlängen ist; es sind dies die Formeln des § 49. In diesen Grenzwerten kommt nur die Streckenlänge s vor; die Fehler in den Koordinatenstücken werden also hauptsächlich als Folge der fehlerhaften Streckenmessung betrachtet. Wenn nun die Fehler f_y und f_x innerhalb der zulässigen Grenzen liegen, so müssen die Koordinatenstücke so verbessert werden, daſs ihre Summe Null wird.

Die Koordinatenstücke sind abhängig von den Strecken, also sind sie zu verbessern im Verhältnis zu den Streckenlängen. Der Fehler in der Streckenmessung wächst mit der Länge. Es ist deshalb dasjenige Koordinatenstück mehr zu verbessern, welches zu der längeren Strecke gehört, wenn es selbst vielleicht auch sehr kurz ist im Vergleiche zu den übrigen Ordinaten- oder Abscissenstücken.

Inwiefern die Winkelmessung, welche ja auch eine Verschiebung der Polygonstrecken und damit des Endpunktes verursachen kann, bei der Verbesserung der Koordinatenstücke berücksichtigt wird, wollen wir bei der Zugmessung näher besprechen.

Ist die Verbesserung ausgeführt, so sind die Koordinaten des Punktes n:

$$y_n = y_{n-1} + \varDelta y_{n-1}$$

$$x_n = x_{n-1} + \varDelta x_{n-1}.$$

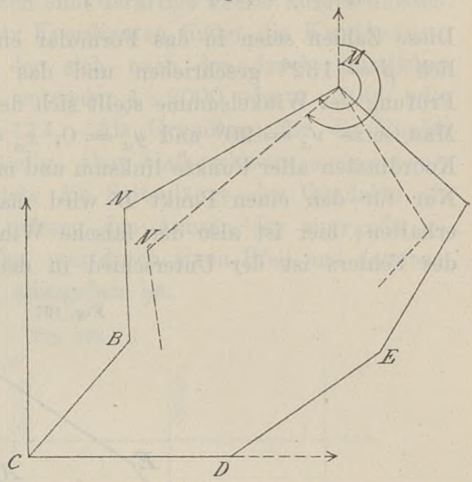
Die $\varDelta y$ und $\varDelta x$ sind die verbesserten $\varDelta \mathfrak{y}$ und $\varDelta \mathfrak{x}$ und haben die obige Bedeutung, so daſs also $\varDelta \mathfrak{y}_1 = s_1 \cdot \sin \nu_1$ ist.

5. Bei einer sorgfältig ausgeführten Messung werden die Fehlergrenzen nur selten erreicht; sollten sie aber einmal sehr weit überschritten werden, so kann man mit ziemlicher Sicherheit auf einen einzigen groben Messungsfehler schlieſsen. Vgl. § 54.

Um einen fehlerhaft gemessenen Winkel aufzufinden, nehme man für den Scheitel irgend eines Winkels beliebige Koordinaten und für einen Schenkel dieses Winkels ein bequemes Azimuth an.

Berechne nun die Koordinaten aller Polygonpunkte einmal linksum und einmal rechtsum und sehe nach, ob für einen Punkt der beiden Berechnungen derselbe Wert der Koordinaten sich ergeben hat. Ist das der Fall, so ist dort der Winkel falsch gemessen. (Fig. 196).

Fig. 196.



Aufser der örtlichen Nachmessung wird man auch eine Berechnung des Fehlers vornehmen. Es sei im Punkte M der Fehler gemacht; die Koordinaten hat man berechnet von C aus über D, E u. s. w. und hat diejenigen von M und N_1 gefunden, $y_m x_m$ und $\mathfrak{y}_n \mathfrak{x}_n$. Bei der Berechnung von C aus über B, A u. s. w. im entgegengesetzten Sinne hat man für den Punkt N gefunden y_n und x_n. Man sucht nun in M für MN und für MN_1 die Azimuthe und erhält den Winkelfehler als die Differenz derselben.

Glaubt man eine einzige Seite falsch gemessen zu haben, und sind A, B, C bis M die Polygonpunkte, so berechnet man aufser den Koordinaten aller dieser Punkte von M weiter diejenigen von A. Man wird die ursprünglichen Koordinaten von A nicht erhalten, also auch nicht A, sondern A_1 mit den Koordinaten $\mathfrak{y}_a$ und $\mathfrak{x}_a$. Das Azimuth dieser Schlufslinie AA_1 ist aus

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{\mathfrak{y}_a - y_a}{\mathfrak{x}_a - x_a} \quad \text{oder} \quad = \frac{f_y'}{f_x}$$

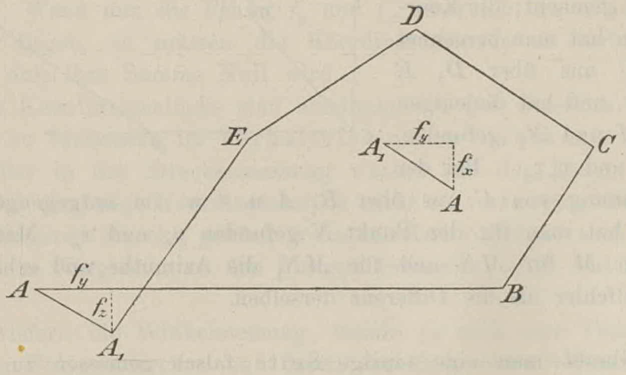
zu berechnen und im Verzeichnis der Azimuthe nachzusehen, ob irgend eine Seite s des Vielecks dasselbe oder ein um 180^0 verschiedenes Azimuth hat. Trifft das zu, so ist jene Seite s falsch gemessen. Die Länge der Schlufslinie AA_1

$$f_s = \sqrt{f_y \cdot f_y + f_x \cdot f_x} = \sqrt{(\mathfrak{y}_a - y_a)^2 + (\mathfrak{x}_a - x_a)^2}$$

ist zugleich die Gröfse des Fehlers.

Beispiel. In dem Fünfeck $ABCDE$ sind der Reihe nach $\alpha = 55^0 6' 45''$, $\beta = 123^0$, $\gamma = 92' 35'$, $\delta = 113^0 40'$, $\varepsilon = 155^0 38' 15''$; $AB = s_1 = 119$, $s_2 = 69$, $s_3 = 62{,}3$, $s_4 = 80{,}1$, $s_5 = 64{,}81$. Diese Zahlen seien in das Formular eingetragen; man hat irrtümlich $\beta = 132^0$ geschrieben und das Manual verloren. Bei der Prüfung der Winkelsumme stellt sich der Fehler $f_\beta = -9^0$ heraus. Man setze $\nu_a^b = 90^0$ und $y_a = 0$, $x_a = 0$ und berechne nun die Koordinaten aller Punkte linksum und mit dem gleichen ν_a^b rechtsum. Nur für den einen Punkt B wird man die gleichen Koordinaten erhalten; hier ist also der falsche Winkel zu suchen. Die Gröfse des Fehlers ist der Unterschied in den Azimuthen von BA_1 und

Fig. 197

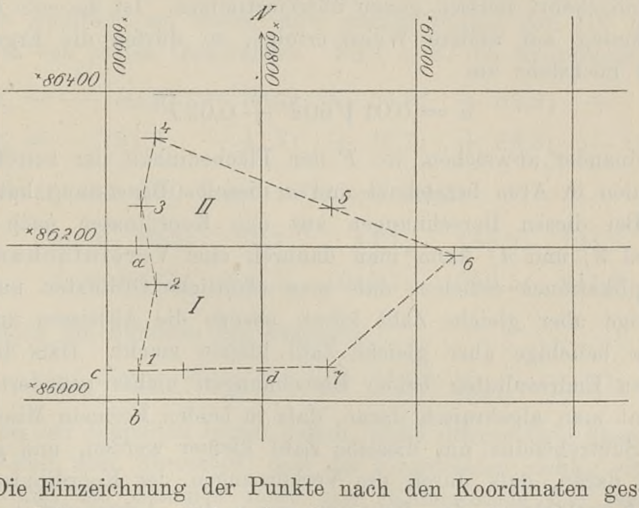


BA oder von BC_1 und BC, welcher bei genauer Rechnung 9^0 beträgt.

Die Messung hat die obigen Winkel und Strecken geliefert; bei CD hat man jedoch eine Bandlänge übersehen und $s_3 = 42{,}3$ notiert. Bei der Berechnung der Koordinaten von A aus stellt sich nun heraus, dafs man nicht nach A zurückkommt, sondern nach A_1 mit den Koordinaten $+16{,}27$ und $-11{,}63$. Der Schlufsfehler dürfte unter ungünstigen Verhältnissen höchstens 0,67 betragen, während er hier $f_s = \sqrt{16{,}27^2 + 11{,}63^2} = 20$ ist. Wenn nun die Neigung der Schlufslinie mit derjenigen einer Seite übereinstimmt, so ist diese Seite um 20 zu kurz oder zu lang. Die Neigung ist $\operatorname{tg} \nu_a^{a_1} = \frac{+16{,}27}{-11{,}63}$, $\nu_a^{a_1} = 125^0\, 33'\, 15''$; bei der Berechnung linksum war $\nu_c^d = 305^0\, 35'$. Da wir zu der ersten Neigung 180^0 hinzuzählen müssen, um genau genug die letztere zu erhalten, so ist CD um 20 zu kurz eingesetzt. Würden beide Neigungen sofort übereinstimmen, so würde CD um ebenso viel zu lang sein, was durch Zeichnung leicht zu veranschaulichen ist, ob nun rechtsum oder linksum gerechnet wird. — Das Beispiel diene mehr als anregende Übung; in Wirklichkeit sind derartige Fehler ausgeschlossen.

6. Nach Berechnung der Koordinaten findet die Kartierung statt in einem Maſsstabe, der sich nach der durchschnittlichen Gröſse der Parzellen richtet, entweder 1 : 2000 oder 1 : 1000 oder 1 : 500. Anw. VIII. § 98—114. Als Grundlage für die Punktauftragung dient ein vollständig, aber blaſs schwarz ausgezogenes Quadratnetz, in welchem stets die Seitenlänge der Quadrate ein Dezimeter ist. Die Seiten müssen den Achsen des zugrunde gelegten Systems parallel laufen, was durch einen Pfeil und danebenstehende Erläuterung näher anzugeben ist.

Fig. 198.



Die Einzeichnung der Punkte nach den Koordinaten geschieht nun so, daſs man zunächst das Quadrat sucht, in welches der betreffende Punkt fallen wird. Der Punkt 1 mit $y = {}^{\times}60\,649$ und $x = {}^{\times}86\,048$ kommt in das Quadrat I (Fig. 198). Auf den zwei horizontalen Seiten trägt man 49 ab bis a und b, auf den vertikalen 48 bis c und d. Den Schnittpunkt von ab und cd, den Punkt 1 kennzeichnet man durch kurze Bleilinien. Den Punkt 2 mit den Koordinaten $y = {}^{\times}60\,663$ und $x = {}^{\times}86\,158$ findet man in I in gleicher Weise; ebenso die übrigen. Alle Punkte werden also gänzlich unabhängig von einander aufgetragen.

Eine Kontrolle für die richtige Lage aller Punkte auf der Karte erhält man dadurch, daſs man die Entfernung der Punkte mit dem Zirkel abgreift, sie in das Feldmafs überträgt und sie vergleicht mit den Zahlen auf dem Stückvermessungsrisse. Ist die Abweichung bei dieser Vergleichung nicht gröfser als das Anderthalbfache der Ausdrücke in § 49 oder unter 4, oder ist sie kleiner als 0,3 ^{m}, so kann man die Auftragung als genügend betrachten, der Unterschied zwischen der Mefszahl und der abgegriffenen Länge ist jedoch im Verhältnis der Länge bei den Einzelbestimmungen zu verteilen. Darauf findet die endgiltige Festlegung der Polygonpunkte durch kleine Kreise von 1,5 ^{mm} Durchmesser statt.

7. Vor der Kolorierung etc. der Karte erfolgt die Flächenberechnung. Über die Einzelberechnungen ist § 56 das Erforderliche gesagt. Die Ergebnisse der von verschiedenen Arbeitern ausgeführten Einzelberechnungen aus den Ordinaten bzw. Abscissen und umgekehrt müssen genau übereinstimmen. Ist die eine Einzelberechnung auf andere Weise erfolgt, so dürfen die Ergebnisse beider höchstens um

$$a = 0{,}01 \sqrt{60F + 0{,}02F^2}$$

von einander abweichen, wo F den Flächeninhalt der betreffenden Parzellen in Aren bezeichnet und a dieselbe Benennung hat.

Bei diesen Berechnungen aus den Koordinaten nach § 56 Formel 3) und 4) kann man dadurch eine Vereinfachung der Multiplikationen erzielen, dafs man sämtliche Ordinaten um eine beliebige aber gleiche Zahl kürzt, ebenso die Abscissen um eine andere beliebige aber gleiche Zahl kleiner macht. Dafs dadurch an den Endresultaten beider Berechnungen nichts geändert wird, erkennt man algebraisch daran, dafs in beiden Formeln Minuendus und Subtrahendus um dieselbe Zahl kleiner werden, und geometrisch daran, dafs durch die Verkürzungen der Koordinaten nur eine Verschiebung des Polygons gegen das Achsensystem stattgefunden hat, während die Fläche dieselbe bleibt. Mit den grofsen Zahlen der Fig. 198 wird man nicht gern multiplizieren, weshalb man die Ordinaten und Abscissen kürzt. Da durch das vorgesetzte Kreuzchen angezeigt wird, dafs die Koordinaten negativ und in der Form dekadischer Ergänzungen geschrieben sind, so wählen wir die Schreibweise in der gewöhnlichen Form mit dem Vorzeichen minus.

Zwei Punkte haben die Koordinaten

$$y_1 = {}^{\times}60\,663{,}3 = -39\,336{,}7 \text{ und } x_1 = {}^{\times}86\,158{,}3 = -13\,841{,}7$$
$$y_2 = {}^{\times}60\,644{,}1 = -39\,355{,}9 \text{ und } x_2 = {}^{\times}86\,246{,}7 = -13\,753{,}3.$$

Wir verschieben nun die beiden Punkte von 39 300 gegen die Abscissenachse, d. h. wir verkürzen um diese Gröfse die Ordinaten, und verschieben um 13 800 gegen die Ordinatenachse, d. h. wir verkürzen die Abscissen um diese Zahl; beides im absoluten Sinne genommen. Dadurch kommen die Punkte in eine Lage, wo sie haben

$$y_1 = -\,39\,336{,}7 + 39\,300 = -\,36{,}7 = {}^{\times}63{,}3$$
$$x_1 = -\,13{,}841{,}7 + 13\,800 = -\,41{,}7 = {}^{\times}58{,}3$$
$$y_2 = -\,39\,355{,}9 + 39\,300 = -\,55{,}9 = {}^{\times}44{,}1$$
$$x_2 = -\,13\,753{,}3 + 13\,800 = +\,46{,}7.$$

Hat man positive und negative Koordinaten und man zieht es vor, mit lauter positiven Koordinaten zu rechnen, so verlegt man durch Addition, am besten einer ganzen Potenz von 10, das Vieleck in den ersten Quadranten. Sind z. B. die Koordinaten

$$y_n = -\;50{,}8;\quad -\,36{,}7;\quad -\,55{,}9;\quad +\,89{,}2;\quad +\;4{,}5$$
$$x_n = -\,151{,}9;\quad -\,41{,}7;\quad +\,46{,}7;\quad +\,89{,}5;\quad -\,158{,}2,$$

so addiert man 100 bezw. 1000 und erhält

$$y_n = 49{,}2;\quad 63{,}3;\quad 44{,}1;\quad 189{,}2;\quad 104{,}5$$
$$x_n = 848{,}1;\quad 958{,}3;\quad 1046{,}7;\quad 1089{,}5;\quad 841{,}8.$$

Stimmen die Summen der Produkte

$$y_n(-\,x_{n+1} + x_{n-1}) \quad \text{und} \quad x_n(+\,y_{n+1} - y_{n-1}),$$

welche den doppelten Inhalt liefern, nicht ziffernmäfsig überein, hat man sich aber überzeugt, dafs die Koordinaten richtig eingesetzt sind und die Summen ihrer bzw. Unterschiede der Bedingung gleich Null genügen, so liegt ein Multiplikationsfehler vor. Es empfiehlt sich in diesem Falle die Anwendung der Neunerprobe. Die mühsame Rechenarbeit kann man sich erleichtern durch Benutzung von Crelles Rechentafeln. Da in denselben die Multiplikationen aller Zahlen unter Tausend ausgeführt sind, so kann man beliebig mehrstellige Zahlen durch Zerlegung in solche bis zu 3 Stellen der Sicherheit wegen durch Nullen thatsächlich ausfüllen.

Die Rechenmaschinen des Ingenieur A. Burkhardt, mit denen man durch Kurbeldrehung 6 bis 10stellige Zahlen multiplizieren kann, sind in ihren Leistungen vortrefflich, aber als Nebeninstrument für den Privatmann recht teuer.

Die Quersumme des Faktors 456,7 ist 22, geteilt durch 9 bleibt Rest 4; dasselbe auf den Faktor 567,3 angewandt giebt Rest 3; 3 · 4 : 9 giebt Rest 3. Die Quersumme des Produktes 259 085,91 ist 39, geteilt durch 9 bleibt Rest 3. Also ist die Multiplikation wahrscheinlich richtig.

§ 62. **Aufmessung eines Polygonzuges.**

Die offenen Polygonzüge stellen die Verbindung her zwischen den an der Grenze und im Innern des Gebietes liegenden Dreieckspunkten und ermöglichen die Vermessung der einzelnen Grundstücke. Die Anzahl der Punkte eines Zuges ist abhängig von den Terrainverhältnissen und der durchschnittlichen Gröfse der Parzellen; beides ist bereits bei der Festlegung der trigonometrischen Punkte zu berücksichtigen. Die Polygonpunkte sind so zu legen, dafs die in ihnen aufgestellten Signalstangen an ihrem Fufspunkte anvisiert werden können, und die Reihenfolge der Punkte soll einen möglichst gestreckten Zug ergeben, der von der geraden Linie des Anfangs- und Endpunktes wenig abweicht. Da nach dem Gesetze über die Fehlerfortpflanzung des Theodolitzuges der mittlere zu befürchtende Fehler in der Querverschiebung des Zuges mit der Gesamtlänge wächst und mit der Länge der Zielweiten abnimmt, so sind in der Anw. IX die Vorschriften gegeben: Auf je 10 Polygonpunkte mufs durchschnittlich ein trigonometrisch bestimmter Haupt- oder Beipunkt kommen, und die Polygonseiten sind wegen der Folgen der Centrierungsfehler möglichst lang auszuwählen, wobei das Zusammentreffen unverhältnismäfsig langer und kurzer Seiten thunlichst zu vermeiden ist.

1. Die Messung der Strecken und Winkel geschieht nach den im vorigen § gegebenen Vorschriften.

Zur Prüfung der Winkelmessung wollen wir wiederum zunächst $(n-2)\cdot 180^0$ benutzen, da wir auch den offenen Zug als ein geschlossenes Polygon betrachten können, bei dem ein Punkt im Unendlichen liegt. Dieser Punkt ist der Schnittpunkt der Nordrichtungen im Anfangs- und Endpunkte; der Polygonwinkel daselbst ist Null. Der erste Winkel des Polygons ist das Anschlufsazimuth, der letzte Winkel ist der links von der Nordrichtung liegende, aus dem Endazimuth und dem letzten Brechungswinkel berechnete Winkel.

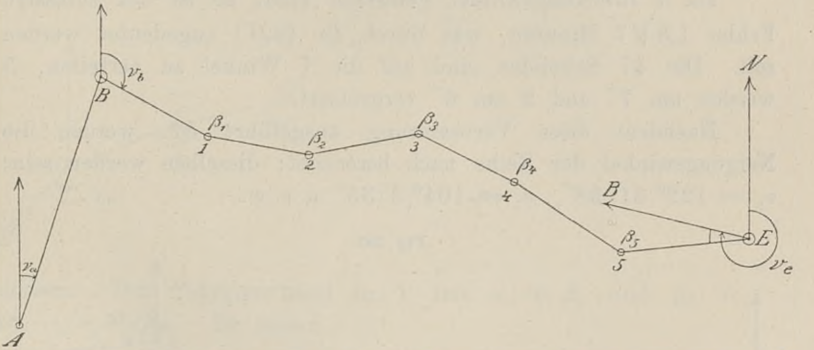
Alle Gröfsen, sowohl Strecken als Winkel, welche aus Arbeiten höherer Ordnung gewonnen sind, müssen für die Arbeiten niederer

Ordnung maſsgebend sein, dürfen also bei den letzten Arbeiten nicht geändert werden.

Das gilt im vorliegenden Falle vom Anschluſs- und End-azimuth, welche aus der Triangulation für die Polygonmessung übernommen werden; diese müssen zur Prüfung der übrigen Winkelmessung dienen. Der auftretende Winkelfehler ist demnach auf diejenigen Winkel zu verteilen, welche als Polygonwinkel gemessen sind, auch wenn die Messung auf einem Dreieckspunkte vorgenommen ist.

Ist in der Fig. 199 der Punkt B ein Dreieckspunkt, in welchem der erhabene Winkel $AB1$ gemessen ist, und ist im Dreieckspunkte E der Winkel $5EB$ gemessen, so sind diese Winkel als Polygon-

Fig. 199.



winkel zu betrachten und unterliegen als solche der Verbesserung. Die Azimuthe ν_a und ν_e dagegen, welche Neigungswinkel von Dreiecksseiten sind, sind bei der Polygonmessung unverändert und zur Prüfung der übrigen Winkel einzuführen.

Zahlenbeispiel zu Fig. 199 aus Anw. IX. S. 260.

Das Anschluſsazimuth, die nach oben liegenden Brechungswinkel und das Endazimuth sind:

$\nu_a =$	17^0	$9'$	$13''$	$\beta_4 =$	190^0	$48'$	$53''$
$\sphericalangle B =$	285	22	38	$\beta_5 =$	142	24	52
$\beta_1 =$	161	30	30	$\sphericalangle 5EB =$	15	53	19
$\beta_2 =$	159	0	15	$\nu_e =$	290	47	49
$\beta_3 =$	218	37	22				

Mit Einschluſs des unendlich fernen Punktes, in welchem sich die Nordrichtungen von A und E schneiden, haben wir ein Neuneck vor uns, in welchem die Winkelsumme 1260^0 beträgt. Mit welchem Gesamtfehler sind die vorstehenden Brechungswinkel behaftet?

Als Polygonwinkel bei E haben wir

$$15^0\ 53'\ 19'' + 360^0 - 290^0\ 47'\ 49'' = 85^0\ 5'\ 30''$$

einzusetzen und erhalten als Summe $1259^0\ 59'\ 13''$.

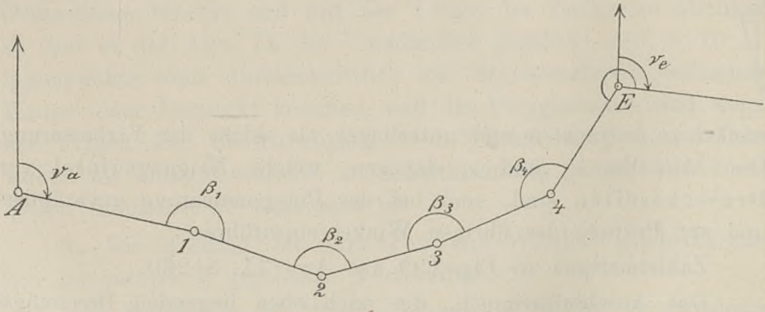
Um bei der Ermittelung des Fehlers sofort das Vorzeichen für die Verbesserung zu erhalten, ziehen wir stets das „Haben" vom „Soll" ab, es ist demnach der Fehler

$$\begin{array}{ll} + \text{Soll} & 1260^0 \\ - \text{Haben} & 1259^0\ 59'\ 13'' \\ \hline f_\beta = & \qquad + 47'',\ (4{,}0'). \end{array}$$

Da 7 Brechungswinkel gemessen sind, so ist der zulässige Fehler $1{,}5\sqrt{7}$ Minuten, was durch die $(4{,}0')$ angedeutet werden soll. Die 47 Sekunden sind auf die 7 Winkel zu verteilen, 5 werden um $7''$ und 2 um $6''$ vergrößert.

Nachdem diese Verbesserung ausgeführt ist, werden die Neigungswinkel der Reihe nach berechnet; dieselben werden sein: $v_b = 122^0\ 31'\ 58''$, $v_1 = 104^0\ 2'\ 35''$ u. s. w.

Fig. 200.



Zahlenbeispiel zu Fig. 200. Anw. IX. S. 270.

Die Punkte A und E sind trigonometrisch bestimmt; ebenso Punkt 1, von dem die Berechnung beginnt.

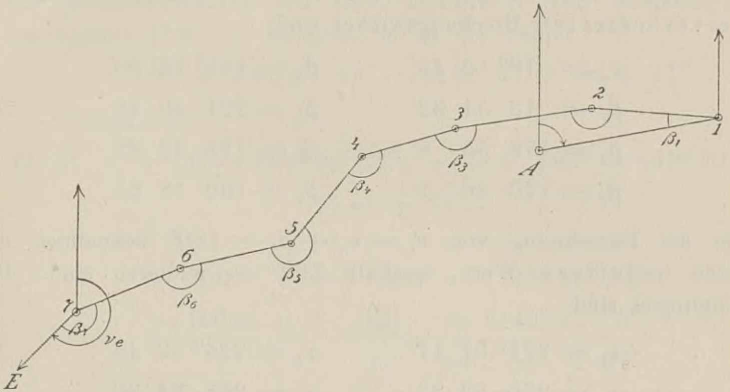
$$\begin{array}{llll} v_a = 101^0\ 37'\ 55'' & & \beta_4 = 145^0\ \ 6'\ 25'' \\ \beta_1 = 186\ \ 29\ \ 41 & & \beta_e = 243\ \ \ 9\ \ 19 \\ \beta_2 = 143\ \ 56\ \ 51 & & v_e = \ \ 92\ \ 20\ \ 40 \\ \beta_3 = 172\ \ \ 0\ \ 14 & & \end{array}$$

Der offene Zug bildet mit dem unendlich fernen Punkte ein Siebeneck; der letzte Polygonwinkel bei E ist $\beta_e - \nu_e = 150^0\,48'\,39''$ und die Winkelsumme ist $899^0\,59'\,45''$; diese vom Soll 900^0 abgezogen, ergiebt den Winkelfehler $+15''$, welcher auf die 5 Brechungswinkel gleichmäſsig verteilt wird; zulässiger Fehler ist 3,4′.

Zahlenbeispiel zu Fig. 201. Anw. IX. S. 268.

Durch Triangulierung ist bestimmt ν_a^1 also auch ν_1^a und ν_e; das Polygon betrachten wir als nach unten im Unendlichen ge-

Fig. 201.



schlossen. Der Polygonwinkel in 1 ist: $\nu_a + \beta_1$ und in 7: $180^0 - (\nu_e - \beta_7)$. Es seien:

$$\begin{array}{llll} \nu_a = & 78^0\ \ 2'\,45'' & \beta_4 = & 145^0\,15'\,35'' \\ \beta_1 = & 13\ \ 54\ \ 48 & \beta_5 = & 221\ \ 41\ \ \ 0 \\ \beta_2 = & 178\ \ 55\ \ 22 & \beta_6 = & 178\ \ 42\ \ 38 \\ \beta_3 = & 170\ \ 46\ \ 17 & \beta_7 = & 162\ \ 18\ \ 40 \end{array}$$

$$\nu_e = 249^0\,35'\,18''.$$

Das Polygon ist mit dem unendlichen Punkte ein Achteck; die Winkelsumme soll sein 1080^0; sie ist $1080^0\,1'\,47''$. Der Gesamtfehler ist

$$f_\beta = 1080^0 - 1080^0\,1'\,47'' = -1'\,47''\ (4{,}0'),$$

also unterhalb der zulässigen Grenze. Zwei Winkel sind um 16″ und fünf um 15″ kleiner zu machen.

Die vorstehende Auseinandersetzung hat den Zweck, das Verständnis des trigonometrischen Formulars 19 der Anw. IX bezüglich der Winkelverbesserung durch die Zeichnung vorzubereiten. Durch die Figur wird der Studierende leichter auf den Umstand hingewiesen, daſs nicht immer

$$\nu_n = \nu_{n-1} + \beta_n - 180^0 \quad \text{ist,}$$

sondern auch $$\nu_n = \nu_{n-1} + \beta_n + 180^0$$

sein kann. Wird dieser Fall nicht beachtet, so kann die jetzt folgende algebraische Rechnung Schwierigkeiten verursachen.

Wir wollen die Berechnung der Neigungswinkel zunächst an dem letzten Zahlenbeispiele durchführen. Die Anfangsneigung und die verbesserten Brechungswinkel sind:

$$\begin{array}{llll} \nu_a = & 78^0\ 2'\ 45'' & \qquad \beta_4 = & 145^0\ 15'\ 20'' \\ \beta_1 = & 13\ \ 54\ \ 32 & \qquad \beta_5 = & 221\ \ 40\ \ 45 \\ \beta_2 = & 178\ \ 55\ \ \ 6 & \qquad \beta_6 = & 178\ \ 42\ \ 23 \\ \beta_3 = & 170\ \ 46\ \ \ 2 & \qquad \beta_7 = & 162\ \ 18\ \ 25 \end{array}$$

Bei der Berechnung von $\nu_1 = \nu_a + \beta_1 - 180^0$ bekommen wir einen negativen Wert, weshalb 360^0 zu addieren sind. Die Neigungen sind

$$\begin{array}{llll} \nu_1 = & 271^0\ 57'\ 17'' & \qquad \nu_4 = & 226^0\ 53'\ 45'' \\ \nu_2 = & 270\ \ 52\ \ 23 & \qquad \nu_5 = & 268\ \ 34\ \ 30 \\ \nu_3 = & 261\ \ 38\ \ 25 & \qquad \nu_6 = & 267\ \ 16\ \ 53 \end{array}$$

$$\nu_7 = 249^0\ 35'\ 18'';$$

die letzte Neigung war die von vornherein zugrunde gelegte.

Allgemein ist

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \nu_a + \beta_1 - 180^0 \\ \nu_2 &= \nu_1 + \beta_2 - 180^0 \\ \nu_3 &= \nu_2 + \beta_3 - 180^0 \\ &\cdots\cdots \\ \nu_n &= \nu_{n-1} + \beta_n - 180^0 \\ \nu_e &= \nu_n + \beta_e - 180^0 \end{aligned}$$

durch Addition: $$\nu_e = \nu_a + [\beta] - (n+1) \cdot 180^0.$$

Aus dem Faktor $(n+1)$ läſst sich nicht schlieſsen, daſs nicht irgendwo 360^0 zu addieren waren; jedenfalls handelt es sich aber um ein ganzes Vielfaches von 180^0; es sei $n \cdot 180^0$. Es ist dann die Bedingung zu erfüllen

$$\nu_a + [\beta] = \nu_e + n \cdot 180^0;$$

der Fehler $f_\beta = (\nu_e + n \cdot 180^0) - (\nu_a + [\beta])$

darf höchstens $1{,}5\sqrt{n}$ Minuten alter oder $3\sqrt{n}$ Minuten neuer Teilung betragen.

Hiernach gestaltet sich die Behandlung der obigen Beispiele wie folgt.

Beispiel 1.

Es ist $\nu_a + [\beta] = 1190^0\,47'\,2''$; da ich zu $\nu_e = 290^0\,47'\,49''$ ein ganzes Vielfaches von 180^0, nämlich $5 \cdot 180^0$ addieren mufs, um nahezu 1190^0 zu erhalten, so ist der Fehler

$$5 \cdot 180^0 + 290^0\,47'\,49'' - 1190^0\,47'\,2'' = +\,47''.$$

Beispiel 2.

Es ist $\nu_a + [\beta] = 992^0\,20'\,25''$; $\nu_e + 5 \cdot 180^0 = 992^0\,20'\,40''$

$$f_\beta = +\,15''.$$

Beispiel 3.

$$\begin{array}{lll} + \text{Soll} & \nu_e + 5 \cdot 180^0 & = 1149^0\,35'\,18'' \\ - \text{Haben} & \nu_a + \quad [\beta] & = 1149^0\,37'\,\;5'' \\ \hline & f_\beta & = \;-\;\;\; 1'\,47''. \end{array}$$

In allen drei Beispielen war zur Endneigung das Fünffache von 180^0 zu addieren, obgleich die Zahl der Brechungswinkel verschieden war und bei der geometrischen Betrachtung ein 9- bzw. 7- bzw. 8-eck vorlag. Ein ferneres Beispiel siehe § 63.

Da die Messung der Winkel mit kurzen Schenkeln im allgemeinen ungenauer ist, als die Messung solcher mit langen Schenkeln, so müfste die Verteilung des Gesamtwinkelfehlers im umgekehrten Verhältnisse der Schenkellängen erfolgen. Bei den vorschriftsmäfsig angelegten Polygonzügen ist jedoch der Unterschied in den Schenkellängen meist so gering, dafs die genannte Fehlerverteilung mit Rücksicht auf den Erfolg zu umständlich ist, weshalb man die gleichmäfsige Verteilung vorzieht.

2. Nachdem die Strecken und Brechungswinkel gemessen und die Neigungen aus den verbesserten Brechungswinkeln berechnet sind, erfolgt die Berechnung der Ordinaten- und Abscissenunterschiede. In ältern Formularen gab es hinter der Spalte der Neigungswinkel zunächst eine Spalte, in welche der betreffende Quadrant, und darauf eine Spalte, in welche der reduzierte oder entsprechende spitze Neigungswinkel geschrieben wurde. Aus der Quadrantenzahl erkannte man das Vorzeichen des zugehörigen

Koordinatenstücks. Im trig. Form. 19 stehen an Stelle dieser Spalten hinter den Strecken zunächst die Logarithmen der einzelnen Faktoren der Sinus- und Cosinusprodukte und in der zweiten Spalte die Summen der Logarithmen. Durch ein dem betreffenden Logarithmus angehängtes n wird das Vorzeichen minus des Koordinatenunterschiedes angezeigt.

Die erste Ausrechnung von $\varDelta\mathfrak{y}_n = s_n \cdot \sin\nu_n$ und $\varDelta\mathfrak{x}_n = s_n \cdot \cos\nu_n$ kann mit vierstelligen Logarithmen geschehen. Zur Kontrolle findet nach dem trig. Form. 20 eine zweite Berechnung der Koordinatenunterschiede mit Hilfe von Koordinatentafeln statt. Da die Benutzung derselben zeitraubend ist, sobald man einzelne Sekunden in Rechnung ziehen will, so ist gestattet, 30 Sekunden und mehr als volle Minute zu zählen und weniger als 30 Sekunden ganz zu vernachlässigen. Eine Übereinstimmung bis auf 3^{cm} ist dann noch ausreichend.

Reifsig, Tenner und Reutzel: Tafeln zur Berechnung der Koordinaten ohne Logarithmen bei Gemarkungs-, Flur- und Gewannvermessungen und Wasserwägungen mit dem Theodolit. 2. Aufl. 1854.

Ulffers: Tafeln zur Berechnung der Koordinaten von Polygon- und Dreieckspunkten niederer Ordnung. 1833.

Defert: Tafeln zur Berechnung rechtwinkliger Koordinaten. 1874.

Clouth: Tafeln zur Berechnung goniometrischer Koordinaten.

Der ersten Berechnung der Koordinatenunterschiede folgt ihre Prüfung und damit die Prüfung des ganzen Zuges. Im geschlossenen Polygone mufste die algebraische Summe sowohl der Ordinaten- wie der Abscissenunterschiede Null sein, weil der Endpunkt des Zuges mit dem Anfangspunkte zusammenfiel, also die Bewegung nach rechts bzw. nach oben derjenigen nach links bzw. nach unten gleich war. Beim offenen Zuge sind die Koordinaten des Anfangs- und Endpunktes durch die bereits ausgeführte Triangulierung gegeben. Der Unterschied derselben mufs demnach der algebraischen Summe der Parallelbewegungen in der Ordinaten- bzw. Abscissenrichtung gleich sein, oder

$$y_e - y_a = [\varDelta\mathfrak{y}]$$
$$x_e - x_a = [\varDelta\mathfrak{x}].$$

Für gewöhnlich bestehen diese Gleichungen nicht, es treten die Fehler auf

$$f_y = (y_e - y_a) - [\varDelta\mathfrak{y}]$$
$$f_x = (x_e - x_a) - [\varDelta\mathfrak{x}].$$

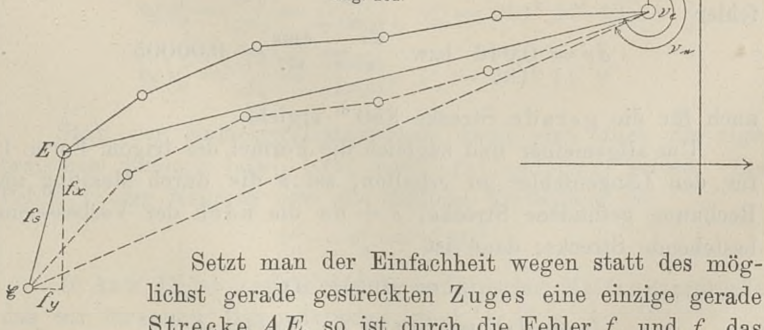
Die zulässigen Grenzen für diese Fehler sind enthalten in den Ausdrücken § 61. 4, welche das erlaubte Mafs für die Schlufslinie f_s angeben. In den meisten Fällen bleibt der Schlufsfehler so weit unter der Grenze, dafs man f_y auf die Ordinaten- und f_x auf die Abscissenunterschiede ohne weiteres verteilen darf und zwar im Verhältnis der zugehörigen Streckenlängen. Die Verbesserungen sind also

$$1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad v_y = \frac{f_y}{[s]} \cdot s \quad \text{und} \quad v_x = \frac{f_x}{[s]} \cdot s$$

für den Koordinatenunterschied mit der Strecke s, wenn $[s]$ die Gesamtlänge des Zuges ist.

Die Schlufslinie f_s enthält das Mafs der seitlichen Verschiebung oder der Verdrehung infolge fehlerhafter Winkelmessung und das Mafs der Verlängerung bzw. Verkürzung infolge fehlerhafter Streckenmessung. Bei der vorstehenden Fehlerverbesserung ist nur die Streckenmessung als fehlerhaft angenommen und demgemäfs berücksichtigt. Es fragt sich nun, wann dies gestattet ist, und wann auch die Winkelmessung in Betracht kommt. Um dies zu erfahren, wollen wir die beiden Fehlergröfsen einzeln aufsuchen, welche das Nichtschliefsen oder die Querabweichung des Zuges verursacht haben.

Fig. 202.



Setzt man der Einfachheit wegen statt des möglichst gerade gestreckten Zuges eine einzige gerade Strecke AE, so ist durch die Fehler f_y und f_x das Ende des Zuges nach 𝔈 gekommen. (Fig. 202).

Der Fehler in der Längsrichtung kann positiv und negativ sein, wie grofs ist derselbe für die ganze Strecke und für die Längeneinheit?

An dem Zuge Anw. IX. S. 268, welcher die trigonometrischen Punkte 25 und 122 verbindet, sollen die Fragen beantwortet werden. Der erstere Punkt sei A, der Endpunkt E, ihre Koordinaten sind

$$y_a = -55\,723{,}79 \qquad x_e = -76\,408{,}97$$
$$y_e = -56\,563{,}86 \qquad x_e = -78\,538{,}82;$$

das Soll der Unterschiede: $\Delta y = -840{,}07 \quad \Delta x = -129{,}85$

das Haben der Rechnung: $\Delta\mathfrak{y} = -839{,}98 \quad \Delta\mathfrak{x} = -130{,}25$

Fehler: $f_y = -\ 0{,}09 \quad f_x = +\ 0{,}40$

Durch diese Fehler ist der Endpunkt E nach $\mathfrak{E}$ verschoben; der Abstand beider Punkte ist

$$f_x = \sqrt{0{,}09^2 + 0{,}40^2} = 0{,}41.$$

Hat der Zug die Länge 877,17 Meter, so ist unter günstigen Verhältnissen ein Fehler von

$$a = 0{,}01\sqrt{4 \cdot 877{,}17 + 0{,}005 \cdot 877{,}17^2} = 0{,}86^{\,\mathrm{m}}$$

gestattet. Als wirkliche Länge der Strecke ist

$$S = \sqrt{840{,}07^2 + 129{,}85^2} = 850{,}046,$$

als durch Messung erhaltene Länge

$$s = \sqrt{839{,}98^2 + 130{,}25^2} = 850{,}00$$

zu betrachten, woraus sich als Längenfehler bzw. Längeneinheitsfehler

$$ds = 0{,}046 \quad \text{bzw.} \quad \frac{ds}{s} = \frac{0{,}046}{877} = 0{,}00005$$

auch für die gerade Strecke 850^{m} ergiebt.

Um allgemeiner und zugleich die Formel des trigon. Form. 19 für den Längenfehler zu erhalten, sei s die durch Messung und Rechnung gefundene Strecke, $s + ds$ die nach der Verbesserung bestehende Strecke; dann ist

$$s^2 = \Delta\mathfrak{y}^2 + \Delta\mathfrak{x}^2$$
$$(s + ds)^2 = (\Delta\mathfrak{y} + f_y)^2 + (\Delta\mathfrak{x} + f_x)^2$$
$$s^2 + 2s\,ds + ds^2 = \Delta\mathfrak{y}^2 + \Delta\mathfrak{x}^2 + 2\Delta\mathfrak{y}\cdot f_y + f_y^2 + 2\Delta\mathfrak{x}\cdot f_x + f_x^2.$$

Da die Quadrate von ds, f_y und f_x verschwindend klein sind, so ist die ganze Längenänderung

$$ds = \frac{\Delta\mathfrak{y}\cdot f_y + \Delta\mathfrak{x}\cdot f_x}{s};$$

die Änderung für die Längeneinheit

$$\frac{ds}{s} = \frac{\varDelta\mathfrak{y} \cdot f_y + \varDelta\mathfrak{x} \cdot f_x}{s^2} = \frac{\varDelta\mathfrak{y} \cdot f_y + \varDelta\mathfrak{x} \cdot f_x}{\varDelta\mathfrak{y}^2 + \varDelta\mathfrak{x}^2}.$$

Die Koordinaten von A und E sind für uns maſsgebend, die Änderungen ds bzw. $\frac{ds}{s}$ also die Fehler; der entstandene Längeneinheitsfehler ist demnach für den Zug

$$\frac{ds}{s} = \frac{S-s}{s} = \frac{S}{s} - 1 = q - 1$$

$$q - 1 = \frac{+ f_y[\varDelta\mathfrak{y}] + f_x[\varDelta\mathfrak{x}]}{[\varDelta\mathfrak{y}]^2 + [\varDelta\mathfrak{x}]^2}.$$

Für unser Beispiel würde sein

$$q - 1 = \frac{(-839{,}98 \cdot -0{,}09) + (-130{,}25 \cdot +0{,}40)}{839{,}98^2 + 130{,}25^2} = 0{,}00003.$$

Welche Fehler der Winkelmessung sind in f_y und f_x enthalten, oder welche Seitenverschiebung hat durch diese Fehler stattgefunden?

Um diese Frage zu beantworten, haben wir die Neigung der wirklichen Strecke AE und diejenige der fehlerhaften Strecke $A\mathfrak{E}$ zu berechnen. Die Differenz beider Neigungen giebt uns den Fehler in der Seitenverschiebung. (Fig. 202).

Die Neigungswinkel von AE und $A\mathfrak{E}$ sind:

$$\operatorname{tg} \nu_a^e = \frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{-840{,}07}{-129{,}85}; \quad \nu_a^e = 261^0\, 12'\, 49''$$

$$\operatorname{tg} \nu_a^{\mathfrak{e}} = \frac{\varDelta\mathfrak{y}}{\varDelta\mathfrak{x}} = \frac{-839{,}98}{-130{,}25}; \quad \nu_a^{\mathfrak{e}} = 261^0\, 11'\, 9''.$$

Statt der einfachen Unterschiede kann man auch die algebraischen Summen $[\varDelta y]$, $[\varDelta x]$ bzw. $[\varDelta\mathfrak{y}]$ und $[\varDelta\mathfrak{x}]$ setzen. Der Fehler in der Neigung oder die seitliche Verfehlung ist

$$\nu_a^e - \nu_a^{\mathfrak{e}} = 1'\, 40''.$$

In Anw. IX ist dieser Fehler im analytischen Maſse ausgedrückt, das wir für unser Beispiel finden durch

$$\varphi = \frac{1{,}667'}{3438'} = 0{,}00048.$$

Es besteht nun die Vorschrift, Anw. IX. S. 286, daſs für $\varphi < 0{,}0003$ die Verbesserung der Koordinatenunterschiede nach den Gleichungen 1) $v = \frac{f}{[s]} \cdot s$ stattfindet. Ist dagegen $\varphi > 0{,}0003$ und hat der Polygonzug mehr als drei Strecken, so soll auch der

Winkelfehler in die Verbesserung mit eingezogen werden. In der Verbesserung soll also der Strecken- und Winkelfehler einbegriffen sein.

Wir haben demnach zu untersuchen, wie sich die Koordinatenstücke ändern, wenn der Neigungswinkel sich ändert. Es wird dabei vorausgesetzt, dafs die Neigungsänderung sehr gering ist.

Aus der Trigonometrie ist bekannt, dafs für einen sehr kleinen Winkel dv die Funktionen $\sin dv = dv$ und $\cos dv = 1$ sind für den Halbmesser Eins. Ist z. B. $dv = 2$ Minuten, so ist

$$\sin 2' = 0{,}000582 = 6{,}28318 \cdot 2 : 360 \cdot 60;$$

man kann ohne weiteres das Bogenmafs setzen. In den Grenzen der elementaren Behandlung uns haltend haben wir zu bedenken, dafs das Mafs der Änderung von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ gesucht ist im Vergleich zu $\sin(\alpha + \delta)$ und $\cos(\alpha + \delta)$, also der Unterschied.

Die in f_y und f_x steckenden Streckenfehler seien e_y und e_x, die Neigungsfehler ε_y und ε_x, so dafs

$$2) \quad \ldots \ldots \quad f_y = e_y + \varepsilon_y$$
$$f_x = e_x + \varepsilon_x$$

ist. Die Verbesserungen e und ε müssen sich gegenseitig bedingen, sie müssen, durch dasselbe Mafs ausgedrückt, in Gleichungen auftreten, die gleichzeitig bestehen.

Wächst v um dv, so ist das Mafs der Änderung, das, „um wieviel“:

$$\sin(v + dv) - \sin v = \sin v \cdot \cos dv + \cos v \cdot \sin dv - \sin v = \cos v \cdot dv$$
$$\cos(v + dv) - \cos v = \cos v \cdot \cos dv - \sin v \cdot \sin dv - \cos v = -\sin v \cdot dv.$$

Die durch dv an den Koordinatenunterschieden

$\varDelta\mathfrak{y} = s \cdot \sin v$ bewirkte Änderung ist $d\varDelta\mathfrak{y} = s \cdot \cos v \cdot dv$

$\varDelta\mathfrak{x} = s \cdot \cos v$ „ „ $d\varDelta\mathfrak{x} = -s \cdot \sin v \cdot dv;$

nun ist $s \cdot \cos v = \varDelta\mathfrak{x}$ und $s \cdot \sin v = \varDelta\mathfrak{y}$, also haben sich die Koordinatenunterschiede geändert um

$$2) \quad \ldots \ldots \quad d\varDelta\mathfrak{y} = \varDelta\mathfrak{x} \cdot dv$$
$$d\varDelta\mathfrak{x} = -\varDelta\mathfrak{y} \cdot dv.$$

Handelt es sich um eine Reihe von Koordinatenunterschieden, so ist die Summe der Änderungen

$$d\varDelta\mathfrak{y}_1 + d\varDelta\mathfrak{y}_2 + \cdots = \varDelta\mathfrak{x}_1 \cdot dv_1 + \varDelta\mathfrak{x}_2 \cdot dv_2 + \cdots.$$

Nehmen wir an, dafs die Neigungen ν alle mit demselben Fehler behaftet sind, so ist

4) . . . . $[d\Delta\mathfrak{y}] = [\Delta\mathfrak{x}] \cdot d\nu = \varepsilon_y$

$$[d\Delta\mathfrak{x}] = -[\Delta\mathfrak{y}] \cdot d\nu = \varepsilon_x;$$

dieses ist der Teil der Fehler f_y und f_x, der auf Rechnung der Winkelfehler kommt.

Der Gesamtstreckenfehler sei ds; um wieviel sind hierdurch die Koordinatenunterschiede fehlerhaft geworden?

$$(s + ds) \cdot \sin\nu - s \cdot \sin\nu = ds \cdot \sin\nu$$

$$(s + ds) \cdot \cos\nu - s \cdot \cos\nu = ds \cdot \cos\nu.$$

Also ist die Änderung

5) . . . . $d\Delta\mathfrak{y} = ds \cdot \sin\nu$

$$d\Delta\mathfrak{x} = ds \cdot \cos\nu.$$

Um unabhängig von dem Neigungswinkel auch hier Längenmafs zu erhalten, setzen wir

$$\sin\nu = \frac{\Delta\mathfrak{y}}{s} \quad \text{und} \quad \cos\nu = \frac{\Delta\mathfrak{x}}{s}$$

und erhalten

6) . . . . $d\Delta\mathfrak{y} = \frac{ds}{s} \cdot \Delta\mathfrak{y}$

$$d\Delta\mathfrak{x} = \frac{ds}{s} \cdot \Delta\mathfrak{x}.$$

Da sich die Streckenfehler verhalten wie die Strecken selbst, also $ds_1 : ds_2 = s_1 : s_2$, $ds_2 : ds_3 = s_2 : s_3$ u. s. w., so kann man allgemein

$$\frac{ds_1}{s_1} = \frac{ds_2}{s_2} = \frac{ds_3}{s_3} = \cdots = \frac{ds}{s}$$

setzen und erhält für einen Polygonzug

7) . . . . $[d\Delta\mathfrak{y}] = [\Delta\mathfrak{y}] \cdot \frac{ds}{s} = e_y$

$$[d\Delta\mathfrak{x}] = [\Delta\mathfrak{x}] \cdot \frac{ds}{s} = e_x.$$

Die Summe der Fehler bzw. Verbesserungen aus 4) und 7) ist nach Gleichung 2):

8) . . . . . $f_y = [\Delta\mathfrak{y}] \cdot \frac{ds}{s} + [\Delta\mathfrak{x}] \cdot d\nu$

$$f_x = [\Delta\mathfrak{x}] \cdot \frac{ds}{s} - [\Delta\mathfrak{y}] \cdot d\nu.$$

Setzt man das Verhältnis der geänderten Länge $s + ds$ zur unveränderten Länge s, nämlich

$$\frac{s + ds}{s} = q \quad \text{oder} \quad \frac{ds}{s} = q - 1, \quad \text{und} \quad d\nu = \varphi,$$

so lauten die Gleichungen

$$9) \quad \ldots \quad f_y = (q - 1) \cdot [\Delta \mathfrak{y}] + \varphi \cdot [\Delta \mathfrak{x}]$$
$$f_x = (q - 1) \cdot [\Delta \mathfrak{x}] - \varphi \cdot [\Delta \mathfrak{y}].$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach $q - 1$ und φ ergiebt

$$10) \quad \ldots \quad q - 1 = \frac{f_y \cdot [\Delta \mathfrak{y}] + f_x \cdot [\Delta \mathfrak{x}]}{[\Delta \mathfrak{y}]^2 + [\Delta \mathfrak{x}]^2}$$
$$\varphi = \frac{f_y \cdot [\Delta \mathfrak{x}] - f_x \cdot [\Delta \mathfrak{y}]}{[\Delta \mathfrak{y}]^2 + [\Delta \mathfrak{x}]^2}.$$

Der erstere Ausdruck ist der oben bereits aufgeführte; der zweite Ausdruck liefert das Maſs der seitlichen Verfehlung des Zuges, welche vorzugsweise in den Fehlern der Winkelmessung begründet ist. Es ist φ eine Verhältniszahl, aus der man das Winkelmaſs durch Multiplikation mit dem Reduktionsfaktor ϱ erhält.

Setzt man in 4) den kleinen Winkel $d\nu = \varphi = \varepsilon$ und in 7) $\frac{ds}{s} = q - 1 = e$, so sind die Änderungen im einzelnen

$$11) \quad \ldots \quad d\Delta \mathfrak{y} = \varepsilon \cdot \Delta \mathfrak{x} \quad \text{und} \quad d\Delta \mathfrak{y} = e \cdot \Delta \mathfrak{y}$$
$$d\Delta \mathfrak{x} = -\varepsilon \cdot \Delta \mathfrak{y} \qquad d\Delta \mathfrak{x} = e \cdot \Delta \mathfrak{x};$$

die Änderungen im ganzen oder die ganze vorzunehmende Verbesserung für jedes Koordinatenstück

$$12) \quad \ldots \quad v_y = e \cdot \Delta \mathfrak{y} + \varepsilon \cdot \Delta \mathfrak{x}$$
$$v_x = e \cdot \Delta \mathfrak{x} - \varepsilon \cdot \Delta \mathfrak{y}.$$

Diese Verbesserung ist für den Fall $\varphi > 0{,}0003$ vorzunehmen, wobei auſserdem die Voraussetzung gemacht wird, daſs die Neigungswinkel der Strecken unabhängig von einander, etwa mit der Bussole gemessen sind. Die Brechungswinkel innerhalb des Zuges erleiden keine Änderung, sondern nur diejenigen am Anfange und Ende des Zuges, da der Zug in Verbindung mit anderen Zügen steht.

Die Formeln 12) gelten deshalb in Verbindung mit 10) für die Verbesserung der Koordinatenunterschiede der Bussolenzüge, sind also anzuwenden bei der Berechnung der Koordinaten von

Kleinpunkten; siehe Anw. IX. S. 315: Regeln zum trig. Form. 19 bei Benutzung desselben für Bussolenzüge.

Bei den eigentlichen Polygonzügen, deren Brechungswinkel mit dem Theodolit gemessen werden, ist die Neigung

$$\nu_n = \nu_{n-1} + \beta_n - 180^0$$

aus der Neigung der vorhergehenden Strecke und dem Brechungswinkel hergeleitet. Der Fehler in der einen Neigung pflanzt sich also fort auf die folgende Neigung und wird aufserdem noch beeinflufst durch den Fehler des betreffenden Brechungswinkels.

Sollen bei der Neigungsänderung auch die Brechungswinkel eine Änderung erfahren, so müssen die Neigungen von Strecke zu Strecke in verschiedenem Mafse geändert werden und zwar so, dafs die Brechungswinkel teils vergröfsert, teils verkleinert werden. Man erreicht dieses dadurch, dafs man den Neigungen abwechselnd ε und 2ε hinzufügt, aber dafür sorgt, dafs die letzte Neigung nicht die doppelte Änderung erfährt. Sollte also der Zug eine gerade Anzahl Strecken haben, so bringt man innerhalb des Zuges zweimal hinter einander dieselbe Änderung an.

Die Änderungen der Ordinatenstücke durch ε und 2ε sind nach 11):

$$\varepsilon \Delta \mathfrak{x}_1, \quad 2\varepsilon \Delta \mathfrak{x}_2, \quad \varepsilon \Delta \mathfrak{x}_3, \ldots,$$

ihre Summe

$$13) \quad \ldots \varepsilon(\Delta \mathfrak{x}_1 + 2\Delta \mathfrak{x}_2 + \Delta \mathfrak{x}_3 + 2\Delta \mathfrak{x}_4 + \cdots) = \varepsilon \mathfrak{X};$$

die Summe der Änderungen der Abscissenstücke durch ε und 2ε ist nach 11):

$$-\varepsilon(\Delta \mathfrak{y}_1 + 2\Delta \mathfrak{y}_2 + \Delta \mathfrak{y}_3 + 2\Delta \mathfrak{y}_4 + \cdots) = -\varepsilon \mathfrak{Y}.$$

Die Längenänderungen bleiben dieselben wie in 11) für den Längeneinheitsfehler e:

$$e \cdot [\Delta \mathfrak{y}] \quad \text{und} \quad e \cdot [\Delta \mathfrak{x}].$$

Die fortzuschaffenden Gesamtfehler sind entsprechend den Gleichungen 9) jetzt:

$$14) \quad \ldots\ldots\ldots f_y = e \cdot [\Delta \mathfrak{y}] + \varepsilon \cdot \mathfrak{X}$$

$$f_x = e \cdot [\Delta \mathfrak{x}] - \varepsilon \cdot \mathfrak{Y}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach e und ε liefert uns die am Kopfe des trig. Form. 19 stehenden Formeln

15) . . . . $$e = \frac{f_y \cdot \mathfrak{Y} + f_x \cdot \mathfrak{X}}{\mathfrak{Y} \cdot [\varDelta \mathfrak{y}] + \mathfrak{X} \cdot [\varDelta \mathfrak{x}]}$$

$$\varepsilon = \frac{f_y \cdot [\varDelta \mathfrak{x}] - f_x \cdot [\varDelta \mathfrak{y}]}{\mathfrak{Y} \cdot [\varDelta \mathfrak{y}] + \mathfrak{X} \cdot [\varDelta \mathfrak{x}]}.$$

Hiernach ist die Einzelverbesserung der Ordinaten- bzw. der Abscissenunterschiede:

16) . . . . . $$v_y = e \cdot \varDelta \mathfrak{y} + \varepsilon z \cdot \varDelta \mathfrak{x}$$

$$v_x = e \cdot \varDelta \mathfrak{x} - \varepsilon z \cdot \varDelta \mathfrak{y}.$$

Diese Formeln enthalten die Verbesserung der Koordinatenunterschiede des Polygonzuges, wenn Formel 10) den Wert $\varphi > 0{,}0003$ ergiebt und der Zug mehr als drei Strecken hat. Der Zeiger z ist abwechselnd 1, 2, 1, 2, mit der Einschränkung, daſs er für die erste und letzte Strecke nicht **2** ist.

Da in dem Ausdrucke 15) für ε die Gröſsen $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{X}$ im Nenner vorkommen, und die Faktoren der Teilprodukte je dasselbe Vorzeichen haben werden, so wird ε um so kleiner ausfallen, je gröſser die absoluten Werte von $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{X}$ sind. Man wird letzteres dadurch erzielen, daſs man die Koordinatenunterschiede, mit Ausnahme des ersten und letzten, passend für die Multiplikation mit 2 auswählt. Geschieht dies mit zwei oder vielleicht gar mit drei Koordinatenunterschieden hintereinander, so werden die Neigungswinkel der zugehörigen Strecken gleichmäſsig und damit die von den Strecken eingeschlossenen Winkel gar nicht geändert.

Der Nenner im Ausdrucke 15) für e wird durch das genannte Verfahren ebenfalls möglichst groſs, wodurch die Streckenänderung e einen kleineren Wert erhält. Es wird also gleichzeitig das Bestreben unterstützt, sowohl an den Strecken als an den Brechungswinkeln thunlichst wenig zu ändern.

Um schlieſslich die Änderung der Brechungswinkel infolge der Neigungsänderung durch ε und 2ε darzuthun, sei hier folgende Übersicht beigefügt.

Brechungswinkel β	Neigungswinkel $\nu +$	geänderter Brechungs∢ $\beta +$
$\nu_1 - \nu_a + 180^0$	$\nu_1 + \varepsilon$	$\beta_1 + \varepsilon$
$\nu_2 - \nu_1 + 180^0$	$\nu_2 + 2\varepsilon$	$\beta_2 + \varepsilon$
$\nu_3 - \nu_2 + 180^0$	$\nu_3 + \varepsilon$	$\beta_3 - \varepsilon$
$\nu_4 - \nu_3 + 180^0$	$\nu_4 + 2\varepsilon$	$\beta_4 + \varepsilon$
$\nu_5 - \nu_4 + 180^0$	$\nu_5 + 2\varepsilon$	β_5
$\nu_6 - \nu_5 + 180^0$	$\nu_6 + \varepsilon$	$\beta_6 - \varepsilon$

3. Sind die Koordinatenunterschiede nach 1) oder 16) oder beim Bussolenzuge nach 12) verbessert, so hat man erhalten

$$\varDelta y = \varDelta \mathfrak{y} + v_y \quad \text{und} \quad \varDelta x = \varDelta \mathfrak{x} + v_x.$$

Die algebraische Summe der verbesserten Koordinatenunterschiede $[\varDelta y]$ und $[\varDelta x]$ mufs mit dem Sollbetrage $y_e - y_a$ und $x_e - x_a$ genau übereinstimmen. Ist dies festgestellt, so addiert man der Reihe nach $\varDelta y_a$ zu y_a, $\varDelta y_1$ zu $y_a + \varDelta y_a$ u. s. w.; allgemein sind die Koordinaten der einzelnen Punkte:

$$\begin{array}{ll}
y_1 = y_a + \varDelta y_a & x_1 = x_a + \varDelta x_a \\
y_2 = y_1 + \varDelta y_1 & x_2 = x_1 + \varDelta x_1 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
y_n = y_{n-1} + \varDelta y_{n-1} & x_n = x_{n-1} + \varDelta x_{n-1} \\
y_e = y_n + \varDelta y_n & x_e = x_n + \varDelta x_n.
\end{array}$$

Die letzten Koordinaten müssen wieder die aus der Triangulation hergeleiteten und bei der Verbesserung der Koordinatenunterschiede zugrunde gelegten Werte haben.

Damit sind die sämtlichen Rechenarbeiten, Prüfungen und Formeln, welche sich auf das trig. Form. 19 beziehen, besprochen. Der Endzweck dieser Untersuchungen war die Berechnung der Koordinaten der Polygon- und Kleinpunkte.

Das der Anw. IX. S. 270 entnommene Beispiel giebt eine vollständig durchgeführte Zugberechnung. Die Spalten 1 und 3, in denen die Zugnummer und die Seiten der angezogenen Vermessungsschriften vermerkt werden, sind fortgelassen; ebenso die am Kopfe befindlichen Formeln für $q - 1$, φ u. s. w.

Der erste Abscissenunterschied ist $\varDelta x_1 = - 48{,}24$; in der Tabelle, Spalte 12, steht die Ergänzung $^{\times}51{,}76$; diese Zahl ist zu 21 167,19 zu addieren, wobei zu bedenken ist, dafs das Kreuzchen -100 anzeigt.

Zur Ausrechnung der Quadrate in den Ausdrücken für $q - 1$ und φ benutzt man Tafeln, nachdem man die Koordinatenunterschiede nach der gewöhnlichen Regel auf Ganze abgerundet hat.

Wird ein Bussolenzug zwischen zwei Polygonzügen eingelegt, so bilden diese die Messung höherer Ordnung und müssen zum Anschlufs benutzt werden. Der nächste Polygonpunkt liefert die Anschlufskoordinaten; aufserdem mufs der neue Zug mit seinem Lauf in die Hauptmessung hineinpassen. Dazu müssen die Neigungs

Nr. des Punktes P_n	Brechungswinkel β_n °	′	″	Neigungen $\nu_n = \nu_{n-1} + \beta_n \pm \pi$ °	′	″	Strecke s_n Meter	$\log \sin \nu_n$ $\log s_n$ $\log \cos \nu_n$	$\log s_n \sin \nu_n$ $\log s_n \cos \nu_n$	Ordinaten-unterschied $\varDelta \mathfrak{y}_n = s_n \sin \nu_n$ +	−	Abscissen-unterschied $\varDelta \mathfrak{x}_n = s_n \cos \nu_n$ +	−
A	101	37	55	101	37	55							
1	186	+ 29	3 41										
				108	07	39	155,05	9.9779 2.1904 9.4930$_n$	2.1683 1.6834$_n$	+ 1 + 13 147,33			+ 4 − 4 48,24
2	143	+ 56	3 51										
				72	04	33	106,00	9.9784 2.0253 9.4882	2.0037 1.5135	− 1 + 9 100,86		+ 5 + 3 32,62	
3	172	+ 00	3 14										
				64	04	50	118,63	9.9540 2.0742 9.6405	2.0282 1.7147	− 3 + 10 106,71		+ 5 + 5 51,84	
4	145	+ 06	3 25										
				29	11	18	167,75	9.6881 2.2247 9.9410	1.9128 2.1657	− 4 + 8 81,80		+ 2 + 13 146,45	
E	243	+ 09	3 19							436,70		230,91	48,24
												182,67	
				92	20	40			Soll	437,03	Soll	183,00	
	992	20	25				547,43		f_y	+ 0,33	f_x	+ 0,33	
Soll	992	20	40										
f_β		+	15	(3,4′)						f_s	= 0,47	(II. 0,74)	

winkel der Polygonseiten im Anfange und Ende des Bussolenzuges berücksichtigt werden. Sind die Azimuthe der An- und Abschlufsstrecke ν_a und ν_e aus dem Formular 19 entnommen, so mufs man dieselben Winkel nochmals mit der Bussole messen; man erhält μ_a und μ_e. Beide weichen von den richtigen ν_a und ν_e um δ_1 und δ_2 ab. Von diesen beiden Unterschieden nimmt man das Mittel δ und bringt dieses als Verbesserung an dem Bussolenwinkel einer jeden Strecke an, so dafs $\nu = \mu + \delta$ ist. Dieses δ ist die mittlere Mifsweisung und als solche in Deutschland stets negativ, d. h. von dem abgelesenen Bussolenwinkel abzuziehen. Die

Verbesserter Ordinatenunterschied $\varDelta y_n$ und Ordinate $y_n = y_{n-1} + \varDelta y_{n-1}$ ±	Meter	Verbesserter Abscissenunterschied $\varDelta x_n$ und Abscisse $x_n = x_{n-1} + \varDelta x_{n-1}$ ±	Meter	Nr. des Punktes P_n	z	$\mathfrak{Y}$ +	$\mathfrak{Y}$ −	$\mathfrak{X}$ +	$\mathfrak{X}$ −
	×43 978,74		21 167,19	1					
	147,47		×51,76		1	147			48
	×44 126,21		21 118,95	2					
	100,94		32,70		2	202		65	
	×44 227,15		21 151,65	3					
	106,78		51,94		2	213		104	
	×44 333,93		21 203,59	4					
	81,84		146,60		1	82		146	
	×44 415,77		21 350,19	E					
	437,03		183,00			644		315	48
								267	

$$q - 1 = \frac{+144{,}2 + 60{,}4}{190\,969 + 33\,489} = \frac{+204{,}6}{224\,458} = +0{,}00091$$

$$\varphi = \frac{+60{,}4 - 144{,}2}{224\,458} = \frac{-83{,}8}{224\,458} = -0{,}00037$$

$$e = \frac{+212{,}5 + 88{,}1}{281\,428 + 48\,861} = \frac{+300{,}6}{330{,}289} = +0{,}000911$$

$$\varepsilon = \frac{-83{,}8}{330\,289} = -0{,}000254$$

Verbesserung der Koordinatenunterschiede geschieht wie beim Polygonzuge, je nachdem $\varphi \gtreqless 0{,}0003$ ist. Vgl. Anw. IX. S. 315.

§ 63. **Das Verknoten von Polygonzügen.**

Laufen drei oder mehr Polygonzüge in einem einzigen Punkte, dem Knotenpunkte, zusammen, so kann man diesen Punkt zu einem Punkte höherer Ordnung erheben, indem man die Messungen aller zusammenstofsenden Züge zur Berechnung seiner Koordinaten verwertet und ebenso für bestimmte vom Knotenpunkte ausgehende

Richtungen die Winkelmessungen aller Züge zur Ermittelung der betreffenden Neigungswinkel heranzieht. Die Koordinaten und Neigungen erlangen dadurch einen erhöhten Grad von Genauigkeit und können deshalb zu weiteren Anschlüssen benutzt werden.

Haben die einzelnen Züge eine gleiche Anzahl Brechungspunkte, und sind die Längen der Züge nahezu gleich, so wird man für die Koordinaten des Knotenpunktes P und die Schlufsneigung einer Richtung das arithmetische Mittel aller Endergebnisse einführen. Dies ist jedoch nicht erlaubt, wenn eine Verschiedenheit in der Anzahl und Gröfse der genannten Stücke besteht.

Je mehr Winkel mit dem Theodolit gemessen werden, um so mehr unvermeidliche Fehler werden sich einstellen. Bei der endgültigen Bestimmung der gesuchten Neigung wird also die Schlufsneigung desjenigen Zuges weniger mitsprechen dürfen, welcher eine gröfsere Anzahl Brechungswinkel hat, während bei der Messung weniger Winkel auch weniger Fehler zu befürchten sind.

Dasselbe gilt von den Streckenmessungen; je länger der Zug ist, desto gröfser ist die Summe der unvermeidlichen Fehler.

Da bei der Berechnung der Koordinaten Winkel und Strecken in Rechnung kommen, so müfste man, genau genommen, die Messungen beider zugleich berücksichtigen. Es kann ja der kürzere Zug ebenso viel oder mehr Brechungswinkel haben, als der bedeutend längere Zug. Man müfste in dem Falle je die Produkte aus der Zuglänge in die Zahl der Brechungswinkel als bestimmend betrachten. Im allgemeinen ist jedoch die Zuglänge der Zahl der Brechungspunkte entsprechend, weshalb wir uns darauf beschränken wollen, für das gesuchte Azimuth die Brechungswinkel und für die Koordinaten des Knotenpunktes die Zuglängen verantwortlich zu machen.

Um den Anfänger mit der Bedeutung des Wortes „Gewicht" vertraut zu machen, sei verwiesen auf das Beispiel der Latten- und Bandmessung in § 49; aufserdem mögen folgende einfache Beispiele zur Erläuterung dienen.

1. Der Winkel α ist mit dem grofsen Theodolit T_1 und mit dem kleineren Theodolit T_2 je einmal gemessen. Man hat gefunden, dafs eine Messung mit T_1 so genaue Ergebnisse liefert, wie drei Messungen mit T_2; welches ist der wahrscheinlichste Wert von α, wenn man mit T_1 den Winkel $\alpha_1 = 62^0\,15'\,10''$ und mit T_2 den $\sphericalangle\, \alpha_2 = 62^0\,14'\,30''$ gefunden hat?

Das einfache arithmetische Mittel aus beiden Messungen, also $62^0\,14'\,50''$ ist hier nicht zu gebrauchen; die Messung mit T_1 hat dreimal soviel Wert als diejenige mit T_2; deshalb ist der beste Wert

$$\alpha = \frac{62^0\,15'\,10'' \cdot 3 + 62^0\,14'\,30'' \cdot 1}{3+1} = 62^0\,15'.$$

Oder: hat T_1 den Wert, mit anderen Worten das Gewicht $p_1 = 1$, so hat T_2 das Gewicht $p_2 = \frac{1}{3}$, und es ist

$$\alpha = \frac{62^0\,15'\,10'' \cdot p_1 + 62^0\,14'\,30'' \cdot p_2}{p_1 + p_2} = 62^0\,15'.$$

2. Die Messung des $\measuredangle\,\alpha$ mit den Theodoliten T_1 und T_2 und mit der Bussole B hat ergeben: $\alpha_1 = 62^0 15' 10''$, $\alpha_2 = 62^0 14' 30''$, $\alpha_3 = 62^0\,10'$. Die Anzahl der Messungen von gleichem Werte oder die Genauigkeit der Instrumente ist $T_1 : T_2 : B = 1 : 3 : 15$; welches ist der Wert von α?

Das erweiterte arithmetische Mittel liefert den besten Wert

$$\alpha = \frac{1'\,10'' \cdot \frac{1}{1} + 30'' \cdot \frac{1}{3} - 4' \cdot \frac{1}{15}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}} + 62^0\,14'$$

oder
$$\alpha = \frac{5'\,10'' \cdot \frac{1}{1} + 4'\,30'' \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{15}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}} + 62^0\,10'.$$

3. Hat derselbe Beobachter unter ganz gleichen Verhältnissen mit demselben Instrument den Winkel α am Montag 9 mal gemessen und als Mittel $\alpha_9 = 21^0\,51'\,59''$, am Dienstag bei 7 maliger Messung als Mittel $\alpha_7 = 21^0\,51'\,15''$ gefunden, so mufs der erstere Wert mehr Einflufs auf den endgiltigen Wert haben, als der zweite. Der erste Wert mufs 9 mal beteiligt sein, während der zweite 7 mal beteiligt ist; oder lege ich α_9 das Gewicht $p_1 = 1$ bei, so hat α_7 das Gewicht $p_2 = \frac{7}{9}$; es ist

$$\alpha = \frac{\alpha_9 \cdot 9 + \alpha_7 \cdot 7}{9+7} = \frac{\alpha_9 \cdot \frac{1}{1} + \alpha_7 \cdot \frac{7}{9}}{\frac{1}{1} + \frac{7}{9}} = \frac{59'' \cdot \frac{1}{1} + 15'' \cdot \frac{7}{9}}{\frac{1}{1} + \frac{7}{9}} + 21^0\,51'$$

$$= \frac{44'' \cdot \frac{1}{1} + 0 \cdot \frac{7}{9}}{\frac{1}{1} + \frac{7}{9}} + 21^0\,51'\,15''.$$

Eine Abteilung Wald sei 90 jährig und enthalte 500 fm (Festmeter), die andere sei 70 jährig und habe 170 fm; welches ist das mittlere Massenalter, also das Alter, in welchem ein ganz gleichaltriger Bestand dieselbe Holzmasse 670 fm erzeugt haben würde? Antwort:

$$A = \frac{90 \cdot 500 + 70 \cdot 170}{500 + 170} \text{ oder } p_1 = 1 \quad p_2 = \frac{170}{500}, \text{ so } A = \frac{90 \cdot 1 + 70 \cdot \frac{170}{500}}{1 + \frac{170}{500}}.$$

Oder man berechnet den Durchschnittszuwachs einer jeden Klasse für das Jahr, nämlich $\frac{500}{90}$ und $\frac{170}{70}$ und dividiert ihre Summe in die Gesamtmasse.

$$A = (500 + 170) : \left(\frac{500}{90} + \frac{170}{70}\right) = \text{rund } 85 \text{ Jahr.}$$

Weshalb läſst sich der erste Ausdruck nicht mathematisch in den letztern überführen?

Das erweiterte arithmetische Mittel heiſst auch gewogenes Mittel; es spielt auf vielen Gebieten, z. B. in der Statistik, eine Rolle.

Um in unserer obigen Aufgabe die Koordinaten des Knotenpunktes P zu berechnen, nehmen wir an, die vier zusammentreffenden Züge haben die Längen l_1, l_2, l_3, l_4; über die einzelnen Züge berechnet hat man für die Koordinaten von P erhalten:

$$y_1 x_1; \quad y_2 x_2; \quad y_3 x_3; \quad y_4 x_4.$$

Je kürzer der Zug, desto gröſser ist sein Gewicht bei der Bestimmung von y_p und x_p; die Gewichte werden also gegeben durch die reciproken Werte der Zuglängen, sie sind also

$$p_1 = \frac{1}{l_1}; \quad p_2 = \frac{1}{l_2}; \quad p_3 = \frac{1}{l_3}; \quad p_4 = \frac{1}{l_4}.$$

Die Koordinaten von P:

$$y_p = \frac{y_1 \cdot p_1 + y_2 \cdot p_2 + y_3 \cdot p_3 + y_4 \cdot p_4}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4} = \frac{[py]}{[p]}$$

$$x_p = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + x_4 \cdot p_4}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4} = \frac{[px]}{[p]}.$$

Die umständlichen Divisionen und Multiplikationen werden durch Anwendung der Reciprokentafel bzw. der Rechentafeln erleichtert.

Die Richtung, für welche aus allen Zügen die Neigung bestimmt werden soll, sei PQ; die Anzahl Brechungspunkte der Züge sei n_1, n_2, n_3, n_4. Damit die kleinere Zahl als die mehr bedeutende zur Geltung kommt, muſs sie in den Nenner; die Gewichte sind demnach

$$p_1 = \frac{1}{n_1}; \quad p_2 = \frac{1}{n_2}; \quad p_3 = \frac{1}{n_3}; \quad p_4 = \frac{1}{n_4}.$$

Sind nun die über die einzelnen Züge berechneten Neigungen für PQ:

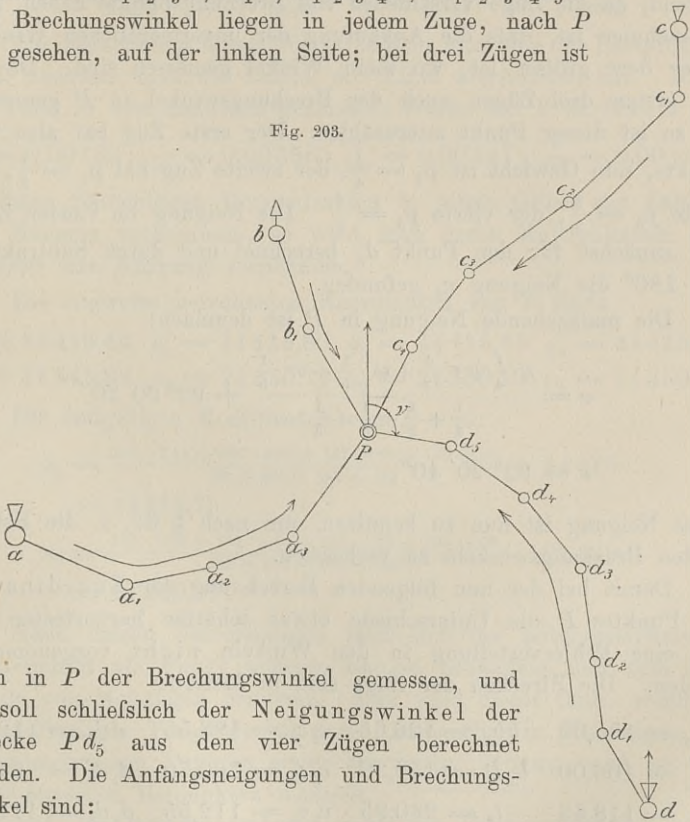
$$\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3,\ \nu_4,\ \text{ so ist}$$

$$\nu_p^q = \frac{p_1 \cdot \nu_1 + p_2 \cdot \nu_2 + p_3 \cdot \nu_3 + p_4 \cdot \nu_4}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4} = \frac{[p \cdot \nu]}{[p]}.$$

Beispiel.

In der Fig. 203 laufen im Knotenpunkte P die vier Züge zusammen: $a\,a_1\,a_2\,a_3\,P$; $b\,b_1\,P$; $c\,c_1\,c_2\,c_5\,c_4\,P$; $d\,d_1\,d_2\,d_3\,d_4\,d_5\,P$. Die Brechungswinkel liegen in jedem Zuge, nach P hin gesehen, auf der linken Seite; bei drei Zügen ist

Fig. 203.



auch in P der Brechungswinkel gemessen, und es soll schliefslich der Neigungswinkel der Strecke Pd_5 aus den vier Zügen berechnet werden. Die Anfangsneigungen und Brechungswinkel sind:

$\nu_a = 108^0\ \ 7'\ 39''$	$\nu_b = 158^0\ 29'\ 15''$	$\nu_c = 173^0\ \ 7'\ 39''$
$a_1 = 143\ \ 56\ \ 51$	$b_1 = 164\ \ 22\ \ 36$	$c_1 = 229\ \ 3\ \ 23$
$a_2 = 172\ \ 0\ \ 14$	$b_1Pd_5 = 129\ \ 28\ \ 30$	$c_2 = 186\ \ 35\ \ 36$
$a_3 = 145\ \ 6\ \ 25$		$c_3 = 165\ \ 14\ \ 20$
$a_3Pd_5 = 243\ \ 9\ \ 19$		$c_4 = 165\ \ 43\ \ 5$
		$c_4Pd_5 = \ 72\ \ 37\ \ 23$

$\nu_d = 323^0\ 35'\ 26''$	$d_3 = 151^0\ 48'\ 55''$
$d_1 = 205\ \ 18\ \ 28$	$d_4 = 163\ \ \ 1\ \ \ 0$
$d_2 = 176\ \ \ 1\ \ 55$	$d_5 = 152\ \ 35\ \ 13$

Die über die Züge berechneten Neigungen sind der Reihe nach

$\nu_1 = 92^0 20' 28''$; $\nu_2 = 92^0 20' 21''$; $\nu_3 = 92^0 21' 26''$; $\nu_4 = 92^0 20' 57''$.

Das arithmetische Mittel dieser vier Neigungen ist nicht zutreffend, da die Züge verschieden viel Brechungspunkte haben, also anzunehmen ist, dafs die Anhäufung der unvermeidlichen Winkelfehler dort gröfser ist, wo mehr Winkel gemessen sind. Da bei den ersten drei Zügen auch der Brechungswinkel in P gemessen ist, so ist dieser Punkt mitzuzählen. Der erste Zug hat also vier Punkte, sein Gewicht ist $p_1 = \frac{1}{4}$, der zweite Zug hat $p_2 = \frac{1}{2}$, der dritte $p_3 = \frac{1}{5}$, der vierte $p_4 = \frac{1}{5}$ Die Neigung im vierten Zuge war zunächst für den Punkt d_5 berechnet und durch Subtraktion von 180^0 die Neigung ν_4 gefunden.

Die mafsgebende Neigung in P ist demnach:

$$\nu = \frac{8 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 66 \cdot \frac{1}{5} + 37 \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}} + 92^0\ 20'\ 20''$$

$$\nu = 92^0\ 20'\ 40''.$$

Diese Neigung ist nun zu benutzen, um nach § 62. 1. die Fehler in den Brechungswinkeln zu verbessern.

Damit bei der nun folgenden Berechnung der Koordinaten des Punktes P die Unterschiede etwas schärfer hervortreten, so soll eine Fehlerverteilung in den Winkeln nicht vorgenommen werden. Die Strecken der Züge sind in Metern:

$aa_1 = 155{,}05$	$bb_1 = 126{,}65$	$c_1c_2 = 198{,}55$	$dd_1 = 112{,}35$
$a_1a_2 = 106{,}00$	$b_1P = 154{,}30$	$c_2c_3 = 160{,}70$	$d_1d_2 = 94{,}85$
$a_2a_3 = 118{,}63$	$l_2 = 280{,}95$	$c_3c_4 = 112{,}55$	$d_2d_3 = 117{,}00$
$a_3P = 167{,}75$		$c_4P = 127{,}78$	$d_3d_4 = 119{,}40$
$l_1 = 547{,}43$		$l_3 = 599{,}58$	$d_4d_5 = 111{,}15$
			$d_5P = 112{,}55$
			$l_4 = 667{,}30$

Die Anschlufskoordinaten von a, b, c_1 und d sind

$$y_a = 43\,978{,}74 \quad y_b = 44\,276{,}21 \quad y_{c1} = 44\,776{,}16$$
$$x_a = 21\,167{,}19 \quad x_b = 21\,591{,}03 \quad x_{c1} = 21\,817{,}18$$
$$y_d = 44\,822{,}03$$
$$x_d = 20\,906{,}76$$

Da die Berechnung aus dem kürzeren Zuge das richtigere Resultat ergiebt, so sind als Gewichte die reciproken Werte der Zuglängen einzuführen; die Gewichte sind also

$$p_1 = \frac{1}{547{,}43}; \quad p_2 = \frac{1}{280{,}95}; \quad p_3 = \frac{1}{599{,}58}; \quad p_4 = \frac{1}{667{,}30}.$$

Zur Berechnung dieser Werte bedient man sich der Reciprokentafel, nachdem man die Zahlen auf Einer abgerundet hat. Nach der Tafel in dem mehrfach genannten Werke von F. G. Gaufs ist:

$$\frac{1}{547} = 0{,}00183\,; \quad \frac{1}{281} = 0{,}00356\,; \quad \frac{1}{600} = 0{,}00167\,; \quad \frac{1}{667} = 0{,}00150.$$

Da diese fünfstelligen Dezimalzahlen in jedem Gliede des Zählers und Nenners vorkommen, so wird man durch Multiplikation mit 100000 eine Kürzung vornehmen.

Die zugweise berechneten Koordinaten von P sind:

$$y_1 = 44\,415{,}44 \quad y_2 = 44\,415{,}80 \quad y_3 = 44\,415{,}85 \quad y_4 = 44\,415{,}90$$
$$x_1 = 21\,349{,}88 \quad x_2 = 21\,350{,}19 \quad x_3 = 21\,350{,}19 \quad x_4 = 21\,350{,}00$$

Die endgiltigen Koordinaten von P sind:

$$y_p = \frac{183 \cdot 0{,}44 + 356 \cdot 0{,}80 + 167 \cdot 0{,}85 + 150 \cdot 0{,}90}{183 + 356 + 167 + 150} + 44\,415$$
$$= 44\,415{,}75$$
$$x_p = \frac{183 \cdot 0{,}88 + 356 \cdot 1{,}19 + 167 \cdot 1{,}19 + 150 \cdot 1{,}00}{183 + 356 + 167 + 150} + 21\,349$$
$$= 21\,350{,}09.$$

Nach diesen Berechnungen läfst sich der polygonometrische Knotenpunkt als Punkt höheren Ranges behandeln und zum Anschlufs von Mefszügen benutzen. Man wird dieses thun, wenn es bei ungünstigen Terrainverhältnissen, namentlich in Waldungen, an trigonometrischen Punkten erster bis vierter Ordnung und an trigonometrischen Beipunkten mangelt.

Auf der Polygonnetzkarte wird der Knotenpunkt mit zwei Kreisen umgeben.

§ 64. **Winkelverbesserung in zusammenhängenden Figuren.**

Setzt man bei der Winkelmessung ein gutes Instrument, gleiche Sorgfalt, gleich lange Schenkel, gleich beschaffene Ziele und gleiche Beleuchtungs- und Luftverhältnisse voraus, so wird jeder unter dieser Voraussetzung gemessene Winkel mit demselben unvermeidlichen Fehler behaftet sein, ob er grofs oder klein ist. Die Fehlerquellen in der Einstellung des Fernrohrs, im Ablesen des Nonius, in der Kreisteilung, in der Centrierung, in der Beschaffenheit der Unterlage, in der Wirkung von Wind und Sonne sind bei der Messung von grofsen und kleinen Winkeln dieselben. Es mufs deshalb der in einer Anzahl von Winkeln steckende Fehler gleichmäfsig auf alle verteilt werden.

Um mathematisch die Richtigkeit des letzten Satzes darzuthun, mögen die gemessenen Winkel α, β, γ eines Dreiecks mit den Fehlern x, y, z behaftet sein, so dafs

$$180^0 - (\alpha + \beta + \gamma) = \mu = x + y + z$$

und μ der Gesamtfehler ist. Die Messung ist am genauesten, wenn $\mu = 0$ ist, was selten vorkommen wird; sie nähert sich der Wahrheit um so mehr, je kleiner μ ist. Beides kann eintreten, wenn sich die Fehler x, y, z ganz oder fast ganz fortheben, da die Fehler sowohl positiv als negativ sein können und als unvermeidliche Fehler nur klein sind. Nun könnte aber doch ein einziger gröfserer Fehler in der einen Richtung das Resultat zu sehr beeinflussen; ein einziger negativer Fehler könnte mehrere positive Fehler aufheben. Man darf die betreffende Messung nicht verwerfen, da sie mit gleicher Sorgfalt wie die übrigen ausgeführt ist. Deshalb verschafft man sich lauter positive Fehlergröfsen, indem man die Quadrate der Fehler bildet. Wird die Summe dieser Quadrate möglichst klein, so werden wir uns dem wahrscheinlichsten Werte der gesuchten Gröfse am meisten nähern.

In unserm Falle werden wir also jetzt der Winkelsumme 180^0 nicht dadurch am nächsten kommen, dafs $(x + y + z)$ ein Minimum wird, sondern dadurch, dafs wir

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{Min.}$$

werden lassen. Dies geschieht nach den Regeln der Differentialrechnung, wenn der erste Differentialquotient Null wird. Setzen wir den Wert $z = \mu - x - y$ ein, so

$$x^2 + y^2 + (\mu - x - y)^2 = \text{Min.}$$

Die ersten Quotienten nach x und y liefern die Gleichungen

$$2x + y = \mu$$
$$x + 2y = \mu,$$

woraus sich die Verbesserungen $x = \frac{\mu}{3}$, $y = \frac{\mu}{3}$, also auch $z = \frac{\mu}{3}$ ergeben.

Durch folgende Betrachtung kommt man zu dem gleichen Ergebnis. Nimmt man als bewiesen an, daſs die Winkelsumme im ebenen Dreieck 180^0 ist, so kann man α auf zwei verschiedene Weisen finden. Durch unmittelbare Messung hat man A_1 gefunden und mittelbar hat man A_2 aus den gemessenen β und γ berechnet. Man hat also

$$A_1 = \alpha$$
$$A_2 = 180^0 - \beta - \gamma.$$

Da der Winkel A_1 aus einer einzigen Messung gewonnen ist, so legen wir ihm das Gewicht $p_1 = 1$ bei, während A_2 als das Resultat zweier Messungen einem zweifachen Fehler ausgesetzt war und daher nur das Gewicht $p_2 = \frac{1}{2}$ hat. Der wahrscheinlichste Wert ist also

$$A = \frac{\alpha \cdot 1 + (180^0 - \beta - \gamma) \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}}.$$

Ist nun der Fehler $180^0 - (\alpha + \beta + \gamma) = \mu$, so ist

$$180^0 - \beta - \gamma = \mu + \alpha$$

und $$A = \frac{\alpha \cdot 1 + (\mu + \alpha) \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{3\alpha + \mu}{3} = \alpha + \frac{\mu}{3}.$$

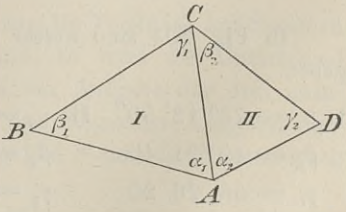
Dasselbe gilt von B und C; es ist

$$A = \alpha + \frac{\mu}{3},\ B = \beta + \frac{\mu}{3},\ C = \gamma + \frac{\mu}{3}$$
$$A + B + C = \alpha + \beta + \gamma + \mu$$

d. h. der Fehler μ wird auf die Winkel gleichmäſsig verteilt.

Nach dieser Regel wird immer verfahren, so lange das Vieleck für sich besteht und sonst keine Bedingungen nebenher zu erfüllen sind. Die Ausgleichung in den Winkeln wird etwas anders, wenn je zwei Dreiecke mit einer Seite aneinander stoſsen, wenn die beiden Dreiecke also das Stück einer Dreieckskette bilden. Die gemeinsame Seite ist die eine Diagonale des Vierecks, und die Summe der beiden Winkel $\gamma_1 + \beta_2$ an dem einen Ende der Diagonale soll aus einer Messung höherer Ordnung stammen und daher gegeben sein (Fig. 204).

Fig. 204.



Die Winkel sind sämtlich gemessen und BCD ist gegeben.

$$\text{I:}\quad \begin{array}{rl} \alpha_1 = & 75^0\,12'\,56'' \\ \beta_1 = & 55\;\;26\;\;30 \\ \gamma_1 = & 49\;\;20 \\ \hline f_1 = & +34'' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \alpha_2 = & 70^0\,16'\,30'' \\ \beta_2 = & 60\;\;22\;\;56 \\ \gamma_2 = & 49\;\;19\;\;44 \\ \hline f_2 = & +50'' \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Soll } BCD = & 109^0\,43'\,26'' \\ \gamma_1 + \beta_2 = & 109\;\;42\;\;56 \\ \hline f_s = & +30'' \end{array}$$

Durch die gleiche Verteilung von $34''$ im ersten und $50''$ im zweiten Dreieck würde der Fehler im Winkel BCD nicht gehoben, weshalb folgende Rechnung nötig ist.

Es sei x die Verbesserung für je einen Winkel in I, y sei diejenige in II und σ sei diejenige für einen Winkel in C, so daſs γ_1 und β_2 auſser um x und y zusammen noch um 2σ geändert werden.

Die Summe der Verbesserungen muſs der Gröſse des Fehlers gleich sein; also

$$3x + \sigma = f_1$$

$$3y + \sigma = f_2$$

$$x + y + 2\sigma = f_s.$$

Setzt man die Werte $x = \frac{1}{3}(f_1 - \sigma)$ und $y = \frac{1}{3}(f_2 - \sigma)$ in die dritte Gleichung ein, so wird

$$4\sigma = 3f_s - (f_1 + f_2)$$

$$\sigma = \frac{3f_s - (f_1 + f_2)}{2 \cdot 2}.$$

Das hieraus berechnete σ wird in x und y eingesetzt, woraus sich $x = 10{,}8''$, $y = 16{,}2''$, $\sigma = 1{,}5''$ ergiebt.

In Fig. 205 sind auſser den Winkeln die Seiten a und b gegeben.

$$\text{I:}\; \begin{array}{rl} \alpha_1 = & 75^0\,12'\,50'' \\ \beta_1 = & 49\;\;21\;\;40 \\ \gamma_1 = & 55\;\;26\;\;20 \\ \hline f_1 = & -50'' \end{array} \quad \text{II:}\; \begin{array}{rl} \alpha_2 = & 54^0\,41'\,10'' \\ \beta_2 = & 67\;\;25\;\;15 \\ \gamma_2 = & 57\;\;53 \\ \hline f_2 = & +35'' \end{array} \quad \text{III:}\; \begin{array}{rl} \alpha_3 = & 80^0\,54'\,55'' \\ \beta_3 = & 56\;\;23\;\;15 \\ \gamma_3 = & 42\;\;41\;\;20 \\ \hline f_3 = & +30 \end{array}$$

Aus den Koordinaten ist

$$\sphericalangle BCD = 122^0\,51'\;\;2'' \qquad \sphericalangle CDE = 114^0\,17'\;\;7''$$
$$\gamma_1 + \beta_2 = 122\;\;51\;\;35 \qquad \gamma_2 + \beta_3 = 114\;\;16\;\;15$$
$$f_4 = \quad -33'' \qquad f_5 = \quad +52''$$

Es mögen x, y, z die Bedeutung der vorigen Aufgabe haben, σ_1 und σ_2 die halben Verbesserungen von BCD und CDE sein, so sind die Gleichungen zu lösen:

$$3x + \sigma_1 = f_1$$
$$3y + \sigma_1 + \sigma_2 = f_2 \qquad x + y + 2\sigma_1 = f_4$$
$$3z + \sigma_2 = f_3 \qquad y + z + 2\sigma_2 = f_5$$

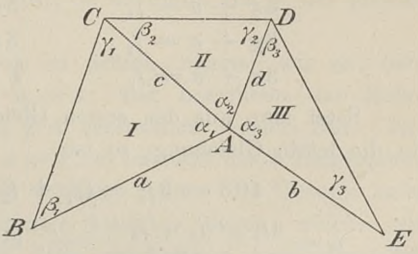
Die Substitution von x, y, z in die beiden letzten Gleichungen giebt:

$$4\sigma_1 - \sigma_2 = 3f_4 - f_1 - f_2$$
$$-\sigma_1 + 4\sigma_2 = 3f_5 - f_2 - f_3$$

$x = -11{,}09$; $y = 11{,}05$; $z = 3{,}81$; $\sigma_1 = -16{,}73$; $\sigma_2 = 18{,}57$.

Da nun aufserdem a und b gegeben sind, so mufs, nach Verbesserung aller Winkel, auf dem Wege der Rechnung nachgesehen werden, ob C und D so liegen, dafs der lose Schenkel von β_3 durch den Endpunkt von b geht. Von a ausgehend mufs über c und d die Strecke b herauskommen. Dies ist der Fall, wenn durch Verbindung der Sinussätze die Gleichung

Fig. 205.



$$\frac{a}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{b} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\beta_1} \cdot \frac{\sin\gamma_2}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\gamma_3}{\sin\beta_3}$$

$$a \cdot \sin\beta_1 \cdot \sin\beta_2 \cdot \sin\beta_3 = b \cdot \sin\gamma_1 \cdot \sin\gamma_2 \cdot \sin\gamma_3$$

besteht. Durch Logarithmen führen wir die Produkte auf Summen zurück. Wenn diese nicht gleich sind, so wird der Unterschied links und rechts verteilt, wie es bei der Aufgabe der drei unzugänglichen Punkte geschah und in den folgenden Aufgaben geschehen wird. Die Logarithmen von a und b sind der Verbesserung nicht unterworfen.

Sind C und D nicht Punkte höherer Ordnung, wohl aber B, A und E, so ist für die α eine Bedingung zu erfüllen, um C und D vermittelst der Dreiecke einzuschalten.

In Fig. 206 sind alle Winkel mit Ausnahme von β und γ gemessen. Es kommt hier als besondere Bedingung hinzu, dafs die Summe der Winkel α um A herum 360^0 betragen mufs. Die Abgleichung auf diesen Wert nennt man den Horizontal- oder Horizontabschlufs.

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 70^0\,13'\,20'' & \alpha_2 = 96^0\,55'\,25'' & \alpha_3 = 50^0\,15'\,15'' \\ \beta_1 = 54\;\;33\;\;15 & \beta_2 = 38\;\;29\;\;16 & \beta_3 = 88\;\;\;2 \\ \gamma_1 = 55\;\;13 & \gamma_2 = 44\;\;36 & \gamma_3 = 41\;\;42\;\;25 \\ \hline f_1 = \qquad +25'' & f_2 = \qquad -41'' & f_3 = \qquad +20'' \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \alpha_4 = 55^0\,22'\;\;0'' & \alpha_5 = 87^0\,15'\;\;0'' \\ \beta_4 = 56\;\;38 & \beta_5 = 41\;\;12 \\ \gamma_4 = 67\;\;59\;\;28 & \gamma_5 = 51\;\;34 \\ \hline f_4 = \qquad +32'' & f_5 = \qquad -60'' \end{array}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 360^0\;0'\;60''; \; f_s = -60''.$$

Ist σ die Verbesserung für je einen Winkel α, so lauten die Bedingungsgleichungen:

$$\begin{array}{ll} 3x + \sigma = f_1 & 3u + \sigma = f_4 \\ 3y + \sigma = f_2 & 3v + \sigma = f_5 \\ 3z + \sigma = f_3 & x + y + z + 5\sigma = f_s. \end{array}$$

Setzt man aus den ersten Gleichungen die Werte von $x, y \cdots$ in die letzte Gleichung, so ist

$$10\sigma = 3f_s - (f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5)$$

$$\sigma = \frac{3f_s - (f_1 + f_2 + \cdots)}{2 \cdot 5}, \text{ allgemein } \sigma = \frac{3f_s - [f_n]}{2 \cdot n},$$

wo $[f_n] = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ ist. Hieraus findet man $x, y, z \cdots$ durch Substitution. Für unser Beispiel ist in Sek.

$$\sigma = \frac{-180 - (-24)}{10} = -15{,}6$$

$$x = 13{,}53; \; y = -8{,}47; \; z = 11{,}87; \; u = 15{,}87; \; v = -14{,}80.$$

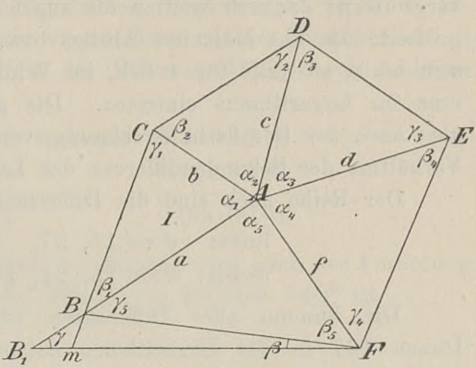
Die verbesserten Winkel sind abgerundet:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 70^0\,13'\,18'' & \alpha_2 = 96^0\,55'\;\;1'' & \alpha_3 = 50^0\,15'\,11'' \\ \beta_1 = 54\;\;33\;\;29 & \beta_2 = 38\;\;29\;\;\;7 & \beta_3 = 88\;\;\;2\;\;12 \\ \gamma_1 = 55\;\;13\;\;13 & \gamma_2 = 44\;\;35\;\;52 & \gamma_3 = 41\;\;42\;\;37 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \alpha_4 = 55^0\,22'\;\;0'' & \alpha_5 = 87^0\,14'\,30'' \\ \beta_4 = 56\;\;38\;\;16 & \beta_5 = 41\;\;11\;\;45 \\ \gamma_4 = 67\;\;59\;\;44 & \gamma_5 = 51\;\;33\;\;45 \end{array}$$

Sowohl der Horizontalabschlufs, als auch die Winkelsummen der Dreiecke sind jetzt theoretisch in Ordnung. Es fragt sich aber noch, ob das Fünfeck trotzdem zum Schlufs kommen wird, wenn man von B aus rechtsum die Dreiecke berechnet. Man könnte ja unbeschadet der obigen Gleichungen die β und γ mit einander vertauschen. Das wird nun nicht vorkommen, aber in den β und γ können gegenseitig Fehler stecken; was die β zu grofs sind, um das Gleiche können die γ zu klein sein. Im Punkte F angelangt braucht man nicht nach B zu gelangen, sondern nach B_1, ohne dafs an der Winkelsumme im Dreieck BAF etwas geändert wird, da an Stelle von γ_5 der gleiche Winkel $\gamma + \beta$ tritt.

Fig. 206.



Um daraufhin das Fünfeck zu prüfen, nehmen wir an, dafs $BA = a$ gegeben ist, es sei $a = 1$, und berechnen der Reihe nach CA, DA, EA und von FA schliefslich wieder BA. Erhalten wir nicht genau wieder $a = 1$, so entsteht das fehlerzeigende Dreieck BmB_1 und das Vieleck schliefst nicht. Die Ursache kann nur in den bestimmenden Gröfsen β und γ liegen, welche wir durch Rechnung prüfen wollen. Die gleichzeitige Anwendung der Sinussätze liefert

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{f} \cdot \frac{f}{a} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\beta_1} \cdot \frac{\sin\gamma_2}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\gamma_3}{\sin\beta_3} \cdot \frac{\sin\gamma_4}{\sin\beta_4} \cdot \frac{\sin\gamma_5}{\sin\beta_5} \cdot$$

$$\sin\beta_1 \cdot \sin\beta_2 \cdot \sin\beta_3 \cdots = \sin\gamma_1 \cdot \sin\gamma_2 \cdot \sin\gamma_3 \cdots$$

Sind die Summen der Logarithmen links und rechts nicht gleich, so ist das ein Beweis dafür, dafs das Fünfeck nicht schliefst und die β und γ geändert werden müssen. Da die Winkelsummen eines jeden Dreiecks ausgeglichen sind und an den α nicht mehr gerührt werden darf, so mufs das, was ich von β_i abziehe, zu γ_i hinzugefügt werden und umgekehrt. Das Mafs der Änderung finde ich durch die Summe der Logarithmen links und rechts.

Die Summe links ist $9.4452034 - 10$

„ „ rechts „ $9.4450763 - 10$

der Unterschied beider: $\varphi = 1271$.

Diese 1271 sind so zu verteilen, dafs die Summen gleich werden, wodurch dann auch der obigen Produktengleichung genügt wird. Die Logarithmen der $\sin\beta$ sind zu kürzen, die der $\sin\gamma$ zu vergröfsern; dadurch werden die zugehörigen Winkel kleiner bezw. gröfser. Da das Mafs des Abzugs bzw. des Zuschlags das gleiche sein mufs, so mufs für 1 Sek. im Winkel die entsprechende Differenz im Logarithmus eintreten. Die ganze Differenz 1271 mufs also nach der Gesellschaftsrechnung verteilt werden und zwar im Verhältnis der Sekundendifferenz der Logarithmentafel.

Der Reihe nach sind die Differenzen für $1''$ aus der Tafel

$$\text{links:}\quad d = 15,\ 27,\ \ 1,\ 14,\ 24$$
$$\text{rechts:}\quad d = 15,\ 21,\ 24,\ \ 9,\ 17.$$

Die Summe aller Differenzen ist $[d] = 81 + 86 = 167$. Diesen 167 in den Logarithmen entspricht $1''$ in den Winkeln; so oft 167 in 1271 enthalten sind, hat man $1''$ im Winkel. Der Grundteil ist also

$$\frac{\varphi}{[d]} = \frac{1271}{167} = 7{,}6 \text{ oder } = 7{,}6''.$$

Die Bennenung von 7,6 nach Sekunden erklärt sich so: vermindert man $\log\sin\beta_5$ um $1 \cdot 24$, so wird β_5 um $1''$ kleiner; vermindert man den Logarithmus um $7{,}6 \cdot 24$, so wird der Winkel um $7{,}6''$ kleiner; der um $7{,}6 \cdot 17$ vermehrte $\log\sin\gamma_5$ gehört zu dem um $7{,}6''$ gröfsern Winkel.

Zur Probe ist

$$445\,20\,34 - 7{,}6 \cdot 81 = 445\,07\,63 + 7{,}6 \cdot 86.$$

Die richtigen Winkel sind nun in ganzen Sekunden

$\beta_i =$	54^0	$33'$	$21''$	$\gamma_i =$	55^0	$13'$	$21''$
	38	28	59		44	36	
	88	2	4		41	42	45
	56	38	8		67	59	52
	41	11	37		51	33	53.

Wendet man fünfstellige Logarithmen an und notiert die zugehörige Differenz für 1 Minute, so erhält man $\frac{\varphi}{[d]}$ in Minuten, deren Dezimalteile man in Sekunden verwandelt.

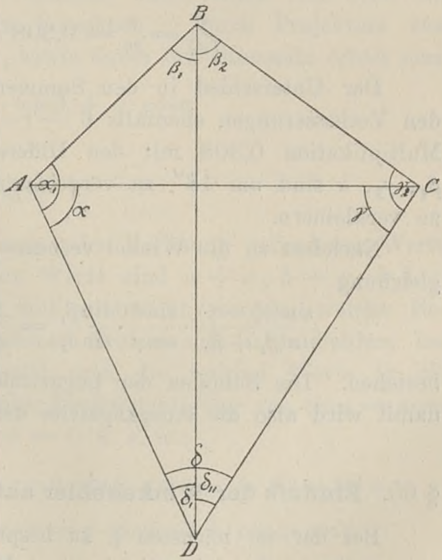
Ferner ist zu beachten, dafs die Differenzen der log sin im zweiten Quadranten negativ sind, dafs also zu $\log\sin 100^0$ die Differenz $d = -2$, zu $\log\sin 150^0$ die Differenz $d = -22$ für $1'$ gehört. Die Differenzen werden wie algebraische Zahlen behandelt. Die Summe der Logarithmen, in welcher $\log\sin 150^0$ steckt, sei die gröſsere; es muſs $\log\sin 30^0$ nicht kleiner, sondern gröſser gemacht werden, damit der Hauptwinkel 150^0 kleiner wird.

Die Anwendung der dekadischen Ergänzungen in Anw. IX. S. 228 ist naheliegend, leicht verständlich und der Übersichtlichkeit wegen angebracht, um sofort die Differenz 1271 durch Addition zu erhalten.

9.445 20 34	verbessert	9.445 14 18
0.554 92 37		0.554 85 83
0.000 12 71		0.000 00 01

Nach den Verbesserungen der Winkel wird auch der Forderung genügt, daſs die Summe der Winkel im Fünfeck 540^0 ist.

Fig. 207.



In der Fig. 207 tritt die zweite Diagonale hinzu, und dadurch wird die Dreieckskette zu einem Dreiecksnetz, wie schon in den zwei letzten Aufgaben durch Anwendung der Sinus- oder Seitengleichung die Kette zu einem Netze gemacht wurde. In dem folgenden Beispiele sei A der Centralpunkt, auf welchen die Berechnung zurückgeführt werden soll, um zu sehen, ob noch eine Ausgleichung in den Winkeln notwendig ist.

Die Winkel seien je auf 180^0 abgestimmt:

$$\alpha_1 = 113^0\,15'\ \ 4'' \qquad \beta_2 = 70^0\,30'\,21'' \qquad \alpha = 75^0\,38'\,57''$$
$$\beta_1 = 46\ \ 41\ \ 59 \qquad \gamma_2 = 77\ \ 58\ \ 23 \qquad \beta = 52\ \ 46\ \ 50$$
$$\gamma_1 = 20\ \ \ 2\ \ 57 \qquad \delta_2 = 31\ \ 31\ \ 16 \qquad \delta = 51\ \ 34\ \ 13$$

Die Verbindung der Sinussätze giebt uns die Seitengleichung

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\alpha_1}\cdot\frac{\sin\gamma_2}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{AD}{BD}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CD}{AD} = 1$$

$$\sin\beta_1\cdot\sin\gamma_2\cdot\sin\alpha = \sin\alpha_1\cdot\sin\beta_2\cdot\sin\gamma.$$

Die Ausrechnung ist mit fünfstelligen Logarithmen bewirkt; die Differenz für 1′ und die Verbesserung für die letzte Dezimalstelle ist hinzugefügt.

		d	Verb.
$\log\sin 46^0\,41'\,59''$	$= 9.86200$	$+12$	$+4$
$77\;\;58\;\;23$	$= 9.99036$	$+\;\;3$	$+1$
$75\;\;38\;\;57$	$= 9.98623$	$+\;\;3$	$+1$
	9.83859	$+18$	$+6$
$\log\sin 113^0\,15'\;\;4''$	$= 9.96322$	$-\;\;6$	$+2$
$70\;\;30\;\;21$	$= 9.97436$	$+\;\;4$	-1
$52\;\;46\;\;50$	$= 9.90109$	$+10$	-3
	9.83867	$+\;\;8$	-2

$$\varphi = 8$$

$$\frac{\varphi}{[d]} = \frac{8}{26} = 0{,}308 = 0'\,18''.$$

Der Unterschied in den Summen der Logarithmen ist 8, in den Verbesserungen ebenfalls $6-(-2)=8$; letztere sind durch Multiplikation 0,308 mit den Differenzen erhalten. Die Winkel β_1, γ_2, α sind um $18''$ zu vergröſsern, α_1, β_2, γ um ebenso viel zu verkleinern.

Nachdem so die Winkel verbessert sind, wird auch die Seitengleichung

$$\frac{\sin(\gamma_2-\gamma)}{\sin(\beta_1+\beta_2)}\cdot\frac{\sin\delta}{\sin\gamma}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\delta_1} = \frac{AB}{AC}\cdot\frac{AC}{AD}\cdot\frac{AD}{AB} = 1$$

bestehen. Die Summen der Logarithmen sind beiderseits 9.38522; damit wird also die Ausgangsseite der Schluſsseite gleich.

§ 65. Einfluſs der Winkelfehler auf die Seiten eines Dreiecks.

Bei der im nächsten § zu besprechenden Triangulation wird es sich darum handeln, die an einer Dreiecksseite liegenden Winkel durch Messung und aus der gegebenen Seite und den gemessenen Winkeln die übrigen Seiten durch Rechnung zu finden. Die Seite sei mit genügender Genauigkeit gemessen, so daſs ihre Maſszahl als vollkommen richtig betrachtet wird. Die Winkel dagegen sind wegen nicht zu berechnender Luft- und Lichtverhältnisse und wegen der Unvollkommenheit des Auges und Instrumentes mit unvermeidlichen Fehlern behaftet. Die Fehler müssen als möglichst klein angenommen werden und können positiv und negativ sein, d. h. die durch Beobachtung gefundenen Gröſsen können kleiner und gröſser als ihre wahren Werte sein.

Sind die gemessenen Gröſsen nicht fehlerfrei, so sind es auch die daraus berechneten nicht. Für die zu messenden Gröſsen giebt es eine vorgeschriebene Fehlergrenze, und es fragt sich nun: wenn sich die gemessenen Gröſsen in dieser Grenze bewegen, in welchen Fehlergrenzen bewegen sich die aus ersteren berechneten Gröſsen? wie muſs ich die zu messenden Winkel wählen, damit die ihnen anhaftenden Fehler einen möglichst geringen Einfluſs auf die berechneten Seiten ausüben?

Auf Grund der Voraussetzung, daſs die Fehler sehr klein sind, kann man die Produkte derselben gleich Null setzen; für den sinus eines sehr kleinen Winkels kann man beim Halbmesser Eins das Bogenmaſs und für den cosinus den Wert Eins nehmen.

Aus drei Stücken eines Dreiecks, unter denen eine Seite ist, lassen sich die drei andern berechnen. Durch Projektion von a und b auf c und Addition, sowie durch den Sinussatz erhält man

$$c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha$$

1) . . . . $$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

Es sind die durch Messung oder Rechnung gefundenen Werte $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$; die wahren Werte sind $a + x$, $b + y$, $c + z$, $\alpha + u$, $\beta + v$, $\gamma + w$; es soll untersucht werden, welche Beziehungen zwischen den gegebenen Gröſsen und ihren Fehlern bestehen. Zu dem Zwecke setzt man die wahren Werte in die Gleichungen 1) und erhält unter Berücksichtigung von $\sin u = \operatorname{arc} u$ und $\cos u = 1$, sowie $x \cdot \operatorname{arc} v = 0$ u. s. w.:

$$z = x \cdot \cos\beta + y \cdot \cos\alpha - a \cdot \sin\beta \cdot \operatorname{arc} v - b \cdot \sin\alpha \cdot \operatorname{arc} u$$

2) $$x \cdot \sin\beta + a \cdot \cos\beta \cdot \operatorname{arc} v = y \cdot \sin\alpha + b \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{arc} u$$

$$u + v + w = 0.$$

Durch Messung seien ermittelt: c, α, β; durch Rechnung gefunden: a, b, γ; die ersteren Gröſsen enthalten die Fehler z, u, v; wie groſs sind die Fehler x, y, w?

Aus 2) ist:

$$x \cdot \cos\beta + y \cdot \cos\alpha = z + a \cdot \sin\beta \cdot \operatorname{arc} v + b \cdot \sin\alpha \cdot \operatorname{arc} u$$

$$x \cdot \sin\beta - y \cdot \sin\alpha = - a \cdot \cos\beta \cdot \operatorname{arc} v + b \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{arc} u.$$

Durch Multiplikation der ersten Gleichung mit $\sin\alpha$, der zweiten mit $\cos\alpha$ und Addition erhält man

$$x \cdot \sin(\alpha + \beta) = z \cdot \sin\alpha - a \cdot \cos(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{arc} v + b \cdot \operatorname{arc} u$$

$$x = z \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} - a \cdot \operatorname{arc} v \cdot \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} + \frac{b \cdot \operatorname{arc} u}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$y = z \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} - b \cdot \operatorname{arc} u \cdot \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} + \frac{a \cdot \operatorname{arc} v}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Da $\alpha + \beta = 180^0 - \gamma$ ist, so

$$x = z \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} + a \cdot \operatorname{arc} v \cdot \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} + \frac{b \cdot \operatorname{arc} u}{\sin\gamma}$$

$$y = z \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + b \cdot \operatorname{arc} u \cdot \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} + \frac{a \cdot \operatorname{arc} v}{\sin\gamma}.$$

Es ist $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{a}{c}$ und $\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{b}{c}$, deshalb

3) . . . $$x = \frac{z \cdot a}{c} + a \cdot \operatorname{arc} v \cdot \operatorname{ctg}\gamma + \frac{b \cdot \operatorname{arc} u}{\sin\gamma}$$

$$y = \frac{z \cdot b}{c} + b \cdot \operatorname{arc} u \cdot \operatorname{ctg}\gamma + \frac{a \cdot \operatorname{arc} v}{\sin\gamma}.$$

Das Verhältnis der Fehler zu den angehörigen Gröſsen ist:

4) . . . $$\frac{x}{a} = \frac{z}{c} + \operatorname{arc} v \cdot \operatorname{ctg}\gamma + \frac{b}{a \cdot \sin\gamma} \cdot \operatorname{arc} u$$

$$\frac{y}{b} = \frac{z}{c} + \operatorname{arc} u \cdot \operatorname{ctg}\gamma + \frac{a}{b \cdot \sin\gamma} \cdot \operatorname{arc} v$$

$$w = -u - v.$$

Die gröſsten Werte für die Fehler links treten auf, wenn die Fehler u, v, z so beschaffen sind, daſs alle Glieder rechts positiv werden.

Wichtiger ist es für uns, nachzusehen, ob die Gröſse der gemessenen Winkel α und β von Einfluſs auf die Fehler ist.

Angenommen, es sei $\alpha + \beta$ nahe $= 180^0$ oder nahe $= 0$, so ist γ nahe $= 0$ oder 180^0, also in beiden Fällen $\sin\gamma$ sehr klein und $\operatorname{ctg}\gamma$ sehr groſs; deshalb werden $\frac{x}{a}$ und $\frac{y}{b}$ sehr groſs werden, auch wenn u und v klein sind, etwa Hundertel-Sekunden betragen. Den Dreieckspunkt C wird man also nie so wählen, daſs dieser Fall eintritt.

Ist $\alpha + \beta = 90^0$, so ist $\gamma = 90^0$, $\sin\gamma = 1$ und $\operatorname{ctg}\gamma = 0$; bei kleinem $\frac{z}{c}$ wird also auch $\frac{x}{a}$ und $\frac{y}{b}$ klein werden.

Welcher von beiden Fehlern

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c} + \frac{b}{a} \cdot \operatorname{arc} u \quad \text{und} \quad \frac{y}{b} = \frac{z}{c} + \frac{a}{b} \cdot \operatorname{arc} v$$

der gröſsere sein wird, hängt von den Seiten a und b ab, sobald, was meist zutrifft, die Messungen der Winkel α und β gleiches Gewicht haben. Es wird dann $\operatorname{arc} u = \operatorname{arc} v$ und für $b > a$ wird $\frac{x}{a} > \frac{y}{b}$ und umgekehrt.

Der günstigste Fall ist demnach derjenige, in welchem $b = a$ d. h. $\alpha = \beta = 45^0$ ist. Die Fehler in den berechneten Seiten a und b sind einander gleich und hängen lediglich ab von der Genauigkeit, mit welcher die Grundlinie c gemessen ist. Die Winkelmessung läſst heutzutage an Genauigkeit kaum zu wünschen übrig.

Denkt man die Winkel an a gemessen, so müſste man bestrebt sein, die Winkel $\beta + \gamma = 90^0$ oder $\alpha = 90^0$ zu machen; und von der Seite b aus hätte man den Winkel $\beta = 90^0$ zu machen. Alle drei Winkel können nun auch nicht annähernd 90^0 werden, und da je zwei Winkel in der Nähe von 45^0, der dritte in der Nähe von 90^0 sich halten sollen, so liegt als Mittelweg nahe, jedem Winkel thunlichst die Gröſse 60^0 zu geben, d. h. das Dreieck möglichst gleichseitig zu gestalten.

Aus dem Gesagten ergiebt sich folgendes Verhalten bei der Anlage von Dreiecksnetzen.

Will man von gröſseren Dreiecken auf kleinere übergehen, so betrachte man die Ausgangsseite c als Hypotenuse und schlieſse rechtwinklige gleichschenklige Dreiecke an. Soll dagegen von einer kleinen Grundlinie der Übergang auf gröſsere Dreiecke erfolgen, so hat man die anschlieſsenden Seiten möglichst gleich lang und nur wenig länger als die Grundlinie zu nehmen; der Übergang muſs allmählich stattfinden.

Ist in den obigen Untersuchungen die eine oder andere der gegebenen Gröſsen aus einer Messung höherer Ordnung hergeleitet, so gilt das, was bereits bei den Polygonzügen angewandt ist. Es sind diese Gröſsen als durchaus richtig zu betrachten und ihr Fehler $= 0$ zu setzen.

Der Einfluſs der unvermeidlichen Beobachtungsfehler auf die Dreiecksberechnung beim Rückwärts- (c, α, γ) und Seitwärtseinschneiden (a, b, γ) wird in ganz ähnlicher Weise wie oben beim Vorwärtseinschneiden ermittelt.

§ 66. Die Triangulation.

Von jeher bestand der Wunsch, die Gestalt und Gröfse der Erde kennen zu lernen. Sobald man durch Beobachtung oder durch philosophische Betrachtung dahin gekommen war, der Erde die Kugelform zu geben, wurde die Beantwortung der Frage nach der Gröfse wesentlich erleichtert. Man brauchte jetzt nur einen gröfsten Kreis zu kennen, um daraus die Oberfläche und den Inhalt zu berechnen.

Die Arbeiten einer Erdmessung beziehen sich demnach auf die Festlegung eines gröfsten Kreises, und da dieser nicht ganz gemessen werden kann, auf die Bestimmung der Gröfse des betreffenden Teils nach Gradmafs und endlich auf die Bestimmung der Länge desselben nach Metern.

Der erste, welcher nach diesen Gesichtspunkten eine rohe Erdmessung, eine sog. Gradmessung ausführte, war Eratosthenes 200 v. Chr. Derselbe hatte gehört, dafs zur Zeit des Sommersolstitiums mittags der ganze Boden eines Brunnens in Syene (Assuan) von der Sonne beschienen wurde, die Lichtstrahlen also in der Richtung des Lotes einfielen. Unter der Annahme, dafs die nördlich gelegene Stadt Alexandria auf dem gleichen Meridian lag, bestimmte er für diesen Tag vermittelst eines Geomon die Sonnenhöhe. Er beobachtete $7{,}2^0$ und erhielt dadurch die Gröfse des Bogens zwischen den beiden Städten oder, wie wir früher gesehen haben, den Breitenunterschied. Die Länge dieses Bogens setzte er nach den Angaben der Karawanenführer oder der damaligen Landesvermessung zu 5000 Stadien an und berechnete den Erdumfang.

Nach unserer heutigen Kenntnis von der Länge einer Stadie war der Meridian des Eratosthenes um ein Sechstel der wirklichen Länge zu grofs. Der Grund des fehlerhaften Ergebnisses liegt in der falschen Zahl für die Entfernung der beiden Städte, ferner in der irrigen Annahme, dafs Syene unter dem Wendekreise und mit Alexandria auf demselben Meridian liegt, endlich in der mangelhaften Bestimmung der Sonnenhöhe. Aber immerhin beruhte diese Messung auf der richtigen Grundlage, deren Erkenntnis für die damalige Zeit bewunderungswürdig ist.

In den spätern Jahrhunderten wurden nach denselben Grundsätzen noch verschiedene mehr oder minder genaue Erdmessungen vorgenommen; inzwischen jedoch verschwand im Abendlande sogar die richtige Vorstellung von der Gestalt der Erde und kam erst durch Kopernikus wieder allgemein zur Geltung. Im Jahre 1617 wurden die Resultate der ersten wissenschaftlich durchgeführten Gradmessung in Europa von Willibrord Snellius unter dem Namen Eratosthenes Batavus veröffentlicht. Und mit diesem Zeitpunkte tritt die Geodäsie in die Reihe der Wissenschaften selbständig ein.

Die Apparate, mit denen Snellius arbeitete, waren noch mangelhaft. Zum Messen der Horizontalwinkel und zur astronomischen Bestimmung der Gröfse seines Meridianbogens mufste er sich eines Quadranten mit Diоptern bedienen, da das bereits erfundene Fernrohr noch nicht zum Zielfernrohr eingerichtet war. Die Messung der Basis hatte unter vielerlei Mängeln des Werkzeugs und unter der Unkenntnis der Gesetze über die Einwirkung der Temperatur zu leiden. Logarithmentafeln standen Snellius noch nicht zu Gebote. Er war sich der Ungenauigkeit seiner Messung wohl bewufst und beschlofs die Wiederholung, während welcher er 1626 starb.

Durch Verbesserung der Instrumente, Kenntnis der physikalischen Gesetze über Wärmeeinflufs und Strahlenbrechung und durch neue Hilfsmittel zur Berechnung günstiger gestellt, erzielte Picard 1670 mit seiner Gradmessung weit genauere Resultate. Er führte nach der Methode von Snellius eine Gradmessung zwischen Paris und Amiens aus, welche durch Cassini und Lahire 1683—1718 nach Norden und Süden erweitert wurde.

Die Messung von Picard ergab derartig genaue Zahlen, dafs Newton an denselben sein Gravitationsgesetz prüfen und sich zur Bekanntgabe desselben entschliefsen konnte. Dagegen kam durch die Zahlen der erweiterten Messung ein Gelehrtenkampf zum Ausbruch, der an den Kampf der Lichttheorien erinnert, aber den Vorzug vor diesem hatte, ex actis zur Entscheidung zu gelangen.

Die letzte Gradmessung hatte durch ihre fehlerhaften Ergebnisse zu der Annahme einer eiförmigen Gestalt der Erde geführt, während Huygens und Newton nach ihren theoretischen Betrachtungen der Erde die Gestalt einer Apfelsine gaben und in ihrer Ansicht durch die Pendelbeobachtungen von Richer unterstützt wurden.

Der langjährige Kampf wurde durch die Gradmessungen in Peru 1735—1744 und in Lappland 1736 entschieden und endete mit dem Siege Newtons. Die Messungen hatten ergeben, dafs die Bogenlänge für 1^0 nach Norden zunimmt, die Radien der Meridiangrade also wachsen und die Erde an den Polen abgeplattet ist.

Während bei $\varphi = 5^0$ ein Breitengrad 1 105 739 m lang ist, hat derselbe bei $\varphi = 70^0$ eine Länge von 1 115 546 m.

Die folgende Gradmessung geschah wiederum auf dem Pariser Meridian mit einer Verlängerung bis Dünkirchen bzw. Barcelona und umfaſste einen Bogen von $9^0\,40'$. Die Leitung derselben lag in den Händen von Méchain und Delambre 1792—1799; sie hatte die Einführung der neuen Längeneinheit, des Meters, zur Veranlassung.

Seit dem Anfange des vorigen Jahrhunderts fanden Messungen von Breitengraden statt in Ostindien (Everest), Ruſsland und Schweden (Struve), Hannover (C. F. Gauſs), Ostpreuſsen (Bessel und Baeyer).

Eine Längengradmessung, also die Messung in der Richtung Ost-West auf einem Parallelkreise wurde von Cassini und Miraldi 1734 versucht. Von wissenschaftlichem Werte ist jedoch erst die zwischen Bordeaux und Fiume veranstaltete Messung, welche 1823 beendet wurde.

Auf Anregung des General Baeyer 1861 wird die trigonometrische Verbindung sämtlicher Sternwarten Europas und die Zusammenfassung aller bisherigen Gradmessungen angestrebt. Man hofft dadurch die Widersprüche zu heben, welche zwischen manchen astronomischen und geodätischen Ortsbestimmungen bestehen. Dieselben rühren von den sog. Lotstörungen her, welche ihren Grund in der äuſsern unregelmäſsigen Gestaltung der Oberfläche (Gebirge) und in der verschiedenartigen innern Zusammensetzung der Erde haben (Gesteinsmassen, Höhlungen). Hierbei tritt dann die Geodäsie wiederum in Berührung mit der Geologie und Physik, welch letztere die Lotabweichungen durch Schwerebestimmung vermittelst des Pendels zu prüfen hat.

Bei den genannten groſsen Messungen ist stets die Erdkrümmung zu berücksichtigen. Die Triangulation, welche wir unten besprechen, wird entweder an die Landestriangulation angeschlossen oder als selbständiges Vermessungswerk betrachtet. Die Erdkrümmung kommt dabei nicht in Rechnung und die Koordinaten werden als ebene angesehen und behandelt. (Bestimmungen vom 29. Dez. 1879. § 5 und Anw. IX. § 2).

Auch die Meſstischblätter beruhen auf einer trigonometrischen Aufnahme, bei welcher die vermessene Fläche als Ebene betrachtet wird, obgleich sie eine Ausdehnung von 10 Minuten im Parallel und 6 Minuten im Meridian umfaſst. Die 2,5 Quadratmeilen jedes Meſstischblattes bilden die Flächen eines Polyeders, und die Zusammenstellung all dieser Polyederflächen liefert in horizontaler und vertikaler Beziehung ein Bild des Landes.

Die Triangulation umfaſst die wichtigsten und zuerst auszuführenden Arbeiten der Vermessung. Sie soll das Knochengerüst liefern, von dem die Polygonzüge und in Verbindung mit diesen die Meſslinien für die Stückvermessung auslaufen. Es folgt daraus, daſs die Dreieckspunkte mit der äuſsersten Genauigkeit in ihrer gegenseitigen und in der Lage zu den Festpunkten der Landesvermessung festgelegt werden müssen.

Je nach der Entfernung der Punkte unterscheidet man Punkte I. Ordnung mit 20^{km} und darüber; II. Ord. mit 10 bis 20^{km}; III. Ord. mit 3 bis 10^{km}; IV. Ord. mit 1 bis 3^{km} Entfernung. Zu diesen treten die trigonometrischen Beipunkte und nötigenfalls polygonometrische Knotenpunkte als Stützpunkte für das Polygonnetz

In den meisten Fällen ist der Anschluſs an die Landesvermessung möglich, die Basis wird aus dieser herübergenommen. Sobald die Basis gegeben ist, beschränkt sich die übrige Arbeit der Triangulierung auf die Winkelmessung und Rechnung.

Das Wesen der Triangulation ist noch dasselbe wie zur Zeit des Snellius. Dieser Begründer der wissenschaftlichen Erdmessung hatte sich die Aufgabe gestellt, die Entfernung zweier Punkte des Meridians von Leyden zu bestimmen. Eine direkte Messung der 18 geographische Meilen langen Linie war nicht möglich. Er wählte deshalb eine Grundlinie, ermittelte ihre Länge, baute nach beiden Seiten Dreiecke auf, auf diese wiederum neue, bis schlieſslich ein Dreieckspunkt in den einen und ein Dreieckspunkt in den anderen Endpunkt der gesuchten Linie fiel. Die beiden Endpunkte Alkmaar und Bergen-op-Zoom waren auf diese Weise durch eine Kette von Dreiecken verbunden.

Auſser der Grundlinie b werden nun alle Winkel sämtlicher Dreiecke gemessen. Aus b und den 3 Winkeln erhält man

$$1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad a = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta} \quad \text{und} \quad c = \frac{b \cdot \sin\gamma}{\sin\beta}.$$

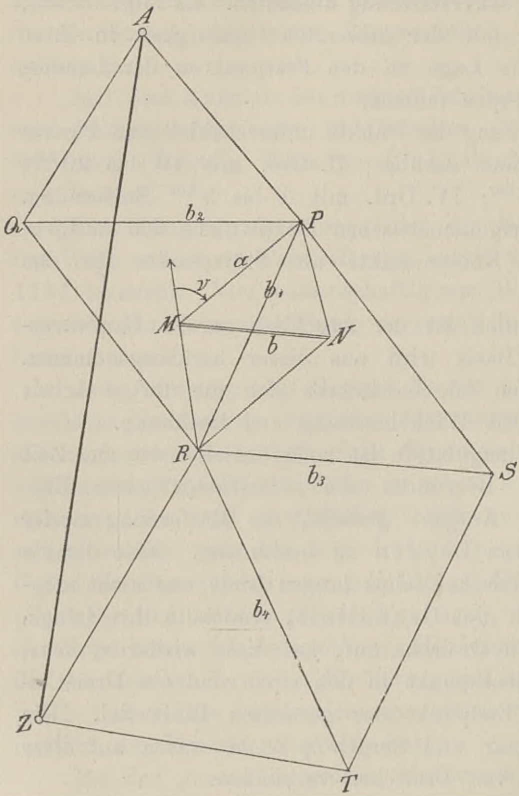
Die Seiten a und c treten darauf an die Stelle der Basis b, und die Berechnung der übrigen Seiten erfolgt auf dieselbe Weise.

Dadurch bekommt man jedoch die Entfernung AZ noch nicht.

Nach Ausgleichung der Winkel in den Dreiecken, welche man über der gemessenen Basis MN aufgebaut hat, kann man als neue Basis $PR = b_1$ berechnen. Man hat so nicht nötig, nach der Schlufsfolgerung des vorigen § zu verfahren, um auf gröfsere Dreiecke überzugehen.

Will man nur die Länge von AZ haben, so nimmt man für den Punkt M die Koordinaten $y = 0$, $x = 0$ und für MP das beliebige Azimuth ν an. Durch die Winkelmessung erhält man auch die Azimuthe aller übrigen Seiten. Man berechnet die Koordinaten aller Punkte nach

Fig. 208.



$$2)\quad y_p = a \cdot \sin \nu; \quad x_p = a \cdot \cos \nu$$

von M und zur Kontrolle auch von N aus. Hat man die Koordinaten von P und R ermittelt, so ergiebt sich weiter

$$3)\quad \operatorname{tg} \nu_p^r = \frac{y_r - y_p}{x_r - x_p}$$

$$4)\quad PR = \frac{y_r - y_p}{\sin \nu_p^r} = \frac{x_r - x_p}{\cos \nu_p^r}.$$

An PR schliefsen sich die neuen Dreiecke, deren Seiten man aus der Basis und den gemessenen Winkeln berechnet und deren Ecken man durch Koordinaten festlegt. Schliefslich erhält man die Koordinaten von A und Z, aus denen man nach 4) die Länge von AZ findet.

Snellius kannte die Methode der Koordinaten nicht; er mufste daher die einzelnen Projektionen der Dreiecksseiten auf seinen Meridian berechnen und addieren. Den einen Endpunkt seiner Basis hatte er in den Meridian gelegt und den Neigungswinkel beider Geraden gemessen. Durch Messung der Dreieckswinkel erhielt er für jede Seite den Projektionswinkel. Die Triangulationsmethode rührt von Gemma Frisius, Professor in Leuven, her und war bereits um 1600 im Gebrauch.

Bei den heutigen grofsen Triangulierungen, welche über ein ganzes Land ausgedehnt werden, begnügt man sich nicht mit einer einzigen Basis. So wird die Göttinger Basis durch eine Kette von Dreiecken mit der Meppener, diese mit der Braaker in Holstein und diese wieder mit der Göttinger verbunden. Zwischen den Ketten ist über das ganze Gebiet ein Dreiecksnetz ausgespannt. Die Grundlinien müssen alle mit der gleichen Gewissenhaftigkeit gemessen sein; nur dann erfüllen sie ihren Zweck und können sie zugleich mit andern Proben als Kontrolle und „Beruhigungsmittel“ dienen.

Wir beschäftigen uns hier nur mit der sog. Kleintriangulierung. Dieselbe hat nicht den Zweck, wie oben die Länge einer Linie AZ zu finden; ihre Aufgabe besteht darin, eine Anzahl Punkte durch Koordinaten des in der betreffenden Gegend geltenden Systems so festzulegen, dafs das ganze Vermessungsgebiet mit den Mefslinien aller niederen Ordnungen richtig orientiert und geprüft werden kann. Um irgend welche Fläche braucht man sich vor der Hand keine Sorge zu machen.

Über die Vermarkung und die Anzahl der Dreieckspunkte (§ 47 und 59) ist früher das Nötige gesagt.

Die Basis für die Neumessung wird durch Anschlufs an die Landestriangulation gewonnen.

Die Winkelmessung auf den Dreieckspunkten erfordert einen grofsen Repetitionstheodolit mit einer Limbusteilung nach $\frac{1}{6}$ oder $\frac{1}{12}$ Graden sexagesimal und mit Nonien- oder Mikroskopablesung. Ist nur ein einfacher Feldmefstheodolit zur Hand, welcher mindestens eine Teilung nach 10 Minuten hat, so ist dieser durch Drehung auf dem Stativ annähernd zur Repetition geeignet zu machen. Da von jedem Dreieckspunkte eine Reihe von Punkten anvisiert wird, also eine Reihe von neben einander liegenden Winkeln zu messen ist, so unterscheidet man eine Einzelmessung eines Winkels und Richtungsbeobachtungen.

1. Die Einzelbeobachtung der Richtungen R_0, R_1, R_2 u. s. w.

Es handelt sich hier um die Messung eines einzelnen Winkels oder um die Ermittelung des Richtungsunterschiedes zwischen den Visierstrahlen, welche von einem Dreieckspunkte nach zwei anderen ausgehen, wobei es auch unbenommen bleibt, als erste Richtung diejenige nach einem beliebigen, scharf markierten und jederzeit gut sichtbaren Punkte zu wählen. Das in Anw. IX. § 16 vorgeschriebene Verfahren deckt sich mit dem früher beschriebenen, welches insofern einer Ergänzung bedarf, als in der zweiten Lage des Fernrohres die erste Einstellung auf Ziel rechts erfolgt. Bei dieser Einstellung steht der Limbus fest, die feine Einstellung auf Ziel R_1 geschieht mit dem Alhidadenmikrometer, worauf an allen Nonien genau abgelesen wird. Aus dieser Stellung wird die gelöste Alhidade nach links geführt und Ziel R_0 anvisiert. Die feine Einstellung geschieht auch hier mit dem Alhidadenmikrometer. Eine grobe Ablesung ist jetzt nicht nötig, da der Winkel aus der ersten Messung genügend bekannt ist. Nach der Einstellung auf R_0 bleibt die Alhidade geklemmt, wird mit dem Limbus zurückgeführt, und durch dessen Mikrometer wird das Fernrohr auf R_1 gerichtet u. s. w. Nach der letzten Einstellung auf R_0 werden alle Nonien genau abgelesen, die arithmetischen Mittel der Ablesungen genommen und die Differenzen durch die Zahl der Wiederholungen dividiert. Bei Punkten III. und IV. Ordnung ist in jeder Lage mindestens eine sechsmalige bzw. viermalige Wiederholung erforderlich. Anw. IX. § 16.

Wie bei R_1 werden die übrigen Richtungen R_2, R_3 u. s. w. gegen die Anfangsrichtung gebildet.

2. Die satzweisen Richtungsbeobachtungen.

Eine gut gewählte Marke, annähernd im Meridian liegend, diene zur Bestimmung der Anfangsrichtung R_0; die übrigen Richtungen seien von links nach rechts R_1, $R_2 \ldots R_n$.

Das Fernrohr stellt man bei festem Limbus auf R_0, lese die Nonien ab, richte es der Reihe nach auf R_1, $R_2 \ldots R_n$ und lese jedesmal genau ab. Nach der letzten Einstellung überzeugt man sich durch Anvisierung des Anfangssignals von der unverändert gebliebenen Stellung des Limbus.

Man schlage nun das Fernrohr durch, ziele R_0 an und stelle durch Linksdrehung das Fernrohr auf R_n, $R_{n-1} \ldots R_2$, R_1, R_0; nach jeder Einstellung wird abgelesen, die letzte Ablesung bei R_0 mufs bis auf die unvermeidliche kleine Abweichung mit der Anfangsablesung übereinstimmen.

Aus den jedesmaligen Ablesungen beider Nonien wird das arithmetische Mittel gebildet und aus den Mitteln beider Fernrohrlagen abermals, worauf die Anfangsablesung von jeder Ablesung der Rechtsvisur abgezogen wird. Alle Visuren in beiden Lagen liefern als Ablesungsmittel einen sog. „Satz“. Solche Sätze hat man sich bei Punkten III. bzw. IV. Ordnung 4 bzw. 3 zu verschaffen.

Bei viermaliger Wiederholung stellt man den Nonius I aus der ersten Einstellung ungefähr um $\frac{180^0}{4} = 45^0$ weiter, führt das Fernrohr bei geklemmter Alhidade mit dem Limbus auf das Anfangssignal und stellt es dort mit dem Limbusmikrometer ein. Bei sechs Sätzen wird man die Anfangsablesung bei jedem neuen Satze um ungefähr 30^0 verlegen.

Beispiel aus Anw. IX. S. 68 für zwei Satzberechnungen siehe Tabelle S. 352.

Die Probeeinstellung in die Anfangsrichtung am Schlufs hat mit der Winkelmessung nichts zu schaffen, weshalb die betreffende Ablesung eingeklammert ist.

Die Richtigkeit der Berechnung wird an den arithmetischen Mitteln geprüft. Das arithmetische Mittel aus den Summen der Spalten 3 4 6 7 mufs gleich sein der Summe in Spalte 9, wobei 0,5 auf 1,0 abgerundet wird. Man kann auch die Summen der Spalten 5 und 8 bilden und daraus das Mittel mit der Summe in Spalte 9 vergleichen.

Sind die aus den Mitteln der Spalten 5 und 8 berechneten Ablesungen für die Visuren R_0, R_1, R_2 bzw. a, b, c, so sind diese in Spalte 9 aufgeführt. In Spalte 10 stehen die Richtungsunterschiede $b - a$ und $c - a$; addiert man diese, so erhält man $b + c - 2a$, während die Summe der Spalte 9 ist: $a + b + c$. Zur Rechenprobe kann man also setzen: $3a + (b + c - 2a) = a + b + c$.

Beim ersten Satze nimmt man aus Spalte 9 als Mittel von 5 und 8 die Ablesung $a = 13' \, 35''$, also $3 \cdot 13' \, 35'' = 40' \, 45''$; hierzu die Summe $10' \, 55''$ der Spalte 10 giebt $51' \, 40''$, was mit der Summe der Spalte 9 übereinstimmt.

In Spalte 11 steht das Mittel aus dem ersten und zweiten Satze.

Das trig. Form. 1 hat noch eine Spalte 12 für Bemerkungen.

Sind die trigonometrischen Punkte der Landesaufnahme durch geographische Koordinaten gegeben und hat noch keine Umrechnung in rechtwinklige Koordinaten für das bei der Spezialvermessung zugrunde zu legende Koordinatensystem stattgefunden, so hat die letztere nach dem trig. Form. 6 zu geschehen, wie § 60 gezeigt ist.

Zielpunkt	Fernrohrlage I							Fernrohrlage II							Mittel aus I und II			Reduzierte Mittel			Mittel aus allen Beobachtungen		
	Nonius					Mittel		Nonius					Mittel										
	A			B				A			B												
	°	′	″	′	″	′	″	°	′	″	′	″	′	″	°	′	″	°	′	″	°	′	″
2.	3.			4.		5.		6.			7.		8.		9.			10.			11.		
R_0	115	13	20	13	10	13	15	295	14	00	13	50	13	55	115	13	35	0	00	00			
R_1	160	15	30	15	20	15	25	340	16	00	15	50	15	55	160	15	40	45	02	05			
R_2	183	22	10	22	00	22	05	3	22	50	22	40	22	45	183	22	25	68	08	50			
R_0	(115	13	20	13	20)			(295	14	00	13	40)											
		51	00	50	30				52	50	52	20				51	40		10	55			
R_0	202	42	30	42	20	42	25	22	43	00	42	50	42	55	202	42	40	0	00	00	0	00	00
R_1	247	44	40	44	40	44	40	67	45	30	45	20	45	25	247	45	03	45	02	23	45	02	14
R_2	270	51	20	51	20	51	20	90	51	50	51	40	51	45	270	51	33	68	08	53	68	08	52
R_0	(202	42	20	42	20)			(22	43	10	42	50)											
		18	30	18	20				20	20	19	50				19	16		11	16			

Die Berechnung der ebenen Koordinaten eines Punktes P von einer Basis AB aus geschieht nach dem früher Gesagten, nachdem man das Azimuth von AB aus den bekannten Koordinaten und die Seiten AP und BP nach dem Sinussatze gefunden hat.

Für die trigonometrischen Punkte ist eine besondere Netzkarte je nach Umständen in 1 : 10 000 bis 1 : 50 000 anzufertigen, welche thunlichst das ganze Vermessungsgebiet umfaſst. Die beobachteten Richtungslinien sind in dieselbe einzutragen. Ist von M nach N und von N nach M visiert, so wird die Linie MN eine Volllinie; ist nur von M nach N visiert, so wird die Richtung MN im ersten Teile bei M eine Volllinie, im zweiten Teile eine punktierte Linie.

§ 67. Die Flächenberechnung.

Auf der Grundlage des Quadratnetzes mit einem Dezimeter Seitenlänge werden sämtliche Meſspunkte: die trigonometrischen, polygonometrischen und Kleinpunkte vermittelst ihrer Koordinaten behufs Herstellung der Gemarkungskarte aufgetragen. An diese Arbeit schlieſst sich die Flächenberechnung in drei von einander unabhängigen Teilen, Anw. VIII. § 115.

a) Jede einzelne Parzelle wird für sich zweimal berechnet.

b) Mehrere Parzellen werden zu kleineren Massen vereinigt und als solche berechnet.

c) Die Gesamtfläche der auf einem Kartenblatte dargestellten Grundstücke wird in einer Masse berechnet.

Die unter a) genannten Einzelberechnungen geschehen nach § 56 dieses Buches. Ist die zweite Berechnung auf mechanischem Wege erfolgt, so ist der ersten Berechnung aus den Originalmessungszahlen ein gröſseres Gewicht bei der Bildung des arithmetischen Mittels beizulegen.

Die unter b) geforderte sog. kleine Massenberechnung geschieht in der Regel auf graphischem Wege und darf nicht mehr als 50 Parzellen, aber gleichzeitig nicht mehr als 80 bzw. 30 bzw. 8 bzw. 2 Hektare umfassen, wenn die Karte entsprechend im Maſsstabe 1 : 4000 bzw. 1 : 2000 bzw. 1 : 1000 bzw. 1 : 500 gezeichnet ist.

Der Unterschied zwischen dieser Berechnung und dem arithmetischen Mittel der Einzelberechnungen darf höchstens

$$a = 0{,}01\sqrt{60F + 0{,}02F^2}$$

in Aren betragen, wenn F in Aren ausgedrückt ist.

Einen Überblick über die zulässige Abweichung a mögen hier folgende Zahlen aus der zu § 119. Anw. VIII gehörigen Tabelle gewähren.

Fläche F	Abweichung a	Fläche F	Abweichung a	Fläche F	Abweichung a
0,50 a = 50 qm	6 qm = 0,06 a	20 a	0,35 a	8 ha	2,47 a
1 a	8 „ = 0,08 „	40 „	0,50 „	10 „	2,83 „
2 „	11 „ = 0,11 „	50 „	0,56 „	20 „	4,47 „
3 „	14 „ = 0,14 „	80 „	0,71 „	40 „	7,48 „
4 „	16 „ = 0,16 „	100 a = 1 ha	0,79 „	60 „	10,40 „
8 „	22 „ = 0,22 „	2 ha	1,13 „	80 „	13,30 „
16 „	25 „ = 0,25 „	4 „	1,65 „	100 „	16,15 „

Die unter c) genannte Berechnung heifst die grofse Massenberechnung und wird auf der Grundlage des Quadratnetzes ausgeführt, welches zur Punktauftragung nach Koordinaten benutzt wurde.

Man gewinnt am einfachsten eine Vorstellung von dieser Berechnung, wenn man sich die gemessene Fläche auf Millimeterpapier gezeichnet denkt. Zählt man sämtliche Quadratmillimeter, welche innerhalb der Grenzen liegen, so kann man aus dem Mafsstabe der Karte die Gesamtfläche finden. An Stelle der Millimeter- und Centimeterquadrate treten bei der grofsen Massenberechnung die Quadrate des Netzes.

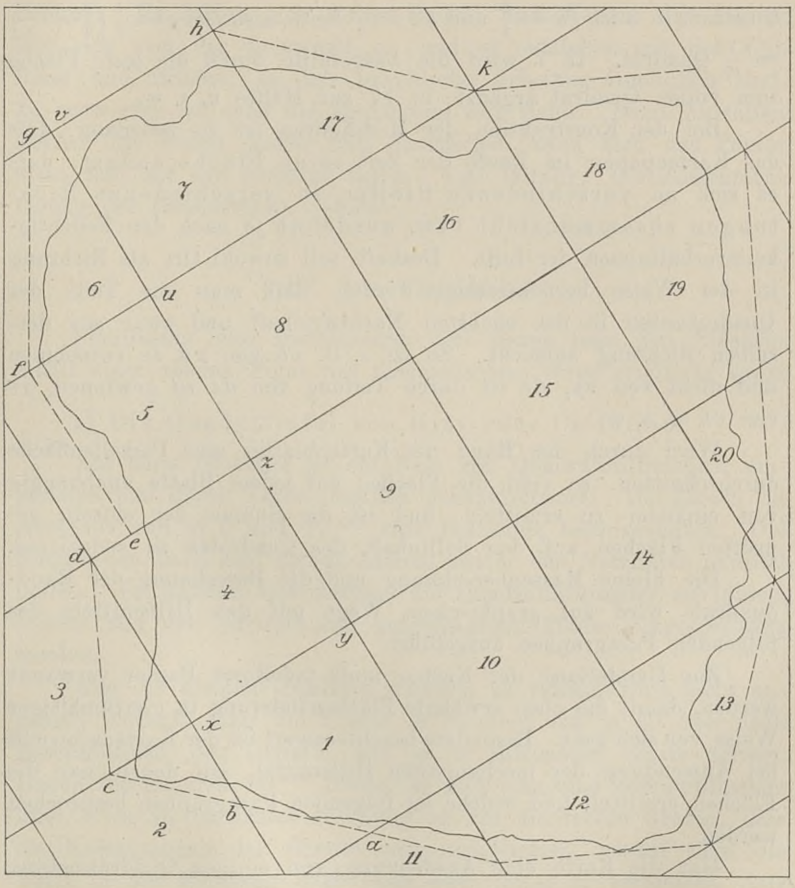
Es werden nun zunächst alle Netzquadrate gezählt, die von der aufgetragenen Vermessungsfläche voll ausgefüllt werden. Ist die Karte in 1 : 2000 gezeichnet, so stellt die Fläche eines Quadrates mit der vorgeschriebenen Seitenlänge von einem Dezimeter eine Feldfläche dar von $200 \cdot 200 = 40\,000$ qm = 4 ha.

Aufser den vollen Quadraten sind noch die Teile der Fläche zu berechnen, welche den Rand bilden und in die benachbarten Quadrate hineinreichen. Ist das nicht ganz ausgefüllte Quadrat mit allen vier Ecken auf dem Kartenblatte vorhanden, so ermittelt man den Inhalt des von den Parzellen bedeckten Teiles und ebenso den des frei gebliebenen Teiles. Die Summe beider mufs den Vollinhalt des Quadrates liefern; der meist auftretende Unterschied wird auf beide Teile im Verhältnis ihrer Gröfse verteilt.

Wird von dem teilweise ausgefüllten Quadrat durch den Rand des Kartenblattes ein Stück abgeschnitten, so mufs man aufserhalb der Parzellengrenze eine Hilfslinie im Quadrate ziehen, die das ganze Quadrat in einem bekannten Verhältnisse $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}\right.$ u. s. w.$\left.\right)$

teilt, und hat nun die bedeckte und freie Fläche zu ermitteln. Von diesem Verfahren kann man Abstand nehmen, wenn der eine oder der andere Teil der Quadratfläche nicht mehr als $\frac{4}{100}$ des ganzen Quadrats beträgt. In diesem Falle wird nur der kleinere Teil zweimal gemessen.

Fig. 209.



In der Fig. 209 sind 8, 9, 10 und 15 voll ausgefüllte Quadrate. Die Randquadrate sind in der Figur durch Zahlen bezeichnet, nach Anw. VIII sollen dieselben durch einen Bruch gekennzeichnet werden, in dessen Zähler die Ordinate und im Nenner die Abscisse des Quadratmittelpunktes steht.

Im Quadrat 1 sind die Seiten in a und b halbiert und durch

ab ist $\frac{1}{8}$ der Fläche abgeschnitten, so dafs die Parzellenfläche und die freie Fläche $\frac{7}{8}$ des Quadrates ausmachen. In 2 füllen diese beiden Flächen zusammen $\frac{1}{8}$ aus; in 3 ist ein Netzpunkt mit der Mitte einer Seite verbunden, wodurch die Hilfsfigur $cdx = \frac{1}{4}$ Quadrat wird. In 5 ist $ez = fu = \frac{3}{4}$ Seite, deshalb $efuz = \frac{3}{4}$ Quadrat; in 6 ist $fu = \frac{3}{4}$ und $gv = \frac{1}{8}$ Seite, also $fuvg = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{7}{16}$ Quadrat. In 7 wird die ausgefüllte durch die leere Fläche zum vollen Quadrat ergänzt; in 17 zur Hälfte u. s. w.

Bei der Konstruktion der Hilfsfiguren ist zu bedenken, dafs das Kartenpapier im Laufe der Zeit seine Fläche ändert, dafs es sich an verschiedenen Stellen in verschiedenen Richtungen zusammenzieht bzw. ausdehnt je nach den Feuchtigkeitsverhältnissen der Luft. Deshalb soll sowohl Ort als Richtung in der Weise berücksichtigt werden, dafs man die Teile der Quadratseiten in der nächsten Nachbarschaft und zwar aus derselben Richtung aufsucht. So ist z. B. xb von xd zu entnehmen und nicht von xy, de ist durch Teilung von dz zu gewinnen, gv von vh u. s. w.

Wird durch den Rand des Kartenblattes eine Parzellenfläche durchschnitten, so sind die Flächen auf jedem Blatte unabhängig von einander zu ermitteln, und ist die Summe der einzeln geprüften Flächen auf den Sollinhalt des Quadrates zu reduzieren.

Die kleine Massenberechnung und die Berechnung der Randquadrate wird auf graphischem Wege mit den Hilfsmitteln des folgenden Paragraphen ausgeführt.

Zur Herstellung der Karten mufs tadelloses Papier verwandt werden, damit die oben erwähnte Flächenänderung in gleichmäfsiger Weise vor sich geht. Besonders beachtenswert ist der Kartenschwund bei Anwendung der mechanischen Hilfsmittel, mit denen man die Flächen ermittelt und welche im folgenden Paragraphen besprochen werden.

Hat die Karte eine Ausdehnung von einigen Quadratmetern, so pflegt man sie der Haltbarkeit wegen mit Leinwand zu hinterkleben und zur bequemeren Aufbewahrung und Handhabung mit einem Rollstab zu versehen. Diese Behandlung hat jedoch ihre Nachteile. Eine aufgezogene Karte ist den Einflüssen von Wärme und Feuchtigkeit und dadurch dem Verziehen weit mehr ausgesetzt, als eine nicht aufgezogene. Mit der Gröfse des Formats wächst die Flächenänderung. An sich würde eine starke Kartenänderung nur von Vorteil sein, insofern sich dieselbe etwa mit einem Stangenzirkel um so leichter feststellen und rechnungsmäſsig verwerten lieſse. Allein mit der Gröſse der Fläche nimmt die Ungleichmäſsigkeit im Verziehen zu. Das Papier zieht sich nach verschiedenen Richtungen ungleich stark; der Photograph bezeichnet sich sogar die Richtung der stärksten Ausdehnung oder Zusammenziehung. Es bilden sich ferner Buckel und Wellen, das Papier löst sich von der Leinwand ab und es entstehen mit der Zeit Risse und Brüche, so daſs graphische Arbeiten unmöglich sind. Zu verwerfen ist auch die Einfassung mit Band. Beim Aufrollen werden die Enden dicker und dazwischen kann sich das Papier nicht fest auf den Rollstab legen. Vgl. Hüser: Die Zusammenlegung der Grundstücke. 1890.

§ 68. Die Planimeter.

Planimeter sind Instrumente, mit denen man den Flächeninhalt einer ebenen Figur auf mechanischem Wege ermitteln kann.

a) Die Quadrattafel von Glas oder Celluloid.

Auf einer Glastafel ist ein Netz von Quadratmillimetern eingerissen und durch Farbe deutlich gekennzeichnet. Die Linien im Abstande von je 5 und 10$^{\mathrm{mm}}$ sind besonders hervorgehoben. Die Ränder der Tafel sind gerade Linien, welche den Netzlinien parallel laufen. Es handelt sich darum, die Quadratmillimeter zu zählen, welche von den Grenzen der aufgetragenen Fläche eingeschlossen werden.

Alle die kleinen Quadrate wirklich zu zählen, wird nicht angehen, weshalb man die Fläche in Streifen von je 10 oder nach Beschaffenheit der Grenzen von je 5 Millimeter Breite zerlegt. Haben die Streifen 10$^{\mathrm{mm}}$ Breite, so legt man eine Zehnmillimeterlinie etwa in vertikaler Richtung so auf die rechte Grenze, daſs die Krümmungen der Grenze sich ausgleichen, worauf man die Tafel in der Richtung nach oben oder unten so verschiebt, daſs auch die untere Grenze durch eine Zehnmillimeterlinie gleichmäſsig geschnitten wird. An der Fünfmillimeterlinie liest man die Länge des 10$^{\mathrm{mm}}$ breiten Streifens ab und multipliziert die Länge mit 10, wodurch man die Anzahl Quadratmillimeter erhält. Zu diesem Produkte zählt man die am Rande mehr auftretenden Quadrate der Figur hinzu oder zieht diejenigen ab, welche innerhalb des Streifens liegen, aber nicht zur Kartenfigur gehören.

Die Grenzpunkte, welche auf der zweiten Zehnmillimeterlinie liegen, hat man sich zu merken. Über diesen Punkten verschiebt man wieder die Linie, bis auf der oberen oder unteren Grenze eine gleichmäſsige Verteilung als Zu- und Abgang stattfindet, und verfährt wie vorhin.

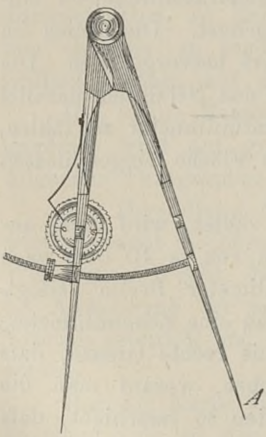
Erschwert die Unregelmäſsigkeit der Grenzen eine leichte Ausgleichung der Zu- und Abgänge, so nimmt man Streifen von 5 Millimeter Breite.

Je nach dem Maſsstabe der Karte ist die Summe der Quadratmillimeter zu multiplizieren, z. B. 1 : 2000 mit 4.

b) Das Fadenplanimeter oder die Harfe.

In einem quadratischen Rahmen von Holz oder Messing sind parallele Fäden von Messing oder Seide so ausgespannt, daſs sie beim Niederlegen des Rahmens auf dem Papiere aufliegen. Ihr Abstand ist etwa 2 oder 4 ^{mm}; zur besseren Unterscheidung giebt man den Fäden verschiedene Farben, etwa dem je fünften die rote, während die übrigen gelb sind. Sind an den vier Ecken des Rahmens Scharniere angebracht, welche es ermöglichen, das Quadrat zu einem Rhombus zu machen, so kann man den Abstand der Fäden etwas verringern und ihn einem andern Maſsstabe anpassen. Es wird jedoch dadurch nicht viel gewonnen, weshalb ich es für ratsamer halte, den Rahmen in der quadratischen Form und den Abstand der Fäden konstant zu belassen.

Fig. 210.

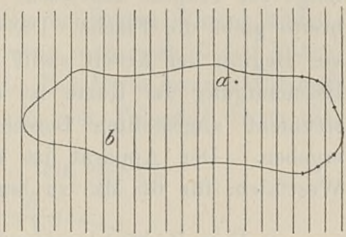


Zu diesem Apparate gehört ein Zirkel (Fig. 210), dessen Schenkel durch eine kreisförmig gebogene Schraubenspindel verbunden sind. Das eine Ende dieser Schraubenspindel ist mit einem breiten Ansatzstück in den einen Schenkel eingelassen und dort zur Vermeidung des Wackelns mit zwei Nieten befestigt. Das andere Ende geht durch eine Öffnung des zweiten Schenkels und trägt eine Mutter mit vorstehendem scharfen Rande, welcher in die Zähne eines Rades greift, sobald die Schenkel den gröſsten möglichen Abstand haben. Das Rad wird durch eine Feder in der jedesmaligen Stellung gehalten und wird bei Beginn der Arbeit auf Null gestellt. Bei der ganzen Öffnung des Zirkels dreht sich dann das Rad um einen Zahn weiter. Welchen Abstand man den Spitzen der Schenkel geben will, hängt von dem Mafsstabe der Karte ab.

Um den Gebrauch der Harfe zu erläutern, nehmen wir an, die gemessene Fläche sei im Mafsstabe 1 : 1000 aufgetragen und die Fäden haben einen Abstand von 2 Millimetern

Man lege die Harfe so auf die Figur, dafs die Fäden zur gröfsten Ausdehnung derselben senkrecht stehen. Der Abstand zweier Fäden entspricht dem Feldmafse 2 Meter. Den Zirkelspitzen gebe man vermittelst der Schraubenmutter als gröfsten Abstand 75^{mm}, was dem Feldmafse 75^{m} gleichkommt. Man setze nun die eine Spitze A in die Mitte der beiden Fäden auf die Grenze des ersten Streifens (Fig. 211), öffne den Zirkel, bis die zweite Spitze in der Mitte der gegenüberliegenden Grenze steht, füge an den ersten Streifen den zweiten, hieran den dritten u. s. w., bis bei voller Öffnung des Zirkels das Rad um einen Zahn weiter geht. Fällt der letzte Punkt a in das Innere eines Streifens, so fängt man mit geschlossenem Zirkel in diesem Punkte von neuem an. Man hat auf diese Weise jeden Flächenstreifen als Paralleltrapez behandelt, welches als Höhe 2^{m} und als Mittellinie 75^{m} hat. Jede ganze Zirkelöffnung liefert 1,5 Ar, ihre Anzahl liest man bei gut konstruiertem Zirkel am Zählrade ab.

Fig. 211.



Ergeben die letzten Streifen nicht voll 1,5 Ar, so findet man den Rest vom Punkte b ab, indem man die letzte teilweise Zirkelöffnung auf den Mafsstab überträgt und mit 2 multipliziert.

Für jeden anderen Mafsstab ist die entsprechende Rechnung zu machen; für 1 : 2000 entspricht der Fadenabstand dem Feldmafse 4^{m}, der Streifen von der Länge der ganzen Zirkelöffnung 75^{mm} stellt eine Fläche von 6 Ar vor. Ist der Mafsstab der Karte 1 : 5000 und der Fadenabstand 4^{mm}, so ist die auf dem Mafsstab übertragene Zirkelöffnung mit 20 zu multiplizieren. Stellt man den Zirkel auf 100^{mm} Öffnung fest, so ist der Flächenstreifen im Felde 500^{m} lang, und jede ganze Zirkelöffnung liefert $500 \cdot 20$ qm = 1 ha.

Die beschriebene Planimeter-Harfe wird gern benutzt, hat aber den Nachteil, dafs die Fäden bald schlaff werden und sich nur mühsam wieder spannen lassen. Die lockern Fäden bilden auf der Karte keine Parallelstreifen mehr und die Ausmessung wird ungenau. Durch das Einstechen der Zirkelspitzen wird ferner die Karte beschädigt.

Man hat deshalb die Parallelteilung auf Ölpapier übertragen und derartige Harfen für 15 Pfg. das Stück in den Handel gebracht. Dieselben leisten gute Dienste, solange die Karte noch deutlich und das Ölpapier klar durchsichtig ist.

In sinnreicher Weise hat Oberlandmesser Mönkemöller die Harfe umgestaltet; vgl. Ztschr. f. Vermessungswesen 1895. An die Stelle des Zirkels tritt eine Laufrolle, auf welche die Länge eines jeden Parallelstreifens als Mittellinie eines Trapezes übertragen wird. Die Rolle setzt durch eine Schraube ohne Ende eine Scheibe in Drehung und an Scheibe und Rolle wird die Gesamtlänge der Trapeze abgelesen. Das Produkt aus Länge und Streifenbreite giebt die Fläche. Die Streifen sind fortlaufend nummeriert; vor Beginn der Arbeit stellt man die Ablesezeiger auf Null. Eine Beschädigung der Karte ist ausgeschlossen, und die mit dem Instrument angestellten Berechnungen haben vorzügliche Resultate ergeben. Der Apparat ist durch den Erfinder M. in Arnsberg, Westfalen, für 65 Mk. zu beziehen.

c) Das Polarplanimeter von Amsler.

Der Inhalt eines Rechtecks ist das unbenannte Produkt aus den Maſszahlen der Grundlinie und Höhe. Die Höhe kann ich dadurch messen, daſs ich ein Rad mit bekanntem Umfange darüber hinrollen lasse und seine Umläufe zähle. Ist die Achse des Rades ein Arm von der Länge der Grundlinie, so ist der Inhalt des Rechtecks das Produkt aus der Zahl der Umläufe in die Länge des Armes.

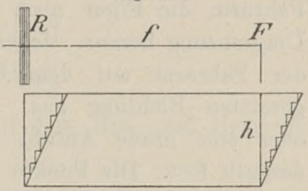
Tritt an Stelle des Rechtecks ein Parallelogramm mit derselben Höhe und Grundlinie, so läſst man das Rad über die eine Seite rollen und bewegt den Achsenarm senkrecht zum Rade und parallel zur Grundlinie mit dem Ende über der gegenüberliegenden Seite weiter. Das Rad wird zum Teil rollen, zum Teil in der Richtung seiner Achse schleifen. Die Zahl der Umdrehungen wird schlieſslich dieselbe wie beim Rechteck sein, und da die Grundlinie wieder die Länge des Armes ist, so bekomme ich durch dasselbe Produkt den Inhalt der Fläche.

Läſst man das Rad sich wälzen in vollständiger Drehung der

Achse um das eine Ende, so rollt das Rad in derselben Richtung weiter, bis der Kreis beschrieben ist. Der Flächeninhalt ist derjenige eines Dreiecks mit den Rollenwälzungen als Grundlinie und der Achse als Höhe. Dasselbe gilt vom Kreissektor; die Aufwicklungen bilden stets einen Faktor der Berechnung.

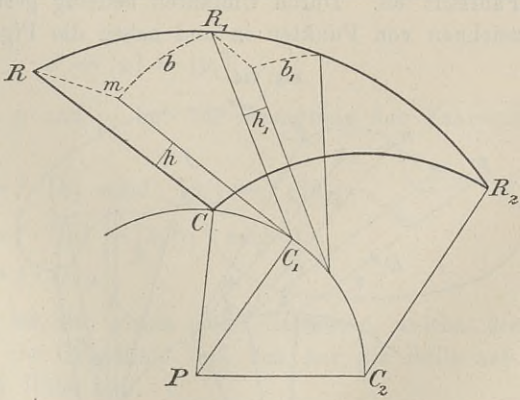
Beim Rechteck und Parallelogramm (Fig. 212) blieb der Fahrarm f sich selbst parallel, ebenso waren die Bewegungsrichtungen von Radebene R und Fahrstift F parallel. Beim Kreise verläſst der Fahrstift seinen Ort nicht, während der Fahrarm seine Richtung stetig ändert. In beiden Fällen wird die ganze Fläche der Reihe nach vom Fahrarm überdeckt.

Fig. 212.



Anders gestaltet sich der Vorgang, wenn der Fahrstift seinen Ort verläſst und die Richtung seiner Bewegung mit der Radebene einen beliebigen Winkel bildet. Fig. 213 kann dies veranschaulichen, wenn man nach C den Fahrstift und nach R die Laufrolle verlegt. Die Rolle kann nicht auf dem Kreise von R nach R_1 laufen, da der Fahrstift durch die Bewegung von C nach C_1 die Rolle nach m zieht. Wir denken uns nun zunächst die Bewegung wie beim Parallelogramm der Fig. 212 ausgeführt, wobei auf der Rolle die Höhe h in CC_1mR aufgewickelt wird. Vom Punkte C_1 aus wird darauf der Sektor C_1mR_1 beschrieben.

Fig. 213.

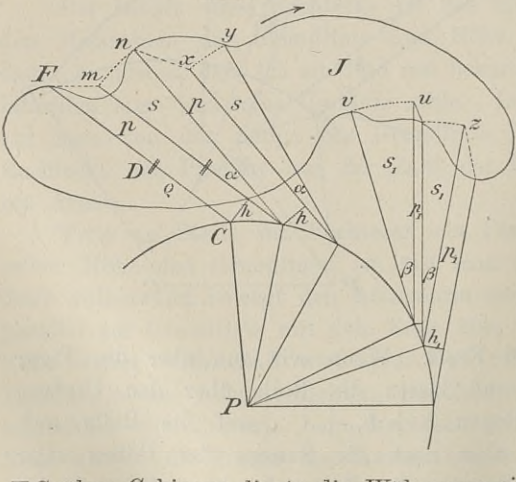


Wir haben hier also die Verbindung von Parallelogramm und Kreis. Wenn wir nun aber die Figur RR_1R_2CR betrachten und lassen die Rolle über den Umfang laufen, so wird der Bogen $b + b_1 + \cdots$ auf die Rolle aufgewickelt, auſserdem aber noch die Summe der Höhen aller Parallelogramme. Die Summe der Bögen b aber wird bei der rückläufigen Bewegung wieder abgewickelt, und da der Radius derselbe bleibt und wir in den Ausgangspunkt R zurückkommen, so wird auch die Summe der rechtsläufigen Sektoren derjenigen der linksläufigen Sektoren gleich sein. Auch von den Höhen wird ein Teil wieder abgewickelt, aber es bleibt noch ein Überschufs der Aufwicklungen als Rest.

Die Höhen der einzelnen Parallelogramme mufs man unendlich klein setzen. CR nimmt die ganze Breite der Figur ein wie oben beim Rechteck; auch in den ersten Nachbarlagen füllt der Fahrarm die Figur noch aus; dann tritt er aber unten aus der Umgrenzung heraus. Jeden Punkt aufserhalb der Figur trifft aber der Fahrarm auf dem Rückwege abermals von der entgegengesetzten Richtung aus. Die aufserhalb liegenden und zweimal oder eine grade Anzahl mal überschrittenen Flächen heben sich deshalb fort. Die Punkte im Innern der Figur werden nur einmal oder eine ungrade Anzahl mal vom Fahrarm überdeckt, weshalb die einmalige Aufwicklung übrigbleiben mufs.

Man mache sich den Vorgang anschaulich, indem man zwei schmale Pappstreifen schneidet, sie mit je einem Ende auf einen Reifszwecken drückt und so das Gelenk C bildet. Das andere Ende P sticht man mit einem Zwecken auf dem Tische fest, und am freien Ende des anderen Streifens bringt man den Fahrstift an. Durch Umfahren beliebig gestalteter Figuren, Einzeichnen von Punkten in und neben die Figur, durch Überdecken des Papiers mit Sand oder Schrotkörnern kann man sich das oben Gesagte klar machen.

Fig. 214.



In allgemeiner Form sei die Theorie des Polarplanimeters an Fig. 214 erläutert. Es ist dabei gleichgiltig, ob die Laufrolle D zwischen der Achse C und dem Fahrstift F oder in der Verlängerung von FC über C hinaus liegt; die Wälzungen sind nur umgekehrte.

Es sei $CF = f$, $CD = \varrho$, der Polarm $PC = r$ bildet mit dem Fahrarm einen stumpfen Winkel bei C, der auf dem Rückwege ein spitzer werden kann. Ferner seien α und β die Bogenlängen für den Radius Eins, dann sind die mit ϱ beschriebenen und aufgewickelten Bögen $\varrho\alpha$, die abgewickelten $\varrho\beta$. Ebenso sind die Höhen h auf-, dagegen h_1 abgewickelt.

Setzen wir nun alles durch Rechtsbewegung Entstandene positiv, alles in entgegengesetzter Richtung Erhaltene negativ, so ist die Summe der Auf- bzw. Abwickelungen

$$u = \quad [h] + [\varrho\alpha]$$
$$u_1 = -[h_1] - [\varrho\beta].$$

Da nun aber die Summen der Bögen auf dem Hin- und Herwege gleich sind, so bleibt auf der Rolle

1) . . . . $U = [h] - [h_1]$

Betrachten wir die überfahrenen Flächen ebenfalls algebraisch, so ist die Summe derselben auf dem Rechts- bzw. Linkslaufe

$$i = \quad [p] + [s]$$
$$i_1 = -[p_1] - [s_1].$$

Da wieder die Summen der Sektoren auf beiden Wegen gleich sind, so bleibt

2) . . . . $J = [p] - [p_1].$

Jedes Parallelogramm p und p_1 hat zur Grundlinie den Fahrarm $CF = f$, also ist

$$[p] = f \cdot [h] \quad \text{und} \quad [p_1] = f \cdot [h_1],$$
$$J = f \cdot ([h] - [h_1]); \quad \text{nach 1)}$$

3) . . . . $J = f \cdot U.$

Die umfahrene Fläche ist also gleich einem Rechtecke, welches die Länge des Fahrarms zur Grundlinie und den auf die Rolle aufgewickelten Bogen zur Höhe hat.

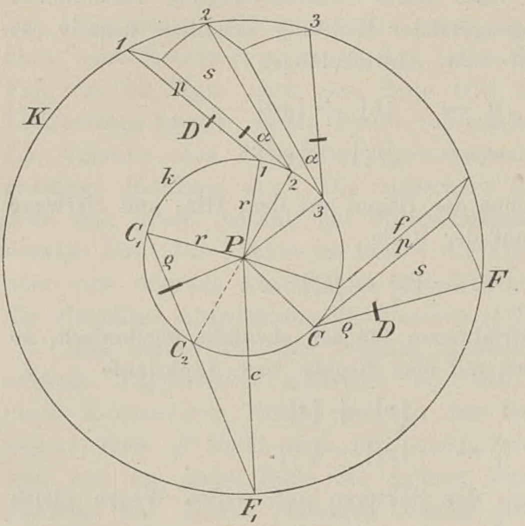
Wenn man dieselbe Figur mit verschiedenen Längen des Fahrarms umfährt, so mufs auch die Zahl der Rollenumläufe verschieden sein. Es ist

$$J = f_1 \cdot U_1 = f_2 \cdot U_2, \quad \text{d. h.} \quad f_1 : f_2 = U_2 : U_1.$$

Will man also einen gröfseren Umlauf der Rolle haben, so mufs man den Fahrarm kürzer machen und umgekehrt.

Im Vorstehenden lag der Pol aufserhalb der umfahrenen Figur. Liegt P innerhalb, wie in Fig. 215, und wählen wir der Einfachheit halber als die zu umfahrende Figur den Kreis K, so wird der Fahrstift F die Punkte 1 2 3 ... treffen, während die Achse C den Umfang des kleinen Kreises k durchläuft, bis alle Punkte oder beide Arme in die Anfangslage zurückkehren. Die Drehung geschieht hier stets in dem gleichen Sinne und ist eine vollständige; deshalb sind die A u f w i c k l u n g e n aller h und aller $\varrho\alpha$ positiv und $[\varrho\alpha] = 2\varrho\pi$.

Fig. 215.



Die vom Fahrarm bestrichene F l ä c h e setzt sich aus lauter positiven Parallelogrammen und Sektoren zusammen. Lassen wir den kleinen Kreis zu einem Punkte einschrumpfen, so wird ersichtlich, dafs die Summe aller Sektoren einen Kreis mit dem Fahrarm als Radius bildet.

Es ist also die Summe aller Aufwicklungen

$$4) \quad \ldots \quad U = [h] + [\varrho\alpha] = [h] + 2\varrho\pi$$

$$[h] = U - 2\varrho\pi.$$

Die Summe der von f bestrichenen Flächen

$$i = [p] + [s] = f \cdot [h] + f^2\pi; \quad \text{nach 4)}$$

$$i = f \cdot (U - 2\varrho\pi) + f^2\pi = f \cdot U + f^2\pi - 2\varrho\pi \cdot f.$$

Um die Gesamtfläche der umfahrenen Figur K zu erhalten, mufs man noch den innern Kreis mit $PC = r$ hinzuzählen. Es ist

$$J = f \cdot U + f^2\pi - 2\varrho\pi \cdot f + r^2\pi$$

$$J = f \cdot U + (f^2 + r^2 - 2f \cdot \varrho) \cdot \pi$$

$$5) \quad \ldots \quad J = f \cdot U + c^2\pi.$$

Der Inhalt der umfahrenen Figur ist also gleich dem Rechtecke aus der Fahrarmlänge und dem aufgewickelten Bogen, vermehrt um die Fläche eines Kreises, dessen Radius von den Längen f, r, ϱ des Instruments abhängt.

Es ist $c^2 = f^2 + r^2 - 2f \cdot \varrho$ der Projektionssatz der Planimetrie und im Dreieck $P C_1 F_1$ zu erkennen, oder im Dreieck PC_2F_1, wenn die Laufrolle in der Verlängerung des Fahrarms steht und das letzte Glied positiv wird; es mufs dieses jetzt positiv werden, weil in 4) die Wälzung $\varrho\alpha$ entgegengesetzt wird.

Die Gröfse der Konstanten $c^2\pi$ bestimme man durch eine Reihe von Versuchen und prüfe dadurch die vom Mechaniker gegebene Zahl. Wie aus der Figur erhellt, ist der Fahrstift F, Achse C und Rollenachse in einer Geraden; beim Befahren des Kreises mit dem Radius c kann also die Rolle nur schleifen. Es wird $U = 0$ und $J = c^2\pi$, wie die Figur und Formel 5) zeigt. Der mit dem Radius c beschriebene Kreis ist der sog. Grundkreis.

Die vorstehend gegebene Theorie setzt voraus, dafs, wie in den obigen Figuren, die Achse der Laufrolle im Fahrarm selbst oder in der Ebene der Achse C und des Fahrstifts F liegt. Dieses ist in Fig. 217 der Fall; bei vielen Instrumenten trifft es jedoch nicht zu. Hier mufs die Rollenachse parallel zur genannten Ebene sein, wenn die Theorie gelten soll. Bildet die Achse mit der Ebene einen Winkel, besteht also eine Rollenschiefe, so wird dadurch das Ergebnis der Umfahrung fehlerhaft.

Um den Fehler der Rollenschiefe unschädlich zu machen, mufs man das Instrument so einrichten, dafs man die Rollenachse in zwei entgegengesetzten Lagen zum Winkel PCF bringen kann. Man umfährt die Figur einmal, wenn die Rolle aufserhalb, und einmal, wenn die Rolle innerhalb des Winkels C liegt, und nimmt aus beiden Ergebnissen das Mittel.

Für dieses Verfahren hat G. Coradi in Zürich das Kompensations-Planimeter konstruiert, bei welchem man den Fahrarm unter dem Polarm hindurchschieben kann. Die Polstellung bleibt dabei unverändert, und es ist darauf bedacht zu nehmen, dafs die Umfahrung aus beiden Lagen bequem ist.

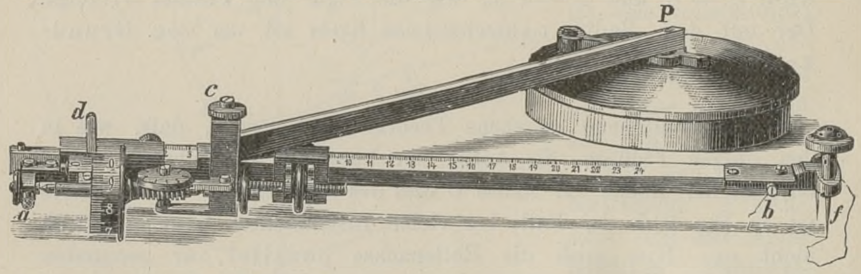
Man stelle den Fahrstift annähernd in die Mitte der Figur und verlege den Pol derart, dafs die beiden Arme bei C ungefähr senkrecht auf einander stehen. Auch beim gewöhnlichen Polarplanimeter wird durch diese Aufstellung die etwaige Rollenschiefe am wenigsten schädlich. Die beiden Arme bilden während des

Umfahrens auf der einen Seite einen spitzen, auf der andern Seite des Umfanges einen stumpfen Winkel.

In der Fig. 216 ist P der feste Punkt oder Pol, unter c steht die vertikale Achse des Polarms, f ist der Fahrstift am Fahrarme. Bei der Bewegung von f findet eine Drehung um die Polachse c und zugleich um den Pol P statt; die Laufrolle wird sich je nach der Bewegung von f nach unten oder oben und nach links oder rechts vorwärts oder rückwärts wälzen und zum Teil drehen und schleifen.

Der Fahrarm läſst sich verschieben in der Hülse, an welcher Laufrolle und Polachse stehen. Die Zahlen am Fahrarme dienen

Fig. 216.



zur Einstellung einer an der Hülse befestigten Marke oder des Nullstriches eines Nonius je nach dem Maſsstabe der Zeichnung. Die feine Einstellung wird durch eine Schraubenmutter bewirkt, welche sich feststellen läſst und durch eine Schraubenspindel mit der Haupthülse in Verbindung steht.

Der Umfang der Rolle ist in 100 Teile geteilt, mit Hilfe eines Nonius lassen sich Zehntel der Teile, also Tausendstel des Umfanges ablesen. Die Achse der Rolle trägt eine endlose Schraube, durch welche eine Scheibe gedreht wird, an der die vollen Umläufe der Rolle durch einen Index und Zahlen angezeigt werden.

Zu dem Instrumente gehört eine Tabelle, welcher man die Zahl der Millimeter für die richtige Einstellung des Fahrarmes je nach dem Maſsstabe der Karte entnimmt.

Neben dem Fahrstifte befindet sich ein etwas längerer stumpfer Stift, welcher auf das Papier gestützt wird und ein sicheres Umfahren befördert. Der Fahrstift selbst sei nicht zu spitz, damit er bei fehlender Stütze nicht zu leicht in das Papier einhakt. Preis etwa 60 Mark.

Zur Erläuterung des Gebrauchs sei das Instrument Nr. 331 von Ott und Coradi in Kempten (Bayern) gewählt. Ist die Figur, deren Fläche gesucht wird, im Mafsstabe 1:1000 gezeichnet, so hat man gemäfs der beigefügten Tabelle den Nonius des Fahrarms auf 47,2 zu stellen. Auf der Grenze der Figur merkt man sich einen Punkt und versucht von da in oberflächlicher Weise die ganze Figur zu umfahren. Stöfst man dabei auf Hindernisse, welche den Lauf der Rolle oder die Bewegung des Fahrarmes stören, so hat man den Pol zu verlegen. Ist die Freiheit der Bewegung gesichert, so stellt man den Fahrstift auf den gewählten Ausgangspunkt und liest an der Scheibe und Rolle ab. Man erhält die vierstellige Zahl 7549 oder nach ganzen Umläufen der Rolle berechnet 7,549, wo 7 an der Scheibe, 5 und 4 unmittelbar an der Rolle und 9 am Nonius abgelesen ist. Nun umfährt man die Figur im Sinne des Uhrzeigers, bis man an den Ausgangspunkt zurückgekehrt ist. Man liest wieder ab: 7979 oder 7,979, subtrahiert die erste von der zweiten Ablesung und zwar ohne Rücksicht auf das Komma, da in der Tabelle der Flächenwert für die Noniuseinheit, also für ein Tausendtel angegeben ist. Der Flächenwert ist hier 10^{qm}, also ist die umfahrene Fläche

$$(7979 - 7549) \cdot 10^{\text{qm}} = 4300^{\text{qm}}.$$

Ist auch für den Mafsstab 1 : 4000 der Fahrarm auf 47,2, also wie für 1 : 1000, eingestellt, so ist das Resultat mit 16 zu multiplizieren.

Man thut gut, jede Fläche mehr als einmal zu umfahren. Bei der kleinen und grofsen Massenberechnung, wo zwei getrennte Berechnungen derselben Figur auszuführen sind, sind zwei verschiedene Polstellungen zu wählen.

Da die Umrechnung der Flächen aus dem einen Mafsstabe in einen anderen leicht durchführbar ist, so wählt man, um die Gleichmäfsigkeit der Rollenabwicklung zu erhöhen, bei einer Einzelberechnung die Einstellung thunlichst in der Mitte des Fahrarmes. Bei weniger Genauigkeit und grofser Fläche nimmt man den Fahrarm länger.

Die Anwendung des Polarplanimeters mit einer Polstellung innerhalb der zu umfahrenden Figur ist untersagt. Anw. VIII. S. 234. Man zerlegt eine grofse Figur in Teile.

Will man sich einen ungefähren Anhalt für die Fläche eines gröfseren Gebietes verschaffen oder etwa den jährlichen Flächenzuwachs an einer grofsen, gut abgehobelten Scheibe eines Baumstammes ermitteln, so wird man den Pol innerhalb der Fläche aufstellen. Man hat in diesem Falle eine konstante Anzahl Quadratmillimeter zu addieren, welche sich nach dem Maſsstabe richtet und in der Tabelle ebenfalls verzeichnet ist. Bei der erwähnten Zuwachsermittlung ist die Konstante gleichgiltig, da sie im Minuend und Subtrahend vorkommt.

Die Prüfung geschieht mit Hilfe eines Probekreises, der auf einer Metallscheibe in Form einer kleinen Rinne gegeben ist. Die Einstellung nach Maſsgabe der Tabelle bedingt die Einführung der entsprechenden Werte für die Noniuseinheit. Statt des Probekreises wendet man auch ein kleines Lineal an, welches an dem einen Ende mit einer Nadel auf dem Tische befestigt werden kann und auf der Oberseite kleine konische Vertiefungen zur Aufnahme des Fahrstiftes hat. Mit dem Fahrstift beschreibt man Kreise, deren Flächen nach der Formel $r^2\pi$ berechnet in der Tafel stehen oder berechnet werden. Den Ausgangspunkt merkt man sich durch einen Strich auf dem Papiere. Gezeichnete Probefiguren sind wiederholt zu umfahren.

An dem Planimeter der Figur 216 ist eine Justiervorrichtung bei *b* angebracht, welche gestattet, Fahrarm und Rollenachse parallel zu stellen; demselben Zwecke dient die Schraube *a* am Achsenlager der Rolle.

Läſst sich die Länge des Fahrarmes nicht ändern, so muſs man die Zahlen der Tabelle für die Einstellung des Fahrarmes berichtigen.

Die Rollenteilung läſst sich gegen den Nonius durch Verschiebung der Rollenachse mit Hilfe der Lagerschrauben richtig stellen.

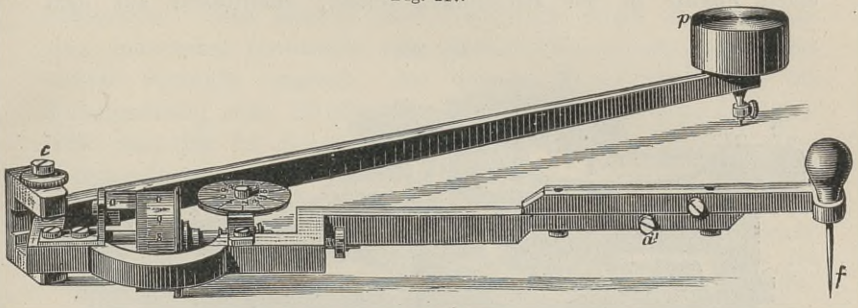
Die Genauigkeit des als richtig befundenen Polarplanimeters hängt ab von der richtigen Einstellung des Fahrarmes, der genauen Ablesung am Nonius, der Oberfläche des Papieres und von der Sicherheit, mit welcher die Figur umfahren wird.

Beim Umfahren einer gezeichneten Figur wird der Fahrstift bald nach innen, bald nach auſsen von der Grenzlinie abweichen. Alle Abweichungen übertragen sich auf die Laufrolle, die Ablesungen werden fehlerhaft und damit der eine Faktor der Flächenberechnung. Die genannten Abweichungen werden einen um so geringeren Einfluſs ausüben, je gröſser die Fläche im Verhältnis zu ihrem Umfange ist. Die Genauigkeit des Planimeters wird in dieser Beziehung also bei derjenigen von zwei gleichen Flächen die gröſsere sein, welche den kleineren Umfang hat. Dieser Fall tritt ein, wenn sich die Figur der Kreisform nähert; dann ist also das Polarplanimeter mit Vorteil zu verwerten, während bei langgestreckten Figuren von sehr geringer Breite, also bei Flächen mit kleinem Inhalte und Umfange z. B. langen und schmalen Ackerstücken und Wegen die Anwendung desselben weit weniger zuverlässig ist.

Die Fig. 217 stellt ein Polarplanimeter mit konstanter Armlänge dar; Preis etwa 45 Mark. Bei diesem hat die Noniuseinheit verschiedene Werte, entsprechend den Maſsstäben der Zeichnungen; sie werden der zugehörigen Tabelle entnommen.

Zur Prüfung dient ein Lineal wie oben, dessen Fahrstiftlöcher von der Centrumsnadel entweder um ganze Millimeter ab-

Fig. 217.



stehen, oder in solcher Entfernung liegen, daſs die vom Fahrstift umzogene Kreisfläche durch eine runde Anzahl Quadratmillimeter ausgedrückt wird. So ist für

$$r^2\pi = 1\,000^{\text{qmm}} \text{ der Radius } r = 17{,}84^{\text{mm}}$$
$$r^2\pi = 10\,000 \text{ „ „ „ } r = 56{,}42 \text{ „}$$
$$r^2\pi = 20\,000 \text{ „ „ „ } r = 79{,}79 \text{ „}$$

Hat man diese Probekreise nicht zur Verfügung, so zeichnet man gleichseitige Dreiecke von vorstehenden Flächen. Dieselben lassen sich am genauesten zeichnen und durch Anlegen eines kleinen Lineals sicher umfahren. Die Seitenlängen sind für

$$F = 1\,000^{\text{qmm}}, \quad s = 48{,}06^{\text{mm}}$$
$$F = 10\,000 \text{ „} \quad s = 151{,}97 \text{ „}$$
$$F = 20\,000 \text{ „} \quad s = 241{,}91 \text{ „}$$

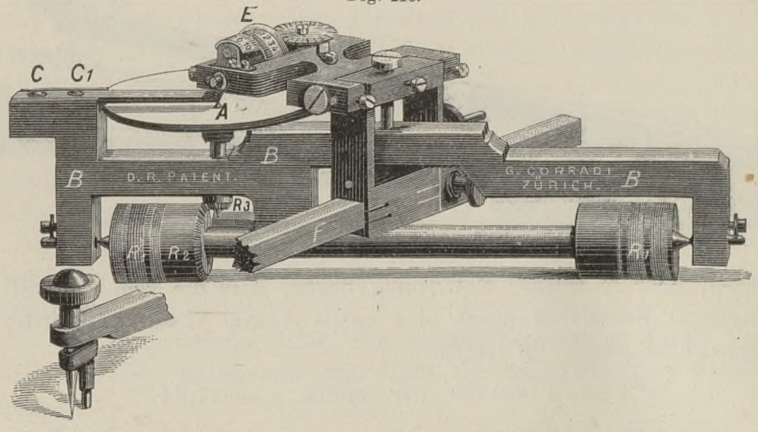
Das Polarplanimeter soll man in eine solche Stellung zur Probefigur bringen, daſs, wenn der Fahrstift in den Mittelpunkt derselben gehalten wird, die Arme des Planimeters nahezu einen rechten Winkel mit einander bilden. Eine Berichtigung ist möglich durch Veränderung der Fahrarmlänge bei a'.

Bei den Flächenberechnungen wird mindestens eine zweimalige Umfahrung gefordert, wenn die Fläche mehr als 50, eine dreimalige, wenn sie zwischen 30 und 50, eine viermalige, wenn sie weniger als 30 Noniuseinheiten beträgt. Ältere Pläne können infolge der Einschrumpfung des Papiers das Ergebnis des Planimeters stark beeinflussen, weshalb dieselbe zu ermitteln und rechnungsmäfsig zu berücksichtigen ist.

d. Das Rollplanimeter.

Beim Polarplanimeter läuft die Rolle, deren Abwickelungen einen Faktor in der Berechnung bilden, unmittelbar auf dem

Fig. 218.



Papiere. Als eine Fehlerquelle wurde deshalb oben die mehr oder minder geebnete Oberfläche des Zeichenpapieres angeführt. Ein fernerer Übelstand des Instruments liegt darin, dafs wegen des festliegenden Poles die Freiheit in der Bewegung des Fahrstiftes eingeschränkt ist.

In dieser Beziehung besitzt das Rollplanimeter den Vorzug, dafs die Laufrolle E (Fig. 218) sich auf einer ebenen Scheibe A bewegt und das ganze Instrument in einer Richtung sich unbegrenzt fortführen läfst, also die Umfahrung einer Fläche gestattet, die beliebig lang ist, und deren Breite etwas gröfser ist als die eingestellte Fahrarmlänge. Wegen der erstgenannten unendlichen Bewegung nennt man dieses Planimeter auch Linear-Rollplanimeter.

Das Instrument ruht mit den Rollen R_1 auf der Zeichnung; von den Rollen wird vermittelst der in Schrauben eingelagerten Achse das Gestell B getragen, auf welchem die Scheibe A und die Achse des Fahrarmes F angebracht ist. Ein konisches Rad R_2 überträgt die Rollenbewegungen auf das Rad R_3, welches auf der Achse der Scheibe A sitzt. Die Achse von A ruht unten auf einer Spitze, die obere Spitze wird durch den Arm cc_1 gehalten. Die Übertragung der Rollenbewegung auf die Zählscheibe wird durch eine endlose Schraube vermittelt.

Die Scheibenbezifferung des Instrumentes der hiesigen Sammlung ist eine erweiterte; die Zahlen auf dem äufseren Rande geben die vollen Umdrehungen der Mefsrolle an einem Index an; die Zahlen am inneren Kreise zählen die ganzen Umdrehungen der Zählscheibe. Das letztere wird ermöglicht durch die Drehung einer Indexachse vermittelst eines Differenzialrades, in welches die endlose Schraube eingreift. Am äufseren Kreise zählt man 20 Rollenumläufe, also 20 000 Noniuseinheiten; am inneren Index zählt man bis 21 Scheibenumdrehungen, so dafs man bis 420 Rollenumläufe oder 420 000 Noniuseinheiten ablesen kann.

Die Schraube ohne Ende greift in zwei dicht auf einander liegende Räder, deren Zähne eine Stellung zu einander haben, wie die Striche des Nonius zu den Strichen des Mafsstabes. An bestimmten Stellen greift sie zwischen zwei Zähne beider Scheiben und schiebt dadurch die zweite Scheibe stärker vorwärts.

Die Flächenwerte der Noniuseinheiten sind bei diesem Planimeter bedeutend geringer als beim Polarplanimeter bei gleicher Länge des Fahrarmes, wodurch ebenfalls die Genauigkeit erhöht wird.

Als Verhaltungsmafsregel beim Gebrauche sei aus der dem Instrument beiliegenden Broschüre folgendes bemerkt: 1. man fahre in einem so langsamen Tempo, dafs sich die Ziffern auf der Zählscheibe noch deutlich erkennen lassen; 2. den Anfangspunkt für die Umfahrung wähle man so, dafs Fahrarm und Laufwalze einen rechten Winkel bilden; 3. alle rotierenden Teile des Instruments sollen sich leicht, aber ohne den geringsten Spielraum in der Richtung der Achse drehen lassen. Im übrigen ist der Gebrauch mit dem des Polarplanimeters übereinstimmend.

Der Rand der Mefsrolle ist sorgfältig vor Rost zu schützen; nach jeder Berührung mit dem Finger ist derselbe mit einem weichen Lappen abzuwischen. Die Reibung der Achsen ist von

Zeit zu Zeit durch feines Uhrmacheröl zu mildern. Preis des Instruments etwa 130 Mark.

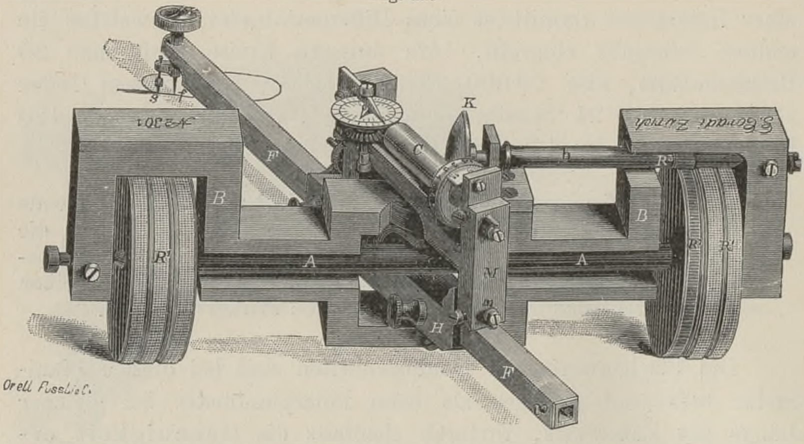
Die Theorie des Rollplanimeters giebt Reitz: Ztschr. f. Vermessungswesen 1884. Die Abhandlung wird von der Firma G. Coradi in Zürich dem Instrumente beigefügt.

e. Das Kugelrollplanimeter.

Eine neuere Konstruktion sind die freischwebenden Kugelplanimeter und Kugelrollplanimeter von G. Coradi in Zürich; vgl. dessen Schrift: die Kugelplanimeter; sie ist unentgeltlich zu beziehen.

Die Mefsrolle läuft nicht auf einer Scheibe, sondern der mit ihr verbundene Cylinder C wälzt sich auf einer metallenen Kugel-

Fig. 219.



fläche K ab, ohne dafs eine Gleitbewegung vorkommt. Aus letzterm Grunde ist ein Papierüberzug nicht nötig, deshalb ist das Instrument haltbarer und mit einer Fehlerquelle weniger behaftet. Weil ferner die Mefsrolle cylindrisch ist und nur rollend sich bewegt, so ist ein geringer Spielraum ihrer Achse weiter nicht schädlich. Wegen des gröfseren Gewichtes und der gröfseren Walzendurchmesser ist die Leistung des Instruments weniger von der Unterlage abhängig. Die Einrichtung ist aus der Fig. 219 ersichtlich. Das Instrument verlangt eine sorgfältige Behandlung, bezüglich welcher auf die obige Schrift verwiesen sei. Preis 130 bis 170 Mark

Für jede Flächenberechnung nach einem Plane ist es von Wichtigkeit, die Veränderung des Papieres zu kontrollieren.

Man hat die Flächen, deren Inhalt anderweitig durch Zahlen bekannt ist, etwa die Flächen der Netzquadrate, zu prüfen und die Gröfse der Flächenänderung zu bestimmen. Man drückt die Änderung durch eine Verhältniszahl aus, welche dann zur Reduzierung der gemessenen Flächen benutzt wird. Beim Rollplanimeter nimmt man die Reduktion durch die Einstellung des Fahrarmes vor. Sind die Flächen der Karte infolge der Einschrumpfung des Papieres um $1 : n$ derselben kleiner geworden, so nimmt man die Fahrstablänge um $1 : n$ der Tabellenzahl kürzer.

Es sei an dieser Stelle davor gewarnt, die Auftragung der Punkte eines Quadratnetzes mit tage- oder wochenlanger Unterbrechung vorzunehmen. Wird das Papier z. B. aufgerollt, so sind die Endteile in verschiedener Weise den Einflüssen der Luft ausgesetzt. Breitet man es nun aus und erweitert das vorhandene Netz, so tritt später ein neuer ungleichmäfsiger Schwund ein, da die inzwischen eingetretene Änderung nach den verschiedenen Richtungen nicht genügend berücksichtigt werden kann.

§ 69. Flächenteilung und Grenzregelung.

Die Teilung von Flächen des Feldes kann aus verschiedenen Gründen notwendig werden. Einmal können Erbschaftsverhältnisse oder die Aufhebung gemeinsamer Benutzung dieselbe verlangen, zweitens kann sie gefordert sein durch Änderung der Grenzen. Der letztere Fall tritt ein, wenn Grundstücke durch das projektierte Wegenetz geschnitten werden, wodurch dem einen Eigentümer eine Fläche genommen, dem anderen zugeteilt wird, und wofür an irgend einer anderen Stelle ein Ausgleich herbeigeführt werden mufs. Stofsen Gemeindebezirke mit sehr unregelmäfsigen Grenzen an einander, welche beiderseits die Beackerung, die Benutzung der landwirtschaftlichen Maschinen, die Entwässerung und den Verkehr erschweren, so sucht man die Grenzen möglichst regelmäfsig zu gestalten, wodurch Abtretung und Austausch von Flächen und demnach Teilungen erforderlich werden. Die Güte, Bonität, des Bodens und die Entfernung ist dabei in Rechnung zu ziehen.

Bei den Erbschafts- und Berechtigungsteilungen zusammenhängender Flächen wird es auf rein geometrische Konstruktionen ankommen, sobald die Güte der Teilungsfläche überall dieselbe ist, auf Konstruktion und Rechnung, sobald die einzelnen Teile der Fläche verschiedene Werte haben. Es sind unter diesen Verhältnissen die Ausgangspunkte für die Teilungslinien in der Regel zu suchen. Bei der Grenzregelung, bei der Anlage von Wegen, Bahnen, bei der Verlegung von Wasserläufen, bei Abtretung und Eintausch von Grundstücken sind die Teilungslinien einerseits gegeben, die abgeschnittenen Flächen sind zu berechnen, andererseits sind meist die Ausgangspunkte bekannt und die Teilungslinien nach den berechneten, abzuschneidenden Stücken richtig einzulegen, oder es ist die Richtung festgelegt, in welcher die Teilung vorzunehmen ist.

Die Berechnung abgeschnittener Flächen geschieht im Verfahren der Stückvermessung. Die Auffindung der Teilungslinien soll uns im folgenden beschäftigen, wobei vorausgeschickt sei, dafs die ausgeführte Teilung stets durch besondere Rechnung oder Messung oder durch Anwendung des Planimeters zu prüfen ist.

Die bei der Aufmessung verlangte Genauigkeit hängt von dem Werte des „Grundes" oder „Bodens" ab.

a. Die zu teilende Fläche hat überall dieselbe Bonität.

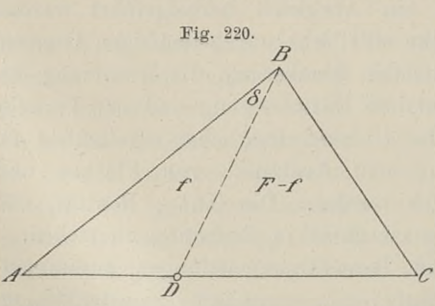
Da die Werte zweier Grundstücke von gleicher Bonität sich verhalten wie ihre Flächen, so läuft die Teilung der Flächen auf geometrische Konstruktion hinaus, welcher die berechneten oder gegebenen Flächengröfsen zugrunde liegen.

1. Ein Dreieck von einer Ecke aus im Verhältnis von $m:n:p$ durch Gerade zu teilen.

Man teile die gegenüberliegende Seite in dem gegebenen Verhältnisse und verbinde die Teilpunkte mit der Ecke, so verhalten sich die Dreiecke ebenso, weil sie alle gleiche Höhe haben.

2. Vom Dreiecke ABC soll durch die Gerade BD eine Fläche $ABD = f$ abgeschnitten werden: a) in offenem Gelände, b) im Walde.

Fig. 220.



a) Ist $ABC = F$, so

$$AD : AC = f : F$$

$$AD = \frac{f}{F} \cdot AC$$

oder $\frac{1}{2} AD \cdot AB \cdot \sin A = f$

d. h.
$$AD = \frac{2f}{AB \cdot \sin A}.$$

b) Befindet sich zwischen B und AC ein dichter Bestand, so ist der Durchhiebswinkel $ABD = \delta$ zu suchen. Es ist

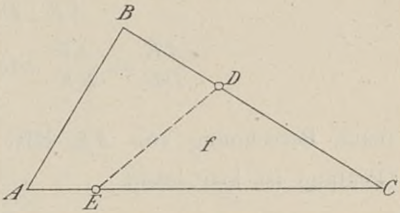
$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BD \cdot \sin\delta = f$$

$$\frac{1}{2} BC \cdot BD \cdot \sin(B - \delta) = F - f,$$

durch Division $\dfrac{BC \cdot \sin(B-\delta)}{AB \cdot \sin\delta} = \dfrac{F-f}{f}$, $\dfrac{\sin(B-\delta)}{\sin\delta} = \dfrac{AB}{BC} \cdot \dfrac{F-f}{f}$,

woraus nach Entwickelung von $\sin(B - \delta)$ der Winkel δ zu berechnen ist.

Fig. 221.



3. In der Seite BC des Dreiecks $ABC = F$ ist der Punkt D gegeben; es soll von D aus ein Stück $DCE = f$ abgeschnitten werden. (Fig. 221).

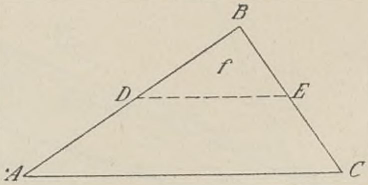
Es ist $$\frac{1}{2} CE \cdot CD \cdot \sin C = f$$

$$CE = \frac{2f}{CD \cdot \sin C}.$$

Ist f gröfser als ADC, so fällt E in AB und nach Berechnung von $F - f$ ist BE zu suchen.

4. Durch $DE \parallel AC$ soll man vom Dreiecke $ABC = F$ das Stück $BDE = f$ abschneiden.

Fig. 222.



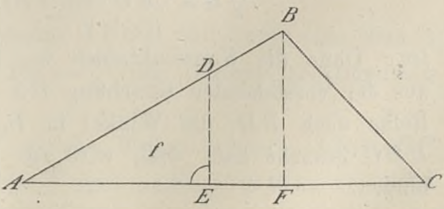
Da sich ähnliche Dreiecke wie die Quadrate homologer Seiten verhalten, so ist in Fig. 222

$$f : F = BE^2 : BC^2 = BD^2 : BA^2$$

$$BE = BC \cdot \sqrt{\frac{f}{F}}; \quad BD = BA \cdot \sqrt{\frac{f}{F}}.$$

5. Das Dreieck ABC ist durch die Seite $AB = c$ und durch die drei Winkel gegeben; man soll durch $DE \perp AC$ eine Fläche f abschneiden. (Fig. 223).

Fig. 223.



Zunächst ist der Inhalt des ganzen Dreiecks F zu berechnen; da AC nach dem Sinussatze zu finden ist, so wird auch die Höhe BF bekannt und damit die

Fläche ABF. Ist f kleiner als ABF, so fällt D in die Seite AB, anderenfalls in BC.

Entweder ist AD zu berechnen und von D das Lot zu fällen, oder AE und das Lot zu errichten, oder beide Strecken sind zu suchen und A mit E durch eine Gerade zu verbinden. Die beiden Gleichungen für AE und DE sind

$$AE \cdot DE = 2f$$

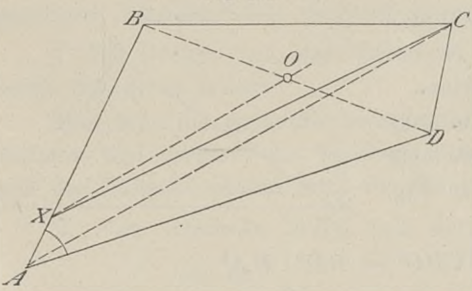
$$\frac{AE}{DE} = \frac{AF}{BF} \text{ oder } \frac{AE}{DE} = \operatorname{ctg} A,$$

nach Berechnung von AE läſst sich $AD = \dfrac{AE}{\cos A}$ finden. Die Prüfung ist hier leicht.

6. Das Viereck $ABCD$ ist gegeben durch die vier Seiten und den $\sphericalangle A$; dasselbe soll von der Ecke C aus durch eine Gerade halbiert werden. (Fig. 224).

Zunächst ist zu untersuchen, ob AB oder AD von der Teilungslinie getroffen wird. Für die Arbeiten im Felde ist dieses dann von Belang, wenn man den Punkt X von A oder B aus sucht. Im andern Falle führt man im Felde dieselben Konstruktionen aus wie auf dem Papier. Man messe die Diagonale BD, halbiere sie in O, stecke durch Baken die Diagonale CA ab und lege durch O zu CA die Parallele. Schneidet diese die Seite AB in X, so verbinde man C mit X und die Aufgabe ist gelöst Zur Prüfung wird man BX messen, den Winkel B aus den gegebenen Stücken berechnen und nachsehen, ob

Fig. 224.



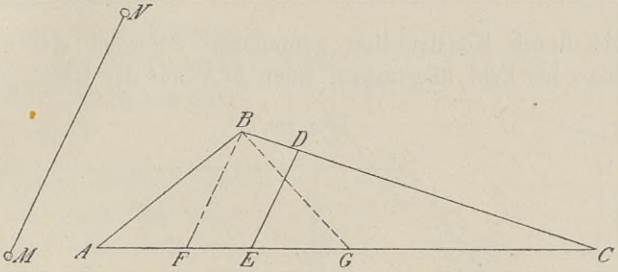
$$\tfrac{1}{2} BX \cdot BC \cdot \sin ABC = \tfrac{1}{2} ABCD$$

ist. Ohne die Konstruktionen im Felde auszuführen, läſst sich aus der vorstehenden Gleichung BX berechnen, nachdem man der Reihe nach BD, die Winkel in B und die Flächen ABD und DBC gesucht hat. Man wird zur Prüfung beide Verfahren verbinden.

7. Ein gegebenes Dreieck in zwei gleiche Teile zu teilen durch eine Gerade DE, welche einer Geraden MN im Felde parallel ist. (Fig. 225).

Man ziehe $BF \parallel MN$ und BG, wo G die Mitte von AC ist.

Fig. 225.



Ist DE die gesuchte Halbierungslinie des Dreiecks, so ist

$$CDE = CBG = \tfrac{1}{2} ABC.$$

$$CDE : CBF = CE^2 : CF^2$$

$$CBF : CBG = CF : CG,$$

also $$CDE = \frac{CE^2}{CF^2} \cdot CBF$$

$$CBF = \frac{CF}{CG} \cdot CBG = \frac{CF}{CG} \cdot \tfrac{1}{2} ABC,$$

deshalb $$CDE = \frac{CE^2}{CF^2} \cdot \frac{CF}{CG} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot ABC$$

$$1 = \frac{CE^2}{CF \cdot CG} \quad \text{d. h.} \quad CE^2 = CF \cdot \tfrac{1}{2} AC.$$

Hieraus ist CE durch Rechnung oder durch Zeichnung als mittlere geometrische Proportionale zu CF und $\frac{1}{2} AC$ zu finden, worauf CD aus $CD \cdot CE \cdot \sin C = ABC$ sich ergiebt.

Ist das Feld zwischen E und D nicht übersehbar, so ist der Winkel bei E oder D zu berechnen.

8. Von einem Parallelogramm $ABCD$ soll durch eine Gerade $PQ \parallel MN$ eine Fläche $ABPQ = \frac{2}{5}$ des Ganzen abgeschnitten werden. (Fig. 226).

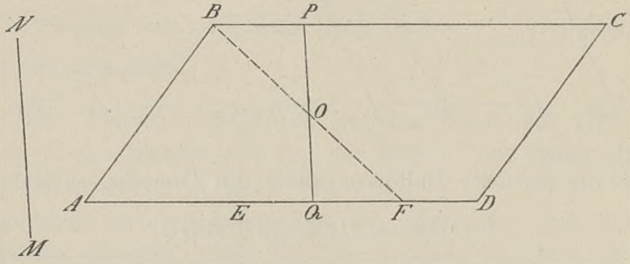
Man teile AD in fünf gleiche Teile, so dafs $AE = EF = \frac{2}{5} AD$ ist; verbinde B mit F und halbiere BF in O, ziehe durch O die Parallele zu MN, so ist PQ die gesuchte Teilungslinie. Denn es ist

$$\frac{ABF}{ABCD} = \frac{\frac{1}{2} AF \cdot h}{AD \cdot h} = \frac{AE}{AD} = \frac{2}{5}$$

$$\triangle BPO = \triangle FOQ \quad \text{oder} \quad ABPQ = ABF = \tfrac{2}{5} ABCD.$$

Die durch Konstruktion gefundenen Strecken AQ und BP kann man ins Feld übertragen, wenn MN auf der Karte genügend

Fig. 226.



festgelegt ist. Die Prüfung kann dadurch erfolgen, daſs man sich nach Messung von BF überzeugt, ob PQ durch den Mittelpunkt von BF geht.

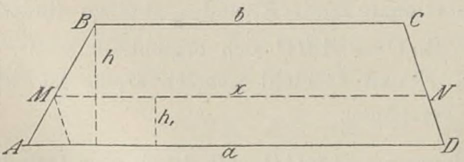
9. Man soll das Paralleltrapez $ABCD$ durch $MN \parallel BC$ halbieren. (Fig. 227).

Mit Einführung der Bezeichnungen in der Figur ist

$$\frac{a+x}{2} \cdot h_1 = \frac{x+b}{2} \cdot (h - h_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich $MN = x$ und h_1 berechnen. Im Felde wird man im Abstande h_1 zu AD die Parallele abstecken und das berechnete x durch Messung prüfen.

Fig. 227.

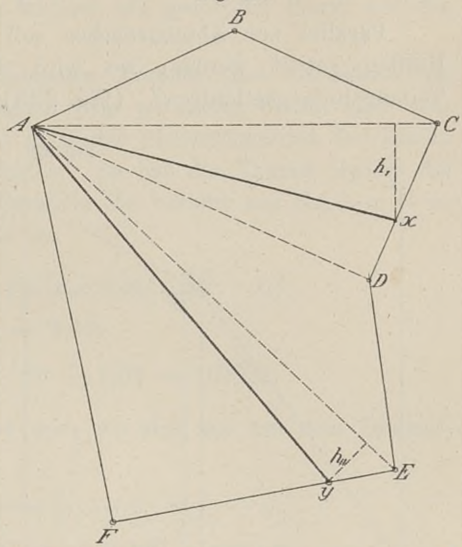


Der Gang der Rechnung bleibt derselbe, wenn durch die Parallele von der ganzen Fläche F eine Flächenstreifen $AMND = f$ abzuschneiden ist. Die Gleichungen lauten

$$\frac{a+x}{2} \cdot h_1 = f \quad \text{und} \quad \frac{x+b}{2}(h - h_1) = F - f.$$

In der Praxis kann man häufig die abzuschneidende Fläche als Parallelogramm betrachten mit der Höhe h_2, so dafs $AD \cdot h_2 = f$ ist. Man erhält durch die Parallele im Abstande h_2 in Wirklichkeit ein Trapez. Den Inhalt desselben ermittelt man durch Messung und setzt dann die fehlende Fläche durch Einlegung einer Parallele hinzu.

Fig. 228.



10. Das Sechseck der Figur ist durch die sechs Seiten und die drei von A ausgehenden Diagonalen gegeben; man soll dasselbe von A aus in drei gleiche Teile zerlegen. (Fig. 228).

Nachdem die Fläche F als Summe der einzelnen Dreiecke berechnet ist, findet man durch Vergleichung mit $\frac{1}{3}F$, dafs die erste Teillinie in ACD fällt. Man findet aus

$$ABC + \frac{1}{2} AC \cdot h_1 = \frac{1}{3} F$$

die Höhe h_1 und durch die Parallele im Endpunkte derselben zu AC den Punkt x. Man kann Cx in der Figur abgreifen und ins Feld übertragen.

Es läfst sich Cx auch finden aus der Gleichung

$$ACx : ACD = Cx : CD$$

$$Cx = \frac{ACx}{ACD} \cdot CD = \frac{\frac{1}{3}F - ABC}{ACD} \cdot CD.$$

Aus $AxD + ADE \lesseqgtr \frac{1}{3}F$ ersieht man, in welches Dreieck die zweite Teillinie fällt; sie falle in AEF. Da man AEy berechnen kann, so setzt man

$$AEy : AEF = Ey : EF$$

$$Ey = \frac{AEy}{AEF} \cdot EF.$$

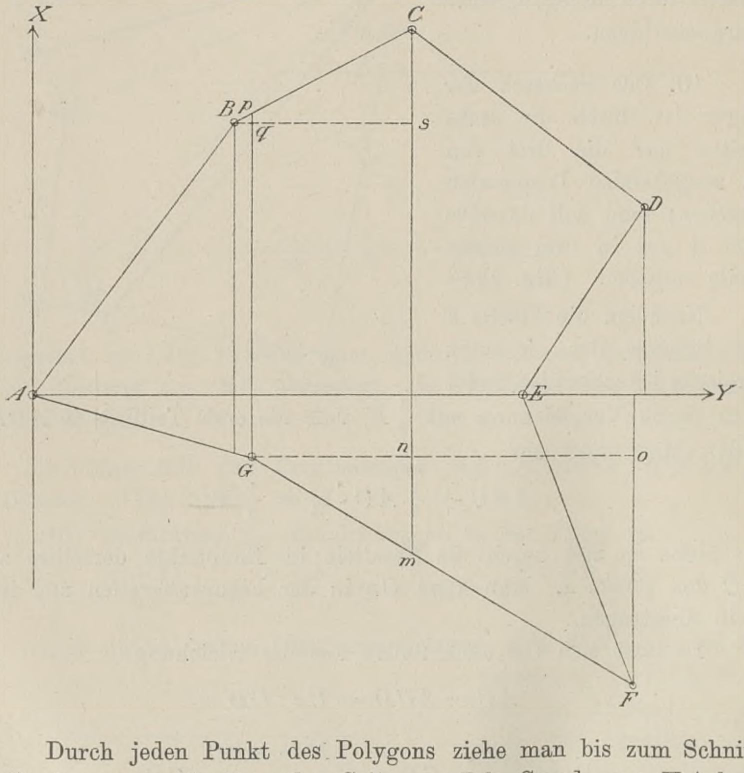
11. Die Koordinaten der Eckpunkte des Siebenecks sind:

$y_a = 0 \; y_b = 64 \; y_c = 122 \; y_d = 196 \; y_e = 156 \; y_f = 193 \; y_g = 69$

$x_a = 0 \; x_b = 88 \; x_c = 117 \; x_d = 61 \; x_e = 0 \; x_f = -93 \; x_g = -18.$

Parallel zur Abscissenachse soll die ganze Fläche in zwei Hälften geteilt werden; wo wird die Ordinatenachse von der Teilungslinie geschnitten? (Fig. 229).

Fig 229.



Durch jeden Punkt des Polygons ziehe man bis zum Schnitt mit einer gegenüberliegenden Seite parallele Gerade zur X-Achse; dadurch wird das Ganze in Trapeze zerlegt, deren Inhalte zu berechnen sind. Ihre Summe ergiebt den Gesamtinhalt F, den man zur Kontrolle auch nach

$$F = \tfrac{1}{2} y_n(-x_{n+1} + x_{n-1}) = \tfrac{1}{2} x_n(+y_{n+1} - y_{n-1})$$

berechnen möge. Von den einzelnen Trapezen addiert man von A aus so viele, dafs man $\frac{1}{2} F$ nahe kommt, und ersieht auf diese

Weise, in welches Trapez die gesuchte Teilungslinie fällt. Von diesem Trapez ist darauf nach Aufg. 9 das an $\frac{1}{2}F$ fehlende Stück abzuschneiden, wozu man die Höhe nötig hat, welche zur Ordinate des vorhergehenden Punktes addiert den gesuchten Punkt auf der Y-Achse giebt.

Zur Berechnung der einzelnen Trapeze sind die Höhen als Differenz der Ordinaten bekannt; die parallelen Seiten sind zum Teil Abscissen, der Rest ist nach der Proportionalität der Linien in ähnlichen Dreiecken zu finden. So hat das Trapez $GpCm$ die Höhe $y_c - y_g = 53$. Die Parallele Gp besteht aus $Gq = x_g + x_b$ und aus dem Stück pq. Es ist

$$pq : (x_c - x_b) = (y_g - y_b) : (y_c - y_b).$$

$$pq = 2{,}02$$

$$Gp = 18 + 88 + 2{,}02 = 108{,}02.$$

Ferner ist $Cm = x_c + x_g + mn$, wo sich mn aus dem Dreiecke GoF ergiebt.

$$mn : (x_f - x_g) = (y_c - y_g) : (y_f - y_g).$$

$$Cm = 117 + 18 + 32{,}06 = 167{,}06.$$

Wird in der vorstehenden Aufgabe gefordert, die Figur parallel zur X-Achse im Verhältnis 1 : 2 : 3 zu teilen, so sucht man zunächst das Trapez, in welches die erste Teillinie fällt. Ist die Summe der ersten zwei Trapeze kleiner als $\frac{1}{6}F$, die Summe der drei ersten gröfser, so ist vom dritten das fehlende Flächenstück abzuschneiden.

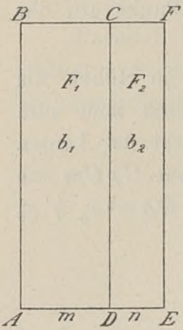
b. Die zu teilende Fläche ist von verschiedener Bonität.

Die Werte zweier Grundstücke von verschiedener Bonität setzen sich zusammen aus der Fläche und dem Werte der Flächeneinheit, wozu bei der Teilung ganzer Gemeindebezirke als dritter Faktor die Entfernung vom Wohnorte des Besitzers hinzutritt. Der letzte wichtige Punkt erfordert die Berücksichtigung vieler örtlichen Verhältnisse und bleibt dem Ermessen des leitenden Landmessers anheimgestellt.

1. Zwei neben einander liegende Grundstücke von rechteckiger Form mit der Länge h und den Breiten m und n haben die Boni-

täten b_1 und b_2; die ganze Fläche soll parallel AB geteilt werden, so daſs sich die Teile verhalten wie $M : N : P = 2 : 3 : 4$.

Fig. 230.



Ist $ABCD = F_1$ und $CDEF = F_2$, so ist der Wert der Gesamtfläche

$$F_1 \cdot b_1 + F_2 \cdot b_2 = W.$$

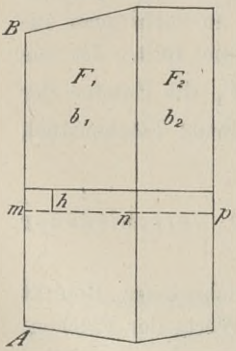
Die Anteile haben also den Wert

$$M = \frac{2}{9} W, \quad N = \frac{3}{9} W, \quad P = \frac{4}{9} W.$$

Ist $\frac{3}{9} W < F_1 \cdot b_1$, so wird der erste Teil ganz von F_1 genommen und zwar so oft 1 Quadratmeter, als b_1 in $\frac{2}{9} W$ enthalten ist; x sei die Fläche, so ist für die Länge h die Breite des ersten Teils $x : h$. Von F_1 bleiben noch $h \cdot m - x$ mit dem Werte $(h \cdot m - x) \cdot b_1$; durch $\frac{3}{9} W - (h \cdot m - x) \cdot b_1$ findet man, welcher Wert von der Fläche F_2 hinzuzusetzen ist, und durch Division dieses Wertes durch b_2 erhält man die Fläche. Da die Länge wieder h ist, so bekommt man durch Division mit h die Breite des von F_2 abzuschneidenden Streifens.

2. Senkrecht zu AB sollen die Flächen der Figur in zwei gleichwertige Teile geteilt werden. (Fig. 231)

Fig. 231.



Der Wert der ganzen Fläche ist

$$F_1 \cdot b_1 + F_2 \cdot b_2 = W.$$

Nach Schätzung lege man die vorläufige Teilungslinie $mnp \perp AB$ ein, messe und berechne den etwa nach unten liegenden Teil und vergleiche ihn mit $\frac{1}{2} W$. Es sei der Wert desselben zu klein um $\frac{1}{2} W - W_1$, so ist noch ein Flächenstreifen von der Breite h hinzuzufügen. Es muſs

$$mn \cdot h \cdot b_1 + np \cdot h \cdot b_2 = \frac{1}{2} W - W_1$$

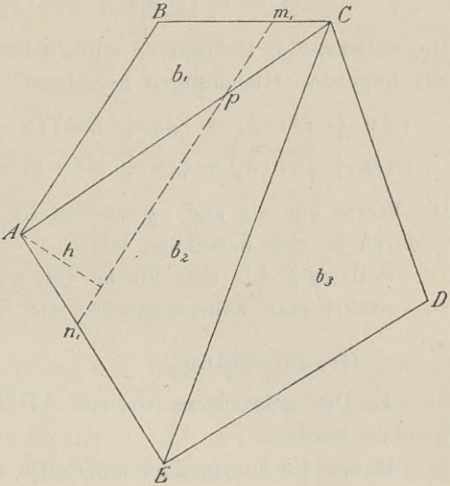
$$h = \frac{\frac{1}{2} W - W_1}{mn \cdot b_1 + np \cdot b_2} \quad \text{sein.}$$

3. Das Fünfeck der Figur hat in ABC die Bonität b_1, in ACE b_2 und in EDC b_3; durch $mn \parallel xy \parallel AB$ soll die Fläche

in drei gleichwertige Teile zerlegt werden; gesucht sind die Abstände der Teilungslinien von AB.

Der Wert des Ganzen ist $ABC \cdot b_1 + ACE \cdot b_2 + ECD \cdot b_3 = W$; zwischen BC und AE lege man nach Gutdünken die Gerade $m_1 n_1$, so dafs ABm_1n_1 annähernd den Wert $\frac{1}{3} W$ hat. Dadurch wird von ABC das Stück ABm_1p und von ACE das Stück Apn_1 abgeschnitten. Der Wert der Abschnitte ist nach Messung von m_1p, pn_1 und der Breite h zu berechnen; er ist

Fig. 232.



$$\frac{AB + m_1 p}{2} \cdot h \cdot b_1 + \frac{pn_1}{2} \cdot h \cdot b_2 = W_1 .$$

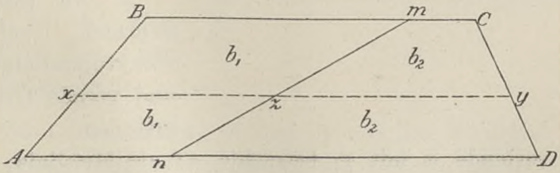
Ist $W_1 < \frac{1}{3} W$, so ist noch ein Streifen von der Breite h_1 hinzuzufügen, so dafs

$$m_1 p \cdot h_1 \cdot b_1 + pn_1 \cdot h_1 \cdot b_2 = \frac{1}{3} W - W_1$$

ist, woraus h_1 berechnet wird. Darf der Streifen in den beiden Teilen nicht als Rechteck betrachtet werden, so fährt man mit der Messung und Rechnung fort. In derselben Weise findet man xy.

4. Das Trapez $ABCD$ wird durch die Linie mn nach den

Fig. 233.



Bonitäten b_1 und b_2 zerlegt; durch eine zu AD parallele Gerade soll man zwei gleichwertige Teile erhalten.

Die Seiten AD, BC und die Höhe h des Trapezes werden gemessen und ebenso An und Bm, um daraus den Wert W des

Ganzen zu berechnen. Ist dann xy die gesuchte Teilungslinie im Abstande h_1 von AD, so ist

$$\tfrac{1}{2} W = \frac{An + xz}{2} \cdot h_1 \cdot b_1 + \frac{nD + zy}{2} \cdot h_1 \cdot b_2$$

$$W = h_1 \cdot [(An + xz) \cdot b_1 + (nD + zy) \cdot b_2].$$

Die unbekannten Gröfsen xz und zy kann man durch h_1 ausgedrückt aus folgenden Gleichungen berechnen:

$$(An + xz) \cdot h_1 + (xz + Bm)(h - h_1) = (An + Bm) \cdot h$$

$$(nD + zy) \cdot h_1 + (zy + mC)(h - h_1) = (nD + mC) \cdot h.$$

Die Werte von xz und zy werden in den Wert von W eingesetzt, wodurch h_1 sich berechnen läfst.

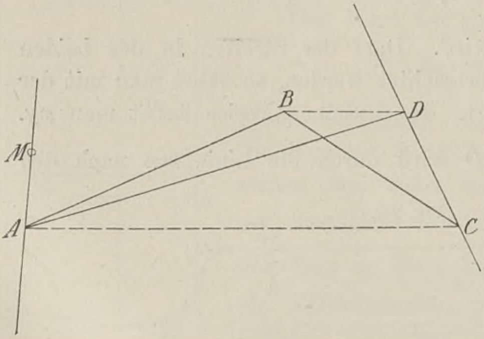
Soll $xy \parallel AD$ eine Fläche von gegebenem Werte abschneiden, so verfährt man näherungsweise wie in der Aufgabe 3.

c. Grenzregelung.

1. Die gebrochene Grenze ABC soll in eine gerade verwandelt werden.

Haben die an einander stofsenden Grundstücke gleiche Bonität, so erfolgt die Geradelegung durch Konstruktion. Man lege $BD \parallel AC$ und verbinde A mit D, so ist die Fläche $ACD = ACB$.

Fig. 234



Soll die neue Grenze durch den Punkt M gehen, so verbinde man M mit D und ziehe durch A die Parallele zu MD, welche die gegenüberliegende Seite im gesuchten Punkte schneidet.

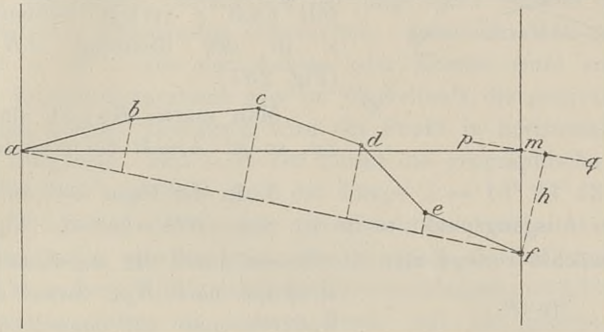
2. An Stelle einer mehrfach gebrochenen oder krummlinigen Grenze eine gerade Grenze herzustellen.

Man verbinde a mit f, betrachte af als Mefslinie, von der man die Fläche $abcdef$ aufnimmt und als Inhalt F findet. F nimmt man als die Fläche eines Dreiecks mit der Grundlinie af und der unbekannten Höhe h, so ist

$$h = \frac{2F}{af}.$$

In einem Punkte von af errichtet man das Lot, macht es gleich h, zieht durch den Endpunkt die Parallele pq zu af, welche die eine Grenze in m schneidet. Die Verbindung am liefert die gesuchte Grenze.

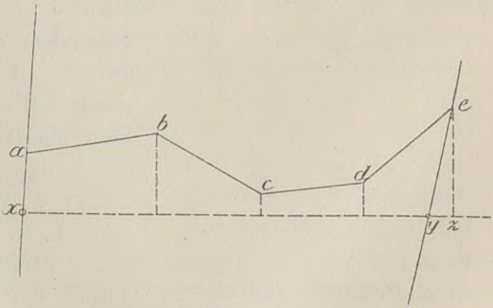
Fig. 235.



Soll die neue Grenze durch den Punkt x gehen (Fig. 236), so legt man eine beliebige Grenze xy passend ein, berechnet den Inhalt zwischen xy und der Grenze $abcde$ und betrachtet ihn als Dreieck mit der Grundlinie xy; die Berechnung der Höhe und die übrige Konstruktion stimmt mit der vorigen überein.

Legt man die provisorische Grenze xy so, dafs sie die alte Grenze mehrfach schneidet, so berechnet man die Flächen, die dem einen und anderen Eigentümer abgeschnitten sind, vergleicht sie und legt dementsprechend in Form eines Dreiecks oder Rechtecks das Fehlende an die eine oder andere Seite der provisorischen Linie.

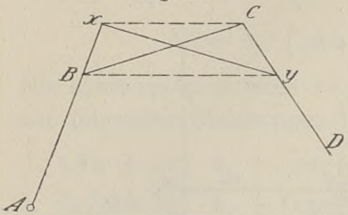
Fig. 236.



3. Zwei Grundstücke A und B mit den Bonitäten b_1 und b_2 grenzen krummlinig an einander; die Grenze ist in eine gerade zu verwandeln.

Nach Schätzung legt man eine Gerade so durch die krumme Grenze, dafs die Werte der beiderseits abgeschnittenen Flächen ungefähr gleich sind; den genauen Wert stellt man durch Messung und Berechnung fest. Die Differenz der Werte schätzt man nach den Bonitäten in Flächengröfse und legt sie durch eine neue Gerade gutachtlich an u. s. w., bis die Ab- und Zugänge gleichen Wert haben.

Fig. 237.



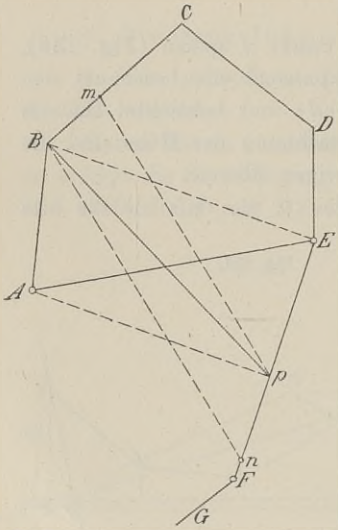
4. Der Anfang der Grenze BC soll nach x verlegt werden, wenn x in der Richtung AB liegt. (Fig. 237).

Man mache $By \parallel xC$ und ziehe xy, so ist $AxyD$ die neue Grenze.

5. In der Figur soll die Grenze AE den Ausgangspunkt m in der Seite BC erhalten. (Fig. 238).

Zunächst verlege man die Grenze durch die angedeutete Konstruktion nach Bp, darauf nach m, wodurch man auf demselben Wege die gesuchte Teilungslinie mn findet. Sollte der Punkt n nicht mehr in die Seite EF fallen, sondern in die folgende FG, so ist die Grenze von F nach einem Punkte in der Verlängerung von EF zu legen nach Aufgabe 4.

Fig. 238.



Bei einem grofsen Mafsstabe etwa 1 : 500 lassen sich die vorstehenden Aufgaben durch Zeichnung auf der Karte lösen und die gesuchten Strecken aus dem Plane ins Feld übertragen.

Ausführliche Schriften über Flächenteilung sind:

F. G. Gaufs: Die Teilung der Grundstücke insbesondere unter Zugrundelegung rechtwinkliger Koordinaten. 1878.

Doergens: Die Berechnung und Teilung der geradlinig begrenzten Grundstücke. 1887.

Zahlreiche Beispiele finden sich aufserdem in der Zeitschrift für Vermessungswesen; Jahrgang 1882, 84, 85, 86 und 89.

B. Vertikalmessungen.

§ 70. Normal-Null.

Zur eindeutigen Bestimmung der Lage eines Punktes auf der Erde sind drei Koordinaten erforderlich. Zwei derselben sind die Abstände y und x von den Achsen oder Ebenen eines zugrunde gelegten Koordinatensystems oder im Winkelmafs die geographische Breite und Länge. Hierdurch wird ein Punkt in horizontaler Beziehung festgelegt. Hat z. B. ein Punkt die geographische Breite $\varphi = 52^0\,13'\,17''$ nördlich und die Länge $\lambda = 13^0\,23'\,43''$ oder in Zeit $0^h\,53^m\,35^s$ östlich von Greenwich, so würde damit ein Punkt in Berlin gegeben sein, der zunächst als auf dem Erdsphäroid liegend vom Mittelpunkte der Erde den Abstand $r = 6\,364\,807^m$ hat. Soll nun aber ein anderer Punkt mit den gleichen geographischen Koordinaten gemeint sein, der in der Verlängerung oder Verkürzung dieses Radius liegt, so ist die weitere Bestimmung inbezug auf die Entfernung von der Erdoberfläche nach aufsen oder innen notwendig.

Es handelt sich nun darum, denjenigen Punkt festzulegen, von dem man in vertikaler Richtung anfangen soll zu zählen. Wäre die Erde eine Kugel, so würde man passend ihren Mittelpunkt als Nullpunkt wählen und könnte, um kleine Zahlen zu haben, alle Höhenzahlen um eine gewisse Zahl kürzen. Da jedoch die Erde nach dem Äquator hin anschwillt, so müfste man den jeweiligen Erdradius kennen und könnte davon etwa den Radius des Pols $b = 6\,356\,080^m$ abziehen. Man würde dann z. B. für die Spitze des Montblanc $6\,371\,951 - b = 15\,871^m$, für die Spitze des Ätna $6\,373\,460 - b = 17\,380^m$ als Erhebung über den Nordpol bekommen. Diese Zahlen würden jedoch kein übersichtliches Bild von der Gestaltung der Erdoberfläche bieten und mit ihnen wäre weder der Meteorologie, noch der Geographie, noch der Technik gedient, da die benachbarte Meeresfläche stets in Betracht kommt.

Deshalb hat man nicht den Mittelpunkt der Erde als Anfangspunkt für die dritte Koordinate genommen, sondern einen Punkt oder die Kugelschale durch einen Punkt, der ungefähr die Höhe des mittlern Wasserstandes des benachbarten Meeres hat. Die ruhige Meeresfläche dieses Punktes würde gleichbedeutend mit der Oberfläche seines sog. Geoids sein. Das Bestreben der internationalen Vermessung geht dahin, für ganz Europa einen gemeinsamen Nullpunkt festzulegen, da z. B. die Mittelwasser der Ostsee und des Schwarzen Meeres die gleiche Niveaufläche bilden. Die Ansichten sind jedoch in dieser Frage noch geteilt und die bezüglichen Arbeiten noch lange nicht zum Abschlufs gebracht. Es hält daher jedes Land vorläufig an dem bisher gültigen Nullpunkte fest.

In Deutschland wurde der Nullpunkt des Amsterdamer Pegels als Null für die Höhenzahlen gewählt. Die Höhe desselben stimmt mit den an unsern Meeresküsten beobachteten Mittelwassern überein, so dafs er als mittlere Meereshöhe angesehen werden kann.

Damit ist in Deutschland der Verschiedenheit in den Anschlüssen an diesen oder jenen Meeres- oder Flufspegel oder an diesen oder jenen andern Festpunkt ein Ende gemacht. Alle Höhenbestimmungen beziehen sich fortan auf den Nullpunkt des Amsterdamer Pegels. Nach diesem Punkte werden die absoluten Höhen gezählt und von ihm aus die Richtungen der Höhen durch plus und minus unterschieden.

Der genannte Nullpunkt hat jedoch den Nachteil, dafs er sich in seiner Lage nur schwer zum Anschlufs benutzen läfst, wegen der säkularen Hebung und Senkung der Küsten einer Veränderung unterworfen sein kann und durch die Mittelwasserstände in seiner Höhenlage nicht zu kontrollieren ist. Trotzdem ist er als Anfangspunkt beibehalten, aber an einem andern Orte festgelegt, wo er, abgesehen von einer Zusammenschrumpfung der Erdkruste, voraussichtlich unveränderlich festliegt, eine etwaige Veränderung am bequemsten und schärfsten beobachtet, und wo er am leichtesten für die Höhenmessungen herangezogen werden kann.

In den Nordpfeiler der Berliner Sternwarte hat man einen Syenitbalken von $1{,}70^{\mathrm{m}}$ Länge mit horizontaler Längsachse von aufsen nach innen eingemauert. Die Aufsenwand des Gebäudes ist durchbrochen und in die Öffnung ragt das Ende des Balkens hinein. Auf der vordern Stirnfläche ist in eine Nute eine Platte von Emailleglas hineingeschoben und daselbst verkittet, welche eine lotrechte Millimeterskala von 20^{cm} Länge trägt.

Der Mittelstrich der Skala ist der Normal-Höhenpunkt.

Auf der Stirnfläche des Syenitbalkens links und rechts neben der Skala, mit nicht verkennbarem Hinweis auf den Mittel- oder Nullstrich, steht in goldenen Buchstaben

37 Meter über Normal-Null.

Die Arbeiten der Festlegung dieses Punktes wurden mit der Übergabe am 22. März 1879 zum Abschlufs gebracht.

Es sind nach dem Vorstehenden also zwei Punkte nicht zu verwechseln: der Normal-Höhenpunkt und der Normal-Nullpunkt. Der erstere dient zur sichtbaren Festlegung des letzteren.

Der Normal-Höhenpunkt kann zum An- und Abschlufs eines Nivellements dienen und ist deshalb so angebracht, dafs die über und unter Null befindliche Skala von zehn Centimetern in Millimeterteilung sich bequem mit einem Nivellier-Instrumente auf gewöhnlichem Stativ anvisieren läfst.

Zur Kontrolle ist an einem andern Pfeiler der Sternwarte ein zweiter Bolzen eingemauert. Auf der Oberseite trägt derselbe eine Achatkugel, deren höchster Punkt $0{,}841^{\text{m}}$ unter dem Normal-Höhenpunkte liegt, und welcher die Aufstellung einer Nivellierlatte gestattet und deshalb für gewöhnliche Anschlüsse geeigneter ist. Da die Fundamente der Pfeiler isoliert sind, so läfst sich eine etwaige ungleichmäfsige Vertikalbewegung beider Punkte leicht feststellen. Die jährlich gemachten Beobachtungen haben stets den gleichen Höhenunterschied ergeben.

Der Normal-Nullpunkt liegt 37 Meter unter dem Normal-Höhenpunkte und hat mit dem Nullpunkte des Amsterdamer Pegels gleiche Höhenlage.

Seit 1879 beziehen sich alle Zahlen für die Höhenbestimmungen auf Normal-Null, abgekürzt geschrieben N.N. Der Amsterdamer Pegel hat seit dieser Zeit für Deutschland nur noch Bedeutung als Meerespegel.

Vor dieser Zeit geschahen die Höhenangaben mit Beziehung auf den Pegel zu Neufahrwasser, dessen Nullpunkt um $3{,}513^{\text{m}}$ tiefer liegt, als derjenige des Amsterdamer Pegels. Die Reduzierung der Zahlen auf N.N. erfolgt also durch Subtraktion von $3{,}513^{\text{m}}$. Für einen Teil der Höhenpunkte in Schleswig-Holstein ist $3{,}5379^{\text{m}}$ abzuziehen, da sich die Zahlen auf den Nullpunkt des Hamburger Flutmessers bezogen, der um die genannte Zahl unter N.N. liegt.

Die trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme hat einen grofsen Teil Preufsens mit Nivellementslinien überzogen und dieselben in dauerhafter Weise durch Nummerbolzen, Mauerbolzen, M.B., Höhenmarken, H.M., und Nivellements-Mauerbolzen, Niv.P., festgelegt. Die Ergebnisse der Arbeiten werden veröffentlicht.

Die normale Entfernung der Nummerbolzen auf den Chausseen ist 2^{km}; die Mauerbolzen in Gebäuden u. s. w. nahe der Nivellementslinie sind im allgemeinen 5^{km} und die Höhenmarken etwa 10^{km} von einander und nicht über 3^{km} von der Chaussee entfernt.

Die Nummerbolzen bis 3000 tragen auf der Vorderseite

Zahlen mit 1, 2 oder 3 Punkten darüber, um das Tausend anzuzeigen, in welches die Zahl gehört, z. B. würde $\dot{7}\dot{8} = 1078$ sein; von 3001 ab sind die vollen Zahlen aufgeschlagen. Die den Festpunkten benachbarten Pegel und trigonometrischen Punkte sind in das Nivellement mit eingezogen. Bei letztern gilt als der Festpunkt die Mitte der obern horizontalen Fläche des zutage tretenden Pfeilers, beim Pegel der meist auch auf dem Lande festgelegte Nullpunkt, bei den Bolzen und Höhenmarken der obere Rand. Die Höhenmarken tragen auf der Vorderfläche die Höhenzahl.

Die Nivellements-Festpunkte werden auf Zeichnungen durch zwei kleine rote Kreise und durch rot N.P. bezeichnet, auch kann die Höhenzahl in Rot beigefügt werden.

Für Preufsen siehe: Bestimmungen über den Anschlufs der Nivellements an den Preufsischen Landeshorizont vom 12. Jan. 1895. Ferner: Nivellements der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme; und: Die Nivellementsergebnisse der trig. Abt. der Landesaufnahme. Verlag von Mittler & Sohn. Berlin.

Die Höhenmessung von einem Punkte zum andern, also die Bestimmung der relativen Höhe eines zweiten Punktes, haben wir z. t. bei der Besprechung der kleinen Instrumente kennen gelernt, deren Anwendung auf den Sätzen von der Ähnlichkeit der Dreiecke beruhte. Ferner haben wir relative und auch die absoluten Höhen über N.N. mit Hilfe des Barometers ermittelt. Beide Methoden: die geometrische und barometrische Höhenmessung werden uns nicht weiter beschäftigen. Im folgenden sollen die noch übrigen Methoden der Höhenbestimmung: die trigonometrische Höhenmessung und das Nivellieren besprochen werden. Bei diesen Arbeiten ist die Kenntnis von dem Einflufs der Erdkrümmung und Strahlenbrechung erforderlich.

§ 71. Erdkrümmung und Strahlenbrechung.

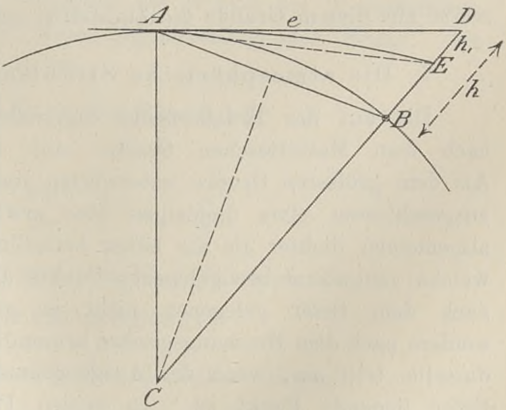
a. Die Erdkrümmung.

Von den beiden Punkten A und B der Erdoberfläche liege B niedriger als A; die mit der Röhrenlibelle horizontal gerichtete Visierlinie befinde sich in A und in B stehe lotrecht eine Nivellierlatte. Ist die Entfernung der beiden Punkte gering, so giebt die an der Latte abgelesene Zahl den Höhenunterschied der Punkte an. Die Visierlinie liegt im scheinbaren Horizonte des Punktes A, das Lattenstück liegt unter demselben und drückt den Abstand der beiden scheinbaren Horizonte aus, welche man bei dem geringen Abstande von A und B als parallel betrachten kann. Würde man in B die Ziellinie horizontal richten, so würde sie um dasselbe Lattenstück unter A hergehen.

Bei einer grofsen Entfernung der Punkte A und B, deren Mafs unten näher bestimmt wird, darf man jedoch die scheinbaren Horizonte nicht mehr als parallel liegend ansehen und den Höhenunterschied nicht auf die genannte Weise bestimmen wollen. Handelt es sich um die gegenseitige Höhenlage zweier Punkte, deren Entfernung über das bestimmte Mafs hinausgeht, so mufs der scheinbare Horizont als Bestimmungsstück für die Höhe aus der Betrachtung ausscheiden. Als Höhenunterschied der beiden Punkte tritt der Abstand der konzentrischen Kugelschalen durch A und B auf, welche als Mittelpunkte das Centrum der Erde haben, also der Abstand der wahren Horizonte. Der scheinbare Horizont läfst sich nur dadurch zur Höhenbestimmung zweier weit von einander abstehender Punkte der Erdoberfläche benutzen, dafs man denselben für kleine Strecken festlegt und ihn als vielfach gebrochene Gerade an den wahren Horizont anschmiegt, dafs man sich also annähernd parallel zu den wahren Horizonten stufenweise fortbewegt.

Kann man letzteres nicht oder ist es überhaupt nicht beabsichtigt, so ist an den Ergebnissen der Beobachtung eine Verbesserung vorzunehmen, die sich aus folgendem ergiebt.

Fig. 239.



Die Punkte A und B (Fig. 239) liegen auf demselben wahren Horizonte, ihr Höhenunterschied ist also Null. Die in A horizontale Ziellinie des Fernrohres trifft jedoch die in B lotrecht stehende Latte nicht in Null, sondern in D, liefert also das falsche Lattenstück $BD = h$ oder die sog. Depression des wahren Horizontes unter dem scheinbaren. Da $AD = e$ Tangente, h das äufsere Stück der

Sekante $2r + h$ ist, so ist

$$e^2 = h \cdot (2r + h)$$

$$h = \frac{e^2}{2r + h};$$

dasselbe erhält man aus dem pythagoreischen Satze

$$(h + r)^2 = r^2 + e^2.$$

Da nun h im Vergleich mit $2r$ verschwindend klein ist, so kann man es vernachlässigen und hat als Korrektion für die Erdkrümmung

$$1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad h = \frac{e^2}{2r}.$$

An Stelle von AD ist der Bogen AB zu setzen, der durch Messung bekannt ist. Für den Anschlufs der Nivellements an den Landeshorizont gilt ein Nivellement als gut, wenn der mittlere Fehler nicht mehr als 3^{mm} auf 1^{km} beträgt. Die Erdkrümmung allein würde diesen Fehler schon hervorrufen, wenn man eine Visur 196^{m} lang machen würde. Es folgt dies aus 1)

$$e^2 = 0{,}003 \cdot 2 \cdot 6\,380\,000.$$

Bei einer 339^{m} langen Zielweite wird der Fehler schon 9^{mm} und bei 100^{m} wird er fast 1^{mm} betragen. Wenn der letzte Fehler von 1^{mm} auch innerhalb der Grenze eines erlaubten Schätzungsfehlers liegt, so wird man ihn doch nicht wissentlich dulden und schon aus diesem Grunde die Zielweiten geringer als 100^{m} wählen.

b. Die atmosphärische Strahlenbrechung (Refraktion).

Die auf der Erdoberfläche lagernden Luftschichten besitzen nach dem Mariotteschen Gesetze eine verschiedene Dichtigkeit. Als dem gröfseren Drucke unterworfen sind die unteren Schichten, ausgeschlossen etwa diejenigen über erwärmten Sandflächen, im allgemeinen dichter als die höher befindlichen. Die Lichtstrahlen, welche von einem hochgelegenen Punkte ausgehen, werden deshalb nach dem tiefer gelegenen nicht in geraden Linien gelangen, sondern nach dem Brechungsgesetze krummlinige Bahnen beschreiben; dasselbe tritt ein, wenn der Ausgangspunkt der Lichtstrahlen der tiefer liegende Punkt ist. In beiden Fällen ist der Weg der Strahlen ein nach oben gekrümmter Bogen.

Die Richtung, in der wir einen Punkt sehen, wird bestimmt durch den letzten Teil des Lichtstrahls, der in unser Auge fällt.

Der gesehene Punkt liegt daher in der Richtung, die im Auge als Tangente die Lichtkurve berührt. Beim Fernrohre ist diese Tangente die durch das Fadenkreuz und den optischen Mittelpunkt des Okjektivs festgelegte Visierlinie.

Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Der in der Visierlinie liegende Punkt ist gesucht; dies gilt für die am Horizontalfaden abzulesende Zahl der Nivellierlatte.
2. Der Zielpunkt ist gegeben und wird in die Visierlinie gebracht; dies geschieht beim Messen eines gegebenen Höhenwinkels.

Im ersteren Falle wird am Horizontalfaden eine Zahl erscheinen, die unter der verlängerten Zielachse, bei horizontaler Zielachse also unter dem scheinbaren Horizonte liegt. Die Ablesung an der Latte wird infolge hiervon zu klein; um welches Stück?

Die Visierlinie sei in A horizontal gerichtet (Fig. 239); sie trifft in der Verlängerung den Punkt D. Das Auge erblickt jedoch die Zahl, die in E steht; das durch die Erdkrümmung zu lang gewordene Lattenstück BD wird also um $DE = h_1$ verkürzt und dadurch der Einfluſs der Erdkrümmung zum Teil wieder aufgehoben.

Da der zu AB gehörige Centriwinkel schon klein ist, noch weit kleiner aber die Winkel DAE und DAB sind, so kann man als die Entfernung der drei Punkte B, E, D von A den Bogen $AB = e$ setzen und das Verhältnis der Winkel bei A ausdrücken durch das Verhältnis der ihnen gegenüberliegenden Seiten. Ist $DE = h_1$ und $DB = h$, so ist

$$\sphericalangle DAE : \sphericalangle DAB = h_1 : h.$$

Ist der Centriwinkel

$$C = \frac{360^0}{2\pi} \cdot \frac{e}{r} = \varrho \cdot \frac{e}{r},$$

so ist nach den Beobachtungen von Karl Friedrich Gauſs

$$\sphericalangle DAE = 0{,}0653\, C.$$

Ferner ist als Peripheriewinkel über demselben Bogen

$$\sphericalangle DAB = \tfrac{1}{2}\, C,$$

deshalb ist

$$\frac{DAE}{DAB} = \frac{0{,}0653\, C}{0{,}5\, C} = 0{,}13 = \frac{h_1}{h},$$

d. h. die Korrektion für die Strahlenbrechung

2) . . . . . . $h_1 = 0{,}13 \cdot h = 0{,}13 \frac{e^2}{2r}$.

Durch Verbindung von 1) und 2) erhält man den durch die Erdkrümmung und die Strahlenbrechung verursachten Gesamtfehler; es ist

$$c = h - h_1 = h(1 - 0{,}13) = 0{,}87 \cdot \frac{e^2}{2r}$$

3) . . . . $c = 0{,}43 \cdot \frac{e^2}{r}$.

Diese Gröfse c heifst die Reduktion auf den wahren Horizont und ist von jeder Lattenablesung abzuziehen, sobald es sich um gröfsere Entfernungen handelt.

Die Zahl $k = 0{,}13$ heifst die Refraktionskonstante oder der Refraktionskoefficient und ist, wie wir unten sehen werden, das Verhältnis des Radius der Erde zum Radius der Lichtkurve. Der Wert von k ist vielfach berechnet; 0,13 läfst sich als guter Mittelwert benutzen.

Die vorzunehmende Verbesserung c ist nicht unbedeutend; sie beträgt für 4000^{m} bereits über 1^{m} und für 8000^{m} über 4^{m}. Die Refraktion hat nur für die trigonometrischen Höhenmessungen Bedeutung, wie sie z. B. bei den Mefstischaufnahmen vorkommen. Beim gewöhnlichen Nivellieren darf die Zielweite nur in Ausnahmefällen 50^{m} überschreiten. Der Fehler im Nivellement des Feldmessers darf bei einer n hundert Meter langen Linie $9\sqrt{n}$ Millimeter betragen. Will man deshalb untersuchen, für welche Zielweite die Gröfse c den zulässigen Fehler eben erreicht, so mufs man c und $9\sqrt{n}$ gleichnamig machen und $e = 100n$ oder $n = 0{,}01e$ einsetzen. Es wird

$$0{,}43 \cdot \frac{e^2}{r} = 0{,}001 \cdot 9 \cdot \sqrt{0{,}01e} \quad \text{oder} \quad e = \text{rund } 560^{\mathrm{m}}.$$

Würden nicht andere Gründe dagegen sprechen, so könnte man der Zielweite die berechnete Länge geben, ohne gegen die Vorschrift zu verstofsen.

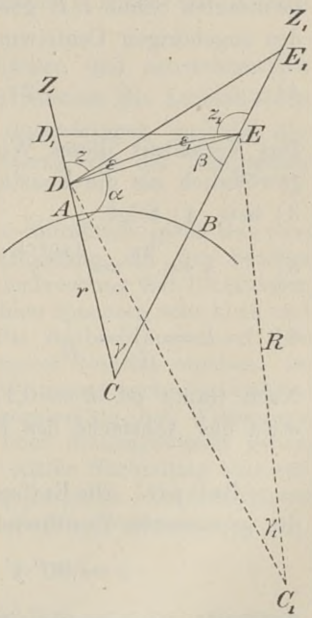
Ist der Zielpunkt nicht gesucht, sondern gegeben, wie es beim Messen der Vertikalwinkel der Fall ist, so ist die Zielachse des Fernrohres nicht auf den Punkt gerichtet, den wir anvisieren, sondern geht in der Verlängerung oberhalb des Zielpunktes weg. Die Zielachse ist auf E_1 gerichtet, wenn der Punkt E, (Fig. 240), im Fadenkreuze erscheint. Es wird daher am Höhenkreise nicht der richtige Zenithwinkel ZDE, sondern ZDE_1 abgelesen, welcher um den Refraktionswinkel E_1DE zu klein ist.

Will man (Fig. 242) den Elevationswinkel EAB messen, so hat die Zielachse die Neigung AB_1, wenn wir B im Fadenkreuze sehen; wir erhalten also den Winkel EAB_1, welcher um den Winkel B_1AB zu grofs ist.

§ 72. Bestimmung der Refraktionskonstante.

Im vorigen § wurde nach Gaufs der Refraktionswinkel zu 0,0653 des zugehörigen Winkels am Centrum der Erde angenommen und daraus die Konstante k hergeleitet. Der Weg der Beobachtung und Rechnung ist folgender.

Fig. 240.



Es seien (Fig. 240) die Zenithdistanzen von D und E gemessen, die abgelesenen Winkel sind z und z_1, während die wahren Zenithwinkel $\zeta = z + \varepsilon$ und $\zeta_1 = z_1 + \varepsilon_1$ sind. Die Refraktionswinkel ε und ε_1 sind gesucht. Der Höhenunterschied von D und E und ihr Abstand wird immer so gering sein, dafs man $DE = AB = e$ setzen kann; und selbst für $e = 100^{\text{km}}$ ist

$$1) \quad . \quad . \quad . \quad \gamma = \varrho'' \cdot \frac{e}{r} \cdot$$

Es ist ferner

$$\zeta + \zeta_1 = z + z_1 + \varepsilon + \varepsilon_1$$

und als Aufsenwinkel sind

$$\zeta = \beta + \gamma \quad \text{und} \quad \zeta_1 = \alpha + \gamma$$

$$\zeta + \zeta_1 = \alpha + \beta + \gamma + \gamma = 180^0 + \gamma$$

$$2) \quad . \quad . \quad . \quad z + z_1 + \varepsilon + \varepsilon_1 = 180^0 + \gamma.$$

Finden die Beobachtungen der Winkel zu gleicher Zeit statt, so werden die Luftschichten den Gang der Lichtstrahlen für beide Stationen in gleicher Weise beeinflussen. Die Lichtkurve von D nach E wird mit derjenigen von E nach D wahrscheinlich zusammenfallen, wenigstens in den Enden. Unter normalen Verhältnissen wird die hohle Seite der Kurve der Erdoberfläche zugekehrt sein, so dafs die beobachteten Zenithwinkel in beiden Punkten zu klein und zwar um das gleiche Mafs zu klein ausfallen werden. Es wird $\varepsilon = \varepsilon_1$ und deshalb

$$z + z_1 + 2\varepsilon = 180^0 + \gamma$$

$$3) \quad \ldots \ldots \quad 2\varepsilon = 180^0 + \gamma - (z + z_1).$$

Wir denken uns die Lichtkurve zwischen D und E gezeichnet, so gehört dazu der Mittelpunkt C_1 mit dem Radius R, unter der Voraussetzung, dafs die Lichtkurve die Kreisform hat. Die Winkel ε werden dann von den Lichtstrahlen als Tangenten und der gemeinsamen Sehne DE gebildet; jeder ist deshalb gleich der Hälfte des zugehörigen Centriwinkels γ_1 oder beide sind

$$4) \quad \ldots \ldots \quad 2\varepsilon = \gamma_1 = \varrho'' \cdot \frac{e}{R}.$$

Das Verhältnis dieses Winkels γ_1 zum Mittelpunktswinkel γ wird gewöhnlich als die Konstante k angenommen, so dafs nach 1) und 3) bzw. 4) folgt:

$$5) \quad . \quad k = \frac{2\varepsilon}{\gamma} = \frac{180^0 + \gamma - (z + z_1)}{\gamma} = 1 - \frac{z + z_1 - 180^0}{\gamma}.$$

$$6) \quad . \quad k = \frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{r}{R}.$$

Nach Gaufs ist $k = 0{,}13$, d. h. der Radius der Lichtkurve ist etwa das Achtfache des Erdradius.

Beispiel. Die Entfernung des Punktes A von B sei $e = 20\,300^{\mathrm{m}}$, die gemessenen Zenithwinkel seien

$$z = 90^0\ 1'\ 55'' \quad \text{und} \quad z_1 = 90^0\ 7'\ 45'';$$

dann ist

$$\gamma = 206\,265'' \cdot \frac{20\,300}{6\,370\,000} = 657''$$

$$k = \frac{180^0 + 657'' - 180^0\ 9'\ 40''}{657''} = 0{,}1172$$

$$\zeta = 90^0\ 1'\ 55'' + 39'' = 90^0\ 2'\ 34''$$

$$\zeta_1 = 90^0\ 7'\ 45'' + 39'' = 90^0\ 8'\ 24''.$$

Der Refraktionskoefficient k ist veränderlich; er nimmt mit der Erhebung über dem Meeresspiegel ab, weil mit der Höhe die Temperatur der Luft im allgemeinen eine gleichmäfsigere ist und die Lichtstrahlen deshalb nicht so viele Schichten von ungleicher Dichtigkeit durchdringen. Mit der mehr oder weniger gleichen

Erwärmung hängt die Ruhe der Luftschichten und der mehr oder weniger geradlinige Gang der Lichtstrahlen zusammen. Deshalb wird k auch verschieden ausfallen, jenachdem die Visierlinie ganz über dem Meere oder ganz über dem Lande liegt, oder teils über Land und teils über Wasser oder nahe über dem Boden oder über Wälder fortgeht. Auf dem Lande werden die untern Luftschichten bald nach Aufgang der Sonne durch die erwärmte Erde aufgelockert und es tritt eine Bewegung von unten in der Luft ein, welche die Bilder im Fernrohre unruhig erscheinen läſst. Allmählich stellt sich eine Ausgleichung in der Erwärmung ein, so daſs nachmittags eine Zeitlang die anvisierten Punkte in voller Ruhe sich zeigen, bis dann dicht vor Sonnenuntergang wieder Unruhe und Zittern der Bilder das genaue Zielen erschwert.

Der Unterschied zwischen der irdischen und astronomischen Strahlenbrechung besteht darin, daſs bei letzterer die Lichtstrahlen die Atmosphäre in ihrer ganzen Höhe durchdringen und die Ablenkung des Lichtes von der Höhe des Sterns, von der Temperatur und dem Drucke der Luft abhängig ist.

Interessante Mitteilungen über die Refraktion giebt Baeyer: Die Küstenvermessung in ihrer Verbindung mit der Berliner Grundlinie. Berlin 1849. Die Strahlenbrechung bei Richtungen, welche über die See gehen, ist in kühlen Sommern sehr klein und in warmen Sommern sehr groſs. Die Beobachtungen auf dem festen Lande haben kein so bestimmtes Resultat ergeben. Im allgemeinen war bei gleichmäſsiger Witterung auch die Strahlenbrechung regelmäſsig, dagegen unregelmäſsig bei Witterungsveränderung. Richtungen, welche über Binnengewässer gehen, scheinen nur im frühen Morgen und späten Nachmittag eine auffallend abweichende Strahlenbrechung zu haben. Die Berechnung von k geschieht nach der Formel 5) in der Anordnung

$$1 - k = \frac{r}{e \cdot \varrho}(z + z_1 - 180^0).$$

Bei den gegenseitigen Beobachtungen an zweien der aufgeführten Stationen stellte sich eine Wärmezunahme in den Luftschichten über dem Meere von unten nach oben heraus, wodurch k ungewöhnlich groſs wurde.

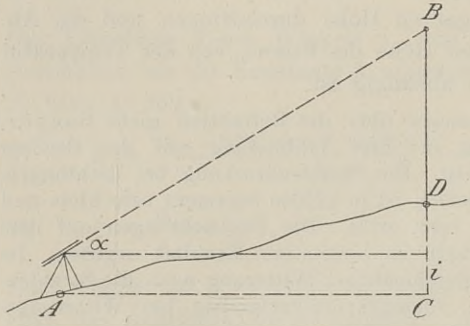
Da die Brechung eines Lichtstrahles auf seinem Wege von einer Station zur anderen von den durch viele örtliche Zufälligkeiten, Wolken, Wind u. s. w., mannigfaltig veränderten Wärme- und Dichtigkeitsverhältnissen der Luft abhängig ist und deshalb weder ein bestimmtes und noch viel weniger ein bekanntes Gesetz befolgt, so wird die theoretische Bestimmung desselben vor der Hand noch nicht erwartet werden dürfen.

Über einem Beobachtungspunkte an der See lieſs sich wegen eines 6 Meilen groſsen Abstandes vom benachbarten Punkte und wegen des Baugrundes von Dünensand kein genügend hohes Gerüst herstellen. Man hoffte und verliefs sich deshalb auf eine aufsergewöhnliche Refraktion mit $k = 0{,}286$, wodurch sich der notwendige Bau um rund 5^{m} niedriger ergab. Nach vergeblichen Versuchen im September 1839 ging ein Jahr später im warmen August 1840 die Hoffnung in Erfüllung; die Beobachtungen wurden ohne Störung ausgeführt. Vgl. auch Bessel und Baeyer: Gradmessung in Ostpreufsen. 1838. S. 171. Über die neuern Beobachtungen und Theorieen siehe Helmert: Höhere Geodäsie. Leipzig 1884.

§ 73. Trigonometrische Höhenmessung.

1. Ist der Abstand der beiden Punkte A und B (Fig. 241) gering, so beziehen wir ihren Höhenunterschied auf die scheinbaren Horizonte beider Punkte. Im Punkte A wird die Instrumenthöhe i und der Höhenwinkel α gemessen; ist ferner die Projektion von AD ermittelt, so ist

Fig. 241.



$$1) \qquad h = BC$$
$$= AC \cdot \operatorname{tg} \alpha + i.$$

Wird ein Punkt in der Höhe i_1 über B anvisiert, so ist i_1 abzuziehen. Bei der Triangulierung werden die horizontalen Abstände der Punkte trigonometrisch berechnet und nach 1) die relativen Höhen bestimmt. Man erhält die absoluten Höhen über N.N., indem man von einem Punkte ausgeht, der an den Landeshorizont angeschlossen ist. Die Instrumenten- und Zielhöhen der Gerüste müssen in die Formel eingesetzt werden, um die Höhen der im Verzeichnis näher beschriebenen Punkte zu finden. Ist der höher gelegene Punkt in vertikaler Beziehung genau bekannt, so kann man ihn zur Festlegung der tiefer gelegenen Punkte in derselben Weise benutzen.

2. Handelt es sich um den Höhenunterschied zweier Punkte, die einen Abstand bis zu 50^{km} haben, so sind ihre wahren Horizonte mafsgebend und die Untersuchungen der vorigen Paragraphen zu beachten. Die aus der Triangulierung bekannte oder aus einem Hilfsdreieck berechnete Entfernung läfst sich der zugehörigen Sehne

gleichsetzen, so daſs in Fig. 242 der Bogen gleich der Sehne $AD = e$ ist. Der Höhenwinkel $B_1AE = \alpha$ ist gemessen und $BD = h$ gesucht. Der Winkel α ist um $0{,}0653\,\gamma$ zu groſs und Winkel $EAD = \frac{\gamma}{2}$; also ist für $k = 0{,}13$ im Dreieck BAD:

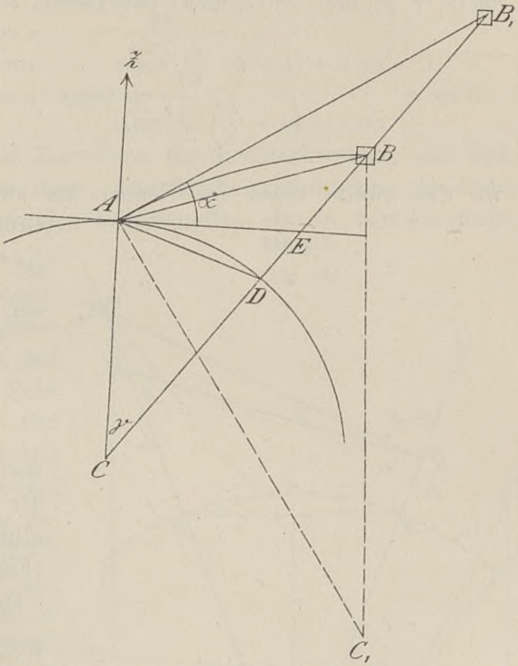
$$BAD = \alpha - 0{,}0653\,\gamma + \frac{\gamma}{2} = \alpha + (1-k)\cdot\frac{\gamma}{2}$$

$$BDA = 90^0 + \frac{\gamma}{2}$$

als Auſsenwinkel und daher

$$DBA = 90^0 - \alpha - (1-k)\cdot\frac{\gamma}{2} - \gamma = 90^0 - \left[\alpha + \left(1 - \frac{k}{2}\right)\cdot\gamma\right].$$

Fig. 242.



Nach dem Sinussatze ist also

$$2)\quad h = \frac{e\cdot\sin\left[\alpha + (1-k)\cdot\frac{\gamma}{2}\right]}{\sin\left[90^0 - \alpha - \left(1-\frac{k}{2}\right)\cdot\gamma\right]} = \frac{e\cdot\sin\left[\alpha + (1-k)\cdot\frac{\gamma}{2}\right]}{\cos\left[\alpha + \left(1-\frac{k}{2}\right)\cdot\gamma\right]}.$$

Ist statt des Höhenwinkels die Zenithdistanz gemessen, so ist diese um den Refraktionswinkel zu klein und es ist jetzt

$$h = \frac{e\cdot\cos\left[z - (1-k)\cdot\frac{\gamma}{2}\right]}{\sin\left[z - \left(1-\frac{k}{2}\right)\cdot\gamma\right]}.$$

In 2) ist in Bogenmaſs $\gamma = \frac{e}{r}$ im allgemeinen sehr klein; $\sphericalangle\,\gamma$ beträgt bei 20^{km} etwa $10'$; deshalb kann man

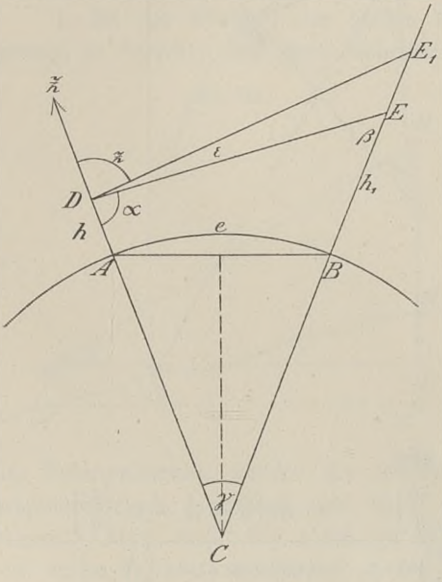
$$\sin(1-k)\cdot\frac{\gamma}{2} = (1-k)\cdot\frac{\gamma}{2} \quad \text{und} \quad \cos(1-k)\,\frac{\gamma}{2} = 1$$

setzen; ebenso wird α nur klein ausfallen, also auch $\sin\alpha$, weil die Höhe von B gegenüber der Entfernung sehr gering sein wird. Wenden wir dies auf 2) an, indem wir Zähler und Nenner nach $\sin(x+y)$ und $\cos(x+y)$ entwickeln, so wird

$$h = e \cdot \frac{\sin\alpha + (1-k)\cdot\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha - \left(1-\frac{k}{2}\right)\cdot\gamma\cdot\sin\alpha} = e \cdot \frac{\sin\alpha + (1-k)\cdot\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha},$$

wo das zweite Glied im Nenner als zweite Dimension kleiner Gröſsen gleich Null gesetzt ist. Führen wir $\gamma = \frac{e}{r}$ ein, so ist

Fig. 243.



3) $h = e\cdot \operatorname{tg}\alpha + e^2\cdot\frac{1-k}{2r}$.

Um die Berechnung für den Höhenunterschied der beiden Punkte A und B allgemeiner zu gestalten, sei (Fig. 243) die Zenithdistanz z gemessen, und es sei wieder $\gamma = \frac{e}{r}$, $\cos\gamma = 1$, $\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{e}{2r}$, $z + \varepsilon = \zeta$, ferner seien die kleinen Gröſsen zweiter Ordnung gleich Null gesetzt. Dann ist nach den Zeichen der Figur und bekannten Formeln im Dreieck DEC:

$$\frac{r+h_1}{r+h} = \frac{\sin\zeta}{\sin(\zeta-\gamma)} = \frac{\left(1+\frac{h_1}{r}\right)\left(1-\frac{h}{r}\right)}{\left(1+\frac{h}{r}\right)\left(1-\frac{h}{r}\right)} = 1 + \frac{h_1}{r} - \frac{h}{r}$$

$$h_1 - h = r\cdot\left(\frac{\sin\zeta}{\sin(\zeta-\gamma)} - 1\right) = r\cdot\frac{\sin\zeta - \sin(\zeta-\gamma)}{\sin(\zeta-\gamma)}$$

$$h_1 - h = r \quad \frac{2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\left(\zeta - \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\zeta\cdot\cos\gamma - \cos\zeta\cdot\sin\gamma}$$

$$h_1 - h = e \cdot \frac{\cos\zeta \cdot \cos\frac{\gamma}{2} + \sin\zeta \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\zeta}$$

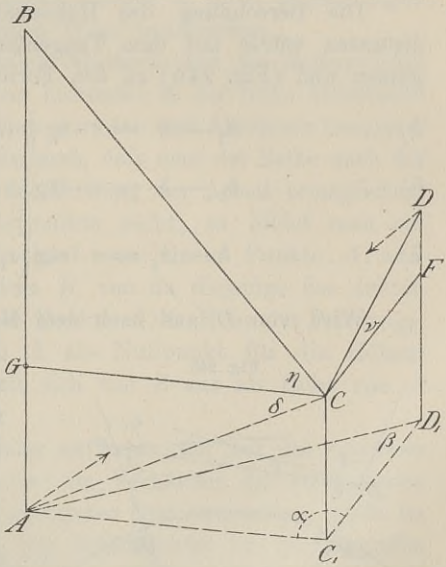
$$h_1 - h = e \cdot \frac{\cos\zeta + \frac{e}{2r} \cdot \sin\zeta}{\sin\zeta}$$

$$4) \quad . \quad . \quad . \quad h_1 - h = e \cdot \operatorname{ctg}\zeta + \frac{e^2}{2r}.$$

Während in 3) die Korrektion für Strahlenbrechung und Erdkrümmung in einem einzigen, dem letzten Gliede zum Ausdruck kam, sind in 4) die beiden Fehlerquellen einzeln berücksichtigt.

Beispiel. (Fig. 244).

Fig. 244.



Um eine ganz unzugängliche Höhe AB trigonometrisch zu bestimmen, hat man auf einer in der Nähe vorbeiführenden Straſse von 4,803 Prozent Steigung die Standlinie CD gemessen, welche als gleichmäſsig geneigte Strecke 112,65 m lang ist; CD liegt ganz über dem Niveau von A. In C wird die horizontale Projektion des Winkels BCD bzw. GCD d. h. der Winkel $AC_1D_1 = \alpha = 151^0\,12'$ und in D diejenige des Winkels ADC d. h. $AD_1C_1 = \beta = 27^0\,17'\,20''$ gemessen. Ferner sind in C der Elevationswinkel $BCG = \eta = 37^0\,48'\,50''$ und der Depressionswinkel $GCA = \delta = 2^0\,15'\,30''$ beobachtet; gesucht ist $AB = h$.

Durch 4,803 % findet man $\sphericalangle DCF$ aus

$$\operatorname{tg}\nu = \frac{4{,}803}{100} \quad \text{und} \quad CF = C_1D_1 = CD \cdot \cos\nu.$$

Im Dreiecke AC_1D_1, welches im Horizonte von A liegt, sind demnach eine Seite und drei Winkel bekannt, wodurch auch $AC_1 = CG$ zu finden ist:

$$AC_1 = \frac{CD \cdot \cos\nu \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Dieser Ausdruck ist zunächst zu berechnen, um zu sehen, ob Erdkrümmung und Strahlenbrechung zu berücksichtigen sind. Die Winkel α und β werden als Lagenwinkel nicht beeinflufst; ebenso ist der Refraktionswinkel nur sehr klein. Da nämlich $AC_1 = 1956^{\text{m}}$ ist, so ist der obige Centriwinkel $\gamma = 1'\,4''$ und der Refraktionswinkel $\varepsilon = 4''$; um diese $4''$ ist $\sphericalangle\,\eta$ kleiner und δ gröfser zu machen. Es ist daher

$$h = AC_1 \cdot (\operatorname{tg} 37^0\,48'\,46'' + \operatorname{tg} 2^0\,15'\,34'').$$

Ohne Refraktion würde sein

$$h = \frac{CD \cdot \cos\nu \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \frac{\sin(\eta + \delta)}{\cos\eta \cdot \cos\delta}.$$

Die Berechnung des Höhenunterschiedes aus zwei Zenithdistanzen würde mit dem Tangentensatze des Dreiecks DCE beginnen und (Fig. 245) zu den Formeln führen:

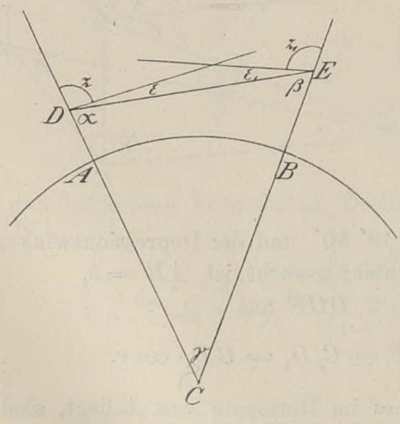
$$5) \quad \ldots \quad h_1 - h = e \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(z_1 - z)$$

$$6) \quad \ldots \quad h_1 - h = e \cdot \operatorname{ctg}\left[z - \frac{e \cdot \varrho}{2r}(1 - k)\right]$$

$$7) \quad \ldots \quad h - h_1 = e \cdot \operatorname{ctg}\left[z_1 - \frac{e \cdot \varrho}{2r}(1 - k)\right].$$

Wird von D aus nach dem Meereshorizonte visiert, so wird DE Tangente mit dem Berührungspunkte E, also $h_1 = 0$ und $z_1 = 90^0$. Die Gleichung 5) § 72 wird deshalb

Fig. 245.



$$1 - k = \frac{r}{e \cdot \varrho} \cdot (z - 90^0)$$

und die Gleichung 7) mit Vertauschung von Tangente und Bogen wird

$$8) \quad . \quad . \quad h = e^2 \cdot \frac{1 - k}{2r}.$$

Mit Hilfe dieser letzten Formel läfst sich die Frage beantworten: Wie weit kann ein Auge ins Meer hinaus sehen, das sich in $h = 2^{\text{m}}$ über demselben befindet? Antw. 5400^{m}. In welcher Höhe kann das Auge eine deutsche Meile weit ins Meer sehen? Antw. $3{,}8^{\text{m}}$.

Die ausführlichere Entwicklung der Formeln und Beispiele findet man in Baeyer: Die Küstenvermessung etc.

Die trigonometrische Höhenmessung findet Anwendung bei der Festlegung der Punkte der Landesvermessung und wird hauptsächlich im Gebirge nötig, wenn die Verwendung des Barometers ausgeschlossen ist oder nur zur Kontrolle dient.

Sollen für eine Bahnanlage oder ein Wegenetz zunächst die ungefähren Steigungsverhältnisse festgestellt werden, will man z. B. wissen, ob man mit einem der Bodenbeschaffenheit oder dem Baumaterial entsprechenden Gefällprozente den Hauptsattel des Gebirges erreichen und von da passend weiter kommen kann, so wird man die Ausgangspunkte und die vorläufig als Endpunkte der Wege in Aussicht genommenen Punkte in ihren gegenseitigen Höhenlagen auf trigonometrischem Wege untersuchen.

Zum Messen der horizontalen Abstände und der Höhenwinkel wird man sich eines Tachymeters bedienen; in der Nähe befindliche Nivellements-Festpunkte wird man zum An- und Abschlufs benutzen. Die letzteren werden zugleich dadurch, dafs man der Reihe nach die Höhenunterschiede berechnet, eine Prüfung der Arbeit ermöglichen.

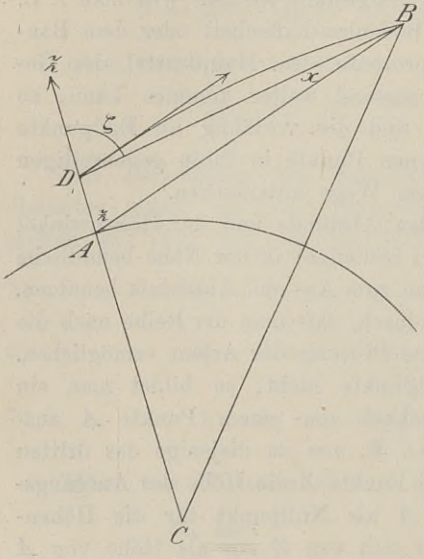
Hat man dergleichen Festpunkte nicht, so bildet man ein Netz von Punkten. Man berechnet von einem Punkte A ausgehend die Erhebung des zweiten B, von da diejenige des dritten C u. s. w., bis man vom letzten Punkte Z die Höhe des Ausgangspunktes A bestimmt hat. Ist A als Nullpunkt für die Höhenmessung angenommen, so mufs sich von Z aus als Höhe von A wieder Null ergeben.

Meist wird jedoch ein Fehler auftreten, der auf die einzelnen Höhen zu verteilen ist und zwar im Verhältnis der horizontalen Entfernungen von den je vorhergehenden Stationspunkten, nicht im Verhältnis der Höhen. Denn der Schlufsfehler ist hervorgerufen durch die Fehler der Entfernungs- und Höhenwinkelmessung, auf welch letztere die Refraktion einen mit der Entfernung zunehmenden Einflufs ausübt. Dafs dabei auch die Höhenlage eines Punktes von nachteiliger Einwirkung sein kann, jenachdem z. B. der beobachtete Punkt auf dem Berge in erwärmter und bewegter Luft und der Beobachtungsort in der kalten und ruhigen Luft einer Schlucht liegt, erhellt aus den Bemerkungen des § 72. Solange jedoch für solche Verhältnisse die Refraktion in rechnungsmäfsiger Gröfse nicht angebbar ist, legen wir die von Gaufs aufgestellte Konstante zugrunde, welche in der Höhenformel als Faktor des mit der Entfernung wachsenden Centriwinkels erscheint.

§ 74. Mittelbare Messung eines Höhenwinkels.

Die Centrierung oder Reduktion eines Höhen- oder Zenithwinkels auf den wahren Scheitel kann notwendig werden, wenn z. B. der Winkel für die Spitze eines Turms bestimmt werden soll oder der Instrumentenstand über dem Scheitel des Winkels auf einem Gerüste gewählt werden mufs. Der Einfachheit wegen legt man den Beobachtungspunkt so, dafs die Visierlinie mit dem wahren Scheitel des Winkels und dem Zielpunkte in derselben Vertikalebene liegt.

Fig. 246.



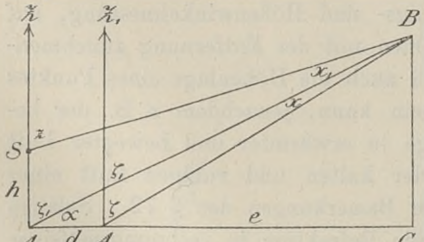
In Fig. 246 sei A der wahre Scheitel, lotrecht über A in D stehe der Theodolit und der gemessene und verbesserte Zenithwinkel sei $ZDB = \zeta$, $AD = h$ und $AB = e$. Dann ist

$$z = \zeta - x; \quad \sin x = \frac{h}{e} \cdot \sin \zeta;$$

$$x = \varrho'' \cdot \frac{h}{e} \cdot \sin \zeta .$$

Liegt der Beobachtungswinkel etwa auf der Fensterbank eines Turmes in A und mit dem wahren Scheitel S der Turmspitze und mit dem Zielpunkte B in einer Vertikalebene, so ist Fig. 247

Fig. 247.



$$\zeta_1 = \zeta + x$$

$$z = \zeta_1 + x_1 = \zeta + x + x_1 .$$

Hierin ist

$$x = \varrho'' \cdot \frac{d}{e} \cdot \sin (90^0 + \zeta)$$

$$= \varrho'' \cdot \frac{d}{e} \cdot \cos \zeta$$

$$x_1 = \varrho'' \cdot \frac{h}{e} \cdot \sin \zeta_1 = \varrho'' \cdot \frac{h}{e} \cdot \sin (\zeta + x).$$

Vernachlässigt man x gegen ζ, so ist

$$z = \zeta + \frac{\varrho''}{e} \cdot (d \cdot \cos \zeta + h \cdot \sin \zeta).$$

Beispiel. Der gemessene und verbesserte Zenithwinkel sei $\zeta = 87^0\, 50'\, 20''$, $e = 3000^{\mathrm{m}}$, $d = 3^{\mathrm{m}}$ und $h = 5^{\mathrm{m}}$, so ist $x = 8''$, $x_1 = 1'\, 43''$, also $z = 87^0\, 52'\, 21''$, wo auch x in $\sin(\zeta + x)$ berücksichtigt ist.

§ 75. Das Nivellieren von Linien.

Die Höhenbestimmung auf dem Wege des Nivellierens im eigentlichen Sinne besteht in der Messung der lotrechten Abstände der Punkte von der horizontalen Visierlinie. Das Haupterfordernis der Nivellierinstrumente ist demnach die Wagerechtstellung der Absehlinie, wie wir im ersten Teile gesehen haben.

Unter Anwendung eines Libelleninstruments wird im folgenden das Nivellieren von Linien besprochen und dabei die Vorschrift beachtet, dafs im allgemeinen die Zielweiten nicht über 50^{m} lang sind. Gemäfs dieser Voraussetzung führt das Nivellement zu den genauesten Resultaten und läfst sich über Berg und Thal durch ganze Länder in Linien fortsetzen, die nach tausenden von Kilometern zählen, ohne durch unberechenbare Einflüsse geschädigt zu werden.

a. Das Nivellieren aus dem Ende.

Diese Methode wird auch kurz das Vorwärtsnivellieren genannt und eignet sich zur Aufnahme von Querprofilen und zur flüchtigen Festlegung einer Anzahl von Punkten auf gröfsere Entfernungen. Für das Einwägen je zweier Punkte einer Linie wird sie nicht mehr angewandt.

Es soll der Höhenunterschied der Punkte A und B bestimmt werden. Man stelle das Instrument über A auf, richte das Fernrohr auf die über B lotrecht stehende Latte, bringe die Röhrenlibelle zum Einspielen und lese an der Latte nach Millimetern das Stück l ab. Nachdem man nun die Instrumentenhöhe i gemessen hat, was nach Millimetern nicht genau möglich ist, erhält man als Höhenunterschied

$$h = l - i \quad \text{oder} \quad h = i - l,$$

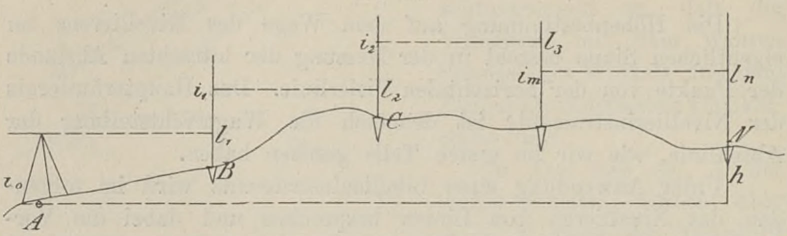
jenachdem A tiefer oder höher als B liegt.

Wollte man die Erdkrümmung und terrestrische Strahlenbrechung in Rechnung ziehen, so würde nach § 71. 3. sein

$$\pm h = i - (l - c) = i - l + c.$$

Zum Nivellieren einer langen Linie teilt man dieselbe in Strecken von passender Länge, bezeichnet die einzelnen Stationspunkte durch Pfähle oder Nägel und verfährt mit dem dritten Punkte wie mit dem zweiten, indem man im letztern das Instrument und im dritten die Latte aufstellt u. s. w. Ist die Instrumentenhöhe im Punkte

Fig. 248.



A i_0, in B i_1, im vorletzten Punkte i_m, die Lattenablesung im Punkte B l_1, in C l_2, im letzten Punkte N l_n, so sind die Höhenunterschiede

$$\begin{array}{c} h_1 = l_1 - i_0 \\ h_2 = l_2 - i_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ h_n = l_n - i_m \\ \hline h = \Sigma l - \Sigma i. \end{array}$$

Dieselbe Gröfse h mufs man erhalten, wenn man von Punkt zu Punkt bis zum letzten fortschreitend den Höhenunterschied berechnet.

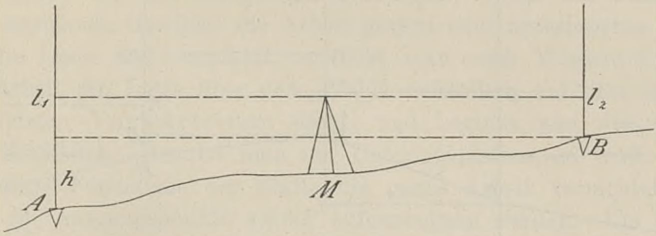
b. Das Nivellieren aus der Mitte.

Um den Höhenunterschied h zwischen den Punkten A und B zu finden, stelle man das Instrument in der Mitte M zwischen A und B auf (Fig. 249), richte das Fernrohr auf die in A stehende Latte, stelle die Visierlinie horizontal und lese l_1 ab; darauf drehe man das Fernrohr um 180^0, bringe die Libelle wieder zum Einspielen und lese an der Latte über B das Stück l_2 ab. Der Höhenunterschied zwischen M und A und zwischen M und B ist für die Instrumentenhöhe i und für die gleiche Korrektion c

$$h_1 = l_1 - i - c$$
$$h_2 = l_2 - i - c$$
$$h = h_1 - h_2 = l_1 - l_2.$$

Wir sehen, dafs es bei dieser Art des Nivellierens auf die Instrumentenhöhe nicht ankommt, also die Messung derselben nicht notwendig ist. Die Korrektion c, welche bei einer Zielweite von 50^{m} ohne Belang ist und erst bei 100^{m} ungefähr 1^{mm} betragen würde, fällt ebenfalls weg. Nach der vorigen Methode würden ferner zum Einwägen zweier Punkte im Abstande von 100^{m} zwei Aufstellungen mit 50^{m} Zielweite erforderlich sein, während hier eine einzige Aufstellung genügt. Einen vierten Vorzug bietet diese

Fig. 249.



Methode noch dadurch, dafs selbst dann richtige Resultate erzielt werden, wenn Libellenachse und Zielachse nicht parallel sind, wohl aber in einer Ebene liegen. Im letztern Falle ist freilich die Gleichheit der Zielweiten unbedingt erforderlich, weil andernfalls die rückwärts und vorwärts zu viel bezw. zu wenig abgelesenen Lattenstücke nicht gleich sein würden.

Bei richtigem Instrument kommt es auf einige Meter Unterschied in den Zielweiten nicht an; es ist die Abmessung nach Schrittmafs hinreichend genau, wenngleich das Mitziehen einer Kette nicht gerade umständlich ist. Die optische Einstellung des Fernrohres am Getriebe verursacht keine Mühe; die Aufstellung des Instruments kann auch einige Meter seitwärts der Geraden AB geschehen.

Ist der Höhenunterschied und nur dieser für zwei Punkte zu ermitteln, welche mehrere Kilometer von einander entfernt sind, so teilt man die ganze Linie in Strecken je nach den Steigungsverhältnissen von 100 oder 80 oder weniger Meter und schlägt an den Teilpunkten zur Lattenaufstellung kurze Pfähle oder eiserne Nägel mit breiten Köpfen ein. Ebenso bequem ist die Verwendung einer Unterlageplatte, welche mit den spitzen Füſsen in den Boden getreten wird und so lange unverändert liegen bleibt, bis die Rückwärtsablesung erfolgt ist.

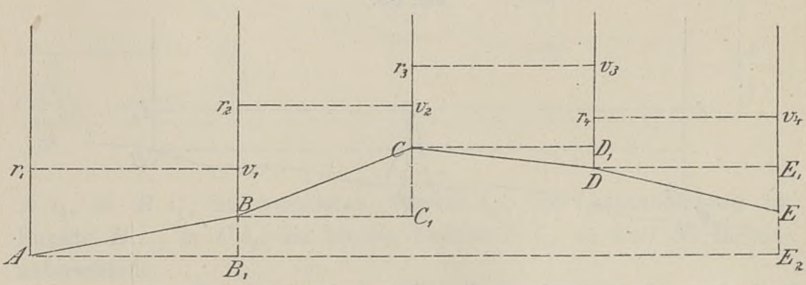
In Fig. 250 seien die Horizontalen rv die Visierlinien; der Höhenunterschied zwischen A und E, nämlich EE_2 ergiebt sich durch vertikales Aufsteigen (plus) und Absteigen (minus) in den Punkten der Lattenaufstellungen oder durch die einzelnen Unterschiede der Lattenablesungen r und v. Es ist

$$1) \quad . \; . \; . \quad EE_2 = BB_1 + CC_1 - DD_1 - EE_1.$$

Führen wir die absoluten Gröſsen nach der Figur ein, so ist

$$BB_1 = r_1 - v_1; \; CC_1 = r_2 - v_2; \; DD_1 = v_3 - r_3; \; EE_1 = v_4 - r_4.$$

Fig. 250.



Durch Einsetzung dieser Ausdrücke wird

$$2) \; . \quad EE_2 = r_1 - v_1 + r_2 - v_2 - (v_3 - r_3) - (v_4 - r_4)$$
$$= r_1 + r_2 + r_3 + r_4 - (v_1 + v_2 + v_3 + v_4)$$

$$3) \; . \quad EE_2 = \Sigma r - \Sigma v.$$

Man erhält also den Höhenunterschied zweier Punkte einer nivellierten Linie, indem man die Summe aller Vorblicke von der Summe aller Rückblicke abzieht.

Bildet man die Höhenunterschiede von Punkt zu Punkt und nennt die Steigungen positive und die Gefälle negative Erhebungen, wie in 2) geschehen ist, so kann man 3) auch schreiben

$$4) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad EE_2 = \Sigma(r - v),$$

d. h. der Höhenunterschied zwischen dem Anfangs- und Endpunkte ist gleich der algebraischen Summe der sämtlichen Unterschiede zwischen dem Rückblick und dem zugehörigen Vorblick; oder der Höhenunterschied ist die Differenz zwischen der Summe der Steigungen und der Summe der Gefälle.

Zur Vermeidung von Rechenfehlern wird man nach 3) und 4) den Höhenunterschied berechnen. Ist nach der Vorschrift die Zielweite nicht über 50 ^{m} lang, so giebt der berechnete Höhenunterschied den Abstand der wahren Horizonte der beiden Punkte an. Die Angabe der Höhenlage des Endpunktes über N.N. setzt die Höhe des Anfangspunktes über N.N. als bekannt voraus.

In der Nivellementstabelle hat man für Linien mit einzelnen Lattenaufstellungen eine Spalte für die Rückblicke und eine für die Vorblicke. Die Unterschiede werden nicht als algebraische Zahlen aufgeschrieben, sondern in getrennten Spalten als Steigung und Fall aufgeführt. In die letzte Spalte kommt die absolute Höhe über N.N.

Beim Nivellieren langer Linien kann leicht der Fall eintreten, daſs durch ein unvorhergesehenes Ereignis, durch ein Fuhrwerk oder durch ein Gewitter die Arbeit gestört oder unterbrochen wird. Ist die Linie fest verpfählt, so läſst man nach Wiederaufnahme der Arbeit die Latte über dem Pfahle aufstellen, auf dem sie bei der letzten Vorwärtsvisur stand, und beginnt nun wieder mit dem Rückblick. Benutzt man nur Unterlageplatten, so wird durch vorzeitige Fortnahme der Platte die ganze Arbeit vernichtet und muſs im Ausgangspunkte wieder aufgenommen werden. Um dieses zu verhüten, zieht man feste Punkte, Mauervorsprünge, Grenzsteine u. s. w. mit in das Nivellement hinein. Man läſst über solchen Punkten die Latte aufstellen und schreibt die Vorwärtsablesung auf. Man bekommt dadurch einen Punkt, in dem man später von neuem mit dem Nivellement beginnen kann.

Eine solche Maſsregel empfiehlt sich auch, wenn es sich darum handelt, mit dem Nivellierinstrument die Einbiegungen von Brücken bei Probebelastungen zu beobachten und zu messen. Je nach der Höhe des benachbarten festen Bodens, auf dem man das Instrument aufstellen will, bindet man in passenden Abständen an der einen Seite der Brücke flache nackte Latten fest, welche entweder nach oben oder unten beliebig überstehen, so daſs man etwa ein Lattenstück von 1 ^{m} Länge übersehen kann. Man stellt das Instrument ungefähr in der Längsrichtung der Brücke horizontal auf und läſst mit einem Lineal auf allen Latten Bleistriche ziehen, die vom Horizontalfaden gedeckt werden. In einem bequem gelegenen Punkte des Landes befestigt man an einem Pfahle oder Baume eine Latte und markiert auch an dieser den Horizont des Fernrohrs. Sollte nun während der langwierigen Arbeit der Belastung eine unvorhergesehene Störung die alte Stellung des Instruments unmöglich machen, so läſst sich das Instrument dort wieder aufstellen oder ein solcher Stand finden, daſs man an die feste Marke wieder anschlieſsen kann. Andernfalls kann leicht die mühevolle Arbeit der Prüfung zum erstenmale ganz unnütz werden.

Zur Bestimmung der seitlichen Neigung der Brücke während der Belastung nagelt man auf einer oder mehreren der an der Brücke befestigten Holzlatten Lote fest. Die Länge des Lotes bis zur Spitze wird gemessen und auf den Lotfaden richtet man den Vertikalfaden des Kreuzes. In der Verlängerung der Lotspitze macht man einen vertikalen Strich auf der Latte. Findet eine einseitige Neigung an der rechten oder linken Seite der Brücke statt, so kann man die Entfernung der Lotspitze vom Vertikalstrich messen und aus dieser und der Länge des Lotes den Neigungswinkel finden.

Bei der Prüfung groſser Brücken wendet man mit Erfolg die Photographie an. Die vergröſserten Bilder gestatten die Abmessung der lotrechten und seitlichen Biegungen während der Belastung, was durch gut angebrachte Marken erleichtert wird.

§ 76. Aufnahme von Profilen.

Denken wir uns die in horizontaler Beziehung vielfach gekrümmte Nivellementslinie in den einzelnen Teilen von rechts nach links und umgekehrt so verschoben, daſs alle Steigungen und Gefälle unverändert bleiben, aber in gerader Linie auf einander folgen und das in dem einen Endpunkte befindliche Auge die ganze Linie vor sich liegen sieht, so erhält man das natürliche Profil der nivellierten Linie. Legen wir ferner durch den Anfangspunkt den wahren Horizont, so geben die aus dem Nivellement gewonnenen Zahlen für Steigung und Fall einen Anhaltspunkt für den Verlauf der Linie im vertikalen Sinne.

Die Zahlen können wir darstellen durch gerade Linien, welche auf dem für die Nivellementslinie gewählten Horizonte senkrecht stehen und in der Vertikalebene der nivellierten Linie liegen. Wir erhalten dadurch ein Bild von der Höhenlage aller Punkte der Lattenaufstellungen, welches man das Nivellements-Profil nennt.

Es möge sich um die Anlage einer Eisenbahn handeln. Man muſs Aufschluſs haben über die Steigungsverhältnisse des Geländes in der Richtung der ausgewählten Linie, um danach die auszuführenden Erdarbeiten zu berechnen. Das Nivellement hat sich dann nicht allein auf die projektierte Linie zu erstrecken, sondern mufs auch die Erhebungen und Senkungen rechts und links von derselben auf zwanzig und mehr Meter berücksichtigen. Es sind demnach auch senkrecht zur Hauptlinie Nivellementslinien festzulegen und Höhenmessungen zu machen.

Die Ergebnisse der Nivellierungen in der Längen- und Querrichtung der zukünftigen Bahnlinie werden bildlich dargestellt, die erstern im Längenprofil, die letztern im Querprofil.

a. Aufnahme des Längenprofils.

1. Die Vorarbeit zur Aufnahme des Längenprofils (filum) besteht in der Verpfählung oder Verpflockung der Linie. Man legt Hauptpunkte und Zwischenpunkte fest, erstere durch starke, letztere durch kurze Grundpfähle oder Nägel, deren Köpfe in der Höhe des Bodens liegen und durch Tage- oder Beipfähle, welche die Lattenstationen äufserlich bezeichnen und zum Aufschreiben von Zahlen geeignet sind. Die Hauptpunkte teilen die ganze Linie in gleiche Strecken, deren Länge je nach dem Terrain 20 bis 100^{m} betragen kann, so dafs die gröfste Zielweite 50^{m} nicht übersteigt. Die Zwischenpunkte werden überall da gewählt, wo die zu nivellierende Linie im vertikalen Sinne ihre Richtung merklich ändert, oder wo die Einlegung eines Querprofils notwendig ist.

2. Mit der Festlegung der Hauptpunkte ist sogleich die horizontale Längenmessung verbunden. Dieselbe geschieht entweder mit dem Stahlbande oder mit der Mefslatte auf dem Wege der Staffelmessung. Die Zwischenpunkte, welche in der Geraden je zweier Hauptpunkte liegen, können horizontal aufgemessen werden bei der Ausführung des Nivellements.

Um die Linie auch für spätere Zeiten dauernd zu erhalten, kann man unveränderliche Punkte als An- und Abschlufspunkte wählen, die Hauptpunkte der Linie als die Brechungspunkte eines Polygonzuges betrachten und ihre horizontalen Koordinaten in irgend einem Systeme berechnen.

3. Sind die horizontalen Abstände der Haupt- und Zwischenpunkte gemessen, so beginnt das Nivellieren und zwar aus der Mitte. Die Ablesung rückwärts an der Latte im Anfangspunkte ist die erste, worauf die Ablesungen an der Latte der Zwischenpunkte bis zum zweiten Hauptpunkte (Wechsel) vorwärts der Reihe nach folgen. Darauf wird das Instrument zwischen dem zweiten und dritten Wechselpunkte aufgestellt und wie bei der ersten Station verfahren. Ist der Abstand der Hauptpunkte gering, so

kann man von einer Instrumentenaufstellung mehrere Lattenablesungen der Hauptpunkte vornehmen. Die sogen. Wechsel sind dann diejenigen Punkte, in denen ein neuer Horizont der Visierlinie auftritt.

4. Die Berechnung der Höhen ist hier wegen der Zwischenablesungen von derjenigen unter § 75. b. verschieden. Die Erhebung des Anfangspunktes über N.N. wird als bekannt vorausgesetzt, da ein Anschlufs an einen Festpunkt des Nivellements der Landesaufnahme wohl immer möglich ist. Festpunkte in der Nähe zieht man heran.

Die Höhen über N.N. heifsen die Ordinaten (Koten), während die Horizontalprojektion der Nivellementslinie als Abscisse angenommen wird. Diese Abscisse ist parallel dem Haupthorizonte durch N.N. und ihr Nullpunkt liegt lotrecht unter dem Anfangspunkte der nivellierten Linie.

Die Punkte der Linien seien **0**, 1, 2, 3, **4**, 5, 6, **7** u. s. w., wo 0, 4, 7 Hauptpunkte, die übrigen Zwischenpunkte sind. Die Ordinate des Punktes 0 sei y_0, die Ablesungen in der ersten Aufstellung seien a_0, a_1, a_2, a_3, a_4; in der zweiten Aufstellung b_4, b_5, b_6, b_7; in der dritten c_7 u. s. w. Die Ordinaten der Terrainpunkte ergeben sich aus der Lage zur horizontalen Visierlinie, wie folgt.

Der erste Horizont ist y_0; die Visierlinie liegt in $y_0 + a_0$ Höhe, folglich liegt der Punkt 1 in $y_0 + a_0 - a_1$, der Punkt 2 in $y_0 + a_0 - a_2$, der Punkt 3 in $y_0 + a_0 - a_3$ und Punkt 4 in $y_0 + a_0 - a_4$ Höhe.

Dieser Horizont von Punkt 4 ist nun mafsgebend für die zweite Reihe von Ablesungen und Berechnungen; er liegt in $y_0 + a_0 - a_4$ Höhe; die neue Visierlinie hat die Lage $y_0 + a_0 - a_4 + b_4$, folglich liegt der Punkt 5 in $y_0 + a_0 - a_4 + b_4 - b_5$, der Punkt 6 in $y_0 + a_0 - a_4 + b_4 - b_6$ u. s. w. Höhe über N.N.

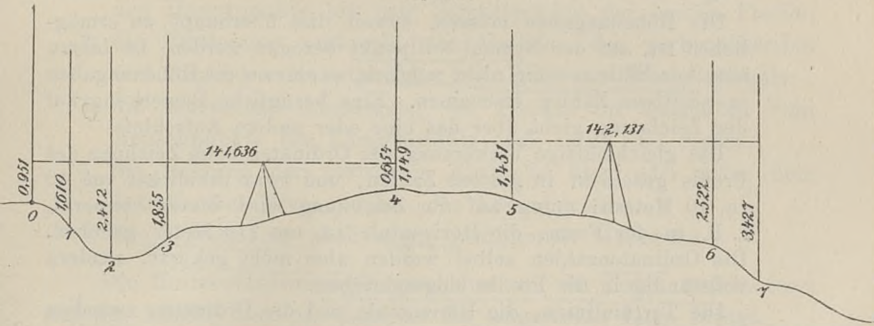
Ein Zahlenbeispiel für die vorstehende Berechnung giebt die folgende Tabelle.

Punkt	Ablesung	Höhe über N.N.	Horizont der Visierlinie
0	0,951	140,685	140,685 + 0,951
1 = 0 + 4,9	1,610	140,026	= 141,636
2 = 0 + 10,1	2,412	139,224	
3 = 0 + 17,4	1,855	139,781	
4	0,654	140,982	

Punkt	Ablesung	Höhe über N.N.	Horizont der Visierlinie
4	1,149	140,982	140,982 + 1,149
5 = 4 + 15,2	1,451	140,680	= 142,131
6 = 4 + 40,8	2,522	139,609	
7	3,427	138,704	

In der Fig. 251 sind die Punkte 4 und 7 Wechselpunkte, wenn das Nivellement über 7 hinausgeht. Die horizontalen Abstände der Zwischenpunkte von dem vorhergehenden Hauptpunkte werden genau gemessen und sowohl in die Tabelle des Manuals eingetragen als auch auf dem Beipfahle des betreffenden Punktes

Fig. 251.



mit blauem oder rotem Bleistift verzeichnet, um bei der Wiederholung oder Prüfung des Nivellements zur Kontrolle zu dienen. Erstreckt sich die Linie längs einer Strafse, so schlägt man die Tagepfähle seitwärts an geschützter Stelle ein.

Um sich zu überzeugen, dafs das ausgeführte Nivellement eine genügende Genauigkeit besitzt, vergleicht man die erhaltenen Zahlen mit denjenigen eines zweiten Nivellements, welches durch andere Aufstellungen des Instruments und durch die umgekehrte Reihenfolge der Ablesungen von dem ersten ganz unabhängig ist. Die Abweichung in den Ordinaten des Endpunktes darf $9\sqrt{n}$ Millimeter betragen, wenn die ganze Linie n hundert Meter lang ist.

Beträgt der Unterschied nur wenige Millimeter, so wird an den Ordinaten des ersten Nivellements nichts geändert. Bei gröfserem, aber noch erlaubtem Unterschiede berechnet man die Ordinaten aus beiden Messungen und nimmt als endgiltige Ordinaten das arithmetische Mittel.

5. Nach dem Reglement vom 2. März 1871. § 22 soll die Darstellung des Längenprofils nach zwei verschiedenen Maſsstäben erfolgen; die Abscissen sollen in 1 : 5000 und die Ordinaten in dem fünfundzwanzigfachen Maſsstabe, also 1 : 200 aufgetragen werden. Das Bild wird dadurch ein verzerrtes, bringt aber die Terrainverhältnisse deutlicher zum Ausdruck. Vielfach findet man die Darstellung in 1 : 2000 bzw. 1 : 200. Für die Vorarbeiten zum Eisenbahnbau ist 1 : 10 000 bzw. 1 : 500 vorgeschrieben. Die Maſsstäbe sind auf der Karte an geeigneter Stelle aufzuzeichnen.

Nähere Vorschriften über die Zeichnung der Profile finden sich in: Bestimmungen über die Anwendung gleichmäſsiger Signaturen u. s. w. 3. Aufl. Berlin. 1888.

Es lauten dort § 21 mit Rücksicht auf die beigefügte Tafel die Regeln im wesentlichen also:

Die Höhenangaben müssen, soweit dies überhaupt zu ermöglichen ist, auf den Normal-Nullpunkt bezogen werden; ist hierzu eine Anschluſsmessung nicht möglich, so müssen die Höhenangaben in positiven Zahlen erscheinen. Eine bezügliche Bemerkung auf der Zeichnung giebt über das eine oder andere Aufschluſs.

Die gleichmäſsige Verkürzung der Ordinaten beim Zeichnen des Profils geschieht in glatten Zahlen, und zwar thunlichst von 10 zu 10 Metern; unten auf der Zeichnung wird dieses vermerkt, z. B. in der Form: die Horizontale ist um 110 Meter gehoben. Die Ordinatenzahlen selbst werden aber nicht gekürzt, sondern vollständig in die Profile eingeschrieben.

Die Terrainlinien, die Horizontale und die Ordinaten zwischen der Terrainlinie und der Horizontalen werden schwarz, Wasserstandslinien blau ausgezogen. Die projektierten Höhenlagen der Straſsen, Eisenbahnen, Deichkronen u. s. w., sowie die dazu gehörigen Ordinaten oberhalb der Terrainlinie werden zinnoberrot ausgezogen.

Die Profilfläche des Auftrags wird blaſsrot, des Abtrags grau (mit chinesischer Tusche), des Terrains sepiabraun, des Wassers bis zum Wasserspiegel blau, der vorhandenen Bauwerke schwarz, der projektierten Bauanlagen zinnoberrot angelegt.

Alle Höhenzahlen werden in der Farbe der zugehörigen Nivellementslinien neben die Ordinaten und ihnen parallel geschrieben mit dem Kopfe nach links, also die Ordinaten des Terrains schwarz, des Wasserstandes blau u. s. w.

Unterhalb und oberhalb des gezeichneten Profils lassen sich noch manche Erläuterungen anbringen in Bezug auf vorhandene und projektierte Übergänge, Durchlässe, Brücken u. s. w., in Bezug auf den Verlauf der nivellierten Linie in einer Kurve oder geraden Linie, in Bezug auf die projektierte Linie, ob dieselbe horizontal oder mit Steigung und mit welcher Steigung sie das Gelände durchschneiden wird u. s. w.

In dem Profile, welches den Lauf eines Flusses darstellt, können vier verschiedene Ordinatenzahlen auftreten, welche sich auf das linke und rechte Ufer, auf die Sohle des Bettes und auf den Wasserstand beziehen.

b. Aufnahme des Querprofils.

Unter dem Querprofile versteht man das Bild, welches den Verlauf des Geländes in der zur Hauptlinie senkrechten Richtung darstellt. Wird ausnahmsweise das Längenprofil vom Querprofile unter einem schiefen Winkel geschnitten, so ist der Winkel zu messen und anzugeben. Die Querprofile sind verhältnismäſsig kurz; ihre Anzahl wird durch die Bodengestaltung bedingt. Die Aufnahme derselben erfordert:

1. Die Bestimmung der Lage im Längenprofil, also die horizontale Streckenmessung von dem nächsten rückwärts liegenden Hauptpunkte bis zum Schnittpunkte der beiden Profile;
2. die Festlegung senkrecht zur Geraden des vorhergehenden und folgenden Hauptpunktes mit Hilfe des Winkelspiegels;
3. die horizontale Abmessung der Punkte im Querprofil vom Achsenpunkte des Längenprofils nach links und rechts;
4. die Messung der vertikalen Abstände über oder unter dem betreffenden Niveaupunkte des Längenprofils;
5. Die Darstellung nach einem bestimmten Maſsstabe.

Die Horizontalmessungen geschehen mit der Latte, welche man mit der Libelle oder am Lote in die wagerechte Lage bringt.

Die Zahl der aufzunehmenden Punkte richtet sich nach dem mehr oder weniger regelmäſsigen Verlaufe der Bodenoberfläche; von diesem hängt auch die Wahl des Instrumentes für die Höhenmessung ab. Eine Verpflockung des Querprofils ist nicht erforderlich.

Ist die Neigung des Bodens stark wechselnd, in kurzen Abständen steil und bis über die Länge der Nivellierlatte abfallend, so kommt man am schnellsten zum Ziele durch Anwendung der Setzlatte oder auch der gewöhnlichen Meſslatte.

Der Nullpunkt für die Höhen des Querprofils ist der Niveaupunkt des Längenprofils; durch denselben denken wir den Horizont gelegt und zeichnen ihn auch im Handriſs von links nach rechts, während ein Pfeil durch den genannten Punkt die Achse und Richtung des Längenprofils anzeigt. Desgleichen wird nach Schätzung das Bild des Querprofils in das Manual eingezeichnet und in dasselbe jede Meſszahl geschrieben, die Abscissenzahlen mit dem Fuſse nach dem Anfangspunkte, die Ordinatenzahlen ebenfalls und neben die Ordinaten. Zur richtigen Orientierung des rechten und linken Teiles stellt man sich im Längenprofile auf, mit dem Auge in der Richtung der wachsenden Zahlen, und zeichnet die Teile nach der naturgemäfsen Lage, also rechts, was rechts liegt.

Den einen Endpunkt der Setzlatte legt man auf den Niveaupunkt oder bringt ihn mit einem Lote vertikal über denselben, läfst die aufgesetzte Libelle einspielen und mifst mit der Nivellierlatte oder dem Senkelstock die Erhebung des nicht aufliegenden Endes über dem Boden. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens erhält man die vertikale Lage der Profilpunkte über oder unter dem Punkte des Längenprofils und zugleich die horizontalen Abstände.

Ist die Bodengestaltung in der Richtung des Querprofils ziemlich gleichmäfsig und steht nötigenfalls eine genügend lange Nivellierlatte zur Verfügung, so nivelliert man mit dem gewöhnlichen Libelleninstrumente. Dasselbe kann in oder neben der Hauptlinie oder bei ausgedehntem Querprofile annähernd oder ganz in dessen Richtung stehen. Die erste Ablesung geschieht an der Latte im Niveaupunkte des Längenprofils; die folgenden Ablesungen geschehen der Reihe nach auf der einen Seite und dann auf der andern; oder man liest hintereinander vom einen Endpunkte bis zum anderen ab.

In den meisten Fällen genügt die Ablesung nach Centimetern. Handelt es sich nur um den vorläufigen Entwurf einer Anlage, so steht der Anwendung des Stahlbandes mit Gradbogen für die Horizontalmessungen und eines Freihand-Instruments zum Nivellieren nichts im Wege.

Der Schnittpunkt im Niveau der beiden Profile wird als Nullpunkt betrachtet; folglich hat man nur die Differenzen der Ablesungen zu bilden, um die Höhenunterschiede zu bekommen. Setzt man die Hauptablesung im Nullpunkte stets als Minuend, so steigt oder fällt das Gelände von dort aus, je nachdem die Differenz positiv oder negativ wird. Dasselbe Ergebnis stellt sich heraus, wenn man der Reihe nach die Unterschiede der auf einander folgenden Ablesungen berechnet.

Für die Z e i c h n u n g des Querprofils ist kein Mafsstab vorgeschrieben; es wird jedoch verlangt, Ordinaten u n d Abscissen in e i n u n d d e m s e l b e n Verhältnisse zur Darstellung zu bringen, so dafs kein verzerrtes, sondern ein ähnliches Bild entsteht. Bei geringerer Genauigkeit wählt man den Mafsstab der Ordinaten des Längenprofils, also 1 : 200; wird eine möglichst genaue Erdmassenberechnung verlangt, für welche man meistens das Querprofil aufzunehmen pflegt, so nimmt man den gröfseren Mafsstab 1 : 100. Eine Zeichnung mit Überhöhung, d. h. mit lauter positiven Ordinatenzahlen wird nicht angefertigt; die Terrainlinie wird demnach unter und über dem Horizonte des Achspunktes verlaufen können.

Sind die Querprofile in geringer Anzahl vorhanden, wie es bei wenig unregelmäfsiger Bodengestaltung in und neben der Hauptlinie der Fall sein wird, so werden die Querprofile abwechselnd unterhalb und oberhalb des Längenprofils an die verlängerten Ordinaten der Achspunkte des letztern gezeichnet.

Der Auf- und Abtrag wird koloriert wie beim Längenprofil. Die Auftrags- und Abtragsflächen in jedem Querprofil werden getrennt aus den Zahlen der Messung oder schneller durch Verwandlung der Figur in ein Dreieck oder mit dem Planimeter ermittelt. Die Anwendbarkeit des letztern hat die obige Vorschrift über die Zeichnung nach gleichem Mafsstabe veranlafst.

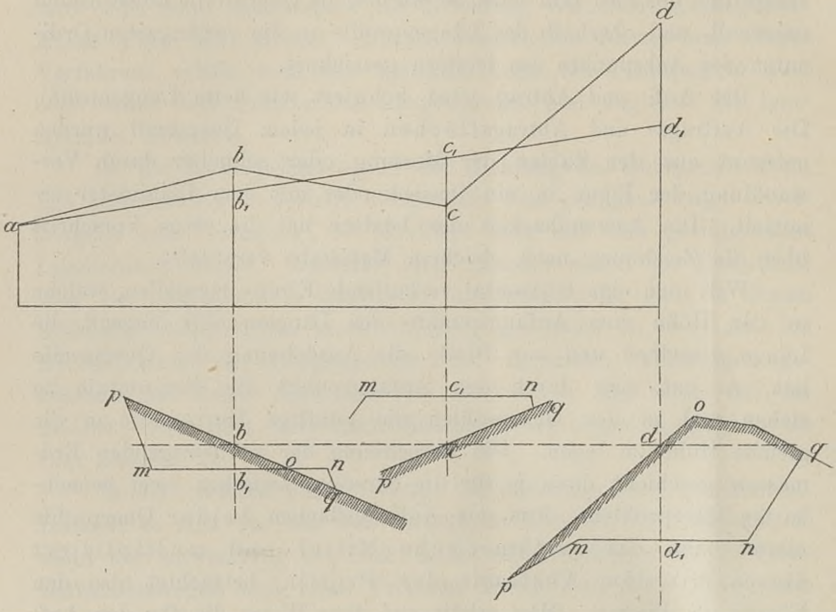
Will man eine horizontal verlaufende Ebene herstellen, welche in der Höhe vom Anfangspunkte des Längenprofils liegend die Länge desselben und zur Breite die Ausdehnung der Querprofile hat, so hat man durch den Anfangspunkt die Horizontale zu ziehen und in den Querprofilen die künftige Horizontale in die gleiche Höhe zu legen. Die Berechnung der zu bewegenden Erdmassen geschieht dann je für die Strecken zwischen zwei benachbarten Querprofilen. Aus den Auftragsflächen beider Querprofile nimmt man das arithmetische Mittel und multipliziert dieses mit dem Abstande der Profile, betrachtet also den Körper als Prisma. Man erhält auf diese Weise die für den Auftrag erforderliche Erdmasse; ebenso findet man den Abtrag. Der Unterschied zwischen beiden liefert den Mangel bzw. den Überschufs an Erdmasse.

Speziell den Wegebau oder Eisenbahnbau betreffend sei die Verwertung der beiden Profile an Fig. 252 dargethan.

Das Geländeprofil sei die gebrochene Linie $abcd$, der projektierte Weg $ab_1c_1d_1$; aus den Vorarbeiten ist der Verlauf der beabsichtigten Anlage ad_1 bekannt und wird in das Längenprofil eingezeichnet. Die Abstände zwischen der künftigen Linie und der jetzigen Terrainlinie sind von Wichtigkeit, weil dadurch die Lage des künftigen, sog. Normal-Querprofils im aufgetragenen Querprofile bestimmt wird. Man wird nun bb_1 und cc_1 u. s. w. aus der Abscisse, den Ordinaten und dem gegebenen Steigungsverhältnis berechnen oder mit dem Zirkel abgreifen und in das Querprofil übertragen.

In der Figur soll poq das natürliche Querprofil und $pmnq$ das Querprofil des Weges andeuten, ohne vollständig gezeichnet zu sein. Im allgemeinen wird das letztere, abgesehen von Wegen in bergiger Gegend, für die ganze Länge des Weges oder des Bahnkörpers gleichbleibend sein. Zur Vereinfachung der Arbeit kann man deshalb das Profil des Planum mit Gräben und Böschungen

Fig. 252.



zeichnen und danach eine Schablone des Normalprofils anfertigen, welche mit der Mitte auf die Achspunkte b_1 c_1 d_1 der Querprofile niedergelegt und abgezeichnet wird.

Die von den Linien $pmnq$ und poq eingeschlossenen Flächen stellen je nach ihrer Lage oberhalb oder unterhalb des künftigen Profils den Ab- bzw. Auftrag dar und dienen zur Erdmassenberechnung. Die Berechnung der Arbeit, d. h. der Kosten, welche sich aus dem Volumen nebst Auflockerungsmafs und der Entfernung zusammensetzen, mufs auf Grund der örtlichen Verhältnisse geschehen, erstreckt sich häufig auf eine lange Strecke des Weges und gehört, besonders in Rücksicht auf die Beschaffenheit des Bodens, in die eigentliche Wegebautechnik.

Nicht unerwähnt möge bleiben, dafs bei Waldwegen die mit dem Instrumente, etwa dem Boseschen, nach einem gewissen Gefällprozente abgesteckte Linie nicht Achse oder Mittellinie des Weges zu werden braucht. Man wird an manchen Stellen den Weg nach links oder rechts abrunden und in festen Boden verlegen. Es mag die Länge des Weges durch letzteres Verfahren gröſser werden, die Kosten der Herstellung und Unterhaltung werden jedoch geringer.

§ 77. Genauigkeit des Nivellierens.

Es soll der Höhenunterschied zweier Punkte ermittelt werden, welche L Meter von einander entfernt sind. Die ganze Linie wird in n gleiche Strecken geteilt und das Instrument in der Mitte je zweier Teilpunkte aufgestellt, so daſs jede Zielweite s, jede Strecke $2s$, also die ganze Linie

1) . . . . . . $L = 2ns$ oder $2n = \frac{L}{s}$ ist.

Mit dem Fernrohre wird n mal rückwärts und ebenso vielmal vorwärts abgelesen, also im ganzen $2n$ mal. Der mittlere Fehler im Endresultate ist die Unsicherheit in dem Höhenunterschiede der beiden Endpunkte. Dieser Fehler setzt sich aus den Fehlern der einzelnen, also der $2n$ Lattenablesungen zusammen. Wir nehmen an, die einzelne Latte stehe unveränderlich lotrecht, sie erleide während der Arbeit durch Temperaturwechsel keine Veränderung und sinke auch infolge ihres Gewichts nicht abwärts; auch die Bewegung der Luft und die Beleuchtung sei ohne schädlichen Einfluſs. Scheiden wir diese Störungen als nicht vorhanden oder unberechenbar aus, so wird die Ungenauigkeit der abgelesenen Zahl nur vom mangelhaften Abschätzen an der Latte und von der fehlerhaften Einstellung oder Ablesung der Libelle herrühren. Die Schätzung nach Millimetern wird umso ungenauer ausfallen, je weiter der Maſsstab entfernt ist, auf welchem der Ablesestrich steht; und die ungenaue Einstellung der Libelle wird die Absehlinie umso mehr aus der Horizontalen heben oder senken, je weiter die Latte absteht. Beim Schieſsen mit dem Gewehr haben wir dasselbe. Die Treffsicherheit hängt von der Genauigkeit des Zielens und der richtigen Lage der Visierlinie ab. Je gröſser die Entfernung der Scheibe ist, desto unsicherer wird für jedes Auge das Zielen und desto schädlicher wirkt eine ungenaue Lage der Visierlinie. Käme die Lage der letztern nicht in Frage, so hätte man die kilometerlangen Scheibenstände nicht nötig; für Zielübungen allein würden kurze Entfernungen genügen, wenn nur die Scheibenbilder im Verhältnis zu den fingierten Abständen verkleinert würden.

Es ist demnach der Fehler in der Lattenablesung direkt proportional der Zielweite s oder

$$2) \quad \pm \mu = k \cdot s,$$

wo k mit L und s nichts zu thun hat und nur von der Eigenart des Instruments abhängt, auch die oben genannten Störungen mit einschliefsen möge. Der gute Schütze wird bei seinem eigenen Gewehre die Konstante k unter normalen Verhältnissen fast auf Null herabdrücken können, aber von der Zielweite abhängig bleiben.

Der mittlere Fehler μ tritt $2n$ mal auf. Damit nun nicht einzelne μ nach der einen oder andern Seite überwiegend wirken, nimmt man nicht ihre algebraische Summe, sondern macht alle Fehler zu positiven Gröfsen, indem man die Quadrate bildet und aus ihrer Summe die Wurzel zieht. Es wird deshalb mit Berücksichtigung von 1) und 2) der mittlere Fehler im Höhenunterschied der beiden Endpunkte nach dem Gesetze der Fehlerfortpflanzung sein:

$$m = \pm \sqrt{\mu^2 + \mu^2 + \cdots + \mu^2} = \pm \sqrt{2n \cdot \mu^2}$$

$$3) \quad m = \pm k \cdot \sqrt{L \cdot s}.$$

Hierin sind die Fehlergesetze des Nivellierens aus der Mitte enthalten. Sie lauten in Worten für dasselbe Instrument und die gleichen Verhältnisse, d. h. für ein gleiches k also:

a. Der mittlere Fehler wächst bei konstanter Zielweite s mit der Quadratwurzel aus der Länge L der nivellierten Linie.
b. Abgesehen von der Länge L der nivellierten Linie wächst der mittlere Fehler mit der Quadratwurzel aus der Zielweite.

Je gröfser also die Zielweite ist und je mehr solcher Zielweiten sich an einander reihen, ein desto gröfserer Fehler ist zu befürchten. Würde man ohne Kenntnis der obigen Gesetze vor die Aufgabe gestellt, eine bestimmte Linie zu nivellieren, so würde man sich fragen: Ist es vorteilhaft, mit grofsen Zielweiten und wenigen Aufstellungen oder umgekehrt vorzugehen? Dem Gefühle nach würde man leicht das erstere Verfahren wählen; die mathematische Formel spricht jedoch dagegen. Man wird sich gemäfs der Formel trotz der gröfsern Zahl der Aufstellungen für kurze

Zielweiten entscheiden; die einzelnen Lattenablesungen fallen bei weitem genauer aus.

Jordan überträgt das zweite Gesetz auf die beim Nivellieren einer Linie zu leistende Arbeitsmenge. Je kürzer die Zielweiten, desto gröſser ist die erforderliche Arbeit infolge der gröſsern Zahl Aufstellungen. Da die Genauigkeit mit der Kürze der Zielweiten wächst, so wächst sie auch mit der gröſsern Arbeitsmenge und zwar mit der Quadratwurzel aus derselben.

Man wird nun je nach der geforderten Genauigkeit, je nach der Beleuchtung, der Erwärmung des Bodens und der davon herrührenden Unruhe der Luft in jedem einzelnen Falle seine Maſsnahmen zu treffen haben, um die Arbeitsmenge zur erstrebten Genauigkeit in das richtige Verhältnis zu bringen. Handelt es sich behufs Anlage einer Wasserleitung um die Ermittelung des Höhenunterschiedes zwischen der Quelle und dem höchsten Punkte in der Stadt, so wird man durchgehends die gröſstmögliche Zielweite bis zu 50^{m} wählen.

Denken wir uns mehrere Linien, etwa L_1, L_2 und L_3 mit derselben Zielweite nivelliert, so daſs also s überall dasselbe ist, während die Linien verschieden lang sind, so ist nach dem ersten Gesetze das Ergebnis aus der Nivellierung der kürzern Linie L mit dem kleinern Fehler behaftet. Kommt es deshalb darauf an, aus den Resultaten mehrerer Nivellements für den gemeinschaftlichen Endpunkt der nivellierten Linien die Höhe zu berechnen, so müssen die Ergebnisse aus den kürzern Linien mehr berücksichtigt werden, als diejenigen aus den längern.

Mit andern Worten: Den kürzern Linien kommt ein gröſseres Gewicht zu oder die Gewichte verschiedener Nivellierungsergebnisse sind bei konstanter Zielweite unter sonst gleichen Umständen den Längen L umgekehrt proportional.

Ein Punkt Q sei von zwei Nivellements-Festpunkten (N. P.) einer Chaussee und von dem Mauerbolzen eines benachbarten Bahnhofes bzw. $L_1 = 1000$, $L_2 = 2000$, $L_3 = 3000^{\text{m}}$ längs der Nivellierlinie entfernt; die drei von der Landes-Aufnahme gesetzten Bolzen sind die Ausgangspunkte. Als Ergebnisse der Nivellierungen hat man als die Höhe des Punktes Q gefunden entsprechend $h_1 = 122{,}429^{\text{m}}$, $h_2 = 122{,}435^{\text{m}}$, $h_3 = 122{,}409^{\text{m}}$ über N. N.: welches ist die Höhe von Q? Antwort:

$$h = \frac{0{,}429 \cdot 1 + 0{,}435 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}409 \cdot \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} + 122 = 122{,}427^{\text{m}}.$$

Die erreichte Genauigkeit anlangend, sei bemerkt, dafs die Präzisions-Nivellements der preufsischen Landes-Aufnahme des grofsen Generalstabes bei den Arbeiten im norddeutschen Tieflande einen mittlern Fehler von 1,5 ^{mm} auf einen Kilometer ergeben haben. Es ist dieses Mafs der mittlere Unterschied zwischen je zwei Nivellierungen. Beim Nivellieren aus der Mitte nahm man damals noch, bis zum Jahre 1879, Zielweiten von 75 ^{m}.

Die trigonometrische Abteilung der Landes-Aufnahme hat bestimmt, dafs die Zielweiten nicht über 50 ^{m} genommen werden dürfen. Nur in besondern Fällen, z. B. bei Flufsübergängen ist es erlaubt, über 50 ^{m} hinauszugehen, wogegen eine kleinere Zielweite, auch in der Ebene, sehr häufig geboten erscheint.

Als Grenze, welche die Differenz zwischen den beiden Messungen einer Zweikilometerstrecke nicht überschreiten darf, ist festgesetzt worden: bei 40 oder weniger Aufstellungen: 12 ^{mm}, bei bei mehr als 40 Aufstellungen: 15 ^{mm}. Bei Überschreitung dieser Grenze ist eine vollständige, also doppelte Wiederholung der Messung nötig. Der mittlere Fehler einer doppelt nivellierten Einkilometerstrecke war für die im 5. Bande enthaltenen Linien kleiner als 2 ^{mm}. Die Zielweiten werden zwischen den Chaussee-Nummersteinen abgeschritten.

Zwischen 9 Uhr morgens und 4 Uhr nachmittags wird nur an besonders günstigen Tagen nivelliert. Die Latten werden täglich geprüft und dementsprechend an den Lattenablesungen Korrektionen vorgenommen. Die bei der Landes-Aufnahme gebräuchlichen Latten sind seit 1879 wieder in halbe Centimeter geteilt; abgelesen werden noch halbe Millimeter. Die Bezifferung der Latte ist eine doppelte nach Halbdezimetern links von 1 bis 60, rechts stehen die mit einem Kreuzchen versehenen dekadischen Ergänzungen 99 bis 40. Die Reihenfolge der Ablesungen ist sowohl im Rück- als auch im Vorblick: Latte links, Libelle (durch den Gehilfen), Latte rechts.

Für die Landmesser gilt inbezug auf die Nivellierarbeiten noch die Instruktion von 1871. Nach dieser, § 30, darf der mittlere Fehler betragen für eine Linie

	bis	einschliefslich	20 ^{m}	im	ganzen	4 ^{mm}
von 20	„	„	45 „	„	„	6 „
von 45	„	„	100 „	„	„	9 „
von 100	„	„	250 „	„	„	14 „

allgemein $9\sqrt{n}$ Millimeter, wenn die Linie n hundert Meter lang ist. Diese Fehlergrenzen sind so weit, daſs sie leicht auch bei Anwendung der kleinern Nivellier-Instrumente innegehalten werden können.

Die Besprechung der verschiedenen Arten der Präzisions-Nivellements würde für dieses Buch zu weit führen. Es würde dahin gehören die Ablesung der Latte an 3 Fäden, das Nivellieren mit geneigter Ziellinie oder nicht einspielender Blase, das Nivellieren mit doppelten Wechsel- oder Anbindepunkten, dasjenige mit Wendelatte und dekadischen Ergänzungen und endlich das holländische Nivellieren, bei welchem der Mittelfaden auf die Mitte eines Centimeterfeldes gerichtet, an den beiden andern Fäden abgelesen und der Blasenstand der Libelle notiert wird. Das Nivellierverfahren von Seibt betreffend siehe: Nivellitische Rechentafeln. 1901.

§ 78. Nivellement von Flächen.

Das Nivellieren einer Fläche hat den Zweck, über den Verlauf der Bodenoberfläche nach allen Richtungen hin derart Aufschluſs zu geben, daſs auf der Grundlage des Nivellements etwa der Entwurf einer Entwässerungsanlage möglich ist, oder daſs behufs Einebnung der ganzen Fläche die zu bewegenden Erdmassen nach Abtragung, Aufschüttung und Transportweite berechnet werden können. Die in § 76 besprochenen Arbeiten sind nichts anderes als ein Flächennivellement; dasselbe erstreckt sich jedoch nur auf einen Flächenstreifen in der Ausdehnung des Längen- und der Querprofile. Es beansprucht im allgemeinen eine weit gröſsere Genauigkeit, als das jetzt zu besprechende Nivellement, welches in gewissen Fällen nur als Vorarbeit für jenes zu betrachten ist.

Das Flächennivellement fordert die Bestimmung der Höhenlage einer groſsen Anzahl von Punkten, welche sich über die ganze aufzunehmende Fläche vom höchsten bis zum tiefsten Punkte verteilen und die Flächengestaltung kennzeichnen. Verbinden wir die benachbarten Punkte mit einander, so entsteht ein Polyeder, dessen Flächen umso genauer die Gesamtfläche wiedergeben, je mehr Punkte eingelegt sind. Alle Punkte haben einen gemeinsamen Horizont, auf welchen sich ihre Höhen beziehen. Dieser Horizont ist dann maſsgebend für die Berechnungen, während die Art der Aufnahme sich nach ihrem Zwecke und der Bodengestaltung richten muſs.

Die einfachste Aufgabe eines Flächennivellements ist wohl zu lösen, wenn etwa zur Schaffung einer Eisbahn eine Wiese unter

Wasser gesetzt werden soll. Das Wasser wird von einem Bache geliefert, den man im höchsten Punkte auf die Fläche leitet, und es fragt sich nun, wie hoch die einschliefsenden Dämme sein müssen. Bei einer Fläche bis zu 10 ha wird man das Nivellierinstrument im Innern aufstellen, die Libelle im ganzen Horizont einspielen lassen und nachsehen, ob die im höchsten Punkte stehende Latte noch getroffen wird. Man liest dort 0,20 ^{m} ab. Auf den Grenzen läfst man in Abständen bis zu 20 ^{m} Pfähle einschlagen, stellt auf jeden Pfahl die Latte und läfst ihn so tief eintreiben, bis die Ablesung überall die gleiche ist. Die Pfahlköpfe sind dann sämtlich in Höhe der Einmündung des Baches.

Soll an einem mäfsigen Hange ein Exerzierplatz von 5 ha angelegt werden, so ist die zu lösende Erdmasse zu berechnen, nötigenfalls auch ein Ausgleich zwischen der zu lösenden und zu werfenden Masse herzustellen. Ist der Hang derart, dafs die zu planierende Fläche ein Rechteck oder Trapez ist, dessen untere und obere Kanten parallel und nahezu horizontal sind, so wird man die Fläche mit einem Rost von Rechtecken oder Trapezen überziehen. Die Seitenlänge der einzelnen Figuren hängt von der Beschaffenheit des Geländes und der geforderten Genauigkeit ab. Das Einwägen der Linien dem Hange entlang macht keine Schwierigkeit; man wird vielleicht auf der zweiten Linie beginnen, von da die Punkte der untersten und der dritten Linie nivellieren und darauf durch die Endfiguren auf die fünfte übergehen. Zur Kontrolle wird man von oben anfangend einige Linien den Hang hinunter nivellieren. Eine Verpflockung und sorgfältige Handzeichnung nach Linien und Punktnummern ist notwendig. Der Horizont des tiefsten Punktes giebt die Nullordinate. Aus den Projektionen der Polyederflächen auf den Horizont als Grundflächen und aus dem Mittel der vier Ordinaten als Höhe berechnet man die Masse eines jeden Prisma. Die Ablesung an der Latte geschieht nach Centimetern, welche man im Plane und bei der Berechnung auf Dezimeter abrundet. Die Höhenzahlen schreibt man neben die Punkte.

Die Übereinstimmung von Handkarte und Zahlen mit dem Gelände mufs wie bei allen Landmesserarbeiten baldmöglichst nach Beendigung der Feldarbeit festgestellt werden, solange die Vorstellung noch unterstützend eingreifen kann und nötigenfalls eine örtliche Vergleichung leicht ausführbar ist.

Soll eine Moorfläche von hundert und mehr Hektar entwässert werden, so wird es sich zunächst darum handeln, die Richtungen des Gefälles in grober Weise aufzusuchen, um die Trockenlegung einzuleiten und das Betreten der Fläche zu ermöglichen. Man benutzt dazu am besten ein Nivellierinstrument mit Distanzmesser. Wie die Stationen zu wählen sind, hängt von der Beschaffenheit des Grundes und der Gestaltung der Oberfläche ab. Die Stationen müssen aber gegenseitig durch die Bussole oder einen Winkelmesser horizontal festgelegt werden, um von ihnen aus die Entfernungen und das Gefälle auf hundert und mehr Meter zu finden und auf einer Zeichnung darzustellen.

Ist die Trockenlegung so weit vorgeschritten, dafs eine freie Bewegung auf der Fläche und das Aufstellen des Instruments ohne Schwierigkeit ist, dann wählt man eine gerade Linie, welche die Fläche in irgend einer, der bessern Orientierung wegen etwa in der Nordrichtung halbiert. Auf dieser Geraden errichtet man in Abständen von 100^{m} mit dem Theodolit die Lote und mifst auf diesen wieder zugleich Strecken von 100^{m} ab. Dadurch entsteht ein Netz von Quadraten, deren Ecken man nivelliert, indem man das Instrument ungefähr in der Mitte aufstellt. Es ist nicht nötig, in jedem Quadrate eine Aufstellung vorzunehmen. Hat man den äufsersten Streifen links von unten nach oben nivelliert, so schliefst man das Endquadrat des zweiten Streifens an, geht in derselben Weise in das Endquadrat des dritten Streifens über und von da nach unten. Durch das letzte Quadrat des vierten gelangt man in den fünften Streifen u. s. w. Man überspringt also jedesmal einen Streifen.

Der letzte Eckpunkt des einen Quadrats ist der Anfangspunkt für das zweite. Werden alle Höhen auf den Punkt der ersten Lattenaufstellung bezogen, so erfolgt die Berechnung der Ordinaten von je vier Punkten nach der jedesmaligen Lage des Visierhorizonts; vgl. die Tabelle in § 76. Die Höhenzahlen schreibt man neben die betreffenden Netzpunkte.

Hat die Horizontalaufnahme einer Feldmark bereits stattgefunden, so ist durch die Flurkarte die Grundlage für das Nivellement eines jeden Teils gewonnen. Die sämtlichen festgelegten Punkte: Grenzsteine, Strafsensteine, Marksteine werden durch ein Liniennivellement verbunden. Befinden sich in der Nähe Festpunkte der Landesaufnahme, so werden dieselben zum An- und Abschlufs benutzt, und auf den Horizont eines derselben, etwa des am tiefsten gelegenen, wird die Höhenbestimmung bezogen. Wie die Dreieckspunkte bei der Lagenaufnahme werden die durch dieses Liniennivellement bestimmten Punkte zu Stützpunkten für die fernere Höhenaufnahme gemacht; an diese Punkte werden die neuen Linien angebunden. Die Anzahl der einzulegenden Linien richtet sich nach der Terraingestaltung; sie sollen als gerade Linien möglichst in der Richtung des gröfsten Gefälles liegen. Aufzunehmen sind besonders alle Thal- und Rückenlinien, die Ränder von Abhängen, die Ufer von Bächen und Flüssen, die Wege- und Dammkronen u. s. w.

Beim ersten Liniennivellement werden die Ablesungen nach Centimetern gemacht; die innern Punkte verlangen eine so grofse Genauigkeit nicht, weshalb die Ablesung nach Dezimetern ausreicht und unter offenen und der Lattenhöhe entsprechenden Geländeverhältnissen Zielweiten von mehreren hundert Metern erlaubt sind.

Am glattesten verläuft die Aufnahme, wenn die Liniennetze sorgfältig ausgespannt und aufgezeichnet sind und zwei Aufnehmer gleichzeitig arbeiten. Der eine beordert den Lattenträger auf Grund seines Kartenrisses, zeichnet noch etwa notwendige Punkte ein, indem er die Entfernungen abschreitet, unterscheidet durch besondere Zeichen Haupt- und Nebenpunkte und sucht sich durch Augenschein ein möglichst genaues Bild der Fläche zu verschaffen. Der andere Aufnehmer bedient das Instrument, macht die Lattenablesungen und schreibt sie nach Linien und Punkten geordnet nieder.

Liegt eine Karte der Horizontalaufnahme nicht vor, so müssen Horizontal- und Vertikalmessungen mit einander verbunden werden. Das Verfahren der Aufnahme richtet sich lediglich nach dem Zwecke und der Bodengestaltung.

Oft genug ist es notwendig, dafs die Vertikalaufnahme der horizontalen Aufmessung vorangeht, sofern es sich darum handelt, die Stückvermessung und die Zusammenlegung und Teilung von Flächen vorzunehmen. Durch die Kenntnis von den Höhenverhältnissen wird man erst in den Stand gesetzt, ein vorläufiges Wege- und Grabennetz zu entwerfen. In gebirgigen Gegenden kann man nicht nach der Schablone die Bildung der Wirtschaftsfiguren durchführen; diese mufs Rücksicht auf die vorhandenen und künftigen Wege nehmen. Im Waldgebirge ist die Holzabfuhr die Hauptsache, die Bildung der Abteilungen stützt sich deshalb auf das Wegenetz; im Walde hält man gern das Wasser fest und leitet es daher an passenden Stellen in horizontalen Gräben den Hang entlang fort. Im Felde spielen neben der Abfuhr die Anfuhr, neben der Bewässerung hauptsächlich die Entwässerung, und aufserdem die Beackerung und Bestellung eine Rolle. Im Berglande ist es leicht, das Wasser fortzuschaffen, man denkt aber oft nicht daran, dafs die im stärksten Gefälle angelegten, bisweilen viele hundert Meter langen Gräben und begradigten Bäche zu Bodenräubern werden und hier und dort die Wege und Äcker zerreifsen, ganz abgesehen davon, welche Bedeutung der schnelle Absturz des Wassers oder seine Zurückhaltung, sei es auch nur eine viertelstündige Verzögerung, inbezug auf Überschwemmungen und Zerstörungen haben kann. Diese Andeutungen mögen genügen, um auf die Wichtigkeit eines Höhenplanes für die Arbeiten des Landmessers hinzuweisen.

§ 79. Tachymetrie.

Die allgemeinen Vorarbeiten für die Anlage einer Bahn oder eines Weges bezwecken die definitive Absteckung der Linie; sie sollen also über die Bodenerwerbungen, Steigungsverhältnisse, Erdarbeiten, etwaige Durchstiche, Dämme, Brücken und Kurven Aufschlufs geben. Es ist deshalb ein Flächennivellement nötig, um die Grenzen für die Auswahl der Linie enger zu ziehen. In der Nähe der Ortschaften mufs oft ein weites Gebiet mit in die Aufnahme hineingezogen werden, um auch ohne örtliche Besichtigung dies und jenes Projekt auf grund der Karte prüfen zu können. Ist man von vornherein auf einen schmalen Flächenstreifen angewiesen, so bleibt das Nivellement benachbarter Wege oder Eigentumsgrenzen die Grundlage für die Flächenaufnahme. Bei geringen Anhaltspunkten für den künftigen Lauf der Bahnlinie, also bei ausgedehntem und zur Wahl stehendem Gelände ist eine gründliche Rekognoszierung vorzunehmen. Es sind darauf regelrechte Polygonlinien festzulegen, welche als solche horizontal zu vermessen sind und die Anbindepunkte für die Querprofile liefern.

Von den eigentlichen Profilaufnahmen sieht man jedoch heutzutage ab, solange sich die Arbeiten auf eine generelle Aufnahme beziehen. Man kommt am schnellsten zu einem Bilde des Geländes, wenn man unter Anwendung eines Universalinstruments alle zerstreut liegenden Punkte aufnimmt, welche für die Gestaltung der Oberfläche bestimmend und möglicherweise für die spätere Anlage von Wichtigkeit sind. Die schnelle Festlegung der Punkte von einem bekannten Punkte aus nach Lage und Höhe, also die Aufsuchung der drei Koordinaten x, y, h oder r, v, h geschieht auf tachymetrischem Wege.

Benutzt man einen Repetitionstheodolit mit Distanzmesser, so mufs man von einer in der Karte bereits festliegenden Standlinie ausgehen, von welcher der eine Endpunkt eindeutig bestimmt ist oder sich bestimmen läfst. Hier stellt man das Instrument auf, mifst die Instrumentenhöhe, macht die Ablesung am ersten Nonius zu Null und visiert die Latte im andern Endpunkte der Standlinie an, indem man den Mittelfaden auf eine runde Zahl, etwa 1,5 und den Vertikalfaden mitten auf die Latte richtet. Man schreibt die Ablesung beider Nonien, also 0^0 und 180^0, den Höhenwinkel und die Zahlen am untern und obern Faden in das Formular. Aus dieser Einstellung geht man mit gelöster Alhidade rechtsum und verfährt mit den übrigen Nebenpunkten ebenso, wobei man sich jedoch mit der Ablesung des ersten Nonius begnügt. Vom zweiten Endpunkte legt man nach abermaliger Messung der ersten Standlinie eine neue horizontal fest, indem man den Brechungswinkel in beiden Lagen genau mifst. Aus der Nullstellung des ersten Nonius setzt man von der zweiten Basis aus die Messung in derselben Weise fort.

Ist der Theodolit mit einer Bussole versehen, wie das im ersten Teile besprochene Universalinstrument von Breithaupt, so ist zunächst der erste Standpunkt horizontal und vertikal festzulegen. Die Grundrichtung für die Polarkoordinaten ist hier nicht die Standlinie, sondern die Nordrichtung. Die Mifsweisung läfst sich bei der Berechnung zuhause in Ansatz bringen. Einen der Punkte im Felde wählt man als neue Station aus und legt ihn durch Rückwärtsmessung besonders genau fest, um von dort weiter zu gehen.

Bei Anwendung des Tachymeter von Fennel ist das gleiche Verfahren zu beobachten. Das Formular vereinfacht sich dadurch, dafs man den langen Querfaden auf die Lattenmarke 1,5 stellt und nur am untern Distanzfaden abliest.

Ein übersichtliches, nicht zu knappes Formular ist für die tachymetrischen Arbeiten unerläfslich. Die Vertikalspalten müssen enthalten: Nummer des anvisierten Punktes, Azimuth v, Höhenwinkel α, Fadenablesungen u und o, Lattenstück l als Differenz der vorigen, Horizontalabstand D, Höhe h, Erhebung über N.N. Die drei letzten Gröfsen werden mit Hülfe von Tafeln berechnet oder an den Nonien des Instruments abgelesen. Die Station mit Instrumentenhöhe i kann man jedesmal an den Kopf der Tabelle setzen. Es ist von der Wiedergabe eines Formulars abgesehen, weil die Anfertigung eines solchen nicht schwierig ist und über die Zweckmäfsigkeit dieser oder jener Anordnung die Ansichten verschieden sein können. Es mufs die Einrichtung nur eine solche sein, dafs auch ein anderer danach die Berechnungen und Zeichnungen ausführen kann.

In dem Handbuche von Heusinger von Waldegg, erster Band der Ingenieurwissenschaften, wird folgende Anweisung für die Arbeit gegeben. Für die Aufnahme mit einem Tachymeter sind 3 Geometer, 3 Arbeiter mit Distanzlatten und 1 Arbeiter zum Transport, zum Halten des Feldschirms u. s. w. erforderlich.

Der die Arbeit leitende Geometer bestimmt die Ausdehnung der Aufnahmen und dirigiert die Lattenträger; daneben berichtigt, vervollständigt und ergänzt er nach Bedürfnis den Situationsplan.

Der zweite Geometer bedient das Instrument, liest die Latten und Winkel ab und diktiert die Ablesungen dem dritten Geometer, der sie in das Manual einschreibt. Diese beiden Geometer wechseln mit der Arbeit ab, weil die Bedienung des Instruments auf die Dauer ermüdet.

Die Arbeit beginnt mit der Aufstellung des Tachymeters über dem ersten Punkte, von dem man eine gute Übersicht hat. Das Instrument wird horizontiert, nach der Bussole orientiert und vielleicht eine ausgezeichnete Richtung nach einem Kirchturme oder einer sonstigen Marke durch Ablesung des Azimuthalwinkels am Horizontalkreise festgelegt. Darauf wird die Höhe der Drehachse über dem Pfahle gemessen und damit aus der Höhe des Pfahlkopfes die Höhe des Instrumenten-Horizontes bestimmt. Beide Zahlen kommen ins Feldbuch. Inzwischen sind die drei Lattenträger aufgestellt und mit Weisung für die folgenden Aufstellungen versehen.

Mit dem Instrumente werden die Latten am untern und obern Faden abgelesen und die Ablesungen eingetragen. Während der jedesmalige Lattenträger den Standort auf Befehl ändert, liest der zweite Geometer in derselben Reihenfolge und an demselben Nonius den Höhen- und Lagewinkel ab.

Alle sichtbaren Punkte werden von dem ersten Standpunkte aus aufgenommen, den S c h l u f s bildet der Punkt, welcher als z w e i t e r Aufstellungspunkt ausersehen ist. Auf diesen wird die Latte genau lotrecht mit Mitte auf Mitte des Pfahles aufgestellt; die Ablesungen erfolgen in beiden Lagen des Fernrohrs. Ist zu Anfang der Arbeit ein entfernter Festpunkt anvisiert, so überzeugt man sich zum Schlufs auf dieselbe Weise von der unveränderten Stellung des Instrumentes, was auch manchmal während der Arbeit geschehen kann.

Auf der zweiten Station wiederholen sich die Arbeiten; den Anfang der Aufnahme bildet der verlassene erste Stationspunkt, worauf die übrigen Geländepunkte folgen.

Die Aufnahme von Punkten kann sich auf Entfernungen bis 300 m erstrecken, für wichtige Punkte auch auf gröfsere Abstände bis 600 m.

Zur Berechnung der horizontalen Entfernung kann man die Konstante c bzw. $c \cdot \cos\alpha$ vernachlässigen und setzt

$$D = k \cdot l \cdot \cos^2\alpha$$

$$h = k \cdot l \cdot \cos^2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} k \cdot l \cdot \sin 2\alpha.$$

Man bedient sich dabei der Hilfstafeln für Tachymetrie (Jordan), graphischer Hilfsmittel und auch des Rechenschiebers. Der letztere ist hier nicht besprochen, weil man ihn in der Hand haben mufs, um sich eine mechanische Fertigkeit in seinem Gebrauch zu erwerben. Eine Anweisung kann man dem Rechenschieber beigeben lassen.

Der horizontalen und vertikalen Aufmessung aller Punkte folgt die Darstellung auf dem Papier. Die Standpunkte des Instruments werden als Polygonpunkte behandelt und mit Hilfe von Koordinaten in den Plan gezeichnet. Die übrigen Punkte trägt man mit einem Halbkreis-Transporteur auf, den man in dem betreffenden Hauptpunkte mit einer Nadel feststicht. Die Anfangsrichtung ist im ersten Standpunkte entweder die Nordrichtung oder die Richtung nach dem zweiten Hauptpunkte. An diese Richtung werden die gemessenen Azimuthe oder Horizontalwinkel angetragen. An den jedesmaligen zweiten Schenkel schreibt man die Zahl der Entfernung mit Blei und greift die Strecke sofort am Mafsstabe ab. Der Mafsstab befindet sich am Durchmesser des Transporteurs, dem man deshalb eine Länge bis zu 20 cm giebt. Beim zweiten Hauptpunkte nimmt man die Richtung nach dem ersten als Anfangsrichtung.

Um den Durchmesser zum Strahlenziehen und als Mafsstab benutzen zu können, legt man nicht den Nullradius auf die Ausgangsrichtung, sondern den zweiten Schenkel auf dieselbe, also z. B. bei 125^0 den Radius, der durch diese Zahl geht. Welchen

Teil des Durchmessers man als Maſsstab zu wählen hat, ersieht man leicht. Neben den gefundenen Punkt schreibt man die Höhenzahl.

Man erkennt bei dieser Arbeit, welche Bequemlichkeit die Einstellung des ersten Nonius auf Null gewährt.

Die im Vorstehenden besprochene tachymetrische Aufnahme ist fast überall anwendbar, verursacht keine nennenswerte Beschädigung der Feldfrüchte und geht rasch und billig von statten. Sie ist nicht ausführbar, wenn die aufzunehmende Fläche dicht bewaldet ist und steile Hänge enthält, so daſs von freien Visuren nicht die Rede sein kann. Sind in diesem Falle an den Grenzen und vielleicht auch im Innern bereits Festpunkte vorhanden, so gelangt man meistens schnell und sicher zum Ziele durch Staffelmessung mit der Setzlatte. Verläuft das Terrain einigermaſsen gleichmäſsig, so lassen sich Längen- und Höhenmessungen mit dem Stahlbande ausführen. Man legt die Meſslinien so ein, daſs sie von einem Festpunkte ausgehend irgendwo auf einen solchen hinauslaufen, führt sie, wenn auch auf einigen Umwegen, durch lichte Bestände, miſst die Höhenwinkel mit einem Gradbogen oder einem anderen Gefällmesser und bestimmt mit der Bussole die Azimuthalwinkel. Die einzelnen Strecken macht man der Gleichmäſsigkeit und bequemern Manualführung wegen alle der Bandlänge gleich. Hat man eine Winkelkopf-Bussole mit Horizontalkreis, die man auf den hintern Bandstab steckt, so kann man die Brechungswinkel oder die Azimuthe messen.

Will man sich nur einen ungefähren Überblick über die Höhenverhältnisse im Gebirge zum Zweck einer Wegenetzlegung verschaffen, so bedient man sich des Barometers, während die definitive Niederlegung der Wegelinien auf grund genauerer Nivellierungen erfolgt. Auch zu den generellen Vorarbeiten für Eisenbahnanlagen benutzt man das Aneroid. Die zerstreut liegenden, nach Lage und Höhe eingezeichneten Punkte der Karte geben uns in dem obern Teile der Figur 254 noch kein anschauliches Bild des Geländes. Das Durcheinander der Punkte und Zahlen wirkt auf das Auge des Technikers wie die ungeordnete Käfersammlung auf dasjenige des Zoologen. Die Karte gewährt erst einen klaren Überblick über das vermessene Gebiet und wird erst allgemein brauchbar, wenn die vielen einzelnen Zahlen durch einige wenige ersetzt werden. Dieses erreicht man dadurch, daſs man die Punkte gleicher Höhe aufsucht und mit einander verbindet.

§ 80. Horizontalkurven.

Die Methode der zerstreuten Punkte oder die tachymetrische Aufnahme liefert die Grundlage für die Konstruktion der Horizontalkurven, welche auch Höhenkurven, Niveaulinien, Isohypsen oder Schichtenlinien genannt werden. Man erhält dieselben auf der Karte durch die Verbindung der Punkte von gleicher Höhenlage. Eine Horizontalkurve ist also eine Linie, deren sämtliche Punkte ein und dieselbe Höhenlage über Normal-Null haben; oder die Höhenkurve ist eine Linie, welche in ihrem ganzen Verlauf die gleiche absolute Höhe hat.

Da die Höhenkurven nur auf den eigentlichen Plänen zur Darstellung kommen, also die Erdkrümmung nicht in Frage steht, so sind sie als ebene Kurven anzusehen. Alle Tangenten derselben Kurve sind horizontal gerichtet, aufserdem kann eine Kurve sich nur in dem einzigen Falle selbst schneiden, wo sie in einem vollständig ausgebildeten Gebirgssattel liegend nach beiden Seiten die benachbarten Kuppen umläuft. Die Kurve kann keine Spitzen bilden und ebenso wenig kann sie von einer andern geschnitten werden, mag die Form der Oberfläche wie immer entstanden sein durch gewaltsame Durchbrechung der Erdkruste oder durch Auswaschung. Danach sind die Spitzenvierecke, welche in Sätteln die Verbindung von Kurven gleicher Höhe herstellen, und ebenso die Auswüchse an geschlossenen Kurven, wie man sie auf manchen Karten findet, zu verwerfen. Sollen besondere örtliche Verhältnisse angedeutet werden, so möge man statt der Linien andere Zeichen wählen.

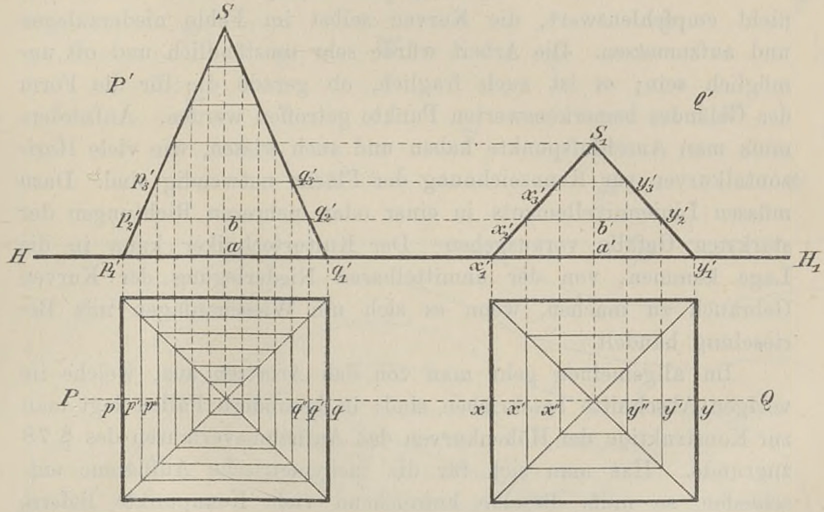
Es ist das Verdienst des französischen Ingenieurs Ducarla, die Horizontalkurven mit vollem Verständnis für ihre Bedeutung zur Terraindarstellung zuerst angewandt zu haben. Er legte 1771 eine Abhandlung über dieselben der Pariser Akademie vor. In dieser 1782 im Druck erschienenen Schrift giebt der Verfasser zu, die Darstellung der Meerestiefen durch Buache vermittelst Linien (Isobathen) gekannt zu haben, versucht aber nachzuweisen, dafs Buache die allgemeine Wichtigkeit der Linien für die Darstellung der Bodengestaltung nicht erkannt habe. Mag das letztere auch der Fall sein, so sind die Linien, welche Buache 1737 zur Darstellung des Meeresbodens und der Küsten benutzte, in der That die heutigen Horizontalkurven. Noch mehr verdienen diesen Namen die Linien, welche er 1753 auf dem Terrainrelief eines Globus zog, Linien, welche nach ihm der Oberfläche des Meeres parallel laufen und die Landstriche erkennen lassen, welche durch die allmähliche Zunahme der Wassermasse des Meeres zugleich bedeckt würden.

Noch vor Buache hat Cruquius 1729 Linien gleicher Sonden zur Darstellung eines Flufsbettes angewandt.

Die Ehre der Erfindung gebührt demnach Cruquius oder Buache; die Idee fruchtbar und zum Gemeingute gemacht zu haben, ist das Verdienst von Ducarla.

Um die Wirkung und Bedeutung der Höhenkurven leichter zu verstehen, betrachte man die beiden Pyramiden P und Q (Fig. 253).

Fig. 253.



Dieselben haben die gleiche Grundfläche, aber ungleiche Höhen. Aus der Horizontalprojektion der ganzen Pyramiden ist nicht zu ersehen, dafs die Körper sehr verschieden sind. Die Verschiedenheit springt sofort in die Augen, wenn wir durch beide Pyramiden in gleichen Abständen parallel zur Grundfläche ebene Schnitte legen und diese ebenfalls projizieren. Wissen wir nun, dafs die Abstände der Schnittflächen gleich sind, jeder etwa 5 m ist, so können wir aus der Projektion derselben die ganze Höhe jeder Pyramide berechnen; dieselbe ist 30 m bzw. 15 m. Aufserdem sehen wir, dafs in dem einen Falle die Seiten der Quadrate näher an einander liegen, als in dem andern, wie es die Projektion durch die gestrichelten Linien verlangt. Bei einiger Übung erblickt das

Auge sogar die Projektionen P und Q als Körper, mögen nun die Spitzen scheinbar aus dem Papier heraustreten oder in dasselbe versinken. Man verdecke die obern Dreiecke und sehe mit einem Auge durch die Hand unter einem spitzen Winkel auf die ruhende Figur oder bewege bei senkrechtem Draufsehen das Papier dem Auge zu oder von ihm fort.

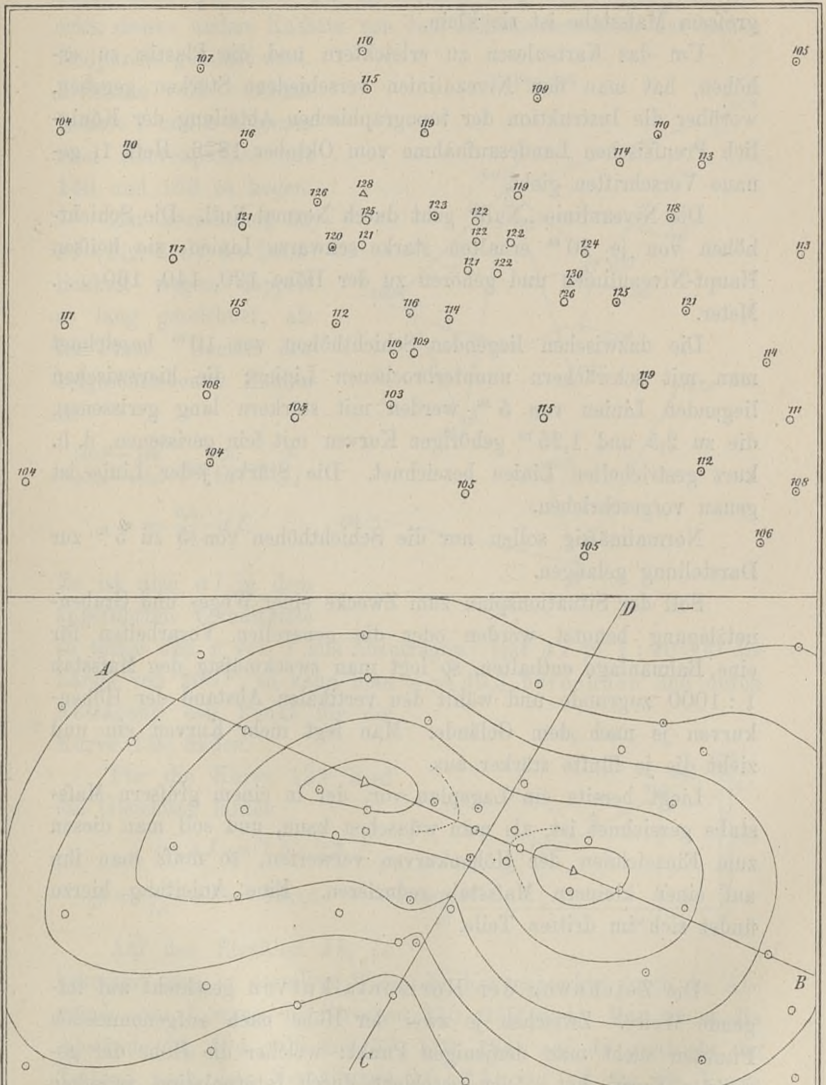
Auf die gleiche Weise verfährt man mit dem Gelände. Setzt man an die Stelle der Pyramide einen Bergkegel, so liefert die Projektion der ebenen Schnitte konzentrische Kreise oder mehr oder weniger unregelmäfsige Figuren.

Vor allem kommt es darauf an, die Kurven auf der Oberfläche des Geländes zu erhalten, welche man projizieren will. Es ist nicht empfehlenswert, die Kurven selbst im Felde niederzulegen und aufzumessen. Die Arbeit würde sehr umständlich und oft unmöglich sein; es ist auch fraglich, ob gerade die für die Form des Geländes bemerkenswerten Punkte getroffen werden. Aufserdem mufs man Anschlufspunkte haben und auch wissen, wie viele Horizontalkurven zur Kennzeichnung der Fläche notwendig sind. Dazu müssen Liniennivellements in einer oder mehreren Richtungen der stärksten Gefälle vorausgehen Der Kulturtechniker kann in die Lage kommen, von der unmittelbaren Niederlegung der Kurven Gebrauch zu machen, wenn es sich um Wiesenanlagen mit Berieselung handelt.

Im allgemeinen geht man von den Arbeiten aus, welche im vorigen Abschnitte beschrieben sind; in besondern Fällen legt man zur Konstruktion der Höhenkurven das Aufnahmeverfahren des § 78 zugrunde. Hat man sich für die tachymetrische Aufnahme entschieden, so mufs dieselbe hinreichend viele Kennpunkte liefern, welche nebst ihren Höhenzahlen in den Plan eingetragen werden. Diese Punkte und Zahlen dienen nun dazu, eine genügende Anzahl Punkte zu finden, deren Höhe über Normal-Null durch gleiche und runde Zahlen ausgedrückt sind, wie aus dem Plane (Fig. 254) ersichtlich ist.

Die vertikalen Abstände der Kurven macht man gleich; wie grofs man den Abstand wählt, hängt lediglich vom Gelände und dem Mafsstabe der Karte ab. Ist das Gelände flach, so dafs Kurven mit dem Abstande von 1 ^{m} schon selten werden, so läfst man sie ganz fort; ist es wellig, so nimmt man 1 bis 2 ^{m}, im Hügellande 5 ^{m}, im Gebirge 10 ^{m} Abstand. Über die letztere Zahl geht man nicht hinaus. Ist der Mafsstab des Horizontalplanes 1 : 25 000, so ist die Äquidistanz der Kurven durchweg 10 ^{m}, bei

Fig. 254.



flachem Terrain hat man aufserdem noch anders gezeichnete Zwischenkurven mit 5 und $2{,}5^{\mathrm{m}}$ Abstand.

Bei kleinem Maſsstabe ist die Äquidistanz groſs und bei groſsem Maſsstabe ist sie klein.

Um das Kartenlesen zu erleichtern und die Plastik zu erhöhen, hat man den Niveaulinien verschiedene Stärken gegeben, worüber die Instruktion der topographischen Abteilung der Königlich Preuſsischen Landesaufnahme vom Oktober 1876, Heft 1, genaue Vorschriften giebt.

Die Niveaulinie „Null" geht durch Normal-Null. Die Schichthöhen von je 20 ^{m} erhalten starke schwarze Linien, sie heiſsen Haupt-Niveaulinien und gehören zu der Höhe 120, 140, 160 . . . Meter.

Die dazwischen liegenden Schichthöhen von 10 ^{m} bezeichnet man mit schwächern ununterbrochenen Linien; die hierzwischen liegenden Linien von 5 ^{m} werden mit stärkern lang gerissenen, die zu 2,5 und 1,25 ^{m} gehörigen Kurven mit fein gerissenen, d. h. kurz gestrichelten Linien bezeichnet. Die Stärke jeder Linie ist genau vorgeschrieben.

Normalmäſsig sollen nur die Schichthöhen von 5 zu 5 ^{m} zur Darstellung gelangen.

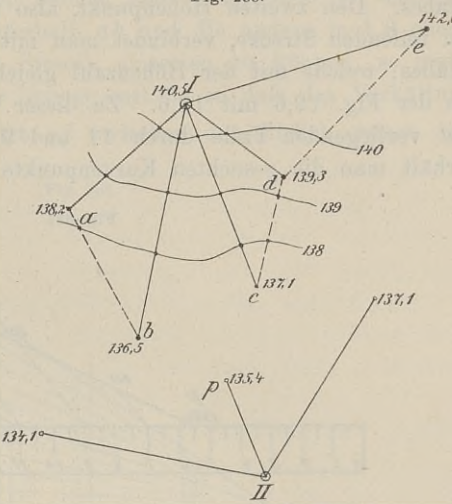
Soll der Situationsplan zum Zwecke einer Wege- und Grabennetzlegung benutzt werden oder die generellen Vorarbeiten für eine Bahnanlage enthalten, so legt man zweckmäſsig den Maſsstab 1 : 1000 zugrunde und wählt den vertikalen Abstand der Höhenkurven je nach dem Gelände. Man legt mehr Kurven ein und zieht die je fünfte stärker aus.

Liegt bereits ein Lageplan vor, der in einem gröſsern Maſsstabe gezeichnet ist, als man wünschen kann, und soll man diesen zum Einzeichnen der Höhenkurven verwerten, so muſs man ihn auf einen kleinern Maſsstab reduzieren. Eine Anleitung hierzu findet sich im dritten Teile.

Die Zeichnung der Horizontalkurven geschieht auf folgende Weise. Zwischen je zwei der Höhe nach aufgenommenen Punkten sucht man denjenigen Punkt, welcher die Höhe der gesuchten Kurve hat. Dies geschieht durch Interpolation zwischen möglichst vielen Punkten. Die gefundenen Punkte verbindet man durch mehr oder weniger gekrümmte Linien nach Maſsgabe der benachbarten Höhenzahlen oder nach dem Augenscheine im Gelände.

Vom Standpunkte *I* (Fig. 255) sind fünf Punkte aufgenommen; es sollen die Höhenkurven mit 140, 139 und 138 ^{m} konstruiert werden. Die Projektion der beiden Endpunkte auf die Horizontalebene liefert in dieser Ia als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen andere Kathete von dem Höhenunterschiede der beiden Endpunkte gebildet wird.

Fig. 255.



Zwischen die beiden Punkte I und a kommen zwei Kurvenpunkte mit 140 und 139 zu liegen.

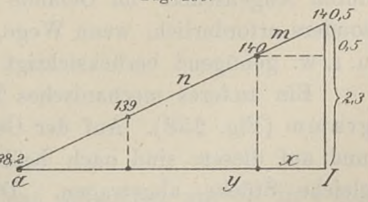
Zur Berechnung ist aI (Fig. 256) der Deutlichkeit wegen doppelt so lang gezeichnet, als im Plane. Gemäfs den beigeschriebenen Zahlen ist

$$\frac{140{,}5 - 140}{140{,}5 - 138{,}2} = \frac{0{,}5}{2{,}3} = \frac{x}{aI}$$

$$x = \frac{0{,}5}{2{,}3} \cdot aI.$$

Es ist also aI in dem angeführten Verhältnisse zu teilen und x von I aus abzutragen. Hat aI in 1 : 10 000 die Länge von 200 $^{\mathrm{m}}$, so kann man $x = 43{,}5$ berechnen und durch Abtragung den Punkt für die Kurve 140 finden.

Fig. 256.



Für die Kurve 139 wird die Gleichung lauten

$$y : aI = 1{,}5 : 2{,}3$$

$$y = \frac{1{,}5}{2{,}3} \cdot aI = 130{,}4.$$

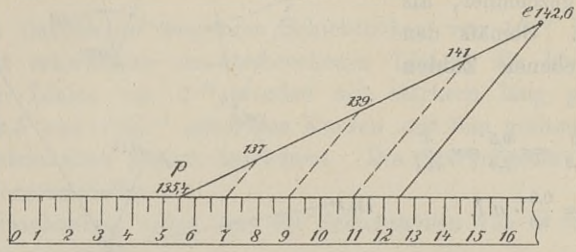
Auf den Strahlen Ib, Ic bekommt man in derselben Weise die Kurvenpunkte durch die Abstände von I, wenn die Strecken 330, 250 sind. Man findet die Abstände 41, 124, 206 und 37, 110, 184; auf de geschieht die Teilung nach dem Verhältnisse 2,6 : 3,3; auf cd für die Kurve 139 nach 0,3 : 2,2.

Diese Berechnung ist jedoch umständlich, weshalb man die Teilung auf mechanischem Wege vornimmt.

Auf der Strecke pe (Fig. 255) sollen die Kurven 137, 139 und 141 festgelegt werden. Man schiebe an p unter beliebigem Winkel einen Mafsstab an, der beliebige ganze Teile und deren

Hälften trägt (Fig. 257). Lege den Mafstab so an die kleinere Höhenzahl, dafs diese letztere mit der Teilung in den Einern und Zehnteln übereinstimmt, also 5,4 der Höhenzahl mit 5,4 des Mafsstabes. Den zweiten Höhenpunkt, also den anderen Endpunkt der zu teilenden Strecke, verbindet man mit derjenigen Zahl des Mafsstabes, welche mit der Höhenzahl gleiche Einer und Zehntel hat; in der Fig. 12,6 mit 12,6. Zu dieser Verbindungslinie zieht man im vorliegenden Falle durch 11 und 9 und 7 die Parallelen, so erhält man die gesuchten Kurvenpunkte auf *pe*.

Fig. 257.



Den Mafsstab zeichnet man sich auf Papier, die Teilpunkte findet man leicht nach Augenmafs. Bei wenigen Kurven und einer grofsen Zahl Höhenpunkte kann man häufig nach Schätzung die Teilung vornehmen, zumal wenn man später den Kurvenplan durch Augenschein im Gelände selbst prüft. Das Letztere ist besonders erforderlich, wenn Wege, Dämme, Wasserläufe, Steinbrüche u. s. w. genügend berücksichtigt werden sollen.

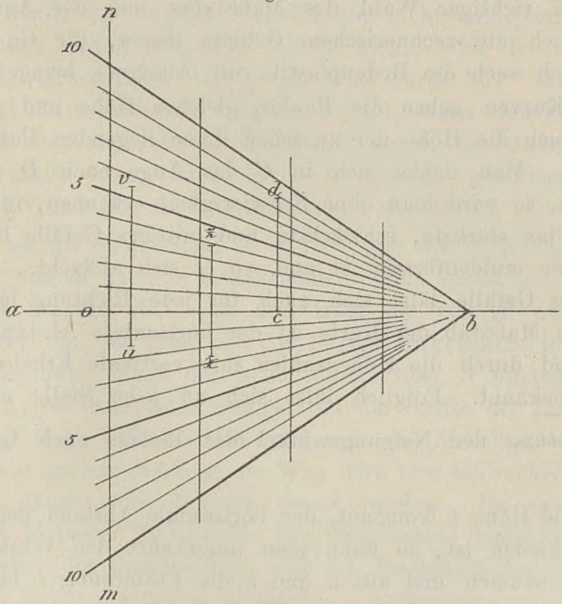
Ein anderes mechanisches Teilungsmittel bietet das sog. Diagramm (Fig. 258). Auf der Geraden *ab* ist das Lot *mn* errichtet und auf diesem sind nach beiden Seiten von *ab* beliebige, aber gleiche Stücke abgetragen. Die Teilpunkte sind durch gerade Linien mit *b* verbunden, die je fünfte Linie ist stärker; man nimmt auch wohl verschiedene Farben, etwa die je fünfte rot, die Zwischenlinien blau und die beiden Achsen schwarz. Das Diagramm kann in jeder gewünschten Gröfse hergestellt werden. Reicht es für einen besonderen Fall nicht aus, so vervielfacht man das Teilungsverhältnis im Zähler und Nenner mit derselben ganzen Zahl. Die Parallelen zu *mn* sollen das richtige Einsetzen der Zirkelspitzen erleichtern.

Die Strecke *aI* in Fig. 255 soll für die Kurven 140 und 139 geteilt werden; die Höhen der Endpunkte sind 138,2 und 140,5; für den Punkt 140 ist die Strecke zu teilen nach

$$\frac{140{,}5 - 140}{140 - 138{,}2} = \frac{0{,}5}{1{,}8}.$$

Da das Diagramm für diese beiden Zahlen und die Strecke aI nicht weit genug nach der offenen Seite ausgedehnt ist, um die eine Zirkelspitze in 0,5 unterhalb ab und die andere in 1,8 oberhalb mit der zu teilenden Strecke einsetzen zu können, so multiplizieren wir Zähler und Nenner mit 3, so dafs das Verhältnis $\frac{1{,}5}{5{,}4}$ wird. Wir nehmen jetzt aI zwischen den Zirkel, setzen die

Fig. 258.



eine Spitze in 1,5 unter ab in u und die andere auf 5,4 in v ein, so wird die Strecke durch ab in dem verlangten Verhältnisse geteilt; die Teile trägt man von a bzw. I ab.

Für den Punkt 139 ist aI nach $\frac{1{,}5}{0{,}8} = \frac{4{,}5}{2{,}4}$ zu teilen.

Kommen auf eine Strecke mehr als zwei Kurvenpunkte, so legt man die äufsersten fest; durch die übrigen innern Punkte wird die Zwischenstrecke in gleiche Teile geteilt.

Um den Punkt 138 auf cd zu finden, ist eine Teilung nach $\frac{0{,}9}{1{,}3} = \frac{2{,}7}{3{,}9}$ erforderlich, im Diagramm ist es die Linie xz.

Man kann auch die ganze zu teilende Strecke von ab aus nach einer Seite, etwa nach oben hin, senkrecht eintragen und die einzelnen Teile von ab aus abgreifen; z. B. ist cd aus der Fig. 255 als cd in das Diagramm gelegt. Der Höhenunterschied der Punkte c und d ist 2,2; da nur das Vierfache, nämlich 8,8, in die Fig. 258 paſst, so sind die Unterschiede zwischen 138 und 137,1 und zwischen 139 und 137,1 ebenfalls mit 4 zu multiplizieren. Auf cd ist also von c aus abzugreifen $0{,}9 \cdot 4 = 3{,}6$ und $1{,}9 \cdot 4 = 7{,}6$; diese Stücke sind in Fig. 255 auf cd abzutragen.

Die Karten mit Horizontalkurven haben groſse Vorzüge, welche bei richtiger Wahl des Maſsstabes und der Äquidistanz hauptsächlich auf rechnerischem Gebiete liegen, für ein geübtes Auge jedoch auch die Bodenplastik zum Ausdruck bringen.

Die Kurven geben die Punkte gleicher Höhe und gestatten dadurch auch die Höhe der zwischen ihnen liegenden Punkte einzuschätzen. Man denke sich in C das Auge nach D gerichtet (Fig. 254), so wird man ohne Schwierigkeit erkennen, in welcher Richtung das stärkste, schwächste und mittlere Gefälle liegt, wo das Gelände muldenförmig ist und wo es sich abflacht.

Dieses Gefälle läſst sich auch für jede Richtung berechnen. Durch den Maſsstab der Karte ist der horizontale Abstand zweier Kurven und durch die Höhenzahlen ihre vertikale Erhebung über einander bekannt. Folglich läſst sich an jeder Stelle und nach jeder Richtung der Neigungswinkel des Bodens nach $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{e}$ finden.

Da die Höhe h konstant, der horizontale Abstand der Kurven aber verschieden ist, so kann man umgekehrt den Winkel α als bekannt annehmen und aus α und h die Entfernung e berechnen; es ist $e = h \cdot \operatorname{ctg} \alpha$. Bei einer Wegeanlage wird man nicht über eine Neigung von 6^0 oder $10\,\%$ hinausgehen. Man berechnet daher die e für jeden Grad etwa von 10 bis 1^0 mit Hilfe der natürlichen Cotangenten, zeichnet die Strecken im Maſsstabe der Karte auf und greift die je gewählte zum Eintragen in die Kurven ab. Will man umgekehrt an irgend einer Stelle die Neigung des Bodens im Gradmaſs wissen, so greift man aus der Karte die Strecke ab und vergleicht sie mit einer der Strecken e auf dem sogen. Böschungsmaſsstab. Man kann auf diese Weise die Neigung des Bodens schnell ermitteln. Hat man sich an die Rechnung mit Prozenten gewöhnt, so verschafft man sich durch $h\,\% = 100 \cdot \operatorname{tg} \alpha$ eine Tabelle, welche man wiederum im Böschungsverhältnisse $1:1$, $1:1\,{}^1\!/_4$ u. s. w. umrechnen kann.

Um die Brauchbarkeit der Karte in dem angedeuteten Sinne weiter zu erläutern, möge von A eine Strafse durch den Sattel zu führen sein (Fig. 254). Die punktierte Kurve hat die Höhe 122,5; der absolute Höhenunterschied zwischen A und dem Sattel wird also $122 - 105 = 17^{\text{m}}$ betragen. Der horizontale Abstand für den Mafsstab 1 : 10 000 ist 560^{m}. Würden wir nun einen geradlinigen Weg von A in den Sattel führen können, so würde die Steigung $\operatorname{tg} \alpha = \frac{17}{560} = 0{,}03$ oder $3\,\%_0$ sein. Diese Steigung oder das im Terrain liegende Gefällprozent oder die relative Erhebung über A würde der geraden Wegeführung nicht entgegenstehen; die Bodengestalt erlaubt dieselbe jedoch nicht, weil die Kuppe mit 128^{m} dazwischen liegt. Der gerade Weg würde 567^{m} lang werden; man wird ihn so kurz wie möglich anlegen, wenn man keine Rücksicht auf etwa angrenzende Wirtschaftsfiguren, Steinbrüche u. s. w. nehmen mufs. Man wird den Weg deshalb geradeaus bis zur Kurve 120 und ihr nahezu parallel um die Kuppe führen.

Es sei die Schichthöhe $h = 10^{\text{m}}$ und die Wegelinie mit $5\,\%_0$ Steigung von M nach N einzuzeichnen. Man greift auf dem Mafsstabe die Strecke 200^{m} ab und trägt sie von M aus zwischen die Kurven ein, bis man mit der letzten Zirkelspitze in die Nähe von N kommt. Fällt der letzte Punkt über N hinaus, so sieht man nach, ob mehr oder weniger als die Hälfte der Zirkelöffnung jenseits N liegt. Theoretisch wird man die Zirkelweite im ersten Falle etwas gröfser machen; der Weg wird eine schwächere Steigung erhalten, länger und dadurch teurer werden. Im zweiten Falle wird bei kleinerer Zirkelweite das Umgekehrte eintreten. In der Praxis wird die Entscheidung von der Festigkeit des Bodens und manchen Nebenumständen abhängen. Aufserdem wird man mit einem Instrument, etwa dem Boseschen, die Linie abwägen.

Die Herstellung der Horizontalkurven auf der Karte ist einfach und ihre Prüfung durch Augenschein leicht ausführbar. Durch die Kurven werden die Karten nicht unnötig überladen, so dafs die Deutlichkeit beeinträchtigt würde.

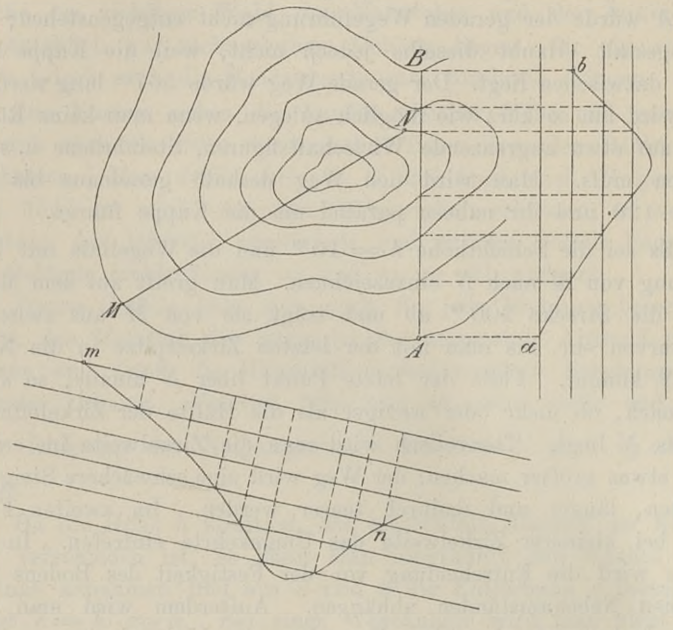
Man unterstützt die Terraindarstellung durch Höhenkurven meist noch durch besondere Angaben, Zeichen und Zeichnung, worüber später gesprochen wird.

Um Übung im Kartenlesen zu bekommen, empfiehlt es sich mit der Karte ins Gelände hinauszugehen und den Verlauf der Kurven an Ort und Stelle zu verfolgen und vielleicht auch mit einem Freihandinstrumente zu prüfen.

Es lassen sich die Kurven einer Karte in der Weise nachprüfen, daſs man das Verfahren der Kurvenlegung umkehrt. Zwei Punkte des Feldes seien auf der Karte als A und B unzweifelhaft festgelegt. Im Felde nivelliere man die gerade Linie AB nach Zentimetern, zeichne das Profil im Maſsstabe der Karte und vergleiche es mit dem der Karte entnommenen Profile.

Um letzteres Profil zu erhalten, verbinde man in der Karte A mit B bzw. M mit N (Fig. 259). Am bequemsten ergiebt sich

Fig. 259



das Profil der Linie AB, wenn man zu AB auf dem Plane eine Parallele und zu dieser wiederum Parallelen zieht in einem Abstande, welcher nach dem Maſsstabe der Zeichnung dem Höhenunterschiede der Kurven entspricht. Der Figur liegt der Maſsstab 1 : 2500 und die Äquidistanz 10 ᵐ zugrunde. Die Zahl der Parallelen richtet sich nach der Zahl der Kurven, von der tiefsten bis zu der höchsten, welche von AB getroffen werden. Die Strecken auf AB zwischen den Kurven überträgt man durch Senkrechte auf die Parallelen.

Die Gerade durch a braucht nicht unbedingt zu AB parallel zu sein; es sind dann die Abstände der Kurven MN vermittelst des Zirkels auf die als Horizont gewählte Gerade durch m zu übertragen.

Dritte Abteilung.

Zur Lehre vom Planzeichnen.

§ 81. **Hilfsmittel zum Zeichnen.**

a. Zirkel und Maſsstab.

Eine ausführliche Besprechung der Zirkel kann unterbleiben. Ein guter Zirkel soll einen leichten Gang haben und bei gleichmäſsigem Drucke der Finger eine stetige, keine ruckweise Bewegung ausführen. Um dieser Forderung besser zu genügen, hat die Werkstatt von O. Fennel in Kassel die Zirkelkopfscharniere dahin abgeändert, daſs sie die Preſsschraube mit Flächenreibung durch Körnerschrauben ersetzt hat, zwischen denen die Bewegung stattfindet. Ob man die cylindrische Form der Schenkel der kantigen Form vorzieht, ist lediglich Sache der Gewöhnung.

Durch die schräge Stellung der Schenkel kann beim Abgreifen und Auftragen von Strecken infolge des Eindringens der Spitzen leicht ein Fehler entstehen. Man darf deshalb dem Zirkel nicht eine allzu groſse Öffnung geben, oder man muſs die Zirkelspitzen wieder mit besonderen Scharnieren versehen, um sie möglichst senkrecht zum Papiere aufsetzen zu können.

Für sehr groſse Strecken benutzt man daher den Stangenzirkel. Die Spitzen sind parallel zu einander an einer Stange verschiebbar; die eine derselben läſst sich mit Hilfe einer Mikrometerschraube fein bewegen und ein Nonius gestattet eine genaue Ablesung und Einstellung. Sind die Strecken sehr lang, so hat man sich zu überzeugen, ob nicht die Temperatur einen schädlichen Einfluſs auf die Längenausdehnung der Stange ausübt. Soll der Nonius überhaupt Wert behalten, so ist es wünschenswert, daſs die Teilung bei der mittlern Arbeitstemperatur $+ 20^0$ C. ausgeführt ist. Der Stangenzirkel kann dann passende Verwendung bei Ermittelung des Schwindens oder Einschrumpfens des Kartenpapiers finden.

Eine besondere Art von Zirkel zum Auftragen konstanter Längen von etwa 10 ^{cm} ist der Zehner- oder Hunderter-Zirkel. Derselbe hat parallele Füſse und Schenkel, die durch eine Schraubenstange in Verbindung stehen. Durch eine Mutter und Gegenmutter läſst sich den Zirkelspitzen dauernd ein bestimmter Abstand geben. Man benutzt diesen Zirkel bei der Anfertigung des Quadratnetzes.

Der Nullenzirkel dient zum Ziehen der kleinen Kreise um die Netz-, Dreiecks- u. s. w. Punkte. Die handlichste Einrichtung ist diejenige, bei welcher der eine Schenkel eingestochen und gar nicht gedreht wird, während der andere, von selbst auf das Papier fallend, an einer kleinen Scheibe zwischen dem Daumen und Mittelfinger oder mit diesem allein gedreht, den Kreis beschreibt.

Der Reduktions- oder Proportionalzirkel ist ein Zirkel, dessen Schenkel über das in ihrer Länge verstellbare Scharnier hinaus verlängert sind und einen zweiten Zirkel bilden. Die Abstände der Spitzen auf der einen und andern Seite stehen im Verhältnisse ihrer Schenkellängen, woraus sich die Einstellung und der Gebrauch ergiebt.

Die Einrichtung der Transversal-Maſsstäbe bedarf keiner Erläuterung. Es ist dem Anfänger möglichst viel Gelegenheit zu geben, sich mit dem Gebrauche derselben vertraut zu machen; Umrechnungen aus einem Maſsstabe in einen andern sind fleiſsig vorzunehmen. Die Handhabung des Zirkels, das Abgreifen von Bruchteilen eines Meters und deren Schätzung u. s. w. läſst sich nur durch Anschauung und mündliche Unterweisung erlernen.

Bezüglich der Benutzung von Zirkel, Lineal und Maſsstab zur Herstellung des Quadratnetzes sei hervorgehoben, daſs es sich darum handelt, parallele Gerade und dazu Senkrechte zu erhalten. Man ziehe in der Mitte des Zeichenpapiers parallel zu den Rändern eine gerade Linie, zeichne nach oben und auch nach unten drei gleichschenklige Dreiecke mit gleicher Grundlinie und gleichen Schenkeln und überzeuge sich, ob die drei Spitzen oben und ebenso diejenigen unten in einer geraden Linie liegen. Ist dieses mit den Spitzen der obern Dreiecke der Fall, so würde das genügen; der Genauigkeit wegen untersucht man jedoch auch die untern Spitzen und vergleicht auch die Abstände der Spitzen in zwei gegenüberstehenden und zwei benachbarten Dreiecken. Fällt die Prüfung befriedigend aus, so haben die Verbindungslinien der

Spitzen der obern und untern Dreiecke von einander und von der Grundlinie überall den gleichen Abstand, sind also parallel.

Auf den parallelen Geraden trage man die Seite des Quadratnetzes, also Strecken von 10^{cm}, von einer der gemeinschaftlichen Senkrechten aus ab und verbinde die so erhaltenen Punkte durch Gerade, auf denen abermals die Abtragung der Quadratseite vorgenommen wird.

Die Linien des Netzes werden zunächst möglichst blafs ausgezogen; später werden die Netzpunkte mit kleinen roten Kreisen von $1{,}5^{\text{mm}}$ Durchmesser umgeben und die roten Linien des Netzes bis an die Grenzen der Zeichnung ganz ausgezogen, während innerhalb der Zeichnung die Kreuzungspunkte nur etwa 10 bis 15^{mm} lange Linien erhalten gemäfs Anw. VIII. §§ 104 und 114.

b. Der Transporteur.

Das gebräuchlichste Werkzeug zum Messen gezeichneter und zum Zeichnen gemessener Winkel ist der Transporteur in der Form des Halb- oder Vollkreises.

Derselbe findet Anwendung bei dem Auftragen der weniger genauen Bussollenzüge, welche etwa vom Forstmann zur Aufnahme von Waldwegen oder Bestandesgrenzen oder vom Markscheider zur Aufnahme von Gruben gelegt und vermessen sind; ferner dient er zum Einzeichnen tachymetrisch aufgenommener Punkte.

Sind die Brechungswinkel eines Zuges gemessen, so kann ihre Auftragung in der bekannten Einzelzeichnung von Punkt zu Punkt geschehen. Ist der Durchmesser des Halbkreistransporteurs zum Ziehen gerader Linien eingerichtet und der bereits gezeichnete eine Schenkel lang genug, so legt man auf diesen nicht den Nullradius, sondern betrachtet ihn als den zweiten Schenkel, der durch die Zahl der Winkelgrade geht. Entweder hat der Transporteur von Metall ein Lineal, welches man mit einer Mikrometerschraube und Nonius einstellt, oder man kann an den äufsern Rand des Gradkreises einen Nonius anlegen, so dafs sein Nullstrich den gegebenen Schenkel deckt. Bei der Handhabung durchsichtiger Transporteure beachte man den Schatten der eingerissenen Linien.

Für Winkel, die gröfser als 180^0 sind, ist durch einfache Rechnung und entsprechende Drehung des Halbkreises der aufzutragende Ergänzungswinkel zu finden. Die Linien sind mit sehr hartem Bleistifte von sibirischem Graphit zu ziehen.

Da Winkel, deren Schenkel auf einander senkrecht stehen, gleich sind oder sich zu 180^0 ergänzen, so kann man auch eine

Anzahl Winkel um einen passend gelegenen Punkt der Zeichnung herum auftragen und sie mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks an die richtigen Scheitel bringen. Um Verwechselungen zu vermeiden, ist die Reihenfolge der Winkel durch kleine Merkmale anzudeuten oder die Schenkel sind mit Nummern zu versehen; Aufmerksamkeit ist trotzdem sehr von nöten. Um Klarheit hierüber zu erhalten, schlage man zunächst den umgekehrten Weg ein. Man zeichne einen beliebigen Polygonzug, trage dessen Winkel an einem Punkte zusammen und versuche nun, rückwärts wiederum den Polygonzug mit einem beliebigen anderen Anfangspunkte herzustellen.

Die tachymetrische Aufnahme zerstreut liegender Punkte geschieht durch die Messung der Horizontalwinkel inbezug auf eine feste Richtung und durch Messung der Entfernung mit dem Distanzmesser. Die Auftragung der Punkte erfolgt vermittelst der beiden gewonnenen Elemente, also durch Polarkoordinaten, für welche der Nullpunkt der jedesmalige Polygon- oder Stationspunkt ist. Um beide Teile, Winkel und Strecke, zugleich niederzulegen, bedient man sich des Halbkreistransporteurs, dessen Durchmesser eine beiderseits bis etwa elf Centimeter reichende Millimeterteilung trägt.

Es handelt sich nun darum, den Durchmesser richtig zum Abgreifen der Entfernung zu benutzen, wenn der gemessene Winkel angelegt ist. Wir denken den Transporteur vor uns liegend, den Durchmesser von oben nach unten, den Gradkreis nach links gekehrt. Die Bezifferung der Grade läuft von rechts nach links, also entgegengesetzt derjenigen am Horizontalkreise des Tachymeters. (Fig. 260).

Wird durch MN die Richtung nach dem vorhergehenden Polygonpunkte oder die Nordrichtung angezeigt und liegt der Mittelpunkt M des Kreises auf dem Stationspunkte des bereits eingezeichneten Polygonzuges, so möge der Strahl nach dem Punkte 1 das Azimuth 50^0, der nach 2 das Azimuth 150^0 gegen die Anfangsrichtung haben. Die bezüglichen Entfernungen seien 300 bzw. 400^{m} und der Mafsstab des Planes 1 : 5000.

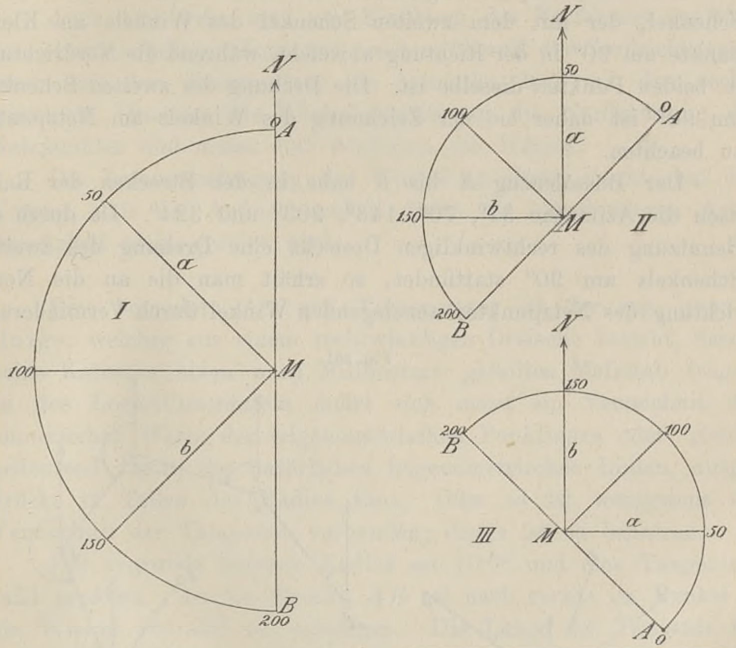
Man lege den Mittelpunkt M auf den Polygonpunkt, drehe den Kreis nach rechts, bis der Radius a der Zahl 50 in die Nordrichtung fällt, so bildet MA mit MN den gegebenen Winkel; an dem Mafsstabe MA zählt man 60^{mm} ab, um den Punkt 1 zu erhalten.

Zur Festlegung des Punktes 2 dreht man den Kreis, bis der Radius b in Figur 260. III auf MN zu liegen kommt, und mifst auf MA die Strecke 80^{mm} ab.

Wird der Azimuthalwinkel gröſser als 200°, so ist die andere Hälfte des Durchmessers als Längenmaſsstab zu benutzen. Es habe das Azimuth des Punktes 3 die Gröſse 250°, so gebe man dem Transporteur die Lage Fig. II, wodurch $\sphericalangle NMB = 250^0 = NMA + 200^0$ und MB Maſsstab wird.

Ist endlich das Azimuth 350°, so giebt MB in Fig. III die Richtung nach dem Punkte 4 an.

Fig. 260.



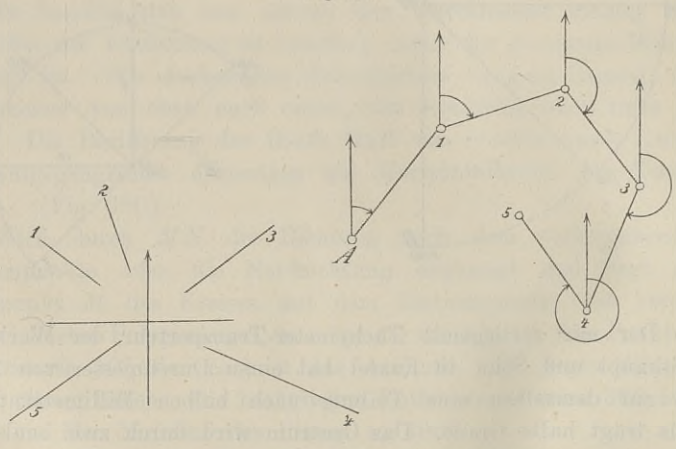
Der mir vorliegende Tachymeter-Transporteur der Werkstatt Breithaupt und Sohn in Kassel hat einen Durchmesser von 22 cm und auf demselben eine Teilung nach halben Millimetern; der Kreis trägt halbe Grade. Das Centrum wird durch zwei senkrecht zu einander stehende Linien dargestellt, die auf einem Hornplättchen eingerissen sind; dieses Centrum benutzt man bei der Einzelauftragung von Winkeln. Sind eine Anzahl Winkel um einen Punkt herum zu zeichnen, so schraubt man einen Centrumsring ein, der mit einem kleinen Loche versehen ist; durch dieses schiebt man einen cylindrischen Stift, dessen in das Papier gestochene Spitze den Transporteur festhält und seine Drehung gestattet.

Ist ein Zug durch Azimuthalwinkel aufgenommen, so mufs man im Anfangspunkte des Zuges und ebenso in jedem folgenden Kleinpunkte die Nordrichtung ziehen und an diese den betreffenden Winkel anlegen. Dieses Verfahren ist jedoch umständlich, sobald, wie es bei Bussolenzügen der Fall sein soll, die Strecken nur kurz sind. Deshalb trägt man die Winkel um den nächsten, etwa links liegenden Netzpunkt herum auf und schiebt sie mit einem rechtwinkligen Dreiecke ab.

Der am Netzpunkte gezeichnete Winkel erhält dadurch einen Schenkel, der mit dem zweiten Schenkel des Winkels am Kleinpunkte um 90^0 in der Richtung abweicht, während die Nordrichtung in beiden Punkten dieselbe ist. Die Drehung des zweiten Schenkels um 90^0 ist daher bei der Zeichnung des Winkels am Netzpunkte zu beachten.

Der Bussolenzug A bis 5 habe in den Strecken der Reihe nach die Azimuthe 37^0, 70^0, 143^0, 203^0 und 324^0. Da durch die Benutzung des rechtwinkligen Dreiecks eine Drehung des zweiten Schenkels um 90^0 stattfindet, so erhält man die an die Nordrichtung des Netzpunktes anzulegenden Winkel durch Verminderung

Fig. 261.



der gegebenen Azimuthalwinkel um 90^0. Es sind also für unser Beispiel (Fig. 261) im Netzpunkte zu zeichnen:

$$37^0 - 90^0 = -53^0;\ 70^0 - 90^0 = -20^0;\ 143^0 - 90^0 = 53^0;$$
$$203^0 - 90^0 = 113^0;\ 324^0 - 90^0 = 234^0.$$

Die ersten zwei Winkel kommen demnach durch negative Drehung an die linke Seite der Nordrichtung, der dritte Winkel kommt in den ersten Quadrant u. s. w. Der zweite Schenkel eines jeden Winkels wird, allgemein gesprochen, um einen Quadrant nach rückwärts verlegt. Ob man diesen Schenkel auch dort gerade zeichnet, ist abhängig davon, ob man den Nullradius des Transporteurs auf die Nordrichtung legt oder denjenigen Radius, welcher durch die betreffende Gradzahl geht. Thut man letzteres, so kann man den rechten oder linken Halbmesser des Transporteurs zum Ziehen des Strahles benutzen. Man versäume nur nicht, den Schenkel nach der Nummer des betreffenden Kleinpunktes zu bezeichnen.

Auch hier gehe man zur Einübung des Verfahrens zunächst von einem beliebigen Zuge aus, zeichne überall die Nordrichtungen, messe mit dem Transporteur die Azimuthe, lege mit dem rechtwinkligen Dreiecke die Winkelschenkel an die Nordrichtung des Netzpunktes und messe dort wiederum die Winkel.

Die Zusammentragung der Winkel an einem Punkte hat den Vorzug, dafs die Aufmerksamkeit durch die verschiedenen Arten der Arbeit nicht gestört wird.

Eine besondere Art von Transporteur ist der sog. geradlinige, welcher aus einem rechtwinkligen Dreiecke besteht, dessen beide Katheten einen nach Millimetern geteilten Mafsstab tragen. In den Logarithmentafeln findet sich meist ein Verzeichnis der numerischen Werte der trigonometrischen Funktionen oder, gleichbedeutend damit, der natürlichen trigonometrischen Linien, ausgedrückt in Teilen des Radius Eins. Oder es ist wenigstens ein Verzeichnis der Tangenten vorhanden; dieses ist zu benutzen.

Der zugrunde liegende Radius sei 10^{cm} und eine Tangententafel gegeben. An die Strecke AB sei nach rechts im Punkte A ein Winkel von $35^0\ 40'$ anzulegen. Die Länge der Tangente für den Radius Eins ist 0,7177; man schiebe die eine Kathete an AB, so dafs die Zahl Null an A liegt, zähle an der andern Kathete die vorstehende Zahl in Dezimetern, also 72^{mm}, vom Scheitel des rechten Winkels gerechnet, ab, bezeichne den Punkt und verbinde ihn mit A, so bildet der gezeichnete Strahl mit AB den gegebenen Winkel. Für 45^0 müssen beide Katheten gleich sein.

Soll an AB nach rechts in A der Winkel 76^0 gelegt werden, so ist die zweite Kathete 4,01 Dezimeter zu machen; um diese grofse Zahl zu vermeiden, lege man zunächst nach links an AB den Winkel 14^0 mit 0,249 an und errichte zu dem gefundenen Strahle in A das Lot.

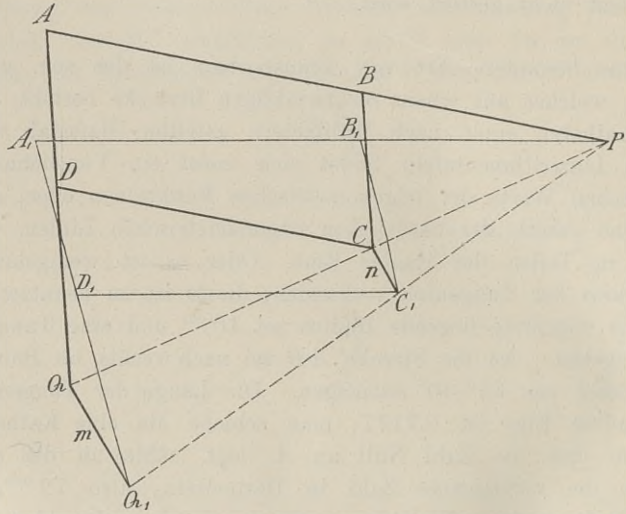
Um die Sinustafel zu benutzen, muſs man von A aus 1^{dm} auf AB abtragen, mit dem Radius Eins einen Kreis um A beschreiben, die den Tafeln entnommene doppelte Sehne in den Kreis legen und halbieren. Dies Verfahren ist umständlich, weshalb eine besondere Tafel nach $2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$ zu berechnen wäre.

c. Pantograph oder Storchschnabel.

Um nach einer vorhandenen Karte eine andere anzufertigen, welche dieselbe Fläche in einem kleinern oder gröſsern Maſsstabe darstellt, bedient man sich des Pantographen, für welchen es verschiedene Konstruktionen giebt. Die Theorie derselben beruht auf folgenden Betrachtungen.

1. (Fig. 262 und 263). Die zwei benachbarten Seiten AB und AD des Parallelogramms sind verlängert bis P bzw. Q, so

Fig. 262.



daſs die Punkte P, C und Q eine gerade Linie bilden. Die Linien AP und AQ sind starre Linien von Holzleisten, mit diesen sind durch Scharniere die Holzleisten BC und DC in B und D und unter sich in C verbunden; sie bilden das Parallelogramm $ABCD$. Ist der Punkt P fest, so kann sich das Ganze um diesen Punkt drehen, es kann das Parallelogramm auch eine andere Form annehmen, je nachdem sich Q von P entfernt oder ihm näher rückt. Durch die Bewegung von Q nach Q_1 kommt C nach C_1 u. s. w., während die Eigenschaft des Vierecks bestehen bleibt wegen der Gleichheit von je zwei gegenüberliegenden Seiten.

In der ursprünglichen Lage ist

$$\frac{PC}{PQ} = \frac{PB}{PA} = \frac{BC}{AQ};$$

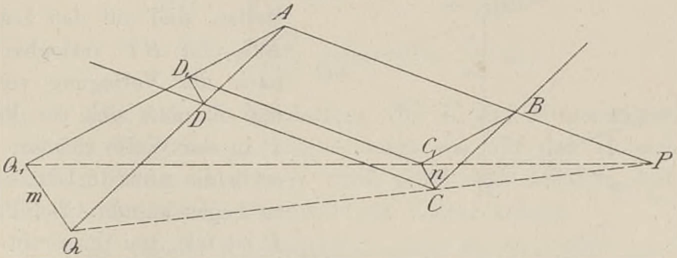
in der neuen Lage ist

$$\frac{PC_1}{PQ_1} = \frac{PB_1}{PA_1}\left(= \frac{PB}{PA}\right) = \frac{B_1C_1}{AQ_1}\left(= \frac{BC_1}{AQ_1}\right).$$

Da $PB = PB_1$ und $PA = PA_1$, ebenso $BC = B_1C_1$ und $AQ = AQ_1$ ist, so ist

$$\frac{PC}{PQ} = \frac{PC_1}{PQ_1},$$

Fig. 263.



woraus folgt, dafs $CC_1 \parallel QQ_1$ ist und

$$\frac{m}{n} = \frac{PA}{PB} = \frac{AQ}{AD}.$$

Würde man nun den Punkt Q von Q_1 weiter führen nach Q_2, so würde C_1 nach C_2 u. s. w. gelangen, und es würde, da P festbleibt, von C eine Figur beschrieben werden, welche der von Q beschriebenen ähnlich ist.

Das Instrument, das nach der Figur mit konstanten CB und CD eingerichtet ist, kann den Namen Pantograph nicht erhalten, weil es nur die Anwendung eines einzigen Verhältnisses gestattet. Für den allgemeinern Gebrauch müssen CB und CD sich verkürzen bzw. verlängern lassen. Es sind daher unter CB und CD ebenfalls Holzleisten zu verstehen, welche sich mit AP und AQ in verschiedenen Längen zu einem Parallelogramm verbinden lassen.

Die Leisten tragen entweder Löcher oder Teilungen. Die entsprechenden Löcher werden auf einander gelegt und durch ein

Scharnier verbunden. Auf den Teilungen sind durch Scharniere verbundene Nonien verschiebbar, welche mit dem Nullstriche auf denjenigen Strich der Teilung gestellt werden, welcher das gegebene Verhältnis $m : n$ bildet. Da 4 Nonien auf den 4 Schenkeln vorhanden sind, so stelle man zunächst den Nonius ein, der auf dem festen Schenkel von P aus die gewünschte Teilung ausführt, darauf die übrigen entsprechend auf dieselbe Zahl. Die Bezifferung der Maſsstäbe läuft von P nach A, von A nach Q, von D nach C und von B nach C.

2. In den Figuren 264 und 265 ist das Parallelogramm in den Seitenlängen konstant, die Scharniere A und C bleiben ein- für allemal an derselben Stelle jeder Seite. Die Punkte G und F dagegen, welche Fahrstift bzw. Schreibstift vorstellen, sind auf den Leisten BG und BF verlegbar; je nach der Verlegung von G und F muſs sich der Punkt P in der Weise richten, daſs er in die gerade Linie GF zu liegen kommt. Der Punkt P ist fest, um ihn dreht und verschiebt sich das Parallelogramm, so daſs F und G entgegengesetzt gerichtete Bewegungen ausführen.

Fig. 264.

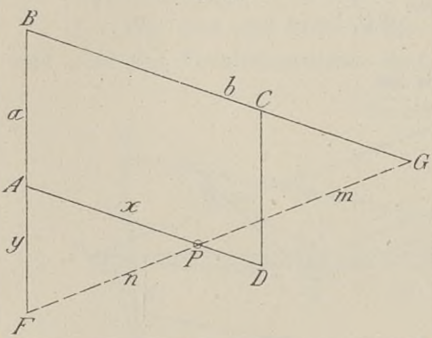
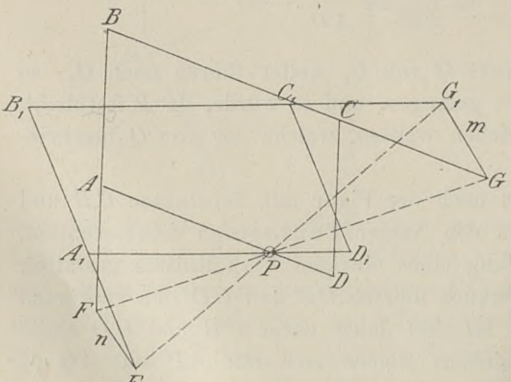


Fig. 265.



In Fig. 264 ist

$$\frac{GF}{PF} = \frac{GB}{PA} = \frac{BF}{AF}.$$

Wird F nach F_1 geführt, so geht G nach G_1, es bleibt $PA_1 \parallel G_1B_1$, und es ist

$$\frac{G_1F_1}{PF_1} = \frac{G_1B_1}{PA_1} = \frac{B_1F_1}{A_1F_1}.$$

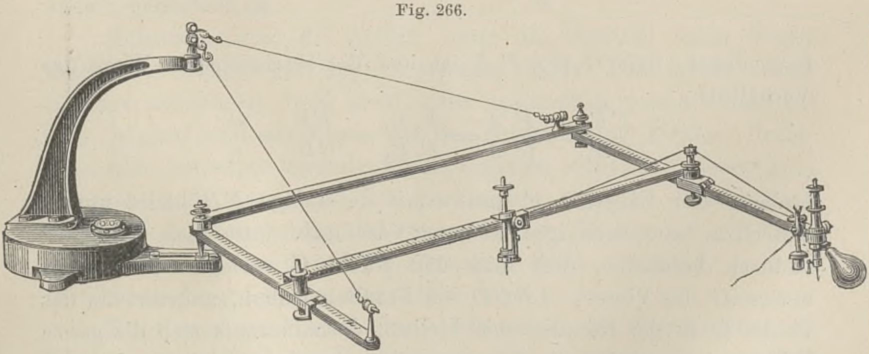
Da nach der Voraussetzung als starre Linien $G_1B_1 = GB$ und $PA_1 = PA$ sind, so ist

$$\frac{GF}{PF} = \frac{G_1F_1}{PF_1} \quad \text{oder} \quad \frac{GF - PF}{PF} = \frac{G_1F_1 - PF_1}{PF_1},$$

d. h.
$$\frac{GP}{FP} = \frac{G_1P}{F_1P},$$
woraus $GG_1 \parallel FF_1$ folgt. Was von diesen beiden Strecken gilt, hat dieselbe Geltung für alle beiderseits beschriebenen Wege; es sind daher die von dem einen Punkte umfahrenen und von dem anderen gleichzeitig gezeichneten Figuren einander ähnlich. Das Verhältnis der homologen Seiten ist
$$\frac{m}{n} = \frac{GP}{FP} = \frac{BA}{FA}.$$
Es ist $AB = a$ konstant, dasselbe sei mit $BG = b$ der Fall, während P und F sich auf den Schienen verlegen lassen, so daſs $AP = x$ und $AF = y$ veränderlich sind. Das beabsichtigte Verhältnis des Originals zur Kopie sei $GP : FP = m : n$, dann ist
$$\frac{AP}{BG} = \frac{FP}{FG} \quad \text{oder} \quad x = \frac{n}{n+m} \cdot b$$
$$\frac{FA}{AB} = \frac{FP}{PG} \quad \text{oder} \quad y = \frac{n}{m} \cdot a.$$
Hiernach läſst sich die Einstellung von F und P bewerkstelligen; die richtige Einstellung, welche durch die auf den Holzschienen befindlichen Zahlen erleichtert wird, prüft man dadurch, daſs man an die drei Punkte G, P und F ein Lineal anlegt.

3. Eine fernere Konstruktion stellt die Fig. 266 dar. Die Arme werden durch Drähte von einem Krahne aus freischwebend

Fig. 266.



gehalten und ruhen nur mit einer Säule in der Nähe des Fahrstifts auf der Zeichnung und mit dem Pol auf dem Fuſse des Krahnen.

Der feste Drehpunkt liegt in einer Ecke des Parallelogrammes, in A. (Fig. 267). In der Verlängerung von BC steht der Fahrstift F, und auf der Seite CD des Parallelogrammes befindet sich der Schreibstift in G, so dafs A, G, F eine gerade Linie bilden. Führt F die Bewegung FF_1 aus, so beschreibt G in der gleichen Richtung den Weg GG_1.

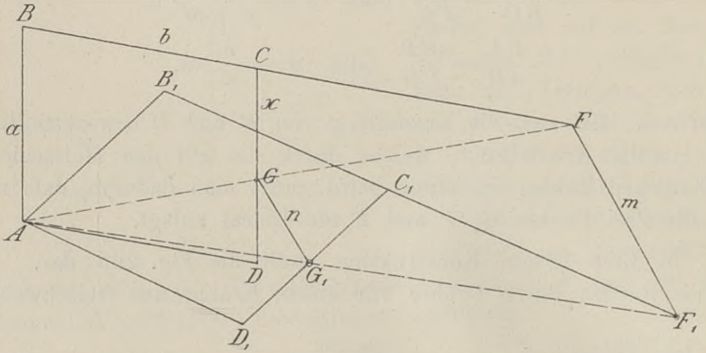
Da das Parallelogramm bestehen bleibt und BF und BC ihre Längen beibehalten, so ist

$$\frac{F_1A}{F_1G_1} = \frac{F_1B_1}{F_1C_1} = \frac{FB}{FC} = \frac{FA}{FG}.$$

Nach der Voraussetzung liegt G in der Geraden AF; aus der vorstehenden Gleichung

$$\frac{F_1A}{F_1G_1} = \frac{FA}{FG}$$

Fig. 267.



folgt daher, dafs $G_1G \parallel F_1F$ ist und die beschriebenen Wege das Verhältnis

$$\frac{FF_1}{GG_1} = \frac{F_1A}{G_1A} = \frac{F_1B_1}{C_1B_1} = \frac{FB}{CB} = \frac{m}{n}$$

bilden. Der Fahrstift F und damit die Länge FB bleibt unveränderlich, ein beliebiges anderes Verhältnis läfst sich also nur dadurch herstellen, dafs man den Punkt C verlegt. Nun mufs einerseits das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm, andererseits der Punkt G in der Geraden AF bleiben, deshalb mufs sich die ganze Schiene CD parallel zu AB verschieben, und zugleich der Stift G auf CD sich so verstellen lassen, dafs AGF eine gerade Linie bildet, wie aus der Fig. 267 ersichtlich ist.

Sind die Schienen BF, AD und CD mit Löchern versehen, so wird das Mafs der Verjüngung vom Original zur Kopie daneben geschrieben. Will man z. B. von einer Karte, die in 1 : 5000 gezeichnet ist, eine solche in 1 : 25 000 anfertigen, so stellt man C, D und G in den Löchern fest, neben denen $1/5$ steht.

Tragen die Schienen eine Millimeterteilung und die Hülsen Nonien, so kann man $CG = x$ aus der Länge CD und aus der gegebenen Verjüngung berechnen. Es ist für $CD = a$ und $CB = b$:

$$\frac{x}{a} = \frac{FC}{FB} = \frac{FB - b}{FB}$$

$$x = \left(1 - \frac{b}{FB}\right) \cdot a.$$

Ist z. B. die beabsichtigte Verjüngung $\frac{b}{FB} = \frac{1}{4}$, so ist $x = \frac{3}{4}\, a$.

Beim Gebrauche des Pantographen verläuft das Geschäft des Kopierens am glattesten, wenn die Gröfse des Originals nur eine einzige Aufstellung erfordert. Zur richtigen Orientierung zeichnet man auf dem Blatte für die Kopie ein Rechteck, welches dem das Original umschliefsenden Rechtecke ähnlich ist, und dessen Seiten mit den homologen Seiten des letzteren im Verhältnisse der Mafsstäbe von Kopie und Original stehen Das Blatt der Kopie wird nun so verschoben, dafs gleichzeitig Fahrstift und Schreibstift auf drei entsprechenden Ecken der beiden Rechtecke stehen. Ist dies erreicht, so werden beide Blätter auf dem Tische befestigt. Während der Arbeit vergewissert man sich ab und zu mit Hilfe der Rechtecke, ob die gegenseitige Lage der beiden Blätter unverändert geblieben ist.

Mühsamer wird die Arbeit, wenn das Original seiner Gröfse wegen abteilungsweise kopiert werden mufs. Das grofse Orientierungsrechteck ist dann nicht mehr anwendbar, weshalb man auf dem Original und der Kopie vor Beginn der Arbeit kleinere Rechtecke oder korrespondierende Richtungslinien zieht, auf denen man Strecken nach dem Mafse der Verjüngung abträgt. Häufig kann man sich dadurch helfen, dafs man die neue Zeichnung auf Pauspapier und von diesem auf die eigentliche Kopie überträgt, wodurch die Orientierung bequem und sicher wird.

Trägt man punktweise durch Einstechen des Schreibstiftes die Kopie auf, so sind die Punkte nach dem Originale zu verbinden, wie es auch bei den Einzelheiten geschehen mufs.

Der Pantograph wurde 1603 von Scheiner erfunden und von ihm 1631 beschrieben und benannt (*πᾶν*, *παντός*, alles und *γράφειν*, schreiben).

Eine andere Art von Reduktion ist diejenige vermittelst des Quadratnetzes. Das Verhältnis der Maſsstäbe von Kopie und Original sei $k : o$. Man überziehe das Original mit einem Quadratnetze von Bleilinien, dessen Seiten etwa der Länge von 100^{m} entsprechen; zeichne ebenso auf dem für die Kopie bestimmten Blatte ein Netz, dessen Seiten in dem neuen Maſsstabe dieselbe Länge von 100^{m} darstellen und trage mit Hilfe eines Proportionalzirkels, dem man die Einstellung $k : o$ gegeben hat, alle bemerkenswerten Punkte des Originals in das entsprechende Quadrat der Kopie. Sind viele Punkte zu übertragen, so kann man auch die Diagonalen der Quadrate zum Schätzen und Abgreifen von Strecken heranziehen. Kostbare Originalkarten überspannt man mit Pauspapier, auf welches man das Quadratnetz zeichnet.

Hat man keinen Reduktionszirkel zur Hand, so verschafft man sich auf folgende Weise einen Maſsstab für die Reduktion. Eine Karte soll z. B. auf Dreiviertel ihres Maſsstabes verkleinert werden. Man zeichnet ein rechtwinkliges Dreieck auf Millimeterpapier, so daſs die Katheten auf den dicken Strichen liegen, und macht die eine drei, die andere vier beliebige Einheiten lang. Die aus dem Original entnommene Strecke trägt man nun von dem Scheitel des spitzen Winkels auf der längern Kathete ab, dann ist das Lot im andern Ende der Strecke bis zur Hypotenuse das in 3 : 4 verkleinerte Maſs. Man braucht nur den Zirkel zu drehen und die erste Spitze nach Augenmaſs in die Hypotenuse zu setzen.

Handelt es sich um die Vergröſserung kleiner Karten, so wendet man häufig mit Vorteil ähnliche Dreiecke an. Man sticht die Punkte des Originals durch oder bringt sie auf Pauspapier, wählt einen passenden Ähnlichkeitspunkt und zieht von diesem die Strahlen durch alle wichtigen Punkte. Auf diesen Strahlen trägt man das Doppelte oder Dreifache ab und verbindet die Endpunkte, wodurch man das ähnliche Bild erhält.

Um Zeichnungen und Karten in einem kleinern Maſsstabe herzustellen, benutzt man heutzutage gern die Photographie. Das Verhältnis der Verjüngung bringt man mit dem Zähler auf dem Original und mit dem Nenner auf der Platte der Camera zur Darstellung. Soll das Verhältnis der alten zur neuen Karte 5 : 1 werden, so klebt man auf die Karte einen sich scharf abhebenden Streifen Papier von beliebiger Länge und auf die matte Scheibe der Kammer einen Streifen, welcher ein Fünftel des vorigen lang ist. Deckt sich das Bild des äuſsern Streifens mit dem innern, so ist die lineare Verjüngung die gewünschte. Damit auf dem Bilde keine Verzerrungen oder Verschiebungen entstehen, damit also die parallelen Linien des Originals wieder parallele Bilder geben, ist vor allem darauf zu sehen, daſs der Boden der Kammer horizontal, d. h. Linse und Platte wie auch das Original vertikal stehen. Man giebt der Projektionsebene die richtige Stellung durch Anwendung der Libelle. Der Photograph, welcher dieses nicht beachtet, wird die Säulen der Kirche als konvergente Linien auf sein Bild bringen.

§ 82. **Geländezeichnung.** (Bergstriche).

Wie früher gesagt wurde, liefern die Horizontalkurven eine gute Grundlage für die Arbeiten, welche eine genaue Berechnung verlangen. Soll eine Karte nur darüber Aufschluſs geben, ob ein Gelände für Menschen, Vieh und Fuhrwerk passierbar ist, so wendet man die sog. Bergstriche an. Die Verbindung beider Darstellungsarten giebt das anschaulichste Bild des Geländes.

Die Karten in Bergstrichzeichnung verdanken ihre Entstehung dem Bedürfnisse der Heerführer, schnell und sicher zu erkennen, ob die Truppenmassen sich in dieser oder jener Richtung ohne Aufenthalt führen, da und dort auseinander- und wieder zusammenziehen lassen. Den ersten Anstoſs, wenigstens zur Darstellung von unübersteiglichen Hindernissen, gab Friedrich der Groſse, der seinem Topographen Müller die Anweisung erteilte: „Da, wo ich nicht hin kann, mache er einen Klecks.“ Müller hat diesen Gedanken nach dem Grundsatze: je steiler desto dunkler, weiter ausgebildet.

Systematisch für alle Geländeformen wurde die Bergzeichnung durchgeführt vom Major J. G. Lehmann, Direktor der Plankammer in Dresden. Er stellte sich die Aufgabe, den Böschungswinkel einer geneigten Fläche durch Zeichnung auszudrücken und ging bei der Lösung von folgenden Erwägungen aus.

Es handelt sich um zwei Ebenen: die eine ist die horizontale, die andere die geneigte Ebene. Errichtet man in einem Punkte der gemeinsamen, also horizontalen Schnittlinie die Lote zu ihr in der einen und andern Ebene, so entsteht der Neigungs- oder Böschungswinkel. Die horizontale Fläche habe die Gröſse von einem Quadratmeter und werde durch vertikal herabkommende Lichtstrahlen beleuchtet. Die geneigte Fläche, welche als Projektion ebenfalls das Quadratmeter hat, ist gröſser; dieselbe Lichtmenge mufs sich also auf eine gröfsere Fläche verteilen, wodurch die Helligkeit derselben geringer wird. Denken wir uns wieder die Schenkel des Neigungswinkels, so können wir den einen als Hypotenuse, den andern als ihre Projektion oder Kathete auffassen. Je gröfser der Winkel wird, desto länger wird die zu derselben Kathete von einem Meter gehörige Hypotenuse, desto weiter von einander treffen die vertikalen Lichtstrahlen auf, desto dunkler stellt sie sich also dem Auge dar.

Da mit der Gröfse des Neigungswinkels α die Funktion cosinus desselben abnimmt, so kann man auch sagen: Die Beleuchtung verhält sich wie $\cos\alpha$. Ist $\alpha = 0^0$, so ist die Beleuchtung Eins, ist $\alpha = 90^0$, so ist $\cos\alpha = 0$, d. h. die Beleuchtung ist auch Null. Die vertikal stehende Fläche wird von den vertikalen Lichtstrahlen überhaupt nicht getroffen, d. h. sie ist vollständig dunkel oder schwarz. Für jeden anderen Winkel α ist ein gewisser Grad von Helligkeit vorhanden.

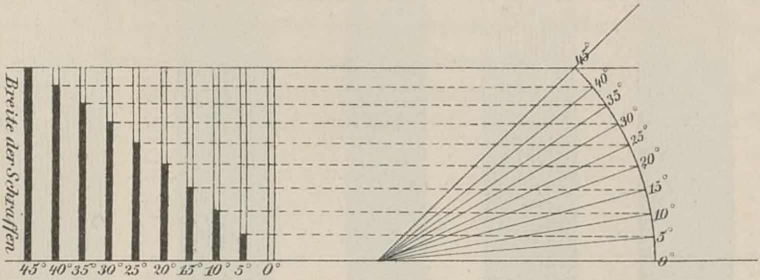
Es würde nun darauf ankommen, die Abstufungen der Beleuchtung zwischen den Grenzen der Neigung festzustellen. Da jedoch Böschungen mit einem Winkel von 45^0 und darüber als unpassierbar gelten müssen, so können sie mit Rücksicht auf den oben genannten Zweck der Zeichnung aus der Betrachtung ausscheiden.

Lehmann hat deshalb nur unter den Böschungen zwischen 0^0 und 45^0 eine Einteilung vorgenommen und zwar Abstufungen von je 5 zu 5^0 gemacht, so dafs nach seinem Verfahren nur neun verschiedene Böschungen auf der Karte zur Darstellung kommen.

Die horizontalen Flächen bleiben ganz weifs, während die Böschungen über 45^0, also abschüssige Felsabhänge und steile Bergwände ganz schwarz gezeichnet werden. Die Beleuchtungsunterschiede der dazwischen liegenden Böschungen sind durch abwechselnd schwarze und weifse parallele Striche gekennzeichnet, welche in der Richtung des stärksten Gefälles auf der Horizontalen des Hanges oder des Grundrisses senkrecht stehen. Sie liegen also in der Richtung des fliefsenden Wassers und bilden mit der Horizontalebene den Böschungswinkel.

Das Verhältnis der schwarzen Striche zum weifsen Zwischenraume findet man dadurch, dafs man sich den auszufüllenden Raum von dem einen Ende horizontal bis zum anderen in 45 gleiche Teile zerlegt denkt und so viel Teile für den schwarzen Strich nimmt, als der darzustellende Winkel Grade hat, während der übrige Raum weifs bleibt. Zusammenhängend soll jedoch die schwarze und weiſse Fläche nicht liegen, sondern abwechselnd die Strichzeichnung erfolgen, weshalb das Verhältnis von Schwarz zu Weiſs auch für zwei benachbarte Felder gelten muſs. Es muſs sich also der schwarze Strich zum weiſsen Zwischenraume verhalten wie der gegebene Böschungswinkel zu seiner Ergänzung auf 45^0, also wie $\alpha : (45^0 - \alpha)$. Für $\alpha = 25^0$ ist z. B. das Verhältnis der schwarzen und weiſsen Strichbreiten $25 : (45 - 25) = 5 : 4$; für $\alpha = 10^0$ ist es $10 : 35 = 2 : 7$. Es wird dies versinnlicht durch die Figur 268.

Fig. 268.



Umgekehrt läſst sich aus dem Verhältnisse von Schwarz zu Weiſs der Böschungswinkel berechnen; ist dasselbe $m : n$, so ist

$$\alpha : (45^0 - \alpha) = m : n$$

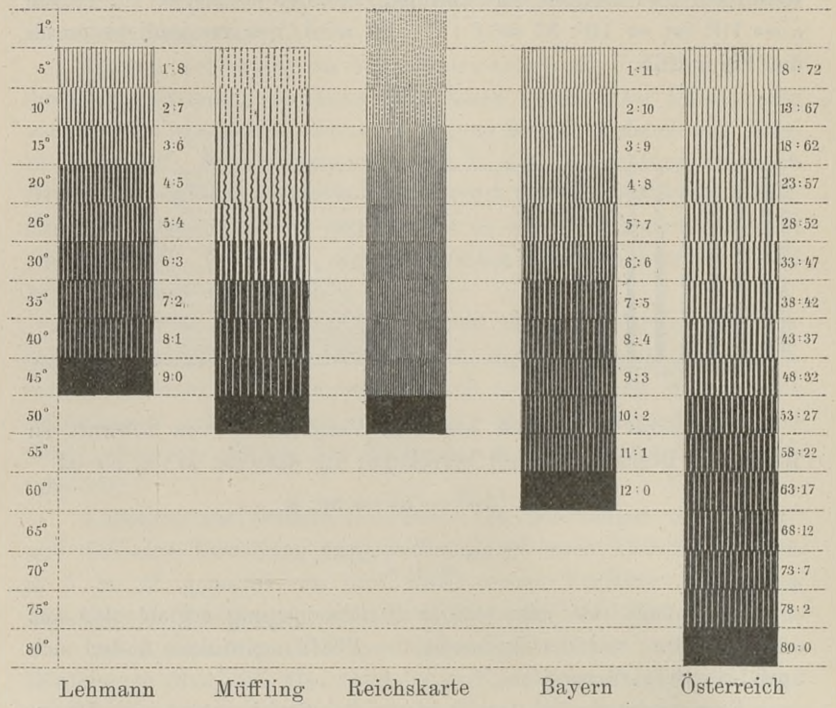
$$\alpha = \frac{m}{m + n} \cdot 45^0.$$

Die Länge der jedesmaligen Strichzeichnung ergiebt sich aus dem Gesagten; mit der Änderung des Böschungswinkels ändert sich auch die Schraffierung.

Eine Änderung in der Richtung der Striche zeigt eine Hangänderung in der Natur an. Dieses folgt aus dem oben Gesagten, wonach die Striche senkrecht zur Horizontalen stehen müssen. Der Zusammenhang zwischen Horizontalkurven und Bergstrichen ergiebt sich demnach aus folgender Überlegung. Eine Linie, welche die Bergstriche senkrecht schneidet, läuft horizontal; eine Linie, die in der Richtung der Bergstriche liegt, diesen also parallel ist, hat die gröſste Neigung; und eine Linie, welche die Bergstriche schräg durchschneidet, ist geneigt, und zwar um so stärker, je mehr ihre Richtung sich derjenigen der Bergstriche nähert.

Will man hiernach eine Schlucht darstellen, deren Sohle horizontal verläuft, so werden zu beiden Seiten des hellen Streifens die Bergstriche senkrecht stehen; ist die Sohle geneigt, so müssen die Striche einen spitzen Winkel mit ihr bilden. Haben die Hänge zu beiden Seiten der Schlucht die gleiche Neigung, so ist auch der Winkel in der Zeichnung beiderseits der gleiche; sind die Neigungen in der Richtung der Schlucht verschieden, so deutet der spitzere Winkel die schwächere Neigung an.

Fig. 269.



Die Bergzeichnung von Lehmann hat für militärische Zwecke eine Verbesserung durch den General von Müffling 1821 erfahren. Derselbe behielt das Lehmannsche Prinzip inbetreff des Verhältnisses von Schwarz zu Weifs bei, gab aber den schwarzen Strichen für gewisse Böschungswinkel eine besondere Form und nahm für einige Böschungen auch in der Anordnung der schwarzen und weifsen Felder eine Abänderung vor, er wechselte für kleinere Räume auch in den Strichstärken. (Fig. 269).

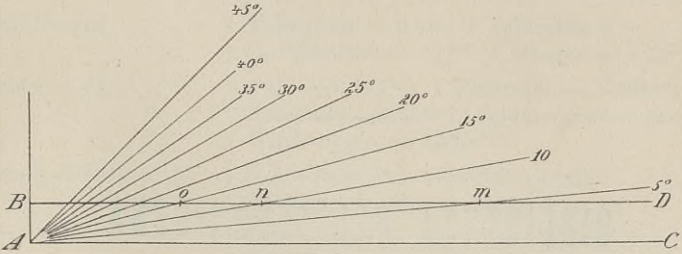
Der Vorzug dieser Kartenmanier liegt darin, das die Herstellung der Karte weniger grofse Aufmerksamkeit erfordert und der Böschungswinkel schärfer in die Augen springt. Auch Neigungen bis 10^0 sind danach leichter zu kennzeichnen.

Ein Nachteil der Karten mit reiner Bergstrichzeichnung liegt darin, dafs man die absoluten Höhen nicht ablesen kann.

Eine mit Höhenkurven versehene Karte soll durch Einzeichnung von Bergstrichen schneller und bequemer lesbar gemacht werden. Der Zeichner mufs an jeder Stelle den Böschungswinkel kennen, um danach gemäfs Fig. 269 das Verhältnis von Schwarz zu Weifs auswählen zu können. Zu dem Zwecke fertigt er den in § 80 erwähnten Böschungsmafsstab an. Entweder berechnet er aus der bekannten Schichthöhe h der Niveaulinien und dem von 5^0 zu 5^0 steigenden Winkel α die horizontale Entfernung e, oder er stellt sich den Böschungsmafsstab durch Zeichnung her.

In Fig. 270 stellt AB im Mafsstabe der Karte die Schichthöhe h dar und in A ist das Lot AC errichtet. AB mufs die

Fig. 270.



eine bekannte Kathete in dem rechtwinkligen Dreiecke werden, in welchem die AB gegenüberliegenden Winkel 5^0, 10^0, 15^0 u. s. w. sind; die andere Kathete ist gesucht. Entweder müssen wir nun in B die Winkel 85^0, 80^0, 75^0 u. s. w. anlegen und erhalten dadurch auf AC die gesuchten Strecken, oder wir legen an AC im Punkte A die Winkel 5^0, 10^0 u. s. w. an und finden die Strecken auf BD. Die Figur veranschaulicht das erstere, wenn man sie auf den Kopf stellt. Die Schnittpunkte von BD mit den losen Schenkeln der Winkel bestimmen von B aus diejenigen Strecken, welche als kürzeste Abstände an der betreffenden Stelle zwischen die Kurven passen müssen, um die gröfste Neigung des Bodens daselbst anzuzeigen. Durch diese Strecken werden auch die Längen der Bergstriche bestimmt. Ist ein Hang ganz gleichmäfsig geneigt und durch Bergstriche dargestellt, so ersieht man aus dem Verhältnisse von Schwarz zu Weifs den Böschungswinkel und kann durch Eintragung von Bo, Bn, Bm oder einer andern Strecke in der

Richtung der Striche die Anzahl der äquidistanten Schichten von der Höhe h finden.

In unserm Falle, wo es sich um die Ergänzung der Kurven durch Bergstriche handelt, greift man umgekehrt mit dem Zirkel die horizontalen kürzesten Abstände je zweier Kurven ab, trägt die Strecken von B aus auf BD und sieht nach, welchen Winkelschenkel die zweite Spitze trifft. Die gefundenen Winkel trägt man mit Bleistift in die Karte ein.

Die Zeichnung beginnt mit den Kuppen und wird von oben nach unten fortgeführt. Die Anzahl der schwarzen Striche, welche auf einen bestimmten Raum kommen, ist von dem Maſsstabe der Karte abhängig und vorgeschrieben.

A. zur Megede: Wie fertigt man technische Zeichnungen? 1,60 Mk. Inbetreff der Terrainzeichnung sei verwiesen auf das vortreffliche Werk von Zondervan: Allgemeine Kartenkunde. 1901.

Ältere deutsche und ausländische Mafse.

Preufsen (alte Provinzen)	1 Fufs = 0,314^{m}; 1 Ruthe = 3,766^{m}; 1 Meile = 7533^{m}; 1 Q.-Ruthe = 14,185^{qm}; 1 Morgen = 0,2553^{ha}.
Hannover	1 Fufs = 0,292^{m}; 1 Ruthe = 4,674^{m}; 1 Q.-Ruthe = 21,84^{qm}; 1 Morgen = 0,2621^{ha}.
Kurhessen	1 Katasterfufs = 0,285^{m}; 1 Katasterruthe = 3,989^{m}; 1 Acker = 0,2387^{ha}.
Hessen-Nassau	1 Feldschuh = 0,5^{m}; 1 Feldruthe 5^{m}; 1 Q.-Feldruthe = 25^{qm}; 1 Morgen = 0,25^{ha}.
Frankfurt a. M.	1 Fufs = 0,285^{m}; 1 Feldruthe = 3,558^{m}; 1 Waldruthe = 4,511^{m}; 1 Feldmorgen = 0,2025^{ha}; 1 Waldmorgen = 0,3256^{ha}.
Schleswig-Holstein.....	1 Fufs = 0,287^{m}; 1 Ruthe = 4,585^{m}; 1 Holsteinische Tonne = 0,5046^{ha}.
Bayern	1 Fufs = 0,292^{m}; 1 geometr. Ruthe = 2,919^{m}; 1 Tagewerk = 0,3407^{ha}.
Königr. Sachsen.	1 Fufs = 0,283^{m}; 1 Feldruthe = 4,295^{m}; 1 Strafsenbauruthe = 4,531^{m}; 1 Acker = 0,5534^{ha}.
Württemberg..	1 Fufs = 0,286^{m}; 1 Ruthe = 2,865^{m}; 1 Morgen = 0,3152^{ha}.
Baden	1 Fufs = 0,3^{m}; 1 Ruthe = 3^{m}; 1 Morgen = 0,36^{ha}.
Hessen-Darmstadt.....	1 Fufs = 0,25^{m}; 1 Morgen = 0,25^{ha}.
Mecklenburg-Schwerin.	1 Ruthe Feldmafs = 4,656^{m}; 1 Morgen = 0,6504^{ha}.
Mecklenburg-Strelitz ..	1 Feldmesserfufs = 0,466^{m}; 1 Feldruthe = 4,656^{m}; 1 Morgen = 0,2168^{ha}.
Grofsh. Sachsen	1 Fufs = 0,282^{m}; 1 Ruthe = 4,512^{m}; 1 Acker = 0,2850^{ha}.
Oldenburg	1 Fufs = 0,296^{m}; 1 Ruthe = 5,326^{m}; 1 Jück = 0,4538^{ha}.
Braunschweig	1 Fufs = 0,285^{m}; 1 Ruthe = 4,566^{m}; 1 Feldmorgen = 0,2502^{ha}; 1 Waldmorgen = 0,3335^{ha}.

Sachsen-Meiningen.....	1 Vermessungsfufs = 0,304 m; 1 Ruthe = 4,256 m; 1 Acker = 0,2898 ha.
Sachsen-Altenburg.....	1 Vermessungsfufs = 2 Fufs = 0,568 m; 1 Ruthe = 5,676 m; 1 Acker = 0,6443 ha.
Sachsen-Coburg-Gotha..	1 Fufs = 0,304 m; 1 Ruthe = 4,256 m; 1 Acker = 0,2898 ha; 1 Vermess. oder Waldmorgen = 0,2553 ha.
Schwarzburg-Rudolstadt	1 Fufs = 0,282 m; 1 Ruthe = 4,515 m; 1 Acker = 0,3262 ha.
Lippe-Detmold........	1 Fufs = 0,290 m; 1 Ruthe = 4,632 m; 1 Morgen = 0,2575 ha.
Schaumburg-Lippe.....	1 Fufs = 0,290 m; 1 Ruthe = 4,642 m; 1 Morgen = 0,2585 ha.

Anhalt, Schwarzburg-Sondershausen und Waldeck wie in Preufsen.

Österreich.............	1 Wiener Klafter = 6 Fufs = 1,896 m; 1 Joch = 0,5755 ha.
Dänemark............	1 Fufs = 1 Preufs. Fufs = 0,314 m.
Schweden.............	1 Fufs = $^1/_6$ Faden = 0,297 m.
Rufsland..............	1 Fufs = 0,305 m; 1 Saschen = 2,134 m; 1 Werst = 1067 m.
England u. Nordamerika	1 Yard = 0,914 m; 1 Fufs = 0,305 m; 1 Acre = 0,4047 ha.
Niederlande...........	1 Amst. Roede = 13 Voet = 3,681 m.
Belgien...............	1 Perche = 20 Pieds = 5,515 m.
Schweiz...............	1 Ruthe = 10 Fufs = 3 m.
China.................	1 Pu = 5 Tschih = 1,237 m.
Japan.................	1 Ken = 6 Sasi = 1,820 m.

Alphabetisches Inhaltsverzeichnis.

H.

I.

K.

O.

P.

Q.

R.

S.

Z.

Berichtigungen:

Seite	8	Zeile	3	von	oben	lies	206 265 statt 260 265
„	48	„	14	„	„	„	Vielfache „ Vierfache
„	55	„	16	„	„	„	Stativbeine statt Stativlinie
„	63	„	12	„	unten	„	geneigtem „ geeignetem
„	64	„	13	„	„	„	Mitte des achtzehnten Jahrhunderts
„	200	„	19	„	oben	„	Luftraum statt Lichtraum
„	287	„	1	„	„	„	$y_a = 0$ „ $x_a = 0$.