VORLESUNGEN

ÜBER

RIEMANN'S THEORIE

DER

ABEL'SCHEN INTEGRALE

VON

CARL NEUMANN.

MIT 102 HOLZSCHNITTEN UND EINER LITHOGRAPHIRTEN TAFEL.

Władysław Kretkowski

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1865.

Dublet do sygn. Matem 3185

Vorwort.

In der vor vierzehn Jahren von Riemann veröffentlichten Schrift: „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse“*) finden sich zwei Gedanken ausgesprochen, die von fundamentaler Bedeutung sind.

Während man bis dahin bei Behandlung solcher Functionen ausging von einem Ausdruck der Function, durch welchen ihr Werth für jeden Werth des Arguments definirt wird, erkannte Riemann, dass es für viele Untersuchungen zweckmässiger und natürlicher ist, die Functionen zu definiren durch gewisse Merkmale ihrer Stetigkeit oder Unstetigkeit. Wenn dieser Gedanke auch nicht vollständig neu ist, sondern in seinen ersten Anfängen weiter zurückreicht, so hat doch Riemann zuerst sein volles Gewicht erkannt, und zuerst denselben, entkleidet von aller fremdartiger Beimischung, in allgemeiner und zugleich bestimmter Weise ausgesprochen.

Vollständig neu ist der zweite Gedanke. Die von Gauss angegebene Methode, die Werthe einer von einem complexen Argument abhängenden Function auf einer Fläche auszubreiten, war nur anwendbar auf einwerthige Functionen. Riemann zeigte, dass die mehrwerthigen Functionen einer ganz ähnlichen Behandlung fähig sind, sobald man Flächen in Anwendung bringt, die aus mehreren über einander liegenden, an einzelnen Stellen mit einander verwachsenen Blättern bestehen, und die, was ihre nähere Beschaffenheit anbelangt,

*) Doctor-Dissertation. Göttingen 1851.

abhängig sind von der individuellen Natur der gerade betrachteten Function.

Es scheinen diese Gedanken zu Anfang wenig beachtet zu sein. Welcher Wirkung dieselben aber fähig sind, zeigte sich bald und in überraschender Weise, als Riemann dieselben in Anwendung brachte auf die Elliptischen und Abelschen Integrale, und als es ihm glückte, in diesen Regionen zu einer Theorie*) zu gelangen, die über die früher inne gehaltenen Grenzen weit hinausreichte, Vieles aufklärte, was bis dahin dunkel war, und Manches vereinigte, was früher getrennt erschien.

In einem Punct scheint die Theorie allerdings mangelhaft zu sein. Sie zeigt, wie die Umkehrung der Abel'schen Integrale, sobald die ϑ-Function einmal bekannt ist, mit Hülfe dieser Function bewerkstelligt werden kann; sie giebt hingegen keinen Aufschluss über die innere Nothwendigkeit, welche von den Abel'schen Integralen zur Bildung jener ϑ-Function hinleitet. Doch wird dieser Uebelstand ohne Zweifel von selber verschwinden, sobald die Riemann'schen Gedanken und die durch sie begründete neue Anschauungsweise erst in weiterem Umfange zur Herrschaft gelangt sein werden.

Wie gewaltig nämlich die Erfolge auch sein mögen, welche im Gebiet der Elliptischen und Abel'schen Integrale durch die neue Anschauungsweise errungen wurden, so sind sie doch nur als ein erstes Beispiel zu betrachten. Es giebt andere Theile der mathematischen Wissenschaft, auf welche jene Anschauungsweise wahrscheinlich von nicht minder kraftvoller Wirkung sein wird.

Dass bisher wenig geschehen, was solche Erwartungen rechtfertigt, hat seinen Grund darin, dass die neuen Gedanken, und dass namentlich die mit diesen zusammenhängenden neuen Methoden sich noch nicht hinreichend Bahn gebrochen haben.

Um mich deutlicher ausdrücken zu können, erinnere ich an die Differential- und Integral-Rechnung. Die dieser Dis-

---

*) Riemann's Theorie der Abel'schen Functionen, und drei andere dazu gehörige Aufsätze in Borchardt's Journal. Band 54.

ciplin zu Grunde liegenden Gedanken sind ihrem Wesen nach einfach, an Zahl geringe. Um aber diese Gedanken benutzen zu können, bedarf es nicht allein ihrer Kenntniss, sondern auch eines sorgfältigen und mühsamen Studiums der aus ihnen entspringenden Methoden. Ebenso verhält es sich mit der durch Riemann begründeten neuen Disciplin. Auch hier liegt eine weite Kluft zwischen der Kenntniss der einfachen Grundgedanken und zwischen der Kenntniss der sich anschliessenden Methoden.

Allerdings sind diese Methoden von Riemann entwickelt, entwickelt in ansehnlichem Umfange. Wer sie aber aus diesen Entwickelungen kennen lernen will, hat einen beschwerlichen und steil ansteigenden Weg vor sich, von vielfach wechselnder Richtung.

Eine Vorlesung, die ich im Sommersemester 1863 an der Universität Halle über diesen Gegenstand hielt, veranlasste mich, nach einem Wege zu suchen, der ein möglichst bequemes und stetiges Ansteigen gestattet, und der zugleich in mässigen Intervallen auf Ruhepuncte führt, von denen aus die jedesmal zurückgelegte Wegstrecke deutlich übersehen werden kann. Zugleich schien es, falls der gewählte Weg die aufzuwendende Mühe lohnen sollte, nothwendig, von Anfang an ein festes Ziel ins Auge zu fassen, und Alles, was zu weit ausser der so bestimmten Richtung lag, vorläufig unbeachtet zu lassen. Es darf daher nicht befremden, wenn in dem vorliegenden Lehrbuch, welches im Wesentlichen den Inhalt der damals gehaltenen Vorlesung ausmacht, Manches fehlt, was an und für sich wichtig ist, z. B. fast Alles, was auf die Convergenz der Reihen Bezug hat.

Während ich übrigens in jener Vorlesung nur bis zur Umkehrung der Elliptischen Integrale vorzudringen für angemessen fand, bin ich gegenwärtig weiter gegangen, nämlich bis zur Umkehrung der Abel'schen Integrale*). Ausser-

*) Der letzte Theil des vorliegenden Lehrbuchs führt zu Resultaten, die ich in gedrängter Kürze und ohne weitere Begründung schon früher veröffentlicht habe in einer kleinen Schrift: „Die Umkehrung der Abel'schen Integrale“, Halle 1863.

dem ist in der Zwischenzeit auch Manches geändert, was damals nicht anschaulich genug hervortrat, oder nicht hinreichend strenge zu sein schien.

Meine Darstellung fusst ausschliesslich auf dem Studium der von Riemann veröffentlichten und bereits genannten Abhandlungen*). Was im Lauf der letzten Jahre (in directer oder indirecter Weise) durch die Schriften von Roch und Prym über Riemann's Vorlesungen bekannt wurde**), konnte nicht mehr von Einfluss werden auf das vorliegende Lehrbuch, welches damals in Plan und Anordnung bereits eine ihm eigenthümliche und feste Gestaltung gewonnen hatte.

Als meine Arbeit fast völlig zum Abschluss gebracht war, erschien das schätzbare Werk von Durège***). In demselben zeigte sich Manches behandelt, was ich ebenfalls bearbeitet hatte, Manches auch in helles Licht gestellt, was in meiner Arbeit nur schwach angedeutet war oder wohl ganz fehlte. Im Ganzen erschienen Ziel und Anordnung des Werks von Durège von denen des meinigen so wesentlich verschieden, dass ich die Veröffentlichung meiner Arbeit keinen Augenblick beanstandet habe.

Ich glaube, dass die Schwierigkeiten, welche dem Verständniss der Riemann'schen Abhandlungen entgegenstehen, durch das vorliegende Lehrbuch beseitigt sein werden. Ausgenommen bleibt dabei allerdings ein wesentlicher Punct,

---

*) Erwähnen muss ich dabei jedoch eines Gedankens, der mir aus Riemann's Vorlesungen durch mündliche Ueberlieferung zu Ohren kam, und der auf meine Darstellung von nicht geringem Einfluss wurde. Dieser Gedanke besteht in der Projection der auf der Horizontal-Ebene ausgebreiteten Functionswerthe nach einer Kugelfläche hin. Ich habe dieser (wie ich glaube nur beiläufig) von Riemann angegebenen Projection noch eine zweite (die Projection von der Kugelfläche auf die Antipoden-Ebene) hinzugefügt; und glaube, dass diese geometrischen Vorstellungen, obwohl für die Wissenschaft selber unwesentlich, für die erste Einführung in die von Riemann begründete neue Disciplin von grossem Vortheil sein werden.

**) Roch's Aufsätze im Schlömilch'schen Journal. Prym, Theoria nova functionum ultraellipticarum. Dissertatio inauguralis. Berlin, 1863.

***) Durège, Elemente der Theorie der Functionen. Leipzig, 1864.

welcher in meine Darstellung ihrem ganzen Gange nach nicht hineinpasste, nämlich die Darlegung und Anwendung des Dirichlet'schen Princips. Das Wesentliche hierüber gedenke ich bei späterer Gelegenheit kurz zusammenzustellen*).

Basel, Januar 1865.

Der Verfasser.

---

*) Solches ist inzwischen bereits geschehen durch eine kleine Schrift, die gegenwärtig (October 1865) im Druck begriffen ist, und die den Titel führt: „Das Dirichlet'sche Princip in seiner Anwendung auf die Riemann'schen Flächen."

Inhaltsverzeichniss.

Erste Vorlesung.

Definition der Exponential-Function, der Functionen Sinus und Cosinus, und der ϑ-Functionen.

Zweite Vorlesung.

Functionen mit zwei reellen Argumenten in ihrer Ausbreitung auf der Horizontalebene.

Dritte Vorlesung.

Functionen mit einem complexen Argument in ihrer Ausbreitung auf einer Elementarfläche.

Vierte Vorlesung.

Functionen mit einem complexen Argument in ihrer Ausbreitung auf der Kugelfläche.

Fünfte Vorlesung.

Einführung der Riemann'schen ebenen Flächen und der Riemann'schen Kugelflächen.

Sechste Vorlesung.

Reduction einer Riemann'schen Kugelfläche auf ein System von Elementarflächen.

Siebente Vorlesung.

Functionen mit einem complexen Argument in ihrer Ausbreitung auf einer Riemann'schen Kugelfläche.

Achte Vorlesung.

Verwandlung einer Riemann'schen Kugelfläche durch geeignete Schnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche.

Neunte Vorlesung.

Die Umkehrung des elliptischen Integrales.

Zehnte Vorlesung.

Die Abel'schen Integrale.

Elfte Vorlesung.

Die von den Abel'schen Integralen abhängende ϑ-Reihe.

Zwölfte Vorlesung.

Die Umkehrung der Abel'schen Integrale.

Erste Vorlesung.

Definition der Exponential-Function, der Functionen Sinus und Cosinus, und der ϑ-Functionen.

Erster Abschnitt. Ueber die Definition der Function e^{x+iy}.

Die ins Unendliche fortlaufende Reihe

$$(1)\qquad 1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\frac{z^4}{1.2.3.4}+\cdots$$

ist bekanntlich — gleichgültig ob die Grösse z*) reell oder imaginär ist — jederzeit convergent. Die Summe dieser Reihe — sie mag $f(z)$ genannt werden — wird also eine von z abhängende Function sein, welche für jedwedes Argument z einen völlig bestimmten Werth besitzt.

Wir wollen nun diese Function $f(z)$ näher untersuchen, und mehrere merkwürdige Eigenschaften derselben zu Tage treten lassen.

Stellen wir den Werth von $f(z)$ nach einander für zwei verschiedene Argumente, für das Argument z, und für das Argument Z auf;

$$(2)\qquad f(z)=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots,$$

$$(3)\qquad f(Z)=1+\frac{Z}{1}+\frac{Z^2}{1.2}+\frac{Z^3}{1.2.3}+\ldots.$$

so ergiebt sich durch Multiplication dieser beiden Werthe:

---

*) Unter x und y sollen — wenigstens von Anfang — immer nur reelle Grössen verstanden; imaginäre Grössen hingegen, also Grössen von der Form $x+y\sqrt{-1}$ oder $x+yi$ sollen mit z bezeichnet werden.

$$(4)\qquad \begin{aligned} f(z)\,.\,f(Z) = 1 + \frac{z}{1} &+ \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \cdots \\ + \frac{Z}{1} &+ \frac{zZ}{1} + \frac{z^2Z}{1.2} + \cdots \\ &+ \frac{Z^2}{1.2} + \frac{zZ^2}{1.2} + \cdots \\ &\qquad + \frac{Z^3}{1.2.3} + \cdots \\ &\qquad\qquad + \cdots, \end{aligned}$$

oder, falls man die Glieder einer jeden Verticalreihe unter einander vereinigt:

$$(5)\quad f(z)\,.\,f(Z) = 1 + \frac{z+Z}{1} + \frac{(z+Z)^2}{1.2} + \frac{(z+Z)^3}{1.2.3} + \cdots,$$

d. i. zufolge (2):

$$(6)\qquad f(z)\,.\,f(Z) = f(z+Z).$$

Man kann diese Formel leicht verallgemeinern. Nimmt man nämlich in (6) für z den Werth z_1, für Z den Werth z_2, sodann für z den Werth $z_1 + z_2$, für Z den Werth z_3, endlich für z den Werth $z_1 + z_2 + z_3$, für Z den Werth z_4, wo z_1, z_2, z_3, z_4 lauter beliebig gewählte Grössen vorstellen sollen, so ergeben sich der Reihe nach folgende drei Formeln:

$$\begin{aligned} f(z_1)\,.\,f(z_2) &= f(z_1 + z_2), \\ f(z_1 + z_2)\,.\,f(z_3) &= f(z_1 + z_2 + z_3), \\ f(z_1 + z_2 + z_3)\,.\,f(z_4) &= f(z_1 + z_2 + z_3 + z_4). \end{aligned}$$

Und hieraus ergiebt sich durch Multiplication:

$$f(z_1)\,.\,f(z_2)\,.\,f(z_3)\,.\,f(z_4) = f(z_1 + z_2 + z_3 + z_4).$$

Ebenso wird ganz allgemein, falls $z_1, z_2, \ldots z_n$ irgend welche n Grössen sind, jederzeit:

$$(7)\qquad f(z_1)\,.\,f(z_2)\ldots f(z_n) = f(z_1 + z_2 + \ldots + z_n);$$

und, wofern man für alle jene n Grössen e i n und d e n s e l b e n Werth z nimmt:

$$(8)\qquad (f(z))^n = f(nz)$$

sein. Die in (6) und (8) enthaltenen Ergebnisse lassen sich so aussprechen:

Die von dem Argumente z abhängende Function

$$f(z) = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

besitzt folgende beiden Eigenschaften:

Erste Eigenschaft. Versteht man unter z und Z zwei ganz *beliebige reelle oder imaginäre Grössen, so ist das Product von $f(z)$ und $f(Z)$ jederzeit gleich dem Werthe von $f(z+Z)$.*

Zweite Eigenschaft. Versteht man unter z eine ganz beliebige reelle oder imaginäre Grösse und unter n irgend welche positive ganze Zahl, so ist die n^{te} Potenz von $f(z)$ jederzeit gleich dem Werthe von $f(nz)$.

Mit Hülfe dieser beiden Eigenschaften ist es nun sehr leicht, die Werthe der Function $f(z)$ für jedes beliebige reelle Argument z zu berechnen. Zunächst ergiebt sich aus der Definition von $f(z)$, dass

$$f(0) = 1 \tag{1}$$

ist. Nehmen wir zweitens für z den Werth 1, so erhalten wir

$$f(1) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots,$$

und hieraus durch wirkliche Ausführung der Summation:

$$f(1) = 2{,}718\ldots.$$

Diese Zahl 2,718 ... spielt bekanntlich in der Mathematik eine grosse Rolle; sie mag wie gewöhnlich mit e bezeichnet werden. Also:

$$f(1) = 2{,}718\ldots = e. \tag{2}$$

Verstehen wir unter p irgend welche positive ganze Zahl, so erhalten wir zufolge der zweiten Eigenschaft von f folgende beiden Gleichungen:

$$(f(1))^p = f(p.1) = f(p),$$
$$\left(f\left(\frac{1}{p}\right)\right)^p = f\left(p.\frac{1}{p}\right) = f(1),$$

also mit Zuziehung des in (2) für $f(1)$ gefundenen Werthes:

$$e^p = f(p),$$
$$\left(f\left(\frac{1}{p}\right)\right)^p = e,$$

d. i.

$$f(p) = e^p, \tag{3}$$

$$f\left(\frac{1}{p}\right) = \sqrt[p]{e} = e^{\frac{1}{p}}. \tag{4}$$

Versteht man ferner unter q irgend welche andere positive ganze Zahl, so ergiebt sich, wiederum zufolge der zweiten Eigenschaft von f:

$$\left(f\left(\frac{p}{q}\right)\right)^q = f(p),$$

also mit Zuziehung von (3)

$$(5) \qquad f\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{e^p} = e^{\frac{p}{q}}.$$

Endlich erhalten wir zufolge der ersten Eigenschaft von f:

$$f\left(-\frac{p}{q}\right) \cdot f\left(\frac{p}{q}\right) = f(o),$$

also mit Zuziehung von (1) und (5):

$$f\left(-\frac{p}{q}\right) \cdot \sqrt[q]{e^p} = 1,$$

d. i.

$$(6) \qquad f\left(-\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{\sqrt[q]{e^p}} = e^{-\frac{p}{q}}.$$

Da p und q irgend welche positive ganze Zahlen sind, so wird der Werth von $\frac{p}{q}$, durch geeignete Annahme dieser beiden Zahlen, jeder beliebig gegebenen reellen Grösse unendlich nahe gebracht werden können, vorausgesetzt, dass die gegebene Grösse positiv ist; und ebenso wird der Werth von $-\frac{p}{q}$ jener beliebig gegebenen reellen Grösse in dem Falle unendlich nahe gebracht werden können, dass dieselbe negativ ist. Sämmtliche überhaupt vorhandenen reellen Grössen sind daher in den beiden Formen $\frac{p}{q}$ und $-\frac{p}{q}$ enthalten.

Die Gleichungen (5) und (6) zeigen aber, dass der Werth von $f(z)$ für $z = \frac{p}{q}$ oder für $z = -\frac{p}{q}$ dadurch erhalten wird, dass man die Zahl e zur Potenz $\frac{p}{q}$ oder zur Potenz $-\frac{p}{q}$ erhebt, und führen demnach zu Folgendem.

Für jedwedes reelle Argument z ist der Werth der Function

$$f(z) = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots$$

gleich e^z, d. i. gleich der z^{ten} Potenz von 2,718 . . .

Ist irgend welche reelle Grösse x gegeben, so werden wir gegenwärtig, um die x^{te} Potenz von 2,718 . . . oder e zu erhalten, zwei von einander völlig verschiedene Methoden — nach Belieben die eine oder die andere — in Anwendung bringen können. Die eine Methode ist die gewöhnliche, althergebrachte; sie besteht bekanntlich darin, dass man zuvörderst einen aus zwei positiven ganzen Zahlen p, q zusammengesetzten Bruch $\pm \frac{p}{q}$ aufsucht, welcher der gegebenen Grösse x seinem Werthe nach möglichst nahe liegt, dass man sodann aus der Zahl 2,718 . . . die q^{te} Wurzel auszieht, und dass man endlich den für diese Wurzel erhaltenen Werth zur $\pm\, p^{\text{ten}}$ Potenz erhebt. Die andere Methode ist jener gegenüber als eine neue zu bezeichnen; sie wird uns durch den eben gefundenen Satz eröffnet, und besteht darin, dass man zunächst für die gegebene Grösse x die Reihe

$$1,\ \frac{x}{1},\ \frac{x^2}{1.2},\ \frac{x^3}{1.2.3},\ \frac{x^4}{1.2.3.4},\ \ldots\ldots$$

aufstellt, und sodann möglichst viele Glieder dieser Reihe zusammen addirt. Beide Methoden leiden, falls es sich um die wirkliche numerische Berechnung der x^{ten} Potenz von e handelt, an demselben Fehler, nämlich an dem Fehler der Ungenauigkeit; denn beide werden jederzeit nur näherungsweise richtige Resultate liefern, ein Umstand, der übrigens um so weniger von Bedeutung ist, als auch die Zahl e selber, was ihren numerischen Werth anbelangt, immer nur näherungsweise angegeben werden kann. Wie dem auch sei — jedenfalls gelangen wir in Hinblick auf die beiden verschiedenen Methoden, durch welche der Werth von e^x ermittelt werden kann, zu folgendem Ausspruch:

Versteht man unter x irgend welche reelle Grösse, so können für die Bedeutung der Function e^x oder $(2{,}718\ldots)^x$ zwei von einander ganz verschiedene Definitionen aufgestellt werden, einerseits die gewöhnliche, auf Potenzerhebungen und Wurzelausziehungen beruhende, und andererseits diejenige, welche durch die unendliche Reihe

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

dargeboten wird. Es dürfte — wenn auch nicht völlig begründet — zur bequemern Unterscheidung zweckmässig sein, die erstere Definition die algebraische, die letztere hingegen die transcendente zu nennen.

Um einen Ueberblick über die Gesammtheit der in e^x enthaltenen Werthe, d. h. einen Ueberblick über alle Werthe zu gewinnen, welche die Function e^x der Reihe nach annimmt, während der Exponent x alle zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegenden reellen Werthe durchläuft, wird theils die eine, theils auch die andere Definition von Nutzen sein.

Nehmen wir zunächst für x die auf einander folgenden ganzen Zahlen:

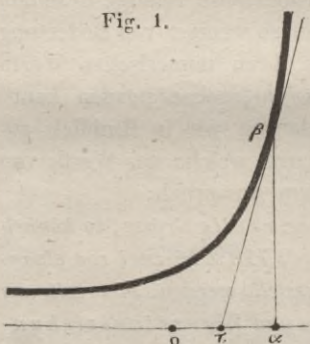
$$\ldots\ldots -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots\ldots$$

so erhalten wir für die Function e^x, ihrer algebraischen Definition zufolge, der Reihe nach die Werthe:

$$\ldots\ldots \frac{1}{eee},\ \frac{1}{ee},\ \frac{1}{e},\ 1,\ e,\ ee,\ eee,\ldots\ldots$$

also Werthe, welche für $x = +\infty$ unendlich gross, und für $x = -\infty$ unendlich klein, d. i. Null werden. Wenn wir uns demnach eine Curve vorstellen, welche die auf einander folgenden Werthe von x zu Abscissen, und die zugehörigen Werthe von e^x zu Ordinaten hat, so wird diese Curve — vorausgesetzt, dass wir uns die Abscissenachse horizontal und von links nach rechts fortlaufend denken — im Grossen und Ganzen etwa die in beistehender Figur (Fig. 1) angegebene Gestalt besitzen. Sie wird nämlich ihrem ganzen Laufe nach oberhalb der Abscissenachse liegen, nach rechts hin unendlich hoch über diese Achse emporsteigen, und nach links hin unendlich nahe zu derselben herabsinken.

Fig. 1.



Eine genauere Vorstellung von dieser Curve gewinnen wir nun aber vermittelst der transcendenten Definition von e^x. Dieser zufolge ist nämlich:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots,$$

mithin:

$$\frac{de^x}{dx} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots,$$

d. i.

$$\frac{de^x}{dx} = e^x.$$

Bezeichnen wir also irgend eine Abscisse $o\alpha$ unserer Curve mit x, und die zugehörige Ordinate $\alpha\beta$ mit X, so wird

$$\frac{dX}{dx} = X$$

sein. Da nun die Curve ihrem ganzen Laufe nach oberhalb der Abscissenachse liegt, die Ordinate X also beständig positiv bleibt, so wird dieser Gleichung zufolge der Werth des Differentialquotienten $\frac{dX}{dx}$ ebenfalls stets positiv sein. Somit ergiebt sich, dass die Curve von links nach rechts hin beständig im Steigen begriffen sein muss; und ferner, dass die Curve unendlich weit nach links hin mit der Abscissenachse parallel, und unendlich weit nach rechts hin senkrecht zu jener Achse ist.

Uebrigens kann man, um die Curve noch genauer kennen zu lernen, mit Hülfe der Gleichung

$$\frac{dX}{dx} = X,$$

oder

$$\frac{dX}{dx} = \frac{X}{1}$$

auch leicht eine Methode finden, um in jedwedem Punct der Curve die Tangente derselben zu construiren. Ist nämlich (Fig. 1) $\alpha\beta$ irgend welche Ordinate der Curve, so wird man auf der Abscissenachse nur einen Punct τ zu construiren haben, welcher vom Puncte α um 1 entfernt ist; eine von τ nach β fortlaufende gerade Linie wird alsdann die Tangente der Curve im Puncte β sein.

Der Begriff der Function e^x bleibt, falls man die primäre oder algebraische Definition zu Grunde legt, offenbar nur so lange in Kraft, als x reell ist, und erlischt, sobald man dem Exponenten x irgend welche imaginäre Werthe zuertheilt. Anders verhält es sich mit der Function e^x, sobald man die secundäre oder transcendente Definition zu Grunde legt; thut man nämlich dies, so wird der Begriff jener Function für sämmtliche Werthe von x in Kraft bleiben — ganz gleichgültig, ob dieselben reell oder imaginär sind. Der erstere Begriff waltet also nur innerhalb eines gewissen begrenzten Gebietes, der letztere hingegen völlig unumschränkt. Wir können den letztern als einen Begriff bezeichnen, welcher den ersteren in sich fasst, welcher aber über die den ersteren beengenden Schranken hinausreicht; und gelangen somit zu folgendem Ausspruch:

Definition von e^z. — Will man den Begriff der Function e^z der Art feststellen, dass derselbe nicht nur für reelle, sondern für *sämmtliche Werthe von z Bedeutung besitzt, so muss man die ursprüngliche algebraische Definition von e^z, als unzureichend, fallen lassen, und an ihrer Stelle die transcendente Definition*

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \dots$$

in Kraft treten lassen. Diese neue Definition soll in Zukunft beständig festgehalten werden; es ist bekanntlich diejenige, welche allgemein adoptirt ist.

Die Function e^z besitzt nun auch in den Fällen, wo z imaginär ist, also in den Fällen, wo es zu ihrer Definition der unendlichen Reihe

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \dots$$

bedarf, immer noch die wesentlichen Eigenschaften einer Potenz. Denn mit Hinblick auf die Ergebnisse, zu welchen wir früher (S. 2) in Betreff dieser Reihe gelangt sind, ergiebt sich sofort, dass die Formeln

$$e^z \cdot e^Z = e^{z+Z},$$
$$(e^z)^n = e^{nz}$$

Gültigkeit besitzen, gleichgültig ob man der Function e^z ihre ursprüngliche algebraische Definition, oder ob man derselben die durch jene Reihe ausgedrückte transcendente Definition zu Grunde legt.

Dies ist der Grund, weshalb man die in Rede stehende Function auch in ihrer erweiterten, durch jene Reihe dargestellten Bedeutung immer noch eine Potenz von e nennt, und zugleich der Grund, weshalb man das Symbol e^z, welches der Function zukam, so lange sie in ihr ursprüngliches enges Gebiet eingezwängt war, ungeändert hinübernimmt in das unumschränkte, allgemeine Gebiet, auf welchem sie sich gegenwärtig bewegt.

Zweiter Abschnitt. Ueber die Definition der Functionen $\sin(x + iy)$ und $\cos(x + iy)$.

Versteht man unter x eine Grösse, welche alle möglichen reellen Werthe annehmen darf, also eine Grösse, deren Werthe, geometrisch ausgedrückt, durch die auf einander folgenden Puncte einer geraden, von $-\infty$ bis $+\infty$ fortlaufenden Linie repräsentirt werden, und unter $f_1(x)$, $f_2(x)$ zwei von jener Grösse abhängende stetige Functionen, welche für $x=o$ ein und denselben Werth besitzen, und welche ausserdem beide der Differentialgleichung

$$\frac{df(x)}{dx} = C \cdot f(x)$$

Genüge leisten, wo C irgend welche Constante vorstellt; so werden diese beiden Functionen, wie man sofort übersieht, für sämmtliche Werthe von x unter einander identisch sein.

Auf Grund dieser Bemerkung können wir ohne Schwierigkeit zu einem wichtigen Zusammenhange gelangen, der zwischen der eben besprochenen Function e^z und zwischen denjenigen trigonometrischen Linien stattfindet, die man mit den Namen sinus und cosinus bezeichnet.

Nehmen wir in der Function e^z für das Argument z den Werth ix, wo $i=\sqrt{-1}$, und x irgend welche reelle Grösse vorstellen soll, so haben wir der Definition jener Function zufolge:

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1} + \frac{(ix)^2}{1.2} + \frac{(ix)^3}{1.2.3} + \ldots;$$

und hieraus ergiebt sich, wenn wir nach x differenziren:

$$\frac{de^{ix}}{dx} = i\left(1 + \frac{ix}{1} + \frac{(ix)^2}{1.2} + \ldots\right),$$

d. i.

$$(1) \qquad \frac{de^{ix}}{dx} = i \cdot e^{ix}.$$

Die Bedeutungen von $\sin x$ und $\cos x$ liegen, so lange x reell bleibt, klar zu Tage, werden nämlich, so lange solches der Fall ist, unmittelbar durch ihre geometrische Definition dargeboten. Gleichzeitig ergiebt sich aus dieser Definition auch, dass

$$(2) \qquad \frac{d \sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$$

ist. Wir bilden nun — immer unter der Voraussetzung, dass x reell bleibt — den Ausdruck:

$$\cos x + i \sin x,$$

und erhalten, wenn wir diesen Ausdruck nach x differenziren, mit Rücksicht auf (2) folgende Formel:

$$\frac{d(\cos x + i \sin x)}{dx} = -\sin x + i \cos x,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(3)\qquad \frac{d\,(\cos x + i \sin x)}{dx} = i\,(\cos x + i \sin x).$$

Die Formeln (1) und (3) zeigen, dass die Functionen

$$e^{ix} \quad \text{und} \quad \cos x + i \sin x$$

beide derselben Differentialgleichung, nämlich der Differentialgleichung

$$\frac{df}{dx} = i\,.\,f$$

Genüge leisten. Ausserdem besitzen diese Functionen für $x = 0$, wie man sofort erkennt, beide denselben Werth, nämlich den Werth 1. Daraus aber folgt, gemäss der zu Anfang gemachten Bemerkung, dass diese beiden Functionen für alle reellen Werthe von x unter einander identisch sind. Somit haben wir folgenden Satz:

Für jedwedes reelle Argument x ist der Werth der Function e^{ix} gleich dem Werthe von $\cos x + i \sin x$.

Aus der Formel

$$(4)\qquad e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

ergiebt sich, wenn wir x mit $-x$ vertauschen:

$$(5)\qquad e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Und aus diesen beiden Formeln (4) und (5) erhalten wir nun durch Addition und Subtraction sofort:

$$(6)\qquad \begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \\ \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \end{cases}$$

oder, wenn wir für e^{ix} und e^{-ix} ihre eigentlichen Bedeutungen:

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1} + \frac{(ix)^2}{1.2} + \frac{(ix)^3}{1.2.3} + + \ldots.$$

$$e^{-ix} = 1 - \frac{ix}{1} + \frac{(ix)^2}{1.2} - \frac{(ix)^3}{1.2.3} + - \ldots.$$

substituiren:

$$(7)\qquad \begin{cases} \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{1.2} + \dfrac{x^4}{1.2.3.4} - + \ldots. \\ \sin x = x - \dfrac{x^3}{1.2.3} + \dfrac{x^5}{1.2.3.4.5} - + \ldots. \end{cases}$$

Die ursprüngliche Definition für $\sin x$ und $\cos x$ ist eine rein geometrische, beruht nämlich auf gewissen Abmessungen an einem *mit dem Radius 1 beschriebenen Kreise. Diese ursprüngliche Definition kann, wie wir gegenwärtig sehen, ersetzt werden durch eine gewisse transcendente Definition, nämlich ersetzt werden durch diejenige Definition, welche durch die eben gefundenen unendlichen Reihen:*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - + \ldots$$

dargeboten wird.

Nehmen wir bei den Functionen $\sin x$ und $\cos x$ an Stelle des bisher gedachten reellen Argumentes x irgend ein imaginäres Argument $x + iy$ oder z, so lässt uns die ursprüngliche geometrische Definition völlig im Stiche, während die neue transcendente Definition nach wie vor in Kraft bleibt; wir gelangen demnach zu folgendem Ausspruch:

Definition von sin z und cos z. Will man die Begriffe der Functionen sin z und cos z der Art feststellen, dass dieselben nicht nur für reelle, sondern für sämmtliche Werthe von z Bedeutung besitzen, so muss man die ursprünglichen geometrischen Definitionen von sin z und cos z, als unzureichend, fallen lassen; und dafür die transcendenten Definitionen:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - + \ldots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - + \ldots$$

in Kraft treten lassen. Diese letztern Definitionen sollen in Zukunft beständig festgehalten werden.

Die Relationen

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

sind vorhin für den Fall bewiesen worden, dass x reell ist. Es lässt sich nun aber gegenwärtig, wenn man die für e^z, $\sin z$ und $\cos z$ festgesetzten allgemein gültigen Definitionen:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - + \ldots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - + \ldots,$$

zu Grunde legt, mit Hülfe dieser Reihen augenblicklich nachweisen, dass jene beiden Relationen auch noch dann in Kraft bleiben, wenn man das in ihnen enthaltene reelle Argument x mit irgend welchem imaginären Argumente $x + iy$ oder z vertauscht. Somit ergiebt sich folgender Satz:

Versteht man unter z irgend welche Grösse — gleichgültig ob dieselbe reell oder imaginär ist —, so wird jederzeit

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$
$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

sein.

Mit Hülfe dieses Satzes lässt sich leicht nachweisen, dass die bekannten Formeln:

$$\sin(x + y) = \sin x \,.\, \cos y + \sin y \,.\, \cos x,$$
$$\cos(x + y) = \cos x \,.\, \cos y - \sin x \,.\, \sin y,$$
$$\text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.},$$

welche sich für die Functionen sinus und cosinus auf Grund ihrer ursprünglichen geometrischen Definition ergeben, auch dann noch gültig bleiben, wenn man die in jenen Formeln enthaltenen reellen Argumente x, y mit irgend welchen imaginären Grössen vertauscht. Und in diesem Umstande liegt der Grund, weshalb man die Symbole sin und cos, welche jenen Functionen zukamen, so lange dieselben in Folge ihrer ursprünglichen geometrischen Definitionen auf ein gewisses enges Gebiet beschränkt waren, ungeändert hinübernimmt in das unumschränkte allgemeine Gebiet, welches ihnen gegenwärtig durch Zugrundelegung der transcendenten Definitionen eröffnet wird.

Dritter Abschnitt. Ueber die Definition von log $(x + iy)$; die Vieldeutigkeit dieser Function.

Wenn in der Gleichung

$$f = e^{\varphi}$$

d. i. in der Gleichung $f = (2{,}718\ldots)^{\varphi}$ die eine der beiden Grössen f, φ gegeben ist, so muss es möglich sein, den Werth der andern zu bestimmen.

Ist der Werth von φ gegeben, so bietet die Berechnung von f keinerlei Schwierigkeiten dar. Denn zufolge unserer Definition (S. 8) ist e^{φ} gleich

$$1 + \frac{\varphi}{1} + \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4} + \ldots .$$

Ist also φ gegeben, so wird man, um f zu erhalten, nur die Summe dieser Reihe zu berechnen brauchen. Allerdings wird man, in Anbetracht, dass diese Reihe sich ins Unendliche hin erstreckt, mit Hülfe derselben immer nur einen näherungsweise richtigen Werth von f erhalten können; jedenfalls aber ergiebt sich, dass durch Angabe von φ der zugehörige Werth von f eindeutig bestimmt ist, oder mit andern Worten, dass f eine eindeutige Function von φ ist.

Anders verhält es sich, wie wir sogleich sehen werden, wenn wir uns die umgekehrte Aufgabe stellen, wenn wir nämlich f als gegeben ansehen, und φ berechnen wollen. In diesem Falle werden sich nämlich für jedes gegebene f unendlich viele Werthe von φ ergeben. Man nennt, falls f gegeben ist, die zugehörige Grösse φ bekanntlich den Logarithmus oder genauer ausgedrückt den natürlichen Logarithmus von f, und bezeichnet dieselbe durch das Symbol log f.

Wir wollen den gegebenen Werth von f mit $x + iy$ und den gesuchten unbekannten Werth von φ mit $u + iv$ bezeichnen, wo u und v, ebenso wie x und y, reell, und $i = \sqrt{-1}$ sein sollen.

Es handelt sich also darum, aus der Gleichung

$$x + iy = e^{u+iv}, \tag{1}$$

oder, was dasselbe ist, aus der Gleichung

$$x + iy = e^u \cdot e^{iv} \tag{2}$$

die Werthe der beiden reellen Grössen u und v zu bestimmen. Mit Rückblick auf einen früheren Satz (S. 12) können wir diese Gleichung auch so darstellen:

$$x + iy = e^u \cdot (\cos v + i \sin v); \tag{3}$$

und es spaltet sich demnach dieselbe, wenn wir das Reelle und Imaginäre sondern, in folgende beiden Gleichungen:

$$\begin{cases} x = e^u \cdot \cos v, \\ y = e^u \cdot \sin v. \end{cases} \tag{4}$$

Aus diesen aber ergiebt sich, wenn wir den positiven Werth von $\sqrt{x^2 + y^2}$ zur Abkürzung mit r bezeichnen:

$$(5)\qquad \begin{cases} e^u = \pm\, r, \\ \cos v = \pm\, \dfrac{x}{r}, \\ \sin v = \pm\, \dfrac{y}{r}, \end{cases}$$

wo entweder durchweg das obere Zeichen $+$, oder durchweg das untere Zeichen $-$ zu nehmen ist.

Fig. 2.

Geben wir der unbekannten reellen Grösse u nach einander alle möglichen zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegenden Werthe, berechnen wir jedesmal den zugehörigen Werth von e^u, und construiren wir eine Curve, welche die Werthe von u zu Abscissen, und die zugehörigen Werthe von e^u zu Ordinaten hat, so werden wir, wie wir früher (S. 6 und 7) gesehen haben, eine Curve (Fig. 2) erhalten, welche ihrem ganzen Laufe nach oberhalb der Abscissenachse liegt, und welche von links nach rechts hin beständig im Steigen begriffen ist. Unter sämmtlichen Werthen, welche die mit dem reellen Exponenten u behaftete Grösse e^u überhaupt anzunehmen im Stande ist, befindet sich demnach kein einziger, welcher negativ wäre. Daraus folgt, dass die Gleichung $e^u = -r$ absurd sein würde, dass wir also gezwungen sind, in unseren für u und v erhaltenen Formeln (5) die oberen Zeichen zu nehmen. Es handelt sich daher um die Bestimmung von u und v vermittelst folgender Gleichungen:

$$(6)\qquad \begin{cases} e^u = r, \\ \cos v = \dfrac{x}{r}, \\ \sin v = \dfrac{y}{r}. \end{cases}$$

Durch die erste dieser Gleichungen wird der Werth von u auf eindeutige Weise bestimmt. Denn man wird, um u zu erhalten, in der vorhin construirten Curve (Fig. 2) nur diejenige Ordinate auszuwählen haben, welche die gegebene Länge r hat; die zugehörige Abscisse wird alsdann den gesuchten Werth von u darstellen. Da aber jene Curve von links nach rechts hin beständig im Steigen begriffen ist, so kann in ihr nur eine einzige Ordinate von der gegebenen Länge r enthalten sein; demnach kann sich für die Abscisse u ebenfalls nur ein einziger Werth ergeben.

Anders verhält es sich mit v. Denn aus den Gleichungen

$$\cos v = \frac{x}{r},$$
$$\sin v = \frac{y}{r}$$

ergeben sich für v unendlich viele, durch Vielfache von 2π von einander verschiedene Werthe.

Somit erhalten wir folgenden Satz:

Bezeichnet man den Logarithmus einer beliebig gegebenen Grösse $x + iy$ mit $u + iv$, setzt man also:

$$\log (x + iy) = u + iv,$$

so wird u jederzeit nur einen, v hingegen unendlich viele, durch Vielfache von 2π von einander verschiedene Werthe besitzen.

Denkt man sich die Grösse $x + iy$ nach der Gauss'schen Methode durch einen Punct auf der Horizontalebene repräsentirt, dessen Coordinaten x und y sind, und bezeichnet man den Abstand dieses Punctes vom Anfangspunct mit r, ferner den Winkel, unter welchem der eben genannte Abstand gegen die x Achse geneigt ist, mit t, so wird u durch die Gleichung

$$e^u = r$$

auf eindeutige Weise bestimmt sein, v hingegen einen Werth besitzen, welcher durch

$$v = t + n \,.\, 2\pi$$

dargestellt, nämlich mit einer beliebig veränderlichen ganzen Zahl n behaftet ist.

Vierter Abschnitt. Ueber die Periodicität der Functionen e^{x+iy}, sin $(x + iy)$, cos $(x + iy)$.

Wir wollen uns wiederum die Werthe von z oder $x + iy$ nach der Gauss'schen Methode dargestellt denken durch die Puncte einer Horizontalebene; und die Werthe untersuchen, welche die Function e^z in dem einzelnen Puncte dieser Ebene alsdann besitzen wird.

Wir beginnen mit folgender Frage. Es sei K eine beliebig gegebene, reelle oder imaginäre Constante; in welchem Punct jener Ebene ist der Werth von e^z gleich dieser Constante K?

Soll $e^z = K$ werden, so muss $z = \log K$ sein. Nun ist zufolge des vorhergehenden Satzes der Werth von $\log K$ ein vieldeutiger, nämlich von der Form $A + i\,(B + n\,.\,2\pi)$, wo A, B gewisse reelle Grössen von bestimmten Werthen sind, n hingegen eine ganze Zahl vorstellt, welche alle möglichen Werthe annehmen kann. Für den gesuchten Punct z ergiebt sich also:

$$z = \log K,$$

oder

$$z = A + i\,(B + n\,.\,2\pi),$$

oder falls wir $x + iy$ statt z setzen:

$$x + iy = A + i\,(B + n\,.\,2\pi).$$

Und hieraus ergeben sich für die Coordinaten x, y des Punctes folgende Werthe:

$$\begin{cases} x = A, \\ y = B + n\,.\,2\pi. \end{cases}$$

Demnach giebt es, weil n jede beliebige ganze Zahl sein kann, auf unserer Horizontalebene unendlich viele Puncte $x + iy$ oder z, in welchen die Function e^z den gegebenen Werth K annimmt. All diese Puncte bilden zusammen genommen eine mit der y Achse parallele Punctreihe, und zwar eine Reihe, in welcher die einzelnen Puncte durchweg in gleichem Abstande, nämlich im Abstande 2π auf einander folgen. Construiren wir daher auf der Horizontalebene einen Flächenstreifen von der Breite 2π, welcher auf der einen Seite von der x Achse, auf der andern Seite von einer mit dieser Achse parallel laufenden Linie begrenzt ist, so wird innerhalb dieses Streifens nur ein einziger Punct jener Reihe enthalten sein.

Innerhalb des in Rede stehenden Flächenstreifens wird also — können wir sagen — jederzeit ein, und immer nur ein einziger Punct vorhanden sein, in welchem die Function e^z einen beliebig gegebenen Werth K besitzt. Und verschiebt man — so können wir hinzufügen — einen zu dem Flächenstreifen gehörigen Punct in der Richtung der y Achse um die Strecke 2π, so werden die an dem ursprünglichen und an dem neuen Orte dieses

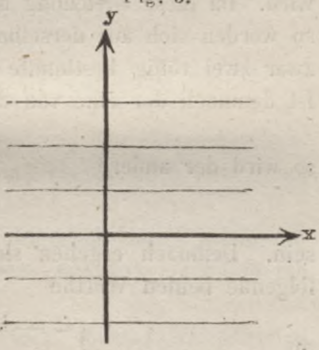
Punctes vorhandenen Werthe von e^z jederzeit unter einander identisch sein.

Construirt man demnach einen zweiten Flächenstreifen wiederum von der Breite 2π, welcher zwischen der zuletzt gezogenen Parallelen und zwischen einer andern Parallelen liegt, die von der x Achse um 4π entfernt ist, so werden die Werthe von e^z in diesem zweiten Streifen identisch mit denen sein, die in dem ersten Streifen vorhanden waren. D. h. es wird, falls wir uns die beiden Flächenstreifen auf der Horizontalebene verschiebbar, und die auf jedem derselben vorhandenen Werthe von e^z mit demselben fest verbunden denken, nur einer gewissen Verschiebung des einen Flächenstreifens bedürfen, um die auf beiden Streifen vorhandenen Werthe von e^z mit einander zur Coïncidenz zu bringen.

Es ergiebt sich somit folgender Satz (Fig. 3):

*Theilt man die Horizontalebene durch Linien, welche der x Achse parallel laufen, und im Abstande 2π auf einander folgen, in lauter einzelne Flächenstreifen, so wiederholen sich die Werthe, welche die Function e^{x+iy} oder e^z in einem dieser Streifen besitzt, von Neuem und genau in derselben Vertheilung in jedem andern Streifen. Die Function ist also eine periodische Function, und der Index ihrer Periode gleich $2\pi i$.**)

Fig. 3.



*) Puncte, in welchen die Function e^z ein und denselben Werth besitzt, bilden zusammengenommen immer eine mit der y Achse parallele Punctreihe, in welcher die Entfernung von einem zum andern Puncte hin gleich 2π ist. All diese Puncte haben demnach dieselbe x Coordinate, und y Coordinaten, welche unter einander immer um 2π verschieden sind. Bezeichnen wir demnach einen Punct der Reihe mit $x+iy$ oder z, so werden sämmtliche Puncte der Reihe durch

$$\ldots . z-6\pi i,\ z-4\pi i,\ z-2\pi i,\ z,\ z+2\pi i,\ z+4\pi i, \ldots .$$

dargestellt sein. Die Function e^z hat in all diesen Puncten ein und denselben Werth; sie bleibt also, können wir sagen, in ihrem Werthe ungeändert, wenn z um $2\pi i$ anwächst. Demnach nennt man $2\pi i$ den Index ihrer Periode.

Innerhalb eines einzelnen Streifens nimmt die Function alle möglihen reellen und imaginären Werthe, und zwar jeden nur einmal an.

Wir gehen über zur Function $\cos z$. Zufolge eines früheren Satzes (S. 12) ist:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$
$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z,$$

folglich:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Wir wollen nun wiederum denjenigen Punct $x + iy$ oder z der Horizontalebene zu bestimmen suchen, in welchem $\cos z$ einen beliebig gegebenen, reellen oder imaginären Werth K besitzt, in welchem also

(1) $$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = K,$$

d. i.

$$e^{2iz} - 2Ke^{iz} + 1 = 0$$

wird. Da diese Gleichung in Bezug auf e^{iz} eine quadratische ist, so werden sich aus derselben für e^{iz} zwei Werthe ergeben, und zwar zwei völlig bestimmte Werthe, deren Product gleich 1 ist. Ist demnach der eine von diesen Werthen

$$e^{iz} = H,$$

so wird der andere

$$e^{iz} = \frac{1}{H}$$

sein. Demnach ergeben sich aus unserer Gleichung (1) für iz folgende beiden Werthe

(2) $$\begin{cases} iz = \log H, \\ iz = \log \frac{1}{H} = -\log H. \end{cases}$$

H stellt hier eine gewisse von K abhängende völlig bestimmte Constante vor. Trotzdem ist $\log H$, wie wir wissen, eine vieldeutige Grösse, nämlich eine Grösse von der Form

$$A + i(B + n \, . \, 2\pi),$$

wo A und B bestimmte Constanten, n hingegen eine beliebig veränderliche ganze Zahl vorstellt. Die beiden in (2) für z gefundenen Werthe erhalten demnach folgende Form:

(3) $$\begin{cases} iz = A + i(B + n \, . \, 2\pi), \\ iz = -A - i(B + n \, . \, 2\pi), \end{cases}$$

oder was dasselbe ist:

$$(4)\qquad \begin{cases} z = -iA + (B + n\,.\,2\pi), \\ z = +iA - (B + n\,.\,2\pi). \end{cases}$$

Demnach ergeben sich, falls man für z seine eigentliche Bedeutung $x + iy$ substituirt, für x, y folgende beiden Werthsysteme:

$$(5)\qquad \begin{cases} x = B + n\,.\,2\pi, \quad y = -A, \\ x = -B - n\,.\,2\pi, \quad y = A. \end{cases}$$

Wir haben somit für die Stelle, an welcher $\cos z$ den gegebenen Werth K annimmt, zwei Puncte, oder vielmehr zwei Reihen von Puncten gefunden; denn durch das Werthsystem

$$(5^a)\qquad x = B + n\,.\,2\pi, \quad y = -A$$

wird eine Reihe von Puncten bestimmt, eine Reihe, welche parallel mit der x Achse fortläuft, und in welcher die einzelnen Puncte im Abstande 2π auf einander folgen; und durch das andere in (5) erhaltene Werthsystem

$$(5^b)\qquad x = -B - n\,.\,2\pi, \quad y = A$$

wird eine zweite solche Reihe bestimmt.

Theilen wir die Horizontalebene durch Linien, welche der y Achse parallel laufen, und im Abstande 2π auf einander folgen, in lauter einzelne Flächenstreifen, so wird in jedem dieser Flächenstreifen ein Punct der Reihe (5^a), und ebenso auch ein Punct der Reihe (5^b) enthalten sein.

Demnach wird die Function $\cos z$ innerhalb eines jeden einzelnen Streifens alle möglichen reellen, und zwar jeden Werth daselbst immer zweimal annehmen.

Denkt man sich ferner die in einem jener Flächenstreifen vorhandenen Werthe von $\cos z$ mit dem Streifen fest verbunden, den Streifen selber aber beweglich, so wird es nur einer gewissen Fortschiebung des Streifens in der Richtung der x Achse bedürfen, um die auf ihm vorhandenen Werthe von $\cos z$ mit denen zur Coincidenz zu bringen, welche in irgend einem andern Streifen enthalten sind.

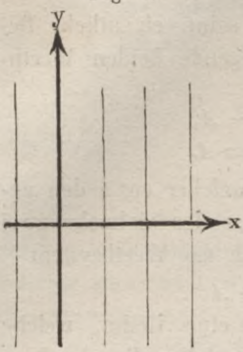
Ganz analoge Resultate ergeben sich mit Bezug auf die Function $\sin z$, wie man solches entweder in ähnlicher Weise darthun, oder noch leichter — an das eben Gefundene sich anlehnend — mit Hülfe der Formel

$$\sin z = -\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$$

nachweisen kann.

Somit haben wir folgenden Satz (Fig. 4):

Fig. 4.



Theilt man die Horizontalebene durch Linien, welche der y Achse parallel laufen und im Abstande 2π auf einander folgen, in lauter einzelne Flächenstreifen, so wiederholen sich die Werthe, welche eine der Functionen sin z oder cos z in einem dieser Streifen besitzt, von Neuem, und genau in derselben Vertheilung, in jedem andern Streifen. Die Functionen sin z und cos z sind also periodische Functionen, und die Indices ihrer Perioden gleich 2π.

Innerhalb eines einzelnen unter den erwähnten Flächenstreifen nimmt jede der beiden Functionen alle überhaupt möglichen reellen und imaginären Werthe, und zwar jedweden Werth zweimal an.

Fünfter Abschnitt. Die von einem einzigen Argument abhängende ϑ-Function.

Bekanntlich ist die ins Unendliche fortlaufende Reihe:

$$1 + 2e^{K} + 2e^{4K} + 2e^{16K} + 2e^{25K} + \dots$$

oder:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{n^2K}$$

beständig convergent, falls K eine reelle Grösse von negativem Werthe ist. Versteht man unter K keine reelle, sondern eine beliebig gegebene imaginäre Grösse von der Form $A + iB$, so wird ganz Aehnliches gelten. Die Reihe wird nämlich alsdann convergent sein, sobald der reelle Theil von K — nämlich A — einen negativen Werth hat. Genau dasselbe gilt auch dann, wenn man als Exponenten von e nicht n^2K, sondern einen Ausdruck von der Form $n^2K + nL$ nimmt, wo L, ebenso wie K, irgend welchen reellen oder imaginären Werth besitzen soll. Bildet man nämlich die Reihe:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{n^2K + nL},$$

so wird dieselbe — völlig gleichgültig, welches der Werth von L ist — jederzeit convergent sein, sobald nur der reelle Theil von K wiederum einen negativen Werth hat.

Wir gelangen demnach, wenn wir uns unter K irgend welche Constante denken, und wenn wir an Stelle von L irgend welche variable Grösse $2(x+iy)$ oder $2z$ nehmen, zu folgendem Satz:

Die unendliche Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{Kn^2+2zn}$$

besitzt, falls der reelle Theil der Constanten K negativ ist, und so lange die Variable z nicht unendlich gross wird, jederzeit einen völlig bestimmten, endlichen Werth.

Dieser Werth kann als eine Function angesehen werden, welche von der Variablen z abhängt, und welche ausserdem mit einem constanten Parameter K behaftet ist; er mag, um solches anzudeuten, in Zukunft mit

$$\vartheta(z, K)$$

bezeichnet werden.

Wir wollen nun gegenwärtig diese Function $\vartheta(z, K)$ näher untersuchen, und mehrere wichtige Eigenschaften derselben zu Tage treten lassen.

Da sich in unserer Formel

$$(1)\qquad \vartheta(z, K) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{Kn^2+2zn}$$

die Summation über alle ganzen Zahlen n von $-\infty$ bis $+\infty$ hinerstreckt, so werden wir offenbar — ohne dadurch in der Formel irgend welche Veränderung hervorzubringen — das darin enthaltene n mit $-n$ vertauschen, die von dem Argumente z abhängende Function ϑ also auch so darstellen können:

$$(2)\qquad \vartheta(z, K) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{Kn^2-2zn}.$$

Andererseits erhalten wir nun aber, wenn wir den Werth der Function ϑ für ein anderes Argument, nämlich für das Argument $-z$ haben wollen, zufolge (1) die Formel:

$$(3) \qquad \vartheta(-z, K) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{Kn^2 - 2zn};$$

und nunmehr erkennen wir aus (2) und (3), dass die Werthe von $\vartheta(z, K)$, und von $\vartheta(-z, K)$ unter einander identisch sind. Wir sehen demnach — und solches würde als **erste Eigenschaft** unserer Function ϑ hervorzuheben sein —, dass der Werth von $\vartheta(z, K)$ ungeändert bleibt, wenn man z mit $-z$ vertauscht.

Ferner überzeugt man sich leicht davon, dass die Function $\vartheta(z, K)$ in ihrem Werthe ungeändert bleibt, sobald man das Argument z um ein beliebiges Vielfaches von πi vermehrt. Betrachtet man nämlich in der als Definition dieser Function angegebenen unendlichen Reihe irgend ein einzelnes Glied

$$e^{Kn^2 + 2zn},$$

so wird dieses, falls man z um ein Vielfaches von πi, z. B. um $p \,.\, \pi i$ zunehmen lässt, übergehen in:

$$e^{Kn^2 + 2zn + 2p\pi i \,.\, n},$$

also übergehen in:

$$e^{Kn^2 + 2zn} \,.\, e^{pn \,.\, 2\pi i}.$$

Nun ist (zufolge des Satzes Seite 12) $e^{2\pi i} = 1$, mithin auch $e^{pn \,.\, 2\pi i} = 1$. Wir sehen demnach, dass das betrachtete Glied unserer Reihe bei der Vermehrung von z um $p\pi i$ völlig ungeändert geblieben ist. Gleiches wird natürlich auch von jedwedem andern Gliede der Reihe, Gleiches also auch von der Reihe selber gelten. Versteht man also unter p irgend welche ganze Zahl, so wird — und dies würde als **zweite Eigenschaft** unserer Function anzuführen sein — jederzeit

$$\vartheta(z + p \,.\, \pi i, K) = \vartheta(z, K)$$

sein. Die Function $\vartheta(z, K)$ ist demnach eine periodische, und der Index ihrer Periode gleich πi. Denkt man sich die Werthe des variablen Argumentes z oder $x + iy$ durch die Puncte der Horizontalebene dargestellt, und denkt man sich sodann diese Ebene durch Linien, welche der x Achse parallel laufen, und im Abstande π auf einander folgen, in lauter einzelne Flächenstreifen zerlegt, so werden sich die Werthe, welche $\vartheta(z, K)$ innerhalb eines solchen Flächenstreifens besitzt, von Neuem, und in genau derselben Vertheilung, in jedem andern Streifen wiederholen.

Wir wollen nun ferner untersuchen, in welcher Weise der Werth von $\vartheta(z, K)$ sich ändert, wenn man das Argument z nicht um ein Vielfaches von πi, sondern um ein Vielfaches der gegebenen Constanten K vermehrt. Da sich die als Definition von $\vartheta(z, K)$ angegebene Reihe von $n = -\infty$ bis $n = +\infty$ hinerstreckt, so wird ihr Werth, falls man n mit $n + 1$, oder mit $n + 2$, oder mit $n + 3$, u. s. w. vertauscht, offenbar völlig ungeändert bleiben. Es wird daher z. B. völlig gleichgültig sein, ob wir als Definition der Function $\vartheta(z, K)$ die ursprüngliche Reihe

$$\text{(1)} \qquad \vartheta(z, K) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{Kn^2 + 2zn}$$

nehmen, oder ob wir statt dieser als Definition jener Function die Reihe

$$\vartheta(z, K) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{K(n+1)^2 + 2z(n+1)}$$

aufstellen. Die letztere Reihe lässt sich auch so darstellen:

$$\vartheta(z, K) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{Kn^2 + 2(z+K)n + (K+2z)},$$

oder auch so:

$$\text{(2)} \qquad \vartheta(z, K) = e^{K+2z} \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{Kn^2 + 2(z+K)n}.$$

Nun ergiebt sich aber andererseits, falls man in (1) an Stelle des ursprünglichen Argumentes z das Argument $z + K$ einsetzt, für den Werth, welchen die Function ϑ für dieses neue Argument annimmt, folgender Ausdruck:

$$\text{(3)} \qquad \vartheta(z + K, K) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{Kn^2 + 2(z+K)n}.$$

Und nunmehr ergiebt sich durch Vergleichung von (2) und (3) sofort, dass

$$\text{(4)} \qquad \vartheta(z + K, K) = e^{-(K+2z)} \cdot \vartheta(z, K)$$

ist. Diese Formel lässt sich leicht verallgemeinern. Da nämlich z eine ganz beliebige Variable ist, so können wir für z beliebige, und nach einander verschiedene Werthe nehmen. Setzen wir für z der Reihe nach die Werthe:

$$z, \quad z+K, \quad z+2K, \ldots\ z+(q-1)K,$$

wo q eine beliebige ganze Zahl sein soll, so erhalten wir aus unserer Formel (4) der Reihe nach folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\vartheta(z+K, K) &= e^{-(K+2z)} \,.\, \vartheta(z, K), \\
\vartheta(z+2K, K) &= e^{-(3K+2z)} \,.\, \vartheta(z+K, K), \\
\vartheta(z+3K, K) &= e^{-(5K+2z)} \,.\, \vartheta(z+2K, K), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\vartheta(z+qK, K) &= e^{-((2q-1)K+2z)} \,.\, \vartheta(z+(q-1)K, K);
\end{aligned}$$

und sodann durch Multiplication all dieser q Gleichungen:

$$\vartheta(z+qK, K) = e^{-(sK+2qz)} \,.\, \vartheta(z, K).$$

Hier ist

$$s = 1+3+5+\ldots+(2q-1)$$

also:

$$s = \frac{q \cdot 2q}{2} = q^2.$$

Somit können wir als **dritte Eigenschaft** unserer Function ϑ Folgendes hinstellen: Versteht man unter q irgend welche ganze Zahl, so wird jederzeit

$$\vartheta(z+qK, K) = e^{-(q^2K+2qz)} \,.\, \vartheta(z, K)$$

sein.

Zufolge der vorhin gefundenen zweiten Eigenschaft bleibt der Werth der Function ϑ ungeändert, wenn man das in ihr enthaltene Argument um ein Vielfaches von πi z. B. um $p \,.\, \pi i$ vermehrt. Demnach wird die linke Seite der zuletzt erhaltenen Formel in ihrem Werthe keinerlei Aenderung erleiden, wenn man das daselbst vorhandene Argument $z+qK$ mit dem Argumente $z+qK+p\,.\,\pi i$ vertauscht. Thut man solches, so verwandelt sich jene Formel in:

$$\vartheta(z+p\pi i+qK, K) = e^{-(q^2K+2qz)} \,.\, \vartheta(z, K).$$

Und diese Formel kann als der gleichzeitige Ausdruck der zweiten und dritten Eigenschaft angesehen werden. Setzt man nämlich $q = 0$, so repräsentirt sie die zweite, und setzt man $p = 0$, so repräsentirt sie die dritte Eigenschaft.

Wir wollen schliesslich noch untersuchen, für welche Werthe von z die Function $\vartheta(z, K)$ verschwindet. Die Reihe

$$(1) \qquad \vartheta(z, K) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{Kn^2 + 2zn},$$

durch welche wir die Function definirt haben, wird in ihrem Werthe völlig ungeändert bleiben, wenn wir darin n mit $-n$, oder auch, wenn wir darin n mit $-n-\nu$ vertauschen, vorausgesetzt, dass wir unter ν irgend welche ganze Zahl verstehen. Somit können wir statt (1) auch schreiben:

$$(2) \qquad \vartheta(z, K) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{K(n+\nu)^2 - 2z(n+\nu)},$$

oder, wie sich durch Addition von (1) und (2) ergiebt, auch schreiben:

$$(3) \quad \vartheta(z, K) = \tfrac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left\{ e^{Kn^2 + 2zn} + e^{K(n+\nu)^2 - 2z(n+\nu)} \right\}.$$

Da (zufolge des Satzes S. 12) $e^{i\pi} = -1$ ist, so wird ein Aggregat von der Form

$$e^A + e^B$$

jederzeit Null sein, sobald die Exponenten A und B um $i\pi$, oder auch um ein ungerades Vielfaches von $i\pi$ von einander verschieden sind. Demnach wird das in (3) unter dem Summenzeichen stehende Aggregat Null sein, sobald die darin auftretenden Exponenten

$$(4) \qquad \begin{cases} Kn^2 + 2zn, \quad \text{und} \\ K(n+\nu)^2 - 2z(n+\nu) \end{cases}$$

um ein ungerades Vielfaches von πi differiren. Findet solches nicht nur statt für ein bestimmtes n, sondern für jeden beliebigen Werth der Zahl n, so werden sämmtliche Glieder der Reihe (3) Null werden, jene Reihe selber also ebenfalls. D. h. bestimmt man die Variable z der Art, dass die beiden Ausdrücke (4) für jeden beliebigen Werth der ganzen Zahl n um ungerade Vielfache von πi verschieden sind, so wird für diesen Werth der Variablen die Function $\vartheta(z, K)$ verschwinden. Die Differenz der beiden Ausdrücke (4) ist gleich

$$2z(2n+\nu) - K(2n\nu+\nu^2),$$

d. i. gleich:

$$(2z - \nu K)(2n+\nu).$$

Macht man daher, was den gesuchten Werth der Variablen z anbelangt, folgenden Ansatz:

$$(5) \qquad 2z = \mu . \pi i + \nu . K,$$

so verwandelt sich jene Differenz in:

$$(6) \qquad \pi i . \mu(2n+\nu);$$

sie wird demnach ein ungerades Vielfaches von πi werden, sobald man die ganzen Zahlen μ und ν der Art wählt, dass das Product

$$\mu(2n+\nu)$$

ungerade ausfällt. Solches aber kann offenbar nur dadurch erreicht werden, dass man für μ eine ungerade Zahl, und gleichzeitig für ν ebenfalls eine ungerade Zahl nimmt. Thut man aber dies, so wird die in Rede stehende Differenz (6) in der That — und zwar gleichgültig, welchen Werth die darin enthaltene Zahl n auch immer besitzen mag — jederzeit ein ungerades Vielfaches von πi werden. Wir gelangen demnach zu folgendem Ergebniss: Sind μ und ν irgend welche ungerade ganze Zahlen, so wird die Function $\vartheta(z, K)$ für das Argument

$$z = \frac{\mu . \pi i + \nu . K}{2}$$

jederzeit verschwinden. Oder, was dasselbe ist: Versteht man unter p und q zwei völlig beliebige ganze Zahlen, so wird $\vartheta(z, K)$ jederzeit Null werden, sobald man

$$z = \frac{2p+1}{2}\pi i + \frac{2q+1}{2}K,$$

d. i.

$$z = \left(p + \frac{1}{2}\right)\pi i + \left(q + \frac{1}{2}\right)K$$

setzt.

Denken wir uns die Werthe der Variablen z oder $x + iy$ nach der Gauss'schen Methode dargestellt durch die Puncte der Horizontalebene, so lassen sich die den Formeln

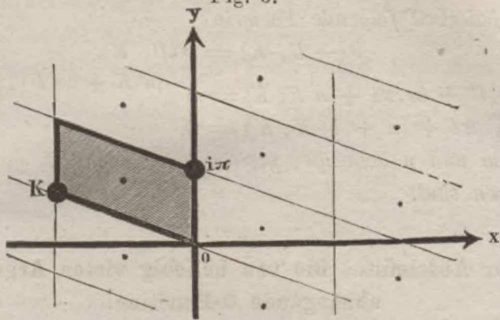
$$(1) \qquad z = p . \pi i + q . K$$

und

(2) $$z = \left(p + \frac{1}{2}\right)\pi i + \left(q + \frac{1}{2}\right)K$$

entsprechenden Puncte leicht construiren. Es sei (Fig. 5) K der-

Fig. 5.



jenige Punct, durch welchen die gegebene Constante K dargestellt wird,*) ferner $i\pi$ derjenige, durch welchen die Constante π repräsentirt wird, und endlich O der Anfangspunct; man construire ein Parallelogramm, von welchem drei Ecken in den Puncten K, $i\pi$, O liegen, und theile sodann die ganze Horizontalebene in lauter Parallelogramme, welche mit dem eben construirten congruent sind. Die Puncte (1) werden alsdann die Eckpuncte, und die Puncte (2) die Mittelpuncte dieser Parallelogramme sein. Die Function $\vartheta(z, K)$ wird also verschwinden in den Mittelpuncten der Parallelogramme.

Bezeichnen wir, wie das mit Rücksicht auf unsere späteren Untersuchungen zweckmässig erscheint, die in ϑ vorkommende Variable nicht mit z, sondern mit U, so können wir die Ergebnisse, zu welchen wir hier gelangt sind, etwa in folgender Weise zusammenfassen:

Die unendliche Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{Kn^2 + 2Un}$$

besitzt, falls der reelle Theil der Constanten K negativ ist, und so lange, als die Variable U nicht unendlich gross wird, jederzeit einen völlig bestimmten, endlichen Werth.

---

*) Dieser Punct K wird, beiläufig bemerkt, weil der reelle Theil der Constanten K negativ ist, jederzeit links von der y Achse liegen.

Bezeichnet man diesen Werth mit $\vartheta(U, K)$, *setzt man also*

$$\vartheta(U, K) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{Kn^2 + 2Un},$$

so gelten jederzeit folgende Formeln:

$$\vartheta(-U, K) = \vartheta(U, K),$$

$$\vartheta(U + m.\pi i + nK, K) = e^{-(n^2 K + 2nU)} . \vartheta(U, K),$$

$$\vartheta((m + \tfrac{1}{2})\pi i + (n + \tfrac{1}{2}) K, K) = 0,$$

wo unter m *und* n *beliebige, positive oder negative, ganze Zahlen zu verstehen sind.*

Sechster Abschnitt. Die von beliebig vielen Argumenten abhängende ϑ-Function.

Unter

$$\begin{array}{cccc} K_{11}, & K_{12}, & K_{13}, \ldots & K_{1s}, \\ & K_{22}, & K_{23}, \ldots & K_{2s}, \\ & & K_{33}, \ldots & K_{3s}, \\ & & \ldots\ldots & \\ & & & K_{ss} \end{array}$$

mögen gegebene Constante, ferner unter

$$U_1, \quad U_2, \quad U_3 \ldots\ldots U_s$$

beliebige Variable, und endlich unter

$$n_1, \quad n_2, \quad n_3, \ldots\ldots n_s$$

irgend welche ganze Zahlen verstanden werden. Wir bilden nun die Exponentialgrösse*)

$$e^{(K_{11} n_1^2 + 2K_{12} n_1 n_2 + \ldots K_{ss} n_s^2) + 2(U_1 n_1 + \ldots U_s n_s)},$$

und unterwerfen dieselbe in Gedanken einer $s$fachen Summation; die erste Summation soll sich auf alle nur möglichen Werthe der ganzen Zahl n_1 beziehen, sich also von $n_1 = -\infty$ bis $n_1 = +\infty$ hin erstrecken, die zweite soll in gleicher Weise

*) Ausführlicher geschrieben würde der Exponent von e folgendermassen lauten:

$$\left\{\begin{array}{l} (K_{11} n_1 + K_{12} n_2 \ldots\ldots + K_{1s} n_s) n_1 + 2 U_1 n_1 \\ + (K_{21} n_1 + K_{22} n_2 \ldots\ldots + K_{2s} n_s) n_2 + 2 U_2 n_2 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (K_{s1} n_1 + K_{s2} n_2 \ldots\ldots + K_{ss} n_s) n_s + 2 U_s n_s. \end{array}\right.$$

von $n_2 = -\infty$ bis $n_2 = +\infty$, u. s. w., endlich die letzte von $n_s = -\infty$ bis $n_s = +\infty$ hinerstreckt sein. Die hierdurch entstehende $s$fach unendliche Reihe mag mit

$$\sum_n e^{(K_{11} n_1^2 + 2 K_{12} n_1 n_2 + \ldots + K_{ss} n_s^2) + 2 (U_1 n_1 + \ldots U_s n_s)}$$

bezeichnet werden, wo also $\sum\limits_n$ jene s auf einander folgenden Summationen andeuten soll.

Man gelangt nun, was die Convergenz dieser $s$fach unendlichen Reihe anbelangt, zu folgendem Satz:

Die sfach unendliche Reihe

$$\sum_n e^{(K_{11} n_1^2 + 2 K_{12} n_1 n_2 \ldots + K_{ss} n_s^2) + 2 (U_1 n_1 + \ldots U_s n_s)}$$

besitzt, falls der reelle Theil des Ausdruckes

$$K_{11} n_1^2 + 2 K_{12} n_1 n_2 \ldots + K_{ss} n_s^2$$

für sämmtliche Werthsysteme der ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots n_s$ *negativ ist*), und falls keine der Variablen*

$$U_1, U_2, \ldots U_s$$

unendlich gross wird, jederzeit einen völlig bestimmten, endlichen Werth.

Dieser Werth kann als eine mit den Constanten K behaftete, und von den Variablen U abhängende Function angesehen werden, und soll demgemäss mit

$$\vartheta(U_1, U_2, \ldots U_s)$$

bezeichnet werden.

---

*) Der reelle Theil des Ausdrucks

$$K_{11} n_1^2 + 2 K_{12} n_1 n_2 + \ldots + K_{ss} n_s^2$$

ist, falls man die reellen Theile der Constanten $K_{11}, K_{12}, \ldots K_{ss}$ der Reihe nach mit $A_{11}, A_{12}, \ldots A_{ss}$ bezeichnet, folgender:

$$A_{11} n_1^2 + 2 A_{12} n_1 n_2 + \ldots + A_{ss} n_s^2.$$

Soll nun dieses Aggregat für jedes beliebige Werthsystem der Zahlen $n_1, n_2, \ldots n_s$ negativ sein, so müssen die Grössen $A_{11}, A_{12}, \ldots A_{ss}$, wie hier beiläufig bemerkt werden mag, der Art beschaffen sein, dass die Wurzeln ϱ der Gleichung s. Grades

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\varrho & A_{12} & \ldots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22}-\varrho & \ldots & A_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{s1} & A_{s2} & \ldots & A_{ss}-\varrho \end{vmatrix} = 0$$

sämmtlich negativ sind.

Wir wollen nun — ähnlich wie früher bei der von einem einzigen Argumente abhängenden ϑ-Function — gegenwärtig die Eigenschaften dieser von mehreren Argumenten abhängenden Function in Untersuchung ziehen; der grösseren Bequemlichkeit halber wollen wir uns dabei aber vorläufig auf den Fall beschränken, dass die Anzahl jener Argumente 3 ist, also auf den Fall, dass $s = 3$ ist.

Wir haben es alsdann mit folgender Function zu thun:

$$(1)\qquad \vartheta(U_1, U_2, U_3) = \sum_n e^{f + 2(U_1 n_1 + U_2 n_2 + U_3 n_3)},$$

wo unter f oder $f(n_1, n_2, n_3)$ der Ausdruck

$$(2)\qquad \begin{aligned} f = f(n_1, n_2, n_3) = K_{11} n_1^2 &+ 2 K_{12} n_1 n_2 + 2 K_{13} n_1 n_3 \\ &+ K_{22} n_2^2 + 2 K_{23} n_2 n_3 \\ &+ K_{33} n_3^2 \end{aligned}$$

zu verstehen ist. Da sich in der Formel (1) die Summation $\sum_n$ für jede der ganzen Zahlen n_1, n_2, n_3 von $-\infty$ bis $+\infty$ hinerstreckt, so werden wir — ohne dadurch in jener Formel irgend welche Veränderung hervorzubringen — die Zahlen n_1, n_2, n_3, mit $-n_1, -n_2, -n_3$ vertauschen, die von den Argumenten U_1, U_2, U_3 abhängende Function ϑ also auch so darstellen können:

$$(3)\qquad \vartheta(U_1, U_2, U_3) = \sum_n e^{f - 2(U_1 n_1 + U_2 n_2 + U_3 n_3)},$$

wo das im Exponent enthaltene f mit dem in der Formel (1) vorhandenem f völlig identisch ist. Andererseits ergiebt sich, wenn wir die Function ϑ nicht für die bisher betrachteten Argumente U_1, U_2, U_3, sondern für die Argumente $-U_1, -U_2, -U_3$ haben wollen, zufolge (1) die Formel:

$$(4)\qquad \vartheta(-U_1, -U_2, -U_3) = \sum_n e^{f - 2(U_1 n_1 + U_2 n_2 + U_3 n_3)}.$$

Und nunmehr erkennen wir durch Vergleichung von (3) und (4) sofort, dass

$$(5)\qquad \vartheta(-U_1, -U_2, -U_3) = \vartheta(U_1, U_2, U_3)$$

ist, dass also der Werth unserer Function ungeändert bleibt, wenn man gleichzeitig sämmtliche Argumente in ihr Gegentheil umschlagen lässt. Dies würde als **erste Eigenschaft** unserer Function hervorzuheben sein.

Ferner ist, weil $e^{2\pi i} = 1$ ist, zu bemerken, dass die Exponentialgrösse

$$e^{f + 2(U_1 n_1 + U_2 n_2 + U_3 n_3)}$$

ungeändert bleiben wird, sobald man die Variablen U_1, U_2, U_3 um irgend welche Vielfachen von πi vermehrt; und dass demnach Gleiches auch von der Function

$$\vartheta(U_1, U_2, U_3) = \sum_n e^{f + 2(U_1 n_1 + U_2 n_2 + U_3 n_3)}$$

gelten muss. Somit ergiebt sich — was als **zweite Eigenschaft** unserer Function anzuführen sein würde —, dass, falls a, b, c irgend welche ganze Zahlen vorstellen, jederzeit

(6) $$\vartheta(U_1 + a\pi i, U_2 + b\pi i, U_3 + c\pi i) = \vartheta(U_1, U_2, U_3)$$

sein wird. Die Function $\vartheta(U_1, U_2, U_3)$ ist also für jedes der Argumente U_1, U_2, U_3 eine periodische, und der Index für jede dieser drei Perioden gleich πi.

Da sich die Summation in der Formel

(7) $$\vartheta(U_1, U_2, U_3) = \sum_n e^{f(n_1, n_2, n_3) + 2(U_1 n_1 + U_2 n_2 + U_3 n_3)},$$

was die Zahl n_1 anbelangt, von $n_1 = -\infty$ bis $n_1 = +\infty$ hinerstreckt, so wird man, ohne dadurch in dieser Formel irgend welche Veränderung hervorzurufen, n_1 mit $n_1 + 1$, oder mit $n_1 + 2$, oder $n_1 + 3$ u. s. w. vertauschen können. Setzt man $n_1 + 1$ an Stelle von n_1, so gewinnt jene Formel dadurch folgendes Aussehen:

(8) $$\vartheta(U_1, U_2, U_3) = \sum_n e^{f(n_1+1, n_2, n_3) + 2U_1 + 2(U_1 n_1 + U_2 n_2 + U_3 n_3)},$$

Das erste im Exponenten von e auftretende Glied

$$f(n_1 + 1, n_2, n_3)$$

hat, wie sich aus (2) ergiebt, folgende Bedeutung:

$$f(n_1 + 1, n_2, n_3) = f(n_1, n_2, n_3) + 2(K_{11} n_1 + K_{12} n_2 + K_{13} n_3) + K_{11}.$$

Substituirt man diesen Werth in die Formel (8), so ergiebt sich, falls man die von den Zahlen n_1, n_2, n_3 unabhängigen Factoren vor das Summenzeichen treten lässt:

(9) $$\vartheta(U_1, U_2, U_3) =$$

$$= e^{K_{11} + 2U_1} \cdot \sum_n e^{f(n_1, n_2, n_3) + 2\left((U_1 + K_{11})n_1 + (U_2 + K_{21})n_2 + (U_3 + K_{31})n_3\right)}.$$

Diese Formel repräsentirt, ebenso wie die ursprüngliche Formel (7), denjenigen Werth, welchen die Function ϑ für die Argumente U_1, U_2, U_3 annimmt; sie ist demnach nur als eine gewisse Umgestaltung jener ursprünglichen Formel anzusehen.

Wir wollen nun andererseits denjenigen Werth aufstellen, welchen die Function ϑ für gewisse andere Argumente, nämlich für die Argumente $U_1 + K_{11}$, $U_2 + K_{21}$, $U_3 + K_{31}$ annimmt. Dieser Werth wird zufolge (7) dargestellt durch die Formel;

$$(10) \quad \vartheta(U_1 + K_{11}, U_2 + K_{21}, U_3 + K_{31}) =$$
$$= \sum_n e^{f(n_1, n_2, n_3) + 2\left((U_1 + K_{11})\, n_1 + (U_2 + K_{21})\, n_2 + (U_3 + K_{31})\, n_3\right)}.$$

Und nunmehr ergiebt sich durch Vergleichung von (9) und (10) augenblicklich die erste Formel des nachfolgenden Systemes:

$$(11)\begin{cases} \vartheta(U_1 + K_{11}, U_2 + K_{21}, U_3 + K_{31}) = e^{-(K_{11} + 2U_1)}.\vartheta(U_1, U_2, U_3), \\ \vartheta(U_1 + K_{12}, U_2 + K_{22}, U_3 + K_{32}) = e^{-(K_{22} + 2U_2)}.\vartheta(U_1, U_2, U_3), \\ \vartheta(U_1 + K_{13}, U_2 + K_{23}, U_3 + K_{33}) = e^{-(K_{33} + 2U_3)}.\vartheta(U_1, U_2, U_3). \end{cases}$$

Die beiden andern Formeln dieses Systems werden sich offenbar in ganz analoger Weise ableiten lassen.

Es ist übrigens nicht schwierig, eine viel allgemeinere Formel zu finden, nämlich eine Formel, welche die des soeben aufgestellten Systems als ganz specielle Fälle in sich fasst. Wir gehen zu diesem Zweck wieder von Formel (7) aus, und setzen in dieser $n_1 + \alpha$, $n_2 + \beta$, $n_3 + \gamma$ an Stelle von n_1, n_2, n_3, wo α, β, γ ganz beliebig gewählte, positive oder negative ganze Zahlen vorstellen sollen. Dadurch ergiebt sich

$$(12) \quad \vartheta(U_1, U_2, U_3) =$$
$$= \sum_n e^{f(n_1 + \alpha,\, n_2 + \beta,\, n_3 + \gamma) + 2\left(U_1 (n_1 + \alpha) + U_2 (n_2 + \beta) + U_3 (n_3 + \gamma)\right)}.$$

Zur Abkürzung mag nun gesetzt werden:

$$(13) \qquad \begin{cases} f(n_1, n_2, n_3) = f, \\ f(\alpha, \beta, \gamma) = \varphi, \end{cases}$$

und ferner:

$$(14) \qquad \begin{cases} K_{11}\,\alpha + K_{12}\,\beta + K_{13}\,\gamma = \varphi_1, \\ K_{21}\,\alpha + K_{22}\,\beta + K_{23}\,\gamma = \varphi_2, \\ K_{31}\,\alpha + K_{32}\,\beta + K_{33}\,\gamma = \varphi_3. \end{cases}$$

Multiplicirt man diese drei letztern Gleichungen der Reihe nach mit α, β, γ, so ergiebt sich, wie sogleich bemerkt werden mag:

$$K_{11}\,\alpha^2 + 2\,K_{12}\,\alpha\beta + \ldots + K_{33}\,\gamma^2 = \varphi_1\,\alpha + \varphi_2\,\beta + \varphi_3\,\gamma,$$

d. i. mit Rücksicht auf die in (13) eingeführte Bezeichnung:

$$(15) \qquad \varphi = \varphi_1\,\alpha + \varphi_2\,\beta + \varphi_3\,\gamma.$$

Nunmehr lässt sich der in unsrer Formel (12) enthaltene Exponent von e auch so darstellen:

$$f + \varphi + 2(\varphi_1 n_1 + \varphi_2 n_2 + \varphi_3 n_3) + \\ + 2(U_1 n_1 + U_2 n_2 + U_3 n_3) + 2(U_1 \alpha + U_2 \beta + U_3 \gamma).$$

Substituirt man diesen Werth in (12), und lässt man zugleich die von den Zahlen n_1, n_2, n_3 unabhängigen Factoren vor das Summenzeichen treten, so erhält man:

$$(16)\quad \vartheta(U_1, U_2, U_3) = \\ = e^{\varphi + 2(U_1\alpha + U_2\beta + U_3\gamma)} . \sum_n e^{f + 2((U_1 + \varphi_1) n_1 + (U_2 + \varphi_2) n_2 + (U_3 + \varphi_3) n_3)}.$$

Nun ist nach (7) und mit Rücksicht auf die in (13) eingeführte Abkürzung:

$$\vartheta(U_1, U_2, U_3) = \sum_n e^{f + 2(U_1 n_1 + U_2 n_2 + U_3 n_3)}.$$

Wollen wir daher den Werth unsrer Function ϑ nicht für die bisher betrachteten Argumente U_1, U_2, U_3, sondern für die Argumente $U_1 + \varphi_1, U_2 + \varphi_2, U_3 + \varphi_3$ haben, so erhalten wir folgende Formel:

$$(17)\quad \vartheta(U_1 + \varphi_1, U_2 + \varphi_2, U_3 + \varphi_3) = \\ = \sum_n e^{f + 2((U_1 + \varphi_1) n_1 + (U_2 + \varphi_2) n_2 + (U_3 + \varphi_3) n_3)}.$$

Und nunmehr ergiebt sich durch Division von (16) und (17):

$$(18)\quad \frac{\vartheta(U_1 + \varphi_1, U_2 + \varphi_2, U_3 + \varphi_3)}{\vartheta(U_1, U_2, U_3)} = e^{-\varphi - 2(U_1\alpha + U_2\beta + U_3\gamma)},$$

eine Formel, in welcher U_1, U_2, U_3 völlig beliebige Argumente vorstellen, in welcher ferner α, β, γ irgend welche ganze Zahlen sind, und in welcher endlich $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi$ die aus diesen Zahlen und aus den gegebenen Constanten K zusammengesetzten Ausdrücke (14) und (15) darstellen.

Man erkennt sofort, dass diese Formel die früher in (11) aufgestellten Gleichungen als ganz specielle Fälle in sich enthält, dass nämlich jene drei Gleichungen aus dieser Formel (18) sich ergeben, sobald man in derselben für die Zahlen α, β, γ der Reihe nach zuerst das Werthsystem 1, 0, 0, dann das Werthsystem 0, 1, 0, endlich das Werthsystem 0, 0, 1 nimmt.

Es handelt sich nun darum, dieser allgemeinen Formel (18) ein etwas einfacheres Aussehen zu geben, als es bisher der Fall ist. Zu diesem Zweck bezeichnen wir die neuen Argumente $U_1+\varphi_1$, $U_2+\varphi_2$, $U_3+\varphi_3$ mit W_1, W_2, W_3, setzen also (vrgl. (14)):

$$(19)\qquad \begin{cases} W_1 = U_1+\varphi_1 = U_1+K_{11}\alpha+K_{12}\beta+K_{13}\gamma, \\ W_2 = U_2+\varphi_2 = U_2+K_{21}\alpha+K_{22}\beta+K_{23}\gamma, \\ W_3 = U_3+\varphi_3 = U_3+K_{31}\alpha+K_{32}\beta+K_{33}\gamma. \end{cases}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit α, β, γ, und addirt, so ergiebt sich:

$$W_1\alpha+W_2\beta+W_3\gamma = (U_1\alpha+U_2\beta+U_3\gamma)+(\varphi_1\alpha+\varphi_2\beta+\varphi_3\gamma),$$

also mit Rücksicht auf (15)

$$W_1\alpha+W_2\beta+W_3\gamma = (U_1\alpha+U_2\beta+U_3\gamma)+\varphi,$$

d. i.

$$(20)\qquad -\varphi = (U_1\alpha+U_2\beta+U_3\gamma)-(W_1\alpha+W_2\beta+W_3\gamma).$$

Mit Rücksicht auf die in (19) eingeführten Bezeichnungen und mit Rücksicht auf den soeben in (20) für $-\varphi$ gefundenen Werth verwandelt sich nunmehr unsere allgemeine Formel (18) in folgende:

$$(21)\qquad \frac{\vartheta(W_1, W_2, W_3)}{\vartheta(U_1, U_2, U_3)} = e^{-\left((W_1+U_1)\alpha+(W_2+U_2)\beta+(W_3+U_3)\gamma\right)}.$$

Sind also — so können wir uns gegenwärtig ausdrücken — die Argumente W_1, W_2, W_3 mit den Argumenten U_1, U_2, U_3 durch Gleichungen von folgender Form verbunden

$$(22)\qquad \begin{cases} W_1 = U_1+K_{11}\alpha+K_{12}\beta+K_{13}\gamma, \\ W_2 = U_2+K_{21}\alpha+K_{22}\beta+K_{23}\gamma, \\ W_3 = U_3+K_{31}\alpha+K_{32}\beta+K_{33}\gamma, \end{cases}$$

wo α, β, γ **beliebige** positive oder negative ganze Zahlen vorstellen, so wird zwischen $\vartheta(W_1, W_2, W_3)$ und zwischen $\vartheta(U_1, U_2, U_3)$ jederzeit die in (21) angegebene Relation stattfinden. Wir bezeichnen die in diesem Satz enthaltene Eigenthümlichkeit der Function ϑ als die **dritte Eigenschaft** dieser Function.

Eine ähnliche Relation lässt sich übrigens auch dann leicht aufstellen, wenn wir an Stelle der Argumente W_1, W_2, W_3 gewisse andere Argumente V_1, V_2, V_3 nehmen, welche mit den ursprünglichen Argumenten U_1, U_2, U_3 nicht durch die Gleichungen (22), sondern durch die Gleichungen:

$$(23)\qquad \begin{cases} V_1 = U_1+a\,.\,\pi i+K_{11}\alpha+K_{12}\beta+K_{13}\gamma, \\ V_2 = U_2+b\,.\,\pi i+K_{21}\alpha+K_{22}\beta+K_{23}\gamma, \\ V_3 = U_3+c\,.\,\pi i+K_{31}\alpha+K_{32}\beta+K_{33}\gamma \end{cases}$$

verbunden sind, wo a, b, c — ebenso wie α, β, γ — beliebige positive oder negative ganze Zahlen vorstellen sollen. In diesem Falle werden $V_1 - a.\pi i$, $V_2 - b.\pi i$, $V_3 - c.\pi i$ zu U_1, U_2, U_3 in genau derselben Beziehung stehen, in welcher zuvor W_1, W_2, W_3 zu U_1, U_2, U_3 standen. Demnach wird zufolge (21)

$$(24)\quad \frac{\vartheta(V_1 - a.\pi i, \ldots.)}{\vartheta(U_1, \ldots)} = e^{-((V_1 + U_1 - a.\pi i)\alpha + \ldots.)}$$

sein. Zufolge (6) ist aber, weil a, b, c ganze Zahlen sind,

$$\vartheta(V_1 - a.\pi i,\ V_2 - b.\pi i,\ V_3 - c.\pi i) = \vartheta(V_1, V_2, V_3);$$

ferner sind, weil α, β, γ ebenfalls ganze Zahlen vorstellen, die Exponentialgrössen

$$e^{a\alpha\pi i},\ e^{b\beta\pi i},\ e^{c\gamma\pi i}$$

jederzeit $= \pm 1$, folglich:

$$e^{a\alpha\pi i} = e^{-a\alpha\pi i},\ e^{b\beta\pi i} = e^{-b\beta\pi i},\ e^{c\gamma\pi i} = e^{-c\gamma\pi i}.$$

Demnach können wir die Formel (24) auch so schreiben:

$$(25)\quad \frac{\vartheta(V_1, V_2, V_3)}{\vartheta(U_1, U_2, U_3)} = e^{-((V_1 + U_1 + a\pi i)\alpha + (V_2 + U_2 + b\pi i)\beta + (V_3 + U_3 + c\pi i)\gamma)}.$$

Somit ergiebt sich also folgender Satz:

Sind die Argumente V_1, V_2, V_3 mit den Argumenten U_1, U_2, U_3 durch Gleichungen von folgender Form verbunden:

$$\begin{aligned} V_1 &= U_1 + (a.\pi i + \alpha K_{11} + \beta K_{21} + \gamma K_{31}), \\ V_2 &= U_2 + (b.\pi i + \alpha K_{12} + \beta K_{22} + \gamma K_{32}), \\ V_3 &= U_3 + (c.\pi i + \alpha K_{13} + \beta K_{23} + \gamma K_{33}), \end{aligned}$$

wo $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ beliebige ganze Zahlen vorstellen, so wird zwischen den Werthen von $\vartheta(V_1, V_2, V_3)$ und $\vartheta(U_1, U_2, U_3)$ jederzeit die in (25) angegebene Relation stattfinden.

Offenbar können wir sämmtliche Ergebnisse, zu welchen wir hier gelangt sind, sofort auf den Fall übertragen, dass die betrachtete ϑ-Function nicht von drei, sondern von beliebig vielen Argumenten abhängig ist. Wir kommen alsdann zu folgendem Resultat:

Die durch die Formel

$$\vartheta(U_1, U_2, \ldots U_s) = \sum_n e^{(K_{11}n_1^2 + 2K_{12}n_1n_2 \ldots + K_{ss}n_s^2) + 2(U_1n_1 + \ldots + U_sn_s)}$$

definirte Function $\vartheta(U_1, U_2 \ldots U_s)$ bleibt in ihrem Werthe unge-

ändert, sobald man sämmtliche Argumente $U_1, U_2, .. U_s$ in ihr Gegentheil umschlagen lässt; es ist nämlich jederzeit

$$\vartheta(-U_1, -U_2, \ldots -U_s) = \vartheta(U_1, U_2, \ldots U_s).$$

Betrachtet man ferner zwei Systeme von Argumenten $U_1, U_2, \ldots U_s$, und $V_1, V_2, \ldots V_s$, welche mit einander verbunden sind durch Gleichungen von folgender Form:

$$\begin{aligned}
V_1 &= U_1 + (m_1\pi i + n_1 K_{11} + n_2 K_{21} + \ldots + n_s K_{s1}),\\
V_2 &= U_2 + (m_2\pi i + n_1 K_{12} + n_2 K_{22} + \ldots + n_s K_{s2}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
V_s &= U_s + (m_s\pi i + n_1 K_{1s} + n_2 K_{2s} + \ldots + n_s K_{ss}),
\end{aligned}$$

wo die m, n beliebige positive oder negative ganze Zahlen vorstellen; so wird zwischen den Werthen, welche die Function ϑ für das eine und für das andere System annimmt, jederzeit folgende Relation stattfinden:

$$\frac{\vartheta(V_1, V_2, \ldots V_s)}{\vartheta(U_1, U_2, .. U_s)} = e^{-\Sigma n_\varkappa(V_\varkappa + U_\varkappa + m_\varkappa . \pi i)}.$$

Die Summation Σ ist hier über $\varkappa = 1, 2, .. s$ hinerstreckt zu denken.

Wir wollen der Vollständigkeit willen schliesslich noch diejenigen Werthe der Argumente $U_1, U_2, .. U_s$ zu ermitteln suchen, für welche die Function ϑ Null wird. Zufolge der Definition ist

$$(1) \qquad \vartheta(U_1, U_2 \ldots U_s) = \sum_n e^{F(n_1, n_2, .. n_s)},$$

wo $F(n_1, n_2, .. n_s)$ zur Abkürzung steht für folgenden Ausdruck:

$$(2) \qquad F(n_1, n_2, .. n_s) = \Sigma\Sigma K_{\varkappa\lambda} n_\varkappa n_\lambda + 2\,\Sigma U_\varkappa n_\varkappa,$$

in welchem die Summationen Σ über $\varkappa = 1, 2, \ldots s$ und über $\lambda = 1, 2, .. s$ hinerstreckt zu denken sind.

Die in (1) angegebene Formel erleidet, wie bereits mehrfach bemerkt, keinerlei Aenderung, falls man die darin enthaltenen Zahlen $n_1, n_2, \ldots n_s$ mit $-(n_1 + \nu_1), -(n_2 + \nu_2), \ldots -(n_s + \nu_s)$ vertauscht, vorausgesetzt, dass man unter $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_s$ irgend welche beliebig gewählte ganze Zahlen versteht. Demnach können wir an Stelle von (1) auch schreiben:

$$(3) \quad \vartheta(U_1, U_2, \ldots U_s) = \sum_n e^{F(-n_1 - \nu_1, -n_2 - \nu_2, \ldots -n_s - \nu_s)},$$

oder, wie sich durch Addition von (1) und (3) ergiebt, auch schreiben:

(4) $\vartheta(U_1, U_2, .. U_s) =$
$$= \frac{1}{2} \sum_n \left\{ e^{F(n_1, n_2, \ldots n_s)} + e^{F(-n_1-\nu_1, -n_2-\nu_2, \ldots -n_s-\nu_s)} \right\}.$$

Ein Aggregat von der Form $e^A + e^B$ verschwindet, sobald die Exponenten A und B um ein ungerades Vielfaches von πi verschieden sind. Demnach wird die Function $\vartheta(U_1, U_2, \ldots U)$ verschwinden, sobald die Differenz

(5) $\varDelta = F(-n_1 - \nu_1, -n_2 - \nu_2, \ldots -n_s - \nu_s) - F(n_1, n_2, \ldots n_s)$

für **sämmtliche** Werthsysteme der Zahlen n immer gleich einem ungeraden Vielfachen von πi ist. Nun ist mit Rückblick auf (2)

$$F(n_1, \ldots) = \Sigma\Sigma K_{\varkappa\lambda} n_\varkappa n_\lambda + 2 \Sigma U_\varkappa n_\varkappa$$
$$F(-n_1 - \nu_1, \ldots) = \Sigma\Sigma K_{\varkappa\lambda} n_\varkappa n_\lambda + 2 \Sigma(n_\varkappa \Sigma K_{\varkappa\lambda} \nu_\lambda) + \Sigma\Sigma K_{\varkappa\lambda} \nu_\varkappa \nu_\lambda - 2 \Sigma U_\varkappa n_\varkappa - 2 \Sigma U_\varkappa \nu_\varkappa;$$

somit ergiebt sich für jene Differenz $\varDelta$ folgender Werth:

(6) $\varDelta = 2 \Sigma n_\varkappa(-2 U_\varkappa + \Sigma K_{\varkappa\lambda} \nu_\lambda) + \Sigma\Sigma K_{\varkappa\lambda} \nu_\varkappa \nu_\lambda - 2 \Sigma U_\varkappa \nu_\varkappa.$

Wir machen nun, was die hier gesuchten Werthe der Argumente U anbelangt, folgenden Ansatz:

(7) $$2 U_\varkappa = \mu_\varkappa . \pi i + \Sigma \nu_\lambda K_{\varkappa\lambda},$$

d. i.

(7a) $$2 U_\varkappa = \mu_\varkappa . \pi i + \nu_1 K_{1\varkappa} + \nu_2 K_{2\varkappa} + \ldots + \nu_s K_{s\varkappa},$$

wo $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_s$ beliebige ganze Zahlen vorstellen sollen. Alsdann verwandelt sich der für $\varDelta$ gefundene Werth in:

(8) $\varDelta = -2 \Sigma n_\varkappa . \mu_\varkappa \pi i + \Sigma\Sigma K_{\varkappa\lambda} \nu_\varkappa \nu_\lambda - \Sigma(\mu_\varkappa \pi i + \Sigma \nu_\lambda K_{\varkappa\lambda}) \nu_\varkappa,$

d. i. in:

(9) $$\varDelta = -2 \pi i \, \Sigma n_\varkappa \mu_\varkappa - \pi i \, \Sigma \mu_\varkappa \nu_\varkappa,$$

oder in:

(10) $$\varDelta = -\pi i (2 \Sigma n_\varkappa \mu_\varkappa + \Sigma \mu_\varkappa \nu_\varkappa).$$

Hieraus aber ergiebt sich, das die Differenz $\varDelta$ — mögen nun die Zahlen n beschaffen sein, wie sie wollen — jederzeit ein ungerades Vielfaches von πi sein wird, sobald nur

$$\Sigma \mu_\varkappa \nu_\varkappa$$

eine ungerade Zahl ist. Unsere Function $\vartheta(U_1, U_2, \ldots U_s)$ wird daher, falls man für die Argumente U die in (7) angegebenen Werthe nimmt, jederzeit verschwinden, sobald die in jenen Werthen enthaltenen Zahlen μ, ν der Bedingung

$$\Sigma \mu_\varkappa \nu_\varkappa = ungerade$$

Genüge leisten. Wir gelangen demnach zu folgendem Satz:

Versteht man unter $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_s$ *und* $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_s$ *irgend welche positive oder negative ganze Zahlen, welche der Bedingung*

$$\mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_2 + \ldots + \mu_s \nu_s = ungerade$$

Genüge leisten, so wird durch die Formeln

$$\begin{aligned}
U_1 &= \tfrac{1}{2} (\mu_1 . \pi i + \nu_1 K_{11} + \nu_2 K_{21} + \ldots + \nu_s K_{s\,1}),\\
U_2 &= \tfrac{1}{2} (\mu_2 . \pi i + \nu_1 K_{12} + \nu_2 K_{22} + \ldots + \nu_s K_{s\,2}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
U_s &= \tfrac{1}{2} (\mu_s . \pi i + \nu_1 K_{1\,s} + \nu_2 K_{2\,s} + \ldots + \nu_s K_{ss})
\end{aligned}$$

jederzeit ein Werthsystem der Argumente $U_1, U_2, \ldots U_s$ *dargestellt sein, für welches die Function* $\vartheta(U_1, U_2 \ldots U_s)$ *verschwindet.*

Zweite Vorlesung.

Functionen mit zwei reellen Argumenten in ihrer Ausbreitung auf der Horizontalebene.

Erster Abschnitt. Ueber die räumliche Ausbreitung einer von einem einzigen Argumente abhängenden Function; Auffassung der Endlichkeit als eines nothwendigen Bestandtheiles der Stetigkeit.

Um von einer Function $U = U(x)$, die nur von einem Argumente x abhängt, was die Aufeinanderfolge ihrer Werthe, und was überhaupt ihren ganzen Charakter anbelangt, eine anschauliche Vorstellung zu erhalten, bringen wir eine horizontale gerade Linie in Anwendung, welche von irgend einem festen Punct O aus ins Unendliche hin fortläuft. Wir bedienen uns nämlich der auf einander folgenden Puncte dieser Linie, um die auf einander folgenden Werthe des Argumentes geometrisch darzustellen, indem wir für jeden beliebigen Werth x des Argumentes immer denjenigen Punct jener Linie zum Bilde nehmen, welcher von O aus gerechnet die Abscisse x besitzt, und welcher kurzweg der Punct x genannt werden mag. Jedem Puncte x entspricht alsdann ein gewisser Werth der Function. Wir stellen die Grösse dieses Werthes ebenfalls bildlich dar, nämlich durch ein Perpendikel, welches wir in jenem Punct auf der Horizontallinie errichten.

Denken wir uns in jedem Punct der Horizontallinie den zugehörigen Werth der Function durch ein solches Perpendikel dargestellt, so werden die Spitzen aller dieser Perpendikel zusammengenommen eine gewisse Curve bilden, und diese Curve ist es, welche uns eine genaue Vorstellung liefert von dem Charakter der Function.

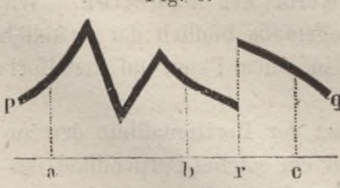
Bei Anwendung dieser Methode werden die Werthe der Function *über die Horizontallinie hin ausgebreitet*. Umgekehrt können wir sagen, dass uns hier die Horizontallinie als *Träger* dient für die auf einander folgenden Werthe der Function, nämlich als Träger dient für die Perpendikel, durch welche jene Werthe veranschaulicht werden.

Ferner werden wir mit Hinblick auf diese geometrischen Vorstellungen jetzt von den Werthen sprechen können, welche die Function in irgend welchen *Puncten* oder auf irgend welcher *Strecke* der Horizontallinie besitzt, indem wir darunter natürlich diejenigen Werthe verstehen, welche durch die von jenen Puncten oder von jener Strecke getragenen Perpendikel dargestellt werden.

Betrachtet man die Werthe, welche die Function auf irgend einer gegebenen *Strecke* der Horizontallinie besitzt, betrachtet man also diejenigen Perpendikel, welche auf dieser Strecke errichtet sind, und zeigt sich, dass die Spitzen aller dieser Perpendikel unter einander *zusammenhängen*, dass nämlich diese Spitzen in ihrer Gesammtheit eine Curve bilden, welche — mag sie nun gekrümmt und geknickt sein, wie sie wolle — in *ununterbrochenem* Zuge von der einen nach der andern Seite hin fortläuft, so soll die Function auf jener Strecke *stetig* genannt werden. *Unstetig* hingegen soll die Function auf jener Strecke heissen, sobald die eben erwähnte Curve in ihrem Zuge irgend welche *Unterbrechungen* darbietet.

Desgleichen soll, wenn wir irgend welchen *Punct* der Horizontallinie betrachten, die Function in diesem Puncte *stetig* oder *unstetig* genannt werden, je nachdem die Spitze des von diesem Punct getragenen Perpendikels mit den Spitzen der nach rechts und links hin benachbarten Perpendikel im Zusammenhang steht oder nicht. Ist z. B. irgend eine Function $U = U(x)$ durch die Curve pq (Fig. 6) dargestellt, so wird diese Function auf der Strecke ab, und ebenso in jedem einzelnen Puncte dieser Strecke *stetig* heissen. Auf der Strecke bc hingegen wird sie *unstetig* zu nennen sein. Diese Unstetigkeit auf

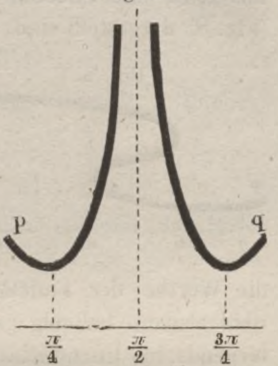
Fig. 6.



der Strecke bc rührt nur von einem einzigen Puncte her; denn nur in r ist die Function unstetig, während sie in allen übrigen Puncten jener Strecke stetig bleibt.

Wir betrachten ferner eine Function, welche für irgend einen Werth des Argumentes unendlich gross wird, z. B. die Function $\mathrm{tg}^2 x$, welche unendlich gross wird für $x = \frac{\pi}{2}$. Es sei pq (Fig. 7) die Curve, durch welche diese Function auf der Strecke $x = \frac{\pi}{4}$ bis $x = \frac{3\pi}{4}$ dargestellt wird. Das mittlere Perpendikel auf jener Strecke, nämlich das im Punct $x = \frac{\pi}{2}$ errichtete, ist unendlich lang, während die zu beiden Seiten befindlichen Perpendikel — mögen sie nun dem mittleren so nahe liegen, wie sie irgend wollen — durchweg von endlicher Länge sind. Demnach ist die Spitze des mittleren Perpendikels ausser Zusammenhang mit den Spitzen der nach rechts und nach links hin benachbarten Perpendikel; folglich die Function $\mathrm{tg}^2 x$ im Puncte $x = \frac{\pi}{2}$ unstetig zu nennen.

Fig. 7.



Gleiches wird, um andere Beispiele anzuführen, von der Function $\mathrm{tg}\, x$ im Puncte $x = \frac{\pi}{2}$, und gleiches von den Functionen $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{x^2}$ im Puncte $x = 0$ gelten. Ueberhaupt werden wir ganz allgemein sagen können: Besitzt eine Function $U(x)$ in irgend einem Puncte x einen unendlich grossen Werth, so ist sie in jenem Puncte auch jederzeit unstetig. Oder: Die Function kann in irgend einem gegebenen Punct nur dann **stetig** sein, wenn sie daselbst **endlich** ist.

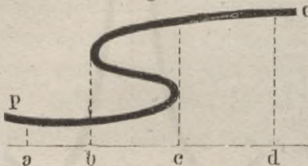
Man sieht übrigens leicht, dass die Definition, welche wir hier für „stetig und unstetig" gegeben haben, der bis jetzt gebrauchten geometrischen Fassung leicht entkleidet werden kann. Wir können dieselbe in voller Strenge so aussprechen:

Eine Function $U = U(x)$ ist zwischen $x = a$ und $x = b$ stetig oder unstetig, je nachdem die Werthe, welche U bei einem Anwachsen des Argumentes von $x = a$ bis $x = b$ durchläuft, eine zusammenhängende Reihe bilden, oder eine Reihe bilden, die irgend welche Sprünge macht.

Eine Function $U(x)$ soll eindeutig heissen, wenn sie für jedes gegebene x immer nur einen Werth hat; hingegen mehrdeutig genannt werden, sobald sie für ein gegebenes x mehrere Werthe besitzt. So ist z. B. $U = x^2$ eine eindeutige, hingegen $U = x^{\frac{1}{2}}$ eine zweideutige Function.

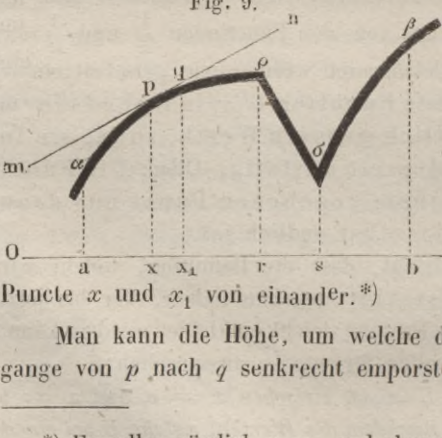
Uebrigens werden auch Functionen vorhanden sein, welche abwechselnd, für einige Werthe des Argumentes eindeutig, und für andere Werthe desselben mehrdeutig sind. Denken wir uns z. B. eine Function $U(x)$, deren Werthe durch die Curve pq (Fig. 8) dargestellt sind; diese Function wird dann auf der Strecke ab, und ebenso auch auf der Strecke cd eindeutig, auf der Strecke bc hingegen dreideutig sein.

Fig. 8.



Es sei $U = U(x)$ irgend eine Function, welche auf der Strecke $x = a$ bis $x = b$ eindeutig und stetig ist. Die Curve, durch welche die Werthe der Function auf jener Strecke dargestellt werden, wird alsdann beliebig gekrümmt und geknickt sein können; aber nirgends ins Unendliche ansteigen, und überhaupt in ihrem Zuge keinerlei Unterbrechungen darbieten; sie mag (Fig. 9) die Form $\alpha\beta$ besitzen.

Fig. 9.



Es sei $\overline{pq}$ irgend ein unendlich kleines Element dieser Curve, ferner seien x und x_1 diejenigen Puncte, welche auf der Horizontallinie gerade unter p und q liegen, also $x_1 - x$ die Entfernung der beiden Puncte x und x_1 von einander.*)

Man kann die Höhe, um welche die Curve bei ihrem Fortgange von p nach q senkrecht emporsteigt, d. i. die Grösse, um

*) Es sollen nämlich x, x_1, und ebenso auch a, r, s, b nicht nur die Namen der so bezeichneten Puncte sein, sondern gleichzeitig auch die Entfernungen vorstellen, welche diese Puncte vom Anfangspunct O aus besitzen.

welche das Perpendikel $\overline{qx_1}$ länger als das Perpendikel $\overline{px}$ ist, in folgender Weise darstellen:

$$\overline{qx_1} - \overline{px} = (x_1 - x) \,.\, \operatorname{tg} \varphi,$$

wo φ den Winkel bezeichnet, unter welchem das kleine Curvenelement $\overline{pq}$ (oder die Tangente $\overline{mn}$) gegen die Horizontale geneigt ist. Bekanntlich ist nun $\operatorname{tg} \varphi$ gleich dem Werthe, welchen der Differentialquotient $\frac{dU}{dx} = U'(x)$ in dem unter p liegendem Puncte x besitzt; mithin:

$$\overline{qx_1} - \overline{px} = (x_1 - x) \,.\, U'(x),$$

oder, wenn man die Entfernung der beiden Puncte x und x_1 von einander mit dx bezeichnet:

$$\overline{qx_1} - \overline{px} = dx \,.\, U'(x).$$

Dieser Ausdruck $U'(x) \,.\, dx$ ist es also, welcher die Höhe vorstellt, um welche die Curve bei ihrem Fortgange von p nach q senkrecht emporsteigt.

Denkt man sich die Strecke von $x = a$ bis $x = r$ in lauter unendlich kleine Elemente dx zerlegt, denkt man sich sodann den Werth des Ausdrucks $U'(x) \,.\, dx$ der Reihe nach für jedes dieser Elemente aufgestellt, und endlich alle diese Werthe summirt, so wird man die ganze Höhe erhalten, um welche die Curve bei ihrem Fortgange von α nach ϱ senkrecht emporsteigt. Die eben genannte Summe wird aber dargestellt durch das bestimmte Integral $\int\limits_a^r U'(x) \,.\, dx$; somit ergiebt sich:

$$\overline{\varrho r} - \overline{\alpha a} = \int\limits_a^r U'(x) \,.\, dx,$$

oder, wenn man beachtet, dass $\overline{\alpha a}$ und $\overline{\varrho r}$ die Werthe vorstellen, welche die gegebene Function $U(x)$ in den Punkten a und r besitzt:

$$U(r) - U(a) = \int\limits_a^r U'(x) \,.\, dx.$$

In ähnlicher Weise ergeben sich für die Strecken $\overline{rs}$ und $\overline{sb}$ die Gleichungen.

$$U(s) - U(r) = \int_r^s U'(x) \,.\, dx,$$

$$U(b) - U(s) = \int_s^b U'(x) \,.\, dx.$$

Und nunmehr erhält man schliesslich durch Addition aller drei Gleichungen folgende Formel:

$$U(b) - U(a) = \int_a^b U'(x) \,.\, dx.$$

Es ist wohl zu beachten, dass wir bei Ableitung dieser Formel nichts weiter angenommen haben, als dass die gegebene Function $U(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ eindeutig und stetig ist, dass wir nämlich diese Formel abgeleitet haben, ohne über die Eindeutigkeit und Stetigkeit des Differentialquotienten $U'(x)$ irgend welche Voraussetzung zu Grunde zu legen.

Doch man könnte vielleicht vermuthen, dass wenn die gegebene Function auf der Strecke a bis b eindeutig und stetig ist, dass dann gleichzeitig auf dieser Strecke auch ihr Differentialquotient eindeutig und stetig sein müsse. Das aber ist — wenigstens was die Stetigkeit anbelangt — keineswegs der Fall, wie ein näherer Hinblick auf die von uns betrachtete Function sogleich zeigen wird.

Diese Function $U(x)$ wird geometrisch dargestellt durch die Curve $\alpha\beta$ (Fig. 9). Lassen wir die Tangente $\overline{mn}$ auf dieser Curve entlang fortgleiten, lassen wir nämlich den Contactpunct derselben längs der Curve hin von α bis β fortgehen, so werden wir während dieser Bewegung, was die Richtung der Tangente anbelangt, zweimal ein plötzliches Umspringen beobachten, das eine Mal in dem Augenblick, wo der Contactpunct über die Ecke ϱ, das andere Mal in dem Augenblick, wo derselbe über die Ecke σ fortgeht. Demnach wird der Winkel φ, unter welchem die Tangente gegen die Horizontale geneigt ist, während der in Rede stehenden Bewegung zweimal eine sprungweise Veränderung erfahren. Und es werden also die Werthe, welche φ, mithin auch die Werthe, welche $\operatorname{tg}\varphi = U'(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ besitzt, in zwei Puncten unstetig sein, nämlich bei $x = r$ und bei $x = s$.

Wir sehen daher, dass durch die angenommene Stetigkeit der Function $U(x)$ noch keineswegs die Stetigkeit ihres Differentialquotienten $U'(x)$ mitbedingt ist; und wir werden uns daher, was die von uns abgeleitete Formel anbelangt, in folgender Weise aussprechen:

Ist eine Function $U = U(x)$ auf der Strecke $x = a$ bis $x = b$ eindeutig und stetig, so gilt — mag nun der Differentialquotient $U'(x)$ auf dieser Strecke beschaffen sein, wie er wolle, mag er z. B. stetig, oder mag er unstetig sein — jederzeit folgende Formel:

$$\int_a^b U'(x)\, dx = U(b) - U(a).$$

Zweiter Abschnitt. Ueber die räumliche Ausbreitung, sowie über die Eindeutigkeit und Stetigkeit einer von zwei Argumenten x und y abhängenden Function. Wiederum ist die Endlichkeit als ein nothwendiger Bestandtheil der Stetigkeit aufzufassen.

Um uns von irgend einer Function $U = U(x, y)$, die von zwei Argumenten x und y abhängt, eine anschauliche Vorstellung zu verschaffen, bedienen wir uns einer Horizontalebene, in welcher wir einen Anfangspunct O, und zwei von diesem ausgehende, auf einander senkrechte Coordinatenachsen OA und OB festsetzen. Wir benutzen nämlich die Puncte dieser Ebene, um durch sie alle Werthen-Paare zu versinnlichen, welche die beiden Argumente x, y überhaupt annehmen können; indem wir für jedes solches Werthen-Paar immer denjenigen Punct der Ebene zum Bilde wählen, dessen Coordinaten durch das Werthen-Paar dargestellt sind.

Jedem Puncte x, y wird alsdann ein gewisser Werth der Function entsprechen. Die Grösse dieses Werthes können wir ebenfalls bildlich darstellen, nämlich darstellen durch die Länge eines Perpendikels, welches wir in jenem Puncte auf der Horizontalebene errichten.

Denken wir uns in solcher Weise in jedwedem Puncte x, y den zugehörigen Werth der Function durch ein Perpendikel dargestellt, so werden die Spitzen aller dieser Perpendikel zusammengenommen eine gewisse Fläche bilden. Und die Form dieser Fläche wird uns alsdann eine deutliche Vorstellung geben von der Beschaffenheit der gegebenen Function.

Es werden durch Anwendung dieser Methode sämmtliche Werthe der Function über die Horizontalebene hin ausgebreitet. Oder mit andern Worten: Es wird dabei die Horizontalebene als Träger für alle Werthe, welche die Function überhaupt besitzt, in Anwendung gebracht; denn jeder einzelne Punct jener Ebene trägt einen gewissen Werth der Function, trägt nämlich ein Perpendikel, welches einen solchen Werth durch seine Länge darstellt.

Unter den Werthen, welche die Function in irgend welchen Puncten, oder in irgend welchem Linien- oder Flächenstück jener Ebene besitzt, werden diejenigen Werthe zu verstehen sein, welche von jenen Puncten oder von jenem Linien- oder Flächenstück getragen werden. Und demgemäss werden unter den Eigenschaften, welche die Function in irgend welchen Puncten oder in irgend welchem Linien- oder Flächenstück besitzt, Eigenschaften zu verstehen sein, welche sich auf die daselbst befindlichen Werthe der Function beziehen.

Die Function soll in irgend einem gegebenen Punct der Horizontalebene stetig genannt werden, sobald die Spitze des von diesem Punct getragenen Perpendikels ringsum mit den Spitzen der benachbarten Perpendikel in Zusammenhang steht; in jenem Punct aber unstetig heissen, sobald ein solcher Zusammenhang nicht — oder wenigstens nicht ringsum — stattfindet. Daraus ergiebt sich — ähnlich, wie vorhin bei Betrachtung einer Function, die nur von einem Argumente abhängt — unmittelbar folgender Satz:

Besitzt eine Function $U(x, y)$ in irgend einem Punct x, y einen unendlich grossen Werth, so ist sie in diesem Punct jederzeit unstetig. Die Function kann mithin in einem Puncte nur dann stetig sein, wenn sie daselbst endlich ist.

Denken wir uns auf der Horizontalebene irgend ein Flächenstück $\mathfrak{A}$ abgegrenzt, denken wir uns ferner die Perpendikel construirt, durch welche in jedem Punct von $\mathfrak{A}$ der zugehörige Werth der Function dargestellt ist, und denken wir uns endlich die Fläche construirt, welche von den Spitzen all' dieser Perpendikel zusammengenommen gebildet wird; so wird die Function innerhalb

𝔄 überall stetig sein, sobald diese Fläche — mag sie nun gekrümmt, mit Kanten und Ecken behaftet sein, wie sie wolle — keinerlei Unterbrechung darbietet. D. h. die Function wird innerhalb 𝔄 stetig sein, sobald jene Fläche frei ist von Rissen, frei ist von vereinzelten Linien oder vereinzelten Puncten, mithin auch frei ist von unendlich hoch oder unendlich tief gelegenen Puncten.

Wir wollen, um einige Beispiele anführen zu können, unter 𝔄 die Fläche eines Kreises verstehen, welcher um den Anfangspunct O mit beliebigem, aber endlichem Radius beschrieben ist, und irgend einen Durchmesser dieses Kreises mit λ bezeichnen.

Die Function $U = 2 + x^2 + y^2$ wird dann ohne Zweifel innerhalb 𝔄 überall stetig sein.

Denken wir uns hingegen eine Function $V = V(x, y)$, welche in der einen Hälfte von 𝔄 — der Kreis 𝔄 mag durch die Linie λ in zwei Hälften zerlegt gedacht werden — mit U identisch ist, in der andern Hälfte hingegen Werthe besitzt, die durchweg um 1 grösser als die von U sind; so wird V eine in 𝔄 unstetige Function zu nennen sein. Die Fläche, durch welche die Werthe von V dargestellt sind, wird nämlich gerade über der Linie λ einen Riss haben.

Denken wir uns ferner eine Function $W = W(x, y)$, welche mit alleiniger Ausnahme der auf der Linie λ befindlichen Werthe, innerhalb 𝔄 überall identisch ist mit der Function U, welche aber längs λ hin Werthe besitzt, die durchweg um 1 grösser sind, als die correspondirenden Werthe von U. Diese Function W wird dann in 𝔄 offenbar unstetig sein. Denn die Fläche, durch welche ihre Werthe dargestellt sind, besitzt gerade über λ eine vereinzelte Linie; besteht also, genau genommen, aus drei durch Risse von einander geschiedenen Stücken, nämlich aus einem Flächenstück, welches über der einen Hälfte von 𝔄 liegt, ferner aus einem Linienstück, welches gerade über λ liegt, und drittens endlich aus einem Flächenstück, welches die andere Hälfte von 𝔄 überdeckt.

Denken wir uns ferner eine Function $R = R(x, y)$, welche mit alleiniger Ausnahme des in O vorhandenen Werthes mit der Function U identisch ist, welche aber in O nicht den Werth 2, sondern den Werth 3 besitzt. Diese Function wird dann in 𝔄 unstetig zu nennen sein. Denn die Fläche, durch welche sie dargestellt wird, besitzt über O einen vereinzelten Punct; besteht also, strenge genommen, aus zwei durch einen Riss von einander geschiedenen Stücken, nämlich aus einem gerade über O liegenden vereinzelten Punct, und aus einem Flächenstück, welches alle übrigen Puncte von $\mathfrak{A}$ überdeckt, welches also gerade über O eine unendlich kleine Oeffnung besitzt.

Schliesslich mag noch die Function $S = \frac{1}{x^2 + y^2}$ erwähnt werden. Diese ist in $\mathfrak{A}$ ebenfalls unstetig. Denn die Fläche, durch welche sie dargestellt wird, besteht aus Puncten, welche, mit alleiniger Ausnahme des gerade über O befindlichen, alle eine endliche Höhe haben, während der über O befindliche in unendlicher Höhe liegt; es besitzt also diese Fläche gerade über O einen vereinzelten Punct.

Die Functionen V und W sind in $\mathfrak{A}$ längs einer Linie hin, nämlich längs λ hin unstetig; während andererseits die Functionen R und S nur in einem einzelnen Puncte von $\mathfrak{A}$, nämlich nur in O unstetig sind. Demgemäss kann λ eine Unstetigkeitslinie der Functionen V und W, und andererseits O ein Unstetigkeitspunct der Functionen R und S genannt werden*).

Eine Function $U(x, y)$ soll eindeutig oder mehrdeutig genannt werden, je nachdem sie in jedem Punct der Horizontalebene, d. h. für jedes Werthenpaar von x, y, nur einen, oder mehrere Werthe besitzt. So wird z. B. $U = x^2 + y^2$ eine eindeutige, hingegen $U = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ eine zweideutige Function zu nennen sein.

Uebrigens werden auch Functionen denkbar sein, welche in

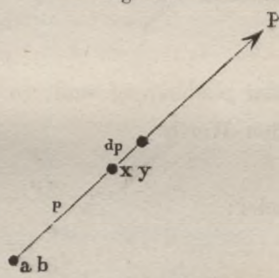
---

*) Es ist klar, dass die Functionen R und S in sehr verschiedener Weise unstetig sind; die erstere ist unstetig in Folge eines endlichen Sprunges, die letztere in Folge eines Sprunges ins Unendliche. Uebrigens können wir, was diese Verschiedenheit anbelangt, leicht noch andere Merkmale anführen. So z. B. kann die Unstetigkeit von R gehoben werden durch Abänderung ihres Werthes in einem einzelnen Puncte, während solches bei S nicht der Fall ist. Ein anderes Merkmal dieser Verschiedenheit fällt in die Augen, wenn wir neben R und S gleichzeitig auch die reciprocen Werthe dieser Functionen, nämlich die Werthe von $\frac{1}{R}$ und $\frac{1}{S}$ in Betracht ziehen. Während nämlich $\frac{1}{R}$ in $\mathfrak{A}$ unstetig ist, bleibt $\frac{1}{S}$ innerhalb $\mathfrak{A}$ überall stetig.

einigen Puncten der Horizontalebene eindeutig, in andern Puncten jener Ebene hingegen mehrdeutig sind.

Es sei $U = U(x, y)$ eine beliebig gegebene, eindeutige und stetige Function. Der partielle Differentialquotient $\frac{\partial U}{\partial x}$ ist seiner Definition zufolge gleich $\frac{U(x + dx, y) - U(x, y)}{dx}$; und wird also dadurch erhalten, dass man den Unterschied der beiden Werthe, welche die Function im Anfangs- und Endpunct eines Linienelementes dx besitzt, durch die Länge dieses Elementes dividirt. Dieses Element ist parallel zur x Achse; es bezieht sich daher der partielle Differentialquotient $\frac{\partial U}{\partial x}$ auf die Schnelligkeit, mit welcher die Function U anwächst, sobald man in einer mit der x Achse parallelen Richtung fortgeht. — In gleicher Weise wird sich der partielle Differentialquotient $\frac{\partial U}{\partial y}$ auf eine mit der y Achse parallele Richtung beziehen.

Fig. 10.



Wir wollen nun durch den Punct x, y eine Linie in beliebiger Richtung legen, welche (Fig. 10) von irgend einem festen Puncte a, b ausgehen mag, und die Schnelligkeit untersuchen, mit welcher sich der Werth von U ändert, sobald wir den Punct x, y dieser Linie entlang fortgehen lassen. Die variable Entfernung des Punctes x, y von dem festen Puncte a, b mag mit p bezeichnet werden, ferner mögen die beiden gegebenen Winkel, unter welchen die Linie p gegen die beiden Coordinatenachsen geneigt ist, α und β genannt werden*); folglich:

$$x = a + p.\cos\alpha,$$
$$y = b + p.\cos\beta.$$

Setzt man diese Werthe in die Function $U = U(x, y)$ ein, so verwandelt sich U in einen Ausdruck, welcher nur von einer einzigen Variablen, nämlich nur von p abhängt. Differenzirt man diesen Ausdruck nach p, so wird man einen Bruch

*) Bei der Linie p haben wir eine bestimmte Richtung festgesetzt, nämlich die vom Punct a, b, oder vom Puncte x, y nach P hin fortlaufende (Fig. 10). Demgemäss sollen unter unter α und β diejenigen Winkel verstanden werden, welche diese nach P hin fortlaufende Richtung mit den Richtungen der Coordinatenachsen einschliesst.

$$\frac{dU}{dp}$$

erhalten, dessen Nenner durch eine kleine Vergrösserung von p, nämlich durch das Linienelement dp dargestellt ist, und dessen Zähler durch die correspondirende Vergrösserung von U, d. i. durch den Unterschied derjenigen beiden Werthe dargestellt wird, welche U im Anfangs- und im Endpunct jenes Linienelementes besitzt. Auf die Schnelligkeit, mit welcher U anwächst, sobald man in der Richtung p fortgeht, wird sich demnach dieser Differentialquotient $\frac{dU}{dp}$ in ganz derselben Weise beziehen, wie sich die Differentialquotienten $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ auf die mit der x oder y Achse parallelen Richtungen bezogen. Dieser Differentialquotient $\frac{dU}{dp}$ ist es nun, welcher in Zukunft kurzweg „der nach der Richtung p*) genommene Differentialquotient“ genannt werden soll.

Da U von x, y abhängt, und x, y ihrerseits durch die Relationen

$$x = a + p\cos\alpha,$$
$$y = b + p\cos\beta$$

von p abhängig sind, so hat der Differentialquotient $\frac{dU}{dp}$ folgenden Werth:

$$\frac{dU}{dp} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dp} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dp},$$

oder:

$$\frac{dU}{dp} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta.$$

Wir haben also folgende Definition:

Ist U derjenige Werth, welchen irgend eine gegebene, von x und y abhängende Function im Puncte x, y besitzt, und ist ferner dU diejenige Grösse, um welche U anwächst, sobald man von jenem Puncte aus in irgend welcher Richtung p um eine unendlich kleine Strecke dp fortgeht, so soll der Bruch

$$\frac{dU}{dp}$$

„der nach der Richtung p genommene Differentialquotient“ genannt werden.

Bei einem solchen Differentialquotienten stellt der Nenner

*) Unter der Richtung p versteht man dabei diejenige, in welcher p wächst, also diejenige, welche (Fig. 10) vom Puncte x, y nach P hin fortläuft.

dp eine gewisse Strecke, eine gewisse Entfernung vor, und ist demnach jederzeit positiv. Der Zähler dU hingegen wird bald positiv, bald negativ sein, nämlich das Eine oder das Andere, je nachdem der Werth von U im Endpunct des Linienelementes dp grösser oder kleiner als im Anfangspuncte desselben ist.

Ferner haben wir folgenden Satz:

Ist $U = U(x, y)$ irgend eine gegebene Function, und bezeichnet p irgend welche von dem Puncte x, y ausgehende Richtung, so hat der nach dieser Richtung gebildete Differentialquotient $\frac{dU}{dp}$ den Werth:

$$\frac{dU}{dp} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos(p, x) + \frac{\partial U}{\partial y} \cos(p, y),$$

wo (p, x) und (p, y) die beiden Winkel bezeichnen, welche die Richtung p mit den Richtungen der Coordinatenachsen einschliesst.

Ist q eine zweite, ebenfalls vom Puncte x, y ausgehende Richtung, so wird in analoger Weise

$$\frac{dU}{dq} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos(q, x) + \frac{\partial U}{\partial y} \cos(q, y)$$

sein. Sind nun die Richtungen p und q einander gerade entgegengesetzt, so ist

$$(p, x) + (q, x) = 180^0, \quad \cos(p, x) = -\cos(q, x),$$
$$(p, y) + (q, y) = 180^0, \quad \cos(p, y) = -\cos(q, y).$$

Folglich $\frac{dU}{dp} = -\frac{dU}{dq}$. Somit haben wir folgenden Zusatz:

Versteht man unter p und q irgend zwei vom Puncte x, y ausgehende, und nach entgegengesetzten Seiten hin fortlaufende Richtungen, so haben die nach diesen Richtungen gebildeten Differentialquotienten $\frac{dU}{dp}$ und $\frac{dU}{dq}$ jederzeit entgegengesetzte Werthe, nämlich Werthe, deren Summe Null ist.

Der Differentialquotient $\frac{dU}{dp}$ sollte sich — das war unser Ausgangspunct bei dieser ganzen Betrachtung — auf die Richtung p in derselben Weise beziehen, wie sich die Differentialquotienten $\frac{\partial U}{\partial x}$ und $\frac{\partial U}{\partial y}$ auf die mit den Coordinatenachsen x und y parallelen Richtungen beziehen. Dass das bei dem Differentialquotienten $\frac{dU}{dp}$ nun in der That der Fall ist, lässt sich aus der in unserm Satze aufgestellten Formel sofort erkennen. Wenn wir nämlich in jener Formel unter p die mit der x Achse parallele Richtung verstehen, so wird $(p, x) = 0^0$, $(p, y) = 90^0$, mithin $\frac{dU}{dp} = \frac{\partial U}{\partial x}$. Und andererseits wird $\frac{dU}{dp} = \frac{\partial U}{\partial y}$, sobald man für p die mit der y Achse parallele Richtung nimmt.

Es seien 0 und 1 irgend zwei einander unendlich nahe Puncte mit den Coordinaten x, y und x_1, y_1. Die Entfernung der beiden Puncte von einander mag mit dp bezeichnet werden, so dass also dp eine ihrer Bedeutung nach positive Grösse vorstellt. Die Differenz $x_1 - x$ wird je nach der Lage der beiden Puncte 0 und 1 bald positiv, bald negativ sein, wird aber, was ihren absoluten Werth anbelangt, immer gleich der Projection des Elements dp auf die x Achse sein. Bezeichnet man also die von 0 nach 1 hin fortlaufende Richtung mit p, so wird

$$x_1 - x = \pm\, dp \,.\, \cos(p, x)$$

sein.

Nun ist, wie man leicht übersieht, $x_1 - x$ positiv oder negativ, je nachdem die von 0 nach 1 hin fortlaufende Richtung mit der Richtung der x Achse einen spitzen oder stumpfen Winkel einschliesst, d. i. je nachdem $\cos(p, x)$ positiv oder negativ ist. Der Quotient

$$\frac{x_1 - x}{\cos(p, x)}$$

muss daher jederzeit positiv sein.

Somit können wir jetzt über das zweifelhafte Vorzeichen $\pm$ in unserer Formel definitiv entscheiden. Beachten wir nämlich, dass dp seiner Definition zufolge stets pos. ist, so ergiebt sich sofort, dass in jener Formel immer das pos. Vorzeichen zu nehmen ist, dass also jederzeit

$$x_1 - x = dp \,.\, \cos(p, x)$$

sein wird. Ebenso lässt sich darthun, dass auch jederzeit

$$y_1 - y = dp \,.\, \cos(p, y)$$

sein muss.

Das Resultat, zu welchem wir hiermit gelangt sind, lässt sich zusammenfassen durch folgenden Satz:

Besitzen irgend zwei einander unendlich nahe Puncte die Coordinaten x, y und $x + dx$, $y + dy$, und versteht man unter p die von dem ersten Punct nach dem letzten hin fortlaufende Richtung, ferner unter dp die Entfernung beider Puncte von einander (also eine Grösse, die stets pos. ist), so wird jederzeit

$$dx = dp \,.\, \cos(p, x)$$
$$dy = dp \,.\, \cos(p, y)$$

sein.

Wir hätten übrigens zu diesem Resultat auch auf kürzerem Wege gelangen können, nämlich durch Anwendung des auf Seite 51 gefundenen Satzes. In jenem Satze kann nämlich für U irgend welche Function genommen werden, die von den beiden Argumeten x und y abhängt, also auch eine Function, die nur von einem dieser beiden Argumente abhängig ist. So können wir z. B. an Stelle von U auch x selber, und eben so gut auch y nehmen. Thun wir dies, so erhalten wir aus der in jenem Satz angegebenen Formel sofort folgende Gleichungen:

$$\frac{dx}{dp} = \cos(p, x),$$
$$\frac{dy}{dp} = \cos(p, y);$$

Und diese sind identisch mit denen in unserm letzten Satze.

Dritter Abschnitt. Definition der Elementarfläche. Betrachtung einer von x und y abhängenden Function, welche innerhalb einer gegebenen Elementarfläche überall eindeutig und stetig ist.

Ein auf der Horizontalebene abgegrenztes Flächenstück kann sehr verschiedene Gestalten besitzen.

Es kann ein solches Flächenstück eine oder mehrere Randcurven besitzen. So hat z. B. eine Kreisfläche nur eine Randcurve, während hingegen das ringförmige Flächenstück, welches von zwei concentrischen Kreisen begrenzt wird, zwei Randcurven besitzt.

Andererseits ist zu bemerken, dass ein solches Flächenstück in der Endlichkeit liegen, dass ein solches Flächenstück sich aber auch ins unendlich Ferne hinerstrecken kann. So liegt z. B. die von einer Ellipse begrenzte Fläche in der Endlichkeit, während sich die von einer Parabel begrenzte Fläche in unendliche Ferne hin erstreckt.

Definition: Ein auf der Horizontalebene abgegrenztes Flächenstück, welches nur eine Randcurve besitzt, und welches gleichzeitig keine unendlich fernen Puncte in sich enthält, soll in Zukunft ein „elementares Flächenstück“ oder kurzweg eine „Elementarfläche“ genannt werden.

Die nachfolgenden Betrachtungen werden sich auf die Werthe beziehen, welche irgend eine Function $U = U(x, y)$ innerhalb eines solchen elementaren Flächenstückes besitzt. Es würde leicht sein, diese Betrachtungen in allgemeinerer Fassung, nämlich mit Bezug auf Flächenstücke von weniger beschränktem Charakter durchzuführen. Trotzdem wollen wir uns dabei innerhalb der genannten Grenzen halten, und zwar deswegen, weil eine grössere Allgemeinheit für die uns vorliegenden Zwecke ohne Nutzen sein würde.

Schliesslich noch eine Bemerkung über die Randcurve irgend eines auf der xy Ebene gegebenen Flächenstückes. Die auf einer solchen Curve errichtete Normale soll nämlich, je nachdem sie in das Innere des Flächenstückes, oder in den das Flächenstück umgebenden Raum der xy Ebene hineinläuft, die innere, oder die äussere Normale genannt werden.

Mit Rücksicht auf das, was wir früher (Seite 44) in Bezug auf eine Function $U(x)$, die nur von einem Argumente abhängt, gefunden haben, ergiebt sich leicht, dass eine von zwei Argumenten x, y abhängende Function $U(x, y)$ auf einer gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$ überall stetig sein kann, ohne dass ihre Differentialquotienten $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ desshalb daselbst ebenfalls überall stetig zu sein brauchen. Denken wir uns z. B. die gegebene Elementarfläche $\mathfrak{E}$ von irgend welchem beliebig gekrümmten Flächenstück überdeckt, welches frei von Rissen und Sprüngen, hingegen mit irgend welchen Kanten und Ecken behaftet ist, so wird die durch dieses Flächenstück repräsentirte Function U auf $\mathfrak{E}$ überall stetig sein; und gleichwohl werden alsdann die Differentialquotienten $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ daselbst unstetig sein.

Gleiches gilt auch in Bezug auf die Eindeutigkeit. Sind z. B. $x = a$, $y = b$ die Coordinaten irgend eines Punctes, der innerhalb der gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$ liegt, und versteht man unter U den positiven Werth von $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, so wird U selber eine von x, y abhängende Function sein, welche auf $\mathfrak{E}$ überall eindeutig und stetig ist. Und trotzdem werden die Differentialquotienten dieser Function

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y-b}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}$$

auf $\mathfrak{E}$ nicht mehr überall eindeutig, sondern Functionen sein, welche im Puncte $x = a$, $y = b$ unendlich viele Werthe besitzen.

Durch die Eindeutigkeit und Stetigkeit einer von x und y abhängenden Function wird also noch keineswegs die Eindeutigkeit und Stetigkeit ihrer Differentialquotienten mitbedingt.

Wir wollen uns eine Function $U = U(x, y)$ gegeben denken, welche — mögen nun ihre Differentialquotienten $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}$ beschaffen sein, wie sie wollen — auf irgend welcher Elementarfläche $\mathfrak{E}$ überall eindeutig und stetig ist.

Es sei pq irgend eine begrenzte, der x Achse parallele gerade Linie, deren einzelne Puncte sämmtlich innerhalb der gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$ liegen. Da der Voraussetzung zufolge U innerhalb $\mathfrak{E}$ überall eindeutig und stetig ist, so wird gleiches auch von denjenigen Werthen von U gelten, welche längs jener Linie $p\,q$ hin auf einander folgen. Bezeichnet man daher irgend ein Element dieser Linie mit dx, und bildet man das über die ganze Linie sich hinerstreckende Integral:

$$\int_p^q \frac{\partial U}{\partial x}\, dx,$$

so wird der Werth dieses Integrales zu Folge eines früher bewiesenen Satzes (Seite 45) gleich

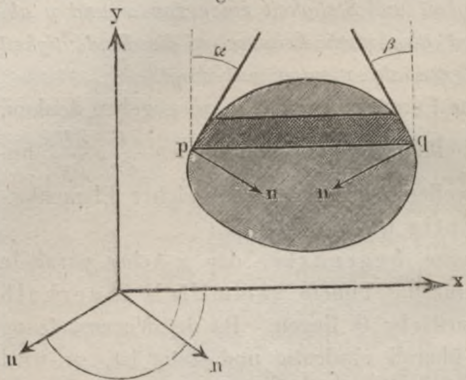
$$U_q - U_p$$

sein; falls nämlich U_p und U_q die Werthe vorstellen, welche U im Anfangs- und im Endpunct der Linie pq besitzt.

Die gegebene Elementarfläche $\mathfrak{E}$ mag nun durch irgend welche Linien in einzelne Stücke $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3 \ldots.$ zerlegt gedacht werden, und jedes dieser Stücke sei so beschaffen, dass sein Rand (wie etwa der Rand eines Rechtecks oder der einer Ellipse) von einer geraden Linie immer nur in zwei Puncten geschnitten werden kann. Irgend eines dieser Stücke sei $\mathfrak{a}$.

Wir zerlegen $\mathfrak{a}$ durch Linien, welche parallel zur x Achse laufen, in lauter schmale Streifen. Irgend einer von diesen Streifen liege (Fig. 11) zwischen zwei Linien, von welchen die eine — sie mag $p\,q$ genannt werden — von der x Achse den Abstand y, die andere hingegen den Abstaud $y + dy$ hat; so dass dy die Breite des Streifens vorstellt. Bezeichnet man irgend ein Element der Linie pq mit dx, bildet man sodann mit Bezug auf dieses Linienelement den Ausdruck $\frac{\partial U}{\partial x}dx$, und integrirt man endlich diesen Ausdruck über die ganze Linie pq hin, so wird man ein Integral erhalten, dessen Werth nach der zuvor gemachten Bemerkung folgender ist:

Fig. 11.



$$\int_p^q \frac{\partial U}{\partial x}\,dx = U_q - U_p.$$

Daraus ergiebt sich, wenn man auf beiden Seiten mit dy, d. i. mit der Breite des Streifens multiplicirt:

$$(1) \qquad \int_p^q \frac{\partial U}{\partial x}\,dx\,dy = U_q\,dy - U_p\,dy.$$

Bezeichnet man diejenigen beiden Randelemente von $\mathfrak{a}$, durch welche der betrachtete Streifen auf beiden Seiten begrenzt wird, mit ds_p und ds_q, so kann man dy als die rechtwinklige Projection von ds_p, oder auch als die von ds_q auf die y Achse ansehen; demnach ist

$$dy = ds_p \,.\, \cos\alpha = ds_q \,.\, \cos\beta,$$

wo unter α und β (Fig. 11) die spitzen Winkel zu verstehen sind, unter welchen jene beiden Elemente gegen die y Achse geneigt sind. Stellen n_p und n_q die auf diesen Linienelementen errichteten inneren Normalen vor, so ist (Fig. 11)*):

$$\alpha = (n_p, x),$$
$$\beta = 180^0 - (n_q, x),$$

wo (n_p, x) und (n_q, x) diejenigen Winkel bezeichnen, welche die Richtungen von n_p und n_q mit der Richtung der x Achse machen. Somit ergiebt sich:

$$dy = ds_p \,.\, \cos(n_p, x) = - ds_q \,.\, \cos(n_q, x).$$

Durch Benutzung dieser beiden Werthe von dy verwandelt sich unsere Formel (1) in:

---

*) In jener Figur sind die in den Puncten p und q errichteten Normalen nicht mit n_p und n_q, sondern der Kürze willen beide nur mit n bezeichnet.

$$(2) \quad \int_p^q \frac{\partial U}{\partial x}\, dx\, dy = -\, U_q \, . \cos(n_q, x) \, . \, ds_q - U_p \, . \cos(n_p, x) \, . \, ds_p .$$

In dieser Formel befinden sich *links* unter dem Integrale sämmtliche Flächenelemente $dx\, dy$, aus welchen der von uns betrachtete Streifen besteht, während sich *rechts* die beiden Linienelemente ds_p, ds_q vorfinden, von welchen der Streifen an seinen beiden Enden begrenzt wird. Denkt man sich daher das ganze Flächenstück $\mathfrak{a}$ in lauter solche Streifen zerlegt, und die Gleichung (2) successive für jeden einzelnen Streifen aufgestellt; so wird die Addition aller dieser Gleichungen eine Formel liefern, in welcher *links* sämmtliche Elemente $dx\, dy$ vorkommen, aus welchen die Fläche $\mathfrak{a}$ besteht, und in welcher *rechts* alle Linienelemente ds vorkommen, aus welchen der Rand von $\mathfrak{a}$ zusammengesetzt ist. Jene Addition wird nämlich die Formel liefern:

$$(3) \qquad \iint \frac{\partial U}{\partial x}\, dx\, dy = -\int U \, . \cos(n, x) \, . \, ds,$$

in welcher das Doppelintegral links über die ganze *Fläche* von $\mathfrak{a}$, das einfache Integral rechts über den ganzen *Rand* von $\mathfrak{a}$ ausgedehnt ist.

Wir hatten die ursprünglich gegebene Elementarfläche $\mathfrak{E}$ durch irgend welche Linien in ein gewisses System von Flächenstücken zerlegt. Auf irgend eines unter diesen Flächenstücken $\mathfrak{a}$ bezieht sich die Gleichung (3). Wir können demnach diese Gleichung der Reihe nach für *alle* jene Flächenstücke $\mathfrak{a}$ aufstellen, und erhalten dann eben so viele solcher Gleichungen, als Flächenstücke $\mathfrak{a}$ vorhanden sind. Die Addition aller dieser Gleichungen wird eine Formel liefern, in welcher *links* alle Flächenelemente $dx\, dy$ vorkommen, aus welchen die ganze Elementarfläche $\mathfrak{E}$ besteht, und in welcher *rechts* einerseits die Linienelemente ds, aus welchen der *Rand* von $\mathfrak{E}$ besteht, andererseits aber auch diejenigen Linienelemente ds vorkommen, aus welchen *die zur Zerlegung von $\mathfrak{E}$ in Anwendung gebrachten Linien* bestehen. Von den erstgenannten Elementen ds wird jedes nur *einmal*, von den letztgenannten hingegen, wie man leicht erkennt, jedes *zweimal* vorkommen. Irgend eines von diesen letztern — es mag $d\sigma$ heissen — wird nämlich immer auf der Grenze von *zwei* Flächenstücken $\mathfrak{a}$ liegen; sie mögen $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$

genannt werden. Die mit Bezug auf $\mathfrak{a}_1$ gebildete Gleichung (3) wird, was ihre rechte Seite anbelangt, ein Glied von der Form

$$(4) \qquad - U \,.\, \cos(\nu_1, x) \,.\, d\sigma,$$

und die mit Bezug auf $\mathfrak{a}_2$ gebildete ein Glied von der Form

$$(5) \qquad - U \,.\, \cos(\nu_2, x) \,.\, d\sigma$$

enthalten, wo U den Werth der gegebenen Function im Elemente $d\sigma$ bezeichnet, und wo ν_1 und ν_2 beide senkrecht gegen $d\sigma$ stehen, ν_1 aber die innere Normale von $\mathfrak{a}_1$, und ν_2 die innere Normale von $\mathfrak{a}_2$ vorstellt. Es sind demnach ν_1 und ν_2 von entgegengesetzter Richtung, mithin

$$\cos(\nu_1, x) + \cos(\nu_2, x) = 0:$$

also auch die Summe der beiden eben genannten Glieder (4) und (5) gleich Null. Wenn wir demnach die den einzelnen Flächenstücken $\mathfrak{a}$ zugehörigen Gleichungen (3) addiren, so werden sich dabei auf der rechten Seite alle diejenigen Integrale fortheben, welche den Elementen $d\sigma$ entsprechen, d. h. alle diejenigen, welche sich auf die zur Zerlegung von $\mathfrak{E}$ in Anwendung gebrachten Linien beziehen. Und es wird demnach jene Addition folgendes Resultat liefern:

$$(6) \qquad \int\!\!\int \frac{\partial U}{\partial x}\, dx\, dy = - \int U \,.\, \cos(n, x) \,.\, ds;$$

wo sich das Doppelintegral links auf die Fläche, und das einfache Integral rechts auf den Rand von $\mathfrak{E}$ bezieht.

In ganz ähnlicher Weise wird sich offenbar auch nachweisen lassen, dass

$$(7) \qquad \int\!\!\int \frac{\partial U}{\partial y}\, dx\, dy = - \int U \cos(n, y) \,.\, ds$$

ist.

Diese Formeln (6) und (7) lassen sich übrigens noch in einer etwas anderen Gestalt darstellen. Es sei n die irgendwo auf dem Rande von $\mathfrak{E}$ errichtete innere Normale, ferner seien x, y die Coordinaten desjenigen Punctes, in welchem diese Normale errichtet ist, und dx, dy die Zuwüchse, welche die Coordinaten jenes Punctes erhalten würden, falls man denselben in der Richtung von n um eine unendlich kleine Strecke dn fortrücken liesse. Alsdann ist (vergl. den Satz Seite 52):

$$dx = dn \,.\, \cos(n, x), \quad dy = dn \,.\, \cos(n, y),$$

mithin

$$\cos(n, x) = \frac{dx}{dn}, \quad \cos(n, y) = \frac{dy}{dn}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Formeln (6) und (7), so gewinnen dieselben folgendes Aussehen:

(6 a.) $$\iint \frac{\partial U}{\partial x}\, dx\, dy = -\int U \frac{dx}{dn}\, ds,$$

(7.a.) $$\iint \frac{\partial U}{\partial y}\, dx\, dy = -\int U \frac{dy}{dn}\, ds.$$

Wir gelangen somit zu folgendem Satz:

Ist eine Function $U = U(x, y)$ auf einer beliebig gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$ überall eindeutig und stetig, so können die beiden über den Flächeninhalt von $\mathfrak{E}$ ausgedehnten Integrale

$$\iint \frac{\partial U}{\partial x}\, dx\, dy, \quad \iint \frac{\partial U}{\partial y}\, dx\, dy$$

immer in Integrale umgewandelt werden, welche sich nicht auf die Fläche, sondern auf den Rand von $\mathfrak{E}$ beziehen. Es gelten nämlich alsdann folgende Formeln:

$$\iint \frac{\partial U}{\partial x}\, dx\, dy = -\int U \cos(n, x) \,.\, ds = -\int U \frac{dx}{dn}\, ds,$$

$$\iint \frac{\partial U}{\partial y}\, dx\, dy = -\int U \cos(n, y) \,.\, ds = -\int U \frac{dy}{dn}\, ds.$$

Hier sind die einfachen Integrale über alle Linienelemente ds, aus welchen die Randcurve von $\mathfrak{E}$ besteht, hinerstreckt zu denken; gleichzeitig ist unter n die auf ds errichtete innere Normale zu verstehen.

Wir wollen nun gegenwärtig zwei von x, y abhängende Functionen $V = V(x, y)$ und $W = W(x, y)$ betrachten, diesmal aber annehmen, dass innerhalb der gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$ nicht nur jene Functionen selber, sondern ebenso auch ihre Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}$ überall eindeutig und stetig sind. Gleiches wird dann offenbar auch von den aus $V, W, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}$ zusammengesetzten Ausdrücken:

$$U_1 = V \frac{\partial W}{\partial x} - W \frac{\partial V}{\partial x},$$

$$U_2 = V \frac{\partial W}{\partial y} - W \frac{\partial V}{\partial y}$$

gelten. Demgemäss werden wir die in dem vorhergehenden Satz aufgestellten Formeln

$$(1)\qquad \iint \frac{\partial U}{\partial x}\,dx\,dy = -\int U\,\frac{dx}{dn}\,ds,$$

$$(2)\qquad \iint \frac{\partial U}{\partial y}\,dx\,dy = -\int U\,\frac{dy}{dn}\,ds$$

auf diese Ausdrücke U_1, U_2 und auf die gegebene Elementarfläche $\mathfrak{E}$ sofort in Anwendung bringen können. Nehmen wir in (1) U_1 statt U, und in (2) U_2 statt U, so erhalten wir:

$$(3)\ \iint\left(V\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - W\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)dx\,dy = -\int\left(V\frac{\partial W}{\partial x} - W\frac{\partial V}{\partial x}\right)\frac{dx}{dn}\,ds,$$

$$(4)\ \iint\left(V\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - W\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)dx\,dy = -\int\left(V\frac{\partial W}{\partial y} - W\frac{\partial V}{\partial y}\right)\frac{dy}{dn}\,ds.$$

Die Addition dieser beiden Gleichungen liefert, wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \Delta V,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \Delta W$$

setzen, und wenn wir ausserdem beachten, dass

$$\frac{\partial V}{\partial x}\,\frac{dx}{dn} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\frac{dy}{dn} = \frac{dV}{dn},$$

$$\frac{\partial W}{\partial x}\,\frac{dx}{dn} + \frac{\partial W}{\partial y}\,\frac{dy}{dn} = \frac{dW}{dn}$$

ist, folgende Formel:

$$\iint (V\Delta W - W\Delta V)\,dx\,dy = -\int\left(V\,\frac{dW}{dn} - W\,\frac{dV}{dn}\right)ds.$$

Somit gelangen wir zu folgendem Satz:

Sind $V = V(x, y)$ und $W = W(x, y)$ innerhalb einer beliebig gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$ überall eindeutig und stetig, und gilt Gleiches auch von ihren ersten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial V}{\partial x},\ \frac{\partial V}{\partial y},\ \frac{\partial W}{\partial x},\ \frac{\partial W}{\partial y};$$

so ist jederzeit

$$\iint (V\Delta W - W\Delta V)\,dx\,dy = -\int\left(V\,\frac{dW}{dn} - W\,\frac{dV}{dn}\right)ds.$$

Unter ΔV, ΔW sind hier folgende Ausdrücke zu verstehen:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2},\quad \Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}.$$

Ferner soll ds irgend ein zum Rande von $\mathfrak{E}$ gehöriges Linienelement, und n die auf ds errichtete innere Normale vorstellen. Was *endlich die Integrationen anbelangt, so bezieht sich das Doppel-Integral links auf alle zu* 𝔈 *gehörigen Flächenelemente* $dx\,dy$, *und das einfache Integral rechts auf alle zum Rande von* 𝔈 *gehörigen Linienelemente* ds.

Die Voraussetzungen, welche für die Gültigkeit dieses Satzes nothwendig sind, werden nun offenbar erfüllt, wenn man für V irgend eine Constante nimmt, z. B. $V = 1$ setzt. Dadurch ergiebt sich folgender Zusatz:

Ist $W = W(x, y)$ *eine Function, welche, ebenso wie* $\frac{\partial W}{\partial x}$ *und* $\frac{\partial W}{\partial y}$, *innerhalb einer Elementarfläche* 𝔈 *eindeutig und stetig ist, so wird jederzeit*

$$\iint \varDelta W\, dx\, dy = -\int \frac{dW}{dn}\, ds$$

sein, wo sich das Integral links auf die Fläche, das rechts auf den Rand von 𝔈 *bezieht.*

Sind, wie wir hier vorausgesetzt haben, W, $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{dy}$ innerhalb 𝔈 überall eindeutig und stetig, so wird Gleiches auch der Fall sein bei den Werthen der drei Producte:

$$W \,.\, W, \quad W \,.\, \frac{\partial W}{\partial x}, \quad W \,.\, \frac{\partial W}{\partial y}.$$

Oder mit andern Worten: sind W, $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$ innerhalb 𝔈 allenthalben eindeutig und stetig, so wird Gleiches auch stattfinden bei W^2, $\frac{\partial (W^2)}{\partial x}$, $\frac{\partial (W^2)}{\partial y}$. Die in unserm letzten Satz aufgestellte Formel wird daher auch dann gelten, wenn man daselbst W^2 statt W nimmt. Nun ist:

$$\frac{\partial^2 (W^2)}{\partial x^2} = 2\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + 2\, W \frac{\partial^2 W}{dx^2},$$

$$\frac{\partial^2 (W^2)}{\partial y^2} = 2\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + 2\, W \frac{\partial^2 W}{\partial y^2};$$

mithin:

$$\varDelta (W^2) = 2\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + 2\, W \,.\, \varDelta W;$$

ferner:

$$\frac{d (W^2)}{dn} = 2\, W \frac{dW}{dn}.$$

Demnach ergiebt sich Folgendes:

Ist $W = W(x, y)$ eine Function, welche, ebenso wie $\frac{\partial W}{\partial x}$ und $\frac{\partial W}{\partial y}$, innerhalb einer Elementarfläche $\mathfrak{E}$ eindeutig und stetig ist, so gilt die Formel:

$$\iint\left(W\Delta W + \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right) dx\,dy = -\int W\frac{dW}{dn}\,ds,$$

wo sich das Integral links auf die Fläche, das rechts auf den Rand von $\mathfrak{E}$ bezieht.

Vierter Abschnitt. Ueber Integrale, welche längs einer Curve hinerstreckt sind.

Bezeichnet $U = U(x)$ eine Function, die nur von einem einzigen Argumente x abhängt, so versteht man bekanntlich unter dem Integral $\int U dx$ eine Summe unendlich kleiner Glieder von folgender Form:

$$(1) \qquad \int U dx = (x_2 - x_1)\, U(x_1) + (x_3 - x_2)\, U(x_2) + \ldots,$$

wo $x_1, x_2, x_3 \ldots$ eine Reihe von Werthen vorstellen, welche hinsichtlich ihrer Grösse dicht auf einander folgen, und in ihrer Gesammtheit das ganze Intervall erfüllen, über welches die Integration ausgedehnt werden soll.

Hat man es mit einer Function $U = U(x, y)$ zu thun, welche von zwei Argumenten x und y abhängt, so wird das Integral $\int U dx$, je nach den gerade vorliegenden näheren Festsetzungen, verschiedene Bedeutungen besitzen können.

Soll z. B. y bei Ausführung jener Integration als constant betrachtet werden, so wird dieses Integral eine mit (1) analoge Bedeutung haben; d. h. es wird alsdann

$$(2) \qquad \int U dx = (x_2 - x_1)\,.\,U(x_1, y) + (x_3 - x_2)\,.\,U(x_2, y) + \ldots$$

sein. Die hier in den einzelnen Gliedern der rechten Seite vorkommenden Factoren $U(x_1, y)$, $U(x_2, y)$, ... werden nämlich in diesem Falle sämmtlich ein und dasselbe y enthalten, und nur durch verschiedene Werthe von x von einander verschieden sein.

Soll hingegen y bei Ausführung der Integration als variabel betrachtet werden, so werden jene Factoren $U(x, y)$ sich nicht allein durch verschiedene Werthe des Argumentes x, sondern gleichzeitig auch durch verschiedene Werthe des Argumentes y von einander unterscheiden. Die Art und Weise, in welcher y von einem Gliede zum andern hin variirt, kann sehr verschieden sein; und es wird daher das Integral, wenn y als variabel angesehen werden soll, nur dann einen bestimmten Sinn haben, wenn zwischen y und x irgend eine Relation festgesetzt ist, aus der man erkennen kann, in welcher Weise y sich ändern soll, während x die auf einander folgenden Werthe x_1, x_2, x_3 .... durchläuft.

Nehmen wir an, eine solche Relation wäre wirklich festgesetzt — sie mag mit $\varphi(x, y) = 0$ bezeichnet werden —, und y_1, y_2, y_3 .... wäre diejenige Werthreihe, welche dieser Relation zufolge mit der Werthreihe x_1, x_2, x_3 .... correspondirt. Dann wird das in Rede stehende Integral folgende Bedeutung haben:

$$(3)\quad \int U dx = (x_2 - x_1) \,.\, U(x_1, y_1) + (x_3 - x_2) \,.\, U(x_2, y_2) + \ldots.$$

Man kann sich übrigens von den verschiedenen Bedeutungen, welche ein solches Integral je nach der gerade zwischen x und y festgesetzten Relation besitzen wird, ein anschauliches Bild verschaffen, wenn man gewisse geometrische Vorstellungen zu Hülfe nimmt.

Denkt man sich nämlich x und y als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punctes in der Horizontalebene, so bezieht sich — kann man sagen — sowohl die Integration in (2), als auch die in (3) auf eine gewisse Reihe von Puncten. Bei (2) besitzen diese Puncte die Coordinaten:

$$x_1,\ y \qquad x_2,\ y \qquad x_3,\ y \ldots.$$

bei (3) hingegen die Coordinaten:

$$x_1,\ y_1 \qquad x_2,\ y_2 \qquad x_3,\ y_3 \ldots.$$

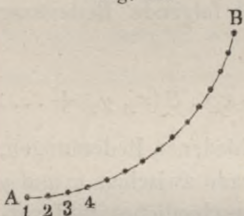
Während also bei (2) alle Puncte dasselbe y haben, mithin auf einer zur x Achse parallelen geraden Linie liegen; befinden sich die bei (3) auftretenden Puncte auf irgend welcher krummen Linie, auf irgend welcher Curve. Die Gleichung dieser Curve lässt sich sofort angeben. Ist nämlich, wie wir bei (3) voraussetzten, $\varphi(x, y) = 0$ die zwischen x und y festgesetzte Relation, so wird jedes der Werthenpaare x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; ....

dieser Relation Genüge leisten; mithin wird $\varphi(x, y) = 0$ die Gleichung derjenigen Curve sein, auf welcher sich die bei (3) auftretenden Puncte befinden.

Diejenige Curve, welche bei Ausführung des Integrales $\int U\,dx$ in jedem gegebenen Fall als Richtschnur dienen soll, mag die *Integrationscurve* oder die *Bahn des Integrales* genannt werden. Die Gleichung dieser Bahn ist bei (2) durch $y = \text{const.}$, bei (3) hingegen durch $\varphi(x, y) = 0$ dargestellt. Demgemäss werden wir sagen können: Das Integral in (2) ist *hinerstreckt* über die Curve $y = \text{const.}$, das in (3) hingegen *hinerstreckt* über die Curve $\varphi(x, y) = 0$.

Soll also (Fig. 12) das Integral über irgend welche gegebene Curve AB hinerstreckt werden, so wird, wie man aus (3) erkennt, der Werth des Integrales folgender sein:

Fig. 12.



$$(4)\quad \int U\,dx = (x_2 - x_1)\,U_1 + (x_3 - x_2)\,U_2 + (x_4 - x_3)\,U_3 + \ldots\ldots$$

wo 1, 2, 3, 4 .... Puncte sind, welche auf der gegebenen Curve, von A bis B hin, auf einander folgen, und wo ferner $x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots\ldots$ und $U_1, U_2, U_3, U_4 \ldots\ldots$ diejenigen Werthe bezeichnen, welche x und U in jenen Puncten besitzen.

Eine ganz analoge Bedeutung wird offenbar das Integral $\int U\,dy$ besitzen. Wir wollen aber sogleich zu einer *allgemeineren* Betrachtung, nämlich zur Betrachtung des Integrales $\int U\,dV$ übergehen, wo $U = U(x, y)$ und $V = V(x, y)$ irgend welche von x und y abhängende Functionen sein sollen. Denkt man sich dieses Integral $\int U\,dV$ wiederum (Fig. 12) über eine beliebig gegebene Curve AB hinerstreckt, so wird sein Werth dem in (4) angegebenem völlig analog sein, nämlich dargestellt werden durch folgende Formel:

$$(5)\quad \int U\,dV = (V_2 - V_1)\,U_1 + (V_3 - V_2)\,U_2 + (V_4 - V_3)\,U_3 + \ldots\ldots$$

wo $U_1, U_2, U_3, \ldots$ und $V_1, V_2, V_3 \ldots$ die Werthe vorstellen, welche die Functionen U und V in den Puncten 1, 2, 3 ... besitzen.

Das erste Glied in dieser Formel lautet:

$$(V_2 - V_1)\, U_1$$

und bezieht sich auf das erste Element der gegebenen Curve AB, nämlich auf das Element $\overline{12}$. Die beiden Puncte 1 und 2 liegen einander unendlich nahe, das Element $\overline{12}$ ist also unendlich klein. Demnach wird es gleichgültig sein, ob man in diesem Gliede denjenigen Werth von U nimmt, welchen U im Puncte 1 besitzt, oder ob man statt dessen denjenigen Werth nimmt, welchen U in irgend welchem andern Puncte des Elementes $\overline{12}$ besitzt. Bezeichnet man daher einen beliebigen Punct dieses Elementes mit a, und den Werth von U in diesem Puncte mit U_a, so kann man das erste Glied ersetzen durch

$$(V_2 - V_1)\, U_a.$$

Aehnliches gilt für alle folgenden Glieder. Also (Fig. 12):

Sind $U = U(x, y)$ und $V = V(x, y)$ irgend zwei gegebene Functionen, so hat das über irgend eine Curve AB hinerstreckte Integral $\int U dV$ folgende Bedeutung:

$$\int U dV = (V_2 - V_1)\, U_a + (V_3 - V_2)\, U_b + (V_4 - V_3)\, U_c + \ldots.$$

Hier sind 1, 2, 3, 4 .... *Puncte, welche längs der gegebenen Curve, von A nach B hin, dicht gedrängt auf einander folgen: und a, b, c .... Puncte, von welchen der erste eine beliebige Lage zwischen* 1 *und* 2, *der zweite eine beliebige Lage zwischen* 2 *und* 3, *der dritte zwischen* 3 *und* 4 *hat, u. s. w.*

Will man das Integral $\int U dV$ über dieselbe Curve AB, welche wir bis jetzt betrachtet haben, gegenwärtig aber in der entgegengesetzten Richtung, nämlich von B nach A hin fortführen, so werden (Fig. 12) die mit $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$ bezeichneten Curvenelemente, d. i. diejenigen Elemente, welche vorhin die ersten waren, gegenwärtig die letzten sein. Demnach ergiebt sich für das in der Richtung von B nach A hinerstreckte Integral $\int U dV$ ein Werth, welcher, falls wir nur seine allerletzten Glieder andeuten, so lautet:

$$\int U dV = \ldots\ldots + (V_3 - V_4)\, U_c + (U_2 - U_3)\, U_b + (U_1 - U_2)\, U_a,$$

also ein Werth, welcher dem früheren Werthe gerade entgegengesetzt ist. Bezeichnen wir also das über die Curve AB hinerstreckte Integral $\int U dV$, je nachdem dasselbe von A nach B hin, oder von B nach A hin fortgeführt werden soll, mit $\int\limits_A^B U dV$ oder mit $\int\limits_B^A U dV$, so haben wir folgenden Satz:

Sind $U = U(x, y)$ und $V = V(x, y)$ irgend zwei gegebene Functionen, so haben die über irgend eine Curve AB hinerstreckten Integrale

$$\int\limits_A^B U dV \quad \textit{und} \quad \int\limits_B^A U dV$$

immer entgegengesetzte Werthe, nämlich Werthe, deren Summe Null ist. Gleiches gilt also auch bei Integralen von der Form $\int U dx$ oder $\int U dy$.

Ganz anders verhält es sich bei Integralen von der Form $\int U ds$. Soll nämlich ein solches Integral über alle Elemente ds einer gegebenen Curve hinerstreckt werden, so ist wohl zu beachten, dass die Elemente ds sämmtlich positive Bedeutungen besitzen, denn ds ist die Entfernung zweier längs der Curve hin auf einander folgender Puncte, also eine Grösse, die ihrer Bedeutung nach jederzeit positiv ist. Demnach ist es auch für den Werth des Integrals $\int U ds$ vollkommen gleichgültig, ob man dasselbe längs einer gegebenen Curve AB von A nach B hin, oder von B nach A hin erstreckt. Beide Integrale, sowohl das Integral $\int\limits_A^B U ds$, als auch das Integral $\int\limits_B^A U ds$ werden ein und denselben Werth besitzen, nämlich dargestellt sein durch folgende Formel:

$$\int\limits_A^B U ds = \int\limits_B^A U ds = U_a ds_a + U_b ds_b + \ldots U_r ds_r,$$

wo ds_a, ds_b, ... ds_r die auf einander folgenden Elemente der Curve AB vorstellen, und wo U_a, U_b, ... U_r diejenigen Werthe bezeichnen, welche die gegebene Function $U = U(x, y)$ in diesen Elementen besitzt.

Fünfter Abschnitt. Das Integral eines vollständigen Differentials längs einer in sich zurücklaufenden Curve hin wird nicht immer, sondern nur unter gewissen Umständen gleich Null sein.

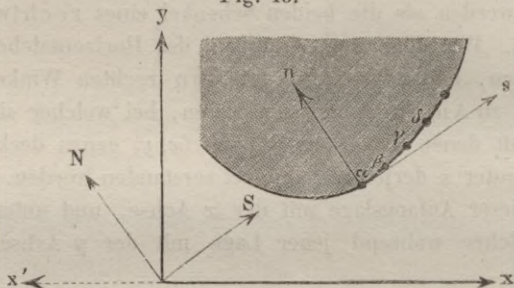
Es sei 𝔈 eine beliebig gegebene Elementarfläche, also eine Fläche, welche nur eine Randcurve besitzt.

Die x Achse und die y Achse des Coordinatensystems können angesehen werden als die beiden Schenkel eines rechten Winkels (x, y). Wir denken uns nun auf der Horizontalebene noch einen zweiten, und zwar beweglichen rechten Winkel (s, n). Dieser mag zu Anfang eine Lage haben, bei welcher sich seine Schenkel mit denen des festen Winkels (x, y) genau decken. Und zwar mag unter s derjenige Schenkel verstanden werden, welcher während dieser Anfangslage mit der x Achse, und unter n derjenige, welcher während jener Lage mit der y Achse zusammenfällt.

Durch Drehung und Verschiebung auf der Horizontalebene bringen wir nun den beweglichen Winkel (s, n) in eine solche Lage, dass sein Scheitelpunct auf irgend einen im Rande der gegebenen Fläche 𝔈 liegenden Punct α fällt, und dass gleichzeitig sein Schenkel n mit der in α errichteten inneren Normale jener Fläche zusammenfällt; sein anderer Schenkel s wird alsdann von selber die Richtung der in α an den Rand von 𝔈 gelegten Tangente annehmen (Fig. 13). Lassen wir den Scheitelpunct des Winkels (s, n) auf dem Rande der Fläche weiter und weiter fortrücken, und lassen wir, während solches geschieht, den Winkel sich der Art drehen, dass der Schenkel s beständig Tangente bleibt, so wird gleichzeitig der andere Schenkel n beständig die Richtung der inneren Normale angeben.

Es handelt sich nun darum, die Neigungen näher zu untersuchen, welche die Schenkel s und n, während der hier angenommenen Bewegung, in jedem Augenblick zur x und y Achse haben. Bei dieser Untersuchung wird es offenbar vollständig gleichgültig sein, ob wir dabei den mit seinem Scheitelpunct au dem Rande von 𝔈 fortrückenden rechten Winkel (s, n) *selber* in Betracht ziehen, oder ob wir dabei, an Stelle jenes Winkels, einen *andern* rechten Winkel (S, N) betrachten, dessen Scheitelpunct beständig im Anfangspunct des Coordinatensystems bleibt, und dessen Schenkel denen des Winkels (s, n) beständig parallel bleiben. Was nun aber den rechten Winkel (S, N) anbelangt, so ergiebt sich sofort, dass die Neigung von S gegen x beständig ebenso gross sein wird, als die von N gegen y: ferner, wenn man die zu x entgegengesetzte Richtung mit x' bezeichnet, dass die Neigung von S gegen y jederzeit ebenso gross sein wird, als die von N gegen x'. Wir haben demnach folgende Gleichungen (Fig. 13):

Fig. 13.



$$(S, x) = (N, y),$$
$$(S, y) = (N, x'),$$

oder was dasselbe ist:

$$(S, x) = (N, y),$$
$$(S, y) = 180^0 - (N, x).$$

Genau dieselben Relationen werden daher auch für die Schenkel des Winkel (s, n) stattfinden. Somit ergiebt sich, wenn man die Cosinus bildet:

$$(1) \qquad \begin{cases} \cos(s, x) = \cos(n, y), \\ \cos(s, y) = -\cos(n, x). \end{cases}$$

Es seien nun $U = U(x, y)$ und $V = V(x, y)$ zwei beliebig gegebene, von x und y abhängende Functionen, welche innerhalb der Elementarfläche 𝔈 allenthalben *eindeutig und stetig* sind. Es soll das über den *Rand* von 𝔈 hinerstreckte Integral

$$\int (U dx + V dy)$$

in nähere Untersuchung gezogen werden. Sind (Fig. 13) $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$ die längs jenes Randes auf einander folgenden Puncte, und x_α, y_α, U_α, V_α; x_β, y_β, U_β, V_β; .... die Werthe, welche x, y, U, V in jenen Puncten besitzen, so werden die Bedeutungen der Rand-Integrale $\int U dx$ und $\int V dy$ dargestellt sein durch folgende Summen:

$$(2)\qquad \begin{cases} \int U dx = U_\alpha (x_\beta - x_\alpha) + U_\beta (x_\gamma - x_\beta) + \ldots . \\ \int V dy = V_\alpha (y_\beta - y_\alpha) + V_\beta (y_\gamma - y_\beta) + \ldots . \end{cases}$$

Bezeichnet man die Entfernung der beiden ersten Puncte α und β von einander mit ds, so ergiebt sich sofort:

$$x_\beta - x_\alpha = ds \,.\, \cos(s, x),$$
$$y_\beta - y_\alpha = ds \,.\, \cos(s, y);$$

also mit Rücksicht auf (1):

$$(3)\qquad \begin{cases} x_\beta - x_\alpha = ds \,.\, \cos(n, y), \\ y_\beta - y_\alpha = - ds \,.\, \cos(n, x). \end{cases}$$

Hieraus aber folgt, dass die ersten Glieder der in (2) angegebenen Summen auch so dargestellt werden können:

$$U_\alpha (x_\beta - x_\alpha) = U_\alpha \,.\, ds \,.\, \cos(n, y),$$
$$V_\alpha (y_\beta - y_\alpha) = - V_\alpha \,.\, ds \,.\, \cos(n, x),$$

wo U_α und V_α diejenigen Werthe vorstellen, welche die Functionen U und V im Puncte α, d. i. im Anfangspuncte des Linienelementes ds besitzen. In ganz analoger Weise werden sich alle folgenden Glieder jener beiden Summen umformen lassen. Somit ergiebt sich aus (2)

$$(4)\qquad \begin{cases} \int U dx = + \int U \cos(n, y) \,.\, ds, \\ \int V dy = - \int V \cos(n, x) \,.\, ds. \end{cases}$$

Die hier auf der rechten Seite stehenden Integrale sind über sämmtliche zum Rande von $\mathfrak{C}$ gehörigen Linienelemente ds hinerstreckt, und lassen sich, wenn wir beachten, dass U und V innerhalb $\mathfrak{C}$ überall eindeutig und stetig sind, durch Anwendung eines früher (S. 59) gefundenen Satzes leicht in gewisse Flächenintegrale umwandeln. Zufolge jenes Satzes ist nämlich

$$\int U \cos(n, y) \, . \, ds = -\iint \frac{\partial U}{\partial y} \, dx \, dy,$$

$$\int V \cos(n, x) \, . \, ds = -\iint \frac{\partial V}{\partial x} \, dx \, dy,$$

wo die Doppelintegrale über alle zu $\mathfrak{E}$ gehörigen Flächenelemente $dx\,dy$ ausgedehnt zu denken sind. Somit ergiebt sich aus (4)

$$(5) \qquad \begin{cases} \int U \, dx = -\iint \frac{\partial U}{\partial y} \, dx \, dy, \\ \int V \, dy = +\iint \frac{\partial V}{\partial x} \, dx \, dy; \end{cases}$$

und hieraus durch Addition:

$$(6) \qquad \int (U\,dx + V\,dy) = \iint \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx \, dy.$$

Setzen wir nun voraus, dass

$$U\,dx + V\,dy$$

ein vollständiges Differential darstellt, dass mithin

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x}$$

ist, so verwandelt sich diese Gleichung schliesslich in:

$$(7) \qquad \int (U\,dx + V\,dy) = 0.$$

Wir gelangen daher zu folgendem Satz:

Sind $U = U(x, y)$ und $V = V(x, y)$ irgend zwei Functionen, welche innerhalb einer gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$ überall eindeutig und stetig sind, und ist ferner $U\,dx + V\,dy$ ein vollständiges Differential, so ist das über den Rand der Fläche $\mathfrak{E}$ hinerstreckte Integral

$$\int (U\,dx + V\,dy)$$

jederzeit gleich Null.

Dritte Vorlesung.

Functionen mit einem complexen Argumente in ihrer Ausbreitung auf einer Elementarfläche.

Erster Abschnitt. Ueber die positive Umlaufung einer Fläche oder eines Punctes, und über die Wahl des Coordinatensystemes.

Es ist nicht ohne Absicht geschehen, dass wir die Ebene, über welche hin die Werthe einer gegebenen Function ausgebreitet wurden, immer als h o r i z o n t a l angesehen haben. Wir können in Folge dessen jetzt unmittelbar von der o b e r e n und u n t e r e n Seite dieser Ebene sprechen. Und die Vortheile, welche hierdurch für unsere Ausdrucksweise entspringen, werden schon jetzt, namentlich aber später, wenn wir zu complicirteren geometrischen Vorstellungen übergehen, nicht ohne Gewicht sein.

Es sei auf der Horizontalebene irgend ein Flächenstück 𝔄 abgegrenzt. Ein Mensch, welcher auf der Horizontalebene fortschreitet, hat, wenn er diese Fläche 𝔄 längs ihres Randes hin umwandern will, die Wahl zwischen zwei einander entgegengesetzten Richtungen. Je nachdem er sich für die eine oder die andere entscheidet, wird er während seiner Wanderung die Fläche 𝔄 entweder beständig zur Linken, oder beständig zur Rechten haben. Wir setzen Folgendes fest:

Definition. Diejenige Richtung, in welcher man am Rande und auf der o b e r e n Seite einer gegebenen Fläche fortgehen muss, wenn man die Fläche selber beständig zur L i n k e n haben will, soll die p o s i t i v e R i c h t u n g i h r e s R a n d e s, und die Wanderung, *welche man alsdann ausführt, eine positive Umlaufung der Fläche genannt werden.*

Ein auf der Horizontalebene befindlicher Punct kann als eine äusserst kleine Fläche, z. B. als eine sehr kleine Kreisfläche angesehen werden. Demgemäss soll unter der positiven Umlaufung eines Punctes diejenige verstanden werden, bei welcher jene kleine Fläche in positiver Richtung umlaufen wird.

Befindet sich ferner auf der Horizontalebene eine gerade Linie, welche mit dem einen Endpuncte auf der Ebene befestigt ist, und welche, auf der Ebene fortgleitend, um jenen festen Endpunct rotirt, so soll diese Rotationsbewegung eine positive genannt werden, sobald die einzelnen Puncte der Linie um jenen festen Punct in positiver Richtung herumlaufen. Hieran schliesst sich unmittelbar eine gewisse Festsetzung, die wir in Betreff des auf der Horizontalebene anzunehmenden Coordinatensystemes machen; es ist folgende:

Das Coordinatensystem soll immer der Art beschaffen gedacht werden, dass die x Achse einen Winkel von 90^0 beschreiben muss, falls sie durch eine positive Rotation um den Anfangspunct in die Lage der y Achse gelangen will.

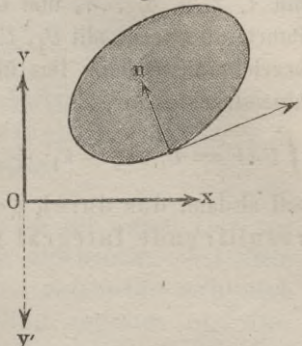
In Fig. 14 z. B. sind die Linien x, y zu Coordinatenachsen zu wählen, denn bei diesen beträgt der eben genannte Rotationswinkel in der That 90^0. Bei den Linien x, y' hingegen beträgt jener Winkel 270^0; diese letztern dürfen also nicht gewählt werden. Wir können die eben gemachte Festsetzung übrigens auch so aussprechen:

Die beiden Achsen des Coordinatensystemes sollen stets so zu einander liegen, dass der auf der oberen Seite der Fläche Stehende und in der Richtung der x Achse Fortsehende die y Achse zur Linken hat.

Ganz analog ist nun auch diejenige Beziehung, welche — zufolge unserer Definition (Seite 71) — zwischen der positiven Randrichtung einer gegebenen Fläche und zwischen der auf diesem Rande errichteten inneren Normale stattfindet. Denn der auf der oberen Seite der Fläche, an ihrem Rande Stehende und in der positiven Richtung dieses Randes Fortsehende hat ja ebenfalls die Fläche, mithin auch die im Rande errichtete innere Normale zur linken Hand. Wir haben somit folgenden Satz (Fig. 14):

Stellt bei irgend einer Fläche s die positive Richtung des Randes, und n die auf dem Rande errichtete innere Normale vor, so liegt jederzeit s zu n, wie x zu y, d. h. wie die x Achse zur y Achse.

Fig. 14.

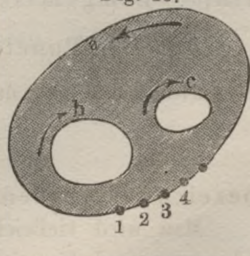


Die in Betreff des Coordinatensystems x, y gemachte Festsetzung soll sich natürlich auch auf jedes andere Coordinatensystem erstrecken, welches etwa gleichzeitig neben jenem in der Horizontalebene angenommen wird. Sind z. B. zwei Coordinatensysteme x, y und ξ, η vorhanden, so wird ξ zu η stets ebenso liegen wie x zu y.

Haben wir es also in der Horizontalebene gleichzeitig mit zwei Linien x, y, mit zwei Linien ξ, η und mit zwei Linien s, n zu thun, so werden diese drei Linienpaare als drei verschiedene Lagen ein und desselben auf jener Ebene fortgleitenden rechten Winkels zu betrachten sein, dessen einer Schenkel während jener drei Lagen der Reihe nach mit x, ξ, s, und dessen anderer Schenkel gleichzeitig mit y, η, n bezeichnet ist.

Ist in der Horizontalebene eine Fläche gegeben, welche mehrere Randcurven besitzt, welche z. B. (Fig. 15) von drei Randcurven, einer äusseren und zwei inneren, begrenzt ist, so wird die vollständige Umlaufung dieser Fläche darin bestehen, dass man successive die erste, dann die zweite, endlich die dritte Curve durchwandert. Was die positive Umlaufung der Fläche anbelangt, so soll die vorhin angegebene Definition (S. 71) auch hier in Kraft bleiben. Die Umlaufung der Fläche (Fig. 15) wird demnach eine positive sein, wenn sie, was die äussere Randcurve anbelangt, in der Richtung a, und was die beiden innern anbelangt, in den Richtungen b und c vor sich geht.

Fig. 15.



Es seien $U = U(x, y)$ und $V = V(x, y)$ irgend zwei gegebene Functionen, ferner sei $\mathfrak{A}$ eine beliebig gegebene Fläche (Fig. 15). Die im Rande von $\mathfrak{A}$ liegenden Puncte mögen, wie sie in der positiven Richtung des Randes auf einander folgen, mit 1, 2, 3, 4, ..., und die Werthe, welche U und V in diesen Puncten besitzen, mit U_1, U_2, U_3, U_4, ... und V_1, V_2, V_3, V_4, ... bezeichnet werden. Das über den ganzen Rand der Fläche $\mathfrak{A}$ hinerstreckte Integral

$$\int U dV = U_1 (V_2 - V_1) + U_2 (V_3 - V_2) + U_3 (V_4 - V_3) + \dots$$

soll alsdann das durch positive Umlaufung der Fläche $\mathfrak{A}$ resultirende Integral genannt, und kurzweg mit

$$\int_{\mathfrak{A}} U dV$$

bezeichnet werden. Ist die Fläche von mehreren, etwa von n Randcurven begrenzt, so wird dieses Integral aus einer Summe von n einzelnen Integralen bestehen. So wird z. B. für diejenige Fläche $\mathfrak{A}$, welche durch die Fig. 15 dargestellt ist, dieses Rand-Integral folgenden Werth besitzen:

$$\int_{\mathfrak{A}} U dV = \int_a U dV + \int_b U dV + \int_c U dV,$$

wo die drei Integrale rechts über die drei Randcurven jener Fläche hinerstreckt sind, und zwar hinerstreckt sind (Fig. 15) in den Richtungen der mit a, b, c bezeichneten Pfeile.

Ein auf der Horizontalebene gegebener Punct kann, wie bereits bemerkt, angesehen werden als eine unendlich kleine Fläche. Demgemäss soll das durch positive Umlaufung irgend eines Punctes p resultirende Integral $\int U dV$ in Zukunft kurzweg mit

$$\int_p U dV$$

bezeichnet werden.

Man wird vielleicht vermuthen, ein solches Punct-Integral könne an und für sich noch keinen bestimmten Werth haben, sondern könne eine bestimmte Bedeutung immer erst dann erhalten, wenn nicht nur der Punct selber, sondern auch die Curve, in welcher derselbe umlaufen werden soll, genau angegeben ist.

Jedoch existiren, wie wir im Folgenden sehen werden, viele Fälle, in welchen der Werth eines derartigen Integrales, auch ohne nähere Angabe seiner Integrationscurve, bereits vollständig bestimmt ist.

Zweiter Abschnitt. Allgemeine Eigenschaften einer jeden, nicht von x und y, sondern nur von dem einen Argumente $x + iy$ abhängenden Function.

Es sei $i = \sqrt{-1}$, und $f = f(x + iy)$ irgend eine von $x + iy$ abhängende Function, — völlig gleichgültig, ob i allein in dem Argumente $x + iy$, oder ob i gleichzeitig auch noch in den in f vorkommenden Constanten enthalten ist. Eine solche Function f wird sich durch Sonderung des Reellen und Imaginären jederzeit auf die Form

$$f = U + iV$$

bringen lassen, wo U und V reelle Grössen sind. So z. B. ist die Function

$$f = \frac{(x + iy)^2}{2 + 3i}$$

gleich:

$$\frac{(2 - 3i)(x^2 - y^2 + 2ixy)}{4 + 9},$$

d. i. gleich:

$$\frac{2(x^2 - y^2) + 6xy}{13} + i\,\frac{4xy - 3(x^2 - y^2)}{13},$$

in diesem Falle also:

$$U = \frac{2(x^2 - y^2) + 6xy}{13}, \quad V = \frac{4xy - 3(x^2 - y^2)}{13},$$

Ferner ist, um ein anderes Beispiel anzuführen, die Function

$$f = \sin(x + iy)$$

gleich:

$$\sin x \,.\, \cos iy + \cos x \,.\, \sin iy,$$

d. i. gleich:

$$\sin x \,.\, \frac{e^y + e^{-y}}{2} + i \,.\, \cos x \,.\, \frac{e^y - e^{-y}}{2},$$

in diesem Falle also:

$$U = \sin x \,.\, \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad V = \cos x \,.\, \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Ist demnach irgend eine Function $f(x + iy)$ auf die Form $U + iV$ gebracht, so werden $U = U(x, y)$ und $V = V(x, y)$

zwei Functionen sein, die auf irgend welche Weise von x und y abhängen, und deren Werthe reell sind. Man wird daher, was die Werthe einer dieser beiden Functionen, z. B. die Werthe von U anbelangt, die früher angegebene Methode in Anwendung bringen, diese Werthe nämlich ausbreiten können auf der Horizontalebene; und ebenso andererseits auch die von V. Denkt man sich gleichzeitig beide Functionen auf der Horizontalebene ausgebreitet, so werden in jedem Puncte x, y zwei Perpendikel zu denken sein, von denen das eine den zugehörigen Werth von U, das andere den von V repräsentirt. Die ursprünglich gegebene Function $f(x + iy)$ wird demnach, was ihren Werth in einem einzelnen Puncte der Horizontalebene anbelangt, dargestellt sein durch ein in dem Puncte errichtetes Perpendikel-**Paar**, und, was die Gesammtheit ihrer Werthe anbelangt, dargestellt sein durch ein die Horizontalebene überdeckendes Flächen-**Paar.**

Soll $f(x + iy)$ eindeutig sein, so wird dazu offenbar erforderlich und hinreichend sein, dass U und V eindeutige Functionen sind. Und ebenso wird es sich auch mit der Stetigkeit verhalten. Soll $f(x + iy)$ stetig sein, so ist dazu erforderlich und hinreichend, dass die beiden Functionen U und V stetig sind.

Es ist, was die von dem Argument $x + iy$ abhängenden Functionen anbelangt, wichtig, auf einige sehr einfache Beziehungen aufmerksam zu machen, die jederzeit zwischen den Differentialquotienten einer solchen Function stattfinden.

Differenzirt man die Function $f(x + iy)$ nach x und y, sodann nach xx und yy, so erhält man:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = f'(x + iy), \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = i \, . \, f'(x + iy), \end{cases}$$

und ferner

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''(x + iy), \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = - f''(x + iy). \end{cases}$$

Aus (1) folgt:

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0;$$

und aus (2):

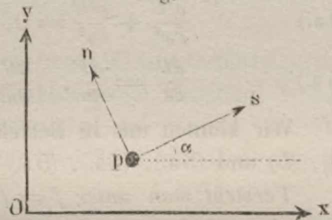
$$(4) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Von diesen beiden Formeln (3) und (4) ist die erstere noch einer wichtigen Verallgemeinerung fähig. Wir betrachten zu diesem Zweck irgend welchen Punct p auf der Horizontalebene, dessen Coordinaten x und y sein mögen, und lassen von diesem Punct zwei Linien s und n in vorläufig ganz beliebigen Richtungen auslaufen. Für die Differentialquotienten von f nach diesen beiden Richtungen ergeben sich alsdann — zufolge eines früher (S. 51) gefundenen Satzes — folgende Werthe:

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos(x, s) + \frac{\partial f}{\partial y}\cos(y, s),$$
$$\frac{df}{dn} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos(x, n) + \frac{\partial f}{\partial y}\cos(y, n).$$

Wir wollen nun voraussetzen, dass die beiden Richtungen s und n auf einander senkrecht stehen, und dass (Fig. 16) s zu n ebenso liegt wie die Richtung der x Achse zu der der y Achse. Alsdann nehmen die für $\frac{df}{ds}$ und $\frac{df}{dn}$ gefundenen Werthe, falls wir den zwischen s und x liegenden Winkel mit α bezeichnen, folgende Gestalt an:

Fig. 16.



$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\,.\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\,.\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$
$$\frac{df}{dn} = \frac{\partial f}{\partial x}\,.\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\,.\cos\alpha,$$

d. i.

$$\frac{df}{ds} = \quad \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha,$$
$$\frac{df}{dn} = -\frac{\partial f}{\partial x}\sin\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\alpha.$$

Und hieraus ergiebt sich für das Aggregat

$$\frac{df}{ds} + i\,\frac{df}{dn}$$

sofort folgender Werth:

$$\frac{df}{ds} + i\,\frac{df}{dn} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial y} - i\,\frac{\partial f}{\partial x}\right)\sin\alpha,$$

d. i.

$$\frac{df}{ds} + i\,\frac{df}{dn} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)(\cos\alpha - i\sin\alpha);$$

also mit Rückblick auf (3):

(5) $$\frac{df}{ds} + i\,\frac{df}{dn} = 0.$$

Bezeichnen wir den Werth der Function f, wie er sich durch Sonderung des Reellen und Imaginären ergiebt, mit $U + iV$, und setzen wir diesen Werth in die Formeln (3), (4), (5) ein, so erhalten wir:

$$\frac{\partial (U+iV)}{\partial x} + i\,\frac{\partial (U+iV)}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 (U+iV)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (U+iV)}{\partial y^2} = 0,$$
$$\frac{d(U+iV)}{ds} + i\,\frac{d(U+iV)}{dn} = 0.$$

Und hieraus ergeben sich durch Sonderung des Reellen und Imaginären sofort folgende Relationen:

$$(3\text{a.})\qquad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$

$$(4\text{a.})\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0,$$

$$(5\text{a.})\qquad \frac{dU}{ds} = \frac{dV}{dn}, \quad \frac{dU}{dn} + \frac{dV}{ds} = 0.$$

Wir können uns in Betreff der hier erhaltenen Formeln (3), (4), (5) und (3a.), (4a.), (5a.) folgendermassen ausdrücken:

Versteht man unter $f = f(x+iy)$ irgend welche nicht von x und y, sondern nur von dem einen Argumente $x + iy$ abhängende Function, und bezeichnet man den Werth dieser Function, wie er sich durch Sonderung des Reellen und Imaginären ergiebt, mit $U + iV$, so finden jederzeit folgende Relationen statt:

$$(\text{I.})\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + i\,\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial U}{\partial y} + \dfrac{\partial V}{\partial x} = 0; \end{cases}$$

und ebenso auch folgende:

$$(\text{II.})\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \end{cases}$$

Gleichzeitig sind die Relationen (I.) einer Verallgemeinerung fähig. Versteht man nämlich unter s und n irgend zwei von einem beliebigen Puncte ausgehende, auf einander senkrechte Richtungen, und zwar zwei Richtungen, von welchen s zu n ebenso liegt, wie die x-Achse zur y Achse, so finden jederzeit folgende mit jenen Relationen (I.) völlig analoge Relationen statt:

$$\text{(III.)} \qquad \begin{cases} \dfrac{df}{ds} + i\,\dfrac{df}{dn} = 0, \\ \dfrac{dU}{ds} = \dfrac{dV}{dn}, \quad \dfrac{dU}{dn} + \dfrac{dV}{ds} = 0. \end{cases}$$

Diese Formeln (III.) werden z. B. jederzeit dann gelten, wenn man unter s die positive Randrichtung einer beliebig gegebenen Fläche, und unter n die auf diesem Rande errichtete innere Normale versteht.

Dritter Abschnitt. Untersuchung einer von $x + iy$ abhängenden Function, die auf einer beliebig gegebenen Elementarfläche überall eindeutig und stetig ist. Reihenentwickelung einer solchen Function innerhalb irgend eines auf jener Fläche abgegrenzten Kreises.

Es sei $\mathfrak{E}$ eine beliebig gegebene Elementarfläche, und $f = f(x + iy)$ eine von $x + iy$ abhängende Function, welche auf dieser Fläche $\mathfrak{E}$ überall eindeutig und stetig ist. Wir wollen das in positiver Richtung um den Rand von $\mathfrak{E}$ herum erstreckte Integral

$$(1) \qquad J = \int_{\mathfrak{E}} f(x + iy) \, . \, d(x + iy)$$

untersuchen. Bezeichnen wir den Werth der Function $f(x + iy)$, wie er bei Sonderung des Reellen und Imaginären sich herausstellt, mit $U + iV$, so können wir dieses Integral auch so schreiben:

$$(2) \qquad J = \int_{\mathfrak{E}} (U + iV) \, . \, d(x + iy),$$

oder, was dasselbe ist, auch so:

$$(3) \qquad J = \int_{\mathfrak{E}} (Udx - Vdy) + i \int_{\mathfrak{E}} (Vdx + Udy).$$

Nun ist zufolge des letztbewiesenen Satzes:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Daraus folgt, dass die in (3) auftretenden Ausdrücke

$$Udx - Vdy \quad \text{und} \quad Vdx + Udy$$

vollständige Differentiale sind. Beachtet man dies, und beachtet man ausserdem, dass f, mithin auch U und V — der gemachten Voraussetzung zufolge — innerhalb der Fläche $\mathfrak{E}$ überall eindeutig und stetig sind; so ergiebt sich durch Anwendung eines früher (S. 70) gefundenen Satzes sofort, dass die in (3) auftretenden Integrale beide Null sind. Somit erhalten wir schliesslich:

$$J = 0, \tag{4}$$

mithin folgenden Satz:

Ist eine Function $f(x + iy)$ auf einer gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$ überall eindeutig und stetig, so ist das über den Rand von $\mathfrak{E}$ in positiver Richtung hinerstreckte Integral

$$\int_{\mathfrak{E}} f(x + iy) \cdot d(x + iy)$$

jederzeit gleich **Null**.

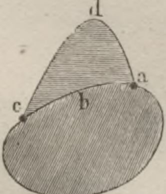
Von dem in negativer Richtung über jenen Rand hinerstreckten Integrale gilt natürlich dasselbe; denn da das Integral bei Voraussetzung der **einen** Richtung Null ist, so wird es bei Annahme der **entgegengesetzten** Richtung ebenfalls Null sein.

Es sei $\mathfrak{E}$ eine Elementarfläche, innerhalb welcher die Function $f(x + iy)$ den Bedingungen der Eindeutigkeit und Stetigkeit nicht Genüge leistet. In diesem Falle wird das Rand-Integral

$$J = \int_{\mathfrak{E}} f(x + iy) \cdot d(x + iy)$$

keineswegs Null sein, sondern im Allgemeinen irgend welchen andern Werth besitzen. Wir wollen annehmen (Fig. 17), die betrachtete Elementarfläche $\mathfrak{E}$ vermehre sich, durch eine Erweiterung ihrer Randcurve, um irgend welches Flächenstück $abcd$. Diese erweiterte Elementarfläche mag mit $\mathfrak{E}'$, und das über ihren Rand hinerstreckte Integral mit

Fig. 17.



$$J' = \int_{\mathfrak{E}'} f(x + iy) \cdot d(x + iy)$$

bezeichnet werden.

Unsere Aufgabe mag nun darin bestehen, diese beiden Integrale J und J' mit einander zu vergleichen; dabei aber mag angenommen werden, dass die Function $f(x + iy)$ innerhalb des Flächentheiles $(\mathfrak{E}' - \mathfrak{E})$, d. i. innerhalb des neu hinzugetretenen Flächentheiles $abcd$, überall eindeutig und stetig ist.

Die Integrale J und J' sind, wie wir voraussetzen, über den Rand von $\mathfrak{E}$ und über den von $\mathfrak{E}'$ in positiver Richtung hinerstreckt. Durch Subtraction ergiebt sich daher:

(1) $$J' - J = [adc] - [abc],$$

wo für den Augenblick unter $[adc]$ und $[abc]$ zwei über die Curvenstücke adc und abc hinerstreckte Integrale

$$\int f(x + iy) \, . \, d\,(x + iy)$$

verstanden werden sollen. Da der Werth eines solchen Integrales, sobald die Richtung der Integration gewechselt wird, in sein Gegentheil umschlägt (vgl. S. 66), mithin

$$[abc] = - [cba]$$

ist, so können wir die für $J' - J$ erhaltene Formel auch so darstellen:

(2) $$J' - J = [adc] + [cba].$$

Die hier vorhandene rechte Seite ist aber nichts anderes, als das über den Rand von $(\mathfrak{E}' - \mathfrak{E})$ hinerstreckte Integral

$$\int f(x + iy) \, . \, d\,(x + iy),$$

und ist daher zufolge der über $(\mathfrak{E}' - \mathfrak{E})$ gemachten Annahme, und zufolge des vorhergehenden Satzes gleich Null. Somit ergiebt sich schliesslich: $J' - J = 0$, oder

(3) $$J' = J.$$

Das Integral

$$\int f(x + iy) \, . \, d\,(x + iy)$$

besitzt also, mag es nun über den Rand von $\mathfrak{E}$, oder mag es über den von $\mathfrak{E}'$ hinerstreckt sein, immer ein und denselben Werth. Lassen wir die ursprünglich gegebene Fläche $\mathfrak{E}$ nicht um einen, sondern um mehrere Flächentheile zunehmen, oder auch gleichzeitig um einige Flächentheile zunehmen, und um andere abnehmen, und setzen wir voraus, dass die Function $f(x + iy)$ innerhalb jedes solchen Flächentheiles eindeutig und stetig ist, so gelangen wir zu einem allgemeineren Ergebniss, welches, wie leicht zu übersehen, folgendermassen lautet:

Lässt man eine gegebene Elementarfläche $\mathfrak{E}$ um beliebige Flächen-

theile zu- oder abnehmen, und versteht man unter $f(x+iy)$ eine Function, welche innerhalb der hinzukommenden oder austretenden Flächentheile eindeutig und stetig ist, so wird das Integral

$$\int f(x+iy)\,.\,d(x+iy),$$

mag man es nun in positiver Richtung über den ursprünglichen, oder mag man es, ebenfalls in positiver Richtung, über den neuen Rand der Fläche hinerstrecken, immer ein und denselben Werth besitzen.

Es sei $\mathfrak{E}$ eine beliebig gegebene Elementarfläche. Ferner seien α, β die Coordinaten eines innerhalb $\mathfrak{E}$ liegenden festen Punctes, und x, y die Coordinaten eines ebenfalls innerhalb $\mathfrak{E}$ befindlichen beweglichen Punctes; der erstere Punct mag kurzweg mit $\alpha+i\beta$, der letztere mit $x+iy$ bezeichnet werden.

Der Bruch

$$\frac{1}{(x+iy)-(\alpha+i\beta)} \tag{1}$$

besitzt alsdann einen Werth, welcher unendlich gross wird, sobald der bewegliche Punct $x+iy$ in den festen Punct $\alpha+i\beta$ hineinfällt, welcher aber für alle anderen Lagen des Punctes $x+iy$ endlich und stetig bleibt.

Es sei nun $f(x+iy)$ irgend welche Function, die innerhalb der gegebenen Fläche $\mathfrak{E}$ überall eindeutig und stetig ist. Der Bruch

$$\frac{f(x+iy)}{(x+iy)-(\alpha+i\beta)} \tag{2}$$

wird dann — ebenso wie der Bruch (1) — innerhalb $\mathfrak{E}$, mit alleiniger Ausnahme des Punctes $\alpha+i\beta$, allenthalben eindeutig und stetig sein. Sondern wir daher von der Fläche $\mathfrak{E}$ eine kleine um den Punct $\alpha+i\beta$ beschriebene Kreisfläche $\mathfrak{k}$ ab, so wird der Bruch (2) als eine von $x+iy$ abhängende Function zu bezeichnen sein, welche innerhalb des übrig bleibenden Flächentheiles $(\mathfrak{E}-\mathfrak{k})$ durchweg eindeutig und stetig ist.

Betrachten wir demnach die gegebene Fläche $\mathfrak{E}$ als eine Erweiterung der Kreisfläche $\mathfrak{k}$, so können wir auf die Function (2) unmittelbar den vorhergehenden Satz in Anwendung bringen, und gelangen alsdann zu dem Ergebniss, dass das Integral

$$\int \frac{f(x+iy)}{(x+iy)-(\alpha+i\beta)}\,.\,d(x+iy),$$

mag es nun um den Rand von $\mathfrak{k}$, oder mag es um den von $\mathfrak{E}$ in positiver Richtung herumerstreckt werden, immer ein und denselben Werth besitzt. Somit erhalten wir:

(3) $$\int_{\mathfrak{k}} \frac{f(x+iy) \,.\, d(x+iy)}{(x+iy)-(\alpha+i\beta)} = \int_{\mathfrak{E}} \frac{f(x+iy) \,.\, d(x+iy)}{(x+iy)-(\alpha+i\beta)},$$

oder, wenn wir zur Unterscheidung die zum Rande von $\mathfrak{E}$ gehörigen Puncte mit $x + iy$, die zum Rande von $\mathfrak{k}$ gehörigen hingegen mit $\xi + i\eta$ bezeichnen:

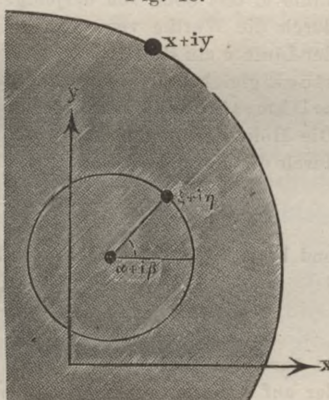
(4) $$\int_{\mathfrak{k}} \frac{f(\xi+i\eta) \,.\, d(\xi+i\eta)}{(\xi+i\eta)-(\alpha+i\beta)} = \int_{\mathfrak{E}} \frac{f(x+iy) \,.\, d(x+iy)}{(x+iy)-(\alpha+i\beta)};$$

die Integrationen laufen hier um den Rand von $\mathfrak{k}$ und um den von $\mathfrak{E}$ in positiver Richtung herum.

Bezeichnen wir den vom Puncte $\alpha + i\beta$ nach dem Puncte $\xi + i\eta$ hinlaufenden Kreisradius mit ϱ, und den Winkel, unter welchem dieser Radius gegen die x Achse geneigt ist, mit ϑ (Fig. 18), so wird:

$$\xi - \alpha = \varrho \cos\vartheta,$$
$$\eta - \beta = \varrho \sin\vartheta,$$

Fig. 18.



mithin:

$$(\xi+i\eta)-(\alpha+i\beta) = \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$
$$= \varrho \,.\, e^{i\vartheta},$$

folglich:

$$d(\xi+i\eta) = i\varrho e^{i\vartheta} d\vartheta,$$

und:

$$\frac{d(\xi+i\eta)}{(\xi+i\eta)-(\alpha+i\beta)} = i d\vartheta.$$

Das in (4) auf der linken Seite stehende Integral verwandelt sich demnach in:

$$i \,.\, \int_{\mathfrak{k}} f(\xi+i\eta) \,.\, d\vartheta,$$

oder, was dasselbe ist, in:

$$2\pi i \,.\, \int_{\mathfrak{k}} \frac{f(\xi+i\eta) \,.\, \varrho\, d\vartheta}{2\pi\varrho},$$

d. i. in:

(4a) $$\frac{2\pi i}{\sigma} \,.\, \int_{\mathfrak{k}} f(\xi+i\eta) \,.\, d\sigma,$$

wo $\sigma = 2\pi\varrho$ den Umfang des Kreises $\mathfrak{k}$, und $d\sigma = \varrho d\vartheta$ ein Element dieses Umfanges darstellt. Setzen wir nun den Werth (4a) in die Formel (4) ein, so erhalten wir:

$$(5) \qquad \frac{1}{\sigma}\int_{\mathfrak{k}} f(\xi + i\eta)\, d\sigma = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{\mathfrak{C}} \frac{f(x+iy)\,.\,d(x+iy)}{(x+iy)-(\alpha+i\beta)}.$$

Der hier auf der linken Seite stehende Bruch stellt, wie leicht zu erkennen ist, nichts Anderes vor, als das arithmetische Mittel aller derjenigen Werthe, welche die Function f auf der Linie σ, d. i. auf der Peripherie des Kreises $\mathfrak{k}$ besitzt.*) Be-

---

*) Ist der Werth von $f(\xi + i\eta)$, wie sich derselbe bei Sonderung des Reellen und Imaginären herausstellt, gleich $u + iv$, und denkt man sich die Kreislinie σ, ohne die in ihr vorhandenen Werthe von u und v zu ändern, in irgend einem Puncte durchschnitten, und horizontal hingestreckt; so wird das über diese Linie hinlaufende Integral $\int u\,d\sigma$ ein gewisses Flächenstück darstellen, welches unten von der Linie σ, und oben von derjenigen Curve begrenzt ist, deren Ordinaten durch die Werthe von u ausgedrückt sind. Construirt man nun über der Linie σ ein Rechteck, welches mit dem eben genannten Flächenstück gleichen Inhalt besitzt, so wird die Höhe dieses Rechtecks das arithmetische Mittel der auf σ stehenden Ordinaten u vorstellen. Die Höhe des Rechtecks — sie mag U heissen — wird aber bestimmt durch die Formel

$$\sigma\,.\,U = \int u\,d\sigma,$$

und besitzt also folgenden Werth:

$$U = \frac{1}{\sigma}\int u\,d\sigma.$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich, falls man das arithmetische Mittel der auf σ vorhandenen Werthe von v mit V bezeichnet:

$$V = \frac{1}{\sigma}\int v\,d\sigma.$$

Somit folgt:

$$U + iV = \frac{1}{\sigma}\int (u + iv)\,d\sigma.$$

Nun ist $u + iv = f(\xi + i\eta)$; ferner $U + iV$ das arithmetische Mittel aller derjenigen Werthe, welche die Function $u + iv$ oder $f(\xi + i\eta)$ auf der Linie σ besitzt. Die vorstehende Formel zeigt demnach die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptung.

zeichnen wir also dieses arithmetische Mittel für den Augenblick mit F, so erhalten wir:

$$F = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\mathfrak{E}} \frac{f(x+iy) \cdot d(x+iy)}{(x+iy)-(\alpha+i\beta)}. \tag{6}$$

Die um den Punct $\alpha + i\beta$ beschriebene Kreisfläche $\mathfrak{k}$ war beliebig klein angenommen. Unbeschadet der Gültigkeit unserer Formel (6), können wir daher jene Kreisfläche sich enger und enger um ihren Mittelpunct herum zusammenziehen lassen; wir beobachten die Umwandelung, welche in unserer Formel alsdann vor sich geht.

Die rechte Seite der Formel wird offenbar von diesem Process gar nicht berührt. Denn das rechts stehende Integral steht zu jenem Kreise in gar keiner Beziehung; es ist hinerstreckt über den Rand der gegebenen Fläche $\mathfrak{E}$, und behält also, mag nun jener Kreis gross oder klein sein, immer denselben Werth.

Anders verhält es sich mit der linken Seite. Die links befindliche Grösse F stellt das arithmetische Mittel aller Werthe vor, welche die Function f auf der um $\alpha + i\beta$ beschriebenen Kreislinie besitzt. Während sich daher jene Kreislinie Schritt für Schritt enger und enger um den Punct $\alpha + i\beta$ herum zusammenzieht, wird gleichzeitig die Bedeutung der Grösse F ebenfalls Schritt für Schritt eine andere werden. Lassen wir die Zusammenziehung so lange fortdauern, bis sich die Kreislinie schliesslich in den Punct $\alpha + i\beta$ verwandelt, so wird der Mittelwerth F schliesslich übergehen in denjenigen Werth, welchen die Function f im Puncte $\alpha + i\beta$ besitzt, also übergehen in $f(\alpha + i\beta)$; wie sich solches mit voller Strenge ergiebt, wenn man beachtet, dass die Function f, der Voraussetzung zufolge, innerhalb $\mathfrak{E}$, also auch in der Nähe des Punctes $\alpha + i\beta$ überall eindeutig und stetig ist.

Es verwandelt sich demnach unsere Formel (6), wenn wir den Radius der um $\alpha + i\beta$ beschriebenen Kreislinie bis zu Null abnehmen lassen, in folgende:

$$f(\alpha + i\beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{E}} \frac{f(x+iy) \cdot d(x+iy)}{(x+iy)-(\alpha+i\beta)}. \tag{7}$$

Für die Folge wird es zweckmässig sein, die Bezeichnungen $x + iy$ und $\alpha + i\beta$ mit einander zu vertauschen, nämlich den im Innern von $\mathfrak{E}$ gelegenen Punct mit $x + iy$, und den am Rande von $\mathfrak{E}$ befindlichen mit $\alpha + i\beta$ zu bezeichnen. Unsere Formel verwandelt sich dann in

$$f(x+iy) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{\mathfrak{E}} \frac{f(\alpha+i\beta) \,.\, d(\alpha+i\beta)}{(\alpha+i\beta)-(x+iy)}. \tag{8}$$

Wir haben demnach folgenden Satz:

Ist eine Function $f(x+iy)$ innerhalb einer gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$ überall eindeutig und stetig, so lassen sich die Werthe, welche die Function im Innern von $\mathfrak{E}$ besitzt, jederzeit ausdrücken durch ein gewisses über den Rand von $\mathfrak{E}$ hinerstrecktes Integral.

Stellt nämlich $x + iy$ irgend einen Punct im Innern, und $\alpha + i\beta$ irgend einen Punct am Rande vor, so ist stets:

$$f(x+iy) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{\mathfrak{E}} \frac{f(\alpha+i\beta) \,.\, d(\alpha+i\beta)}{(\alpha+i\beta)-(x+iy)},$$

wo die Integration in positiver Richtung um den Rand von $\mathfrak{E}$ herumläuft.

Es sei $\varphi(x+iy)$ eine Function, welche im Innern der gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$ überall eindeutig und stetig ist, und welche gleichzeitig am Rande von $\mathfrak{E}$ einen überall constanten Werth, etwa den Werth K besitzt. Für diesen Fall verwandelt sich die so eben gefundene allgemeine Formel in:

$$\varphi(x+iy) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{\mathfrak{E}} \frac{K \,.\, d(\alpha+i\beta)}{(\alpha+i\beta)-(x+iy)}. \tag{1}$$

Andrerseits ist zu beachten, dass jene allgemeine Formel gültig sein wird, wenn man an Stelle der daselbst befindlichen Function $f(x+iy)$ eine Constante, z. B. die Constante 1 nimmt; denn eine Grösse, die in allen Puncten der Fläche $\mathfrak{E}$ den Werth 1 besitzt, wird offenbar eine Grösse sein, die innerhalb $\mathfrak{E}$ überall eindeutig und stetig ist, also diejenigen Bedingungen erfüllen, welche an die Function $f(x+iy)$ gestellt wurden. Nehmen wir aber statt jener Function die Constante 1, so verwandelt sich unsere allgemeine Formel in:

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{\mathfrak{E}} \frac{d(\alpha+i\beta)}{(\alpha+i\beta)-(x+iy)}. \tag{2}$$

Durch Vergleichung von (1) und (2) folgt nun sofort:

$$\varphi(x+iy) = K. \tag{3}$$

Somit haben wir folgenden Satz:

Ist eine von $x + iy$ abhängende Function auf einer gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$ überall eindeutig und stetig, und ist der Werth dieser Function am Rande von $\mathfrak{E}$ constant, so ist ihr Werth auch im Innern von $\mathfrak{E}$ allenthalben constant.

Wir gehen nun über zu einer andern sehr wichtigen Anwendung unserer allgemeinen Formel.

Es sei $a + ib$ ein auf der Horizontalebene beliebig gegebener Punct, und $\mathfrak{K}$ eine um diesen Punct beschriebene Kreisfläche von beliebiger Grösse. Ferner sei $f(x + iy)$ eine Function, die innerhalb $\mathfrak{K}$ überall eindeutig und stetig ist. In jedem innerhalb $\mathfrak{K}$ liegenden Punct $x + iy$ wird diese Function alsdann einen Werth besitzen, welcher — gemäss unserer allgemeinen Formel — in folgender Weise ausgedrückt werden kann:

$$(1) \qquad f(x + iy) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\mathfrak{K}} \frac{f(\alpha + i\beta) \,.\, d(\alpha + i\beta)}{(\alpha + i\beta) - (x + iy)};$$

$\alpha + i\beta$ stellt hier einen am Rande von $\mathfrak{K}$ liegenden Punct vor, und die Integration läuft um den Rand von $\mathfrak{K}$ in positiver Richtung herum.

Vom Kreismittelpuncte $a + ib$ aus ziehen wir zwei Linien, eine nach dem im Innern von $\mathfrak{K}$ liegenden Punct $x + iy$, die andere nach dem am Rande befindlichen Punct $\alpha + i\beta$, bezeichnen die Längen dieser Linien mit r und R, und ferner die Winkel, unter welchen sie gegen die x Achse geneigt sind, mit t und T. Dann wird

$$x - a = r \cos t, \qquad \alpha - a = R \cos T,$$
$$y - b = r \sin t, \qquad \beta - b = R \sin T,$$

mithin:

$$(x + iy) - (a + ib) = re^{it}, \quad (\alpha + i\beta) - (a + ib) = R \,.\, e^{iT},$$

oder wenn wir zur Abkürzung

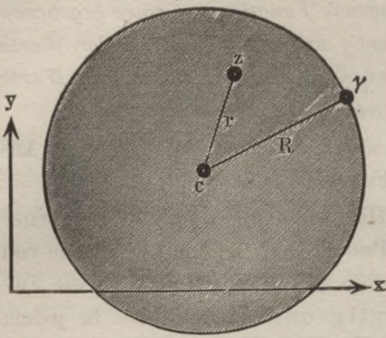
$$(2) \qquad \begin{cases} x + iy = z, \\ a + ib = c, \\ \alpha + i\beta = \gamma \end{cases}$$

setzen:

$$(3) \qquad z - c = re^{it}, \qquad \gamma - c = R \,.\, e^{iT};$$

vergl. die Fig. 19.

Fig. 19.



Der Bruch $\frac{1}{R-r}$ lässt sich, weil R grösser als r ist, in folgender Weise entwickeln:

(4) $$\frac{1}{R-r} = \frac{1}{R}\,\frac{1}{1-\frac{r}{R}}$$

$$= \frac{1}{R}\left(1 + \frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2} + \ldots\right);$$

und ebenso erhält man auch, wenn man Re^{iT}, re^{it} an Stelle von R, r nimmt:

(5) $$\frac{1}{Re^{iT} - re^{it}} = \frac{1}{Re^{iT}}\left(1 + \frac{re^{it}}{Re^{iT}} + \frac{r^2e^{2it}}{R^2e^{2iT}} + \ldots\ldots\right).$$

Diese Reihenentwickelung ist, ebenso wie die vorhergehende, jederzeit convergent und gültig, sobald R grösser als r ist, d. h. sobald der Punct $x + iy$ oder z im Innern der Kreisfläche bleibt, und nicht etwa gerade am Rande derselben sich befindet.

Substituirt man in (5) für Re^{iT} und re^{it} die in (3) angegebenen Werthe $\gamma - c$ und $z - c$, so erhält man:

(6) $$\frac{1}{\gamma - z} = \frac{1}{\gamma - c}\left(1 + \frac{z-c}{\gamma - c} + \frac{(z-c)^2}{(\gamma-c)^2} + \ldots\right).$$

Die vorhin aufgestellte Formel (1) verwandelt sich nun durch Einführung der in (2) angegebenen Abkürzungen in:

(7) $$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{\mathfrak{K}}\frac{f(\gamma)\,.\,d\gamma}{\gamma - z},$$

folglich durch Benutzung von (6) in:

(8) $$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{\mathfrak{K}}\frac{f(\gamma)}{\gamma - c}\left(1 + \frac{z-c}{\gamma-c} + \frac{(z-c)^2}{(\gamma-c)^2} + \ldots\right).\,d\gamma.$$

Zerlegt man nun dieses Integral in seine einzelnen Bestandtheile und lässt man in jedem einzelnen Theile die von der Integrations-Variablen γ unabhängigen Factoren vor das Integrations-Zeichen treten, so erhält man schliesslich:

(9) $$f(z) = A + (z-c)\,.\,B + (z-c)^2\,.\,C + \ldots\ldots$$

wo $A, B, C, \ldots$ folgende Bedeutungen haben:

$$(10)\qquad \begin{cases} A = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{\mathfrak{K}}\frac{f(\gamma)\,.\,d\gamma}{\gamma - c}, \\ B = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{\mathfrak{K}}\frac{f(\gamma)\,.\,d\gamma}{(\gamma - c)^2}, \\ C = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{\mathfrak{K}}\frac{f(\gamma)\,.\,d\gamma}{(\gamma - c)^3}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

Die Werthe dieser Grössen A, B, C, ... lassen sich noch in anderer Weise darstellen. Differentiirt man nämlich die Formel (7) zu wiederholten Malen nach z, so erhält man:

$$(11)\qquad \begin{cases} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{\mathfrak{K}}\frac{f(\gamma)\,.\,d\gamma}{\gamma - z}, \\ \frac{1}{1}\cdot f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{\mathfrak{K}}\frac{f(\gamma)\,.\,d\gamma}{(\gamma - z)^2}, \\ \frac{1}{1\,.\,2}\cdot f''(z) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{\mathfrak{K}}\frac{f(\gamma)\,.\,d\gamma}{(\gamma - z)^3}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

Durch Vergleichung von (10) und (11) erkennt man nunmehr sofort, dass die Grössen A, B, C, ... nichts Anderes sind, als diejenigen Werthe, welche

$$f(z),\quad \frac{1}{1}f'(z),\quad \frac{1}{1\,.\,2}f''(z),\;\ldots$$

für $z = c$ annehmen. Somit erhält man:

$$(12)\qquad \begin{cases} A = f(c), \\ B = \frac{1}{1}f'(c), \\ C = \frac{1}{1\,.\,2}f''(c), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

Wir gelangen demnach mit Rücksicht auf (9) und (12) zu folgendem Satz:

Die Taylor'sche Reihe. Eine Function $f(x + iy)$, die innerhalb einer Kreisfläche überall eindeutig und stetig ist, lässt sich, was ihre Werthe im Innern dieses Kreises anbelangt, jederzeit durch eine gewisse Reihenentwicklung darstellen.

Versteht man unter $x + iy$ einen beliebigen Punct im Innern *des Kreises, und unter $a + ib$ oder c den Mittelqunct des Kreises, so lautet diese Entwicklung folgendermassen:*

$$f(x+iy) = f(c) + \frac{x+iy-c}{1} f'(c) + \frac{(x+iy-c)^2}{1 \,.\, 2} . f''(c) + \ldots.;$$

sie bleibt convergent und gültig, so lange der Punct $x + iy$ im Innern der Kreisfläche bleibt, und nicht etwa hart an den Rand derselben rückt.

Diese Entwickelung ist als ein unmittelbarer Ausfluss der von uns (auf Seite 86) gefundenen allgemeinen Formel

$$(1) \qquad f(x+iy) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\mathfrak{E}} \frac{f(\alpha+i\beta) \,.\, d(\alpha+i\beta)}{(\alpha+i\beta)-(x+iy)}$$

anzusehen. Wir gehen über zu anderen Folgerungen, die aus dieser Formel sich ergeben.

Die Formel bezieht sich auf eine beliebig gegebene Elementarfläche $\mathfrak{E}$, und ist gültig, wenn f eine Function vorstellt, welche innerhalb $\mathfrak{E}$ überall eindeutig und stetig ist, und wenn gleichzeitig $x + iy$ irgend einen innerhalb $\mathfrak{E}$ befindlichen Punct bedeutet. Setzt man zur Abkürzung

$$(2) \qquad \begin{cases} x + iy = z, \\ \alpha + i\beta = \gamma, \end{cases}$$

so lautet die Formel:

$$(3) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{E}} \frac{f(\gamma) \,.\, d\gamma}{\gamma - z}.$$

Hieraus ergiebt sich durch wiederholte Differentiation nach z:

$$(4) \qquad \begin{cases} f'(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \cdot \displaystyle\int_{\mathfrak{E}} \frac{f(\gamma) \,.\, d\gamma}{(\gamma - z)^2}, \\[2ex] f''(z) = \dfrac{1 \,.\, 2}{2\pi i} \cdot \displaystyle\int_{\mathfrak{E}} \frac{f(\gamma) \,.\, d\gamma}{(\gamma - z)^3}, \\[2ex] f'''(z) = \dfrac{1 \,.\, 2 \,.\, 3}{2\pi i} \cdot \displaystyle\int_{\mathfrak{E}} \frac{f(\gamma) \,.\, d\gamma}{(\gamma - z)^4}, \\[2ex] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ist n irgend eine ganze Zahl, und bedeutet ferner, wie solches hier der Fall ist, z einen im Innern und γ einen am Rande von $\mathfrak{E}$ gelegenen Punct, so wird

$$(5) \qquad \frac{1}{(\gamma - z)^n}$$

ein Ausdruck sein, welcher sich bei jedweder Bewegung des Punctes z auf stetige Weise ändert; vorausgesetzt dass dieser Punct während seiner Bewegung in den am Rande liegenden Punct γ niemals hineinfällt. Gleiches wird, wenn $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_\varkappa$ beliebig viele am Rande von $\mathfrak{C}$ liegende Puncte, und $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_\varkappa$ irgend welche Constanten vorstellen, auch von der Summe

$$(6) \qquad \frac{\Gamma_1}{(\gamma_1 - z)^n} + \frac{\Gamma_2}{(\gamma_2 - z)^n} + \ldots\ldots + \frac{\Gamma_\varkappa}{(\gamma_\varkappa - z)^n}$$

gelten; diese Summe wird nämlich ebenfalls ein Ausdruck sein, der sich bei jeder Bewegung des Punctes z auf stetige Weise ändert, vorausgesetzt, dass der Punct während seiner Bewegung beständig im Innern der Fläche $\mathfrak{C}$ bleibt, und niemals hart an den Rand derselben rückt. Gleiches wird demnach auch von dem über den Rand von $\mathfrak{C}$ hinerstreckten Integral:

$$(7) \qquad \int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\gamma) \,.\, d\gamma}{(\gamma - z)^n}$$

gelten; denn zwischen diesem Integral und zwischen der vorhin genannten Summe findet nur ein ganz unwesentlicher Unterschied statt, welcher darin besteht, dass die Summe nur auf einzelne Randpuncte, das Integral hingegen auf sämmtliche Randpuncte sich bezieht.

Die Ausdrücke (5), (6) und (7) sind also Functionen, die von z oder $x + iy$ abhängen, und die innerhalb der gegebenen Fläche $\mathfrak{C}$ überall eindeutig und stetig bleiben.

Daraus folgt, dass die in (4) angegebenen Functionen

$$f'(z), \qquad f''(z), \qquad f'''(z), \ldots.$$

oder

$$f'(x + iy), \quad f''(x + iy), \quad f'''(x + iy), \ldots.$$

dieselben Eigenschaften besitzen. Wir gelangen demnach zu folgendem Satz:

Ist eine Function $f(x + iy)$ innerhalb einer gegebenen Elementarfläche überall eindeutig und stetig, so sind innerhalb dieser Fläche sämmtliche Differentialquotienten:

$$f'(x + iy), \quad f''(x + iy), \quad f'''(x + iy), \ldots.$$

ebenfalls eindeutig und stetig.

Sind φ und ψ irgend zwei von $x + iy$ abhängende Functionen, so ist das Differential

(1) $$\varphi \,.\, d\psi$$
gleich
(2) $$\varphi \,.\, \psi' \,.\, d(x+iy).$$

Wir wollen nun voraussetzen, dass die Functionen φ und ψ innerhalb einer gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$ überall eindeutig und stetig sind. Zufolge des eben gefundenen Satzes gilt dann Gleiches auch von den Differentialquotienten $\varphi', \varphi'', \ldots, \psi', \psi'', \ldots$; mithin Gleiches auch von dem in (2) vorhandenen Product:

$$\varphi \,.\, \psi'.$$

Hieraus aber ergiebt sich, dass wir auf das Differential (2), oder was dasselbe ist, auf das Differential (1) sofort einen früher (Seite 80) gefundenen Satz in Anwendung bringen können. Thun wir das, so gelangen wir zu folgendem wichtigen Resultat:

Sind φ und ψ zwei von $x+iy$ abhängende Functionen, welche auf einer gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$ überall eindeutig und stetig sind, so ist das über den Rand von $\mathfrak{E}$ hinerstreckte Integral

$$\int_{\mathfrak{E}} \varphi\, d\psi$$

jederzeit gleich Null.

Vierter Abschnitt. Ueber die Unstetigkeits- und Nullpuncte einer Function. Die Unstetigkeitspuncte werden eingetheilt in solche, die polarer, und in solche, die nicht polarer Natur sind; die ersteren werden Pole genannt.

Gegeben sei im Raume irgend welche Fläche, gleichgültig, ob eben oder krumm; und auf dieser Fläche irgend ein Punct c. Um c herum denke man sich auf jener Fläche irgend ein kleines Flächenstück abgegrenzt; c selber mag gewissermassen als der Mittelpunct dieses Flächenstückes angesehen werden; und demgemäss mögen die von c nach dem Rande des Flächenstücks hinlaufenden kürzesten Linien als die Radii vectores des Flächenstücks betrachtet werden.

Definition: Ein solches um den gegebenen Punct c herum abgegrenztes Flächenstück soll in Zukunft für den Fall, dass seine Radii vectores hinreichend klein, dabei aber sämmtlich von Null verschieden sind, mit einem besonderen Namen bezeichnet, nämlich das Bereich des Punctes c genannt werden.

Was dabei in jedem einzelnen Fall unter hinreichend klein zu verstehen ist, wird abhängen von den jedesmaligen näheren Umständen).*

Liegt der Punct c auf einer Elementarfläche, so wird sein Bereich dargestellt sein durch eine kleine ebene Fläche von beliebiger Form. Denken wir uns z. B. auf der gegebenen Elementarfläche ein kleines Quadrat gezeichnet, dessen Mittelpunct in c liegt, so wird dieses Quadrat, falls seine Seitenlänge hinreichend klein, dabei aber von Null verschieden ist, als das Bereich jenes Punctes c angesehen werden können. Ebenso gut würde dazu aber auch eine kleine kreisförmige, oder ellipsenförmige, oder irgend welche andere kleine Fläche verwendet werden können.

Auf einer Elementarfläche $\mathfrak{E}$ befinde sich ein beweglicher Punct $x + iy$ oder z, und ausserdem irgend welche feste Puncte $p_1, p_2, \ldots p_m$ und $q_1, p_2, \ldots q_n$. Ebenso wie z zur Abkürzung gesetzt ist für das veränderliche Binom $x + iy$, ebenso sollen die p und q zur Abkürzung gesetzt sein für irgend welche gegebene Binome von der Form $a + ib$.

Wir bilden nun den Ausdruck:

$$F(z) = \frac{(z - q_1)(z - q_2) \ldots (z - q_n)}{(z - p_1)(z - p_2) \ldots (z - p_m)}. \tag{1}$$

Dieser Ausdruck wird eine von z abhängende Function sein, welche in den Puncten $p_1, p_2, \ldots p_m$ unendlich gross, folglich (vergl.

*) Man könnte die Herbeiziehung eines neuen Wortes hier vielleicht für überflüssig halten. Befindet sich irgend Etwas — so könnte man sagen — in dem Bereich des gegebenen Punctes c, so heisst das doch nichts Anderes, als dass jenes Etwas sich in der Nähe des Punctes c befindet. Dem entgegen würde Folgendes einzuwenden sein: Ist von denjenigen Puncten etwa die Rede, welche sich in der Nähe von c befinden, so bleibt dabei zweifelhaft, ob darunter die mit c benachbarten Puncte inclusive c oder exclusive c verstanden werden sollen. Ist hingegen von denjenigen Puncten die Rede, welche im Bereich von c liegen, so wird, zufolge der von uns aufgestellten Definition, nicht der geringste Zweifel obwalten können, dass damit die zu c benachbarten Puncte inclusive c gemeint sind. Doch liegt hierin nicht der einzige Grund, wesshalb die Einführung jenes Wortes wünschenswerth erscheint. In der That wird man aus dem Folgenden erkennen, dass die Ausdrucksweise bei Einführung jenes Wortes in vielen Fällen an Kürze und Genauigkeit gewinnt.

den Satz Seite 46) unstetig, und in den Puncten $q_1, q_2, \ldots q_n$ null wird.

Umgekehrt verhält es sich mit der Function

$$\frac{1}{F(z)}; \tag{2}$$

diese nämlich wird in den Puncten $p_1, p_2, \ldots p_m$ gleich Null, und in den Puncten $q_1, q_2, \ldots q_n$ unstetig.

Wir können sämmtliche Puncte, welche sich auf der gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$ überhaupt vorfinden, mit Bezug auf die beiden Functionen (1) und (2) in drei Classen theilen, indem wir zur ersten Classe alle diejenigen Puncte zählen, in deren Bereich beide Functionen stetig sind, zur zweiten Classe alle diejenigen, in deren Bereich nur die Function (1) stetig ist, endlich zur dritten Classe alle diejenigen, in deren Bereich nur die Function (2) stetig ist. Zur ersten Classe gehören dann alle diejenigen Puncte der Fläche $\mathfrak{E}$, welche mit keinem der Puncte p, q zusammenfallen, zur zweiten die Puncte q, und zur dritten die Puncte p.

Die genannten drei Classen umfassen sämmtliche auf der Fläche $\mathfrak{E}$ vorhandenen Puncte; denn es existirt daselbst kein einziger Punct, in dessen Bereich von den beiden Functionen (1) und (2) nicht wenigstens eine stetig ist.

Was wir bei der Function $F(z)$ und bei dem reciprocen Werthe derselben, nämlich bei $\frac{1}{F(z)}$ beobachtet haben, wird sich nun wiederholen bei sämmtlichen Functionen, mit welchen wir es in der Folge zu thun haben. Jede von diesen Functionen wird nämlich, falls sie im Bereich irgend eines Punctes unstetig ist, daselbst doch immer nur der Art unstetig sein, dass wenigstens ihr reciprocer Werth in jenem Bereich stetig bleibt. Für Unstetigkeitspuncte solcher Art bedarf es eines besonderen Namens; wir setzen Folgendes fest:

Definition: Ist eine Function f im Bereich irgend eines Punctes c unstetig, jedoch der Art unstetig, dass ihr reciprocer Werth $\frac{1}{f}$ in jenem Bereich stetig bleibt, so soll der Punct c ein Pol der Function f, und die Unstetigkeit, mit welcher die Function in jenem Puncte behaftet ist, eine polare Unstetigkeit genannt werden.

Es sind (man vergl. Seite 47) sehr verschiedene Arten von Unstetigkeitspuncten denkbar. Wie nun aber die Unstetigkeit, welche eine Function f in irgend einem Puncte c besitzt, auch immer beschaffen sein möge, jederzeit wird dieselbe entweder darin ihren Grund haben, dass der Werth von f bei c einen endlichen Sprung macht, oder darin, dass jener Werth bei c ins Unendliche aufspringt. Gehört die bei c vorhandene Unstetigkeit zur ersten Kategorie, so wird sie nicht nur bei der Function selber, sondern, wie man augenblicklich übersieht, auch bei ihrem reciprocen Werth bemerkbar, folglich keine polare Unstetigkeit sein. Innerhalb der ersten Kategorie kann sich demnach kein polarer Unstetigkeitspunct befinden. Daraus folgt mit Nothwendigkeit, dass sämmtliche polare Unstetigkeitspuncte zur zweiten Kategorie gehören, d. h. in einem Aufspringen des Functionswerthes ins Unendliche ihren Grund haben. Somit ergiebt sich folgender Satz:

Ist der Punct c ein Pol der Function f, so wird der Werth von f in c jederzeit unendlich gross sein.

Oder mit andern Worten: Ist der Punct c ein Pol für die Function f, so wird er jederzeit ein Nullpunct für die Function $\frac{1}{f}$ *sein*).*

---

*) Wenn wir unsere Schlussfolge recapituliren, so haben wir zunächst alle überhaupt vorhandenen Unstetigkeitspuncte, welcher Art sie auch immer sein mögen, in zwei Kategorien gebracht; nämlich

I. in die Kategorie derjenigen, welche durch einen endlichen Sprung des Functionswerthes veranlasst werden, — und

II. in die Kategorie derjenigen, welche in einem Aufspringen des Functionswerthes ins Unendliche ihren Grund haben.

Sodann untersuchten wir die I. Kategorie, und überzeugten uns davon, dass in dieser kein polarer Unstetigkeitspunct enthalten sein könne.

Daraus folgte mit Nothwendigkeit, dass sämmtliche polaren Unstetigkeitspuncte zur II. Kategorie gehören. Möglicherweise sind nun in dieser II. Kategorie ausser den polaren Unstetigkeitspuncten noch andere Arten von Unstetigkeitspuncten enthalten. Dass das in der That der Fall ist, lässt sich leicht durch ein Beispiel darthun.

Betrachten wir die Function $e^{\frac{1}{x+iy}}$ oder $e^{\frac{1}{z}}$. Diese Function wird

Wenn wir es auf einer Fläche mit mehreren Puncten zu thun haben, so können dies entweder einzelne Puncte, oder auch zusammenhängende Puncte sein. Ersteres wird der Fall sein, sobald jeder Punct von allen übrigen durch irgend welche Zwischenräume — dieselben mögen nun so klein sein, wie sie wollen — getrennt ist; letzteres, sobald die Puncte in ihrer Gesammtheit entweder ein Linienstück oder ein Flächenstück stetig erfüllen.

Wir können uns eine Function denken, welche lauter einzelne Pole besitzt; und eben so gut können wir uns andererseits auch eine Function denken, deren Pole zusammenhängend sind, deren Pole etwa zusammengenommen irgend welche Linie stetig erfüllen. Im Folgenden werden wir es aber immer nur mit dem ersteren Fall, nämlich immer nur mit einzelnen Polen zu thun haben.

Es sei $\mathfrak{E}$ eine gegebene Elementarfläche. Ferner sei $f(x+iy)$ oder $f(z)$ eine Function, welche auf $\mathfrak{E}$ überall **eindeutig** und **stetig** ist; zugleich befinde sich im Innern von $\mathfrak{E}$

---

für $z=0$ unendlich, und hat also bei $z=0$ einen Unstetigkeitspunct, welcher zur II. Kategorie gehört. Trotzdem ist dieser Unstetigkeitspunct kein polarer; denn der reciproce Werth der Function, nämlich der Werth von $e^{-\frac{1}{z}}$ ist, wie man leicht erkennt, im Bereich des Punctes $z=0$ keineswegs stetig, wie solches doch der Fall sein müsste, wenn jener Punct ein polarer wäre. Somit ergiebt sich Folgendes:

In der I. Kategorie befindet sich **kein polarer** Unstetigkeitspunct.

In der II. Kategorie befinden sich:

α) **sämmtliche polare** Unstetigkeitspuncte, und

β) noch **andere** Arten von Unstetigkeitspuncten, wie z. B. derjenige, welchen die Function $e^{\frac{1}{z}}$ bei $z=0$ besitzt.

Hätte es sich darum gehandelt, die ganze II. Kategorie durch einen Namen zu bezeichnen, so würde der Name Unendlichkeitspunct zweckmässig gewesen sein. Da es nun aber, was eine genaue Fassung der nachfolgenden Untersuchungen anbelangt, gerade wesentlich ist, die beiden Theile α und β, aus welchen jene II. Kategorie besteht, scharf auseinander zu halten, so schien die Einführung eines besonderen Namens durchaus nothwendig; und hierzu schienen die Worte Pol und polar durch ihre Kürze und auch durch andere Umstände besonders geeignet.

ein **beliebig kleines** Linien- oder Flächenstück λ, auf welchem die Function einen **constanten** Werth K besitzt.

Sind c und c_1 irgend zwei zu λ gehörige Puncte*), so wird $f(c) = K$, ebenso $f(c_1) = K$, mithin

$$f(c_1) - f(c)$$

gleich Null sein; demnach wird der Quotient

$$\frac{f(c_1) - f(c)}{c_1 - c}$$

ebenfalls Null sein. Dieser Quotient ist aber, falls wir die Puncte c und c_1 einander unendlich nahe denken, nichts Anderes als $f'(c)$, nämlich nichts Anderes als derjenige Werth, welchen der Differentialquotient der Function f im Puncte c besitzt. Somit ergiebt sich, dass $f'(c)$ gleich Null ist. Der Punct c war ein auf dem Linien- oder Flächenstück λ beliebig gewählter. Ebenso wie also die Function f in allen zu λ gehörigen Puncten den constanten Werth K besitzt, ebenso wird ihr Differentialquotient f' in all' jenen Puncten den constanten Werth 0 haben. Hieraus folgt nun in gleicher Weise, dass der zweite Differentialquotient f'' in all' jenen Puncten ebenfalls einen constanten Werth, und zwar wiederum den Werth 0 besitzt u. s. w.

Ist demnach c ein beliebiger Punct des Linien- oder Flächenstückes λ, so ist:

(1) $$f(c) = K,$$

und

(2) $$f'(c) = f''(c) = f'''(c) = \ldots\ldots = 0.$$

Wir beschreiben um den Punct c als Mittelpunct eine beliebig grosse, jedoch vollständig innerhalb $\mathfrak{E}$ liegende Kreisfläche $\mathfrak{k}$. Die Function f ist nach unserer Voraussetzung auf der Fläche $\mathfrak{E}$ überall eindeutig und stetig; sie wird demnach diese Eigenschaften auch innerhalb $\mathfrak{k}$ besitzen, folglich innerhalb $\mathfrak{k}$ nach der Taylor'schen Reihe entwickelbar sein (vergl. den Satz Seite 89). Ist daher z irgend ein zur Kreisfläche $\mathfrak{k}$ gehöriger Punct, so wird jederzeit

(3) $$f(z) = f(c) + \frac{z - c}{1} f'(c) + \frac{(z - c)^2}{1 \cdot 2} f''(c) + \ldots\ldots$$

also mit Rückblick auf (1) und (2)

---

*) Unter c und c_1 sind also zwei Grössen von der Form $a + ib$ zu verstehen.

(4) $$f(z) = K$$
sein.

Daraus folgt, dass die Function f im Innern der Fläche $\mathfrak{k}$ allenthalben constant, nämlich allenthalben gleich K ist, dass mithin die Differentialquotienten $f', f'', f''', \ldots$ innerhalb dieser Fläche allenthalben gleich Null sind. Ist demnach c_1 irgend ein beliebiger zur Kreisfläche $\mathfrak{k}$ gehöriger Punct, so wird:

(5) $$f(c_1) = K,$$
und

(6) $$f'(c_1) = f''(c_1) = f'''(c_1) = \ldots. = 0$$
sein.

Beschreiben wir nun um c_1 als Mittelpunct eine zweite Kreisfläche $\mathfrak{k}_1$, die wiederum vollständig innerhalb der gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$ liegt, und verstehen wir unter z irgend einen zu $\mathfrak{k}_1$ gehörigen Punct, so wird, ähnlich wie vorhin

(7) $$f(z) = f(c_1) + \frac{z - c_1}{1} f'(c_1) + \frac{(z - c_1)^2}{1 \, . \, 2} \cdot f''(c_1) + \ldots.,$$

folglich mit Rücksicht auf (5) und (6)

(8) $$f(z) = K$$
sein.

Daraus folgt, dass die Function f innerhalb der Fläche $\mathfrak{k}_1$ ebenfalls überall gleich K ist.

In solcher Art können wir eine Kreisfläche nach der andern beschreiben, und nachweisen, dass die Function f innerhalb der gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$ allenthalben den constanten Werth K besitzen muss.

Wir gehen über zur Betrachtung eines weniger einfachen Falles. Es sei p ein auf der Fläche $\mathfrak{E}$ gegebener Punct, und es sei bekannt, dass die Function $f(x + iy)$ oder $f(z)$ auf der Fläche $\mathfrak{E}$ mit Ausnahme eines in p liegenden **Poles** überall stetig ist. Im Uebrigen seien die Voraussetzungen dieselben wie vorhin.

Wir bezeichnen das Bereich des Punctes p, d. h. ein um diesen Punct herum abgegrenztes hinreichend kleines Flächenstück mit $\mathfrak{p}$, und denjenigen Theil der Fläche $\mathfrak{E}$, welcher nach Absonderung von $\mathfrak{p}$ noch übrig bleibt, mit $(\mathfrak{E} - \mathfrak{p})$. Auf die Fläche $(\mathfrak{E} - \mathfrak{p})$ kann die vorhin angegebene Methode unmittelbar in Anwendung gebracht werden; demnach wird sich nachweisen lassen, dass die Function f auf dieser Fläche $(\mathfrak{E} - \mathfrak{p})$ allenthalben constant, nämlich gleich K ist. Daraus folgt, dass f am Rande des kleinen Flächenstückes $\mathfrak{p}$ den constanten Werth K, und dass also $\frac{1}{f}$ an jenem Rande den constanten Werth $\frac{1}{K}$ besitzt.

Das Flächenstück $\mathfrak{p}$ ist das Bereich des Punctes p, und p ist nach unserer Voraussetzung ein Pol der Function f. Zufolge der für einen Pol gegebenen Definition (S. 94) wird daher $\frac{1}{f}$ innerhalb $\mathfrak{p}$ überall stetig sein. Nach unserer Voraussetzung ist nun ferner f auf der gegebenen Fläche $\mathfrak{E}$, mithin auch auf dem zu $\mathfrak{E}$ gehörigen Flächenstück $\mathfrak{p}$ überall eindeutig; Gleiches wird demnach auch von der Function $\frac{1}{f}$ gelten.

Somit ergiebt sich, wenn wir Alles zusammenfassen, dass die Function $\frac{1}{f}$ auf dem Flächenstück $\mathfrak{p}$ überall eindeutig und stetig ist, und dass sie ausserdem am Rande dieses Flächenstückes den constanten Werth $\frac{1}{K}$ besitzt. Daraus aber folgt, mit Anwendung eines früher gefundenen Satzes (S. 87), dass die Function $\frac{1}{f}$ auf dem Flächenstück $\mathfrak{p}$ allenthalben gleich $\frac{1}{K}$, dass mithin f selber auf jenem Flächenstück allenthalben gleich K ist.

Wir gelangen daher bei Betrachtung dieses zweiten Falles zu demselben Resultat, wie vorhin, nämlich zu dem Resultat, dass die Function f auf der gegebenen Fläche $\mathfrak{E}$ überall den constanten Werth K besitzen muss.

Setzen wir an Stelle eines einzigen Poles mehrere Pole, aber lauter einzeln liegende Pole voraus, so werden wir, wie leicht zu übersehen ist, wieder zu demselben Resultat gelangen. Somit ergiebt sich folgender Satz:

Ist eine Function $f(x + iy)$ auf einer gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$ überall eindeutig, und ist sie daselbst nirgends, oder doch nur in einzelnen Polen unstetig, so kann innerhalb $\mathfrak{E}$ kein auch noch so kleines Linien- oder Flächenstück vorhanden sein, auf welchem die Function constant ist; es sei denn, dass sie innerhalb $\mathfrak{E}$ allenthalben constant wäre.

Es kann kein Linien- oder Flächenstück vorhanden sein, auf welchem die Function constant ist; es kann demnach auch kein Linien- oder Flächenstück vorhanden sein, auf welchem sie Null ist. Somit ergiebt sich auf der Stelle folgender Zusatz:

Ist eine Function $f(x+iy)$ auf einer gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$ überall eindeutig, und ist sie daselbst nirgends oder doch nur in einzelnen Polen unstetig, so kann sie innerhalb $\mathfrak{E}$ auch nur in einzelnen Puncten Null werden; es sei denn, dass sie auf der Fläche $\mathfrak{E}$ allenthalben Null wäre.

Es sei $f = f(x+iy)$ eine Function, die auf einer gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$ überall eindeutig, und mit Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig ist, also eine Function, welche — zufolge des eben hingestellten Satzes — auf jener Fläche $\mathfrak{E}$ auch nur in einzelnen Puncten Null werden kann. Sind $p_1, p_2, p_3, \ldots$ die Pole, und $q_1, q_2, q_3, \ldots$ die Nullpuncte der Function, so werden also je zwei Puncte p, und ebenso auch je zwei Puncte q immer durch einen gewissen Zwischenraum von einander getrennt sein. Gleiches gilt aber auch von je einem Puncte p und je einem Puncte q; wie sich aus der für einen Pol gegebenen Definition (S. 94) leicht erkennen lässt.

Da nämlich der Punct p ein Pol der Function f sein soll, so wird die Function $\frac{1}{f}$ (zufolge jener Definition) im Bereich des Punctes p stetig, mithin innerhalb jenes Bereiches nirgends unendlich gross sein. Daraus aber folgt, dass f selber innerhalb jenes Bereiches nirgends Null wird, oder mit andern Worten, dass im Bereich des Punctes p kein Nullpunct der Function f vorhanden sein kann. Demnach wird der Punct p von sämmtlichen Nullpuncten, welche die Function f besitzt, d. h. von sämmtlichen Puncten q durch irgend welche Zwischenräume getrennt sein.

Die Puncte p, q werden also sämmtlich durch irgend welche Zwischenräume von einander getrennt sein; und wir werden daher um jeden dieser Puncte herum ein Flächenstück abgrenzen können, welches so klein ist, dass alle übrigen Puncte p, q ausserhalb desselben liegen.

Wir wollen nun der Reihe nach zuerst irgend einen der Puncte p, dann einen der Puncte q, und endlich einen Punct g betrachten, welcher auf der Fläche $\mathfrak{E}$ eine beliebige Lage besitzt, jedoch mit keinem der Puncte p, q zusammenfällt. Es wird uns dabei hauptsächlich um die Werthe zu thun sein, welche $\frac{1}{f}$ im Bereiche eines jeden dieser drei Puncte besitzt.

Im Puncte p besitzt die Function f einen Pol; demnach ist f in diesem Puncte unstetig, jedoch der Art unstetig, dass $\frac{1}{f}$ im Bereich des Punctes stetig bleibt. Wir wissen, dass ein Pol jederzeit durch ein Aufspringen des Functionswerthes ins Unendliche bedingt wird. (Vergl. den Satz S. 95.) Demnach wird f im Puncte p unendlich gross, mithin $\frac{1}{f}$ daselbst gleich Null sein. — Die Function $\frac{1}{f}$ ist also im Bereich des Punctes p stetig, und besitzt in p selber einen Nullpunct.

Im Puncte q ist f gleich Null. Demnach wird $\frac{1}{f}$ daselbst unendlich gross, mithin unstetig sein. Wir grenzen um den Punct q herum ein Flächenstück ab, welches so klein ist, dass sämmtliche Puncte p ausserhalb desselben liegen; ein solches Flächenstück kann kurzweg als ein um den Punct q herum abgegrenztes, hinreichend kleines Flächenstück bezeichnet, folglich das Bereich des Punctes q genannt werden. Innerhalb dieses Bereiches ist die Function f überall stetig. — Die Function $\frac{1}{f}$ ist also im Puncte q unstetig, jedoch der Art unstetig, dass ihr reciprocer Werth f im Bereiche dieses Punctes stetig bleibt; es besitzt demnach die Function $\frac{1}{f}$ im Puncte q einen Pol.

Um den Punct g herum wird sich, weil derselbe mit keinem der Puncte p, q zusammenfallen soll, ein Flächenstück abgrenzen lassen, welches so klein ist, dass sämmtliche Puncte p, q ausserhalb dieses Flächenstückes liegen; ein solches Flächenstück kann als das Bereich des Punctes g bezeichnet werden. Innerhalb dieses Bereiches wird dann die Function f überall stetig, und gleichzeitig auch überall von Null verschieden sein. — Die Function $\frac{1}{f}$ wird demnach im Bereich von g überall stetig sein.

Wir sehen somit, dass die Function $\frac{1}{f}$ in den Puncten p, g stetig, in den Puncten q hingegen unstetig ist, ferner, dass ihre Werthe in den Puncten p gleich Null, und dass ihre Unstetigkeiten in den Puncten q polarer Natur sind. Es wird demnach $\frac{1}{f}$ eine Function sein, welche auf der gegebenen Fläche $\mathfrak{E}$ mit Ausnahme einzelner in den Puncten q liegender

Pole überall stetig ist, und deren Nullpuncte durch die Puncte p dargestellt sind. Wir gelangen mithin zu folgendem Resultat:

Ist eine Function $f = f(x + iy)$ *auf einer gegebenen Elementarfläche überall eindeutig, und mit Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig, so gilt Gleiches auch von der Function* $\frac{1}{f}$.

Sind $p_1, p_2, p_3, \ldots$ *die Pole und* $q_1, q_2, q_3, \ldots$ *die Nullpuncte von* f, *so werden diese Puncte* p, q *sämmtlich durch irgend welche Zwischenräume von einander getrennt sein.*

Geht man von der Function f *zur Betrachtung der Function* $\frac{1}{f}$ *über, so wechseln die Puncte* p *und* q *ihre Rollen, während andererseits diejenigen Puncte der gegebenen Elementarfläche, welche mit keinem der Puncte* p, q *zusammenfallen, auch bei der Function* $\frac{1}{f}$ *weder einen Pol noch einen Nullpunct darstellen.**)

Wir fügen noch eine Bemerkung hinzu, die sich nicht nur auf Elementarflächen, sondern auf ganz beliebige Flächen bezieht; es ist folgende:

Ist E *eine von* $x + iy$ *abhängende, oder auch irgend welche andere Function, die auf einer gegebenen Fläche überall eindeutig, stetig und nullfrei ist, so gilt Gleiches auf jener Fläche auch von der Function* $\frac{1}{E}$.

Dabei ist unter einer nullfreien Function eine Function zu verstehen, die auf der gegebenen Fläche nirgends Null wird, also eine Function, die auf der Fläche frei von Nullpuncten ist.

---

*) Eine Function f, welche die genannten Bedingungen erfüllt, zeigt also in Betreff der hier betrachteten Umstände ganz dasselbe Verhalten, wie die früher (S. 93) erwähnte rationale Function:

$$\frac{(x+iy-q_1)\,(x+iy-q_2)\,\ldots\,(x+iy-q_m)}{(x+iy-p_1)\,(x+iy-p_2)\,\ldots\,(x+iy-p_n)}.$$

Fünfter Abschnitt. Untersuchung einer von $x + iy$ abhängenden Function, welche auf einer Elementarfläche überall eindeutig, und mit Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig ist. Ueber die Ordnungszahlen einer solchen Function.

Es sei $\mathfrak{E}$ eine Elementarfläche; ferner sei $f(x + iy)$ oder $f(z)$ eine Function, welche auf $\mathfrak{E}$ überall eindeutig und stetig ist, und welche daselbst nur einen einzigen bei $a + ib$ oder c liegenden Nullpunct besitzt. Verstehen wir unter M irgend welche positive ganze Zahl, so wird der Bruch

$$(1) \qquad \frac{f(z)}{(z-c)^M}$$

auf der Fläche $\mathfrak{E}$, mit alleiniger Ausnahme des Punctes c, **überall eindeutig, stetig und nullfrei** sein. Wie es sich aber mit diesem Bruch im Puncte c verhalten wird, ist zweifelhaft, und jedenfalls abhängig von der Grösse der ganzen Zahl M. Ist M klein, so kann der Bruch im Puncte c möglicherweise, ebenso wie sein Zähler, den Werth 0 besitzen; ist hingegen M eine sehr grosse ganze Zahl, so wird der Bruch in jenem Punct unendlich gross sein.

Wir beschreiben um den Punct c eine beliebig grosse, jedoch völlig innerhalb $\mathfrak{E}$ liegende Kreisfläche $\mathfrak{k}$. Die auf dieser Kreisfläche befindlichen Werthe der Function f werden sich alsdann, weil die Function auf $\mathfrak{E}$, und also auch auf $\mathfrak{k}$ überall eindeutig und stetig ist, nach der Taylor'schen Reihe entwickeln lassen (Satz, S. 89). Ist demnach z irgend ein innerhalb $\mathfrak{k}$ liegender Punct, so wird

$$(2) \qquad f(z) = f(c) + \frac{z-c}{1} f'(c) + \frac{(z-c)^2}{1.2} f''(c) + \ldots .$$

sein. Was die in dieser Entwickelung auftretenden constanten Coefficienten

$$f(c), \quad f'(c), \quad f''(c), \ldots .$$

anbelangt, so ist zunächst zu bemerken, dass der erste derselben, nämlich $f(c)$, Null ist, weil die Function f nach unserer Voraussetzung im Puncte c verschwindet. Es wäre möglich, dass ausser dem ersten noch irgend welche andere Coefficienten Null sind. Ja man könnte vielleicht vermuthen, dass unter Umständen all' jene Coefficienten ins Unendliche hin Null sein können. Solches ist aber nicht möglich; wären nämlich all' jene Coefficienten Null, so würde die Function f, zufolge der Gleichung (2), in sämmtlichen Puncten der Kreisfläche $\mathfrak{k}$ den Werth Null besitzen; nach unserer Voraussetzung soll sie aber auf der gegebenen Fläche $\mathfrak{E}$ nur in einem Puncte, nur in c Null werden.

Es sind demnach nur zwei Fälle möglich. Entweder verschwindet der erste Coefficient allein; dann verwandelt sich die Entwickelung (2) in

$$f(z) = \frac{z-c}{1} \cdot \left\{ f'(c) + \frac{z-c}{2} f''(c) + \ldots \right\}. \tag{3}$$

Oder es verschwindet ausser dem ersten Coefficienten auch noch irgend welche Anzahl der nachfolgenden Coefficienten; in diesem Falle verwandelt sich unsere Entwickelung, wenn wir den ersten nicht verschwindenden Coefficienten mit $f^{(m)}(c)$ bezeichnen, in:

$$f(z) = \frac{(z-c)^m}{1.2\ldots m} \cdot \left\{ f^{(m)}(c) + \frac{z-c}{m+1} f^{(m+1)}(c) + \ldots \right\}. \tag{4}$$

Der erste Fall ist im Grunde nichts Anderes als ein Specialfall des zweiten. Denn die Formel (3) ergiebt sich aus der Formel (4), sobald man in der letztern $m = 1$ setzt.

Die Werthe, welche unsere Function f innerhalb der Kreisfläche $\mathfrak{k}$ besitzt, lassen sich also jederzeit darstellen durch:

$$f(z) = (z-c)^m \cdot \left\{ A + B(z-c) + C(z-c)^2 + \ldots \right\},$$

oder, was dasselbe ist, durch:

$$\frac{f(z)}{(z-c)^m} = A + B(z-c) + C(z-c)^2 + \ldots \tag{5}$$

Hier ist m eine gewisse endliche Zahl aus der Reihe 1, 2, 3, 4, ...; ferner stellen hier A, B, C, ... gewisse constante Coefficienten vor, von welchen der erste, nämlich A, von Null verschieden ist.

Der hier auf der linken Seite stehende Bruch

$$\frac{f(z)}{(z-c)^m} \tag{6}$$

kann offenbar auf der Kreisfläche $\mathfrak{k}$ nur in denjenigen Puncten verschwinden, in welchen sein Zähler verschwindet, kann also auf jener Kreisfläche nur im Puncte c verschwinden. Die Gleichung (5) zeigt aber, dass derselbe in c von Null verschieden, nämlich gleich A ist; zeigt also, dass der Bruch auf der Kreisfläche $\mathfrak{k}$ nirgends verschwindet. Ausserdem wird dieser

Bruch, wie gleichfalls aus (5) hervorgeht, auf jener Fläche 𝔨 überall eindeutig und stetig sein.

Nun hatten wir bereits zu Anfang einen Bruch von der Form

$$\frac{f(z)}{(z-c)^M}$$

betrachtet, und gefunden, dass ein solcher Bruch, vorausgesetzt, dass M irgend eine beliebige positive ganze Zahl vorstellt, innerhalb der gegebenen Elementarfläche 𝔈, mit Ausnahme des Punctes c, überall eindeutig, stetig und nullfrei sein muss. Eben dasselbe wird demnach auch von dem hier betrachteten Bruche (6) gelten. Und zugleich geht aus unserer in Bezug auf die Kreisfläche 𝔨 angestellten Untersuchung hervor, dass bei diesem Bruche (6) in Bezug auf die genannten drei Eigenschaften im Puncte c keinerlei Ausnahme stattfindet. Somit ergiebt sich, dass der Bruch (6) auf der ganzen Fläche 𝔈 überall eindeutig, stetig und nullfrei ist. Wir haben also folgenden Satz:

Ist $f = f(x+iy)$ eine Function, welche auf einer gegebenen Elementarfläche 𝔈 überall eindeutig und stetig ist, und welche daselbst nur in einem einzigen Puncte $a+ib$ oder c verschwindet: und bezeichnet man ferner unter den auf einander folgenden Differentialquotienten f', f'', f''', ... den ersten, welcher in jenem Puncte $a+ib$ oder c nicht verschwindet, mit $f^{(m)}$, so wird der Bruch

$$\frac{f(x+iy)}{((x+iy)-(a+ib))^m} \quad \text{oder} \quad \frac{f}{(x+iy-c)^m}$$

eine Function sein, welche auf der Fläche 𝔈 allenthalben eindeutig, stetig und nullfrei ist.

Wir können übrigens diesen Satz auch so aussprechen:

Ist $f = f(x+iy)$ eine Function, welche auf einer gegebenen Elementarfläche 𝔈 überall eindeutig und stetig ist, und welche daselbst nur in einem einzigen Puncte $x+iy = c$ verschwindet, so werden sich die Werthe dieser Function innerhalb der Fläche 𝔈 jederzeit in folgender Weise darstellen lassen:

$$f = (x+iy-c)^m . E.$$

Hier bedeutet m eine endliche Zahl aus der Reihe 1, 2, 3, 4, ..., *und E eine von $x+iy$ abhängende Function, welche auf der Fläche 𝔈 überall eindeutig, stetig und nullfrei ist.*

Wir wollen nun ferner eine Function $\varphi = \varphi(x + iy)$ betrachten, welche auf einer gegebenen Elementarfläche 𝔈 überall eindeutig, überall nullfrei, und mit Ausnahme eines einzigen in $x + iy = c$ liegenden Poles daselbst auch überall stetig ist. Zufolge eines früheren Satzes (S. 102) vertauschen die Pole und Nullpuncte einer Function jedesmal ihre Rollen, sobald man von der Function selber zur Betrachtung ihres reciprocen Werthes übergeht. Jenem Satze zufolge wird daher $\frac{1}{\varphi}$ eine Function sein, welche auf der Fläche 𝔈 überall eindeutig, überall stetig, und mit alleiniger Ausnahme des Punctes c überall nullfrei ist, also eine Function sein von genau derselben Beschaffenheit, wie die zuvor betrachtete Function f. Somit ergiebt sich durch Anwendung des vorhergehenden Satzes, dass die Werthe, welche $\frac{1}{\varphi}$ innerhalb der Fläche 𝔈 besitzt, darstellbar sind durch eine Formel

$$\frac{1}{\varphi} = (x + iy - c)^m . E,$$

in welcher m eine endliche Zahl aus der Reihe 1, 2, 3, 4, ..., und in welcher E eine Function vorstellt, die auf 𝔈 überall eindeutig, stetig und nullfrei ist. Wir können dieser Formel folgende Gestalt geben:

$$\varphi = (x + iy - c)^{-m} \cdot \frac{1}{E},$$

oder, wenn wir $\frac{1}{E}$ mit H bezeichnen, auch folgende:

$$\varphi = (x + iy - c)^{-m} . H.$$

Die hier auftretende Function H ist (man vgl. den Satz S. 102), ebenso wie E selber, auf der Fläche 𝔈 überall eindeutig, stetig und nullfrei. Somit ergiebt sich folgender Satz:

Sind die Werthe einer Function $\varphi = \varphi(x + iy)$ auf einer Elementarfläche 𝔈 überall eindeutig, überall nullfrei, und mit Ausnahme eines bei $x + iy = c$ liegenden Poles daselbst auch überall stetig, so lassen sich diese Werthe jederzeit in folgender Weise darstellen:

$$\varphi = (x + iy - c)^{-m} . . H$$

Hier stellt m eine endliche Zahl aus der Reihe 1, 2, 3, 4, ..., *und H eine von $x + iy$ abhängende Function vor, welche auf der gegebenen Fläche 𝔈 überall eindeutig, stetig und nullfrei ist.*

Den hier betrachteten Functionen f und φ könnten wir endlich noch eine dritte Function $\psi = \psi(x + iy)$ zur Seite stellen, welche auf der gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$ allenthalben eindeutig, stetig und nullfrei ist, welche also in dem innerhalb $\mathfrak{E}$ liegenden Puncte $x + iy = c$ weder einen Pol noch auch einen Nullpunct besitzt. Für eine solche Function ψ würde sich eine Formel aufstellen lassen, welche mit der für f und φ gefundenen analog ist. Diese Formel würde so lauten

$$\psi = (x + iy - c)^0 . E = E,$$

wo E wiederum eine Function vorstellt die innerhalb der Fläche $\mathfrak{E}$ überall eindeutig, stetig und nullfrei ist. Während also der Exponent von

$$x + iy - c$$

bei f positiv, und bei φ negativ war, wird er bei der Function ψ Null sein.

Wir können nun, wie leicht zu übersehen ist, die für diese drei Functionen erhaltenen Ergebnisse zusammenfassen zu einem einzigen allgemeinen Satz, der so lautet:

Sind die Werthe einer Function $f = f(x + iy)$ auf irgend welcher Elementarfläche $\mathfrak{E}$ überall eindeutig, und mit etwaiger Ausnahme eines bei $x + iy = c$ liegenden Poles oder Nullpunctes daselbst auch überall stetig und nullfrei, so lassen sich dieselben jederzeit in folgender Weise darstellen:

$$f = (x + iy - c)^\mu . E.$$

Hier bedeutet μ eine endliche Zahl aus der Reihe

$$\ldots . -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots .,$$

und zwar eine Zahl, welche positiv, negativ oder Null ist, je nachdem c ein Nullpunct der Function f, ein Pol derselben, oder keines von Beiden ist: ferner E eine von $x + iy$ abhängende Function, welche auf der Fläche $\mathfrak{E}$ überall eindeutig, stetig und nullfrei ist.)*

Der hier auftretende Exponent μ ist eine ganze Zahl, deren Werth sich in eigenthümlicher Weise durch ein gewisses über den Rand der Fläche $\mathfrak{E}$ hinerstrecktes Integral darstellen lässt; wie sogleich gezeigt werden soll.

---

*) Die Zahl μ ist, wie wir später (S. 112) sehen werden, die im Puncte c vorhandene Ordnungszahl von f. In allen übrigen Puncten der Fläche $\mathfrak{E}$ ist die Ordnungszahl von f gleich Null.

Da die in der vorstehenden Formel

(1) $$f = (x + iy - c)^\mu . E$$

oder

(2) $$f = (z - c)^\mu . E$$

vorhandene Function E auf der gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$ überall eindeutig, stetig und nullfrei ist, so gilt (vergl. d. Satz S. 102) Gleiches auch von der Function $\frac{1}{E}$. Auf die beiden Functionen

$$E \quad \text{und} \quad \frac{1}{E}$$

lässt sich daher sofort ein früherer Satz (S. 92) in Anwendung bringen. Diesem Satze zufolge ist das über den Rand von $\mathfrak{E}$ in positiver Richtung hinerstreckte Integral

(3) $$\int_{\mathfrak{E}} \frac{1}{E}\, dE = 0.$$

Und hieraus folgt, wenn man für E den aus (2) hervorgehenden Werth

$$E = \frac{f}{(z-c)^\mu}$$

einsetzt:

(4) $$\int_{\mathfrak{E}} \frac{(z-c)^\mu}{f} \cdot \left\{ \frac{df}{(z-c)^\mu} - \frac{\mu f dz}{(z-c)^{\mu+1}} \right\} = 0,$$

oder, was dasselbe ist:

(5) $$\int_{\mathfrak{E}} \frac{df}{f} = \mu \cdot \int_{\mathfrak{E}} \frac{dz}{z-c}.$$

Das hier auf der rechten Seite befindliche Integral ist, wie wir bei einer früheren Gelegenheit gefunden haben,*) gleich $2\pi i$. Somit erhalten wir:

---

*) Das in Rede stehende Integral lautet, wenn wir für den Augenblick die Coordinaten des am Rande von $\mathfrak{E}$ liegenden Punctes z mit α, β, und die Coordinaten des im Innern von $\mathfrak{E}$ befindlichen Punctes c mit a, b bezeichnen, also $z = \alpha + i\beta$ und $c = a + ib$ setzen, folgendermassen

$$\int_{\mathfrak{E}} \frac{d(\alpha + i\beta)}{(\alpha + i\beta) - (a + ib)}.$$

Zufolge der Formel (2) auf S. 86 ist dieses Integral aber gleich $2\pi i$.

$$(6) \qquad \int\limits_{\mathfrak{E}} \frac{df}{f} = \mu \, . \, 2\pi i;$$

und gelangen daher zu folgendem Resultat:

Für die in dem vorhergehenden Satz auftretende ganze Zahl μ gilt jederzeit folgende Formel:

$$\mu = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{\mathfrak{E}} \frac{df}{f},$$

wo die Integration in positiver Richtung über den Rand der gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$ hinerstreckt ist.

Wir wenden uns zu einer allgemeinern Untersuchung. Es sei $f = f(x + iy)$ eine Function, welche auf einer gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$ überall eindeutig, und mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig ist. Die Pole dieser Function mögen mit $p_1, p_2, \ldots$ und ihre Nullpuncte mit $q_1, q_2, \ldots$ bezeichnet werden.

Da all' diese Puncte $p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots$ vereinzelt liegen (vgl. den Satz S. 102), so wird sich um jeden derselben herum ein Flächenstück abgrenzen lassen, welches so klein ist, dass alle übrigen ausserhalb dieses Flächenstücks liegen. Solche Flächenstücke wollen wir uns wirklich construirt denken; sie mögen, jenen Puncten entsprechend, mit $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots$ bezeichnet werden.

Auf jedes dieser Flächenstücke können wir nun den so eben aufgestellten Satz (S. 107) in Anwendung bringen, und erhalten alsdann für die in jedem derselben befindlichen Werthe von f folgende Darstellungen:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \text{in } \mathfrak{q}_1: & f = (x + iy - q_1)^{m_1} \, . \, E_1, \\ \text{in } \mathfrak{q}_2: & f = (x + iy - q_2)^{m_2} \, . \, E_2, \\ \multicolumn{2}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \text{in } \mathfrak{p}_1: & f = (x + iy - p_1)^{-n_1} \, . \, H_1, \\ \text{in } \mathfrak{p}_2: & f = (x + iy - p_2)^{-n_2} \, . \, H_2, \\ \multicolumn{2}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \end{array} \right.$$

Hier sind $m_1, m_2, \ldots$ und $n_1, n_2, \ldots$ irgend welche endliche Zahlen aus der Reihe 1, 2, 3, 4, ...; ferner stellen hier $E_1, E_2, \ldots$ und $H_1, H_2, \ldots$ Functionen vor, die innerhalb der ihnen angewiesenen Flächenstücke $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots$ und $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ eindeutig, stetig und nullfrei sind.

Der Symmetrie willen mag diesen Formeln schliesslich noch eine letzte Formel angereihet werden, welche sich auf keinen der Puncte p, q, sondern im Gegentheil auf alle übrigen Puncte der Fläche $\mathfrak{S}$ beziehen soll. Es sei g irgend ein Punct, welcher mit keinem der Puncte p, q zusammenfällt. Um g herum wird sich alsdann ein Flächenstück abgrenzen lassen, welches so klein ist, dass jene Puncte p, q sämmtlich ausserhalb desselben liegen; dieses Flächenstück mag $\mathfrak{g}$ heissen. Für die innerhalb $\mathfrak{g}$ befindlichen Werthe von f ergiebt sich alsdann, wiederum zufolge des vorhergehenden Satzes (Seite 107), folgende Darstellung:

$$(2) \qquad \text{in } \mathfrak{g}: \quad f = (x + iy - g)^0 \,.\, E,$$

wo E eine Function vorstellt, die innerhalb $\mathfrak{g}$ eindeutig, stetig und nullfrei ist.

Für die in den Formeln (1) und (2) enthaltenen Exponenten $m_1, m_2, \ldots, -n_1, -n_2, \ldots$ und 0 erhalten wir (vergl. den Satz Seite 109) folgende Formeln:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} m_1 = \dfrac{1}{2\pi i} \cdot \displaystyle\int\limits_{\mathfrak{q}_1} \dfrac{df}{f}, & -n_1 = \dfrac{1}{2\pi i} \cdot \displaystyle\int\limits_{\mathfrak{p}_1} \dfrac{df}{f}, \\ m_2 = \dfrac{1}{2\pi i} \cdot \displaystyle\int\limits_{\mathfrak{q}_2} \dfrac{df}{f}, & -n_2 = \dfrac{1}{2\pi i} \cdot \displaystyle\int\limits_{\mathfrak{p}_2} \dfrac{df}{f}, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ & 0 = \dfrac{1}{2\pi i} \cdot \displaystyle\int\limits_{\mathfrak{g}} \dfrac{df}{f}. \end{array} \right.$$

Die Flächenstücke $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{g}$ können charakterisirt werden als hinreichend kleine Flächenstücke, die um die Puncte q, p, g herum abgegrenzt sind, und können demnach kurzweg die Bereiche jener Puncte genannt werden.

In den Formeln

$$f = (x + iy - q_1)^{m_1} \,.\, E_1,$$

$$f = (x + iy - q_2)^{m_2} \,.\, E_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

sind E_1, E_2, ... Functionen, die innerhalb der Bereiche $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, ... eindeutig, stetig und nullfrei sind, mithin Functionen, die innerhalb dieser kleinen Flächenstücke nahezu constant sein werden. Jene Formeln zeigen demnach, dass die Function f im Bereich des Punctes q_1 nahezu proportional mit $(x+iy-q_1)^{m_1}$, im Bereich des Punctes q_2 nahezu proportional mit $(x+iy-q_2)^{m_2}$, ist, u. s. w. Die Exponenten $m_1, m_2, \ldots$ werden demnach im Allgemeinen die grössere oder geringere Intensität ausdrücken, mit welcher das Nullwerden der Function f in den einzelnen Puncten $q_1, q_2, \ldots.$ vor sich geht; die Function f wird nämlich in jedem dieser Puncte gewissermassen um so intensiver Null werden, je grösser der ihm zugehörige Exponent ist. Wir können demnach verschiedene Axten von Nullpuncten unterscheiden, indem wir jeden solchen Punct, je nachdem der ihm zugehörige Exponent gleich 1, 2, 3, ... ist, einen Nullpunct erster, zweiter, dritter, u. s. w. Ordnung nennen.

In gleicher Weise könnten wir die bei den Polen $p_1, p_2, \ldots$ auftretenden Exponenten $-n_1, -n_2, \ldots.$ benutzen, um auch die Pole in verschiedene Ordnungen einzutheilen.

Zweckmässiger aber erscheint es, sämmtliche Puncte der ganzen gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$ nach einem gemeinsamen Princip mit gewissen Ordnungszahlen zu versehen. Die Formeln (1) und (2) zeigen nämlich, dass die Function f im Bereich eines jeden zur Fläche $\mathfrak{E}$ gehörigen Punctes $a+ib$ immer nahezu proportional ist mit einer gewissen ganzen Potenz von

$$(x+iy)-(a+ib).$$

Der Exponent dieser Potenz ist es, welchen wir unmittelbar als die Ordnungszahl des Punctes ansehen können. Denn dieser Exponent giebt, falls er von Null verschieden ist, durch sein Vorzeichen zu erkennen, ob der gerade betrachtete Punct ein Nullpunct oder ein Pol ist, zugleich aber auch durch seinen numerischen Werth zu erkennen, ob jener Nullpunct oder Pol von niederer oder höherer Ordnung ist. Ferner giebt dieser Exponent, falls er gerade gleich Null ist, hierdurch zu erkennen, dass der betrachtete Punct weder ein Nullpunct noch auch ein Pol ist.

Wir können die in den Formeln (1), (2), (3) enthaltenen Ergebnisse und die damit zusammenhängende Definition der Ordnungszahlen in folgender Weise zusammenfassen:

Ist eine Function $f=f(x+iy)$ auf einer gegebenen Ele-

mentarfläche überall eindeutig und mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig, so lassen sich die Werthe, welche die Function auf jener Fläche im Bereich eines beliebigen Punctes $x + iy = c$ besitzt — gleichgültig, ob derselbe ein Nullpunct der Function, oder ein Pol derselben, oder keines von beiden ist — immer in folgender Weise darstellen:

$$f = (x + iy - c)^{\mu} \,.\, E.$$

Hier bedeutet μ irgend welche endliche Zahl aus der Reihe

$$\ldots\ldots - 3, - 2, - 1, 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots,$$

und E eine von $x + iy$ abhängende Function, welche im Bereich des Punctes c eindeutig, stetig und nullfrei ist.

Diese Zahl μ soll in Zukunft die Ordnungszahl des Punctes c, oder genauer ausgedrückt die Ordnungszahl der Function f im Puncte c genannt werden. Jedweder Punct der gegebenen Elementarfläche wird alsdann in Bezug auf die betrachtete Function f eine gewisse ihm zugehörige Ordnungszahl besitzen. All' diese Ordnungszahlen werden endliche ganze Zahlen sein; sie werden positiv sein in den Nullpuncten der Function, negativ in den Polen derselben, und Null in allen übrigen Puncten der gegebenen Fläche.

Gleichzeitig wird für die in jedwedem Puncte c vorhandene Ordnungszahl μ folgende Formel gelten:

$$\mu = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_c \frac{df}{f},$$

wo die Integration in positiver Richtung um das Bereich des Punctes c herumläuft.

Sechster Abschnitt. Ueber die Eindeutigkeit und Stetigkeit von Functionen, welche aus anderen Functionen auf rationale Weise zusammengesetzt sind.

Wir wollen uns auf einer gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$ zwei Functionen $f = f(x + iy)$ und $f_1 = f_1(x + iy)$ ausgebreitet denken; beide seien daselbst überall eindeutig, und beide mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig. Es sollen die aus f und f_1 zusammengesetzten Functionen

$$(1)\qquad \begin{cases} K \cdot f + K_1 \cdot f_1, \\ f \cdot f_1, \\ \dfrac{f}{f_1} \end{cases}$$

untersucht werden, vorausgesetzt, dass K und K_1 irgend welche Constanten sind.

Zunächst ist klar, dass diese drei neuen Functionen, ebenso wie f und f_1 selber, auf der Fläche $\mathfrak{E}$ überall eindeutig sein werden.

Fraglich aber ist, wie es sich mit ihrer Stetigkeit oder Unstetigkeit verhält. In Bezug hierauf ist zunächst zu bemerken, dass die beiden ersten nur in denjenigen Puncten unstetig sein können, wo f und f_1 unstetig sind, und dass andererseits die dritte nur in denjenigen Puncten unstetig sein kann, wo f und $\frac{1}{f_1}$ unstetig sind; dass also all' jene drei Functionen, ebenso wie f und f_1 selber, auf der Fläche $\mathfrak{E}$ immer nur in einzelnen Puncten unstetig sein können. Zn untersuchen bleibt nun aber, welcher Art diese Untstetigkeiten sind, ob dieselben polarer, oder ob sie irgend welcher anderer Natur sind.

Zufolge des vorhergehenden Satzes sind die Ordnungszahlen der Functionen f und f_1 in jedem Punct der Fläche $\mathfrak{E}$ durch irgend welche endliche ganze Zahlen dargestellt. Ist $x + iy = c$ ein beliebiger Punct auf jener Fläche, und sind μ und μ_1 die in diesem Puncte vorhandenen Ordnungszahlen von f und f_1, so werden sich die Werthe, welche f und f_1 im Bereich des Punctes c besitzen, jederzeit in folgender Weise darstellen lassen:

$$(2)\qquad \begin{cases} f = (x + iy - c)^{\mu} \cdot E, \\ f_1 = (x + iy - c)^{\mu_1} \cdot E_1; \end{cases}$$

wo unter E und E_1 zwei von $x + iy$ abhängende Functionen zu verstehen sind, welche innerhalb des genannten Bereiches eindeutig, stetig und nullfrei sind.

Wir betrachten nun zuvörderst die erste von unsern drei Functionen (1); sie mag F genannt werden:

$$(3)\qquad F = K \cdot f + K_1 \cdot f_1.$$

Zufolge (2) werden sich die Werthe, welche diese Function im Bereich des Punctes c besitzt, darstellen lassen durch:

(4) $\quad F = K.(x + iy - c)^{\mu}.E + K_1.(x + iy - c)^{\mu_1}.E_1.$

Multiplicirt man diese Formel auf beiden Seiten mit $(x + iy - c)^M$, so ergiebt sich:

(5)
$$(x + iy - c)^M . F =$$
$$= K.(x + iy - c)^{M+\mu}.E + K_1.(x + iy - c)^{M+\mu_1}.E_1.$$

Wir wollen uns hier unter M eine endliche ganze Zahl denken, und zwar eine Zahl, welche so gross ist, dass die Exponenten $M + \mu$ und $M + \mu_1$ beide positiv sind*). Alsdann werden nicht allein

$$E \text{ und } E_1,$$

sondern auch

$$(x + iy - c)^{M+\mu} \text{ und } (x + iy - c)^{M+\mu_1}$$

Functionen sein, die im Bereich des Punctes c eindeutig und stetig sind. Gleiches wird demnach, zufolge (5), auch von dem Product:

(6)
$$(x + iy - c)^M . F$$

gelten.

Dieses Product wird daher, wie sich aus dem vorhergehenden Satz ergiebt, eine Function sein, deren Werthe im Bereich des Punctes c in folgender Weise dargestellt werden können:

(7)
$$(x + iy - c)^M . F = (x + iy - c)^{\nu} . H;$$

hier bedeutet ν eine endliche ganze Zahl, nämlich die Ordnungszahl des in Rede stehenden Productes im Puncte c, und H eine Function, welche im Bereich des Punctes c eindeutig, stetig und nullfrei ist. Aus (7) folgt unmittelbar:

(8)
$$F = (x + iy - c)^{\nu - M} . H,$$
$$\frac{1}{F} = (x + iy - c)^{M - \nu} . \frac{1}{H}$$

Beachtet man nun, dass $\frac{1}{H}$, ebenso wie H selber, im Bereich von c eindeutig, stetig und nullfrei ist, so ergiebt sich aus diesen beiden Formeln (8) sofort, dass innerhalb jenes Bereiches entweder

*) Eine derartige Zahl M wird jederzeit vorhanden sein; denn μ μ_1 sind, und ihrer Beduetung zufolge, endliche ganze Zahlen.

F oder $\frac{1}{F}$ stetig sein muss, dass nämlich ersteres der Fall sein wird, wenn $\nu - M$, letzteres, wenn $M - \nu$ einen positiven Werth hat.

Die Function F wird demnach im Bereich eines jeden beliebigen, zur Fläche $\mathfrak{E}$ gehörigen Punctes c entweder stetig, oder doch nur der Art unstetig sein, dass wenigstens ihr reciprocer Werth daselbst stetig bleibt. Oder mit andern Worten: Die Function F wird auf der gegebenen Fläche $\mathfrak{E}$ mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole überall stetig sein.

Noch leichter ist die Untersuchung der beiden andern in (1) angegebenen Functionen:

$$(9) \qquad \begin{cases} \Phi = f \cdot f_1, \\ \Phi_1 = \frac{f}{f_1}. \end{cases}$$

Aus (2) ergiebt sich zunächst, dass die Werthe dieser beiden Functionen innerhalb des Bereiches von c dargestellt werden können durch:

$$(10) \qquad \begin{cases} \Phi = (x + iy - c)^{\mu + \mu_1} \,.\, EE_1, \\ \Phi_1 = (x + iy - c)^{\mu - \mu_1} \,.\, \frac{E}{E_1}, \end{cases}$$

dass dieselben also, falls man $E \,.\, E_1$ mit H, und $\frac{E}{E_1}$ mit H_1 bezeichnet, innerhalb jenes Bereiches dargestellt werden können durch:

$$(11) \qquad \begin{cases} \Phi = (x + iy - c)^{\mu + \mu_1} \,.\, H, \\ \Phi_1 = (x + iy - c)^{\mu - \mu_1} \,.\, H_1. \end{cases}$$

Da E und E_1 im Bereiche von c eindeutig, stetig und nullfrei sind, so gilt Gleiches auch von $\frac{1}{E}$ und $\frac{1}{E_1}$, mithin Gleiches auch von den Functionen H, H_1, $\frac{1}{H}$, $\frac{1}{H_1}$.

Zufolge (11) haben wir nun, was die Werthe von Φ im Bereich des Punctes c anbelangt, folgende Formeln:

$$\Phi = (x + iy - c)^{\mu + \mu_1} \,.\, H,$$
$$\frac{1}{\Phi} = (x + iy - c)^{-(\mu + \mu_1)} \,.\, \frac{1}{H};$$

und hieraus ergiebt sich, dass innerhalb jenes Bereiches jederzeit entweder Φ oder $\frac{1}{\Phi}$ stetig sein muss, dass nämlich ersteres der

Fall sein wird, wenn $\mu + \mu_1$, letzteres, wenn $-(\mu + \mu_1)$ positiv ist. Ferner ist zufolge (11))

$$\Phi_1 = (x + iy - c)^{\mu - \mu_1} \,.\, H_1,$$

$$\frac{1}{\Phi_1} = (x + iy - c)^{-(\mu - \mu_1)} \,.\, \frac{1}{H_1};$$

und hieraus ergiebt sich in gleicher Weise, dass im Bereich des Punctes c jederzeit entweder Φ_1 oder $\frac{1}{\Phi_1}$ stetig sein muss. Demnach werden Φ und Φ_1 zwei Functionen sein, welche auf der gegebenen Fläche $\mathfrak{E}$ mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole überall stetig sind.

Wir werfen schliesslich noch einen Blick auf die Formeln (11):

$$\Phi = (x + iy - c)^{\mu + \mu_1} \,.\, H,$$

$$\Phi_1 = (x + iy - c)^{\mu - \mu_1} \,.\, H_1.$$

Die hier auftretenden Functionen H und Π_1 sind, wie bereits bemerkt, im Bereich des Punctes c eindeutig, stetig und nullfrei. Mit Rücksicht auf den vorhergehenden Satz ergiebt sich daher, dass die in diesen Formeln enthaltenen Exponenten $\mu + \mu_1$ und $\mu - \mu_1$ die Ordnungszahlen sind, welche die Functionen Φ und Φ_1 im Puncte c besitzen. Nun sind aber μ, μ_1 selber die Ordnungszahlen der ursprünglich gegebenen Functionen f, f_1, aus welchen Φ und Φ_1 durch Multiplication und Division entstanden sind. Sind demnach die Ordnungszahlen der Funtionen f, f_1 in irgend einem Puncte c bekannt, so wird man die Ordnungszahl des Productes $\Phi = f \,.\, f_1$ oder die des Quotienten $\Phi_1 = \frac{f}{f_1}$ in diesem Puncte c dadurch erhalten, dass man jene beiden erstgenannten Zahlen entweder addirt oder subtrahirt.

Der Ausgangspunct unserer ganzen Untersuchung liegt, wenn wir auf den Gang derselben zurückblicken, in den Formeln (2):

$$f = (x + iy - c)^{\mu} \,.\, E,$$

$$f_1 = (x + iy - c)^{\mu_1} \,.\, E_1;$$

also in denjenigen beiden Formeln, durch welche die Werthe der gegebenen Functionen f, f_1 im Bereich eines jeden beliebigen, zur Fläche $\mathfrak{E}$ gehörigen Punctes c dargestellt werden können. Diese beiden Formeln bilden das Fundament, von welchem unsere ganze Untersuchung getragen wird.

Besitzt eine der beiden Functionen, z. B. f auf der Fläche $\mathfrak{E}$, einen allenthalben constanten, von Null sowohl, als auch von Unendlich verschiedenen Werth, etwa den Werth 1, so wird die erstere von jenen beiden Fundamentalformeln zu ersetzen sein durch:

$$f = 1,$$

oder, was dasselbe ist, durch:

$$f = (x + iy - c)^0 . 1,$$

in welcher der Exponent μ durch 0 vertreten wird, und in welcher die Function E durch 1, also durch eine Grösse vertreten wird, die, ebenso wie früher E, im Bereich des Punctes c eindeutig, stetig und nullfrei ist.

Wir haben demnach, wenn wir den Fall betrachten, dass f den constanten Werth 1 besitzt, dieselben Fundamentalformeln wie früher, nur mit der unwesentlichen Abänderung, dass die eine derselben alsdann ein mehr specielles Gepräge als früher besitzt. Daraus folgt, dass unsere ganze Untersuchung auch für jenen Fall Schritt für Schritt gültig bleibt. Die von uns erhaltenen Resultate werden daher auf jenen Fall, wie auf einen Specialfall, unmittelbar in Anwendung gebracht werden können; man wird, um von dem allgemeinen Fall zu jenem Specialfall überzugehen, das mit 1 identisch gewordene f nur als eine Function anzusehen haben, deren Ordnungszahl überall gleich 0 ist.

Analoges würde natürlich auch für den Fall zu bemerken sein, dass die Functionen f und f_1 beide mit 1 identisch werden.

Fassen wir daher schliesslich die bisher erhaltenen Ergebnisse zusammen, so können wir uns darüber folgendermassen ausdrücken:

Sind $f = f(x + iy)$ und $f_1 = f_1(x + iy)$ zwei Functionen, die auf einer gegebenen Elementarfläche überall eindeutig und mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole überall stetig sind, so wird Gleiches auch von den Functionen

$$K . f + K_1 . f_1,$$
$$f . f_1,$$
$$\frac{f}{f_1}$$

gelten, vorausgesetzt, dass man unter K, K_1 irgend welche Constanten versteht.

Sind, was die beiden letzten Functionen anbelangt, μ und μ_1

die beiden Ordnungszahlen, welche f und f_1 in irgend einem Punct der gegebenen Fläche besitzen, so werden $\mu + \mu_1$ und $\mu - \mu_1$ diejenigen Ordnungszahlen sein, mit welchen das Product $f \cdot f_1$ und der Quotient $\frac{f}{f_1}$ in jenem Punct behaftet sind.

Zu den Functionen f und f_1, auf welche diese Sätze anwendbar sind, gehört unter Anderm auch diejenige, deren Werth überall $= 1$, und deren Ordnungszahl überall $= 0$ ist.

Von den Ausdrücken

$$K \cdot f + K_1 \cdot f_1,$$
$$f \cdot f_1,$$
$$\frac{f}{f_1}$$

ist der erste aus den beiden gegebenen Functionen durch Addition oder Subtraction, der zweite durch Multiplication, der dritte durch Division entstanden. Demnach können wir die erhaltenen Resultate sofort ausdehnen auf jedweden Ausdruck, der aus f und f_1 auf rationale Weise zusammengesetzt ist; denn jeder solcher Ausdruck entsteht aus f und f_1 dadurch, dass man die genannten Operationen der Addition, Subtraction, Multiplication und Division mehrmals hintereinander und in irgend welcher Reihenfolge in Anwendung bringt.

Wir können aber die erhaltenen Resultate noch weiter ausdehnen, nämlich, wie man leicht übersieht, auch auf diejenigen Ausdrücke ausdehnen, welche nicht aus zwei Functionen f und f_1, sondern aus beliebig vielen Functionen auf rationale Weise zusammengesetzt sind. Thun wir dies, so gewinnen jene Resultate eine Allgemeinheit, in welcher sie so lauten:

Sind $f_1, f_2, \ldots f_\alpha$ irgend welche von $x + iy$ abhängende Functionen, welche auf einer gegebenen Elementarfläche überall eindeutig und mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole überall stetig sind, so gilt Gleiches auf jener Fläche auch von jedem Ausdruck

$$R(f_1, f_2, \ldots f_\alpha),$$

der aus den genannten Functionen auf rationale Weise zusammengesetzt ist.

Sind demnach $f_1, f_2, \ldots f_\alpha$ und $f_1^0, f_2^0, \ldots f_\beta^0$ von $x + iy$ abhängende Functionen, welche auf einer gegebenen Elementarfläche überall eindeutig und mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole überall stetig sind, so wird Gleiches auch von dem Quotienten

$$\frac{f_1 \cdot f_2 \ldots . f_\alpha}{f_1^0 \cdot f_2^0 \ldots . f_\beta^0}$$

gelten. Und zwar wird sich in diesem Fall die Ordnungszahl, welche der Quotient in irgend einem Puncte jener Fläche besitzt, dadurch ergeben, dass man zuerst die in dem Puncte vorhandenen Ordnungszahlen von $f_1 \cdot f_2, \ldots f_\alpha$ addirt, und sodann von der erhaltenen Summe diejenigen Ordnungszahlen, welche $f_1^0, f_2^0, \ldots f_\beta^0$ in dem Puncte besitzen, subtrahirt.

Zu den Functionen f, auf welche diese Sätze anwendbar sind, gehört unter Anderm auch diejenige, deren Werth $= 1$, und deren Ordnungszahl $= 0$ ist.

Siebenter Abschnitt. Reihen-Entwickelung einer von $x + iy$ abhängenden Function, welche auf einer Kreisfläche überall eindeutig und mit Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig ist.

Auf einer Elementarfläche $\mathfrak{E}$ seien irgend welche Puncte $\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_2 + i\beta_2, \ldots, \alpha_\varkappa + i\beta_\varkappa$ gegeben; der Kürze wegen mag

$$\alpha_1 + i\beta_1 = \gamma_1, \ \alpha_2 + i\beta_2 = \gamma_2, \ldots . \ \alpha_\varkappa + i\beta_\varkappa = \gamma_\varkappa$$

gesetzt werden. Ferner seien $M_1, M_2, \ldots M_\varkappa$ beliebig gewählte positive ganze Zahlen; endlich sei F folgende von $x + iy$ abhängende Function;

$$(1) \quad F = (x + iy - \gamma_1)^{M_1} \cdot (x + iy - \gamma_2)^{M_2} \ldots . (x + iy - \gamma_\varkappa)^{M_\varkappa}.$$

Offenbar wird diese Function auf der Fläche $\mathfrak{E}$ überall eindeutig und stetig sein, und mit Ausnahme der Puncte γ daselbst nirgends verschwinden; sie wird also auf jener Fläche von Polen völlig frei sein, hingegen $\varkappa$ einzelne Nullpuncte besitzen, die in den gegebenen Puncten γ liegen.

Nun wissen wir (Satz, Seite 112), dass die Ordnungszahl einer Function positiv ist in ihren Nullpuncten, dass sie negativ in ihren Polen, und dass sie Null ist in jedwedem andern Puncte. Die Ordnungszahl der hier betrachteten Function F wird demnach in den Puncten γ positiv, und in allen übrigen zur Fläche $\mathfrak{E}$ gehörigen Puncten Null sein.

Wir bezeichnen den für die Function F gegebenen Ausdruck (1) für den Augenblick mit

$$(2) \qquad F = (x + iy - \gamma_1)^{M_1} \cdot E;$$

E wird dann ein Product vorstellen, welches nur $\varkappa - 1$ Factoren enthält, und welches demgemäss auf der gegebenen Fläche $\mathfrak{E}$ auch nicht in allen Puncten γ, sondern nur in $\gamma_2, \gamma_3, \ldots \gamma_\varkappa$ verschwindet, im Puncte γ_1 hingegen von Null verschieden ist. Daneben ist klar, dass dieses Product E auf der gegebenen Fläche $\mathfrak{E}$ allenthalben eindeutig und stetig bleibt. Demnach wird E eine Function sein, welche im Bereich des Punctes γ_1 eindeutig, stetig und nullfrei ist.

Beachten wir dies, so erkennen wir aus der Gleichung (2) sofort, dass die Zahl M_1 nichts Anderes ist, als die Ordnungszahl der gegebenen Function F im Puncte γ_1. (Vergl. die Definition Seite 112.) Ebenso werden natürlich $M_2, \ldots M_\varkappa$ die in den Puncten $\gamma_2, \ldots \gamma_\varkappa$ vorhandenen Ordnungszahlen darstellen. Die Ordnungszahl von F ist demnach in den Puncten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_\varkappa$ gleich $M_1, M_2, \ldots M_\varkappa$, in allen übrigen zur Fläche $\mathfrak{E}$ gehörigen Puncten hingegen gleich Null.

Es sei nun $f = f(x + iy)$ irgend eine Function, welche auf der gegebenen Fläche $\mathfrak{E}$ überall eindeutig und mit Ausnahme von $\varkappa$ einzelnen Polen überall stetig ist. Es sei bekannt, dass diese $\varkappa$ Pole in den Puncten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_\varkappa$ liegen; im Uebrigen aber sei die Function f völlig unbekannt.

Die Puncte $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_\varkappa$ werden also Pole der Function f sein, und alle übrigen zur Fläche $\mathfrak{E}$ gehörigen Puncte werden theils Nullpuncte dieser Function, theils neutrale Puncte sein; falls wir mit diesem Namen einen Punct bezeichnen, in welchem die Function weder einen Pol hat, noch Null wird. Demgemäss wird die Ordnungszahl von f in den Puncten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_\varkappa$ durch irgend welche negative ganze Zahlen $-n_1, n_2, \ldots -n_\varkappa$, in allen übrigen Puncten der Fläche $\mathfrak{E}$ hingegen durch Zahlen dargestellt sein, die theils positiv, theils Null sind.

Wir betrachten endlich das aus den beiden Functionen F und f gebildete Product:

$$\Phi = F \cdot f. \tag{3}$$

Da F und f auf der Fläche $\mathfrak{E}$ überall eindeutig, und mit Ausnahme einzelner Pole daselbst überall stetig sind, so gilt Gleiches auch von Φ; wie sich aus einem kürzlich gefundenen Satze (Seite 117) unmittelbar ergiebt. Zugleich folgt aus jenem Satz, dass die Ordnungszahlen von Φ dadurch erhalten werden können, dass man die von F und f addirt. Bezeichnen wir nun die Puncte

$\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_\varkappa$ in ihrer Gesammtheit mit γ, und alle übrigen zur Fläche $\mathfrak{E}$ gehörigen Puncte mit g, so sind:

in diesen Puncten	γ	und	g
die Ordnungszahlen von F gleich	M	und	0,
ferner die von f gleich	$-n$	und	0 od. pos.;

folglich:

die Ordnungszahlen von Φ gleich	$M-n$	und	0 od. pos.

Nehmen wir die vorhin willkührlich gewählten ganzen Zahlen M, nämlich die in der Function

$$F = (x+iy-\gamma_1)^{M_1} \cdot (x+iy-\gamma_2)^{M_2} \ldots (x+iy-\gamma_\varkappa)^{M_\varkappa}$$

enthaltenen Exponenten der Art an, dass sie mit den Zahlen n gleich gross sind, so wird die Ordnungszahl des Productes

$$\Phi = F \cdot f$$

auf der Fläche $\mathfrak{E}$ allenthalben Null oder positiv sein. Jenes Product wird also dann eine Function sein, welche auf der Fläche $\mathfrak{E}$ mit keinerlei Polen behaftet ist, folglich eine Function, welche auf dieser Fläche allenthalben stetig ist. Wir gelangen daher zu folgendem Satz:

Eine Function $f = f(x+iy)$, welche auf einer gegebenen Elementarfläche überall eindeutig, und mit Ausnahme einzelner Pole überall stetig ist, kann von diesen Polen jederzeit befreit werden durch Multiplication mit einer gewissen ganzen rationalen Function von $x+iy$.

Sind nämlich $x+iy=\gamma_1$, $x+iy=\gamma_2$, ..., $x+iy=\gamma_\varkappa$ die Pole, mit welchen die Function f auf der gegebenen Elementarfläche behaftet ist, und sind $-n_1$, $-n_2$, ... $-n_\varkappa$ die in diesen Polen vorhandenen Ordnungszahlen, so wird das Product von f und von

$$(x+iy-\gamma_1)^{n_1} (x+iy-\gamma_2)^{n_2} \ldots (x+iy-\gamma_\varkappa)^{n_\varkappa}.$$

eine Function sein, welche auf jener Fläche allenthalben eindeutig und stetig ist.

Wir bringen diesen Satz auf den Fall in Anwendung, dass die gegebene Elementarfläche eine Kreisfläche ist. Lassen wir im Uebrigen alles ungeändert, so wird also

$$(1)\quad \Phi = (x+iy-\gamma_1)^{n_1} (x+iy-\gamma_2)^{n_2} \ldots (x+iy-\gamma_\varkappa)^{n_\varkappa} \cdot f$$

eine Function sein, welche auf der Kreisfläche allenthalben eindeutig und stetig ist, folglich eine Function sein, welche, was ihre Werthe auf dieser Kreisfläche anbelangt, nach der Taylor'schen

Reihe entwickelt werden kann (Satz, S. 89). Wir erhalten demnach, wenn wir den Mittelpunct der Kreisfläche mit $a + ib$ oder c, und irgend welchen andern Punct derselben mit $x + iy$ bezeichnen, für den in diesem letztern Puncte vorhandenen Werth von Φ folgende Darstellung:

$$(2) \qquad \Phi = \Phi(c) + \frac{x + iy - c}{1}\,\Phi'(c) + \frac{(x + iy - c)^2}{1.2}\,\Phi''(c) + \cdot\,\cdot$$

Bezeichnet man die hier auftretenden constanten Coefficienten

$$\Phi(c), \quad \frac{1}{1}\,\Phi'(c), \quad \frac{1}{1.2}\,\Phi''(c), \;\ldots$$

kurzweg mit A, B, C, ..., und substituirt man sodann diesen Werth von Φ in die Formel (1), so ergiebt sich:

$$(3) \quad f = \frac{A + B(x + iy - c) + C(x + iy - c)^2 + \ldots.}{(x + iy - \gamma_1)^{n_1} . (x + iy - \gamma_2)^{n_2} \ldots . (x + iy - \gamma_\varkappa)^{n_\varkappa}};$$

und diese Formel wird, ebenso wie (2), gültig sein an allen Stellen der gegebenen Kreisfläche. Wir gelangen somit zu folgendem Satz:

Ist eine Function $f = f(x + iy)$ innerhalb einer gegebenen Kreisfläche überall eindeutig und mit Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig, so lassen sich die Werthe, welche die Function innerhalb der Kreisfläche besitzt, jederzeit in folgender Weise darstellen:

$$f = \frac{A + B(x + iy - c) + C(x + iy - c)^2 + \ldots.}{(x + iy - \gamma_1)^{n_1} . (x + iy - \gamma_2)^{n_2} \ldots . (x + iy - \gamma_\varkappa)^{n_\varkappa}}.$$

Hier stellt c den Mittelpunct der Kreisfläche vor. Ferner sind unter $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_\varkappa$ die Pole zu verstehen, mit welchen die Function f auf jener Fläche behaftet ist; $-n_1, -n_2, \ldots -n_\varkappa$ sind die in diesen Polen vorhandenen Ordnungszahlen von f; und endlich A, B, C, ... gewisse constante Coefficienten.

Achter Abschnitt. Ueber die Summe sämmtlicher Ordnungszahlen, welche eine von $x + iy$ abhängende Function auf einer gegebenen Elementarfläche besitzt; vorausgesetzt, dass dieselbe auf jener Fläche überall eindeutig und mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig ist.

Es mag wiederum, wie früher, $\mathfrak{E}$ irgend welche Elementarfläche vorstellen, und $f = f(x + iy)$ eine Function sein, welche auf $\mathfrak{E}$ eindeutig und mit Ausnahme einzelner Pole stetig ist, also eine Function, welche (zufolge des Zusatzes S. 100) innerhalb $\mathfrak{E}$ auch nur einzelne Nullpuncte besitzen wird.

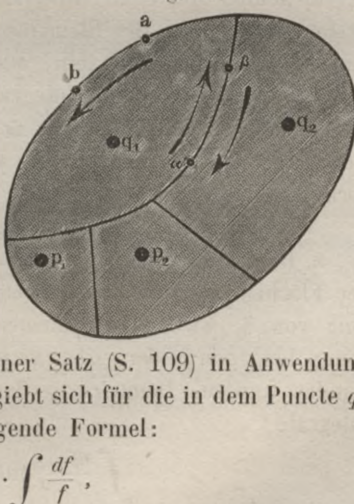
Der Einfachheit wegen wollen wir annehmen, dass unsere Function f auf der Fläche $\mathfrak{E}$ nur zwei Nullpuncte q_1, q_2, und ebenso auch nur zwei Pole p_1, p_2 besitzt; ihre Ordnungszahlen auf der Fläche $\mathfrak{E}$ werden alsdann (zufolge des Satzes S. 112) in den Puncten q_1, q_2 durch irgend welche positive ganze Zahlen μ_1, μ_2, in den Puncten p_1, p_2 durch irgend welche negative ganze Zahlen ν_1, ν_2, und in allen übrigen Puncten jener Fläche durch Null dargestellt sein. Bezeichnen wir also die Summe sämmtlicher Ordnungszahlen, welche f in allen Puncten jener Fläche zusammengenommen besitzt, mit S, so wird

$$(1) \qquad S = \mu_1 + \mu_2 + \nu_1 + \nu_2$$

sein. Es soll sich nun um die Ermittelung dieser Summe S, d. h. um die Auffindung einer Methode handeln, vermittelst deren man den Werth dieser Summe in jedem gegebenen Falle zu berechnen im Stande sein würde.

Wir zerlegen die gegebene Elementarfläche $\mathfrak{E}$ (Fig. 20) durch irgend welche Schnitte in vier kleinere Elementarflächen $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, von welchen die erste nur den Punct q_1, die zweite nur q_2, die dritte nur p_1, und endlich die letzte nur p_2 in sich enthält. Auf der Fläche $\mathfrak{q}_1$ wird alsdann die Function $f(z)$ überall eindeutig und stetig, und mit Ausnahme eines in q_1 liegenden Nullpunctes auch überall nullfrei sein. Demnach lässt sich auf diese Fläche sofort ein früher gefundener Satz (S. 109) in Anwendung bringen. Thun wir dies, so ergiebt sich für die in dem Puncte q_1 vorhandene Ordnungszahl μ_1 folgende Formel:

Fig. 20.



$$\mu_1 = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\mathfrak{q}_1} \frac{df}{f},$$

wo die Integration in positiver Richtung um den Rand der Fläche $\mathfrak{q}_1$ herumläuft. In gleicher Weise ergeben sich für die in

q_2, p_1, p_2 vorhandenen Ordnungszahlen μ_2, ν_1, ν_2 durch Betrachtung der Flächen $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ die Formeln:

$$\mu_2 = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{\mathfrak{q}_2} \frac{df}{f},$$

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{\mathfrak{p}_1} \frac{df}{f},$$

$$\nu_2 = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{\mathfrak{p}_2} \frac{df}{f}.$$

Somit verwandelt sich der für S angegebene Werth (1) in folgenden:

$$(2) \qquad S = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int\limits_{\mathfrak{q}_1} \frac{df}{f} + \int\limits_{\mathfrak{q}_2} \frac{df}{f} + \int\limits_{\mathfrak{p}_1} \frac{df}{f} + \int\limits_{\mathfrak{p}_2} \frac{df}{f} \right\},$$

wo jedes der vier Integrale um eines der vier Flächenstücke $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ in positiver Richtung herumläuft.

Wir bezeichnen die einzelnen Linienelemente, aus welchen der Rand der gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$ besteht, mit ds, und andererseits die einzelnen Linienelemente, aus welchen die zur Zerstückelung von $\mathfrak{E}$ in Anwendung gebrachten Schnittlinien bestehen, mit $d\sigma$. Die Elemente ds und $d\sigma$ werden alsdann diejenigen Linienelemente sein, aus welchen die Integrationscurven der in (2) auftretenden Integrale zusammengesetzt sind. Und zwar wird jedwedes Element ds immer nur in je einem, jedwedes Element $d\sigma$ hingegen in je zweien jener vier Integrale vorkommen.

Wir betrachten zunächst irgend eines unter den Elementen $d\sigma$, z. B. das Element $\alpha\beta$, welches sich (Fig. 20) auf der Grenze der Flächenstücke $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ befindet. Bei der positiven Umlaufung von $\mathfrak{q}_1$ wird dieses Element in der Richtung $\alpha\beta$, bei der von $\mathfrak{q}_2$ hingegen in der entgegengesetzten Richtung $\beta\alpha$ durchwandert werden. Demnach werden die beiden in (2) auftretenden Integrale

$$\int\limits_{\mathfrak{q}_1} \frac{df}{f} \quad \text{und} \quad \int\limits_{\mathfrak{q}_2} \frac{df}{f}$$

zwei auf $\alpha\beta$ bezügliche Theile besitzen, welche entgegengesetzte Werthe haben, und welche sich daher bei der Addition jener Integrale gegenseitig zerstören. Aehnliches gilt für jedes andere Element $d\sigma$.

Wir betrachten zweitens irgend eines der Elemente ds, z. B. das Element ab, welches sich (Fig. 20) auf dem Rande des Flächenstückes $\mathfrak{q}_1$ befindet. Dieses Element wird, mag man nun jenes Flächenstück $\mathfrak{q}_1$, oder mag man die ganze gegebene Elementarfläche $\mathfrak{E}$ in positiver Richtung umlaufen, immer in ein und derselben Richtung, nämlich immer in der Richtung ab durchwandert werden. Denken wir uns daher das um die ganze Fläche $\mathfrak{E}$ in positiver Richtung herumerstreckte Integral

$$\int\limits_{\mathfrak{E}} \frac{df}{f} \tag{3}$$

gebildet, und vergleichen wir dasselbe mit dem in (2) auftretenden Integral

$$\int\limits_{\mathfrak{q}_1} \frac{df}{f},$$

so werden diese beiden Integrale zwei auf ab bezügliche Theile enthalten, welche unter einander identisch sind. Aehnliches wird natürlich auch für jedes andere unter den Elementen ds gelten.

Sondern wir daher in Gedanken alle in der Summe

$$\int\limits_{\mathfrak{q}_1} \frac{df}{f} + \int\limits_{\mathfrak{q}_2} \frac{df}{f} + \int\limits_{\mathfrak{p}_1} \frac{df}{f} + \int\limits_{\mathfrak{p}_2} \frac{df}{f} \tag{4}$$

enthaltenen einzelnen Integraltheile in zwei Gruppen, nämlich erstens in diejenigen Integraltheile, welche den Elementen $d\sigma$, und zweitens in diejenigen, welche den Elementen ds zugehören; so werden die erstern sich gegenseitig zerstören, und die letztern identisch sein mit denjenigen Integraltheilen, welche in dem Integrale (3) enthalten sind. Daraus folgt, dass der ganze Werth der Summe (4) durch das Integral (3) dargestellt wird. Somit verwandelt sich unsere für S aufgestellte Formel (2) schliesslich in folgende:

$$S = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{\mathfrak{E}} \frac{df}{f}. \tag{5}$$

Dieses Resultat lässt sich natürlich augenblicklich verallgemeinern, nämlich augenblicklich ausdehnen auf den Fall, dass die gegebene Function f innerhalb der Fläche $\mathfrak{E}$ irgend welche Anzahl von Nullpuncten, und ebenso auch irgend welche Anzahl von Polen besitzt. Wir gelangen demnach zu folgendem Satz:

Ist eine Function $f = f(x + iy)$ auf einer beliebig gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$ überall eindeutig und mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig, so ist das in positiver Richtung um den Rand der Fläche herumerstreckte Integral:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{E}} \frac{df}{f}$$

jederzeit gleich der Summe sämmtlicher Ordnungszahlen, welche die Function auf jener Fläche besitzt.

Neunter Abschnitt. Ueber den Werth eines gewissen Rand-Integrales.

Ehe wir die Betrachtung einer Function innerhalb des Spielraumes einer Elementarfläche verlassen, müssen wir schliesslich noch einen Satz ableiten, der an und für sich kein besonderes Interesse darbietet, der aber mit Rücksicht auf unsere späteren Untersuchungen von Wichtigkeit ist.

Es sei $f = f(x + iy)$ eine Function, welche auf einer gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$ allenthalben eindeutig und stetig ist; zugleich mag der Werth dieser Function, wie er sich bei Sonderung des Reellen und Imaginären herausstellt, mit $U + iV$ bezeichnet werden, wo U und V irgend welche von x und y abhängende Functionen sind. Ist nun

$$f(x + iy) = U + iV, \tag{1}$$

so wird gleichzeitig, wie sich durch Differentiation nach x und nach y ergiebt,

$$f'(x + iy) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\,\frac{\partial V}{\partial x}, \tag{2}$$

$$i\,.\,f'(x + iy) = \frac{\partial U}{\partial y} + i\,\frac{\partial V}{\partial y} \tag{3}$$

sein.

Bleibt eine von $x+iy$ abhängende Function auf einer gegebenen Elementarfläche allenthalben eindeutig und stetig, so gilt, wie wir früher (S. 91) gefunden haben, Gleiches auch von ihren Ableitungen. Demnach wird nicht allein $f(x+iy)$, sondern ebenso gut auch $f'(x+iy)$ auf der hier betrachteten Fläche $\mathfrak{C}$ überall eindeutig und stetig sein. Hieraus aber folgt mit Hinblick auf die Formeln (1), (2), (3), dass Gleiches auch von den sechs Functionen U, V, $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$ gelten muss. Wir können demnach auf die Function U, und ebenso auch auf V unmittelbar einen früher (S. 62) gefundenen Satz in Anwendung bringen. Thun wir dies mit Bezug auf U, so erhalten wir folgende Formel:

$$(4)\qquad \iint\left\{U\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy = -\int U\frac{dU}{dn}\,ds,$$

wo die Integration links über die Fläche, die rechts hingegen über den Rand von $\mathfrak{C}$ hinerstreckt ist. Unter ds ist nämlich irgend ein zum Rande von $\mathfrak{C}$ gehöriges Linienelement, und unter n die auf ds errichtete innere Normale zu verstehen.

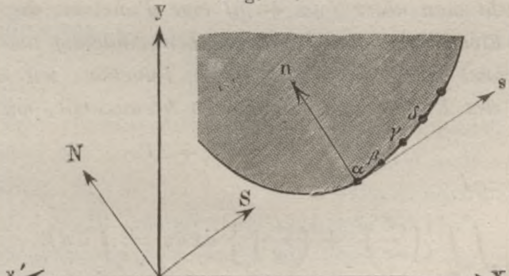
Nun ist (zufolge des Satzes S. 78)

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0,$$

und ferner, wenn wir (Fig. 21) die positive Randrichtung der Fläche $\mathfrak{C}$ mit s bezeichnen:

$$(6)\qquad \frac{dU}{dn} = -\frac{dV}{ds}.$$

Fig. 21.



Betrachten wir das in der positiven Richtung des Randes fortlaufende Linienelement ds, und bezeichnen wir den Anfangspunct dieses Elementes mit α, seinen Endpunct mit β, und die Werthe, welche V in diesen beiden Puncten besitzt, mit V_α und V_β, so verwandelt sich die letztgenannte Formel (6) in:

$$\frac{dU}{dn} = -\frac{V_\beta - V_\alpha}{ds}. \tag{7}$$

Und nunmehr nimmt die in (4) aufgestellte Gleichung durch Einsetzung der Werthe (5) und (7) folgende Gestalt an:

$$\iint\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy = \int U\,(V_\beta - V_\alpha). \tag{8}$$

Das hier auf der rechten Seite stehende Integral $\int U\,(V_\beta - V_\alpha)$ stellt, falls wir die Randpuncte der Fläche $\mathfrak{E}$, wie sie bei einer positiven Umlaufung dieser Fläche auf einander folgen, mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ und die zugehörigen Werthe von U und V mit $U_\alpha, U_\beta, U_\gamma, U_\delta, \ldots$ und $V_\alpha, V_\beta, V_\gamma, V_\delta \ldots$ bezeichnen, folgende Reihe dar:

$$U_\alpha\,(V_\beta - V_\alpha) + U_\beta\,(V_\gamma - V_\beta) + U_\gamma\,(V_\delta - V_\gamma) + \ldots.$$

Diese Reihe aber ist nichts anderes, als das durch positive Umlaufung der Fläche $\mathfrak{E}$ entstehende Integral

$$\int_{\mathfrak{E}} U\,dV.$$

Somit erhalten wir schliesslich:

$$\iint\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy = \int_{\mathfrak{E}} U\,dV, \tag{9}$$

also folgenden Satz:

Versteht man unter $f(x + iy)$ eine Function, die auf einer gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$ allenthalben eindeutig und stetig ist, und bezeichnet man den Werth dieser Function, wie er sich bei Sonderung des Reellen und Imaginären herausstellt, mit

$$f(x + iy) = U + iV,$$

so ist jederzeit:

$$\iint_{\mathfrak{E}}\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy = \int_{\mathfrak{E}} U\,dV,$$

wo die Integration links über die Fläche, und die Integration rechts in positiver Richtung über den Rand von $\mathfrak{E}$ hinerstreckt ist.

Aus diesem Satz folgt sofort, dass der Werth des Integrals

$$\int_{\mathfrak{E}} U\,dV$$

niemals negativ sein kann, dass derselbe nämlich jederzeit entweder positiv oder Null ist.

Wir wollen annehmen, es trete der letztere Fall ein, es wäre also

$$\int_{\mathfrak{E}} U\,dV = 0, \tag{1}$$

und es wäre demgemäss auch

$$\iint_{\mathfrak{E}} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\,dy = 0. \tag{2}$$

Dieses letztere Integral ist, weil die Werthe von $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ reell sind, eine aus unendlich vielen, und zwar aus lauter positiven Gliedern zusammengesetzte Summe, und kann daher nur dann verschwinden, wenn alle diese Glieder einzeln genommen Null sind. Somit ergiebt sich aus der Gleichung (2), dass

$$\frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial U}{\partial y} \tag{3}$$

auf der Fläche $\mathfrak{E}$ allenthalben gleich Null sein müssen. Und hieraus folgt, weil nach einem früher (S. 78) gefundenen Satz

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y},$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

ist, dass die Grössen

$$\frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial y} \tag{4}$$

auf der Fläche $\mathfrak{E}$ ebenfalls überall Null sein müssen. Aus dem Verschwinden der Grössen (3) und (4) ergiebt sich sodann aber augenblicklich, dass U und V auf der Fläche $\mathfrak{E}$ allenthalben constant sind. Somit gelangen wir zu folgendem Satz:

Ist die Function $f(x+iy)$ auf einer gegebenen Elementarfläche $\mathfrak{E}$ allenthalben eindeutig und stetig, und bezeichnet man den Werth dieser Function, wie er sich bei Sonderung des Reellen und Imaginären ergiebt, mit

$$f(x+iy) = U + iV,$$

so ist das in positiver Richtung um den Rand von $\mathfrak{E}$ herumerstreckte Integral

$$\int_{\mathfrak{E}} U\,dV$$

jederzeit positiv oder Null.

Der letztere Fall, dass nämlich dieses Integral gleich Null ist, kann nur dann eintreten, wenn der Werth von $f(x + iy)$ auf der Fläche $\mathfrak{E}$ allenthalben constant ist.

Vierte Vorlesung.

Functionen mit einem complexen Argument in ihrer Ausbreitung auf der Kugelfläche.

Unsere bisherigen Untersuchungen bezogen sich beständig nur auf einen Theil der Werthe, welche eine Function $f(x + iy)$ besitzt, nämlich immer nur auf solche Werthe, welche innerhalb irgend welcher Elementarfläche ausgebreitet werden können. Um eine Function $f(x + iy)$ in ihrem ganzen Umfange zu untersuchen, werden wir eine ebene Fläche in Anwendung bringen müssen, welche sich nach allen Seiten hin ins Unendliche erstreckt; auf dieser werden sich dann sämmtliche Werthe der Function ausbreiten lassen.

Eine solche nach allen Seiten hin ins Unendliche sich ausdehnende Ebene lässt sich nicht in elementare Flächenstücke zerlegen; denn ein elementares Flächenstück befindet sich (zufolge der von uns gegebenen Definition S. 53) stets mit allen seinen Puncten in der Endlichkeit. Demnach können wir die bis jetzt erhaltenen Sätze, welche sich durchweg immer nur auf elementare Flächenstücke bezogen, auch nicht direct in Anwendung bringen, um etwa Schritt für Schritt jene ganze unendliche Ebene zu durchmustern; wir würden mit Hülfe jener Sätze niemals in die unendlich fernen Theile der Ebene hineindringen können.

Wir werden nun sogleich eine Methode kennen lernen, durch welche dieser Uebelstand beseitigt wird, eine Methode, durch welche es möglich wird, sämmtliche Werthe einer Function nach Belieben entweder auf einer Kugelfläche von endlichem Radius, oder auf zwei von einander räumlich getrennten ebenen Flächenstücken von ebenfalls endlichen Dimensionen auszubrei-

9*

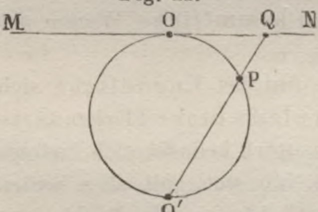
ten. Ersteres wird den Vortheil einer grösseren Uebersichtlichkeit, letzteres den Vortheil für sich haben, dass die bereits gefundenen Sätze dann unmittelbar verwendbar sind.

Erster Abschnitt. An Stelle der Horizontalebene, welche zur räumlichen Ausbreitung einer von $x + iy$ abhängenden Function bisher gedient hat, wird eine mit dem Durchmesser 1 beschriebene Kugelfläche eingeführt. Ueber die Aenderungen, welchen die Function hinsichtlich ihrer Eindeutigkeit und Stetigkeit hierbei ausgesetzt ist.

Wir werden im Folgenden häufig mit einer Kugelfläche, und zwar stets mit einer Kugelfläche vom Durchmesser **Eins** zu thun haben. Um die einzelnen Puncte einer solchen Kugelfläche ihrer Lage nach zu bestimmen, werden wir nicht die gewöhnliche, auf der Einführung von Meridian- und Parallelkreisen beruhende Methode, sondern eine gewisse andere Methode in Anwendung bringen.

Es sei (Fig. 22) O der höchstgelegene, O' der tiefstgelegene Punct der gegebenen Kugelfläche, ferner sei MN diejenige Horizontalebene, von welcher die Kugel im Puncte O berührt wird, und endlich seien OA und OB zwei in dieser Ebene befindliche, auf einander senkrechte Achsen, deren Ausgangspunct in O liegt. Die Lage irgend eines Punctes P auf der Kugel wird offenbar vollständig bestimmt sein, sobald die Richtung derjenigen geraden Linie bekannt ist, welche von O' nach P hinläuft; die Richtung dieser Linie wird ihrerseits aber wiederum völlig bestimmt sein, sobald die Lage desjenigen Punctes Q bekannt ist, in welchem die Horizontalebene MN von der Linie getroffen wird. Demnach wird der auf der Kugelfläche betrachtete Punct P seiner Lage nach vollständig bestimmt sein, sobald die rechtwinkligen Coordinaten x, y bekannt sind, welche der eben genannte Punct Q in Bezug auf das in der Horizontalebene festgesetzte Achsensystem OA, OB besitzt. Und es können demgemäss jene rechtwinkligen Coordinaten x, y

Fig. 22.



geradezu als **Kugelcoordinaten**, nämlich geradezu als die Coordinaten des auf der Kugelfläche liegenden Punctes P angesehen werden. Solches soll nun in Zukunft in der That geschehen. Zwei Puncte, welche auf der Kugelfläche und auf der Horizontalebene so zu einander liegen, wie P und Q, werden alsdann ein und dieselben Coordinaten x, y, mithin auch ein und dasselbe Binom $x + iy$ besitzen. Demgemäss können zwei derartige Puncte in Zukunft gleichnamige Puncte genannt werden; und dann können ferner zwei auf der Kugelfläche und auf der Horizontalebene befindliche Linien- oder Flächenstücke gleichnamig heissen, wenn die Puncte des einen gleichnamig mit denen des andern sind.

Denken wir uns einen Rotationskegel, dessen Scheitelpunct in O' liegt, und dessen Achse mit dem Kugeldurchmesser $O'O$ zusammenfällt, so werden die beiden Kreislinien, in welchen die Kugelfläche und die Horizontalebene von dem Mantel dieses Kegels durchschnitten werden, gleichnamige Linien sein. Ist die Oeffnung des Kegels, was ihre geringere oder grössere Weite anbelangt, der Art, dass der Kreis auf der Horizontalebene den Radius 1 besitzt, so wird der gleichnamige Kreis auf der Kugelfläche durch den Aequator, d. h. durch den grössten Horizontalkreis der Kugelfläche dargestellt sein. Lässt man ferner die Oeffnung des Kegels sich so weit verkleinern, dass der Kreis auf der Horizontalebene unendlich klein wird, also mit dem Puncte O zusammenfällt, so wird der gleichnamige Kreis auf der Kugelfläche ebenfalls mit O zusammenfallen. Lässt man ferner die Oeffnung jenes Rotationskegels sich so weit vergrössern, dass der Kreis auf der Horizontalebene unendlich gross ausfällt, so wird der gleichnamige Kreis auf der Kugelfläche unendlich klein, nämlich identisch mit dem Puncte O' werden.

Sind auf der Horizontalebene und auf der Kugelfläche irgend zwei unter einander gleichnamige Kreislinien gezogen, und bezeichnet man den Radius der erstern mit r, so werden die Coordinaten für irgend welchen Punct der einen oder andern Linie durch

$$\begin{cases} x = r \cos t, \\ y = r \sin t \end{cases}$$

dargestellt sein, vorausgesetzt, dass man unter t einen von 0 bis

2π hin veränderlichen Winkel versteht. Durch das Binom

$$x + iy = r \,.\, e^{it}$$

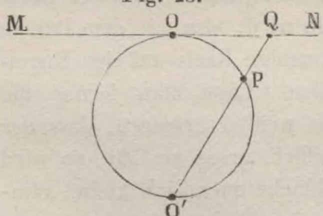
wird also, je nachdem gerade von der Horizontalebene, oder von der Kugelfläche die Rede ist, entweder der auf jener Ebene mit dem Radius r construirte Kreis, oder der gleichnamige Kreis auf der Kugelfläche bestimmt sein. Nimmt man in der Formel $x + iy = r \,.\, e^{it}$ für r nach einander die Werthe 0, 1, ∞, so verwandelt sich dieselbe der Reihe nach in:

$$x + iy = 0,$$
$$x + iy = e^{it},$$
$$x + iy = \infty.$$

Und von diesen Formeln wird, was ihre Bedeutung auf der **Kugelfläche** anbelangt, die erste den Punct O, die zweite den Aequator der Kugelfläche, und die dritte den Punct O' darstellen.

Unsere Methode, um sämmtliche Werthe einer beliebig gegebenen Function $f(x + iy)$ auf der Kugelfläche auszubreiten, ist nun folgende: Wir denken uns zunächst die Werthe von $f(x + iy)$ — nach der gewöhnlichen Methode — auf einer Ebene, und zwar auf der mit den Achsen OA, OB versehenen Horizontalebene MN (Fig. 23) ausgebreitet. Sodann verpflanzen wir diese Werthe von der Horizontalebene nach der Kugelfläche hin, und zwar jeden Werth von seinem ursprünglichen Punct auf jener Ebene nach dem gleichnamigen Punct auf der Kugelfläche. Wir lassen also, um dasselbe mit etwas andern Worten zu sagen, die ursprünglich auf der Horizontalebene ausgebreiteten Werthe auf geradlinigen, gegen den Punct O' convergirenden Bahnen nach der Kugelfläche hinübergleiten. Ist solches geschehen, so wird dadurch die ursprüngliche Ausbreitung der gegebenen Function auf der Horizontalebene umgewandelt sein in eine Ausbreitung derselben auf der Kugelfläche.

Fig. 23.



Um uns über diese neue Methode der räumlichen Ausbreitung einer Function näher zu orientiren, betrachten wir zunächst einige Beispiele.

Die Function

$$f = \frac{1}{(x + iy)^2}$$

ist, wenn wir sie uns auf der Horizontalebene ausgebreitet denken, auf dieser Ebene offenbar überall eindeutig; denn jedem Puncte dieser Ebene gehört ein bestimmter Werth von $x + iy$ zu, und einem bestimmten Werthe von $x + iy$ entspricht immer nur ein Werth von f.

Führen wir auf der Horizontalebene ein Polarcoordinatensystem ein, bezeichnen wir nämlich die Entfernung eines beliebigen Punctes vom Anfangspunct O mit r, und den Winkel, unter welchem diese Entfernung gegen die x Achse geneigt ist, mit t, so ergeben sich für die Coordinaten x, y jenes Punctes folgende Werthe:

$$x = r \,.\, \cos t,$$
$$y = r \,.\, \sin t,$$

mithin:

$$x + iy = r \,.\, (\cos t + i \,.\, \sin t).$$

Für unsere Function f erhalten wir daher folgenden Ausdruck:

$$f = \frac{\cos 2t - i \,.\, \sin 2t}{r^2}.$$

Hieraus können wir für jedweden Punct r, t der Horizontalebene den zugehörigen Werth der Function entnehmen. Für diejenigen Puncte, welche sich auf einer unendlich fernen um O beschriebenen Kreislinie befinden, wird $r = \infty$; mithin

$$f = \frac{\cos 2t - i \,.\, \sin 2t}{\infty} = 0.$$

Unsere Function hat also auf jener unendlich fernen Kreislinie überall den Werth 0.

Projiciren wir daher die Werthe der Function von der Horizontalebene auf die Kugelfläche, so wird auf den tiefsten Punct O' dieser Fläche von allen Seiten her ein und derselbe Werth, nämlich der Werth 0 fallen. Es wird also die Function bei ihrer Ausbreitung auf der Kugelfläche im Puncte O' eindeutig sein. Dass solches in den übrigen Puncten der Kugelfläche ebenfalls stattfindet, versteht sich von selber.*)

---

*) Auf den Punct P z. B. (Fig. 23) kann nur ein Werth fallen, nämlich nur derjenige Werth, welcher ursprünglich in Q vorhanden war.

Gleiches stellt sich heraus, wenn wir die Function

$$f = (x + iy)^5$$

untersuchen. Diese verwandelt sich durch Einführung der Polarcoordinaten in

$$f = r^5 . (\cos 5t + i . \sin 5t);$$

sie wird demnach, wenn wir sie uns auf der Horizontalebene ausgebreitet denken, auf dem um O beschriebenen, unendlich fernen Kreise überall ein und denselben Werth, nämlich den Werth ∞ besitzen.*) Verpflanzen wir daher die Werthe dieser Function von der Horizontalebene nach der Kugelfläche, so wird auf den Punct O' wiederum von allen Seiten her ein und derselbe Werth fallen.

Ebenso, wie bei diesen beiden Functionen $\frac{1}{(x+iy)^2}$ und $(x+iy)^5$ wird es sich aber überhaupt auch mit jeder beliebigen rationalen Function von $x + iy$ verhalten. Jede solche Function besitzt die Form

$$f = \frac{A' + B'(x+iy) + C'(x+iy)^2 + \ldots + P'(x+iy)^n}{A + B\,(x+iy) + C\,(x+iy)^2 + \ldots + P\,(x+iy)^m},$$

wo $A, B, C, \ldots P$ und $A', B', C', \ldots P'$ irgend welche Constanten vorstellen. Sind x, y die rechtwinkligen und r, t die Polarcoordinaten irgend eines Punctes auf der Horizontalebene, so ist

$$x + iy = r(\cos t + i . \sin t).$$

Für diejenigen Puncte, welche auf der um O beschriebenen, unendlich fernen Kreislinie liegen, wird $r = \infty$, mithin auch

$$x + iy = \infty.$$

Für $x + iy = \infty$ verwandelt sich aber der Werth unserer Function f, je nachdem m grösser, gleich oder kleiner als n ist, in 0, oder in $\frac{P'}{P}$, oder in ∞. Verpflanzen wir daher die Werthe der

---

*) Es sollen nämlich Grössen, deren reciproce Werthe 0 sind, mit ∞ bezeichnet, und stets als Grössen betrachtet werden, die unter einander identisch sind. Demnach wird der Werth eines Binoms

$$A + iB,$$

mag nun A, oper mag B, oder mögen gleichzeitig A und B unendlich sein, immer als ein und derselbe angesehen werden.

Function f von der Horizontalebene nach der Kugelfläche hin, so wird jedes Mal auf den Punct O' von allen Seiten her ein und derselbe Werth fallen; dieser ist, je nach Beschaffenheit der Function, entweder gleich 0, oder gleich $\frac{P'}{P}$, oder gleich ∞.

Eine rationale Function von $x + iy$ ist also nicht nur bei ihrer Ausbreitung auf der Horizontalebene, sondern ebenso gut auch bei ihrer Ausbreitung auf der Kugelfläche allenthalben eindeutig.

Was wir hier bei dieser besonderen Classe von Functionen sehen, gilt nun aber keineswegs allgemein. So ist z. B. die Function

$$\sin(x + iy) = \sin x \,.\, \frac{e^y + e^{-y}}{2} + i \,.\, \cos x \,.\, \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

auf der Horizontalebene überall eindeutig. Untersuchen wir aber diejenigen Werthe, welche diese Function auf der um O beschriebenen, unendlich fernen Kreislinie besitzt, so erhalten wir z. B. für diejenigen beiden Puncte, welche auf jener Kreislinie in der Verlängerung der x Achse liegen, einen ganz andern Werth als für diejenigen beiden Puncte jener Kreislinie, welche sich auf der Verlängerung der y Achse befinden; für die ersten beiden Puncte nämlich einen zwischen -1 und $+1$ liegenden, im Uebrigen ganz unbestimmten Werth, für die letzten beiden Puncte hingegen einen unendlich grossen Werth.

Verpflanzen wir also die Werthe der Function $\sin(x + iy)$ von der Horizontalebene nach der Kugelfläche hin, so werden auf den tiefsten Punct O' dieser Fläche von verschiedenen Seiten her sehr verschiedene Werthe fallen. Es wird also die Function bei ihrer Ausbreitung auf der Kugelfläche in jenem Punct O' nicht ein-, sondern vieldeutig sein. Allerdings wird das nur vom Puncte O' allein gelten; in allen übrigen Puncten der Kugelfläche wird die Function, wie man sofort übersieht, eindeutig sein. Im Allgemeinen ergiebt sich aus unserer Untersuchung folgendes Resultat:

Eine Function $f(x + iy)$, welche auf der Horizontalebene allenthalben eindeutig ist, wird, falls man ihre Werthe nach der Kugelfläche hin verpflanzt, entweder auf dieser Fläche überall *eindeutig sein*, *oder daselbst eindeutig sein mit alleiniger Ausnahme des Punctes* $x + iy = \infty$*).

Wir wollen nun ferner untersuchen, wie es sich bei der Verpflanzung einer Function von der Horizontalebene nach der Kugelfläche mit der Stetigkeit oder Unstetigkeit derselben verhält.

Wir betrachten zunächst die beiden Functionen:

$$f = \frac{1}{(x+iy)^5},$$

und:

$$\varphi = (x + iy)^5.$$

Die erstere, nämlich f, ist auf der Horizontalebene mit Ausnahme des Punctes O überall stetig, und besitzt auf der um O beschriebenen, unendlich fernen Kreislinie den Werth Null. Verpflanzt man diese Function nach der Kugelfläche hin, so wird sie, wie sich augenblicklich ergiebt, in dem Puncte O', und überhaupt auf der ganzen Kugelfläche, mit alleiniger Ausnahme des Punctes O, überall stetig sein.

Andererseits überzeugt man sich leicht davon, dass die Function φ bei ihrer Ausbreitung auf der Kugelfläche mit alleiniger Ausnahme des Punctes O' überall stetig ist.

Von den beiden Functionen φ und f oder, was dasselbe ist, von den beiden Functionen φ und $\frac{1}{\varphi}$ besitzt also jede auf der Kugelfläche nur einen einzigen Unstetigkeitspunct, der von φ liegt in O', und der von $\frac{1}{\varphi}$ in O. Die Function φ ist demnach — können wir sagen — im Puncte O' unstetig, jedoch der Art unstetig, dass wenigstens ihr reciprocer Werth, nämlich der Werth von $\frac{1}{\varphi}$ daselbst stetig bleibt. Zufolge der früher (S. 94) festgesetzten Definition wird daher jener Unstetigkeitspunct, welchen die Function φ in O' besitzt, ein Pol zu nennen sein.

In gleicher Weise ergiebt sich offenbar, dass der in O vorhandene Unstetigkeitspunct von f ebenfalls ein Pol ist.

---

*) Unter dem Punct $x + iy = \infty$ ist derjenige Punct der Kugelfläche zu verstehen, welcher am tiefsten liegt (also in Fig. 23 der Punct O'). Die Bezeichnung dieses Punctes durch $x + iy = \infty$ findet ihre Rechtfertigung durch eine früher (S. 134) angestellte Betrachtung, und wird im Folgenden fortwährend in Anwendung gebracht werden.

Somit sehen wir also, dass die Function φ auf der Kugelfläche mit Ausnahme eines einzigen in O' liegenden **Poles** überall stetig ist, und dass andererseits die Function f auf jener Fläche mit Ausnahme eines einzigen in O befindlichen **Poles** überall stetig bleibt.

Zu ganz ähnlichen Resultaten werden wir offenbar gelangen, wenn wir irgend welche andere Function untersuchen, die von $x + iy$ auf rationale Weise abhängt. Betrachten wir z. B. die Function:

$$f = \frac{(x + iy - c)\,(x + iy - c')}{x + iy - \gamma}$$

und betrachten wir gleichzeitig den reciprocen Werth dieser Function:

$$\frac{1}{f} = \frac{x + iy - \gamma}{(x + iy - c)\,(x + iy - c')},$$

so ergiebt sich, falls wir die durch $x + iy = c$, $x + iy = c'$, $x + iy = \gamma$ auf der Kugelfläche bestimmten Puncte kurzweg mit c, c', γ bezeichnen, dass die Function f auf der Kugelfläche mit Ausnahme der Puncte O' und γ überall stetig ist, und dass andererseits die Function $\frac{1}{f}$ auf jener Fläche überall stetig ist mit Ausnahme der Puncte c und c'. Wo also f unstetig ist, bleibt $\frac{1}{f}$ stetig. Daraus folgt, dass die Unstetigkeitspuncte von f Pole sind.

Wir werden demnach ganz allgemein folgenden Satz hinstellen können:

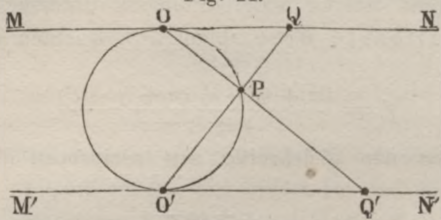
Eine rationale Function von $x + iy$ wird jederzeit, bei ihrer Ausbreitung auf der Kugelfläche, daselbst überall eindeutig, und mit Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig sein.

Zweiter Abschnitt. Einführung der Antipodenebene. Unter den verschiedenen Arten der räumlichen Ausbreitung einer Function wird die Ausbreitung auf der Kugelfläche in den Vordergrund gestellt; die Horizontal- und Antipodenebene sind nämlich als zwei durch Umformung entstehende — übrigens gleichberechtigte — Nebenformen der Kugelfläche zu betrachten.

Durch die Ausbreitung der Werthe einer Function auf der Kugelfläche erreichen wir offenbar den Vortheil, dass wir sämmtliche Werthe jener Function in der Endlichkeit vor uns haben. Hingegen tritt der Nachtheil ein, dass wir dann als Träger dieser Functionswerthe nicht mehr eine e b e n e, sondern eine krumme Fläche haben.

Um diesen Nachtheil zu beseitigen, construiren wir neben der schon vorhandenen Horizontalebene MN (Fig. 24), von welcher

Fig. 24.



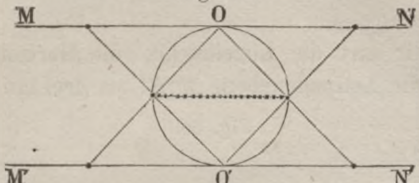
die Kugelfläche im Puncte O berührt wird, noch eine zweite Horizontalebene $M'N'$, welche mit jener Fläche im Puncte O' in Berührung steht. Zur leichteren Unterscheidung mag die Ebene MN nach wie vor die H o r i z o n t a l e b e n e, die neue Ebene $M'N'$ hingegen die A n t i p o d e n e b e n e genannt werden.

Wir könnten nun den gerügten Uebelstand augenblicklich dadurch beseitigen, dass wir die auf der Kugelfläche ausgebreiteten Functionswerthe auf geradlinigen, vom Puncte O auslaufenden Bahnen nach jener Antipodenebene hinübergleiten lassen. Wollten wir solches thun, so würden wir alsdann allerdings sämmtliche Werthe der betrachteten Function auf einer e b e n e n Fläche, aber auf einer Fläche vor uns haben, welche sich ins U n e n d l i c h e hinerstreckt. Wir würden also dann d e n i n R e d e s t e h e n d e n Uebelstand allerdings beseitigt haben, dafür aber würde d e r j e n i g e Uebelstand, der zu Anfang mit der Ausbreitung der Function auf der Horizontalebene verbunden war, wiederum zum Vorschein gekommen sein.

Um gleichzeitig b e i d e Uebelstände, sowohl den, welchen die K r u m m h e i t der Fläche, als auch den, welchen das Sichhinerstrecken der Fläche ins U n e n d l i c h e mit sich bringt, zu beseitigen, verfahren wir in folgender Weise:

Wir denken uns die Werthe der gerade betrachteten Function auf der Kugelfläche ausgebreitet. Diese Kugelfläche zerlegen wir durch ihren Aequator in zwei Theile, in die obere und in die untere Halbkugel. Und nunmehr projiciren wir alle auf der oberen Halbkugel befindlichen Functionswerthe von dem Puncte O' (Fig. 25) auf die Horizontalebene, andererseits alle auf der

Fig. 25.



unteren Halbkugel vorhandenen Werthe von O aus auf die Antipodenebene.

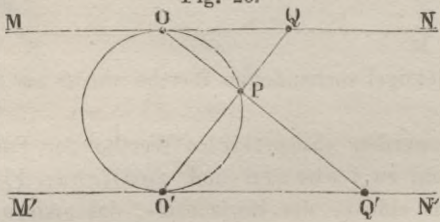
Alsdann werden sämmtliche Werthe der Function ausgebreitet sein auf zwei ebenen und endlichen Flächenstücken, von denen das eine in der Horizontal-, das andere in der Antipodenebene liegt. Diese Flächenstücke sind Kreisflächen, sind beide von gleicher Grösse, und haben ihre Mittelpuncte in O und O'. Diejenigen Functionswerthe, welche bei der Kugel auf dem Aequator liegen, kommen bei diesen beiden Kreisflächen doppelt vor. Es finden sich nämlich dieselben wieder sowohl auf dem Rande der einen, als auch auf dem der andern Kreisfläche. Es sind demnach die auf diesen beiden Rändern befindlichen Werthe unter einander identisch.

Statt durch den Aequator, können wir übrigens die Kugelfläche auch durch irgend welche andere — durch eine beliebig unregelmässige — Curve in zwei Theile zerlegen, von welchen der eine den Punct O, der andere den Punct O' in sich enthält. Projiciren wir nämlich alsdann die Functionswerthe des ersteren Theiles von O' aus auf die Horizontal-, und die des letzteren von O aus auf die Antipodenebene, so werden wir dadurch wiederum eine Ausbreitung sämmtlicher Functionswerthe auf zwei ebenen und endlichen Flächenstücken erhalten. Nur werden diese Flächenstücke jetzt nicht kreisförmig, sondern von irgend welcher unregelmässigen Gestalt sein. Wiederum aber werden die auf dem Rande des einen Flächenstückes liegenden Werthe identisch mit denen sein, welche sich auf dem Rande des andern befinden.

Durch Anwendung dieser Methode gelangen wir zu einer Ausbreitung sämmtlicher Werthe der Function auf zwei von einander getrennten elementaren Flächenstücken; und wir sehen also, dass die früher gefundenen Sätze anwendbar sein werden zur Untersuchung sämmtlicher Werthe, welche die Function überhaupt besitzt, d. h. zur Untersuchung einer Function in ihrem ganzen Umfange.

Denken wir uns die Kugelfläche, die Horizontalebene MN (Fig. 26) und die Antipodenebene $M'N'$ als drei materielle Flä-

Fig. 26.

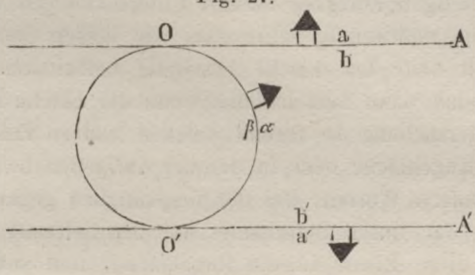


chen, von welchen jede nach Belieben gebogen, gedehnt und zusammengezogen werden kann, so wird es offenbar möglich sein, die Horizontalebene durch geeignete Biegungen und Zusammenziehungen in die Kugelfläche umzuformen, und sodann die Kugelfläche ihrerseits durch geeignete Biegungen und Dehnungen umzuformen in die Antipodenebene. Wir wollen uns diese beiden auf einander folgenden Umformungen in der Art bewerkstelligt denken, dass bei der ersteren die einzelnen Puncte der Horizontalebene auf geradlinigen nach O' hingerichteten Bahnen fortgleiten, und dass andererseits bei der zweiten Umformung die zur Kugelfläche gehörigen Puncte auf geradlinigen, von O ausstrahlenden Bahnen sich fortbewegen; also der Art bewerkstelligt denken, dass je drei zur Horizontalebene, zur Kugelfläche und zur Antipodenebene gehörige Puncte, welche (Fig. 26) so wie Q, P, Q' zu einander liegen, nichts Anderes als drei verschiedene Lagen ein und desselben Punctes vorstellen.

Bei dieser Vorstellungsart erscheinen die Horizontalebene, die Kugelfläche und die Antipodenebene als unter einander identisch, nämlich als verschiedene Zustände ein und derselben, in ihrer Gestalt veränderlichen Fläche. Denken wir uns ferner die gerade betrachtete Function zu Anfang auf der Horizontalebene ausgebreitet, und denken wir uns die Werthe dieser Function mit den einzelnen Puncten der Horizontalebene **unlöslich** verbunden, so wird sich diese Ausbreitung der Function auf der Horizontalebene, sobald wir die Horizontalebene in der eben festgesetzten Art und Weise zuerst in die Form der Kugelfläche und sodann in die Form der Antipodenebene bringen, der Reihe nach zuerst verwandeln in die Ausbreitung der Function auf der Kugelfläche, und sodann in die Ausbreitung derselben auf der Antipodenebene.

Wir können bei der Horizontalebene zwei Seiten unterscheiden, nämlich die der Kugelfläche abgewendete, und die derselben zugewendete; die erstere mag (Fig. 27) mit a, die letztere

Fig. 27.



mit b bezeichnet werden. Und ebenso mag auch bei der Antipodenebene die der Kugelfläche abgewendete Seite mit a', die ihr zugewendete mit b' bezeichnet werden. Endlich mag bei der Kugelfläche selber die Aussenseite α, und die Innenseite β heissen.

Wenn wir nun wiederum wie vorhin die Horizontalebene, die Kugelfläche und die Antipodenebene als unter einander identisch, nämlich als drei verschiedene Zustände ein und derselben Fläche ansehen, so ergiebt sich, falls wir in Gedanken den ersten Zustand in den zweiten, und diesen wieder in den dritten übergehen lassen, sofort, dass die Seiten a, α, a' unter einander identisch, und dass andererseits die Seiten b, β, b' ebenfalls unter einander identisch sind. Wollen wir also, was die Horizontalebene anbelangt, bei unserer bisherigen Ausdrucksweise bleiben, nämlich a die obere, und b die untere Seite dieser Ebene nennen, so müssen wir, falls wir uns keiner Discontinuität schuldig machen wollen, bei der Kugelfläche α als die obere, β als die untere, und bei der Antipodenebene a' als die obere, und b' als die untere Seite bezeichnen.

Bei der Antipodenebene wird demnach — ebenso wie bei der Horizontalebene — unter der oberen Seite die von der Kugelfläche abgewendete zu verstehen sein; und andererseits wird bei der

Kugelfläche selber unter der oberen Seite die Aussenseite zu verstehen sein.

Sind die Werthe irgend welcher Function auf einer gegebenen — ebenen oder krummen — Fläche ausgebreitet, so ist es für die Beurtheilung dieser Werthe durchaus nicht gleichgültig, ob wir dabei unsern Standpunct auf der einen, oder auf der andern Seite der Fläche nehmen. Nun haben wir früher, wo wir es immer nur mit der Horizontalebene zu thun hatten, unsern Standpunct stets auf der oberen Seite dieser Ebene genommen. Für einen stetigen Fortgang unserer Untersuchungen wird es daher durchaus nothwendig sein, dass wir diesen Standpunct auf der oberen Seite der Fläche beständig beibehalten, dass wir denselben auch dann beibehalten, wenn die Fläche im Verlaufe unserer Untersuchung in irgend welchen andern Zustand, z. B. in den der Kugelfläche oder in den der Antipodenebene übergeht. Oder mit andern Worten: Bei der ursprünglich gegebenen Horizontalebene war unser Standpunct auf der Seite a; demgemäss wird, falls diese Ebene in die Kugelfläche, und sodann in die Antipodenebene übergeht, unser Standpunct nach einander zuerst auf der Seite α, und sodann auf der Seite a' sein. Wir gelangen somit zu folgendem Ausspruch:

Nehmen wir für den Augenblick an, die Kugelfläche (Fig. 27) wäre ein Bild unserer Erdkugel, und unser Wohnort auf der Erdkugel wäre in O. Dann werden wir selber denjenigen Standpunct haben, welcher zur Beurtheilung der auf der Horizontalebene ausgebreiteten Functionswerthe geboten ist. Und gleichzeitig werden unsere bei O' wohnenden Antipoden einen Standpunct haben, wie er erforderlich ist zur Beurtheilung der auf der Antipodenebene ausgebreiteten Werthe.

Solches muss für die Zukunft unveränderlich fest gehalten werden, und hierin liegt auch der Grund, weshalb die eine Ebene von uns mit dem Namen Antipodenebene bezeichnet worden ist.

Es wird nun erforderlich sein, in der Antipodenebene, ebenso wie in der Horizontalebene, ein rechtwinkliges Achsensystem festzusetzen.

Die beiden x Achsen können wir ganz beliebig wählen. Der Einfachheit wegen wollen wir dieselben parallel und von gleicher Richtung annehmen. Es seien (Fig. 27) OA und $O'A'$

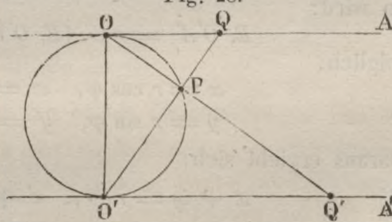
diejenigen beiden Linien, in welchen die Horizontal- und die Antipodenebene von der Ebene des Papieres, d. h. von einer durch OO' gehenden Verticalebene geschnitten werden; und es mag OA zur einen, $O'A'$ zur anderen x Achse genommen werden.

Was nun aber zweitens die Wahl der beiden y Achsen anbelangt, so haben wir hier nicht mehr freie Hand. Zufolge einer früher (S. 72) getroffenen Festsetzung muss nämlich die y Achse zur x Achse jederzeit so liegen, dass der auf der oberen Seite der Fläche im Anfangspunct Stehende und in der Richtung der x Achse Fortsehende die y Achse zur Linken hat. Bezeichnen wir also die beiden y Achsen mit OB und $O'B'$, so müssen wir, falls wir in O stehen und nach A hinsehen, den Punct B zur Linken haben. Desgleichen müssen unsere in O' stehenden Antipoden, falls sie nach A' hinsehen, den Punct B' zur Linken haben. Daraus folgt, dass der Punct B hinter, der Punct B' hingegen vor der Ebene des Papieres liegt, dass mithin die beiden Achsen OB und $O'B'$ entgegengesetzte Richtungen haben.*)

Bezeichnet man also die Achsen in der Horizontal- und in der Antipodenebene mit OA, OB und $O'A'$, $O'B'$, so haben OA, $O'A'$ gleiche Richtung, hingegen OB, $O'B'$ entgegengesetzte Richtungen.

Es sei Q irgend ein Punct in der Horizontalebene; zugleich seien (Fig. 28) P und Q' diejenigen Lagen, welche jener Punct nach einander annimmt, sobald sich die Horizontalebene zuerst in die Kugelfläche, und sodann in die Antipodenebene verwandelt.

Fig. 28.



Bezeichnen wir die rechtwinkligen Coordinaten, welche dieser Punct während seiner ersten Lage Q in Bezug auf die in der Horizontalebene festge-

*) Es mag, was die hier festgesetzten Coordinatenachsen anbelangt, noch auf folgenden Umstand aufmerksam gemacht werden: Die Ebenen OAB und $O'A'B'$ sind (Fig. 27) zwei Tangentialebenen der Kugelfläche. Denkt man sich nun die eine von diesen beiden Tangentialebenen, z. B. die Ebene OAB beweglich, nämlich um die Kugelfläche herum drehbar; so wird man durch eine geeignete Drehung dieser Ebene es immer dahin bringen können, dass gleichzeitig OA mit $O'A'$, und OB mit $O'B'$ zur Deckung gelangt.

setzten Achsen OA, OB besitzt, mit x, y, so werden die Kugelcoordinaten, welche er während seiner zweiten Lage P besitzt, zufolge unserer früheren Festsetzung (S. 133) durch dieselben Grössen x, y dargestellt sein. Anders verhält es sich mit denjenigen Coordinaten, welche er während seiner dritten Lage Q' besitzt. Diese nämlich sollen nach den in der Antipodenebene angenommenen Achsen $O'A'$, $O'B'$ gemessen, und mit x', y' bezeichnet werden.

Wir wollen nun zunächst die Beziehungen untersuchen, in welchen die Coordinaten x', y' zu den ursprünglichen Coordinaten x, y stehen. Wir bezeichnen die Entfernung des Punctes Q von O mit r, ebenso die Entfernung des Punctes Q' von O' mit r'. Dann wird, wenn wir unter E eine durch r und r' gelegte Verticalebene verstehen,

$$x = r \cos (E, OA), \quad x' = r' \cos (E, O'A'),$$
$$y = r \cos (E, OB), \quad y' = r' \cos (E, O'B')$$

sein. Da nun die beiden Achsen OA, $O'A'$ gleiche Richtung haben, die Achsen OB, $O'B'$ hingegen von entgegengesetzter Richtung sind, so ist:

$$(E, OA) = (E, O'A'), \quad (E, OB) + (E, O'B') = 180^0.$$

Setzt man also:

$$(E, OA) = \varphi, \quad (E, OB) = 90^0 - \varphi,$$

so wird:

$$(E, O'A') = \varphi, \quad (E, O'B') = 90^0 + \varphi;$$

folglich:

$$x = r \cos \varphi, \quad x' = r' \cos \varphi,$$
$$y = r \sin \varphi, \quad y' = - r' \sin \varphi.$$

Daraus ergiebt sich:

$$(1) \qquad x + iy = re^{i\varphi}, \quad x' + iy' = r' . e^{-i\varphi}.$$

Nun sind (Fig. 28) die beiden Dreiecke $OO'Q$ und $OO'Q'$ ähnlich mit dem Dreieck $OO'P$, also auch unter einander ähnlich; folglich

$$\frac{OQ}{OO'} = \frac{OO'}{O'Q'},$$

d. i.

$$OQ . O'Q' = OO' . OO';$$

oder weil nach unserer Festsetzung der Durchmesser OO' gleich 1 ist, und OQ, $O'Q'$ mit r, r' bezeichnet worden sind:

$$r . r' = 1.$$

Hierdurch verwandeln sich die Formeln (1) in

(2) $$x + iy = r \,.\, e^{i\varphi}, \quad x' + iy' = \frac{1}{r}\, e^{-i\varphi}.$$

Demnach wird:

(3) $$(x + iy)\,(x' + iy') = 1.$$

Der Punct Q war gleichnamig mit dem Punct P genannt worden — deswegen, weil die Coordinaten des einen auch zugleich die des andern sind. Bei dem Punct Q' findet solches nicht statt; doch sehen wir aus (3), dass zwischen seinen Coordinaten und zwischen denen von Q oder P wenigstens eine sehr einfache Beziehung stattfindet. Wir wollen den Punct Q' den mit den Puncten Q und P correspondirenden Punct nennen; und gelangen dann zu folgendem Satz:

Versteht man unter x, y die Coordinaten irgend eines Punctes auf der Kugelfläche, oder, was dasselbe ist, die Coordinaten des gleichnamigen Punctes auf der Horizontalebene, und versteht man ferner unter x', y' die Coordinaten des mit jenen beiden correspondirenden Punctes auf der Antipodenebene; so wird zwischen x, y und x', y' jederzeit folgende einfache Beziehung stattfinden:

$$(x + iy)\,(x' + iy') = 1.$$

Sondert man das Reelle vom Imaginären, so lässt sich diese Beziehung durch die beiden Gleichungen:

$$\begin{cases} xx' - yy' = 1, \\ xy' + x'y = 0, \end{cases}$$

oder, was dasselbe ist, durch die beiden Gleichungen

$$\begin{cases} x' = +\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \\[2mm] y' = -\dfrac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

darstellen.

Wir wollen nun fortan, was die räumliche Ausbreitung irgend welcher Function anbelangt, die Kugelfläche in den Vordergrund treten lassen, die Horizontalebene aber und die Antipodenebene nur als Nebendinge, nämlich als zwei unter einander gleichberechtigte Nebenformen jener Fläche betrachten, von welchen bald die eine, bald die andere benutzt werden kann, um uns bei unseren Untersuchungen behülflich zu sein.

Demgemäss wird es zweckmässig sein, die Puncte der Kugelfläche mit x, y, ferner die zur Horizontal- und Antipodenebene gehörigen Puncte mit x^0, y^0 und x', y' zu bezeichnen. Dabei werden unter x, y die zu Anfang (S. 133) definirten Kugelcoordinaten, und andererseits unter x^0, y^0 und x', y' diejenigen Coordinaten zu verstehen sein, welche respective in Bezug auf die in der Horizontalfläche festgesetzten Achsen OA, OB, und in Bezug auf die in der Antipcdenebene festgesetzten Achsen $O'A'$, $O'B'$ (S. 145) gemessen sind.

Ist x, y irgend ein Punct auf der Kugelfläche, so werden die mit ihm correspondirenden Puncte x^0, y^0 und x', y' auf der Horizontal- und Antipodenebene jederzeit diejenigen sein, welche durch die Gleichungen

$$x^0 + iy^0 = x + iy,$$
$$x' + iy' = \frac{1}{x + iy}$$

bestimmt sind.

Denken wir uns auf der Kugelfläche irgend welche von $x + iy$ abhängende Function $f(x + iy)$ ausgebreitet, so wird der dabei auf den Punct x, y fallende Werth in drei verschiedenen Gestalten darstellbar sein, zunächst nämlich darstellbar sein durch:

$$f(x + iy),$$

sodann aber, weil $x + iy$ gleich $x^0 + iy^0$ und gleich $\frac{1}{x' + iy'}$ ist, auch darstellbar sein durch:

$$f(x^0 + iy^0),$$

und durch:

$$f\left(\frac{1}{x' + iy'}\right).$$

Von diesen drei Ausdrücken, welche sämmtlich ein und denselben Werth, nur in verschiedener Gestalt, darstellen, wird der erste den Vorzug verdienen, so lange wir bei der Kugelfläche bleiben; weil derselbe unmittelbar die Beziehung angiebt, in welcher jener Werth zu den Coordinaten des auf der Kugelfläche befindlichen Punctes x, y steht.

Verpflanzen wir die Function nach der Horizontalebene hin, so wird der durch die drei Ausdrücke dargestellte Werth auf den Punct x^0, y^0 fallen. Und alsdann wird, aus ähnlichem Grunde wie vorhin, der zweite den Vorzug verdienen.

Denken wir uns endlich die gegebene Function von der Kugelfläche nach der Antipodenebene hin verpflanzt, so wird der durch die drei Ausdrücke dargestellte Werth auf den Punct x', y' fallen. Und alsdann wird, wieder aus ähnlichem Grund wie früher, der dritte Ausdruck vorzuziehen sein. Wir gelangen demnach zu folgendem Satz:

Verpflanzt man eine beliebig gegebene, auf der Kugelfläche ausgebreitete Function $f(x + iy)$ nach der Horizontalebene hin, so wird auf jeden zu dieser Ebene gehörigen Punct x^0, y^0 ein Werth fallen, welcher durch

$$f(x^0 + iy^0)$$

dargestellt ist. Und verpflanzt man andererseits jene Function nach der Antipodenebene hin, so wird auf jeden zur Antipodenebene gehörigen Punct x', y' ein Werth fallen, welcher durch

$$f\left(\frac{1}{x' + iy'}\right)$$

ausgedrückt ist. Ebenso wie also die Function während ihrer ursprünglichen Ausbreitung auf der Kugelfläche nicht von x und y, sondern nur von dem einen Argumente $x + iy$ abhängig ist, ebenso wird dieselbe nach ihrer Verpflanzung auf die Horizontalebene nicht von x^0 und y^0, sondern nur von dem einen Argumente $x^0 + iy^0$ abhängen; und ebenso wird sie andererseits, falls man ihre Werthe nach der Antipodenebene hin verpflanzt, nicht von x' und y', sondern wieder nur von dem einen Argumente $x' + iy'$ abhängig sein.

Dritter Abschnitt. Eine von $x + iy$ abhängende Function, welche bei ihrer Ausbreitung auf der Kugelfläche überall eindeutig und stetig ist, wird jederzeit eine Constante sein.

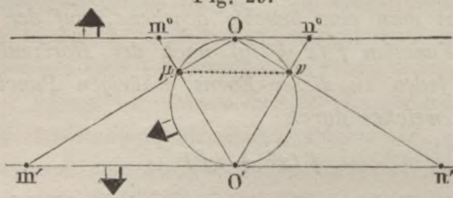
Wir wollen uns auf der Kugelfläche eine von $x + iy$ abhängende Function $f(x + iy)$ ausgebreitet denken, welche daselbst rundum überall eindeutig und stetig ist, und näher untersuchen, von welcher Beschaffenheit diese Function alsdann sein wird. Durch Sonderung des Reellen und Imaginären mag sich der Werth der Function in

$$f = U + iV$$

verwandeln, so dass also jedem Punct der Kugelfläche ein gewisser Werth von U, und ein gewisser Werth von V zugehört.

Wir zerlegen die Kugelfläche durch irgend welchen Horizontalkreis $\mu\nu$ in zwei Calotten $\mathfrak{A}^0$ und $\mathfrak{A}'$, von welchen die erstere den Punct O (Fig. 29), die letztere den Punct O' in sich enthalten

Fig. 29.



mag, und verpflanzen sodann die auf $\mathfrak{A}^0$ befindlichen Functionswerthe nach der Horizontalebene, die auf $\mathfrak{A}'$ befindlichen hingegen nach der Antipodenebene. Dadurch sind dann sämmtliche Werthe unserer Function f ausgebreitet auf zwei von einander getrennten elementaren Flächenstücken, nämlich auf zwei Kreisflächen $m^0 n^0$ und $m' n'$, von welchen die eine — sie mag $\mathfrak{a}^0$ heissen — auf der Horizontalebene, die andere — sie mag $\mathfrak{a}'$ genannt werden — auf der Antipodenebene liegt.

Die auf der Kreisfläche $\mathfrak{a}^0$ ausgebreiteten Werthe von f oder $U + iV$ werden, falls wir die Coordinaten der zu dieser Fläche gehörigen Puncte mit x^0, y^0 bezeichnen, nicht von x^0 und y^0, sondern nur von dem einen Argumente $x^0 + iy^0$ abhängen. Ausserdem werden diese Werthe, ebenso wie früher auf der Calotte $\mathfrak{A}^0$, ebenso auch gegenwärtig auf der Kreisfläche $\mathfrak{a}^0$ überall eindeutig und stetig sein. Demnach können wir auf dieselben sofort einen früher (S. 128) gefundenen Satz in Anwendung bringen und erhalten folgende Formel:

$$(1) \qquad \iint_{\mathfrak{a}^0} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x^0}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y^0}\right)^2 \right\} dx^0\, dy^0 = \int_{\mathfrak{a}^0} U\, dV,$$

in welcher das Integral links über die Fläche, und das Integral rechts in positiver Richtung über den Rand von $\mathfrak{a}^0$ hinerstreckt ist.

In gleicher Weise ergiebt sich, was die auf der Kreisfläche $\mathfrak{a}'$ ausgebreiteten Werthe von f oder $U + iV$ anbelangt, wenn man die Coordinaten der zu dieser Fläche gehörigen Puncte mit x', y' bezeichnet, die Formel:

$$(2) \qquad \iint\limits_{\mathfrak{a}'} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y'}\right)^2 \right\} dx'\,dy' = \int\limits_{\mathfrak{a}'} U\,dV,$$

wo wieder das Integral links über die Fläche, und das Integral rechts in positiver Richtung über den Rand von $\mathfrak{a}'$ hinerstreckt ist.

Es wird nun zuvörderst nöthig sein, dass wir die Randcurven von $\mathfrak{a}^0$, $\mathfrak{a}'$, und ebenso auch die von $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{A}'$ näher untersuchen, namentlich nöthig sein, dass wir uns von den positiven Richtungen dieser Randcurven eine klare Anschauung verschaffen.

Um bei irgend einem Flächenstücke die Richtung, d. h. die positive Richtung der Randcurve zu ermitteln, muss man — so lautet unsre Regel (Seite 71) — auf der oberen Seite des Flächenstückes, längs seiner Randcurve hin fortschreiten und dabei diejenige Richtung wählen, bei welcher man das Flächenstück selber beständig zur Linken hat. Wendet man diese Regel auf die vier Flächenstücke $\mathfrak{a}^0$, $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{A}'$ an, und beachtet man, dass die oberen Seiten der beiden ersten die der Kugel abgewendeten Seiten sind, ferner, dass die oberen Seiten der beiden letzteren durch die Aussenseite der Kugelfläche dargestellt werden*), so ergeben sich unmittelbar folgende Bemerkungen:

Erstens. Die Randcurven der Calotten $\mathfrak{A}^0$ und $\mathfrak{A}'$ sind beide durch ein und dieselbe Linie, nämlich durch die um die Kugelfläche herumlaufende Kreislinie $\mu\nu$ dargestellt; je nachdem wir aber die eine oder die andere von diesen beiden Calotten in positiver Richtung umlaufen wollen, müssen wir auf der Curve $\mu\nu$ entweder in der einen, oder in der entgegengesetzten Richtung fortschreiten.

Zweitens. Denkt man sich in O' einen leuchtenden Punct, so wird, während wir um die Calotte $\mathfrak{A}^0$ in positiver Richtung herumlaufen, gleichzeitig unser auf die Horizontalebene geworfener Schatten in positiver Richtung um die Kreisfläche $\mathfrak{a}^0$ herumwandern.

Drittens. Denkt man sich in O einen leuchtenden Punct, so wird, während wir um die Calotte $\mathfrak{A}'$ in positiver Rich-

*) Dass solches der Fall ist, folgt unmittelbar aus unseren früheren Betrachtungen (Seite 143 u. 144).

tung herumlaufen, gleichzeitig unser auf die Antipodenebene geworfener Schatten in positiver Richtung um die Kreisfläche $\mathfrak{a}'$ herumwandern.

Sind $f_1, f_2, f_3, \ldots$ die längs der Kreislinie $\mu\nu$ aufeinander folgenden Werthe unserer Function, so werden die am Rande der Kreisfläche $\mathfrak{a}^0$, und ebenso auch die am Rande der Kreisfläche $\mathfrak{a}'$ aufeinander folgenden Werthe gleichfalls durch $f_1, f_2, f_3, \ldots$ dargestellt sein. Wir wollen annehmen, die Reihenfolge $f_1, f_2, f_3, \ldots$ repräsentire eine positive Umlaufung der Kugelcalotte $\mathfrak{A}^0$, d. h. die Werthe $f_1, f_2, f_3, \ldots$ wären in solcher Art geordnet, wie man denselben bei einer positiven Umlaufung jener Calotte begegnet. Alsdann wird durch jene Reihenfolge in Bezug auf die andere Calotte $\mathfrak{A}'$ eine negative Umlaufung dargestellt werden; wie sich solches aus der ersten Bemerkung sofort ergiebt. Achtet man nun ferner auf die zweite und dritte Bemerkung, so ergiebt sich, dass die in Rede stehenden Werthe $f_1, f_2, f_3, \ldots$ nicht nur um die Calotte $\mathfrak{A}^0$, sondern auch um die Kreisfläche $\mathfrak{a}^0$ in positiver Richtung herumlaufen; und dass dieselben andererseits um $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{a}'$ in negativer Richtung herumlaufen. Hieraus aber folgt, wenn wir die Werthe $f_1, f_2, f_3 \ldots$ mit $U_1 + iV_1$, $U_2 + iV_2$, $U_3 + iV_3, \ldots.$ bezeichnen, dass die Summe

$$U_1 (V_2 - V_1) + U_2 (V_3 - V_2) + U_3 (V_4 - V_3) + \ldots..$$

gleichzeitig das in positiver Richtung um $\mathfrak{a}^0$, und das in negativer Richtung um $\mathfrak{a}'$ herumlaufende Integral $\int U\,dV$ darstellt; oder mit andern Worten, dass jene Summe gleichzeitig den Werth von

$$+\int\limits_{\mathfrak{a}^0} U\,dV,$$

und den von

$$-\int\limits_{\mathfrak{a}'} U\,dV$$

repräsentirt. Demnach sind die Werthe von

$$\int\limits_{\mathfrak{a}^0} U\,dV \quad \text{und} \quad \int\limits_{\mathfrak{a}'} U\,dV$$

unter einander entgegengesetzt.

Und nunmehr ergiebt sich durch Addition der beiden Formeln (1) und (2):

$$(3)\quad \iint\limits_{\mathfrak{a}^0}\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x^0}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y^0}\right)^2\right\} dx^0\, dy^0 + \iint\limits_{\mathfrak{a}'}\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y'}\right)^2\right\} dx' dy' = 0.$$

Der Ausdruck links ist, weil $\frac{\partial U}{\partial x^0}, \frac{\partial U}{\partial y^0}, \frac{\partial U}{\partial x'}, \frac{\partial U}{\partial y'}$ lauter reelle Grössen sind, eine aus unendlich vielen, und aus lauter positiven Gliedern zusammengesetzte Summe, und kann daher nur dann verschwinden, wenn alle diese Glieder einzeln genommen Null sind, d. h. nur dann verschwinden, wenn erstens alle unter dem Integral $\iint\limits_{\mathfrak{a}^0}$ befindlichen Grössen $\frac{\partial U}{\partial x^0}, \frac{\partial U}{\partial y^0}$, und gleichzeitig auch alle unter dem Integral $\iint\limits_{\mathfrak{a}'}$ vorhandenen Grössen $\frac{\partial U}{\partial x'}, \frac{\partial U}{\partial y'}$ Null sind. Somit folgt aus der vorstehenden Gleichung (3), dass die Werthe von $\frac{\partial U}{\partial x^0}, \frac{\partial U}{\partial y^0}$ innerhalb $\mathfrak{a}^0$ überall Null sind, und dass andrerseits die Werthe von $\frac{\partial U}{\partial x'}, \frac{\partial U}{\partial y'}$ innerhalb $\mathfrak{a}'$ ebenfalls allenthalben Null sind. Demnach muss die Function U selber auf $\mathfrak{a}^0$ einen constanten Werth besitzen, etwa $= K^0$ sein, und auf $\mathfrak{a}'$ ebenfalls einen constanten Werth haben, etwa $= K'$ sein.

Wären die Constanten K^0 und K' von einander verschieden, so würden die auf der Kugelfläche ausgebreiteten Werthe unserer Function $f = U + iV$ unstetig sein; denn längs der Kreislinie $\mu\nu$ hin würden alsdann von beiden Seiten verschiedene Werthe von U, mithin auch verschiedene Werthe von f an einander grenzen. Zufolge der gemachten Voraussetzung ist nun aber unsere Function f bei ihrer Ausbreitung um die Kugelfläche herum überall stetig; und es müssen daher jene beiden Constanten K^0 und K' unter einander gleich sein.

Daraus folgt, dass der reelle Theil U unserer Function auf der Kugelfläche allenthalben gleich ein und derselben Constanten sein muss. Nun ist, weil $f = U + iV$ eine von $x + iy$ abhängende Function vorstellt, zufolge eines früheren Satzes (Seite 78):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y},$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

folglich, weil U constant ist:

$$0 = \frac{\partial V}{\partial x},$$

$$0 = \frac{\partial V}{\partial y}.$$

Hieraus aber ergiebt sich, dass V ebenfalls auf der Kugelfläche allenthalben constant sein muss. Somit gelangen wir zu folgendem Satz:

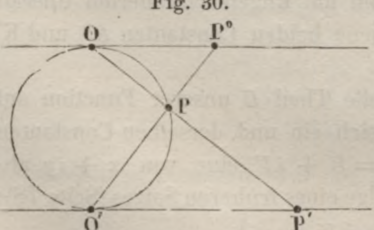
Ist eine von $x + iy$ abhängende Function bei ihrer Ausbreitung auf der Kugelfläche überall eindeutig und stetig, so ist sie eine Constante.

Vierter Abschnitt. Eine von $x + iy$ abhängende Function, welche bei ihrer Ausbreitnng auf der Kugelfläche überall eindeutig und mit Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig ist, wird jederzeit eine rationale Function von $x + iy$ sein.

Wir wollen uns nunmehr zur Untersuchung von Functionen wenden, welche bei ihrer Ausbreitung auf der Kugelfläche nicht überall stetig, sondern daselbst nur mit Ausnahme einzelner Pole stetig sind.

Es sei $f = f(x + iy)$ eine Function, welche bei ihrer Ausbreitung auf der Kugelfläche in irgend einem Puncte dieser Fläche — er mag P genannt werden — einen Pol besitzt (Fig. 30). Diese Function wird alsdann (vergl. S. 94) im Puncte P unstetig, jedoch der Art unstetig sein, dass ihr reciprocer Werth $\frac{1}{f}$ im Bereiche jenes Punctes stetig bleibt.

Fig. 30.



Verpflanzen wir nun die Function von der Kugelfläche nach der Horizontalebene hin, und bezeichnen wir denjenigen Punct dieser Ebene, welcher zu P in Correspondenz steht, oder mit P gleichnamig ist, mit P^0, so werden die im Bereich des Punctes P befindlichen Werthe von f und von $\frac{1}{f}$ gegenwärtig auf das Bereich des Punctes P^0 zu liegen kommen. Und bei dieser Verpflanzung werden offenbar die Werthe f ihre Unstetigkeit, und die Werthe $\frac{1}{f}$ ihre Stetigkeit ungeändert beibehalten.

Somit wird also die Function f bei ihrer Ausbreitung auf der Horizontalebene im Bereiche des Punctes P^0 unstetig, jedoch der Art unstetig sein, dass wenigstens ihr reciprocer Werth $\frac{1}{f}$ daselbst stetig bleibt. D. h. sie wird im Puncte P^0 einen Pol besitzen.

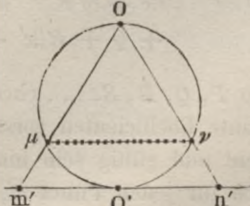
Aehnliches würde sich offenbar auch dann herausgestellt haben, wenn wir die Function von der Kugelfläche nicht nach der Horizontal-, sondern nach der Antipodenebene verpflanzt hätten. Der in P liegende Pol wird sich nämlich in diesem Falle nach der Antipodenebene hin verpflanzen, und zwar wiederum nach demjenigen Puncte P' dieser Ebene hin, welcher mit P in Correspondenz steht.

Die Pole, mit welchen eine auf der Kugelfläche ausgebreitete Function etwa behaftet ist, werden also, falls man die Function nach der Horizontal- oder nach der Antipodenebene hin verpflanzt, nach wie vor Pole bleiben; werden nämlich, sobald jene Verpflanzung ausgeführt wird, in den correspondirenden Puncten der einen oder andern Ebene, wiederum als Pole, zu Tage treten.

Es sei f eine von $x + iy$ abhängende Function, welche bei ihrer Ausbreitung auf der Kugelfläche überall eindeutig und mit Ausnahme eines einzigen in O' liegenden Poles daselbst auch überall stetig ist.

Wir zerlegen die Kugelfläche durch einen beliebigen Horizontalkreis $\mu\nu$ in zwei Calotten $\mathfrak{A}^0$ und $\mathfrak{A}'$, von welchen letztere den Punct O' (Fig. 31) in sich enthalten soll. Sodann nehmen wir die Antipodenebene, von welcher die Calotte $\mathfrak{A}'$ im Puncte O' berührt wird, zu Hülfe, und denken uns jene Ebene belastet mit gewissen Functionswerthen. Diese Werthe — sie mögen mit φ bezeichnet werden — sollen identisch mit denjenigen sein, welche auf die Antipodenebene fallen würden, wenn man die auf der Calotte $\mathfrak{A}'$ vorhandenen Werthe f nach jener Ebene (von O aus)

Fig. 31.



projiciren wollte. Es werden demnach die Werthe φ nur einen Theil der Antipodenebene, nämlich nur eine gewisse Kreisfläche $m' n'$ bedecken, welche ihren Mittelpunct in O' hat und mit $\mathfrak{a}'$ bezeichnet werden mag. Und zwar wird jeder zu dieser Kreisfläche gehörige Punct x', y' mit einem Werthe φ belastet sein, der identisch mit demjenigen Werthe f ist, welchen der correspondirende Punct x, y der Kugelfläche zu tragen hat.

Ebenso wie die Werthe f auf der Calotte $\mathfrak{A}'$ überall eindeutig, und mit Ausnahme eines in O' liegenden Poles überall stetig sind, ebenso werden auch die Werthe φ auf der Kreisfläche $\mathfrak{a}'$ überall eindeutig und mit Ausnahme eines in O' liegenden Poles überall stetig sein. Und da ferner die Werthe f nicht von x und y, sondern nur von dem einen Argumente $x + iy$ abhängen, so werden die auf der Kreisfläche $\mathfrak{a}'$ vorhandenen Werthe φ ebenfalls nicht von x' und y', sondern nur von dem einen Argumente $x' + iy'$ abhängig sein (S. 149).

Wir können demnach auf die zur Elementarfläche $\mathfrak{a}'$ gehörigen Puncte x', y' und auf die in diesen Puncten vorhandenen Werthe φ sofort einen früher (S. 122) gefundenen Satz in Anwendung bringen, und erhalten dann für jene Werthe folgende Entwickelung:

$$(1) \qquad \varphi = \frac{A + B(x' + iy') + C(x' + iy')^2 + \ldots .}{(x' + iy')^n},$$

wo A, B, C ... irgend welche Constanten vorstellen, und n eine endliche positive ganze Zahl bedeutet. Wir können diese Entwickelung offenbar auch so darstellen:

$$(2) \quad \varphi = \frac{A}{(x' + iy')^n} + \frac{B}{(x' + iy')^{n-1}} + \ldots . . + \frac{P}{x' + iy'} + \\ + Q + R(x' + iy') + S(x' + iy')^2 + \ldots . .$$

wo P, Q, R, S, ... ebenso wie A, B, C, ... irgend welche constante Coefficienten vorstellen. Diese Entwickelung wird convergent und gültig sein innerhalb der ganzen Kreisfläche $\mathfrak{a}'$, nämlich für jeden Punct x', y' dieser Fläche den zugehörigen Werth von φ liefern.

Sind nun x', y' und x, y irgend zwei unter einander correspondirende Puncte, und sind φ und f die von diesen Puncten getragenen Functionswerthe, so ist jederzeit

$$x' + iy' = \frac{1}{x + iy},$$

und

$$\varphi = f.$$

Somit ergiebt sich aus der in (2) gefundenen Entwickelung sofort:

$$(3) \quad f = A(x + iy)^n + B(x + iy)^{n-1} + \ldots . + P(x + iy) + \\ + Q + \frac{R}{(x + iy)} + \frac{S}{(x + iy)^2} + \ldots . .$$

Und diese Formel wird — ebenso wie die Formel (2) für sämmtliche auf der Kreisfläche $\mathfrak{a}'$ vorhandenen Werthe φ gültig ist — ihrerseits gültig sein für alle auf der Calotte $\mathfrak{A}'$ vorhandenen Werthe von f.

Da nun (vergl. S. 138)

$$\frac{1}{x + iy}, \quad \frac{1}{(x + iy)^2}, \quad \frac{1}{(x + iy)^3}, \ldots .$$

Functionen sind, welche auf der Calotte $\mathfrak{A}'$ überall eindeutig und stetig sind, so ergiebt sich aus (3) sofort, dass der Ausdruck

$$(4) \quad f - \left\{A(x + iy)^n + B(x + iy)^{n-1} + \ldots . + P(x + iy)\right\}$$

auf jener Calotte $\mathfrak{A}'$ ebenfalls überall eindeutig und stetig bleibt.

Gleiches gilt aber von diesem Ausdruck (4) auch auf der andern Calotte; denn f selber ist der gemachten Voraussetzung zufolge auf $\mathfrak{A}^0$ überall eindeutig und stetig, und die Functionen

$$(x + iy)^n, \quad (x + iy)^{n-1}, \ldots \ . (x + iy)^1$$

sind es ebenfalls. (Vergl. S. 138.)

Wir sehen demnach, dass der Ausdruck (4) auf der ganzen Kugelfläche überall eindeutig und stetig bleibt. Und daraus folgt, mit Rückblick auf den zuletzt gefundenen Satz, dass er einen überall constanten Werth besitzen muss. Bezeichnen wir diesen mit K, so haben wir also schliesslich:

$$f - \left\{A(x + iy)^n + B(x + iy)^{n-1} + \ldots + P(x + iy)\right\} = K,$$

oder was dasselbe ist:

$$f = A(x + iy)^n + B(x + iy)^{n-1} + \ldots . + P(x + iy) + K.$$

Somit gelangen wir zu folgendem Satz:

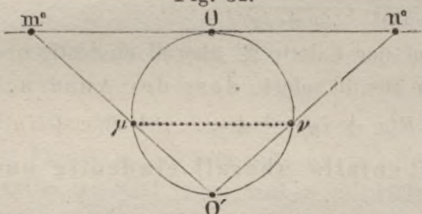
Eine von $x + iy$ abhängende Function, welche bei ihrer Ausbreitung auf der Kugelfläche überall eindeutig, und mit Ausnahme eines einzigen bei $x + iy = \infty$ liegenden Poles daselbst auch über-

all stetig ist, wird jederzeit eine ganze rationale Function von $x + iy$ sein.

Wir gehen nun über zu der allgemeinsten Untersuchung, welche sich hier darbietet, nämlich zur Untersuchung einer Function $f = f(x + iy)$, welche bei ihrer Ausbreitung auf der Kugelfläche eindeutig, und mit Ausnahme irgend welcher beliebig gelegener Pole daselbst auch überall stetig ist.

Wiederum mag die Kugelfläche durch einen Horizontalschnitt $\mu\nu$ in zwei Calotten $\mathfrak{A}^0$ und $\mathfrak{A}'$ zerlegt werden; und zwar mag jener Schnitt dem Puncte O' (Fig. 32) so nahe liegend gedacht werden, dass von sämmtlichen auf der Kugelfläche gegebenen Polen kein einziger auf der Calotte $\mathfrak{A}'$ liegt; es sei denn, dass O' selber einer von den gegebenen Polen ist; in diesem Falle mag jener Schnitt $\mu\nu$ so geführt werden, dass O' wenigstens der einzige Pol ist, welcher auf $\mathfrak{A}'$ sich vorfindet. Die auf $\mathfrak{A}^0$ vorhandenen Pole mögen mit $x + iy = c_1$, $x + iy = c_2$, ... $x + iy = c_\varkappa$ bezeichnet werden.

Fig. 32.



Wir nehmen nun gewisse Functionswerthe zu Hülfe, die wir uns auf der Horizontalebene ausgebreitet denken. Diese Werthe — sie mögen φ heissen — sollen identisch sein mit denjenigen, welche auf die Horizontalebene fallen würden, wenn man die auf der Calotte $\mathfrak{A}^0$ vorhandenen Werthe f (von O' aus) nach jener Ebene hin projiciren wollte. Die Werthe φ werden auf der Horizontalebene eine gewisse Kreisfläche $m^0\, n^0$ bedecken, welche ihren Mittelpunct in O hat, und mit $\mathfrak{a}^0$ bezeichnet werden mag; und zwar wird jeder Punct x^0, y^0 dieser Kreisfläche mit einem Werthe φ belastet sein, welcher identisch ist mit demjenigen Werthe f, der sich in dem correspondirenden Puncte x, y der Calotte $\mathfrak{A}^0$ befindet.

Die auf der Calotte $\mathfrak{A}^0$ befindlichen Werthe von f hängen nicht von x und y, sondern nur von dem einen Argumente $x + iy$ ab, und sind ausserdem auf jener Calotte überall eindeutig, und mit Ausnahme der in $x + iy = c_1$, $x + iy = c_2$, ... $x + iy = c_\varkappa$

liegenden Pole daselbst auch überall stetig. Analoges wird demnach von den auf der Kreisfläche $\mathfrak{a}^0$ befindlichen Werthen φ gelten. Diese Werthe werden nicht von x^0 und y^0, sondern nur von dem einen Argument $x^0 + iy^0$ abhängig sein; und sie werden ferner mit Ausnahme von gewissen $\varkappa$ Polen auf ihrer Kreisfläche überall stetig sein. Jene $\varkappa$ Pole werden in denjenigen Puncten liegen, welche mit den Puncten $x + iy = c_1$, $x + iy = c_2$, ... $x + iy = c_\varkappa$ correspondiren, werden also liegen in den Puncten $x^0 + iy^0 = c_1$, $x^0 + iy^0 = c_2$, ... $x^0 + iy^0 = c_\varkappa$.

Wir können demnach auf die Kreisfläche $\mathfrak{a}^0$ und auf die daselbst befindlichen Werthe φ sofort einen früher (Seite 122) gefundenen Satz in Anwendung bringen und erhalten alsdann für jene Werthe folgende Darstellung:

$$(1)\quad \varphi = \frac{Q + R(x^0 + iy^0) + S(x^0 + iy^0)^2 + T(x^0 + iy^0)^3 + \ldots\ldots}{(x^0 + iy^0 - c_1)^{n_1} \cdot (x^0 + iy^0 - c_2)^{n_2} \ldots\ldots (x^0 + iy^0 - c_\varkappa)^{n_\varkappa}},$$

wo Q, R, S, T, ... irgend welche Constanten vorstellen, und n_1, n_2, ... $n_\varkappa$ irgend welche positive ganze Zahlen bedeuten. Diese Darstellung lässt sich sofort übertragen auf die auf der Calotte $\mathfrak{A}^0$ vorhandenen Werthe f. Für je zwei auf der Kreisfläche $\mathfrak{a}^0$ und auf der Calotte $\mathfrak{A}^0$ mit einander correspondirende Puncte x^0, y^0 und x, y, und für die von diesen Puncten getragenen Functionswerthe φ und f gelten nämlich folgende Formeln:

$$x^0 + iy^0 = x + iy,$$
$$\varphi = f.$$

Somit ergiebt sich aus (1):

$$(2)\quad f = \frac{Q + R(x + iy) + S(x + iy)^2 + T(x + iy)^3 + \ldots\ldots}{(x + iy - c_1)^{n_1} \cdot (x + iy - c_2)^{n_2} \ldots (x + iy - c_\varkappa)^{n_\varkappa}}.$$

Und diese Darstellung (2) wird — ebenso wie (1) für sämmtliche auf der Kreisfläche $\mathfrak{a}^0$ vorhandenen Werthe φ gültig ist — ihrerseits gültig sein für alle auf der Calotte $\mathfrak{A}^0$ vorhandenen Werthe von f.

Da nun

$$(x + iy)^1, \quad (x + iy)^2, \quad (x + iy)^3, \ldots$$

Functionen sind, die auf der Calotte $\mathfrak{A}^0$ überall eindeutig und stetig bleiben, so ergiebt sich aus der eben gefundenen Darstellung (2) sofort, dass das Product:

$$(3)\quad (x + iy - c_1)^{n_1} \cdot (x + iy - c_2)^{n_2} \ldots (x + iy - c_\varkappa)^{n_\varkappa} \cdot f$$

auf jener Calotte $\mathfrak{A}^0$ ebenfalls allenthalben eindeutig und stetig ist.

Wir wollen nun weiter untersuchen, wie es sich mit diesem Producte (3) in der andern Calotte verhält. Die gegebene Function f ist zufolge der über sie gemachten Voraussetzung und zufolge der Art und Weise, wie die Calotten $\mathfrak{A}^0$ und $\mathfrak{A}'$ festgesetzt wurden, auf der Calotte $\mathfrak{A}'$ überall eindeutig und, mit etwaiger Ausnahme eines in O' liegenden Poles, daselbst auch überall stetig. Ganz ebenso verhält es sich aber (wie leicht zu übersehen ist, vergl. S. 138 u. 139) auf jener Calotte $\mathfrak{A}'$ auch mit den Functionen:

$$(x + iy - c_1)^{n_1}, \quad (x + iy - c_2)^{n_2}, \ldots (x + iy - c_\varkappa)^{n_\varkappa}.$$

Daraus folgt, dass ganz Analoges auch von dem in (3) angegebenen Product gelten muss, dass nämlich jenes Product eine Function ist, welche auf der Calotte $\mathfrak{A}'$ überall eindeutig und, mit etwaiger Ausnahme eines in O' gelegenen Poles, daselbst auch überall stetig bleibt.

Nehmen wir also beide Calotten $\mathfrak{A}^0$ und $\mathfrak{A}'$ zusammen, so sehen wir, dass das in Rede stehende Product

$$(x + iy - c_1)^{n_1} \cdot (x + iy - c_2)^{n_2} \ldots\ldots (x + iy - c_\varkappa)^{n_\varkappa} \cdot f$$

auf der ganzen Kugelfläche überall eindeutig, und, mit etwaiger Ausnahme eines bei O' vorhandenen Poles, auch überall stetig ist. Befindet sich bei O' wirklich ein solcher Pol, so wird dasselbe (zufolge des vorhergehenden Satzes, S. 157) eine ganze rationale Function von $x + iy$ sein; befindet sich hingegen in O' kein Pol, so wird es (zufolge des Satzes Seite 154) eine Constante sein.

Im ersten Fall haben wir also:

$$(x + iy - c_1)^{n_1} \cdot (x + iy - c_2)^{n_2} \ldots (x + iy - c_\varkappa)^{n_\varkappa} \cdot f =$$
$$= A + B(x + iy) + C(x + iy)^2 + \ldots + G(x + iy)^n;$$

im letztern:

$$(x + iy - c_1)^{n_1} \cdot (x + iy - c_2)^{n_2} \ldots\ldots (x + iy - c_\varkappa)^{n_\varkappa} \cdot f = A,$$

wo n irgend welche positive ganze Zahl ist, und wo $A, B, C, \ldots G$ irgend welche Constanten vorstellen.

Diese Formeln lassen sich auch so darstellen:

$$f = \frac{A + B(x+iy) + C(x+iy)^2 + \ldots + G(x+iy)^n}{(x+iy-c_1)^{n_1} \, . \, (x+iy-c_2)^{n_2} \ldots (x+iy-c_\varkappa)^{n_\varkappa}},$$

$$f = \frac{A}{(x+iy-c_1)^{n_1} \, . \, (x+iy-c_2)^{n_2} \ldots (x+iy-c_\varkappa)^{n_\varkappa}};$$

und liefern also folgenden Satz:

Eine von $x + iy$ abhängende Function, welche bei ihrer Ausbreitung auf der Kugelfläche überall eindeutig und mit Ausnahme einzelner Pole überall stetig ist, wird jederzeit eine rationale Function von $x + iy$ sein.

Fünfte Vorlesung.

Einführung der Riemann'schen ebenen Flächen und der Riemann'schen Kugelflächen.

Erster Abschnitt. Definition der Windungsflächen. Zwei Flächentheile, welche einander in einer Linie durchsetzen, sind als Flächentheile zu betrachten, zwischen welchen längs jener Linie hin kein Zuhammenhang stattfindet.

Ein Strahl, welcher von einem festen Puncte C ausgeht, um C drehbar ist, und nun längs irgend einer im Raume gegebenen Leitcurve fortgleitet, wird einen Kegelmantel beschreiben. Ist die Leitcurve eine in sich zurücklaufende, so wird gleiches auch gelten von jenem Kegelmantel.

Befindet sich die Leitcurve auf einer um den Punct C mit dem Radius 1 beschriebenen Kugel, so heisst bekanntlich derjenige Oberflächentheil dieser Kugel, welcher von der Leitcurve umschlossen wird, die Oeffnung des Kegelmantels.

Wir wollen uns nun auf der um C beschriebenen Kugel eine Leitcurve denken, welche etwa die Form einer 8 besitzt, nämlich annehmen, dass diese Curve, ebenso wie es bei der 8 der Fall ist, durch einen Zug entsteht, welcher zuerst nach Ausführung einer Wendung sich selber durchschneidet, und welcher sodann nach Ausführung einer zweiten, entgegengesetzten Wendung in seinen Anfang zurückläuft. Der Punct, in welchem die Curve sich selber durchschneidet, mag der Doppelpunct der Curve genannt und mit D bezeichnet werden.

Lassen wir den von C ausgehenden Strahl dem Zuge dieser Leitcurve folgen, so wird der von ihm beschriebene Kegelmantel, ähnlich wie jene Curve selber, zuerst nach Ausführung einer Wendung (in der Linie CD) sich selber durchsetzen, und sodann nach Ausführung einer zweiten, entgegengesetzten Wendung in seinen Anfang zurücklaufen. Es wird demnach dieser Kegelmantel zwei Oeffnungen besitzen, von welchen die eine dem unteren, die andere dem oberen Theile der 8 entspricht.

Wir haben hier eine Fläche vor uns, welche in einer gewissen Linie sich selber durchsetzt. Mit Flächen solcher Art werden wir in Zukunft häufig zu thun haben; und es wird daher gut sein, wenn wir uns, hier zu Anfang, sogleich mit einer gewissen Grundvorstellung bekannt machen, welche — wie gezwungen sie im ersten Augenblick vielleicht auch erscheinen mag — bei jenen Flächen in Zukunft beständig festgehalten werden muss.

Wir setzen nämlich ein für allemal fest, dass zwischen zwei Flächentheilen, welche einander in irgend einer Linie durchsetzen, längs dieser Linie hin kein Zusammenhang, also auch keine Nachbarschaft stattfinden soll.

Denkt man sich z. B. im Raume zwei gleich grosse Kreisflächen, welche einander längs eines Durchmessers durchsetzen und unter irgend welchem Winkel gegen einander geneigt sind, so werden diese beiden Kreisflächen als zwei von einander völlig getrennte Flächenstücke anzusehen sein; nämlich als zwei Flächenstücke anzusehen sein, welche unabhängig von einander ihre Lage im Raume ändern können, mithin an beliebige und beliebig weit von einander entfernte Stellen des Raumes versetzt werden können.

Sobald von einem Puncte die Rede ist, welcher auf einer gegebenen Fläche fortgeht, oder fortschreitet, oder fortläuft, so versteht man darunter bekanntlich jederzeit einen Punct, welcher seine Lage auf der Fläche stetig ändert, also einen Punct, der von jedweder Stelle der Fläche immer nur zu einer benachbarten Stelle sich fortbewegt. Die aufeinander folgenden Lagen eines solchen Punctes werden demnach in ihrer Gesammtheit eine Curve bilden, welche aus lauter zusammenhängenden Puncten der Fläche besteht.

Zwei Flächentheile können als zwei Systeme von Puncten angesehen werden; die Puncte des einen Systems sind alle unter einander zusammenhängend, ebenso auch die des andern. Durchsetzen aber die beiden Flächentheile einander, so findet

— nach der von uns angenommenen Vorstellung — zwischen den Puncten des einen und denen des andern Systems längs der Durchsetzungslinie **kein** Zusammenhang statt.

Der auf einer gegebenen Fläche fortlaufende Punct wird daher, weil seine Bahn aus lauter zusammenhängenden Puncten bestehen muss, sobald er auf seinem Wege zu einer Linie gelangt, in welcher der Flächentheil, auf dem er sich gerade befindet, von einem andern Flächentheile durchsetzt wird, niemals in diesen andern Flächentheil hinübergehen können. Oder mit andern Worten:

Bei einer Linie, in welcher zwei Theile einer Fläche einander durchsetzen, ist die Bewegung eines auf der Fläche fortlaufenden Punctes nothwendig immer der Art, als wäre der eine von diesen beiden Flächentheilen gar nicht vorhanden.

Wir haben früher, um die Werthe irgend einer Function räumlich auszubreiten, bald eine ebene Fläche, bald eine Kugelfläche benutzt. Unter Umständen wird es zweckmässig sein, zu diesem Behuf irgend welche andere Flächen in Anwendung zu bringen. Jeder Punct der gerade gewählten Fläche wird alsdann der Träger eines gewissen Functionswerthes werden. Trifft es sich, dass hierbei zusammenhängende Flächenpuncte auch jederzeit mit stetig zusammenhängenden Functionswerthen belastet sind, so wird die Function eine auf jener Fläche überall stetige zu nennen sein

Wiederum wird hiebei, falls zwei Theile der in Anwendung gebrachten Fläche einander durchsetzen, wohl zu beachten sein, dass zwischen den Puncten des einen uud denen des andern Theiles längs ihrer Durchsetzungslinie kein Zusammenhang stattfindet.

Soll demnach irgend eine Function auf einer solchen Fläche stetig sein, so wird dazu, was ihre Werthe auf jenen beiden einander durchsetzenden Flächentheilen anbelangt, nur erforderlich sein, dass jeder von diesen beiden Theilen für sich allein betrachtet mit lauter stetig zusammenhängenden Werthen belastet ist — gleichgültig, ob die Werthe, welche der eine, und welche der andere Theil in der Nähe ihrer Durchsetzungslinie besitzen, unter einander gleich oder verschieden sind.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen kehren wir zu dem zu Anfang betrachteten Kegelmantel zurück. Wir wollen uns diesen Kegelmantel als eine materielle Fläche denken, und wiederum annehmen, sein Scheitelpunct befinde sich im Mittelpunct und seine 8förmige Leitcurve auf der Oberfläche irgend einer Kugel. Der Kreis, in welchem die Kugel von einer durch ihren Mittelpunct gelegten Horizontalebene geschnitten wird, mag der Aequator genannt werden; und jene 8 förmige Leitcurve mag auf der Kugel eine solche Lage haben, dass die eine Schleife derselben oberhalb, die andere unterhalb des Aequators, dass mithin ihr Doppelpunct D gerade im Aequator liegt. Während nun der Doppelpunct jener Curve im Aequator ungeändert liegen bleibt, mag sich die eine Schleife auf der oberen, die andere auf der unteren Halbkugel mehr und mehr ausdehnen; die Ausdehnung mag so weit fortschreiten, bis zuletzt die eine Schleife von oben, die andere von unten her dem Aequator unendlich nahe kommt. Gleichzeitig werden sich alsdann die den beiden Schleifen entsprechenden Theile des Kegelmantels mehr und mehr abplatten, und zwar so weit abplatten, bis zuletzt beide Theile, der eine von oben, der andere von unten her, fast vollständig in die Horizontalebene hineinfallen (Fig. 33).

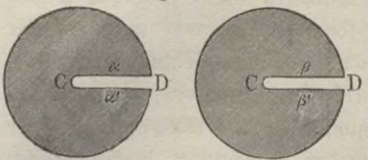
Fig. 33.

In dem gegenwärtigen Zustande wird alsdann der Kegelmantel eine Fläche repräsentiren, von welcher die Horizontalebene überall doppelt bedeckt wird, es mag diese Fläche eine Windungsfläche, und ihr Scheitelpunct ein Windungspunct genannt werden.

Die Windungsfläche kann auf beliebige Weise begrenzt, oder auch unbegrenzt sein. Denken wir uns z. B. unsere Windungsfläche von ihrem Scheitelpuncte aus nur bis zu der um C beschriebenen Kugelfläche hin fortgesetzt, so wird die Begrenzungslinie derselben eine kreisförmige Gestalt besitzen. Und zwar wird, weil längs der Linie CD hin zwischen den beiden daselbst einander durchsetzenden Flächentheilen kein Zusammenhang stattfindet, zwischen den beiden im Puncte D einander durchkreuzenden Theilen der Begrenzungslinie ebenfalls kein Zusammenhang vorhanden sein. Es wird demnach die Begrenzung der Windungsfläche aus einer einzigen Curve bestehen, welche nach zwei vollen Kreisumläufen in sich selber zurückkehrt.

Wir würden übrigens, wie wir sofort übersehen, eine solche kreisförmig begrenzte Windungsfläche auch dadurch erhalten können, dass wir zwei ebene Kreisflächen (Fig. 34) übereinanderlegen, dieselben längs zweier übereinanderliegenden Radien aufschlitzen, und sodann die entgegengesetzt liegenden Ränder des oberen und des unteren Schlitzes mit einander zusammen heften, nämlich den Rand α mit β', und α' mit β.

Fig. 34.



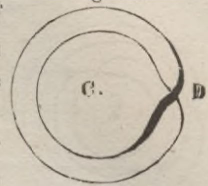
Ein auf der Windungsfläche fortgehender Punct wird, sobald er die Linie CD passirt, aus dem unteren Blatt der Fläche in das obere, oder auch umgekehrt aus dem oberen in das untere gelangen. Aus diesem Grunde wird es zweckmässig sein, die Linie CD eine Uebergangslinie zu nennen. Ein Uebergang aus dem unteren Blatt in das obere hinein kann übrigens auf doppelte Weise bewerkstelligt werden. Denkt man sich nämlich einen Beobachter, welcher in C auf der horizontal liegenden Windungsfläche steht und nach D hin fortsieht, so kann dieser Uebergang entweder von links unten nach rechts oben, oder auch umgekehrt von rechts unten nach links oben erfolgen. Charakteristisch für die hier betrachtete Fläche ist es, dass ein auf derselben fortlaufender Punct den Windungspunct zweimal umkreisen muss, ehe er in seine Anfangslage zurückkommt.

Durchaus unwesentlich ist es, dass wir uns bis jetzt die Uebergangslinie geradlinig gedacht haben; es kann dieselbe eine Curve von beliebiger Krümmung sein. Wir brauchen nämlich die beiden ebenen Kreisflächen, welche zuletzt zur Construction der Windungsfläche in Anwendung gebracht wurden, nicht gerade längs eines Radius hin aufzuschlitzen, sondern können dieselben auch längs irgend einer andern vom Mittelpunct nach dem Rande hingehenden Curve aufschlitzen. Wenn wir alsdann wiederum die entgegengesetzt liegenden Ränder des oberen und unteren Schlitzes zusammenheften, so haben wir eine Windungsfläche, in welcher die Uebergangslinie durch eine Curve von beliebiger Gestalt repräsentirt ist.

Zur Construction einer Windungsfläche sind bis jetzt zwei Methoden angegeben worden. Eine dritte Methode zur Construction einer solchen Fläche ist folgende:

Man denke sich die in Fig. 35 gezeichnete, um den Punct C herumlaufende ebene Curve als die Leitcurve eines Kegels, dessen Scheitelpunct irgendwo im Raume liegt; und denke sich sodann diesen Scheitelpunct auf irgend welchem Wege näher und näher an den Punct C herankommend; dann wird sich die Mantelfläche des Kegels mehr und mehr abplatten, bis sie zuletzt vollständig mit der Ebene der Leitcurve zusammenfällt. In diesem Endzustande wird dann die Mantelfläche des Kegels identisch sein mit der vorhin besprochenen Windungsfläche. Der Punct C wird den Windungspunct, und die Linie CD die Uebergangslinie vorstellen.

Fig. 35.

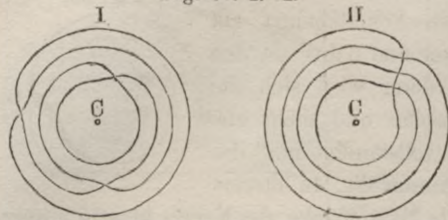


Es wird zweckmässig sein, hier zugleich andere Windungsflächen, nämlich Windungsflächen höherer Ordnung mit in unsere Betrachtung hineinzuziehen.

Die Leitcurve (Fig. 35) läuft nach 2 vollen Umdrehungen in ihren Anfang zurück. Nimmt man statt dieser eine Curve, die nach m vollen Umdrehungen in ihren Anfang zurückläuft, so erhält man, falls $m > 2$ ist, eine Windungsfläche höherer Ordnung, und falls $m < 2$, also $= 1$ ist, eine Windungsfläche niederer Ordnung. Im erstern Fall gelangt man zu einer Fläche, welche, je nachdem $m = 3, 4, 5, \ldots$ ist, die Ebene allenthalben 3fach, 4fach, 5fach u. s. w. bedeckt; im letztern zu einer Fläche, welche die Ebene überall 1fach bedeckt, d. i. zu einer gewöhnlichen einblätterigen ebenen Fläche. Riemann nennt diejenige Windungsfläche, welche durch Anwendung einer Leitcurve von m vollen Umdrehungen entsteht, eine Windungsfläche $(m-1)$ter Ordnung; so dass also die vorhin betrachtete, der Leitcurve in Fig. 35 entsprechende Fläche eine Windungsfläche 1ter Ordnung heisst, und andererseits die gewöhnliche einblätterige ebene Fläche eine Windungsfläche 0ter Ordnung genannt werden kann.

Um eine Windungsfläche 3ter Ordnung zu erhalten, wird man, wie beispielsweise bemerkt werden mag, $m = 4$ nehmen müssen, nämlich eine Leitcurve in Anwendung bringen müssen, welche, wie die in Fig. 36 I. oder II. gezeichnete, nach 4 vollen Umdrehungen in sich zurückläuft. Man wird also einen Kegelmantel construiren müssen, der eine von diesen beiden Curven zur Leitcurve und seinen Scheitelpunct zu Anfang irgendwo im Raume hat; sodann wird man die in Rede stehende Windungsfläche erhalten, wenn man jenen Scheitelpunct auf irgend welchem Wege näher und näher an den Punct C heranrücken und zuletzt in C hineinfallen lässt. Der Punct C selber wird dann der **Windungspunct** werden. Eine solche Windungsfläche 3ter Ordnung besitzt, wie wir sehen, 3 **Uebergangslinien**. Diese 3 Linien werden, je nach Beschaffenheit der gerade in Anwendung gebrachten Leitcurve, entweder unter irgend welchen Winkeln gegen einander geneigt sein (Fig. 36. I.), oder auch gerade über einander liegen können (Fig. 36. II.)*).

Fig. 36. I. II.



Zweiter Abschnitt. Die Wurzelgrösse $\sqrt{Z}$ besitzt, falls man unter Z eine ganze rationale Function von $x + iy$ versteht, in jedem Puncte der Horizontalebene zwei Werthe. Abwickelung einer Reihe von Werthen, welche längs einer gegebenen Curve hin stetig auf einander folgen.

Es seien $A = P + iQ$, $B = P' + iQ'$, $C = P'' + iQ''$ drei beliebig gegebene Constanten, und $z = x + iy$ eine variable Grösse. Geometrisch betrachtet, werden alsdann A, B, C drei Puncte vorstellen, welche auf der Horizontalebene irgend welche *feste* Lagen besitzen, während z einen vierten Punct repräsentirt, der sich auf dieser Ebene nach Belieben *bewegen* kann.

Wir wollen nun die von z abhängende Wurzelgrösse:

(1) $$f = \sqrt{(z - A)\ (z - B)\ (z - C)}$$

betrachten, und die Werthe, welche diese Wurzelgrösse je nach der Lage des Punctes z annimmt, einer genaueren Untersuchung unterwerfen. Wir ziehen zu diesem Zweck von den festen Puncten A, B, C drei Linien nach dem beweglichen Puncte z hin, bezeichnen die Längen dieser Linien mit a, b, c, und die Winkel, unter welchen dieselben gegen die x Achse geneigt sind, mit u, v, w (Fig. 37). Alsdann ist:

*) Eine Windungsfläche 3ter Ordnung kann übrigens auch **mehr** als 3 Uebergangslinien besitzen.

$$x - P = a \cos u,$$
$$y - Q = a \sin u,$$

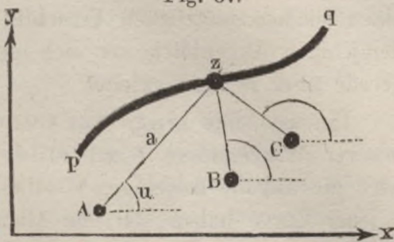
mithin:

$$(x + iy) - (P + iQ) =$$
$$= a (\cos u + i \sin u),$$

d. i.

$$z - A = a e^{iu}.$$

Fig. 37.



Und ebenso wird:

$$z - B = b e^{iv},$$
$$z - C = c e^{iw}.$$

Somit ergiebt sich, falls man die **positiven** Werthe der Quadratwurzeln aus a, b, c mit α, β, γ bezeichnet, für unsere Wurzelgrösse f folgender Werth:

$$(2) \qquad f = \varepsilon \, . \, \alpha e^{\frac{iu}{2}} . \beta e^{\frac{iv}{2}} . \gamma e^{\frac{iw}{2}} = \varepsilon \, . \, \alpha \beta \gamma \, . \, e^{\frac{i(u+v+w)}{2}},$$

oder, was dasselbe ist:

$$(3) \qquad f = \varepsilon \, . \, \alpha \beta \gamma \left(\cos \frac{u+v+w}{2} + i \sin \frac{u+v+w}{2} \right),$$

wo ε nach Belieben bald gleich $+1$, bald gleich -1 gesetzt werden kann.

Der letzterhaltene Ausdruck (3) giebt uns eine deutliche Vorstellung von der Art und Weise, in welcher der Werth unserer Wurzelgrösse f sich ändert, sobald wir dem Puncte z andere Lagen zuertheilen.

Wir wollen (Fig. 37) den Punct z auf irgend einer beliebig gegebenen Curve pq fortlaufen lassen. Während dieser Bewegung wird sich der Werth unserer Wurzelgrösse

$$f = \varepsilon \, . \, \alpha \beta \gamma \left(\cos \frac{u+v+w}{2} + i \sin \frac{u+v+w}{2} \right),$$

falls wir ε überall gleich $+1$ nehmen, Schritt für Schritt auf **stetige** Weise ändern. Gleiches wird offenbar auch dann der Fall sein, wenn wir ε überall gleich -1 nehmen. Gleiches wird aber unter besondern Umständen auch dann noch stattfinden können, wenn wir den Factor ε, während z auf jener Curve fortläuft, plötzlich aus der einen Bedeutung in die andere umschlagen lassen. Hat nämlich zufälliger Weise f in irgend einem Puncte N jener Curve den Werth **Null**, so wird die Aenderung von f

längs der Curve auch dann noch eine stetige sein, wenn wir einen solchen plötzlichen Umschlag in der Bedeutung von ε in demjenigen Augenblick vor sich gehen lassen, wo der Punct z gerade über N hinweggleitet.

Um also eine längs der Curve pq stetige Werthreihe unserer Wurzelgrösse f auf eindeutige Weise zu bestimmen, wird die Angabe desjenigen Werthes, welchen ε im Anfangspunct p jener Curve haben soll, im Allgemeinen noch nicht genügend sein. Vielmehr wird solches nur dann hierzu ausreichend sein, wenn die gegebene Curve pq nirgends auf ihrem Wege einen Nullpunct von f berührt.

Die Nullpuncte der Wurzelgrösse f lassen sich leicht angeben. Da nämlich der Ausdruck

$$\cos\frac{u+v+w}{2} + i\sin\frac{u+v+w}{2}$$

nirgends verschwinden kann,*) so wird der Werth der Wurzelgrösse:

$$f = \varepsilon\,.\,\alpha\beta\gamma\left(\cos\frac{u+v+w}{2} + i\sin\frac{u+v+w}{2}\right)$$

nur dann Null werden, wenn eine der drei Grössen α, β, γ verschwindet, also nur dann Null werden, wenn der bewegliche Punct z in einen der Puncte A, B, C hineinfällt. Es besitzt demnach f im Ganzen nur drei Nullpuncte, das sind die Puncte A, B und C.

Somit gelangen wir zu folgendem Resultat:

Es seien p und q zwei beliebig gegebene Puncte, ferner sei irgend eine Curve gegeben, welche, ohne einen der Puncte A, B, C zu berühren, von p nach q hinläuft.

Eine längs dieser Curve fortlaufende Werthreihe der Wurzelgrösse:

$$f = \sqrt{z-A\,.\,z-B\,.\,z-C}$$

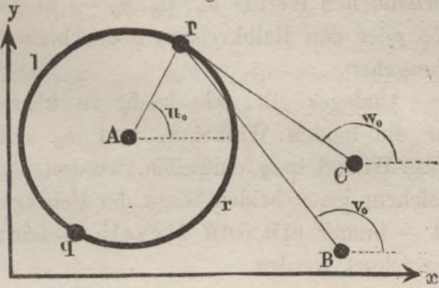
---

*) $\cos x + i\sin x$ kann, falls (wie das hier der Fall ist) x nur reelle Werthe annehmen darf, nur dann Null werden, wenn die beiden Grössen $\cos x$ und $\sin x$ gleichzeitig verschwinden. Solches kann aber, weil $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ist, mithin die eine von jenen beiden Grössen jederzeit ± 1 wird, sobald die andere Null ist, niemals eintreten. Demnach kann der Ausdruck $\cos x + i\sin x$ niemals verschwinden.

wird alsdann, falls sie aus lauter stetig auf einander folgenden Werthen bestehen soll, durch Angabe ihres Anfangswerthes im Puncte p eindeutig bestimmt sein.

Sind $+f_0$ und $-f_0$ die beiden Werthe, welche die Wurzelgrösse f im Puncte p besitzt, so wird man, falls man einmal $+f_0$, das andere Mal $-f_0$ zum Anfangswerthe nimmt, zwei solche eindeutig bestimmte Werthreihen erhalten, und zwar zwei Werthreihen, welche unter einander durchweg entgegengesetzt sind.

Fig. 38.



Es seien p und q (Fig. 38) zwei Puncte, welche auf einem um A beschriebenen Kreise liegen, und zwar zwei Puncte, welche, wie wir vorläufig der Einfachheit willen annehmen wollen, auf der Peripherie dieses Kreises einander diametral gegenüberliegen. Die Werthe, welche die in unserem Ausdruck

$$f = \varepsilon \,.\, \alpha\beta\gamma \left(\cos \frac{u+v+w}{2} + i \sin \frac{u+v+w}{2}\right)$$

enthaltenen Grössen α, β, γ, u, v, w im Puncte p besitzen, mögen mit α_0, β_0, γ_0, u_0, v_0, w_0 bezeichnet werden; und ausserdem mag daselbst ε gleich $+1$ gesetzt werden. Wir haben dann in jenem Puncte p für unsere Wurzelgrösse f folgenden Werth:

$$f_0 = \alpha_0\beta_0\gamma_0 \left(\cos \frac{u_0+v_0+w_0}{2} + i \sin \frac{u_0+v_0+w_0}{2}\right).$$

Wir wollen nun von p aus auf der Peripherie des gegebenen Kreises entlang weiter und weiter fortgehen, während dieser Bewegung den Werth von f sich Schritt für Schritt auf stetige Weise ändern lassen, und denjenigen Werth in Betracht ziehen, mit welchem wir alsdann im Puncte q eintreffen werden. Wir können dabei nach q auf doppelte Weise gelangen, nämlich entweder dadurch, dass wir (Fig. 38) den Halbkreis plq, oder dadurch, dass wir den Halbkreis prq durchlaufen. Es wird sich zeigen, dass, je nachdem wir das eine oder das andere thun, der in q sich ergebende Werth ein sehr verschiedener ist.

Es ist zunächst erforderlich, die Werthe ins Auge zu fassen, welche die in unserer Function enthaltenen Grössen α, β, γ, u, v, w annehmen, sobald wir von p aus auf dem einen oder auf dem andern Wege nach q hinwandern.

Die Werthe von α, β, γ sind in Folge unserer Festsetzungen für jedweden Punct der Horizontalebene eindeutig bestimmt; denn für jeden Punct sind unter α, β, γ die positiven Quadratwurzeln derjenigen Entfernungen zu verstehen, welche der Punct von A, B, C aus besitzt. Bezeichnen wir daher diese Quadratwurzeln für den Punct q mit α_1, β_1, γ_1, so werden die in p vorhandenen Werthe α_0, β_0, γ_0 — mögen wir nun den Halbkreis plq oder den Halbkreis prq durchlaufen — immer in α_1, β_1, γ_1 übergehen.

Analoges gilt, wie leicht zu übersehen ist (Fig. 38), auch für die beiden Winkel v_0 und w_0. Die Werthe, mit welchen diese Winkel in q eintreffen, werden nämlich — gleichgültig, auf welchem jener beiden Wege der Uebergang von p nach q erfolgt ist — immer ein und dieselben sein; sie mögen mit v_1 und w_1 bezeichnet werden.

Anders aber verhält es sich mit dem Winkel u_0. Dieser wird nämlich, falls wir den Weg plq durchlaufen, um π wachsen, hingegen, wenn wir den Weg prq durchwandern, um π abnehmen. Demnach sind die Werthe, welche wir, je nach Durchlaufung des einen oder andern Weges, im Puncte q für den Winkel u erhalten, verschieden, nämlich gleich $u_0 + \pi$ und $u_0 - \pi$.

Unsere Wurzelgrösse f wird also, bei Durchlaufung des Halbkreises plq, in q mit folgendem Werthe anlangen:

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1\left(\cos\frac{(u_0+\pi)+v_1+w_1}{2}+i\sin\frac{(u_0+\pi)+v_1+w_1}{2}\right),$$

bei Durchlaufung des Halbkreises prq hingegen in jenem Puncte mit dem Werthe

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1\left(\cos\frac{(u_0-\pi)+v_1+w_1}{2}+i\sin\frac{(u_0-\pi)+v_1+w_1}{2}\right)$$

eintreffen. Diese beiden Werthe sind aber, weil

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

ist, unter einander entgegengesetzt.

Wir sind hier bei Durchlaufung der Halbkreise plq und prq beide Male von p aus mit demselben Anfangswerth von f ausgegangen; die Werthe, welche sich dann in q ergeben, sind, wie wir eben gesehen haben, unter einander entgegengesetzt.

Umgekehrt wird sich die Sache verhalten, wenn wir bei Durchlaufung jener beiden Halbkreise in p mit entgegengesetzten Anfangswerthen ausgehen. In diesem Fall werden nämlich, wie sich leicht übersehen lässt, die in q sich ergebenden Werthe unter einander gleich sein.

Uebrigens ist es gleichgültig, ob wir die beiden Puncte p, q einander diametral gegenüber liegend wählen, oder ob wir denselben eine beliebige andere Lage auf der Peripherie des um A beschriebenen Kreises anweisen. Wir kommen demnach zu folgendem Resultat:

Auf der Peripherie eines Kreises, welcher um einen der drei Puncte A, B, C beschrieben ist und keinen der beiden andern Puncte in sich enthält, mögen irgend zwei feste Puncte p, q und ferner zwei bewegliche Puncte z, z gedacht werden. Die beiden letztern laufen — so mag angenommen werden — auf der Peripherie des Kreises in entgegengesetzten Richtungen fort; beide gehen gleichzeitig von p aus, und treffen sodann nach einiger Zeit von verschiedenen Seiten her in q wieder zusammen.

Werden nun den beiden Puncten z zwei Werthe der Wurzelgrösse

$$f = \sqrt{z - A \,.\, z - B \,.\, z - C}$$

zuertheilt, und zwar zwei Werthe, welche in dem Augenblick, wo beide Puncte von p auslaufen, von gleicher Grösse sind, und welche sich während des weiteren Fortganges jener Puncte Schritt für Schritt auf stetige Weise ändern sollen, so werden diese Werthe in dem Augenblick, wo beide Puncte in q anlangen, ihre Gleichheit völlig verloren haben, nämlich von entgegengesetzter Grösse sein.

Und umgekehrt werden jene beiden Puncte z, falls sie zu Anfang in p mit entgegengesetzten Werthen ausgehen, in q mit gleichen Werthen anlangen.

Dritter Abschnitt. Fortsetzung. Aus dem Werthvorrath, welchen $\sqrt{Z}$ besitzt, wird ein die ganze Horizontalebene überdeckendes und überall eindeutiges Werthsystem abgeschieden.

Die Wurzelgrösse:

$$f = \sqrt{z - A \,.\, z - B \,.\, z - C}$$

verschwindet in A, B, C und ist mit Ausnahme dieser Puncte überall zweideutig. Um eine eindeutige Function zu gewinnen, müsste man in jedwedem Puncte z immer nur den einen Werth der Wurzelgrösse beibehalten und den andern bei Seite werfen. Doch wird sich solches, wie wir sogleich sehen werden, nicht immer der Art ausführen lassen, dass die zurückbehaltenen Werthe stetig unter einander zusammenhängen.

Es sei z_0 ein beliebig gewählter Punct auf der Horizontalebene; von den beiden Werthen, welche unsere Wurzelgrösse f in diesem Puncte besitzt, pflanzen wir daselbst nur den einen (er mag f_0 genannt werden) auf, und lassen den andern (dieser wird $-f_0$ sein) ganz ausser Spiel.

Wollen wir nun im Bereich des Punctes z_0 Werthe aufpflanzen, welche mit dem in z_0 hingestellten stetig zusammenhängen, so haben wir gar keine Wahl. Denn in jedem Puncte des genannten Bereiches sind überhaupt nur zwei Werthe möglich; der eine ist immer unendlich wenig von $+f_0$, der andere unendlich wenig von $-f_0$ verschieden, und wir müssen daher, falls wir einen stetigen Zusammenhang haben wollen, nothwendigerweise den ersteren nehmen.

Wir lassen nun das kleine Flächenstück, durch welches das Bereich des Punctes z_0 dargestellt wird, sich nach allen Seiten hin mehr und mehr erweitern, und pflanzen dabei in jedem Augenblick in den neu hinzugetretenen Puncten immer diejenigen Werthe auf, welche sich den schon vorhandenen auf stetige Weise anschliessen.

Wir haben alsdann ein im Wachsen begriffenes Werthsystem vor uns, nämlich ein Werthsystem vor uns, dessen Umgrenzungslinie sich, etwa ähnlich wie ein im Puncte z_0 erregter Wellenring, nach allen Seiten hin weiter und weiter fortbewegt.

Geschieht diese Fortbewegung nach allen Seiten hin mit ein und derselben Geschwindigkeit, so wird die Umgrenzungslinie des

Werthsystems beständig kreisförmig sein; ist hingegen jene Geschwindigkeit nach verschiedenen Seiten hin eine verschiedene, so wird die Umgrenzungslinie im Verlaufe der Zeit andere und andere Gestalten annehmen, und zwar Gestalten von irgend welcher unregelmässigen Form.

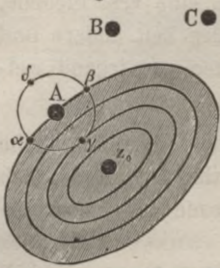
Es seien z_1 und z_2 irgend zwei einander unendlich nahe Puncte auf der Horizontalebene. Unser Werthsystem habe sich so weit ausgedehnt, dass z_1 augenblicklich gerade auf seiner Umgrenzungslinie liegt, während sich z_2 noch ausserhalb des Werthsystems befindet, und erst im nächstfolgenden Augenblick von demselben erreicht werden wird; ferner sei f_1 der in z_1 vorhandene, unserem Systeme bereits einverleibte Werth; und endlich seien $+ f_2$ und $- f_2$ diejenigen beiden Werthe, welche in dem andern Puncte, in z_2, überhaupt möglich sind. Alsdann kann unter den beiden letztgenannten und einander entgegengesetzten Werthen im Allgemeinen immer nur einer vorhanden sein, welcher von f_1 unendlich wenig verschieden ist; der Ausnahmefall, dass beide Werthe von f_1 unendlich wenig abweichen, kann nämlich offenbar nur dann eintreten, wenn zufälliger Weise f_1 gerade gleich Null ist.

Im Allgemeinen kann daher auch kein Zweifel darüber stattfinden, welchen von den beiden Werthen $+ f_2$, $- f_2$ unser Werthsystem bei seinem weiteren Anwachsen in sich aufzunehmen hat; ein solcher Zweifel wird nur dann eintreten, wenn zufälliger Weise f_1 gleich Null ist, also nur dann, wenn der von uns gewählte Punct z_1 zufälliger Weise identisch ist mit einem der Puncte A, B, C.

Es sei A derjenige unter den Puncten A, B, C, welchen unser Werthsystem bei seiner Vergrösserung zuerst erreicht. Wir wollen den Augenblick ins Auge fassen, in welchem die Grenze des Systemes gerade über A hinübergleitet.

Der in diesem Augenblick in A selber vorhandene Werth ist Null und, wie wir gesehen haben, unbrauchbar, um über diejenigen Werthe zu entscheiden, welche das System bei seinem weiteren Anwachsen in sich aufzunehmen hat. Wir müssen demnach versuchen, ob zu diesem Zweck nicht vielleicht diejenigen Werthe verwendet werden können, welche sich in unserm System zu beiden Seiten von A, nämlich bei α und β vorfinden (Fig. 39).

Fig. 39.



Der Bequemlichkeit willen seien α und β gleich weit von A aus entfernt, ihre gemeinsame Entfernung $= \varrho$; mit ϱ als Radius mag um A ein Kreis beschrieben werden; die eine Hälfte dieses Kreises wird alsdann innerhalb, die andere ausserhalb unseres Werthsystems liegen; die erstere mag mit $\alpha\gamma\beta$, die letztere mit $\alpha\delta\beta$ bezeichnet werden.

Da unter den Werthen, welche unser System bis jetzt besitzt, überall stetiger Zusammenhang herrscht, so werden auch diejenigen Werthe, von welchen die halbkreisförmige Linie $\alpha\gamma\beta$ bedeckt ist, stetig mit einander zusammenhängen. Um nun denjenigen Werth zu erhalten, welchen das System bei seiner weiteren Ausdehnung im Puncte δ in sich aufnehmen muss, werden wir die auf jener halbkreisförmigen Linie $\alpha\gamma\beta$ bereits vorhandene Werthreihe, entweder über α, oder über β hinaus, auf stetige Weise zu verlängern haben. Je nachdem wir aber das eine, oder das andere unternehmen, erhalten wir, wie sich aus einem früher (S. 173) gefundenen Satz ergiebt, im Puncte δ sehr verschiedene, nämlich einander entgegengesetzte Werthe.

Pflanzt man also in irgend welchem Puncte z_0 der Horizontalebene von den beiden Werthen, welche die Wurzelgrösse

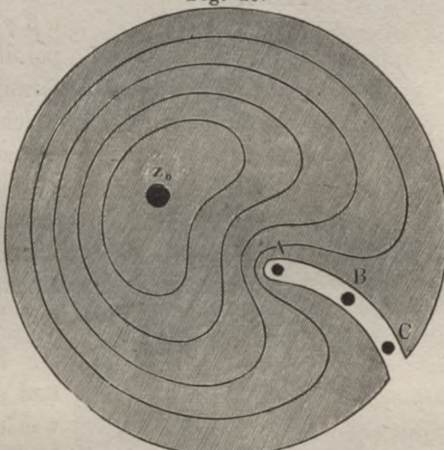
$$f = \sqrt{(z-A)(z-B)(z-C)}$$

daselbst besitzt, nur einen auf, und bildet man sodann um jenen Punct herum ein Werthsystem, welches sich dem dort aufgepflanzten Werth in stetiger Weise anschliesst, und welches sich von jenem Puncte aus nach allen Seiten hin mehr und mehr erweitert: so werden die Werthe, welche dieses System in sich aufzunehmen hat, eindeutig bestimmt sein, so lange das von ihm bedeckte Gebiet der Horizontalebene noch keinen der Puncte $z = A$, $z = B$, $z = C$ in sich enthält, hingegen zweideutig werden in demjenigen Augenblick, in welchem die Grenze jenes Gebietes über irgend einen dieser Puncte hinübergleitet.

Um nun trotzdem aus den Werthen der gegebenen Function ein die ganze Horizontalebene bedeckendes und überall eindeutiges Werthsystem abzuscheiden, dient folgendes Verfahren.

Wir stellen uns die Horizontalebene als eine unendlich grosse Kreisfläche $\mathfrak{H}$ vor, deren Mittelpunct im Anfangspunct des Coordinatensystemes liegt; wir scheiden sodann von dieser Kreisfläche einen äusserst schmalen Flächenstreifen ab, welcher die Puncte A, B, C in sich enthält, nämlich einen Flächenstreifen, welcher im Puncte A seinen Anfang nimmt, und von hier aus über die beiden andern Puncte B und C hin bis zum unendlich fernen Rande der Kreisfläche $\mathfrak{H}$, etwa bis U fortschreitet; der nach Absonderung dieses Streifens noch übrig bleibende Theil der Fläche mag mit $\mathfrak{H}'$ bezeichnet werden. Wir bilden nun wieder um den Punct z_0 herum ein Werthsystem, welches sich dem dort festgesetzten Anfangswerth f_0 stetig anschliesst, und lassen die Grenze dieses Systems (Fig. 40) sich weiter und weiter ausdehnen, jedoch so, dass sie beständig innerhalb $\mathfrak{H}'$ bleibt. Denken wir uns diese Ausdehnung so weit fortgesetzt, bis jene Grenze schliesslich mit der Randcurve von $\mathfrak{H}'$ zusammenfällt, so haben wir alsdann ein die ganze Fläche $\mathfrak{H}'$ überdeckendes und überall eindeutiges Werthsystem vor uns.

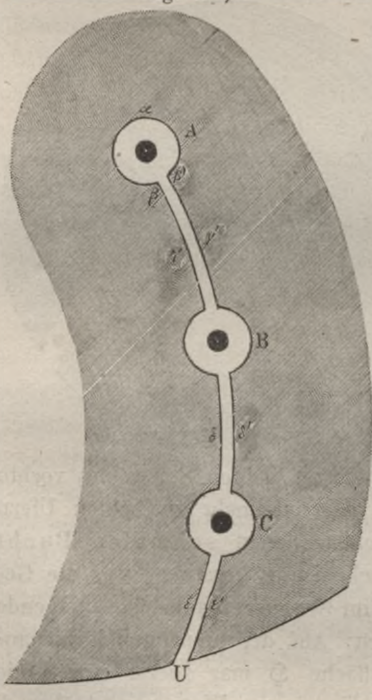
Fig. 40.



Es bedarf nun einer näheren Untersuchung über diejenigen Werthe, welche das so erhaltene eindeutige System zu beiden Seiten des vorhin abgesonderten Flächenstreifens, oder vielmehr zu beiden Ufern der durch jene Absonderung entstandenen schmalen Bucht $ABCU$ besitzt. Zu diesem Zwecke ist es gerathen, was die Gestalt der eben genannten Bucht im Genaueren anbelangt, folgende Construction zu Grunde zu legen: Auf der ursprünglich vorhandenen, unendlich grossen Kreisfläche $\mathfrak{H}$ mag zuerst eine Linie gezogen werden, welche auf beliebigem Wege von A über B und C bis zum Rande der Fläche, etwa bis U hin fortgeht; gleichzeitig mögen um A, um B und um C kleine Kreise beschrieben werden; sodann mögen von der Fläche $\mathfrak{H}$ diejenigen Stücke ab-gesondert werden, welche innerhalb dieser kleinen Kreise sich befinden; und endlich mag noch ein Schnitt ausgeführt werden, welcher längs der Linie $ABCU$ fortgeht, also ein Schnitt, welcher in der bei A vorhandenen kreisförmigen Oeffnung anfängt, die bei B und C vorhandenen Oeffnungen diametral überspringt, und endlich im Rande der Fläche, nämlich in U endigt. Dieser Schnitt wird alsdann in Verbindung mit den kleinen bei A, B, C vorhandenen Oeffnungen als eine Bucht angesehen werden können, deren gegenüberliegende Ufer, abgesehen von den bei A, B, C vorhandenen kreisförmigen Erweiterungen, einander überall unendlich nahe sind. Die mit dieser Bucht versehene Fläche ist es nun, welche unter $\mathfrak{H}'$ hinfort verstanden werden soll.

Die Bucht $ABCU$ besitzt (Fig. 41) zwei einander gegenüberliegende Uferlinien $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ und $\alpha\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'$, welche theils aus parallelen, theils aus halbkreisförmigen Strecken bestehen, und welche im Puncte α mit einander zusammenhängen. Wir bezeichnen die Werthe, welche das auf der Fläche $\mathfrak{H}'$ ausgebreitete, überall eindeutige Werthsystem längs der Linie $\alpha\beta\gamma\ldots$ besitzt, mit

Fig. 41*).



(1) $f_\alpha,\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4,\ \ldots,$

und andererseits diejenigen, welche jenes System längs der Linie $\alpha\beta'\gamma'\ldots$ besitzt, mit

(2) $f_\alpha,\ f_1',\ f_2',\ f_3',\ f_4'\ \ldots$

Jenes System ist auf der Fläche $\mathfrak{H}'$ überall stetig; demnach wird jede von den Reihen (1) und (2) aus stetig aufeinanderfolgenden Werthen bestehen. Zugleich bestehen aber die Reihen (1) und (2) auch aus Werthen, welche sämmtlich zu dem

*) In Fig. 41 sind unter A, B, C die Mittelpuncte der drei kleinen kreisförmigen Oeffnungen zu verstehen.

in der Wurzelgrösse

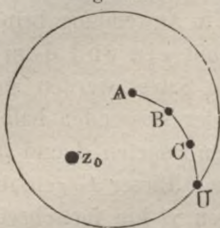
$$f = \sqrt{(z-A)(z-B)(z-C)}$$

enthaltenem Werthvorrath gehören. Daraus folgt, dass dieselben als zwei Reihen angesehen werden können, welche sich aus jenem Werthvorrath, den beiden Uferlinien $\alpha\beta\gamma\ldots$ und $\alpha\beta'\gamma'\ldots$ entlang, auf stetige Weise abwickeln.

Demgemäss können wir auf die Reihen (1) und (2) sofort zwei früher gefundene Sätze (S. 170 u. 173) in Anwendung bringen. Beide Reihen beginnen im Puncte α mit ein und demselben Anfangswerthe. Zufolge des zweiten Satzes werden sie daher, nach Durchlaufung der in α an einander stossenden halbkreisförmigen Uferstrecken $\alpha\beta$ und $\alpha\beta'$, in den Puncten β und β' mit entgegengesetzten Werthen eintreffen. Dieser Gegensatz wird sodann, wenn beide Reihen weiter gegen B hin fortschreiten, Schritt für Schritt vorhanden bleiben; so z. B. werden die Reihen in den Puncten γ und γ' ebenfalls mit entgegengesetzten Werthen eintreffen. Solches ergiebt sich unmittelbar aus dem ersten der vorhin genannten Sätze. In dem Augenblick, wo die Reihen in der Nähe von B zu den hier beginnenden halbkreisförmigen Uferstrecken gelangen, ist jener Gegensatz noch immer vorhanden. Bei Durchlaufung dieser Halbkreise verschwindet er aber; in den beiden Puncten nämlich, wo die Halbkreise enden und wiederum in parallele Uferstrecken übergehen, werden die Reihen mit Werthen eintreffen, welche, wie aus den angeführten Sätzen folgt, einander völlig gleich sind. Diese Gleichheit bleibt nun, während beide Reihen nach C hin fortschreiten, ungeändert bestehen. Nach Durchlaufung der bei C liegenden halbkreisförmigen Uferstrecken treten sodann von Neuem entgegengesetzte Werthe ein. Und dieser Gegensatz bleibt dann endlich, während beide Reihen nach dem unendlichen fernen Puncte U hinlaufen, fortwährend vorhanden.

Die betrachteten Reihen (1) und (2) bestehen aus denjenigen Werthen, welche das von uns auf der Fläche $\mathfrak{H}'$ ausgebreitete und daselbst überall eindeutige System zu beiden Ufern der Bucht $ABCU$ besitzt. Es wird demnach dieses System zu beiden Ufern jener Bucht zwischen A und B **entgegengesetzte,** zwischen B und C **gleiche,** und zwischen C und U wiederum einander **entgegengesetzte** Werthe haben. Uebrigens können wir, was die Beschaffenheit jener Bucht anbelangt, die um A, B, C beschriebenen Kreise beliebig klein, mithin auch unendlich klein nehmen. Thun wir dies, so verwandelt sich die Bucht einfach in einen Schnitt, welcher von A aus auf beliebigem Wege über die Puncte B und C hinweg bis zum unendlich fernen Rande, nämlich bis U fortläuft (Fig. 42).

Fig. 42.



Man übersieht leicht, dass die eben erlangten Ergebnisse sich leicht verallgemeinern, sich z. B. leicht übertragen lassen auf die Wurzelgrösse:

$$\sqrt{(z-A)\,(z-B)\,(z-C)\,(z-D)},$$

ebenso auf die Wurzelgrösse:

$$\sqrt{(z-A)\,(z-B)\,(z-C)\,(z-D)\,(z-E)};$$

überhaupt auf Wurzelgrössen, welche unter dem Wurzelzeichen beliebig viele Factoren enthalten. Folglich:

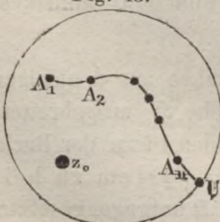
Sind A_1, A_2, ... A_n beliebig gegebene Constanten, so kann man, um aus dem Werthvorrathe, welchen die Wurzelgrösse:

$$\sqrt{(z-A_1)\,(z-A_2)\,\ldots\,(z-A_n)}$$

besitzt, ein eindeutiges und stetig in sich zusammenhängendes Werthsystem abzuscheiden, in folgender Weise verfahren:

Man denke sich die Horizontalebene als eine um den Anfangspunct des Coordinatensystems mit unendlich grossem Radius beschriebene Kreisfläche $\mathfrak{H}$, führe in dieser Kreisfläche einen von A_1 ausgehenden und auf beliebigem Wege über A_2, A_3, ... A_n bis zum unendlich fernen Rande etwa bis U fortlaufenden Schnitt aus, und bezeichne die solcher Weise entstehende Fläche mit $\mathfrak{H}'$. (Fig. 43.)

Fig. 43.



Man pflanze sodann auf der Fläche $\mathfrak{H}'$ in irgend welchem Punct z_0 von den beiden Werthen, welche die gegebene Wurzelgrösse daselbst besitzt, nur einen — gleichgültig welchen — auf, pflanze ferner um jenen Punct herum diejenigen Werthe der Wurzelgrösse auf, welche sich dem dort festgesetzten Anfangswerthe in stetiger Weise anschliessen, und lasse das so erhaltene Werthsystem nach allen Seiten hin sich mehr und mehr ausdehnen, jedoch der Art, dass die Grenze des

Systems, während sie mehr und mehr vorgeschoben wird, den Rand der Fläche $\mathfrak{H}'$, mithin auch die zu diesem Rande gehörigen Ufer des Schnittes $A_1 A_2 A_3 \ldots U$ nirgends überschreitet. Denkt man sich diese Ausdehnung so weit fortgesetzt, bis die Grenze des Systems schliesslich mit dem Rande der Fläche $\mathfrak{H}'$ zusammenfällt, so entsteht alsdann ein die ganze Fläche $\mathfrak{H}'$ überdeckendes und auf dieser Fläche überall eindeutiges und stetiges Werthsystem.

Was die Werthe anbelangt, welche dieses System zu beiden Ufern des Schnittes $A_1 A_2 A_3 \ldots U$ besitzt, so ist zu bemerken, dass diese Werthe längs der Schnittstrecke $A_1 A_2$ einander entgegengesetzt, längs der Strecke $A_2 A_3$ einander gleich, längs der Strecke $A_3 A_4$ wiederum einander entgegengesetzt sind, u. s. w., dass also von einer Strecke zur andern hin fortwährend Gegensatz und Gleichheit mit einander wechselt. Auf der letzten Strecke, die von A_n bis U reicht, wird demnach Gleichheit stattfinden, falls n gerade, Gegensatz, falls n ungerade ist.

Vierter Abschnitt. Fortsetzung. Der ganze Werthvorrath, welchen $\sqrt{Z}$ überhaupt besitzt, wird gesondert in zwei Werthsysteme; diese beiden Systeme lassen sich auf stetige Art zusammenschmelzen zu einem einzigen. Als Träger des letztern dient aber dann nicht mehr die gewöhnliche Horizontalebene, sondern eine gewisse horizontale Doppelfläche. Diese Fläche wird eine Riemann'sche Fläche genannt.

Indem wir nun in unserer Untersuchung über die Wurzelgrösse

$$\sqrt{(z - A_1)(z - A_2) \ldots (z - A_n)}$$

weiter fortschreiten, wollen wir uns — allerdings nur der grösseren Bequemlichkeit willen — auf den Fall beschränken, dass n eine gerade Zahl, etwa $= 2\nu$ ist. Wir haben es dann zu thun mit der Wurzelgrösse:

$$f = \sqrt{(z - A_1)(z - A_2) \ldots (z - A_{2\nu})},$$

also mit einer Wurzelgrösse, die für unendlich grosse Werthe von z die Form:

$$f = \sqrt{z^{2\nu}}$$

d. i. die Form:

$$f = \pm z^\nu$$

annimmt.

Es seien $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ zwei horizontal über einander liegende, unendlich grosse Kreisflächen, welche nur durch einen unendlich kleinen Zwischenraum von einander getrennt sind. Diese beiden Flächen seien versehen mit einem gemeinschaftlichen rechtwinkligen Coordinatensystem; der Anfangspunct des Coordinatensystems mag dargestellt sein durch die über einander liegenden Mittelpuncte der beiden Kreisflächen; ferner mag die x Achse dargestellt sein durch irgend zwei über einander liegende Radien der beiden Flächen, und die y Achse durch zwei andere solche Radien, die zu den ersteren senkrecht sind. Auch mag — wie das stets der Fall sein soll — die gegenseitige Lage der x- und y-Achse der Art sein, dass der auf dem horizontalen Flächenpaar $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ im Ausgangspunct der beiden Achsen Stehende und in der Richtung der x Achse Fortsehende die y Achse zur Linken hat (vgl. S. 72).

Es seien $A_1, A_2, \ldots A_{2\nu}$ diejenigen Puncte, welche in den beiden Flächen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ durch $z = A_1$, $z = A_2, \ldots z = A_{2\nu}$ bestimmt werden. Wir führen nun einen Schnitt aus, welcher b e i d e Flächen durchdringt, im Puncte A_1 anfängt, und von hier aus auf beliebigem Wege über die Puncte $A_2, A_3, \ldots A_{2\nu}$ bis zum unendlich fernen Rande der Flächen, etwa bis U hin fortschreitet. In den Puncten $A_1, A_2, \ldots A_{2\nu}$ mag dieser Schnitt mit unendlich kleinen kreisförmigen Erweiterungen versehen sein. (Man vergl. etwa Fig. 41.) Nach Ausführung des Schnittes haben wir dann zwei Flächen vor uns, welche von den Puncten $A_1, A_2, \ldots A_{2\nu}$ k e i n e n e i n z i g e n in sich enthalten. Wir bezeichnen diese Flächen zur Unterscheidung mit $\mathfrak{H}_1'$ und $\mathfrak{H}_2'$.

Durch $z = z_0$ werden in den Flächen $\mathfrak{H}_1'$ und $\mathfrak{H}_2'$ zwei über einander liegende Puncte bestimmt. In jedem dieser Puncte pflanzen wir je einen von den beiden Werthen auf, welche die gegebene Wurzelgrösse f für $z = z_0$ besitzt, und breiten sodann in jeder der beiden Flächen dasjenige System aus, welches sich dem in solcher Weise festgesetzten Anfangswerth stetig anschliesst. Jedes dieser Systeme wird, weil die Flächen $\mathfrak{H}_1'$, $\mathfrak{H}_2'$ keinen der Puncte $A_1, A_2, \ldots A_{2\nu}$ in sich enthalten, in seiner ganzen Ausdehnung e i n d e u t i g bestimmt sein. Und beide Systeme zusammengenommen werden den ganzen Werthvorrath repräsentiren, welchen die gegebene Wurzelgrösse f überhaupt besitzt.

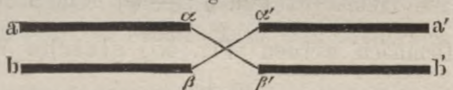
Die Werthe, welche die eben genannten Systeme auf den Flächen $\mathfrak{H}_1'$ und $\mathfrak{H}_2'$ in zwei über einander liegenden Puncten haben, sind identisch mit denjenigen, welche die gegebene Wurzelgrösse

$$f = \sqrt{(z - A_1)(z - A_2)\ldots(z - A_{2\nu})}$$

für das jenen Puncten zugehörige Argument z darbietet, und sind daher unter einander entgegengesetzt. Das auf $\mathfrak{H}_1'$ ausgebreitete System wird sich demnach durch Multiplication mit -1 in das auf $\mathfrak{H}_2'$ befindliche verwandeln.

Die Werthe, welche sich in jedem der beiden Systeme an den Ufern des Schnittes $A_1 A_2 A_3 \ldots U$ vorfinden, können unmittelbar nach dem vorhergehenden Satz beurtheilt werden. Zufolge jenes Satzes wird nämlich jedes dieser Systeme zu beiden Ufern der Schnittstrecke $A_1 A_2$ entgegengesetzte, zu beiden Ufern der folgenden Schnittstrecke $A_2 A_3$ gleiche Werthe besitzen, u. s. w. In solcher Weise werden von einer Schnittstrecke zur andern hin Gegensatz und Gleichheit mit einander wechseln; an den Ufern der letzten Schnittstrecke $A_{2\nu} U$ wird demnach Gleichheit stattfinden.

Fig. 44.



Es seien (Fig. 44), im Durchschnitt betrachtet, aa' und bb' zwei über einander liegende Theile der Flächen $\mathfrak{H}_1'$ und $\mathfrak{H}_2'$, und zwar zwei Theile, durch welche die Schnittstrecke $A_1 A_2$ hindurchgeht. Demgemäss seien α und α' zwei auf beiden Ufern dieser Schnittstrecke einander gegenüberliegende, zur Fläche $\mathfrak{H}_1'$ gehörige Puncte; ferner β und β' die darunter liegenden Puncte in der Fläche $\mathfrak{H}_2'$. Alle diese vier Puncte sind einander unendlich nahe und zusammengenommen etwa als die vier Ecken eines unendlich kleinen Quadrates anzusehen. Die Werthe, welche das auf $\mathfrak{H}_1'$ ausgebreitete System in α und α' besitzt, sind, wie eben erwähnt wurde, einander entgegengesetzt. Bezeichnen wir daher den in α vorhandenen Werth kurzweg mit φ, so wird der in α' vorhandene gleich $-\varphi$ sein. Aus diesen beiden Werthen ergeben sich aber durch Multiplication mit -1 diejenigen, welche das auf $\mathfrak{H}_2'$ ausgebreitete

System in den darunter liegenden Puncten β und β' besitzt. Es sind demnach in unsern vier Puncten im Ganzen folgende Werthe vorhanden:

$$(1)\qquad \begin{cases} \text{in } \alpha: \quad \varphi, & \text{in } \alpha': -\varphi, \\ \text{in } \beta: -\varphi, & \text{in } \beta': \quad \varphi. \end{cases}$$

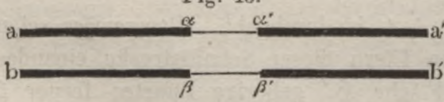
Die vier Puncte α, α', β, β' können als Repräsentanten der vier Uferlinien angesehen werden, welche die Schnittstrecke $A_1 A_2$ in den beiden Flächen $\mathfrak{H}_1'$ und $\mathfrak{H}_2'$ besitzt. Dieselbe Beziehung nämlich, welche zwischen den in jenen vier Puncten befindlichen Werthen stattfindet, dieselbe wird auch bei beliebigen andern vier Puncten vorhanden sein, welche, ebenso wie jene, auf der genannten Schnittstrecke neben und über einander liegen. Wir sehen demnach aus (1), dass die in den Uferlinien α und β' vorhandenen Werthe einander gleich sind, dass also, falls man jene beiden Ufer mit einander zusammenheftet, von beiden Seiten her gleiche Werthe zusammenstossen werden; und ferner, dass solches auch dann eintreten wird, wenn man die beiden Ufer α' und β zusammenheftet (Fig. 44).

Wir betrachten ferner die Schnittstrecke $A_2 A_3$. Sind wiederum α, α', β, β' irgend vier in dieser Strecke neben und über einander liegende Uferpuncte, so sind die in denselben vorhandenen Werthe gegenwärtig von folgender Form:

$$(2)\qquad \begin{cases} \text{in } \alpha: \quad \psi, & \text{in } \alpha': \quad \psi, \\ \text{in } \beta: -\psi, & \text{in } \beta': -\psi. \end{cases}$$

Demnach werden (Fig. 45) gleiche Werthe zusammenstossen, wenn man das Ufer α mit dem Ufer α' zusammenheftet; ebenso bei der Zusammenheftung des Ufers β mit β'.

Fig. 45.



Wir haben bis jetzt nur zwei Schnittstrecken $A_1 A_2$ und $A_2 A_3$ untersucht. Mit der dritten, fünften, siebenten, u. s. w. Schnittstrecke wird es sich aber, wie man sofort übersieht, genau ebenso verhalten, wie mit der ersten; die letzte von diesen Schnittstrecken ist die Strecke $A_{2\nu-1} A_{2\nu}$. Und andererseits wird es sich bei der vierten, sechsten, achten, u. s. w. Strecke ebenso verhalten, wie bei der zweiten; die letzte unter diesen ist die Schnittstrecke $A_{2\nu} U$.

Wir wollen uns nun die vorhin genannten Zusammenheftungen — es sind deren je zwei bei jeder einzelnen Schnittstrecke — sämmtlich ausgeführt denken. Die beiden Flächen $\mathfrak{H}_1'$ und $\mathfrak{H}_2'$ werden sich dann mit einander vereinigen zu einer einzigen zweiblättrigen Fläche; und diese mag, um ihre Entstehungsart einigermassen anzudeuten, mit $\mathfrak{H}_1' + \mathfrak{H}_2'$ bezeichnet werden. Die Fläche $\mathfrak{H}_1' + \mathfrak{H}_2'$ besteht, im Grossen und Ganzen betrachtet, aus zwei über einander liegenden unendlich grossen Kreisflächen, welche gewissermassen durch ν Doppelbrücken mit einander verbunden sind. Die erste von diesen Brücken zieht sich von A_1 nach A_2, die folgende von A_3 nach A_4, die dritte von A_5 nach A_6, u. s. w., endlich die letzte von $A_{2\nu-1}$ nach $A_{2\nu}$ hin. Bei jeder solchen Doppelbrücke (vergl. Fig. 44) durchsetzen einander zwei Flächentheile, nämlich diejenigen Flächentheile, aus welchen jene Doppelbrücke besteht; die Durchsetzung findet statt in einer gewissen Linie; in dieser Linie wird aber — zufolge der von uns angenommenen Grundsätze (S. 163) — zwischen den beiden einander durchsetzenden Flächentheilen kein Zusammenhang stattfinden. Bedienen wir uns der früher eingeführten Benennungen, so können wir jede von jenen Doppelbrücken als eine in der zweiblättrigen Fläche vorhandene Uebergangslinie bezeichnen. Und ebenso können wir die beiden Endpuncte einer solchen Doppelbrücke oder Uebergangslinie als zwei Windungspuncte bezeichnen; es besitzt nämlich dasjenige Gebiet der zweiblättrigen Fläche, welches um einen dieser Puncte herumliegt, genau dieselbe Beschaffenheit, welche wir früher (S. 165—167) bei den Windungsflächen erster Ordnung kennen gelernt haben. Ferner ist zu bemerken, dass die Fläche $\mathfrak{H}_1' + \mathfrak{H}_2'$ in ihrem Innern keinerlei Unterbrechungen besitzt, und dass sie äusserlich von zwei über einander liegenden unendlich grossen Kreislinien begrenzt ist.

Die beiden auf den Flächen $\mathfrak{H}_1'$ und $\mathfrak{H}_2'$ ausgebreiteten Systeme repräsentirten zusammengenommen den ganzen Werthvorrath, welcher in der gegebenen Wurzelgrösse f enthalten ist. Bei Ausführung der eben besprochenen Zusammenheftungen stossen in jeder Zusammenheftungslinie von beiden Seiten her gleiche Werthe jener Systeme zusammen. Demnach werden jene beiden Systeme bei Ausführung dieser Zusammenheftungen auf stetige Weise zu einem einzigen System zusammenschmelzen; dieses letztere wird getragen von der zweiblättrigen Fläche $\mathfrak{H}_1' + \mathfrak{H}_2'$, und repräsentirt den ganzen in der gegebenen Wurzelgrösse f enthaltenen Werthvorrath. Jedes der beiden Werthsysteme, welche zu Anfang auf den Flächen $\mathfrak{H}_1'$ und $\mathfrak{H}_2'$ ausgebreitet wurden, war daselbst überall stetig; beide Systeme sind auf stetige Weise mit einander vereinigt worden; demnach wird das durch diese Vereinigung entstandene, auf der Fläche $\mathfrak{H}_1' + \mathfrak{H}_2'$ ausgebreitete System auf dieser Fläche ebenfalls überall stetig sein.

Für ein unendlich grosses Argument z besitzt die Wurzelgrösse f, wie bereits früher bemerkt wurde (Seite 182), zwei Werthe, welche gleich $+ z^\nu$ und $- z^\nu$ sind. Demnach werden diejenigen Werthe, welche auf den beiden über einander liegenden unendlich fernen kreisförmigen Randcurven der Fläche $\mathfrak{H}_1' + \mathfrak{H}_2'$ vorhanden sind, durch $+ z^\nu$ und durch $- z^\nu$ dargestellt sein, und zwar die auf der einen Randcurve durch $+ z^\nu$, die auf der andern durch $- z^\nu$.

Wir können die Ergebnisse, zu welchen wir gelangt sind, folgendermassen zusammenfassen:

Sämmtliche Werthe, welche die Wurzelgrösse:

$$f = \sqrt{(z - A_1)(z - A_2) \ldots (z - A_{2\nu})}$$

überhaupt besitzt, lassen sich ausbreiten auf einer gewissen zweiblättrigen Fläche $\mathfrak{H}_1' + \mathfrak{H}_2'$, *und zwar der Art ausbreiten, dass diese Werthe daselbst überall eindeutig und stetig sind**). *Für die unendlich fernen Stellen der Fläche sind diese Werthe auf dem einen Blatt identisch mit denen von* $+ z^\nu$, *auf dem andern identisch mit denen von* $- z^\nu$.

Die Fläche $\mathfrak{H}_1' + \mathfrak{H}_2'$ *besitzt* 2ν *Windungspuncte* A_1, $A_2, \ldots A_{2\nu}$, *und* ν *Uebergangslinien* $A_1 A_2$, $A_2 A_3, \ldots A_{2\nu-1} A_{2\nu}$. *Jede von diesen Uebergangslinien ist nur bestimmt in Bezug auf ihre beiden Endpuncte, nämlich völlig beliebig in Bezug auf den*

*) In jeder Uebergangslinie, z. B. in der Linie $A_1 A_2$ durchsetzen einander zwei zur Fläche $\mathfrak{H}_1' + \mathfrak{H}_2'$ gehörige Flächentheile. Die Werthe, mit welchen diese beiden Flächentheile bei Ausbreitung der gegebenen Function belastet werden, sind unter einander entgegengesetzt. Trotzdem aber ist — zufolge der früher (Seite 164) adoptirten Grundsätze — die Function in der Nähe der Linie $A_1 A_2$ stetig zu nennen. Denn jeder von jenen beiden Flächentheilen wird, für sich allein betrachtet, mit lauter stetig zusammenhängenden Werthen belastet sein.

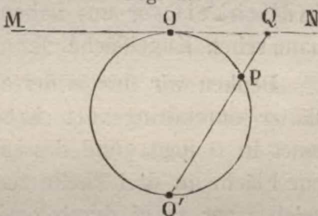
Weg, auf welchem sie von dem einen Puncte zum andern hin fortschreitet.

Es soll eine solche Fläche $\mathfrak{H}_1' + \mathfrak{H}_2'$, wie wir sie hier vor uns haben, in Zukunft eine Riemannsche Fläche genannt werden.

Fünfter Abschnitt. Fortsetzung. Die Riemann'sche ebene Fläche kann durch Umformung in eine Riemann'sche Kugelfläche verwandelt werden. Die Uebergangslinien einer Riemann'schen Fläche sind verschiebbar.

Wir wollen uns die Fläche $\mathfrak{H}_1' + \mathfrak{H}_2'$, ebenso wie bisher, horizontal denken und den Anfangspunct des darauf vorhandenen Coordinatensystems mit O bezeichnen. Unterhalb der Fläche construiren wir eine Kugel vom Durchmesser Eins, und von solcher Lage, dass sie jene Fläche in O berührt (Fig. 46). Der auf der Kugel zu O diametral gegenüberliegende Punct mag O' heissen.

Fig. 46.



Wir denken uns die Fläche $\mathfrak{H}_1' + \mathfrak{H}_2'$ als eine materielle Fläche, welche nach Belieben gebogen, gedehnt und zusammengezogen werden kann, und unterwerfen nun diese Fläche einer Umformung, bei welcher sich die einzelnen Puncte der Fläche von allen Seiten her auf geradlinigen Bahnen gegen den Punct O' hinbewegen, und zwar so weit gegen O' fortbewegen, bis sie zuletzt sämmtlich auf die Oberfläche der Kugel fallen. Nach Ausführung dieser Umformung werden also z. B. diejenigen beiden Puncte unserer Fläche, welche zu Anfang (Fig. 46) bei Q über einander lagen, gegenwärtig bei P über einander liegen. Bei O' wird sich das obere Blatt unserer Fläche schliessen, und ebenso auch das untere Blatt, so dass die Fläche bei O' dieselbe Beschaffenheit hat, wie etwa bei O, nämlich daselbst aus zwei platt über einander liegenden Flächentheilen besteht, welche durch einen unendlich kleinen Zwischenraum von einander getrennt sind.

Im Grossen und Ganzen wird die neue Gestalt, welche unsere Fläche durch diese Umformung erlangt, offenbar dargestellt sein durch zwei concentrische Kugelflächen, welche durch einen unendlich kleinen Zwischenraum von einander getrennt und durch ν Doppelbrücken mit einander verbunden sind. Sind $P_1, P_2, \ldots P_{2\nu}$ diejenigen Lagen, in welche die Puncte $A_1, A_2, \ldots A_{2\nu}$ durch die Umformung versetzt werden, so zieht sich die erste Doppelbrücke von P_1 nach P_2, die zweite von P_3 nach P_4, u. s. w., endlich die letzte von $P_{2\nu-1}$ nach $P_{2\nu}$ hin. In dieser neuen Gestalt soll die Fläche eine **Riemann'sche Kugelfläche** genannt, und kurzweg mit $\mathfrak{R}$ bezeichnet werden.

Während die Umformung vor sich ging, wollen wir uns die auf der Fläche ausgebreiteten Werthe von

$$f = \sqrt{(x - A_1)(z - A_2)\ldots(z - A_{2\nu})}$$

mit den einzelnen Puncten der Fläche unlöslich verbunden denken. Nach vollendeter Umformung werden wir alsdann sämmtliche Werthe, welche die Function f überhaupt besitzt, in der Endlichkeit vor uns haben, nämlich ausgebreitet auf der Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$.

Denken wir uns in der ebenen Fläche $\mathfrak{H}_1' + \mathfrak{H}_2'$ einen beide Blätter durchdringenden Kreisschnitt ausgeführt, dessen Mittelpunct in O liegt, und dessen Radius äusserst gross ist, so wird jene Fläche in drei Theile zerfallen, in einen inneren Theil $\mathfrak{J}$, welcher aus zwei durch gewisse Doppelbrücken mit einander verbundenen Blättern besteht, und in zwei über einander liegende und ringförmig gestaltete äussere Theile $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, von welchen jeder einblättrig ist.

Die auf der Fläche ausgebreiteten Werthe der Wurzelgrösse

$$f = \sqrt{(z - A_1)(z - A_2)\ldots(z - A_{2\nu})}$$

sind, wie wir wissen, auf $\mathfrak{J}$ überall eindeutig und stetig, ferner auf $\mathfrak{A}$ identisch mit denen von $+ z^\nu$, und auf $\mathfrak{B}$ identisch mit denen von $- z^\nu$. Verwandeln wir nun die Fläche $\mathfrak{H}_1' + \mathfrak{H}_2'$ durch die vorhin angegebene Umformung in die Kugelfläche $\mathfrak{R}$, so verwandelt sich jener Kreisschnitt in einen auf der Kugelfläche $\mathfrak{R}$ sehr nahe über O' fortgehenden Horizontalschnitt; und gleichzeitig verwandelt sich der Theil $\mathfrak{J}$ in denjenigen Theil der Kugelfläche, welcher oberhalb dieses Horizontalschnittes liegt, und jeder der beiden Theile $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ in eine der beiden kleinen Kugelcalotten, welche unterhalb des Horizontalschnittes sich befinden. Bezeichnen wir diese drei Theile der Kugelfläche mit $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, so werden die auf der ganzen Fläche vorhandenen Werthe von f auf $\mathfrak{i}$ überall eindeutig und stetig, ferner auf $\mathfrak{a}$ identisch mit denen von $+ z^\nu$ und endlich auf $\mathfrak{b}$ identisch mit denen von $- z^\nu$ sein.

Wir sehen hieraus, dass wir, um die Werthe zu beurtheilen, welche die Wurzelgrösse f zu Anfang auf dem ringförmigen Flächentheile $\mathfrak{A}$, und sodann später auf der kleinen Kugelcalotte $\mathfrak{a}$ besitzt, zurückgehen müssen auf die Werthe der Function z^ν.

Denken wir uns die Function z^ν auf einer Horizontalebene, d. i. auf einer gewöhnlichen einblättrigen ebenen Fläche ausgebreitet, so werden diejenigen Werthe, welche die Function z^ν in den äusserst fernen Puncten dieser Fläche besitzt, identisch sein mit denen, welche die Wurzelgrösse f auf dem ringförmigen Flächentheile $\mathfrak{A}$ besitzt. Und denken wir uns ferner jene einblättrige ebene Fläche durch Umformung in eine einblättrige Kugelfläche verwandelt, so werden diejenigen Werthe, welche die Function z^ν auf dieser Kugelfläche in der Nähe ihres tiefstgelegenen Punctes O' besitzt, mit denen identisch sein, welche die Wurzelgrösse f auf der kleinen Calotte $\mathfrak{a}$ hat. Nun haben wir früher (Seite 138) gefunden, dass die Function z^ν oder $(x + iy)^\nu$ bei ihrer Ausbreitung auf der einblättrigen Kugelfläche überall eindeutig und mit Ausnahme eines einzigen in O' liegenden Poles daselbst überall stetig ist. Demnach werden auch die Werthe, welche die Wurzelgrösse f auf der kleinen Calotte $\mathfrak{a}$ besitzt, überall eindeutig und mit Ausnahme eines in O' befindlichen Poles überall stetig sein.

Ganz Aehnliches wird sich offenbar mit Bezug auf diejenigen Werthe herausstellen, welche unsere Wurzelgrösse auf der Calotte $\mathfrak{b}$ hat. Somit ergiebt sich, dass die Werthe dieser Wurzelgrösse bei ihrer Ausbreitung auf der Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ überall eindeutig sind, und dass sie, mit Ausnahme zweier Pole, die sich in den beiden bei O' übereinander liegenden Puncten der Fläche vorfinden, daselbst auch überall stetig sind.

Um die Lage eines Punctes auf einer Riemann'schen Kugelfläche zu bestimmen, werden wir wiederum die früher (Seite 133) festgesetzten Kugelcoordinaten benutzen. So werden z. B., was die hier construirte Fläche anbelangt, unter $z = 0$ oder

$x + iy = 0$ diejenigen beiden Puncte zu verstehen sein, welche bei O über einander liegen. Ebenso werden unter $z = \infty$ oder $x + iy = \infty$ diejenigen beiden Puncte der Fläche zu verstehen sein, welche bei O' über einander liegen. Und endlich werden, um noch einen dritten Fall zu erwähnen, falls man unter t einen beliebigen, von 0 bis 2π hin veränderlichen Winkel versteht, unter $z = e^{it}$ oder $x + iy = e^{it}$ alle diejenigen Puncte zu verstehen sein, in welchen die Fläche $\mathfrak{R}$ von einem durch ihren Mittelpunct gelegten Horizontalschnitt getroffen wird. Bedienen wir uns dieser Bezeichnungen, so haben wir folgenden Satz:

Sämmtliche Werthe, welche die Wurzelgrösse

$$f = \sqrt{(z - A_1)(z - A_2) \ldots\ldots (z - A_{2\nu})}$$

überhaupt besitzt, lassen sich auf einer gewissen zweiblättrigen Riemann'schen Kugelfläche der Art ausbreiten, dass sie daselbst überall eindeutig, und mit Ausnahme zweier Pole daselbst auch überall stetig sind; die beiden Pole liegen bei $z = \infty$.

Diese Riemann'sche Kugelfläche besitzt 2ν Windungspuncte; das sind die Puncte $z = A_1$, $z = A_2$, ... $z = A_{2\nu}$: und ferner ν Uebergangslinien; das sind die Linien $A_1 A_2$, $A_3 A_4$, ..., $A_{2\nu-1} A_{2\nu}$.

Zu einem ganz analogen Resultat kann man leicht auch in dem Fall gelangen, dass die Anzahl der bei f unter dem Wurzelzeichen stehenden Factoren keine gerade, sondern eine ungerade ist. Auf folgende Weise:

Auf der eben genannten Riemann'schen Kugelfläche — sie mag $\mathfrak{R}$ heissen — werden sich offenbar nicht allein die Werthe von

$$\sqrt{(z - A_1)(z - A_2) \ldots . (z - A_{2\nu})},$$

sondern ebenso gut auch die Werthe von

$$K . \sqrt{(z - A_1)(z - A_2) \ldots . (z - A_{2\nu})}$$

in eindeutiger Weise ausbreiten lassen; vorausgesetzt, dass man unter K einen beliebigen constanten Factor versteht. Wir nehmen für K den Werth $\frac{1}{\sqrt{- A_{2\nu}}}$, und erhalten alsdann die Wurzelgrösse

$$\varphi = \sqrt{\frac{(z - A_1)(z - A_2) \ldots . (z - A_{2\nu})}{- A_{2\nu}}}.$$

Diese Wurzelgrösse φ wird sich also auf der Fläche $\mathfrak{R}$ — ganz ebenso wie die vorhin betrachtete Wurzelgrösse f — der Art ausbreiten lassen, dass sie daselbst überall eindeutig, und mit Ausnahme zweier bei $z = \infty$ liegenden Pole daselbst auch überall stetig ist.

Jene Fläche $\mathfrak{R}$ ist bis jetzt völlig ungeändert geblieben; sie besitzt 2ν Windungspuncte $A_1, A_2, \ldots . A_{2\nu}$, und gleichzeitig ν Uebergangslinien $A_1 A_2$, $A_3 A_4$, ..., $A_{2\nu-1} A_{2\nu}$. Aendern wir nun in unsrer Wurzelgrösse φ irgend eine der darin enthaltenen Constanten, z. B. die Constante $A_{2\nu}$, so wird die Fläche $\mathfrak{R}$ ebenfalls eine Aenderung erleiden; der Windungspunct $A_{2\nu}$ wird sich nämlich alsdann verschieben, und hiemit gleichzeitig wird sich die von $A_{2\nu-1}$ nach $A_{2\nu}$ hinlaufende Uebergangslinie verlängern oder verkürzen. Wir wollen uns nun denken, die Constante $A_{2\nu}$ würde grösser und grösser, und schliesslich $= \infty$. Alsdann wird sich der Windungspunct $A_{2\nu}$ dem tiefstgelegenen Puncte O' der Kugelfläche $\mathfrak{R}$ mehr und mehr nähern und schliesslich in denselben hineinfallen; gleichzeitig wird die Uebergangslinie $A_{2\nu-1} A_{2\nu}$ länger und länger werden, bis sie schliesslich von $A_{2\nu-1}$ bis nach O' hinreicht. Andrerseits ist zu beachten, dass unsere Wurzelgrösse φ in dem hier betrachteten extremen Falle, wo $A_{2\nu} = \infty$ geworden ist, folgende Gestalt besitzt:

$$\varphi = \sqrt{(z - A_1)(z - A_2) \ldots . (z - A_{2\nu-1})}.$$

Wir gelangen demnach, wenn wir, wie gewöhnlich, die tiefstgelegene Stelle O' der Kugelfläche $\mathfrak{R}$ mit $z = \infty$ bezeichnen, zu folgendem Resultat:

Sämmtliche Werthe, welche die Wurzelgrösse

$$\varphi = \sqrt{(z - A_1)(z - A_2) \ldots (z - A_{2\nu-1})}$$

überhaupt besitzt, lassen sich auf einer gewissen zweiblättrigen Riemann'schen Kugelfläche der Art ausbreiten, dass sie daselbst überall eindeutig, und mit Ausnahme eines bei $z = \infty$ liegenden Poles daselbst auch überall stetig ist.

Diese Riemann'sche Kugelfläche besitzt 2ν Windungspuncte, welche bei $z = A_1$, $z = A_2$, ... $z = A_{2\nu-1}$ und bei $z = \infty$ liegen; ferner besitzt dieselbe ν Uebergangslinien, das sind die Linien $A_1 A_2$, $A_3 A_4$, ... $A_{2\nu-3} A_{2\nu-2}$, $A_{2\nu-1} \infty$.

Besondere Aufmerksamkeit verdienen noch die Uebergangslinien. Mögen wir uns nun mit der Wurzelgrösse:

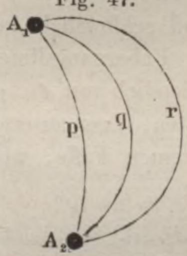
$$f = \sqrt{(z - A_1)(z - A_2) \ldots (z - A_{2\nu})},$$

oder mögen wir uns mit der Wurzelgrösse:

$$\varphi = \sqrt{(z - A_1)(z - A_2) \ldots (z - A_{2\nu-1})}$$

beschäftigen, in dem einen wie in dem andern Falle ist die in Anwendung zu bringende Riemann'sche Kugelfläche nicht vollständig bestimmt. Bestimmt ist der Durchmesser der Fläche, denn dieser ist stets gleich Eins; bestimmt sind ferner diejenigen Stellen, in welchen sich die Windungspuncte der Fläche befinden; unbestimmt hingegen sind die Lagen der Uebergangslinien. Jede dieser Linien hat nämlich ihren Anfang und ihr Ende in irgend zwei Windungspuncten, willkührlich aber bleibt der Weg, auf welchem sie von dem einen nach dem andern Puncte hin fortläuft (Vergl. den Satz Seite 186).

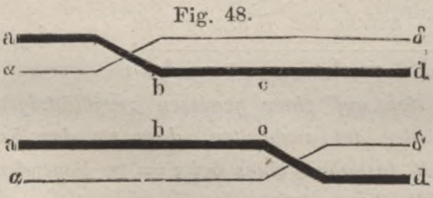
Fig. 47.



So wird es z. B., was die von A_1 nach A_2 fortlaufende Uebergangslinie anbelangt, völlig gleichgültig sein, ob wir dieser Linie die Lage $A_1\,p\,A_2$, oder die Lage $A_1\,q\,A_2$, oder die Lage $A_1\,r\,A_2$ u. s. w. zuertheilen (Fig. 47). Dass eine derartige Verschiebung der Uebergangslinie zulässig ist, lässt sich übrigens, falls darüber noch irgend welcher Zweifel vorhanden sein sollte, in folgender Weise leicht darthun:

Es seien — im Durchschnitt betrachtet — ad und $\alpha\delta$ (Fig. 48) zwei Theile der von uns construirten Fläche $\mathfrak{R}$, welche einander längs einer Linie durchsetzen. Jeder von diesen beiden Theilen, z. B. der Theil ad, wird dann mit Functionswerthen belastet sein, welche stetig mit einander zusammenhängen.

Fig. 48.



Verschiebt man nun die Durchsetzungslinie, und lässt man, während solches geschieht, die einzelnen Puncte der beiden Flächentheile mit den ihnen einmal zuertheilten Functionswerthen unlöslich verbunden, so wird ein gewisses Gebiet des Theiles $a\,d$, das Gebiet $b\,c$, aus dem unteren Blatt der Fläche in das obere hinübertreten, ohne aber dabei in Bezug auf die von ihm getragenen Functionswerthe irgend welche Aenderung zu erleiden. Und es werden demnach die auf dem Flächentheile $a\,d$

vorhandenen Functionswerthe — mögen wir uns nun jene Durchsetzungslinie in der einen oder in der andern Lage denken — immer stetig unter einander zusammenhängen. Aehnliches gilt natürlich auch für den andern Flächentheil, nämlich für $\alpha\,\delta$. Wir können allgemein sagen:

Ist eine Function auf irgend welcher Riemann'schen Fläche ausgebreitet, so wird man, ohne dass dadurch in der Eindeutigkeit oder Mehrdeutigkeit, in der Stetigkeit oder Unstetigkeit der Function irgend welche Aenderung hervorgerufen würde, die Uebergangslinien dieser Fläche beliebig verschieben können, falls man nur ihre Anfangs- und Endpuncte ungeändert lässt.

Sechster Abschnitt. Sämmtliche Werthe einer beliebig gegebenen algebraischen Function von $x + iy$ lassen sich immer auf einer gewissen Riemann'schen Kugelfläche in eindeutiger Weise ausbreiten. Allgemeine Bemerkungen über die Windungspuncte der Riemann'schen Flächen.

Nach den bisher ausgeführten Untersuchungen sind wir, falls Z irgend welche ganze rationale Function von z oder $x + iy$ bezeichnet, jederzeit im Stande, diejenige zweiblättrige Riemann'sche Kugelfläche zu construiren, auf welcher sich sämmtliche Werthe der Wurzelgrösse

$$\sqrt{Z}$$

auf eindeutige Weise ausbreiten lassen. Mit gleicher Leichtigkeit würde solches auch dann gelingen, wenn Z keine ganze, sondern irgend welche gebrochene rationale Function von z vorstellt.

Es lässt sich aber diese Methode, um sämmtliche Werthe einer Wurzelgrösse auf eindeutige Weise räumlich auszubreiten, auch nach einer andern Richtung bedeutend verallgemeinern. Versteht man nämlich unter n irgend welche positive ganze Zahl, und unter Z wiederum eine beliebig gegebene ganze oder gebrochene rationale Function von z, so lassen sich die Werthe der Wurzelgrösse

$$\sqrt[n]{Z}$$

ebenfalls auf einer gewissen Riemann'schen Kugelfläche in eindeutiger Weise ausbreiten; nur ist jene Fläche in diesem Falle nicht mehr zweiblättrig, sondern n blättrig.

Um wenigstens ein hierher gehöriges Beispiel anzuführen, betrachten wir die Wurzelgrösse

$$f = \sqrt[3]{\frac{z - A}{z - B}}.$$

A und B sollen beliebig gegebene Constanten vorstellen.

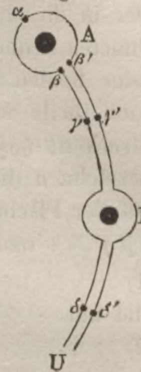
Mit Ausnahme von $z = A$ und $z = B$ besitzt diese Wurzelgrösse für jedes Argument z drei verschiedene Werthe; für $z = A$ hingegen nur einen Werth, und ebenso auch für $z = B$.

Wir pflanzen auf der Horizontalebene in irgend einem Puncte z_0 von den drei Werthen, welche die Wurzelgrösse f daselbst besitzt, nur einen auf, betrachten diesen als einen daselbst festgesetzten Anfangswerth und bilden sodann um jenen Punct herum ein Werthsystem, welches sich unter stetigem Anschluss an jenen Anfangswerth nach allen Seiten hin mehr und mehr erweitert. Das so erhaltene Werthsystem wird während seiner weiter und weiter fortschreitenden Vergrösserung eindeutig bestimmt bleiben, so lange das von ihm bedeckte Gebiet der Horizontalebene noch keinen der beiden Puncte $z = A$, $z = B$ in sich enthält, hingegen mehrdeutig werden in demjenigen Augenblick, in welchem die Grenze jenes Gebietes über einen dieser beiden Puncte hinübergleitet.

Um diesen Uebelstand zu vermeiden, scheiden wir — ähnlich wie früher — von der Horizontalebene einen unendlich schmalen Flächenstreifen ab, welcher die beiden Puncte $z = A$, $z = B$ in sich enthält. Und um ausserdem sämmtliche Werthe der Wurzelgrösse f ausbreiten zu können, operiren wir nicht mit einer, sondern gleichzeitig mit drei Horizontalebenen.

Es seien $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_3$ drei horizontal über einander liegende, nur durch unendlich kleine Zwischenräume von einander getrennte ebene Flächen, welche mit einem gemeinschaftlichen rechtwinkligen Coordinatensystem x, y versehen sind. Jede derselben mag die Gestalt einer mit unendlich grossem Radius um den Anfangspunct beschriebenen Kreisfläche besitzen. Ferner seien A und B die auf diesen Flächen durch $z = A$ und $z = B$ bestimmten Puncte. Wir führen einen Schnitt aus, welcher alle drei Flächen durchdringt, im Punct A anfängt, von hier aus nach B, endlich von B aus nach den unendlich fernen Rändern der Flächen, etwa nach U hin fortläuft, und welcher in jedem der beiden Puncte A, B mit einer kleinen kreisförmigen Erweiterung versehen ist (Fig. 49). Die Gestalten, welche die drei Flächen $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_3$ hierdurch gewinnen, mögen $\mathfrak{H}_1'$, $\mathfrak{H}_2'$, $\mathfrak{H}_3'$ genannt werden.

Fig. 49.



Durch $z = z_0$ werden in den Flächen $\mathfrak{H}_1'$, $\mathfrak{H}_2'$, $\mathfrak{H}_3'$ drei über einander liegenden Puncte bestimmt. In jedem dieser Puncte pflanzen wir je einen von den drei Werthen auf, welche die gegebene Wurzelgrösse f für $z = z_0$ besitzt, und breiten sodann in jeder Fläche dasjenige System aus, welches sich dem in solcher Weise festgesetzten Anfangswerthe stetig anschliesst. Jedes dieser Systeme wird, weil die Flächen $\mathfrak{H}_1'$, $\mathfrak{H}_2'$, $\mathfrak{H}_3'$ keinen der Puncte A, B in sich enthalten, in seiner ganzen Ausdehnung eindeutig bestimmt sein. Und all' diese drei Systeme zusammengenommen werden den ganzen Werthvorrath repräsentiren, welchen die Wurzelgrösse f überhaupt besitzt.

Die Werthe, welche die auf den Flächen $\mathfrak{H}_1'$, $\mathfrak{H}_2'$, $\mathfrak{H}_3'$ ausgebreiteten Systeme in je drei über einander liegenden Puncten besitzen, sind identisch mit denjenigen, welche die gegebene Wurzelgrösse

$$f = \sqrt[3]{\frac{z - A}{z - B}}$$

für das jenen drei Puncten zugehörige Argument z annimmt, und werden daher nur durch die constanten Factoren

$$e^{\frac{2\pi i}{3}} \quad \text{und} \quad e^{\frac{4\pi i}{3}}$$

von einander verschieden sein. Setzt man zur Abkürzung

$$e^{\frac{2\pi i}{3}} = \eta,$$

so verwandeln sich diese Factoren in

$$\eta \quad \text{und} \quad \eta^2.$$

Das auf $\mathfrak{H}_1'$ ausgebreitete System wird sich demnach durch Multiplication mit η in das auf $\mathfrak{H}_2'$ befindliche, und durch Multiplication mit η^2 in das auf $\mathfrak{H}_3'$ vorhandene verwandeln.

Wir untersuchen nun diejenigen Werthe, welche die eben-genannten drei Systeme in den beiden Uferlinien des Schnittes $A\ B\ U$ besitzen.

Es sei $\mathfrak{H}'$ irgend eine unter den drei Flächen $\mathfrak{H}_1'$, $\mathfrak{H}_2'$, $\mathfrak{H}_3'$. Der in dieser Fläche $\mathfrak{H}'$ vorhandene Schnitt $A\ B\ U$ besitzt in den Puncten A und B zwei kleine kreisförmige Erweiterungen (Fig. 49); seine beiden Uferlinien $\alpha\,\beta\,\gamma\,\ldots$ und $\alpha\,\beta'\,\gamma'\,\ldots$ bestehen demnach theils aus parallel laufenden, theils aus halbkreisförmigen Strecken, und hängen im Puncte α mit einander zusammen. Wir bezeichnen die stetig auf einander folgenden Werthe, welche das auf der Fläche $\mathfrak{H}'$ ausgebreitete System längs dieser beiden Linien $\alpha\,\beta\,\gamma\,\ldots$ und $\alpha\,\beta'\,\gamma'\,\ldots$ besitzt, mit:

(1) $$f_\alpha,\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ \ldots .$$

und mit:

(2) $$f_\alpha,\ f_1',\ f_2',\ f_3',\ \ldots .$$

Diese Werthe (1) und (2) gehören sämmtlich zu dem in der Wurzelgrösse

$$f = \sqrt[3]{\frac{z-A}{z-B}}$$

enthaltenem Werthvorrath; sie können daher als zwei Reihen angesehen werden, die sich aus jenem Werthvorrath, den beiden Uferlinien $\alpha\,\beta\,\gamma\,\ldots$ und $\alpha\,\beta'\,\gamma'\,\ldots$ entlang, auf stetige Weise entwickeln. Ausserdem ist zu bemerken, dass beide Reihen (1) und (2) im Puncte α mit einem gemeinschaftlichen Anfangswerthe beginnen. Zwischen den Werthen, mit welchen beide Reihen in je zwei auf den Linien $\alpha\,\beta\,\gamma\,\ldots$ und $\alpha\,\beta'\,\gamma'\,\ldots$ einander gegenüberliegenden Puncten eintreffen, werden demnach gewisse Beziehungen stattfinden.

Von α aus durchlaufen die beiden Reihen zunächst die beiden Halbkreise $\alpha\,\beta$ und $\alpha\,\beta'$; die Werthe, mit welchen sie in den Endpuncten der Halbkreise, also in β und β', eintreffen, werden durch den Factor $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ oder η von einander verschieden sein. Diese Werthverschiedenheit wird sodann, während beide Reihen, von β und β' aus, weiter nach B hin fortlaufen, ungeändert bestehen bleiben. In der Nähe von B gelangen die Reihen zu den hier beginnenden halbkreisförmigen Uferstrecken. In den Anfangspuncten dieser Halbkreise ist die Werthverschiedenheit der beiden Reihen noch immer dieselbe wie vorhin, nämlich immer noch durch den Factor η dargestellt. Bei Durchlaufung der beiden Halbkreise wird aber jene Verschiedenheit verschwinden; in denjenigen beiden Puncten nämlich, wo die Halbkreise enden und wiederum in parallele Uferstrecken übergehen, werden die beiden Reihen mit Werthen eintreffen, welche einander völlig gleich sind. Und diese Gleichheit bleibt nun fortan, während beide Reihen ihre Bahnen nach dem unendlich fernen Puncte U hin weiter und weiter verfolgen, ungeändert bestehen.

Die betrachteten Reihen (1) und (2) bestehen aus denjenigen Werthen, welche das auf der Fläche $\mathfrak{H}'$ ausgebreitete System zu beiden Ufern des Schnittes ABU besitzt; und $\mathfrak{H}'$ war irgend eine unter den drei über einander liegenden Flächen $\mathfrak{H}_1'$, $\mathfrak{H}_2'$, $\mathfrak{H}_3'$. Die eben erhaltenen Resultate beziehen sich daher auf jedes der drei Systeme, welche auf jenen drei Flächen ausgebreitet sind. In jedem dieser drei Systeme werden daher die Werthe zu beiden Ufern der Schnittstrecke AB durch den constanten Factor η von einander verschieden, zu beiden Ufern der Schnittstrecke BU hingegen einander gleich sein.

Es seien (Fig. 49) γ_1, γ_1' irgend zwei auf beiden Ufern der Schnittstrecke AB einander gegenüberliegende und zur Fläche $\mathfrak{H}_1'$ gehörige Puncte; ferner seien γ_2, γ_2' und γ_3, γ_3' die darunter liegenden Puncte in den Flächen $\mathfrak{H}_2'$ und $\mathfrak{H}_3'$. Die Werthe des auf $\mathfrak{H}_1'$ befindlichen Systemes sind in den Puncten γ_1 und γ_1', wie wir eben gefunden haben, durch den Factor η verschieden. Bezeichnen wir daher den in γ_1 vorhandenen Werth kurzweg mit φ, so wird der in γ_1' vorhandene gleich $\eta\varphi$ sein. Aus diesen beiden Werthen ergeben sich aber — wie wir früher gesehen haben — durch Multiplication mit η diejenigen, welche das auf $\mathfrak{H}_2'$ vorhandene System in den Puncten γ_2 und γ_2', ferner durch Multiplication mit η^2 diejenigen, welche das auf $\mathfrak{H}_3'$ befindliche System in γ_3 und γ_3' besitzt. In jenen sechs Puncten sind demnach folgende Werthe vorhanden:

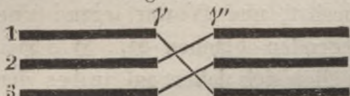
$$(3) \qquad \begin{cases} \text{in } \gamma_1 : \quad \varphi, & \text{in } \gamma_1' : \eta\varphi, \\ \text{in } \gamma_2 : \ \eta\varphi, & \text{in } \gamma_2' : \eta^2\varphi, \\ \text{in } \gamma_3 : \eta^2\varphi, & \text{in } \gamma_3' : \eta^3\varphi = \varphi. \end{cases}$$

Die auf den Flächen $\mathfrak{H}_1'$, $\mathfrak{H}_2'$, $\mathfrak{H}_3'$ ausgebreiteten drei Systeme repräsentiren zusammengenommen den ganzen Werthvorrath, welcher in der gegebenen Wurzelgrösse

$$f = \sqrt[3]{\frac{z-A}{z-B}}$$

enthalten ist; ferner repräsentiren die hier betrachteten sechs Puncte γ_1, γ_1', γ_2, γ_2', γ_3, γ_3' die sechs Uferlinien, welche die Schnittstrecke AB in jenen drei Flächen besitzt. Wir sehen demnach aus (3), dass die Wurzelgrösse f in den beiden Uferlinien γ_2 und γ_1' gleiche Werthe hat; ebenso in γ_3 und γ_2'; und ebenso endlich in γ_1 und γ_3'. Heften wir also (Fig. 50) die beiden Ufer γ_2 und γ_1' mit einander zusammen, so werden in der Zusammenheftungslinie von beiden Seiten her gleiche Werthe zusammenstossen. Dasselbe wird stattfinden, wenn wir die Ufer γ_3 und γ_2' vereinigen, und dasselbe auch, wenn wir endlich die Ufer γ_1 und γ_3' an einander heften.*)

Fig. 50.

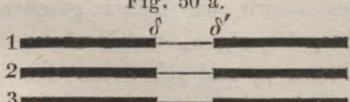


Aehnliches gilt nun andererseits auch von der Schnittstrecke BU. Sind nämlich (Fig. 49) δ_1, δ_1', δ_2, δ_2', δ_3, δ_3' irgend welche sechs zu dieser Schnittstrecke gehörige, neben und über einander liegende Uferpuncte, so werden die in den sechs Puncten vorhandenen Werthe von folgender Form sein:

$$(4)\qquad \begin{cases} \text{in } \delta_1 : \quad \psi, & \text{in } \delta_1' : \quad \psi, \\ \text{in } \delta_2 : \ \eta\psi, & \text{in } \delta_2' : \ \eta\psi, \\ \text{in } \delta_3 : \eta^2\psi, & \text{in } \delta_3' : \eta^2\psi. \end{cases}$$

Demnach werden gleiche Werthe zusammenstossen, wenn man das Ufer δ_1 (Fig. 50 a.) mit dem Ufer δ_1' zusammenheftet; ebenso bei der Zusammenheftung von δ_2 mit δ_2', und bei der von δ_3 mit δ_3'.

Fig. 50 a.



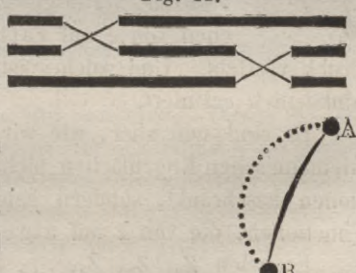
Es sind bei den Schnittstrecken AB und BU im Ganzen sechs Zusammenheftungen genannt worden; wir wollen dieselben wirklich ausführen und die

*) In der vorstehenden Figur 50 sind die Flächen $\mathfrak{H}_1'$, $\mathfrak{H}_2'$, $\mathfrak{H}_3'$ im senkrechten Durchschnitt dargestellt, und kurzweg mit 1, 2, 3 bezeichnet. Gleichzeitig sind die drei in diesen Flächen über einander liegenden Puncte γ_1, γ_2, γ_3 nur durch den Buchstaben γ, und ebenso die drei über einander liegenden Puncte γ_1', γ_2', γ_3' nur durch das über dieselben gesetzte γ' angedeutet.

hierdurch entstehende dreiblättrige Fläche mit $\mathfrak{H}_1' + \mathfrak{H}_2' + \mathfrak{H}_3'$ bezeichnen. Bei Ausführung jener sechs Zusammenheftungen stossen in jeder einzelnen Zusammenheftungslinie von beiden Seiten her gleiche Werthe an einander. Die auf den drei Flächen $\mathfrak{H}_1'$, $\mathfrak{H}_2'$ und $\mathfrak{H}_3'$ ausgebreiteten Werthsysteme werden demnach durch Ausführung jener Zusammenheftungen auf stetige Weise zu einem einzigen Systeme verschmolzen. Und dieses von der dreiblättrigen Fläche $\mathfrak{H}_1' + \mathfrak{H}_2' + \mathfrak{H}_3'$ getragene Werthsystem wird den ganzen Werthvorrath repräsentiren, welcher in der gegebenen Wurzelgrösse f enthalten ist. Schliesslich lässt sich nun die eben genannte dreiblättrige Fläche durch Umformung in eine dreiblättrige Kugelfläche verwandeln, welche $\mathfrak{R}$ heissen mag.

Die so erhaltene Kugelfläche $\mathfrak{R}$ besitzt im Ganzen zwei Windungspuncte A und B, von welchen jeder zweiter Ordnung ist; ferner zwei Uebergangslinien, welche parallel über einander liegen, und von A nach B hinlaufen (vgl. Fig. 50). Dass diese Linien gerade über einander liegen, ist unwesentlich. Wir können nämlich — ebenso wie solches bereits in einem früheren Falle (S. 192) geschah — die eine von jenen Linien beliebig verschieben, falls wir nur ihren Anfangs- und Endpunct, A und B, ungeändert lassen. Thun wir dies, so wird die Fläche, in dem betreffenden Durchschnitt betrachtet, die in Fig. 51 angegebene Beschaffenheit annehmen. Die beiden Uebergangslinien werden also dann auf verschiedenen Wegen von A nach B laufen; die eine wird zu bezeichnen sein als eine Uebergangslinie zwischen dem oberen und mittleren Blatt der Fläche, die andere als eine Uebergangslinie zwischen dem mittleren und unteren Blatt. Wir gelangen also zu folgendem Resultat:

Fig. 51.



Alle in der Wurzelgrösse

$$\sqrt[3]{\frac{z-A}{z-B}}$$

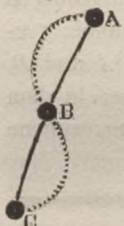
enthaltenen Werthe können auf einer gewissen dreiblättrigen Riemann'schen Kugelfläche in eindeutiger Weise ausgebreitet werden. Diese Fläche besitzt zwei Windungspuncte zweiter Ordnung, welche *bei $z = A$ und $z = B$ liegen, ferner zwei Uebergangslinien, welche beide von $z = A$ nach $z = B$ laufen. In der einen von jenen beiden Linien findet ein Uebergang vom oberen zum mittleren, in der andern hingegen ein Uebergang vom mittleren zum unteren Blatt statt.*

Untersucht man in ähnlicher Weise die Wurzelgrösse:

$$f = \sqrt[3]{(z - A)(z - B)(z - C)},$$

so findet man, dass zur eindeutigen Ausbreitung derselben eine dreiblättrige Riemann'sche Kugelfläche erforderlich ist, welche drei Windungspuncte zweiter Ordnung und zwei Uebergangslinien besitzt. Jene Windungspuncte liegen bei $z = A$, bei $z = B$ und bei $z = C$. Die eine der beiden Uebergangslinien zieht sich zwischen dem oberen und mittleren Blatt der Fläche hin, und läuft von A über B bis nach C; die andere läuft ebenfalls von A über B nach C, vermittelt aber einen Uebergang zwischen dem mittleren und unteren Blatt der Fläche (Fig. 52).*)

Fig. 52.



Die Riemann'schen Kugelflächen sind, wie bereits erwähnt, auf alle Functionen anwendbar, welche die Form:

$$f = \sqrt{Z}$$

oder die Form:

$$f = \sqrt[n]{Z}$$

besitzen, vorausgesetzt, dass man unter Z irgend welchen von z auf rationale Weise abhängenden Ausdruck versteht. Und solches ist durch die angeführten Beispiele hinlänglich erläutert.

Es sind nun aber, wie wir gegenwärtig zeigen werden, die Riemann'schen Kugelflächen nicht auf jene eben genannten Functionen beschränkt, sondern ganz allgemein anwendbar auf alle Functionen, die von z auf algebraische Weise abhängen.

Es seien Z_0, Z_1, Z_2, ... Z_n beliebig gegebene Ausdrücke,

---

*) In Fig. 52 ist (ebenso wie in Fig. 51) unter der ausgezogenen Linie die Uebergangslinie zwischen dem oberen und mittleren Blatt, unter der punctirten Linie hingegen die Uebergangslinie zwischen dem mittleren und unteren Blatt zu verstehen. Die Puncte A, B, C sind sämmtlich Windungspuncte 2^{ter} Ordnung. Die den Punct A umgebende Windungsfläche enthält zwei Uebergangslinien; ebenso die den Punct C umgebende. Die den Punct B umgebende Windungsfläche hingegen besitzt vier Uebergangslinien. (Vgl. die Note auf S. 168.)

welche von z auf rationale Weise abhängig sind, und es mag ferner unter f diejenige Grösse verstanden werden, welche durch die Gleichung n^{ten} Grades:

$$Z_0 + Z_1 \cdot f + Z_2 \cdot f^2 + \ldots + Z_n \cdot f^n = 0$$

definirt wird. Der Werth von f wird alsdann von den Coefficienten Z_0, Z_1, Z_2, ... Z_n abhängen; diese sind ihrerseits aber nur von z abhängig. Demnach wird der durch die Gleichung definirte Werth von f eine nur von z, d. i. nur von $x + iy$ abhängende Function sein; jedoch eine Function, welche für jedweden Werth des Argumentes z nicht einen, sondern mehrere, im Allgemeinen immer n Werthe besitzt.

Diese Grösse f ist eine algebraische Function von z und repräsentirt bekanntlich die allgemeinste Form einer solchen Function. Wir werden zeigen, dass man jederzeit eine Riemann'sche Kugelfläche construiren kann, auf welcher der gesammte Werthvorrath dieser Function f in eindeutiger Weise ausgebreitet werden kann.

Es seien $z = A$, $z = B$, $z = C$, $z = D$, ... diejenigen Werthe des Argumentes z, für welche die Function f nicht n, sondern weniger als n Werthe besitzt; wir nehmen also an, dass für $z = A$ zwei oder auch mehrere von den n Wurzeln der aufgestellten Gleichung einander gleich werden, dass es sich ebenso verhalte bei $z = B$, ebenso bei $z = C$, u. s. w.

Wir pflanzen in irgend welchem Punct z_0 der Horizontalebene von den n Werthen, welche f daselbst besitzt, nur einen auf, und bilden sodann um jenen Punct herum ein Werthsystem, welches sich unter stetigem Anschluss an den dort aufgepflanzten Anfangswerth nach allen Seiten hin ausdehnt. Dieses System wird während seiner weiter und weiter fortschreitenden Vergrösserung eindeutig bestimmt sein, so lange das von ihm bedeckte Gebiet der Horizontalebene noch keinen der Puncte $z = A$, $z = B$, $z = C$, ... in sich enthält, hingegen mehrdeutig werden in demjenigen Augenblick, in welchem die Grenze jenes Gebietes über irgend einen dieser Puncte hinübergleitet.

Um diesen Uebelstand zu vermeiden, scheiden wir nun wieder — ähnlich wie früher — von der Horizontalebene einen unendlich schmalen Flächenstreifen ab, welcher die Puncte A, B, C ... in sich enthält. Und um gleichzeitig sämmtliche Werthe der Function ausbreiten zu können, operiren wir nicht mit einer, sondern gleichzeitig mit n Horizontalebenen.

Es seien $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, ... $\mathfrak{H}_n$ n horizontal über einander liegende und nur durch unendlich kleine Zwischenräume von einander getrennte ebene Flächen, welche mit einem gemeinsamen rechtwinkligen Coordinatensystem x, y versehen sind, und von welchen jede die Gestalt einer mit unendlich grossem Radius um den Anfangspunct beschriebenen Kreisfläche haben mag. Ferner seien A, B, C, D ... die auf diesen Flächen durch $z = A$, $z = B$, $z = C$, $z = D$, ... bestimmten Puncte. Wir führen einen Schnitt aus, welcher sämmtliche n Flächen durchdringt, im Puncte A anfängt, von hier aus über die Puncte B, C, D ... bis zum unendlich fernen Rande jener Flächen, etwa bis zu einer Randstelle U hinläuft, und welcher in jedem der Puncte A, B, C, D, ... eine beliebig kleine kreisförmige Erweiterung besitzt. Die Gestalten, welche die n Flächen $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, ... $\mathfrak{H}_n$ hierdurch gewinnen, mögen mit $\mathfrak{H}_1'$, $\mathfrak{H}_2'$, ... $\mathfrak{H}_n'$ bezeichnet werden.

Es sei z_0 ein beliebig gewählter Werth von z; in den Flächen $\mathfrak{H}_1'$, $\mathfrak{H}_2'$, ... $\mathfrak{H}_n'$ werden durch jenen Werth n über einander liegende Puncte bestimmt. In jedem dieser Puncte pflanzen wir je einen von den n Werthen auf, welche die Function f für $z = z_0$ besitzt; und breiten sodann in jeder Fläche dasjenige System aus, welches sich dem darin so eben aufgepflanzten Anfangswerthe in stetiger Weise anschliesst. Jedes dieser Systeme wird, weil die Flächen $\mathfrak{H}_1'$, $\mathfrak{H}_2'$, ... $\mathfrak{H}_n'$ keinen der Puncte A, B, C, D, ... in sich enthalten, in seiner ganzen Ausdehnung eindeutig bestimmt; und all' diese n Systeme zusammengenommen werden den ganzen Werthvorrath repräsentiren, welchen die Function f überhaupt besitzt.

Wir müssen nun die Werthe untersuchen, welche diese n Systeme längs des Schnittes $ABC \dots U$ besitzen; wir betrachten zuerst diejenige Strecke dieses Schnittes, welche von A nach B geht; und bezeichnen zwei auf der Fläche $\mathfrak{H}_1'$ zu beiden Ufern dieser Schnittstrecke einander gegenüberliegende Puncte mit λ_1, ϱ_1, und die gerade darunter liegenden Puncte von $\mathfrak{H}_2'$, von $\mathfrak{H}_3'$ u. s. w. von $\mathfrak{H}_n'$ mit λ_2, ϱ_2, mit λ_3, ϱ_3 u. s. w., endlich mit λ_n, ϱ_n. Ist $z = l$ derjenige Werth, welchen z in den Puncten λ, und $z = r$ derjenige, welchen z in den Puncten ϱ besitzt, so wird jeder der Puncte λ mit je einem von denjenigen n Werthen belastet sein, welche die Function f für $z = l$ annimmt; und ebenso wird alsdann jeder von den Puncten ϱ mit einem von denjenigen n Werthen belastet sein, welche f für $z = r$ besitzt. Nun ist aber, weil die beiden Uferlinien unseres Schnittes einander unendlich nahe liegen, l identisch mit r, demnach sind die erstern n Werthe identisch mit den letztern n Werthen. Die n Puncte λ und die n Puncte ϱ müssen sich also in Gedanken zu n Paaren ordnen lassen, von welchen jedes aus einem Puncte λ und aus einem Puncte ϱ, und zwar aus zwei Puncten besteht, welche beide mit demselben Werth von f belastet sind. Demnach wird man die n Ufer, welche auf der einen Seite des Schnittes AB liegen, mit den n Ufern, welche sich auf der andern Seite desselben befinden, je eines der einen Seite mit je einem der andern Seite in solcher Anordnung zusammenheften können, dass in jeder Zusammenheftungslinie von beiden Seiten her gleiche Werthe von f zusammenstossen.

Aehnliches wird man ausführen können bei der nächstfolgenden Schnittstrecke BC, sodann bei der Strecke CD, u. s. w., endlich bei der letzten Schnittstrecke, welche in dem unendlich fernen Puncte U ihr Ende erreicht. Die durch all' diese Zusammenheftungen entstehende ebene n blättrige Fläche mag mit

$$\mathfrak{H}_1' + \mathfrak{H}_2' + \cdots + \mathfrak{H}_n'$$

bezeichnet werden.

Durch Umformung dieser Fläche $\mathfrak{H}_1' + \mathfrak{H}_2' + \cdots + \mathfrak{H}_n'$ wird man sodann eine gewisse n blättrige Riemann'sche Kugelfläche $\mathfrak{R}$ erhalten. Und auf dieser Fläche $\mathfrak{R}$ werden alsdann sämmtliche Werthe, welche die Function f überhaupt besitzt, in eindeutiger Weise ausgebreitet sein. Wir haben also folgenden Satz:

Sämmtliche Werthe einer beliebig gegebenen algebraischen Function von z können jederzeit auf einer gewissen Riemann'schen Kugelfläche in eindeutiger Weise ausgebreitet werden.

Jede Riemann'sche Kugelfläche besitzt irgend welche Anzahl von Windungspuncten. Ist die Fläche n blättrig, so sind jene Windungspuncte nicht immer von der $(n - 1)$ Ordnung; ihre Ordnung kann nicht höher sein als $n - 1$, wohl aber niedriger; sie kann nämlich durch irgend eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots n - 1$ dargestellt sein. Auch kann, was ebenfalls beachtenswerth ist, der Fall vorkommen, dass an ein und derselben Stelle einer Riemann'schen Kugelfläche zwei, drei oder mehrere Windungspuncte gerade über einander liegen.

Um diese Behauptungen durch ein möglichst einfaches Beispiel zu erläutern, wollen wir uns zwei algebraische Functionen φ und ψ denken. Die eine sei definirt durch die Gleichung:

$$Z_0 + Z_1 . \varphi + \ldots + Z_m \varphi^m = 0,$$

die andere durch die Gleichung:

$$Z_0' + Z_1' . \psi + \ldots + Z_n' \psi_n = 0,$$

wo die Z und Z' beliebig gegebene rationale Functionen von z vorstellen sollen. Die zur Ausbreitung der ersten erforderliche Riemann'sche Kugelfläche wird dann m blättrig, die zur Ausbreitung der letztern erforderliche n blättrig sein. Die eine mag $\mathfrak{R}$, die andere $\mathfrak{R}'$ genannt werden.

Wir betrachten nun eine dritte algebraische Function F, und zwar diejenige, welche durch die Gleichung:

$$(Z_0 + Z_1 F + \ldots + Z_m F^m)(Z_0' + Z_1' F + \ldots + Z_n' F^n) = 0$$

definirt wird. Diese Function F wird alsdann den ganzen Werthvorrath von φ und ebenso auch den ganzen Werthvorrath von ψ in sich zusammenfassen; die zu ihrer Ausbreitung erforderliche Riemann'sche Kugelfläche wird $(m + n)$ blättrig sein und dargestellt sein durch die Fläche $\mathfrak{R} + \mathfrak{R}'$, nämlich dargestellt sein durch diejenige Fläche, welche entsteht, wenn man die beiden vorhin genannten Kugelflächen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ — ohne sie gegenseitig mit einander zu verbinden — in einander schachtelt.

Es kann demnach $\mathfrak{R} + \mathfrak{R}'$ als eine $(m + n)$ blättrige Riemann'sche Kugelfläche angesehen werden. Offenbar wird nun aber diese Fläche Windungspuncte in sich enthalten, deren Ordnung niedriger als $m + n - 1$ ist, nämlich Windungspuncte $(m - 1)^{\text{ter}}$ und $(n - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung besitzen können. Auch wird der Fall eintreten können, dass ein Windungspunct $(m - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung genau über einem anderen Windungspunct von der $(n - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung liegt. Und hiermit ist die Richtigkeit der obigen Behauptungen bewiesen.

Ist von irgend einer Fläche die Rede, so ist zufolge unserer Definition (S. 92) unter dem Bereich eines Punctes ein um den Punct herum abgegrenztes, den Punct selber also in sich enthaltendes, hinreichend kleines Flächenstück zu verstehen. Demnach wird bei einer Riemann'schen Kugelfläche das Bereich eines Windungspunctes durch eine kleine Windungsfläche, das Bereich eines jeden andern Punctes hingegen durch eine kleine einblättrige Fläche dargestellt sein.

Sechste Vorlesung.

Reduction einer Riemann'schen Kugelfläche auf ein System von Elementarflächen.

Erster Abschnitt. Allgemeine Bemerkungen über die stetige Umformung einer Fläche.

Es sei eine beliebige Fläche gegeben, also eine Fläche mit beliebiger Krümmung, mit beliebig vielen und beliebig gestalteten Randcurven. In der Fläche mag ein Liniennetz gezogen werden, durch welches dieselbe in lauter unendlich kleine Elemente getheilt wird. Dieses Liniennetz — es mag $\mathfrak{N}$ heissen — wird dann, für sich allein betrachtet, nämlich nach Fortlassung der in seinen Maschen vorhandenen Flächenelemente, gewissermassen ein Gerippe der gegebenen Fläche darstellen und als solches die gegebene Fläche zu vertreten im Stande sein.

Wir denken uns nun dieses Netz durch irgend welche Biegungen und Dehnungen*) der in ihm enthaltenen Linien, und zwar durch Dehnungen, welche nicht nur für die verschiedenen Linien, sondern auch für verschiedene Theile ein und derselben Linie verschieden stark sein können, in seiner Form beliebig geändert, und bezeichnen dasselbe in dieser neuen Form mit $\mathfrak{N}'$. Wie die angewendeten Biegungen und Dehnungen auch beschaffen sein mögen, immer wird zwischen der alten Form $\mathfrak{N}$ und zwi-

---

*) Die Bezeichnung „Dehnung" soll gleichzeitig den Begriff der Verlängerung und auch den der Verkürzung umfassen, indem eine Verlängerung als eine positive, eine Verkürzung als eine negative Dehnung angesehen wird.

schen der neuen $\mathfrak{N}'$ eine gewisse Uebereinstimmung zurückbleiben. So z. B. werden irgend zwei Knotenpuncte des Netzes, je nachdem sie während der einen Form des Netzes einander benachbart oder nicht benachbart sind, auch während der andern Form desselben einander benachbart oder nicht benachbart sein. Denkt man sich daher während des Zustandes $\mathfrak{N}$ auf dem Netze irgend welche in sich zurücklaufende und sich selber nirgends durchschneidende Curve gezogen, so werden die auf der Curve gelegenen Knotenpuncte nach Eintritt des neuen Zustandes $\mathfrak{N}'$ eine Curve von gleicher Beschaffenheit bilden, nämlich wiederum eine Curve bilden, welche in sich zurückläuft und sich selber nirgends durchschneidet. Zugleich sieht man, dass alle diejenigen Knotenpuncte, welche bei $\mathfrak{N}$ innerhalb der Curve liegen, bei $\mathfrak{N}'$ sich ebenfalls innerhalb derselben befinden werden. Denkt man sich ferner in $\mathfrak{N}$ irgend einen Schnitt ausgeführt, welcher das Netz in zwei von einander vollständig getrennte Stücke zerlegt, so wird von einem in $\mathfrak{N}'$ über dieselben Knotenpuncte hin fortlaufenden Schnitte dasselbe gelten.

Ebenso wie sich die beiden Netze $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ zu einander verhalten, ebenso werden sich zu einander auch diejenigen Flächen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ verhalten, welche entstehen, sobald man sich die Maschen jener Netze wieder durch Flächenelemente ausgefüllt denkt. Die Operation, durch welche wir das Netz $\mathfrak{N}'$ aus dem Netze $\mathfrak{N}$, oder, was dasselbe ist, die Fläche $\mathfrak{A}'$ aus der Fläche $\mathfrak{A}$ abgeleitet haben, kann bezeichnet werden als eine stetige Umformung.

Unter der stetigen Umformung einer Fläche soll also eine Veränderung derselben verstanden werden, welche durch blosse Anwendung von Dehnungen und Biegungen, nämlich mit Vermeidung von Zerreissungen und Zusammenheftungen, zu Stande kommt.

Um von irgend zwei beliebig gegebenen Flächen die eine in die andere umzuformen, bedarf es (sobald eine solche Umformung überhaupt möglich ist) nur der Auffindung eines Gesetzes, nach welchem jeder Punct der einen Fläche mit einem bestimmten Puncte der andern correspondirt, jedoch eines Gesetzes, welches so beschaffen ist, dass demselben zufolge benachbarte Puncte der einen Fläche auch immer mit benachbarten Puncten der andern in Correspondenz stehen. Ist nämlich ein solches Gesetz gefunden, so wird man dann, wie leicht zu übersehen ist, durch

Anwendung von Dehnungen und Biegungen es in der That dahin bringen können, dass die eine Fläche mit der andern, und zwar jeder Punct der einen mit dem correspondirenden Puncte der andern zur Deckung kommt.

Aus dem, was vorhin in Betreff der stetigen Umformung eines Liniennetzes bemerkt wurde, ergeben sich nun leicht für zwei Flächen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, von welchen die eine durch stetige Umformung der andern entstanden ist, mehrere Sätze. Bezeichnet man irgend welche auf $\mathfrak{A}$ gezogene Curve mit σ und die correspondirende auf $\mathfrak{A}'$ mit σ', d. h. versteht man unter σ' diejenige Curve, in welche sich σ bei der Umformung von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}'$ verwandelt, so lassen sich diese Sätze folgendermassen aussprechen:

I. Ist σ in sich zurücklaufend, so gilt Gleiches auch von σ'.

II. Durchschneidet σ nirgends sich selber, so kann solches bei σ' ebenfalls nicht stattfinden.

III. Zerfällt $\mathfrak{A}$ durch einen längs σ hin ausgeführten Schnitt in zwei von einander getrennte Stücke, so wird Gleiches auch von $\mathfrak{A}'$ mit Bezug auf σ' gelten.

IV. Die Anzahl der in $\mathfrak{A}$ vorhandenen Randcurven ist jederzeit ebenso gross, als die Anzahl der in $\mathfrak{A}'$ vorhandenen.

Ein Quadrat kann als stetige Umformung eines Rechtecks, ebenso ein Kreis als eine stetige Umformung einer Ellipse angesehen werden. Andererseits würde sich der Kreis, d. i. eine ebene Kreisfläche aber auch als die stetige Umformung einer Halbkugelfläche, oder auch als die einer Kegelfläche ansehen lassen.

Und so lassen sich überhaupt, falls eine Fläche gegeben ist, immer mehrere und von einander sehr verschiedene Flächen finden, von denen jede als eine stetige Umformung der gegebenen Fläche aufgefasst werden kann.

Jedoch kann man keineswegs die gegebene Fläche als die stetige Umformung jeder beliebig gewählten andern Fläche ansehen. Sollen nämlich zwei Flächen einer solchen Auffassung fähig sein, so ist dazu, wie man sofort erkennt, zunächst schon erforderlich, dass in beiden die Anzahl der Randcurven ein und dieselbe ist. Und zu dieser Bedingung treten noch andere Bedingungen hinzu. Denn bei einer Kugelfläche z. B. und bei einer Ringfläche*) ist die Anzahl der Randcurven gleich gross, nämlich bei beiden $= 0$; und trotzdem lässt sich, wie man leicht übersieht, die eine keineswegs als eine Umformung der andern auffassen. Wir gehen einstweilen auf die hier erforderlichen Bedingungen nicht näher ein.

Wir wollen uns im Raume irgend welche Fläche denken von beliebiger Krümmung und überhaupt von ganz beliebiger Gestalt; und auf dieser Fläche wollen wir uns die Werthe irgend welcher Function ausgebreitet denken. Jene Fläche mag nun einer stetig fortschreitenden Veränderung unterworfen werden. Während diese Veränderung aber vor sich geht, während also die Gestalt der Fläche durch stetige Umformung in andere und andere Gestalten übergeht, mögen die einzelnen Puncte der Fläche mit den ihnen einmal zuertheilten Functionswerthen unlöslich verbunden bleiben. Wir wollen den zu Anfang gegebenen Zustand der Fläche kurzweg ihren Anfangszustand, und den in Folge jener stetigen Umformung schliesslich eintretenden neuen Zustand den Endzustand nennen.

War die Function während des Anfangszustandes der Fläche auf derselben überall eindeutig, d. h. war damals jeder Punct der Fläche immer nur mit je einem Werthe der Function belastet, so wird Gleiches offenbar auch dann noch stattfinden, wenn dieselbe in ihren Endzustand übergegangen ist.

War ferner die Function zur Zeit des Anfangszustandes auf der Fläche allenthalben stetig, so wird sie nach Eintritt des Endzustandes ebenfalls überall stetig sein.

War die Function zur Zeit des Anfangszustandes der Fläche in einzelnen Puncten oder Linien unstetig, so wird sie nach Eintritt des Endzustandes nach wie vor, und zwar in eben denselben Puncten oder Linien unstetig sein.

Insbesondere wollen wir unsere Aufmerksamkeit auf diejenigen Unstetigkeitspuncte richten, welche wir früher (Seite 94) mit dem Namen „polare Unstetigkeitspuncte“ oder kurzweg mit dem Namen „Pole“ bezeichnet haben, also auf die-

*) Unter einer Ringfläche ist die Oberfläche eines körperlichen Ringes, also z. B. diejenige Rotationsfläche zu verstehen, welche von einem Kreise erzeugt wird, sobald man denselben um eine Achse, die in der Ebene des Kreises liegt und den Kreis nicht schneidet, rotiren lässt.

jenigen Puncte, in welchen die Function selber — sie mag f genannt werden — unstetig ist, in deren Bereich aber der reciproce Werth der Function, nämlich der Werth von $\frac{1}{f}$ stetig bleibt. Jene Unstetigkeit von f und jene Stetigkeit von $\frac{1}{f}$ werden, falls sie in irgend einem Puncte der Fläche einmal vorhanden sind, ungeändert fortbestehen, welches auch die stetige Umformung sein mag, der die Fläche unterworfen wird. Sie werden demnach, falls sie zur Zeit des Anfangszustands vorhanden sind, auch noch vorhanden sein zur Zeit des Endzustandes. Wir sehen also, dass die Bedingungen der polaren Unstetigkeit, falls sie erfüllt sind zur Zeit des einen Zustandes, auch erfüllt sein werden nach Eintritt des andern.

Besitzt also — so können wir uns ausdrücken — die auf der Fläche ausgebreitete Function zur Zeit des Anfangszustandes in irgend einem Punct der Fläche einen Pol, so wird sie in jenem Punct nach Eintritt des Endzustandes ebenfalls einen Pol besitzen.

Gleiches wird offenbar auch von den Nullpuncten gelten.

Denn es ist ja nach unserer Annahme jeder Punct der Fläche mit dem ihm einmal zuertheilten Functionswerth unlöslich verbunden. Ist also irgend ein Punct der Fläche mit dem Werthe Null belastet, so wird er, mag sich nun die Gestalt der Fläche verändern, wie sie wolle, diesen Werth Null beständig behalten.

Wir gelangen somit zu folgendem allgemeinen Satz:

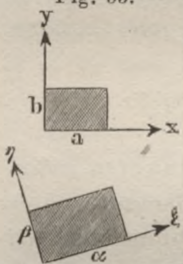
Sind die Werthe einer Function auf irgend welcher Fläche ausgebreitet, so tritt hinsichtlich der auf jener Fläche vorhandenen Stetigkeitspuncte, Nullpuncte und Pole keine Aenderung ein, mag man nun die Fläche in ihrem ursprünglichen Zustande verharren, oder mag man dieselbe durch stetige Umformung in irgend welchen andern Zustand übergehen lassen. In jedem einzelnen Punct der Fläche wird die Function sich zur Zeit des neuen Zustandes genau ebenso verhalten, wie zur Zeit des ursprünglichen Zustandes; in jedem einzelnen Punct der Fläche wird sie zur Zeit des neuen Zustandes stetig oder unstetig, Null oder von Null verschieden, mit einer polaren oder nichtpolaren Unstetigkeit behaftet sein, je nachdem zur Zeit des ursprünglichen Zustandes das Eine oder das Andere der Fall war.

Ebenso verhält es sich andererseits auch mit der Eindeutigkeit der Function. In jedem einzelnen Punct der Fläche wird die Function zur Zeit des neuen Zustandes eindeutig oder mehrdeutig sein, je nachdem zur Zeit des ursprünglichen Zustandes das Eine oder das Andere der Fall war.

Zweiter Abschnitt. Ueber die stetige Umformung eines Rechtecks in ein anderes Rechteck.

Es seien zwei ebene Flächen gegeben, die sich an verschiedenen Stellen des Raumes befinden, und von denen jede die Gestalt eines Rechtecks besitzt. Das eine Rechteck habe die Kanten a, b, das andere die Kanten α, β. Jedes dieser Rechtecke mag auf ein Coordinatensystem bezogen gedacht werden, dessen Achsen durch zwei seiner Kanten dargestellt sind. Die mit a, b parallelen Coordinaten eines Punctes in dem einen Rechteck mögen mit x, y, und die mit α, β parallelen Coordinaten eines Punctes in dem andern Rechteck mit ξ, η bezeichnet werden (Fig. 53).

Fig. 53.



Offenbar wird man, falls man sich ganz beliebiger Dehnungen bedienen wollte, diese Dehnungen auf unendlich viele verschiedene Arten so einrichten können, dass das eine Rechteck mit dem andern zur Deckung kommt; man könnte z. B. in dem Rechteck ab irgend einen Theil im Innern abgrenzen, diesen innern Theil ungeändert, und den äusseren Theil allein in solcher Weise sich ausdehnen lassen, dass die Deckung mit dem andern Rechteck $\alpha\beta$ zu Stande kommt. Demgemäss wird man also auch auf unendlich viele verschiedene Arten zwischen den Puncten des einen und denen des andern Rechtecks eine Correspondenz feststellen können, welche so beschaffen ist, dass durch Anwendung von Dehnungen jeder Punct des einen Rechtecks mit dem correspondirenden des andern zur Deckung gelangt.

Diejenige Correspondenz, welche sich hier am natürlichsten darbietet, ist folgende:

$$\frac{x}{a} = \frac{\xi}{\alpha},$$

$$\frac{y}{b} = \frac{\eta}{\beta}.$$

Werden nämlich je zwei Puncte x, y und ξ, η in dem einen und in dem anderen Rechteck, welche diesen Relationen Genüge leisten, correspondirende Puncte genannt, so wird man, um die in Rede stehende Deckung zu bewerkstelligen, zuerst das Rechteck ab einer mit a parallelen Dehnung unterwerfen, durch welche jedes in dieser Richtung liegende Linienelement im Verhältniss von $a : \alpha$ verlängert wird, und sodann dieses Rechteck einer zweiten mit b parallelen Dehnung unterwerfen, durch welche alle mit b parallelen Linienelemente im Verhältniss von $b : \beta$ verlängert werden. Ist solches geschehen, so wird das eine Rechteck mit dem anderen congruent sein; und es bedarf daher alsdann, um die Deckung wirklich herbeizuführen, nur noch einer gewissen Verschiebung im Raume.

Setzt man also zwischen den Puncten x, y des einen, und zwischen den Puncten ξ, η des andern Rechtecks die Correspondenz fest:

$$\frac{x}{a} = \frac{\xi}{\alpha},$$
$$\frac{y}{b} = \frac{\eta}{\beta},$$

so kann man durch stetige Umformung das eine Rechteck mit dem andern, und zwar jeden Punct des einen mit dem correspondirenden Punct des andern zur Deckung bringen.

Mit Rücksicht auf diese Umformung können wir die beiden Rechtecke ab und $\alpha\beta$ als unter einander identisch, nämlich als zwei verschiedene Zustände ein und derselben Fläche ansehen; jeder Punct x, y des einen ist dann identisch mit dem correspondirenden Punct ξ, η des andern.

Wir wollen uns nun denken, die einzelnen Puncte x, y dieser Fläche wären zur Zeit ihres ursprünglichen Zustandes mit den Werthen irgend welcher gegebenen Function

$$f = f(x + iy)$$

belastet, und diese Werthe blieben, während die Fläche ihren Zustand ändert, mit den einzelnen Puncten der Fläche unlöslich verbunden. Ist also p irgend ein Punct der Fläche, so wird der in p vorhandene Functionswerth ein und derselbe sein, mag sich nun die Fläche in ihrem ursprünglichen Zustande ab, oder in ihrem neuen Zustande $\alpha\beta$ befinden.

Bezeichnen wir die Coordinaten des Punctes p zur Zeit des ursprünglichen Zustandes mit x_p, y_p, und zur Zeit des neuen Zustandes mit ξ_p, η_p, so wird

$$x_p = \frac{a}{\alpha}\,\xi_p,$$

$$y_p = \frac{b}{\beta}\,\eta_p$$

sein. Der mit p unlöslich verbundene Functionswerth — er mag f_p genannt werden — wird, was seine Abhängigkeit von den ursprünglichen Coordinaten x_p, y_p dieses Punctes anbelangt, dargestellt werden durch

$$f_p = f(x_p + iy_p).$$

Demnach wird derselbe, was seine Abhängigkeit von den neuen Coordinaten ξ_p, η_p jenes Punctes anbelangt, dargestellt sein durch

$$f_p = f\left(\frac{a}{\alpha}\,\xi_p + i\,\frac{b}{\beta}\,\eta_p\right).$$

Sind also die auf der Fläche ausgebreiteten Functionswerthe während ihres ursprünglichen Zustandes nicht von x, y, sondern nur von dem einen Argument

$$x + iy$$

abhängig, so werden dieselben zur Zeit des neuen Zustandes der Fläche ebenfalls nicht von ξ, η, sondern nur von

$$\frac{a}{\alpha}\,\xi + i\,\frac{b}{\beta}\,\eta$$

abhängig sein, oder, falls zufällig $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}$ sein sollte, nur von

$$\xi + i\eta$$

abhängig sein.

Im Folgenden werden wir immer nur mit Umformungen zu thun haben, bei welchen der letzterwähnte Fall eintritt. Sind nämlich x, y die Coordinaten irgend eines Punctes der Fläche während ihres ursprünglichen, und sind ξ, η die Coordinaten desselben zur Zeit ihres neuen Zustandes, so werden die auf der Fläche ausgebreiteten Functionswerthe, falls sie zur Zeit des ersteren nicht von x, y, sondern nur von $x + iy$ abhängen, auch zur Zeit des letzteren nicht von ξ, η, sondern nur von $\xi + i\eta$ abhängig werden.

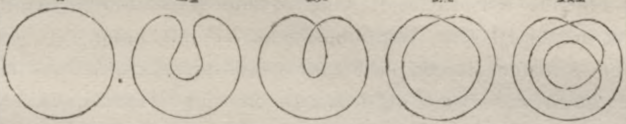
Dritter Abschnitt. Ueber die stetige Umformung einer Kegelfläche in eine andere Kegelfläche, insbesondere über die stetige Umformung einer Windungsfläche in eine Windungsfläche anderer Ordnung.

Da die Windungsflächen ihrer Definition zufolge nichts anderes sind, als eine gewisse Art von Kegelflächen, so wird es gut sein, wenn wir mit diesen letzteren beginnen.

Wir können (Fig. 54) eine in sich zurücklaufende, z. B. eine

Fig. 54.

I Ia Ib II III



kreisförmige Curve aus ihrem ursprünglichen Zustande I durch Biegung und Dehnung, also durch eine stetig fortschreitende Umformung in den Zustand I a, sodann in den Zustand I b, und schliesslich in den Zustand II versetzen. Ebenso können wir dann den letzterhaltenen Zustand II durch weitere Umformung in den Zustand III übergehen lassen.

Denken wir uns nun die hier betrachtete Curve als die Leitcurve eines Kegels, dessen Spitze irgendwo im Raume, etwa gerade über dem Mittelpunct der Curve sich befindet, so werden den verschiedenen Zuständen I, II, III jener Curve ebenso viele verschiedene Zustände dieses Kegels entsprechen. Der der Curve I angehörige Kegel wird sich also durch eine s t e t i g e*) Umformung

*) Jede Umformung, bei welcher Zerreissungen und Zusammenheftungen vermieden werden, ist nach unserer Definition eine s t e t i g e Umformung. Wenn wir den hier betrachteten Kegelmantel aus dem Zustande I in den Zustand II übergehen lassen, so müssen wir dabei zwei Flächentheile dieses Mantels in einer gewissen Linie einander d u r c h s e t z e n lassen. Eine solche Durchsetzung geht nun aber (zufolge unserer Vorstellungen S. 163) vor sich, ohne dass dabei die Puncte des einen Flächentheiles mit denen des andern längs jener Linie hin in irgend welchen Zusammenhang treten, geht also vor sich, ohne dass dabei irgend welche Z u s a m m e n h e f t u n g e n eintreten. Ebenso wenig finden dabei Z e r r e i s s u n g e n irgend welcher Art statt. Demnach ist die Umformung unseres Kegels aus dem Zustande I in

in den der Curve II entsprechenden Kegel, und dieser wieder auf gleiche Weise in den der Curve III entsprechenden Kegel verwandeln lassen.

Solches gilt ganz allgemein — gleichgültig, an welchem Ort des Raumes wir uns die Spitze des Kegels auch denken mögen; und wird demnach auch dann gelten, wenn wir uns die Spitze des Kegels in der Ebene der Curve, oder wenigstens dieser Ebene unendlich nahe, etwa im Mittelpunct der Curve gelegen denken. In diesem Falle sind aber unsere Kegel I, II, III nichts anderes als Windungsflächen, nämlich der Kegel I eine Windungsfläche 0[ter] Ordnung, d. h. eine gewöhnliche einblättrige ebene Fläche, der Kegel II eine Windungsfläche 1[ter] Ordnung, und der Kegel III eine Windungsfläche 2[ter] Ordnung.

Wir sehen demnach, dass eine gewöhnliche einblättrige ebene Fläche durch stetige Umformung in eine Windungsfläche beliebiger Ordnung, oder dass auch umgekehrt jede Windungsfläche durch stetige Umformung in eine einblättrige ebene Fläche verwandelt werden kann.

Um auf diese Umformungen näher einzugehen, wird es gut sein, wieder zunächst einen Blick zu werfen auf die Umformung einer Kegelfläche.

Es sei eine Kegelfläche von ganz beliebiger Gestalt gegeben. Jede auf dem Mantel des Kegels gezogene, von seinem Scheitelpunct ausgehende gerade Linie mag mit dem Namen „Kante“ bezeichnet werden. Denken wir uns den Kegelmantel für einen Augenblick längs irgend einer Kante hin — sie mag die Anfangskante genannt werden — aufgeschlitzt, und denselben sodann auf einer Ebene ausgebreitet, so werden wir die Lage eines jeden Punctes auf diesem Mantel durch Anwendung eines Polarcoordinatensystems (r, t) bestimmen können, indem wir unter r die Entfernung des betreffenden Punctes von dem Scheitelpuncte, und unter t denjenigen Winkel verstehen, unter welchem die durch den Punct gehende Kante geneigt ist gegen die Anfangskante.

Soll eine um den Scheitelpunct rotirende Linie den in der Ebene ausgebreiteten Kegelmantel vollständig durchlaufen, so wird

den Zustand II in der That eine stetige Umformung zu nennen. Gleiches gilt natürlich von dem Uebergange des Kegels aus dem Zustande II in den Zustand III u. s. w.

der von ihr beschriebene Winkel t von 0 aus bis zu einem gewissen Werthe T anwachsen müssen. Diese Grösse T mag für den Augenblick der „Winkelumfang" oder geradezu der „Umfang" des Kegels genannt werden.

Genau dieselben Coordinaten r, t werden nun zur Ortsbestimmung eines Punctes auf dem Kegelmantel auch noch dann in Anwendung gebracht werden können, wenn wir uns denselben wieder in seinen ursprünglichen Zustand, nämlich in seine gekrümmte und geschlossene Form zurückversetzt denken. Der Winkel t wird alsdann nicht mehr in einer Ebene, sondern auf der gekrümmten Kegelfläche gemessen, nämlich durch die Bogenlänge derjenigen Curve gemessen werden, in welcher der Kegelmantel von einer um seinen Scheitelpunct mit dem Radius 1 beschriebenen Kugelfläche durchschnitten wird; T wird die vollständige Länge der eben genannten Curve darstellen; ferner wird r, nach wie vor, den geradlinigen Abstand repräsentiren, um welchen irgend ein Punct auf dem Kegelmantel von dem Scheitelpunct entfernt ist.

Wir wollen nun gleichzeitig zwei beliebig gegebene und an verschiedenen Stellen des Raumes liegende Kegelflächen in Betracht ziehen. Bei der zweiten mögen ϱ, ϑ, θ dieselben Bedeutungen haben, welche r, t, T für die erste besitzen.

Je zwei Kanten des einen und des andern Kegels mögen correspondirende Kanten genannt werden, falls zwischen ihren Winkeln t und ϑ die Relation

$$\frac{t}{T} = \frac{\vartheta}{\theta}$$

stattfindet.

Ferner mögen je zwei Puncte auf dem einen und auf dem andern Kegelmantel correspondirende Puncte heissen, wenn dieselben erstens auf correspondirenden Kanten liegen, und wenn sie zweitens, was ihre Entfernungen von den Scheitelpuncten anbelangt, eine willkührlich festgesetzte Relation, z. B. die Relation

$$\sqrt[n]{r} = \sqrt[\nu]{\varrho}$$

erfüllen, wo unter n und ν zwei beliebig gewählte positive ganze Zahlen verstanden werden sollen. Fassen wir irgend zwei correspondirende Kanten ins Auge, so wird dann mit jedem Puncte der einen immer nur ein Punct der andern in

Correspondenz stehen. Denken wir uns ferner auf der einen Kante einen Punct in Bewegung, welcher dieselbe von dem Scheitelpunct aus bis ins Unendliche hin durchläuft, so wird gleichzeitig der auf der andern Kante sich fortbewegende correspondirende Punct ebenfalls vom Scheitelpunct aus bis ins Unendliche hin fortlaufen.

Es mag nun der Mantel des einen Kegels durch unendlich viele, und in unendlich kleinen Winkelabständen auf einander folgende Kanten in schmale Dreiecke zerlegt werden; ferner mögen diese Dreiecke durch Curven, welche die Kanten senkrecht durchschneiden, in unendlich kleine Rechtecke getheilt werden. Auf dem Mantel des andern Kegels mögen die correspondirenden Kanten und die correspondirenden Curven gezogen werden, so dass auch dieser in unendlich kleine Rechtecke zerlegt wird.

Mit jedem Flächenelement des einen Mantels wird dann immer nur ein Flächenelement des andern correspondiren. Ferner wird die gegenseitige Gruppirung der auf dem einen Mantel vorhandenen Elemente allenthalben ebenso beschaffen sein, wie die gegenseitige Gruppirung der correspondirenden Elemente auf dem andern Mantel. Es werden sich demnach diese beiden Mantelflächen, was die Elemente anbelangt, in welche wir jede derselben zerlegt haben, nur durch die verschiedene Grösse dieser Elemente von einander unterscheiden. Zwischen den Elementen des einen und zwischen den correspondirenden Elementen des andern Mantels werden wir aber, was ihre Grösse anbelangt, vollständige Congruenz hervorrufen können, sobald wir die Elemente des einen gewisse Dehnungen und Biegungen erleiden lassen. Demnach wird es also nur gewisser Dehnungen und Biegungen bedürfen, um die eine Kegelfläche mit der andern, und zwar jeden Punct der einen mit dem correspondirenden Punct der andern zur Deckung zu bringen.

Somit ergiebt sich folgendes Resultat:

Sind T und Θ die Umfänge) zweier beliebigen Kegelflächen, und setzt man zwischen den Puncten r, t der einen, und den Puncten ϱ, ϑ der andern die Correspondenz fest:*

---

*) Unter dem Umfang eines Kegels ist hier (vergl. S. 215) die Länge derjenigen Curve zu verstehen, in welcher der Kegelmantel von einer um seinen Scheitelpunct mit dem Radius 1 beschriebenen Kugelfläche durchschnitten wird.

$$\frac{t}{T} = \frac{\vartheta}{\theta}$$
$$\sqrt[n]{r} = \sqrt[\nu]{\varrho},$$

wo n, ν beliebig gewählte positive ganze Zahlen vorstellen, so wird man, durch stetige Umformung, jederzeit die eine Fläche mit der andern, und zwar jeden Punct der einen mit dem correspondirenden Punct der andern zur Deckung bringen können.

An Stelle der beiden Kegelflächen können wir nun, da dieselben vollständig beliebig waren, auch zwei Windungsflächen, und zwar zwei Windungsflächen von beliebiger Ordnung, nehmen. Die Umfänge T und θ werden dann Vielfache von 2π sein; es wird nämlich $T = m \cdot 2\pi$ und $\theta = \mu \cdot 2\pi$ werden, falls die beiden Windungsflächen respective von der $(m-1)^{\text{ten}}$ und $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Ordnung sind. Unsere Formeln gehen demnach, wenn wir in diesem Fall die beliebig zu wählenden Zahlen n und ν respective mit m und μ gleich gross nehmen, über in:

$$(1)\qquad \frac{t}{m} = \frac{\vartheta}{\mu}$$
$$\sqrt[m]{r} = \sqrt[\mu]{\varrho}$$

Aus diesen beiden Formeln folgt sofort:

$$(2)\qquad \sqrt[m]{re^{it}} = \sqrt[\mu]{\varrho e^{i\vartheta}};$$

und umgekehrt lassen sich die beiden Formeln (1) aus der Gleichung (2) ableiten, sobald man in dieser das Reelle vom Imaginären sondert. Somit ergiebt sich folgender Satz:

Setzt man zwischen den Puncten r, t und ϱ, ϑ zweier Windungsflächen, deren Ordnungen gleich $m-1$ und $\mu-1$ sind, die Correspondenz fest:

$$\sqrt[m]{re^{it}} = \sqrt[\mu]{\varrho e^{i\vartheta}},$$

so lässt sich durch stetige Umformung die eine Fläche mit der andern, und zwar jeder Punct der einen mit dem correspondirenden Punct der andern zur Deckung bringen.

Für $\mu = 1$ wird die eine Windungsfläche von der 0^{ten} Ordnung, also einblättrig. Somit ergiebt sich:

Setzt man zwischen den Puncten r, t einer Windungsfläche $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, und zwischen den Puncten ϱ, ϑ einer ebenen einblättrigen Fläche die Correspondenz fest:

$$\sqrt[m]{re^{it}} = \varrho e^{i\vartheta}$$

so lässt sich durch stetige Umformung die eine Fläche mit der andern, und zwar jeder Punct der einen mit dem correspondirenden Punct der andern zur Deckung bringen.

Die stetige Umformung einer Windungsfläche in eine gewöhnliche einblättrige Fläche ist von besonderer Wichtigkeit. Wir werden daher auf diesen Gegenstand sogleich von Neuem eingehen, und denselben von einer etwas andern Seite her in Ueberlegung ziehen.

Vierter Abschnitt. Ueber die stetige Umformung einer Windungsfläche in eine Elementarfläche.

Man kann eine Linie durch die Bewegung eines Punctes, und ebenso eine Fläche durch die Bewegung einer Linie entstehen lassen.

Wir denken uns in der Horizontalebene einen Radius, welcher um seinen Anfangspunct o in positiver Richtung und mit beliebiger Geschwindigkeit rotirt, und dessen Länge sich von Augenblick zu Augenblick auf ganz beliebige Weise ändert. Durch die Rotationsbewegung des Radius wird eine ebene Fläche erzeugt werden, welche, so lange jene Bewegung andauert, fortwährend im Wachsen begriffen ist. Es wird diese Fläche (Fig. 55) in jedem Augenblick begrenzt sein von drei Linien, nämlich einerseits begrenzt sein von denjenigen beiden geraden Linien R_0 und R, durch welche die Anfangslage und die augenblicklich vorhandene Lage des Radius dargestellt sind, und andererseits begrenzt sein von derjenigen krummen Linie S, auf welcher der Endpunct des Radius sich inzwischen fortbewegt hat. Von diesen drei Begrenzungslinien ist es die Linie R, welche, während sie in ihrer Rotationsbewegung weiter und weiter vorschreitet, ein fortwährendes Wachsen der Fläche bewirkt.

Fig. 55.

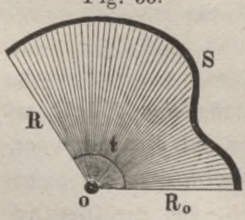


Fig. 56.

Neben der Fläche $(R_0\ R\ S)$ denken wir uns (Fig. 56) gleichzeitig eine zweite, und ebenfalls noch im Wachsen begriffene Fläche $(P_0\ P\ \Sigma)$. Diese letztere mag an irgend einer andern Stelle des Raumes, aber wiederum in irgend welcher Horizontalebene, auf ganz analoge Weise entstehen, nämlich erzeugt werden durch einen Radius, der in jener Ebene in positiver Richtung um seinen Anfangspunct ω rotirt, und dessen Länge sich ebenfalls von Augenblick zu Augenblick ändert.

Bei der Fläche $(R_0\ R\ S)$ waren die Geschwindigkeit, mit welcher der erzeugende Radius rotirt, und die Schnelligkeit, mit welcher die Länge des Radius zu- oder abnimmt, durchaus willkührlich. Anders soll es sich bei der Fläche $(P_0\ P\ \Sigma)$ verhalten. Sind nämlich in irgend einem Augenblick R und P die Längen der beiden erzeugenden Radien, und t und ϑ die von ihnen beschriebenen Rotationswinkel, so soll beständig

$$P = \sqrt[m]{R}$$

und

$$\vartheta = \frac{t}{m}$$

sein, wo m eine beliebig gegebene positive ganze Zahl vorstellt.

Die Flächen $(R_0\ R\ S)$ und $(P_0\ P\ \Sigma)$ werden alsdann gleichzeitig entstehen und wachsen. Während aber das Wachsen der ersteren auf völlig freie und willkührliche Weise vor sich geht, wird das Wachsen der letztern auf bestimmte Weise gebunden sein an das der erstern.

Wir wollen uns beide Flächen materiell denken. Die Fläche $(R_0\ R\ S)$ wird in dem Augenblick, wo ihr erzeugender Radius einen Rotationswinkel von 360^0 beschriehen hat, zwei Randgebiete R_0 und R besitzen, welche dicht neben einander liegen. Zwischen diesen beiden Randgebieten mag aber keine Vereinigung eintreten. Wir wollen nämlich den erzeugenden Radius, sobald er nach einer Drehung von 360^0 zu seiner Anfangslage R_0 zurückgekehrt ist, in seiner Rotationsbewegung weiter fortfahren lassen, und gleichzeitig wollen wir das von ihm nachgeschleppte, neu entstehende Flächengebiet, ohne mit dem bei R_0 schon vorhandenem in Zusammenhang zu treten, über dieses hinweg sich fortschieben lassen. Die Fläche (R_0 R S) wird alsdann die Gestalt einer Schraubenfläche annehmen, in welcher die Anzahl der über einander liegenden Blätter mit jeder Umdrehung des erzeugenden Radius um Eins zunimmt, und bei welcher eine Vereinigung der bei R_0 und R liegenden Randgebiete nun weiterhin völlig unmöglich ist.

Wir ändern gegenwärtig unsere Vorstellungen. Die Fläche (R_0 R S) mag nicht geradezu wie eine Schraubenfläche, sondern in etwas anderer Art wachsen. Während nämlich bei Entstehung einer Schraubenfläche das im Wachsen begriffene obere Blatt der Fläche beständig auf dem schon vorhandenen darunter liegenden Blatt sich fortschiebt, nehmen wir an, dass bei Entstehung der Fläche (R_0 R S) das im Wachsen begriffene Blatt die schon vorhandenen Blätter beliebig oft, und an beliebigen Stellen durchsetzen dürfe, dass also die voranschreitende Begrenzungslinie R des neu entstehenden Blattes sich gewissermassen wie eine scharfe Kante oder Schneide verhalte, welche die schon fertigen Blätter nach Belieben durchdringen kann.

Wir lassen nun die voranschreitende Kante R von ihrer Anfangslage R_0 aus im Ganzen m volle Umdrehungen machen, und lassen dieselbe im Verlaufe dieser Umdrehungen in jedem Augenblick nach Belieben entweder das schon früher entstandene Flächengebiet durchschneiden, oder ohne dasselbe zu verletzen ruhig darüber hingleiten; jedoch so, dass sie schliesslich nach Ablauf jener m Umdrehungen in ihre Anfangslage R_0 hineinfällt. Ihre Länge mag sie während jener m Umdrehungen von Augenblick zu Augenblick beliebig geändert haben, zuletzt aber wiederum eben so gross geworden sein, als sie zu Anfang war. Die solcher Weise entstandene Fläche (R_0 R S) wird alsdann zwei bei R_0 und R unmittelbar neben einander liegende Randgebiete haben. Lassen wir zwischen diesen beiden Randgebieten eine Zusammenschmelzung eintreten, und setzen wir ferner — in Uebereinstimmung mit den von uns angenommenen Grundvorstellungen (Seite 163) — fest, dass in jeder Linie, wo zwei Theile der Fläche einander durchsetzen, zwischen diesen beiden Theilen kein Zusammenhang vorhanden sein soll, so haben wir eine Fläche vor uns, die nichts Anderes ist, als eine m blättrige Windungsfläche, deren Windungspunct in o liegt, und deren Rand durch eine einzige nach m vollen Umgängen in sich selber zurücklaufende Curve S dargestellt wird.

Während nun die Fläche $(R_0\ R\ S)$ in solcher Weise anwächst und schliesslich in eine m blättrige Windungsfläche übergeht, nimmt gleichzeitig die von ihr abhängende Fläche $(P_0\ P\ \Sigma)$ eine sehr viel einfachere Gestalt an. Da nämlich die von den Radien R und P gleichzeitig beschriebenen Rotationswinkel t und ϑ in jedem Augenblick durch die Gleichung

$$\vartheta = \frac{t}{m}$$

mit einander verbunden sind, der Radius R aber m volle Umdrehungen gemacht hat, so wird gleichzeitig der Radius P nur eine Umdrehung ausgeführt haben. Und da ferner die Längen jener beiden Radien in jedem Augenblick durch die Gleichung

$$P = \sqrt[m]{R}$$

verbunden sind, der Radius R aber nach Ablauf seiner m Umdrehungen wieder seine ursprüngliche Länge R_0 angenommen hat, so wird auch der Radius P nach Ausführung seiner einen Umdrehung wiederum zu seiner anfänglichen Länge P_0 zurückgekehrt sein. Während sich also die Fläche $(R_0\ R\ S)$ in eine m blättrige Windungsfläche verwandelt hat, wird gleichzeitig die von ihr abhängende Fläche $(P_0\ P\ \Sigma)$ in eine einblättrige Windungsfläche übergegangen sein, deren Windungspunct in ω liegt, und deren Rand durch eine einzige in sich zurücklaufende Curve Σ dargestellt ist. Eine solche einblättrige Windungsfläche ist aber offenbar nichts Anderes als eine gewöhnliche Elementarfläche.

Um die Lage irgend eines Punctes auf der m blättrigen Windungsfläche zu bestimmen, bedienen wir uns der Polarcoordinaten r, t; wir verstehen nämlich unter r den Abstand des Punctes vom Windungspuncte o, und unter t den Winkel, um welchen sich ein um o in positiver Richtung rotirender und auf der Fläche fortgleitender Radius von der Lage R_0 aus drehen muss, bevor er mit dem betrachteten Punct zusammentrifft. Denken wir uns m Puncte, welche in den m Blättern der Fläche gerade über einander liegen, so werden die Coordinaten r für all' diese Puncte ein und dieselbe Grösse haben, die Coordinaten t hingegen Werthe besitzen, von denen je zwei immer um 360^0 von einander verschieden sind.

In ähnlicher Weise mag die Lage eines Punctes auf der einblättrigen Elementarfläche durch zwei Coordinaten ϱ, ϑ bestimmt werden, von welchen die erstere den geradlinigen Abstand des Punctes von ω, und die zweite den positiv gerechneten Winkelabstand des Punctes von der Linie P_0 angiebt.

Endlich mögen je zwei zu der Windungsfläche und zu der Elementarfläche gehörige Puncte r, t und ϱ, ϑ correspondirende Puncte genannt werden, sobald

$$\varrho = \sqrt[m]{r}, \quad \text{und}$$
$$\vartheta = \frac{t}{m}$$

ist. Je zwei einander correspondirende Radien der einen und andern Fläche werden dann nichts Anderes sein als zwei Lagen, welche die erzeugenden Radien der beiden Flächen in ein und demselben Augenblick besessen haben. Denken wir uns also die Windungsfläche durch unendlich viele Radien in lauter unendlich kleine Sectoren zerfällt, so wird die Elementarfläche durch die correspondirenden Radien ebenfalls in lauter unendlich kleine Sectoren getheilt werden. Zieht man auf der Windungsfläche eine den Windungspunct o umkreisende und also nach m vollen Kreisumgängen in sich selber zurücklaufende Linie, so wird mit dieser auf der Elementarfläche eine den Punct ω umkreisende und nach einem einzigen Umgang in sich zurücklaufende Linie, also eine gewöhntiche Kreislinie correspondiren. Ist der Radius der auf der Windungsfläche gezogenen Linie gleich r, so ist der Radius der correspondirenden Linie auf der Elementarfläche gleich $\sqrt[m]{r}$. Denken wir uns nun die auf der Windungsfläche construirten Sectoren durch kreisförmige Linien der genannten Art in lauter unendlich kleine Flächenelemente zerlegt, so werden die correspondirenden Sectoren auf der Elementarfläche durch die correspondirenden Kreislinien ebenfalls in lauter unendlich kleine Flächenelemente zerfallen.

Mit jedem Element der einen Fläche wird dann immer ein bestimmtes Element der andern correspondiren. Ferner wird die gegenseitige Lagerung benachbarter Elemente auf der einen Fläche völlig dieselbe sein, wie die gegenseitige Lagerung der correspondirenden Elemente auf der andern. Es werden sich demnach die beiden Flächen, was die Elemente anbelangt, in welche wir jede derselben zerlegt haben, nur durch die verschiedene Grösse dieser Elemente von einander unterscheiden. Das aber ist ein

Unterschied, der durch geeignete Dehnungen und Biegungen einer der beiden Flächen beseitigt werden kann. Wir gelangen somit zu folgendem Resultat:

Setzt man zwischen den Puncten r, t der Windungsfläche und zwischen den Puncten ϱ, ϑ der Elementarfläche die Correspondenz fest:

$$\varrho = \sqrt[m]{r},$$
$$\vartheta = \frac{t}{m}$$

so wird sich durch stetige Umformung die eine Fläche in die andere, und zwar jeder Punct der einen in den correspondirenden Punct der andern verwandeln lassen. Zugleich ist zu bemerken, dass die beiden Gleichungen, durch welche hier die Correspondenz zwischen den Puncten der einen und andern Fläche festgesetzt ist, in die eine Gleichung

$$\varrho e^{i\vartheta} = \sqrt[m]{r e^{it}}$$

zusammengezogen werden können.

Wir wollen uns zwei Horizontalebenen, die xy Ebene und die $\xi\eta$ Ebene denken, die sich an verschiedenen Stellen des Raumes befinden, und von welchen die eine der Windungsfläche, die andere der Elementarfläche zur Unterlage dienen mag. Was die Lage der in diesen Ebenen vorhandenen Coordinatensysteme anbelangt, so mögen die Achsen x und ξ durch diejenigen Lagen dargestellt sein, welche die erzeugenden Radien der beiden Flächen zu Anfang besassen, also durch die Lagen R_0 und P_0, und andererseits die Achsen y und η durch diejenigen Lagen, welche jeder der beiden Radien in demjenigen Augenblick besass, wo er sich von seiner Anfangslage aus um 90^0 gedreht hatte. Da, wie wir angenommen haben, die erzeugenden Radien um ihre Anfangspuncte o und ω in positiver Richtung rotiren, so wird bei dieser Wahl der Achsen die y Achse zur x Achse, und ebenso auch die η Achse zur ξ Achse der Art liegen, wie es durch unsere früheren Festsetzungen (Seite 163) geboten ist.

Die rechtwinkligen Coordinaten x, y irgend eines zur Windungsfläche gehörigen Punctes drücken sich alsdann durch seine Polarcoordinaten r, t in folgender Weise aus:

$$x = r \cos t,$$
$$y = r \sin t,$$
$$x + iy = re^{it}.$$

Und in ganz ähnlicher Weise lassen sich alsdann auch die rechtwinkligen Coordinaten ξ, η irgend eines zur Elementarfläche gehörigen Punctes ausdrücken durch seine Polarcoordinaten ϱ, ϑ; nämlich so:

$$\xi = \varrho \cos \vartheta,$$
$$\eta = \varrho \sin \vartheta,$$
$$\xi + i\eta = \varrho \cdot e^{i\vartheta}.$$

Die zwischen den Puncten der einen und denen der andern Fläche festgesetzte Correspondenz

$$\varrho e^{i\vartheta} = \sqrt[m]{re^{it}}$$

nimmt daher, falls man die Polarcoordinaten mit den rechtwinkligen Coordinaten vertauscht, folgende Gestalt an:

$$\xi + i\eta = \sqrt[m]{x + iy.}$$

Somit können wir das vorhin erhaltene Resultat gegenwärtig auch so aussprechen:

Setzt man zwischen den zur Windungsfläche und zwischen den zur Elementarfläche gehörigen Puncten x, y und ξ, η die Correspondenz fest:

$$\xi + i\eta = \sqrt[m]{x + iy},$$

so wird sich durch stetige Umformung die eine Fläche in die andere, und zwar jeder Punct der einen in den correspondirenden Punct der andern verwandeln lassen.

Es seien oA, oB, oC, ... die Lagen, welche der erzeugende Radius der Windungsfläche, während er in positiver Richtung um o rotirt, von Augenblick zu Augenblick annimmt; und ferner $\omega\alpha$, $\omega\beta$, $\omega\gamma$, ... diejenigen Lagen, welche der um ω in positiver Richtung rotirende Radius der Elementarfläche in ebendenselben Augenblicken annimmt. Alsdann werden die Puncte A, B, C, ... diejenigen sein, welche mit den Puncten α, β, γ, ... correspondiren, also diejenigen sein, welche in die Puncte α, β, γ, ... sich verwandeln, sobald man die eine Fläche in die andere umformt. Die Puncte A, B, C, ... geben aber durch ihre Reihenfolge eine positive Umlaufung der Windungsfläche an; und Gleiches gilt von den Puncten α, β, γ, ... mit Bezug auf die Elementarfläche. Beachten wir dies, und geben wir gleichzeitig dem Coordinatensystem x, y, auf welches die Windungsfläche bezogen wurde, eine etwas andere Lage, nämlich eine Lage, welche der bisher angenommenen parallel ist, bei welcher der Windungspunct o aber nicht auf den Anfangspunct des Coordinatensystems, sondern auf irgend welchen andern Punct fällt, so erhalten wir schliesslich folgenden, für die Zukunft wichtigen Satz:

Eine beliebig gegebene und beliebig begrenzte Windungsfläche kann durch stetige Umformung immer in eine gewisse Elementarfläche umgewandelt werden. Ist m die Anzahl der in der Windungsfläche vorhandenen Blätter, und sind a, b die Coordinaten des Windungspunctes in Bezug auf irgend ein in der Ebene der Windungsfläche festgesetztes rechtwinkliges Coordinatensystem, so kann jene Umformung der Art ausgeführt werden, dass jeder zur Windungsfläche gehörige Punct x, y in denjenigen Punct ξ, η der Elementarfläche sich verwandelt, welcher mit ihm durch die Gleichung

$$\xi + i\eta = \sqrt[m]{(x + iy) - (a + ib)}$$

verbunden ist.

Sind A, B, C, ... die auf einander folgenden Puncte im Rande der Windungsfläche, und α, β, γ, ... diejenigen Puncte im Rande der Elementarfläche, in welche sich jene bei der in Rede stehenden Umformung verwandeln, so wird, falls durch die Reihenfolge A, B, C, ... eine positive Umlaufung der Windungsfläche angedeutet ist, durch die Punctreihe α, β, γ, ... eine ebenfalls positive Umlaufung der Elementarfläche dargestellt sein.

Fünfter Abschnitt. Jede Riemann'sche Kugelfläche lässt sich durch Zerschneidung und stetige Umformung auf ein System von lauter elementaren Flächenstücken reduciren.

Wir wollen uns irgend eine Riemann'sche Kugelfläche $\mathfrak{R}$ ihrer Gestalt nach vollständig gegeben denken, dieselbe uns also, was die Anzahl ihrer über einander liegenden Blätter, was die Lage ihrer Windungspuncte und Uebergangslinien anbelangt, völlig bestimmt denken. Besteht die Fläche aus n Blättern, so werden die Ordnungen ihrer Windungspuncte durch irgend welche Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots n - 1$ dargestellt sein. Es werden also auf der Fläche Windungspuncte von verschiedenen Ordnungen vorhanden sein können. Auch wird es sich ereignen können, dass an ein und derselben Stelle mehrere Windungspuncte gerade über einander liegen. (Vergl. Seite 203.)

Wir zerschneiden die gegebene Fläche $\mathfrak{R}$ in irgend welche Anzahl, z. B. in 1000 einzelne Stücke, und zwar in solcher Art, dass jedes dieser Stücke nur eine Randcurve besitzt und nicht mehr als höchstens einen Windungspunct in sich enthält*). Jedes von diesen Flächenstücken kann dann, falls es mehrblättrig

---

*) Eine derartige Zerstückelung der Kugelfläche $\mathfrak{R}$ wird sich z. B. in folgender Weise bewerkstelligen lassen: Man ziehe durch den Mittelpunct jener Fläche eine gerade Linie, und zwar in solcher Richtung, dass sie durch keinen der auf der Fläche vorhandenen Windungspuncte hindurchgeht. Diese Linie betrachte man für den Augenblick als die Achse der Kugelfläche, und construire demgemäss auf der Fläche ein Netz von Meridian- und Parallel-Kreisen; den einzelnen Kreisen gebe man dabei eine solche Lage, dass in jeder Masche des entstehenden Netzes nicht mehr als ein Windungspunct, oder, falls mehrere, doch nur gerade über einander liegende Windungspuncte vorhanden sind. Endlich führe man längs jener Meridian- und Parallelkreise Schnitte aus, von welchen jeder durch sämmtliche Blätter der Fläche hindurchdringt.

Die hiedurch herbeigeführte Zerstückelung wird alsdann den gestellten Anforderungen entsprechen. Befindet sich nämlich in jenem Schnittnetz eine Masche, welche keinen Windungspunct in sich enthält, so wird dieselbe aus n ohne Zusammenhang über einander liegenden einblättrigen Flächenstücken bestehen; vorausgesetzt, dass n die Anzahl der in der Fläche $\mathfrak{R}$ über einander geschichteten Blätter vorstellt. Befindet sich ferner in jenem Netz eine Masche, die nur einen, und zwar einen Windungspunct erster Ordnung enthält, so wird diese Masche aus $n - 1$ von einander getrennten Flächenstücken bestehen, von welchen eins zweiblättrig, die übrigen einblättrig sind. Findet sich ferner eine Masche vor, die zwei über einander liegende Windungspuncte, einen von der ersten und einen von der zweiten Ordnung enthält, so wird sie aus $n - 3$ getrennten Flächenstücken bestehen, von welchen eins zweiblättrig, ein anderes dreiblättrig und die übrigen einblättrig sind u. s. w. Von all' diesen einzelnen Flächenstücken werden aber die einblättrigen gar keinen und die mehrblättrigen immer nur je einen Windungspunct enthalten. Und ausserdem wird, wie man sofort übersieht, jedes von diesen Flächenstücken immer nur eine Randcurve besitzen.

ist, als eine sphärisch gekrümmte Windungsfläche und, falls es einblättrig ist, als eine sphärisch gekrümmte Windungsfläche 0^{ter} Ordnung angesehen werden.

Offenbar kann eine sphärisch gekrümmte Windungsfläche durch stetige Umformung in eine ebene Windungsfläche verwandelt werden; eine Fläche der letztern Art kann aber, wie wir vorhin (Seite 225) gesehen haben, durch abermalige stetige Umformung in eine Elementarfläche umgewandelt werden. Für die Ausführung dieser beiden Umformungen ist kein bestimmter Weg vorgeschrieben; sie können auf unendlich viele Arten bewerkstelligt werden.

Von den Flächenstücken, in welche wir die gegebene Riemann'sche Kugelfläche $\mathfrak{R}$ zerlegt haben, wird sich demnach jedes in stetiger Weise, und zwar auf unendlich viele Arten, zu einer Elementarfläche umformen lassen. Unter diesen unendlich vielen Umformungsarten befinden sich zwei, die von besondrer Wichtigkeit sind, und auf die wir daher näher eingehen wollen.

Wir betrachten dabei irgend eines unter jenen Flächenstücken. Es mag $\mathfrak{A}$ heissen und aus m Blättern bestehen, also eine sphärisch gekrümmte Windungsfläche $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung sein. Ferner mögen x, y die Kugelcoordinaten (vergl. Seite 133) irgend eines zu dem Flächenstück gehörigen Punctes, und a, b die Kugelcoordinaten des darauf befindlichen Windungspunctes sein. Sollte zufälliger Weise $m = 1$, das Flächenstück mithin einblättrig sein, so würde irgend ein beliebig gewählter Punct des Flächenstücks als Windungspunct zu betrachten, und, was seine Coordinaten anbelangt, mit a, b zu bezeichnen sein.

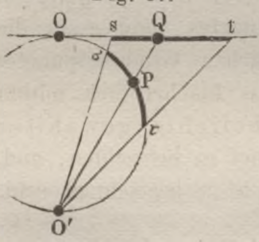
Erste Methode der Umformung.

Das zu betrachtende $m$blättrige Flächenstück $\mathfrak{A}$ bildet einen Theil der ursprünglich gegebenen Riemann'schen Fläche $\mathfrak{R}$, und hat demnach, ebenso wie jene, gewissermassen eine mit dem Durchmesser Eins beschriebene Kugel zur Unterlage. Es seien (Fig. 57), ebenso wie früher, O und O' die beiden Puncte, in welchen diese Kugel von der Horizontal- und Antipodenebene berührt wird.

Wir lassen alle zum Flächenstück $\mathfrak{A}$ gehörigen Puncte, ohne ihren gegenseitigen Zusammenhang in anderer, als stetiger Art zu ändern, auf geradlinigen, von O' ausstrahlenden Bahnen so weit fortwandern, bis sie auf die Horizontalebene fallen, und bezeichnen denjenigen Zustand, in welchen das Flächenstück hiedurch versetzt wird, mit $\mathfrak{A}^0$. In diesem Zustande wird das Flächenstück, ebenso wie früher, eine $m$blättrige Windungsfläche sein, aber eine Windungsfläche, welche nicht mehr sphärisch gekrümmt, sondern eben ist; und gleichzeitig wird es dann zur Unterlage nicht mehr die Kugel, sondern die Horizontalebene haben.

Nicht immer lässt sich die eben genannte Operation der Art ausführen, dass die in Betreff der Stetigkeit gestellte Bedingung erfüllt wird. Enthält nämlich das betrachtete Flächenstück, während seines ursprünglichen Zustandes, einen bei O' liegenden Punct in sich, so wird bei Ausführung jener Operation in diesem Puncte eine Zerreissung des Flächenstücks eintreten; der Zusammenhang zwischen den bei O' liegenden Puncten wird also in diesem Falle einer gewaltsamen, einer unstetigen Aenderung unterworfen werden. Wir wollen diesen Ausnahmefall ganz ausser Acht lassen, also unter $\mathfrak{A}$ ein Flächenstück verstehen, welches keinen bei O' liegenden Punct in sich enthält.

Fig. 57.



Ist (Fig. 57) die räumliche Lage des Flächenstückes, während seines ursprünglichen Zustandes $\mathfrak{A}$, dargestellt durch $\sigma\tau$, so wird sie nach Eintritt des neuen Zustandes $\mathfrak{A}^0$ dargestellt sein durch st. Diejenigen Puncte des Flächenstücks, welche sich während des ersten Zustandes z. B. in P befinden, werden nach Eintritt des letztern bei Q liegen.

Wir haben die Kugelcoordinaten des auf unserm Flächenstück befindlichen Windungspunctes mit a, b, und ferner die Kugelcoordinaten irgend eines andern zu dem Flächenstück gehörigen Punctes mit x, y bezeichnet. Sind nun a^0, b^0 und x^0, y^0 diejenigen Coordinaten, welche diese Puncte nach Eintritt des neuen Zustandes $\mathfrak{A}^0$ in Bezug auf das in der Horizontalebene vorhandene Coordinatensystem annehmen, so wird (vergl. Seite 133)

$$a^0 + ib^0 = a + ib,$$
$$x^0 + iy^0 = x + iy$$

sein.

Die durch $\mathfrak{A}^0$ dargestellte, auf der Horizontalebene liegende Windungsfläche verwandeln wir nun durch stetige Umformung in eine Elementarfläche, und nehmen dabei zur Unterlage der letztern eine Hülfsebene, die sich irgendwo im Raume befinden mag, und in welcher zwei auf einander senkrechte Coordinatenachsen ξ, η festgesetzt sein mögen. Diese Umformung führen wir (vergl. Seite 225) in solcher Weise aus, dass jeder zur Windungsfläche $\mathfrak{A}^0$ gehörige Punct x^0, y^0 in denjenigen Punct ξ, η der Elementarfläche sich verwandelt, welcher mit ihm durch die Gleichung

$$\xi + i\eta = \sqrt[m]{(x^0 + iy^0) - (a^0 + ib^0)}$$

verbunden ist.

Denken wir uns solches wirklich ausgeführt, und bezeichnen wir die hiebei sich ergebende Elementarfläche mit $\mathfrak{a}$, so haben wir dann das betrachtete Flächenstück durch zwei auf einander folgende Umformungen zuerst aus dem ursprünglichen Zustande $\mathfrak{A}$ in den Zustand $\mathfrak{A}^0$, und sodann aus diesem letztern in den Zustand $\mathfrak{a}$ versetzt. Sind x, y, ferner x^0, y^0 und endlich ξ, η die drei Orte, welche irgend ein zu dem Flächenstück gehöriger Punct während jener drei Zustände der Reihe nach einnimmt, so findet zwischen dem ersten und zweiten Ort die Relation statt:

$$x^0 + iy^0 = x + iy,$$

ferner zwischen dem zweiten und dritten die Relation:

$$\xi + i\eta = \sqrt[m]{(x^0 + iy^0) - (a^0 + ib^0)},$$

Eliminirt man aus diesen beiden Relationen $x^0 + iy^0$, so gelangt man zu einer directen Beziehung zwischen dem ersten und dritten Ort, welche so lautet:

$$\xi + i\eta = \sqrt[m]{(x + iy) - (a^0 + ib^0)},$$

und welche sich, wenn man die vorhin angegebene Gleichung $a^0 + ib^0 = a + ib$ benutzt, um die Constante $a^0 + ib^0$ durch die Constante $a + ib$ zu ersetzen, auch so darstellen lässt:

$$(1) \qquad \xi + i\eta = \sqrt[m]{(x + iy) - (a + ib)}.$$

Sind also x, y und ξ, η die Coordinaten, welche **ein und derselbe** Punct des Flächenstücks nach einander zur Zeit des Zustandes $\mathfrak{A}$ und zur Zeit des Zustandes $\mathfrak{a}$ besitzt, so werden jene Coordinaten jederzeit durch die vorstehende Relation (1) mit einander verbunden sein.

Wir wollen uns nun eine beliebig gegebene, von $x + iy$ abhängende Function $f(x + iy)$ denken. Die Werthe dieser Function mögen auf dem betrachteten Flächenstück zur Zeit seines ursprünglichen Zustandes ausgebreitet und mit den einzelnen Puncten des Flächenstücks in unlösliche Verbindung gebracht sein, so dass der in jedem einzelnem Puncte vorhandene Werth — mag nun der Punct sich in Ruhe oder in Bewegung befinden, mag er an diese oder an jene Stelle des Raumes versetzt werden — beständig ein und derselbe bleibt. Die in den einzelnen Puncten des Flächenstücks vorhandenen Functionswerthe werden dann — mag nun das Flächenstück in seinem ursprünglichen Zustande $\mathfrak{A}$ verharren, oder mag dasselbe durch Umformung in den neuen Zustand $\mathfrak{a}$ versetzt werden — immer ein und dieselben bleiben.

Der von irgend welchem Punct des Flächenstücks getragene Functionswerth kann, wenn man die Coordinaten des Punctes zur Zeit des einen und zur Zeit des andern Zustandes mit x, y und mit ξ, η bezeichnet, in zwei verschiedenen Formen dargestellt werden; zuvörderst nämlich durch:

(2a.) $$f(x + iy);$$

sodann aber, weil zufolge (1) $\sqrt[m]{(x + iy) - (a + ib)} = \xi + i\eta$, mithin $x + iy = (a + ib) + (\xi + i\eta)^m$ ist, auch dargestellt werden durch:

(2b.) $$f\big((a + ib) + (\xi + i\eta)^m\big).$$

Von diesen Ausdrücken (2a) und (2b), welche also beide ein und denselben Werth, nur in verschiedener Form angeben, wird der erstere den Vorzug verdienen, so lange wir das Flächenstück im Zustande $\mathfrak{A}$ lassen. Denn durch jenen Ausdruck wird der von dem betrachteten Puncte getragene Werth in unmittelbare Beziehung gestellt zu x, y, d. i. zu denjenigen Coordinaten, welche der Punct während jenes Zustandes $\mathfrak{A}$ besitzt.

Befindet sich hingegen das Flächenstück in dem Zustand $\mathfrak{a}$, so wird, aus ähnlichem Grunde, der zweite Ausdruck (2b.) den Vorzug verdienen. Denn durch diesen wird der von dem Puncte getragene Werth in unmittelbare Beziehung zu ξ, η, also zu denjenigen Coordinaten gesetzt, welche der Punct zur Zeit des Zustandes $\mathfrak{a}$ besitzt.

Ebenso wie in dem Ausdruck (2a.) x und y nur insofern enthalten sind, als das Binom $x + iy$ darin vorkommt, ebenso sind andrerseits ξ und η in dem Ausdrucke (2b.) nur insoweit enthalten, als das Binom $\xi + i\eta$ darin sich vorfindet. Sind also, wie hier vorausgesetzt wurde, die auf dem Flächenstück ausgebreiteten Functionswerthe zur Zeit seines ursprünglichen Zustandes $\mathfrak{A}$ nicht von x **und** y, sondern nur von dem **einen** Argumente $x + iy$ abhängig, so werden dieselben nach Eintritt des neuen Zustandes $\mathfrak{a}$ ebenfalls nicht von ξ **und** η, sondern wiederum nur von dem **einen** Argumente $\xi + i\eta$ abhängig sein.

Es seien A, B, C, ... die am Rande von $\mathfrak{A}$ auf einander folgenden Puncte; ferner seien A^0, B^0, C^0, ... und α, β, γ, ... diejenigen Puncte, in welche sich jene, bei der Umformung des Flächenstücks $\mathfrak{A}$ in die Flächenstücke $\mathfrak{A}^0$ und $\mathfrak{a}$, verwandeln.

Denken wir uns — wie Aehnliches bereits bei einer früheren Gelegenheit (Seite 151) geschah — in O' einen leuchtenden Punct, so wird, während wir das Flächenstück $\mathfrak{A}$ in positiver Richtung umlaufen, gleichzeitig unser auf die Horizontalebene geworfener Schatten in positiver Richtung um $\mathfrak{A}^0$ herumwandern. Sind demnach, wie wir voraussetzen wollen; die Puncte A, B, C, ... der Art geordnet, wie sie bei einer positiven Umlaufung des Flächenstücks $\mathfrak{A}$ auf einander folgen, so werden A^0, B^0, C^0, ... ebenfalls so geordnet sein, wie sie bei positiver Umlaufung von $\mathfrak{A}^0$ auf einander folgen.

Hieraus aber folgt mit Zuziehung eines früher (Seite 225) gefundenen Satzes, dass Aehnliches auch von den Puncten α, β, γ, ... gilt, dass nämlich diese ebenfalls der Art geordnet sind, wie sie bei einer positiven Umlaufung von $\mathfrak{a}$ auf einander folgen.

Denken wir uns nun wiederum das betrachtete Flächenstück mit den Werthen irgend welcher Function f belastet, und die einzelnen Puncte des Flächenstücks mit diesen Werthen unlöslich verbunden, so wird der während des ursprünglichen Zustandes $\mathfrak{A}$ im Puncte A vorhandene Werth derselbe sein, welcher sich nach Eintritt des Zustandes $\mathfrak{A}^0$ in A^0, und nach Eintritt des Zustandes $\mathfrak{a}$ in α befindet. Ebenso wird der ursprünglich in B vorhandene Functionswerth derselbe sein, welcher bei Eintritt der beiden spätern Zustände in B^0 und in β vorhanden ist u. s. w. Sind demnach f_1, f_2, f_3, ... die am Rande des Flächenstücks vorhandenen Functionswerthe, und läuft diese Werthreihe f_1, f_2, f_3, ... während des ur-

sprünglichen Zustandes $\mathfrak{A}$ in **positiver** Richtung um das Flächenstück herum; so wird dieselbe nach Eintritt des **neuen** Zustandes $\mathfrak{a}$ ebenfalls in **positiver** Richtung um das Flächenstück herumgehen.

Zweite Methode der Umformung.

Von den Flächenstücken, in welche die Riemann'sche Kugelfläche zerschnitten wurde, haben wir bei Auseinandersetzung der ersten Umformungsart nur diejenigen berücksichtigt, welche keinen bei O' liegenden Punct enthalten. Hier bei Auseinandersetzung der zweiten Umformungsart werden wir umgekehrt nur auf diejenigen Rücksicht nehmen, welche keinen bei O liegenden Punct in sich enthalten.

Das betrachtete Flächenstück mag wiederum mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet werden. Wir lassen zuvörderst die zu ihm gehörigen Puncte auf geradlinigen von O ausstrahlenden Bahnen so weit fortwandern, bis sie sämmtlich auf die Antipodenebene zu liegen kommen, und bezeichnen den neuen Zustand, in welchen das Flächenstück hiedurch versetzt wird, mit $\mathfrak{A}'$. Diese Umgestaltung des Flächenstückes wird, weil dasselbe keinen bei O liegenden Punct in sich enthalten soll, vor sich gehen, ohne dass der gegenseitige Zusammenhang seiner Puncte dabei andere, als stetige Aenderungen erleidet. Sind x, y und x', y' die Coordinaten, welche irgend ein Punct des Flächenstücks nach einander während des Zustandes $\mathfrak{A}$ und während des Zustandes $\mathfrak{A}'$ besitzt, so wird (vergl. Seite 147) jederzeit

$$x' + iy' = \frac{1}{x + iy}$$

sein. Sind mithin a, b und a', b' die Coordinaten, welche der zu unserm Flächenstück gehörige Windungspunct während jener beiden Zustände besitzt, so wird

$$a' + ib' = \frac{1}{a + ib}$$

sein.

Das Flächenstück hat, falls wir uns dasselbe im Zustande $\mathfrak{A}'$ denken, die Gestalt einer ebenen $m$blättrigen Windungsfläche; wir werden daher dasselbe durch stetige Umformung verwandeln können in eine gewisse Elementarfläche, die mit $\mathfrak{a}$ bezeichnet werden mag. Nehmen wir zur Unterlage dieser Elementarfläche eine horizontale Hülfsebene, die sich irgendwo im

Raum befindet, und mit zwei auf einander senkrechten Achsen ξ, η versehen ist; so wird jene stetige Umformung in solcher Weise bewerkstelligt werden können, dass sich dabei ein jeder zur Windungsfläche $\mathfrak{A}'$ gehörige Punct x', y' in denjenigen Punct ξ, η der Elementarfläche $\mathfrak{a}$ verwandelt, welcher mit ihm durch die Gleichung

$$\xi + i\eta = \sqrt[m]{(x' + iy') - (a' + ib')}$$

verbunden ist. Denken wir uns solches wirklich ausgeführt, so haben wir dann durch zwei auf einander folgende stetige Umformungen das gegebene Flächenstück aus dem ursprünglichen Zustande $\mathfrak{A}$ zuerst in den Zustand $\mathfrak{A}'$, und darauf aus diesem letztern in den Zustand $\mathfrak{a}$ versetzt.

Betrachten wir irgend welchen Punct des Flächenstücks, und bezeichnen wir die Orte, welche demselben während der eben genannten drei Zustände successive zu Theil werden, mit x, y, mit x', y' und mit ξ, η, so ist:

$$x' + iy' = \frac{1}{x + iy},$$

ferner:

$$\xi + i\eta = \sqrt[m]{(x' + iy') - (a' + ib')},$$

und hieraus folgt durch Elimination von $x' + iy'$:

$$\xi + i\eta = \sqrt[m]{\frac{1}{x + iy} - (a' + ib')},$$

oder, wenn man die Gleichung $a' + ib' = \dfrac{1}{a + ib}$ benutzt, um die Constante $a' + ib'$ durch die Constante $a + ib$ zu ersetzen:

$$\xi + i\eta = \sqrt[m]{\frac{1}{x + iy} - \frac{1}{a + ib}}. \tag{1}$$

S i n d a l s o x, y u n d ξ, η d i e C o o r d i n a t e n, w e l c h e **ein und derselbe** P u n c t d e s F l ä c h e n s t ü c k e s n a c h e i n a n d e r w ä h r e n d d e r Z u s t ä n d e $\mathfrak{A}$ u n d $\mathfrak{a}$ b e s i t z t, s o w e r d e n j e n e C o o r d i n a t e n j e d e r z e i t d u r c h d i e v o r s t e h e n d e R e l a t i o n (1) m i t e i n a n d e r v e r b u n d e n s e i n.

Wir denken uns nun, ebenso wie früher, das Flächenstück mit den Werthen einer beliebig gegebenen Function $f(x + iy)$ belastet und jeden einzelnen Punct des Flächenstücks mit dem ihm zu Theil gewordenen Werthe auf u n l ö s l i c h e Weise verbunden. Bezeichnen wir die Coordinaten, welche irgend ein Punct des Flächenstücks nach einander während der Zustände $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$

annimmt, mit x, y und ξ, η, so wird der von ihm getragene Functionswerth in zwei verschiedenen Formen darstellbar sein. Zuvörderst nämlich wird er ausgedrückt werden können durch:

$$f(x+iy). \tag{2a.}$$

Sodann aber wird er, weil zufolge (1):

$$x+iy = \frac{a+ib}{1+(a+ib)(\xi+i\eta)^m}$$

ist, auch darstellbar sein durch:

$$f\left(\frac{a+ib}{1+(a+ib)(\xi+i\eta)^m}\right). \tag{2b.}$$

Die Ausdrücke (2a.) und (2b.) stellen also beide ein und denselben Werth, nur in verschiedener Gestalt, dar. Je nachdem man sich das Flächenstück im Zustande $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{a}$ denkt, wird der eine oder der der andere von diesen beiden Ausdrücken den Vorzug verdienen.

Von Wichtigkeit ist eine Bemerkung, die sich aus dem Anblick der beiden Ausdrücke (2a.) und (2b.) sofort ergiebt; es ist folgende: Sind die auf dem Flächenstück ausgebreiteten Functionswerthe zur Zeit seines ursprünglichen Zustandes $\mathfrak{A}$ nicht von x **und** y, sondern nur von dem **einen** Argumente $x+iy$ abhängig, so werden dieselben nach Eintritt des neuen Zustandes $\mathfrak{a}$ ebenfalls nicht von ξ **und** η, sondern nur von dem **einen** Argumente $\xi+i\eta$ abhängen.

Die am Rande des Flächenstückes $\mathfrak{A}$ vorhandenen Puncte mögen in derjenigen Reihenfolge, wie sie bei einer positiven Umlaufung von $\mathfrak{A}$ auf einander folgen, mit A, B, C, ... bezeichnet werden; ferner mögen diejenigen Puncte, in welche sich die eben genannten, bei der Umformung von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}'$ und in $\mathfrak{a}$, verwandeln, mit A', B', C', ... und mit α, β, γ, ... benannt werden. Es fragt sich, ob unter diesen Umständen A', B', C' ... ebenfalls in positiver Richtung um $\mathfrak{A}'$ herumlaufen, und ob Gleiches auch von α, β, γ ... mit Bezug auf $\mathfrak{a}$ gilt.

Denken wir uns in O einen leuchtenden Punct, so wird, während wir auf der Kugelfläche um das Flächenstück $\mathfrak{A}$ in positiver Richtung herumwandern, gleichzeitig unser nach der Antipodenebene geworfener Schatten um das Flächenstück $\mathfrak{A}'$ in ebenfalls positiver Richtung herumlaufen; wie ganz Analoges bereits bei einer früheren Gelegenheit (S. 151) bemerkt wurde. Daraus aber folgt, dass ebenso wie durch A, B, C, ... eine positive Umlaufung von $\mathfrak{A}$, ebenso auch durch A', B', C', ... eine positive Umlaufung von $\mathfrak{A}'$ repräsentirt wird.

Wird aber durch A', B', C', ... eine positive Umlaufung von $\mathfrak{A}'$ dargestellt, so muss mit Rückblick auf einen früheren Satz (S. 225) Gleiches auch von α, β, γ, ... mit Bezug auf die Elementarfläche $\mathfrak{a}$ gelten.

Sind demnach f_1, f_2, f_3, ... die am Rande unseres Flächenstücks vorhandenen Functionswerthe, und sind diese Werthe so geordnet, wie sie zur Zeit des **ursprünglichen** Zustandes $\mathfrak{A}$ bei einer **positiven** Umlaufung des Flächenstücks auf einander folgen; so werden dieselben nach Eintritt des **neuen** Zustandes $\mathfrak{a}$ immer noch in **gleicher** Weise, nämlich nach wie vor in der Art geordnet sein, wie sie bei einer **positiven** Umlaufung des Flächenstückes auf einander folgen.

Sechster Abschnitt. Fortsetzung. Schliessliches Resultat der Untersuchung.

Wir wollen die Resultate, zu welchen wir in dieser Vorlesung gelangt sind, noch einmal an uns vorübergehen lassen, und denselben dabei zugleich eine Fassung zu geben suchen, wie sie für spätere Anwendungen möglichst bequem ist.

Eine beliebig gegebene Riemann'sche Kugelfläche lässt sich durch geeignete Schnitte jederzeit in eine Anzahl Flächenstücke zerlegen, von welchen jedes einzelne als eine sphärisch gekrümmte Windungsfläche von der 0^{ten}, oder 1^{ten}, oder 2^{ten} u. s. w. Ordnung angesehen werden kann.

Durch stetige Umformung lässt sich sodann jedes von diesen Flächenstücken in eine Elementarfläche verwandeln. Unter den unendlich vielen Arten, wie solches bewerkstelligt werden kann, giebt es zwei, die von besonderer Wichtigkeit sind. Sind x, y die Kugelcoordinaten irgend eines zu dem Flächenstück gehörigen Punctes, ferner a, b die Kugelcoordinaten des auf demselben befindlichen Windungspunctes, und bedeutet endlich m die Anzahl der in dem Flächenstück über einander liegenden Blätter; so lassen sich jene beiden Arten in folgender Weise angeben:

Erste Methode. Die stetige Umformung des Flächenstücks in eine Elementarfläche wird in solcher Weise ausgeführt, dass jeder zum Flächenstück gehörige Punct x, y in denjenigen Punct ξ, η der Elementarfläche sich verwandelt, welcher mit ihm durch die Gleichung

$$\xi + i\eta = \sqrt[m]{(x + iy) - (a + ib)}$$

verbunden ist.

Zweite Methode. Jene Umformung wird in der Weise ausgeführt, dass jeder zum Flächenstück gehörige Punct x, y in denjenigen Punct ξ, η der Elementarfläche sich verwandelt, welcher mit ihm durch die Gleichung

$$\xi + i\eta = \sqrt[m]{\frac{1}{x + iy} - \frac{1}{a + ib}}$$

verbunden ist.

Nicht immer ist es der Willkühr überlassen, welche von diesen beiden Methoden man in Anwendung bringen will. Es ist nämlich, falls das Flächenstück einen bei $x + iy = 0$ liegenden Punct in sich enthält, nur die erste, und, wenn dasselbe mit einem bei $x + iy = \infty$ liegenden Punct behaftet ist, nur die zweite anwendbar; hingegen kann nach Belieben die erste oder die zweite Methode benutzt werden, sobald das Flächenstück weder einen bei $x + iy = 0$, noch auch einen bei $x + iy = \infty$ liegenden Punct in sich enthält.

Der verwickelte Zustand, in welchem sich das zu der Riemann'schen Kugelfläche gehörige Flächenstück von Hause aus befindet, mag der **ursprüngliche** Zustand desselben genannt werden; und diesem gegenüber mag der einfache Zustand, in welchen das Flächenstück nach seiner Lostrennung von jener Kugelfläche durch eine der beiden eben angegebenen Umformungsmethoden — gleichgültig ob durch Anwendung der einen oder der andern — versetzt wird, der **natürliche** Zustand genannt werden. Der erstere Zustand wird jederzeit dargestellt sein durch eine sphärisch gekrümmte Windungsfläche, der letztere durch eine Elementarfläche.

Denkt man sich die einzelnen Puncte des Flächenstückes mit den Werthen irgend welcher Function belastet, und jeden Punct mit dem ihm einmal zuertheilten Functionswerthe unlöslich verbunden, so wird zwischen den **Bildern**, welche das mit diesen Werthen belastete Flächenstück zur Zeit des erstern und zur Zeit des letztern Zustandes darbietet, ein hoher Grad von Uebereinstimmung stattfinden.

Um, indem wir näher hierauf eingehen, beide Bilder in Gedanken besser aus einander zu halten, bezeichnen wir das Flächenstück in seinem ursprünglichen Zustande mit $\mathfrak{A}$, in seinem natürlichen Zustande hingegen mit $\mathfrak{a}$. Und ebenso bezeichnen wir auch die auf demselben ausgebreiteten Functionswerthe, obwohl sie in beiden Zuständen ein und dieselben sind, nicht in beiden Fällen auf einerlei Weise, sondern während des ursprünglichen Zustandes mit f, während des natürlichen Zustandes hingegen mit φ. Zwischen den Coordinaten x, y eines auf $\mathfrak{A}$ befindlichen Punctes und zwischen den Coordinaten ξ, η des zu $\mathfrak{a}$ gehörigen correspondirenden Punctes wird alsdann jederzeit eine der beiden Gleichungen:

$$\xi + i\eta = \sqrt[m]{(x + iy) - (a + ib)},$$

$$\xi + i\eta = \sqrt[m]{\frac{1}{x + iy} - \frac{1}{a + ib}}$$

stattfinden, nämlich die eine oder die andere Gleichung, je nachdem die Umformung von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{a}$ durch Anwendung der ersten oder durch Anwendung der zweiten Methode bewerkstelligt worden ist. Und ferner wird alsdann, wenn wir den in x, y vorhandenen Functionswerth mit f, und den in dem correspondirenden Punct ξ, η vorhandenen Functionswerth mit φ bezeichnen, jederzeit

$$\varphi = f$$

sein.

Die Uebereinstimmung, welche zwischen den beiden Bildern

$$(\mathfrak{A},\ m,\ x,\ y,\ f)$$

und

$$(\mathfrak{a},\ 1,\ \xi,\ \eta,\ \varphi)$$

stattfindet, lässt sich nun leicht in übersichtlicher Weise angeben. Zuvörderst ergeben sich nämlich mit Rücksicht auf die zuletzt (S. 227—235) erhaltenen Ergebnisse in Bezug auf diese Uebereinstimmung folgende Sätze:

I. Sind die auf $\mathfrak{A}$ befindlichen Werthe f nicht von x und y, sondern nur von dem einen Argument $x + iy$ abhängig, so werden die auf $\mathfrak{a}$ vorhandenen Werthe φ ebenfalls nicht von ξ und η, sondern nur von dem einen Argumente $\xi + i\eta$ abhängen.

II. Sind f_1, f_2, f_3, ... die am Rande von $\mathfrak{A}$ vorhandenen

Werthe in derjenigen Reihenfolge, wie sie bei einer positiven Umlaufung von $\mathfrak{A}$ auf einander folgen, und sind $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ die mit $f_1, f_2, f_3, \ldots$ identischen, am Rande von $\mathfrak{a}$ befindlichen Werthe, so werden $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ ebenfalls der Art geordnet sein, wie sie bei positiver Umlaufung von $\mathfrak{a}$ auf einander folgen.

An diese beiden Sätze reihen sich sodann andere an, die sich aus den zu Anfang dieser Vorlesung erhaltenen Resultaten (vergl. S. 209) unmittelbar ergeben; sie lauten:

III. Sind die Werthe f auf $\mathfrak{A}$ allenthalben eindeutig, d. h. ist jeder zu $\mathfrak{A}$ gehörige Punct immer nur mit je einem Werthe f belastet, so wird Gleiches auch von den auf $\mathfrak{a}$ befindlichen Werthen φ gelten.

IV. Sind die Werthe f auf $\mathfrak{A}$ allenthalben stetig, so wird Gleiches auf $\mathfrak{a}$ von den Werthen φ gelten.

V. Sind die Werthe f auf $\mathfrak{A}$ in irgend welchen Puncten unstetig, so werden die Werthe φ in den correspondirenden Puncten von $\mathfrak{a}$ ebenfalls unstetig sein. Sind die Unstetigkeitspuncte von f Pole, so werden die correspondirenden Unstetigkeitspuncte von φ ebenfalls Pole sein.

VI. Sind die Werthe f in irgend welchen Puncten von $\mathfrak{A}$ gleich Null, so werden die Werthe φ in den correspondirenden Puncten von $\mathfrak{a}$ ebenfalls Null sein.

Endlich würde noch zu bemerken sein, dass all' diese Sätze sich umkehren lassen. Sind z. B. — so lautet die Umkehrung des I. Satzes — die auf $\mathfrak{a}$ vorhandenen Werthe φ nicht von ξ und η, sondern nur von $\xi + i\eta$ abhängig, so werden die auf $\mathfrak{A}$ befindlichen Werthe f ebenfalls nicht von x und y, sondern nur von $x + iy$ abhängen.

Siebente Vorlesung.

Functionen mit einem complexen Argument in ihrer Ausbreitung auf der Riemann'schen Kugelfläche.

Erster Abschnitt. Untersuchung einer von $x + iy$ abhängenden Function, die auf irgend einem Theile einer Riemann'schen Kugelfläche überall eindeutig und mit Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig ist. Die Ordnungszahlen einer solchen Function.

In einem Pole ist, wie wir früher (S. 95) allgemein nachgewiesen haben, der Werth der Function jederzeit unendlich gross. Nun haben wir früher, als wir uns mit den Flächen einfachster Art, nämlich mit elementaren Flächen beschäftigten, verschiedene Grade des Unendlichwerdens, und dem entsprechend Pole von dieser oder jener Ordnung unterschieden. Desgleichen haben wir damals verschiedene Grade des Nullwerdens, und demgemäss Nullpuncte von mehr oder weniger hohen Ordnungen unterschieden. Es ist von Wichtigkeit, derartige Unterscheidungen auch dann eintreten zu lassen, wenn die betrachtete Function nicht auf einer elementaren, sondern auf irgend welcher andern Fläche ausgebreitet ist. Doch wollen wir, indem wir solches unternehmen, nicht Flächen von ganz beliebiger Form in Betracht ziehen; vielmehr uns dabei auf diejenigen Flächen beschränken, welche für unsere weiteren Untersuchungen erforderlich sind, nämlich auf die Riemann'schen Kugelflächen.

Es sei eine Riemann'sche Kugelfläche von beliebiger Beschaffenheit gegeben; auf dieser sei irgend eine gegebene Function ausgebreitet; und diese Function besitze auf der Fläche irgend welche Nullpuncte und irgend welche Pole.

Wir betrachten zunächst die Nullpuncte. Hinsichtlich der Werthe, welche die Function in diesen Puncten selber besitzt, kann offenbar keinerlei Verschiedenheit stattfinden; denn diese Werthe sind sämmtlich Null, mithin unter einander identisch. Sollen also jene Puncte in verschiedene Arten oder Ordnungen eingetheilt werden, so kann eine solche Eintheilung — ebenso wie früher bei Behandlung der elementaren Flächen — ihre Begründung nicht in denjenigen Functionswerthen finden, welche in den Puncten selber vorhanden sind, sondern nur in denjenigen, welche sich in der Nähe jener Puncte, nämlich in den Bereichen der Puncte befinden.

Nun können die Bereiche der einzelnen Nullpuncte, je nach der Lage, welche sie auf der Riemann'schen Kugelfläche besitzen, von sehr verschiedener Form sein. Denn das Bereich eines solchen Punctes wird, je nachdem derselbe in einem gewöhnlichen oder in einem Windungspuncte der Fläche liegt, bald durch eine kleine Fläche von einblättriger Form, bald durch eine kleine Windungsfläche von mehrblättriger Form dargestellt sein.

Sollen daher die Bereiche jener Nullpuncte hinsichtlich der von ihnen getragenen Functionswerthe mit einander verglichen werden, so wird man, falls etwa das eine Bereich einblättrig, ein anderes fünfblättrig, ein drittes zwölfblättrig, u. s. w. sein sollte, eine solche Vergleichung gar nicht vorzunehmen im Stande sein, falls man nicht zuvor all' jene Bereiche durch Umgestaltung in gleiche Form gebracht hat. Ebenso etwa, wie es bei einer physikalischen Untersuchung, wenn mehrere Körper hinsichtlich ihrer Dimensionen mit einander verglichen werden sollen, nothwendig ist, dieselben zuvor in gleiche Temperatur, etwa in eine gewisse, ein für allemal festgesetzte Normal-Temperatur zu versetzen; ebenso wird es hier, wo die Bereiche mehrerer Puncte hinsichtlich der von ihnen getragenen Functionswerthe unter einander in Vergleich gestellt werden sollen, erforderlich sein, all' jene Bereiche zuvor in gleiche Form, etwa ebenfalls in eine gewisse, ein für allemal festgesetzte Normal-Form zu bringen.

Welche Form dabei als Normal-Form festgesetzt werden soll, ist im Grunde ziemlich gleichgültig. Doch wird es gut sein, eine möglichst einfache zu wählen. Es mag dazu die Form einer Elementarfläche, nämlich diejenige Form genommen werden, welche das Bereich des betrachteten Punctes in seinem **natürlichen Zustande** besitzt (S. 236).

Denken wir uns die Bereiche der einzelnen Nullpuncte, welche die Function auf der gegebenen Riemann'schen Kugelfläche besitzt, in diese Normalform versetzt, denken wir uns also die kleinen Flächenstücke, durch welche jene Bereiche dargestellt werden, in lauter elementare Flächenstücke verwandelt; so wird nun schliesslich unsere Aufgabe darin bestehen, dass wir die auf diesen Flächenstücken vorhandenen Functionswerthe unter einander vergleichen, und auf Grund einer solchen Vergleichung die auf jenen Flächenstücken vorhandenen Nullpuncte in verschiedene Ordnungen eintheilen. Das aber ist eine Aufgabe, die der Lösung nicht mehr bedarf. Denn um die Nullpuncte von Functionen, die auf elementaren Flächenstücken ausgebreitet sind, in verschiedene Ordnungen einzutheilen, haben wir bereits früher (S. 111) völlig bestimmte Regeln festgesetzt.

Wir sind damals, als wir uns mit elementaren Flächenstücken beschäftigten, noch weiter gegangen. Wir haben uns damals nicht allein auf die Nullpuncte beschränkt, vielmehr gezeigt, wie sich, unter Zugrundelegung eines gewissen durchgreifenden Princips, für jeden beliebigen Punct — mochte er nun ein Nullpunct oder ein Pol oder irgend welcher anderer Punct sein — im Allgemeinen immer eine gewisse ihm zugehörige Ordnungszahl ergiebt. Diese Zahl war jederzeit eine endliche ganze Zahl; sie war positiv für die Nullpuncte, negativ für die Pole, und Null für die übrigen Puncte.

In gleicher Allgemeinheit können wir auch gegenwärtig, wo wir es mit irgend welcher Riemann'schen Kugelfläche zu thun haben, verfahren. Wir gehen dabei in ganz ähnlicher Weise zu Werke, wie vorhin bei den Nullpuncten, setzen nämlich folgende Definition fest:

Definition. Ist eine Riemann'sche Kugelfläche mit den Werthen irgend welcher Function belastet, so soll im Allgemeinen jeder Punct der Fläche mit einer gewissen Ordnungszahl versehen werden. Unter dieser Zahl soll jederzeit diejenige Ordnungszahl verstanden werden, welche dem Puncte zukommt, sobald man *das ihm zugehörige Bereich in seinen natürlichen Zustand versetzt.*

Handelt es sich also darum, die Ordnungszahl irgend eines Punctes der gegebenen Riemann'schen Kugelfläche wirklich zu bestimmen, so wird man zuvörderst das kleine Flächenstück, durch welches das Bereich des Punctes dargestellt wird, in seinen natürlichen Zustand versetzen, dasselbe also verwandeln in ein elementares Flächenstück. Ist solches geschehen, so wird alsdann die Ordnungszahl des Punctes unmittelbar zu Tage treten, sobald man nur die früher (S. 112) *in Bezug auf ein elementares Flächenstück festgesetzten Regeln in Anwendung bringt.**)

Es sei $\mathfrak{R}$ eine beliebig gegebene Riemann'sche Kugelfläche, und f eine auf dieser Fläche ausgebreitete, von $x + iy$ abhängende Function, welche auf der Fläche überall eindeutig, und mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig ist. Wir wollen untersuchen, ob die Function f unter so bewandten Umständen auf jener Fläche $\mathfrak{R}$ längs irgend welcher Linie hin einen constanten Werth besitzen kann.

Es sei λ eine auf $\mathfrak{R}$ gezogene Linie, und zwar eine Linie von beliebiger Kleinheit; auf dieser Linie besitze f den constanten Werth K. Wir grenzen um irgend einen zu λ gehörigen Punct herum ein Flächenstück $\mathfrak{A}$ ab, welches nicht mehr als

---

*) Um die Ordnungszahl eines gegebenen Punctes nach der hier gegebenen Vorschrift zu ermitteln, wird man das Bereich des Punctes zuerst in seinen natürlichen Zustand versetzen müssen. Dieser natürliche Zustand ist aber kein völlig bestimmter. Denn im Allgemeinen wird es unter den Zuständen, in welche man jenes Bereich durch stetige Umformung versetzen kann, immer zwei geben, von welchen nach Belieben der eine, und ebenso gut auch der andere als der natürliche Zustand des Bereiches angesehen werden kann. (Vergl. S. 236.) Man könnte daher die Besorgniss hegen, dass sich vielleicht, jenachdem von diesen beiden Zuständen der eine oder der andere gewählt wird, für die Ordnungszahl des gegebenen Punctes jedesmal ein anderer Werth ergeben möchte. Aus dem Nachfolgenden wird man aber erkennen, dass diese Besorgniss eine unbegründete ist, dass sich nämlich in beiden Fällen ein und dieselbe Ordnungszahl ergeben muss, und dass also die hier für die Ordnungszahl eines Punctes gegebene Definition eine völlig bestimmte ist.

höchstens einen*) Windungspunct in sich enthält, und bezeichnen diejenigen Bilder, welche dieses Flächenstück und die darauf vorhandenen Werthe f zur Zeit des ursprünglichen und zur Zeit des natürlichen Zustandes darbieten, mit:

$$(\mathfrak{A},\ x + iy,\ f)$$

und mit:

$$(\mathfrak{a},\ \xi + i\eta,\ \varphi).$$

Alsdann wird $\mathfrak{a}$ eine Elementarfläche, und φ eine auf dieser Fläche ausgebreitete Function vorstellen, deren Werth in jedem Puncte $\xi + i\eta$ identisch mit demjenigen ist, welchen die Function f in dem correspondirenden Puncte $x + iy$ besitzt.

Das Flächenstück $\mathfrak{A}$ enthält nothwendigerweise einen Theil der Linie λ in sich. Da nun f längs dieser Linie λ den constanten Werth K besitzt, so wird die auf $\mathfrak{a}$ ausgebreitete Function φ längs der mit λ correspondirenden Linie ebenfalls gleich K sein. Daraus aber ergiebt sich, mit Anwendung eines früher (S. 99) gefundenen Satzes, dass φ auf der Fläche $\mathfrak{a}$ allenthalben gleich K sein muss.**) Und hieraus folgt sofort, dass die Function f auf dem Flächenstück $\mathfrak{A}$ ebenfalls allenthalben gleich K ist.

---

*) Es soll das Flächenstück $\mathfrak{A}$ nicht mehr als höchstens einen Windungspunct in sich enthalten, weil es andernfalls nicht möglich sein würde, dasselbe in seinen natürlichen Zustand zu versetzen.

**) Dass die Bedingungen, welche zur Anwendung jenes Satzes (S. 99) erfordert werden, hier alle erfüllt sind, ist leicht zu übersehen. Es ist nämlich, zufolge unserer Voraussetzungen, f eine von $x + iy$ abhängende Function, welche auf $\mathfrak{A}$ überall eindeutig, mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole daselbst überall stetig, und endlich längs λ hin constant ist. Analoges muss nun, wenn man von dem ursprünglichen Bilde

$$(\mathfrak{A},\ x + iy,\ f)$$

zu dem natürlichen Bilde

$$(\mathfrak{a},\ \xi + i\eta,\ \varphi)$$

übergeht, auch für dieses letztere gelten; wie sich solches aus den Sätzen, die wir (S. 237) in Betreff der Uebereinstimmung beider Bilder gefunden haben, unmittelbar ergiebt. Es ist also:

1) $\mathfrak{a}$ eine Elementarfläche,

2) φ eine auf $\mathfrak{a}$ ausgebreitete, von $\xi + i\eta$ abhängende Function.

3) Ist φ auf $\mathfrak{a}$ allenthalben eindeutig und mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig.

4) Endlich ist der Werth von φ auf der Fläche $\mathfrak{a}$ längs einer gewissen, nämlich längs der mit λ correspondirenden Linie hin constant.

Nehmen wir nun einen Punct, der sich irgendwo innerhalb $\mathfrak{A}$, etwa in der Nähe des Randes von $\mathfrak{A}$, befindet, und grenzen wir auf der gegebenen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ um diesen Punct herum von Neuem ein Flächenstück ab, welches nicht mehr als höchstens einen Windungspunct in sich enthält, so wird sich in gleicher Weise darthun lassen, dass die Function f innerhalb dieses zweiten Flächenstücks wiederum überall gleich K ist.

In solcher Weise können wir Schritt für Schritt weiter gehen, also nachweisen, dass die Function f auf der ganzen gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$ allenthalben den constanten Werth K haben muss.

Offenbar würden wir zu einem ganz analogen Resultate gelangt sein, wenn wir uns bei den Voraussetzungen, die wir in Betreff der Function f gemacht haben, auf irgend einen Theil der Riemann'schen Kugelfläche beschränkt hätten. Wir würden nämlich in diesem Falle gefunden haben, dass die Function innerhalb jenes Theiles der Fläche überall constant ist. Somit gelangen wir zu folgendem Satz:

Ist eine von $x + iy$ abhängende Function auf irgend einem Theile $\mathfrak{S}$ einer Riemann'schen Kugelfläche überall eindeutig, und mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig, so kann innerhalb $\mathfrak{S}$ kein auch noch so kleines Linienstück vorhanden sein, auf welchem die Function constant ist; es sei denn, dass sie innerhalb $\mathfrak{S}$ allenthalben constant wäre.

Es kann demnach innerhalb $\mathfrak{S}$ auch kein Linienstück vorhanden sein, auf welchem die hier genannte Function den constanten Werth Null besitzt. Somit ergiebt sich folgender Zusatz:

Ist eine von $x + iy$ abhängende Function auf irgend einem Theile $\mathfrak{S}$ einer Riemann'schen Kugelfläche überall eindeutig, und mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig, so kann sie innerhalb $\mathfrak{S}$ auch immer nur in einzelnen

---

Dies aber sind die Bedingungen, unter welchen der vorhin citirte Satz (S. 99) anwendbar ist.

Die Uebereinstimmung, welche zwischen dem ursprünglichen und natürlichen Bilde jederzeit stattfindet, wird in der gegenwärtigen Vorlesung fortwährend zu beachten sein; und eben deswegen wird es nicht nöthig sein, die auf jene Uebereinstimmung bezüglichen Sätze (S. 237) jedesmal von Neuem nennen.

Puncten Null sein: es sei denn, dass sie auf $\mathfrak{S}$ allenthalben Null wäre.

Wir fahren in unserer Untersuchung weiter fort. Es sei, nach wie vor, $\mathfrak{S}$ irgend ein Theil einer Riemann'schen Kugelfläche, und f wiederum eine von $x + iy$ abhängende Function, die auf $\mathfrak{S}$ überall eindeutig und mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole überall stetig ist. Ferner sei $x + iy = c$ irgend ein zu $\mathfrak{S}$ gehöriger Punct, und $\mathfrak{A}$ ein um diesen Punct herum abgegrenztes Flächenstück, welches vollständig zu $\mathfrak{S}$ gehört und nicht mehr als höchstens einen Windungspunct in sich enthält. Wir bezeichnen die Bilder, welche dieses Flächenstück und die darauf vorhandenen Werthe von f im ursprünglichen und im natürlichen Zustande darbieten, mit:

$$(\mathfrak{A},\ x + iy,\ c,\ f)$$

und mit:

$$(\mathfrak{a},\ \xi + i\eta,\ \gamma,\ \varphi).$$

Alsdann wird $\mathfrak{a}$ eine Elementarfläche, und φ eine auf $\mathfrak{a}$ ausgebreitete Function vorstellen, deren Werth in jedem Puncte $\xi + i\eta$ identisch mit demjenigen ist, den die Function f in dem correspondirenden Puncte $x + iy$ besitzt. Zugleich wird unter $\xi + i\eta = \gamma$ der mit $x + iy = c$ correspondirende Punct zu verstehen sein.

Zufolge unserer Definition (S. 241) ist die Ordnungszahl von f im Puncte c identisch mit derjenigen, welche φ im Puncte γ besitzt. Diese letztere aber wird — wir müssen uns an einen früher (S. 112) aufgestellten Satz erinnern — jederzeit dargestellt sein durch eine endliche ganze Zahl, und zwar durch eine Zahl, welche positiv, negativ oder Null ist, je nachdem γ ein Nullpunct von φ, oder ein Pol von φ, oder keines von Beiden ist.

Nehmen wir an, die gegebene Function f besitze in c einen Nullpunct; so wird φ im correspondirenden Puncte γ ebenfalls Null sein. In diesem Falle wird daher die Ordnungszahl von φ im Puncte γ dargestellt sein durch eine positive ganze Zahl, gleiches also auch von der Ordnungszahl von f im Puncte c gelten.

In analoger Weise lässt sich darthun, dass die Ordnungszahl von f im Puncte c durch eine negative ganze Zahl repräsentirt sein wird, sobald f in c einen Pol besitzt; und dass sie endlich Null sein wird, sobald der Punct c weder ein Nullpunct noch auch ein Pol ist.

Somit erhalten wir folgenden Satz:

Ist eine von $x + iy$ abhängende Function auf irgend einem Theile einer Riemann'schen Kugelfläche überall eindeutig und mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole überall stetig, so wird ihre Ordnungszahl in jedem Puncte jenes Flächentheiles eine endliche ganze Zahl sein.

Und zwar wird diese Zahl positiv sein in jedem Nullpuncte, negativ in jedem Pole, und Null sein in jedem andern Puncte, d. i. in jedem Puncte, der weder Nullpunct noch Pol ist.

Zweiter Abschnitt. Die Ordnungszahl, welche eine Function in irgend einem Punct einer Riemann'schen Kugelfläche besitzt, steht in unmittelbarer Beziehung zu den im Bereiche des Punctes vorhandenen Functionswerthen.

Unserer Definition (S. 241) zufolge wird die Ordnungszahl einer Function in irgend einem Punct einer Riemann'schen Kugelfläche erst dann eine reelle Bedeutung gewinnen, wenn man das Bereich jenes Punctes aus seinem ursprünglichen Zustande in einen gewissen andern, nämlich in seinen natürlichen Zustand versetzt. Es fragt sich nun aber, ob jene Zahl nicht vielleicht auch schon während des ersteren Zustandes irgend welche Bedeutung besitzt. Wir werden sehen, dass solches in der That der Fall ist.

Es sei, ebenso wie früher, $\mathfrak{S}$ irgend ein Theil einer Riemann'schen Kugelfläche und f eine von $x + iy$ abhängende Function, welche auf $\mathfrak{S}$ überall eindeutig, welche ferner mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole auf $\mathfrak{S}$ überall stetig ist, und welche also — zufolge des kürzlich (S. 244) gefundenen Satzes — auf $\mathfrak{S}$ auch nur in einzelnen Puncten Null werden kann.

Ist $x + iy = p$ ein zum Flächentheile $\mathfrak{S}$ gehöriger Punct, in welchem die Function f einen Pol besitzt, so wird der Werth von $\frac{1}{f}$ im Bereiche des Punctes p stetig sein. Demnach wird innerhalb dieses Bereiches $\frac{1}{f}$ nirgends Unendlich, und f selber nirgends Null werden können. Ist also p ein Pol der Function f, so kann in unmittelbarer Nachbarschaft von p kein Nullpunct derselben vorhanden sein.

Die Pole und Nullpuncte, welche die Function f auf dem betrachteten Flächentheile $\mathfrak{S}$ besitzt, werden also der Art liegen, dass nicht nur je zwei Pole, sondern ebenso auch je zwei Nullpuncte, und ebenso auch je ein Pol und je ein Nullpunct immer durch einen gewissen Zwischenraum von einander geschieden sind.

Es sei $x + iy = c$ ein beliebiger, zum Flächentheile $\mathfrak{S}$ gehöriger Punct, und $\mathfrak{A}$ ein kleines um diesen Punct herum abgegrenztes Flächenstück, welches, falls c ein Windungspunct ist, nur diesen einen, und, falls c ein gewöhnlicher Punct ist, gar keinen Windungspunct in sich enthält. Ferner sei m die Anzahl der in diesem Flächenstück über einander liegenden Blätter, der Werth von m also gleich 2, oder 3, oder 4, u. s. w., sobald c ein Windungspunct 1[ter], oder 2[ter], oder 3[ter], u. s. w. Ordnung ist, hingegen gleich 1, sobald c einen gewöhnlichen Punct vorstellt.

Wir bezeichnen die Bilder, welche das Flächenstück $\mathfrak{A}$ und die auf ihm vorhandenen Functionswerthe f im ursprünglichen und im natürlichen Zustande darbieten, mit:

$$(\mathfrak{A},\ m,\ x + iy,\ c,\ f)$$

und mit:

$$(\mathfrak{a},\ 1,\ \xi + i\eta,\ \gamma,\ \varphi).$$

Alsdann wird $\mathfrak{a}$ eine Elementarfläche, und φ eine auf $\mathfrak{a}$ ausgebreitete Function sein, deren Werth in jedem Puncte $\xi + i\eta$ identisch mit demjenigen ist, welchen die Function f in dem correspondirenden Punct $x + iy$ besitzt. Zugleich wird unter γ derjenige Punct zu verstehen sein, welcher mit c correspondirt.

Da die Pole und Nullpuncte der Function f sämmtlich durch gewisse Zwischenräume von einander geschieden sind, so können wir uns das um c herum abgegrenzte Flächenstück $\mathfrak{A}$ so klein denken, dass dasselbe, mit etwaiger Ausnahme eines in c selber liegenden Poles oder Nullpunctes, von Polen und Nullpuncten völlig frei ist. Thun wir dieses, so wird Aehnliches auch bei $\mathfrak{a}$ stattfinden, also φ eine von $\xi + i\eta$ abhängende Function sein, welche auf der Elementarfläche $\mathfrak{a}$ nicht nur überall eindeutig, sondern, mit etwaiger Ausnahme eines in γ liegenden Poles oder Nullpunctes, daselbst auch überall stetig und nullfrei ist. Hieraus aber folgt sofort, dass auf die Function φ zwei früher (S. 107 u. 109) gefundene Sätze in Anwendung gebracht werden können. Aus dem ersten ergiebt sich, dass sämmtliche Werthe φ, die auf $\mathfrak{a}$

vorhanden sind, durch die Formel

(1) $$\varphi = (\xi + i\eta - \gamma)^\mu . H$$

dargestellt werden können; hier bedeutet μ eine endliche ganze Zahl, nämlich die Ordnungszahl von φ im Puncte γ; und H eine von $\xi + i\eta$ abhängende Function, welche auf $\mathfrak{a}$ allenthalben eindeutig, stetig und nullfrei ist. Andererseits folgt aus dem zweiten Satze, dass die eben genannte Zahl μ einen Werth besitzt, der in folgender Weise dargestellt werden kann:

(2) $$\mu = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\mathfrak{a}} \frac{d\varphi}{\varphi},$$

wo die Integration in positiver Richtung um $\mathfrak{a}$ herumläuft.

Die Zahl μ ist die Ordnungszahl von φ im Puncte γ, und ist also — gemäss unserer Definition (S. 241) — auch zugleich die Ordnungszahl von f im Puncte c.

Die eben angegebene Formel:

$$\mu = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\mathfrak{a}} \frac{d\varphi}{\varphi}$$

bezieht sich zunächst nur auf das natürliche Bild:

$$(\mathfrak{a},\ 1,\ \xi + i\eta,\ \gamma,\ \varphi).$$

Doch kann sie mit leichter Mühe auch zu dem ursprünglichen Bilde

$$(\mathfrak{A},\ m,\ x + iy,\ c,\ f)$$

in Bezug gesetzt werden. Da nämlich die am Rande der Flächen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$ vorhandenen Werthe von f und φ, vorausgesetzt dass man beide Flächen in positiver Richtung umläuft, Schritt für Schritt unter einander identisch sind, so wird das in positiver Richtung um $\mathfrak{a}$ herumerstreckte Integral $\int \frac{d\varphi}{\varphi}$ gleichwerthig sein mit dem ebenfalls in positiver Richtung um $\mathfrak{A}$ herumerstreckten Integrale $\int \frac{df}{f}$. Und wir können daher jene für μ gefundene Formel auch so schreiben:

(3) $$\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{A}} \frac{df}{f};$$

wo sie nun in unmittelbarer Beziehung zu dem ursprünglichen Bilde steht und folgenden Satz liefert: Die Ordnungszahl μ, welche die gegebene Function f im Puncte c besitzt, ist, falls man unter $\mathfrak{A}$ ein um c herum abgegrenztes, hinreichend kleines Flächenstück versteht, gleich demjenigen Werthe, welchen das in positiver Richtung um $\mathfrak{A}$ herumerstreckte Integral $\frac{1}{2\pi i} \cdot \int \frac{df}{f}$ besitzt.

Wir müssen uns nun daran erinnern, dass der natürliche Zustand des betrachteten Flächenstücks $\mathfrak{A}$ kein völlig bestimmter ist, dass nämlich im Allgemeinen immer zwei Zustände existiren, welche an diesen Namen gleiches Anrecht haben. Wir haben nun soeben für die in c vorhandene Ordnungszahl μ einen völlig bestimmten Werth gefunden, ohne dass es dabei nöthig gewesen wäre, zwischen jenen beiden Zuständen, die unter dem Namen des natürlichen Zustandes parallel neben einander hergehen, eine bestimmte Wahl zu treffen. Wir werden also für die Ordnungszahl μ — völlig gleichgültig, ob wir bei ihrer Ermittelung von jenen beiden Zuständen den einen, oder den andern in Anwendung bringen — immer ein und denselben Werth finden. Die Unbestimmtheit, welche in Betreff des natürlichen Zustandes stattfindet, bleibt also, wie wir sehen, auf die Ermittelung der Ordnungszahlen ohne allen Einfluss.*)

In ähnlicher Weise, wie wir die Formel (2) behandelt haben, in ähnlicher Weise müssen wir nun auch die Formel (1) von dem natürlichen Bilde auf das ursprünglich gegebene zu übertragen suchen. Hierbei wird es aber nöthig sein, den natürlichen Zustand nicht länger in seiner Unbestimmtheit beharren zu lassen, nämlich erforderlich sein, die unter diesem Namen begriffenen beiden Zustände aus einander zu halten. Wir bezeichnen dasjenige Bild, welches das Flächenstück $\mathfrak{A}$ und die darauf vorhandenen Functionswerthe im ursprünglichen Zustande darbieten, nach wie vor, mit:

$$(\mathfrak{A},\ m,\ x + iy,\ c,\ f).$$

Hingegen bezeichnen wir dasjenige Bild, welches von jenem Flächenstück und von jenen Functionswerthen zur Zeit des natürlichen Zustandes dargeboten wird, je nach der besondern Beschaffenheit dieses Zustandes, auf verschiedene Weise; nämlich mit:

---

*) Hiermit ist die früher (Note auf S. 242) entstandene Besorgniss beseitigt.

$$(\mathfrak{a}^0,\ 1,\ \xi^0 + i\eta^0,\ \gamma^0,\ \varphi^0),$$

oder mit:

$$(\mathfrak{a}',\ 1,\ \xi' + i\eta',\ \gamma',\ \varphi'),$$

jenachdem die Herstellung des natürlichen Zustandes vermittelst der ersten, oder vermittelst der zweiten Umformungsmethode bewerkstelligt worden ist. Alsdann werden $\mathfrak{a}^0$ und $\mathfrak{a}'$ gewisse Elementarflächen, und φ^0 und φ' zwei auf diesen Flächen ausgebreitete Functionen vorstellen, deren Werthe in jedem Puncte $\xi^0 + i\eta^0$ oder $\xi' + i\eta'$ identisch mit demjenigen sind, welchen die gegebene Function f im correspondirenden Puncte $x + iy$ besitzt. Zugleich werden unter γ^0 und γ' diejenigen Puncte zu verstehen sein, welche mit c correspondiren.

Denken wir uns nun wiederum das um c herum abgegrenzte Flächenstück $\mathfrak{A}$ hinreichend klein, so klein, dass dasselbe, mit etwaiger Ausnahme eines in c selber befindlichen Poles oder Nullpunctes, von Polen und Nullpuncten völlig frei ist, so wird Analoges auch von den Elementarflächen $\mathfrak{a}^0$ und $\mathfrak{a}'$ gelten. Und wir werden daher — ganz ähnlich wie früher in (1) — für die auf $\mathfrak{a}^0$ und $\mathfrak{a}'$ vorhandenen Werthe φ^0 und φ' folgende Formeln erhalten:

$$\varphi^0 = (\xi^0 + i\eta^0 - \gamma^0)^{\mu^0} . H^0,$$

$$\varphi' = (\xi' + i\eta' - \gamma')^{\mu'} . H'.$$

Hier sind μ^0 und μ' die Ordnungszahlen von φ^0 und φ' in den Puncten γ^0 und γ', also zwei Zahlen, die mit der im Puncte c vorhandenen Ordnungszahl von f identisch, folglich auch unter einander identisch sind. Ferner sind hier unter H^0 und H' zwei respective von $\xi^0 + i\eta^0$ und $\xi' + i\eta'$ abhängende Functionen zu verstehen, von welchen die eine auf $\mathfrak{a}^0$, die andere auf $\mathfrak{a}'$ allenthalben eindeutig, stetig und nullfrei ist. Bezeichnen wir die in c vorhandene Ordnungszahl von f, nach wie vor, mit μ, so ist $\mu^0 = \mu' = \mu$, folglich:

$$(4^0) \qquad \varphi^0 = (\xi^0 + i\eta^0 - \gamma^0)^{\mu} . H^0,$$

$$(4') \qquad \varphi' = (\xi' + i\eta' - \gamma')^{\mu} . H'.$$

Um nun diese Formeln auf das ursprüngliche Bild

$$(\mathfrak{A},\ m,\ x + iy,\ c,\ f)$$

übertragen zu können, denken wir uns auf $\mathfrak{A}$ ausser der Function f selber noch zwei andere Functionen E^0 und E' ausgebreitet, deren Werthe in jedem Puncte $x + iy$ identisch mit denjenigen sind, welche die soeben zum Vorschein gekommenen Functionen H^0 und H' in den correspondirenden Puncten $\xi^0 + i\eta^0$ und $\xi' + i\eta'$ besitzen.

Zwischen den beiden Bildern:

$$(\mathfrak{A},\ m,\ x + iy,\ c,\ f,\ E^0),$$
$$(\mathfrak{a}^0,\ 1,\ \xi^0 + i\eta^0,\ \gamma^0,\ \varphi^0,\ H^0)$$

finden alsdann folgende Beziehungen statt (S. 236):

$$\begin{cases} \xi^0 + i\eta^0 = \sqrt[m]{(x+iy) - c}, \quad \text{mithin:} \\ \gamma^0 = \sqrt[m]{c - c} = 0; \quad \text{ferner:} \\ \varphi^0 = f; \\ H^0 = E^0. \end{cases}$$

Und hierdurch verwandelt sich die Formel (4^0) in:

$$(5^0) \qquad f = (x + iy - c)^{\frac{\mu}{m}} . E^0.$$

Andererseits sind die Beziehungen, welche zwischen den beiden Bildern:

$$(\mathfrak{A},\ m,\ x + iy,\ c,\ f,\ E'),$$
$$(\mathfrak{a}',\ 1,\ \xi' + i\eta',\ \gamma',\ \varphi',\ H')$$

stattfinden, folgende:

$$\begin{cases} \xi' + i\eta' = \sqrt[m]{\dfrac{1}{x+iy} - \dfrac{1}{c}}, \quad \text{mithin:} \\ \gamma' = \sqrt[m]{\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{c}} = 0; \\ \varphi' = f; \\ H' = E'. \end{cases}$$

Hierdurch gewinnt die Formel ($4'$) folgende Gestalt:

$$(5') \qquad f = \left(\frac{1}{x+iy} - \frac{1}{c}\right)^{\frac{\mu}{m}} . E'.$$

Da nun H^0 und H' zwei von $\xi^0 + i\eta^0$ und von $\xi' + i\eta'$ abhängende Functionen waren, von welchen die eine auf $\mathfrak{a}^0$, die andere auf $\mathfrak{a}'$ überall eindeutig, stetig und nullfrei war, so wird Analoges auch von den Functionen E^0 und E' gelten. Es werden also E^0 und E' zwei auf $\mathfrak{A}$ ausgebreitete, von $x + iy$ abhängende Functionen sein, welche auf $\mathfrak{A}$ allenthalben eindeutig, stetig und nullfrei sind.

Das Flächenstück $\mathfrak{A}$, auf welches sich vorhin die Formel (3) bezog, und auf welches sich gegenwärtig auch die Formeln (5^0) und ($5'$) beziehen, kann kurzweg als ein um den Punct c herum abgegrenztes, hinreichend kleines Flächenstück charakterisirt und demgemäss als das Bereich des Punctes c bezeichnet werden. Ferner ist in Betreff der beiden Zustände $\mathfrak{a}^0$ und $\mathfrak{a}'$, welche hier unter dem Namen des natürlichen Zustandes von $\mathfrak{A}$ parallel und gleichberechtigt neben einander hergegangen sind, zu bemerken, dass nicht jederzeit beide denkbar sind. Ist $c = 0$, so ist nur der Zustand $\mathfrak{a}^0$, ist $c = \infty$, nur der Zustand $\mathfrak{a}'$ denkbar; ist hingegen c weder 0 noch ∞, so sind gleichzeitig beide Zustände möglich.*) Analoges wird daher auch von den Formeln (5^0) und ($5'$) gelten, von welchem die erstere dem Zustande $\mathfrak{a}^0$, die letztere dem Zustande $\mathfrak{a}'$ ihren Ursprung verdankt. Ist $c = 0$, so wird nur die Formel (5^0), ist $c = \infty$, nur die Formel ($5'$) gültig sein; hingegen werden gleichzeitig beide Formeln Gültigkeit besitzen, sobald c weder 0 noch ∞ ist. Beachten wir dies, so können wir die in den Formeln (3), (5^0), ($5'$) enthaltenen Resultate folgendermassen aussprechen:

Ist eine von $x + iy$ abhängende Function f auf irgend einem Theile $\mathfrak{S}$ einer Riemann'schen Kugelfläche überall eindeutig, und mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig, so lassen sich die Werthe, welche diese Function f im Bereiche irgend eines zu $\mathfrak{S}$ gehörigen Punctes $x + iy = c$ besitzt — gleichgültig, ob dieser Punct ein gewöhnlicher oder ein Windungspunct, gleichgültig, ob er ein Pol der Function oder ein Nullpunct derselben oder keines von Beiden ist — jederzeit durch eine der beiden Formeln:

$$f = (x + iy - c)^{\frac{\mu}{m}} . E^0,$$

$$f = \left(\frac{1}{x + iy} - \frac{1}{c}\right)^{\frac{\mu}{m}} . E'$$

darstellen. Hier sind E^0 und E' zwei von $x + iy$ abhängende

---

*) Fällt nämlich der gegebene Punct c weder mit dem Puncte $x + iy = 0$, noch auch mit dem Puncte $x + iy = \infty$ zusammen, so wird man, wie nahe der Punct c einem dieser beiden Puncte auch immer liegen mag, das um c herum abgegrenzte Flächenstück $\mathfrak{A}$ sich doch immer so klein denken können, dass es keinen jener beiden Puncte in sich enthält.

Functionen, die im Bereiche von c überall eindeutig, stetig und nullfrei sind; ferner bedeutet hier m die Anzahl der Blätter, welche im Puncte c mit einander zusammenhängen; und schliesslich μ eine gewisse endliche ganze Zahl.

Von diesen beiden Darstellungen ist nur die erste möglich, falls $c = 0$; nur die zweite, falls $c = \infty$ ist; hingegen gleichzeitig die erste und zweite, falls c weder 0 noch ∞ ist.

Die Zahl μ ist nichts Anderes, als die im Puncte c vorhandene Ordnungszahl der Function f; der Werth dieser Zahl kann jederzeit dargestellt werden durch folgende Formel:

$$\mu = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_c \frac{df}{f},$$

*wo die Integration in positiver Richtung um das Bereich des Punctes c herumläuft.**)

Dritter Abschnitt. Ueber die Berechnung der Ordnungszahlen von Functionen, welche auf einer Riemann'schen Kugelfläche, oder auch auf einer gewöhnlichen einblättrigen Kugelfläche ausgebreitet sind.

Um die Art und Weise ins Licht zu setzen, wie man mit Hülfe dieses Satzes die Ordnungszahlen in gegebenen Fällen leicht zu ermitteln im Stande ist, betrachten wir einige Beispiele. Statt $x + iy$ setzen wir dabei zur Abkürzung z.

Erstes Beispiel. Um sämmtliche Werthe der Function

$$\sqrt{x + iy} \quad \text{oder} \quad \sqrt{z}$$

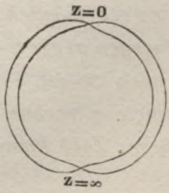
auf eindeutige Weise auszubreiten, dient, wie sich aus einem früher

---

*) Statt $\frac{df}{f}$ kann man setzen $d \log f$. Thut man dies, so lässt sich die soeben für μ aufgestellte Formel in Worten folgendermassen aussprechen: Wächst der $\log f$, wenn man das Bereich des Punctes c in positiver Richtung umläuft, um $\mu \,.\, 2\pi i$ an, so ist μ die Ordnungszahl, welche f in c besitzt. Man könnte diesen Satz benutzen, um die Ordnungszahl zu definiren. Solches hat Riemann gethan. Denn in seiner Abhandlung (Borch. Journal f. Math. Bd. 54. S. 117) heisst es: „Zur Vereinfachung des Folgenden heisse eine Function für einen Punct — — — unendlich klein von der ersten Ordnung, wenn ihr Logarithmus bei einem positiven Umlauf um ein diesen Punct umgebendes Flächenstück — — — um $2\pi i$ anwächst.“

(Seite 191) gefundenen Satz unmittelbar ergiebt, eine zweiblättrige Riemann'sche Kugelfläche, welche — sie mag $\mathfrak{R}_1$ genannt werden — zwei bei $z = 0$ und bei $z = \infty$ liegende Windungspuncte besitzt, und welche ausserdem mit einer von $z = 0$ nach $z = \infty$ laufenden Uebergangslinie behaftet ist (Fig. 58). Auf dieser Fläche ist, wie sich ebenfalls aus jenem Satze ergiebt, die Function $\sqrt{z}$ nicht nur überall eindeutig, sondern mit Ausnahme eines einzigen, im Windungspuncte $z = \infty$ liegenden Poles auch überall stetig. Ausserdem ist klar, dass die Function $\sqrt{z}$ nur für $z = 0$ verschwindet, dass sie also auf der ganzen Fläche $\mathfrak{R}_1$ nur einen einzigen, im Windungspuncte $z = 0$ liegenden, Nullpunct besitzt.

Fig. 58.



Zufolge des kürzlich (Seite 246) gefundenen Satzes ist nun die Ordnungszahl einer Function in jedem Nullpuncte positiv, in jedem Pole negativ, und in jedem andern Puncte gleich Null. Demnach wird die Ordnungszahl der hier betrachteten Function $\sqrt{z}$ auf der ganzen Fläche $\mathfrak{R}_1$ mit Ausnahme der beiden Windungspuncte überall Null sein. Die beiden Windungspuncte sind also die einzigen, in welchen der Werth dieser Zahl noch zu bestimmen ist. Und hiezu bietet nun der zuletzt gefundene Satz (Seite 252) die Mittel dar.

Im Windungspuncte $z = 0$ hängen zwei Blätter der Fläche mit einander zusammen. Um daher die in diesem Puncte vorhandene Ordnungszahl zu bestimmen, müssen wir die im Bereiche dieses Punctes vorhandenen Werthe von $\sqrt{z}$ in folgender Weise darzustellen suchen:

$$(1) \qquad \sqrt{z} = (z - 0)^{\frac{\mu}{2}} \cdot E,$$

und zwar der Art, dass μ eine ganze Zahl und E eine von z abhängende Function vorstellt, welche im Bereiche des Punctes überall eindeutig, stetig und nullfrei ist. Gelingt uns solches, so wird dann — zufolge jenes Satzes — μ die gesuchte Ordnungszahl sein.

Gelingt es uns ferner, die im Bereiche des andern Windungspunctes $z = \infty$ vorhandenen Werthe von $\sqrt{z}$ durch

$$(2) \qquad \sqrt{z} = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\infty}\right)^{\frac{\mu'}{2}} \cdot E'$$

darzustellen, wo μ' wiederum eine ganze Zahl, und E' wiederum eine Function ist, die im Bereiche des Punctes überall eindeutig, stetig und nullfrei bleibt, so wird μ' die im Puncte $z = \infty$ vorhandene Ordnungszahl sein.

Nun ist aber offenbar:

$$(3) \qquad \sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}} = (z - 0)^{\frac{1}{2}} \cdot 1,$$

und ebenso:

$$(4) \qquad \sqrt{z} = \left(\frac{1}{z}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\infty}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1.$$

Vergleicht man (1) mit (3), und vergleicht man andererseits (2) mit (4), so ergiebt sich sofort, dass $\mu = 1$ und dass $\mu' = -1$ ist.

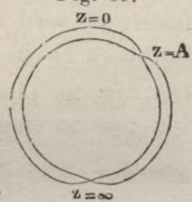
Die Ordnungszahl von $\sqrt{z}$ ist also auf der Fläche $\mathfrak{R}_{\text{I}}$ in dem einen Windungspuncte gleich 1, *im andern gleich* -1, *und in allen übrigen Puncten gleich* 0.

Zweites Beispiel. Ist A eine beliebig gegebene reelle oder imaginäre Constante, so dient zur eindeutigen Darstellung der Function

$$\sqrt{z - A}$$

eine Riemann'sche Kugelfläche $\mathfrak{R}_{\text{II}}$, welche zwei bei $z = A$ und bei $z = \infty$ liegende Windungspuncte besitzt, und ausserdem eine von $z = A$ nach $z = \infty$ laufende Uebergangslinie (Fig. 59).

Fig. 59.



Auf dieser Fläche $\mathfrak{R}_{\text{II}}$ besitzt die Function nur einen Pol und nur einen Nullpunct; ersterer liegt bei $z = \infty$, letzterer bei $z = A$. Somit ergiebt sich also zunächst, dass die Ordnungszahl von $\sqrt{z - A}$ mit Ausnahme der beiden eben genannten Puncte auf der Fläche $\mathfrak{R}_{\text{II}}$ allenthalben gleich Null ist.

Offenbar ist:

$$\sqrt{z - A} = (z - A)^{\frac{1}{2}} \cdot 1;$$

hieraus ergiebt sich zufolge unseres Satzes sofort, dass die Ordnungszahl im Puncte $z = A$ den Werth 1 besitzt.

Ferner ist offenbar:

$$(1) \qquad \sqrt{z - A} = \sqrt{z} \cdot \sqrt{1 - \frac{A}{z}},$$

und diese Gleichung kann benutzt werden, um die im Windungspuncte $z = \infty$ vorhandene Ordnungszahl zu ermitteln. Die Function $\sqrt{z-A}$ ist auf Fläche $\mathfrak{R}_{II}$ **überall eindeutig**; anders aber verhält es sich mit den beiden Factoren.

$$\sqrt{z} \quad \text{und} \quad \sqrt{1-\frac{A}{z}},$$

in welche diese Function hier zerlegt ist. Die Function $\sqrt{z}$ wird sich eindeutig ausbreiten lassen auf der **vorhin** betrachteten Fläche $\mathfrak{R}_{I}$, nicht aber auf der **gegenwärtig** vorliegenden Fläche $\mathfrak{R}_{II}$. Und ebenso wenig wird solches bei dem andern Factor $\sqrt{1-\frac{A}{z}}$ möglich sein.

Doch ist Folgendes zu bemerken: Die beiden Flächen $\mathfrak{R}_{I}$ und $\mathfrak{R}_{II}$ sind in der Nähe des Punctes $z=\infty$ von ganz gleicher Beschaffenheit. Die Function $\sqrt{z}$ wird demnach, weil sie auf $\mathfrak{R}_{I}$ allenthalben eindeutig war, allerdings nicht auf der ganzen Fläche $\mathfrak{R}_{II}$, wohl aber auf demjenigen **Theile** dieser Fläche eindeutig sein, welcher sich in der Nähe des eben genannten Punctes befindet; sie wird also — können wir sagen — auf der hier betrachteten Fläche $\mathfrak{R}_{II}$ **eindeutig sein im Bereiche des Punctes** $z=\infty$. Daraus aber, dass $\sqrt{z-A}$ und $\sqrt{z}$ im Bereiche von $z=\infty$ eindeutig sind, folgt nun mit Rücksicht auf (1) unmittelbar, dass $\sqrt{1-\frac{A}{z}}$ **im Bereich dieses Punctes ebenfalls eindeutig** sein muss. Ausserdem ist klar, dass die Function $\sqrt{1-\frac{A}{z}}$ im Bereich des Punctes $z=\infty$ nirgends verschwinden und auch nirgends unendlich gross werden kann. Somit ergiebt sich also, dass diese Function — sie mag zur Abkürzung mit E bezeichnet werden — im Bereiche von $z=\infty$ überall **eindeutig, stetig und nullfrei** ist.

Wir können nun die Gleichung (1) so schreiben:

$$\sqrt{z-A}=\sqrt{z}\,.\,E,$$

oder, was dasselbe ist:

$$\sqrt{z-A}=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\infty}\right)^{-\frac{1}{2}}.\,E.$$

Hieraus aber folgt, wenn wir unsern Satz in Anwendung bringen, unmittelbar, dass die Ordnungszahl von $\sqrt{z-A}$ im Puncte $z=\infty$ den Werth -1 besitzt.

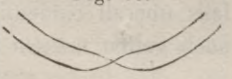
Die Ordnungszahl von $\sqrt{z - A}$ besitzt also auf der Fläche $\mathfrak{R}_{II}$ in dem Windungspuncte $z = A$ den Werth $+ 1$, im Windungspuncte $z = \infty$ den Werth $- 1$, und in allen übrigen Puncten den Werth 0.

Drittes Beispiel. Um die Function

$$(1) \qquad \varphi = \sqrt{(z - A_1)(z - A_2) \ldots . (z - A_{2\nu-1})}$$

eindeutig auszubreiten, dient eine zweiblättrige Riemann'sche Kugelfläche $\mathfrak{R}_{III}$, welche 2ν Windungspuncte $z = A_1$, $z = A_2$, ... $z = A_{2\nu-1}$ und $z = \infty$ besitzt (Fig. 60). Auf dieser Fläche $\mathfrak{R}_{III}$ besitzt die Function $2\nu - 1$ Nullpuncte und einen einzigen Pol; die erstern liegen in den Puncten $A_1, A_2, \ldots A_{2\nu-1}$, der letztere im Puncte $z = \infty$.

Fig. 60.



$z = \infty$

Wir können, um die Ordnungszahl im Puncte A_1 zu ermitteln, den Werth von φ so darstellen:

$$(2) \qquad \varphi = \sqrt{z - A_1} \cdot \sqrt{(z - A_2) \ldots . (z - A_{2\nu-1})}.$$

Da nun die vorhin betrachtete Function $\sqrt{z - A}$ auf der damaligen Fläche $\mathfrak{R}_{II}$ überall eindeutig war, mithin auch eindeutig war im Bereich des Windungspunctes $z = A$, so wird die Function $\sqrt{z - A_1}$ auf der gegenwärtig vorliegenden Fläche $\mathfrak{R}_{III}$ im Bereiche des Windungspunctes $z = A_1$ ebenfalls überall eindeutig sein. Und gleiches wird daher, zufolge (2), innerhalb des eben genannten Bereiches auch gelten von der Function

$$\sqrt{(z - A_2) \ldots (z - A_{2\nu-1})}.$$

Zudem ist klar, dass diese letztere im Bereiche von A_1 nirgends verschwinden und nirgends unendlich werden kann. Wir können dieselbe daher — sie mag E genannt werden — als eine Function bezeichnen, welche im Bereich von A_1 überall eindeutig, stetig und nullfrei ist. Die Gleichung (2) lässt sich nun folgendermassen schreiben:

$$\varphi = \sqrt{z - A_1} \cdot E,$$

oder

$$(3) \qquad \varphi = (z - A_1)^{\frac{1}{2}} \cdot E.$$

Hieraus aber folgt mit Rücksicht auf unsern Satz, dass die Ordnungszahl von φ im Puncte A_1 den Werth 1 besitzt. In ähnlicher Weise, und zu demselben Werth wird man bei den Puncten $A_2, A_3, \ldots A_{2\nu-1}$ gelangen.

Um ferner die Ordnungszahl von φ im Puncte $z = \infty$ zu ermitteln, bemerken wir zunächst, dass

$$(4)\qquad \varphi = (\sqrt{z})^{2\nu-1} \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{A_1}{z}\right)\left(1 - \frac{A_2}{z}\right) \ldots \left(1 - \frac{A_{2\nu-1}}{z}\right)}$$

ist. Da die im ersten Beispiele betrachtete Function $\sqrt{z}$ auf der damaligen Fläche $\mathfrak{R}_\mathrm{I}$ überall eindeutig war, mithin auch eindeutig war im Bereiche des auf jener Fläche vorhandenen Windungspunctes $z = \infty$, so wird dieselbe auf der gegenwärtig vorliegenden Fläche $\mathfrak{R}_\mathrm{III}$ im Bereiche des Windungspunctes $z = \infty$ ebenfalls überall eindeutig sein. Und Gleiches wird daher zufolge (4) auch gelten müssen von der Function

$$\sqrt{\left(1 - \frac{A_1}{z}\right)\left(1 - \frac{A_2}{z}\right) \ldots \left(1 - \frac{A_{2\nu-1}}{z}\right)}.$$

Zugleich wird diese Function im Bereiche von $z = \infty$ nirgends null oder unendlich werden können*). Es wird daher diese Function — sie mag E heissen — im Bereiche des Windungspunctes $z = \infty$ überall e i n d e u t i g, s t e t i g u n d n u l l f r e i sein. Geben wir nun der Gleichung (4)

$$\varphi = (\sqrt{z})^{2\nu-1} \,.\, E$$

die Gestalt:

$$\varphi = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\infty}\right)^{-\frac{2\nu-1}{2}} . \, E,$$

so erhellt aus unserm Satze unmittelbar, dass die Ordnungszahl von φ im Puncte $z = \infty$ gleich $-(2\nu - 1)$ ist. Also:

Die Ordnungszahl der Function

$$\sqrt{(z - A_1)(z - A_2) \ldots (z - A_{2\nu-1})}$$

auf der Fläche $\mathfrak{R}_\mathrm{III}$ *besitzt in jedem der Puncte* $A_1, A_2, \ldots A_{2\nu-1}$ *den Werth* 1, *ferner im Puncte* $z = \infty$ *den Werth* $-(2\nu - 1)$, *und endlich in allen übrigen Puncten den Werth* 0.

V i e r t e s B e i s p i e l. Um die Function

$$f = \sqrt{(z - A_1)(z - A_2) \ldots (z - A_{2\nu})}$$

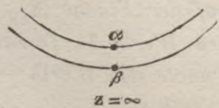
eindeutig auszubreiten, dient eine zweiblättrige Riemann'sche Kugelfläche $\mathfrak{R}_\mathrm{IV}$, welche 2ν Windungspuncte $A_1, A_2, \ldots A_{2\nu}$ besitzt.

---

*) Im Puncte $z = \infty$ selber besitzt sie den Werth 1, mithin in allen übrigen Puncten, die zum Bereich von $z = \infty$ gehören, einen wenig von 1 verschiedenen Werth.

Bei $z = \infty$ besitzt sie k e i n e n Windungspunct, sondern zwei über einander liegende Puncte, welche mit α und β bezeichnet werden mögen (Fig. 61). Auf dieser Fläche $\mathfrak{R}_{IV}$ hat nun die Function im Ganzen 2ν Nullpuncte und 2 Pole. Die erstern liegen bei $A_1, A_2, \ldots A_{2\nu}$, die letztern bei α und β.

Fig. 61.



Die Ordnungszahlen in den N u l l p u n c t e n lassen sich genau ebenso wie in dem vorhergehenden Beispiele bestimmen. Man findet, dass jede dieser Zahlen den Werth 1 hat.

Um nun ferner die Ordnungszahlen in einem der beiden P o l e, z. B. im Pole α zu finden, bemerken wir, dass der Werth von f in folgender Weise geschrieben werden kann:

$$(1) \qquad f = z^{\nu} \sqrt{\left(1 - \frac{A_1}{z}\right)\left(1 - \frac{A_2}{z}\right) \ldots \left(1 - \frac{A_{2\nu}}{z}\right)}.$$

Da der in der Nähe von α vorhandene Theil unserer Fläche $\mathfrak{R}_{IV}$ genau ebenso beschaffen ist, als gehörte er einer gewöhnlichen e i n b l ä t t r i g e n Kugelfläche an, die Function z^{ν} aber, wie wir früher (Seite 139) gefunden haben, auf einer einblättrigen Kugelfläche allenthalben eindeutig ist, so wird die Function z^{ν} auch hier auf der Riemann'schen Fläche $\mathfrak{R}_{IV}$ e i n d e u t i g s e i n i m B e r e i c h e d e s P u n c t e s α. Gleiches gilt natürlich von f. Zufolge (1) wird daher die Wurzelgrösse

$$\sqrt{\left(1 - \frac{A_1}{z}\right)\left(1 - \frac{A_2}{z}\right) \ldots \left(1 - \frac{A_{2\nu}}{z}\right)}$$

eine Function sein, die im Bereiche von α ebenfalls überall e i n d e u t i g ist. Gleichzeitig ist diese Function in dem eben genannten Bereich auch überall s t e t i g u n d n u l l f r e i Bezeichnen wir sie mit E, so verwandelt sich die Gleichung (1) in

$$f = z^{\nu} \,.\, E,$$

oder, was dasselbe ist, in

$$f = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\infty}\right)^{-\nu} . \; E.$$

Und hieraus folgt sofort, dass die Ordnungszahl von f im Puncte α den Werth $-\nu$ besitzt. Derselbe Werth ergiebt sich in β. Also:

Die Ordnungszahl der Function

$$\sqrt{(z - A_1)(z - A_2) \dots (z - A_{2\nu})}$$

auf der Fläche $\mathfrak{R}_{IV}$ *besitzt in jedem der Puncte* $A_1, A_2, \dots A_{2\nu}$ *den Werth* 1, *ferner in jedem der beiden bei* $z = \infty$ *liegenden Puncte den Werth* $-\nu$, *und endlich in allen übrigen Puncten den Werth* 0.

In jedem dieser Beispiele zeigt sich, dass die Summe sämmtlicher Ordnungszahlen Null ist. Wir werden bald sehen, dass dies nicht zufällig, sondern Folge eines gewissen merkwürdigen, sehr allgemeinen Satzes ist.

Die gewöhnliche einblättrige Kugelfläche, mit welcher wir uns in einer früheren Vorlesung (Seite 132) beschäftigt haben, ist offenbar nur ein Specialfall der Riemann'schen mehrblättrigen Kugelfläche. Und der zuletzt gefundene, für jede Riemann'sche Kugelfläche gültige Satz (Seite 252) wird daher auch gelten für die einblättrige Kugelfläche. Mit Bezug auf diesen Specialfall lautet derselbe, wie man sofort übersieht, folgendermassen:

Ist eine von $x + iy$ *abhängende Function* f *auf irgend einem Theile* $\mathfrak{S}$ *einer gewöhnlichen einblättrigen Kugelfläche überall eindeutig, und mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig, so lassen sich die Werthe, welche die Function* f *im Bereich irgend eines zu* $\mathfrak{S}$ *gehörigen Punctes* $x + iy = c$ *besitzt — gleichgültig, ob dieser Punct ein Pol der Function, ein Nullpunct derselben, oder keines von Beiden ist — immer durch eine der beiden Formeln:*

$$f = (x + iy - c)^{\mu} \,.\, E^0,$$

$$f = \left(\frac{1}{x + iy} - \frac{1}{c}\right)^{\mu} \,.\, E'$$

darstellen. Hier sind unter E^0 *und* E' *zwei von* $x + iy$ *abhängende Functionen zu verstehen, welche im Bereich des Punctes* c *überall eindeutig, stetig und nullfrei sind; ferner unter* μ *eine endliche ganze Zahl.*

Von diesen beiden Darstellungen ist nur die erste möglich, falls c *gleich* 0, *nur die zweite, falls* c *gleich* ∞ *ist; hingegen gleichzeitig die erste und zweite, falls* c *weder* 0 *noch* ∞ *ist.*

Die Zahl μ *ist nichts Anderes, als die im Puncte* c *vorhan-*

dene Ordnungszahl von f. Ihr Werth kann jederzeit ausgedrückt werden durch folgende Formel:

$$\mu = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_c \frac{df}{f},$$

wo die Integration um das Bereich des Punctes c in positiver Richtung herumläuft.

Beispielsweise wollen wir zeigen, wie man mit Hülfe dieses Satzes die Ordnungszahl der Function

$$\varphi = \frac{(z-A)^a \cdot (z-B)^b}{(z-C)^c}$$

bestimmen kann. Hier soll z zur Abkürzung für $x + iy$ stehen; ferner sollen A, B, C beliebig gegebene Constanten, und a, b, c irgend welche positive ganze Zahlen vorstellen. Die Function φ ist alsdann eine rationale Function, und kann daher — zufolge eines früheren Satzes (Seite 139) — auf einer einblättrigen Kugelfläche $\mathfrak{K}$ der Art ausgebreitet werden, dass ihre Werthe daselbst überall eindeutig, und mit Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig sind. Es handelt sich darum, die Ordnungszahlen von φ auf dieser Fläche $\mathfrak{K}$ zu bestimmen.

Die Nullpuncte und Pole von φ liegen offenbar bei $z = A$, $z = B$, $z = C$ und bei $z = \infty$. Und zwar sind von diesen vier Puncten die beiden ersten jedenfalls Nullpuncte, der dritte jedenfalls ein Pol. Wie es sich mit dem vierten, nämlich mit dem Puncte $z = \infty$ verhält, ist fraglich; es wird nämlich dieser ein Nullpunct sein, falls $a + b < c$, ein Pol sein, wenn $a + b > c$, und endlich keines von Beiden sein, sobald $a + b = c$ ist. Zufolge eines zu Anfang dieser Vorlesung (Seite 246) gefundenen Satzes wird die Ordnungszahl von φ in den vier Puncten $z = A$, $z = B$, $z = C$ und $z = \infty$ durch irgend welche ganze Zahlen, und in allen übrigen Puncten der Fläche $\mathfrak{K}$ durch Null dargestellt sein.

Offenbar können wir den Werth von φ in folgende Gestalten bringen:

(1) $$\varphi = (z-A)^a \cdot \frac{(z-B)^b}{(z-C)^c},$$

(2) $$\varphi = (z-B)^b \cdot \frac{(z-A)^a}{(z-C)^c},$$

(3) $$\varphi = (z-C)^{-c} \cdot (z-A)^a\,(z-B)^b,$$

(4) $$\varphi = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\infty}\right)^{-(a+b-c)} \frac{\left(1-\frac{A}{z}\right)^a \left(1-\frac{B}{z}\right)^b}{\left(1-\frac{C}{z}\right)^c}.$$

Aus (1), (2), (3) folgt mit Hinblick auf den zuletzt hingestellten Satz sofort, dass die Ordnungszahl von φ in den Puncten A, B, C die Werthe a, b, $-c$ besitzt; und aus (4) folgt, dass sie im Puncte $z = \infty$ den Werth $-(a + b - c)$ hat. Wiederum sehen wir also, dass die Summe sämmtlicher Ordnungszahlen gleich Null ist.

Wir wollen uns eine beliebige Riemann'sche Kugelfläche $\mathfrak{R}$ gegeben denken. Ist eine Function auf der gewöhnlichen einblättrigen Kugelfläche $\mathfrak{K}$ überall eindeutig, so wird sie bei ihrer Ausbreitung auf der Fläche $\mathfrak{R}$ ebenfalls überall eindeutig sein, und ausserdem in über einander liegenden Puncten der Fläche gleiche Werthe besitzen. Es mögen z. B. $x = a$, $y = b$ die Coordinaten irgend eines zur Fläche $\mathfrak{K}$ gehörigen Punctes p sein, und ferner mögen $P_1, P_2, \ldots P_\varrho$ diejenigen Puncte der Fläche $\mathfrak{R}$*) sein, welche dieselben Coordinaten besitzen; alsdann wird derjenige Werth der Function, welcher bei ihrer Ausbreitung auf $\mathfrak{K}$ im Puncte p vorhanden war, bei ihrer Ausbreitung auf $\mathfrak{R}$ gleichzeitig in P_1, in P_2, u. s. w., endlich in P_ϱ auftreten.

Ist die Function im Puncte p stetig, so wird sie bei ihrer Ausbreitung auf $\mathfrak{R}$ in den Puncten $P_1, P_2, \ldots P_\varrho$ ebenfalls stetig sein. Ist die Function selber im Puncte p nicht stetig, wohl aber der reciproce Werth der Function, so wird Gleiches, bei ihrer Ausbreitung auf der Fläche $\mathfrak{R}$, auch in den Puncten $P_1, P_2, \ldots P_\varrho$ stattfinden. Ist demnach die Function — sie mag f heissen — der Art beschaffen, dass in jedem Puncte der Fläche $\mathfrak{K}$ von den beiden Grössen f und $\frac{1}{f}$ wenigstens eine stetig ist, so wird bei Ausbreitung der Function auf der Fläche $\mathfrak{R}$ von jedem Puncte dieser letztern Fläche dasselbe zu sagen sein. Mit andern Worten: Ist die Function bei ihrer Ausbreitung auf der Fläche $\mathfrak{K}$ mit Ausnahme einzelner Pole überall stetig, so wird Gleiches auch gelten von ihrer Ausbreitung auf der Fläche $\mathfrak{R}$.

---

*) Die Puncte $P_1, P_2, \ldots P_\varrho$ liegen in der Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ gerade über einander; sie werden je nach Umständen entweder gewöhnliche Puncte, oder Windungspuncte, oder auch Puncte sein, die theils zur einen, theils zur andern Art gehören.

Es sei f eine von $x + iy$ abhängende Function, welche bei ihrer Ausbreitung auf $\mathfrak{K}$ überall eindeutig und mit Ausnahme einzelner Pole überall stetig ist, und welche also, zufolge der eben gemachten Bemerkungen, bei ihrer Ausbreitung auf der Fläche $\mathfrak{R}$ dieselben Eigenschaften besitzt. Die Ordnungszahlen von f werden dann auf der Fläche $\mathfrak{K}$, und ebenso auch auf der Fläche $\mathfrak{R}$ durch lauter ganze Zahlen dargestellt sein. Wir wollen untersuchen, in welcher Beziehung die Ordnungszahlen auf der einen und auf der andern Fläche zu einander stehen.

Wiederum mögen p und $P_1, P_2, \ldots P_\varrho$ irgend welche zu $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{R}$ gehörige Puncte sein, welche ein und dieselben Coordinaten $x = a$, $y = b$ besitzen; zugleich mag $a + ib$ mit c bezeichnet werden. Die Bereiche dieser Puncte mögen der Reihe nach $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_\varrho$ genannt werden. Das Bereich $\mathfrak{a}$ ist einblättrig; die Bereiche $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_\varrho$ seien der Reihe nach m_1 blättrig, m_2 blättrig u. s. w., endlich das letzte m_ϱ blättrig; so dass also

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_\varrho$$

die Anzahl sämmtlicher Blätter vorstellt, welche in der Fläche $\mathfrak{R}$ über einander geschichtet sind.

Ist μ die Ordnungszahl, welche die Function bei ihrer Ausbreitung auf $\mathfrak{K}$ im Puncte p besitzt, so wird (vgl. S. 260) im Bereiche von p, d. i. innerhalb $\mathfrak{a}$

$$(1) \qquad f = (x + iy - c)^\mu . E$$

sein, wo E eine von $x + iy$ abhängende Function bezeichnet, welche innerhalb $\mathfrak{a}$ allenthalben eindeutig stetig und nullfrei ist.

Wir verpflanzen diese Gleichung von dem Bereiche des Punctes p auf das des Punctes P_1, d. h. von $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{A}_1$. Derjenige Werth, welchen f in je einem Puncte von $\mathfrak{a}$ besitzt, fällt alsdann auf je m_1 über einander liegende Puncte von $\mathfrak{A}_1$; gleiches gilt von den Werthen der Potenz $(x + iy - c)^\mu$, und von den Werthen der Function E. Da die Function E innerhalb $\mathfrak{a}$ überall eindeutig stetig und nullfrei war, so wird sie innerhalb $\mathfrak{A}_1$ dieselben Eigenschaften besitzen. Die Werthe, welche die Function f bei ihrer Ausbreitung auf der Fläche $\mathfrak{R}$ in dem kleinen Flächenstück $\mathfrak{A}_1$ besitzt, lassen sich also, wie bei Ausführung jener Verpflanzung zu Tage tritt, durch eine Formel

$$f = (x + iy - c)^\mu . E$$

darstellen, in welcher E eine von $x + iy$ abhängende Function repräsentirt, die innerhalb $\mathfrak{A}_1$ überall eindeutig stetig und nullfrei ist. Dieser Formel können wir, indem wir $\frac{\mu m_1}{m_1}$ an Stelle von m_1 setzen, auch folgende Gestalt geben:

$$(2) \qquad f = (x + iy - c)^{\frac{\mu \, . \, m_1}{m_1}} \, . \, E,$$

wo m_1 die Anzahl der in $\mathfrak{A}_1$ über einander liegenden Blätter vorstellt. Daraus aber folgt mit Bezug auf den von uns gefundenen Satz (Seite 252) sofort, dass

$$\mu m_1$$

die Ordnungszahl ist, welche die Function f in dem auf $\mathfrak{A}_1$ liegendem Puncte P_1 besitzt. In gleicher Weise würde sich, wie leicht zu übersehen ist, darthun lassen, dass $\mu m_2, \ldots \mu m_\varrho$ diejenigen Ordnungszahlen sind, welche die Function in den Puncten $P_2, \ldots P_\varrho$ hat.

Stillschweigend haben wir hier vorausgesetzt, dass das den Puncten p, P_1, $P_2, \ldots P_\varrho$ zugehörige Binom $a + ib$ oder c endlich ist. Wir haben also noch zu untersuchen, wie die Sache sich gestaltet, wenn c unendlich gross ist. Der grösseren Allgemeinheit und Symmetrie willen beschränken wir uns nicht auf diesen einzeln stehenden Fall, sondern denken uns unter c eine Grösse, die alle möglichen Werthe, mithin auch einen unendlich grossen Werth besitzen kann, die aber von Null verschieden ist. An Stelle der innerhalb $\mathfrak{a}$ gültigen Gleichung (1) erhalten wir alsdann, bei sonst gleicher Bezeichnungsweise:

$$f = \left(\frac{1}{x + iy} - \frac{1}{c}\right)^{\mu} . \, E,$$

folglich an Stelle der innerhalb $\mathfrak{A}_1$ gültigen Gleichung (2) die Gleichung:

$$f = \left(\frac{1}{x + iy} - \frac{1}{c}\right)^{\frac{\mu m_1}{m_1}} . \, E.$$

Daraus folgt, dass wiederum μm_1 die im Puncte P_1 vorhandene Ordnungszahl ist. Es ergeben sich demnach hier genau dieselben Resultate, wie vorhin. Somit gelangen wir zu folgendem Satz:

Ist eine von $x + iy$ abhängende Function auf der gewöhnlichen einblättrigen Kugelfläche $\mathfrak{K}$ überall eindeutig und mit Ausnahme einzelner Pole überall stetig, so wird sie bei ihrer Ausbreitung auf einer beliebig gegebenen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ dieselben Eigenschaften besitzen.

*Sind ferner p und P irgend zwei zu $\mathfrak{K}$ und zu $\mathfrak{R}$ gehörige Puncte, welche dieselben Coordinaten besitzen, und ist m die Anzahl der im Puncte P mit einander zusammenhängenden Blätter, so wird die Ordnungszahl der Function, bei ihrer Ausbreitung auf $\mathfrak{R}$, im Puncte P jederzeit m mal so gross sein, als sie, bei Ausbreitung auf der Fläche $\mathfrak{K}$, im Puncte p war.**)

Beispielsweise betrachten wir die Function

$$\varphi = \frac{(z - A_1)\ (z - A_2)}{(z - A_3)\ (z - A_4)},$$

wo A_1, A_2, A_3, A_4 beliebig gegebene Constanten sein sollen, und z für $x + iy$ steht. Diese Function ist eine rationale Function von z, und ist also bei ihrer Ausbreitung auf der gewöhnlichen einblättrigen Kugelfläche $\mathfrak{K}$ überall eindeutig, und mit Ausnahme zweier in $z = A_3$ und $z = A_4$ liegenden Pole daselbst auch überall stetig. Ihre Ordnungszahl ist auf der Fläche $\mathfrak{K}$ in den Puncten A_1 und A_2 gleich 1, in den Puncten A_3 und A_4 gleich -1, und in allen übrigen Puncten gleich 0. (Vergl. S. 261.)

Wir wollen uns nun diejenige Riemann'sche Kugelfläche $\mathfrak{R}$ construirt denken, welche dient, um sämmtliche Werthe der Wurzelgrösse

$$\sqrt{(z - A_1)\,(z - A_2)\,(z - A_3)\ \ldots\ (z - A_{2\nu})}$$

auf eindeutige Weise auszubreiten; unter A_1, A_2, A_3, A_4 sollen hier die in φ enthaltenen Constanten, und unter $A_5, A_6, \ldots A_{2\nu}$ irgend welche andern Constanten verstanden werden. Bei ihrer Ausbreitung auf dieser zweiblättrigen Fläche $\mathfrak{R}$ wird die Function φ, ebenso wie zuvor auf $\mathfrak{K}$, überall eindeutig und mit Ausnahme der Puncte A_3, A_4 überall stetig sein. Ihre Ordnungszahl wird, wie sich aus dem vorhergehenden Satz ergiebt, auf der Fläche $\mathfrak{R}$ in den Windungspuncten A_1, A_2 den Werth 2, in den Windungspuncten A_3, A_4 den Werth -2, und in allen übrigen Puncten den Werth 0 besitzen.

Wir betrachten hier ferner die Function

$$\psi = z^2.$$

Diese wird ebenso wie die vorhergehende, weil sie von z auf rationale Weise abhängt, bei ihrer Ausbreitung auf der gewöhnlichen einblättrigen Kugelfläche $\mathfrak{K}$ überall eindeutig, und mit Ausnahme eines bei $z = \infty$ liegenden Poles daselbst auch überall

*) Die Ordnungszahl wird demnach in den Puncten p und P gleiche Werthe besitzen, wenn $m = 1$, also wenn P kein Windungspunct ist.

stetig sein. Ihre Ordnungszahl besitzt auf der Fläche $\mathfrak{K}$ im Puncte $z = 0$ den Werth 2, im Puncte $z = \infty$ den Werth -2, und in allen übrigen Puncten den Werth 0.

Wir denken uns wiederum diejenige Riemann'sche Kugelfläche $\mathfrak{R}$ construirt, welche dient, um sämmtliche Werthe der Wurzelgrösse

$$\sqrt{(z - A_1)(z - A_2)(z - A_3) \dots (z - A_{2\nu})}$$

auf eindeutige Weise auszubreiten. Diese Fläche ist zweiblättrig, und besitzt bei $z = 0$ zwei ohne Zusammenhang über einander liegende Puncte, ebenso bei $z = \infty$. Die betrachtete Function ψ wird zufolge des vorhergehenden Satzes bei ihrer Ausbreitung auf der Fläche $\mathfrak{R}$ daselbst überall eindeutig, und mit Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig sein. Zugleich wird die Ordnungszahl von ψ auf der Fläche $\mathfrak{R}$ in jedem der bei $z = 0$ befindlichen Puncte den Werth 2, in jedem der bei $z = \infty$ liegenden Puncte den Werth -2, und in allen übrigen Puncten den Werth 0 besitzen.

Vierter Abschnitt. Ueber die Summe sämmtlicher Ordnungszahlen, welche eine Function innerhalb irgend eines Theiles einer Riemann'schen Kugelfläche besitzt.

Es sei, wie früher, $\mathfrak{S}$ irgend ein Theil einer beliebig gegebenen Riemann'schen Kugelfläche, und f eine von $x + iy$ abhängende Function, welche auf $\mathfrak{S}$ überall eindeutig, und mit Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig ist, also eine Function, welche — zufolge eines früher (S. 244) gefundenen Satzes — auf $\mathfrak{S}$ auch nur einzelne Nullpuncte besitzen kann. Bezeichnen wir die Nullpuncte mit $Q_1, Q_2, \dots Q_\alpha$, und die Pole mit $P_1, P_2, \dots P_\beta$, so werden die Ordnungszahlen von f in den Puncten Q durch irgend welche positive ganze Zahlen $q_1, q_2, \dots q_\alpha$, in den Puncten P durch irgend welche negative ganze Zahlen $-p_1, -p_2, \dots -p_\beta$, und in allen übrigen Puncten des Flächentheiles $\mathfrak{S}$ durch Null dargestellt sein. Demnach wird

$$(1) \qquad S = (q_1 + q_2 + \dots + q_\alpha) - (p_1 + p_2 + \dots + p_\beta)$$

die Summe sämmtlicher Ordnungszahlen sein, welche f auf dem ganzen Flächentheile $\mathfrak{S}$ überhaupt besitzt. Es soll sich nun um den Werth dieser Summe S handeln. Wir werden zeigen, dass man denselben jederzeit zu finden im Stande ist, falls nur die am Rande des Flächentheiles $\mathfrak{S}$ befindlichen Functionswerthe f bekannt sind.

Wir zerlegen den Flächentheil $\mathfrak{S}$ durch irgend welche Schnitte in eine Anzahl einzelner Flächenstücke $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, ..., von welchen jedes nicht mehr als höchstens einen Windungspunct in sich enthält, und bezeichnen die Summe der in diesen einzelnen Stücken vorhandenen Ordnungszahlen der Reihe nach mit S_1, S_2, S_3, ...; so dass also

(2) $$S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots$$

ist. Es sei nun $\mathfrak{A}_\varkappa$ irgend eines unter den Flächenstücken $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, ...; und ferner seien

$$(\mathfrak{A}_\varkappa,\ x + iy,\ f,\ S_\varkappa),$$
$$(\mathfrak{a}_\varkappa,\ \xi + i\eta,\ \varphi,\ \Sigma_\varkappa)$$

diejenigen Bilder, welche dieses Flächenstück sammt den darauf vorhandenen Functionswerthen während seines ursprünglichen und während seines natürlichen Zustandes darbietet. Dabei wird alsdann unter $\mathfrak{a}_\varkappa$ eine Elementarfläche, und unter φ eine auf $\mathfrak{a}_\varkappa$ ausgebreitete Function zu verstehen sein, deren Werth in jedem Puncte $\xi + i\eta$ identisch mit demjenigen ist, welchen die Function f im correspondirenden Puncte $x + iy$ besitzt. Zugleich wird $\Sigma_\varkappa$ parallel stehen mit $S_\varkappa$, nämlich die Summe sämmtlicher Ordnungszahlen repräsentiren, welche φ auf $\mathfrak{a}_\varkappa$ hat.

Auf die Ordnungszahlen, welche φ auf der Elementarfläche $\mathfrak{a}_\varkappa$ besitzt, können wir sofort einen früher (S. 126) gefundenen Satz anwenden; wir erhalten alsdann:

(3) $$\Sigma_\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{a}_\varkappa}\frac{d\varphi}{\varphi},$$

wo die Integration um $\mathfrak{a}_\varkappa$ in positiver Richtung herumläuft. Diese Gleichung (3) kann nun von dem natürlichen Bilde:

$$(\mathfrak{a}_\varkappa,\ \xi + i\eta,\ \varphi,\ \Sigma_\varkappa)$$

leicht übertragen werden auf das ursprüngliche Bild:

$$(\mathfrak{A}_\varkappa,\ x + iy,\ f,\ S_\varkappa).$$

Zunächst sind nämlich die Ordnungszahlen von φ auf $\mathfrak{a}_\varkappa$, und die von f auf $\mathfrak{A}_\varkappa$ unter einander identisch, mithin $\Sigma_\varkappa = S_\varkappa$; wie sich solches aus der für die Ordnungszahl gegebenen Definition auf der Stelle ergiebt. Ferner ist das in positiver Richtung um $\mathfrak{a}_\varkappa$ herumerstreckte Integral $\int\frac{d\varphi}{\varphi}$ gleichwerthig mit dem ebenfalls in positiver Richtung um $\mathfrak{A}_\varkappa$ herumlaufendem Integrale $\int\frac{df}{f}$. Somit verwandelt sich die Gleichung (3) in

$$S_\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{\mathfrak{A}_\varkappa}\frac{df}{f}. \tag{4}$$

Und hierdurch geht die Gleichung (2) über in:

$$S = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int\limits_{\mathfrak{A}_1}\frac{df}{f} + \int\limits_{\mathfrak{A}_2}\frac{df}{f} + \int\limits_{\mathfrak{A}_3}\frac{df}{f} + \ldots\right\}, \tag{5}$$

wo die Integrationen um die einzelnen Flächenstücke $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \ldots$ in positiver Richtung herumerstreckt sind.

Die Linienelemente, aus welchen der Rand von $\mathfrak{S}$ besteht, mögen mit ds, und andererseits mögen diejenigen, aus welchen die zur Zerstückelung von $\mathfrak{S}$ in Anwendung gebrachten Schnittlinien bestehen, mit $d\sigma$ bezeichnet werden. Diese Linienelemente ds und $d\sigma$ sind es, aus welchen die Integrationscurven der in (5) befindlichen Integrale zusammengesetzt sind. Und zwar kommt jedes Element ds immer nur in je einem, jedes Element $d\sigma$ hingegen immer in je zweien jener Integrale vor.

Wir betrachten zunächst irgend eines unter den Elementen $d\sigma$. Sind $\mathfrak{A}_\varkappa$ und $\mathfrak{A}_\lambda$ diejenigen beiden Flächenstücke, welche zu beiden Seiten dieses Linienelementes liegen, so wird dasselbe, je nachdem man $\mathfrak{A}_\varkappa$ oder $\mathfrak{A}_\lambda$ in positiver Richtung umläuft, das eine Mal in der einen, das andere Mal in der entgegengesetzten Richtung durchlaufen werden. Demnach werden die Integrale

$$\int\limits_{\mathfrak{A}_\varkappa}\frac{df}{f} \quad \text{und} \quad \int\limits_{\mathfrak{A}_\lambda}\frac{df}{f}$$

zwei auf jenes Linienelement $d\sigma$ bezügliche Theile enthalten, welche einander entgegengesetzt sind. Bildet man also die Summe

$$\int\limits_{\mathfrak{A}_1}\frac{df}{f} + \int\limits_{\mathfrak{A}_2}\frac{df}{f} + \int\limits_{\mathfrak{A}_3}\frac{df}{f} + \ldots, \tag{6}$$

so werden sich sämmtliche den Elementen $d\sigma$ zugehörige Integraltheile gegenseitig zerstören und nur die den Elementen ds zugehörigen übrig bleiben.

Ist nun ds irgend eines dieser letzteren Elemente, und $\mathfrak{A}_\varkappa$ das an ds grenzende Flächenstück, so wird dieses Linienelement ds offenbar bei einer positiven Umlaufung von $\mathfrak{A}_\varkappa$, und bei einer positiven Umlaufung von $\mathfrak{S}$, beide Male in gleicher Richtung durchlaufen werden. Daraus folgt, dass die bei Bildung der Summe (6) noch übrig gebliebenen, den Elementen ds zugehörigen Integraltheile identisch mit denjenigen sind, welche in dem in positiver Richtung um $\mathfrak{S}$ herumerstreckten Integral

$$\int_{\mathfrak{S}} \frac{df}{f} \tag{7}$$

vorkommen; dass also jene Summe (6) mit diesem Integrale (7) von gleichem Werthe ist.

Beachten wir dies, so verwandelt sich unsere Formel (5) schliesslich in:

$$S = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{S}} \frac{df}{f}.$$

Wir erhalten demnach folgenden Satz:

Ist eine von $x + iy$ abhängende Function f auf irgend einem Theile $\mathfrak{S}$ einer Riemann'schen Kugelfläche überall eindeutig, und mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig, so ist das in positiver Richtung um den Rand von $\mathfrak{S}$ herumerstreckte Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{S}} \frac{df}{f}$$

jederzeit gleich der Summe sämmtlicher Ordnungszahlen, welche f innerhalb $\mathfrak{S}$ besitzt.

Besitzt der gegebene Flächentheil $\mathfrak{S}$ nicht eine, sondern mehrere, etwa ϱ Randcurven, so wird dieses Integral, genau genommen, eine Summe von ϱ einzelnen Integralen sein, deren jedes über je eine Randcurve hinerstreckt ist.

Das eben erhaltene Resultat bezieht sich auf irgend einen Theil einer Riemann'schen Kugelfläche. Wendet man genau dieselbe Methode an, um die Summe aller Ordnungszahlen zu ermitteln, welche auf der ganzen Riemann'schen Kugelfläche vorhanden sind, so gelangt man zu einem analogen Resultat, welches, wie leicht zu übersehen, so lautet:

Ist eine von $x + iy$ abhängende Function auf einer Riemann'-

*schen Kugelfläche allenthalben eindeutig, und mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole daselbst auch allenthalben stetig, so ist die Summe sämmtlicher Ordnungszahlen, welche sie auf jener Fläche besitzt, gleich Null.**)

Oder mit andern Worten: Bei einer solchen Function ist die Summe der in den Polen vorhandenen Ordnungszahlen ihrem absoluten Betrage nach jederzeit ebenso gross, als die Summe der in den Nullpuncten vorhandenen.

Fünfter Abschnitt. Ueber Functionen, die aus anderen Functionen auf rationale Weise zusammengesetzt sind.

Es sei wiederum $\mathfrak{S}$ irgend ein Theil einer Riemann'schen Kugelfläche, und es seien $f_1, f_2, \ldots f_\alpha$ irgend welche von $x + iy$ abhängende Functionen, die auf $\mathfrak{S}$ überall eindeutig, und mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig sind. Ferner stelle

$$F = R(f_1, f_2, \ldots f_\alpha)$$

irgend einen Ausdruck vor, der aus $f_1, f_2, \ldots f_\alpha$ auf rationale Weise zusammengesetzt ist.

Offenbar wird alsdann F eine von $x + iy$ abhängende Function sein, welche, ebenso wie $f_1, f_2, \ldots f_\alpha$, auf $\mathfrak{S}$ überall ein-

---

*) In jedem Nullpunct ist die Ordnungszahl der Function gleich einer positiven, und in jedem Pol gleich einer negativen ganzen Zahl (S. 246). Man kann demgemäss die Nullpuncte, je nachdem ihre Ordnungszahl gleich 1, 2, 3 u. s. w. ist, einfache, zweifache, dreifache u. s. w. nennen; und andererseits die Pole, je nachdem ihre Ordnungszahl gleich — 1, — 2, — 3 u. s. w. ist, ebenfalls als einfache, zweifache, dreifache u. s. w. Pole bezeichnen. Wenn man nun einen einfachen Nullpunct oder einen einfachen Pol schlechtweg mit dem Namen Nullpunct oder Pol bezeichnet, so kann man jeden n fachen Nullpunct oder n fachen Pol als eine Superposition von n Nullpuncten oder als eine Superposition von n Polen auffassen. (Vergl. Riemann's Abhandlung, Borch. Journal Bd. 54, S. 118.) Thut man dies, so lässt sich der oben stehende Satz auch so aussprechen:

„Ist eine von $x + iy$ abhängende Function auf einer Riemann'schen Kugelfläche allenthalben eindeutig und mit Ausnahme einzelner Pole allenthalben stetig, so ist die Anzahl ihrer Pole jederzeit ebenso gross wie die Anzahl ihrer Nullpuncte."

deutig ist. Fraglich aber ist, wie es sich mit dieser Function F hinsichtlich ihrer Stetigkeit oder Unstetigkeit verhält.

Es mag $\mathfrak{S}$, ebenso wie früher, durch irgend welche Schnitte in einzelne Flächenstücke zerlegt werden, von welchen jedes nicht mehr als höchstens einen Windungspunct in sich enthält; irgend eines unter diesen Stücken sei $\mathfrak{A}$. Die beiden Bilder, welche dieses Flächenstück sammt den darauf vorhandenen Functionswerthen zur Zeit seines ursprünglichen und zur Zeit seines natürlichen Zustandes darbietet, mögen mit:

$$(\mathfrak{A},\ x + iy,\ f_1,\ f_2,\ \ldots\ f_\alpha,\ F)$$

und mit:

$$(\mathfrak{a},\ \xi + i\eta,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots\ \varphi_\alpha,\ \Phi)$$

bezeichnet werden. Hier wird dann $\mathfrak{a}$ eine gewisse Elementarfläche vorstellen, und gleichzeitig werden $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\alpha$, Φ gewisse auf $\mathfrak{a}$ ausgebreitete Functionen sein, deren Werthe in jedem Puncte $\xi + i\eta$ identisch mit denjenigen sind, welche

$$f_1,\ f_2,\ \ldots\ f_\alpha,\ F$$

in dem correspondirenden Puncte $x + iy$ besitzen.

Die Gleichung

$$F = R\,(f_1,\ f_2,\ \ldots\ f_\alpha)$$

gilt für zusammengehörige Werthe von f_1, f_2, $\ldots$ f_α, F, gilt also für diejenigen Werthe, welche diese Functionen in irgend einem Puncte $x + iy$ besitzen. Diese Werthe sind identisch mit denen, welche die Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\alpha$, Φ in dem correspondirenden Punct $\xi + i\eta$ besitzen. Für zusammengehörige Werthe der letzteren Functionen wird demnach jene Gleichung ebenfalls gelten. Es wird also

$$\Phi = R\,(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots\ \varphi_\alpha),$$

d. h. es wird Φ eine Function sein, die aus $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\alpha$ auf rationale Weise zusammengesetzt ist.

Fassen wir demnach das natürliche Bild

$$(\mathfrak{a},\ \xi + i\eta,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots\ \varphi_\alpha,\ \Phi)$$

ins Auge, so haben wir Folgendes vor uns: Erstens eine Elementarfläche $\mathfrak{a}$; zweitens gewisse von $\xi + i\eta$ abhängende Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\alpha$, welche auf $\mathfrak{a}$ — ebenso wie $f_1, f_2, \ldots f_\alpha$ auf $\mathfrak{A}$ — überall eindeutig, und mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole überall stetig sind; drittens eine Function Φ, die aus $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\alpha$ auf rationale Weise zusammengesetzt ist. Daraus folgt durch Anwendung eines früher (S. 118) gefundenen Satzes sofort, dass Φ auf der Elementarfläche $\mathfrak{a}$ überall eindeutig, und mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig ist.

Gleiches muss daher auf dem ursprünglichen Flächenstück $\mathfrak{A}$ von F gelten. Nun war $\mathfrak{A}$ irgend ein beliebiges unter den Flächenstücken, in welche $\mathfrak{S}$ zerlegt worden ist. Was daher für $\mathfrak{A}$ richtig ist, wird auch richtig sein für $\mathfrak{S}$. Somit wird

$$F = R\,(f_1, f_2, \ldots f_\alpha)$$

eine Function sein, welche auf dem gegebenen Flächentheile $\mathfrak{S}$ überall eindeutig, und mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig ist.

Wir betrachten insbesondere noch den Fall, dass der Ausdruck F aus den Functionen $f_1, f_2, \ldots$ nur durch Multiplication und Division entstanden ist; es sei nämlich

$$F = \frac{f_1 \cdot f_2 \cdots f_\alpha}{f_1^0 \cdot f_2^0 \cdots f_\beta^{\,0}},$$

wo über $f_1^0, f_1^0, \ldots f_\beta^0$ dieselbe Voraussetzung gelten soll, wie über $f_1, f_2, \ldots f_\alpha$. Es sei $x + iy = c$ irgend ein zu $\mathfrak{S}$ gehöriger Punct, und ferner $\mathfrak{A}$ ein um c herum abgegrenztes Flächenstück, welches nicht mehr als höchstens einen Windungspunct enthält. Die beiden Bilder, welche dieses Flächenstück, sammt den darauf ausgebreiteten Functionswerthen, zur Zeit seines ursprünglichen und zur Zeit seines natürlichen Zustandes darbietet, mögen mit

$$(\mathfrak{A},\ x + iy,\ c,\ f,\ f^0,\ F)$$

und mit

$$(\mathfrak{a},\ \xi + i\eta,\ \gamma,\ \varphi,\ \varphi^0,\ \Phi)$$

bezeichnet werden, wo also γ den mit c correspondirenden Punct vorstellen soll.

Ebenso wie in jedem Puncte $x + iy$

$$F = \frac{f_1 \cdot f_2 \cdots f_\alpha}{f_1^0 \cdot f_2^0 \cdots f_\beta^{\,0}}$$

ist; ebenso wird alsdann in jedem zur Elementarfläche $\mathfrak{a}$ gehörigen Punct $\xi + i\eta$

$$\Phi = \frac{\varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdots \varphi_\alpha}{\varphi_1^0 \cdot \varphi_2^0 \cdots \varphi_\beta^{\,0}}$$

sein. Auf die Ordnungszahlen, welche die auf $\mathfrak{a}$ ausgebreiteten

Functionen besitzen, lässt sich nun sofort ein früherer Satz (S. 118) in Anwendung bringen. Sind nämlich $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_\alpha, \mu_1^0, \mu_2^0, \ldots \mu_\beta^0, M$ die Ordnungszahlen, mit welchen die Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\alpha, \varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots \varphi_\beta^0, \Phi$ im Puncte γ behaftet sind, so wird jenem Satze zufolge

$$M = (\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_\alpha) - (\mu_1^0 + \mu_2^0 + \cdots + \mu_\beta^0)$$

sein. Nun sind aber die Ordnungszahlen von φ, φ^0, Φ im Puncte γ identisch mit denen, welche f, f^0, F im Puncte c besitzen.

Die Ordnungszahl von F in irgend einem Puncte c wird also dadurch erhalten werden, dass man die daselbst vorhandenen Ordnungszahlen von $f_1, f_2, \ldots f_\alpha$ addirt, und von dieser Summe diejenigen Ordnungszahlen, welche $f_1^0, f_2^0, \ldots f_\beta^0$ in jenem Puncte besitzen, subtrahirt.

Denken wir uns irgend welche Riemann'sche Kugelfläche gegeben, so wird das Binom $x + iy$ in jedem Punct derselben immer nur einen Werth besitzen; dass diese Werthe in über einander liegenden Puncten der Fläche von gleicher Grösse sind, kommt nicht in Betracht. Durch das Binom $x + iy$ wird also eine Function dargestellt sein, welche auf der Fläche überall eindeutig ist. Bezeichnen wir ferner diejenigen Puncte der Fläche, welche die Coordinaten $x = \infty$, $y = \infty$ besitzen, mit $A, B, C, \ldots$ *), so werden die Werthe der Function $x + iy$ mit alleiniger Ausnahme der Puncte $A, B, C, \ldots$ auf jener Fläche auch überall stetig sein. In den Puncten $A, B, C, \ldots$ wird der Werth von $x + iy$ unendlich gross, mithin unstetig sein; stetig aber werden in den Bereichen jener Puncte die Werthe von $\frac{1}{x + iy}$ sein. Daraus folgt, dass die Unstetigkeiten, mit welchen die Function $x + iy$ in den Puncten $A, B, C, \ldots$ behaftet ist, polarer Natur sind.

Wir sehen demnach, dass $x + iy$ eine Function ist, welche auf jeder Riemann'schen Kugelfläche — mag dieselbe nun beschaffen sein wie sie wolle — überall eindeutig und mit Ausnahme einzelner Pole auch überall stetig ist. Zu den Functionen

*) Denkt man sich bei der hier betrachteten Riemann'schen Kugelfläche die Antipodenebene construirt, so werden $A, B, C, \ldots$ diejenigen Puncte sein, welche an der Berührungsstelle dieser Ebene über einander liegen. Ist die Riemann'sche Kugelfläche eine n blättrige, so wird die Anzahl der Puncte $A, B, C, \ldots$ gleich n, oder kleiner als n sein.

$f_1, f_2, \ldots f_\alpha, f_1^0, f_2^0, \ldots f_\beta^0$, für welche die eben angestellten Betrachtungen Gültigkeit haben, wird daher jederzeit auch diejenige gehören, welche durch das Binom $x + iy$ dargestellt ist. Ausserdem ist noch eine andere hierher gehörige Function zu erwähnen; das ist (vergl. S. 117) diejenige, deren Werth überall $= 1$, deren Ordnungszahl mithin überall $= 0$ ist.

Wir erhalten somit, wenn wir Alles zusammenfassen, folgende Sätze:

I. Sind $f_1, f_2, \ldots f_\alpha$ irgend welche von $x + iy$ abhängende Functionen, die auf irgend einem Theile $\mathfrak{S}$ einer Riemann'schen Kugelfläche überall eindeutig, und mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig sind, so wird auf jenem Flächentheile $\mathfrak{S}$ Gleiches auch von jedem Ausdruck

$$F = R(f_1, f_2, \ldots f_\alpha)$$

gelten, der aus $f_1, f_2, \ldots f_\alpha$ auf rationale Weise zusammengesetzt ist.

II. Solches wird also auch gelten von dem Quotienten:

$$F = \frac{f_1 \cdot f_2 \ldots f_\alpha}{f_1^0 \cdot f_2^0 \ldots f_\beta^0};$$

vorausgesetzt, dass in Bezug auf $f_1^0, f_2^0, \ldots f_\beta^0$ dieselbe Annahme, wie in Bezug auf $f_1, f_2, \ldots f_\alpha$ gemacht wird. Die Ordnungszahl, welche dieser Quotient auf dem Flächentheile $\mathfrak{S}$ in irgend einem Puncte besitzt, ist dadurch zu erhalten, dass man die daselbst vorhandenen Ordnungszahlen von $f_1, f_2, \ldots f_\alpha$ addirt, und von der so erhaltenen Summe diejenigen Ordnungszahlen, welche $f_1^0, f_2^0, \ldots f_\beta^0$ in jenem Punct besitzen, subtrahirt.

III. Zu den Functionen f, f^0, auf welche die eben genannten beiden Sätze anwendbar sind, gehört unter andern auch die Function $x + iy$; ferner auch diejenige Function, deren Werth überall $= 1$, deren Ordnungszahl mithin überall $= 0$ ist.

Sechster Abschnitt. Es wird gezeigt, dass eine von $x + iy$ abhängende Function, die auf einer Riemann'schen Kugelfläche überall eindeutig und stetig ist, eine Constante sein muss. Verallgemeinerung dieses Satzes.

Es sei $\mathfrak{R}$ irgend eine n blättrige Riemann'sche Kugelfläche, und f eine von $x + iy$ abhängende Function, welche auf $\mathfrak{R}$ allenthalben eindeutig und stetig ist.

Wir denken uns neben $\mathfrak{R}$ noch eine gewöhnliche einblättrige Kugelfläche $\mathfrak{K}$, die sich an irgend welcher andern Stelle des Raumes befinden, und ebenso wie $\mathfrak{R}$ den Durchmesser Eins besitzen mag.

Wir bezeichnen nun die Werthe, welche f in je n über einander liegenden Puncten der Fläche $\mathfrak{R}$ besitzt, mit $f_1, f_2, \ldots f_n$, und die Summe dieser n Werthe mit F; also:

$$F = f_1 + f_2 + \cdots + f_n.$$

Verpflanzen wir die Werthe, welche F auf der Fläche $\mathfrak{R}$ besitzt, nach den correspondirenden Puncten der Fläche $\mathfrak{K}$ hin,*) so wird sich F als eine von $x + iy$ abhängende Function darstellen, welche auf $\mathfrak{K}$ überall eindeutig, und welche gleichzeitig, weil f nach unserer Voraussetzung nirgends unstetig sein soll, auf $\mathfrak{K}$ auch überall stetig ist. Zufolge eines früher (S. 154) gefundenen Satzes muss daher F eine Constante sein.

In solcher Art lässt sich, wie nun leicht zu übersehen ist, darthun, dass nicht allein

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n,$$

sondern dass auch

$$f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2,$$
$$f_1^3 + f_2^3 + \cdots + f_n^3,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f_1^n + f_2^n + \cdots + f_n^n$$

Constanten sind. Daraus aber folgt unmittelbar, dass $f_1, f_2, \ldots f_n$ selber ebenfalls constante Werthe besitzen, und dass daher Gleiches auch von f gilt. Somit ergiebt sich folgender Satz:

Ist eine von $x + iy$ abhängende Function auf einer beliebig gegebenen Riemann'schen Kugelfläche allenthalben eindeutig und stetig, so ist sie eine Constante.

Es seien f und φ zwei von $x + iy$ abhängende Functionen, welche auf ein und derselben Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ ausgebreitet sind. Beide Functionen mögen auf $\mathfrak{R}$ überall eindeutig, und beide mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig sein. Gleiches wird alsdann von jedem Ausdruck gelten, der aus f und φ auf rationale Weise zusammengesetzt

---

*) Unter correspondirenden Puncten sind diejenigen zu verstehen, welche auf $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{K}$ dieselben Coordinaten besitzen.

ist, also z. B. auch gelten von dem Quotienten

$$\frac{f}{\varphi};$$

wie sich solches unmittelbar aus dem vorhin (Seite 274) gefundenen Satz ergiebt. Zugleich folgt aus jenem Satze, dass die Ordnungszahl dieses Quotienten in jedem einzelnen Puncte von $\mathfrak{R}$ gleich der Differenz derjenigen beiden Ordnungszahlen ist, welche f und φ daselbst besitzen.

Nun wissen wir, dass die Ordnungszahl einer Function positiv ist in jedem Nullpuncte, dass sie negativ ist in jedem Pole, und dass sie endlich Null ist in jedem Puncte, der weder Nullpunct noch Pol ist. Somit ergiebt sich zweierlei, nämlich erstens, dass der Quotient

$$\frac{f}{\varphi}$$

eine von $x + iy$ abhängende Function ist, welche auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überall eindeutig, und mit Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig ist; zweitens, dass die Nullpuncte dieses Quotienten dort liegen, wo die Ordnungszahl von f grösser als die von φ ist, und dass die Pole desselben in denjenigen Puncten von $\mathfrak{R}$ liegen, in welchen die Ordnungszahl von f kleiner als die von φ ist.

Nehmen wir daher an, f und φ wären zwei Functionen, deren Ordnungszahlen überall einander gleich sind, so wird jener Quotient gar keine Pole besitzen, mithin eine Function sein, welche auf $\mathfrak{R}$ allenthalben eindeutig und stetig ist. Eine solche Function ist aber — zufolge des soeben gefundenen Satzes — eine Constante. Somit erhalten wir folgenden Zusatz:

Sind zwei von $x + iy$ abhängende Functionen f und φ bei ihrer Ausbreitung auf einer beliebig gegebenen Riemann'schen Kugelfläche daselbst überall eindeutig, und mit Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig, und sind ferner die Ordnungszahlen von f und φ in jedem Puncte jener Fläche einander gleich, so ist der Quotient

$$\frac{f}{\varphi}$$

eine Constante.

Wir gehen zu einer mehr allgemeinen Untersuchung über. Es sei $\mathfrak{S}$ irgend ein Theil einer Riemann'schen Kugelfläche, und f eine von $x + iy$ abhängende Function, welche auf $\mathfrak{S}$ allenthalben eindeutig und stetig ist; ferner mag der Werth von f, wie er sich bei Sonderung des Reellen und Imaginären herausstellt, mit

$$f = U + iV$$

bezeichnet werden.

Wir zerlegen $\mathfrak{S}$ durch irgend welche Schnitte in einzelne Stücke $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_\sigma$, von welchen jedes nicht mehr als höchstens einen Windungspunct in sich enthält. Das in positiver Richtung um $\mathfrak{S}$ herumerstreckte Integral $\int U\,dV$ kann in eine Summe einzelner Integrale zerlegt werden, von welchen jedes um je eines der Flächenstücke $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_\sigma$, und zwar ebenfalls in positiver Richtung herumläuft; wie Aehnliches bei einer früheren Gelegenheit (S. 268) ausführlich erörtert wurde. Es wird also

$$(1) \qquad \int\limits_{\mathfrak{S}} U\,dV = \int\limits_{\mathfrak{A}_1} U\,dV + \int\limits_{\mathfrak{A}_2} U\,dV + \ldots + \int\limits_{\mathfrak{A}_\sigma} U\,dV$$

sein.

Bezeichnet man nun die beiden Bilder, welche das Flächenstück $\mathfrak{A}_\varkappa$ sammt den darauf vorhandenen Functionswerthen zur Zeit seines ursprünglichen und zur Zeit seines natürlichen Zustandes darbietet, mit:

$$(\mathfrak{A}_\varkappa,\ x + iy,\ f = U + iV)$$

und mit:

$$(\mathfrak{a}_\varkappa,\ \xi + i\eta,\ \varphi = u + iv),$$

so sind die an den Rändern von $\mathfrak{A}_\varkappa$ und $\mathfrak{a}_\varkappa$ vorhandenen Werthe von $f = U + iV$ und $\varphi = u + iv$, falls man beide Ränder in positiver Richtung durchschreitet, Schritt für Schritt unter einander identisch. Demnach sind die in positiver Richtung um $\mathfrak{A}_\varkappa$ und um $\mathfrak{a}_\varkappa$ herumerstreckten Integrale

$$(2) \qquad \int\limits_{\mathfrak{A}_\varkappa} U\,dV \quad \text{und} \quad \int\limits_{\mathfrak{a}_\varkappa} u\,dv$$

von gleichem Werth. Bezeichnen wir den gemeinsamen Werth dieser beiden Integrale mit $G_\varkappa$, so erhalten wir an Stelle von (1) folgende Formel:

$$(3) \qquad \int\limits_{\mathfrak{S}} U\,dV = G_1 + G_2 + \ldots + G_\sigma.$$

Um nun über den Werth von $G_\varkappa$*) genauere Auskunft zu erhalten, fassen wir das natürliche Bild

$$(\mathfrak{a}_\varkappa,\ \xi + i\eta,\ \varphi = u + iv)$$

näher ins Auge. Hier stellt $\mathfrak{a}_\varkappa$ eine Elementarfläche vor, ferner $\varphi = u + iv$ eine von $\xi + i\eta$ abhängende Function, welche auf $\mathfrak{a}_\varkappa$ — ebenso wie f auf $\mathfrak{A}_\varkappa$ — allenthalben eindeutig und stetig ist. Zufolge eines früher (S. 129) gefundenen Satzes wird daher das Randintegral

$$\int\limits_{\mathfrak{a}_\varkappa} u\,dv$$

einen Werth besitzen, welcher jederzeit positiv oder Null ist. Auch wissen wir zufolge jenes Satzes, dass dieser Werth nur dann Null ist, wenn die Function φ auf der Fläche $\mathfrak{a}_\varkappa$ allenthalben constant bleibt, oder, was dasselbe ist, dass derselbe nur dann Null ist, wenn die Function f auf $\mathfrak{A}_\varkappa$ allenthalben constant bleibt. Der Werth dieses Randintegrales ist es aber, welcher mit $G_\varkappa$ bezeichnet wurde. Die Grösse $G_\varkappa$ wird also jederzeit positiv sein, und nur dann Null werden, wenn f auf $\mathfrak{A}_\varkappa$ constant ist.

Das Integral

$$\int\limits_{\mathfrak{S}} U\,dV$$

ist nach (3) gleich $G_1 + G_2 + \ldots + G_\sigma$. Es wird daher dieses Integral jederzeit positiv sein. Den Werth Null wird es nur dann annehmen, wenn die Grössen $G_1, G_2, \ldots G_\sigma$ sämmtlich Null sind, also nur dann, wenn die gegebene Function f auf dem Flächentheile $\mathfrak{S}$ allenthalben constant ist. Somit gelangen wir zu folgendem Satz:

Ist f eine von $x + iy$ abhängende Function, welche auf irgend einem Theile $\mathfrak{S}$ einer Riemann'schen Kugelfläche allenthalben eindeutig und stetig ist, und bezeichnet man den Werth dieser Function, wie er sich bei Sonderung des Reellen und Imaginären herausstellt, mit

$$f = U + iV,$$

---

*) Es ist zu beachten, dass U und V reelle Grössen sind, und dass demnach $G_1, G_2, \ldots G_\sigma$ zufolge ihrer Definition ebenfalls reelle Grössen vorstellen.

so ist das in positiver Richtung um $\mathfrak{S}$ herumerstreckte Integral

$$\int_{\mathfrak{S}} U\,dV$$

jederzeit positiv oder Null. Und zwar wird der letztere Fall, dass nämlich dieses Integral Null ist, nur dann eintreten, wenn die Function f auf dem Flächentheile $\mathfrak{S}$ allenthalben constant ist.

Besitzt der Flächentheil $\mathfrak{S}$ nicht eine, sondern mehrere, etwa ϱ Randcurven, so wird das vorstehende Integral

$$\int_{\mathfrak{S}} U\,dV,$$

genau genommen, eine Summe von ϱ einzelnen Integralen sein, deren jedes über je eine Randcurve hinerstreckt ist.

Führt man auf der gewöhnlichen einblättrigen Kugelfläche einen in sich zurücklaufenden Schnitt aus, so zerfällt die Fläche dadurch jederzeit in zwei von einander getrennte Stücke. Anders verhält es sich bei einer Riemann'schen Kugelfläche. Denken wir uns z. B. diejenige zweiblättrige Kugelfläche, welche früher (S. 190) zur Ausbreitung der Function

$$f = \sqrt{(z - A_1)\,(z - A_2)\ldots(z - A_{2\nu})}$$

in Anwendung gebracht wurde, d. i. eine Fläche, welche ν Uebergangslinien $A_1 A_2$, $A_3 A_4$, ... $A_{2\nu-1} A_{2\nu}$ besitzt, und führen wir in dieser Fläche, und zwar in dem oberen Blatt derselben, einen um die Uebergangslinie $A_1\, A_2$ herum- und in sich zurücklaufenden Schnitt aus, so wird die Fläche durch einen solchen Schnitt keineswegs in zwei von einander getrennte Stücke zerlegt werden, sondern nach wie vor zusammenhängend bleiben (Fig. 62). Solches mag nur als Beispiel dienen.

Es sei $\mathfrak{R}$ eine beliebig gegebene Riemann'sche Kugelfläche; und es sei σ eine auf $\mathfrak{R}$ gezogene, in sich zurücklaufende Linie, durch welche die Fläche nicht in getrennte Stücke zerfällt.

Fig. 62.

Wir wollen uns nun eine von $x + iy$ abhängende Function f denken, welche auf $\mathfrak{R}$ allenthalben eindeutig ist, welche ferner auf dem einen Ufer der Linie σ um irgend welche rein imaginäre Constante iK grösser ist, als auf dem andern, und welche, abgesehen von dieser längs σ hin vorhandenen Unstetigkeit, auf der Fläche $\mathfrak{R}$ allenthalben stetig ist. Bezeichnen wir also den Werth von f, wie er sich bei Sonderung des Reellen und Imaginären herausstellt, mit $U + iV$, so werden U und V zwei von x und y abhängende, auf $\mathfrak{R}$ überall eindeutige Functionen sein; und zwar U eine Function, welche auf $\mathfrak{R}$ allenthalben stetig ist, V hingegen eine Function, welche längs σ hin mit der constanten Werthdifferenz K behaftet, abgesehen hiervon aber auf $\mathfrak{R}$ ebenfalls überall stetig bleibt.

Es fragt sich, von welcher Beschaffenheit eine derartige Function sein wird. Wir führen längs der Linie σ einen in sich zurücklaufenden Schnitt aus und bezeichnen die beiden Ufer des Schnittes mit σ_1 und σ_2. Durch diesen Schnitt verwandelt sich die gegebene Fläche $\mathfrak{R}$ in eine Fläche $\mathfrak{R}'$, welche zwei Randcurven besitzt, nämlich die Randcurven σ_1 und σ_2. Wir beginnen nun unsere Untersuchung damit, dass wir das in positiver Richtung um $\mathfrak{R}'$ herumerstreckte Integral

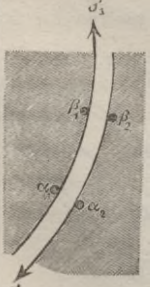
$$J = \int\limits_{\mathfrak{R}'} U\,dV \tag{1}$$

näher ins Auge fassen. Offenbar ist dieses Integral die Summe zweier Integrale, von welchen sich das eine über die Randcurve σ_1, das andere über die Randcurve σ_2 hinerstreckt, also:

$$J = \int\limits_{\sigma_1} U\,dV + \int\limits_{\sigma_2} U\,dV. \tag{2}$$

Dabei ist zu bemerken, dass das eine Integral in der positiven Richtung von σ_1, das andere in der positiven Richtung von σ_2 hinerstreckt ist. Die positive Richtung einer Randcurve ist zufolge unserer Definition (S. 71) aber jederzeit diejenige, in welcher man auf der Curve fortschreiten muss, sobald man das von derselben begrenzte Flächengebiet zur **Linken** haben will. Daraus folgt, dass die positiven Richtungen von σ_1 und σ_2 einander **entgegengesetzt** sind (Fig. 63).

Fig. 63.



Bezeichnen wir daher irgend zwei längs σ_1 auf einander folgende Puncte mit α_1, β_1, und die gegenüberliegenden, zu σ_2 gehörigen, mit α_2, β_2, so werden die in

(2) angegebenen Integrale zwei auf die Linienelemente $\alpha_1\,\beta_1$ und $\alpha_2\,\beta_2$ bezügliche Theile enthalten, von welchen der eine den Werth

$$U_{\alpha_1}\,(V_{\beta_1} - V_{\alpha_1}), \tag{3}$$

der andere hingegen den Werth

$$U_{\alpha_2}\,(V_{\alpha_2} - V_{\beta_2}) \tag{4}$$

besitzt. Zufolge unserer Voraussetzung ist

$$U_{\alpha_1} = U_{\alpha_2},$$

ferner

$$V_{\alpha_1} = V_{\alpha_2} + K,$$
$$V_{\beta_1} = V_{\beta_2} + K,$$

mithin

$$V_{\beta_1} - V_{\alpha_1} = V_{\beta_2} - V_{\alpha_2}.$$

Und hieraus folgt, dass die beiden in (3) und (4) angegebenen Integraltheile entgegengesetzte Werthe besitzen. Gleiches wird offenbar für je zwei andere einander gegenüber liegende Linienelemente von σ_1 und σ_2 gelten. Und es werden daher die in (2) angegebenen Integrale

$$\int\limits_{\sigma_1} U\,dV \quad \text{und} \quad \int\limits_{\sigma_2} U\,dV$$

ebenfalls einander entgegengesetzt sein. Daraus aber folgt, dass

$$J = 0 \tag{5}$$

ist.

Nun ist $f = U + iV$ eine von $x + iy$ abhängende Function, welche der gemachten Voraussetzung zufolge innerhalb der Fläche $\mathfrak{R}'$ allenthalben eindeutig und stetig ist. Zugleich ist, wie wir so eben gefunden haben, das in positiver Richtung um den Rand von $\mathfrak{R}'$ herumerstreckte Integral

$$\int\limits_{\mathfrak{R}'} U\,dV$$

gleich Null. Demnach muss f zufolge des vorhergehenden Satzes auf der Fläche $\mathfrak{R}'$ allenthalben constant sein. Findet aber solches auf $\mathfrak{R}'$ statt, so findet es, wie augenblicklich klar ist, auf $\mathfrak{R}$ ebenfalls statt.

Wir können das hiermit erhaltene Resultat leicht auf den Fall übertragen, dass auf der Riemann'schen Kugelfläche nicht eine Linie σ, sondern mehrere derartige Linien gegeben sind und gelangen dann zu folgendem Satz:

*Es sei $\mathfrak{R}$ eine beliebig gegebene Riemann'sche Kugelfläche, und es seien $\sigma, \sigma', \sigma'', \ldots$ irgend welche auf $\mathfrak{R}$ gezogene, in sich zurücklaufende Linien, durch welche die Fläche $\mathfrak{R}$ nicht in getrennte Stücke zerfällt.**)

Ist nun von einer von $x + iy$ abhängenden Function bekannt, dass sie auf $\mathfrak{R}$ allenthalben eindeutig, und mit Ausnahme der Linien $\sigma, \sigma', \sigma'', \ldots$ daselbst auch überall stetig ist, und ist ferner bekannt, dass diese Function längs jeder der Linien $\sigma, \sigma', \sigma'', \ldots$ immer nur eine constante und rein imaginäre Werthdifferenz besitzen kann; so ist die Function eine Constante.

Ebenso verhält es sich auch dann, wenn von den in $\sigma, \sigma', \sigma'', \ldots$ möglicherweise vorhandenen constanten Werthdifferenzen bekannt ist, dass sie nicht rein imaginär, sondern dass sie sämmtlich reell sind.

Der letzte Theil dieses Satzes ist eine unmittelbare Folge des ersteren. Stellt nämlich φ eine von $x + iy$ abhängende Function vor, welche in jeder der Linien $\sigma, \sigma', \sigma'', \ldots$ mit einer reellen Werthdifferenz behaftet sein kann, so wird

$$f = i \,.\, \varphi$$

eine Function sein, welche in jeder der genannten Linien immer nur eine rein imaginäre Werthdifferenz besitzen kann. Demnach wird sich, ebenso wie früher, vorausgesetzt dass die übrigen damals gestellten Bedingungen erfüllt sind, nachweisen lassen, dass die Function

$$f = i\varphi$$

eine Constante ist, also nachweisen lassen, dass φ selber ebenfalls eine Constante ist.

Ausserdem würde noch zu bemerken sein, dass der hier aufgestellte Satz als eine Verallgemeinerung eines früher (S. 275) gefundenen Satzes angesehen werden kann.

---

*) Dass die Fläche $\mathfrak{R}$ durch die Linien $\sigma, \sigma', \sigma'', \ldots$ nicht in getrennte Stücke zerfallen soll, ist eine unwesentliche Voraussetzung. Man übersieht leicht, dass der Satz auch dann noch gültig sein wird, wenn das Gegentheil stattfindet.

Siebenter Abschnitt. Es wird gezeigt, dass eine von $x + iy$ abhängende Function, die auf einer Riemann'schen Kugelfläche überall eindeutig, und mit Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig ist, eine algebraische Function von $x + iy$ sein muss.

Alle Ergebnisse, zu welchen wir bei der Riemann'schen Kugelfläche gelangt sind, werden natürlich für die gewöhnliche einblättrige Kugelfläche ebenfalls Gültigkeit besitzen; denn diese ist ja nur ein specieller Fall von jener.

Es sei $\mathfrak{K}$ eine gewöhnliche einblättrige Kugelfläche, und f eine von $x + iy$ oder z abhängende Function, welche auf $\mathfrak{K}$ überall eindeutig und mit Ausnahme einzelner Pole überall stetig ist. Die Ordnungszahlen von f werden alsdann in den Nullpuncten durch positive, in den Polen durch negative ganze Zahlen, und in allen übrigen Puncten der Fläche durch Null dargestellt sein; und gleichzeitig wird die Summe sämmtlicher Ordnungszahlen gleich Null sein (S. 269). Wir bezeichnen diese Zahlen in den Puncten $z = c_1$, $z = c_2$, ... $z = c_\varkappa$ und $z = \infty$ mit μ_1, μ_2, ... $\mu_\varkappa$ und M, und nehmen an, dass sie in allen übrigen Puncten der Fläche $\mathfrak{K}$ gleich 0 sind; dann wird also

$$(1)\qquad \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_\varkappa + M = 0,$$

mithin

$$(2)\qquad M = -(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_\varkappa)$$

sein. Wir stellen uns die Aufgabe, die Beschaffenheit dieser Function f näher zu ergründen.

Es lässt sich zunächst eine Function bilden, die alle Eigenschaften, welche von f angegeben sind, ebenfalls besitzt; das ist die Function:

$$(3)\qquad \varphi = (z - c_1)^{\mu_1} \cdot (z - c_2)^{\mu_2} \ldots . (z - c_\varkappa)^{\mu_\varkappa}.$$

Diese ist nämlich eine rationale Function von z, folglich, wie aus früheren Untersuchungen (S. 139) hervorgeht, auf der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ überall eindeutig, und mit Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig. Ihre Ordnungszahl ist auf der Fläche $\mathfrak{K}$, mit Ausnahme der Puncte c_1, c_2, ... $c_\varkappa$ und möglicherweise auch mit Ausnahme des Punctes $z = \infty$, überall gleich 0. In den Puncten c_1, c_2, ... $c_\varkappa$ besitzt sie, wie sich aus einem kürzlich gefundenen Satz (Seite 260) ergiebt, die Ordnungszahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_\varkappa$; und ferner wird, falls wir die im Puncte $z = \infty$ vorhandene Ordnungszahl mit M' bezeichnen,

$$(4) \qquad \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_\varkappa + M' = 0,\text{*)}$$

also mit Rücksicht auf (1)

$$(5) \qquad M' = M$$

sein.

Wir sehen also, dass die auf der Fläche $\mathfrak{K}$ allenthalben eindeutigen und mit Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetigen Functionen

$$f \quad \text{und} \quad \varphi$$

in ihren Ordnungszahlen völlig mit einander übereinstimmen. Sie können demnach (vergl. S. 276) nur durch einen constanten Factor von einander verschieden sein. Bezeichnen wir diesen mit K, so haben wir

$$(6) \qquad f = K \,.\, \varphi,$$

d. i.

$$(7) \qquad f = K \,.\, (z - c_1)^{\mu_1} \,.\, (z - c_2)^{\mu_2} \ldots . (z - c_\varkappa)^{\mu_\varkappa}.$$

Die Function f ist demnach eine rationale Function; folglich:

Ist eine von $x + iy$ oder z abhängende Function f auf der gewöhnlichen einblättrigen Kugelfläche überall eindeutig, und mit Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig, so wird sie jederzeit auf rationale Weise von z abhängen.

Diese zwischen f und z vorhandene rationale Abhängigkeit kann, sobald sämmtliche Ordnungszahlen von f bekannt sind, augenblicklich angegeben werden. Besitzt nämlich f in den Puncten $z = c_1$, $z = c_2$, $\ldots$ $z = c_\varkappa$ und $z = \infty$ die Ordnungszahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_\varkappa$ und M, in allen übrigen Puncten der Kugelfläche aber die Ordnungszahl 0, so wird

$$f = K \,.\, (z - c_1)^{\mu_1} \,.\, (z - c_2)^{\mu_2} \ldots . (z - c_\varkappa)^{\mu_\varkappa}$$

sein, wo K einen constanten Factor vorstellt. Zugleich wird zwischen den Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_\varkappa$, M folgende Relation stattfinden:

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_\varkappa + M = 0;$$

so dass es also von der jedesmaligen Beschaffenheit der Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_\varkappa$ abhängt, ob M positiv, negativ oder Null ist.

---

*) Diese Gleichung folgt wiederum aus dem schon vorhin citirtem Satz S. 269, 270.

Wir haben diesen Satz, oder wenigstens einen Theil desselben, schon früher (S. 161) kennen gelernt. Dass wir denselben hier von Neuem behandelt, von Neuem bewiesen haben, geschah, um denselben mit anderen allgemeineren Untersuchungen, zu denen wir jetzt übergehen, in Zusammenhang zu bringen.

Es sei $\mathfrak{R}$ eine beliebig gegebene Riemann'sche Kugelfläche und f eine von $x + iy$ oder z abhängende Function, welche auf $\mathfrak{R}$ allenthalben eindeutig, und mit Ausnahme einzelner Pole daselbst auch allenthalben stetig ist.

Ist μ die Ordnungszahl, welche die Function $f(z)$ auf der Fläche $\mathfrak{R}$ in irgend einem Puncte $z = c$ besitzt, so wird im Bereich dieses Punctes eine der beiden Formeln gelten (S. 252):

$$(1)\qquad \begin{cases} f(z) = (z-c)^{\frac{\mu}{m}} \,.\, E(z), \\[2ex] f(z) = \left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{c}\right)^{\frac{\mu}{m}} \,.\, E'(z). \end{cases}$$

Hier stellt m die Anzahl der Blätter vor, welche in dem betrachteten Puncte $z = c$ mit einander zusammenhängen; während andererseits $E(z)$ und $E'(z)$ zwei Functionen bezeichnen, die im Bereiche dieses Punctes allenthalben stetig und nullfrei sind. Das Bereich des Punctes wird, falls m gleich 1 ist, durch eine kleine einblättrige Fläche, falls aber m grösser als 1 ist, durch eine kleine m blättrige Windungsfläche dargestellt sein.

Sind

$$\begin{gathered} f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots f_m(z), \\ E_1(z),\ E_2(z),\ \ldots E_m(z), \\ E_1'(z),\ E_2'(z),\ \ldots E_m'(z) \end{gathered}$$

die Werthe, welche die Functionen $f(z)$, $E(z)$, $E'(z)$ für ein und dasselbe z in den über einander liegenden Blättern der eben genannten Windungsfläche besitzen, so wird, zufolge (1), eine der beiden Formeln gelten:

$$(2)\ \begin{cases} f_1(z) \cdot f_2(z) \ldots f_m(z) = (z-c)^{\mu} \,.\, E_1(z) \,.\, E_2(z) \ldots E_m(z), \\ f_1(z) \cdot f_2(z) \ldots f_m(z) = \left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{c}\right)^{\mu} \,.\, E_1'(z) \,.\, E_2'(z) \ldots E_m'(z). \end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{gathered} f_1(z) \,.\, f_2(z) \ \ldots\ f_m(z) = \varphi(z), \\ E_1(z) \,.\, E_2(z) \ \ldots\ E_m(z) = \eta(z), \\ E_1'(z) \,.\, E_2'(z) \ \ldots\ E_m'(z) = \eta'(z), \end{gathered}$$

so verwandeln sich diese Formeln in

$$(3)\qquad \begin{cases} \varphi(z) = (z-c)^{\mu} \cdot \eta(z), \\ \varphi(z) = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{c}\right)^{\mu} \cdot \eta'(z); \end{cases}$$

die Functionen $\eta(z)$ und $\eta'(z)$ sind hier offenbar, ebenso wie $E(z)$ und $E'(z)$, innerhalb der kleinen m blättrigen Windungsfläche, durch welche das Bereich des Punctes $z = c$ repräsentirt wird, allenthalben stetig und nullfrei.

Wir wollen annehmen, durch den gegebenen Werth $z = c$ würden auf unserer Riemann'schen Kugelfläche, nicht ein Punct, sondern mehrere Puncte bestimmt; diese Puncte seien $p_1, p_2, \ldots p_\pi$; die Anzahl der Blätter, welche in jedem dieser Puncte mit einander zusammenhängen, sei in p_1 gleich m_1, in p_2 gleich m_2, u. s. w., endlich in p_π gleich m_π. Wir denken uns einen Schnitt σ ausgeführt, welcher sämmtliche Blätter der Fläche $\mathfrak{R}$ durchschneidet, und um die über einander liegenden Puncte $p_1, p_2, \ldots p_\pi$ in hinreichend kleiner Entfernung, etwa kreisförmig, herumläuft. Innerhalb eines solchen Schnittes werden π von einander völlig getrennte kleine Windungsflächen liegen, welche als die Bereiche der Puncte $p_1, p_2, \ldots p_\pi$ angesehen werden können, und von denen die erste m_1 blättrig, die zweite m_2 blättrig u. s. w., endlich die letzte m_π blättrig ist. Auf jede dieser Windungsflächen werden die Formeln (3) anwendbar sein.

Ist also $\varphi_1(z)$ das Product derjenigen Werthe, welche die Function $f(z)$ für ein und dasselbe z in den m_1 Blättern der ersten Windungsfläche besitzt, ferner $\varphi_2(z)$ das Product derjenigen Werthe, welche jene Function für eben dasselbe z in den m_2 Blättern der zweiten Windungsfläche besitzt u. s. w., endlich $\varphi_\pi(z)$ das Product der Werthe, welche die Function, wiederum für eben dasselbe z, in den m_π Blättern der letzten Windungsfläche besitzt, und sind gleichzeitig $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_\pi$ die der Function in den Puncten $p_1, p_2, \ldots p_\pi$ zugehörigen Ordnungszahlen, so werden je nach Umständen entweder die Formeln:

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= (z-c)^{\mu_1} \cdot \eta_1(z), \\ \varphi_2(z) &= (z-c)^{\mu_2} \cdot \eta_2(z), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_\pi(z) &= (z-c)^{\mu_\pi} \cdot \eta_\pi(z), \end{aligned}$$

oder die Formeln:

$$\varphi_1(z) = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{c}\right)^{\mu_1} \cdot \eta_1'(z),$$

$$\varphi_2(z) = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{c}\right)^{\mu_2} \cdot \eta_2'(z),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_\pi(z) = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{c}\right)^{\mu_\pi} \cdot \eta_\pi'(z)$$

gelten, wo $\eta_1(z), \eta_2(z), \ldots \eta_\pi(z), \eta_1'(z), \eta_2'(z), \ldots \eta_\pi'(z)$ Functionen vorstellen, die innerhalb des Schnittes σ allenthalben stetig und nullfrei sind. Multiplicirt man diese Formeln mit einander und bezeichnet das Product

$$\varphi_1(z) \cdot \varphi_2(z) \ldots \varphi_\pi(z),$$

d. i. das Product derjenigen Werthe, welche die Function $f(z)$ für ein und dasselbe z in sämmtlichen Blättern der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$ besitzt, mit

$$\Phi(z),$$

so ergiebt sich, dass innerhalb des Schnittes σ jederzeit eine der beiden Formeln:

$$(4) \qquad \begin{aligned} \Phi(z) &= (z - c)^{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_\pi} \cdot H(z), \\ \Phi(z) &= \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{c}\right)^{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_\pi} \cdot H'(z) \end{aligned}$$

gelten muss. Hier ist

$$H(z) = \eta_1(z) \cdot \eta_2(z) \ldots \eta_\pi(z),$$
$$H'(z) = \eta_1'(z) \cdot \eta_2'(z) \ldots \eta_\pi'(z);$$

und es sind also $H(z)$, $H'(z)$ zwei Functionen, die innerhalb des Schnittes σ allenthalben stetig und nullfrei bleiben.

Für jedwedes gegebene z besitzt die Function $f(z)$ mehrere, nämlich ebenso viele Werthe, als in der Fläche $\mathfrak{R}$ über einander liegende Puncte vorhanden sind. Das Product all' dieser Werthe ist $\Phi(z)$; und $\Phi(z)$ wird demnach für jedes gegebene z immer nur einen Werth besitzen. Gleiches gilt, da $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_\pi$ Ordnungszahlen, mithin jederzeit ganze Zahlen sind, auch von den Functionen:

$$(z - c)^{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_\pi} \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{c}\right)^{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_\pi}.$$

Und Gleiches muss daher zufolge der Formeln (4) auch von den Functionen $H(z)$ und $H'(z)$ gelten.

Wir denken uns neben der gegebenen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ noch eine gewöhnliche einblättrige Kugelfläche $\mathfrak{K}$. Mit den bei $z = c$ über einander liegenden Puncten $p_1, p_2, \ldots p_\pi$ wird auf der Fläche $\mathfrak{K}$ ein gewisser Punct correspondiren, welcher mit p bezeichnet werden mag; in diesem Puncte p wird ebenfalls $z = c$ sein. Mit denjenigen Puncten ferner, die auf der Fläche $\mathfrak{R}$ innerhalb des Schnittes σ liegen, werden auf der Fläche $\mathfrak{K}$ Puncte correspondiren, die zusammengenommen ein kleines um p herumliegendes Flächenstück bilden, die also zusammengenommen als das Bereich dieses Punctes p angesehen werden können. Die Formeln (4) bezogen sich auf denjenigen Theil der Fläche $\mathfrak{R}$, welcher sich innerhalb des Schnittes σ befindet. Verpflanzen wir nun die Formeln (4) nach der Kugelfläche $\mathfrak{K}$, also nach dem Bereich des eben genannten Punctes p hin, so werden die in jenen Formeln enthaltenen Functionen, weil sie für jedes gegebene z immer nur einen Werth haben, innerhalb dieses Bereiches überall eindeutig sein.

Die Function $\Phi(z)$ ist demnach auf der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ im Bereiche des bei $z = c$ liegenden Punctes p überall eindeutig, und innerhalb dieses Bereiches darstellbar durch eine der beiden Formeln:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \Phi(z) &= (z - c)^{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_\pi} . H(z), \\ \Phi(z) &= \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{c}\right)^{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_\pi} . H'(z); \end{aligned}$$

wo

$$H(z) \text{ und } H'(z),$$

folglich auch

$$\frac{1}{H(z)} \text{ und } \frac{1}{H'(z)}$$

Functionen sind, die im Bereiche jenes Punctes p allenthalben eindeutig, stetig und nullfrei bleiben.

Daraus folgt unmittelbar, dass innerhalb des eben genannten Bereiches jederzeit entweder $\Phi(z)$ selber oder wenigstens $\frac{1}{\Phi(z)}$ stetig ist; und ferner — mit Rücksicht auf einen kürzlich gefundenen Satz (S. 260) —, dass $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_\pi$

die Ordnungszahl vorstellt, welche die Function $\Phi(z)$ auf der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ im Puncte $z = c$ oder p besitzt.

Der Werth $z = c$ war ein beliebig gewählter. Die Resultate, zu welchen wir hier gelangt sind, gelten demnach nicht nur für einen, sondern für jeden beliebigen Punct der Kugelfläche $\mathfrak{K}$. Die Function $\Phi(z)$ wird demnach auf $\mathfrak{K}$ überall eindeutig sein, und im Bereiche eines jedweden zu $\mathfrak{K}$ gehörigen Punctes wird immer entweder $\Phi(z)$ selber oder wenigstens $\frac{1}{\Phi(z)}$ stetig sein. Es ist daher $\Phi(z)$ eine Function, welche auf $\mathfrak{K}$ überall eindeutig und mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig ist. Eine derartige Function ist aber zufolge des vorhergehenden Satzes jederzeit eine rationale Function von z. Somit gelangen wir zu folgenden Sätzen:

Ist f eine von $x + iy$ oder z abhängende Function, welche auf irgend einer n blättrigen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ überall eindeutig und mit Ausnahme einzelner Pole überall stetig ist, und bezeichnet man die Werthe, welche diese Function in n über einander liegenden Puncten von $\mathfrak{R}$ besitzt, mit $f_1, f_2, \ldots f_n$, so wird das Product

$$\Phi = f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n$$

eine rationale Function von z sein, nämlich eine Function sein, die bei ihrer Ausbreitung auf der gewöhnlichen einblättrigen Kugelfläche $\mathfrak{K}$ überall eindeutig und mit Ausnahme einzelner Pole auch überall stetig ist.

Die Ordnungszahl, welche Φ in irgend einem zur Fläche $\mathfrak{K}$ gehörigen Punct $z = c$ hat, ist jederzeit gleich der Summe aller derjenigen Ordnungszahlen, welche die Function f auf der Fläche $\mathfrak{R}$ in sämmtlichen bei $z = c$ über einander liegenden Puncten besitzt.

Wir beschäftigen uns mit der hier betrachteten Function f noch weiter. Da f auf der gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$ überall eindeutig und mit Ausnahme einzelner Pole überall stetig ist, so gilt, falls wir unter $C', C'', \ldots C^{(n)}$ irgend welche Constanten verstehen, Gleiches auch von den Functionen

$$\begin{gathered} f + C', \\ f + C'', \\ \cdots\cdots \\ f + C^{(n)}. \end{gathered}$$

Bilden wir daher die Producte:

$$(6) \qquad \begin{cases} \Phi' = (f_1 + C')\,(f_2' + C') \;\ldots\; (f_n + C'), \\ \Phi'' = (f_1 + C'')\,(f_2 + C'') \;\ldots\; (f_n + C''), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \Phi^{(n)} = (f_1 + C^{(n)})\,(f_2 + C^{(n)}) \ldots (f_n + C^{(n)}), \end{cases}$$

so werden Φ', Φ'', ... $\Phi^{(n)}$, zufolge des eben erhaltenen Satzes, Functionen sein, die sämmtlich auf rationale Weise von z abhängen. Die rechten Seiten der Formeln (6) lassen sich in folgender Weise schreiben:

$$C^n + C^{n-1}(f_1 + f_2 + \ldots + f_n) + C^{n-2}(f_1 f_2 + \ldots) + \ldots + (f_1 \cdot f_2 \ldots f_n).$$

Wir können demnach jene Formeln in Bezug auf die n Grössen

$$\begin{aligned} &f_1 + f_2 + \ldots + f_n, \\ &f_1 f_2 + f_1 f_3 + \ldots f_{n-1} f_n, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &f_1 f_2 \ldots f_n \end{aligned}$$

auflösen, und werden alsdann für jede dieser n Grössen einen Werth erhalten, der — ebenso wie Φ', Φ'', ... $\Phi^{(n)}$ — auf rationale Weise von z abhängt. Bezeichnen wir aber die in solcher Art sich ergebenden Werthe der Reihe nach mit F_1, F_2, ... F_n, so sind bekanntlich f_1, f_2, ... f_n die Wurzeln folgender Gleichung n^{ten} Grades:

$$f^n - F_1 f^{n-1} + F_2 f^{n-2} - \ldots\ldots + (-1)^n F_n = 0.$$

Somit gelangen wir zu folgendem Satz:

Eine von $x + iy$ oder z abhängende Function, welche auf irgend einer Riemann'schen Kugelfläche überall eindeutig und mit Ausnahme einzelner Pole überall stetig ist, wird jederzeit eine algebraische Function von z sein.

Sie wird nämlich, falls jene Fläche eine n blättrige ist, jederzeit die Wurzel einer Gleichung n^{ten} Grades sein, deren Coefficienten rationale Functionen von z sind.

Achte Vorlesung.

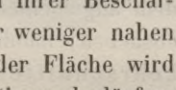
Verwandlung einer Riemann'schen Kugelfläche durch geeignete Schnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche.

Erster Abschnitt. Eintheilung sämmtlicher Flächen in einfach zusammenhängende und in mehrfach zusammenhängende. Definition der Querschnitte und Rückkehrschnitte.

Wir werden uns hier mit Flächen beschäftigen von ganz beliebiger Gestalt. Als Fläche einfachster Art betrachten wir dabei, ebenso wie früher, die Elementarfläche, d. i. eine ebene einblättrige Fläche, welche nur eine Randcurve besitzt, und welche mit all' ihren Puncten in der Endlichkeit liegt.

Eine beliebig gegebene Fläche wird, je nach ihrer Beschaffenheit, zu der Elementarfläche in einer mehr oder weniger nahen Beziehung stehen. Je nach der Beschaffenheit der Fläche wird es nämlich mehr oder weniger verwickelter Operationen bedürfen, um dieselbe in eine Elementarfläche zu verwandeln. Wir wollen solches zunächst an einigen einfachen Beispielen erläutern.

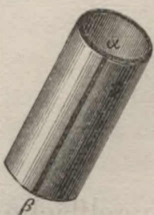
Fig. 64.



Wir betrachten zunächst eine glockenförmige Fläche, z. B. die in Fig. 64 abgebildete Kugelcalotte. Um diese in eine Elementarfläche zu verwandeln, bedarf es nur gewisser Biegungen und Dehnungen. Die Fläche wird sich also, um einen früheren Ausdruck zu gebrauchen, durch stetige Umformung zu einer Elementarfläche umgestalten lassen.

Anders verhält es sich bei der in Fig. 65 abgebildeten röhrenförmigen Fläche. Durch stetige Umformung allein wird es uns niemals glücken, diese Fläche in eine Elementarfläche zu verwandeln. Wollen wir eine solche Umgestaltung zu Wege

Fig. 65.



bringen, so werden wir zuvörderst einen etwa von α nach β fortlaufenden Schnitt ausführen müssen; sodann erst wird es möglich sein, dieselbe durch stetige Umformung in eine Elementarfläche zu verwandeln.

Noch complicirter ist das Verfahren bei der in Fig. 66 abgebildeten verzweigten röhrenförmigen Fläche. Denn um diese in eine Elementarfläche zu verwandeln, sind ausser der stetigen Umformung offenbar noch zwei Schnitte $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ erforderlich.

Fig. 66.

Wir sehen aus diesen Beispielen, dass es möglich sein wird, sämmtliche überhaupt denkbare ebene oder krumme Flächen zu classificiren nach denjenigen Beziehungen, in welchen sie zur Elementarfläche stehen; dass es nämlich möglich sein wird, sie zu classificiren nach denjenigen Operationen, die zu ihrer Verwandlung in eine Elementarfläche erforderlich sind.

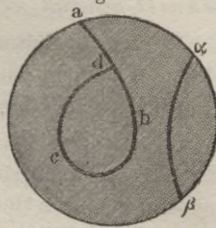
Diese Operationen bestehen in der stetigen Umformung und in der Ausführung von Schnitten. Um aber bei jener Classification mit Genauigkeit zu verfahren, müssen wir zunächst aus dem allgemeinen Begriff des Schnittes zwei engere Begriffe herausheben; nämlich den des Querschnittes und den des Rückkehrschnittes.

Definition. Ein Schnitt, welcher in irgend einem Randpunct der Fläche beginnt, von hier aus in ununterbrochenem Zuge bis zu irgend einem andern Randpunct fortläuft, dazwischen aber den Rand der Fläche weder berührt, noch überschreitet, soll ein Querschnitt genannt werden.

Nach Ausführung eines Querschnittes sind die beiden Ufer desselben als neue Randgebiete der Fläche anzusehen. Ja es sind die auf diese Weise entstehenden neuen Randgebiete nicht erst nach Ausführung des Schnittes, sondern auch schon während der weiteren Fortführung desselben als solche zu betrachten. Daraus folgt unter Anderm, dass ein Querschnitt in einem Punct seines früheren Laufes endigen kann; und ferner, dass ein Querschnitt bei seiner weitern Fortführung sich selber niemals durchkreuzen darf.

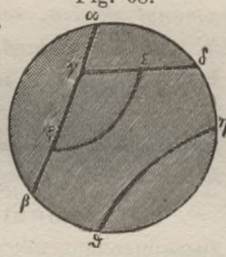
So wird z. B., wenn wir eine Kreisfläche betrachten, der Schnitt $\alpha\beta$ (Fig. 67) ein Querschnitt sein; ebenso aber auch der Schnitt *a b c d*. Jeder nimmt in einem Randpuncte seinen Anfang. Während aber der eine sein Ende in einem zweiten Randpunct der Fläche erreicht, endigt der andere in einem Puncte seines früheren Laufes.

Fig. 67.



Ist ein Querschnitt bereits ausgeführt, und soll nun ein zweiter Querschnitt gezogen werden, so ist wiederum zu beachten, dass die Ufer des schon vorhandenen Schnittes bei Ausführung des zweiten als Randgebiete der Fläche anzusehen sind. Der zweite Querschnitt wird also nach Belieben in einem ursprünglichen Randpuncte der Fläche, eben so gut aber auch in einem Uferpunct des schon vorhandenen Querschnittes seinen Anfang nehmen können. Aehnliches gilt für den Endpunct des Querschnittes. Und Aehnliches gilt natürlich auch für einen dritten, vierten u. s. w. Querschnitt.

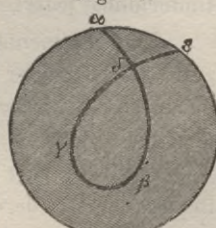
Fig. 68.



So wird z. B. in der von uns betrachteten Kreisfläche $\alpha\,\beta$ (Fig. 68) ein Querschnitt sein. Sodann wird $\gamma\delta$ ein zweiter, $\varepsilon\zeta$ ein dritter und $\eta\vartheta$ ein vierter Querschnitt sein u. s. w.

Ferner wird der Schnitt $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon$ (Fig. 69) nicht als ein Querschnitt, sondern als ein Complex von zwei Querschnitten anzusehen sein. Der eine von diesen beiden läuft — ebenso wie der in Fig. 67 betrachtete — von α über β und γ bis nach δ hin, und der andere geht von δ nach ε.

Fig. 69.



Des bequemeren Ausdrucks willen wird es zweckmässig sein, ausser den Querschnitten auch noch eine gewisse andere Gattung von Schnitten, nämlich die der Rückkehrschnitte einzuführen. Diese sollen folgendermassen definirt sein:

Definition. Ein in sich zurücklaufender Schnitt, welcher den

Rand der Fläche nirgends berührt oder überschreitet, und welcher sich selber nirgends durchkreuzt, soll in Zukunft ein Rückkehrschnitt genannt werden.

Nach Ausführung eines Rückkehrschnittes sollen die beiden Ufer desselben wiederum als Randgebiete der Fläche angesehen werden. Wir können uns demnach den Schnitt $a\ b\ c\ d$ (Fig. 67), wenn wir wollen, auch so entstanden denken, dass in der gegebenen Kreisfläche zuerst ein Rückkehrschnitt $b\ c\ d\ b$, und sodann noch ein Querschnitt $d\ a$ ausgeführt ist. Desgleichen werden wir (Fig. 69) den Schnitt $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon$ als zusammengesetzt ansehen können aus einem zuerst ausgeführten Rückkehrschnitt $\beta\ \gamma\ \delta\ \beta$, und aus zwei sodann ausgeführten Querschnitten $\delta\ \alpha$ und $\delta\ \varepsilon$.

Wir bringen nun alle überhaupt denkbaren Flächen zunächst in zwei Abtheilungen; zur Bezeichnung derselben bedienen wir uns der von Riemann eingeführten Namen: einfach und mehrfach zusammenhängend.

Definition. Eine Fläche soll einfach zusammenhängend genannt werden, sobald sie blos durch stetige Umformung in eine Elementarfläche verwandelt werden kann. Eine Fläche hingegen, bei der zu solcher Umwandlung ausser der stetigen Umformung auch noch die Ausführung irgend welcher Schnitte erforderlich ist, soll eine mehrfach zusammenhängende Fläche heissen.

Die Elementarfläche selber ist demnach eine einfach zusammenhängende Fläche. Gleiches wird gelten von einer Kugelcalotte, und gleiches, um noch ein drittes Beispiel anzuführen, von jeder Windungsfläche; denn eine Windungsfläche kann, wie wir früher (Seite 214 u. 218) gesehen haben, durch stetige Umformung jederzeit in eine Elementarfläche verwandelt werden.

Eine Elementarfläche zerfällt durch jeden Querschnitt in zwei von einander völlig getrennte Stücke; ebenso auch durch jeden Rückkehrschnitt. Von diesen beiden Stücken ist, je nachdem der Schnitt ein Quer- oder ein Rückkehrschnitt ist, entweder jedes, oder wenigstens eines eine Elementarfläche. Diese Bemerkungen, deren Richtigkeit man augenblicklich übersieht, führen nun zu bemerkenswerthen Folgerungen.

Es sei $\mathfrak{A}$ eine beliebig gegebene einfach zusammenhängende Fläche, und gleichzeitig sei $\mathfrak{A}'$ diejenige Elementarfläche, in welche sich $\mathfrak{A}$ durch stetige Umformung verwandelt*). Ist nun q irgend ein Querschnitt der Fläche $\mathfrak{A}$, und q' der correspondirende Schnitt auf $\mathfrak{A}'$, so wird q' ebenfalls ein Querschnitt sein. Die Fläche $\mathfrak{A}'$ ist aber eine Elementarfläche und wird also durch jeden Querschnitt in zwei von einander völlig getrennte Stücke zerlegt. Demnach wird $\mathfrak{A}'$ durch q', und folglich auch $\mathfrak{A}$ durch q in zwei von einander völlig getrennte Stücke zerfallen.

Wir bezeichnen diese beiden Stücke bei der ursprünglichen Fläche $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, und bei der Elementarfläche $\mathfrak{A}'$ mit $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$. Offenbar können alsdann $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ als zwei Flächenstücke angesehen werden, welche sich durch stetige Umformung in $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}'$ verwandeln. Von den beiden Stücken $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}'$ ist aber jedes eine Elementarfläche. Daraus folgt, dass jedes der beiden Stücke $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ein einfach zusammenhängendes ist.

Somit erhalten wir folgende Sätze:

Eine einfach zusammenhängende Fläche zerfällt durch einen Querschnitt immer in zwei von einander völlig getrennte Stücke; von diesen beiden Stücken ist jedes ein einfach zusammenhängendes. Durch ν auf einander folgende Querschnitte wird demnach eine einfach zusammenhängende Fläche in $(\nu + 1)$ getrennte Stücke zerfallen, von welchen wiederum jedes ein einfach zusammenhängendes ist.

Wiederum sei $\mathfrak{A}$ eine beliebig gegebene einfach zusammenhängende Fläche, und $\mathfrak{A}'$ die daraus durch stetige Umformung entstehende Elementarfläche. Ist nun s irgend ein Rückkehrschnitt der Fläche $\mathfrak{A}$, so wird der auf $\mathfrak{A}'$ gezogene correspondirende Schnitt s' ebenfalls ein Rückkehrschnitt sein. Demnach wird $\mathfrak{A}$ durch s, ebenso wie $\mathfrak{A}'$ durch s', in zwei von einander getrennte Stücke zerfallen. Von den beiden Stücken, in welche $\mathfrak{A}'$ durch s' zerlegt wird, ist das eine eine Elementarfläche. Demnach muss von den beiden Stücken, in welche $\mathfrak{A}$ durch s getheilt wird, das eine ein einfach zusammenhängendes sein.

Somit ergiebt sich Folgendes:

Eine einfach zusammenhängende Fläche zerfällt durch einen Rückkehrschnitt immer in zwei von einander völlig getrennte Stücke;

---

*) Man vergleiche, was früher in Betreff der stetigen Umformung aus einander gesetzt ist (Seite 205—207).

von diesen beiden Stücken ist jederzeit das e i n e *ein einfach zusammenhängendes.*

Eine Elementarfläche besitzt ihrer Definition zufolge immer nur e i n e Randcurve. Gleiches muss demnach auch von jeder Fläche gelten, die aus einer Elementarfläche durch stetige Umformung entstanden ist. Somit erhalten wir folgenden dritten Satz.

Eine einfach zusammenhängende Fläche besitzt immer nur e i n e *Randcurve.*

Zweiter Abschnitt. Untersuchung eines beliebig gegebenen Flächensystemes; die Grundzahl eines solchen Systemes. Eintheilung der mehrfach zusammenhängenden Flächen in zweifach, dreifach, vierfach, u. s. w. zusammenhängende.

Es sei $\mathfrak{S}$ ein aus beliebig vielen Flächenstücken bestehendes System; diese Flächenstücke mögen beliebig im Raume vertheilt sein, und jedes von ihnen mag eine ganz beliebige Gestalt besitzen. Wir wollen uns denken, dieses System $\mathfrak{S}$ könne durch gewisse ν' Querschnitte — sie mögen in ihrer Gesammtheit mit q' bezeichnet werden — in ein System $\mathfrak{S}'$ verwandelt werden, welches aus α' Flächenstücken besteht; und das System $\mathfrak{S}$ könne andererseits durch gewisse ν'' Querschnitte — sie mögen q'' genannt werden — in ein System $\mathfrak{S}''$ verwandelt werden, welches aus α'' Flächenstücken besteht. Ferner wollen wir uns denken, unter den Flächenstücken, aus welchen die Systeme $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{S}''$ bestehen, wäre jedes einzelne ein e i n f a c h z u s a m m e n h ä n g e n d e s. Es fragt sich, ob unter dieser Voraussetzung zwischen den Zahlen ν', α' und ν'', α'' irgend welche Beziehung stattfindet, oder ob dieselben von einander völlig unabhängig sind.

Um näher hierauf einzugehen, wird es nöthig sein, beide Querschnittsysteme, das der q' und das der q'' g l e i c h z e i t i g zu ziehen. Die Anzahl derjenigen Stellen, in welchen, bei einer solchen Superposition beider Schnittsysteme, ein Punct des einen und einer des andern Schnittsystemes gerade über einander liegen, mag χ sein. Und der Einfachheit willen mag zuvörderst angenommen werden, dass unter diesen χ Durchkreuzungspuncten keiner vorhanden ist, der gerade mit einem E n d puncte der Schnitte q' oder q'' zusammenfällt; von den beiden Schnitten q'

und q'', welche einander in einem jener χ Puncte durchkreuzen, wird alsdann jeder durch den andern in zwei Stücke zerlegt werden.

Wir denken uns zuerst die Querschnitte q' gezogen, und hiedurch $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}'$ verwandelt. Ziehen wir jetzt einen der Schnitte q'', so wird ein solcher Schnitt nur dann einen Querschnitt des Flächensystemes $\mathfrak{S}'$ vorstellen, wenn er die schon vorhandenen Schnitte q' nirgends berührt oder überschreitet, andernfalls aber einen Complex von mehreren Querschnitten vorstellen. Es fragt sich nun zunächst, wie gross die Anzahl derjenigen Querschnitte Q'' ist, welche in dem Flächensystem $\mathfrak{S}'$ entstehen, sobald wir darin sämmtliche Schnitte q'' ausführen. Offenbar werden sämmtliche Endpuncte der Q'' zum einen Theil durch die Endpuncte der q'' selber, zum andern Theil durch diejenigen Puncte dargestellt sein, in welchen die q' von den q'' durchkreuzt werden. Die Anzahl des ersten Theiles ist gleich der Anzahl der Endpuncte der q'', d. i. gleich $2\nu''$; die Anzahl des zweiten Theiles muss, da jeder der genannten Durchkreuzungspuncte zwei Endpuncte der Q'' repräsentirt, doppelt so gross als die Anzahl jener Durchkreuzungspuncte, also gleich 2χ sein. Im Ganzen wird daher die Anzahl der Endpuncte der Q'' gleich $2\nu'' + 2\chi$, folglich die Anzahl der Q'' selber gleich

$$\nu'' + \chi$$

sein.

Umgekehrt wird andererseits, wenn wir uns in dem Systeme $\mathfrak{S}$ zuerst die q'' gezogen, und hiedurch $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}''$ verwandelt denken, jeder nunmehr folgende Schnitt q' im Allgemeinen mehrere Querschnitte Q' des Systems $\mathfrak{S}''$ repräsentiren. Die Anzahl dieser Q' wird, wie man sofort übersieht, gleich

$$\nu' + \chi$$

sein.

Es sei A die Anzahl von Flächenstücken, in welche $\mathfrak{S}$ zerfällt, wenn gleichzeitig sowohl sämmtliche Schnitte q' als auch sämmtliche Schnitte q'' ausgeführt werden.

Offenbar kann diese Zahl A als die Anzahl derjenigen Stücke angesehen werden, in welche sich das Flächensystem $\mathfrak{S}'$ durch Ausführung der Querschnitte Q'' verwandelt. Nun besteht das System $\mathfrak{S}'$ der Voraussetzung zufolge aus α' Stücken, von welchen jedes einfach zusammenhängend ist. Es wird daher

— wir müssen den vorhin (Seite 295) gefundenen Satz beachten — dieses System $\mathfrak{S}'$ durch Ausführung der $(\nu'' + \chi)$ Querschnitte Q'' in $\alpha' + \nu'' + \chi$ Stücke zerfällt werden. Somit ergiebt sich:

(1) $$A = \alpha' + \nu'' + \chi.$$

Andererseits kann aber A auch als die Anzahl derjenigen Stücke angesehen werden, in welche das System $\mathfrak{S}''$ durch Ausführung der $(\nu' + \chi)$ Querschnitte Q' zerlegt wird; alsdann ergiebt sich:

(2) $$A = \alpha'' + \nu' + \chi.$$

Aus diesen beiden Formeln (1) und (2) folgt sofort:

$$\alpha' + \nu'' = \alpha'' + \nu',$$

d. i.

(3) $$\nu' - \alpha' = \nu'' - \alpha''.$$

Bei Ableitung dieser Formel wurde die beschränkende Voraussetzung gemacht, dass unter den χ Durchkreuzungspuncten der beiden Schnittsysteme keiner vorhanden ist, welcher gerade mit einem Endpunct der Schnitte zusammenfällt. Sollte diese Voraussetzung nicht erfüllt sein, so wird man es doch durch eine unendlich kleine Verschiebung des einen Schnittsystemes, z. B. des Systems q', leicht dahin bringen können, dass sie in Erfüllung geht. Sobald diese unendlich kleine Verschiebung ausgeführt ist, wird dann die Formel (3)

$$\nu' - \alpha' = \nu'' - \alpha''$$

wiederum gelten. Die Zahlen ν' und α' sind aber offenbar nach der Verschiebung des Systems q' eben dieselben wie vor jener Verschiebung. Daraus folgt, dass die Formel auch schon vor der Verschiebung gültig ist, dass sie also völlig allgemeine Gültigkeit besitzt. Wir erhalten daher folgenden wichtigen Satz:

Denkt man sich ein beliebiges Flächensystem $\mathfrak{S}$ zu verschiedenen Zeiten durch verschieden gewählte Querschnittsysteme zerlegt, und dadurch jedesmal in ein System von lauter einfach zusammenhängenden Flächenstücken verwandelt; so wird die Differenz $(\nu - \alpha)$, um welche die jedesmalige Anzahl ν der Querschnitte grösser als die jedesmalige Anzahl α der resultirenden Flächenstücke ist, in all' diesen Fällen ein und denselben Werth haben. Jene Differenz $(\nu - \alpha)$ ist demnach eine dem gegebenen Flächensystem $\mathfrak{S}$ eigenthümliche unveränderliche Zahl. Gleiches wird daher auch gelten von der Zahl $(\nu - \alpha + 2)$. Diese *letztere soll in Zukunft die* G r u n d z a h l *des Flächensystemes genannt werden.*

Ein beliebig gegebenes Flächensystem $\mathfrak{S}$ verwandle sich, wenn man darin i r g e n d w e l c h e n Q u e r s c h n i t t q ausführt, in ein Flächensystem $\mathfrak{S}'$. Um das ursprüngliche System $\mathfrak{S}$ aber in ein System von lauter e i n f a c h zusammenhängenden Flächenstücken zu verwandeln, mögen nach Ausführung jenes Querschnittes q noch irgend welche ν andere Querschnitte $q_1, q_2, \ldots q_\nu$ erforderlich sein; und gleichzeitig mag α die Anzahl der einfach zusammenhängenden Flächenstücke vorstellen, aus welchen das letztgenannte System besteht.

Alsdann wird also das System $\mathfrak{S}$ im Ganzen durch $\nu + 1$ Querschnitte in ein System von α Flächenstücken verwandelt, unter denen jedes einfach zusammenhängend ist. Und andererseits sehen wir, dass das System $\mathfrak{S}'$ bereits durch ν Querschnitte in ein System von α einfach zusammenhängenden Flächenstücken verwandelt wird. Demnach ist

$$(\nu + 1) - \alpha + 2$$

die Grundzahl von $\mathfrak{S}$, und

$$\nu - \alpha + 2$$

die Grundzahl von $\mathfrak{S}'$; die Grundzahl von $\mathfrak{S}'$ also um 1 kleiner als die von $\mathfrak{S}$. Somit ergiebt sich der Satz:

Die Grundzahl eines Flächensystemes wird durch jeden Querschnitt um 1 *erniedrigt*; *durch ein System von* ν *Querschnitten also um* ν *erniedrigt.*

Fig. 70.

Ein Flächensystem $\mathfrak{S}$ verwandle sich durch i r g e n d w e l c h e n R ü c k k e h r s c h n i t t s in $\mathfrak{S}'$. Ferner sei q ein in dem Systeme $\mathfrak{S}'$ gezogener Querschnitt, und zwar ein Querschnitt, welcher (Fig. 70) in einem Uferpuncte des Rückkehrschnittes s beginnt, und von hier aus nach irgend welchem Randpuncte desjenigen Flächenstückes hinläuft, in welchem sich s befindet. Endlich mag das durch Ausführung von s und q erhaltene Flächensystem mit $\mathfrak{T}$ bezeichnet werden.

Das Flächensystem $\mathfrak{T}$ entsteht aus $\mathfrak{S}'$ durch Ausführung des e i n e n Querschnittes q. Zufolge des vorhergehenden Satzes ist daher d i e G r u n d z a h l v o n $\mathfrak{T}$ u m 1 k l e i n e r a l s d i e v o n $\mathfrak{S}'$.

Andererseits ist zu bemerken, dass die Schnitte q und s zusammengenommen als ein einziger Querschnitt angesehen werden können (vgl. S. 293, Fig. 67); und dass daher $\mathfrak{T}$ als ein Flächensystem angesehen werden kann, welches aus $\mathfrak{S}$ ebenfalls nur durch Ausführung eines einzigen Querschnittes entsteht. Zufolge des vorhergehenden Satzes wird also die Grundzahl von $\mathfrak{T}$ auch um 1 kleiner als die von $\mathfrak{S}$ sein.

Fasst man beide Ergebnisse zusammen, so sieht man sofort, dass die Grundzahlen von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ einander gleich sind, und gelangt also zu folgendem Satz:

Die Grundzahl eines Flächensystems erleidet durch Ausführung eines Rückkehrschnittes keinerlei Aenderung, und erleidet also auch bei Ausführung von beliebig vielen Rückkehrschnitten keine Aenderung.

Die eben gefundenen Sätze sind anwendbar auf jedes beliebige Flächensystem, folglich auch anwendbar auf jede beliebige einzelne Fläche. Wir wollen die Folgerungen ins Auge fassen, zu welchen sie in letzterer Beziehung führen.

Soll eine beliebig gegebene einzelne Fläche durch Querschnitte in irgend welche Anzahl einfach zusammenhängender Flächenstücke, z. B. in 100 solche Flächenstücke zerlegt werden,*) so wird man dabei hinsichtlich der Lage und Gestalt dieser Querschnitte einen weiten Spielraum haben, hinsichtlich ihrer Anzahl aber auf eine ganz bestimmte Zahl angewiesen sein. Denn gelingt es einmal, die gegebene Fläche durch irgend welche ν' Querschnitte in 100 einfach zusammenhängende Flächenstücke zu zerlegen, und gelingt andererseits eine solche Zerlegung der Fläche in 100 einfach zusammenhängende Flächenstücke auch durch Anwendung irgend welcher andern ν'' Querschnitte, so muss zufolge des von uns gefundenen Satzes (S. 298)

$$\nu' - 100 = \nu'' - 100,$$

mithin

$$\nu' = \nu''$$

sein. Eine gegebene Fläche wird sich also auf mannigfaltige Art durch Querschnitte in 100 Stücke zerlegen

*) Unter der Zerlegung einer Fläche in 100 einfach zusammenhängende Flächenstücke ist natürlich eine Zerlegung derselben in 100 einzelne Flächenstücke zu verstehen, von welchen jedes für sich betrachtet einfach zusammenhängend ist.

lassen, von welchen jedes einfach zusammenhängend ist. Die **Anzahl** dieser Querschnitte wird aber stets **ein und dieselbe** sein.

Wir werden demnach alle überhaupt vorhandenen Flächen nach der zu einer solchen Zerlegung erforderlichen Anzahl von Querschnitten classificiren können. Ob wir dabei die stets zu erreichende Anzahl von Stücken auf 100 oder auf irgend welche andere Zahl festsetzen, ist gleichgültig. Wir wollen statt 100 die Zahl 1 nehmen und also sämmtliche überhaupt denkbare Flächen eintheilen:

erstens in die Classe derjenigen, welche sich durch 0 Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandeln, welche also bereits von Hause aus einfach zusammenhängend sind,

zweitens in die Classe derer, welche sich durch 1 Querschnitt in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandeln lassen,

drittens in die Classe derjenigen, bei denen zu solcher Verwandelung 2 Querschnitte erforderlich sind, u. s. w.

Ebenso wie wir nun die Flächen der ersten Classe einfach zusammenhängend genannt haben, ebenso mögen die der folgenden zweifach, die der dritten dreifach zusammenhängend genannt werden, u. s. w.

Lässt sich eine beliebig gegebene Fläche durch irgend welche ν Querschnitte in ein System von α einfach zusammenhängenden Flächenstücken verwandeln, so ist nach unserer Bezeichnung (S. 298)

$$\nu - \alpha + 2$$

die Grundzahl der Fläche. Demnach wird jede einfach zusammenhängende Fläche die Grundzahl:

$$0 - 1 + 2 = 1,$$

jede zweifach zusammenhängende die Grundzahl:

$$1 - 1 + 2 = 2,$$

jede dreifach zusammenhängende die Grundzahl:

$$2 - 1 + 2 = 3$$

besitzen, u. s. w.

Eine Nfach zusammenhängende Fläche ist eine solche, die sich durch $N - 1$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandeln lässt; ihre Grundzahl also gleich

$$(N - 1) - 1 + 2 = N.$$

Wir können uns demnach über die hier aufgestellte Classification folgendermassen aussprechen:

Definition. N fach zusammenhängend soll eine Fläche genannt werden, welche durch $N - 1$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt werden kann.

*Oder was dasselbe ist: N fach zusammenhängend soll eine Fläche genannt werden, welche durch $N - 1$ Querschnitte und durch stetige Umformung in eine Elementarfläche umgestaltet werden kann.**)

Die Grundzahl einer N fach zusammenhängenden Fläche ist jederzeit $= N$; es ist daher einerlei, ob man von einer Fläche sagt, sie sei N fach zusammenhängend, oder ob man sagt, ihre Grundzahl sei $= N$.

Blicken wir auf die zu Anfang dieser Vorlesung erwähnten drei Flächen (Fig. 64—66, S. 291. 292) zurück, so sehen wir, dass die erste derselben bereits von Hause aus einfach zusammenhängend ist; ferner, dass die zweite durch einen einzigen Querschnitt in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt werden kann, dass sie also zweifach zusammenhängend ist; endlich, dass die dritte durch zwei Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche übergeht, dass sie von Hause aus also dreifach zusammenhängend ist.

In einer N fach zusammenhängenden Fläche, also in einer Fläche, deren Grundzahl $= N$ ist, mögen irgend welche ν Querschnitte gezogen werden. Es sind zwei Fälle möglich. Entweder zerfällt die Fläche durch jene Schnitte in mehrere Stücke, oder sie bleibt nach wie vor eine einzige Fläche. Wie dem auch sei, immer wird der früher (S. 299) gefundene Satz anwendbar sein, dass die Grundzahl einer Fläche durch ν Querschnitte um ν vermindert wird. Entsteht also durch unsere ν Querschnitte ein Flächensystem, so wird die Grundzahl dieses Systems $= N - \nu$ sein, und entsteht durch jene Querschnitte eine einzelne Fläche,

---

*) Hat man nämlich die Fläche durch $N - 1$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt, so bedarf es nunmehr nur noch einer stetigen Umformung, um sie in eine Elementarfläche zu verwandeln. Denn eine einfach zusammenhängende Fläche kann unserer Definition (S. 294) zufolge durch stetige Umformung jederzeit einer Elementarfläche umgestaltet werden.

so wird die Grundzahl derselben ebenfalls $= N - \nu$ sein. Wir können demnach folgenden Satz hinstellen:

Führt man in einer N fach zusammenhängenden Fläche irgend welche ν Querschnitte aus, so entsteht, falls keine Zerstückelung eintritt, eine $(N - \nu)$ fach zusammenhängende Fläche. Tritt Zerstückelung ein, so entsteht ein Flächensystem, dessen Grundzahl $= N - \nu$ ist.

Eine N fach zusammenhängende Fläche ist nach unserer Definition eine Fläche, welche durch $N - 1$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt werden kann. Wie nun die $N - 1$ Querschnitte beschaffen sein müssen, damit diese Verwandelung wirklich eintritt, zeigt der eben gefundene Satz. Aus ihm ergiebt sich nämlich, dass die in Rede stehende Verwandelung stets eintritt, sobald nur die $N - 1$ Querschnitte der Art sind, dass durch sie keine Zerstückelung der Fläche herbeigeführt wird.

Es sei $\mathfrak{A}$ eine beliebig gegebene N fach zusammenhängende Fläche, ferner seien $q_1, q_2, \ldots q_{N-1}$ irgend welche die Fläche nicht zerstückelnde Querschnitte, und $\mathfrak{B}$ die durch Ausführung dieser Schnitte entstehende einfach zusammenhängende Fläche.

Wir wollen uns neben $\mathfrak{A}$ noch eine zweite Fläche denken, und zwar eine Fläche, welche aus $\mathfrak{A}$ durch irgend welche stetige Umformung entstanden ist; sie mag $\mathfrak{A}'$ genannt werden. Führen wir in $\mathfrak{A}'$ die mit $q_1, q_2, \ldots q_{N-1}$ correspondirenden Querschnitte aus und bezeichnen wir die neue Gestalt, welche $\mathfrak{A}'$ hierdurch annimmt, mit $\mathfrak{B}'$, so wird, ebenso wie $\mathfrak{A}'$ eine stetige Umformung von $\mathfrak{A}$ ist, ebenso auch $\mathfrak{B}'$ als eine stetige Umformung von $\mathfrak{B}$ angesehen werden können. Die Fläche $\mathfrak{B}$ ist einfach zusammenhängend und kann also durch stetige Umformung in eine Elementarfläche verwandelt werden. Demnach wird die Fläche $\mathfrak{B}'$, weil sie durch stetige Umformung in $\mathfrak{B}$ verwandelt werden kann, durch eine weitere stetige Umformung ebenfalls zu einer Elementarfläche umgestaltet werden. Daraus folgt, dass $\mathfrak{B}'$, ebenso wie $\mathfrak{B}$, einfach zusammenhängend ist.

Wir sehen demnach, dass diejenige Fläche, in welche $\mathfrak{A}'$ durch die darin ausgeführten $N - 1$ Querschnitte übergeht, eine einfach zusammenhängende ist. Daraus folgt (vergl. die Definition S. 302), dass $\mathfrak{A}'$ selber N fach zusammenhängend ist. Somit ergiebt sich der Satz:

Eine N fach zusammenhängende Fläche bleibt, falls man sie einer beliebigen stetigen Umformung unterwirft, nach wie vor N fach zusammenhängend. Oder mit andern Worten: Die Grundzahl einer Fläche erleidet durch stetige Umformung derselben keinerlei Aenderung.

Wir haben früher (S. 300) gesehen, dass die Grundzahl eines Flächen**systems** ungeändert bleibt, wenn man in dem System irgend welche Rückkehrschnitte ausführt. Gleiches wird demnach auch von einer **einzelnen** Fläche gelten. Ist die Grundzahl der gegebenen Fläche $= N$, so wird das aus ihr durch irgend welche Rückkehrschnitte entstehende Flächen**system**, oder die aus ihr durch jene Schnitte entstehende **einzelne** Fläche wiederum die Grundzahl N besitzen. Wir haben daher folgenden Satz:

Führt man in einer N fach zusammenhängenden Fläche irgend welche Rückkehrschnitte aus, so entsteht, falls keine Zerstückelung eintritt, eine ebenfalls N fach zusammenhängende Fläche. Tritt Zerstückelung ein, so entsteht ein Flächensystem, dessen Grundzahl $= N$ ist.

Bei Flächen von complicirter Form ist die wirkliche Ermittelung der Grundzahl einstweilen mit Schwierigkeiten verbunden. Wir werden jedoch bald zu einem Ergebniss gelangen, durch welches die Auffindung jener Zahl äusserst leicht gemacht wird.

Zuvörderst folgende Bemerkung: Kann ein gegebenes Flächensystem durch ν Querschnitte in α einfach zusammenhängende Flächenstücke verwandelt werden, so ist nach unserer Definition (S. 298)

$$\nu - \alpha + 2$$

die Grundzahl des Systems. Besteht daher das System, bereits von Hause aus, aus α einfach zusammenhängenden Flächenstücken, so wird seine Grundzahl gleich

$$0 - \alpha + 2$$

sein. **Die Grundzahl eines Systems, welches aus α einfach zusammenhängenden Flächenstücken besteht, ist also jederzeit $= 2 - \alpha$.***)

*) Der Inhalt dieser Bemerkung lässt sich leicht verallgemeinern. Es sei $\mathfrak{S}$ ein aus α Flächenstücken bestehendes System, und es seien $N_1, N_2, \ldots N_\alpha$ die Grundzahlen der einzelnen Flächenstücke. Dasjenige Flächenstück, dessen Grundzahl $N_\varkappa$ ist, wird sich durch $N_\varkappa - 1$ Querschnitte in ein **einfach** zusammenhängendes Flächenstück verwandeln lassen. Demnach kann das ganze gegebene System $\mathfrak{S}$ durch

$$(N_1 - 1) + (N_2 - 1) + \ldots + (N_\alpha - 1),$$

Es sei nun $\mathfrak{S}$ ein beliebig gegebenes Flächensystem oder auch eine beliebig gegebene einzelne Fläche, ferner sei N die Grundzahl von $\mathfrak{S}$.

Führen wir ν' beliebige Querschnitte aus, so entsteht ein Flächensystem, dessen Grundzahl gleich $N - \nu'$ ist. Lassen wir sodann zu jenen Querschnitten ϱ' Rückkehrschnitte hinzutreten, so entsteht ein Flächensystem, welches ebenso wie das vorhergehende die Grundzahl $N - \nu'$ besitzt. Lassen wir hierauf ν'' Querschnitte und ϱ'' Rückkehrschnitte zu den schon vorhandenen Schnitten hinzutreten, so entsteht ein Flächensystem, dessen Grundzahl gleich $N - \nu' - \nu''$ ist, u. s. w. All dies ist eine unmittelbare Folge der früher gefundenen Sätze (S. 299 u. 300).

Führen wir also in dem gegebenen Systeme $\mathfrak{S}$ in irgend welcher Reihenfolge im Ganzen ν Querschnitte und ϱ Rückkehrschnitte aus, so wird

$$N - \nu$$

die Grundzahl des resultirenden Flächensystems sein. Wir wollen nun annehmen, dieses letztere System bestände aus α Flächenstücken, von welchen jedes einfach zusammenhängend ist. Zufolge der anfangs gemachten Bemerkung wird sich in diesem Falle die Grundzahl des resultirenden Flächensystems noch in anderer Art, nämlich durch

$$2 - \alpha$$

ausdrücken lassen. Demnach wird bei der gemachten Annahme

$$N - \nu = 2 - \alpha,$$

d. i.

$$N = \nu - \alpha + 2$$

sein. Somit gelangen wir zu folgendem Ausspruch:

Kann ein Flächensystem $\mathfrak{S}$ oder auch eine einzelne Fläche $\mathfrak{S}$ durch irgend welche ν Querschnitte und durch irgend welche ϱ Rück-

---

d. i. durch

$$N_1 + N_2 + \ldots + N_\alpha - \alpha$$

Querschnitte in α einfach zusammenhängende Flächenstücke verwandelt werden. Daraus folgt, dass die Grundzahl des Systems $\mathfrak{S}$ gleich

$$(N_1 + N_2 + \ldots + N_\alpha - \alpha) - \alpha + 2$$

ist. Sind also α Flächenstücke gegeben, deren Grundzahlen der Reihe nach gleich $N_1, N_2, \ldots N_\alpha$ sind, so ist

$$(N_1 + N_2 + \ldots + N_\alpha) - 2\alpha + 2$$

die Grundzahl des aus all jenen Flächenstücken bestehenden Systems.

kehrschnitte in α Flächenstücke verwandelt werden, von denen ein jedes einfach zusammenhängend ist, so wird jederzeit

$$v - \alpha + 2$$

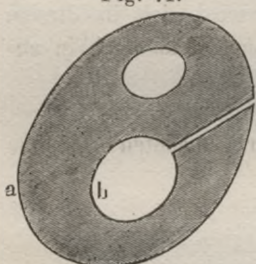
die Grundzahl von $\mathfrak{S}$ sein.

Dritter Abschnitt. Ueber die bei einer Nfach zusammenhängenden Fläche möglicherweise vorhandene Anzahl von Randcurven. Wie vielfach eine Riemann'sche Kugelfläche, zusammenhängend ist, lässt sich in jedem gegebenen Fall mit Hülfe einer einfachen Regel leicht ermitteln.

Es sei $\mathfrak{S}$ ein beliebig gegebenes Flächensystem oder auch eine beliebig gegebene einzelne Fläche. Wir führen in $\mathfrak{S}$ einen beliebigen Querschnitt aus. Was die Lage dieses Querschnittes anbelangt, so sind überhaupt nur drei Fälle denkbar:

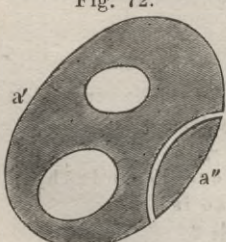
Erster Fall. Der Querschnitt nimmt seinen Anfang in irgend einer Randcurve a und endigt in irgend einer andern Randcurve b. Alsdann werden sich die beiden genannten Curven a und b (vergl. Fig. 71) mit den beiden Ufern des Querschnitts zu einer einzigen Randcurve vereinigen. An Stelle der beiden Randcurven a und b haben wir also in diesem Falle nach Ausführung des Querschnittes nur eine einzige Randcurve. Mit andern Worten: Die Anzahl der Randcurven wird durch den Querschnitt um 1 vermindert.

Fig. 71.



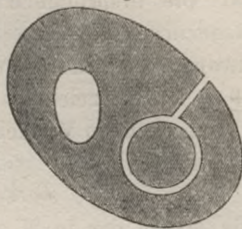
Zweiter Fall. Der Querschnitt nimmt seinen Anfang in irgend einer Randcurve a und endigt in irgend einem Punct derselben Curve. Bezeichnen wir (Fig. 72) die beiden Theile, in welche a durch den Anfangs- und Endpunct des Querschnittes zerlegt wird, mit a' und a'', so wird a' mit dem einen Ufer des Querschnittes zusammengenommen eine einzige in sich zurücklaufende Randcurve bilden, und ebenso a'' mit dem andern Ufer jenes Schnittes zusammengenommen. In diesem Fall wird also die Anzahl der vorhandenen Randcurven durch Ausführung des Querschnittes um 1 vermehrt werden.

Fig. 72.



Dritter Fall. Der Querschnitt nimmt seinen Anfang in irgend einer Randcurve a (Fig. 73) und endigt in irgend einem Punct seines früheren Laufes. Ein solcher Querschnitt kann als ein Complex von einem Rückkehrschnitt s und von einem Querschnitt q angesehen werden. Der letztere wird dann seinen Anfang in der Randcurve a, und sein Ende in dem einen Ufer des Schnittes s haben.

Fig. 73.



Wir wollen uns nach einander zuerst s und sodann q ausgeführt denken. Durch den Rückkehrschnitt s wird die Anzahl der vorhandenen Randcurven offenbar um 2 vermehrt; denn das eine Ufer von s bildet für sich allein eine vollständige in sich zurücklaufende Randcurve; und Gleiches gilt auch von dem andern Ufer.

Lassen wir nun gegenwärtig den Querschnitt q sich anschliessen, so wird dieser, ebenso wie der im ersten Fall behandelte, zwei verschiedene Randcurven mit einander verbinden, folglich eine Verminderung der Randcurven-Anzahl um 1 verursachen.

Durch beide Schnitte s und q zusammengenommen tritt also eine Vermehrung der Randcurven um 1 ein. D. h. jene Anzahl wird durch den hier im dritten Falle betrachteten Querschnitt um 1 vermehrt.

Wir gelangen somit zu folgendem Satz:

Die Anzahl der bei irgend einem Flächensystem oder bei irgend einer einzelnen Fläche vorhandenen Randcurven wird durch jeden Querschnitt entweder um 1 *vermehrt, oder um* 1 *vermindert.*

Es sei $\mathfrak{A}$ eine beliebig gegebene Nfach zusammenhängende Fläche. Der für eine solche Fläche gegebenen Definition zufolge (S. 302) wird dieselbe durch $N-1$ Querschnitte in einfach zusammenhängende Flächen verwandelt werden können.*) Diese einfach zusammenhängende Fläche — sie mag $\mathfrak{A}'$ genannt wer-

*) Auch ergiebt sich aus einem früher (S. 303) gefundenen Satz, dass, um eine solche Verwandelung der Fläche $\mathfrak{A}$ in eine einfach zusammenhängende Fläche zu erreichen, nur irgend welche $N-1$ Querschnitte in Anwendung zu bringen sind, durch welche die Fläche nicht zerstückelt wird.

den — kann, wie sich unmittelbar aus einem früher gefundenen Satze (S. 296) ergiebt, immer nur eine einzige Randcurve besitzen.

Die ursprünglich bei der Fläche $\mathfrak{A}$ vorhandene Anzahl von Randcurven mag R sein. Diese Zahl R wird durch jeden der in Anwendung gebrachten Querschnitte um ε vermehrt, wo ε gleich ± 1 ist. Bezeichnen wir also die jenen $N-1$ Querschnitten entsprechenden Vermehrungen der Reihe nach mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{N-1}$, so wird

$$R + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{N-1}$$

die Anzahl der in $\mathfrak{A}'$ vorhandenen Randcurven vorstellen, mithin $= 1$ sein. Somit haben wir:

$$R + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{N-1} = 1.$$

Ist unter den Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{N-1}$ die Anzahl derjenigen, welche den Werth $+1$ haben, gleich p, mithin die Anzahl derer, welche den Werth -1 besitzen, gleich $N-1-p$, so verwandelt sich die eben aufgestellte Gleichung in

$$R + p - (N - 1 - p) = 1,$$

d. i. in

$$R = N - 2p.$$

Zufolge seiner Bedeutung ist p irgend eine Zahl aus der Reihe

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,$$

mithin $2p$ eine Zahl aus der Reihe

$$0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ 2N-2.$$

Aus der soeben erhaltenen Gleichung

$$R = N - 2p$$

ergiebt sich daher, dass R eine Zahl sein muss, welche zur Reihe

$$N,\ N-2,\ N-4,\ \ldots,\ 2-N$$

gehört. Seiner Bedeutung zufolge kann natürlich R niemals negativ sein; jedenfalls aber haben wir folgenden Satz:

Die Anzahl der Randcurven, welche eine N fach zusammenhängende Fläche besitzt, wird jederzeit durch eine der Zahlen

$$N,\ N-2,\ N-4,\ N-6,\ \ldots$$

dargestellt.

Ist also R die Anzahl der Randcurven bei einer beliebig gegebenen N fach zusammenhängenden Fläche, so ist R jederzeit entweder gleich N oder um eine gerade Zahl kleiner als N.

Oder mit andern Worten: Die Zahl N ist jederzeit entweder gleich R oder um eine gerade Zahl grösser als R. Wir können also den eben hingestellten Satz auch so aussprechen:

Besitzt eine Fläche R Randcurven, so ist sie jederzeit

R *fach, oder* $(R + 2)$ *fach, oder* $(R + 4)$ *fach, u. s. w.*

zusammenhängend.

Auf eine geschlossene Fläche, z. B. auf eine Kugelfläche ist unsere Classification direct nicht anwendbar. Denn bei einer Fläche, die keinen Rand besitzt, kann von Querschnitten nicht die Rede sein. Wo diese aber unmöglich sind, findet unsere Classification keinen Anhaltspunct.

Um diesen Uebelstand zu umgehen, setzen wir fest, dass einer geschlossenen Fläche durch Ausscheidung eines beliebig gelegenen einzelnen Punctes immer eine kleine Oeffnung gegeben werde.

Diese Operation soll künftig stillschweigend supponirt, und die unendlich kleine, jene Oeffnung einrandende Curve als der Rand der Fläche angesehen werden, so dass also nach unserer Vorstellung eine geschlossene Fläche jederzeit eine einzige, und zwar unendlich kleine Randcurve besitzt.

Die gewöhnliche einblättrige Kugelfläche wird alsdann nichts Anderes sein, als eine gewisse Kugelcalotte, und folglich ebenso wie diese durch stetige Umformung in eine Elementarfläche verwandelt werden können. Es wird demnach die gewöhnliche einblättrige Kugelfläche eine einfach zusammenhängende Fläche sein.

Da eine geschlossene Fläche immer eine einzige Randcurve besitzt, so führt der zuletzt gefundene Satz sofort zu folgender Bemerkung:

Eine geschlossene Fläche ist jederzeit

1 *fach, oder* 3 *fach, oder* 5 *fach, u. s. w.*

zusammenhängend. Die Anzahl der Querschnitte, welche erforderlich ist, um eine solche Fläche in eine einfach zusammenhängende Fläche zu verwandeln, wird also jederzeit durch eine der Zahlen

$$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots$$

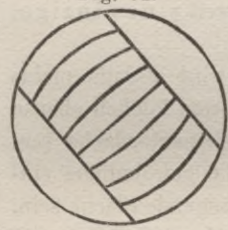
dargestellt sein.

Es sei $\mathfrak{R}$ eine beliebig gegebene Riemann'sche Kugelfläche, und n die Anzahl der in ihr über einander gelagerten Blätter. In dieser Fläche mögen im Ganzen π Windungspuncte vorhanden sein, von welchen der erste m_1 blättrig, der zweite m_2 blättrig u. s. w., endlich der letzte m_π blättrig ist.*) Es soll untersucht werden, wie vielfach zusammenhängend die Fläche ist; mit andern Worten: es soll ihre Grundzahl N ermittelt werden.

Wir haben früher (S. 303) gesehen, dass die Grundzahl einer Fläche ungeändert bleibt, wenn man dieselbe irgend welcher stetigen Umformung unterwirft. Hiervon machen wir Gebrauch, um uns die vorliegende Aufgabe zu erleichtern. Wir denken uns nämlich durch stetige Umformung die auf $\mathfrak{R}$ vorhandenen π Windungspuncte der Art verschoben, dass nirgends zwei solche Puncte gerade über einander liegen, und gehen nunmehr erst an die Berechnung von N.

Wir führen auf $\mathfrak{R}$ zwei kreisförmige, und π geradlinige, im Ganzen also $\pi + 2$ Schnitte aus, von welchen jeder auf seinem ganzen Lauf durch alle n Blätter der Fläche hindurchdringt. Durch die beiden Kreisschnitte soll die gegebene Kugelfläche in drei Theile zerlegt werden, in zwei äussere calottenförmige, und in einen mittleren gürtelförmigen Theil (Fig. 74). Die beiden ersteren mögen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$, der letztere $\mathfrak{G}$ genannt werden; und die beiden Kreisschnitte mögen der Art ausgeführt gedacht werden, dass sämmtliche π Windungspuncte innerhalb $\mathfrak{G}$ liegen, dass mithin $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ von Windungspuncten völlig frei sind.

Fig. 74.



Die π geradlinigen Schnitte mögen dazu dienen, um den Gürtel $\mathfrak{G}$ in π Theile zu zerlegen, von welchen jeder immer nur einen Windungspunct in sich enthält; und jeder von diesen geradlinigen (oder genauer ausgedrückt bogenförmigen) Schnitten mag seinen Anfang in dem einen, und sein Ende in dem andern Kreisschnitt haben. Die π Theile, in welche $\mathfrak{G}$ auf diese Weise zerlegt wird, mögen mit $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots \mathfrak{G}_\pi$ bezeichnet werden, und zwar in solcher Weise, dass $\mathfrak{G}_1$ den m_1 blättrigen, $\mathfrak{G}_2$ den m_2 blättrigen, u. s. w., endlich $\mathfrak{G}_\pi$ den m_π blättrigen Windungspunct in sich enthält.

Die Calotte $\mathfrak{C}$ besteht aus n von einander getrennten einblättrigen Flächenstücken, von welchen jedes durch stetige Um-

---

*) Ein Windungspunct ist m blättrig, wenn in ihm m Blätter der Fläche mit einander zusammenhängen; also dann, wenn er von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist.

formung in eine Elementarfläche verwandelt werden kann, von welchen also jedes einfach zusammenhängend ist. Gleiches gilt von der Calotte $\mathfrak{C}'$.

Was ferner die π Theile anbelangt, in welche wir den Gürtel $\mathfrak{G}$ zerlegt haben, so besteht jedes derselben aus einer Windungsfläche und aus einer gewissen Anzahl einblättriger Flächenstücke. So besteht z. B. $\mathfrak{G}_\varkappa$ aus einer $m_\varkappa$ blättrigen Windungsfläche und aus $n - m_\varkappa$ einblättrigen Flächenstücken, im Ganzen also aus $n - m_\varkappa + 1$ Flächenstücken; jedes von diesen Flächenstücken kann durch stetige Umformung in eine Elementarfläche verwandelt werden, ist also einfach zusammenhängend (vergl. S. 294).

Durch unsere $\pi + 2$ Schnitte wird demnach die Fläche $\mathfrak{R}$ im Ganzen in

$$2n + (n - m_1 + 1) + (n - m_2 + 1) + \ldots + (n - m_\pi + 1),$$

d. i. in

$$(\pi + 2)\, n - (m_1 + m_2 + \ldots + m_\pi) + \pi$$

einzelne Flächenstücke zerfallen, von welchen jedes einfach zusammenhängend ist.

Wir müssen nun ferner untersuchen, wie viel Quer- und Rückkehrschnitte durch unsere $\pi + 2$ Schnitte dargestellt werden. Die beiden kreisförmigen Schnitte bilden, weil sie durch alle n Blätter hindurchdringen, im Ganzen $2n$ in sich zurücklaufende Schnitte. Von diesen ist einer als ein Querschnitt anzusehen, nämlich als ein Querschnitt, welcher seinen Anfang und sein Ende in der unendlich kleinen Oeffnung hat, die in der Fläche $\mathfrak{R}$ — da sie geschlossen ist — supponirt werden muss (vergl. S. 309). Die übrigen $2n - 1$ hingegen sind als Rückkehrschnitte anzusehen. Was ferner unsere π geradlinigen Schnitte anbelangt, so ist jeder derselben als ein Aggregat von n Querschnitten aufzufassen.

Es werden demnach durch unsere $\pi + 2$ Schnitte im Ganzen

$n\pi + 1$ Querschnitte

und $2n - 1$ Rückkehrschnitte

dargestellt.

Zerfällt nun eine Fläche durch ν Querschnitte und durch irgend welche Rückkehrschnitte in α einfach zusammenhängende Flächenstücke; so ist, wie wir früher (S. 305) gefunden haben, die Grundzahl der Fläche $= \nu - \alpha + 2$. In unserem Falle ist

$$\alpha = (\pi + 2)\, n - (m_1 + m_2 + \ldots + m_\pi) + \pi,$$
$$\nu = n\pi + 1.$$

Demnach ergiebt sich für die Grundzahl N unserer Fläche $\mathfrak{R}$ folgender Werth:

$$N = 3 - 2n + (m_1 + m_2 + \ldots + m_\pi) - \pi.$$

Die π auf $\mathfrak{R}$ vorhandenen Windungspuncte sind der Reihe nach von der $(m_1 - 1)^{\text{ten}}$, von der $(m_2 - 1)^{\text{ten}}$, u. s. w., endlich von der $(m_\pi - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung. Wir bezeichnen die Summe all dieser Ordnungszahlen mit $\mathbf{w}$, also:

$$\mathbf{w} = (m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \ldots + (m_\pi - 1),$$

d. i.:

$$\mathbf{w} = (m_1 + m_2 + \ldots + m_\pi) - \pi.$$

Hierdurch verwandelt sich der für N erhaltene Werth in:

$$N = 3 - 2n + \mathbf{w}.$$

Führt man in einer N fach zusammenhängenden Fläche irgend welche $N - 1$ Querschnitte aus, durch welche dieselbe nicht zerstückelt wird, so entsteht eine einfach zusammenhängende Fläche. Will man also die hier gegebene Fläche $\mathfrak{R}$ in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandeln, so werden dazu irgend welche

$$2 - 2n + \mathbf{w}$$

Querschnitte in Anwendung zu bringen sein, durch welche die Fläche nicht zerstückelt wird. Wir erhalten demnach folgenden Satz:

Besitzen die auf einer n blättrigen Riemann'schen Kugelfläche vorhandenen Windungspuncte Ordnungszahlen, deren Summe gleich $\mathbf{w}$ *ist, so wird die Grundzahl der Fläche jederzeit gleich*

$$\mathbf{w} - 2n + 3,$$

die Fläche also eine $(\mathbf{w} - 2n + 3)$ *fach zusammenhängende sein.*

Führt man in dieser Fläche irgend welche

$$\mathbf{w} - 2n + 2$$

Querschnitte aus, durch welche dieselbe nicht zerstückelt wird, so verwandelt sie sich in eine einfach zusammenhängende Fläche.

Da die Riemann'sche Kugelfläche eine geschlossene Fläche ist, so wird die Anzahl der eben genannten Querschnitte — zufolge eines früheren Satzes (S. 309) — jederzeit eine gerade

Zahl sein.*) Demnach wird

$$\mathrm{w} - 2n + 2,$$

folglich auch

$$\mathrm{w}$$

selber stets eine gerade Zahl sein.

Um eine der beiden Functionen

$$\sqrt{z - A},$$
$$\sqrt{(z - A)\ (z - B)}$$

auf eindeutige Weise räumlich auszubreiten, dient (S. 190) eine Riemann'sche Kugelfläche, welche 2 Blätter besitzt und mit 2 Windungspuncten 1ster Ordnung behaftet ist; also eine Riemann'sche Kugelfläche, für welche $n = 2$ und $\mathrm{w} = 2$ ist. Demnach wird diese Fläche $(2 - 2 \cdot 2 + 3)$ fach, d. i. einfach zusammenhängend sein.

Um ferner eine der beiden Functionen

$$\sqrt{(z - A)\ (z - B)\ (z - C)},$$
$$\sqrt{(z - A)\ (z - B)\ (z - C)\ (z - D)}$$

eindeutig auszubreiten, dient eine Riemann'sche Kugelfläche, welche aus 2 Blättern besteht und mit 4 Windungspuncten 1ster Ordnung behaftet ist. Hier ist also $n = 2$ und $\mathrm{w} = 4$. Demnach wird die Fläche eine $(4 - 2 \cdot 2 + 3)$ fach, d. i. eine dreifach zusammenhängende sein. Wir werden sogleich die der Function

$$\sqrt{(z - A)\ (z - B)\ (z - C)\ (z - D)}$$

zugehörige Fläche einer genaueren Betrachtung unterwerfen. Bevor wir solches aber thun, wird es gut sein, zunächst eine andere Fläche zu untersuchen, die unserer Vorstellung leichter zugänglich, und dabei doch einer ganz ähnlichen Behandlung, wie jene, fähig ist.

---

*) Bezeichnet man demgemäss die Anzahl dieser Querschnitte mit $2p$, so erhält man die Gleichung

$$\mathrm{w} - 2n + 2 = 2p,$$

d. i.

$$\mathrm{w} - 2n = 2(p - 1).$$

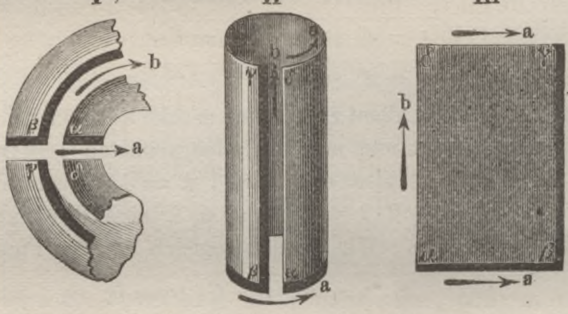
Und dies ist dieselbe Relation, welche sich in der Riemann'schen Abhandlung (Borchardt's Journal Band 54, Seite 129) vorfindet, in denselben Buchstaben wie dort angegeben, hier aber auf ganz andere Art abgeleitet.

Vierter Abschnitt. Eine beliebig gegebene Fläche lässt sich durch Ausführung geeigneter Schnitte oder Ströme jederzeit verwandeln in eine einfach zusammenhängende Fläche. Ueber die positive Umlaufung dieser letzteren Fläche.

Lässt man einen Kreis um eine Achse rotiren, die ausserhalb des Kreises und in seiner Ebene liegt, so entsteht eine ringförmige Fläche oder Ringfläche, d. i. eine in sich zurücklaufende röhrenförmige Fläche. Unter den Meridiankreisen dieser Ringfläche werden die auf einander folgenden Lagen des erzeugenden Kreises, und unter den Parallelkreisen diejenigen zu verstehen sein, welche mit jenen sich senkrecht durchkreuzen.

Wir führen in der Ringfläche zwei Schnitte aus, nämlich (Fig. 75, I) zuerst einen in sich zurücklaufenden Schnitt a, welcher

Fig. 75.



längs irgend eines Meridiankreises fortgeht, und sodann einen ebenfalls in sich zurücklaufenden Schnitt b, welcher längs irgend eines Parallelkreises hinläuft. Nach Ausführung dieser Schnitte lassen sich die Parallelkreise der Fläche durch geeignete Dehnungen und Biegungen in gerade Linien verwandeln. Die Fläche selber nimmt dabei die Form einer Cylinderfläche an, welche (Fig. II) auf der einen Seite von der einen, auf der andern Seite von der andern Uferlinie des Schnittes a begrenzt, zugleich aber durch den Schnitt b ihrer ganzen Länge nach aufgeschlitzt ist. Sobald die Fläche in diesen Zustand versetzt worden ist, lassen sich nun — wiederum durch geeignete Biegungen und Dehnungen — die Meridiankreise ebenfalls in gerade Linien verwandeln; hierbei verwandelt sich dann die Fläche selber in die Fläche

*) In Fig. 75 I ist, der Raumersparniss willen, nur ein Bruchstück der Ringfläche dargestellt.

eines Rechtecks, welches (Fig. III) von den vier Uferlinien der beiden Schnitte a und b begrenzt wird.

Die ursprünglich gegebene geschlossene Ringfläche mag mit $\mathfrak{A}$, und die von beiden Schnitten a, b durchzogene, mithin umrändete Ringfläche mag mit $\mathfrak{A}'$ bezeichnet werden. Die letztere Fläche haben wir in drei verschiedenen Zuständen vor uns, in einem ringförmigen Zustand (Fig. I), ferner in einem cylinderförmigen (Fig. II), und endlich in einem vollständig ebenen Zustand (Fig. III); diese drei Zustände mögen der Reihe nach mit $\mathfrak{A}'_\varrho$, $\mathfrak{A}'_\varkappa$ und $\mathfrak{A}'_\eta$ bezeichnet werden. Die Begrenzung der Fläche $\mathfrak{A}'$ wird — völlig gleichgültig, welchen von jenen drei Zuständen wir ins Auge fassen — immer von den vier Uferlinien der beiden Schnitte a und b gebildet. Die vier Uferlinien der Schnitte a und b bilden zusammengenommen eine einzige in sich zurücklaufende Curve. Diese Curve besitzt in jedem Puncte, wo zwei von jenen vier Linien mit einander zusammenhängen, eine Ecke; sie besitzt demnach im Ganzen vier solche Ecken, die mit α, β, γ, δ bezeichnet sind. Dass die genannten vier Uferlinien in ihrer Gesammtheit eine einzige in sich zurücklaufende Curve bilden, tritt besonders deutlich zu Tage, sobald wir uns die Fläche $\mathfrak{A}'$ im Zustande $\mathfrak{A}'_\eta$ (Fig. III) denken.

Wir betrachten die Fläche $\mathfrak{A}'_\varrho$. Die beiden Schnitte a und b, von welchen diese Fläche durchzogen ist, mögen als zwei Ströme angesehen werden, von welchen jeder in festgesetzter Richtung fortfliesst. Die bei α, β, γ, δ liegende Durchkreuzungsstelle mag die gemeinsame Quelle der beiden Ströme sein; von hier aus mag der Strom a nach rechts hin, und der Strom b nach oben hin fortfliessen, bis jeder derselben nach Durchlaufung des ihm angewiesenen Weges in seine Quelle wieder einmündet. In der Fläche $\mathfrak{A}'_\varrho$ (Fig. I) sind diese Stromrichtungen durch Pfeile bezeichnet; und gleichzeitig sind daselbst die linken Stromufer durch stärkere, die rechten durch schwächere Linien angegeben. Die vier Ecken α, β, γ, δ lassen sich bei Zugrundelegung solcher Vorstellungen scharf von einander unterscheiden. Es kann nämlich β als diejenige Ecke bezeichnet werden, in welcher die beiden linken, δ als diejenige, in der die beiden rechten Stromufer mit einander zusammenhängen; sodann kann ferner α diejenige Ecke genannt werden, in welcher das linke Ufer von a in das rechte von b übergeht, und endlich γ diejenige, in der das rechte

Ufer von a und das linke von b mit einander zusammenhängen. Was hier in Bezug auf die Fläche $\mathfrak{A}'_\varrho$ festgesetzt ist, wird sich natürlich auf die Flächen $\mathfrak{A}'_\varkappa$ und $\mathfrak{A}'_\eta$ (Fig. II und III) von selber übertragen.

Will man irgend eine Fläche in positiver Richtung umlaufen, so muss man, zufolge unserer Definition (Seite 71), längs ihres Randes — und zwar auf ihrer oberen Seite — in solcher Richtung fortwandern, dass man die Fläche selber beständig zur Linken hat. Um demnach die Fläche $\mathfrak{A}'_\varrho$, etwa von der Ecke α aus, in positiver Richtung zu umlaufen, wird man von α aus zuerst das linke Ufer von a stromabwärts, d. i. in der Richtung des Stromes durchwandern müssen, bis man nach β gelangt; sodann wird man von β aus das sich hier anschliessende linke Ufer von b, und zwar ebenfalls stromabwärts, durchschreiten müssen, bis man nach γ kommt; von hier aus wird nun ferner das rechte von a stromaufwärts bis nach δ hin, und endlich von δ aus das rechte Ufer von b, wiederum stromaufwärts, zu durchlaufen sein, bis man schliesslich zum Ausgangspuncte α zurückgelangt.

Bei einer positiven Umlaufung der Fläche $\mathfrak{A}'_\varrho$ sind also, wie wir sehen, die linken Stromufer stromabwärts, die rechten stromaufwärts zu durchwandern. Gleiches gilt natürlich auch bei den Flächen $\mathfrak{A}'_\varkappa$ und $\mathfrak{A}'_\eta$.

Dass in diesem Ergebniss nichts Zufälliges liegt, lässt sich leicht darthun. Es sei eine beliebige Fläche gegeben, und diese sei von irgend welchem Strom, d. i. von irgend welchem Schnitt durchzogen, der in festgesetzter Richtung fortläuft. Stellen wir uns vor, wir wollten die Fläche in positiver Richtung umlaufen, wir wollten also jede zum Rande der Fläche gehörige Linie in solcher Richtung durchwandern, dass wir das von der Linie begrenzte Flächengebiet dabei zur Linken haben. Zu den Linien, aus welchen der Rand der Fläche besteht, gehören unter Andern auch die Uferlinien jenes Stromes; und diese sind es, auf welche wir unsere Aufmerksamkeit richten.

Wir betrachten zunächst die linke Uferlinie (Fig. 76)*).

*) In der nebenstehenden Figur ist — ebenso wie früher — die linke Uferlinie durch einen stärkeren, die rechte durch einen schwächeren Strich angegeben. Gleiches wird bei Figuren solcher Art in Zukunft stets geschehen.

Fig. 76.

Auf der einen Seite der Linie befindet sich der Strom, auf der andern Flächengebiet. Wollen wir nun längs dieser Linie fortschreiten, und zwar in solcher Richtung, dass wir das Flächengebiet zur Linken, mithin den Strom zur Rechten haben, so müssen wir stromabwärts wandern.

Umgekehrt verhält es sich, wenn wir uns auf der rechten Uferlinie befinden. Wollen wir nämlich auf dieser entlang gehen, und zwar wiederum in solcher Richtung, dass wir das anstossende Flächengebiet zur Linken, den Strom zur Rechten haben, so müssen wir unsere Schritte stromaufwärts lenken.

Somit gelangen wir zu folgendem allgemeinen Satz:

Ist eine Fläche von irgend welchen Strömen durchschnitten, so wird bei einer positiven Umlaufung der Fläche das linke Ufer eines jeden Stromes stromabwärts, das rechte Ufer eines jeden Stromes stromaufwärts durchschritten werden.

Was sich also vorhin in Bezug auf die positive Umlaufung der Flächen $\mathfrak{A}'_\varrho$, $\mathfrak{A}'_\varkappa$, $\mathfrak{A}'_\eta$ ergab, ist nur eine unmittelbare Folge dieses allgemeinen Satzes*).

---

*) Beiläufig noch ein paar Bemerkungen über jene Flächen. Von den beiden Schnitten a und b, die in der Ringfläche $\mathfrak{A}$ ausgeführt wurden, kann der erstere als ein Querschnitt der Fläche $\mathfrak{A}$ aufgefasst werden. Da nämlich $\mathfrak{A}$ eine geschlossene Fläche ist, so muss in derselben eine unendlich kleine Oeffnung supponirt werden; demnach kann jener Schnitt a als ein Querschnitt angesehen werden, welcher seinen Anfang und sein Ende in dieser kleinen Oeffnung hat. Nachdem a ausgeführt ist, kann nun b als ein zweiter Querschnitt aufgefasst werden, nämlich als ein Querschnitt, welcher seinen Anfang in dem einen, sein Ende in dem andern Ufer von a hat. Die ursprünglich gegebene Ringfläche $\mathfrak{A}$ verwandelt sich also, können wir sagen, durch Ausführung von zwei Querschnitten in die Fläche $\mathfrak{A}'_\varrho$; und die Fläche $\mathfrak{A}'_\varrho$ ihrerseits verwandelt sich durch stetige Umformung in die Fläche $\mathfrak{A}'_\eta$. Die letztgenannte $\mathfrak{A}'_\eta$ ist eine Elementarfläche; daraus folgt, dass die vorhergehende $\mathfrak{A}'_\varrho$ eine einfach zusammenhängende Fläche ist; und hieraus folgt weiter (vergl. die Definition Seite 302), dass die ursprünglich gegebene Ringfläche $\mathfrak{A}$ eine dreifach zusammenhängende ist.

Fünfter Abschnitt. Fortsetzung. Anwendung auf diejenige Riemann'sche Kugelfläche, welche, falls Z eine ganze rationale Function $x + iy$ vorstellt, erforderlich ist, um sämmtliche Werthe der Function $\sqrt{Z}$ auf eindeutige Weise auszubreiten.

Wir gehen nun zur Betrachtung derjenigen Riemann'schen Kugelfläche über, welche dient, um die Werthe der Function

$$\sqrt{(z-p_1)(z-q_1)(z-p_2)(z-q_2)}$$

auf eindeutige Weise räumlich auszubreiten (S. 190). Diese Fläche mag $\mathfrak{R}$ genannt werden. Sie besteht aus zwei über einander gelagerten Blättern, besitzt vier Windungspuncte p_1, q_1, p_2, q_2, besitzt ferner zwei Uebergangslinien $p_1 q_1$ und $p_2 q_2$ (Fig. 77), und ist endlich, wie wir bereits (Seite 313) gesehen haben, eine dreifach zusammenhängende.

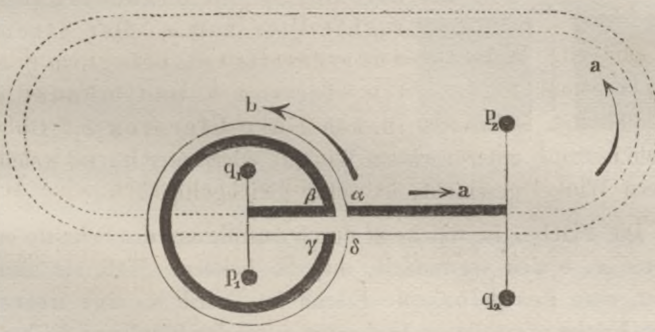
Es wird sich zeigen, dass diese Fläche $\mathfrak{R}$ in ganz analoger Weise behandelt werden kann, wie vorhin die Ringfläche.

Die Fläche $\mathfrak{R}$ mag von zwei Schnitten oder Strömen a und b durchzogen gedacht werden. Der Strom a soll zum Theil im oberen, zum Theil im untern Blatt der Fläche fortfliessen. Er mag entspringen in irgend einer Stelle des oberen Blattes, und das obere Blatt durchschneidend zunächst so weit fortlaufen, bis er auf irgend welchem Wege zur Uebergangslinie $p_2 q_2$ gelangt; bei Ueberschreitung dieser Linie wird er in das untere Blatt treten. In dem unteren Blatt mag er nun auf irgend welchem Wege bis zur Uebergangslinie $p_1 q_1$ hinlaufen; bei Ueberschreitung derselben wird er von Neuem in das obere Blatt treten. Und hier in dem oberen Blatt mag er nun schliesslich bis zu seiner anfänglichen Quelle zurücklaufen. Der Strom a wird also ein in sich zurücklaufender sein; seine Richtung mag diejenige sein, in welcher wir ihn so eben haben fortfliessen lassen, also diejenige, welche in der nebenstehenden Figur durch Pfeile angedeutet ist.

Der Strom b soll seinem ganzen Laufe nach im oberen Blatt der Fläche bleiben. Er mag an derselben Stelle entspringen, an welcher a entsprungen ist, nämlich an der Stelle $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Von hier aus mag er die Uebergangslinie $p_1 q_1$ in irgend welchem Bogen umkreisen und, während er also beständig im oberen Blatte bleibt, schliesslich wieder in seine Quelle zurückfliessen.

Die Richtung des Stromes b soll diejenige sein, welche in der nebenstehenden Figur durch Pfeile angedeutet ist, also der Art sein, dass Jemand, der an der gemeinsamen Quelle beider Ströme — nämlich bei α, β, γ, δ, — steht, die Richtung, in welcher b fortfliesst, mit ausgestreckter Linken angeben wird, sobald er in derjenigen Richtung fortsieht, in welcher a fortfliesst*).

Fig. 77.



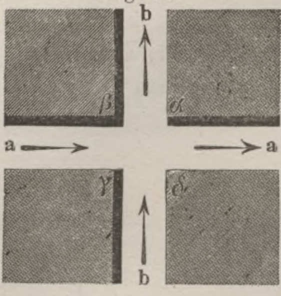
In der nebenstehenden Figur sind diejenigen Stromstrecken, welche im oberen Blatt liegen, durch ununterbrochene, diejenigen hingegen, welche sich im unteren Blatt befinden, durch punctirte Linien angedeutet. Ferner sind daselbst die linken Ufer der Ströme mit starken, die rechten mit schwachen Strichen angegeben. Von Wichtigkeit ist zu bemerken, dass die beiden Ströme a und b einander nur an einer einzigen Stelle durchkreuzen, nämlich nur an der Stelle α, β, γ, δ. Nach der vorstehenden Figur zu urtheilen, könnte man vermuthen, dass noch eine zweite Durchkreuzungsstelle existire. Das ist aber nicht der Fall. Denn an jener zweiten Stelle fliessen die beiden Ströme, ohne mit einander in irgend welche Berührung zu kommen, in verschiedenen Blättern über einander fort, getrennt von einander durch den — wenn auch nur unendlich kleinen — Zwischenraum, welcher sich überall zwischen den beiden Blättern der Fläche hinzieht.

---

*) Es soll also die anfängliche Richtung des Stromes b zu der anfänglichen Richtung des Stromes a ebenso liegen, wie nach unserer Festsetzung (Seite 72) die y Achse eines Coordinatensystems zur x Achse desselben liegt.

Die Durchkreuzungsstelle α, β, γ, δ repräsentirt zugleich den Ort, wo beide Ströme entspringen, und ebenso auch den Ort, wo beide Ströme, nachdem sie die ihnen angewiesenen Wege durchlaufen haben, wieder einmünden. Der Strom b, können wir demnach sagen (Fig. 78), entspringt im linken Ufer des Stromes a, und mündet ein in das rechte Ufer von a. Der Strom a andererseits entspringt im rechten Ufer von b, und mündet ein in das linke Ufer von b. Ob die Durchkreuzung unter rechtem Winkel, oder unter irgend welchem andern Winkel geschieht, ist völlig gleichgültig.

Fig. 78.



Die Fläche, in welche $\mathfrak{R}$ durch Ausführung der Schnitte oder Ströme a, b sich verwandelt, mag $\mathfrak{R}'$ heissen. Während also $\mathfrak{R}$ selber eine geschlossene Fläche ist, wird $\mathfrak{R}'$ eine umrandete Fläche vorstellen. Und zwar wird der Rand von $\mathfrak{R}'$ gebildet sein von den vier Uferlinien der beiden Ströme a und b.

Sind a_λ, b_λ die linken, und a_ϱ, b_ϱ die rechten Uferlinien der Ströme a, b, so wird man, um die Fläche $\mathfrak{R}'$ in positiver Richtung zu umlaufen, etwa vom Eckpunct α (Fig. 77) ausgehen, von diesem Puncte aus zuerst die Ufer a_λ und b_λ stromabwärts, und sodann die Ufer a_ϱ und b_ϱ stromaufwärts durchwandern müssen, bis man nach Durchlaufung des letztgenannten Ufers b_ϱ schliesslich wieder im Ausgangspuncte α anlangt.

Dass bei einer solchen Wanderung um die Fläche $\mathfrak{R}'$ herum die linken Ufer a_λ, b_λ stromabwärts und die rechten Ufer a_ϱ, b_ϱ stromaufwärts zu durchlaufen sind, kann als eine unmittelbare Folge des kürzlich (Seite 317) gefundenen Satzes angesehen werden. Trotzdem aber ist es von Wichtigkeit, dass man jene Wanderung um die Fläche $\mathfrak{R}'$ herum (Fig. 77) in Gedanken wirklich ausführt. Denn man erkennt alsdann mit voller Bestimmtheit, dass die genannten vier Uferlinien a_λ, b_λ, a_ϱ, b_ϱ zusammengenommen eine einzige in sich zurücklaufende Curve bilden, dass also die Fläche $\mathfrak{R}'$ nur eine einzige Randcurve besitzt. Daraus aber folgt — was bisher vielleicht bezweifelt werden konnte —, dass $\mathfrak{R}'$ nicht aus mehreren von einander getrennten Flächenstücken bestehen kann, sondern eine *einzige* zusammenhängende Fläche sein muss*).

Die ursprünglich gegebene Fläche hat also durch Ausführung der beiden Schnitte oder Ströme a, b *keine Zerstückelung* erlitten. Wir können den Strom a als einen *Querschnitt* von $\mathfrak{R}$ ansehen, nämlich als einen Querschnitt, welcher seinen Anfang und sein Ende in der auf $\mathfrak{R}$ zu supponirenden kleinen Oeffnung hat (S. 309). Sodann können wir den Strom b als einen *zweiten Querschnitt* betrachten, nämlich als einen Querschnitt, der seinen Anfang in dem einen, sein Ende in dem andern Ufer von a hat. *Die beiden Ströme a und b können demnach als zwei auf der Fläche $\mathfrak{R}$ gezogene und die Fläche* **nicht** *zerstückelnde Querschnitte aufgefasst werden.*

Eine Nfach zusammenhängende Fläche verwandelt sich, wie wir wissen, durch Ausführung von $N-1$ die Fläche nicht zerstückelnde Querschnitte jederzeit in eine *einfach* zusammenhängende Fläche (S. 302 u. 303). Die Fläche $\mathfrak{R}$, mit welcher wir uns hier beschäftigen, ist, wie wir (Seite 313) gefunden haben, eine *dreifach* zusammenhängende. Demnach muss die Fläche $\mathfrak{R}'$, welche aus jener durch die beiden Querschnitte a und b entsteht, eine *einfach* zusammenhängende Fläche sein.

Die Fläche $\mathfrak{R}'$ wird sich demnach, weil sie *einfach* zusammenhängend ist, durch stetige Umformung in eine Elementarfläche, und zwar in eine Elementarfläche von ganz *beliebiger* Gestalt**) verwandeln lassen. So wird sie sich z. B. in die Form eines Rechtecks bringen lassen.

Fig. 79.

Dass eine derartige Umgestaltung möglich ist, wird im Folgenden zweckmässig sein im Auge zu behalten, wenn man sich durch die complicirte und wenig übersichtliche Gestalt,

---

*) Denn zwei oder mehrere von einander getrennte Flächenstücke werden zusammengenommen jederzeit mehr als *eine* Randcurve besitzen.

**) Offenbar lässt sich eine Elementarfläche durch stetige Umformung in jede beliebige andere Elementarfläche verwandeln. Kann daher eine gegebene Fläche durch stetige Umformung überhaupt zu einer Elementarfläche umgestaltet werden, so wird sie sich durch stetige Umformung nicht nur in diese, sondern auch in jede beliebige andere Elementarfläche verwandeln lassen.

welche $\mathfrak{R}'$ von Hause aus besitzt, keine unnöthigen Schwierigkeiten bereiten will. Das Rechteck, in welches $\mathfrak{R}'$ umgeformt werden kann — es mag kurzweg die Elementarform von $\mathfrak{R}'$ genannt werden — wird, ebenso wie $\mathfrak{R}'$ selber, vier Ecken α, β, γ, δ haben und vier Seiten besitzen, welche durch die vier Uferlinien der beiden Ströme a, b dargestellt sind. In der vorstehenden Figur ist dieses Rechteck dargestellt. Diejenigen Seiten, welche von den linken Uferlinien der Ströme a, b gebildet werden, sind, ebenso wie bei $\mathfrak{R}'$ selber, durch stärkere Striche angegeben, diejenigen Seiten hingegen, welche durch die rechten Uferlinien jener Ströme gebildet werden, durch schwächere Striche bezeichnet. Zugleich sind die Richtungen der neben diesen Uferlinien hinfliessenden Ströme a und b, ebenso wie früher bei Darstellung der Fläche $\mathfrak{R}'$, durch Pfeile angedeutet.

Wir wollen nun in ähnlicher Weise diejenige Riemann'sche Kugelfläche zu behandeln versuchen, welche zur eindeutigen Darstellung der Function

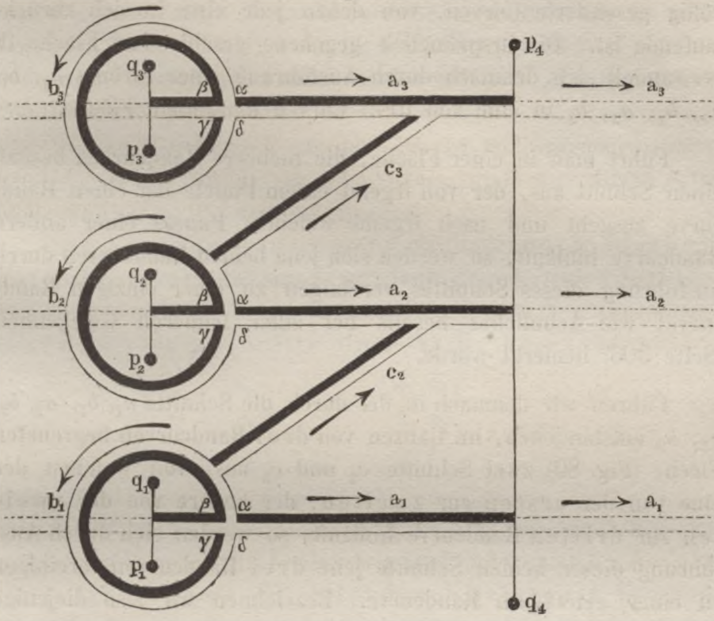
$$\sqrt{(z-p_1)(z-q_1)(z-p_2)(z-q_2)\ldots(z-p_4)(z-q_4)}$$

dient (S. 190). Diese Fläche mag $\mathfrak{R}$ genannt werden. Sie besteht aus 2 über einander liegenden Blättern, besitzt 8 Windungspuncte erster Ordnung, und ist also, zufolge eines früher (Seite 312) gefundenen Satzes, eine $(8-2\cdot 2+3)$fach, d. i. 7fach zusammenhängende Fläche. Sie besitzt ferner 4 Uebergangslinien $p_1\,q_1$, $p_2\,q_2$, $p_3\,q_3$ und $p_4\,q_4$.

Die Fläche $\mathfrak{R}$ mag von denjenigen 6 Schnitten oder Strömen a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 durchzogen gedacht werden, welche in der nebenstehenden Figur angegeben sind. Jeder von diesen Strömen ist ein in sich zurücklaufender. Die Ströme a_1, a_2, a_3 fliessen zum Theil im oberen, zum Theil im untern Blatt der Fläche. Der Strom a_1 z. B. tritt, während er die Uebergangslinie $p_4\,q_4$ überschreitet, aus dem oberen Blatt in das untere; fliesst sodann hier in dem untern Blatt auf irgend welchem Wege fort, bis er zur Uebergangslinie $p_1\,q_1$ gelangt; beim Ueberschreiten dieser Linie tritt er wieder in das obere Blatt und fliesst nun hier in dem oberen Blatt so weit fort, bis er schliesslich in seine eigene Quelle wieder einmündet. Die Ströme b_1, b_2, b_3 bleiben ihrem ganzen Laufe nach beständig im oberen Blatt der Fläche. In der nebenstehenden Figur sind die Richtungen der Ströme a_1, a_2, a_3,

b_1, b_2, b_3 ebenso wie früher durch Pfeile angedeutet. Ferner sind daselbst die linken Uferlinien durch stärkere, die rechten durch schwächere Striche angegeben. Endlich sind diejenigen Strecken der Ströme, welche im oberen Blatt liegen, durch ununterbrochene, diejenigen, welche im unteren Blatt sich

Fig. 80.



befinden, durch punctirte Linien bezeichnet. Um die Figur nicht zu sehr zu überladen, sind dabei die Wege, welche die Ströme a_1, a_2, a_3 im unteren Blatt verfolgen, nicht vollständig angegeben; man kann sich diese Wege etwa ebenso denken wie in Fig. 77 (Seite 319), jedoch der Art, dass dieselben nirgends mit einander in Berührung kommen*).

*) Dass die Puncte p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3 in unserer Figur in einer geraden Linie, und dass die Puncte p_4, q_4 in einer damit parallelen Linie liegen, ist durchaus unwesentlich. Es ist diese Annahme über die Lage jener Puncte nur deswegen geschehen, damit die Figur an Uebersichtlichkeit gewinne. Es versteht sich aber von selber, dass die Ströme oder Schnitte a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 in ganz analoger Weise auch dann ausgeführt werden können, wenn jene Puncte irgend welche andere Lage besitzen.

Die vier Uferlinien der beiden Ströme a_1 und b_1 bilden — ebenso wie früher in Fig. 77 (Seite 319) — zusammengenommen eine einzige in sich zurücklaufende Curve. Gleiches gilt von den vier Uferlinien der Ströme a_2 und b_2; und Gleiches endlich auch von denen der Ströme a_3 und b_3. Im Ganzen bilden also die 12 Uferlinien der Ströme a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 drei von einander völlig gesonderte Curven, von denen jede eine in sich zurücklaufende ist. Die ursprünglich gegebene geschlossene Fläche $\mathfrak{R}$ verwandelt sich demnach durch Ausführung jener Ströme a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 in eine von drei Curven umrandete Fläche.

Führt man in einer Fläche, die mehrere Randcurven besitzt, einen Schnitt aus, der von irgend einem Puncte der einen Randcurve ausgeht und nach irgend welchem Puncte einer andern Randcurve hinläuft, so werden sich jene beiden Randcurven durch Ausführung dieses Schnittes vereinigen zu einer einzigen Randcurve; wie Aehnliches bereits bei einer früheren Gelegenheit (Seite 306) bemerkt wurde.

Führen wir demnach in der durch die Schnitte a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 entstandenen, im Ganzen von drei Randcurven begrenzten Fläche (Fig. 80) zwei Schnitte c_2 und c_3 aus, von welchen der eine von der ersten zur zweiten, der andere von der zweiten zur dritten Randcurve hinläuft, so werden sich durch Ausführung dieser beiden Schnitte jene drei Randcurven vereinigen zu einer einzigen Randcurve. Bezeichnen wir also diejenige Gestalt, in welche die Fläche $\mathfrak{R}$ durch gleichzeitige Ausführung der Schnitte a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 und der Schnitte c_2, c_3 versetzt wird, mit $\mathfrak{R}'$, so wird $\mathfrak{R}'$ nur eine einzige Randcurve besitzen, folglich kein System von mehreren Flächenstücken, sondern eine einzige in sich zusammenhängende Fläche vorstellen.

Die Ströme

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ c_2,\ c_3$$

können in Bezug auf die ursprünglich gegebene Riemann'sche Fläche $\mathfrak{R}$ als ein System von sechs Querschnitten aufgefasst werden. Zuvörderst kann nämlich a_1 als erster Querschnitt angesehen werden, als ein Querschnitt, der seinen Anfang und sein Ende in der auf $\mathfrak{R}$ zu supponirenden kleinen Oeffnung hat (S. 309). Sodann kann b_1 als zweiter Querschnitt betrachtet werden, nämlich als ein Querschnitt, welcher seinen Anfang in dem einen, und sein Ende in dem andern Ufer von a_1 hat.

Nunmehr können wir die beiden Ströme c_2 und a_2 zusammengenommen als einen dritten Querschnitt, nämlich als einen Querschnitt auffassen, welcher in einem Uferpunct des zweiten Querschnittes entspringt, und in einen Punct seines eigenen Laufes einmündet*). Ferner können wir den Strom b_2 als einen vierten Querschnitt betrachten, welcher in einem Uferpuncte des dritten Querschnittes entspringt und in den gegenüberliegenden Uferpunct jenes Querschnittes einmündet.

Und endlich können wir nun die beiden Ströme c_3 und a_3 zusammengenommen als einen fünften, und den Strom b_3 asl einen sechsten Querschnitt ansehen.

Die von einer einzigen Curve umrandete Fläche $\mathfrak{R}'$ entsteht also aus der ursprünglich gegebenen geschlossenen Fläche $\mathfrak{R}$ durch Ausführung von 6 Querschnitten; diese Querschnitte sind der Reihe nach durch

1) a_1,	2) b_1,
3) $c_2 + a_2$,	4) b_2,
5) $c_3 + a_3$,	6) b_3

dargestellt.

Die Fläche $\mathfrak{R}$ ist, wie wir zu Anfang (Seite 322) gesehen hatten, eine 7fach zusammenhängende. Zufolge eines früher (Seite 303) gefundenen Satzes ist demnach die Fläche $\mathfrak{R}'$ eine einfach zusammenhängende.

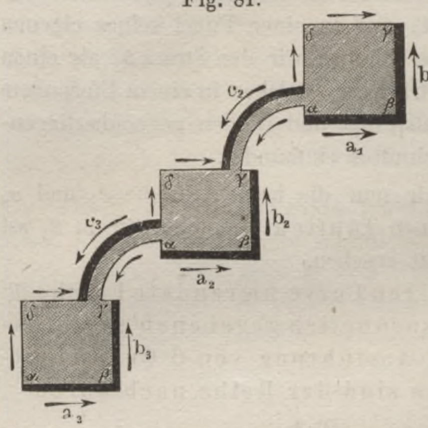
Daraus aber folgt, dass die Fläche $\mathfrak{R}'$ durch stetige Umformung in eine beliebig gestaltete Elementarfläche verwandelt werden kann. So wird sich dieselbe z. B. durch stetige Umformung in diejenige Elementarfläche umgestalten lassen, welche in der folgenden Figur abgebildet ist, und welche aus drei Rechtecken besteht, die durch zwei Flächenstreifen mit einander verbunden sind. In dieser Figur sind, ebenso wie bei $\mathfrak{R}'$ selber, die linken Uferlinien der Ströme a, b, c durch stärkere, die rechten durch schwächere Striche angegeben. Auch sind daselbst

*) Die beiden Ströme c_2 und a_2 zusammengenommen können also als ein Querschnitt von solcher Art angesehen werden, wie der in Fig. 67 Seite 293 abgebildete.

die Richtungen der neben diesen Linien hinfliessenden Ströme wiederum durch Pfeile angedeutet.

Diese Elementarfläche (Fig. 81), in welche die Fläche $\mathfrak{R}'$ durch stetige Umformung umgewandelt werden kann, soll in Zukunft kurzweg die Elementarform der Fläche $\mathfrak{R}'$ genannt werden. Es giebt uns dieselbe, unter andern Vortheilen, eine deutliche Uebersicht von der Art und Weise, in welcher die 16 Uferlinien der 8 Ströme a, b, c zu einer einzigen, in sich zurücklaufenden Curve zusammenhängen. Bei einer positiven Umlaufung der Fläche $\mathfrak{R}'$ wird man all' diese Uferlinien, und zwar die l i n k e n Uferlinien stromabwärts, die r e c h t e n stromaufwärts zu durchschreiten haben. (Vergl. S. 317.)

Fig. 81.



Es bedarf nunmehr kaum noch der Bemerkung, dass in ganz analoger Weise auch diejenige Riemann'sche Kugelfläche behandelt werden kann, welche dient, um die Function

$$\sqrt{(z-p_1)(z-q_1)(z-p_2)(z-q_2)\ldots(z-p_{s+1})(z-q_{s+1})}$$

auf eindeutige Weise räumlich auszubreiten.

Diese Fläche — sie mag $\mathfrak{R}$ genannt werden — besitzt 2 Blätter, ferner $2s + 2$ Windungspuncte $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots p_{s+1}, q_{s+1}$ und demgemäss $s + 1$ Uebergangslinien. Daraus folgt, dass diese Fläche $(2s + 2 - 2\cdot 2 + 3)$fach, d. i. $(2s + 1)$fach zusammenhängend ist. (Satz S. 312.)

Durch gewisse $2s$ Querschnitte, welche, dem Früheren analog, mit

1) a_1,	2) b_1,
3) $c_2 + a_2$,	4) b_2,
5) $c_3 + a_3$,	6) b_3,
. . . .	. . . . . .
$2s-1$) $c_s + a_s$,	$2s$) b_s

bezeichnet werden können, wird sich die Fläche $\mathfrak{R}$ in eine gewisse einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{R}'$ verwandeln lassen.

Und die so erhaltene Fläche $\mathfrak{R}'$ wird sich ihrerseits endlich durch stetige Umformung in eine Elementarfläche verwandeln lassen. Diese Elementarfläche — die Elementarform von $\mathfrak{R}'$ — können wir uns dabei wiederum, ähnlich wie früher, aus s Rechtecken zusammengesetzt denken, welche durch $s-1$ Flächenstreifen mit einander verbunden sind.

Sechster Abschnitt. Untersuchung eines von $x + iy$ abhängenden Differentiales, welches auf einem gegebenen Theil einer Riemann'schen Kugelfläche überall eindeutig und stetig ist.

Es sei $\mathfrak{S}$ irgend ein Theil einer beliebig gegebenen Riemann'schen Kugelfläche, ein Theil, welcher von beliebig vielen und beliebig gestalteten Randcurven begrenzt ist. Ferner seien F und f irgend zwei von $x + iy$ abhängende Functionen, welche auf $\mathfrak{S}$ allenthalben eindeutig und stetig sind.

Der Flächentheil $\mathfrak{S}$ mag durch irgend welche Schnitte in einzelne Stücke $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, ... zerlegt werden, von welchen jedes nur eine Randcurve besitzt und nicht mehr als höchstens einen Windungspunct in sich enthält; irgend eines von diesen Stücken sei $\mathfrak{A}_\varkappa$. Wir bezeichnen die beiden Bilder, welche $\mathfrak{A}_\varkappa$ sammt den darauf ausgebreiteten Werthen von f und F in seinem ursprünglichen und in seinem natürlichen Zustande darbietet, mit:

$$(\mathfrak{A}_\varkappa,\ x + iy,\ f,\ F)$$

und mit:

$$(\mathfrak{a}_\varkappa,\ \xi + i\eta,\ \varphi,\ \Phi).$$

Alsdann wird $\mathfrak{a}_\varkappa$ eine gewisse Elementarfläche sein. Zugleich werden φ; Φ zwei auf $\mathfrak{a}_\varkappa$ ausgebreitete Functionen vorstellen, deren Werthe in jedem Puncte $\xi + i\eta$ identisch mit denjenigen sind, welche die Functionen f, F in dem correspondirenden Puncte $x + iy$ besitzen. Und diese Functionen φ, Φ werden, ebenso wie f, F auf $\mathfrak{A}_\varkappa$, auf der Elementarfläche $\mathfrak{a}_\varkappa$ überall eindeutig und stetig sein.

Zufolge eines früher (Seite 92) gefundenen Satzes muss daher das in positiver Richtung über den Rand von $\mathfrak{a}_\varkappa$ hinerstreckte Integral $\int \Phi\, d\varphi$ gleich Null sein. Dieses Integral ist aber gleichwerthig mit dem in positiver Richtung um $\mathfrak{A}_\varkappa$ herumlaufenden Integral $\int F df$. Somit ergiebt sich:

$$\int\limits_{\mathfrak{A}_\varkappa} F df = 0.$$

Bilden wir nun diese Gleichung der Reihe nach für sämmtliche Flächenstücke $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \ldots$, in welche der gegebene Flächentheil $\mathfrak{S}$ durch die zu Anfang ausgeführten Schnitte zerfallen ist, so werden, falls man all' diese Gleichungen addirt, diejenigen Integraltheile, welche jenen Schnittlinien angehören, sich gegenseitig zerstören, also nur diejenigen Integraltheile übrig bleiben, welche dem ursprünglichen Rande von $\mathfrak{S}$ angehören. Durch die in Rede stehende Addition ergiebt sich demnach unmittelbar folgende Gleichung:

$$\int\limits_{\mathfrak{S}} F df = 0,$$

wo die Integration über sämmtliche Randcurven von $\mathfrak{S}$ in positiver Richtung hinerstreckt ist.

Sind also f und F zwei von $x + iy$ abhängende Functionen, welche auf irgend einem Theile $\mathfrak{S}$ einer Riemann'schen Kugelfläche überall eindeutig und stetig sind, so ist das über sämmtliche Randcurven von $\mathfrak{S}$ in positiver Richtung hinerstreckte Integral

$$\int\limits_{\mathfrak{S}} F df$$

jederzeit gleich Null.

Dass die in unserem Differential $F df$ enthaltenen Functionen f und F auf dem Flächentheile $\mathfrak{S}$ überall stetig sind, ist zur Gültigkeit dieses Satzes nicht unbedingt nothwendig. Um hierauf näher einzugehen, müssen wir zunächst einige Bemerkungen voranschicken.

Versteht man unter f_1 eine beliebig gewählte, von $x + iy$ abhängende Function, so wird das gegebene Differential

$$F \, . \, df$$

identisch sein mit folgendem:

$$F \frac{df}{df_1} \, . \, df_1.$$

Die in dem gegebenen Differential Fdf enthaltenen Functionen f und F können also — ohne dass dabei der Werth des Differentiales irgend welche Aenderung erleidet — durch zwei andere Functionen f_1 und F_1 ersetzt werden, von welchen die erstere ganz beliebig, die letztere gleich $F\frac{df}{df_1}$ ist.

Wir wollen uns nun denken, die beiden gegebenen Functionen f, F wären auf dem betrachteten Flächentheile $\mathfrak{S}$ nicht überall eindeutig und stetig, es wäre aber

$$Fdf = F_1 df_1,$$

und es könne $\mathfrak{S}$ in Gedanken in zwei Stücke zerlegt werden, in ein Stück $\mathfrak{S}_0$, auf welchem f, F, und in ein anderes Stück $\mathfrak{S}_1$, auf welchem f_1, F_1 allenthalben eindeutig und stetig sind. Zufolge des eben gefundenen Satzes ergeben sich dann die Gleichungen:

$$\int_{\mathfrak{S}_0} Fdf = 0,$$

$$\int_{\mathfrak{S}_1} F_1 df_1 = 0,$$

wo das eine Integral in positiver Richtung um $\mathfrak{S}_0$, das andere in ebenfalls positiver Richtung um $\mathfrak{S}_1$ herumerstreckt ist. Da $Fdf = F_1 df_1$ ist, so können diese beiden Gleichungen auch so geschrieben werden:

$$\int_{\mathfrak{S}_0} Fdf = 0,$$

$$\int_{\mathfrak{S}_1} Fdf = 0.$$

Addirt man diese beiden Gleichungen, so werden diejenigen Integraltheile, welche der Grenze zwischen $\mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{S}_1$ angehören, sich gegenseitig zerstören, mithin nur diejenigen übrig bleiben, welche dem Rande des ursprünglich gegebenen Flächentheiles $\mathfrak{S}$ angehören. Und es wird sich also durch jene Addition die Gleichung

$$\int_{\mathfrak{S}} Fdf = 0$$

ergeben.

Wir sehen demnach, dass der zuvor aufgestellte Satz in dem hier betrachteten Falle ebenfalls noch gültig ist. Ebenso wird sich nachweisen lassen, dass derselbe auch dann in Kraft bleibt, wenn in dem gegebenen Flächentheile in Bezug auf die Eindeutigkeit und Stetigkeit der Functionen f, F nicht nur ein Ausnahmegebiet $\mathfrak{S}_1$, sondern beliebig viele Ausnahmegebiete $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, ... vorhanden sind, vorausgesetzt, dass in jedem solchen Gebiet die Functionen f, F durch zwei andere Functionen ersetzt werden können, die innerhalb jenes Gebietes eindeutig und stetig sind. Um uns in Bezug hierauf mit grösserer Kürze ausdrücken zu können, wird es zweckmässig sein, folgende Bezeichnung einzuführen:

Definition. Ein Differential Fdf soll auf einer gegebenen Fläche überall eindeutig und stetig genannt werden, sobald die darin enthaltenen Functionen f, F entweder an und für sich auf der Fläche überall eindeutig und stetig sind, oder sobald sie wenigstens in jedem Gebiet der Fläche, wo solches nicht der Fall ist, durch zwei andere Functionen ersetzt werden können, welche innerhalb jenes Ausnahmegebietes mit den genannten beiden Eigenschaften behaftet sind.

Und nunmehr kann das allgemeine Resultat, zu welchem wir gelangt sind, gegenwärtig so ausgesprochen werden:

Versteht man unter $\mathfrak{S}$ irgend welchen Theil einer Riemann'schen Kugelfläche, und ferner unter Fdf ein von $x + iy$ abhängendes Differential, welches auf $\mathfrak{S}$ allenthalben eindeutig und stetig ist, so wird das über sämmtliche Randcurven von $\mathfrak{S}$ in positiver Richtung hinerstreckte Integral:

$$\int_{\mathfrak{S}} Fdf$$

jederzeit gleich Null sein.

Es sei wiederum $\mathfrak{S}$ irgend ein Theil einer Riemann'schen Kugelfläche, und Fdf ein gegebenes von $x + iy$ abhängendes Differential, welches auf $\mathfrak{S}$ allenthalben eindeutig und stetig ist. Wir wollen uns auf $\mathfrak{S}$ irgend zwei Puncte $a + ib = c$ und $x + iy = z$ denken, von welchen der erstere fest, der letztere beweglich sein soll, und das längs irgend welcher Curve von c nach z hinerstreckte Integral

$$\int_c^z Fdf$$

in Betracht ziehen. Lassen wir den beweglichen Endpunct der Integrationscurve in beliebiger Richtung um eine kleine Strecke weiter fortrücken, so wird gleichzeitig der Werth des Integrales einen gewissen Zuwachs erhalten. Ist $z \dots z'$ das kleine Linienelement, auf welchem der Punct fortrückt, so wird dieser Zuwachs durch

$$\int_z^{z'} F df,$$

nämlich durch ein Integral dargestellt sein, welches über jenes Linienelement $z \dots z'$ sich hinerstreckt.

Unserer Voraussetzung zufolge ist das Differential Fdf auf dem gegebenen Flächentheile $\mathfrak{S}$ allenthalben s t e t i g. Der durch

$$\int_z^{z'} F df$$

dargestellte Zuwachs wird daher, sobald das Linienelement $z \dots z'$ u n e n d l i c h k l e i n ist, ebenfalls u n e n d l i c h k l e i n sein. Somit sehen wir, dass das von uns betrachtete Integral

$$\int_c^{z} F df$$

bei einer unendlich kleinen Verschiebung von z eine Aenderung erleidet, welche ebenfalls unendlich klein ist, d a s s a l s o d i e s e s I n t e g r a l e i n e n W e r t h b e s i t z t, w e l c h e r b e i m w e i t e r e n V o r r ü c k e n d e s P u n c t e s z s i c h S c h r i t t f ü r S c h r i t t a u f s t e t i g e W e i s e ä n d e r t.

Wir gehen in der Untersuchung des vorliegenden Integrales weiter vorwärts; fürs Erste wollen wir dabei aber annehmen, der gegebene Flächentheil $\mathfrak{S}$ wäre ein e i n f a c h z u s a m m e n h ä n g e n d e r (vgl. S. 294).

Auf dem Flächentheil $\mathfrak{S}$ mögen zwei Curven σ und σ' gezogen werden, welche von dem festen Puncte c auf verschiedenen Wegen nach irgend welchem andern Puncte z hinlaufen; das längs σ von c nach z hinerstreckte Integral $\int F df$ mag mit

$$\int_\sigma F df,$$

und das längs σ' ebenfalls von c nach z hinerstreckte Integral mit

$$\int_{\sigma'} F\,df$$

bezeichnet werden.

Eine einfach zusammenhängende Fläche zerfällt durch einen Rückkehrschnitt jederzeit in zwei von einander völlig getrennte Flächenstücke (S. 295). Demnach wird der gegebene Flächentheil $\mathfrak{S}$ durch einen Schnitt, der von c (Fig. 82) längs σ bis z, und von z längs σ' bis nach c zurückläuft, ebenfalls in zwei von einander völlig getrennte Stücke zerfallen; und zwar in ein Stück $\mathfrak{S}_1$, welches von dem einen Ufer des Rückkehrschnittes $\sigma + \sigma'$ umrandet ist, und in ein anderes Stück $\mathfrak{S}_2$, dessen Rand theils durch das andere Ufer jenes Rückkehrschnittes, theils durch die ursprünglichen Begrenzungslinien des Flächentheiles $\mathfrak{S}$ dargestellt wird.

Fig. 82.

Wir betrachten das Flächenstück $\mathfrak{S}_1$. Da das Differential $F\,df$ auf $\mathfrak{S}$, mithin auch auf $\mathfrak{S}_1$ allenthalben eindeutig und stetig ist, so muss das in positiver Richtung um $\mathfrak{S}_1$ herumerstreckte Integral $\int F\,df$, zufolge des vorhin (S. 330) gefundenen Satzes gleich Null sein. Somit ergiebt sich:

$$\int_{\sigma} F\,df - \int_{\sigma'} F\,df = 0,\text{*)}$$

d. i.

$$\int_{\sigma} F\,df = \int_{\sigma'} F\,df.$$

Denken wir uns auf dem Flächentheile $\mathfrak{S}$ beliebig viele Curven σ, σ', σ'', σ''', ... gezogen, welche sämmtlich von dem

---

*) Das in positiver Richtung um $\mathfrak{S}_1$ herumerstreckte Integral $\int F\,df$ lässt sich nämlich in zwei Theile zerlegen, von welchen der eine längs σ von c nach z, der andere längs σ' von z nach c hinerstreckt ist. Zufolge unserer Bezeichnung ist der erstere Theil gleich $+\int_{\sigma} F\,df$, der letztere hingegen gleich $-\int_{\sigma'} F\,df$.

festen Puncte c nach irgend welchem andern Puncte z hinlaufen, so wird sich in gleicher Weise darthun lassen, dass das Integral

$$\int_c^z F\,df$$

— gleichgültig, ob es längs σ, längs σ', längs σ'' oder längs irgend welcher andern Curve von c nach z hinerstreckt ist — immer ein und denselben Werth besitzt. Vorausgesetzt wird dabei nur, dass jene Curven $\sigma, \sigma', \sigma'', \sigma''', \ldots$ ihrem ganzen Laufe nach im Innern von $\mathfrak{S}$ bleiben, dass sie also den Rand von $\mathfrak{S}$ nirgends überschreiten.*)

Setzen wir also

$$\int_c^z F\,df = W(z),$$

und verstehen wir dabei unter $c \ldots z$ eine Integrationscurve, welche den Rand des Flächentheiles $\mathfrak{S}$ niemals überschreiten darf, im Innern dieses Flächentheiles aber eine völlig freie Beweglichkeit besitzt, so wird $W(z)$ eine von der Lage des Punctes z abhängende Grösse sein, die für jeden Punct z immer nur einen einzigen Werth besitzt.

Nun haben wir vorhin (S. 331) bereits gefunden, dass der Werth dieses Integrales beim weiteren Fortrücken des Punctes z sich Schritt für Schritt auf stetige Weise ändert.

Demnach sind uns in Bezug auf die Grösse $W(z)$ gegenwärtig zwei Eigenschaften bekannt. Einmal wissen wir, dass sie für jeden zum Flächentheil $\mathfrak{S}$ gehörigen Punct immer nur einen Werth besitzt; und andererseits wissen wir, dass sie beim weite-

---

*) Ob die Curven $\sigma, \sigma', \sigma'', \sigma''', \ldots$ einander durchkreuzen oder nicht, ist völlig gleichgültig. Sind z. B. σ und σ' zwei einander in einem oder auch in mehreren Puncten durchschneidende Curven, so wird man eine dritte Curve ϱ zu Hülfe nehmen, welche ebenfalls von c nach z geht, ebenfalls ihrem ganzen Laufe nach innerhalb $\mathfrak{S}$ bleibt, und welche ausserdem weder mit σ noch auch mit σ' sich irgendwo durchkreuzt. Sodann wird sich sofort nachweisen lassen, dass das längs ϱ hinerstreckte Integral mit dem längs σ hinerstreckten gleichwerthig ist, und dass es ebenso auch gleichwerthig ist mit dem über σ' hin ausgedehnten Integrale. Daraus aber folgt sofort, dass die auf σ und σ' hinlaufenden Integrale auch unter einander gleichwerthig sind.

ren Fortrücken des Punctes z sich Schritt für Schritt auf stetige Weise ändert. Somit ergiebt sich, dass $W(z)$ eine von z abhängende Function ist, die auf dem Flächentheile $\mathfrak{S}$ allenthalben **eindeutig** und **stetig** bleibt.

Es seien z_1 und z_2 irgend zwei zum Flächentheile $\mathfrak{S}$ gehörige Puncte. Von dem festen Puncte c aus ziehen wir eine Curve, welche auf beliebigem Wege fortschreitet, jedoch beständig im Innern von $\mathfrak{S}$ bleibt; wir lassen die Curve von c aus zuerst nach z_1, und dann von z_1 weiter bis nach z_2 hin fortlaufen. Das längs dieser Curve von c nach z_1 hinerstreckte Integral

$$\int_c^{z_1} F df$$

wird alsdann denjenigen Werth repräsentiren, welchen die eindeutige Function W im Puncte z_1 besitzt, also $= W(z_1)$ sein. Und ebenso wird das längs jener Curve von c nach z_2 hinerstreckte Integral

$$\int_c^{z_2} F df$$

denjenigen Werth darstellen, welchen W in z_2 besitzt, mithin $= W(z_2)$ sein. Die Differenz dieser beiden Integrale ist nichts Anderes als das auf unserer Curve von z_1 nach z_2 hinerstreckte Integral

$$\int_{z_1}^{z_2} F df;$$

und dieses letztere wird demnach $= W(z_2) - W(z_1)$ sein. Sind also, können wir sagen, z_1 und z_2 irgend zwei zu $\mathfrak{S}$ gehörige Puncte, so ist das auf beliebigem Wege, jedoch im Innern des Flächentheiles $\mathfrak{S}$ von z_1 nach z_2 hinlaufende Integral

$$\int_{z_1}^{z_2} F df$$

jederzeit $= W(z_2) - W(z_1)$.

Wir fassen die Resultate unserer Untersuchung in folgenden Satz zusammen.

Ist $\mathfrak{S}$ ein einfach zusammenhängender Theil einer Riemann'schen Kugelfläche, und ist Fdf ein von z abhängendes Differential, welches auf $\mathfrak{S}$ überall eindeutig und stetig bleibt (vergl. die Definition S. 330), so wird das von einem festen Puncte c ausgehende und in seiner weiteren Fortbewegung auf den Flächentheil $\mathfrak{S}$ beschränkte Integral

$$W(z) = \int_c^z Fdf$$

eine von z abhängende Function sein, die auf $\mathfrak{S}$ allenthalben eindeutig und stetig bleibt.

Zugleich wird das im Innern von $\mathfrak{S}$ auf beliebigem Wege von irgend einem Puncte z_1 bis zu irgend einem andern Puncte z_2 hinerstreckte Integral

$$\int_{z_1}^{z_2} Fdf$$

gleich der Differenz der beiden Werthe sein, welche die eben genannte eindeutige Function W in den Puncten z_1 und z_2 besitzt, also gleich

$$W(z_2) - W(z_1)$$

sein.

Siebenter Abschnitt. Fortsetzung. Das auf einer Riemann-schen Kugelfläche von einem festen Punct $a + ib$ nach einem beweglichen Punct $x + iy$ hinerstreckte Integral $\int Fdf$ kann, falls Fdf auf jener Fläche überall eindeutig und stetig ist, durch geeignete Beschränkung seiner Bahn in eine von $x + iy$ abhängende Function verwandelt werden, die daselbst ebenfalls überall eindeutig und stetig ist.

Es sei $\mathfrak{R}$ eine beliebig gegebene Riemann'sche Kugelfläche; ferner sei Fdf ein von z abhängendes Differential, welches auf $\mathfrak{R}$ überall eindeutig und stetig ist. Das auf der Fläche $\mathfrak{R}$ von einem festen Punct c nach irgend einem andern Puncte z hinlaufende Integral

$$\int_c^z Fdf$$

mag je nach Umständen bald mit $\Omega(z)$, bald mit $W(z)$ bezeichnet werden. $\Omega(z)$ mag nämlich dasselbe genannt werden, sobald seine Integrationscurve auf der Fläche eine völlig freie Beweglichkeit besitzen soll; $W(z)$ hingegen, sobald die Beweglichkeit jener Curve auf gewisse Weise beschränkt sein soll.

Um diese Beschränkung näher angeben zu können, denken wir uns die Fläche $\mathfrak{R}$ durch irgend welche Schnitte oder Ströme $a, b, c, \ldots$ in eine Fläche $\mathfrak{R}'$ verwandelt, die einfach zusammenhängend ist, und die also auch nur eine einzige Randcurve besitzt; natürlich wird diese Curve eine in sich zurücklaufende sein; sie wird zusammengesetzt sein aus den Uferlinien der Ströme $a, b, c, \ldots$ Soll nun die vorhin genannte Integrationscurve die Ströme $a, b, c, \ldots$ zu überschreiten verhindert, mithin im Innern der Fläche $\mathfrak{R}'$ zu bleiben gezwungen sein, so mag das Integral mit $W(z)$ bezeichnet werden. Unter

$$\Omega(z) = \int_c^z F\,df$$

wird also ein völlig frei bewegliches, unter

$$W(z) = \int_c^z F\,df$$

hingegen ein in seiner Bewegung auf die Fläche $\mathfrak{R}'$ beschränktes Integral zu verstehen sein.

Auf das letztere Integral kann, weil $\mathfrak{R}'$ eine einfach zusammenhängende Fläche ist, und weil $F\,df$ ein Differential vorstellt, welches auf $\mathfrak{R}$, mithin auch auf $\mathfrak{R}'$ allenthalben eindeutig und stetig bleibt, unmittelbar der vorhergehende Satz in Anwendung gebracht werden. Diesem zufolge muss

$$W(z) = \int_c^z F\,df$$

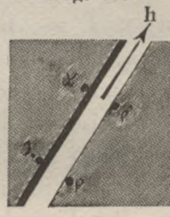
eine Function sein, welche auf $\mathfrak{R}'$ allenthalben eindeutig und stetig ist.

Wir untersuchen diejenigen Werthe, welche $W(z)$ am Rande von $\mathfrak{R}'$, d. i. in den Uferlinien des Stromnetzes $a, b, c, \ldots$ besitzt. Wir können uns jenes Netz aus lauter unverzweigten

Stromstrecken zusammengesetzt denken. Jede von diesen Stromstrecken wird dann von einem Knotenpunct des Netzes zu einem andern Knotenpuncte desselben hinlaufen, dazwischen aber von Knotenpuncten völlig frei sein. Das Netz mag im Ganzen aus ν solchen unverzweigten Stromstrecken bestehen; dieselben mögen bezeichnet werden mit $h_1, h_2, \ldots h_\nu$.

Es sei h irgend eine unter diesen Stromstrecken, ferner seien (Fig. 83) $\lambda\lambda'$ und $\varrho\varrho'$ irgend zwei einander gegenüberliegende Theile des linken und rechten Ufers von h. Da das Differential Fdf nicht nur auf $\mathfrak{R}'$, sondern auch auf der noch unversehrten Fläche $\mathfrak{R}$ überall eindeutig ist, so werden die Werthe der Functionen F, f in je zwei auf dem linken und rechten Ufer von h einander gegenüberliegenden Puncten identisch dieselben sein. Demnach wird das längs des linken Ufers hinlaufende Integral

Fig. 83.



$$\int_{\lambda}^{\lambda'} F df$$

gleichwerthig sein mit dem längs des rechten Ufers hinlaufenden Integral

$$\int_{\varrho}^{\varrho'} F df.$$

Das erste Integral ist zufolge des vorhergehenden Satzes gleich der Differenz derjenigen beiden Werthe, welche die eindeutige Function $W(z)$ in den Puncten λ' und λ besitzt, also $= W(\lambda') - W(\lambda)$; und ebenso das zweite $= W(\varrho') - W(\varrho)$. Somit ergiebt sich:

$$W(\lambda') - W(\lambda) = W(\varrho') - W(\varrho),$$

oder, was dasselbe ist:

$$W(\lambda') - W(\varrho') = W(\lambda) - W(\varrho).$$

Nun waren λ, ϱ irgend zwei zu beiden Ufern von h einander gegenüberliegende Puncte, und λ', ϱ' irgend zwei andere solche Puncte. Stellt daher λ'', ϱ'' ein drittes Paar solcher Puncte vor, so wird sich in gleicher Weise darthun lassen, dass auch

$$W(\lambda'') - W(\varrho'') = W(\lambda) - W(\varrho)$$

ist. Die eindeutige Function $W(z)$ besitzt demnach in je zwei zu beiden Ufern der Stromstrecke h einander gegenüberliegenden Puncten Werthe, deren Differenz längs der Stromstrecke hin überall ein und dieselbe ist. Es mag diese Differenz mit H bezeichnet werden, und zwar in dem Sinne, dass H angiebt, um wie viel der auf dem linken Ufer vorhandene Werth grösser ist als der auf dem rechten Ufer befindliche; so dass also

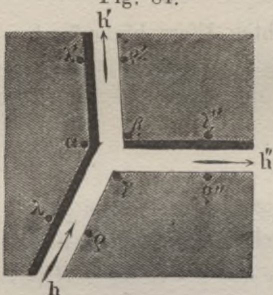
$$W(\lambda) - W(\varrho) = H,$$
$$W(\lambda') - W(\varrho') = H,$$
$$W(\lambda'') - W(\varrho'') = H$$

ist, u. s. w. In solcher Weise mögen die den Stromstrecken $h_1, h_2, \ldots h_\nu$ zugehörigen constanten Werthdifferenzen der Reihe nach mit $H_1, H_2, \ldots H_\nu$ bezeichnet werden.

Zwischen diesen Differenzen finden im Allgemeinen gewisse Relationen statt, die sich sofort ergeben, wenn man die Knotenpuncte des Stromnetzes näher betrachtet.

Der Einfachheit willen beschäftigen wir uns mit einem Knotenpunct, in welchem nur drei Stromstrecken zusammenstossen. Diese drei mögen (Fig. 84) mit h, h', h'' bezeichnet werden; und zwar mag angenommen werden, dass h nach jenem Puncte hinfliesst, dass hingegen h' und h'' von demselben fortfliessen. Sind λ, ϱ zwei zu beiden Ufern von h einander gegenüberliegende Puncte, und ist H die längs h vorhandene constante Werthdifferenz, so wird

Fig. 84.



$$H = W(\lambda) - W(\varrho)$$

sein. Ebenso wie λ und ϱ, ebenso kann man aber auch α und γ als zwei zu beiden Ufern von h einander gegenüberliegende Puncte ansehen.*) Somit ergiebt sich:

$$H = W(\lambda) - W(\varrho) = W(\alpha) - W(\gamma).$$

Und in ähnlicher Weise ergeben sich für die längs h' und h'' vorhandenen constanten Werthdifferenzen H' und H'' folgende Gleichungen:

---

*) Es ist nämlich zu beachten, dass die Ströme unendlich schmal zu denken sind, dass mithin die Puncte α, β, γ einander unendlich nahe liegen.

$$H' = W(\lambda') - W(\varrho') = W(\alpha) - W(\beta),$$
$$H'' = W(\lambda'') - W(\varrho'') = W(\beta) - W(\gamma).$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt nun sofort:

$$H = H' + H''.$$

Die Differenz der nach dem Knotenpuncte hinfliessenden Stromstrecke h ist also ebenso gross, wie die Differenzen der von jenem Punct fortfliessenden Stromstrecken h' und h'' zusammengenommen betragen. Zu einem ganz analogen Resultat wird man, wie nun leicht zu übersehen ist, auch dann gelangen, wenn in dem betrachteten Knotenpunct nicht drei, sondern beliebig viele Stromstrecken zusammenstossen, und zwar beliebig viele einfliessende, und auch beliebig viele wegfliessende.

Somit gelangen wir zu folgendem Satz:

Versteht man unter $\mathfrak{R}$ irgend eine Riemann'sche Kugelfläche, auf welcher das von z abhängende Differential Fdf überall eindeutig und stetig bleibt (vergl. die Definition S. 330), und versteht man ferner unter $\mathfrak{R}'$ diejenige einfach zusammenhängende Fläche, in welche sich $\mathfrak{R}$ durch Ausführung irgend eines Stromnetzes verwandelt: so wird das von einem festen Puncte c ausgehende und in seiner Bewegung auf die Fläche $\mathfrak{R}'$ beschränkte Integral

$$W(z) = \int_c^z F\,df$$

eine von z abhängende Function sein, die innerhalb $\mathfrak{R}'$ allenthalben eindeutig und stetig, und im Puncte c gleich Null ist.

Sind $h_1, h_2, \ldots h_\nu$ die unverzweigten Stromstrecken, aus welchen das in Anwendung gebrachte Stromnetz besteht, und sind ferner $W(\lambda)$ und $W(\varrho)$ die Werthe, welche die eindeutige Function $W(z)$ in zwei auf dem linken und rechten Ufer von $h_\varkappa$ einander gegenüberliegenden Puncten λ und ϱ besitzt, so wird

$$W(\lambda) - W(\varrho) = H_\varkappa$$

eine Differenz sein, die längs $h_\varkappa$ constant ist.

Diese constanten Differenzen $H_1, H_2, \ldots H_\nu$ sind mit einander verbunden durch gewisse Relationen. Betrachtet man nämlich die in irgend einem Knotenpunct des Netzes zusammenstossenden Stromstrecken, und unterscheidet man einerseits die daselbst einfliessenden, uud andererseits die von dem Punct wegfliessenden Stromstrecken, so wird die Summe der in den ersteren vorhandenen

Differenzen jederzeit ebenso gross sein als die Summe der in den letzteren vorhandenen.

Das Integral

$$\Omega(z) = \int_e^z F df$$

geht ebenfalls von c aus, ist aber vom Integrale $W(z)$ dadurch unterschieden, dass es in seiner Bewegung keinerlei Beschränkungen unterworfen ist. Während nämlich das Integral $W(z)$ über die Ströme $h_1, h_2, \ldots h_\nu$ niemals hinüberlaufen darf, ist es dem Integrale $\Omega(z)$ gestattet, jeden dieser Ströme an beliebiger Stelle und beliebig oft zu überschreiten. So lange eine solche Ueberschreitung noch nicht erfolgt ist, kann zwischen beiden Integralen keinerlei Unterschied stattfinden. In dem Augenblicke aber, wo eine solche Ueberschreitung vor sich geht, wird auch zwischen den Werthen der beiden Integrale eine wesentliche Verschiedenheit eintreten; wie wir sogleich sehen werden.

Wir betrachten das Integral $\Omega(z)$ in einem Augenblick, wo seine von c ausgehende Bahn bereits zwei von den Strömen $h_1, h_2, \ldots h_\nu$ überschritten hat. Der eine von diesen Strömen sei h, der andere h', und jeder von ihnen sei, wie wir der Einfachheit willen annehmen wollen, vom linken zum rechten Ufer hin überschritten worden. Sind λ, ϱ die beiden Puncte, in welchen die Bahn über das linke und rechte Ufer des Stromes h, ferner λ', ϱ' diejenigen, in welchen sie über die beiden Ufer des Stromes h' hinweggeht, und ist endlich z derjenige Punct der Fläche, bis zu welchem die Bahn des Integrales in dem betrachteten Augenblick vorgedrungen ist, so wird die Bahn in diesem Augenblick aus drei Theilen bestehen, von welchen der erste von c bis λ, der zweite von ϱ bis λ', der dritte von ϱ' bis z geht. Das längs dieser Bahn hinerstreckte Integral

$$(1) \qquad \Omega(z) = \int_c^z F df$$

kann demnach ebenfalls in drei Theile zerlegt werden:

$$(2) \qquad \Omega(z) = \int_c^\lambda F df + \int_\varrho^{\lambda'} F df + \int_{\varrho'}^z F df.$$

Vernachlässigt sind dabei die den kleinen Linienelementen $\lambda\varrho$ und $\lambda'\varrho'$ zugehörigen Integrale

$$\int_{\lambda}^{\varrho} F df, \quad \int_{\lambda'}^{\varrho'} F df.$$

Diese aber sind, weil das Differential Fdf auf der Fläche $\mathfrak{R}$ allenthalben eindeutig und stetig ist, und weil jene Linienelemente unendlich klein sind, ebenfalls unendlich klein, also mit Fug und Recht zu vernachlässigen.

Von den drei Stücken $c\lambda$, $\varrho\lambda'$, $\varrho' z$, aus welchen die betrachtete Bahn besteht, stellt jedes, für sich allein betrachtet, eine Linie vor, welche die Ströme $h_1, h_2, \ldots h_\nu$ nirgends überschreitet, also eine Linie, die ihrem ganzen Laufe nach innerhalb $\mathfrak{R}'$ bleibt. Das im Innern der Fläche $\mathfrak{R}'$ auf beliebigem Wege von irgend einem Puncte z_1 nach irgend einem andern Punct z_2 hinerstreckte Integral

$$\int_{z_1}^{z_2} F df$$

ist aber (vergl. S. 335) gleich:

$$W(z_2) - W(z_1).$$

Somit ergeben sich für die zuvor genannten drei Linien $c\lambda$, $\varrho\lambda'$, $\varrho' z$ der Reihe nach folgende drei Gleichungen:

$$\int_{c}^{\lambda} F df = W(\lambda) - W(c),$$

$$\int_{\varrho}^{\lambda'} F df = W(\lambda') - W(\varrho),$$

$$\int_{\varrho'}^{z} F df = W(z) - W(\varrho');$$

folglich, wenn man diese Werthe in (2) substituirt:

(3) $\Omega(z) = W(z) - W(c) + W(\lambda) - W(\varrho) + W(\lambda') - W(\varrho')$.

Nach dem vorhergehenden Satze ist der Werth der eindeutigen Function $W(z)$ im Puncte c gleich Null, ferner

$$W(\lambda) - W(\varrho) = H,$$
$$W(\lambda') - W(\varrho') = H',$$

wo H, H' diejenigen Werthdifferenzen vorstellen, mit welchen die eindeutige Function $W(z)$ in den Strömen h, h' behaftet ist. Somit verwandelt sich die letztgefundene Gleichung (3) in:

(4) $$\Omega(z) = W(z) + H + H'.$$

Das also ist der Werth, mit welchem das Integral Ω in irgend einem Puncte z eintrifft, sobald dasselbe, um nach jenem Puncte hinzugelangen, zwei Ströme h, h', und zwar beide vom linken zum rechten Ufer überschritten hat.

Zu einem ganz ähnlichen Resultat würden wir gelangt sein, wenn wir dem Integrale Ω eine Bahn zuertheilt hätten, die ebenfalls nur die Ströme h, h', aber nicht vom linken zum rechten, sondern umgekehrt vom rechten zum linken Ufer überschreitet. An Stelle des Werthes (4) würden wir in diesem Falle, wie leicht zu übersehen ist, folgenden Werth gefunden haben:

$$\Omega(z) = W(z) - H - H'.$$

Denken wir uns ferner als Bahn des Integrales Ω eine Curve, welche wiederum von sämmtlichen Strömen $h_1, h_2, \ldots h_\nu$ nur die beiden Ströme h und h', jeden derselben aber mehrmals, den erstern l Male vom linken zum rechten Ufer und r Male in entgegengesetzter Richtung, den letztern l' Male vom linken zum rechten Ufer, und r' Male in entgegengesetzter Richtung überschreitet, so wird der Werth, mit welchem das Integral im Endpuncte dieser Bahn — er mag z heissen — eintrifft, folgender sein:

$$\Omega(z) = W(z) + (l - r)H + (l' - r')H'.$$

Solches ergiebt sich leicht, wenn man die durchlaufene Bahn, ähnlich wie vorhin, wiederum in einzelne Stücke zerlegt, von welchen jedes, für sich allein betrachtet, keinen der Ströme überschreitet. Im Allgemeinen gelangen wir zu folgendem Satz:

Haben Fdf, $W(z)$, $h_1, h_2, \ldots h_\nu$, $H_1, H_2, \ldots H_\nu$ und c dieselben Bedeutungen, wie in dem vorhergehenden Satz, und versteht man unter

$$\Omega(z) = \int_c^z F\,df$$

ein von dem festen Puncte c ausgehendes, und auf völlig willkür-

licher Bahn fortlaufendes Integral, so wird der Werth, mit welchem dieses Integral in irgend einem Puncte z eintrifft, von demjenigen, welchen die eindeutige Function $W(z)$ *daselbst besitzt, immer nur durch irgend welche Vielfache der Constanten* $H_1, H_2, \ldots H_\nu$ *verschieden sein.*

Läuft das Integral Ω *von dem festen Puncte c auf irgend welcher Bahn bis zu einem beliebigen andern Puncte z fort, und sind* $l_1, l_2, \ldots l_\nu$ *diejenigen Zahlen, welche angeben, wie oft diese Bahn die Ströme* $h_1, h_2, \ldots h_\nu$ *vom linken zum rechten Ufer überschritten hat, ferner* $r_1, r_2, \ldots r_\nu$ *diejenigen Zahlen, welche angeben, wie oft die Bahn über jene Ströme vom rechten zum linken Ufer hinweggelaufen ist, so wird der Werth, mit welchem das Integral im Endpuncte dieser Bahn, d. i. im Puncte z eintrifft, folgender sein:*

$$\Omega(z) = W(z) + (l_1 - r_1) H_1 + (l_2 - r_2) H_2 + \ldots + (l_\nu - r_\nu) H_\nu.$$

Denkt man sich also das Integral in einer unaufhörlich fortschreitenden, bald hierhin bald dorthin gehenden Bewegung begriffen, so wird der demselben in jedem Augenblick zufallende Werth $\Omega(z)$ *durch*

$$\Omega(z) = W(z) + m_1 H_1 + m_2 H_2 + \ldots + m_\nu H_\nu,$$

dargestellt sein; unter $m_1, m_2, \ldots m_\nu$ *sind hier ganze Zahlen zu verstehen, die während jener Bewegung im Allgemeinen constant bleiben, ab und zu aber, nämlich jedesmal, wenn das Integral einen der Ströme* $h_1, h_2, \ldots h_\nu$ *überschreitet, eine sprungweise Veränderung um* ± 1 *erfahren.*

Neunte Vorlesung.

Die Umkehrung des elliptischen Integrales.

Erster Abschnitt. Angabe des Problemes, um welches es sich bei der Umkehrung eines elliptischen Integrales handelt. Um für den Angriff des Problemes eine feste Basis zu gewinnen, werden gewisse Fundamentalconstanten, und ein damit zusammenhängendes fundamentales Flächengebiet eingeführt.

Es seien p, q beliebig gegebene, reelle oder imaginäre Constanten, ferner sei R oder $R(z)$ folgende von der Variablen z abhängende Grösse:

$$R = R(z) = \frac{1}{pq} \cdot \sqrt{(z^2 - p^2)(z^2 - q^2)}.$$

Diese Grösse besitzt im Allgemeinen für jedes z zwei einander entgegengesetzte Werthe, so z. B. für $z = 0$ die beiden Werthe $+ 1$ und $- 1$.

Es mag nun ferner unter Ω oder $\Omega(z)$ der Werth eines Integrales

$$\Omega = \Omega(z) = \int_0^z \frac{dz}{R}$$

verstanden werden, welches über eine s t e t i g zusammenhängende reelle oder imaginäre Werthreihe von z, und ebenso auch über eine s t e t i g zusammenhängende Werthreihe von R hinerstreckt ist; ebenso wie die erstere Reihe von dem Werthe 0 ausgeht, ebenso soll auch die letztere beständig von einem e i n d e u t i g festgesetzten Werthe, nämlich vom Werthe $+ 1$ ausgehen; die erstere wird also durch

$$0,\ z',\ z'',\ \ldots\ z,$$

die letztere durch

$$1,\ R',\ R'',\ \ldots\ R$$

darstellbar sein.

Sobald die Werthreihe von z durch eine der constanten Grössen $\pm p$, $\pm q$ hindurchgeht, wird gleichzeitig die Werthreihe von R durch den Werth 0 hindurchgehen; und es werden sich daher in einem solchen Augenblick jedesmals zwei Grössen darbieten, die beide unendlich wenig von 0 verschieden, unter einander aber entgegengesetzt sind, von welchen die letztgenannte Werthreihe, bei ihrem weiteren Fortgange, ganz nach Laune die eine oder auch die andere in sich aufnehmen kann. Während also die Reihe

$$0,\ z',\ z'',\ \ldots\ z$$

weiter und weiter fortschreitet, sich bald hierhin bald dorthin wendet, wird in der Schritt für Schritt nachfolgenden Werthreihe

$$1,\ R',\ R'',\ \ldots\ R$$

jedesmal, so oft die erstere durch eine der vier Grössen $\pm p$, $\pm q$ hindurchgeht, ein Zweifel über das Vorzeichen eintreten. Wir machen keinerlei Beschränkung, um diesen Zweifel und die damit verbundene Willkühr zu beseitigen. Die Bildungsweise oder Bahn des Integrales

$$\Omega\,(z) = \int_0^z \frac{dz}{R}$$

wird demnach im Allgemeinen durch Angabe der Grössen

$$0,\ z',\ z'',\ \ldots\ z$$

noch keineswegs eindeutig festgestellt sein, sondern erst dann völlig bestimmt sein, wenn die Grössenpaare

$$(0,\ 1),\ (z',\ R'),\ (z'',\ R''),\ \ldots\ (z,\ R)$$

angegeben sind, über welche das Integral hinerstreckt ist.

Wir werden uns hier mit der Umkehrung jenes Integrales beschäftigen, d. h. mit folgendem

Problem. Das Integral Ω läuft, von der Grösse 0 *aus, auf einer unbekannten und völlig willkührlichen Bahn vorwärts, und dringt schliesslich bis zu einer ebenfalls völlig unbekannten Grösse*

z vor. Gegeben ist der Werth $\Omega(z)$, mit welchem es in z eintrifft; es soll die Grösse z ermittelt werden.

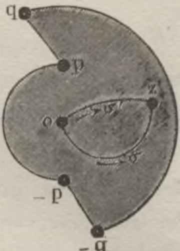
Bevor wir weiter gehen, muss zuerst auf gewisse, mit dem Problem in Verbindung stehende Constanten aufmerksam gemacht werden. Um von vorneherein diese Constanten zu characterisiren, erinnern wir an eine bekannte Gattung von Aufgaben aus der analytischen Geometrie.

Ist eine homogene Gleichung zweiten Grades zwischen den drei rechtwinkligen Coordinaten gegeben, und handelt es sich um irgend eine mit dieser Gleichung in Zusammenhang stehende Untersuchung, so wird man — wenigstens in vielen Fällen — gut thun, zuerst drei dieser Gleichung eigenthümliche Constanten zu berechnen; es sind dies, falls durch jene Gleichung ein Ellipsoid dargestellt wird, die drei Hauptachsen des Ellipsoides. Diese Constanten werden — und zwar gleichgültig, ob man sie wirklich ausrechnet, oder man sich dieselben nur berechnet denkt — im Allgemeinen von grossem Vortheil sein; sie werden in vielen Fällen für das ganze Gebäude der anzustellenden Untersuchung ein willkommenes Fundament bilden.

In ähnlicher Weise machen sich nun auch bei dem hier vorliegenden Problem gewisse Fundamental-Constanten geltend, die wir, um für unsere Operationen eine feste Basis zu gewinnen, gleich hier zu Anfang angeben wollen.

Wir denken uns die gegebenen Constanten p, $-p$, q, $-q$ nach der Gauss'schen Methode durch Puncte auf der Horizontalebene dargestellt; die Puncte p, $-p$ werden in Bezug auf den Anfangspunct $z = 0$ einander diametral gegenüber liegen, ebenso die Puncte q, $-q$. Sodann ziehen wir in dieser Ebene eine um den Punct $z = 0$ herumlaufende Curve, welche von $-q$ nach $-p$, dann nach p, und nach q geht, und schliesslich wieder nach $-q$ zurückkehrt (Fig. 85). Das von dieser Curve umschlossene Gebiet der Horizontalebene mag das fundamentale Flächengebiet genannt, und mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet werden; es wird dasselbe nur eine einzige Randcurve besitzen, und mit all seinen Puncten in der Endlichkeit liegen, folglich eine Elementarfläche sein.

Fig. 85.



Die Bahn unseres Integrales

$$\Omega = \int_0^z \frac{dz}{R}$$

nimmt ihren Anfang im Puncte 0, also in einem Puncte, der innerhalb des fundamentalen Flächengebietes liegt. Offenbar wird die unter dem Integrale vorhandene Grösse

$$\frac{1}{R}$$

eindeutig und stetig sein, so lange die Grenze des fundamentalen Gebietes von jener Bahn nicht überschritten wird; es wird demnach $\frac{1}{R}$ eine von z abhängende Function sein, die innerhalb der Fläche $\mathfrak{A}$ allenthalben eindeutig und stetig bleibt.

Es seien nun σ und σ' zwei Curven, welche vom Puncte 0 ausgehen, in irgend einem andern Puncte der Fläche $\mathfrak{A}$ wieder zusammentreffen, und ihrem ganzen Laufe nach innerhalb $\mathfrak{A}$ bleiben (Fig. 85); ferner sei $\mathfrak{a}$ der von diesen beiden Curven eingeschlossene Theil von $\mathfrak{A}$. Nach bekanntem Satze (S. 92) wird das in positiver Richtung um den Rand von $\mathfrak{a}$ herumerstreckte Integral

$$\int \frac{dz}{R}$$

alsdann gleich Null sein. Dieses Rand-Integral lässt sich in zwei Theile zerlegen, von welchen der eine längs σ von 0 nach z, der andere längs σ' von z nach 0 zurück geht; und wird daher, wenn man die über die Curven σ und σ' von 0 nach z hinerstreckten Integrale mit

$$\int_\sigma \frac{dz}{R} \quad \text{und} \quad \int_{\sigma'} \frac{dz}{R}$$

bezeichnet, gleich der Differenz

$$\int_\sigma \frac{dz}{R} - \int_{\sigma'} \frac{dz}{R}$$

sein. Somit ergiebt sich, dass diese Differenz gleich Null ist; also:

$$\int_\sigma \frac{dz}{R} = \int_{\sigma'} \frac{dz}{R}.$$

Das von 0 nach z hinlaufende Integral wird demnach bei seinem Eintreffen in z einen Werth besitzen, der von der durchschrittenen Bahn völlig unabhängig ist; vorausgesetzt, dass man nur solche Bahnen in Betracht zieht, die ihrem ganzen Laufe nach innerhalb $\mathfrak{A}$ bleiben. Oder mit andern Worten:

Das zur Untersuchung vorgelegte Integral:

$$\Omega(z) = \int_0^z \frac{dz}{R}$$

wird, sobald man seine Bewegung auf das fundamentale Flächengebiet $\mathfrak{A}$ beschränkt, innerhalb $\mathfrak{A}$ allenthalben eindeutig sein. Diejenigen Werthe, welche das Integral bei solcher Beschränkung in den Puncten p, $-p$, q, $-q$ annimmt, mögen mit

$$\overline{\Omega}(p), \quad \overline{\Omega}(-p), \quad \overline{\Omega}(q), \quad \overline{\Omega}(-q)$$

bezeichnet, und die diesen Puncten zugehörigen Fundamentalwerthe genannt werden.

Diese Fundamentalwerthe sind durch das gegebene Problem bereits vollständig bestimmt, werden nämlich, sobald die in jenem Probleme von Hause aus enthaltenen Constanten p, q numerisch gegeben sind, ebenfalls numerisch berechnet werden können. Wir denken uns diese Rechnung ein für allemal ausgeführt, und betrachten demgemäss jene vier Fundamentalwerthe als gewisse dem Probleme eigenthümliche Constanten. Diese Constanten sind es, welche in Verbindung mit dem Flächengebiet $\mathfrak{A}$ das Fundament bilden, von welchem unsere zur Lösung des Problemes erforderlichen Operationen getragen werden.

Uebrigens wird sich herausstellen, dass diese vier Constanten

$$\overline{\Omega}(p), \quad \overline{\Omega}(-p), \quad \overline{\Omega}(q), \quad \overline{\Omega}(-q)$$

nicht von einander unabhängig, sondern durch gewisse Relationen mit einander verbunden sind. Hierdurch wird die Anzahl derjenigen Constanten, deren Berechnung jedesmal erforderlich ist, auf zwei reducirt.

Zweiter Abschnitt. Der Betrachtung des elliptischen Integrales $\Omega(z)$ wird eine gewisse zweiblättrige Riemann'sche Kugelfläche $\mathfrak{R}$ zu Grunde gelegt. Nachdem diese Fläche durch geeignete Schnitte oder Ströme a, b in eine einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{R}'$ verwandelt ist, wird eine dem Integral $\Omega(z)$ conjugirte Function $W(z)$ eingeführt, welche innerhalb $\mathfrak{R}'$ überall eindeutig und stetig ist.

Die Bahn des Integrales

$$\Omega(z) = \int_0^z \frac{dz}{R}$$

ist eine ganz willkührliche, sie erstreckt sich über irgend welche stetig zusammenhängende Grössenreihe

$$0,\ z',\ z'',\ \ldots\ z.$$

Um aber die Bahn in jedem gegebenen Falle vollständig zu bestimmen, ist im Allgemeinen erforderlich, dass ausser dieser Grössenreihe gleichzeitig auch noch diejenigen Werthe

$$1,\ R',\ R'',\ \ldots\ R$$

angegeben werden, welche die Function R längs der Bahn hin besitzt.

Wir werden daher, wenn wir die Bahn des Integrales in bildlicher Weise, und zugleich mit vollständiger Bestimmtheit darstellen wollen, nicht die einblättrige Horizontalebene, sondern eine gewisse zweiblättrige Riemann'sche Fläche, nämlich diejenige in Anwendung bringen müssen, auf welcher der ganze Werthvorrath der Function R in eindeutiger Weise ausgebreitet werden kann. Durch eine Curve auf der Horizontalebene würde nämlich nur die Grössenreihe

$$0,\ z',\ z'',\ \ldots\ z$$

dargestellt werden; durch eine Curve hingegen, die auf der letztgenannten Fläche gezogen ist, wird gleichzeitig diese und auch die Grössenreihe

$$1,\ R',\ R'',\ \ldots\ R$$

bestimmt sein.

Die Riemann'sche zweiblättrige Fläche, welche erforderlich ist, um sämmtliche Werthe der Function

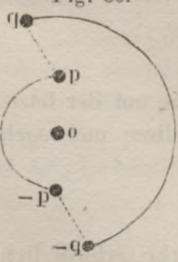
$$R = \frac{1}{pq}\sqrt{(z^2-p^2)\ (z^2-q^2)}$$

auf eindeutige Weise ausbreiten zu können, mag $\mathfrak{R}$ heissen; sie besitzt bekanntlich vier Windungspuncte p, $-p$, q, $-q$, und daneben zwei Uebergangslinien, durch welche diese Puncte paarweise mit einander verbunden sind. Diese beiden Linien können auf mannigfaltige Weise angenommen werden (Vgl. S. 190 u. 193).

Bei der Construction der Riemann'schen Fläche $\mathfrak{R}$ verfahren wir in folgender Weise. Wir nehmen zwei Horizontalebenen, welche nur durch einen unendlich kleinen Zwischenraum von einander getrennt sind; die untere der beiden Ebenen mag diejenige sein, in welcher wir vorhin das fundamentale Gebiet $\mathfrak{A}$ festgesetzt haben. Jenes Gebiet kann als ein Viereck angesehen werden, in welchem zwei einander gegenüberliegende Seiten durch die Linien $-p\,p$ und $-q\,q$ dargestellt sind. Längs dieser beiden Linien führen wir nun zwei Schnitte aus, von welchen jeder nicht nur die untere, sondern gleichzeitig auch die obere Horizontalebene durchdringt. Die vier Ufer des Schnittes $-p\,p$ heften wir kreuzweise mit einander zusammen, ebenso die vier Ufer des Schnittes $-q\,q$. Endlich verwandeln wir die durch diese Zusammenheftungen entstandene zweiblättrige Fläche durch Umformung in eine zweiblättrige Kugelfläche. Diese letztere ist dann die zu construirende Fläche $\mathfrak{R}$; und gleichzeitig sind alsdann die zuvor genannten Linien $-p\,p$ und $-q\,q$ die Uebergangslinien derselben.

Das fundamentale Gebiet $\mathfrak{A}$ wird bei der so erhaltenen Fläche $\mathfrak{R}$ dargestellt sein durch einen gewissen zum unteren Blatt gehörigen Flächentheil, nämlich durch einen Flächentheil, welcher sich in dem eben genannten Blatt vom Puncte $z = 0$ aus theils bis zu den Uebergangslinien $-p\,p$, $-q\,q$, theils bis zu zwei gewissen andern Linien hinerstreckt. Die beiden letztern Linien befinden sich natürlich, ebenso wie das ganze Gebiet $\mathfrak{A}$, im unteren Blatt; sie sind in der nebenstehenden Figur (Fig. 86) durch punctirte Striche angegeben.

Fig. 86.



Bei $z = 0$ besitzt die Fläche $\mathfrak{R}$ zwei über einander liegende Puncte. Die Bahn unseres Integrales Ω wird in demjenigen der beiden Puncte ihren Ausgang nehmen, welcher im Innern des fundamentalen Gebietes $\mathfrak{A}$ liegt, also im unteren Punct. Wir bezeichnen diesen kurzweg mit 0, denjenigen aber, welcher gerade über 0 im oberen Blatt sich befindet, zur bequemeren Unterscheidung mit $0'$. Im Puncte 0 wird demgemäss die Wurzelgrösse R den Werth $+1$, im Puncte $0'$ hingegen den Werth -1 besitzen.

Die Bahn unseres Integrales

$$\Omega(z) = \int_0^z \frac{dz}{R}$$

wird auf der Fläche $\mathfrak{R}$ durch eine vom Puncte 0 auslaufende und auf beliebigem Wege, bald im unteren, bald im oberen Blatt, fortgehende Curve dargestellt. Um den Werth zu untersuchen, mit welchem das längs einer solchen Curve fortlaufende Integral in irgend einem Puncte der Fläche anlangt, müssen wir zuvörderst das in dem Integrale vorhandene Differential

$$(\alpha.) \qquad \frac{dz}{R} = \frac{1}{R}\,dz$$

in Betrachtung nehmen, nämlich ermitteln, in wie weit dieses Differential auf der Fläche $\mathfrak{R}$ eindeutig und stetig bleibt. Was den Begriff der Eindeutigkeit und Stetigkeit bei Differentialen anbelangt, so stützen wir uns dabei auf die früher (S. 330) gegebene Definition.

Die beiden in dem Differential ($\alpha.$) enthaltenen Functionen $\frac{1}{R}$ und z sind auf der Fläche $\mathfrak{R}$ keineswegs überall stetig; denn die eine besitzt in den Puncten p, $-p$, q, $-q$, die andern in den beiden bei $z = \infty$ befindlichen Puncten unendlich grosse Werthe. Um nun das Verhalten des Differentiales in jenen sechs Puncten beurtheilen zu können, sind vor allen Dingen gewisse andere Formen zu beachten, welche das Differential sich aneignen kann.

Aus

$$R = \frac{1}{pq}\sqrt{(z^2 - p^2)(z^2 - q^2)}$$

folgt durch Differentation:

$$dR = \frac{(2z^2 - p^2 - q^2)\,z\,dz}{p^2\,q^2\,R},$$

d. i.:

$$\frac{dz}{R} = \frac{p^2\,q^2}{(2z^2 - p^2 - q^2)\,z}\,dR;$$

somit können wir dem Differential (α.), falls es uns beliebt, auch die Form geben:

$$(\beta.)\qquad \frac{p^2\,q^2}{(2z^2-p^2-q^2)\,z}\;dR.$$

Beachten wir ferner, dass $d\frac{1}{z} = -\frac{dz}{z^2}$, mithin $dz = -z^2 . d\frac{1}{z}$ ist, so sehen wir, dass jenem Differential (α.) andererseits auch folgende Form verliehen werden kann:

$$(\gamma.)\qquad \frac{-z^2}{R}\,.\,d\,\frac{1}{z}.$$

Die in dem Differential vom Hause aus enthaltenen Functionen:

$$(\alpha'.)\qquad \frac{1}{R}\ \text{und}\ z$$

können also, wie die eben gefundenen neuen Formen zeigen, nach Belieben durch

$$(\beta'.)\qquad \frac{p^2\,q^2}{(2z^2-p^2-q^2)\,z}\quad\text{und}\quad R,$$

oder auch durch

$$(\gamma'.)\qquad \frac{-z^2}{R}\quad\text{und}\quad \frac{1}{z}$$

ersetzt werden, ohne dass der Werth des Differentiales dabei irgend welche Aenderung erleidet.

Die Function R ist (vergl. Seite 190) auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überall eindeutig und, abgesehen von einzelnen Polen, daselbst auch überall stetig. Gleiches wird demnach zufolge eines früher gefundenen allgemeinen Satzes (Seite 274) auch von jedem Ausdrucke gelten, der aus R und z auf rationale Weise zusammengesetzt ist, also von jeder der sechs Functionen (α'.), (β'.), (γ'.) gelten. Es werden daher diese sechs Functionen auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überall eindeutig und mit Ausnahme einzelner Pole überall stetig sein.

Ein Pol kann immer nur da vorhanden sein, wo die Function unendlich wird (S. 95). Demnach werden jene Functionen (α'.), (β'.), (γ'.) auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überall, wo sie **endlich** sind, auch **eindeutig und stetig** sein.

Die beiden Functionen (α'.) sind offenbar mit Ausnahme der Puncte p, $-p$, q, $-q$, und mit Ausnahme der beiden bei $z=\infty$ liegenden Puncte überall endlich, und sind also mit Ausnahme dieser 6 Puncte auf der Fläche $\mathfrak{R}$ allenthalben eindeutig und stetig.

Im Bereiche eines jeden der Puncte p, $-p$, q, $-q$ sind die Functionen (β'.) endlich; sie sind demnach im Bereiche eines jeden dieser 4 Puncte eindeutig und stetig.

Endlich ergiebt sich leicht, dass die Functionen (γ'.) im Bereiche eines jeden der beiden Puncte $z = \infty$ endlich*), folglich in jedem dieser beiden Bereiche eindeutig und stetig bleiben.

Es sind demnach, um Alles zusammenzufassen, in dem Differential (α.) zwei Functionen $\frac{1}{R}$ und z enthalten, welche auf der Fläche $\mathfrak{R}$ mit Ausnahme der Puncte p, $-p$, q, $-q$ und mit Ausnahme der beiden Puncte $z = \infty$ überall eindeutig und stetig sind, und welche gleichzeitig im Bereiche eines jeden solchen Ausnahmepunctes durch zwei andere Functionen ersetzt werden können, die innerhalb dieses Bereiches die genannten Eigenschaften besitzen. Jenes Differential (α.) ist daher zu bezeichnen als ein von z abhängendes Differential, welches auf der Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ allenthalben eindeutig und stetig bleibt. (Vergl. die Definition S. 330.)

Mit Differentialen solcher Art haben wir uns aber bereits früher ganz im Allgemeinen beschäftigt. Bildet man das von einem festen Puncte ausgehende, und in seiner weiteren Fortbewegung auf irgend einen einfach zusammenhängenden Flächentheil beschränkte Integral eines solchen Differentiales, so wird dieses Integral (Satz. Seite 335) innerhalb jenes Flächentheiles ebenfalls überall eindeutig und stetig sein. Auf unser Integral Ω können wir diesen Satz allerdings nicht in Anwendung bringen; denn die Fläche $\mathfrak{R}$, auf welcher sich dasselbe nach Belieben fortbewegt, ist eine mehrfach zusammenhängende.

Wir können aber die Fläche $\mathfrak{R}$ durch Ausführung gewisser Schnitte oder Ströme a, b in eine einfach zusammenhängende

---

*) Achtet man nämlich auf die Bedeutung von R:

$$R = \frac{1}{pq} \sqrt{(z^2 - p^2)(z^2 - q^2)},$$

so ergiebt sich, dass die Function

$$\frac{-z^2}{R}$$

für $z = \infty$ einen der beiden Werthe $+pq$, $-pq$ besitzt, also endlich bleibt.

Fläche $\mathfrak{R}'$ verwandeln. Nachdem solches geschehen, stellen wir nun dem in seiner Bewegung völlig freien Integral

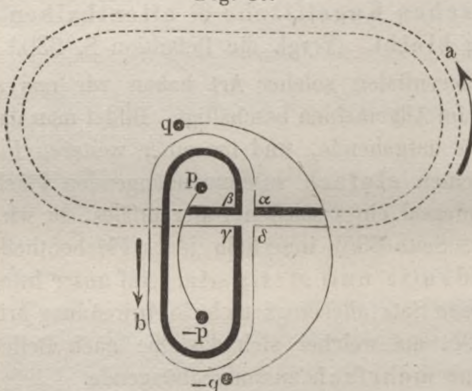
$$\Omega(z) = \int_0^z \frac{dz}{R}$$

ein anderes Integral:

$$W(z) = \int_0^z \frac{dz}{R}$$

zur Seite, welches durch genau dieselbe Formel wie jenes definirt, in seiner Bewegung aber auf die einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{R}'$ beschränkt sein soll. Dieses letztere Integral $W(z)$ wird dann, zufolge des erwähnten Satzes, eine von z abhängende Function sein, welche innerhalb der Fläche $\mathfrak{R}'$ überall eindeutig und stetig ist.

Fig. 87.



Die Verwandlung der Fläche $\mathfrak{R}$ in die einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{R}'$ denken wir uns durch diejenigen beiden Schnitte oder Ströme a, b herbeigeführt, welche früher (S. 319) besprochen wurden. Das mit $\mathfrak{A}$ bezeichnete fundamentale Flächengebiet befindet sich im untern Blatt der Fläche $\mathfrak{R}$, und bleibt, wie man leicht übersieht, bei Ausführung der Schnitte a, b (Fig. 87) völlig unversehrt*).

*) Es ist wohl darauf zu achten, dass in der nebenstehenden Figur jede Strecke der Schnitte a, b, je nachdem sie im oberen oder unteren Blatt zu denken ist, im erstern Fall durch ununterbrochene,

Wir untersuchen zunächst diejenigen Werthe, welche die eben eingeführte eindeutige Function $W(z)$ in den vier Puncten p, $-p$, q, $-q$ besitzt. Zu diesem Zweck ziehen wir eine Curve σ, welche von dem im unteren Blatt befindlichen Puncte 0 ausgeht, und ohne die Grenze des Gebietes $\mathfrak{A}$ zu überschreiten, nach irgend einem der vier auf dieser Grenze liegenden Puncte p, $-p$, q, $-q$ hinläuft; dieser Punct mag α heissen.

Die Werthe, welche $\Omega(z)$ und $W(z)$ im Puncte α annehmen, sind beide durch ein und dieselbe Formel definirt; es ist nämlich:

$$(1) \qquad \Omega(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{dz}{R},$$

und ebenso ist auch:

$$(2) \qquad W(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{dz}{R}.$$

Der Unterschied besteht nur darin, dass die Bahn des Integrales Ω von 0 nach α auf willkührlichem Wege fortlaufen kann, dass hingegen die Bahn des Integrales W ihrem ganzen Laufe nach innerhalb $\mathfrak{R}'$ bleiben muss, die Ströme a, b also nirgends überschreiten darf.

Wir nehmen nun für die in (1) vorhandene Integrationsbahn die vorhin construirte Curve σ; alsdann erhalten wir, weil σ seinem ganzen Laufe nach innerhalb des fundamentalen Gebietes $\mathfrak{A}$ bleibt, nicht irgend einen unter den vielen Werthen, welche das Integral Ω im Puncte α annehmen kann, sondern denjenigen unter diesen Werthen, welchen wir früher mit dem Namen Fundamentalwerth ausgezeichnet haben, also den Werth $\overline{\Omega}(\alpha)$.

Andererseits können wir, weil die Curve σ ihrem ganzen Laufe nach innerhalb des von den Strömen a, b unversehrten Gebietes $\mathfrak{A}$ bleibt, jene Ströme also nirgends überschreitet, diese Curve auch in (2) als Integrationsbahn in Anwendung bringen;

---

im letztern durch punctirte Striche angegeben ist. Die Begrenzung des fundamentalen Gebietes $\mathfrak{A}$ ist in der Figur nicht vollständig angegeben. Es sind nämlich zwei zu dieser Begrenzung gehörige, im unteren Blatt der Fläche befindliche Linien fortgelassen, eine, die von p nach q, und eine zweite, die von $-q$ nach $-p$ geht (vergl. die Figur auf Seite 350).

alsdann erhalten wir denjenigen Werth, welchen die eindeutige Function W im Puncte α besitzt, also den Werth $W(\alpha)$.

Bezeichnen wir also eine längs der Curve σ von 0 nach α hinerstreckte Integration mit $\int\limits_\sigma$, so ergiebt sich aus (1) und (2):

$$\overline{\Omega}(\alpha) = \int\limits_\sigma \frac{dz}{R},$$

$$W(\alpha) = \int\limits_\sigma \frac{dz}{R},$$

mithin:

$$W(\alpha) = \overline{\Omega}(\alpha).$$

Es war aber α irgend einer unter den Puncten p, $-p$, q, $-q$.

Die Werthe:

$$W(p), \quad W(-p), \quad W(q), \quad W(-q),$$

welche die eindeutige Function W in den Puncten p, $-p$, q, $-q$ besitzt, sind demnach identisch mit den diesen Puncten zugehörigen Fundamentalwerthen:

$$\overline{\Omega}(p), \quad \overline{\Omega}(-p), \quad \overline{\Omega}(q), \quad \overline{\Omega}(-q).$$

Das aus den Strömen a, b bestehende Netz besitzt im Ganzen nur einen einzigen Knotenpunct; dieser befindet sich dort, wo beide Ströme einander durchkreuzen, nämlich bei α, β, γ, δ (Fig. 87. S. 354). Es besteht demnach das Netz aus zwei unverzweigten Stromstrecken, von welchen die eine durch den Strom a, die andere durch den Strom b dargestellt wird.

Sind daher λ und ϱ irgend zwei auf dem linken und rechten Ufer von a einander gerade gegenüber liegende Puncte, so wird die Differenz

$$W(\lambda) - W(\varrho) = A$$

eine Grösse sein, welche, zufolge eines früher gefundenen allgemeinen Satzes (Seite 339), längs des Stromes a hin überall constant ist. Und ebenso wird andererseits die dem Strome b zugehörige Differenz:

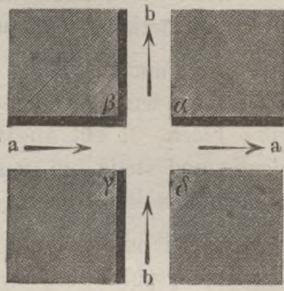
$$W(\lambda) - W(\varrho) = B$$

längs b hin constant sein. In dem Knotenpuncte α, β, γ, δ sind vier Stromenden mit einander vereinigt (Fig. 88): zwei daselbst einfliessende Stromenden a und b, ferner zwei von dort wegfliessende Stromenden, von denen ebenfalls das eine dem Strome a, das andere dem Strome b zugehört. Zufolge des soeben erwähnten Satzes (Seite 339) ergiebt sich daher für diesen Knotenpunct die Gleichung:

$$A + B = A + B,$$

eine Gleichung, die identisch ist, also zu keinerlei Relation zwischen A und B führt.

Fig. 88.



Die Werthdifferenzen, mit welchen die eindeutige Function W in den Strömen a, b behaftet ist, sind mithin

$$\text{längs } a \text{ durch } W(\lambda) - W(\varrho) = A,$$
$$\text{längs } b \text{ durch } W(\lambda) - W(\varrho) = B$$

dargestellt, wo A und B zwei vorläufig noch ganz unbekannte Constanten bezeichnen.

Dritter Abschnitt. Fortsetzung. Nähere Untersuchung der Function $W(z)$. An Stelle des Integrales $\Omega(z)$ und der Function $W(z)$ wird ein Integral $\omega(z)$ und eine Function $\mathrm{w}(z)$ eingeführt, die von jenen nur durch einen constanten Factor verschieden sind.

Wir werden sogleich sehen, dass die Constanten A, B näher bestimmt, nämlich ausgedrückt werden können durch die den Puncten p, $-p$, q, $-q$ zugehörigen Fundamentalwerthe:

$$\overline{\Omega}(p), \quad \overline{\Omega}(-p), \quad \overline{\Omega}(q), \quad \overline{\Omega}(-q),$$

oder, was dasselbe ist, durch die Werthe:

$$W(p), \quad W(-p), \quad W(q), \quad W(-q).$$

Indem wir die Abhängigkeit, welche zwischen diesen Werthen und zwischen jenen Constanten stattfindet, zu Tage fördern, werden wir dabei zugleich noch andere Zwecke verfolgen. Diese bestehen in der Ermittelung derjenigen Werthe

$$W(0), \quad W(0'), \quad W(\infty), \quad W(\infty'),$$

welche die Function W in den beiden bei $z = 0$, und in den beiden bei $z = \infty$ über einander liegenden Puncten besitzt. Dabei sind unter 0 und ∞ die zum unteren oder inneren Blatt der

Fläche $\mathfrak{R}$, unter $0'$ und ∞' hingegen die zum oberen oder äusseren Blatt gehörigen Puncte zu verstehen.

Zunächst müssen wir unserer Untersuchung ein Paar allgemeine Bemerkungen vorangehen lassen.

Die Function W ist innerhalb der umrandeten Fläche $\mathfrak{R}'$ überall eindeutig und stetig. Sie ist also auf der geschlossenen Fläche $\mathfrak{R}$ mit Ausnahme der Ströme a, b allenthalben eindeutig und stetig, in jenen Strömen aber mit den eben besprochenen Werthdifferenzen A, B behaftet.

Es sei nun σ eine auf der Fläche $\mathfrak{R}$ beliebig gezogene Curve, ihr Anfangspunct mag α, ihr Endpunct β heissen.

Ueberschreitet diese Curve keinen der Ströme a, b, so wird W längs derselben hin überall eindeutig und stetig sein, folglich das über dieselbe hinerstreckte Integral

$$\text{(I.)} \qquad \int_\alpha^\beta dW = W(\beta) - W(\alpha)$$

sein.

Ueberschreitet hingegen die Curve auf ihrem Lauf von α nach β einen jener Ströme, z. B. den Strom a, so wird die eben hingestellte Formel nicht mehr gültig sein. Wir nehmen der Einfachheit willen an, die Curve überschritte den Strom a vom linken zum rechten Ufer hin, und bezeichnen den von α bis zum linken Ufer reichenden Curventheil mit $\alpha\lambda$, andererseits den vom rechten Ufer bis β reichenden Theil mit $\varrho\beta$; so dass also λ und ϱ zwei zu beiden Ufern von a einander gegenüberliegende Puncte vorstellen sollen. Alsdann ergiebt sich, weil W längs der Curvenstrecke $\alpha\lambda$ überall eindeutig und stetig ist:

$$\int_\alpha^\lambda dW = W(\lambda) - W(\alpha);$$

und ebenso ergiebt sich für die andere Curvenstrecke $\varrho\beta$;

$$\int_\varrho^\beta dW = W(\beta) - W(\varrho).$$

Hieraus aber folgt durch Addition:

$$\int_{\alpha}^{\beta} dW = W(\beta) - W(\alpha) + W(\lambda) - W(\varrho),$$

oder weil $W(\lambda) - W(\varrho)$ in dem hier betrachteten Strome a den constanten Werth A besitzt:

$$\int_{\alpha}^{\beta} dW = W(\beta) - W(\alpha) + A.$$

Ueberschreitet die Curve σ, um einen allgemeineren Fall zu betrachten, auf ihrem Wege von α nach β beide Ströme, und zwar jeden derselben mehrmals; und sind ferner l, l' und r, r' die Zahlen, welche angeben, wie oft die Ströme a, b vom linken zum rechten Ufer, und wie oft dieselben in entgegengesetzter Richtung überschritten werden; so erhalten wir, wie leicht zu übersehen ist, für das über die Curve σ hinerstreckte Integral folgenden Werth:

$$\text{(II.)} \qquad \int_{\alpha}^{\beta} dW = W(\beta) - W(\alpha) + (l - r)\, A + (l' - r')\, B.$$

Die Formeln (I.) und (II.) umfassen alle möglicherweise vorkommenden Fälle.

Nun ist in Betreff der Function W noch eine Bemerkung zu machen. Nach unserer Definition ist:

$$W = \int_{0}^{z} \frac{dz}{R},$$

mithin:

$$dW = \frac{dz}{R} = \frac{1}{R}\, dz;$$

und von den beiden in diesem Differential enthaltenen Functionen

$$\frac{1}{R} \quad \text{und} \quad z$$

besitzt die erstere in je zwei über einander liegenden Puncten der Fläche $\mathfrak{R}$ entgegengesetzte Werthe, die letztere hingegen in je zwei solchen Puncten gleiche Werthe. Sind daher σ und σ' zwei in beiden Blättern genau über einander liegende Curven, so werden die Werthe des längs σ hinerstreckten Integrales

$$\int_\sigma \frac{1}{R}\,dz$$

und des längs σ' hinerstreckten Integrales

$$\int_{\sigma'} \frac{1}{R}\,dz$$

einander entgegengesetzt sein. Es wird also

$$\int_\sigma \frac{dz}{R} + \int_{\sigma'} \frac{dz}{R} = 0,$$

oder was dasselbe ist:

(III.) $$\int_\sigma dW + \int_{\sigma'} dW = 0$$

sein; vorausgesetzt natürlich, dass beide Integrationen in gleicher Richtung hinerstreckt sind.

Endlich ist noch Folgendes zu bemerken: Ist $\mathfrak{s}$ irgend einer unter den vier Puncten 0, $0'$, ∞, ∞', und sind

$$\mathfrak{s},\ z',\ z'',\ z''',\ \ldots,\ z,$$

und

$$\mathfrak{s},\ -z',\ -z'',\ -z''',\ \ldots,\ -z$$

zwei vom Puncte $\mathfrak{s}$ ausgehende und in entgegengesetzten Richtungen auf der Fläche $\mathfrak{R}$ fortlaufende Curven, so wird die Grösse

$$\frac{1}{R} = \frac{pq}{\sqrt{(z^2-p^2)\,(z^2-q^2)}},$$

weil sie nicht von z, sondern nur von z^2 abhängt, längs der einen Curve hin genau dieselben Werthe haben wie längs der andern Curve hin. Demnach besitzen die über zwei solche Curven hinerstreckten Integrale

$$\int_{\mathfrak{s}}^{z} \frac{dz}{R} \quad \text{und} \quad \int_{\mathfrak{s}}^{-z} \frac{dz}{R}$$

jederzeit entgegengesetzte Werthe. Es wird also

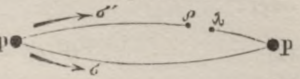
(IV.) $$\int_{\mathfrak{s}}^{z} dW + \int_{\mathfrak{s}}^{-z} dW = 0$$

sein.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns nun zu dem eigentlichen Gegenstande unserer Untersuchung.

Jeder der Puncte p, $-p$, q, $-q$ gehört gleichzeitig zum unteren und auch zum oberen Blatt der Fläche $\mathfrak{R}$. Man kann demnach von jedem solchen Puncte aus eine Curve ziehen, die, je nachdem man will, im unteren oder oberen Blatt fortläuft. Wir lassen nun vom Puncte $-p$ zwei Curven ausgehen, die in den beiden Blättern der Fläche genau über einander liegen, die beide auf geradlinigem Wege vom Puncte $-p$ bis zum Puncte p hinlaufen, in letzterm also wieder mit einander zusammentreffen; die untere Curve mag σ, die obere σ' genannt werden (Fig. 89). Die Curve σ überschreitet keinen der Ströme; zufolge (I.) wird daher das ihr entlang erstreckte Integral

Fig. 89.



$$\int_{\sigma} dW = W(p) - W(-p)$$

sein. Die Curve σ' hingegen überschreitet den Strom a, und zwar vom rechten zum linken Ufer hin; das längs σ' hinerstreckte Integral $\int_{\sigma'} dW$ besitzt daher zufolge (II.) den Werth:

$$\int_{\sigma'} dW = W(p) - W(-p) - A.$$

Addirt man nun diese beiden Formeln, und beachtet man dabei, dass zufolge (III.)

$$\int_{\sigma} dW + \int_{\sigma'} dW = 0$$

ist, so erhält man:

$$0 = 2\,W(p) - 2\,W(-p) - A,$$

oder:

(1) $$W(p) - W(-p) = \frac{A}{2}.$$

Nimmt man ferner für σ und σ' zwei im unteren und oberen Blatt der Fläche $\mathfrak{R}$ genau über einander liegende Curven, die beide auf geradlinigem Wege von p nach q laufen (Fig. 87. S. 354), so erhält man in ganz ähnlicher Weise zuerst:

$$\int_\sigma dW = W(q) - W(p),$$

$$\int_{\sigma'} dW = W(q) - W(p) + B,$$

sodann durch Addition:

$$0 = 2\,W(q) - 2\,W(p) + B,$$

oder:

(2) $$W(q) - W(p) = -\frac{B}{2}.$$

Nimmt man endlich für σ und σ' zwei im unteren und oberen Blatt über einander liegende Curven, die auf geradlinigem Wege von $-p$ nach $-q$ gehen, so ergiebt sich:

$$\int_\sigma dW = W(-q) - W(-p),$$

$$\int_{\sigma'} dW = W(-q) - W(-p) + B,$$

folglich:

$$0 = 2\,W(-q) - 2\,W(-p) + B,$$

oder:

(3) $$W(-q) - W_{\text{l}}(-p) = -\frac{B}{2}.$$

Wir müssen zu diesen Formeln noch andre hinzufügen, die sich ebenso leicht ergeben. Wir lassen zunächst von dem im unteren Blatt der Fläche $\mathfrak{R}$ befindlichen Puncte 0 zwei Curven nach entgegengesetzten Richtungen ausgehen, von welchen die eine auf geradlinigem Wege nach p, die andere ebenfalls auf geradlinigem *) Wege nach $-p$ hinläuft. Da die Ströme a, b von diesen Curven nirgends überschritten werden, so haben die längs dieser Curven hinerstreckten Integrale $\int dW$, wie sich aus (I.) ergiebt, folgende Werthe:

---

*) Die Bezeichnung geradlinig ist nicht völlig genau. Da nämlich die vorliegende Fläche kugelförmig ist, so müssten die in Rede stehenden Wege, strenge genommen, als Wege bezeichnet werden, welche auf grössten Kreisen fortlaufen.

$$\int_{0}^{p} dW = W(p) - W(0),$$

$$\int_{0}^{-p} dW = W(-p) - W(0).$$

Hieraus aber ergiebt sich durch Addition und mit Rücksicht auf (IV.):

$$0 = W(p) + W(-p) - 2\,W(0),$$

oder:

$$W(p) + W(-p) = 2\,W(0). \tag{4}$$

Wir lassen nun ferner von dem im oberen Blatt befindlichen Punct $0'$ zwei Curven in entgegengesetzten Richtungen ausgehen, von welchen wiederum die eine nach p, die andere nach $-p$ hinläuft. Zufolge (I.) und (II.) ergiebt sich alsdann:

$$\int_{0'}^{p} dW = W(p) - W(0') - A,$$

$$\int_{0'}^{-p} dW = W(-p) - W(0'),$$

folglich durch Addition und mit Rücksicht auf (IV.):

$$0 = W(p) + W(-p) - 2\,W(0') - A,$$

oder:

$$W(p) + W(-p) = 2\,W(0') + A. \tag{5}$$

Lassen wir von dem im unteren oder inneren Blatt liegenden Puncte ∞ zwei Curven in entgegengesetzten Richtungen ausgehen, die etwa beide längs ein und desselben grössten Kreises fortschreiten, und von denen die eine bis q, die andere bis $-q$ fortläuft, so wird zufolge (I.) und (II.):

$$\int_{\infty}^{q} dW = W(q) - W(\infty) - A,$$

$$\int_{\infty}^{-q} dW = W(-q) - W(\infty),$$

folglich durch Addition und mit Rücksicht auf (IV.):

$$0 = W(q) + W(-q) - 2\,W(\infty) - A,$$

oder:

(6) $$W(q) + W(-q) = 2\,W(\infty) + A.$$

Betrachten wir endlich zwei Curven, die von dem im oberen oder äusseren Blatt liegenden Punct ∞' in entgegengesetzten Richtungen ausgehen, und wiederum bis q und $-q$ fortlaufen, so ergiebt sich zufolge (I.):

$$\int_{\infty'}^{q} d\,W = W(q) - W(\infty'),$$

$$\int_{\infty'}^{-q} d\,W = W(-q) - W(\infty'),$$

und hieraus durch Addition, und mit Rücksicht auf (IV.):

$$0 = W(q) + W(-q) - 2\,W(\infty'),$$

oder:

(7) $$W(q) + W(-q) = 2\,W(\infty').$$

Zu diesen sieben Formeln können wir schliesslich noch eine letzte hinzufügen, die sich aus der Definition der eindeutigen Function $W(z)$:

$$W(z) = \int_0^z \frac{dz}{R}$$

unmittelbar ergiebt, nämlich folgende:

(8) $$W(0) = 0.$$

Wir haben somit im Ganzen jetzt folgende Formeln:

(1) $$W(p) - W(-p) = \frac{A}{2},$$

(2) $$W(q) - W(p) = -\frac{B}{2},$$

(3) $$W(-q) - W(-p) = -\frac{B}{2},$$

(4) $$W(p) + W(-p) = 2\,W(0),$$

(5) $$W(p) + W(-p) = 2\,W(0') + A,$$

(6) $$W(q) + W(-q) = 2\,W(\infty) + A,$$

(7) $$W(q) + W(-q) = 2\,W(\infty'),$$

(8) $$W(0) = 0.$$

Aus (4) und (8) folgt:

(9) $$W(p) + W(-p) = 0;$$

und diese Formel in Verbindung mit (1) liefert:

(10) $$W(p) = \frac{A}{4},$$

(11) $$W(-p) = -\frac{A}{4};$$

gleichzeitig ergiebt sich aus (5) und (9):

(12) $$W(0') = -\frac{A}{2}.$$

Ferner findet man aus (2) und (10):

(13) $$W(q) = \frac{A}{4} - \frac{B}{2},$$

und andererseits aus (3) und (11):

(14) $$W(-q) = -\frac{A}{4} - \frac{B}{2}.$$

Setzt man endlich die in (13) und (14) gefundenen Werthe in die Formeln (6) und (7) ein, so ergiebt sich:

(15) $$W(\infty) = -\frac{A}{2} - \frac{B}{2},$$

(16) $$W(\infty') = -\frac{B}{2}.$$

Es gelten demnach für die Werthe, welche die eindeutige Function W in den Puncten 0, $0'$, ∞, ∞', p, $-p$, q, $-q$ besitzt, folgende Gleichungen:

$$W(0) = 0, \qquad W(\infty) = -\frac{A+B}{2},$$

$$W(0') = -\frac{A}{2}, \qquad W(\infty') = -\frac{B}{2},$$

$$W(p) = \frac{A}{4}, \qquad W(q) = \frac{A}{4} - \frac{B}{2},$$

$$W(-p) = -\frac{A}{4}, \qquad W(-q) = -\frac{A}{4} - \frac{B}{2}.$$

Die vier letzten Gleichungen lassen sich, weil $W(p)$, $W(-p)$, $W(q)$, $W(-q)$ mit den Fundamentalwerthen $\overline{\Omega}(p)$, $\overline{\Omega}(-p)$, $\overline{\Omega}(q)$, $\overline{\Omega}(-q)$ identisch sind, auch so darstellen:

$$\overline{\Omega}(p) = \frac{A}{4}, \qquad \overline{\Omega}(q) = \frac{A}{4} - \frac{B}{2},$$

$$\overline{\Omega}(-p) = -\frac{A}{4}, \qquad \overline{\Omega}(-q) = -\frac{A}{4} - \frac{B}{2};$$

und wir gelangen demnach zu folgendem Resultat:

Verwandelt man die Fläche $\mathfrak{R}$ durch Ausführung zweier Schnitte oder Ströme a, b in eine e i n f a c h *zusammenhängende Fläche $\mathfrak{R}'$, und stellt man dem zur Untersuchung vorgelegten Integral*

$$\Omega(z) = \int_0^z \frac{dz}{R}$$

ein anderes zur Seite, nämlich das Integral:

$$W(z) = \int_0^z \frac{dz}{R},$$

welches von jenem nur dadurch verschieden ist, dass seine Bewegung keine völlig freie, sondern eine auf die Fläche $\mathfrak{R}'$ beschränkte ist, so wird $W(z)$ eine Function sein, welche i n n e r h a l b *$\mathfrak{R}'$* a l l e n t h a l b e n e i n d e u t i g u n d s t e t i g, i n d e n S t r ö m e n *a, b* a b e r m i t g e w i s s e n c o n s t a n t e n W e r t h d i f f e r e n z e n *behaftet ist.*

Die Werthe, welche diese Function in den Puncten p, $-p$, q, $-q$, 0, $0'$, ∞, ∞', und die Werthdifferenzen, welche sie in den Strömen a, b besitzt, können aus den Fundamentalwerthen des Integrales $\Omega(z)$ unmittelbar abgeleitet werden. Führt man nämlich zwei Constanten A, B ein, welche mit jenen Fundamentalwerthen in folgender Weise zusammenhängen:

$$\overline{\Omega}(p) = \frac{A}{4}, \qquad \overline{\Omega}(q) = \frac{A}{4} - \frac{B}{2},$$
$$\overline{\Omega}(-p) = -\frac{A}{4}, \qquad \overline{\Omega}(-q) = -\frac{A}{4} - \frac{B}{2},$$

so wird

$$\text{längs } a\text{:} \quad W(\lambda) - W(\varrho) = A,$$
$$\text{längs } b\text{:} \quad W(\lambda) - W(\varrho) = B$$

sein; und gleichzeitig wird alsdann

$$W(p) = \frac{A}{4}, \qquad W(q) = \frac{A}{4} - \frac{B}{2},$$
$$W(-p) = -\frac{A}{4}, \qquad W(-q) = -\frac{A}{4} - \frac{B}{2},$$
$$W(0) = 0, \qquad W(\infty) = -\frac{A+B}{2},$$
$$W(0') = -\frac{A}{2}, \qquad W(\infty') = -\frac{B}{2},$$

sein. Unter diesen 8 Werthen sind die 4 ersten, nämlich diejenigen, welche die Function W in den vier Puncten p, $-p$, q, $-q$ besitzt, identisch mit den daselbst vorhandenen Fundamentalwerthen des Integrales Ω.

Nachdem wir so weit gelangt sind, wollen wir nun unsere ganze bisherige Untersuchung der Art abändern, dass die hier auftretende Constante A sich in $2\pi i$ verwandelt. Solches erreichen wir dadurch, dass wir an Stelle des Integrales $\Omega\,(z)$ und an Stelle der eindeutigen Function $W\,(z)$ ein anderes Integral $\omega\,(z)$, und eine andere Function $\mathrm{w}\,(z)$ einführen, welche von jenen durch den constanten Factor $\frac{2\pi i}{A}$ verschieden sind:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\omega\,(z) &= \frac{2\,i\pi}{A}\,.\,\Omega\,(z),\\
\mathrm{w}\,(z) &= \frac{2\,i\pi}{A}\,.\,W\,(z).
\end{aligned}
$$

Verstehen wir gleichzeitig unter δ folgende aus A und B zusammengesetzte Constante:

$$
(2)\qquad \delta = \frac{2\,i\pi\,.\,B}{A};
$$

so werden die Fundamentalwerthe des neuen Integrals $\omega\,(z)$ folgende sein:

$$
\begin{aligned}
\bar{\omega}\,(p) &= \frac{\pi i}{2}, &\qquad \bar{\omega}\,(q) &= \frac{\pi i}{2} - \frac{\delta}{2},\\
\bar{\omega}\,(-p) &= -\frac{\pi i}{2}, &\qquad \bar{\omega}\,(-q) &= -\frac{\pi i}{2} - \frac{\delta}{2}.
\end{aligned}
$$

Ferner werden die Werthdifferenzen der neuen Function $\mathrm{w}\,(z)$

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&\text{längs } a \text{ durch: } \mathrm{w}\,(\lambda) - \mathrm{w}\,(\varrho) = 2\pi i,\\
&\text{längs } b \text{ durch: } \mathrm{w}\,(\lambda) - \mathrm{w}\,(\varrho) = \delta
\end{aligned}
$$

dargestellt sein. Und endlich werden die Werthe dieser Function in den Puncten p, $-p$, q, $-q$, 0, $0'$, ∞, ∞' folgende sein:

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
\mathrm{w}\,(p) &= \frac{\pi i}{2}, &\qquad \mathrm{w}\,(q) &= \frac{\pi i}{2} - \frac{\delta}{2},\\
\mathrm{w}\,(-p) &= -\frac{\pi i}{2}, &\qquad \mathrm{w}\,(-q) &= -\frac{\pi i}{2} - \frac{\delta}{2},\\
\mathrm{w}\,(0) &= 0, &\qquad \mathrm{w}\,(\infty) &= -\pi i - \frac{\delta}{2},\\
\mathrm{w}\,(0') &= -\pi i, &\qquad \mathrm{w}\,(\infty') &= -\frac{\delta}{2}.
\end{aligned}
$$

Durch Sonderung des Reellen und Imaginären mag sich ergeben:

(5) $$\mathbf{w}(z) = U + iV,$$
und

(6) $$\delta = \alpha + i\beta;$$
dann wird

(7) $$\begin{aligned} &\text{längs } a\text{:}\ U^\lambda - U^\varrho = 0, \quad V^\lambda - V^\varrho = 2\pi, \\ &\text{längs } b\text{:}\ U^\lambda - U^\varrho = \alpha, \quad V^\lambda - V^\varrho = \beta \end{aligned}$$

sein; vorausgesetzt, dass U^λ, V^λ die auf dem linken, und U^ϱ, V^ϱ die auf dem rechten Ufer der Ströme a und b befindlichen Werthe von U, V bezeichnen.

Da die Function $\mathbf{w}$ innerhalb der einfach zusammenhängenden Fläche $\mathfrak{R}'$ allenthalben eindeutig und stetig bleibt, so muss das in positiver Richtung um den Rand dieser Fläche herumerstreckte Integral $\int U\,dV$ — zufolge eines früher gefundenen allgemeinen Satzes (S. 278) — einen positiven Werth besitzen; also:

(8) $$\int_{\mathfrak{R}'} U\,dV = \text{pos.}$$

Bei einer positiven Umlaufung der Fläche $\mathfrak{R}'$ wird (vgl. S. 317) jeder der Ströme a, b zweimal, und zwar das linke Ufer immer stromabwärts, das rechte stromaufwärts durchlaufen. Demnach kann das in positiver Richtung um $\mathfrak{R}'$ herumerstreckte Integral in vier Theile, nämlich in ebenso viele Theile zerlegt werden, als Stromufer vorhanden sind. Versteht man unter $\int_a$ und $\int_b$ Integrationen, die den Strömen a und b entlang, und zwar stromabwärts hinlaufen, unter $\int_{a'}$ und $\int_{b'}$ hingegen Integrale, die jenen Strömen entlang stromaufwärts fortschreiten, so ergiebt sich also:

(9) $$\int_{\mathfrak{R}'} U\,dV = \int_a U^\lambda dV^\lambda + \int_b U^\lambda dV^\lambda + \\ + \int_{a'} U^\varrho dV^\varrho + \int_{b'} U^\varrho dV^\varrho$$

oder, wenn man in den beiden letzten Integralen die Richtung der Integration umkehrt, und — wie es dann erforderlich ist

— gleichzeitig auch das Vorzeichen wechselt:

$$(10)\quad \int\limits_{\mathfrak{N}'} U\,dV = \int\limits_a (U^\lambda dV^\lambda - U^\varrho dV^\varrho) + \int\limits_b (U^\lambda dV^\lambda - U^\varrho dV^\varrho).$$

Da V^λ und V^ϱ zufolge (7) in jedem der Ströme a, b nur durch eine Constante verschieden sind, so haben die längs eines solchen Stromes gerechneten Differentiale dV^λ und dV^ϱ dem ganzen Strome entlang einerlei Werthe. Wir können daher statt dV^λ und dV^ϱ kurzweg dV setzen, und erhalten alsdann:

$$(11)\quad \int\limits_{\mathfrak{N}'} U\,dV = \int\limits_a (U^\lambda - U^\varrho)\,dV + \int\limits_b (U^\lambda - U^\varrho)\,dV,$$

oder, mit abermaliger Rücksicht auf (7):

$$(12)\quad \int\limits_{\mathfrak{N}'} U\,dV = \alpha \int\limits_b dV.$$

Der Strom b entspringt (vergl. S. 320) im linken Ufer des Stromes a, und mündet in das rechte Ufer von a. Das längs b hinlaufende Integral

$$\int\limits_b dV$$

ist offenbar gleich der Differenz derjenigen beiden Werthe, welche V am Ende und am Anfang von b besitzt, also gleich der Differenz derjenigen Werthe, welche V am rechten und am linken Ufer von a hat, mithin zufolge (7) gleich -2π. Die Formel (12) verwandelt sich daher in:

$$(13)\quad \int\limits_{\mathfrak{N}'} U\,dV = -2\pi\alpha.$$

Und hierdurch verwandelt sich die Gleichung (8) in:

$$-2\pi\alpha = \text{pos.},$$

d. i. in:

$$(14)\quad \alpha = \text{neg.}$$

Die Grösse α war aber der reelle Theil der letzthin eingeführten Constanten δ; diese Constante δ besitzt demnach unter allen Umständen einen **negativen** reellen Theil.

Vierter Abschnitt. Untersuchung derjenigen Eigenschaften, welche eine von $\mathbf{w}(z)$ abhängende ϑ-Reihe, als Function von z betrachtet, besitzt.

Wir bilden nun die Exponentialgrösse

$$(15)\qquad \eta = e^{h + k\,\mathbf{w}(z)},$$

wo $e = 2{,}718\ldots$ und h, k irgend welche Constanten sein sollen. Diese Grösse η wird eine von z abhängende Function sein, welche offenbar — ebenso wie $\mathbf{w}(z)$ selber — innerhalb der Fläche $\mathfrak{R}'$ allenthalben eindeutig und stetig bleibt. Sind λ und ϱ irgend zwei zu beiden Ufern des Stromes a einander gegenüberliegende Puncte, und $\mathbf{w}^\lambda$, η^λ und $\mathbf{w}^\varrho$, η^ϱ die in diesen Puncten vorhandenen Werthe von $\mathbf{w}$, η, so ist:

$$\eta^\lambda = e^{h + k\mathbf{w}^\lambda},$$

$$\eta^\varrho = e^{h + k\mathbf{w}^\varrho},$$

mithin:

$$\frac{\eta^\lambda}{\eta^\varrho} = e^{k(\mathbf{w}^\lambda - \mathbf{w}^\varrho)},$$

oder mit Rücksicht auf (3):

$$\frac{\eta^\lambda}{\eta^\varrho} = e^{k\,.\,2\pi i}.$$

Ebenso also wie die Function $\mathbf{w}$ in jedem der Ströme a, b mit einer constanten Werthdifferenz behaftet ist, ebenso wird die Function η im Strome a, und, wie man leicht übersieht, auch im Strome b mit einem constanten Werthquotienten behaftet sein. Es wird nämlich

$$(16)\qquad \begin{cases} \text{längs } a\colon & \dfrac{\eta^\lambda}{\eta^\varrho} = e^{k\,.\,2\pi i}, \\[2ex] \text{längs } b\colon & \dfrac{\eta^\lambda}{\eta^\varrho} = e^{k\,.\,\delta} \end{cases}$$

sein.

An Stelle von η nehmen wir gegenwärtig folgende Exponentialgrösse:

$$\eta = e^{\delta n^2 + 2\,\mathbf{w} n};$$

hier soll δ die vorhin eingeführte Constante $\dfrac{2\pi i\,.\,B}{A}$, und n eine beliebig gewählte positive oder negative ganze Zahl vorstellen, und von dieser Exponentialgrösse nehmen wir die Summe von

$n = -\infty$ bis $n = +\infty$ hin:

$$\Sigma\eta = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\delta n^2 + 2\,\mathbf{w}\,n}.$$

Auf diese Summe $\Sigma\eta$ können wir unmittelbar einen früher (S. 21) erwähnten Satz in Anwendung bringen. Da die Function **w** innerhalb $\mathfrak{R}'$ überall stetig ist, daselbst also nirgends unendlich gross werden kann, und da ferner der reelle Theil der Constanten δ jederzeit negativ ist, so ergiebt sich, mit Rücksicht auf jenen Satz, dass der Werth von $\Sigma\eta$ für jeden Punct der Fläche $\mathfrak{R}'$ ein völlig bestimmter und endlicher ist.

Denken wir uns jeden Punct der Fläche $\mathfrak{R}'$ mit dem ihm zugehörigen Werthe von $\Sigma\eta$ belastet, so wissen wir also einerseits, dass all diese Werthe völlig bestimmt und endlich sind, andererseits aber auch, dass dieselben durch eine Superposition gewisser Functionen η entstanden sind, von denen jede, für sich allein betrachtet, innerhalb $\mathfrak{R}'$ allenthalben stetig bleibt. Beides zusammengenommen ergiebt sich sofort, dass der Werth von $\Sigma\eta$ innerhalb der Fläche $\mathfrak{R}'$ allenthalben eindeutig und stetig ist. In dieser Betrachtung tritt keinerlei Aenderung ein, wenn man die in η und in $\Sigma\eta$ enthaltene Function **w** mit $\mathbf{w} - g$ vertauscht, vorausgesetzt, dass man unter g irgend welche Constante versteht.

Bezeichnet man also die von der Constanten δ und von irgend welchem andern Argument U abhängende unendliche Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\delta n^2 + 2Un}$$

in Zukunft mit

$$\vartheta(U);$$

so werden, falls man unter g irgend welche Constante versteht,

$$\vartheta(\mathbf{w}) \quad \textit{und} \quad \vartheta(\mathbf{w} - g)$$

zwei von z abhängende Functionen sein, die — ebenso wie **w** *selber — innerhalb der Fläche $\mathfrak{R}'$ allenthalben eindeutig und stetig sind.*

In Bezug auf den hier eingeführten Ausdruck

$$\vartheta(U) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\delta n^2 + 2Un}$$

ist (vergl. S. 28) an folgende allgemein gültige Formeln zu erinnern:

$$(17) \qquad \vartheta(-U) = \vartheta(U),$$

$$(18) \qquad \frac{\vartheta(U + m\pi i + n\delta)}{\vartheta(U)} = e^{-(n^2\delta + 2nU)},$$

$$(19) \qquad \vartheta\left((m + \tfrac{1}{2})\pi i + (n + \tfrac{1}{2})\delta\right) = 0;$$

wo unter m und n beliebige ganze Zahlen zu verstehen sind.

Sind λ und ϱ irgend zwei auf dem linken und rechten Ufer des Stromes a einander gegenüberliegende Puncte, und sind ferner $\mathbf{w}^\lambda$, ϑ^λ und $\mathbf{w}^\varrho$, ϑ^ϱ die Werthe, welche die von z abhängenden Functionen

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(z), \quad \vartheta = \vartheta(\mathbf{w}(z) - g)$$

in diesen Puncten besitzen, so ist:

$$\vartheta^\lambda = \vartheta(\mathbf{w}^\lambda - g),$$
$$\vartheta^\varrho = \vartheta(\mathbf{w}^\varrho - g).$$

Diese Werthe können wir, da zufolge (3) längs a:

$$\mathbf{w}^\lambda - \mathbf{w}^\varrho = 2\pi i$$

ist, auch so schreiben:

$$\vartheta^\lambda = \vartheta(\mathbf{w}^\varrho - g + 2\pi i),$$
$$\vartheta^\varrho = \vartheta(\mathbf{w}^\varrho - g).$$

Somit ergiebt sich mit Rücksicht auf die Formel (18):

$$\frac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\varrho} = 1.$$

In ähnlicher Weise erhalten wir mit Bezug auf den andern Strom, nämlich mit Bezug auf b:

$$\vartheta^\lambda = \vartheta(\mathbf{w}^\lambda - g),$$
$$\vartheta^\varrho = \vartheta(\mathbf{w}^\varrho - g),$$

gleichzeitig zufolge (3):

$$\mathbf{w}^\lambda - \mathbf{w}^\varrho = \delta;$$

mithin:

$$\vartheta^\lambda = \vartheta(\mathbf{w}^\varrho - g + \delta),$$
$$\vartheta^\varrho = \vartheta(\mathbf{w}^\varrho - g),$$

folglich mit Rücksicht auf die Formel (18):

$$\frac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\varrho} = e^{-(\delta + 2\mathbf{w}^\varrho - 2g)},$$

oder weil

$$\mathbf{w}^\lambda - \mathbf{w}^\varrho = \delta,$$
$$\mathbf{w}^\lambda + \mathbf{w}^\varrho = \delta + 2\mathbf{w}^\varrho$$

ist:

$$\frac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\varrho} = e^{-(\mathbf{w}^\lambda + \mathbf{w}^\varrho - 2g)} = e^{2g - \mathbf{w}^\lambda - \mathbf{w}^\varrho}.$$

In Bezug auf die Werthe, welche die von z abhängende Function

$$\vartheta = \vartheta\,(\mathbf{w}\,(z) - g)$$

an den Ufern der Ströme a, b besitzt, gelten demnach folgende Formeln:

$$(20)\qquad \begin{cases} \text{längs } a \text{ ist: } \dfrac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\varrho} = 1, \\ \text{und längs } b\text{: } \dfrac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\varrho} = e^{2g - \mathbf{w}^\lambda - \mathbf{w}^\varrho}. \end{cases}$$

Die hier betrachtete Function ϑ ist innerhalb der Fläche $\mathfrak{R}'$ allenthalben eindeutig und stetig, daselbst also mit keinerlei Polen behaftet. Demnach wird ihre Ordnungszahl auf jener Fläche nirgends negativ sein können; sie wird positiv sein in denjenigen Puncten, in welchen die Function verschwindet, und Null sein in allen übrigen Puncten. (Vgl. die Sätze S. 244 u. 246).

Bezeichnen wir also die einzelnen Nullpuncte, welche die Function

$$\vartheta = \vartheta\,(\mathbf{w}\,(z) - g)$$

innerhalb $\mathfrak{R}'$ besitzt, mit $z_1, z_2, \ldots z_\tau$, und die in diesen Puncten vorhandenen Ordnungszahlen mit $m_1, m_2, \ldots m_\tau$, so wird

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_\tau$$

die Summe sämmtlicher Ordnungszahlen sein, welche jene Function innerhalb der Fläche $\mathfrak{R}'$ besitzt. Diese Summe lässt sich aber zufolge eines früher (S. 269) gefundenen allgemeinen Satzes jederzeit darstellen durch ein gewisses um den Rand von $\mathfrak{R}'$ herumlaufendes Integral; wir erhalten nämlich jenem Satz zufolge:

$$(21)\qquad m_1 + m_2 + \ldots + m_\tau = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{R}'} \frac{d\vartheta}{\vartheta},$$

wo die Integration um den Rand der Fläche $\mathfrak{R}'$ in positiver Richtung herumerstreckt ist.

Nun ergiebt sich, ähnlich wie bei früherer Gelegenheit:

$$\int\limits_{\mathfrak{R}'} \frac{d\vartheta}{\vartheta} = \int\limits_a \frac{d\vartheta^\lambda}{\vartheta^\lambda} + \int\limits_b \frac{d\vartheta^\lambda}{\vartheta^\lambda} + \int\limits_{a'} \frac{d\vartheta^\varrho}{\vartheta^\varrho} + \int\limits_{b'} \frac{d\vartheta^\varrho}{\vartheta^\varrho},$$

wo die Integrale $\int\limits_a, \int\limits_b$ den Strömen a, b entlang stromabwärts, die Integrale $\int\limits_{a'}$, $\int\limits_{b'}$ hingegen jenen Strömen entlang stromaufwärts hinerstreckt sind, und wo die den linken Ufern zugehörigen Werthe von ϑ mit ϑ^λ, die den rechten zugehörigen hingegen mit ϑ^ϱ bezeichnet sind. Aendert man in den beiden letzten Integralen die Richtung der Integration, und gleichzeitig natürlich auch das Vorzeichen, so erhält man:

$$\int\limits_{\mathfrak{R}'} \frac{d\vartheta}{\vartheta} = \int\limits_a \left(\frac{d\vartheta^\lambda}{\vartheta^\lambda} - \frac{d\vartheta^\varrho}{\vartheta^\varrho}\right) + \int\limits_b \left(\frac{d\vartheta^\lambda}{\vartheta^\lambda} - \frac{d\vartheta^\varrho}{\vartheta^\varrho}\right).$$

Nun ist zufolge (20):

$$\text{längs } a\colon \frac{d\vartheta^\lambda}{\vartheta^\lambda} - \frac{d\vartheta^\varrho}{\vartheta^\varrho} = 0,$$

$$\text{längs } b\colon \frac{d\vartheta^\lambda}{\vartheta^\lambda} - \frac{d\vartheta^\varrho}{\vartheta^\varrho} = -\, d\mathbf{w}^\lambda - d\mathbf{w}^\varrho;$$

folglich:

$$\int\limits_{\mathfrak{R}'} \frac{d\vartheta}{\vartheta} = -\int\limits_b (d\mathbf{w}^\lambda + d\mathbf{w}^\varrho),$$

oder weil $\mathbf{w}^\lambda$ und $\mathbf{w}^\varrho$ längs des Stromes b hin nur durch eine Constante von einander verschieden sind, mithin $d\mathbf{w}^\lambda$ und $d\mathbf{w}^\varrho$ längs jenes Stromes hin einerlei Werthe besitzen:

$$\int\limits_{\mathfrak{R}'} \frac{d\vartheta}{\vartheta} = -\, 2 \int\limits_b d\mathbf{w}.$$

Der Strom b hat seinen Anfang im linken Ufer des Stromes a, und sein Ende im rechten Ufer von a (S. 320). Das Integral $\int\limits_b d\mathbf{w}$ ist daher gleich der Differenz derjenigen Werthe, welche $\mathbf{w}$ im rechten und linken Ufer von a besitzt, mithin zufolge (3) gleich $-\,2\pi i$. Somit erhalten wir:

$$\int\limits_{\mathfrak{R}'} \frac{d\vartheta}{\vartheta} = +\, 4\pi i,$$

und, falls wir diesen Werth in (21) substituiren:

$$(22) \qquad m_1 + m_2 + \ldots + m_\tau = 2.$$

Die Nullpuncte $z_1, z_2, \ldots z_\tau$, welche die Function ϑ auf der Fläche $\mathfrak{R}'$ besitzt, sind ihrer Lage nach völlig unbekannt; die Summe der in ihnen vorhandenen Ordnungszahlen aber ist bekannt, nämlich, wie wir aus der eben gefundenen Gleichung ersehen, jederzeit gleich 2. Es wird für unsere weiteren Betrachtungen zweckmässig sein, wenn wir einen Nullpunct, dessen Ordnungszahl 1 ist, einen Nullpunct erster Ordnung nennen, und jeden andern Nullpunct als eine Superposition von mehreren solchen Nullpuncten erster Ordnung ansehen. Thun wir dies, so können wir uns in Betreff der eben erhaltenen Gleichung (22) so ausdrücken: Die Anzahl der Nullpuncte, welche die von z abhängende Function ϑ auf der Fläche $\mathfrak{R}'$ besitzt, wird, falls man sich diese Nullpuncte in lauter Nullpuncte **erster Ordnung** aufgelöst denkt, jederzeit gleich 2 sein.

Die Resultate, zu welchen wir in Betreff der hier betrachteten Functionen w, η, ϑ gelangt sind, lassen sich in folgender Weise zusammenfassen:

Die von z abhängenden und mit irgend welchen Constanten h, k, g behafteten Functionen:

$$\mathrm{w} = \mathrm{w}(z) = \frac{2\pi i}{A} \cdot W(z),$$

$$\eta = e^{h + k\mathrm{w}(z)},$$

$$\vartheta = \vartheta(\mathrm{w}(z) - g)$$

sind innerhalb der Fläche $\mathfrak{R}'$ allenthalben eindeutig und stetig. Was ihre Werthe am Rande dieser Fläche, nämlich an den Ufern der Ströme a, b anbelangt, so ist, falls man die Constante $\frac{2\pi i \,.\, B}{A}$ mit δ bezeichnet:

längs a: $\mathrm{w}^\lambda - \mathrm{w}^\varrho = 2\pi i, \quad \frac{\eta^\lambda}{\eta^\varrho} = e^{k\,.\,2\pi i}, \quad \frac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\varrho} = 1,$

längs b: $\mathrm{w}^\lambda - \mathrm{w}^\varrho = \delta, \quad \frac{\eta^\lambda}{\eta^\varrho} = e^{k\delta}, \quad \frac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\varrho} = e^{2g - \mathrm{w}^\lambda - \mathrm{w}^\varrho}.$

Die Werthe, welche w in den Puncten p, $-p$, q, $-q$, 0, 0′, ∞, ∞' besitzt, sind folgende:

$$\begin{aligned}
\mathrm{w}(p) &= \frac{\pi i}{2}, & \mathrm{w}(q) &= \frac{\pi i}{2} - \frac{\delta}{2},\\
\mathrm{w}(-p) &= -\frac{\pi i}{2}, & \mathrm{w}(-q) &= -\frac{\pi i}{2} - \frac{\delta}{2},\\
\mathrm{w}(0) &= 0, & \mathrm{w}(\infty) &= -\pi i - \frac{\delta}{2},\\
\mathrm{w}(0') &= -\pi i, & \mathrm{w}(\infty') &= -\frac{\delta}{2}.
\end{aligned}$$

Die Function η kann, weil $\mathbf{w}$ *auf der Fläche $\mathfrak{R}'$ überall stetig, mithin auch überall endlich ist, auf jener Fläche nirgends Null werden. Die Function ϑ hingegen besitzt auf $\mathfrak{R}'$ jederzeit 2 Nullpuncte erster Ordnung.*

Fünfter Abschnitt. Fortsetzung. Es wird gezeigt, wie sich mit Hülfe der ϑ-Reihe die Umkehrung der Function $\mathbf{w}(z)$ bewerkstelligen, nämlich z durch $\mathbf{w}(z)$ ausdrücken lässt.

Wir wollen der Kürze wegen eine jede Function, die auf einer gegebenen Fläche überall eindeutig, und mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig ist, eine regelmässige Function nennen, oder genauer ausgedrückt, eine Function nennen, die innerhalb jener Fläche überall regelmässig bleibt. Die Ordnungszahl einer solchen regelmässigen Function wird in jedem Nullpunct durch eine positive, in jedem Pole durch eine negative ganze Zahl, und in jedem andern Punct durch Null dargestellt. Ausserdem müssen wir uns in Betreff dieser Functionen noch an einen gewissen allgemeinen Satz erinnern (S. 274), welcher so lautet:

Sind $f_1, f_2, \ldots f_\alpha$ und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\beta$ irgend welche von z abhängende Functionen, die auf einer gegebenen Fläche überall regelmässig sind, so gilt Gleiches auch von dem Quotienten:

$$\frac{f_1 \cdot f_2 \cdots f_\alpha}{\varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdots \varphi_\beta}.$$

Zugleich erhält man die Ordnungszahl dieses Quotienten in jedem Punct der gegebenen Fläche dadurch, dass man die Ordnungszahlen der im Zähler vorhandenen Functionen addirt, und von der so gebildeten Summe die Ordnungszahlen der im Nenner befindlichen Functionen subtrahirt.

Von diesen Bemerkungen wollen wir nun Anwendung machen auf die Functionen:

$$(1)\qquad \begin{cases} \vartheta = \vartheta\,(\mathbf{w}(z) - g), \\ \vartheta' = \vartheta\,(\mathbf{w}(z) - g'), \\ \eta = e^{k \cdot \mathbf{w}(z)}, \end{cases}$$

und auf den aus diesen zusammengesetzten Quotienten:

$$(2) \qquad \Theta = \frac{\eta \cdot \eta \cdot \vartheta \cdot \vartheta}{\vartheta' \cdot \vartheta'} = \left(\frac{\eta \cdot \vartheta}{\vartheta'}\right)^2.$$

Unter g, g', k sollen dabei ganz beliebig gewählte Constanten verstanden werden.

ϑ, ϑ' und η sind von z abhängende Functionen, die innerhalb der Fläche $\mathfrak{R}'$ allenthalben regelmässig sind. Gleiches gilt demnach auch von Θ.

Bezeichnen wir ferner die beiden der Function ϑ zugehörigen Nullpuncte erster Ordnung mit z_1, z_2, und die beiden der Function ϑ' zugehörigen mit z_1', z_2', so wird die Ordnungszahl von ϑ in den Puncten z_1, z_2 den Werth 1, in allen übrigen Puncten der Fläche $\mathfrak{R}'$ hingegen den Werth 0 haben. Desgleichen wird die Ordnungszahl von ϑ' in den Puncten z_1', z_2' den Werth 1, in den übrigen Puncten den Werth 0 haben. Endlich wird η eine Function sein, deren Ordnungszahl auf der Fläche $\mathfrak{R}'$ allenthalben gleich 0 ist.

Hieraus aber folgt mit Rücksicht auf die vorhin gemachte Bemerkung, dass die Ordnungszahl von Θ in den Puncten z_1, z_2 den Werth 2, in den Puncten z_1', z_2' den Werth -2, und in allen übrigen zur Fläche $\mathfrak{R}'$ gehörigen Puncten den Werth 0 besitzt. Sollte einer der beiden Puncte z_1, z_2 zufälliger Weise mit einem der Puncte z_1', z_2' gerade zusammenfallen, so würde die Ordnungszahl von Θ in einem solchen Puncte gleich $2 - 2$, also gleich 0 sein.

Wir untersuchen nun ferner die am Rande von $\mathfrak{R}'$, d. i. an den Ufern der Ströme a, b befindlichen Werthe von Θ. Sind λ und ϱ irgend zwei auf dem linken und rechten Ufer eines dieser Ströme einander gegenüberliegende Puncte, und sind ϑ^λ, ϑ'^λ, η^λ, Θ^λ und ϑ^ϱ, ϑ'^ϱ, η^ϱ, Θ^ϱ die in diesen Puncten vorhandenen Werthe von ϑ, ϑ', η, Θ, so ist:

$$\Theta^\lambda = \left(\frac{\eta^\lambda \cdot \vartheta^\lambda}{\vartheta'^\lambda}\right)^2,$$

$$\Theta^\varrho = \left(\frac{\eta^\varrho \cdot \vartheta^\varrho}{\vartheta'^\varrho}\right)^2,$$

mithin:

$$\frac{\Theta^\lambda}{\Theta^\varrho} = \left(\frac{\eta^\lambda}{\eta^\varrho}\right)^2 \cdot \left(\frac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\varrho}\right)^2 \cdot \left(\frac{\vartheta'^\lambda}{\vartheta'^\varrho}\right)^{-2}.$$

Nun ist, wie wir vorhin (S. 375) gefunden haben:

längs a: $\frac{\eta^\lambda}{\eta^\varrho} = e^{k \cdot 2\pi i}$, $\frac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\varrho} = 1$, $\frac{\vartheta'^\lambda}{\vartheta'^\varrho} = 1$,

längs b: $\frac{\eta^\lambda}{\eta^\varrho} = e^{k \cdot \delta}$, $\frac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\varrho} = e^{2g \quad \mathrm{w}^\lambda - \mathrm{w}^\varrho}$, $\frac{\vartheta'^\lambda}{\vartheta'^\varrho} = e^{2g' - \mathrm{w}^\lambda - \mathrm{w}^\varrho}$.

Somit ergiebt sich

$$(3) \qquad \begin{cases} \text{längs } a: \ \frac{\Theta^\lambda}{\Theta^\varrho} = e^{2k \cdot 2\pi i}, \\ \text{längs } b: \ \frac{\Theta^\lambda}{\Theta^\varrho} = e^{2k\delta + 4(g-g')}. \end{cases}$$

Die Constante δ ist eine gegebene und unveränderliche. Die Constanten k, g, g' hingegen können beliebig gewählt werden. Wir bestimmen diese letzteren der Art, dass die hier auf der rechten Seite stehenden Exponentialgrössen beide gleich 1, dass also die in ihnen vorhandenen Exponenten Vielfache von $2\pi i$ werden. Zu diesem Zwecke setzen wir zuerst:

$$(4) \qquad k = \nu,$$

und denken uns sodann g, g' der Art gewählt, dass

$$k\delta + 2(g - g') = -\mu\pi i,$$

oder

$$(5) \qquad \nu\delta + 2(g - g') = -\mu\pi i$$

wird, wo μ und ν irgend welche (positive oder negative) ganze Zahlen sein sollen. Thun wir dies, so verwandeln sich die in (3) angegebenen Werthquotienten in:

$$(6) \qquad \begin{cases} \text{längs } a: \ \frac{\Theta^\lambda}{\Theta^\varrho} = 1, \\ \text{längs } b: \ \frac{\Theta^\lambda}{\Theta^\varrho} = 1. \end{cases}$$

Bestimmen wir also die Constanten g, g', k in der Art, wie die Gleichungen (4), (5) es verlangen, so werden die in den Strömen a, b vorhandenen Unstetigkeiten von Θ verschwinden.

Bis hierher haben wir alle Functionen auf die von den Ufern der Ströme a, b umrandete Fläche $\mathfrak{R}'$ bezogen. Indem wir nun weiter gehen, nehmen wir an Stelle jener Fläche $\mathfrak{R}'$ zur Grundlage für unsere Untersuchung die geschlossene Fläche $\mathfrak{R}$.

So lange, als die Constanten g, g', k beliebige Werthe besassen, war die Function Θ auf $\mathfrak{R}'$ allenthalben regelmässig, auf der Fläche $\mathfrak{R}$ hingegen, in Folge der in den Strömen a, b vorhandenen Unstetigkeiten, nicht regelmässig. Wählen wir aber die Constanten g, g', k der Art, wie die Gleichungen (4), (5) es verlangen, so verschwinden jene Unstetigkeiten, und Θ verwandelt sich in eine Function, die nicht nur auf $\mathfrak{R}'$, sondern auch auf $\mathfrak{R}$ allenthalben regelmässig ist. Wir gelangen demnach zu folgendem Satz:

Ist g irgend welche Constante, und sind μ, ν irgend welche ganze Zahlen, so wird der Ausdruck:

$$\Theta = \left(\frac{\vartheta\,(\mathrm{w}\,(z) - g)}{\vartheta\left(\mathrm{w}\,(z) - g - \mu\,\frac{\pi i}{2} - \nu\,\frac{\delta}{2}\right)} \cdot e^{\nu\,.\,\mathrm{w}\,(z)} \right)^2$$

eine von z abhängende Function sein, welche auf der geschlossenen Fläche $\mathfrak{R}$ allenthalben regelmässig ist.

Sind ferner z_1, z_2 die beiden dem Zähler

$$\vartheta\,(\mathrm{w}\,(z) - g)$$

zugehörigen Nullpuncte erster Ordnung, und z_1', z_2' die dem Nenner

$$\vartheta\left(\mathrm{w}\,(z) - g - \mu\,\frac{\pi i}{2} - \nu\,\frac{\delta}{2}\right)$$

zugehörigen, so wird die Ordnungszahl von Θ in den Puncten z_1, z_2 den Werth 2, in den Puncten z_1', z_2' den Werth -2, und in allen übrigen zur Fläche $\mathfrak{R}$ gehörigen Puncten den Werth 0 besitzen. Fallen von den vier Puncten z_1, z_2, z_1', z_2' irgend zwei mit einander zusammen, so wird die in einem solchen Puncte vorhandene Ordnungszahl von Θ gleich der Summe der für jene beiden Puncte angegebenen Zahlen sein.

Eine Function, welche auf einer Riemann'schen Kugelfläche überall regelmässig (d. h. überall eindeutig und mit Ausnahme einzelner Pole überall stetig) ist, wird nun, wie wir früher (S. 290) gesehen haben, jederzeit eine algebraische Function von z sein. Demnach muss die zwischen unserem Ausdruck Θ und zwischen z vorhandene Abhängigkeit sich auf algebraische Weise ausdrücken lassen. Indem wir solches aber unternehmen, beschränken wir uns in Betreff der in Θ enthaltenen Constanten g und in Betreff der darin enthaltenen ganzen Zahlen μ, ν auf gewisse besondere Fälle.

Wir suchen zunächst die in der Function

(1) $$\vartheta\,(\mathrm{w}\,(z) - g)$$

enthaltene Constante g der Art zu bestimmen, dass die Function in den beiden Puncten q und $-q$ verschwindet; also, weil (zufolge S. 375):

$$\mathrm{w}\,(q) = \frac{\pi i}{2} - \frac{\delta}{2}, \quad \mathrm{w}\,(-q) = -\frac{\pi i}{2} - \frac{\delta}{2}$$

ist, der Art zu bestimmen, dass die Ausdrücke

(2) $$\vartheta\left(\frac{\pi i}{2} - \frac{\delta}{2} - g\right) \quad \text{und} \quad \vartheta\left(-\frac{\pi i}{2} - \frac{\delta}{2} - g\right)$$

beide $= 0$ werden. Nun ist (vgl. S. 372, Formel (19)) jederzeit

(3) $$\vartheta\,((m + \tfrac{1}{2})\,\pi i + (n + \tfrac{1}{2})\,\delta) = 0,$$

vorausgesetzt, dass m und n irgend welche ganze Zahlen vorstellen. Die Ausdrücke (2) werden daher verschwinden, sobald man $g = 0$ setzt. Und die Function (1) wird demnach, falls man für g diesen Werth nimmt, in den beiden Puncten q und $-q$ verschwinden.

Will man andererseits die Function (1) durch geeignete Wahl der in ihr enthaltenen Constanten g dahin bringen, dass ihre Nullpuncte mit den Puncten p und $-p$ zusammenfallen, so muss man, weil

$$\mathrm{w}\,(p) = \frac{\pi i}{2}, \quad \mathrm{w}\,(-p) = -\frac{\pi i}{2}$$

ist, die Constante g der Art wählen, dass die Ausdrücke

$$\vartheta\left(\frac{\pi i}{2} - g\right) \quad \text{und} \quad \vartheta\left(-\frac{\pi i}{2} - g\right)$$

beide verschwinden; und solches geschieht, mit Rücksicht auf (3), sobald man $g = \pm\frac{\delta}{2}$ setzt.

Wir können ferner g der Art wählen, dass die Function (1) in den beiden Puncten 0 und $0'$ verschwindet. Da

$$\mathrm{w}\,(0) = 0, \quad \mathrm{w}\,(0') = -\pi i$$

ist, so müssen wir, um solches zu erreichen, die Constante g in solcher Weise bestimmen, dass die Ausdrücke

$$\vartheta\,(-g) \quad \text{und} \quad \vartheta\,(-\pi i - g)$$

Null werden. Dies aber geschieht, wenn wir

$$g = \pm\left(\frac{i\pi}{2} + \frac{\delta}{2}\right)$$

setzen.

Endlich können wir g auch der Art wählen, dass die Function (1) in den Puncten ∞ und ∞' verschwindet. Für jene Puncte ist:

$$\mathrm{w}\,(\infty) = -\pi i - \frac{\delta}{2}, \quad \mathrm{w}\,(\infty') = -\frac{\delta}{2}.$$

Und wir werden daher, um unseren Zweck zu erreichen, die Constante g so bestimmen müssen, dass die Ausdrücke

$$\vartheta\left(-\pi i - \frac{\delta}{2} - g\right) \quad \text{und} \quad \vartheta\left(-\frac{\delta}{2} - g\right)$$

Null werden. Dies geschieht, wenn wir $g = \pm \frac{\pi i}{2}$ setzen.

Die Nullpuncte der vier Functionen

$$(4) \qquad \vartheta(\mathrm{w}); \quad \vartheta\left(\mathrm{w} + \frac{\pi i}{2}\right); \quad \vartheta\left(\mathrm{w} + \frac{\delta}{2}\right); \quad \vartheta\left(\mathrm{w} + \frac{i\pi}{2} + \frac{\delta}{2}\right)$$

liegen also in den Puncten:

$$q, \ -q; \qquad \infty, \ \infty'; \qquad p, \ -p; \qquad 0, \ 0'.$$

Zufolge des letztgefundenen Satzes (S. 379) wird demnach

$$\Theta = \left(\frac{\vartheta\left(\mathrm{w} + \frac{i\pi}{2} + \frac{\delta}{2}\right)}{\vartheta\left(\mathrm{w} + \frac{i\pi}{2}\right)} e^{\mathrm{w}} \right)^2$$

eine von z abhängende Function sein, die auf der geschlossenen Fläche $\mathfrak{R}$ überall regelmässig ist, und deren Ordnungszahl in den Puncten $0, 0'$ den Werth 2, in den Puncten ∞, ∞' den Werth -2, in allen übrigen Puncten hingegen den Werth 0 besitzt. Wort für Wort dasselbe gilt aber (vergl. S. 264, 265) auf der Fläche $\mathfrak{R}$ auch von der Function

$$z^2.$$

Demnach sind Θ und z^2 zwei Functionen, die auf $\mathfrak{R}$ allenthalben regelmässig, und allenthalben von gleichen Ordnungszahlen sind, also zwei Functionen, die zufolge eines früher bewiesenen allgemeinen Satzes (S. 276) nur durch einen constanten Factor von einander verschieden sein können. Wir erhalten daher, wenn wir diesen constanten Factor mit K bezeichnen:

$$(5) \qquad z^2 = K \cdot e^{2\mathrm{w}} \left(\frac{\vartheta\left(\mathrm{w} + \frac{i\pi}{2} + \frac{\delta}{2}\right)}{\vartheta\left(\mathrm{w} + \frac{i\pi}{2}\right)} \right)^2.$$

Um K zu bestimmen, lassen wir den variablen Punct z einmal mit p, und einmal mit q zusammenfallen, und erhalten alsdann, weil

$$\mathrm{w}(p) = \frac{\pi i}{2}, \qquad \mathrm{w}(q) = \frac{\pi i}{2} - \frac{\delta}{2}$$

ist, im ersten Fall:

$$(6)\qquad p^2 = K \cdot e^{\pi i} \cdot \left(\frac{\vartheta\left(\pi i + \frac{\delta}{2}\right)}{\vartheta(\pi i)}\right)^2,$$

im zweiten Falle:

$$(7)\qquad q^2 = K \cdot e^{\pi i - \delta} \cdot \left(\frac{\vartheta(\pi i)}{\vartheta\left(\pi i - \frac{\delta}{2}\right)}\right)^2.$$

Nun ist zufolge der für ϑ gültigen allgemeinen Formeln (S. 372)

$$\vartheta\left(\pi i + \frac{\delta}{2}\right) = \vartheta\left(\frac{\delta}{2}\right),$$

$$\vartheta\left(\pi i - \frac{\delta}{2}\right) = \vartheta\left(-\frac{\delta}{2}\right);$$

und
$$\vartheta\left(\frac{\delta}{2}\right) = \vartheta\left(-\frac{\delta}{2}\right).$$

Somit ergiebt sich aus (6) und (7) durch Multiplication:

$$(8)\qquad p^2 q^2 = K^2 \cdot e^{2\pi i - \delta} = K^2 \cdot e^{-\delta},$$

folglich:

$$(9)\qquad K = pq \cdot e^{\frac{\delta}{2}}.$$

Substituirt man endlich diesen Werth in (5), so erhält man:

$$(10)\qquad z^2 = pq \cdot e^{2\mathrm{w} + \frac{\delta}{2}} \cdot \left(\frac{\vartheta\left(\mathrm{w} + \frac{i\pi}{2} + \frac{\delta}{2}\right)}{\vartheta\left(\mathrm{w} + \frac{i\pi}{2}\right)}\right)^2.$$

In ganz ähnlicher Weise lässt sich nun ferner (vgl. S. 379 u. 381) auch folgender Ausdruck behandeln:

$$\Theta = \left(\frac{\vartheta\left(\mathrm{w} + \frac{\delta}{2}\right)}{\vartheta\left(\mathrm{w} + \frac{\pi i}{2}\right)} \cdot e^{\mathrm{w}}\right)^2.$$

Dieser ist wiederum eine von z abhängende Function, welche auf $\mathfrak{R}$ überall regelmässig ist, und deren Ordnungszahlen in den Puncten p, $-p$ gleich 2, in den Puncten ∞, ∞' gleich -2, und in allen übrigen Puncten gleich 0 sind. Völlig dasselbe gilt aber (vgl. S. 264 u. 265) auch von der Function:

$$(p - z)(p + z) \qquad \text{oder} \qquad p^2 - z^2.$$

Somit erhält man:

$$(11) \qquad p^2 - z^2 = K \cdot e^{2\mathrm{w}} \cdot \left(\frac{\vartheta\left(\mathrm{w} + \frac{\delta}{2}\right)}{\vartheta\left(\mathrm{w} + \frac{\pi i}{2}\right)} \right)^2.$$

Nimmt man, um K zu berechnen, für den Punct z einmal den Punct 0, und einmal den Punct q, so ergiebt sich, weil

$$\mathrm{w}(0) = 0, \quad \mathrm{w}(q) = \frac{\pi i}{2} - \frac{\delta}{2}$$

ist:

$$p^2 = K \cdot \left(\frac{\vartheta\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\vartheta\left(\frac{\pi i}{2}\right)} \right)^2,$$

$$p^2 - q^2 = K \cdot e^{\pi i - \delta} \cdot \left(\frac{\vartheta\left(\frac{\pi i}{2}\right)}{\vartheta\left(-\frac{\delta}{2}\right)} \right)^2;$$

und hieraus durch Multiplication:

$$p^2 (p^2 - q^2) = K^2 e^{\pi i - \delta} = - K^2 e^{-\delta},$$

folglich:

$$K = p \cdot \sqrt{q^2 - p^2} \cdot e^{\frac{\delta}{2}}.$$

Substituirt man diesen Werth in (11), so erhält man schliesslich:

$$(12) \quad p^2 - z^2 = p \cdot \sqrt{q^2 - p^2} \cdot e^{2\mathrm{w} + \frac{\delta}{2}} \cdot \left(\frac{\vartheta\left(\mathrm{w} + \frac{\delta}{2}\right)}{\vartheta\left(\mathrm{w} + \frac{\pi i}{2}\right)} \right)^2.$$

Endlich lässt sich in ähnlicher Weise der Ausdruck

$$\Theta = \left(\frac{\vartheta(\mathrm{w})}{\vartheta\left(\mathrm{w} + \frac{\pi i}{2}\right)} \right)^2$$

behandeln. Dieser ist eine von z abhängende, auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überall regelmässige Function, deren Ordnungszahlen in den Puncten q, $-q$ gleich 2, in den Puncten ∞, ∞' gleich -2, und in allen übrigen Puncten gleich 0 sind. Ganz dasselbe gilt aber auch von der Function

$$(q - z)(q + z) \quad \text{oder} \quad q^2 - z^2.$$

Somit erhält man, falls K eine Constante bezeichnet:

$$(13)\qquad q^2 - z^2 = K \cdot \left(\frac{\vartheta\,(\mathbf{w})}{\vartheta\left(\mathbf{w} + \frac{\pi i}{2}\right)}\right)^2.$$

Um den Werth von K zu ermitteln, lassen wir den Punct z einmal nach 0, und einmal nach p fallen, und erhalten alsdann, weil

$$\mathbf{w}\,(0) = 0, \quad \mathbf{w}\,(p) = \frac{\pi i}{2}\,.$$

ist:

$$q^2 = K \cdot \left(\frac{\vartheta\,(0)}{\vartheta\left(\frac{\pi i}{2}\right)}\right)^2,$$

$$q^2 - p^2 = K \cdot \left(\frac{\vartheta\left(\frac{\pi i}{2}\right)}{\vartheta\,(\pi i)}\right)^2.$$

Hieraus ergiebt sich, weil $\vartheta\,(\pi i) = \vartheta\,(0)$ ist, durch Multiplication:

$$q^2\,(q^2 - p^2) = K^2,$$

mithin:

$$K = q\,\sqrt{q^2 - p^2};$$

folglich, wenn man diesen Werth in (13) substituirt:

$$(14)\qquad q^2 - z^2 = q\,\sqrt{q^2 - p^2} \cdot \left(\frac{\vartheta\,(\mathbf{w})}{\vartheta\left(\mathbf{w} + \frac{\pi i}{2}\right)}\right)^2.$$

Die Hauptresultate, zu welchen wir bis jetzt gelangt sind, werden durch die Gleichungen (10), (12) und (14) dargestellt; lassen sich also folgendermassen aussprechen:

Setzt man

$$\frac{2\pi i}{A}\;\Omega\,(z) = \omega\,(z),$$

$$\frac{2\pi i}{A}\;W\,(z) = \mathbf{w}\,(z),$$

und bezeichnet man ausserdem zur Abkürzung die Constante

$$\frac{2\pi i \,.\, B}{A}$$

mit δ, *und die Constante* $\sqrt{q^2 - p^2}$ *mit* r, *so finden jederzeit folgende drei Formeln statt:*

$$z^2 = pq \,.\, \left(\frac{\vartheta\left(\mathrm{w} + \frac{\pi i}{2} + \frac{\delta}{2}\right)}{\vartheta\left(\mathrm{w} + \frac{\pi i}{2}\right)} \,.\, e^{\mathrm{w} + \frac{\delta}{4}} \right)^2,$$

$$p^2 - z^2 = pr \,.\, \left(\frac{\vartheta\left(\mathrm{w} + \frac{\delta}{2}\right)}{\vartheta\left(\mathrm{w} + \frac{\pi i}{2}\right)} \,.\, e^{\mathrm{w} + \frac{\delta}{4}} \right)^2,$$

$$q^2 - z^2 = qr \,.\, \left(\frac{\vartheta\left(\mathrm{w}\right)}{\vartheta\left(\mathrm{w} + \frac{\pi i}{2}\right)} \right)^2.$$

Hier ist unter $\vartheta(U)$ die unendliche Reihe

$$\vartheta(U) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\delta n^2 + 2Un}$$

zu verstehen.

Sechster Abschnitt. Durch Uebertragung der im letzten Abschnitt erhaltenen Resultate auf das Integral $\omega(z)$ und auf das ursprünglich vorgelegte Integral $\Omega(z)$ ergiebt sich schliesslich die Lösung des gestellten Problemes.

Diese Resultate beziehen sich zunächst allerdings nur auf die dem Integral $\omega(z)$ zugeordnete eindeutige Function $\mathbf{w}(z)$, lassen sich aber, wie gegenwärtig gezeigt werden soll, auf jenes Integral selber sofort übertragen.

Das Integral

$$\omega(z) = \frac{2\pi i}{A} \int_0^z \frac{dz}{R}$$

bewegt sich auf der geschlossenen Fläche $\mathfrak{R}$ in völlig willkührlicher Bahn vorwärts. Die eindeutige Function $\mathbf{w}(z)$ hingegen ist durch ein Integral

$$\mathbf{w}(z) = \frac{2\pi i}{A} \int_0^z \frac{dz}{R}$$

definirt worden, welches in seiner Bewegung beschränkt ist, welches nämlich die auf der Fläche $\mathfrak{R}$ vorhandenen Ströme

a, b nirgends überschreiten darf. Diese Function $\mathbf{w}(z)$ war in den Strömen a und b mit gewissen constanten Werthdifferenzen $2\pi i$ und δ behaftet; es war nämlich

$$\text{längs } a\text{: } \mathbf{w}^\lambda - \mathbf{w}^\varrho = 2\pi i,$$
$$\text{längs } b\text{: } \mathbf{w}^\lambda - \mathbf{w}^\varrho = \delta.$$

Zufolge eines früher gefundenen Satzes (S. 343) wird daher zwischen dem Werthe, mit welchem das auf willkürlicher Bahn fortschreitende Integral ω in irgend einem Puncte z eintrifft, und zwischen demjenigen Werthe, welchen die eindeutige Function $\mathbf{w}$ in jenem Puncte besitzt, immer ein gewisser einfacher Zusammenhang stattfinden. Sind nämlich $\omega(z)$ und $\mathbf{w}(z)$ zwei solche Werthe, so wird jederzeit

(1) $$\omega(z) = \mathbf{w}(z) + m\,.\,2\pi i + n\,.\,\delta$$

sein, wo m und n irgend welche unbekannte ganze Zahlen vorstellen. Der Bequemlichkeit willen setzen wir für $\omega(z)$ und $\mathbf{w}(z)$ kurzweg ω und $\mathbf{w}$, und erhalten alsdann:

(2) $$\omega = \mathbf{w} + m\,.\,2\pi i + n\,.\,\delta.$$

Zufolge einer allgemeinen Eigenschaft der mit ϑ bezeichneten Reihe (S. 372, Formel (18)) ist nun, falls m und n irgend welche ganze Zahlen, und U irgend eine beliebige Grösse vorstellt, jederzeit:

(3) $$\frac{\vartheta(U + 2m.\pi i + n.\delta)}{\vartheta(U)} = e^{-(n^2\delta + 2nU)}.$$

Setzen wir hier statt U:

$$\mathbf{w} + g,$$

wo g irgend welche Constante vorstellen soll, und beachten wir, dass $U + 2m\pi i + n\,.\,\delta$ alsdann gleich

$$\mathbf{w} + 2m\pi i + n\delta + g,$$

mithin zufolge (2) gleich

$$\omega + g$$

wird, so erhalten wir:

(4) $$\frac{\vartheta(\omega + g)}{\vartheta(\mathbf{w} + g)} = e^{-(n^2\delta + 2n\mathbf{w} + 2ng)}.$$

Ebenso wird, falls wir die Constante g mit irgend einer andern Constante g' vertauschen:

(5) $$\frac{\vartheta(\omega + g')}{\vartheta(\mathbf{w} + g')} = e^{-(n^2\delta + 2n\mathbf{w} + 2ng')}.$$

Durch Division von (4) und (5) ergiebt sich:

$$(6)\qquad \frac{\vartheta\,(\omega+g)}{\vartheta\,(\omega+g')} = \frac{\vartheta\,(\mathrm{w}+g)}{\vartheta\,(\mathrm{w}+g')}\, e^{-2n\,(g-g')},$$

und falls wir diese Gleichung mit der aus (2) folgenden Gleichung:

$$e^{k\omega} = e^{k\,(\mathrm{w}+m\,.\,2\pi i+n\delta)},$$

d. i. mit der Gleichung:

$$e^{k\omega} = e^{k\mathrm{w}}\,.\,e^{nk\delta}$$

multipliciren:

$$(7)\qquad \frac{\vartheta\,(\omega+g)}{\vartheta\,(\omega+g')}\, e^{k\omega} = \frac{\vartheta\,(\mathrm{w}+g)}{\vartheta\,(\mathrm{w}+g')}\, e^{k\mathrm{w}}\,.\,e^{n\,(k\delta-2(g-g'))};$$

oder wenn wir auf beiden Seiten zum Quadrat erheben:

$$(8)\qquad \left(\frac{\vartheta\,(\omega+g)}{\vartheta\,(\omega+g')}\, e^{k\omega}\right)^2 = \left(\frac{\vartheta\,(\mathrm{w}+g)}{\vartheta\,(\mathrm{w}+g')}\, e^{k\mathrm{w}}\right)^2 .\, e^{2n(k\delta-2(g-g'))}.$$

Hier sind g, g', k ganz beliebig gewählte Constanten. Wir sehen aus dieser Gleichung (8), dass der Ausdruck

$$\left(\frac{\vartheta\,(U+g)}{\vartheta\,(U+g')}\,.\,e^{kU}\right)^2$$

für $U=\mathrm{w}$ und für $U=\omega$ ein und denselben Werth besitzen wird, sobald jene Constanten g, g', k der Art beschaffen sind, dass

$$k\delta - 2\,(g-g')$$

gleich einem Vielfachen von πi ist.

Bei denjenigen Ausdrücken, die in den von uns erhaltenen drei Formeln (S. 385) sich vorfinden, ist nun aber solches der Fall. Im ersten ist nämlich:

$$g = \frac{\pi i}{2} + \frac{\delta}{2}, \qquad g' = \frac{\pi i}{2}, \qquad k = 1,$$

mithin:

$$k\delta - 2\,(g-g') = \delta - 2\,\frac{\delta}{2} = 0;$$

im zweiten ist:

$$g = \frac{\delta}{2}, \qquad g' = \frac{\pi i}{2}, \qquad k = 1,$$

mithin:

$$k\delta - 2\,(g-g') = \delta - \delta + \pi i = \pi i;$$

endlich im dritten:

$$g = 0, \qquad g' = \frac{\pi i}{2}, \qquad k = 0,$$

mithin:

$$k\delta - 2(g - g') = 0 + \pi i = \pi i.$$

Wir können somit in jenen drei Formeln an Stelle desjenigen Werthes, welchen die eindeutige Function $\mathbf{w}$ im Puncte z besitzt, auch denjenigen Werth einsetzen, mit welchem das auf irgend welcher willkührlichen Bahn fortschreitende Integral ω in jenem Puncte z eintrifft, und erhalten alsdann:

$$z^2 = pq \cdot \left(\frac{\vartheta\left(\omega + \frac{\pi i}{2} + \frac{\delta}{2}\right)}{\vartheta\left(\omega + \frac{\pi i}{2}\right)} e^{\omega + \frac{\delta}{4}} \right)^2,$$

$$p^2 - z^2 = pr \cdot \left(\frac{\vartheta\left(\omega + \frac{\delta}{2}\right)}{\vartheta\left(\omega + \frac{\pi i}{2}\right)} e^{\omega + \frac{\delta}{4}} \right)^2,$$

$$q^2 - z^2 = qr \cdot \left(\frac{\vartheta(\omega)}{\vartheta\left(\omega + \frac{\pi i}{2}\right)} \right)^2.$$

Jede dieser drei Formeln kann als die Lösung des zu Anfang (S. 345) hingestellten Problemes angesehen werden. Denn jede derselben giebt uns, wenn das Integral auf irgend welcher unbekannten Bahn in einem ebenfalls unbekannten Puncte z anlangt, die Mittel an die Hand, diesen Punct z zu bestimmen, sobald nur der Werth ω, mit welchem das Integral daselbst eintrifft, bekannt ist.

Das Problem ist somit gelöst. Wir können uns über die gefundene Lösung, wenn wir das Wesentliche zusammenfassen, folgendermassen aussprechen:

Sind p, q beliebig gegebene (reelle oder imaginäre) Constanten, ist ferner

$$R = \frac{1}{pq} \sqrt{(z^2 - p^2)(z^2 - q^2)},$$

und handelt es sich um die Umkehrung des von der Grösse 0 *aus auf ganz willkührlicher Bahn nach irgend welcher andern Grösse z hinerstreckten Integrales*

$$\Omega = \int_0^z \frac{dz}{R};$$

so berechne man zuerst die diesem Integral zugehörigen Fundamentalwerthe:

$$\overline{\Omega}(p), \quad \overline{\Omega}(-p), \quad \overline{\Omega}(q), \quad \overline{\Omega}(-q),$$

sodann diejenigen beiden Constanten A, B, welche mit jenen Fundamentalwerthen durch die Gleichungen

$$\overline{\Omega}(p) = \frac{A}{4}, \qquad \overline{\Omega}(q) = \frac{A}{4} - \frac{B}{2},$$
$$\overline{\Omega}(-p) = -\frac{A}{4}, \qquad \overline{\Omega}(-q) = -\frac{A}{4} - \frac{B}{2}$$

verbunden sind, ferner die aus A und B zusammengesetzte Constante:

$$\frac{2\pi i \,.\, B}{A} = \delta;$$

und bilde endlich die von δ und einem beliebigen Argumente U abhängende unendliche Reihe:

$$\vartheta(U) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\delta n^2 + 2Un}.$$

Ist nun der Werth Ω gegeben, mit welchem das Integral nach Durchlaufung irgend welcher unbekannten Bahn in irgend einer ebenfalls unbekannten Grösse z eintrifft, so gelten, falls man das Product jenes Werthes Ω mit $\frac{2\pi i}{A}$ durch ω bezeichnet, zur Berechnung dieser unbekannten Grösse z folgende Formeln:

$$z = \sqrt{pq} \,.\, \frac{\vartheta\left(\omega + \frac{\pi i}{2} + \frac{\delta}{2}\right)}{\vartheta\left(\omega + \frac{\pi i}{2}\right)} \,.\, e^{\omega + \frac{\delta}{4}},$$

$$\sqrt{p^2 - z^2} = \sqrt{pr} \,.\, \frac{\vartheta\left(\omega + \frac{\delta}{2}\right)}{\vartheta\left(\omega + \frac{\pi i}{2}\right)} \,.\, e^{\omega + \frac{\delta}{4}},$$

$$\sqrt{q^2 - z^2} = \sqrt{qr} \,.\, \frac{\vartheta(\omega)}{\vartheta\left(\omega + \frac{\pi i}{2}\right)},$$

wo r zur Abkürzung gesetzt ist für $\sqrt{q^2 - p^2}$.

Zehnte Vorlesung.

Die Abel'schen Integrale.

Erster Abschnitt. Bei Umkehrung der Abel'schen Integrale $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_s$ sind zwei Probleme zu unterscheiden; von diesen ist das eine eigentlich nur ein Specialfall des andern.

Es sei:

$$R = \sqrt{(z-p_1)(z-q_1)(z-p_2)(z-q_2)\ldots(z-p_{s+1})(z-q_{s+1})},$$

und:

$$F_1 = \frac{g_1^{(1)} + g_2^{(1)} z + g_3^{(1)} z^2 + \ldots + g_s^{(1)} z^{s-1}}{R},$$

$$F_2 = \frac{g_1^{(2)} + g_2^{(2)} z + g_3^{(2)} z^2 + \ldots + g_s^{(2)} z^{s-1}}{R},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_s = \frac{g_1^{(s)} + g_2^{(s)} z + g_3^{(s)} z^2 + \ldots + g_s^{(s)} z^{s-1}}{R},$$

wo die Grössen p, q, g beliebig gegebene reelle oder imaginäre Constanten sein sollen, und wo z ein variables Argument vorstellen soll, welches alle möglichen reellen und imaginären Werthe annehmen darf. Ausser den p, q, g sei schliesslich noch eine letzte Constante gegeben, die ε heissen mag; ob sie reell oder imaginär ist, soll ebenfalls völlig gleichgültig sein.

R ist eine Wurzelgrösse, die für $z = p_1$, $z = q_1$, $z = p_2$, $z = q_2$, $\ldots\ldots$ $z = p_{s+1}$, $z = q_{s+1}$ verschwindet, und für jedes andere z zwei einander entgegengesetzte Werthe besitzt.

Wir lassen das Argument z eine von ε ausgehende, stetig zusammenhängende Werthreihe

$$\varepsilon,\ z',\ z'',\ z''',\ \ldots.$$

durchwandern, und lassen gleichzeitig aus dem Werthvorrath der

Grösse R eine ebenfalls stetig zusammenhängende Werthreihe

$$R^0,\ R',\ R'',\ R''',\ \ldots.$$

sich abwickeln, die mit jener correspondirt; so dass z. B. R^0 einen von denjenigen beiden Werthen bezeichnet, welche die Grösse R für $z = s$, und im Allgemeinen $R^{(\varkappa)}$ einen von denjenigen vorstellt, welchen jene Grösse für $z = z^{(\varkappa)}$ annimmt. Der Anfangswerth R^0, von welchem die Reihe R^0, R', R'' ... ausgeht, sei ein für allemal auf eindeutige Weise (d. i. seinem Vorzeichen nach) festgesetzt. Hierdurch ist diese Reihe noch keineswegs ihrem ganzen Laufe nach eindeutig bestimmt; wie sich sogleich zeigen wird.

Die ursprünglich genannte Reihe s, z', z'', ... schreitet in ganz willkührlicher Weise fort, kann also durch irgend eine der Grössen p, q und durch jede derselben beliebig oft hindurchgehen. In jedem Augenblick nun, wo ein solcher Durchgang stattfindet, wird die Schritt für Schritt nachfolgende Reihe R^0, R', R'', ... durch den Werth 0 gehen; und hiedurch entsteht im nächstfolgenden Augenblick ein Zweifel über das Vorzeichen. Denn im nächstfolgenden Augenblicke werden sich jedesmal zwei unendlich wenig von 0 verschiedene, unter einander aber entgegengesetzte Werthe darbieten, von welchen die Reihe R^0, R', R'', ... ganz nach Laune den einen oder auch den andern in sich aufnehmen kann. Ist die Entscheidung erfolgt, ist hier die Wahl getroffen, so werden nunmehr diejenigen Werthe, welche die Reihe R^0, R', R'' ... bei weiterem Fortgange in sich aufzunehmen hat, wiederum eindeutig bestimmt sein, allerdings nur so lange, bis sie von Neuem durch den Werth 0 geht, wo dann abermals eine Unbestimmtheit eintritt. Wir machen keinerlei Festsetzungen, um diese Unbestimmtheit etwa zu beseitigen.

Unter:

$$\int_s^z F_\varkappa\, dz$$

oder:

$$\int_s^z \frac{(g_1^{(\varkappa)} + g_2^{(\varkappa)} z + g_3^{(\varkappa)} z^2 + \ldots + g_s^{(\varkappa)} z^{s-1})\, dz}{R}$$

mag ein Integral verstanden werden, welches über irgend eine stetig zusammenhängende Werthreihe von z, und ebenso auch über eine stetig zusammenhängende Werthreihe von R hinerstreckt ist. Ebenso wie die erstere von der gegebenen Grösse s ausgeht, ebenso soll auch die letztere beständig von der eindeutig gegebenen Grösse R^0 ausgehen.

Durch Angabe der ersteren Werthreihe ist nun aber, wie wir gesehen haben, die letztere noch keineswegs ihrem ganzen Laufe nach bestimmt. Soll daher die Bahn, auf welcher das Integral hinläuft, genau bezeichnet werden, so wird erforderlich sein, dass man nicht nur die auf dieser Bahn liegenden Werthe von z, sondern gleichzeitig auch die auf derselben befindlichen Werthe von R angiebt. Stellt z. B.

$$s,\ z',\ z'',\ \ldots .\ z$$

eine stetig zusammenhängende Werthreihe dar, so können mit dieser möglicherweise mehrere etwa n Werthreihen von R correspondiren, welche sämmtlich von dem gegebenen Anfangswerthe R^0 ausgehen, und von welchen jede stetig in sich zusammenhängt. In diesem Fall würden dann durch Angabe der Grössen

$$s,\ z',\ z'',\ \ldots .\ z$$

nicht eine, sondern n verschiedene Bahnen gegeben sein.

Die Bahn des Integrales wird demnach im Allgemeinen erst dann völlig bestimmt sein, wenn erstens die auf dieser Bahn liegenden Werthe des Argumentes:

$$s,\ z',\ z'',\ \ldots .\ z,$$

und gleichzeitig zweitens auch die auf derselben befindlichen Werthe der Wurzelgrösse:

$$R^0,\ R',\ R'',\ \ldots .\ R$$

angegeben sind.

Ist also von zwei Integralen die Rede, welche eine gemeinschaftliche Bewegung oder eine gemeinschaftliche Bahn besitzen, so wird darunter zu verstehen sein, dass jene Integrale nicht allein beide mit Bezug auf ein und dieselbe Werthreihe von z, sondern dass sie gleichzeitig auch beide mit Bezug auf ein und dieselbe Werthreihe von R gebildet worden sind.

Wir werden uns nun mit der Umkehrung der Integrale:

$$\Omega_1 = C_1 + \int_8^z F_1 dz,$$

$$\Omega_2 = C_2 + \int_8^z F_2 dz,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\Omega_s = C_s + \int_8^z F_s dz$$

beschäftigen, wo die C gegebene Constanten vorstellen sollen. Es sind zwei Probleme zu nennen, die hiebei zu lösen sind, sie lauten:

Erstes Problem. Die Integrale $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_s$ laufen, von dem gegebenen Argument 8 aus, auf einer gemeinschaftlichen, jedoch völlig unbekannten Bahn vorwärts, und dringen schliesslich bis zu einem ebenfalls völlig unbekannten Argument z vor. Das Werthsystem

$$\Omega_1(z),\ \Omega_2(z),\ \ldots\ \Omega_s(z),$$

mit welchem sie in z eintreffen, ist gegeben; es soll z ermittelt werden.

Zweites Problem. Die Integrale $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_s$ laufen, von dem gegebenen Argument 8 aus, auf einer gemeinschaftlichen, jedoch völlig unbekannten Bahn vorwärts; ihre Bahn geht durch irgend welche s unbekannte Argumente $\xi, \eta, \ldots \zeta$ hindurch. Die Werthsysteme, mit welchen sie zuerst in ξ, sodann in η u. s. w., endlich in ζ eintreffen, werden der Reihe nach mit

$$\Omega_1(\xi),\ \Omega_2(\xi),\ \ldots\ \Omega_s(\xi),\quad \text{(Erstes System.)}$$

ferner mit

$$\Omega_1(\eta),\ \Omega_2(\eta),\ \ldots\ \Omega_s(\eta),\quad \text{(Zweites System.)}$$

u. s. w., endlich mit

$$\Omega_1(\zeta),\ \Omega_2(\zeta),\ \ldots\ \Omega_s(\zeta)\quad \text{(Letztes oder } s^{\text{tes}} \text{ System.)}$$

bezeichnet. Gegeben sind die aus den analogen Grössen dieser Werthsysteme zusammengesetzten Summen:

$$\begin{aligned}
\Omega_1(\xi) + \Omega_1(\eta) + \ldots + \Omega_1(\zeta) &= U_1,\\
\Omega_2(\xi) + \Omega_2(\eta) + \ldots + \Omega_2(\zeta) &= U_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &, \ldots\\
\Omega_s(\xi) + \Omega_s(\eta) + \ldots + \Omega_s(\zeta) &= U_s;
\end{aligned}$$

ermittelt sollen werden jene s Argumente $\xi, \eta, \ldots \zeta$*).

---

*) Es kommt auf ein und dasselbe hinaus, ob man die s Werthsysteme der Integrale so, wie hier geschehen, durch eine einzige Bewegung definirt, welche von ϑ aus über $\xi, \eta, \ldots$ fortgeht, und schliesslich bis ζ vordringt; oder ob man jene s Werthsysteme durch ebenso viele, von einander völlig unabhängige Bewegungen definirt, nämlich das erste System durch eine gemeinschaftliche Bewegung der Integrale, welche auf willkührlicher Bahn von ϑ nach ξ geht, sodann das zweite System durch eine zweite gemeinschaftliche Bewegung der Integrale, welche, wiederum von ϑ aus, auf willkührlicher Bahn nach η gelangt u. s. w., endlich das letzte System durch eine letzte solche Bewegung, die, abermals von ϑ aus, auf willkührlicher Bahn nach ζ hinläuft.

Lässt sich von zwei Begriffen nachweisen, dass der erste in das Bereich des zweiten, und dass auch umgekehrt der zweite in das Bereich des ersten hineinfällt, so werden beide Begriffe einander decken. Lässt sich daher von zwei Definitionen nachweisen, dass die erste durch geeignete Einschränkung in die zweite, und dass auch umgekehrt die zweite durch geeignete Einschränkung in die erste verwandelt werden kann, so werden beide Definitionen unter einander identisch sein. Solches aber lässt sich von denjenigen beiden Definitionen, um die es sich hier handelt, in der That nachweisen; wie sogleich gezeigt werden soll.

Der Bequemlichkeit willen nehmen wir an, es wäre $s = 3$, und es wären also auch nur 3 Grössen ξ, η, ζ vorhanden. Wir bezeichnen die bei der ersten Definition ins Spiel kommende eine Bewegung mit ε, und die bei der zweiten Definition auftretenden drei Bewegungen mit α, β, γ. Gleichzeitig mögen unter α', β', γ' drei andere Bewegungen verstanden werden, die mit α, β, γ auf denselben Bahnen, aber in entgegengesetzten Richtungen fortschreiten.

Die bei der zweiten Definition zu Grunde gelegten Bewegungen α, β, γ sind von einander unabhängig und vollständig willkührlich; die eine läuft von ϑ nach ξ, die andere von ϑ nach η, die dritte von ϑ nach ζ.

Da diese Bewegungen völlig willkührlich sind, so ist es erlaubt, für β eine Bewegung zu nehmen, die durch weitere Fortsetzung der Bewegung α über ξ hinaus bis nach η hin entsteht, und ebenso für γ eine Bewegung zu nehmen, die durch weitere Fortsetzung von β über η hinaus bis nach ζ hin entsteht. Bei geeigneter Wahl der Bewegungen α, β, γ verwandeln sich demnach alle drei in eine einzige von ϑ über ξ

Denken wir uns die s Argumente $\xi, \eta, \ldots \zeta$, welche auf der von ε ausgehenden Bahn liegen, der Art gewählt, dass sie, mit alleiniger Ausnahme von ζ, alle mit ε zusammenfallen, so werden von den eben genannten s Werthsystemen alle, mit Ausnahme des letzten, verschwinden. Das Werthsystem:

$$\Omega_1(\zeta),\ \Omega_2(\zeta),\ \ldots\ \Omega_s(\zeta)$$

wird also das einzige sein, welches übrig bleibt; alle übrigen verwandeln sich in

$$0,\ 0,\ \ldots\ldots\ 0.$$

Demnach verwandeln sich die Summen U_1, U_2, ... U_s in $\Omega_1(\zeta)$, $\Omega_2(\zeta)$, ... $\Omega_s(\zeta)$. Und die Aufgabe wird also in diesem Falle

---

und η nach ζ fortschreitende Bewegung ε. Somit sieht man, dass die zweite Definition durch geeignete Beschränkung in die erste umgewandelt werden kann.

Mit gleicher Leichtigkeit lässt sich das Umgekehrte nachweisen. Die bei der ersten Definition zu Grunde gelegte Bewegung ε geht auf willkührlicher Bahn von ε über ξ und η nach ζ hin. Wir können daher diese Bewegung, wenn es uns beliebt, auch so wählen, dass sie zuerst von ε nach ξ, sodann auf derselben Bahn zurück nach ε, nunmehr von ε aus auf irgend welcher Bahn bis η, auf derselben Bahn zurück nach ε, und endlich von ε aus nach ζ geht. Wir können also für die Bewegung ε eine durch

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma$$

dargestellte Aufeinanderfolge von Bewegungen nehmen. Die Integrale gehen in diesem Fall von ε mit dem gemeinschaftlichen Anfangswerthe Null aus, und werden zunächst durch die Bewegung α auf willkührlicher Bahn nach ξ getragen. Nach Ablauf der sich jetzt anschliessenden Bewegung α' treffen sie in ε wieder ein, und zwar mit demselben Werthe, mit welchem sie ausgegangen waren, also mit dem Werthe Null; sie werden demnach, wenn wir jetzt die Bewegung β folgen lassen, zum zweiten Male, wiederum mit dem Anfangswerthe Null, von ε ausgehen und auf willkührlicher Bahn nach η gelangen. Sind nunmehr die Integrale durch die nächstfolgende Bewegung β' von Neuem nach ε zurückgetragen, so werden sie endlich zum dritten Male, abermals mit dem Anfangswerthe Null, von ε ausgehen, und durch die Bewegung γ auf willkührlicher Bahn nach ζ befördert werden. Die Bewegung ε kann also der Art gewählt werden, dass sie in drei von einander völlig unabhängige Bewegungen α, β, γ zerfällt. Und hiemit ist dargethan, dass die erste Definition durch geeignete Beschränkung in die zweite verwandelt werden kann.

Hieraus aber ergiebt sich zufolge der anfangs gemachten Bemerkung, dass beide Definitionen unter einander identisch sind.

darin bestehen, wenn $\Omega_1(\zeta)$, $\Omega_2(\zeta)$, ... $\Omega_s(\zeta)$ gegeben sind, das Argument ζ zu ermitteln. Das aber war der Gegenstand des ersten Problems. Somit sehen wir, dass das erste Problem nichts Anderes ist, als ein Specialfall des zweiten.

Zweiter Abschnitt. Den primären Integralen Ω_1, Ω_2, ... Ω_s werden die mit ihnen auf lineäre Weise verbundenen secundären Integrale ω_1, ω_2, ... ω_s zur Seite gestellt. Die in diesen lineären Verbindungen vorhandenen constanten Coefficienten Γ bleiben vorläufig unbestimmt.

Wir denken uns die Integrale Ω_1, Ω_2, ... Ω_s in einer gemeinschaftlichen, von s ausgehenden Bewegung begriffen, welche auf ganz willkührlicher Bahn fortschreitet, bald hierhin, bald dorthin sich wendet, und unaufhörlich fortdauert. Das Werthsystem, mit welchem die Integrale bei dieser Bewegung in irgend einem Argument z eintreffen, mag wiederum mit

(1) $$\Omega_1(z),\ \Omega_2(z),\ \ldots\ \Omega_s(z)$$

bezeichnet, und gleichzeitig mag unter $\omega(z)$ eine veränderliche Grösse verstanden werden, welche an dieses System auf lineäre Weise, und zwar vermittelst irgend welcher constanten Coefficienten Γ_1, Γ_2, ... Γ_s, gebunden ist; es sei nämlich:

(2) $$\omega(z) = \Gamma_1\,\Omega_1(z) + \Gamma_2\,\Omega_2(z) + \ldots + \Gamma_s\,\Omega_s(z).$$

Die Grösse $\omega(z)$ kann, wenn man will, ebenfalls als ein Integral angesehen werden. Versteht man nämlich unter $\int$ eine Integration, welche über die von den Integralen (1) durchlaufene gemeinschaftliche Bahn sich hinerstreckt, so ist;

(3) $$\begin{aligned} \Omega_1(z) &= C_1 + \int_s^z F_1\,dz, \\ \Omega_2(z) &= C_2 + \int_s^z F_2\,dz, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Omega_s(z) &= C_s + \int_s^z F_s\,dz; \end{aligned}$$

substituirt man aber diese Werthe in (2) und setzt man dabei zur Abkürzung:

$$\Gamma_1 C_1 + \Gamma_2 C_2 + \ldots + \Gamma_s C_s = c, \tag{4}$$

$$\Gamma_1 F_1 + \Gamma_2 F_2 + \ldots + \Gamma_s F_s = f, \tag{5}$$

so wird:

$$\omega(z) = c + \int_{\delta}^{z} f dz. \tag{6}$$

Die Integration $\int$ hat hier immer noch die vorhin genannte Bedeutung. Demnach kann also $\omega(z)$ als ein Integral angesehen werden, welches mit den ursprünglichen Integralen $\Omega_1(z)$, $\Omega_2(z)$, ... $\Omega_s(z)$ auf gemeinschaftlicher Bahn fortschreitet.

Wir denken uns mehrere derartige Grössen $\omega(z)$, die sämmtlich an das Werthsystem

$$\Omega_1(z),\ \Omega_2(z),\ \ldots \Omega_s(z),$$

vermittelst irgend welcher constanten Coefficienten Γ, gebunden sind; es sei nämlich:

$$\begin{array}{l} \omega_1(z) = \Gamma_1^{(1)}\,\Omega_1(z) + \Gamma_2^{(1)}\,\Omega_2(z) + \ldots + \Gamma_s^{(1)}\,\Omega_s(z), \\ \omega_2(z) = \Gamma_1^{(2)}\,\Omega_1(z) + \Gamma_2^{(2)}\,\Omega_2(z) + \ldots + \Gamma_s^{(2)}\,\Omega_s(z), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega_s(z) = \Gamma_1^{(s)}\,\Omega_1(z) + \Gamma_2^{(s)}\,\Omega_2(z) + \ldots + \Gamma_s^{(s)}\,\Omega_s(z). \end{array} \tag{7}$$

Setzen wir nun, ähnlich wie vorhin:

$$\begin{array}{l} c_1 = \Gamma_1^{(1)}\,C_1 + \Gamma_2^{(1)}\,C_2 + \ldots + \Gamma_s^{(1)}\,C_s, \\ c_2 = \Gamma_1^{(2)}\,C_1 + \Gamma_2^{(2)}\,C_2 + \ldots + \Gamma_s^{(2)}\,C_s, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_s = \Gamma_1^{(s)}\,C_1 + \Gamma_2^{(s)}\,C_2 + \ldots + \Gamma_s^{(s)}\,C_s, \end{array} \tag{8}$$

und ferner:

$$\begin{array}{l} f_1 = \Gamma_1^{(1)}\,F_1 + \Gamma_2^{(1)}\,F_2 + \ldots + \Gamma_s^{(1)}\,F_s, \\ f_2 = \Gamma_1^{(2)}\,F_1 + \Gamma_2^{(2)}\,F_2 + \ldots + \Gamma_s^{(2)}\,F_s, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_s = \Gamma_1^{(s)}\,F_1 + \Gamma_2^{(s)}\,F_2 + \ldots + \Gamma_s^{(s)}\,F_s, \end{array} \tag{9}$$

so wird:

$$\omega_1(z) = c_1 + \int_8^z f_1 dz,$$

(10) $$\omega_2(z) = c_2 + \int_8^z f_2 dz,$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\omega_s(z) = c_s + \int_8^z f_s dz.$$

Und es können demnach

$$\omega_1(z),\ \omega_2(z),\ \ldots\ \omega_s(z)$$

als s secundäre Integrale angesehen werden, welche mit den primären Integralen:

$$\Omega_1(z),\ \Omega_2(z),\ \ldots\ \Omega_s(z)$$

auf gemeinschaftlicher Bahn hinlaufen.

Ist für irgend einen Augenblick der eben genannten gemeinschaftlichen Bewegung das Werthsystem der primären Integrale gegeben, wie solches bei dem ersten Probleme stattfindet, so wird zufolge (7) das Werthsystem der secundären Integrale in jenem Augenblick ebenfalls bekannt sein. Demnach können wir dem ersten Probleme, falls es uns beliebt, eine etwas andere Fassung geben; nämlich folgende:

Secundäre Form des ersten Problemes. Das Werthsystem $\omega_1(z)$, $\omega_2(z)$, ... $\omega_s(z)$, welches die secundären Integrale in irgend einem Augenblick ihrer gemeinschaftlichen Bewegung besitzen, ist bekannt; ermittelt werden soll das Argument z, bis zu welchem ihre Bewegung in diesem Augenblick vorgedrungen ist.

In ähnlicher Weise lässt sich auch das zweite Problem umgestalten. Versteht man nämlich unter ξ, η, ... ζ diejenigen s Argumente, bis zu welchen die primären und secundären Integrale in irgend welchen s Augenblicken ihrer gemeinschaftlichen Bewegung vorgedrungen sind, und unter

$$\begin{array}{l}
\Omega_1(\xi),\ \Omega_2(\xi),\ \ldots\ \omega_1(\xi),\ \omega_2(\xi),\ \ldots\\
\Omega_1(\eta),\ \Omega_2(\eta),\ \ldots\ \omega_1(\eta),\ \omega_2(\eta),\ \ldots\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
\Omega_1(\zeta),\ \Omega_2(\zeta),\ \ldots\ \omega_1(\zeta),\ \omega_2(\zeta),\ \ldots
\end{array}$$

die s Werthsysteme, welche sie in jenen s Augenblicken besitzen, so wird zufolge (7):

$$\omega_\sigma(\xi) = \Gamma_1^{(\sigma)}\Omega_1(\xi) + \Gamma_2^{(\sigma)}\Omega_2(\xi) + \ldots + \Gamma_s^{(\sigma)}\Omega_s(\xi),$$
$$\omega_\sigma(\eta) = \Gamma_1^{(\sigma)}\Omega_1(\eta) + \Gamma_2^{(\sigma)}\Omega_2(\eta) + \ldots + \Gamma_s^{(\sigma)}\Omega_s(\eta),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\omega_\sigma(\zeta) = \Gamma_1^{(\sigma)}\Omega_1(\zeta) + \Gamma_2^{(\sigma)}\Omega_2(\zeta) + \ldots + \Gamma_s^{(\sigma)}\Omega_s(\zeta)$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots s$$

sein. Addirt man diese Formeln, und setzt man dabei

$$\Omega_1(\xi) + \Omega_1(\eta) + \ldots + \Omega_1(\zeta) = U_1,$$
$$\Omega_2(\xi) + \Omega_2(\eta) + \ldots + \Omega_2(\zeta) = U_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Omega_s(\xi) + \Omega_s(\eta) + \ldots + \Omega_s(\zeta) = U_s,$$

so ergiebt sich:

$$\omega_\sigma(\xi) + \omega_\sigma(\eta) + \ldots + \omega_\sigma(\zeta) = \Gamma_1^{(\sigma)} U_1 + \Gamma_2^{(\sigma)} U_2 + \ldots + \Gamma_s^{(\sigma)} U_s.$$
$$\sigma = 1, 2 \ldots s.$$

Sind demnach, wie das bei dem zweiten Probleme der Fall war, die Summen U_1, U_2, ... U_s gegeben, so werden die analogen Summen der secundären Integrale, nämlich:

$$\omega_1(\xi) + \omega_1(\eta) + \ldots + \omega_1(\zeta),$$
$$\omega_2(\xi) + \omega_2(\eta) + \ldots + \omega_2(\zeta),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\omega_s(\xi) + \omega_s(\eta) + \ldots + \omega_s(\zeta)$$

ebenfalls bekannt sein. Wir können demnach das zweite Problem, falls es uns zusagt, auch so aussprechen:

Secundäre Form des zweiten Problems. Die Werthsysteme, welche die secundären Integrale in irgend welchen s Augenblicken ihrer gemeinschaftlichen Bewegung besitzen, werden der Reihe nach mit

$\omega_1(\xi)$, $\omega_2(\xi)$, ... $\omega_s(\xi)$, (Erstes System.)
$\omega_1(\eta)$. $\omega_2(\eta)$, ... $\omega_s(\eta)$, (Zweites System.)
. . . .
$\omega_1(\zeta)$, $\omega_2(\zeta)$, ... $\omega_s(\zeta)$ (Letztes oder s^{tes} System.)

bezeichnet. Bekannt sind die Werthe der Summen:

$$\omega_1(\xi) + \omega_1(\eta) + \ldots + \omega_1(\zeta) = u_1,$$
$$\omega_2(\xi) + \omega_2(\eta) + \ldots + \omega_2(\zeta) = u_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\omega_s(\xi) + \omega_s(\eta) + \ldots + \omega_s(\zeta) = u_s;$$

ermittelt sollen werden die s Argumente $\xi, \eta, \ldots \zeta$, bis zu welchen die gemeinschaftliche Bewegung der Integrale in jedem der genannten s Augenblicke vorgedrungen ist.

Die secundären Formen der beiden Probleme bieten für ihre Lösung Vortheile dar, vorausgesetzt, dass man über die constanten Coefficienten Γ auf geeignete Weise disponirt.

Dritter Abschnitt. Um für den Angriff der Probleme eine feste Basis zu gewinnen, werden gewisse Constanten, nämlich die Fundamentalwerthe der primären und secundären Integrale eingeführt, gleichzeitig auch ein gewisses damit zusammenhängendes fundamentales Flächengebiet.

In ähnlicher Weise, wie in der vorhergehenden Vorlesung bei dem Umkehrungsprobleme des elliptischen Integrales, machen sich auch bei den gegenwärtig vorliegenden Problemen gewisse Fundamentalconstanten geltend, die wir, um für unsere Operationen eine feste Basis zu gewinnen, gleich hier zu Anfang angeben wollen.

Wir denken uns die gegebenen Constanten p, q und ε nach der Gauss'schen Methode durch Puncte auf der Horizontalebene dargestellt, und ziehen sodann in dieser Ebene eine Curve, welche in p_1 ihren Anfang nimmt, zuvörderst nach q_1 geht, dann der Reihe nach alle übrigen Puncte $p_2, q_2, p_3, q_3, \ldots p_{s+1}, q_{s+1}$ berührt, und zuletzt wieder nach p_1 zurückläuft. Zugleich denken wir uns — was jederzeit möglich ist — die Curve der Art gezogen, dass der gegebene Punct ε innerhalb derselben liegt. Das von dieser Curve umschlossene Gebiet der Horizontalebene (Fig. 90)*) mag das fundamentale Flächengebiet genannt, und mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet werden; es wird dasselbe nur eine einzige Randcurve besitzen, und mit all' seinen Puncten in der Endlichkeit liegen, folglich eine Elementarfläche sein.

Die Wurzelgrösse;

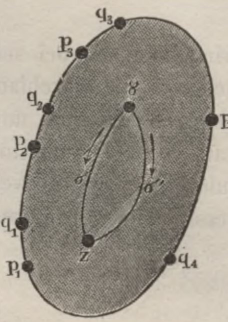
$$(1)\qquad R = \sqrt{(z-p_1)(z-q_1)(z-p_2)(z-q_2)\ldots(z-p_{s+1})(z-q_{s+1})}$$

wird innerhalb des Gebietes $\mathfrak{A}$ überall eindeutig und stetig sein, vorausgesetzt, dass man ihr im Puncte ε den Anfangswerth R^0

*) Die Figur 90 bezieht sich auf den Fall, dass $s = 3$ ist.

beilegt, und in den übrigen jenes Gebietes diejenigen Werthe nimmt, welche dem eben genannten Anfangswerthe sich ringsum anschliessen. Gleiches wird innerhalb $\mathfrak{A}$ auch von der Grösse $\frac{1}{R}$, und Gleiches demnach auch von den Grössen

Fig. 90.



$$(2) \qquad \begin{cases} F_1, \ F_2, \ \ldots \ F_s \\ f_1, \ f_2, \ \ldots \ f_s \end{cases}$$

gelten.

Es seien σ und σ' zwei Curven (Fig. 90), welche von $\mathfrak{s}$ ausgehen, in irgend einem andern zur Fläche $\mathfrak{A}$ gehörigen Punct z wieder zusammentreffen, und ihrem ganzen Laufe nach innerhalb $\mathfrak{A}$ bleiben; ferner sei $\mathfrak{a}$ der von diesen Curven umschlossene Theil von $\mathfrak{A}$. Ist F irgend eine unter den in (2) angegebenen Functionen $F_1, F_2, \ldots F_s, f_1, f_2, \ldots f_s$, so wird das in positiver Richtung um den Rand von $\mathfrak{a}$ herumerstreckte Integral

$$\int F dz$$

nach bekanntem Satze (Seite 80) gleich **Null** sein; weil F innerhalb $\mathfrak{a}$ überall eindeutig und stetig ist. Dieses Randintegral lässt sich in zwei Theile zerlegen, von welchen der eine längs σ von $\mathfrak{s}$ nach z, der andere längs σ' von z nach $\mathfrak{s}$ geht; und wird daher, wenn man die über die Curven σ und σ' in gleicher Richtung, nämlich von $\mathfrak{s}$ nach z, hinerstreckten Integrale mit $\int\limits_{\sigma} F dz$ und $\int\limits_{\sigma'} F dz$ bezeichnet, gleich

$$\int\limits_{\sigma} F dz - \int\limits_{\sigma'} F dz$$

sein. Somit ergiebt sich

$$(3) \qquad \int\limits_{\sigma} F dz = \int\limits_{\sigma'} F dz.$$

Das von dem gegebenen Puncte $\mathfrak{s}$ nach irgend welchem andern Puncte z hinlaufende Integral:

$$\int_\varepsilon^z F\,dz$$

wird demnach bei seinem Eintreffen in z einen Werth besitzen, der von der durchlaufenen Bahn völlig unabhängig ist; vorausgesetzt, dass man nur solche Bahnen in Betracht zieht, die ihrem ganzen Lauf nach innerhalb des Gebietes $\mathfrak{A}$ bleiben. Dieses Resultat wird sich, weil unter F irgend eine der Functionen (2) verstanden wurde, auf sämmtliche Integrale

$$\begin{array}{c} \Omega_1,\ \Omega_2,\ \ldots\ldots\ \Omega_s, \\ \omega_1,\ \omega_2,\ \ldots\ldots\ \omega_s \end{array}$$

beziehen.

Die von ε auslaufenden Integrale Ω und ω sind also, falls man ihre Bewegung auf das fundamentale Gebiet $\mathfrak{A}$ beschränkt, innerhalb dieses Gebietes allenthalben eindeutig. Diejenigen Werthe, welche diese Integrale bei der eben genannten Beschränkung in den Puncten p, q annehmen, mögen mit

$$\overline{\Omega}(p),\ \overline{\Omega}(q) \quad und \quad \overline{\omega}(p),\ \overline{\omega}(q)$$

bezeichnet, und die jenen Puncten zugehörigen Fundamentalwerthe genannt werden.

Die Fundamentalwerthe der primären Integrale Ω sind durch die gegebenen Probleme bereits vollständig bestimmt; werden nämlich, sobald die in jenen Problemen von Hause aus enthaltenen Constanten p, q, g, ε, C numerisch gegeben sind, und sobald überdies das Vorzeichen des Anfangswerthes R^0 auf bestimmte Weise festgesetzt ist, ebenfalls numerisch berechnet werden können. Wir denken uns diese Rechnung ein für alle Mal ausgeführt;

und betrachten demgemäss in Zukunft die $s(2s+2)$ Fundamentalwerthe:

$$\overline{\Omega}(p),\quad \overline{\Omega}(q)$$

als bekannte, den Problemen eigenthümliche Constanten. Diese Constanten sind es, welche in Verbindung mit dem fundamentalen Flächengebiet $\mathfrak{A}$ gewissermassen die feste Basis bilden, von welcher unsere weiteren Betrachtungen getragen werden.

Doch ist in Bezug hierauf noch Folgendes zu bemerken. Die dem Integral

$$\Omega_\varkappa = C_\varkappa + \int_\varepsilon^z F_\varkappa \, . \, dz$$

zugehörigen Fundamentalwerthe

$$\overline{\Omega}_\varkappa(p_1),\ \overline{\Omega}_\varkappa(p_2),\ \ldots\ldots,\ \overline{\Omega}_\varkappa(p_{s+1}),$$
$$\overline{\Omega}_\varkappa(q_1),\ \overline{\Omega}_\varkappa(q_2),\ \ldots\ldots,\ \overline{\Omega}_\varkappa(q_{s+1})$$

sind, unter Anderm, auch abhängig von der in diesem Integral enthaltenen Constanten $C_\varkappa$. Sie werden grösser oder kleiner sein, je nachdem $C_\varkappa$ einen grösseren oder geringeren Werth besitzt. Vertauscht man z. B. in Gedanken die gegebene Constante $C_\varkappa$ mit $C_\varkappa + \gamma_\varkappa$, so werden gleichzeitig auch jene Fundementalwerthe sämmtlich um $\gamma_\varkappa$ zunehmen.

Wir wollen uns nun — was jederzeit möglich sein wird — die Constante $C_\varkappa$ von Hause aus in solcher Art gegeben denken, dass bei den $s + 1$ Fundamentalwerthen

$$\Omega_\varkappa(p_1),\ \Omega_\varkappa(p_2),\ \ldots\ldots,\ \Omega_\varkappa(p_{s+1})$$

die Summe der s ersten ebenso gross ist, als der letzte für sich allein. Solches mag nicht nur bei dem Integral $\Omega_\varkappa$ allein, sondern bei sämmtlichen Integralen $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_s$ stattfinden. Dass alsdann $C_1, C_2, \ldots C_s$ nicht beliebig gegebene, sondern auf bestimmte Weise ausgewählte Constanten sind, thut offenbar der Allgemeinheit unserer Untersuchungen keinerlei Eintrag; und ist gleichzeitig für die Durchführung dieser Untersuchungen von Vortheil.

Unter den Fundamentalwerthen der primären Integrale Ω werden zufolge dieser Festsetzung in Zukunft gewisse Constanten zu verstehen sein, welche unter einander durch die Relationen:

$$(4)\quad \begin{cases} \overline{\Omega}_1(p_1) + \overline{\Omega}_1(p_2) + \ldots + \overline{\Omega}_1(p_s) = \overline{\Omega}_1(p_{s+1}), \\ \overline{\Omega}_2(p_1) + \overline{\Omega}_2(p_2) + \ldots + \overline{\Omega}_2(p_s) = \overline{\Omega}_2(p_{s+1}), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \overline{\Omega}_s(p_1) + \overline{\Omega}_s(p_2) + \ldots + \overline{\Omega}_s(p_s) = \overline{\Omega}_s(p_{+1}) \end{cases}$$

verbunden sind.

Wir betrachten ferner die den secundären Integralen ω zugehörigen Fundamentalwerthe, d. i. die $s(2s + 2)$ Grössen

$$\overline{\omega}(p),\ \overline{\omega}(q).$$

Diese werden erst dann vollständig bestimmt sein, wenn über die in jenen Integralen enthaltenen constanten Coefficienten Γ auf bestimmte Weise verfügt worden ist; was einstweilen noch nicht geschehen soll.

Wenn wir die Integrale Ω und ω auf gemeinschaftlicher Bahn von ε aus nach irgend einem andern Puncte z hinlaufen lassen, so finden zwischen den Werthen, mit welchen sie in z eintreffen, jederzeit folgende Relationen statt:

$$\omega_\sigma(z) = \Gamma_1^{(\sigma)} \Omega_1(z) + \ldots + \Gamma_s^{(\sigma)} \Omega_s(z)$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots s.$$

Diese Relationen finden also auch dann statt, wenn die gemeinschaftliche Bahn der Integrale im Innern des Gebietes $\mathfrak{A}$ von ε nach irgend einem der Puncte p, q hinläuft. In diesem Falle werden aber die Werthe, mit welchen die Integrale in dem gerade betrachteten Puncte p oder q eintreffen, nichts Anderes als die dem Puncte angehörigen Fundamentalwerthe sein. Somit ergiebt sich, dass die Fundamentalwerthe der primären und die der secundären Integrale durch folgende Relationen mit einander verbunden sind:

$$(5) \qquad \begin{cases} \overline{\omega}_\sigma(p) = \Gamma_1^{(\sigma)} \overline{\Omega}_1(p) + \ldots + \Gamma_s^{(\sigma)} \overline{\Omega}_s(p), \\ \overline{\omega}_\sigma(q) = \Gamma_1^{(\sigma)} \overline{\Omega}_1(q) + \ldots + \Gamma_s^{(\sigma)} \overline{\Omega}_s(q). \end{cases}$$
$$\sigma = 1, 2 \ldots s.$$

Da die Constanten

$$\overline{\Omega}(p), \quad \overline{\Omega}(q)$$

als bekannt betrachtet werden, so wird man mit Hülfe dieser Relationen die Constanten

$$\overline{\omega}(p), \quad \overline{\omega}(q)$$

sofort berechnen können, sobald über die Coefficienten Γ auf bestimmte Weise verfügt worden ist.

Wenn wir die erste der Relationen (5) der Reihe nach auf jeden der Puncte $p_1, p_2, \ldots p_s, p_{s+1}$ in Anwendung bringen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_\sigma(p_1) &= \Sigma\, \Gamma_\varkappa^{(\sigma)} \overline{\Omega}_\varkappa(p_1), \\ \overline{\omega}_\sigma(p_2) &= \Sigma\, \Gamma_\varkappa^{(\sigma)} \overline{\Omega}_\varkappa(p_2), \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \overline{\omega}_\sigma(p_s) &= \Sigma\, \Gamma_\varkappa^{(\sigma)} \overline{\Omega}_\varkappa(p_s), \\ \overline{\omega}_\sigma(p_{s+1}) &= \Sigma\, \Gamma_\varkappa^{(\sigma)} \overline{\Omega}_\varkappa(p_{s+1}), \end{aligned}$$

wo die Summation Σ über $\varkappa = 1, 2, \ldots s$ hinerstreckt ist. Wenn wir nun von diesen $s + 1$ Gleichungen die s ersten addiren, und sodann die $(s + 1)^{\text{te}}$ subtrahiren, so ergiebt sich:

$$\overline{\omega}_\sigma(p_1) + \overline{\omega}_\sigma(p_2) + \ldots + \overline{\omega}_\sigma(p_s) - \overline{\omega}_\sigma(p_{s+1}) =$$
$$= \Sigma\ \Gamma_\varkappa^{(\sigma)}.\left(\overline{\Omega}_\varkappa(p_1) + \overline{\Omega}_\varkappa(p_2) + \ldots + \overline{\Omega}_\varkappa(p_s) - \overline{\Omega}_\varkappa(p_{s+1})\right);$$

folglich mit Rückblick auf (4):

$$\overline{\omega}_\sigma(p_1) + \overline{\omega}_\sigma(p_2) + \ldots + \overline{\omega}_\sigma(p_s) - \overline{\omega}_\sigma(p_{s+1}) = 0.$$

Die Fundamentalwerthe der secundären Integrale sind demnach durch folgende Relationen unter einander verbunden:

$$(6)\quad \begin{array}{l} \overline{\omega}_1(p_1) + \overline{\omega}_1(p_2) + \ldots + \overline{\omega}_1(p_s) = \overline{\omega}_1(p_{s+1}), \\ \overline{\omega}_2(p_1) + \overline{\omega}_2(p_2) + \ldots + \overline{\omega}_2(p_s) = \overline{\omega}_2(p_{s+1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{\omega}_s(p_1) + \overline{\omega}_s(p_2) + \ldots + \overline{\omega}_s(p_s) = \overline{\omega}_s(p_{s+1}), \end{array}$$

also durch Relationen, die denen bei den primären Integralen vollständig analog sind.

Vierter Abschnitt. Untersuchung zweier Integrale Ω, Ω', die entweder geradezu zur Zahl der primären und secundären Integrale gehören, oder von denselben doch auf lineäre Weise abhängen. Als Grundlage der Untersuchung dient eine gewisse Riemann'sche Kugelfläche $\mathfrak{R}$. Nachdem diese durch geeignete Schnitte oder Ströme a, b, c in eine einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{R}'$ verwandelt ist, werden zwei den Integralen Ω, Ω' conjugirte Functionen W, W' eingeführt, die innerhalb $\mathfrak{R}'$ überall eindeutig und stetig sind.

Es sei:

$$(1)\quad \begin{array}{ll} F = \dfrac{\gamma_1 + \gamma_2 z + \ldots + \gamma_s z^{s-1}}{R}, & \Omega(z) = \gamma + \displaystyle\int_8^z F\,.\,dz, \\[2ex] F' = \dfrac{\gamma'_1 + \gamma'_2 z + \ldots + \gamma'_s z^{s-1}}{R}, & \Omega'(z) = \gamma' + \displaystyle\int_8^z F'\,.\,dz. \end{array}$$

Hier soll R die gegebene Wurzelgrösse:

$$R = \sqrt{(z-p_1)(z-q_1)(z-p_2)(z-q_2)\ldots(z-p_{s+1})(z-q_{s+1})}$$

vorstellen, deren Anfangswerth R^0 im Puncte 8 auf eindeutige

Weise festgesetzt ist; ferner mögen hier unter den Grössen γ ganz beliebige Constanten verstanden werden; und endlich mögen unter Ω und Ω' zwei Integrale verstanden werden, die vom Puncte ε aus auf willkührlicher, jedoch gemeinsamer Bahn vorwärts schreiten.

Es stellen alsdann Ω, Ω', je nach der Wahl der Constanten γ, entweder irgend zwei unter den Integralen

$$\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_s,$$
$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_s,$$

oder auch irgend zwei andere Integrale vor, die aus jenen auf lineäre Weise zusammengesetzt sind. Demnach ist es von Wichtigkeit, die beiden Integrale Ω, Ω' einer ausführlichen Untersuchung zu unterwerfen. Als Basis für eine solche Untersuchung können angesehen werden: das fundamentale Gebiet $\mathfrak{A}$, auf dessem Rande sämmtliche Puncte p, q sich befinden, und die diesen Puncten zugehörigen Fundamentalwerthe $\overline{\Omega}(p)$, $\overline{\Omega}(q)$, $\overline{\Omega'}(p)$, $\overline{\Omega'}(q)$.

Die willkührliche und gemeinschaftliche Bahn der beiden Integrale Ω, Ω' wird, falls sie von ε nach einer beliebigen andern Grösse, etwa nach z geht, über irgend eine zwischen ε und z liegende Grössenreihe

$$(2) \qquad \varepsilon, z', z'', z''', \ldots z$$

fortlaufen. Durch Angabe dieser Grössenreihe ist die Bahn der Integrale im Allgemeinen noch keineswegs vollständig bestimmt. Zur vollständigen Bestimmung der Bahn ist nämlich, wie wir früher gesehen haben, erforderlich, dass neben jener Grössenreihe gleichzeitig auch noch die Werthe

$$(3) \qquad R^0, R', R'', R''', \ldots R$$

gegeben sind, welche die Wurzelgrösse R längs der Bahn hin besitzt. Um daher die Bahn der Integrale in bildlicher Weise, und zugleich mit vollständiger Bestimmtheit darstellen zu können, wird nicht die einblättrige Horizontalebene, sondern eine gewisse zweiblättrige Riemann'sche Fläche, und zwar diejenige in Anwendung zu bringen sein, auf welcher der ganze Werthvorrath der Wurzelgrösse R in eindeutiger Weise sich ausbreitet. Durch eine Curve auf der Horizontalebene würde nämlich nur die Werthenreihe (2) dargestellt werden; durch eine Curve auf der letztgenannten Fläche hingegen wird gleichzeitig die Reihe (2) und auch die Reihe (3) angegeben.

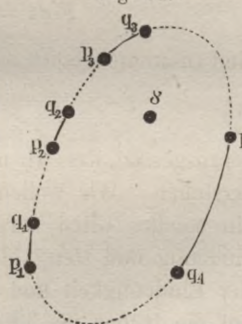
Die Riemann'sche zweiblättrige Fläche, welche erforderlich ist, um sämmtliche Werthe der Function R auf eindeutige Weise ausbreiten zu können, mag $\mathfrak{R}$ heissen; sie besitzt bekanntlich $2s + 2$ Windungspuncte, und daneben $s + 1$ Uebergangslinien, durch welche diese Puncte paarweise mit einander verbunden sind. Jene Puncte sind ihrer Lage nach völlig bestimmt, nämlich dargestellt durch die $2s + 2$ Puncte p, q. Die Uebergangslinien hingegen können auf mannigfaltige Art gewählt werden (S. 190 u. 193).

Wir verfahren bei Construction der Fläche $\mathfrak{R}$ in folgender Weise. Es mögen zuvörderst zwei über einander liegende, und nur durch einen unendlich kleinen Zwischenraum von einander getrennte Horizontalebenen gedacht werden; die *untere* der beiden Ebenen mag diejenige sein, in welcher vorhin das fundamentale Gebiet $\mathfrak{A}$ abgegrenzt worden ist. Jenes Gebiet kann als ein Polygon von $2s + 2$ Seiten angesehen werden, dessen *alternirende* Seiten durch die $s + 1$ Linien

$$p_1\, q_1, \quad p_2\, q_2, \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; , \; p_s\, q_s, \quad p_{s+1}\, q_{s+1}$$

dargestellt sind (vergl. Fig. 91*)). Längs jeder von diesen Linien führen wir einen *beide* Horizontalebenen durchdringenden Schnitt aus, und heften die vier Ufer eines jeden solchen Schnittes kreuzweise mit einander zusammen. Endlich verwandeln wir die hiedurch entstehende zweiblättrige ebene Fläche, durch Umformung, in eine zweiblättrige *Kugelfläche*. Diese letztere stellt dann die zu construirende Fläche $\mathfrak{R}$ vor; und gleichzeitig werden die zuvor genannten $s + 1$ Linien die *Uebergangslinien* derselben sein.

Fig. 91.



Bei Zugrundelegung dieser Construction ist das fundamentale Gebiet $\mathfrak{A}$ auf der Fläche $\mathfrak{R}$ dargestellt durch einen gewissen zum **unteren** *Blatt gehörigen Flächentheil.* Der zu jenem Gebiet gehörige Punct s wird also ebenfalls im *unteren* Blatt sich befinden. Und das Gebiet $\mathfrak{A}$ selber wird sich um diesen Punct s herum nach allen Seiten

*) Die Figur bezieht sich wiederum auf den Fall, dass $s = 3$ ist

hin ausdehnen; es wird einerseits bis zu den auf der Fläche vorhandenen Uebergangslinien

$$p_1 q_1, \quad p_2 q_2, \ldots, p_{s+1} q_{s+1},$$

andererseits bis zu gewissen andern, im unteren Blatt befindlichen Linien

$$q_1 p_2, \quad q_2 p_3, \ldots, q_{s+1} p_1$$

hinanreichen. (Vergl. Fig. 91.)*)

Die gemeinschaftliche Bahn der beiden Integrale Ω, Ω' wird nun, bei Zugrundelegung der Fläche $\mathfrak{R}$, dargestellt sein durch eine Curve, die auf dieser Fläche vom Puncte s ausgeht, und ganz nach Belieben auf der Fläche fortläuft. Um die Werthe zu untersuchen, mit welchen die auf einer solchen Curve fortlaufenden Integrale Ω, Ω' in irgend einem Puncte der Fläche eintreffen, müssen wir der Reihe nach zuerst die Differentiale $F dz$, $F' dz$, und sodann gewisse mit jenen Integralen in Zusammenhang stehende Functionen W, W' in Betracht ziehen.

Die Differentiale

$$(5) \qquad \begin{aligned} F dz &= \frac{\gamma_1 + \gamma_2 z + \ldots + \gamma_s z^{s-1}}{R} \, dz, \\ F' dz &= \frac{\gamma_1' + \gamma_2' z + \ldots + \gamma_s' z^{s-1}}{R} \, dz \end{aligned}$$

sind zusammengesetzt aus einzelnen Gliedern, deren jedes die Form hat

$$(\alpha.) \qquad \frac{z^n}{R} \, dz;$$

vorausgesetzt, dass wir unter n irgend eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots s-1$ verstehen. Wir wollen nun untersuchen, in wie weit das durch ein solches Glied dargestellte Differential $(\alpha.)$ auf der Fläche $\mathfrak{R}$ eindeutig und stetig bleibt, indem wir uns dabei, was den Begriff der Eindeutigkeit und Stetigkeit bei Differentialen anbelangt, auf die früher (S. 330) gegebene Definition stützen.

Die beiden in dem Differentiale $(\alpha.)$ enthaltenen Functionen $\frac{z^n}{R}$ und z sind auf $\mathfrak{R}$ keineswegs überall stetig; denn die eine besitzt in den Puncten p, q, die andere in den beiden bei $z = \infty$ befindlichen Puncten unendlich grosse Werthe. Um nun das Verhalten des Differentiales in jenen Puncten beurtheilen zu können,

*) Die letztgenannten Linien sind in dieser Figur durch punctirte Linien, die Uebergangslinien hingegen durch ununterbrochene Linien angegeben.

sind vor allen Dingen gewisse andere Formen zu beachten, welche dasselbe sich aneignen kann.

Aus

$$R = \sqrt{(z-p_1)(z-q_1)\ldots(z-p_{s+1})(z-q_{s+1})}$$

ergiebt sich durch Differentiation

$$dR = \frac{G\,.\,dz}{R},$$

wo G zur Abkürzung steht für folgende ganze rationale Function:

$$G = \frac{(z-p_1)(z-q_1)\ldots(z-q_{s+1})}{2}\left(\frac{1}{z-p_1}+\frac{1}{z-q_1}+\ldots+\frac{1}{z-q_{s+1}}\right);$$

hieraus folgt:

$$\frac{dz}{R} = \frac{dR}{G}.$$

Somit können wir dem Differential (α.) auch folgende Form geben:

$$(\beta.) \qquad \frac{z^n}{G}\cdot dR.$$

Beachtet man ferner, dass $d\,\frac{1}{z} = -\frac{dz}{z^2}$, mithin

$$dz = -\,z^2\,.\,d\,\frac{1}{z}$$

ist, so ergiebt sich, falls man diesen Werth für dz substituirt, für das Differential (α.) folgende dritte Form:

$$(\gamma.) \qquad \frac{-\,z^{n+2}}{R}\,.\,d\,\frac{1}{z}.$$

Die in dem Differential von Hause aus enthaltenen Functionen:

$$(\alpha'.) \qquad \frac{z^n}{R} \quad \text{und} \quad z$$

können also, wie die eben gefundenen neuen Formen zeigen, nach Belieben durch

$$(\beta'.) \qquad \frac{z^n}{G} \quad \text{und} \quad R,$$

oder auch durch

$$(\gamma'.) \qquad \frac{-\,z^{n+2}}{R} \quad \text{und} \quad \frac{1}{z}$$

ersetzt werden; ohne dass der Werth des Differentiales dabei irgend welche Aenderung erleidet.

Die Function R ist (vergl. S. 190) auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überall eindeutig, und mit Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig. Gleiches wird demnach zufolge eines früher (S. 274) gefundenen allgemeinen Satzes auch gelten von jedem Ausdruck, der aus R und z auf rationale Weise zusammengesetzt ist. Die sechs Functionen $(\alpha'.)$, $(\beta'.)$, $(\gamma'.)$ sind nun aber derartige Ausdrücke. Jede derselben ist aus R und z auf rationale Weise zusammengesetzt; und jede derselben wird daher auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überall eindeutig, und mit Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig sein. Ein Pol kann immer nur da vorhanden sein, wo die Function unendlich wird (S. 95). Demnach werden jene sechs Functionen $(\alpha'.)$, $(\beta'.)$, $(\gamma'.)$ auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überall, wo sie endlich sind, auch eindeutig und stetig sein.

Ebenso wie die auf $\mathfrak{R}$ vorhandenen $2s + 2$ Windungspuncte mit p, q bezeichnet werden können, ebenso mögen diejenigen beiden Puncte, welche auf der Fläche $\mathfrak{R}$ bei $z = \infty$ über einander liegen, kurzweg die beiden Puncte u genannt werden.

Die beiden Functionen $(\alpha'.)$ sind offenbar mit Ausnahme der Puncte p, q, u überall endlich, und sind also mit Ausnahme der Puncte p, q, u auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überall eindeutig und stetig.

Im Bereiche eines jeden der Puncte p, q bleiben die Functionen $(\beta'.)$ endlich.*) Demnach sind dieselben im Bereiche eines jeden der Puncte p, q eindeutig und stetig.

Da nun ferner n eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots s-1$ vorstellen soll, so werden die beiden Functionen $(\gamma'.)$ im Bereiche eines jeden der Puncte u endlich bleiben,**) mithin im Be-

---

*) Für $z = p_1$ z. B. werden die Functionen $(\beta'.)$ beide endliche Werthe besitzen. Denn die erstere von jenen Functionen verwandelt sich für $z = p_1$ in:

$$\frac{p_1^{\,n}}{G(p_1)},$$

d. i. mit Rücksicht auf die Bedeutung von G in:

$$\frac{2p_1^{\,n}}{(p_1-p_2)(p_1-p_3)\ldots(p_1-p_{s+1})\cdot(p_1-q_1)(p_1-q_2)\ldots(p_1-q_{s+1})}.$$

**) Ist z. B. $n = s-1$, ist mithin die erste der beiden Functionen $(\gamma'.)$ durch $\frac{-z^{s+1}}{R}$ dargestellt, so wird sie — mit Rücksicht auf die Bedeutung von R — für ein äusserst grosses z nahezu gleich

$$\frac{-z^{s+1}}{\sqrt{z^{2s+2}}}$$

werden. Folglich wird sie in den beiden bei $z = \infty$ liegenden Puncten u endliche Werthe besitzen, nämlich die Werthe $+1$, -1.

reiche eines jeden der Puncte u eindeutig und stetig sein.

Es sind demnach, um Alles zusammenzufassen, in dem Differential (α.) zwei Functionen $\frac{z^n}{R}$ und z enthalten, welche auf der Fläche $\mathfrak{R}$ mit Ausnahme der Puncte p, q, u überall eindeutig und stetig sind, und welche gleichzeitig im Bereich eines jeden solchen Ausnahme-Punctes durch zwei andere Functionen ersetzt werden können, die innerhalb dieses Bereiches eindeutig und stetig sind. Demnach ist jenes Differential (α.) als ein von z abhängendes Differential zu bezeichnen, welches auf der Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ allenthalben eindeutig und stetig bleibt (S. 330). Gleiches gilt mithin auch von den Differentialen Fdz und $F'dz$.

Mit Differentialen dieser Art haben wir uns bereits früher in eingehender Weise beschäftigt; wir können daher die damals gefundenen allgemeinen Sätze (S. 330. 335. 339. 342) unmittelbar in Anwendung bringen.

Die Fläche $\mathfrak{R}$ mag durch Ausführung irgend welcher Schnitte oder Ströme in eine einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{R}'$ verwandelt werden. Bilden wir nun eines der beiden Integrale

$$\int_s^z F dz, \quad \int_s^z F' dz,$$

und denken wir uns die Bewegung des Integrales auf die Fläche $\mathfrak{R}'$ beschränkt, so werden seine Werthe innerhalb jener Fläche $\mathfrak{R}'$ allenthalben eindeutig und stetig sein; wie solches aus dem einen der eben erwähnten Sätze unmittelbar hervorgeht.

Die zur Untersuchung vorgelegten Integrale:

$$6) \quad \begin{aligned} \Omega(z) &= \gamma + \int_s^z F dz, \\ \Omega'(z) &= \gamma' + \int_s^z F' dz \end{aligned}$$

besitzen eine gemeinschaftliche und auf der Fläche $\mathfrak{R}$ vollständig willkührlich fortschreitende Bahn. Wir stellen diesen Integralen gegenwärtig zwei andere Integrale $W(z)$, $W'(z)$ zur Seite, welche durch genau dieselben Formeln

$$(7)\qquad \begin{aligned} W(z) &= \gamma + \int_s^z F dz, \\ W'(z) &= \gamma' + \int_s^z F' dz \end{aligned}$$

definirt, von jenen aber verschieden sein sollen hinsichtlich ihrer Bahnen. Einerseits sollen nämlich die Bahnen der Integrale $W(z)$, $W'(z)$ keinen gemeinschaftlichen Lauf besitzen, sondern von einander durchaus unabhängig sein; und andererseits soll jede dieser beiden Bahnen keine völlig freie, sondern eine auf die einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{R}'$ beschränkte Beweglichkeit besitzen. Unter diesen Umständen werden dann $W(z)$, $W'(z)$ zwei von z abhängende Functionen sein, die innerhalb der Fläche $\mathfrak{R}'$ allenthalben eindeutig und stetig sind; sie mögen kurzweg die den Integralen $\Omega(z)$, $\Omega'(z)$ zugehörigen eindeutigen Functionen genannt werden.

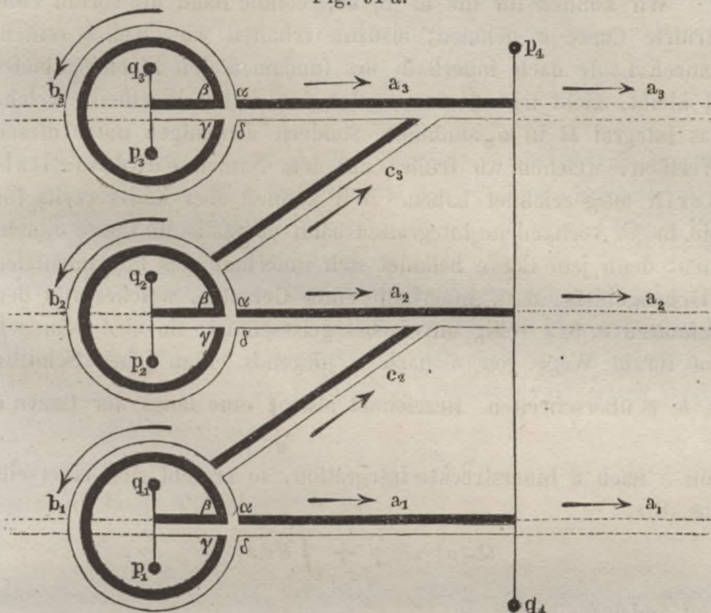
Indem wir auf die Untersuchung dieser Functionen näher eingehen, beschränken wir uns der grösseren Bequemlichkeit willen — wenigstens zu Anfang — auf den Specialfall, dass $s = 3$ ist; zugleich denken wir uns die Verwandlung der Fläche $\mathfrak{R}$ in die einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{R}'$ herbeigeführt durch diejenigen Schnitte oder Ströme a, b, c, welche bei früherer Gelegenheit (S. 323) ausführlich besprochen wurden. Es handelt sich zunächst um die Ermittelung derjenigen Werthe, welche die eindeutigen Functionen $W(z)$, $W'(z)$ in den Puncten p, q besitzen.

Das mit $\mathfrak{A}$ bezeichnete fundamentale Flächengebiet befindet sich im unteren Blatt der Fläche $\mathfrak{R}$, enthält in seinem Innern den gegebenen Punct s, enthält auf seiner Peripherie sämmtliche Puncte p, q, und bleibt, wie man leicht übersieht (Fig. 91 a.), bei Ausführung der Schnitte a, b, c völlig unversehrt.*)

*) Das fundamentale Gebiet $\mathfrak{A}$ liegt im unteren Blatt, und wird theils von den Uebergangslinien, theils von gewissen andern Linien begrenzt, die im unteren Blatt liegen, in Fig. 91 a. aber nicht ge-

Innerhalb dieses fundamentalen Gebiets mag eine Curve σ gezogen werden, welche von ε aus nach irgend einem der auf seiner Peripherie befindlichen Puncte p, q hingeht; dieser Punct mag α heissen.

Fig. 91 a.



Die Werthe, welche $\Omega(z)$ und $W(z)$ im Puncte α annehmen, werden beide durch ein und dieselbe Formel ausgedrückt. Es ist nämlich:

(8) $$\Omega(\alpha) = \gamma + \int_{\varepsilon}^{\alpha} F \,.\, dz;$$

und ebenso ist auch:

(9) $$W(\alpha) = \gamma + \int_{\varepsilon}^{\alpha} F \,.\, dz.$$

Der Unterschied besteht nur in den Integrations-Bahnen. Die (8)

---

zeichnet sind. Es ist wohl darauf zu achten, dass in dieser Figur jede Stromstrecke, je nachdem sie im oberen oder im unteren Blatt sich befindet, im ersteren Fall durch ununterbrochene, im letztern durch punctirte Striche angegeben ist.

vorhandene Bahn kann nämlich von ε nach α auf ganz willkührlichem Wege fortlaufen; die in (9) vorhandene hingegen muss innerhalb $\mathfrak{R}'$ bleiben, darf also die Ströme a, b, c nirgends überschreiten.

Wir können für die in (8) auftretende Bahn die vorhin construirte Curve σ nehmen; alsdann erhalten wir, weil σ seinem ganzen Laufe nach innerhalb des fundamentalen Flächengebietes $\mathfrak{A}$ bleibt, nicht irgend einen unter den vielen Werthen, welche das Integral Ω in α annimmt, sondern denjenigen unter diesen Werthen, welchen wir früher mit dem Namen Fundamentalwerth ausgezeichnet haben. Wir können aber andererseits für die in (9) vorhandene Integrationsbahn ebenfalls die Curve σ nehmen; denn jene Curve befindet sich innerhalb des fundamentalen Flächengebiets, d. i. innerhalb eines Gebietes, welches von den Schnitten a, b, c völlig unversehrt gelassen ist; sie wird demnach auf ihrem Wege von ε nach α nirgends einen jener Schnitte a, b, c überschreiten. Bezeichnet also $\int\limits_{\sigma}$ eine längs der Curve σ von ε nach α hinerstreckte Integration, so ergiebt sich einerseits aus (8):

$$\overline{\Omega}(\alpha) = \gamma + \int\limits_{\sigma} F dz,$$

und andererseits aus (9):

$$W(\alpha) = \gamma + \int\limits_{\sigma} F dz.$$

Daraus folgt, dass der im Puncte α vorhandene Fundamentalwerth $\overline{\Omega}(\alpha)$ identisch ist mit demjenigen Werthe, welchen die eindeutige Function W in jenem Puncte besitzt. Analoges gilt natürlich auch für das Integral Ω' und die Function W'.

Die Werthe:

$$W(p), \quad W(q), \quad W'(p), \quad W'(q),$$

welche die eindeutigen Functionen W, W' in den Puncten p, q besitzen, sind demnach identisch mit den diesen Puncten zugehörigen Fundamentalwerthen:

$$\overline{\Omega}(p), \quad \overline{\Omega}(q), \quad \overline{\Omega}'(p), \quad \overline{\Omega}'(q).$$

Denkt man sich das Stromnetz a, b, c aus lauter unverzweigten Stromstrecken zusammengesetzt, so wird die Function

$W(z)$ — zufolge der früher aufgestellten allgemeinen Sätze — in jeder solchen Stromstrecke mit einer Werthdifferenz behaftet sein, die längs der ganzen Strecke hin constant bleibt. Der Strom a_1 (Fig. 91 a) ist als eine einzige unverzweigte Stromstrecke anzusehen. Sind demnach λ und ϱ irgend zwei auf dem linken und rechten Ufer von a_1 einander gegenüberliegende Puncte, so wird die Differenz

$$(8) \qquad W(\lambda) - W(\varrho) = A_1$$

eine Grösse sein, die längs des Stromes a_1 hin überall constant ist. Der Strom b_1 besteht aus zwei unverzweigten Stromstrecken, nämlich aus einer solchen Strecke, die (Fig. 91 a) vom linken Ufer des Stromes a_1 bis zu derjenigen Stelle fortläuft, wo sich der Strom c_2 abzweigt, und aus einer zweiten solchen Strecke, die von der eben genannten Stelle bis zum rechten Ufer von a_1 geht. Wir bezeichnen von diesen beiden Strecken die erstere mit h, die letztere mit h', ferner die längs h vorhandene constante Werthdifferenz mit:

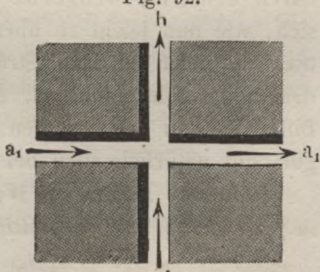
$$W(\lambda) - W(\varrho) = H,$$

und die längs h' vorhandene mit:

$$W(\lambda) - W(\varrho) = H'.$$

Die Stelle, in welcher die beiden Ströme a_1 und b_1 einander durchkreuzen, kann als ein Knotenpunct des Stromnetzes angesehen werden, und zwar als ein Knotenpunct, in welchem (Fig. 92) vier Stromstrecken, zwei daselbst einfliessende a_1 und h', und zwei von dort wegfliessende a_1 und h, zusammenstossen. Zufolge des früher gefundenen Knotenpunctgesetzes (S. 339) muss demnach

Fig. 92.



$$A_1 + H' = A_1 + H,$$

d. i.

$$(9) \qquad H' = H$$

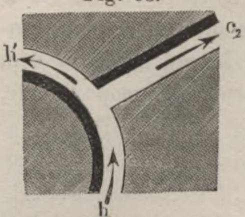
sein. Der Strom c_2 bildet eine einzige unverzweigte Stromstrecke; bezeichnet man die in ihm vorhandene Werthdifferenz mit:

$$W(\lambda) - W(\varrho) = C_2,$$

so ergiebt sich, wiederum zufolge des Knotenpunctgesetzes (Fig. 93):

$$H = H' + C_2,$$

Fig. 93.



also mit Rücksicht auf (9):

$$(10) \qquad C_2 = 0.$$

Wir gehen nunmehr über zum Strome a_2. Dieser enthält im Ganzen zwei Knotenpuncte, einen, wo er sich mit b_2 durchkreuzt, und einen andern, wo c_2 in ihn einmündet; er besteht demnach aus zwei unverzweigten Stromstrecken, nämlich aus einer solchen Strecke i, welche vom erstern Knotenpunct zum letztern, und aus einer zweiten, welche vom letztern zum erstern hingeht. Bezeichnen wir die diesen beiden Strecken zugehörigen Werthdifferenzen mit:

$$W(\lambda) - W(\varrho) = J,$$

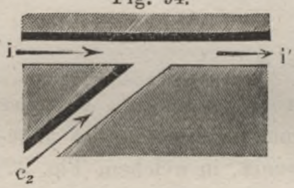
und mit:

$$W(\lambda) - W(\varrho) = J',$$

so ergiebt sich zufolge des Knotenpunctgesetzes (Fig. 94):

$$J + C_2 = J',$$

Fig. 94.



also mit Rücksicht auf (10):

$$(11) \qquad J = J'.$$

In jedem der bis jetzt betrachteten Ströme a_1, b_1, c_2, a_2 ist, wie aus (8), (9), (10), (11) hervorgeht, die Werthdifferenz längs des ganzes Stromes hin durch ein und dieselbe Constante dargestellt. Gleiches wird sich, wie nun leicht zu übersehen ist, auch herausstellen, wenn man die noch übrigen Ströme b_2, c_3, a_3, b_3, ... einen nach dem andern durchmustert. Auch übersieht man leicht, dass diese Differenzen in den Strömen c durchweg $= 0$ sind. Was bei W gilt, gilt natürlich auch bei W'.

Demnach können die Werthdifferenzen der Functionen W, W' in folgender Weise dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
&\text{längs } a_\varkappa: \; W(\lambda) - W(\varrho) = A_\varkappa, \quad W'(\lambda) - W'(\varrho) = A'_\varkappa,\\
&\text{längs } b_\varkappa: \; W(\lambda) - W(\varrho) = B_\varkappa, \quad W'(\lambda) - W'(\varrho) = B'_\varkappa,\\
&\text{längs } c_\varkappa: \; W(\lambda) - W(\varrho) = 0, \quad\;\; W'(\lambda) - W'(\varrho) = 0,
\end{aligned}$$

wo unter den Grössen A, B und A', B' irgend welche Constanten zu verstehen sind.

Zwischen diesen Constanten A, B, A', B' und zwischen den Werthen, welche die eindeutigen Functionen W, W' in den Puncten p, q besitzen, finden, wie sich sogleich zeigen wird, sehr einfache Beziehungen statt.

Fünfter Abschnitt. Fortsetzung. Sind die Fundamentalwerthe der Integrale Ω, Ω' bekannt, so lassen sich die constanten Werthdifferenzen, mit welchen die Functionen W, W' in den Strömen a, b, c behaftet sind, augenblicklich berechnen.

Wir werden gegenwärtig nachweisen, dass die Constanten A, B, A', B' näher bestimmbar sind, dass sie nämlich ausgedrückt werden können durch die den betrachteten beiden Integralen Ω, Ω' zugehörigen Fundamentalwerthe

$$\overline{\Omega}(p),\quad \overline{\Omega}(q),\quad \overline{\Omega'}(p),\quad \overline{\Omega'}(q);$$

oder, was dasselbe ist, dass sie ausgedrückt werden können durch diejenigen Werthe

$$W(p),\quad W(q),\quad W'(p),\quad W'(q),$$

welche die eindeutigen Functionen W, W' in den Puncten p, q besitzen.

Zuvörderst müssen wir unserer Untersuchung einige allgemeine Bemerkungen vorangehen lassen; wir betrachten dabei von den Functionen W und W' nur e i n e, etwa nur die Function W.

Die Function W ist innerhalb der u m r a n d e t e n F l ä c h e $\mathfrak{R}'$ überall eindeutig und stetig. Sie ist demnach auf der g e s c h l o s s e n e n F l ä c h e $\mathfrak{R}$ mit Ausnahme der Ströme a, b, c allenthalben eindeutig und stetig, in jenen Strömen aber mit den eben besprochenen constanten Werthdifferenzen A, B, 0 behaftet.

Es sei nun σ eine auf der geschlossenen Fläche beliebig fortlaufende Curve; ihr Anfangspunct mag α, ihr Endpunct β heissen.

Ueberschreitet diese Curve k e i n e n der Ströme a, b, c, so wird W längs derselben hin überall eindeutig und stetig sein; das über dieselbe hinerstreckte Integral $\int dW$ wird daher in diesem Fall folgenden Werth besitzen:

$$\text{(I.)}\qquad \int_\alpha^\beta dW = W(\beta) - W(\alpha).$$

Ueberschreitet hingegen die Curve σ die Ströme a, b, c, so wird die eben hingestellte Formel nicht mehr gültig sein. Es sei h irgend einer unter jenen Strömen, und gleichzeitig sei

$$W(\lambda) - W(\varrho) = H$$

die constante Werthdifferenz, mit welcher die Function W in diesem Strom behaftet ist.

Der Einfachheit wegen wollen wir annehmen, die Curve σ überschritte von sämmtlichen Strömen a, b, c nur den Strom h, und diesen nur einmal, und zwar vom linken zum rechten Ufer hin. Die Curve σ besteht dann aus zwei Theilen, nämlich aus einem Theile $\alpha\lambda$, welcher von α bis zum linken Ufer des Stromes h geht, und aus einem zweiten Theile $\varrho\beta$, welcher vom rechten Ufer des Stromes nach β hinläuft; unter λ und ϱ sind dabei zwei zu beiden Ufern des Stromes h einander gegenüberliegende Puncte zu verstehen. Da nun nach unserer Voraussetzung die Curvenstrecke $\alpha\lambda$ keinen der Ströme a, b, c überschreitet, mithin W längs dieser Strecke hin überall eindeutig und stetig ist, so ergiebt sich:

$$\int_\alpha^\lambda dW = W(\lambda) - W(\alpha).$$

Ebenso erhält man für die zweite Curvenstrecke $\varrho\beta$:

$$\int_\varrho^\beta dW = W(\beta) - W(\varrho),$$

Addirt man nun diese beiden Integrale, so ergiebt sich für das über die ganze Curve σ oder $\alpha\beta$ hinerstreckte Integral folgender Werth:

$$\int_\alpha^\beta dW = W(\beta) - W(\alpha) + W(\lambda) - W(\varrho),$$

oder weil $W(\lambda) - W(\varrho) = H$ ist:

$$\int_\alpha^\beta dW = W(\beta) - W(\alpha) + H.$$

Ueberschreitet, um den allgemeinsten Fall zu betrachten, die Curve σ auf ihrem Wege von α nach β nicht einen, sondern beliebig viele Ströme, so wird man, wie nunmehr leicht zu übersehen ist, für das längs σ hinerstreckte Integral folgenden Werth erhalten:

$$\text{(II.)}\qquad \int_\alpha^\beta dW = W(\beta) - W(\alpha) + \Sigma \varepsilon H;$$

die Summe Σ besteht hier aus ebenso vielen Gliedern, als Stromüberschreitungen erfolgt sind; die Grössen H bedeuten die den einzelnen Strömen zugehörigen Werthdifferenzen, und ε eine Grösse, welche gleich $+1$ oder gleich -1 ist, je nachdem die Ueberschreitung des Stromes vom linken zum rechten Ufer oder in entgegengesetzter Richtung erfolgt.

In Betreff der Function W ist schliesslich noch eine Bemerkung zu machen. Zufolge unserer Definition ist

$$W = \gamma + \int_8^z \frac{\gamma_1 + \gamma_2 z + \ldots + \gamma_s z^{s-1}}{R} \cdot dz,$$

mithin:

$$dW = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 z + \ldots + \gamma_s z^{s-1}}{R} \cdot dz.$$

Von den beiden im Differential dW enthaltenen Functionen:

$$\frac{\gamma_1 + \gamma_2 z + \ldots + \gamma_s z^{s-1}}{R} \quad \text{und} \quad z$$

besitzt die erstere in je zwei über einander liegenden Puncten der Fläche $\mathfrak{R}$ entgegengesetzte, die letztere gleiche Werthe. Sind daher σ und σ' zwei in beiden Blättern genau über einander liegende Curven, so werden die längs dieser Curve hinerstreckten Integrale:

$$\int_\sigma \frac{\gamma_1 + \gamma_2 z + \ldots + \gamma_s z^{s-1}}{R} \cdot dz$$

und

$$\int_{\sigma'} \frac{\gamma_1 + \gamma_2 z + \ldots + \gamma_s z^{s-1}}{R} \cdot dz$$

entgegengesetzte Werthe besitzen. Es wird demnach

$$\int_\sigma \frac{\gamma_1 + \gamma_2 z + \ldots + \gamma_s z^{s-1}}{R}\, dz + \int_{\sigma'} \frac{\gamma_1 + \gamma_2 z + \ldots + \gamma_s z^{s-1}}{R}\, dz = 0$$

sein; oder, was dasselbe ist, es wird

$$\text{(III.)} \qquad \int_{\sigma} dW + \int_{\sigma'} dW = 0$$

sein; vorausgesetzt natürlich, dass die Integrationen über σ und σ' in gleicher Richtung hinerstreckt sind.

Wir gehen nun über zu dem eigentlichen Gegenstande unserer Untersuchung; dabei beschränken wir uns vorläufig auf den Specialfall, dass $s = 3$ ist.

Die Puncte p, q befinden sich sämmtlich am Rande des Gebietes $\mathfrak{A}$. Wir können daher von p_1 nach q_1, von q_1 nach p_2, von p_2 nach q_2, u. s. w. Curven ziehen, die sämmtlich im unteren Blatt der Fläche $\mathfrak{R}$ liegen, und die gleichzeitig ihrem ganzen Laufe nach innerhalb jenes Gebietes $\mathfrak{A}$ bleiben. Diese Curven werden, da das Gebiet $\mathfrak{A}$ von Strömen völlig frei geblieben ist, keinerlei Stromüberschreitungen darbieten. Wir denken uns diese Curven wirklich gezogen; gleichzeitig aber auch noch andere Curven, die im oberen Blatt der Fläche $\mathfrak{R}$ Schritt für Schritt dieselben Wege nehmen, welche die erstgenannten im unteren Blatt durchlaufen. Da wir uns auf den Specialfall $s = 3$ beschränken, so haben wir im Ganzen 8 Puncte:

$$p_1,\ q_1,\ p_2,\ q_2,\ p_3,\ q_3,\ p_4,\ q_4,$$

folglich im Ganzen auch 8 Curvenpaare:

$$p_1q_1,\ q_1p_2,\ p_2q_2,\ \ldots,\ q_4p_1,$$

von welchen jedes aus zwei in beiden Blättern genau über einander liegenden Curven besteht (Fig. 95).*)

Auf jedes dieser 8 Curvenpaare bringen wir nun die Formeln (I.), (II.), (III.) in Anwendung, zuerst etwa auf dasjenige, welches von p_4 nach q_4 hinläuft. Bezeichnen wir die untere Curve p_4q_4 mit σ, und die obere mit σ', so erhalten wir zufolge (I.):

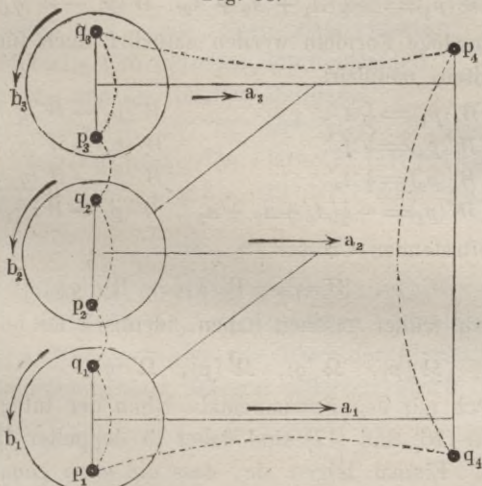
$$\text{(1)} \qquad \int_{\sigma} dW = W(q_4) - W(p_4),$$

*) In Fig. 95 ist jedes der genannten 8 Curvenpaare durch eine punctirte Linie angegeben. Die Ströme a, b, c sind daselbst nur so weit, als sie im oberen Blatt der Fläche bleiben, und nicht durch Doppelstriche, sondern nur durch einfache Striche angegeben.

ferner zufolge (II.):

$$(2) \qquad \int_{\sigma'} dW = W(q_4) - W(p_4) + \Sigma \varepsilon H.$$

Fig. 95.



Da die Curve σ' die Ströme a_1, a_2, a_3, und zwar jeden derselben vom linken zum rechten Ufer überschreitet, so sind die in der letzten Gleichung (2) enthaltenen Werthdifferenzen H dargestellt durch:

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3,$$

ferner die darin befindlichen Grössen ε dargestellt durch:

$$+1, \quad +1, \quad +1.$$

Demnach verwandelt sich jene Gleichung (2) in

$$(3) \qquad \int_{\sigma'} dW = W(q_4) - W(p_4) + A_1 + A_2 + A_3.$$

Durch Addition von (1) und (3) ergiebt sich nunmehr aber, mit Rücksicht auf die Formel (III.):

$$(4) \qquad 0 = 2\,W(q_4) - 2\,W(p_4) + A_1 + A_2 + A_3,$$

oder was dasselbe ist:

$$(5) \qquad W(q_4) - W(p_4) = -\tfrac{1}{2}(A_1 + A_2 + A_3).$$

Bringt man in solcher Weise die Formeln (I.), (II.), (III.) der Reihe nach auf jedes der 8 Curvenpaare in Anwendung, so ergeben sich, wie leicht zu übersehen ist, folgende 8 Formeln:

$$(16)\begin{cases} W(q_1)-W(p_1)=\frac{1}{2}A_1, & W(p_2)-W(q_1)=\frac{1}{2}(B_2-B_1),\\ W(q_2)-W(p_2)=\frac{1}{2}A_2, & W(p_3)-W(q_2)=\frac{1}{2}(B_3-B_2),\\ W(q_3)-W(p_3)=\frac{1}{2}A_3, & W(p_4)-W(q_3)= \quad -\frac{1}{2}B_3,\\ W(q_4)-W(p_4)=-\frac{1}{2}(A_1+A_2+A_3), & W(p_1)-W(q_4)=\frac{1}{2}B_1. \end{cases}$$

Ganz analoge Formeln werden natürlich auch für die Function W' gelten, nämlich:

$$(17)\begin{cases} W'(q_1)-W'(p_1)=\frac{1}{2}A_1', & W'(p_2)-W'(q_1)=\frac{1}{2}(B_2'-B_1'),\\ W'(q_2)-W'(p_2)=\frac{1}{2}A_2', & W'(p_3)-W'(q_2)=\frac{1}{2}(B_3'-B_2'),\\ W'(q_3)-W'(p_3)=\frac{1}{2}A_3', & W'(p_4)-W'(q_3)= \quad -\frac{1}{2}B_3',\\ W'(q_4)-W'(p_4)=-\frac{1}{2}(A_1'+A_2'+A_3'), & W'(p_1)-W'(q_4)=\frac{1}{2}B_1'. \end{cases}$$

Die hier auftretenden Grössen

$$W(p),\quad W(q),\quad W'(p),\quad W'(q)$$

sind, wie wir früher gesehen haben, identisch mit

$$\overline{\Omega}(p),\quad \overline{\Omega}(q),\quad \overline{\Omega}'(p),\quad \overline{\Omega}'(q),$$

d. i. identisch mit den Fundamentalwerthen der Integrale Ω, Ω'. Die Formeln (16) und (17) sind daher in doppelter Hinsicht von Wichtigkeit. Einmal zeigen sie, dass die eben genannten Fundamentalwerthe nicht von einander unabhängig, dass nämlich die Fundamentalwerthe von Ω durch die Relation:

$$W(p_1)+W(p_2)+W(p_3)+W(p_4)=$$
$$=W(q_1)+W(q_2)+W(q_3)+W(q_4)$$

mit einander verbunden sind, und dass eine ähnliche Relation natürlich auch stattfindet zwischen den Fundamentalwerthen von Ω'. Andererseits zeigen jene Formeln (16) und (17), dass man, sobald die Fundamentalwerthe

$$W(p),\quad W(q)\quad \text{und}\quad W'(p),\quad W'(q)$$

bekannt sind, die den Functionen W, W' zugehörigen Werthdifferenzen

$$A,\ B\quad \text{und}\quad A',\ B'$$

sofort zu berechnen im Stande ist.

Sechster Abschnitt. Fortsetzung. Zwischen den Werthdifferenzen, mit welchen die eindeutigen Functionen W, W' in den Strömen a, b, c behaftet sind, finden jederzeit gewisse Relationen statt.

Wir werden nun ferner zeigen, dass zwischen den Constanten A, B einerseits und zwischen den Constanten A', B' andererseits immer eine gewisse Relation stattfindet.

Die Functionen W und W' sind (vergl. S. 412) innerhalb der einfach zusammenhängenden Fläche $\mathfrak{R}'$ allenthalben eindeutig und stetig. Gleiches gilt daher auch von dem Differentiale:

$$W\,.\,dW'.$$

Ist aber ein Differential innerhalb irgend einer Fläche allenthalben eindeutig und stetig, so ist, wie wir früher allgemein nachgewiesen haben (S. 330), sein um den Rand der Fläche in positiver Richtung herumerstrecktes Integral jederzeit gleich Null. Verstehen wir also, wie gewöhnlich, unter $\int\limits_{\mathfrak{R}'}$ eine in positiver Richtung längs des Randes von $\mathfrak{R}'$ hinerstreckte Integration, so haben wir die Gleichung:

$$\int\limits_{\mathfrak{R}'} W\,.\,dW' = 0. \tag{18}$$

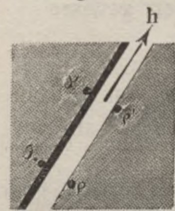
Bei einer positiven Umlaufung der Fläche $\mathfrak{R}'$ wird jeder Strom a, b, c zweimal, und zwar immer das linke Ufer des Stromes stromabwärts, das rechte stromaufwärts durchlaufen (vergl. S. 317). Demnach kann das in positiver Richtung um $\mathfrak{R}'$ herumerstreckte Integral

$$\int\limits_{\mathfrak{R}'} W\,.\,dW'$$

in doppelt so viel Theile zerlegt werden, als Ströme a, b, c vorhanden sind; jedem einzelnen Strome werden nämlich immer je zwei solcher Theile zugehören, von welchen sich der eine auf das linke, der andere auf das rechte Ufer des Stromes bezieht. Ist h (Fig. 96) irgend einer unter den Strömen a, b, c, und sind $W(\lambda)$, $W'(\lambda)$ und $W(\varrho)$, $W'(\varrho)$ die Werthe, welche die Functionen W, W' auf dem linken und auf dem rechten Ufer dieses

Stromes besitzen, so wird der dem linken Ufer zugehörige Integraltheil dadurch erhalten werden, dass man

Fig. 96.



$$W(\lambda) \, . \, dW'(\lambda)$$

stromabwärts integrirt, der dem rechten Ufer zugehörige Integraltheil hingegen dadurch, dass man

$$W(\varrho) \, . \, dW'(\varrho)$$

stromaufwärts integrirt. Offenbar kommt es aber auf dasselbe hinaus, ob man das letztgenannte Differential in der eben angegebenen Richtung, oder ob man dasselbe, mit negativem Vorzeichen versehen, in der entgegengesetzten Richtung, d. i. stromabwärts integrirt. Demnach wird man die beiden dem Strome h zugehörigen Integraltheile zusammengenommen dadurch erhalten, dass man den Ausdruck

$$W(\lambda) \, . \, dW'(\lambda) - W(\varrho) \, . \, dW'(\varrho)$$

stromabwärts integrirt. Bezeichnen wir daher, wie solches fortan stets geschehen soll, eine längs des Stromes h stromabwärts hinerstreckte Integration kurzweg mit $\int\limits_h$, so werden beide Integraltheile zusammengenommen durch

$$\int\limits_h (W(\lambda) \, . \, dW'(\lambda) - W(\varrho) \, . \, dW'(\varrho))$$

dargestellt sein. Die Werthe $W'(\lambda)$ und $W'(\varrho)$ unterscheiden sich längs h hin nur durch eine Constante. Die Differentiale $dW'(\lambda)$ und $dW'(\varrho)$ besitzen daher längs h ein und denselben Werth; bezeichnen wir den gemeinschaftlichen Werth derselben kurzweg mit dW', so verwandelt sich der eben angegebene Ausdruck in:

$$\int\limits_h (W(\lambda) - W(\varrho)) \, dW'.$$

Diesen Ausdruck werden wir nun, falls wir den Werth unseres um $\mathfrak{R}'$ herumerstreckten Integrales haben wollen, der Reihe nach für jeden der Ströme a, b, c zu bilden, und sodann all diese Ausdrücke zu addiren haben. Somit ergiebt sich:

$$(19)\qquad \int\limits_{\mathfrak{R}'} W\,dW' = \Sigma \int\limits_{a_\varkappa} (W(\lambda) - W(\varrho))\,dW'$$
$$+ \Sigma \int\limits_{b_\varkappa} (W(\lambda) - W(\varrho))\,dW'$$
$$+ \Sigma \int\limits_{c_\varkappa} (W(\lambda) - W(\varrho))\,dW',$$

wo sich von den Summationen Σ die erste auf sämmtliche Ströme a, die zweite auf die Ströme b, und die dritte auf die Ströme c bezieht.

Nun ist, was die Werthe von W und W' zu beiden Ufern der Ströme a, b, c anbelangt (vgl. S. 416):

längs $a_\varkappa$: $W(\lambda) - W(\varrho) = A_\varkappa$, $\quad W'(\lambda) - W'(\varrho) = A_\varkappa'$,
längs $b_\varkappa$: $W(\lambda) - W(\varrho) = B_\varkappa$, $\quad W'(\lambda) - W'(\varrho) = B_\varkappa'$,
längs $c_\varkappa$: $W(\lambda) - W(\varrho) = 0$, $\quad W'(\lambda) - W'(\varrho) = 0$.

Somit erhalten wir aus (19):

$$(20)\qquad \int\limits_{\mathfrak{R}'} W\,dW' = \Sigma \int\limits_{a_\varkappa} A_\varkappa\,dW' + \Sigma \int\limits_{b_\varkappa} B_\varkappa\,dW',$$

oder, weil $A_\varkappa$ und $B_\varkappa$ Constante sind:

$$(21)\qquad \int\limits_{\mathfrak{R}'} W\,dW' = \Sigma\, A_\varkappa \int\limits_{a_\varkappa} dW' + \Sigma\, B_\varkappa \int\limits_{b_\varkappa} dW'.$$

Das stromabwärts hinerstreckte Integral $\int\limits_{a_\varkappa} dW'$ ist offenbar gleich der Differenz derjenigen beiden Werthe, welche W' am Ende und am Anfang des Stromes $a_\varkappa$ besitzt. Nun hat dieser Strom (vgl. die Fig. 91a. S. 413) sein Ende im linken, und seinen Anfang im rechten Ufer des Stromes $b_\varkappa$. Demnach wird das in Rede stehende Integral $\int\limits_{a_\varkappa} dW'$ gleich der Differenz derjenigen Werthe sein, welche W' am linken und am rechten Ufer von $b_\varkappa$ besitzt, d. i. gleich $B_\varkappa'$ sein. Etwas anders verhält es sich mit dem Integrale $\int\limits_{b_\varkappa} dW'$. Denn der Strom $b_\varkappa$ hat (vergl. abermals die Fig. 91a. S. 413) sein Ende im rechten, seinen Anfang im linken

Ufer von $a_\varkappa$; somit ergiebt sich, dass dieses Integral nicht gleich $A_\varkappa'$, sondern gleich $-A_\varkappa'$ ist.*)

Setzen wir die so erhaltenen Werthe in (21) ein, so ergiebt sich:

$$\int\limits_{\mathfrak{N}'} W\,dW' = \Sigma A_\varkappa B_\varkappa' - \Sigma B_\varkappa A_\varkappa'.$$

Somit verwandelt sich die Gleichung (18) in:

(22) $$\Sigma\,(A_\varkappa B_\varkappa' - A_\varkappa' B_\varkappa) = 0,$$

wo die Summation Σ über sämmtliche Strompaare a, b ausgedehnt ist. Wir sehen hieraus, dass die den Functionen W und W' zugehörigen constanten Werthdifferenzen A, B und A', B' nicht völlig unabhängig von einander sind. Sind nämlich die Constanten A, B sämmtlich bekannt, und sind ferner von den Constanten A', B' alle bis auf eine bekannt, so wird man den Werth dieser einen noch unbekannten vermittelst der eben gefundenen Relation (22) sofort zu ermitteln im Stande sein.

Es bezieht sich diese Relation auf die Werthdifferenzen zweier Functionen. Doch findet auch schon bei den Werthdifferenzen einer einzigen Function eine gewisse gegenseitige Abhängigkeit statt. Um solches nachzuweisen, betrachten wir die Function W für sich allein, und die ihr zugehörigen Werthdifferenzen A, B.

---

*) Da Integrale solcher Art in Zukunft öfters vorkommen werden, so mag bei dieser Gelegenheit gleich im Allgemeinen bemerkt werden, dass, falls f eine Function vorstellt, die längs der Ströme $a_\varkappa$ und $b_\varkappa$ stetig ist, jederzeit

$$\int\limits_{a_\varkappa} df = +\,[f(\lambda) - f(\varrho)]_{b_\varkappa},$$

$$\int\limits_{b_\varkappa} df = -\,[f(\lambda) - f(\varrho)]_{a_\varkappa}$$

sein wird. Unter $\int\limits_{a_\varkappa}$ und $\int\limits_{b_\varkappa}$ sind hier, wie gewöhnlich, Integrationen zu verstehen, die stromabwärts hinlaufen; ferner unter

$$[f(\lambda) - f(\varrho)]_{a_\varkappa} \quad \text{und} \quad [f(\lambda) - f(\varrho)]_{b_\varkappa}$$

die in $a_\varkappa$ und $b_\varkappa$ vorhandenen Werthdifferenzen von f.

Durch Sonderung des Reellen und Imaginären mag sich ergeben:

$$W = U + iV,$$
$$A_\varkappa = \alpha_\varkappa + i\alpha_\varkappa',$$
$$B_\varkappa = \beta_\varkappa + i\beta_\varkappa'.$$

Da W innerhalb der Fläche $\mathfrak{R}'$ allenthalben eindeutig und stetig ist, so wird das in positiver Richtung um diese Fläche herumerstreckte Integral $\int U dV$ — zufolge eines früher gefundenen allgemeinen Satzes (S. 278) — jederzeit von positivem Werth sein; also:

$$\int_{\mathfrak{R}'} U dV = \text{pos.} \tag{23}$$

Dieses Integral lässt sich nun wiederum in doppelt so viele einzelne Theile zerlegen, als Ströme a, b, c vorhanden sind. Beachtet man, dass

längs $a_\varkappa$: $U(\lambda) - U(\varrho) = \alpha_\varkappa$, $\quad V(\lambda) - V(\varrho) = \alpha_\varkappa'$,
längs $b_\varkappa$: $U(\lambda) - U(\varrho) = \beta_\varkappa$, $\quad V(\lambda) - V(\varrho) = \beta_\varkappa'$,
längs $c_\varkappa$: $U(\lambda) - U(\varrho) = 0$, $\quad V(\lambda) - V(\varrho) = 0$

ist, so erhält man:

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{R}'} U dV = \Sigma \int_{a_\varkappa} (U(\lambda) - U(\varrho))\, dV \\ + \Sigma \int_{b_\varkappa} (U(\lambda) - U(\varrho))\, dV \\ + \Sigma \int_{c_\varkappa} (U(\lambda) - U(\varrho))\, dV,\end{aligned}$$

oder:

$$\int_{\mathfrak{R}'} U dV = \Sigma\, \alpha_\varkappa \int_{a_\varkappa} dV + \Sigma\, \beta_\varkappa \int_{b_\varkappa} dV,$$

wo die Integrationen rechts längs der einzelnen Ströme a, b, c, und zwar durchweg stromabwärts, hinerstreckt sind. Nun ist (vergl. die Note auf S. 426)

$$\int_{a_\varkappa} dV = \quad [V(\lambda) - V(\varrho)]_{b_\varkappa} = \beta_\varkappa',$$
$$\int_{b_\varkappa} dV = -[V(\lambda) - V(\varrho)]_{a_\varkappa} = -\alpha_\varkappa'.$$

Somit ergiebt sich:

$$\int_{\mathfrak{R}'} U dV = \Sigma (\alpha_\varkappa \beta_\varkappa' - \alpha_\varkappa' \beta_\varkappa);$$

und hierdurch verwandelt sich die Gleichung (23) in:

$$(24) \qquad \Sigma (\alpha_\varkappa \beta_\varkappa' - \alpha_\varkappa' \beta_\varkappa) = \text{pos.},$$

wo die Summation über alle auf der Fläche vorhandenen Strompaare a, b ausgedehnt zu denken ist. Hier haben wir eine Formel vor uns, welche zeigt, dass die der Function W zugehörigen Werthdifferenzen $A = \alpha + i\alpha'$, $B = \beta + i\beta'$ in einer gewissen Abhängigkeit zu einander stehen.

Wir können die hier erhaltenen Resultate unmittelbar auf den Fall ausdehnen, dass die Zahl s nicht $= 3$ ist, sondern irgend welchen andern Werth besitzt, und gelangen alsdann schliesslich zu folgendem Ergebniss.

Bezeichnet man irgend zwei unter den primären und secundären Integralen:

$$\Omega_1(z) = C_1 + \int_8^z F_1 dz, \qquad \omega_1(z) = c_1 + \int_8^z f_1 dz,$$

$$\Omega_2(z) = C_2 + \int_8^z F_2 dz, \qquad \omega_2(z) = c_2 + \int_8^z f_2 dz,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Omega_s(z) = C_s + \int_8^z F_s dz, \qquad \omega_s(z) = c_s + \int_8^z f_s dz,$$

oder auch irgend zwei andere Integrale, die aus jenen auf lineäre Weise zusammengesetzt sind, und die also, ebenso wie jene, auf der Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ eine gemeinschaftliche und willkürliche Bewegung besitzen, mit:

$$\Omega(z) = \gamma + \int_8^z F dz, \qquad \Omega'(z) = \gamma' + \int_8^z F' dz,$$

und versteht man ferner unter

$$W(z), \quad W'(z)$$

zwei Integrale, die von $\Omega(z)$, $\Omega'(z)$ nur dadurch verschieden sind, *dass ihre Bahnen einerseits von einander unabhängig, und andererseits auf die einfach zusammenhängende Fläche* $\mathfrak{R}'$ *beschränkt sein sollen, so gelten folgende Sätze:*

I. Die Differentiale Fdz *und* $F'dz$ *sind auf der unzerschnittenen Fläche* $\mathfrak{R}$ *allenthalben eindeutig und stetig.*

II. Die Integrale $W(z)$ *und* $W'(z)$ *sind zwei von* z *abhängende Functionen, die innerhalb der einfach zusammenhängenden Fläche* $\mathfrak{R}'$ *allenthalben eindeutig und stetig bleiben, und deren Werthe in den Puncten* p, q *identisch sind mit den daselbst vorhandenen Fundamentalwerthen der Integrale* $\Omega(z)$, $\Omega'(z)$. *Die Werthe*

$$W(p),\ W(q),\ W'(p),\ W'(q)$$

und die Werthe

$$\overline{\Omega}(p),\ \overline{\Omega}(q),\ \overline{\Omega}'(p),\ \overline{\Omega}'(q)$$

sind also unter einander identisch.

III. Die Werthdifferenzen, mit welchen diese eindeutigen Functionen in jedem der Ströme a, b, c *behaftet sind, lassen sich in folgender Weise darstellen:*

längs $a_\varkappa$ *ist:* $W(\lambda) - W(\varrho) = A_\varkappa, \quad W'(\lambda) - W'(\varrho) = A_\varkappa'$,
längs $b_\varkappa$: $W(\lambda) - W(\varrho) = B_\varkappa, \quad W'(\lambda) - W'(\varrho) = B_\varkappa'$,
längs $c_\varkappa$: $W(\lambda) - W(\varrho) = 0, \quad W'(\lambda) - W'(\varrho) = 0$,

wo unter den A, B *und* A', B' *constante Grössen zu verstehen sind.*

IV. Zwischen den Fundamentalwerthen $\overline{\Omega}(p)$, $\overline{\Omega}(q)$ *oder* $W(p)$, $W(q)$ *und zwischen den der Function* W *zugehörigen Werthdifferenzen* A, B, *finden folgende Beziehungen statt:*

$$\begin{array}{ll}
W(q_1) - W(p_1) = \tfrac{1}{2}A_1, & W(p_2) - W(q_1) = \tfrac{1}{2}(B_2 - B_1), \\
W(q_2) - W(p_2) = \tfrac{1}{2}A_2, & W(p_3) - W(q_2) = \tfrac{1}{2}(B_3 - B_2), \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
W(q_{s-1}) - W(p_{s-1}) = \tfrac{1}{2}A_{s-1}, & W(p_s) - W(q_{s-1}) = \tfrac{1}{2}(B_s - B_{s-1}), \\
W(q_s) - W(p_s) = \tfrac{1}{2}A_s, & W(p_{s+1}) - W(q_s) = -\tfrac{1}{2}B_s, \\
W(q_{s+1}) - W(p_{s+1}) = & W(p_1) - W(q_{s+1}) = \tfrac{1}{2}B_1. \\
\quad = -\tfrac{1}{2}(A_1 + A_2 + \dots + A_s), &
\end{array}$$

Demnach ist:

$$W(p_1) + W(p_2) + \dots + W(p_{s+1}) = W(q_1) + W(q_2) + \dots + W(q_{s+1}).$$

Analoge Beziehungen gelten natürlich andererseits auch in Bezug auf Ω' *und* W'.

V. Die den eindeutigen Functionen W und W' zugehörigen constanten Werthdifferenzen A, B und A', B' sind jederzeit unter einander verbunden durch die Relation:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} (A_\varkappa B_\varkappa' - A_\varkappa' B_\varkappa) = 0.$$

VI. Bezeichnet man die Werthdifferenzen der Function W, wie sich dieselben bei Sonderung des Reellen und Imaginären herausstellen, mit

$$A_\varkappa = \alpha_\varkappa + i\alpha_\varkappa',$$
$$B_\varkappa = \beta_\varkappa + i\beta_\varkappa',$$

so ist jederzeit

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} (\alpha_\varkappa \beta_\varkappa' - \alpha_\varkappa' \beta_\varkappa) = pos.$$

Analoges gilt natürlich auch für die Werthdifferenzen von W'.

VII. Die Differentialquotienten von $W(z)$ und $W'(z)$ sind dargestellt durch die beiden Functionen:

$$F = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 z + \ldots + \gamma_s z^{s-1}}{R}$$

und

$$F' = \frac{\gamma_1' + \gamma_2' z + \ldots + \gamma_s z^{s-1}}{R}.$$

Jeder von diesen Differentialquotienten ist demnach auf der geschlossenen Fläche $\mathfrak{R}$ überall eindeutig, und besitzt in je zwei über einander liegenden Puncten der Fläche entgegengesetzte Werthe.

Zwischen den Werthen, mit welchen die auf gemeinschaftlicher und willkührlicher Bahn fortlaufenden Integrale

$$\Omega(z) = \gamma + \int_{\infty}^{z} F\,dz, \qquad \Omega'(z) = \gamma' + \int_{\infty}^{z} F'\,dz$$

in irgend einem Puncte z eintreffen, und zwischen den Werthen, welche die eindeutigen Functionen $W(z)$, $W'(z)$ in jenem Puncte besitzen, finden sehr einfache Beziehungen statt. Zufolge eines früher hingestellten allgemeinen Satzes (S. 343) können die einen und die andern Werthe immer nur durch Vielfache der Differenzen A, B oder A', B' von einander verschieden sein.

Läuft nämlich die gemeinschaftliche Bahn der Integrale Ω, Ω' von dem gegebenen Puncte ε bis zu einem beliebigen andern Puncte z fort, und sind $l_1, l_2, \ldots l_s, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_s$ die Zahlen, welche angeben, wie oft diese Bahn die Ströme $a_1, a_2, \ldots a_s, b_1, b_2, \ldots b_s$ vom linken zum rechten Ufer überschreitet, ferner $r_1, r_2, \ldots r_s, \varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_s$ diejenigen Zahlen, welche angeben, wie oft die Bahn jene Ströme in entgegengesetzter Richtung überschreitet, so werden zwischen den Werthen $\Omega(z)$, $\Omega'(z)$, mit welchen die Integrale im Endpuncte der Bahn eintreffen, und zwischen den Werthen $W(z)$, $W'(z)$, welche die Functionen W, W' daselbst besitzen, folgende Relationen stattfinden:

$$\Omega(z) = W(z) + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} \left\{ (l_\varkappa - r_\varkappa) A_\varkappa + (\lambda_\varkappa - \varrho_\varkappa) B_\varkappa \right\},$$

$$\Omega'(z) = W'(z) + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} \left\{ (l_\varkappa - r_\varkappa) A'_\varkappa + (\lambda_\varkappa - \varrho_\varkappa) B'_\varkappa \right\}.$$

Die Zahlen l, r, λ, ϱ sind in beiden Formeln dieselben, weil die Bahn der Integrale Ω, Ω' eine gemeinschaftliche ist. Ausserdem ist zu bemerken, dass bei Aufstellung dieser Formeln die Frage, wie oft die Ströme c von jener Bahn überschritten worden sind, gar nicht zur Sprache kommt, weil die Werthdifferenzen der Functionen W, W' in den Strömen c sämmtlich $= 0$ sind.

Wir setzen zur Abkürzung:

$$l_\varkappa - r_\varkappa = m_\varkappa, \quad \lambda_\varkappa - \varrho_\varkappa = n_\varkappa,$$

und erhalten dann einen Satz, der, den vorhergehenden sich anschliessend, folgendermassen lautet:

VIII. Zwischen den Werthen $\Omega(z)$, $\Omega'(z)$, mit welchen die auf gemeinschaftlicher und völlig willkührlicher Bahn fortlaufenden Integrale Ω, Ω' in irgend einem Puncte z eintreffen, und zwischen den Werthen $W(z)$, $W'(z)$, welche die eindeutigen Functionen W, W' in jenem Punct besitzen, findet, falls man unter m, n irgend welche ganze Zahlen versteht, jederzeit folgender Zusammenhang statt:

$$\Omega(z) = W(z) + (m_1 A_1 + m_2 A_2 + \ldots + m_s A_s) +$$
$$+ (n_1 B_1 + n_2 B_2 + \ldots + n_s B_s),$$
$$\Omega'(z) = W'(z) + (m_1 A'_1 + m_2 A'_2 + \ldots + m_s A'_s) +$$
$$+ (n_1 B'_1 + n_2 B'_2 + \ldots + n_s B'_s).$$

Denkt man sich die gemeinschaftliche Bahn der Integrale Ω, Ω' auf der Fläche $\mathfrak{R}$ in einer unaufhörlich fortschreitenden, bald hiehin bald dorthin gehenden Bewegung begriffen, so werden die Zahlen m, n im Allgemeinen constant bleiben, und nur ab und zu, nämlich jedesmal wenn die Bahn einen der Ströme a, b überschreitet, eine sprungweise Aenderung erleiden.

Siebenter Abschnitt. Die bei Bildung der secundären Integrale $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_s$ noch unbestimmt gelassenen Coefficienten Γ werden definitiv festgesetzt; und zwar in solcher Weise, dass die mit diesen Integralen conjugirten eindeutigen Functionen $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_s$ hinsichtlich ihrer in den Strömen a, b, c vorhandenen Werthdifferenzen gewissen einfachen Anforderungen Genüge leisten.

Unter Ω, Ω' wurden irgend zwei unter den primären und secundären Integralen $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_s, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_s$, oder auch irgend zwei andere Integrale verstanden, die aus jenen auf lineäre Weise zusammengesetzt sind. Wir bezeichnen mit W_1, $W_2, \ldots W_s$, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_s$ diejenigen Functionen, welche zu den primären und secundären Integralen $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_s$, $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_s$ in derselben Beziehung stehen, wie die so eben untersuchten Functionen W, W' zu den Integralen Ω, Ω'.

Zufolge des II. Satzes werden dann $W_1, W_2, \ldots W_s$, $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_s$ innerhalb der Fläche $\mathfrak{R}'$ allenthalben eindeutig und stetig sein. Und zugleich werden die Werthe

(1) $$W_\sigma(p),\ W_\sigma(q),\ \mathbf{w}_\sigma(p),\ \mathbf{w}_\sigma(q),$$

welche jene Functionen in den Puncten p, q haben, identisch sein mit denjenigen Fundamentalwerthen

(2) $$\overline{\Omega}_\sigma(p),\ \overline{\Omega}_\sigma(q),\ \overline{\omega}_\sigma(p),\ \overline{\omega}_\sigma(q),$$

welche die primären und secundären Integrale in eben denselben Puncten besitzen; so dass es in Zukunft völlig gleichgültig sein wird, ob wir die eben genannten Fundamentalwerthe wie in (2) mit $\overline{\Omega}$, $\overline{\omega}$, oder wie in (1) mit W, $\mathbf{w}$ bezeichnen.

Zufolge des III. Satzes lassen sich die Werthdifferenzen, mit welchen die Functionen W, $\mathbf{w}$ in den Strömen a, b, c behaftet sind, folgendermassen darstellen:

$$
(3)\quad
\begin{array}{lll}
\text{längs } a_\varkappa: & W_\sigma(\lambda) - W_\sigma(\varrho) = A_\varkappa^{(\sigma)}, & \mathbf{w}_\sigma(\lambda) - \mathbf{w}_\sigma(\varrho) = a_\varkappa^{(\sigma)}, \\
\text{längs } b_\varkappa: & W_\sigma(\lambda) - W_\sigma(\varrho) = B_\varkappa^{(\sigma)}, & \mathbf{w}_\sigma(\lambda) - \mathbf{w}_\sigma(\varrho) = b_\varkappa^{(\sigma)}, \\
\text{längs } c_\varkappa: & W_\sigma(\lambda) - W_\sigma(\varrho) = 0, & \mathbf{w}_\sigma(\lambda) - \mathbf{w}_\sigma(\varrho) = 0.
\end{array}
$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots s,$$
$$\varkappa = 1, 2, \ldots s.$$

Die $A_\varkappa^{(\sigma)}$, $B_\varkappa^{(\sigma)}$, $a_\varkappa^{(\sigma)}$, $b_\varkappa^{(\sigma)}$ sind Constante, welche, wie sich aus dem IV. Satz ergiebt, zu den Fundamentalwerthen der primären und secundären Integrale, d. i. zu den Werthen

$$\overline{\Omega}_\sigma(p),\ \overline{\Omega}_\sigma(q),\quad \overline{\omega}_\sigma(p),\ \overline{\omega}_\sigma(q)$$

oder

$$W_\sigma(p),\ W_\sigma(q),\ \mathbf{w}_\sigma(p),\ \mathbf{w}_\sigma(q)$$

in folgender Beziehung stehen:

$$
(4)\quad
\begin{array}{l|l}
W_\sigma(q_1) - W_\sigma(p_1) = \tfrac{1}{2} A_1^{(\sigma)}, & W_\sigma(p_2) - W_\sigma(q_1) = \tfrac{1}{2}(B_2^{(\sigma)} - B_1^{(\sigma)}), \\
W_\sigma(q_2) - W_\sigma(p_2) = \tfrac{1}{2} A_2^{(\sigma)}, & W_\sigma(p_3) - W_\sigma(q_2) = \tfrac{1}{2}(B_3^{(\sigma)} - B_2^{(\sigma)}), \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
W_\sigma(q_{s-1}) - W_\sigma(p_{s-1}) = \tfrac{1}{2} A_{s-1}^{(\sigma)}, & W_\sigma(p_s) - W_\sigma(q_{s-1}) = \tfrac{1}{2}(B_s^{(\sigma)} - B_{s-1}^{(\sigma)}), \\
W_\sigma(q_s) - W_\sigma(p_s) = \tfrac{1}{2} A_s^{(\sigma)}, & W_\sigma(p_{s+1}) - W_\sigma(q_s) = -\tfrac{1}{2} B_s^{(\sigma)}, \\
W_\sigma(q_{s+1}) - W_\sigma(p_{s+1}) = & W_\sigma(p_1) - W_\sigma(q_{s+1}) = \tfrac{1}{2} B_1^{(\sigma)}\ ; \\
\quad = -\tfrac{1}{2}(A_1^{(\sigma)} + A_2^{()} + \ldots + A_s^{(\sigma)}), &
\end{array}
$$

$$
(5)\quad
\begin{array}{l|l}
\mathbf{w}_\sigma(q_1) - \mathbf{w}_\sigma(p_1) = \tfrac{1}{2} a_1^{(\sigma)}, & \mathbf{w}_\sigma(p_2) - \mathbf{w}_\sigma(q_1) = \tfrac{1}{2}(b_2^{(\sigma)} - b_1^{(\sigma)}), \\
\mathbf{w}_\sigma(q_2) - \mathbf{w}_\sigma(p_2) = \tfrac{1}{2} a_2^{(\sigma)}, & \mathbf{w}_\sigma(p_3) - \mathbf{w}_\sigma(q_2) = \tfrac{1}{2}(b_3^{(\sigma)} - b_2^{(\sigma)}), \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\mathbf{w}_\sigma(q_{s-1}) - \mathbf{w}_\sigma(p_{s-1}) = \tfrac{1}{2} a_{s-1}^{(\sigma)} & \mathbf{w}_\sigma(p_s) - \mathbf{w}_\sigma(q_{s-1}) = \tfrac{1}{2}(b_s^{(\sigma)} - b_{s-1}^{(\sigma)}), \\
\mathbf{w}_\sigma(q_s) - \mathbf{w}_\sigma(p_s) = \tfrac{1}{2} a_s^{(\sigma)}, & \mathbf{w}_\sigma(p_{s+1}) - \mathbf{w}_\sigma(q_s) = -\tfrac{1}{2} b_s^{(\sigma)}, \\
\mathbf{w}_\sigma(q_{s+1}) - \mathbf{w}_\sigma(p_{s+1}) = & \mathbf{w}_\sigma(p_1) - \mathbf{w}_\sigma(q_{s+1}) = \tfrac{1}{2} b_1^{(\sigma)}\ . \\
\quad = -\tfrac{1}{2}(a_1^{(\sigma)} + a_2^{(\sigma)} + \ldots + a_s^{(\sigma)}), &
\end{array}
$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots s.$$

Nun hingen die secundären Integrale mit den primären durch folgende Gleichungen zusammen:

$$(6)\qquad \omega_\sigma(z) = \Gamma_1^{(\sigma)}\,\Omega_1(z) + \ldots + \Gamma_s^{(\sigma)}\,\Omega_s(z).$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots s.$$

Laufen nämlich die Integrale Ω, ω von dem gegebenen Punct ε

auf ihrer willkührlichen und gemeinschaftlichen Bahn nach irgend welchem andern Puncte z, so werden die Werthe $\Omega(z)$, $\omega(z)$, mit welchen sie in diesem Puncte eintreffen, jederzeit durch die Gleichungen (6) verbunden sein. Denkt man sich die Bahn der Art gewählt, dass sie die Ströme a, b, c nirgends überschreitet, dass sie also ihrem ganzen Laufe nach innerhalb $\mathfrak{N}'$ bleibt, so sind die eben genannten Werthe $\Omega(z)$, $\omega(z)$, mit welchen die Integrale im Endpuncte der Bahn anlangen, nichts Anderes als diejenigen Werthe, welche die den Integralen conjugirten eindeutigen Functionen W, $\mathbf{w}$ in jenem Punct besitzen; also identisch mit $W(z)$, $\mathbf{w}(z)$. Somit ergeben sich folgende Gleichungen:

(7) $$\mathbf{w}_\sigma(z) = \Gamma_1^{(\sigma)} W_1(z) + \ldots + \Gamma_s^{(\sigma)} W_s(z).$$
$$\sigma = 1, 2 \ldots s.$$

Bildet man diese Gleichungen für den Fall, dass der Punct z mit $p_\varkappa$, und dann für den Fall, dass derselbe mit $q_\varkappa$ zusammenfällt, so ergiebt sich, wenn man die erstern Gleichungen von den letztern subtrahirt:

(8) $$\mathbf{w}_\sigma(q_\varkappa) - \mathbf{w}_\sigma(p_\varkappa) = \Gamma_1^{(\sigma)}(W_1(q_\varkappa) - W_1(p_\varkappa)) + \ldots$$
$$+ \Gamma_s^{(\sigma)}(W_s(q_\varkappa) - W_s(p_\varkappa)).$$

Sind nun $A_\varkappa^{(1)}$, $B_\varkappa^{(1)}$, $A_\varkappa^{(2)}$, $B_\varkappa^{(2)}$, ... $A_\varkappa^{(s)}$, $B_\varkappa^{(s)}$ und $a_\varkappa^{(1)}$, $b_\varkappa^{(1)}$, $a_\varkappa^{(2)}$, $b_\varkappa^{(2)}$, ... $a_\varkappa^{(s)}$, $b_\varkappa^{(s)}$ die constanten Werthdifferenzen, mit welchen die Functionen W_1, W_2, ... W_s und $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, ... $\mathbf{w}_s$ in den Strömen $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ behaftet sind, so ist nach (4) und (5):

$$W_\sigma(q_\varkappa) - W_\sigma(p_\varkappa) = \tfrac{1}{2} A_\varkappa^{(\sigma)},$$
$$\mathbf{w}_\sigma(q_\varkappa) - \mathbf{w}_\sigma(p_\varkappa) = \tfrac{1}{2} a_\varkappa^{(\sigma)},$$

vorausgesetzt, dass $\varkappa$ eine der Zahlen 1, 2, ... s vorstellt.

Und hiedurch geht die Gleichung (8) über in:

(9) $$a_\varkappa^{(\sigma)} = \Gamma_1^{(\sigma)} A_\varkappa^{(1)} + \Gamma_2^{(\sigma)} A_\varkappa^{(2)} + \ldots + \Gamma_s^{(\sigma)} A_\varkappa^{(s)}.$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots s,$$
$$\varkappa = 1, 2, \ldots s.$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich, wie leicht zu übersehen, aus den Gleichungen (7) auch ferner:

(10) $$b_\varkappa^{(\sigma)} = \Gamma_1^{(\sigma)} B_\varkappa^{(1)} + \Gamma_2^{(\sigma)} B_\varkappa^{(2)} + \ldots + \Gamma_s^{(\sigma)} B_\varkappa^{(s)}$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots s,$$
$$\varkappa = 1, 2, \ldots s.$$

Die Coefficienten Γ, durch welche wir von den primären zu den secundären Integralen übergingen, waren bisher völlig unbestimmt gelassen. Für die Behandlung unserer Probleme in der secundären Form, oder, wie wir uns kurz ausdrücken können, für die Umkehrungsprobleme der secundären Integrale ist es nun von wesentlichem Vortheil, wenn die diesen Integralen zugehörigen Differenzen $a_\varkappa^{(\sigma)}$ gewisse einfache Werthe erhalten.

Wir bestimmen zu diesem Ende die in ω_σ oder $\mathbf{w}_\sigma$ enthaltenen Coefficienten

$$\Gamma_1^{(\sigma)},\quad \Gamma_2^{(\sigma)},\ \ldots\ldots\ \Gamma_s^{(\sigma)}$$

der Art, dass die Grössen

$$a_1^{(\sigma)},\quad a_2^{(\sigma)},\ \ldots\ldots\ a_s^{(\sigma)}$$

mit Ausnahme von $a_\sigma^{(\sigma)}$ sämmtlich $= 0$, $a_\sigma^{(\sigma)}$ aber $= i\pi$ wird; also der Art, dass folgenden Gleichungen Genüge geschieht:

$$\begin{aligned}
0 &= \Gamma_1^{(\sigma)} A_1^{(1)} + \Gamma_2^{(\sigma)} A_1^{(2)} + \ldots + \Gamma_s^{(\sigma)} A_1^{(s)},\\
0 &= \Gamma_1^{(\sigma)} A_2^{(1)} + \Gamma_2^{(\sigma)} A_2^{(2)} + \ldots + \Gamma_s^{(\sigma)} A_2^{(s)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
i\pi &= \Gamma_1^{(\sigma)} A_\sigma^{(1)} + \Gamma_2^{(\sigma)} A_\sigma^{(2)} + \ldots + \Gamma_s^{(\sigma)} A_\sigma^{(s)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0 &= \Gamma_1^{(\sigma)} A_s^{(1)} + \Gamma_2^{(\sigma)} A_s^{(2)} + \ldots + \Gamma_s^{(\sigma)} A_s^{(s)}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$(11)\qquad \begin{aligned}
\Gamma_1^{(\sigma)} &= \frac{i\pi}{\Delta}\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial A_\sigma^{(1)}},\\
\Gamma_2^{(\sigma)} &= \frac{i\pi}{\Delta}\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial A_\sigma^{(2)}},\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\Gamma_s^{(\sigma)} &= \frac{i\pi}{\Delta}\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial A_\sigma^{(s)}},
\end{aligned}\qquad \sigma = 1,2,\ldots s$$

wo unter Δ folgende Determinante zu verstehen ist:

$$(12)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} & \ldots & A_1^{(s)}\\ A_2^{(1)} & A_2^{(2)} & \ldots & A_2^{(s)}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ A_s^{(1)} & A_s^{(2)} & \ldots & A_s^{(s)} \end{vmatrix}.$$

Bei Anwendung dieser Coefficienten (11) werden also unter den der Function $\mathbf{w}_1$ zugehörigen Differenzen $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots a_s^{(1)}$ alle mit Ausnahme von $a_1^{(1)}$, ferner unter den der Function $\mathbf{w}_2$ zugehörigen Differenzen $a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \ldots a_s^{(2)}$ alle mit Ausnahme von $a_2^{(2)}$ verschwinden, u. s. w. Die Werthe von $a_1^{(1)}, a_2^{(2)}, \ldots a_s^{(s)}$ aber werden $= i\pi$ werden. Von den beiden Quadraten:

$$(13)\qquad \begin{array}{llll} a_1^{(1)}, & a_2^{(1)}, & \ldots & a_s^{(1)}, \\ a_1^{(2)}, & a_2^{(2)}, & \ldots & a_s^{(2)}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{(s)}, & a_2^{(s)}, & \ldots & a_s^{(s)}, \end{array} \qquad \begin{array}{llll} b_1^{(1)}, & b_2^{(1)}, & \ldots & b_s^{(1)}, \\ b_1^{(2)}, & b_2^{(2)}, & \ldots & b_s^{(2)}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_1^{(s)}, & b_2^{(s)}, & \ldots & b_s^{(s)} \end{array}$$

kann demnach das erstere, weil $a_\varkappa^{(\lambda)} = a_\lambda^{(\varkappa)} = 0$ ist, ein in Bezug auf seine Diagonale symmetrisches genannt werden. Es lässt sich leicht zeigen, dass dieselbe Eigenschaft auch dem zweiten Quadrate zukommt.

Wir betrachten zu diesem Zweck die beiden Integrale ω_1, ω_2, die ihnen conjugirten eindeutigen Functionen w_1, w_2, und die den letztern zugehörigen Werthdifferenzen $a_\varkappa^{(1)}$, $b_\varkappa^{(1)}$, $a_\varkappa^{(2)}$, $b_\varkappa^{(2)}$. Zufolge des V. Satzes muss zwischen diesen Differenzen jederzeit die Relation stattfinden:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} (a_\varkappa^{(1)}\, b_\varkappa^{(2)} - a_\varkappa^{(2)}\, b_\varkappa^{(1)}) = 0.$$

Da nun $a_1^{(1)} = i\pi$, $a_2^{(2)}$ ebenfalls $= i\pi$, alle andern Grössen $a_\varkappa^{(1)}$ und $a_\varkappa^{(2)}$ hingegen $= 0$ sind, so geht diese Relation sofort über in:

$$i\pi \,.\, b_1^{(2)} - i\pi \,.\, b_2^{(1)} = 0,$$

d. i. in:

$$b_1^{(2)} = b_2^{(1)}.$$

Ebenso wird sich nachweisen lassen, dass $b_1^{(3)} = b_3^{(1)}$, und allgemein, dass $b_\varkappa^{(\lambda)} = b_\lambda^{(\varkappa)}$ ist.

Nimmt man also für die Coefficienten $\Gamma_1^{(\sigma)}$, $\Gamma_2^{(\sigma)}$, ... $\Gamma_s^{(\sigma)}$ die Werthe (11), so wird, was die Quadrate (13) anbelangt, nicht nur $a_\varkappa^{(\lambda)} = a_\lambda^{(\varkappa)}$, sondern gleichzeitig auch $b_\varkappa^{(\lambda)} = b_\lambda^{(\varkappa)}$. Dass allerdings jedes $a_\varkappa^{(\lambda)}$, jenachdem $\varkappa$ und λ gleich oder ungleich sind, den Werth $i\pi$ oder 0 besitzt, wird eine Eigenschaft sein, die den Grössen $b_\varkappa^{(\lambda)}$ im Allgemeinen **nicht** zukommt.

Es ist hier am Orte, noch auf eine andere Eigenthümlichkeit der Differenzen $a_\varkappa^{(\lambda)}$ und $b_\varkappa^{(\lambda)}$ aufmerksam zu machen, die für die Folge von grossem Gewicht ist.

Wir bilden das Integral:

$$(14)\qquad \Omega(z) = n_1\, \omega_1(z) + n_2\, \omega_2(z) + \ldots + n_s\, \omega_s(z),$$

und die damit conjugirte eindeutige Function:

$$(15)\qquad W(z) = n_1\, \mathrm{w}_1(z) + n_2\, \mathrm{w}_2(z) + \ldots + n_s\, \mathrm{w}_s(z),$$

wo die n vorläufig ganz beliebige constante Coefficienten vorstellen sollen. Sind λ und ϱ irgend zwei auf dem linken und rechten Ufer des Stromes $a_\varkappa$ einander gegenüberliegende Puncte, so ergiebt sich, wenn man in (15) für z einmal den Punct λ, sodann den Punct ϱ nimmt, und beide so erhaltenen Gleichungen von einander subtrahirt:

$$W(\lambda) - W(\varrho) = n_1 (\mathbf{w}_1(\lambda) - \mathbf{w}_1(\varrho)) + \dots + n_s (\mathbf{w}_s(\lambda) - \mathbf{w}_s(\varrho)),$$

also, weil wir es mit dem Strome $a_\varkappa$ zu thun haben, und die Differenz $\mathbf{w}_\sigma(\lambda) - \mathbf{w}_\sigma(\varrho)$ längs dieses Stromes gleich $a_\varkappa^{(\sigma)}$ ist:

$$W(\lambda) - W(\varrho) = n_1\, a_\varkappa^{(1)} + n_2\, a_\varkappa^{(2)} + \dots + n_s\, a_\varkappa^{(s)}.$$

Ebenso ergiebt sich, dass längs des Stromes $b_\varkappa$

$$W(\lambda) - W(\varrho) = n_1\, b_\varkappa^{(1)} + n_2\, b_\varkappa^{(2)} + \dots + n_s\, b_\varkappa^{(s)}$$

ist. Bezeichnen wir daher die Werthdifferenzen, welche die hier betrachtete Function W in den Strömen a, b besitzt,

$$\text{längs } a_\varkappa \text{ mit: } W(\lambda) - W(\varrho) = \alpha_\varkappa + i\alpha'_\varkappa,$$
$$\text{längs } b_\varkappa \text{ mit: } W(\lambda) - W(\varrho) = \beta_\varkappa + i\beta'_\varkappa,$$

so haben wir:

$$\alpha_\varkappa + i\alpha'_\varkappa = n_1\, a_\varkappa^{(1)} + n_2\, a_\varkappa^{(2)} + \dots + n_s\, a_\varkappa^{(s)},$$
$$\beta_\varkappa + i\beta'_\varkappa = n_1\, b_\varkappa^{(1)} + n_2\, b_\varkappa^{(2)} + \dots + n_s\, b_\varkappa^{(s)},$$

oder, weil $a_\varkappa^{(\varkappa)}$ den Werth $i\pi$, und alle übrigen unter den Grössen $a_\varkappa^{(1)}, a_\varkappa^{(2)}, \dots a_\varkappa^{(s)}$ den Werth 0 besitzen:

$$\alpha_\varkappa + i\alpha'_\varkappa = n_\varkappa\, \pi i,$$
$$\beta_\varkappa + i\beta'_\varkappa = n_1\, b_\varkappa^{(1)} + n_2\, b_\varkappa^{(2)} + \dots + n_s\, b_\varkappa^{(s)}.$$

Wir wollen nun voraussetzen, die Coefficienten n wären sämmtlich reell. Alsdann ergiebt sich:

$$\alpha_\varkappa = 0,$$
$$\alpha'_\varkappa = n_\varkappa\, \pi,$$

und ferner, wenn wir die reellen Theile von $b_\varkappa^{(1)}, b_\varkappa^{(2)}, \dots b_\varkappa^{(s)}$ für den Augenblick mit $r_\varkappa^{(1)}, r_\varkappa^{(2)}, \dots r_\varkappa^{(s)}$ bezeichnen:

$$\beta_\varkappa = n_1\, r_\varkappa^{(1)} + n_2\, r_\varkappa^{(2)} + \dots + n_s\, r_\varkappa^{(s)}.$$

Zufolge des VI. Satzes muss nun jederzeit

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} (\alpha_\varkappa\, \beta'_\varkappa - \alpha'_\varkappa\, \beta_\varkappa) = pos.$$

sein. Substituirt man hier die für $\alpha_\varkappa$, $\alpha'_\varkappa$, $\beta_\varkappa$ so eben gefundenen Werthe, so ergiebt sich:

$$-\pi \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} n_\varkappa (n_1\, r_\varkappa^{(1)} + n_2\, r_\varkappa^{(2)} + \ldots + n_s\, r_\varkappa^{(s)}) = pos.,$$

d. i.

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} n_\varkappa (n_1\, r_\varkappa^{(1)} + n_2\, r_\varkappa^{(2)} + \ldots + n_s\, r_\varkappa^{(s)}) = neg.,$$

oder, was dasselbe ist:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} n_\varkappa\, n_\lambda\, r_\varkappa^{(\lambda)} = neg.$$

Die hier auf der linken Seite stehende Summe ist aber nichts Anderes als der reelle Theil des Ausdruckes

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} n_\varkappa\, n_\lambda\, b_\varkappa^{(\lambda)}. \tag{16}$$

Die Differenzen $b_\varkappa^{(\lambda)}$ sind also der Art, dass der reelle Theil dieses Ausdrucks (16) jederzeit einen negativen Werth besitzen wird, sobald die darin enthaltenen Grössen $n_1, n_2, \ldots n_s$ sämmtlich reell sind,

Die Coefficienten

$$\Gamma_1^{(\sigma)}, \quad \Gamma_2^{(\sigma)}, \quad \ldots \; \Gamma_s^{(\sigma)}$$

sind in (11) vollständig bestimmt worden. Damit ist aber zugleich auch die Bildungsweise der secundären Integrale vollständig festgesetzt. Wir können uns darüber, indem wir $a_{\varkappa\lambda}$ statt $a_\varkappa^{(\lambda)}$ oder $a_\lambda^{(\varkappa)}$, und $b_{\varkappa\lambda}$ statt $b_\varkappa^{(\lambda)}$ oder $b_\lambda^{(\varkappa)}$ setzen, in folgender Weise aussprechen:

Bildungsweise der secundären Integrale. Aus den Fundamentalwerthen der primären Integrale, d. i. *aus den Werthen*

$$\overline{\Omega}_\sigma(p), \quad \overline{\Omega}_\sigma(q) \quad oder \quad W_\sigma(p), \quad W_\sigma(q)$$

setze man nach einander folgende Constanten zusammen:

$$\begin{array}{ll|l}
 & W_\sigma(q_1) - W_\sigma(p_1) = \tfrac12 A_1^{(\sigma)}, & W_\sigma(p_2) - W_\sigma(q_1) = \tfrac12(B_2^{(\sigma)} - B_1^{(\sigma)}) \\
 & W_\sigma(q_2) - W_\sigma(p_2) = \tfrac12 A_2^{(\sigma)}, & W_\sigma(p_3) - W_\sigma(q_2) = \tfrac12(B_3^{(\sigma)} - B_2^{(\sigma)}) \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(1) & W_\sigma(q_{s-1}) - W_\sigma(p_{s-1}) = \tfrac12 A_{s-1}^{(\sigma)}, & W_\sigma(p_s) - W_\sigma(q_{s-1}) = \tfrac12(B_s^{(\sigma)} - B_{s-1}^{(\sigma)}) \\
 & W_\sigma(q_s) - W_\sigma(p_s) = \tfrac12 A_s^{(\sigma)}, & W_\sigma(p_{s+1}) - W_\sigma(q_s) = \quad -\tfrac12 B_s^{(\sigma)} \\
 & W_\sigma(q_{s+1}) - W_\sigma(p_{s+1}) = & W_\sigma(p_1) - W_\sigma(q_{s+1}) = \tfrac12 B_1^{(\sigma)}\,; \\
 & \quad = -\tfrac12 (A_1^{(\sigma)} + A_2^{(\sigma)} + \ldots + A_s^{(\sigma)}), &
\end{array}$$

$$\sigma = 1, 2, \ldots s.$$

ferner die Constanten:

$$(2) \qquad \varDelta = \begin{vmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)}, & \ldots & A_1^{(s)} \\ A_2^{(1)} & A_2^{(2)}, & \ldots & A_2^{(s)} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ A_s^{(1)} & A_s^{(2)}, & \ldots & A_s^{(s)} \end{vmatrix},$$

$$(3) \qquad \varGamma_\tau^{(\sigma)} = \frac{i\pi}{\varDelta} \cdot \frac{\partial \varDelta}{\partial A_\sigma^{(\tau)}};$$

$$(4) \qquad a_{\varkappa\sigma} = \varGamma_1^{(\sigma)} A_\varkappa^{(1)} + \varGamma_2^{(\sigma)} A_\varkappa^{(2)} + \ldots + \varGamma_s^{(\sigma)} A_\varkappa^{(s)},$$

$$(5) \qquad b_{\varkappa\sigma} = \varGamma_1^{(\sigma)} B_\varkappa^{(1)} + \varGamma_2^{(\sigma)} B_\varkappa^{(2)} + \ldots + \varGamma_s^{(\sigma)} B_\varkappa^{(s)},$$

$$\sigma, \tau, \varkappa = 1, 2, \ldots s.$$

Alsdann wird

$$a_{\varkappa\sigma} = a_{\sigma\varkappa},$$
$$b_{\varkappa\sigma} = b_{\sigma\varkappa}$$

sein; ferner wird jede der Constanten $a_{\varkappa\sigma}$, je nachdem $\varkappa$, σ gleich oder ungleich sind, den Werth $i\pi$ oder den Werth 0 besitzen; und endlich werden die Constanten $b_{\varkappa\sigma}$ der Art beschaffen sein, dass der aus ihnen mit Zuziehung irgend welcher reellen Grössen $n_1, n_2, \ldots n_s$ zusammengesetzte Ausdruck

$$b_{11}\, n_1^2 + 2 b_{12}\, n_1\, n_2 + \ldots + b_{ss}\, n_s^2$$

jederzeit einen negativen reellen Theil besitzt.

Bei der Bildung der secundären Integrale benutzen wir nun die so eben construirten Constanten $\varGamma$ als Coefficienten, setzen also:

$$(6) \qquad \omega_\sigma(z) = \varGamma_1^{(\sigma)}\, \Omega_1(z) + \varGamma_2^{(\sigma)}\, \Omega_2(z) + \ldots + \varGamma_s^{(\sigma)}\, \Omega_s(z).$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots s.$$

Die den secundären Integralen conjugirten Functionen. Die eindeutigen Functionen $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_s$ und $W_1, W_2, \ldots W_s$, welche den secundären und den primären Integralen conjugirt sind, werden dann durch ganz analoge Gleichungen mit einander verbunden sein, nämlich durch folgende:

$$(7) \qquad \mathbf{w}_\sigma(z) = \varGamma_1^{(\sigma)}\, W_1(z) + \varGamma_2^{(\sigma)}\, W_2(z) + \ldots + \varGamma_s^{(\sigma)}\, W_s(z).$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots s.$$

Die vorhin construirten Constanten $a_{\varkappa\sigma}$, $b_{\varkappa\sigma}$ sind nichts Anderes als die Werthdifferenzen der Functionen $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_s$ in den Strömen a, b, c. Es ist nämlich, was die Function $\mathbf{w}_\sigma$ anbelangt:

$$
(8) \qquad \begin{aligned}
&\textit{längs } a_\varkappa: \quad \mathbf{w}_\sigma(\lambda) - \mathbf{w}_\sigma(\varrho) = a_{\sigma\varkappa},\\
&\textit{längs } b_\varkappa: \quad \mathbf{w}_\sigma(\lambda) - \mathbf{w}_\sigma(\varrho) = b_{\sigma\varkappa},\\
&\textit{längs } c_\varkappa: \quad \mathbf{w}_\sigma(\lambda) - \mathbf{w}_\sigma(\varrho) = 0.
\end{aligned}
$$
$$\sigma, \varkappa = 1, 2, \ldots s.$$

Demgemäss finden zwischen den Fundamentalwerthen der secundären Integrale, d. i. zwischen den Werthen $\overline{\boldsymbol{\omega}}_\sigma(p)$, $\overline{\boldsymbol{\omega}}_\sigma(q)$ *oder* $\mathbf{w}_\sigma(p)$, $\mathbf{w}_\sigma(q)$ *und zwischen diesen Constanten* $a_{\varkappa\sigma}$, $b_{\varkappa\sigma}$ *folgende Gleichungen statt:*

$$
(9) \qquad \begin{array}{l|l}
\mathbf{w}_\sigma(q_1) - \mathbf{w}_\sigma(p_1) = \frac{1}{2} a_{\sigma 1}, & \mathbf{w}_\sigma(p_2) - \mathbf{w}_\sigma(q_1) = \frac{1}{2}(b_{\sigma 2} - b_{\sigma 1}),\\
\mathbf{w}_\sigma(q_2) - \mathbf{w}_\sigma(p_2) = \frac{1}{2} a_{\sigma 2}, & \mathbf{w}_\sigma(p_3) - \mathbf{w}_\sigma(q_2) = \frac{1}{2}(b_{\sigma 3} - b_{\sigma 2}),\\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{w}_\sigma(q_{s-1}) - \mathbf{w}_\sigma(p_{s-1}) = \frac{1}{2} a_{\sigma s-1}, & \mathbf{w}_\sigma(p_s) - \mathbf{w}_\sigma(q_{s-1}) = \frac{1}{2}(b_{\sigma s} - b_{\sigma s-1}),\\
\mathbf{w}_\sigma(q_s) - \mathbf{w}_\sigma(p_s) = \frac{1}{2} a_{\sigma s}, & \mathbf{w}_\sigma(p_{s+1}) - \mathbf{w}_\sigma(q_s) = \qquad - \frac{1}{2} b_{\sigma s},\\
\mathbf{w}_\sigma(q_{s+1}) - \mathbf{w}_\sigma(p_{s+1}) = & \mathbf{w}_\sigma(p_1) - \mathbf{w}_\sigma(q_{s+1}) = \frac{1}{2} b_{\sigma 1}.\\
\quad = -\frac{1}{2}(a_{\sigma 1} + a_{\sigma 2} + \ldots + a_{\sigma s}) &
\end{array}
$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots s.$$

Diesen Gleichungen kann man, wie leicht zu übersehen ist, auch folgende Gestalt geben:

$$
(10) \qquad \begin{aligned}
&\mathbf{w}_\sigma(p_1) - \mathbf{w}_\sigma(p_1) = \tfrac{1}{2}(b_{\sigma 1} - b_{\sigma 1}),\\
&\mathbf{w}_\sigma(p_2) - \mathbf{w}_\sigma(p_1) = \tfrac{1}{2}(b_{\sigma 2} - b_{\sigma 1} + a_{\sigma 1}),\\
&\mathbf{w}_\sigma(p_3) - \mathbf{w}_\sigma(p_1) = \tfrac{1}{2}(b_{\sigma 3} - b_{\sigma 1} + a_{\sigma 1} + a_{\sigma 2}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mathbf{w}_\sigma(p_s) - \mathbf{w}_\sigma(p_1) = \tfrac{1}{2}(b_{\sigma s} - b_{\sigma 1} + a_{\sigma 1} + a_{\sigma 2} + \ldots + a_{\sigma s-1}),\\
&\mathbf{w}_\sigma(p_{s+1}) - \mathbf{w}_\sigma(p_1) = \tfrac{1}{2}(\qquad - b_{\sigma 1} + a_{\sigma 1} + a_{\sigma 2} + \ldots + a_{\sigma s-1} + a_{\sigma s}),
\end{aligned}
$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots s.$$

$$
(11) \qquad \begin{aligned}
&\mathbf{w}_\sigma(q_1) - \mathbf{w}_\sigma(p_1) = \tfrac{1}{2}(b_{\sigma 1} - b_{\sigma 1} + a_{\sigma 1}),\\
&\mathbf{w}_\sigma(q_2) - \mathbf{w}_\sigma(p_1) = \tfrac{1}{2}(b_{\sigma 2} - b_{\sigma 1} + a_{\sigma 1} + a_{\sigma 2}),\\
&\mathbf{w}_\sigma(q_3) - \mathbf{w}_\sigma(p_1) = \tfrac{1}{2}(b_{\sigma 3} - b_{\sigma 1} + a_{\sigma 1} + a_{\sigma 2} + a_{\sigma 3}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mathbf{w}_\sigma(q_s) - \mathbf{w}_\sigma(p_1) = \tfrac{1}{2}(b_{\sigma s} - b_{\sigma 1} + a_{\sigma 1} + a_{\sigma 2} + \ldots + a_{\sigma s}),\\
&\mathbf{w}_\sigma(q_{s+1}) - \mathbf{w}_\sigma(p_1) = \tfrac{1}{2}(\qquad - b_{\sigma 1}).
\end{aligned}
$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots s.$$

Beachtet man, dass $a_{\sigma\varkappa}$, *jenachdem* σ, $\varkappa$ *gleich oder ungleich sind, den Werth* $i\pi$ *oder* 0 *besitzt, dass mithin die Summe*

$$a_{\sigma 1} + a_{\sigma 2} + \ldots + a_{\sigma s}$$

jederzeit $= i\pi$ *sein wird, so kann die letzte der Gleichungen* (10) *auch so geschrieben werden:*

(12) $$\mathrm{w}_\sigma(p_{s+1}) - \mathrm{w}_\sigma(p_1) = \tfrac{1}{2}\,(i\pi - b_{\sigma 1})$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots s.$$

Ferner ergiebt sich, wenn man in den s ersten der Gleichungen (10) *für die Zahl σ specielle Werthe nimmt, und dabei wiederum die eigenthümlichen Werthe von $a_{\sigma\varkappa}$ berücksichtigt:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{w}_1(p_1) - \mathrm{w}_1(p_1) &= \tfrac{1}{2}\,(b_{11} - b_{11}),\\
\mathrm{w}_2(p_2) - \mathrm{w}_2(p_1) &= \tfrac{1}{2}\,(b_{22} - b_{21}),\\
\mathrm{w}_3(p_3) - \mathrm{w}_3(p_1) &= \tfrac{1}{2}\,(b_{33} - b_{31}),\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\\
\mathrm{w}_s(p_s) - \mathrm{w}_s(p_1) &= \tfrac{1}{2}\,(b_{ss} - b_{s1}).
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir allgemein:

(13) $$\mathrm{w}_\sigma(p_\sigma) - \mathrm{w}_\sigma(p_1) = \tfrac{1}{2}\,(b_{\sigma\sigma} - b_{\sigma 1}).$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots s.$$

Endlich ergiebt sich durch Subtraction von (12) *und* (13):

(14) $$\mathrm{w}_\sigma(p_\sigma) - \mathrm{w}_\sigma(p_{s+1}) = \tfrac{1}{2}\,(b_{\sigma\sigma} - i\pi)$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots s.$$

Ausserdem ist noch zu bemerken, dass die Differentialquotienten:

$$\frac{d\,\mathrm{w}_1(z)}{dz},\quad \frac{d\,\mathrm{w}_2(z)}{dz},\ \ldots\ \frac{d\,\mathrm{w}_s(z)}{dz}$$

Functionen sind, welche auf der ursprünglichen Fläche $\mathfrak{R}$ allenthalben eindeutig bleiben, und welche daselbst in je zwei übereinanderliegenden Puncten entgegengesetzte Werthe besitzen.

Die letzte Bemerkung ist eine unmittelbare Folge des VII. Satzes Seite 430.

Elfte Vorlesung.

Die von den Abel'schen Integralen abhängende ϑ-Reihe.

Erster Abschnitt. Die Functionen $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots \mathrm{w}_s$ werden in Verbindung mit willkührlichen Constanten $g_1, g_2, \ldots g_s$ zu Argumenten einer s fach unendlichen ϑ-Reihe genommen. Der so entstehende Ausdruck $\vartheta(\mathrm{w}_1 - g_1, \mathrm{w}_2 - g_2, \ldots \mathrm{w}_s - g_s)$ ist dann eine von z abhängende Function, welche, ebenso wie $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots \mathrm{w}_s$ selber, innerhalb der Fläche $\mathfrak{R}'$ überall eindeutig und stetig bleibt.

Ist irgend eine Function φ bei ihrer Ausbreitung auf der von uns construirten Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ allenthalben eindeutig, ist also jeder Punct der Fläche immer nur mit je einem Werthe der Function belastet, so wird jedem Puncte der Fläche auch immer nur ein Werth von e^{φ} entsprechen; folglich wird die Exponentialgrösse e^{φ} eine Function sein, welche bei ihrer Ausbreitung auf jener Fläche ebenfalls allenthalben eindeutig ist. Ueberall, wo φ endlich ist, wird auch e^{φ} einen endlichen Werth besitzen; und überall, wo φ stetig ist, wird auch e^{φ} stetig sein.

Die den Integralen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_s$ conjugirten Functionen $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots \mathrm{w}_s$ sind, wie wir gesehen haben, auf der Fläche $\mathfrak{R}$ allenthalben eindeutig, und mit Ausnahme der Ströme a, b daselbst auch überall stetig. Gleiches wird demnach von den Exponentialgrössen $e^{\mathrm{w}_1}, e^{\mathrm{w}_2}, \ldots e^{\mathrm{w}_s}$ gelten, und, falls wir unter

K_0, K_1, K_2, . . , K_s irgend welche Constanten verstehen, auch von der Exponentialgrösse

$$\eta = e^{K_0 + K_1\,\mathbf{w}_1 + K_2\,\mathbf{w}_2 + \ldots + K_s\,\mathbf{w}_s}.$$

Um die Unstetigkeiten, mit welchen diese Exponentialgrössen in den Strömen a, b behaftet sind, näher zu bestimmen, betrachten wir irgend einen unter jenen Strömen, etwa den Strom $a_\varkappa$. Sind λ und ϱ irgend zwei auf dem linken und rechten Ufer von $a_\varkappa$ einander gegenüberliegende Puncte, und sind ferner $\mathbf{w}_1{}^\lambda$, $\mathbf{w}_2{}^\lambda$, . . . $\mathbf{w}_s{}^\lambda$, η^λ und $\mathbf{w}_1{}^\varrho$, $\mathbf{w}_2{}^\varrho$, . . . $\mathbf{w}_s{}^\varrho$, η^ϱ die in jenen Puncten vorhandenen Werthe von $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, . . . $\mathbf{w}_s$, η, so wird

$$\eta^\lambda = e^{K_0 + K_1\,\mathbf{w}_1{}^\lambda + K_2\,\mathbf{w}_2{}^\lambda + \ldots + K_s\,\mathbf{w}_s{}^\lambda},$$

$$\eta^\varrho = e^{K_0 + K_1\,\mathbf{w}_1{}^\varrho + K_2\,\mathbf{w}_2{}^\varrho + \ldots + K_s\,\mathbf{w}_s{}^\varrho}$$

sein. Hieraus folgt durch Division:

$$\frac{\eta^\lambda}{\eta^\varrho} = e^{K_1(\mathbf{w}_1{}^\lambda - \mathbf{w}_1{}^\varrho) + K_2(\mathbf{w}_2{}^\lambda - \mathbf{w}_2{}^\varrho) + \ldots + K_s(\mathbf{w}_s{}^\lambda - \mathbf{w}_s{}^\varrho)};$$

oder, wenn man beachtet, dass die Functionen $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, . . . $\mathbf{w}_s$ in dem hier betrachteten Strome $a_\varkappa$ mit den Werthdifferenzen $a_{1\varkappa}$, $a_{2\varkappa}$, . . . $a_{s\varkappa}$ behaftet sind:

$$\frac{\eta^\lambda}{\eta^\varrho} = e^{K_1\,a_{1\varkappa} + K_2\,a_{2\varkappa} + \ldots + K_s\,a_{s\varkappa}}.$$

Der Quotient $\frac{\eta^\lambda}{\eta^\varrho}$ hat also längs $a_\varkappa$ überall ein und denselben Werth. Ebenso wie jede der Functionen $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, . . . $\mathbf{w}_s$ längs $a_\varkappa$ mit einer constanten Werthdifferenz behaftet ist, ebenso ist die Function η längs $a_\varkappa$ mit einem constanten Werthquotienten behaftet. Für die Ströme b wird sich natürlich ganz Aehnliches ergeben; für den Strom $b_\varkappa$ z. B. wird man erhalten:

$$\frac{\eta^\lambda}{\eta^\varrho} = e^{K_1\,b_{1\varkappa} + K_2\,b_{2\varkappa} + \ldots + K_s\,b_{s\varkappa}}.$$

Versteht man also unter K_0, K_1, K_2, . . . K_s *beliebige Constanten, so repräsentirt die Exponentialgrösse*

$$\eta = e^{K_0 + K_1\,\mathbf{w}_1 + K_2\,\mathbf{w}_2 + \ldots + K_s\,\mathbf{w}_s}$$

eine von z abhängende Function, welche — ebenso wie $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, . . . $\mathbf{w}_s$ *selber — auf der Riemann'schen Fläche* $\mathfrak{R}$ *mit Ausnahme der Ströme a, b allenthalben eindeutig und stetig bleibt. Zugleich ist* *längs* $a_\varkappa$: $\mathbf{w}^\lambda_\sigma - \mathbf{w}^\varrho_\sigma = a_{\sigma\varkappa}$, $\quad \dfrac{\eta^\lambda}{\eta^\varrho} = e^{K_1 a_{1\varkappa} + K_2 a_{2\varkappa} + \ldots + K_s a_{s\varkappa}}$

längs $b_\varkappa$: $\mathbf{w}^\lambda_\sigma - \mathbf{w}^\varrho_\sigma = b_{\sigma\varkappa}$, $\quad \dfrac{\eta^\lambda}{\eta^\varrho} = e^{K_1 b_{1\varkappa} + K_2 b_{2\varkappa} + \ldots + K_s b_{s\varkappa}}$.

Der hier auftrende Exponent:

$$K_1\, a_{1\varkappa} + K_2\, a_{2\varkappa} + \ldots + K_s\, a_{s\varkappa}$$

ist übrigens, wenn man auf die eigenthümlichen Werthe der Grössen $a_{\sigma\varkappa}$ *achtet, gleich* $K_\varkappa \,.\, \pi i$.

Wir verallgemeinern gegenwärtig unsere Betrachtung; an Stelle von η nehmen wir folgende Exponentialgrösse:

$$H = e^{(b_{11}\, n_1^2 + 2\, b_{12} n_1\, n_2 + \ldots + b_{ss}\, n_s^2) + 2(\mathbf{w}_1\, n_1 + \mathbf{w}_2 n_2 + \ldots + \mathbf{w}_s\, n_s)}.$$

Hier sollen b_{11}, b_{12}, ... b_{ss} diejenigen Constanten sein, durch welche die Werthdifferenzen der Functionen $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, ... $\mathbf{w}_s$ in den Strömen b dargestellt werden; und n_1, n_2, ... n_s beliebig gewählte positive oder negative ganze Zahlen. Solcher Exponentialgrössen H können wir unendlich viele aufstellen, indem wir für die Zahlen n_1, n_2, ... n_s andere und andere Werthsysteme nehmen; wir denken uns die Summe all' dieser unendlich vielen Exponentialgrössen gebildet, und bezeichnen dieselbe mit S, setzen also

$$S = \sum_n H,$$

wo die Summation $\sum\limits_n$ über jede der Zahlen n_1, n_2, ... n_s von $-\infty$ bis $+\infty$ hinerstreckt ist.

Beachten wir, dass die Functionen $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, ... $\mathbf{w}_s$ auf der Fläche $\mathfrak{R}$ nirgends unendlich grosse Werthe besitzen*), und beachten wir ferner, dass der reelle Theil des Ausdrucks:

$$b_{11}\, n_1^2 + 2\, b_{12}\, n_1\, n_2 + \ldots + b_{ss}\, n_s^2,$$

wie wir kürzlich (Seite 439) gefunden haben, jederzeit negativ ist, so können wir auf die hier gebildete Summe S sofort einen

*) Es ist nach unserer Definition $\mathbf{w}_\sigma$ der Werth eines gewissen Integrales $c_\sigma + \int\limits_{8}^{z} f_\sigma dz$, welches in seiner Bewegung auf die einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{R}'$ beschränkt ist. Das in diesem Integral enthaltene Differential $f_\sigma dz$ ist auf der Fläche $\mathfrak{R}$ allenthalben eindeutig und stetig; daraus folgt, dass der Werth des Integrales allenthalben endlich bleibt.

früher (Seite 29) erwähnten Satz in Anwendung bringen. Jenem Satz zufolge wird der Werth von S jederzeit ein völlig bestimmter und endlicher sein. Gleichzeitig wissen wir, dass die Exponentialgrössen H, aus welchen S zusammengesetzt ist, von z abhängende Functionen sind, welche — ebenso wie die zuvor betrachtete Exponentialgrösse η — auf der Fläche $\mathfrak{R}$ allenthalben eindeutig, und mit Ausnahme der Ströme a, b daselbst auch allenthalben stetig sind.

Denken wir uns also jeden Punct der Fläche $\mathfrak{R}$ mit dem ihm zugehörigen Werthe von S belastet, so wissen wir einerseits, dass all' diese Werthe völlig bestimmt und endlich sind, andererseits, dass dieselben durch eine Superposition unendlich vieler Grössen H entstanden sind, von denen jede, für sich allein betrachtet, mit Ausnahme der Ströme a, b auf $\mathfrak{R}$ allenthalben stetig ist. Daraus aber folgt, dass der Werth von S auf der Fläche $\mathfrak{R}$ nicht nur überall endlich und völlig bestimmt, sondern mit Ausnahme der eben erwähnten Ströme a, b daselbst auch überall stetig sein muss.

Offenbar wird in unserer Betrachtung keinerlei Aenderung eintreten, wenn wir die in S und H enthaltenen Functionen $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots \mathrm{w}_s$ mit $\mathrm{w}_1 - g_1, \mathrm{w}_2 - g_2, \ldots \mathrm{w}_s - g_s$ vertauschen, vorausgesetzt, dass wir unter $g_1, g_2, \ldots g_s$ irgend welche Constanten verstehen. Folglich:

Versteht man unter $b_{11}, b_{12}, \ldots b_{ss}$ die constanten Werthdifferenzen, mit welchen die Functionen $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots \mathrm{w}_s$ in den Strömen b behaftet sind, und bezeichnet die von diesen Constanten und von irgend welchen andern Argumenten $U_1, U_2, \ldots U_s$ abhängende s fach unendliche Reihe

$$\sum_n e^{(b_{11}n_1^2 + 2\,b_{12}\,n_1 n_2 + \ldots + b_{ss}\,n_s^2) + 2\,(n_1 U_1 + n_2 U_2 + \ldots + n_s U_s)}$$

in Zukunft mit:

$$\vartheta(U_1,\ U_2,\ \ldots\ U_s),$$

so wird $\vartheta(U_1, U_2, \ldots U_s)$, so lange keines der Argumente U_1, $U_2, \ldots U_s$ unendlich gross ist, jederzeit einen völlig bestimmten und endlichen Werth besitzen.

Vertauscht man ferner die Argumente $U_1, U_2, \ldots U_s$ mit mit den von z abhängenden Functionen $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots \mathrm{w}_s$, oder auch, falls $g_1, g_2, \ldots g_s$ irgend welche Constanten vorstellen, mit

$\mathbf{w}_1 - g_1, \mathbf{w}_2 - g_2, \ldots \mathbf{w}_s - g_s$, *so werden die hierdurch entstehenden Ausdrücke*

$$\vartheta(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_s),$$
$$\vartheta(\mathbf{w}_1 - g_1, \mathbf{w}_2 - g_2, \ldots \mathbf{w}_s - g_s)$$

von z abhängende Functionen sein, welche ebenso wie $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_s$ *selber, auf der Fläche $\mathfrak{R}$ mit alleiniger Ausnahme der Ströme a, b allenthalben e i n d e u t i g und s t e t i g sind.*

In Bezug auf den hier eingeführten Ausdruck ϑ ist zugleich noch Folgendes in Erinnerung zu rufen (vergl. S. 35):

Der Werth von $\vartheta(U_1, U_2, \ldots U_s)$ bleibt, sobald sämmtliche s Argumente in ihr Gegentheil umschlagen, ungeändert, d. h. es ist:

$$\vartheta(U_1, U_2, \ldots U_s) = \vartheta(-U_1, -U_2, \ldots -U_s).$$

Sind ferner $U_1, U_2, \ldots U_s$ und $V_1, V_2, \ldots V_s$ zwei Systeme von Argumenten, zwischen welchen, falls $m_1, m_2, \ldots m_s, n_1, n_2, \ldots n_s$ beliebige ganze Zahlen vorstellen, folgender Zusammenhang stattfindet:

$$\begin{aligned}
V_1 &= U_1 + m_1 \pi i + n_1 b_{11} + n_2 b_{21} + \ldots + n_s b_{s1},\\
V_2 &= U_2 + m_2 \pi i + n_1 b_{12} + n_2 b_{22} + \ldots + n_s b_{s2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
V_s &= U_s + m_s \pi i + n_1 b_{1s} + n_2 b_{2s} + \ldots + n_s b_{ss},
\end{aligned}$$

so ist jederzeit:

$$\frac{\vartheta(V_1, V_2, \ldots V_s)}{\vartheta(U_1, U_2, \ldots U_s)} = e^{-\Sigma n_\varkappa (V_\varkappa + U_\varkappa + m_\varkappa \pi i)}.$$

Die beiden Ausdrücke $\vartheta(U_1, U_2, \ldots U_s)$ und $\vartheta(V_1, V_2, \ldots V_s)$ werden demnach einander g l e i c h sein, sobald die Argumente des einen und des andern nur um irgend welche Vielfachen von πi verschieden sind.

Um die Unstetigkeiten, mit welchen die vorhin genannte, von z abhängende Function

$$\vartheta = \vartheta(\mathbf{w}_1 - g_1, \mathbf{w}_2 - g_2, \ldots \mathbf{w}_s - g_s)$$

in den Strömen a, b behaftet ist, näher zu bestimmen, betrachten wir irgend einen jener Ströme, etwa den Strom $a_\varkappa$. Sind λ und ϱ zwei auf dem linken und rechten Ufer von $a_\varkappa$ einander gegenüberliegende Puncte, und sind $\mathbf{w}_1^\lambda, \mathbf{w}_2^\lambda, \ldots \mathbf{w}_s^\lambda, \vartheta^\lambda$ und $\mathbf{w}_1^\varrho, \mathbf{w}_2^\varrho, \ldots \mathbf{w}_s^\varrho, \vartheta^\varrho$ die Werthe, welche die Functionen $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_s, \vartheta$ in jenen Puncten besitzen, so ist:

$$\vartheta^\lambda = \vartheta(\mathrm{w}_1{}^\lambda - g_1,\ \mathrm{w}_2{}^\lambda - g_2,\ \ldots\ \mathrm{w}_s{}^\lambda - g_s),$$
$$\vartheta^\varrho = \vartheta(\mathrm{w}_1{}^\varrho - g_1,\ \mathrm{w}_2{}^\varrho - g_2,\ \ldots\ \mathrm{w}_s{}^\varrho - g_s).$$

Nun ist für den hier betrachteten Strom $a_\varkappa$:

$$\mathrm{w}_1{}^\lambda - \mathrm{w}_1{}^\varrho = a_{1\varkappa},\ \ \mathrm{w}_2{}^\lambda - \mathrm{w}_2{}^\varrho = a_{2\varkappa},\ \ldots\ \mathrm{w}_s{}^\lambda - \mathrm{w}_s{}^\varrho = a_{s\varkappa};$$

also mit Rücksicht auf die eigenthümlichen Werthe der Grössen $a_{\sigma\varkappa}$:

$$\mathrm{w}_1{}^\lambda - \mathrm{w}_1{}^\varrho = m_1\,\pi i,\ \mathrm{w}_2{}^\lambda - \mathrm{w}_2{}^\varrho = m_2\,\pi i,\ \ldots\ \mathrm{w}_s{}^\lambda - \mathrm{w}_s{}^\varrho = m_s\,\pi i,$$

wo $m_1,\ m_2,\ \ldots\ m_s$ ganze Zahlen vorstellen, von welchen eine gleich 1, die übrigen gleich 0 sind.

Die in ϑ^λ und ϑ^ϱ enthaltenen Argumente

$$\mathrm{w}_1{}^\lambda - g_1,\ \ \mathrm{w}_2{}^\lambda - g_2,\ \ldots\ \mathrm{w}_s{}^\lambda - g_s$$

und

$$\mathrm{w}_1{}^\varrho - g_1,\ \ \mathrm{w}_2{}^\varrho - g_2,\ \ldots\ \mathrm{w}_s{}^\varrho - g_s$$

unterscheiden sich also von einander nur durch gewisse Vielfache von πi. Zufolge des letztgenannten Satzes wird demnach $\vartheta^\lambda = \vartheta^\varrho$ sein. Somit ergiebt sich, dass die Werthe von ϑ zu beiden Ufern des Stromes $a_\varkappa$ einander **gleich** sind. Solches gilt natürlich für **sämmtliche** Ströme a. Und es wird also ϑ eine Function sein, die auf der Fläche $\mathfrak{R}$ nur noch in den Strömen b unstetig sein kann.

Was nun die letztern Ströme anbelangt, so wird, falls man sich die Formeln

$$\vartheta^\lambda = \vartheta(\mathrm{w}_1{}^\lambda - g_1,\ \mathrm{w}_2{}^\lambda - g_2,\ \ldots\ \mathrm{w}_s{}^\lambda - g_s),$$
$$\vartheta^\varrho = \vartheta(\mathrm{w}_1{}^\varrho - g_1,\ \mathrm{w}_2{}^\varrho - g_2,\ \ldots\ \mathrm{w}_s{}^\varrho - g_s)$$

auf zwei einander gegenüberliegende Puncte λ und ϱ des linken und rechten Ufers von $b_\varkappa$ bezogen denkt,

$$\mathrm{w}_1{}^\lambda - \mathrm{w}_1{}^\varrho = b_{1\varkappa},\ \ \mathrm{w}_2{}^\lambda - \mathrm{w}_2{}^\varrho = b_{2\varkappa},\ \ldots\ \mathrm{w}_s{}^\lambda - \mathrm{w}_s{}^\varrho = b_{s\varkappa}$$

sein. Die in ϑ^λ und ϑ^ϱ enthaltenen Argumente stehen daher in diesem Fall in folgender Beziehung zu einander:

$$\begin{aligned}(\mathrm{w}_1{}^\lambda - g_1) &= (\mathrm{w}_1{}^\varrho - g_1) + b_{1\varkappa},\\ (\mathrm{w}_2{}^\lambda - g_2) &= (\mathrm{w}_2{}^\varrho - g_2) + b_{2\varkappa},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (\mathrm{w}_s{}^\lambda - g_s) &= (\mathrm{w}_s{}^\varrho - g_s) + b_{s\varkappa}.\end{aligned}$$

Somit ergiebt sich zufolge des letzthin angegebenen Satzes (S. 446)*).

*) Von den in jenem Satze enthaltenen ganzen Zahlen $m_1,\ m_2,\ \ldots\ m_s$, $n_1,\ n_2,\ \ldots\ n_s$ sind im vorliegenden Falle alle gleich 0 mit Ausnahme der Zahl $n_\varkappa$, und diese gleich 1.

$$\frac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\varrho} = e^{-((\mathrm{w}_\varkappa{}^\lambda - g_\varkappa) + (\mathrm{w}_\varkappa{}^\varrho - g_\varkappa))}$$

oder, wenn man das arithmetische Mittel $\dfrac{\mathrm{w}_\varkappa{}^\lambda + \mathrm{w}_\varkappa{}^\varrho}{2}$ mit $\dot{\mathrm{w}}_\varkappa$ bezeichnet:

$$\frac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\varrho} = e^{2\,g_\varkappa - 2\,\dot{\mathrm{w}}_\varkappa}.$$

Wir gelangen somit zu folgendem Ergebniss:

Der aus den eindeutigen Functionen $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots \mathrm{w}_s$ *und aus irgend welchen Constanten* $g_1, g_2, \ldots g_s$ *zusammengesetzte Ausdruck*

$$\vartheta = \vartheta(\mathrm{w}_1 - g_1, \mathrm{w}_2 - g_2, \ldots \mathrm{w}_s - g_s)$$

ist eine von z *abhängende Function, welche auf der Riemann'schen Kugelfläche* $\mathfrak{R}$, *mit alleiniger Ausnahme der Ströme* b, *allenthalben eindeutig und stetig bleibt.*

Was die Werthe dieser Function zu beiden Ufern der Ströme b *anbelangt, so ist*

$$\text{längs } b_\varkappa : \frac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\varrho} = e^{2\,g_\varkappa - \mathrm{w}_\varkappa{}^\lambda - \mathrm{w}_\varkappa{}^\varrho} = e^{2\,g_\varkappa - 2\,\dot{\mathrm{w}}_\varkappa}$$

wo $\dot{\mathrm{w}}_\varkappa$ *-das arithmetische Mittel derjenigen Werthe vorstellt, welche* $\mathrm{w}_\varkappa$ *zu beiden Ufern von* $b_\varkappa$ *besitzt. Der Werthquotient, mit welchem die Function* ϑ *in jedem einzelnen Strome* b *behaftet ist, hat also keineswegs eine constante Grösse, sondern eine Grösse, die sich längs des Stromes hin von einer Stelle zur andern stetig ändert.*

Auf der Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ wird eine Function nur dann allenthalben stetig sein können, wenn sie in jedem der Ströme a, b, c zu beiden Ufern gleiche Werthe besitzt. Handelt es sich aber nicht um die Stetigkeit auf der Fläche $\mathfrak{R}$, sondern nur um die Stetigkeit innerhalb der Fläche $\mathfrak{R}'$, so wird zu dieser letztern jene Gleichheit keineswegs erforderlich sein. Die hier betrachtete Function

$$\vartheta = \vartheta(\mathrm{w}_1 - g_1, \mathrm{w}_2 - g_2, \ldots \mathrm{w}_s - g_s)$$

wird demnach eine Function zu nennen sein, welche innerhalb $\mathfrak{R}'$ allenthalben eindeutig und stetig ist; und daneben wird dann, was ihre Werthe am Rande von $\mathfrak{R}'$ anbelangt, zu bemerken sein, dass

$$\text{(1)}\qquad \begin{aligned} &\text{längs } a_\varkappa: \frac{\vartheta\lambda}{\vartheta\varrho} = 1, \\ &\text{längs } b_\varkappa: \frac{\vartheta\lambda}{\vartheta\varrho} = e^{2g_\varkappa - 2\dot{\mathrm{w}}_\varkappa} \\ &\text{längs } c_\varkappa: \frac{\vartheta\lambda}{\vartheta\varrho} = 1 \end{aligned}$$

ist.

Zweiter Abschnitt. Mit Hülfe der s fach unendlichen ϑ-Reihe lässt sich aus den Functionen w_1, w_2, ... w_s ein Ausdruck aufbauen, der von z auf algebraische Weise abhängig ist.

Wir müssen uns nun an einige früher gefundene allgemeine Sätze erinnern (S. 244. 246. und 269.). Ist eine von z abhängende Function auf irgend einer Fläche allenthalben eindeutig und stetig, so kann sie daselbst immer nur in einzelnen Puncten Null werden. Ferner wird ihre Ordnungszahl — jenen Sätzen zufolge — in jedem Nullpuncte durch eine positive ganze Zahl, und in jedem andern Punct der Fläche durch Null dargestellt sein. Endlich wird die Summe sämmtlicher Ordnungszahlen, welche sie auf der Fläche besitzt, durch ein gewisses in positiver Richtung um den Rand der Fläche herumerstrecktes Integral ausgedrückt werden.

Bezeichnen wir also die einzelnen Nullpuncte, welche unsere von z abhängende, auf der Fläche $\mathfrak{R}'$ allenthalben eindeutige und stetige Function:

$$\vartheta = \vartheta(\mathrm{w}_1 - g_1, \mathrm{w}_2 - g_2, \ldots \mathrm{w}_s - g_s)$$

besitzt, mit z_1, z_2, ... z_τ, und bezeichnen wir ferner die in diesen Puncten vorhandenen Ordnungszahlen mit m_1, m_2, ... m_τ, so wird

$$\text{(2)}\qquad m_1 + m_2 + \ldots + m_\tau = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{R}'}\frac{d\vartheta}{\vartheta}$$

sein; wo das Integral

$$\text{(3)}\qquad \int\limits_{\mathfrak{R}'}\frac{d\vartheta}{\vartheta}$$

in positiver Richtung um den Rand von $\mathfrak{R}'$ herumerstreckt ist.

Bei Ausführung einer solchen Integration wird jeder von den Strömen a, b, c zweimal, und zwar immer das linke Ufer stromabwärts, das rechte stromaufwärts durchlaufen. Ist daher h irgend einer unter den Strömen a, b, c, und sind ϑ^λ und ϑ^ϱ die Werthe, welche ϑ zu beiden Ufern von h besitzt, so besteht der Beitrag, welchen dieser Strom h zu dem Integrale (3) liefert, aus zwei Theilen; der eine wird dadurch erhalten, dass man $\frac{d\vartheta^\lambda}{\vartheta^\lambda}$ stromabwärts, der andere dadurch, dass man $\frac{d\vartheta^\varrho}{\vartheta^\varrho}$ stromaufwärts integrirt; und der ganze Beitrag ist demnach, falls man die längs h stromabwärts hinerstreckte Integration in gewohnter Weise mit $\int\limits_h$ bezeichnet, gleich

$$\int\limits_h \left(\frac{d\vartheta^\lambda}{\vartheta^\lambda} - \frac{d\vartheta^\varrho}{\vartheta^\varrho}\right).$$

Um das Integral (3) zu berechnen, werden die Beiträge sämmtlicher Ströme a, b, c zu bilden, und all' diese Beiträge zu addiren sein.

Somit ergiebt sich:

$$\text{(4)} \qquad \int\limits_{\mathfrak{R}'} \frac{d\vartheta}{\vartheta} = \Sigma \int\limits_{a_\varkappa} \left(\frac{d\vartheta^\lambda}{\vartheta^\lambda} - \frac{d\vartheta^\varrho}{\vartheta^\varrho}\right)$$
$$+ \Sigma \int\limits_{b_\varkappa} \left(\frac{d\vartheta^\lambda}{\vartheta^\lambda} - \frac{d\vartheta^\varrho}{\vartheta^\varrho}\right)$$
$$+ \Sigma \int\limits_{c_\varkappa} \left(\frac{d\vartheta^\lambda}{\vartheta^\lambda} - \frac{d\vartheta^\varrho}{\vartheta^\varrho}\right),$$

wo sich von den Summationen Σ die erste auf sämmtliche Ströme a, die zweite auf die Ströme b, und die dritte auf die Ströme c bezieht.

Nun ist zufolge der Formeln (1)

$$\text{längs } a_\varkappa: \quad \frac{d\vartheta^\lambda}{\vartheta^\lambda} - \frac{d\vartheta^\varrho}{\vartheta^\varrho} = 0,$$

$$\text{längs } b_\varkappa: \quad \frac{d\vartheta^\lambda}{\vartheta^\lambda} - \frac{d\vartheta^\varrho}{\vartheta^\varrho} = -\,2\,d\dot{\mathrm{w}}_\varkappa,$$

$$\text{längs } c_\varkappa: \quad \frac{d\vartheta^\lambda}{\vartheta^\lambda} - \frac{d\vartheta^\varrho}{\vartheta^\varrho} = 0;$$

somit erhalten wir:

$$\text{(5)} \qquad \int\limits_{\mathfrak{R}'} \frac{d\vartheta}{\vartheta} = -\,2\,.\,\Sigma \int\limits_{b_\varkappa} d\dot{\mathrm{w}}_\varkappa,$$

oder, weil die Werthe von $w_\varkappa^\lambda$, $w_\varkappa^\varrho$, $\dot{w}_\varkappa$ längs des Stromes $b_\varkappa$ nur durch Constanten von einander verschieden,*) die Werthe der Differentiale $dw_\varkappa^\lambda$, $dw_\varkappa^\varrho$, $d\dot{w}_\varkappa$ längs jenes Stromes hin also einander gleich sind:

$$\int\limits_{\mathfrak{R}'} \frac{d\vartheta}{\vartheta} = -2 \,.\, \Sigma \int\limits_{b_\varkappa} dw_\varkappa, \tag{6}$$

wo unter $w_\varkappa$ nach Belieben irgend eine der drei Grössen $w_\varkappa^\lambda$, $w_\varkappa^\varrho$, $\dot{w}_\varkappa$ verstanden werden kann.

Nun ist (vergl. die Note S. 426):

$$\int\limits_{b_\varkappa} dw_\varkappa = -\left[w_\varkappa^\lambda - w_\varkappa^\varrho\right]_{a_\varkappa} = -a_{\varkappa\varkappa};$$

somit ergiebt sich:

$$\int\limits_{\mathfrak{R}'} \frac{d\vartheta}{\vartheta} = +2 \,.\, \Sigma a_{\varkappa\varkappa} = +2\,(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{ss}); \tag{7}$$

oder, falls man auf die eigenthümlichen Werthe der Constanten $a_{\varkappa\sigma}$ Rücksicht nimmt:

$$\int\limits_{\mathfrak{R}'} \frac{d\vartheta}{\vartheta} = +2s \,.\, \pi i. \tag{8}$$

Substituiren wir diesen Werth in (2), so erhalten wir schliesslich:

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_\tau = s. \tag{9}$$

Die Nullpuncte $z_1, z_2, \ldots z_\tau$, welche die Function ϑ auf der Fläche $\mathfrak{R}$ besitzt, sind also ihrer Lage nach allerdings völlig unbekannt; die Summe der in ihnen vorhandenen Ordnungszahlen aber ist bekannt, nämlich jederzeit $= s$. Es wird für unsere weiteren Betrachtungen zweckmässig sein, wenn wir einen Nullpunct, dessen Ordnungszahl 1 ist, einen Nullpunct erster Ordnung nennen, und jeden andern Nullpunct als eine Superposition von mehreren solchen Nullpuncten erster

*) Längs des Stromes $b_\varkappa$ hin ist $w_\varkappa^\lambda - w_\varkappa^\varrho = b_{\varkappa\varkappa}$, mithin

$$w_\varkappa^\lambda = w_\varkappa^\varrho + b_{\varkappa\varkappa},$$

und

$$\dot{w}_\varkappa = \frac{w_\varkappa^\lambda + w_\varkappa^\varrho}{2} = w_\varkappa^\varrho + \frac{b_{\varkappa\varkappa}}{2}.$$

Ordnung ansehen. Thun wir dies, so können wir uns in Betreff der Gleichung (9) folgendermassen ausdrücken:

Die Anzahl der Nullpuncte, welche die von z abhängende Function

$$\vartheta = \vartheta\,(\mathrm{w}_1 - g_1,\ \mathrm{w}_2 - g_2,\ \ldots\ \mathrm{w}_s - g_s)$$

auf der Fläche $\mathfrak{R}$ besitzt, wird, falls man sich diese Puncte in lauter Nullpuncte e r s t e r O r d n u n g *aufgelöset denkt, jederzeit gleich s sein.*

Aendert man die in der Function ϑ enthaltenen Constanten $g_1, g_2, \ldots g_s$, so wird die Lage ihrer Nullpuncte ebenfalls eine Aenderung erleiden, die Anzahl derselben aber immer ein und dieselbe, nämlich immer gleich s bleiben. Wir betrachten folgende beide Functionen:

$$\vartheta = \vartheta\,(\mathrm{w}_1 - G_1,\ \mathrm{w}_2 - G_2,\ \ldots,\ \mathrm{w}_s - G_s),$$
$$\vartheta' = \vartheta\,(\mathrm{w}_1 - G_1',\ \mathrm{w}_2 - G_2',\ \ldots,\ \mathrm{w}_s - G_s');$$

wollen dabei aber voraussetzen, dass die in ihnen enthaltenen Constanten G und G' in folgendem Zusammenhang mit einander stehen:

$$\begin{aligned}
G_1' - G_1 &= \mu_1\pi i + \nu_1 b_{11} + \nu_2 b_{21} + \ldots + \nu_s b_{s1},\\
G_2' - G_2 &= \mu_2\pi i + \nu_1 b_{12} + \nu_2 b_{22} + \ldots + \nu_s b_{s2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
G_s' - G_s &= \mu_s\pi i + \nu_1 b_{1s} + \nu_2 b_{2s} + \ldots + \nu_s b_{ss};
\end{aligned}$$

die μ und ν sollen hier beliebige ganze Zahlen vorstellen. Zwischen den in ϑ und ϑ' enthaltenen Argumenten

$$\mathrm{w}_1 - G_1,\ \mathrm{w}_2 - G_2,\ \ldots\ \mathrm{w}_s - G_s$$

und

$$\mathrm{w}_1 - G_1',\ \mathrm{w}_2 - G_2',\ \ldots\ \mathrm{w}_s - G_s'$$

finden alsdann ganz ähnliche Beziehungen statt, nämlich folgende:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{w}_1 - G_1) - (\mathrm{w}_1 - G_1') &= \mu_1\pi i + \nu_1 b_{11} + \nu_2 b_{21} + \ldots + \nu_s b_{s1},\\
(\mathrm{w}_2 - G_2) - (\mathrm{w}_2 - G_2') &= \mu_2\pi i + \nu_1 b_{12} + \nu_2 b_{22} + \ldots + \nu_s b_{s2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(\mathrm{w}_s - G_s) - (\mathrm{w}_s - G_s') &= \mu_s\pi i + \nu_1 b_{1s} + \nu_2 b_{2s} + \ldots + \nu_s b_{ss}.
\end{aligned}$$

Daraus aber ergiebt sich (vergl. den Satz S. 446), dass

$$\frac{\vartheta}{\vartheta'} = e^{-\Sigma \nu_\varkappa (2\mathrm{w}_\varkappa - G_\varkappa - G_\varkappa' + \mu_\varkappa \pi i)}$$

ist, wo die Summation Σ über $\varkappa = 1, 2, \ldots s$ sich hinerstreckt. Somit wird:

$$\vartheta' = \vartheta \,.\, e^{K_0 + K_1\mathrm{w}_1 + K_2\mathrm{w}_2 + \ldots + K_s\mathrm{w}_s},$$

wo die K gewisse Constanten vorstellen, auf deren Werthe es hier nicht weiter ankommt. Die hier auftretende Exponentialgrösse

$$e^{K_0 + K_1 \mathrm{w}_1 + K_2 \mathrm{w}_2 + \ldots + K_s \mathrm{w}_s}$$

kann, weil $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots \mathrm{w}_s$ auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überall endlich bleiben, nirgends null, und auch nirgends unendlich gross werden. Aus der Gleichung

$$\vartheta' = \vartheta \,.\, e^{K_0 + K_1 \mathrm{w}_1 + K_2 \mathrm{w}_2 + \ldots + K_s \mathrm{w}_s}$$

folgt daher, dass die Function ϑ' in allen denjenigen Puncten verschwindet, in welchen ϑ null wird, und dass sie andererseits in keinem Puncte verschwinden kann, in welchem nicht gleichzeitig auch ϑ null wird. Die s Nullpuncte von ϑ' sind demnach identisch mit den s Nullpuncten von ϑ. Wir erhalten somit folgenden Satz:

Versteht man unter $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_s$, $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_s$ irgend welche ganze Zahlen, ferner unter $G_1, G_2, \ldots G_s$, $G_1', G_2', \ldots G_s'$ Constanten, die mit einander in folgendem Zusammenhang stehen:

$$\begin{aligned}
G_1' - G_1 &= \mu_1 \pi i + \nu_1 b_{11} + \nu_2 b_{21} + \ldots + \nu_s b_{s1}, \\
G_2' - G_2 &= \mu_2 \pi i + \nu_1 b_{12} + \nu_2 b_{22} + \ldots + \nu_s b_{s2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
G_s' - G_s &= \mu_s \pi i + \nu_1 b_{1s} + \nu_2 b_{2s} + \ldots + \nu_s b_{ss};
\end{aligned}$$

so werden

$$\vartheta(\mathrm{w}_1 - G_1, \mathrm{w}_2 - G_2, \ldots \mathrm{w}_s - G_s)$$

und

$$\vartheta(\mathrm{w}_1 - G_1', \mathrm{w}_2 - G_2', \ldots \mathrm{w}_s - G_s')$$

zwei von z abhängende Functionen sein, deren Nullpuncte mit einander zusammenfallen.

Die drei Ausdrücke

$$\begin{aligned}
\vartheta &= \vartheta(\mathrm{w}_1 - g_1, \mathrm{w}_2 - g_2, \ldots \mathrm{w}_s - g_s), \\
\vartheta' &= \vartheta(\mathrm{w}_1 - g_1', \mathrm{w}_2 - g_2', \ldots \mathrm{w}_s - g_s'), \\
\eta &= e^{k_1 \mathrm{w}_1 + k_2 \mathrm{w}_2 + \ldots + k_s \mathrm{w}_s}
\end{aligned}$$

stellen, falls wir unter den Grössen g, g', k ganz beliebig gewählte Constanten verstehen, drei von z abhängende Functionen vor, welche innerhalb der einfach zusammenhängenden, von einer einzigen Curve umrandeten Fläche $\mathfrak{R}'$ allenthalben eindeutig und stetig sind; also drei Functionen, die innerhalb jener Fläche mit keinerlei Unstetigkeiten, folglich auch mit keinerlei Polen behaftet sind. Ausserdem wissen wir, dass jede der beiden

Functionen ϑ und ϑ' mit s Nullpuncten erster Ordnung behaftet ist, und dass die Function η von Nullpuncten völlig frei ist. Die Nullpuncte von ϑ mögen mit $z_1, z_2, \ldots z_s$, und die von ϑ' mit $z_1', z_2', \ldots z_s'$ bezeichnet werden.

Die Ordnungszahl von ϑ wird alsdann in den Puncten $z_1, z_2, \ldots z_s$ den Werth 1, und in allen übrigen zur Fläche $\mathfrak{R}$ gehörigen Puncten den Werth 0 besitzen. Ebenso wird die Ordnungszahl von ϑ' in den Puncten $z_1', z_2', \ldots z_s'$ gleich 1, und in allen übrigen Puncten gleich 0 sein. Endlich wird die Ordnungszahl von η auf der Fläche $\mathfrak{R}'$ allenthalben gleich 0 sein.

Wir setzen nun aus den Functionen ϑ, ϑ', η den Ausdruck

$$\Theta = \frac{\eta \cdot \eta \cdot \vartheta \cdot \vartheta}{\vartheta' \cdot \vartheta'}$$

zusammen. Dieser Quotient Θ wird alsdann, ebenso wie ϑ, ϑ', η, eine gewisse von z abhängende Function vorstellen. Um die Natur der so erhaltenen neuen Function beurtheilen zu können, ziehen wir einen früher (S. 274) gefundenen allgemeinen Satz zu Hülfe. Nennen wir, um an Kürze zu gewinnen, eine Function, die auf irgend welcher Fläche überall eindeutig, und mit etwaiger Ausnahme einzelner Pole daselbst auch überall stetig ist, eine auf jener Fläche **regelmässige** Function, so lautet der in Rede stehende Satz folgendermassen:

Sind $f_1, f_2, \ldots f_\alpha$ und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\beta$ irgend welche von z abhängende Functionen, die auf einer gegebenen Fläche überall regelmässig sind, so gilt Gleiches auch von dem Quotienten

$$\frac{f_1 \cdot f_2 \cdots f_\alpha}{\varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdots \varphi_\beta}.$$

Zugleich erhält man die Ordnungszahl dieses Quotienten in jedem Puncte der gegebenen Fläche dadurch, dass man die Ordnungszahlen der im Zähler vorhandenen Functionen addirt, und von der so gebildeten Summe die Ordnungszahlen der im Nenner befindlichen Functionen subtrahirt.

Hieraus folgt erstens, dass die Function Θ innerhalb der Fläche $\mathfrak{R}'$ allenthalben regelmässig ist, und zweitens, dass die Ordnungszahl von Θ in den Puncten $z_1, z_2, \ldots z_s$ den Werth 2, in den Puncten $z_1', z_2', \ldots z_s'$ den Werth -2, und in allen übrigen zur Fläche $\mathfrak{R}'$ gehörigen Puncten den Werth 0 besitzt. Sollte zufälliger Weise einer der Puncte $z_1, z_2, \ldots z^s$

mit irgend einem der Puncte z_1', z_2', ... z_s', gerade zusammenfallen, so wird die Ordnungszahl von Θ in einem solchen Puncte gleich $2-2$, also gleich 0 sein.

Wir untersuchen nun ferner das Verhalten der Function Θ am Rande der Fläche $\mathfrak{R}'$, d. i. ihr Verhalten an den Ufern der Ströme a, b, c. Was die Function η anbelangt, so ist (vergl. Seite 443)

$$\text{längs } a_\varkappa\colon\ \frac{\eta^\lambda}{\eta^\varrho} = e^{k_1 a_{1\varkappa} + k_2 a_{2\varkappa} + \ldots + k_s a_{s\varkappa}} = e^{k_\varkappa \pi i},$$

$$\text{längs } b_\varkappa\colon\ \frac{\eta^\lambda}{\eta^\varrho} = e^{k_1 b_{1\varkappa} + k_2 b_{2\varkappa} + \ldots + k_s b_{s\varkappa}},$$

$$\text{längs } c_\varkappa\colon\ \frac{\eta^\lambda}{\eta^\varrho} = 1.$$

Was ferner die Functionen ϑ und ϑ' anbelangt, so ist (vergl. Seite 448)

$$\text{längs } a_\varkappa\colon\ \frac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\varrho} = 1, \qquad \frac{\vartheta'^\lambda}{\vartheta'^\varrho} = 1,$$

$$\text{längs } b_\varkappa\colon\ \frac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\varrho} = e^{2g_\varkappa - \mathrm{w}_\varkappa^\lambda - \mathrm{w}_\varkappa^\varrho}, \qquad \frac{\vartheta'^\lambda}{\vartheta'^\varrho} = e^{2g'_\varkappa - \mathrm{w}_\varkappa^\lambda - \mathrm{w}_\varkappa^\varrho},$$

$$\text{längs } c_\varkappa\colon\ \frac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\varrho} = 1, \qquad \frac{\vartheta'^\lambda}{\vartheta'^\varrho} = 1.$$

Nun ist nach unserer Definition:

$$\Theta = \left(\frac{\eta\,.\,\vartheta}{\vartheta'}\right)^2;$$

betrachten wir daher irgend einen der Ströme a, b, c, so ist, wenn wir unter λ, ϱ zwei zu beiden Ufern dieses Stromes einander gegenüberliegende Puncte verstehen:

$$\Theta^\lambda = \left(\frac{\eta^\lambda\,.\,\vartheta^\lambda}{\vartheta'^\lambda}\right)^2, \qquad \Theta^\varrho = \left(\frac{\eta^\varrho\,.\,\vartheta^\varrho}{\vartheta'^\varrho}\right)^2,$$

mithin:

$$\frac{\Theta^\lambda}{\Theta^\varrho} = \left(\frac{\eta^\lambda}{\eta^\varrho}\right)^2 \cdot \left(\frac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\varrho}\right)^2 \cdot \left(\frac{\vartheta'^\lambda}{\vartheta'^\varrho}\right)^{-2}.$$

Somit ergiebt sich:

$$\text{längs } a_\varkappa\colon\ \frac{\Theta^\lambda}{\Theta^\varrho} = e^{2k_\varkappa \pi i},$$

$$\text{längs } b_\varkappa\colon\ \frac{\Theta^\lambda}{\Theta^\varrho} = e^{2(k_1 b_{1\varkappa} + k_2 b_{2\varkappa} + \ldots + k_s b_{s\varkappa}) + 4(g_\varkappa - g'_\varkappa)},$$

$$\text{längs } c_\varkappa\colon\ \frac{\Theta^\lambda}{\Theta^\varrho} = 1.$$

Die Constanten g, g', k waren bisher vollständig willkührlich. Nehmen wir nun für die Constanten $k_1, k_2, \ldots k_s$ irgend welche ganze Zahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_s$, und bestimmen wir ferner die Constanten $g_1, g_2, \ldots g_s, g_1', g_2', \ldots g_s'$ der Art, dass

$$(k_1 b_{1\varkappa} + k_2 b_{2\varkappa} + \ldots + k_s b_{s\varkappa}) + 2(g_\varkappa - g_\varkappa') = -\mu_\varkappa \pi i$$
$$\varkappa = 1, 2, \ldots s$$

wird, oder, was dasselbe ist, der Art, dass

$$(\nu_1 b_{1\varkappa} + \nu_2 b_{2\varkappa} + \ldots + \nu_s b_{s\varkappa}) + 2(g_\varkappa - g_\varkappa') = -\mu_\varkappa \pi i$$
$$\varkappa = 1, 2, \ldots s$$

wird, wo $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_s$ ebenfalls irgend welche (positive oder negative) ganze Zahlen vorstellen sollen, so werden die in den Strömen a, b, c vorhandenen Werthquotienten von Θ sämmtlich gleich 1 werden, die in jenen Strömen vorhandenen Unstetigkeiten von Θ also verschwinden.

An Stelle der Fläche $\mathfrak{R}'$ nehmen wir nun zur Grundlage unserer Betrachtung die ursprüngliche Fläche $\mathfrak{R}$. So lange die Constanten g, g', k beliebige Werthe besassen, war die Function Θ auf der Fläche $\mathfrak{R}'$ überall regelmässig, auf der Fläche $\mathfrak{R}$ hingegen, in Folge der in den Strömen a, b, c vorhandenen Unstetigkeiten, nicht regelmässig. Diese Unstetigkeiten verschwinden nun aber, sobald jene Constanten in der eben angegebenen Weise bestimmt werden. Und es wird also, sobald solches geschehen ist, Θ eine Function sein, welche nicht allein auf $\mathfrak{R}'$, sondern auch auf $\mathfrak{R}$ allenthalben regelmässig ist. Somit erhalten wir folgenden Satz:

Finden zwischen den Constanten $g_1, g_2, \ldots g_s, g_1', g_2', \ldots g_s'$ und zwischen irgend welchen ganzen Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_s, \nu_1, \nu_2, \ldots \nu_s$ die Gleichungen statt:

$$\begin{aligned}
2(g_1' - g_1) &= \mu_1 \pi i + \nu_1 b_{11} + \nu_2 b_{21} + \ldots + \nu_s b_{s1},\\
2(g_2' - g_2) &= \mu_2 \pi i + \nu_1 b_{12} + \nu_2 b_{22} + \ldots + \nu_s b_{s2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
2(g_s' - g_s) &= \mu_s \pi i + \nu_1 b_{1s} + \nu_2 b_{2s} + \ldots + \nu_s b_{ss},
\end{aligned}$$

so wird der Ausdruck

$$\Theta = \left(\frac{\vartheta(\mathrm{w}_1 - g_1, \mathrm{w}_2 - g_2, \ldots \mathrm{w}_s - g_s)}{\vartheta(\mathrm{w}_1 - g_1', \mathrm{w}_2 - g_2', \ldots \mathrm{w}_s - g_s')} \cdot e^{\nu_1 \mathrm{w}_1 + \nu_2 \mathrm{w}_2 + \ldots + \nu_s \mathrm{w}_s}\right)^2$$

eine von z abhängende Function sein, welche auf der Riemannschen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ allenthalben regelmässig ist.

Sind $z_1, z_2, \ldots z_s$ *die der Function*

$$\vartheta\,(\mathrm{w}_1 - g_1,\ \mathrm{w}_2 - g_2,\ \ldots,\ \mathrm{w}_s - g_s),$$

und $z_1', z_2', \ldots, z_s'$ *die der Function*

$$\vartheta\,(\mathrm{w}_1 - g_1',\ \mathrm{w}_2 - g_2',\ \ldots,\ \mathrm{w}_s - g_s')$$

zugehörigen Nullpuncte, so wird die Ordnungszahl *von* Θ *in den Puncten* $z_1, z_2, \ldots z_s$ *den Werth* 2, *in den Puncten* $z_1', z_2', \ldots z_s'$ *den Werth* -2, *und in allen übrigen zur Fläche* $\mathfrak{R}$ *gehörigen Puncten den Werth* 0 *besitzen. Sollte zufälliger Weise einer der Puncte* $z_1, z_2, \ldots z_s$ *mit irgend einem der Puncte* $z_1', z_2', \ldots z_s'$ *zusammenfallen, so wird die Ordnungszahl von* Θ *in einem solchen Puncte gleich* $2 - 2$, *d. i. gleich* 0 *sein.*

Die Zahlen $v_1, v_2, \ldots v_s$ *können beliebig gewählt werden. Nimmt man all diese Zahlen gleich* 0, *so verwandelt sich der Ausdruck* Θ, *von welchem die eben angegebenen Sätze gelten, in folgenden:*

$$\Theta = \left(\frac{\vartheta\,(\mathrm{w}_1 - g_1,\ \mathrm{w}_2 - g_2,\ \ldots,\ \mathrm{w}_s - g_s)}{\vartheta\left(\mathrm{w}_1 - g_1 - \mu_1\dfrac{\pi i}{2},\ \mathrm{w}_2 - g_2 - \mu_2\dfrac{\pi i}{2},\ \ldots,\ \mathrm{w}_s - g_s - \mu_s\dfrac{\pi i}{2}\right)} \right)^2,$$

wo nun $g_1, g_2, \ldots g_s$ *völlig beliebige Constanten, und* $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_s$ *völlig beliebige ganze Zahlen vorstellen.*

Nun wissen wir (vergl. S. 290), dass eine von z abhängende Function, welche auf irgend einer Riemann'schen Kugelfläche allenthalben regelmässig ist, jederzeit eine algebraische Function von z ist. Aus dem eben hingestellten Satz ergiebt sich daher, dass die Abhängigkeit des Ausdruckes Θ von z eine algebraische sein muss.

Um diese algebraische Abhängigkeit formell darstellen zu können, müssen wir zunächst die Puncte $z_1, z_2, \ldots, z_1', z_2', \ldots$ d. i. die Nullpuncte der Functionen

$$\vartheta\,(\mathrm{w}_1 - g_1,\ \mathrm{w}_2 - g_2,\ \ldots\ \mathrm{w}_s - g_s),$$
$$\vartheta\,(\mathrm{w}_1 - g_1',\ \mathrm{w}_2 - g_2',\ \ldots\ \mathrm{w}_s - g_s')$$

ihrer Lage nach näher bestimmen. Hierzu aber bedarf es einer ziemlich langwierigen Nebenuntersuchung. Wir brechen unsere eigentliche Untersuchung hier einstweilen ab, um dieselbe, sobald jene Nebenuntersuchung durchgeführt sein wird, von Neuem aufnehmen, und weiter verfolgen zu können.

Dritter Abschnitt. Um die gegenseitige Abhängigkeit, welche zwischen den in der Function $\vartheta\,(\mathrm{w}_1-g_1,\ \mathrm{w}_2-g_2,\ \ldots\ \mathrm{w}_s-g_s)$ enthaltenen willkührlichen Constanten $g_1,\ g_2,\ \ldots\ g_s$ und zwischen den dieser Function zugehörigen Nullpuncten $z_1,\ z_2,\ \ldots\ z_s$ stattfindet, wird zunächst eine gewisse auxiliäre Function φ gebildet.

Es handelt sich um die s Nullpuncte erster Ordnung, welche die von z abhängende Function

$$\vartheta = \vartheta\,(\mathrm{w}_1-g_1,\ \mathrm{w}_2-g_2,\ \ldots\ \mathrm{w}_s-g_s)$$

auf der Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ besitzt. Die Beschaffenheit dieser Function ist — wir müssen uns die Art und Weise ihrer Entstehung vergegenwärtigen — abhängig erstens von der Beschaffenheit der Fläche $\mathfrak{R}$ selber, ferner von den auf dieser Fläche ausgeführten Schnitten oder Strömen a, b, c, sodann abhängig von den mit Bezug auf jene Fläche und mit Bezug auf jene Ströme definirten Functionen $\mathrm{w}_1,\ \mathrm{w}_2,\ \ldots\ \mathrm{w}_s$, und endlich abhängig von der Wahl der willkührlichen Constanten $g_1,\ g_2,\ \ldots\ g_s$. Wir wollen nun, nach wie vor, die Fläche $\mathfrak{R}$, das Stromsystem a, b, c und die Functionen $\mathrm{w}_1,\ \mathrm{w}_2,\ \ldots\ \mathrm{w}_s$ ungeändert lassen. Aendern hingegen wollen wir die Werthe der Constanten $g_1,\ g_2,\ \ldots\ g_s$, und untersuchen, von welcher Wirkung eine solche Aenderung auf die Beschaffenheit der Function ϑ ist.

Vertauschen wir die Constanten $g_1,\ g_2,\ \ldots\ g_s$ mit anderen, ebenfalls willkührlich gewählten Constanten $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots\ \gamma_s$, und bezeichnen wir die den g entsprechende Function ϑ in ihrer Abhängigkeit von z mit $F(z)$, die den γ entsprechende Function ϑ mit $\Phi(z)$, so werden $F(z)$ und $\Phi(z)$ im Allgemeinen ganz verschiedene Functionen sein; es werden demnach auch die Nullpuncte von $F(z)$ und die von $\Phi(z)$ im Allgemeinen ganz verschiedene Lagen haben.

Denken wir uns die in der Function ϑ enthaltenen Constanten g einer von Augenblick zu Augenblick stetig fortschreitenden Veränderung unterworfen, so werden gleichzeitig auch die Nullpuncte dieser Function in Bewegung gerathen, und zwar in eine Bewegung, bei welcher sie ihre Lage auf der Fläche $\mathfrak{R}$ ebenfalls in stetiger Weise von Augenblick zu Augenblick ändern. Es soll die Beziehung untersucht werden, in welcher diese beiderlei Aenderungen zu einander stehen.

Bezeichnen wir die augenblicklichen Nullpuncte der Function ϑ mit $z_1, z_2, \ldots z_s$, und bezeichnen wir ferner die Werthe, welche $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_s$ in jenen Puncten besitzen, mit

$$\begin{array}{lll} \mathbf{w}_1(z_1), & \mathbf{w}_1(z_2), & \ldots \mathbf{w}_1(z_s), \\ \mathbf{w}_2(z_1), & \mathbf{w}_2(z_2), & \ldots \mathbf{w}_2(z_s), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \mathbf{w}_s(z_1), & \mathbf{w}_s(z_2), & \ldots \mathbf{w}_s(z_s), \end{array}$$

so werden diese s^2 Werthe, weil die Functionen $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_s$ beständig ein und dieselben bleiben sollen, Grössen sein, welche unmittelbar geknüpft sind an die Lage jener Puncte $z_1, z_2, \ldots z_s$. Unsere Untersuchung wird uns nicht zu einer directen Beziehung führen zwischen den Constanten $g_1, g_2, \ldots g_s$ und zwischen den Puncten $z_1, z_2, \ldots z_s$, sondern nur zu Beziehungen, welche zwischen jenen Constanten und zwischen den an diese Puncte geknüpften so eben genannten s^2 Grössen stattfinden.

Die Function

(1) $$\vartheta = \vartheta(\mathbf{w}_1 - g_1, \mathbf{w}_2 - g_2, \ldots \mathbf{w}_s - g_s)$$

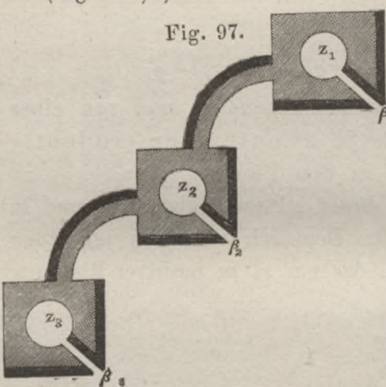
ist innerhalb der einfach zusammenhängenden, und von einer einzigen Curve umrandeten Fläche $\mathfrak{R}'$ allenthalben eindeutig und stetig; sie verschwindet in den Puncten $z_1, z_2, \ldots z_s$ ihre Ordnungszahl ist in jedem dieser s Puncte gleich 1, und in allen übrigen Puncten gleich 0. Demnach wird das um jeden der Puncte $z_1, z_2, \ldots z_s$, z. B. das um $z_\varkappa$ in positiver Richtung herumerstreckte Integral:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{z_\varkappa} \frac{d\vartheta}{\vartheta} = 1$$

sein. (Vergl. S. 253.)

Wir denken uns die einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{R}'$ durch stetige Umformung in die früher (Seite 326) besprochene Elementarform versetzt, welche aus s Rechtecken und $s - 1$ diese Rechtecke mit einander verbindenden Flächenstreifen besteht. Sodann beschreiben wir in dieser Fläche um jeden der Puncte $z_1, z_2, \ldots z_s$ einen kleinen Kreis, sondern von der Fläche diejenigen kleinen Flächenstücke ab, welche innerhalb der Kreise liegen, und lassen von den so entstandenen kreisförmigen Oeffnungen $(z_1), (z_2), \ldots (z_s)$ Schnitte ausgehen, die auf beliebigen Wegen, jedoch ohne einander zu durchkreuzen, nach dem Rande der Fläche hinlaufen. Sind α_1, β_1, γ_1, δ_1 die Ecken desjenigen Rechtecks, welches von den Ufern der Ströme a_1, b_1 begrenzt wird, sind ferner α_2, β_2, γ_2, δ_2 die Ecken des von den Strömen a_2, b_2 begrenzten Rechtecks, u. s. w.; so lassen wir den von der Oeffnung (z_1) ausgehenden Schnitt im Puncte β_1, den von (z_2) ausgehenden im Puncte β_2 enden, u. s. w. Zugleich bezeichnen wir diese Schnitte der Reihe nach mit d_1, d_2, ... d_s, und betrachten sie als Ströme, welche von den Oeffnungen (z_1), (z_2), ... (z_s) nach den Eckpuncten β_1, β_2, ... β_s hinfliessen. Die Fläche, in welche $\mathfrak{N}'$ durch Ausführung dieser Oeffnungen und Ströme verwandelt wird — sie mag $\mathfrak{S}$ heissen — ist offenbar, ebenso wie $\mathfrak{N}'$ selber, eine einfach zusammenhängende, umrandet von einer einzigen in sich zurücklaufenden Curve, die aus den Uferlinien der Ströme a, b, c, d und aus den Rändern der kleinen Oeffnungen (z_1), (z_2), ... (z_s) zusammengesetzt ist. (Fig. 97.)*)

Fig. 97.



Die Puncte z_1, z_2, ... z_s, in welchen ϑ Null wird, liegen ausserhalb $\mathfrak{S}$. Innerhalb $\mathfrak{S}$ ist daher die Function ϑ nicht allein überall eindeutig und stetig, sondern auch frei von Nullpuncten. Daraus folgt, dass $\frac{1}{\vartheta}$ innerhalb $\mathfrak{S}$ ebenfalls allenthalben eindeutig und stetig ist. Verstehen wir demnach unter

*) Die vorstehende Figur bezieht sich, ebenso wie unsere früheren Figuren, auf den Specialfall $s = 3$. Dass jedes von den drei Rechtecken, welche die Figur darbietet, je einen der drei Puncte z_1, z_2, z_3 in sich enthält, ist durchaus unwesentlich, und nur geschehen, um der Figur eine grössere Uebersichtlichkeit zu verleihen. Befinden sich z. B. alle drei Puncte z_1, z_2, z_3 in ein und demselben Rechteck, so wird man die von diesen Puncten auslaufenden Ströme d_1, d_2, d_3 ebenfalls der Art ziehen können, wie es verlangt wurde, nämlich der Art, dass mit Vermeidung von gegenseitigen Durchkreuzungen der erste von z_1 nach β_1, der zweite von z_2 nach β_2, und der dritte von z_3 nach β_3 geht. Nur wird die Figur in diesem Falle complicirter werden.

(3) $$\varphi(z) = \int_{z^0}^{z} \frac{1}{\vartheta} \cdot d\vartheta$$

ein von irgend welchem festen Punct z^0 ausgehendes, auf beliebiger Bahn fortlaufendes, den Rand der Fläche $\mathfrak{S}$ aber niemals überschreitendes Integral, so wird $\varphi(z)$ eine Function sein, welche innerhalb $\mathfrak{S}$, ebenso wie ϑ und $\frac{1}{\vartheta}$, allenthalben eindeutig und stetig ist; es folgt solches, da die Fläche $\mathfrak{S}$ einfach zusammenhängend ist, unmittelbar aus einem früher gefundenem allgemeinen Satz (Seite 335).

Die Function $\varphi(z)$ spielt bei der gegenwärtigen Untersuchung eine wichtige Rolle; deshalb ist es nöthig die Werthe dieser Function, namentlich diejenigen, welche sie am Rande der Fläche $\mathfrak{S}$ besitzt, genauer zu betrachten.

Sind z' und z'' irgend zwei innerhalb $\mathfrak{S}$ liegende Puncte, so lässt sich jederzeit eine Curve ziehen, welche von dem festen Puncte z^0 ausgeht, und, ohne den Rand von $\mathfrak{S}$ zu überschreiten, zuerst nach z', dann nach z'' gelangt. Die längs dieser Curve von z^0 bis z' und von z^0 bis z'' hinerstreckten Integrale

$$\int_{z^0}^{z'} \frac{1}{\vartheta}\, d\vartheta, \qquad \int_{z^0}^{z''} \frac{1}{\vartheta}\, d\vartheta$$

sind zufolge der für $\varphi(z)$ gegebenen Definition gleich $\varphi(z')$, und gleich $\varphi(z'')$. Das längs dieser Curve von z' nach z'' hinerstreckte Integral

$$\int_{z'}^{z''} \frac{1}{\vartheta}\, d\vartheta$$

ist demnach gleich $\varphi(z'') - \varphi(z')$. Somit ergiebt sich folgender Satz:

Sind z' und z'' irgend zwei zur Fläche $\mathfrak{S}$ gehörige Puncte, so ist das auf beliebigem Wege, jedoch innerhalb $\mathfrak{S}$ von z' nach z'' hinerstreckte Integral

(4) $$\int_{z'}^{z''} \frac{d\vartheta}{\vartheta}$$

jederzeit gleich der Differenz der beiden Werthe, welche die eindeutige Function $\varphi(z)$ in den Puncten z'' und z' besitzt, nämlich gleich $\varphi(z'') - \varphi(z')$.

Das hier genannte Integral lässt sich, weil $\frac{d\vartheta}{\vartheta} = d\,log\,\vartheta$ ist, auch so darstellen:

$$\int_{z'}^{z''} d\,log\,\vartheta,$$

und ist also, falls man die Werthe der Function ϑ in den Puncten z' und z'' für den Augenblick mit $\vartheta(z')$ und $\vartheta(z'')$ bezeichnet, gleich

$$log\ \vartheta(z'') - log\ \vartheta(z'),$$

d. i. gleich

$$log\ \frac{\vartheta(z'')}{\vartheta(z')},$$

Somit ergiebt sich für die Differenz der Werthe, welche die eindeutige Function $\varphi(z)$ in den Puncten z'' und z' besitzt, folgende Formel:

$$\varphi(z'') - \varphi(z') = log\ \frac{\vartheta(z'')}{\vartheta(z')}. \tag{5}$$

Der Logarithmus einer gegebenen Grösse besitzt bekanntlich unendlich viele Werthe, die durch Vielfache von $2\pi i$ unter einander verschieden sind. Demnach wird man den Werth der Differenz

$$\varphi(z'') - \varphi(z')$$

durch Anwendung der eben gefundenen Formel (5) niemals genau, sondern immer nur bis auf ein unbekanntes Vielfaches von $2\pi i$ bestimmen können. Um dieselben genau zu bestimmen, wird man nicht die Formel (5), sondern den Satz (4) in Anwendung bringen müssen.

Beachtet man (vergl. den Satz Seite 448), dass die Function ϑ auf der ursprünglich gegebenen Fläche $\mathfrak{R}$ mit alleiniger Ausnahme der Ströme b überall stetig ist, so ergeben sich für ihre Werthe an den Ufern der Ströme a, b, c, d die Formeln:

$$(6)\quad \begin{aligned} &\text{längs } a_\varkappa: && \frac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\varrho} = 1, \\ &\text{längs } b_\varkappa: && \frac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\varrho} = e^{2g_\varkappa - \mathrm{w}_\varkappa{}^\lambda - \mathrm{w}_\varkappa{}^\varrho}, \\ &\text{längs } c_\varkappa: && \frac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\varrho} = 1, \\ &\text{längs } d_\varkappa: && \frac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\varrho} = 1. \end{aligned}$$

Sind λ und ϱ irgend zwei auf dem linken und rechten Ufer des Stromes $a_\varkappa$ einander gegenüberliegende Puncte, ferner ϑ^λ, φ^λ und ϑ^ϱ, φ^ϱ die Werthe, welche die eindeutigen Functionen ϑ, φ in diesen Puncten besitzen, so ist zufolge (5):

$$\varphi^\lambda - \varphi^\varrho = \log \frac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\varrho},$$

also mit Rücksicht auf (6):

$$\varphi^\lambda - \varphi^\varrho = \log 1,$$

d. i.

$$\varphi^\lambda - \varphi^\varrho = N \,.\, 2\pi i,$$

wo N irgend welche unbekannte ganze Zahl vorstellt. In ähnlicher Weise lassen sich die Werthdifferenzen von φ in sämmtlichen Strömen a, b, c, d ermitteln; man findet, wie leicht zu übersehen ist:

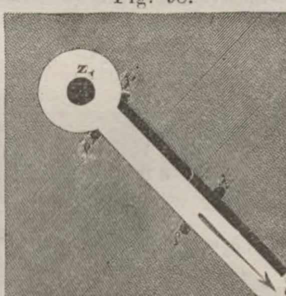
$$(7)\quad \begin{array}{ll} \text{längs } a_\varkappa: & \varphi^\lambda - \varphi^\varrho = N_\varkappa \;\;.\, 2\pi i, \\ \text{längs } b_\varkappa: & \varphi^\lambda - \varphi^\varrho = N_\varkappa' \;.\, 2\pi i + 2g_\varkappa - \mathrm{w}_\varkappa^\lambda - \mathrm{w}_\varkappa^\varrho, \\ \text{längs } c_\varkappa: & \varphi^\lambda - \varphi^\varrho = N_\varkappa'' \,.\, 2\pi i, \\ \text{längs } d_\varkappa: & \varphi^\lambda - \varphi^\varrho = N_\varkappa''' .\, 2\pi i, \end{array}$$

wo $N_\varkappa$, $N_\varkappa'$, $N_\varkappa''$, $N_\varkappa'''$ noch völlig unbekannte ganze Zahlen vorstellen.

Einige dieser Zahlen lassen sich berechnen, mit Hülfe des in (4) angegebenen Satzes.

Wir bringen jenen Satz zunächst auf zwei einander gegenüberliegende Puncte λ, ϱ des Stromes d_1 in Anwendung (Fig. 98), und nehmen dabei als Verbindungslinie zwischen diesen beiden Puncten eine Curve, welche längs des Randes von $\mathfrak{S}$ hinläuft, also eine Curve, welche zusammengesetzt ist aus einer Uferstrecke $\lambda\lambda'$, aus einer um z_1 herumlaufenden kreisförmigen Strecke $\lambda'\varrho'$, und aus einer Uferstrecke $\varrho'\varrho$. Dem Satz zufolge erhalten wir alsdann:

Fig. 98.



$$(8)\qquad \varphi(\varrho) - \varphi(\lambda) = \int_\lambda^\varrho \frac{d\vartheta}{\vartheta},$$

wo das Integral rechts aus drei den Strecken

$$\lambda\lambda', \quad \lambda'\varrho', \quad \varrho'\varrho$$

zugehörigen Theilen besteht. Die beiden Uferstrecken $\lambda\lambda'$ und $\varrho\varrho'$ sind (vergl. (6)) mit gleichen Werthen von ϑ belastet, und werden bei Ausführung dieser Integration in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen; demnach werden die diesen beiden Strecken zugehörigen Integraltheile einander zerstören. Die Formel (8) verwandelt sich daher in:

$$\varphi(\varrho) - \varphi(\lambda) = \int_{\lambda'}^{\varrho'} \frac{d\vartheta}{\vartheta}. \tag{9}$$

Das nunmehr auf der rechten Seite stehende Integral läuft in positiver Richtung um den Punct z_1 herum, und ist daher zufolge (2) gleich $2\pi i$. Also

$$\varphi(\varrho) - \varphi(\lambda) = 2\pi i,$$

oder

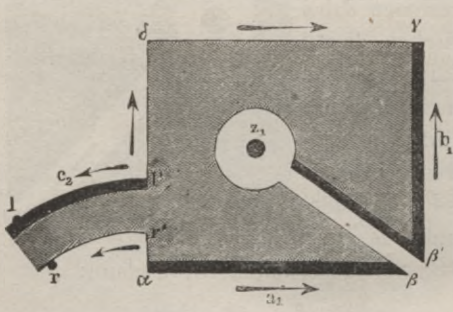
$$\varphi(\lambda) - \varphi(\varrho) = -2\pi i, \tag{10}$$

Genau dieselbe Formel wird sich offenbar auch für die Ströme d_2, d_3, ... ergeben. Bezeichnen wir also die Werthe $\varphi(\lambda)$ und $\varphi(\varrho)$ wie gewöhnlich mit φ^λ und φ^ϱ, so ist

$$\text{längs } d_\varkappa\text{:} \quad \varphi^\lambda - \varphi^\varrho = -2\pi i; \tag{11}$$

die in (7) angegebenen Zahlen $N_\varkappa'''$ besitzen demnach sämmtlich den Werth -1.

Fig. 99.



Es seien nun ferner (Fig. 99) l und r irgend zwei auf dem linken und rechten Ufer des Stromes c_2 einander gegenüberliegende Puncte. Zufolge des in (4) angegebenen Satzes wird alsdann

$$\varphi(l) - \varphi(r) = \int_r^l \frac{d\vartheta}{\vartheta} \tag{12}$$

sein, wo die Integration von r nach l auf beliebiger Bahn fortlaufen kann, den Rand der Fläche $\mathfrak{S}$ aber niemals überschreiten darf. Wir lassen dieselbe immer längs des Randes von $\mathfrak{S}$ hin-schreiten, also von r nach r', von r' nach α, dann nach β, dann längs des Ufers der bis zum Puncte z_1 eindringenden Bucht nach β', sodann nach γ u. s. w. fortlaufen, bis sie schliesslich zum Puncte l gelangt.

Die beiden Uferlinien des Stromes a_1, nämlich die Linien $\alpha\beta$ und $\delta\gamma$, sind (zufolge (6)) mit gleichen Werthen von ϑ belastet, und werden bei der in Rede stehenden Integration in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen. Demnach werden die Beiträge, welche diese beiden Linien zu unserm Integrale liefern, entgegengesetzte Werthe haben, und einander zerstören. Ebenso verhält es sich (zufolge (6)) mit den Beiträgen, welche die beiden Uferlinien des Stromes c_2, das sind die Linien $l\,l'$ und $r\,r'$, zu dem Integrale liefern; anders hingegen mit denjenigen Beiträgen, welche von den Uferlinien des Stromes b_1, nämlich von den Linien $\beta'\gamma$ und $\alpha r'$, $l'\delta$ geliefert werden. Es reducirt sich daher das Integral einerseits auf die Beiträge der beiden Uferlinien des Stromes b_1, und andererseits auf denjenigen Beitrag, welchen das Ufer der von β aus bis zum Puncte z_1 in die Fläche eindringenden Bucht liefert. Somit verwandelt sich die Formel (12) in:

$$(13)\qquad \varphi(l) - \varphi(r) = \int_{b_1}\left(\frac{d\vartheta^\lambda}{\vartheta^\lambda} - \frac{d\vartheta^\varrho}{\vartheta^\varrho}\right) + \int_\beta^{\beta'}\left(\frac{d\vartheta}{\vartheta}\right).$$

Unter $\int_{b_1}$ ist hier wie gewöhnlich eine dem Strom b_1 entlang, und zwar stromabwärts hinerstreckte Integration zu verstehen; gleichzeitig sind unter ϑ^λ, ϑ^ϱ die Werthe zu verstehen, welche ϑ in zwei einander gegenüberliegenden Uferpuncten des Stromes b_1 besitzt; und endlich bezeichnet $\int_\beta^{\beta'}$ eine Integration, welche am Ufer der vorhin genannten Bucht entlang läuft.

In Bezug auf das eben erwähnte Integral

$$\int_\beta^{\beta'}\frac{d\vartheta}{\vartheta}$$

ergiebt sich, durch abermalige Anwendung des Satzes (4), folgende Formel:

$$\varphi(\beta') - \varphi(\beta) = \int_{\beta}^{\beta'} \frac{d\vartheta}{\vartheta}.$$

Nun sind β' und β zwei auf dem linken und rechten Ufer von d_1 einander gegenüberliegende Puncte; zufolge (11) ist daher $\varphi(\beta') - \varphi(\beta) = -2\pi i$; mithin:

$$-2\pi i = \int_{\beta}^{\beta'} \frac{d\vartheta}{\vartheta}.$$

Und hiedurch verwandelt sich unsere Formel (13) in:

$$(14) \qquad \varphi(l) - \varphi(r) = \int_{b_1} \left(\frac{d\vartheta^\lambda}{\vartheta^\lambda} - \frac{d\vartheta^\varrho}{\vartheta} \right) - 2\pi i.$$

Nach (6) ist

$$\text{längs } b_1: \quad \frac{\vartheta^\lambda}{\vartheta^\varrho} = e^{2g_1 - \mathrm{w}_1{}^\lambda - \mathrm{w}_1{}^\varrho},$$

mithin:

$$\text{längs } b_1: \quad \frac{d\vartheta^\lambda}{\vartheta^\lambda} - \frac{d\vartheta^\varrho}{\vartheta^\varrho} = - d\mathrm{w}_1{}^\lambda - d\mathrm{w}_1{}^\varrho.$$

Die Werthe $\mathrm{w}_1{}^\lambda$ und $\mathrm{w}_1{}^\varrho$ unterscheiden sich längs b_1 nur durch eine Constante; die Differentiale $d\mathrm{w}_1{}^\lambda$ und $d\mathrm{w}_1{}^\varrho$ sind daher längs b_1 einander gleich, und können demnach kurzweg mit $d\mathrm{w}_1$ bezeichnet werden. Somit verwandelt sich die Formel (14) in:

$$(15) \qquad \varphi(l) - \varphi(r) = -2 \int_{b_1} d\mathrm{w}_1 - 2\pi i.$$

Nun ist (vergl. die Note auf Seite 426)

$$\int_{b_1} d\mathrm{w}_1 = - [\mathrm{w}_1{}^\lambda - \mathrm{w}_1{}^\varrho]_{a_1} = - a_{11} = - \pi i;$$

folglich:

$$(16) \qquad \varphi(l) - \varphi(r) = + 2\pi i - 2\pi i = 0.$$

Die eindeutige Function $\varphi(z)$ hat also zu beiden Ufern des Stromes c_2 gleiche Werthe. Ebenso wird sich, wie leicht zu übersehen ist, darthun lassen, dass sie auch längs c_3, längs c_4 u. s. w., zu beiden Ufern gleiche Werthe besitzt. Es ist also allgemein

$$(17) \qquad \text{längs } c_\varkappa: \quad \varphi^\lambda - \varphi^\varrho = 0;$$

und die in (7) angegebenen Zahlen $N_\varkappa''$ besitzen demnach sämmtlich den Werth 0.

Mit Rücksicht auf die in (11) und (17) erhaltenen Ergebnisse können wir die Formeln (7) nun gegenwärtig so hinstellen:

$$(18)\quad \begin{aligned} &\text{längs } a_\varkappa: && \varphi^\lambda - \varphi^\varrho = N_\varkappa \,.\, 2\pi i\,; \\ &\text{längs } b_\varkappa: && \varphi^\lambda - \varphi^\varrho = N'_\varkappa \,.\, 2\pi i + 2g_\varkappa - \mathbf{w}_\varkappa^\lambda - \mathbf{w}_\varkappa^\varrho, \\ &\text{längs } c_\varkappa: && \varphi^\lambda - \varphi^\varrho = 0, \\ &\text{längs } d_\varkappa: && \varphi^\lambda - \varphi^\varrho = -2\pi i, \end{aligned}$$

Die ganzen Zahlen $N_\varkappa$ und $N'_\varkappa$ sind hier nach wie vor unbekannt.

Vierter Abschnitt. Fortsetzung. Mit Benutzung der Function φ ergeben sich gewisse s Gleichungen als Ausdruck für die zwischen den Constanten $g_1, g_2, \ldots g_s$ und den Nullpuncten $z_1, z_2, \ldots z_s$ vorhandene gegenseitige Abhängigkeit.

Nachdem wir zu dieser Kenntniss gelangt sind, können wir nun mit unserer auf der Fläche $\mathfrak{S}$ allenthalben eindeutigen und stetigen Function $\varphi(z)$ weiter operiren.

Die Functionen $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_s$ sind auf der ursprünglichen Fläche $\mathfrak{R}$ mit Ausnahme der Ströme a, b überall eindeutig und stetig; sie werden demnach innerhalb der hier betrachteten Fläche $\mathfrak{S}$ allenthalben eindeutig und stetig sein. Zugleich werden, was die Werthe dieser Functionen am Rande von $\mathfrak{S}$ anbelangt, folgende Formeln gelten:

$$(19)\quad \begin{aligned} &\text{längs } a_\varkappa: && \mathbf{w}_\sigma^\lambda - \mathbf{w}_\sigma^\varrho = a_{\sigma\varkappa}, \\ &\text{längs } b_\varkappa: && \mathbf{w}_\sigma^\lambda - \mathbf{w}_\sigma^\varrho = b_{\sigma\varkappa}, \\ &\text{längs } c_\varkappa: && \mathbf{w}_\sigma^\lambda - \mathbf{w}_\sigma^\varrho = 0, \\ &\text{längs } d_\varkappa: && \mathbf{w}_\sigma^\lambda - \mathbf{w}_\sigma^\varrho = 0. \\ & && \sigma = 1, 2, \ldots s. \end{aligned}$$

Da φ sowohl als auch $\mathbf{w}_\sigma$ innerhalb $\mathfrak{S}$ überall eindeutig und stetig sind, so ist das in positiver Richtung um den Rand von $\mathfrak{S}$ herumerstreckte Integral $\int \varphi\, d\mathbf{w}_\sigma$, zufolge eines früher gefundenen allgemeinen Satzes (Seite 330), gleich Null; also:

$$(20)\qquad \int_{\mathfrak{S}} \varphi\, d\mathbf{w}_\sigma = 0.$$

Der Rand von $\mathfrak{S}$ besteht aus den Uferlinien der Ströme a, b, c, d und aus den um die Puncte z_1, z_2, ... z_s beschriebenen kleinen Kreislinien. Bezeichnen wir die Beiträge, welche die beiden Uferlinien des Stromes $a_\varkappa$ zu dem eben angegebenen Randintegral liefern, für den Augenblick mit $A_\varkappa$, ebenso die Beiträge der Ströme $b_\varkappa$, $c_\varkappa$, $d_\varkappa$ mit $B_\varkappa$, $C_\varkappa$, $D_\varkappa$, endlich den Beitrag der um $z_\varkappa$ beschriebenen kleinen Kreislinie mit $K_\varkappa$, so verwandelt sich die Gleichung (20) in

$$\Sigma(A_\varkappa + B_\varkappa + C_\varkappa + D_\varkappa + K_\varkappa) = 0; \tag{21}$$

zugleich wird:

$$A_\varkappa = \int\limits_{a_\varkappa}\left(\varphi^\lambda\, d\mathbf{w}_\sigma^\lambda - \varphi^\varrho d\mathbf{w}_\sigma^\varrho\right),$$

$$B_\varkappa = \int\limits_{b_\varkappa}\left(\varphi^\lambda\, d\mathbf{w}_\sigma^\lambda - \varphi^\varrho\, d\mathbf{w}_\sigma^\varrho\right),$$

$$C_\varkappa = \int\limits_{c_\varkappa}\left(\varphi^\lambda\, d\mathbf{w}_\sigma^\lambda - \varphi^\varrho\, d\mathbf{w}_\sigma^\varrho\right),$$

$$D_\varkappa = \int\limits_{d_\varkappa}\left(\varphi^\lambda\, d\mathbf{w}_\sigma^\lambda - \varphi^\varrho\, d\mathbf{w}_\sigma^\varrho\right),$$

wo die Integrationen längs der Ströme $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, $c_\varkappa$, $d_\varkappa$, und zwar durchweg stromabwärts hinerstreckt sind.

Die Werthe von $A_\varkappa$, $B_\varkappa$, $C_\varkappa$, $D_\varkappa$ verwandeln sich nun mit Rücksicht auf die in (18) und (19) angegebenen Formeln in:

$$\begin{aligned}
A_\varkappa &= \int\limits_{a_\varkappa}(\varphi^\lambda - \varphi^\varrho)\,.\,d\mathbf{w}_\sigma, \\
&= N_\varkappa\,.\,2\pi i\,.\int\limits_{a_\varkappa} d\mathbf{w}_\sigma; \\
B_\varkappa &= \int\limits_{b_\varkappa}(\varphi^\lambda - \varphi^\varrho)\,.\,d\mathbf{w}_\sigma, \\
&= (N'_\varkappa\,.\,2\pi i + 2g_\varkappa)\,.\int\limits_{b_\varkappa} d\mathbf{w}_\sigma - \int\limits_{b_\varkappa}(\mathbf{w}_\varkappa^\lambda + \mathbf{w}_\varkappa^\varrho)\, d\,\mathbf{w}_\sigma; \\
C_\varkappa &= \int\limits_{c_\varkappa}(\varphi^\lambda - \varphi^\varrho)\,.\,d\mathbf{w}_\sigma, \\
&= 0;
\end{aligned}$$

$$D_\varkappa = \int\limits_{d_\varkappa} (\varphi^\lambda - \varphi^\varrho) \, . \, d\mathbf{w}_\sigma,$$
$$= -2\pi i \, . \int\limits_{d_\varkappa} d\mathbf{w}_\sigma.$$

Nun ist (vergl. die Note auf Seite 426):

$$\int\limits_{a_\varkappa} d\mathbf{w}_\sigma = [\mathbf{w}_\sigma^\lambda - \mathbf{w}_\sigma^\varrho]_{b_\varkappa} = b_{\sigma\varkappa},$$
$$\int\limits_{b_\varkappa} d\mathbf{w}_\sigma = -[\mathbf{w}_\sigma^\lambda - \mathbf{w}_\sigma^\varrho]_{a_\varkappa} = -a_{\sigma\varkappa};$$

Ausserdem ist zu bemerken, dass der Strom $d_\varkappa$ in der um $z_\varkappa$ beschriebenen kleinen Kreislinie entspringt, und von hier aus bis zum Puncte $\beta_\varkappa$ fortläuft. Bezeichnet man daher denjenigen Punct der eben genannten Kreislinie, in welchem $d_\varkappa$ entspringt, mit $\zeta_\varkappa$, so wird

$$\int\limits_{d_\varkappa} d\mathbf{w}_\sigma = \mathbf{w}_\sigma(\beta_\varkappa) - \mathbf{w}_\sigma(\zeta_\varkappa)$$

sein. Achtet man hierauf, so verwandeln sich die Werthe von $A_\varkappa$, $B_\varkappa$, $C_\varkappa$, $D_\varkappa$ weiter in:

$$A_\varkappa = 2\pi i \, . \, N_\varkappa \, b_{\varkappa\sigma},$$
$$B_\varkappa = -2\pi i \, N'_\varkappa \, a_{\varkappa\sigma} - 2 g_\varkappa \, a_{\varkappa\sigma} - \int\limits_{b_\varkappa} (\mathbf{w}_\varkappa^\lambda + \mathbf{w}_\varkappa^\varrho) \, d\,\mathbf{w}_\sigma,$$
$$C_\varkappa = 0,$$
$$D_\varkappa = 2\pi i \left(\mathbf{w}_\sigma(\zeta_\varkappa) - \mathbf{w}_\sigma(\beta_\varkappa)\right).$$

Summirt man diese Werthe über sämmtliche Ströme a, b, c, d und beachtet man, dass die Grössen $a_{1\sigma}$, $a_{2\sigma}$, ... $a_{s\sigma}$ mit Ausnahme von $a_{\sigma\sigma}$ alle gleich 0, $a_{\sigma\sigma}$ aber gleich $i\pi$ ist, so erhält man:

$$\Sigma A_\varkappa = 2\pi i \, . \, \Sigma N_\varkappa \, b_{\varkappa\sigma},$$
$$\Sigma B_\varkappa = -2\pi i . N_\sigma' \pi i - 2 g_\sigma \pi i - \Sigma \int\limits_{b_\varkappa} (\mathbf{w}_\varkappa^\lambda + \mathbf{w}_\varkappa^\varrho) d\mathbf{w}_\sigma,$$
$$\Sigma C_\varkappa = 0,$$
$$\Sigma D_\varkappa = 2\pi i \, \Sigma \mathbf{w}_\sigma(\zeta_\varkappa) - 2\pi i \, \Sigma \mathbf{w}_\sigma(\beta_\varkappa),$$

wo die Summationen Σ durchweg über $\varkappa = 1, 2, \ldots s$ hinerstreckt sind. Hiedurch nun verwandelt sich unsere Gleichung (21) in:

$$(22) \qquad N'_\sigma \pi i + g_\sigma = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s}\left(N_\varkappa b_{\varkappa\sigma} + \mathbf{w}_\sigma(\zeta_\varkappa) + \frac{1}{2\pi i}\cdot K_\varkappa\right) -$$

$$- \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s}\left(\mathbf{w}_\sigma(\beta_\varkappa) + \frac{1}{2\pi i}\int_{b_\varkappa}(\mathbf{w}_\varkappa^\lambda + \mathbf{w}_\varkappa^\varrho)\, d\mathbf{w}_\sigma\right)$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$(23) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s}\left(\mathbf{w}_\sigma(\beta_\varkappa) + \frac{1}{2\pi i}\int_{b_\varkappa}(\mathbf{w}_\varkappa^\lambda + \mathbf{w}_\varkappa^\varrho)\, d\mathbf{w}_\sigma\right) = H_\sigma$$

setzt, in:

$$(24) \qquad N'_\sigma \pi i + g_\sigma = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s}\left(N_\varkappa b_{\varkappa\sigma} + \mathbf{w}_\sigma(\zeta_\varkappa) + \frac{1}{2\pi i} K_\varkappa\right) - H_\sigma.$$

Wir konnten die Radien der um die Puncte $z_1, z_2, \ldots z_s$ beschriebenen Kreislinien beliebig klein nehmen. Nehmen wir dieselben unendlich klein, so werden die jenen Kreislinien zugehörigen Integrale $K_1, K_2, \ldots K_s$ sämmtlich gleich Null; und gleichzeitig fallen alsdann die Puncte $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_s$ mit den Puncten $z_1, z_2, \ldots z_s$ zusammen. Somit erhalten wir schliesslich:

$$N'_\sigma \pi i + g_\sigma = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s}(N_\varkappa b_{\varkappa\sigma} + \mathbf{w}_\sigma(z_\varkappa)) - H_\sigma,$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$(25) \quad g_\sigma - (\mathbf{w}_\sigma(z_1) + \mathbf{w}_\sigma(z_2) + \ldots + \mathbf{w}_\sigma(z_s)) = -H_\sigma - N'_\sigma \pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} N_\varkappa b_{\varkappa\sigma},$$

wo H_σ nach wie vor den in (23) angegebenen Werth besitzt.

Bei unserer Untersuchung war $\mathbf{w}_\sigma$ eine unter den Functionen $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_\sigma$ beliebig gewählte. Nehmen wir für $\mathbf{w}_\sigma$ der Reihe nach zuerst $\mathbf{w}_1$, dann $\mathbf{w}_2$, u. s. w., zuletzt $\mathbf{w}_s$, so werden wir folgende mit (25) analoge Gleichungen erhalten:

$$
(26)\quad
\begin{aligned}
&g_1 - (\mathbf{w}_1(z_1) + \mathbf{w}_1(z_2) + \ldots + \mathbf{w}_1(z_s)) = -H_1 - N'_1\pi i + \\
&\qquad\qquad + \Sigma N_\varkappa b_{\varkappa 1},\\
&g_2 - (\mathbf{w}_2(z_1) + \mathbf{w}_2(z_2) + \ldots + \mathbf{w}_2(z_s)) = -H_2 - N'_2\pi i + \\
&\qquad\qquad + \Sigma N_\varkappa b_{\varkappa 2},\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&g_s - (\mathbf{w}_s(z_1) + \mathbf{w}_s(z_2) + \ldots + \mathbf{w}_s(z_s)) = -H_s - N'_s\pi i + \\
&\qquad\qquad + \Sigma N_\varkappa b_{\varkappa s},
\end{aligned}
$$

wo die Summation Σ über $\varkappa = 1, 2, \ldots s$ sich hinerstreckt.

Die Function ϑ, um welche es sich handelt, ist die in (1) Seite 459 angegebene, nämlich die Function:

$$\vartheta = \vartheta(\mathbf{w}_1 - g_1,\ \mathbf{w}_2 - g_2,\ \ldots\ \mathbf{w}_s - g_s).$$

Die in unsern Gleichungen (26) enthaltenen Grössen $g_1, g_2, \ldots g_s$ sind die in dieser Function vorhandenen willkührlichen Constanten, und die in den Gleichungen enthaltenen Puncte z_1, $z_2, \ldots z_s$ sind die s Nullpuncte dieser Function. Ausserdem sind in den Gleichungen noch vorhanden gewisse unbekannte ganze Zahlen N, N', ferner die Functionen $\mathbf{w}$ und die diesen Functionen zugehörigen Constanten b, endlich die Grössen H.

Wir hatten, wie zu Anfang unserer Untersuchung hervorgehoben wurde, die Fläche $\mathfrak{R}$, die Ströme a, b, c und die Functionen $\mathbf{w}$ als unveränderlich betrachtet. Die Functionen $\mathbf{w}$, und die ihnen zugehörigen Constanten b werden also beständig **ein und dieselben** sein. Die in (23) angegebenen Constanten H sind abhängig von den Strömen a, b, c, ferner von den durch diese Ströme bestimmten Puncten β, und endlich von den Functionen $\mathbf{w}$; demnach werden die Grössen H Constante sein, die ebenfalls beständig **ein und dieselben** Werthe behalten.

Veränderlich sind daher in unseren Gleichungen (26) nur die Constanten $g_1, g_2, \ldots g_s$, die Puncte $z_1, z_2, \ldots z_s$ und möglicherweise auch die unbekannten ganzen Zahlen N, N'.

Aendert man die in der Function

$$\vartheta = \vartheta(\mathbf{w}_1 - g_1,\ \mathbf{w}_2 - g_2,\ \ldots\ \mathbf{w}_s - g_s)$$

enthaltenen Constanten $g_1, g_2, \ldots g_s$ auf stetige Weise, so werden sich die der Function zugehörigen Nullpuncte $z_1, z_2, \ldots z_s$ ebenfalls ändern, aber ebenfalls in stetiger Weise. Während diese beiderlei Aenderungen vor sich gehen, bleiben unsere zwischen $g_1, g_2, \ldots g_s$ und $z_1, z_2, \ldots z_s$ gefundenen Gleichungen (26) beständig in Kraft. Auch werden, während diese Aenderungen vor sich gehen, die in den Gleichungen enthaltenen Zahlen N, N' beständig ein und dieselben bleiben. Denn jene Zahlen können sich, weil sie ganze Zahlen sind, nur sprungweise, also nur in einer Art und Weise ändern, welche mit einer stetigen Aenderung der Grössen $g_1, g_2, \ldots g_s, z_1, z_2, \ldots z_s$ unverträglich ist.

Die Gleichungen (26) *sind demnach mit gewissen unveränderlichen Functionen* $\mathbf{w}$, *mit gewissen unveränderlichen Constanten* b, H, *und mit gewissen unbekannten ganzen Zahlen* N, N' *behaftet; sie sind als Relationen anzusehen, welche zwischen den in der Function*

$$\vartheta = \vartheta(\mathbf{w}_1 - g_1, \mathbf{w}_2 - g_2, \ldots \mathbf{w}_s - g_s)$$

enthaltenen, die Beschaffenheit der Function bedingenden veränderlichen Constanten $g_1, g_2, \ldots g_s$ *und zwischen den dieser Function zugehörigen Nullpuncten* $z_1, z_2, \ldots z_s$ *stattfinden.*

Fünfter Abschnitt. Fortsetzung. Berechnung gewisser constanter Integralwerthe, mit welchen die gefundenen s Gleichungen behaftet sind.

Um die hier aufgestellten Relationen besser übersehen zu können, ist es nothwendig, dass wir die Werthe der darin enthaltenen unveränderlichen Grössen H wirklich berechnen. Nun ist (nach Seite 470)

$$(1) \quad H_\sigma = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s}\left(\mathbf{w}_\sigma(\beta_\varkappa) + \frac{1}{2\pi i}\int_{b_\varkappa}(\mathbf{w}_\varkappa^\lambda + \mathbf{w}_\varkappa^\varrho)\, d\,\mathbf{w}_\sigma\right);$$

wir müssen daher die in diesen Werthen auftretenden Integrale

$$(2) \qquad \int_{b_\varkappa}(\mathbf{w}_\varkappa^\lambda + \mathbf{w}_\varkappa^\varrho)\, d\,\mathbf{w}_\sigma$$

näher zu bestimmen suchen. Jedes solches Integral bezieht sich auf zwei der Functionen $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_s$, und ist längs eines der Ströme b stromabwärts hinerstreckt.

Es seien — damit unsere Bezeichnung von unnöthiger Verwickelung befreit werde — $\mathbf{w}$ und $\mathfrak{w}$ irgend zwei unter den Functionen $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_s$; ferner sei b irgend einer unter den Strömen $b_1, b_2, \ldots b_s$. Wir stellen uns die Aufgabe, den Werth des diesen Strom b entlang, und zwar stromabwärts hinerstreckten Integrales

$$(3) \qquad \int_b(\mathbf{w}^\lambda + \mathbf{w}^\varrho)\, d\mathfrak{w}$$

zu ermitteln.

Von den $s+1$ Uebergangslinien $p_1 q_1, p_2 q_2, \ldots p_{s+1} q_{s+1}$, welche sich auf der Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ befinden, bezeichnen wir diejenige, um welche der von uns betrachtete Strom b herumläuft (Fig. 100), kurzweg mit $p\,q$; und gleichzeitig bezeichnen wir unter den Strömen $a_1, a_2, \ldots a_s$ denjenigen, welcher sich mit dem von uns betrachtetem Strome b durchkreuzt, kurzweg mit a. Die Functionen $\mathbf{w}$ und $\mathfrak{w}$ sind auf der Fläche $\mathfrak{R}$ mit Ausnahme der Ströme $a_1, a_2, \ldots a_s, b_1, b_2, \ldots b_s$ allenthalben eindeutig und stetig, in jenen Strömen aber mit constanten Werthdifferenzen behaftet; diese Werthdifferenzen mögen in dem von uns betrachteten Strom b und in dem mit diesem sich durchkreuzenden Strom a in folgender Weise bezeichnet werden:

$$(4)\qquad \begin{array}{lll} \text{Längs } a \text{ sei:} & \mathbf{w}^\lambda - \mathbf{w}^\varrho = A, & \mathfrak{w}^\lambda - \mathfrak{w}^\varrho = \mathfrak{A}, \\ \text{längs } b: & \mathbf{w}^\lambda - \mathbf{w}^\varrho = B, & \mathfrak{w}^\lambda - \mathfrak{w}^\varrho = \mathfrak{B}. \end{array}$$

Alsdann werden, was die von dem Strome b umlaufene Uebergangslinie $p\,q$, und die in den Endpuncten dieser Linie vorhandenen Werthe von $\mathbf{w}$ und $\mathfrak{w}$ anbelangt, folgende Gleichungen stattfinden:

$$(5)\qquad \mathbf{w}(q) - \mathbf{w}(p) = \tfrac{1}{2} A, \quad \mathfrak{w}(q) - \mathfrak{w}(p) = \tfrac{1}{2} \mathfrak{A};$$

wie sich solches aus unsern, über die Functionen $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_s$ angestellten Untersuchungen (vergl. die Formeln (9) Seite 440) sofort ergiebt.

Aus (4) folgt, dass längs unseres Stromes b:

$$\mathbf{w}^\varrho = \mathbf{w}^\lambda - B,$$
$$\mathbf{w}^\lambda + \mathbf{w}^\varrho = 2\mathbf{w}^\lambda - B$$

ist. Das von uns zu betrachtende Integral (3) nimmt daher folgende Gestalt an:

$$(6)\qquad \int\limits_b (\mathbf{w}^\lambda + \mathbf{w}^\varrho)\, d\mathfrak{w} = 2 \int\limits_b \mathbf{w}^\lambda\, d\mathfrak{w} - B \int\limits_b d\mathfrak{w}.$$

Nun ist (vergl. die Note Seite 426):

$$\int\limits_b d\mathfrak{w} = -\left[\mathfrak{w}^\lambda - \mathfrak{w}^\varrho\right]_a,$$

also mit Rücksicht auf (4):

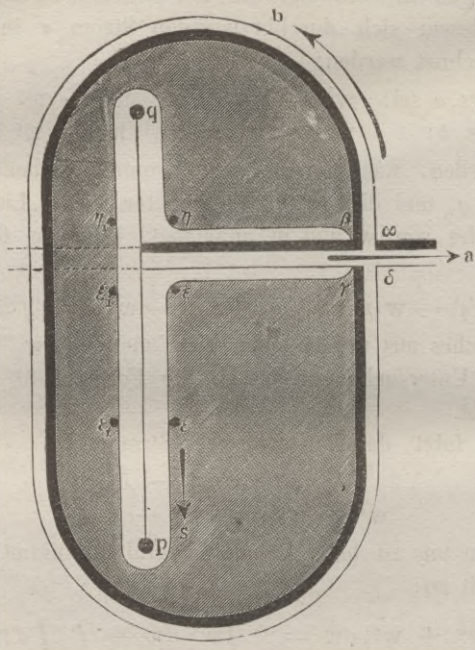
$$\int\limits_b d\mathfrak{w} = -\mathfrak{A}.$$

Somit verwandelt sich die Formel (6) in:

$$(7) \qquad \int_b (\mathrm{w}^\lambda + \mathrm{w}^\varrho)\, d\mathfrak{w} = 2 \int_b \mathrm{w}^\lambda\, d\mathfrak{w} + \mathfrak{A} \cdot B.$$

Es handelt sich um die weitere Berechnung dieses Integrales. Zu diesem Zweck ziehen wir (Fig. 100) auf der Fläche $\mathfrak{R}$ eine Curve, welche vom Puncte γ aus längs des rechten Ufers von a bis zum Puncte ξ, nämlich bis dicht an die Uebergangslinie pq heranläuft, welche sodann dicht an diese Uebergangslinie sich

Fig. 100.



anschmiegend um dieselbe herumläuft, bis sie zum andern Ufer des Stromes a, nämlich zum Puncte η gelangt, und welche schliesslich längs dieses letztern Ufers bis zum Puncte β gelangt. Diese Curve berührt bei ihrem Laufe nach einander die Puncte

$$\gamma,\ \xi,\ p,\ \xi_1,\ \eta_1,\ q,\ \eta,\ \beta;$$

und mag mit s bezeichnet werden. Sie befindet sich, ebenso wie der Strom b, und ebenso wie die Puncte γ und β, ihrem ganzen Laufe nach im oberen Blatt der Fläche $\mathfrak{R}$. Denkt man sich die Ströme oder Schnitte a, b wirklich gezogen, und denkt man sich ferner längs der Curve s hin ebenfalls einen Schnitt ausgeführt, so wird dadurch aus dem oberen Blatt der Fläche $\mathfrak{R}$ ein gewisses Flächenstück vollständig losgetrennt werden; dieses Flächenstück (es ist das in der nebenstehenden Figur durch Schraffirung bemerkbar gemachte) wird theils von der Curve s selber, theils von der linken Uferlinie des Stromes b begrenzt.

Die Functionen $\mathbf{w}$, $\mathfrak{w}$ sind auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überall eindeutig und stetig, mit Ausnahme der Ströme a_1, a_2, ... a_s, b_1, b_2, ... b_s; und sind demnach innerhalb des eben genannten Flächenstückes allenthalben eindeutig und stetig. Zufolge eines schon öfters in Anwendung gebrachten allgemeinen Satzes (Seite 330) muss daher das um den Rand jenes Flächenstückes in positiver Richtung hinerstreckte Integral

$$\int \mathbf{w}\, d\,\mathfrak{w}$$

gleich **Null** sein. Will man aber jenes Flächenstück in positiver Richtung umlaufen, so wird man etwa vom Puncte γ ausgehen, von hier aus zuerst die Curve s durchwandern, bis man nach β gelangt, und sodann von β aus das linke Ufer des Stromes b durchwandern, bis man nach γ wieder zurückgelangt. Das in Rede stehende Randintegral besteht demnach aus zwei Theilen; aus einem Theile, welcher längs der Curve s von γ nach β hinerstreckt ist, und mit

$$\int_s \mathbf{w}\, d\,\mathfrak{w}$$

bezeichnet werden mag, und aus einem zweiten Theile, welcher auf dem linken Ufer des Stromes b stromabwärts, nämlich von β nach γ hinerstreckt ist, und welcher also nach der von uns angenommenen Bezeichnungsweise durch

$$\int_b \mathbf{w}^\lambda\, d\,\mathfrak{w}^\lambda$$

dargestellt wird. Somit ergiebt sich:

$$\int_s \mathbf{w}\, d\,\mathfrak{w} + \int_b \mathbf{w}^\lambda\, d\,\mathfrak{w}^\lambda = 0.$$

oder, weil $d\mathfrak{w}^\lambda$ und $d\mathfrak{w}^\varrho$ einander gleich sind, also beide mit $d\mathfrak{w}$ bezeichnet werden können:

$$(8)\qquad \int\limits_s \mathbf{w}\, d\mathfrak{w} + \int\limits_b \mathbf{w}^\lambda d\mathfrak{w} = 0.$$

Und hiedurch verwandelt sich die von uns gefundene Formel (7) in:

$$(9)\qquad \int\limits_b (\mathbf{w}^\lambda + \mathbf{w}^\varrho) d\mathfrak{w} = \mathfrak{A} \cdot B - 2 \int\limits_s \mathbf{w}\, d\mathfrak{w}.$$

Es handelt sich also gegenwärtig um die Werthbestimmung des über s von γ nach β hinerstreckten Integrales:

$$\int\limits_s \mathbf{w}\, d\mathfrak{w}.$$

Dieses kann in drei Theile zerlegt werden; nämlich in einen ersten Theil, welcher sich auf die dem Strome a zugehörigen Uferstrecken $\gamma\xi$ und $\eta\beta$ bezieht, und welcher mit $[\eta\beta]$ bezeichnet werden mag, sodann in einen zweiten, auf die Strecken ξp und $p\xi_1$ bezüglichen, welcher $[\xi p]$ heissen soll, und endlich in einen dritten Theil, welcher sich auf die Strecken $\eta_1 q$ und $q\eta$ bezieht, und $[q\eta]$ oder $-[\eta q]$ genannt werden mag. Demnach wird:

$$\int\limits_s \mathbf{w}\, d\mathfrak{w} = [\eta\beta] + [\xi p] + [q\eta]^{*)},$$

oder:

$$(10)\qquad \int\limits_s \mathbf{w}\, d\mathfrak{w} = [\eta\beta] + [\xi p] - [\eta q].$$

Der Theil $[\eta\beta]$ lässt sich, falls wir die Werthe der Functionen $\mathbf{w}$, $\mathfrak{w}$ auf dem linken und rechten Ufer des Stromes a, wie gewöhnlich, mit $\mathbf{w}^\lambda$, $\mathfrak{w}^\lambda$ und $\mathbf{w}^\varrho$, $\mathfrak{w}^\varrho$ bezeichnen, in folgender Weise darstellen:

---

*) Die Strecke $\xi_1\eta_1$ ist hiebei vernachlässigt worden. Solches aber ist erlaubt, weil diese Strecke unendlich klein zu denken ist. Die von γ nach β hinlaufende Curve s soll sich nämlich theils dem Strome a, theils der Uebergangslinie pq unendlich nahe anschmiegen; die Puncte ξ, ξ_1, η, η_1 sollen demnach als Puncte betrachtet werden, die einander unendlich nahe liegen, etwa als die vier Eckpuncte eines unendlich kleinen Quadrates.

$$[\eta\beta] = \int_\eta^\beta (\mathbf{w}^\lambda \, d\mathfrak{w}^\lambda - \mathbf{w}^\varrho \, d\mathfrak{w}^\varrho),$$

d. i.

$$[\eta\beta] = \int_\eta^\beta (\mathbf{w}^\lambda - \mathbf{w}^\varrho) \, d\mathfrak{w},$$

also mit Rückblick auf (4):

$$[\eta\beta] = A \cdot \int_\eta^\beta d\mathfrak{w},$$

d. i.

(11). $$[\eta\beta] = A\,[\mathfrak{w}(\beta) - \mathfrak{w}(\eta)].$$

Was ferner die beiden andern Integraltheile $[\xi p]$ und $[\eta q]$ anbelangt, so ergiebt sich:

$$[\xi p] = \int_\xi^p \mathbf{w}\, d\mathfrak{w} + \int_p^{\xi_1} \mathbf{w}\, d\mathfrak{w},$$

$$[\eta q] = \int_\eta^q \mathbf{w}\, d\mathfrak{w} + \int_q^{\eta_1} \mathbf{w}\, d\mathfrak{w},$$

oder, was dasselbe ist:

$$[\xi p] = \int_\xi^p \mathbf{w}\, d\mathfrak{w} - \int_{\xi_1}^p \mathbf{w}\, d\mathfrak{w},$$

$$[\eta q] = \int_\eta^q \mathbf{w}\, d\mathfrak{w} - \int_{\eta_1}^q \mathbf{w}\, d\mathfrak{w},$$

wo die Integrationen sämmtlich über einzelne Strecken der Curve s hinerstreckt sind.

Setzen wir

$$\frac{d\mathbf{w}}{dz} = f, \qquad \frac{d\mathfrak{w}}{dz} = \mathfrak{f},$$

so verwandeln sich diese Formeln in:

(12) $$[\xi p] = \int_\xi^p \mathbf{w}\,\mathfrak{f}\, dz - \int_{\xi_1}^p \mathbf{w}\,\mathfrak{f}\, dz,$$

$$(13)\qquad [\eta q] = \int_{\eta}^{q} \mathfrak{w}\mathfrak{f}\,dz - \int_{\eta_1}^{q} \mathfrak{w}\mathfrak{f}\,dz.$$

Die beiden in (12) vorhandenen Integrationen laufen (Fig. 100) parallel neben einander, nämlich zu beiden Seiten der Uebergangslinie pq, die eine von ξ, die andere von ξ_1 nach p hin. Wir denken uns beide Integrationen zu gleicher Zeit und mit gleicher Schnelligkeit fortschreitend; so dass zwei Puncte wie ε und ε_1, die auf beiden Seiten der Linie pq einander gerade gegenüberliegen, von beiden Integrationen in gleichem Augenblick erreicht werden. Die Werthe des Differentials dz werden dann in beiden Integralen Schritt für Schritt dieselben sein; verschieden hingegen werden in dem einen und in dem andern Integral die Werthe von $\mathbf{w}$ und $\mathfrak{f}$ sein. Bezeichnen wir diese letztern in je zwei einander gegenüberliegenden Puncten, wie ε und ε_1, zur bessern Unterscheidung mit $\mathbf{w}$, $\mathfrak{f}$ und $\mathbf{w}_1$, $\mathfrak{f}_1$, so verwandelt sich die Formel (12) in:

$$[\xi p] = \int_{\xi}^{p} \mathbf{w}\mathfrak{f}\,dz - \int_{\xi_1}^{p} \mathbf{w}_1\mathfrak{f}_1\,dz,$$

oder, was dasselbe ist, in:

$$(14)\qquad [\xi p] = \int_{\xi}^{p} (\mathbf{w}\mathfrak{f} - \mathbf{w}_1\mathfrak{f}_1)\,dz.$$

Desgleichen verwandelt sich bei ähnlicher Bezeichnung die Formel (13) in:

$$(15)\qquad [\eta q] = \int_{\eta}^{q} (\mathbf{w}\mathfrak{f} - \mathbf{w}_1\mathfrak{f}_1)\,dz.$$

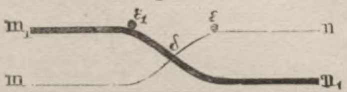
Um diese Formeln nun weiter behandeln zu können, sind zuvörderst einige Bemerkungen über die Functionen

$$\mathbf{w},\ \mathfrak{w}\quad \text{und}\quad \frac{d\mathbf{w}}{dz} = f, \qquad \frac{d\mathfrak{w}}{dz} = \mathfrak{f}$$

erforderlich.

$\mathbf{w}$ und $\mathfrak{w}$ sind irgend zwei unter den Functionen $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_s$. Daraus folgt (vergl. S. 441), dass f und $\mathfrak{f}$ Functionen sind, von denen jede auf der Fläche $\mathfrak{R}$ in über einander liegenden Puncten entgegengesetzte Werthe besitzt. Sind also (Fig. 101) mn und $m_1 n_1$ diejenigen zu $\mathfrak{R}$ gehörigen Flächentheile, welche einander in der Uebergangslinie pq durchsetzen, und ist δ ein Punct jener Uebergangslinie selber, so wird dieser Punct mit zwei einander entgegengesetzten Werthen von f belastet sein, von welchen der eine zum Flächentheile mn, der andere zum Flächentheile $m_1 n_1$ gehört. Sind ferner ε und ε_1 zwei zu mn und zu $m_1 n_1$ gehörige Puncte, welche dem Doppelpuncte δ unendlich nahe liegen, so wird von jenen beiden in δ vorhandenen und einander entgegengesetzten Werthen der eine von gleicher Grösse mit dem in ε vorhandenen sein, der andere von gleicher Grösse mit dem in ε_1 vorhandenen. Demnach werden die in ε und ε_1 befindlichen Werthe von f ebenfalls einander entgegengesetzt sein. Gleiches gilt natürlich auch in Betreff der Werthe von $\mathfrak{f}$.

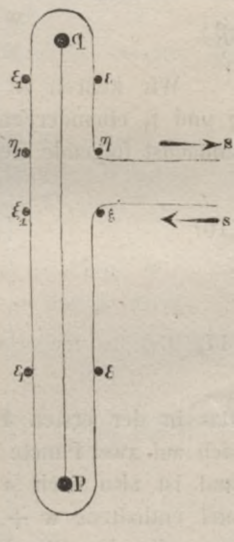
Fig. 101.



Bisher war es vollständig gleichgültig, ob die Puncte ε, ε_1 den Strecken $p\xi$, $p\xi_1$, oder ob sie den Strecken $q\eta$, $q\eta_1$ angehören. Anders verhält es sich, wenn wir nunmehr zur Untersuchung der Werthe von $\mathbf{w}$ und $\mathfrak{w}$ übergehen.

Wir betrachten zuerst zwei Puncte ε, ε_1, die den Strecken $p\xi$, $p\xi_1$ angehören. Da die Function $\mathbf{w}$ längs der Curve s überall stetig ist, so wird das längs dieser Curve von p nach ε hinerstreckte Integral $\int d\mathbf{w}$ gleich der Differenz derjenigen beiden Werthe sein, welche $\mathbf{w}$ in jenen beiden Puncten besitzt; also wird (Fig. 102):

Fig. 102.



$$\int_p^{\varepsilon} d\mathbf{w} = \mathbf{w}(\varepsilon) - \mathbf{w}(p),$$

oder, falls wir $d\mathbf{w}$ mit $\frac{d\mathbf{w}}{dz}\,dz$, d. i. mit $f dz$ vertauschen:

$$\int_p^{\varepsilon} f dz = \mathbf{w}(\varepsilon) - \mathbf{w}(p);$$

ebenso ergiebt sich:

$$\int_p^{\varepsilon_1} f dz = \mathbf{w}(\varepsilon_1) - \mathbf{w}(p).$$

Die in diesen beiden Formeln enthaltenen, über die Strecken $p\varepsilon$ und $p\varepsilon_1$ hinlaufenden Integrale haben aber, weil f in jenen Strecken entgegengesetzte Werthe besitzt, ebenfalls entgegengesetzte Werthe. Durch Addition beider Formeln ergiebt sich daher

$$0 = \mathbf{w}(\varepsilon) + \mathbf{w}(\varepsilon_1) - 2\,\mathbf{w}(p)$$

oder:

$$(\alpha.)\qquad \begin{aligned} &\mathbf{w}(\varepsilon) + \mathbf{w}(\varepsilon_1) = 2\,\mathbf{w}(p), \text{ und ebenso wird:} \\ &\mathfrak{w}(\varepsilon) + \mathfrak{w}(\varepsilon_1) = 2\,\mathfrak{w}(p). \end{aligned}$$

Liegen andererseits die Puncte $\varepsilon, \varepsilon_1$ auf den Strecken $q\eta$, $q\eta_1$, so wird man, wie leicht zu übersehen ist, durch ein ganz analoges Verfahren an Stelle der so eben erhaltenen Gleichungen ($\alpha.$) zwei andere, nämlich folgende finden:

$$(\beta.)\qquad \begin{aligned} \mathbf{w}(\varepsilon) + \mathbf{w}(\varepsilon_1) &= 2\,\mathbf{w}(q), \\ \mathfrak{w}(\varepsilon) + \mathfrak{w}(\varepsilon_1) &= 2\,\mathfrak{w}(q). \end{aligned}$$

Wir kehren zu unsern Formeln (14) und (15) zurück. Da $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$ einander entgegengesetzt sind, so können wir denselben zunächst folgende Gestalt geben:

$$(16)\qquad [\xi p] = \int_\xi^p (\mathbf{w} + \mathbf{w}_1)\,\mathfrak{f}\,dz.$$

$$(17)\qquad [\eta q] = \int_\eta^q (\mathbf{w} + \mathbf{w}_1)\,\mathfrak{f}\,dz.$$

Das in der ersten Formel enthaltene Aggregat $\mathbf{w} + \mathbf{w}_1$ bezieht sich auf zwei Puncte ε, ε_1, die den Strecken $p\xi$, $p\xi_1$ angehören, und ist also nach ($\alpha.$) gleich $2\,\mathbf{w}(p)$. Das in der zweiten Formel enthaltene $\mathbf{w} + \mathbf{w}_1$ hingegen bezieht sich auf zwei Puncte ε, ε_1 die den Strecken $q\eta$, $q\eta_1$ zugehören, ist also nach ($\beta.$) gleich $2\,\mathbf{w}(q)$. Somit verwandeln sich die Formeln in:

$$(18)\qquad [\xi p] = 2\,\mathbf{w}(p) \cdot \int_\xi^p \mathfrak{f}\,dz,$$

$$(19) \qquad [\eta q] = 2\,\mathbf{w}(q) \cdot \int_\eta^q \mathfrak{f}\,dz.$$

Nun ist $\mathfrak{f} = \frac{d\mathfrak{w}}{dz}$, also $\mathfrak{f}\,dz = d\mathfrak{w}$. Demnach ergiebt sich schliesslich:

$$(20) \qquad [\xi p] = 2\,\mathbf{w}(p)\,[\mathfrak{w}(p) - \mathfrak{w}(\xi)],$$

$$(21) \qquad [\eta q] = 2\,\mathbf{w}(q)\,[\mathfrak{w}(q) - \mathfrak{w}(\eta)].$$

Substituiren wir in (10) die in (11), (20), (21) gefundenen Werthe, so erhalten wir:

$$(22) \qquad \int_s \mathbf{w}\,d\mathfrak{w} = A\,[\mathfrak{w}(\beta) - \mathfrak{w}(\eta)] + 2\,\mathbf{w}(p)\,[\mathfrak{w}(p) - \mathfrak{w}(\xi)] \\ - 2\,\mathbf{w}(q)\,[\mathfrak{w}(q) - \mathfrak{w}(\eta)].$$

ξ und η sind (Fig. 100) zwei einander gegenüberliegende Uferpuncte des Stromes a; zufolge (4) und (5) ist daher:

$$(\gamma.) \qquad \mathbf{w}(\eta) - \mathbf{w}(\xi) = A, \quad \mathbf{w}(q) - \mathbf{w}(p) = \tfrac{1}{2} A,$$

$$(\delta.) \qquad \mathfrak{w}(\eta) - \mathfrak{w}(\xi) = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{w}(q) - \mathfrak{w}(p) = \tfrac{1}{2} \mathfrak{A}.$$

Wir können demnach in (22) $\mathfrak{w}(\xi) = \mathfrak{w}(\eta) - \mathfrak{A}$ setzen; thun wir dies, so erhalten wir:

$$\int_s \mathbf{w}\,d\mathfrak{w} = A\,[\mathfrak{w}(\beta) - \mathfrak{w}(\eta)] + 2\,\mathbf{w}(p)\,[\mathfrak{w}(p) - \mathfrak{w}(\eta) + \mathfrak{A}] \\ - 2\,\mathbf{w}(q)\,[\mathfrak{w}(q) - \mathfrak{w}(\eta)]$$

oder:

$$(23) \qquad \int_s \mathbf{w}\,d\mathfrak{w} = 2\,\mathbf{w}(p)\,\mathfrak{w}(p) - 2\,\mathbf{w}(q)\,\mathfrak{w}(q) + A\,\mathfrak{w}(\beta) + \\ + 2\,\mathfrak{A}\,\mathbf{w}(p) + \mathfrak{w}(\eta)\,[2\,\mathbf{w}(q) - 2\,\mathbf{w}(p) - A],$$

oder, weil $2\,\mathbf{w}(q) - 2\,\mathbf{w}(p) - A$, mit Rücksicht auf $(\gamma.)$, gleich Null ist:

$$(24) \qquad \int_s \mathbf{w}\,d\mathfrak{w} = 2\,\mathbf{w}(p)\,\mathfrak{w}(p) - 2\,\mathbf{w}(q)\,\mathfrak{w}(q) + A\,\mathfrak{w}(\beta) + 2\,\mathfrak{A}\,\mathbf{w}(p).$$

Nach $(\gamma.)$, $(\delta.)$ ist:

$$2\,\mathbf{w}(q) = 2\,\mathbf{w}(p) + A,$$
$$2\,\mathfrak{w}(q) = 2\,\mathfrak{w}(p) + \mathfrak{A},$$

mithin durch Multiplication:

$$4\,\mathbf{w}(q)\,\mathfrak{w}(q) - 4\,\mathbf{w}(p)\,\mathfrak{w}(p) = 2\,\mathfrak{A}\,\mathbf{w}(p) + 2\,A\,\mathfrak{w}(p) + \mathfrak{A}A.$$

Und hierdurch verwandelt sich die Formel (24) weiter in:

$$\int\limits_s \mathbf{w}\, d\mathfrak{w} = -\,\mathfrak{A}\,\mathbf{w}(p) - A\,\mathfrak{w}(p) - \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}A + A\,\mathfrak{w}(\beta) + 2\,\mathfrak{A}\,\mathbf{w}(p),$$

d. i. in:

$$(25) \qquad \int\limits_s \mathbf{w}\, d\mathfrak{w} = A\,[\mathfrak{w}(\beta) - \mathfrak{w}(p)] + \mathfrak{A}\,\mathbf{w}(p) - \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}A.$$

Nun hatten wir für das zur Berechnung vorgelegte Integral in (9) folgenden Werth gefunden:

$$\int\limits_b (\mathbf{w}^\lambda + \mathbf{w}^\varrho)\, d\mathfrak{w} = \mathfrak{A}B - 2\int\limits_s \mathbf{w}\, d\mathfrak{w};$$

somit ergiebt sich zufolge (25):

$$(26) \quad \int\limits_b (\mathbf{w}^\lambda + \mathbf{w}^\varrho)\, d\mathfrak{w} = \mathfrak{A}\,[A + B - 2\,\mathbf{w}(p)] + 2\,A\,[\mathfrak{w}(p) - \mathfrak{w}(\beta)].$$

Nehmen wir nun an Stelle des Integrales

$$\int\limits_b (\mathbf{w}^\lambda + \mathbf{w}^\varrho)\, d\mathfrak{w}$$

dasjenige, um welches es uns eigentlich zu thun ist, nämlich das Integral:

$$\int\limits_{b_\varkappa} (\mathbf{w}_\varkappa^\lambda + \mathbf{w}_\varkappa^\varrho)\, d\mathbf{w}_\sigma,$$

so haben wir an Stelle der Ströme und Puncte

$$a, \quad b, \quad p, \quad q, \quad \beta$$

zu nehmen:

$$a_\varkappa, \quad b_\varkappa, \quad p_\varkappa, \quad q_\varkappa, \quad \beta_\varkappa,$$

und ferner an Stelle von

$$\mathbf{w}, \quad A, \quad B, \quad \mathfrak{w}, \quad \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{B}$$

zu setzen:

$$\mathbf{w}_\varkappa, \quad a_{\varkappa\varkappa}, \quad b_{\varkappa\varkappa}, \quad \mathbf{w}_\sigma, \quad a_{\sigma\varkappa}, \quad b_{\sigma\varkappa}.$$

Somit erhalten wir aus (26):

$$(27) \quad \int\limits_{b_\varkappa} (\mathbf{w}_\varkappa^\lambda + \mathbf{w}_\varkappa^\varrho)\, d\mathbf{w}_\sigma = a_{\sigma\varkappa}\,[a_{\varkappa\varkappa} + b_{\varkappa\varkappa} - 2\,\mathbf{w}_\varkappa(p_\varkappa)] + \\ + 2\,a_{\varkappa\varkappa}\,[\mathbf{w}_\sigma(p_\varkappa) - \mathbf{w}_\sigma(\beta_\varkappa)].$$

Summiren wir diese Formel über $\varkappa = 1, 2, \ldots s$, und beachten wir dabei, dass die Grössen $a_{\sigma 1}, a_{\sigma 2}, \ldots a_{\sigma s}$ mit Ausnahme von $a_{\sigma\sigma}$ alle $= 0$, und $a_{\sigma\sigma}$ selber $= i\pi$ ist, so ergiebt sich:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} \int_{b_\varkappa} (\mathbf{w}_\varkappa^\lambda + \mathbf{w}_\varkappa^\varrho)\, d\mathbf{w}_\sigma = i\pi\,[i\pi + b_{\sigma\sigma} - 2\,\mathbf{w}_\sigma(p_\sigma)] + \\ + 2i\pi . \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} [\mathbf{w}_\sigma(p_\varkappa) - \mathbf{w}_\sigma(\beta_\varkappa)],$$

oder, was dasselbe ist:

$$(28) \quad \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} \left(\mathbf{w}_\sigma(\beta_\varkappa) + \frac{1}{2\pi i} \int_{b_\varkappa} (\mathbf{w}_\varkappa^\lambda + \mathbf{w}_\varkappa^\varrho)\, d\mathbf{w}_\sigma \right) = \\ = \tfrac{1}{2}\,[i\pi + b_{\sigma\sigma} - 2\,\mathbf{w}_\sigma(p_\sigma)] + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} \mathbf{w}_\sigma(p_\varkappa).$$

Hieraus aber folgt mit Rückblick auf (1) sofort:

$$(29) \qquad H_\sigma = \tfrac{1}{2}\,[i\pi + b_{\sigma\sigma} - 2\,\mathbf{w}_\sigma(p_\sigma)] + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} \mathbf{w}_\sigma(p_\varkappa).$$

Nun ist, wie wir früher [Formel (14) S. 441] gefunden haben:

$$2\,\mathbf{w}_\sigma(p_\sigma) = 2\,\mathbf{w}_\sigma(p_{s+1}) + b_{\sigma\sigma} - i\pi.$$

Setzen wir für $\mathbf{w}_\sigma(p_\sigma)$ diesen Werth in (29) ein, so erhalten wir:

$$(30) \qquad H_\sigma = i\pi - \mathbf{w}_\sigma(p_{s+1}) + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} \mathbf{w}_\sigma(p_\varkappa).$$

Da die Werthe der Functionen $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_s$ in den Puncten p, q identisch sind mit den Fundamentalwerthen, welche die Integrale $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_s$ in eben denselben Puncten besitzen, so können wir diese Formel auch so darstellen:

$$(31) \qquad H_\sigma = i\pi - \overline{\omega}_\sigma(p_{s+1}) + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} \overline{\omega}_\sigma(p_\varkappa).$$

Nun ist aber zufolge unserer in Betreff der Integrale Ω und ω gemachten Festsetzungen (vergl. S. 405)

$$\overline{\omega}_\sigma(p_{s+1}) = \overline{\omega}_\sigma(p_1) + \overline{\omega}_\sigma(p_2) + \ldots + \overline{\omega}_\sigma(p_s),$$

d. i.

$$\overline{\omega}_\sigma(p_{s+1}) = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} \overline{\omega}_\sigma(p_\varkappa).$$

Somit verwandelt sich der für H_σ erhaltene Werth schliesslich in

$$H_\sigma = i\pi. \tag{32}$$

Sechster Abschnitt. Die in der Function $\vartheta\,(\mathbf{w}_1 - g_1, \mathbf{w}_2 - g_2, \ldots \mathbf{w}_s - g_s)$ enthaltenen willkührlichen Constanten $g_1, g_2, \ldots g_s$ lassen sich jederzeit der Art bestimmen, dass die Function in s beliebig gegebenen Puncten $z_1, z_2, \ldots z_s$ Null wird.

Wir haben so eben gefunden, dass die Grössen $H_1, H_2, \ldots H_s$ sämmtlich gleich $i\pi$ sind. Substituiren wir diese Werthe in die früher (S. 471) gefundenen Gleichungen:

$$g_1 - [\mathbf{w}_1(z_1) + \mathbf{w}_1(z_2) + \ldots + \mathbf{w}_1(z_s)] = -H_1 - N_1'\pi i + \Sigma N_\varkappa b_{\varkappa 1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

so verwandeln sich dieselben, falls wir die Zahlen $-(N_1' + 1)$, $-(N_2' + 1)$, ... mit $M_1, M_2, \ldots$ bezeichnen, in:

$$g_1 - [\mathbf{w}_1(z_1) + \mathbf{w}_1(z_2) + \ldots + \mathbf{w}_1(z_s)] = M_1\pi i + \Sigma N_\varkappa b_{\varkappa 1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Demnach können wir den früher (S. 472) erhaltenen Satz gegenwärtig so aussprechen:

Zwischen den in der Function

$$\vartheta = \vartheta\,(\mathbf{w}_1 - g_1, \mathbf{w}_2 - g_2, \ldots \mathbf{w}_s - g_s) \tag{1}$$

enthaltenen, die Beschaffenheit dieser Function bedingenden veränderlichen Constanten $g_1, g_2, \ldots g_s$ und zwischen den der Function zugehörigen Nullpuncten $z_1, z_2, \ldots z_s$ finden jederzeit folgende Relationen statt:

$$\begin{aligned} &g_1 - [\mathbf{w}_1(z_1) + \mathbf{w}_1(z_2) + \ldots + \mathbf{w}_1(z_s)] = M_1\pi i + \Sigma N_\varkappa b_{\varkappa 1},\\ &g_2 - [\mathbf{w}_2(z_1) + \mathbf{w}_2(z_2) + \ldots + \mathbf{w}_2(z_s)] = M_2\pi i + \Sigma N_\varkappa b_{\varkappa 2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &g_s - [\mathbf{w}_s(z_1) + \mathbf{w}_s(z_2) + \ldots + \mathbf{w}_s(z_s)] = M_s\pi i + \Sigma N_\varkappa b_{\varkappa s}. \end{aligned} \tag{2}$$

Unter den b sind hier die den unveränderlichen Functionen $\mathbf{w}$ *zu gehörigen, ebenfalls unveränderlichen Constanten zu verstehen; ferner unter den M, N irgend welche unbekannte ganze Zahlen. Die Summation Σ ist über $\varkappa = 1, 2, \ldots s$ hinerstreckt.*

Lassen wir die in der Function ϑ enthaltenen Constanten $g_1, g_2, \ldots g_s$ um irgend welche unendlich kleine Grössen dg_1, $dg_2, \ldots dg_s$ anwachsen, so werden gleichzeitig auch die der Function zugehörigen Nullpuncte $z_1, z_2, \ldots z_s$ gewisse unendlich kleine Verschiebungen erleiden, welche mit $dz_1, dz_2, \ldots dz_s$ bezeichnet werden mögen. Zwischen jenen Zuwächsen und zwischen diesen Verschiebungen werden — wie sich aus den vorstehenden Relationen unmittelbar ergiebt — falls wir zur Abkürzung

$$\frac{d\mathbf{w}_1(z)}{dz} = f_1(z), \quad \frac{d\mathbf{w}_2(z)}{dz} = f_2(z), \ldots, \quad \frac{d\mathbf{w}_s(z)}{dz} = f_s(z)$$

setzen, folgende Beziehungen stattfinden:

$$(3) \quad \begin{aligned} dg_1 &= f_1(z_1)\,dz_1 + f_1(z_2)\,dz_2 + \ldots + f_1(z_s)\,dz_s, \\ dg_2 &= f_2(z_1)\,dz_1 + f_2(z_2)\,dz_2 + \ldots + f_2(z_s)\,dz_s, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dg_s &= f_s(z_1)\,dz_1 + f_s(z_2)\,dz_2 + \ldots + f_s(z_s)\,dz_s. \end{aligned}$$

Bei Ueberschreitung der Ströme a, b sind die Functionen $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_s$ unstetig, mithin ihre Differentialquotienten $f_1, f_2, \ldots f_s$ ohne bestimmte Bedeutung, folglich die Gleichungen (3) ungültig, oder wenigstens ohne bestimmten Sinn. Gültig aber werden diese Gleichungen sein, so weit die Functionen $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_s$ stetig bleiben; sie werden also gültig sein innerhalb der von den Strömen a, b, c umrandeten, einfach zusammenhängenden Fläche $\mathfrak{N}'$.

Es zeigen diese Gleichungen, wie man, falls die Zuwüchse dg gegeben sind, verfahren muss, um die resultirenden Verschiebungen dz zu berechnen. Sie zeigen ferner, dass man jene Zuwüchse dg der Art wählen kann, dass die resultirenden Verschiebungen dz beliebig gegebene Werthe annehmen; vorausgesetzt, dass durch diese gegebenen Werthe der Grössen dz keine Ueberschreitung der Ströme a, b, c bedingt ist.

Die Gleichungen zeigen also, dass man durch geeignete Abänderungen der in der Function

$$\vartheta = \vartheta\,(\mathbf{w}_1 - g_1, \mathbf{w}_2 - g_2, \ldots \mathbf{w}_s - g_s)$$

enthaltenen Constanten $g_1, g_2, \ldots g_s$ die Nullpuncte dieser Function von ihren ursprünglichen Orten $z_1, z_2, \ldots z_s$ nach beliebig gegebenen Nachbarorten hinwandern lassen kann; vorausgesetzt, dass die ursprünglichen Orte und die Nachbarorte durch keinen der Ströme a, b, c von einander geschieden sind.

Wir wollen uns die Constanten $g_1, g_2, \ldots g_s$ zu Anfang willkührlich gewählt denken; ihre Werthe seien $g_1^0, g_2^0, \ldots g_s^0$. Die Function

$$\vartheta = \vartheta(\mathrm{w}_1 - g_1, \mathrm{w}_2 - g_2, \ldots \mathrm{w}_s - g_s)$$

besitzt jederzeit s Nullpuncte erster Ordnung (S. 452); diejenigen Lagen, welche diese Puncte besitzen, sobald wir den Constanten $g_1, g_2, \ldots g_s$ die eben angegebenen Werthe zuertheilen, mögen mit $z_1^0, z_2^0, \ldots z_s^0$ bezeichnet werden.

Es seien nun $Z_1, Z_2, \ldots Z_s$ irgend welche andere Puncte, also Puncte, die auf der Fläche $\mathfrak{R}'$ ganz beliebig gegeben sind. Wir denken uns eine Curve gezogen, welche von z_1^0 nach Z_1 geht, und welche ihrem ganzen Laufe nach innerhalb $\mathfrak{R}'$ bleibt, die Ströme a, b, c also nirgends überschreitet. Die auf einander folgenden Puncte dieser Curve mögen

$$z_1^0, z_1', z_1'', \ldots Z_1$$

sein. Desgleichen denken wir uns eine solche Curve von z_2^0 nach Z_2, u. s. w., endlich eine letzte Curve von z_s^0 nach Z_s gezogen, und bezeichnen die auf einander folgenden Puncte dieser Curven mit

$$\begin{array}{c} z_2^0, z_2', z_2'', \ldots Z_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z_s^0, z_s', z_s'', \ldots Z_s. \end{array}$$

Zufolge der zuvor gemachten Bemerkung werden wir nun die gegebenen Constanten $g_1^0, g_2^0, \ldots g_s^0$ der Art abändern können, dass die Nullpuncte unserer Function von ihren ursprünglichen Orten $z_1^0, z_2^0, \ldots z_s^0$ nach den benachbarten Orten $z_1', z_2', \ldots z_s'$ hinwandern; sodann werden wir jene Constanten weiter abändern können, der Art, dass die Nullpuncte nach $z_1'', z_2'', \ldots z_s''$ hingelangen, u. s. w.; indem wir in solcher Weise fortfahren, werden wir es schliesslich dahin bringen können, dass die Nullpuncte nach den Orten $Z_1, Z_2, \ldots Z_s$ gelangen. Diese Orte waren aber willkührlich gegebene. Wir haben demnach folgenden Satz:

Durch geeignete Wahl der in der Function

$$\vartheta(\mathrm{w}_1 - g_1, \mathrm{w}_2 - g_2, \ldots \mathrm{w}_s - g_s)$$

enthaltenen Constanten $g_1, g_2, \ldots g_s$ kann man es jederzeit dahin bringen, dass die Function in s beliebig gegebenen Puncten verschwindet.

Es seien $z_1, z_2, \ldots z_s$ beliebig gegebene Puncte; und die in der Function

$$(1) \qquad f = \vartheta(\mathrm{w}_1 - g_1, \mathrm{w}_2 - g_2, \ldots \mathrm{w}_s - g_s)$$

enthaltenen Constanten $g_1, g_2, \ldots g_s$ mögen — durch Anwendung irgend welcher Mittel — der Art bestimmt worden sein, dass die Function in jenen s Puncten verschwindet. Zufolge des kürzlich gefundenen Satzes (S. 484) finden alsdann zwischen diesen Constanten und zwischen jenen Puncten folgende Relationen statt:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
g_1 &= \mathrm{w}_1(z_1) + \mathrm{w}_1(z_2) + \ldots + \mathrm{w}_1(z_s) + M_1\pi i + \Sigma N_\varkappa b_{\varkappa 1},\\
g_2 &= \mathrm{w}_2(z_1) + \mathrm{w}_2(z_2) + \ldots + \mathrm{w}_2(z_s) + M_2\pi i + \Sigma N_\varkappa b_{\varkappa 2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
g_s &= \mathrm{w}_s(z_1) + \mathrm{w}_s(z_2) + \ldots + \mathrm{w}_s(z_s) + M_s\pi i + \Sigma N_\varkappa b_{\varkappa s},
\end{aligned}
$$

wo die M, N irgend welche unbekannte ganze Zahlen vorstellen, und wo die Summationen Σ über $\varkappa = 1, 2, \ldots s$ hinerstreckt sind.

Nun können, wie sich aus einem früher gefundenen Satze (S. 453) ergiebt, mit den in f vorhandenen Constanten $g_1, g_2, \ldots g_s$ gewisse Aenderungen vorgenommen werden, ohne dass die Nullpuncte von f dadurch irgend welche Lagenveränderung erleiden. Es werden nämlich, wie aus jenem Satze folgt, die Nullpuncte von f ungestört an ihren ursprünglichen Orten, d. i. in den gegebenen Puncten $z_1, z_2, \ldots z_s$ liegen bleiben, sobald man gleichzeitig

$$
\begin{aligned}
&g_1 \quad \text{um} \quad m_1\pi i + \Sigma n_\varkappa b_{\varkappa 1},\\
&g_2 \quad \text{um} \quad m_2\pi i + \Sigma n_\varkappa b_{\varkappa 2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&g_s \quad \text{um} \quad m_s\pi i + \Sigma n_\varkappa b_{\varkappa s}
\end{aligned}
$$

vermehrt. Unter den m, n sind dabei völlig willkührliche ganze Zahlen zu verstehen, und unter Σ eine Summation, welche über $\varkappa = 1, 2, \ldots s$ hinerstreckt ist.

Die ursprünglichen Werthe der Constanten $g_1, g_2, \ldots g_s$ sind durch die Formeln (2) dargestellt. Aendert man diese Constanten in der eben angegebenen Weise, so werden die in jenen Formeln enthaltenen unbekannten ganzen Zahlen

$$
\begin{gathered}
M_1,\ M_2,\ \ldots\ M_s,\\
N_1,\ N_2,\ \ldots\ N_s
\end{gathered}
$$

in irgend welche andere ganze Zahlen, und zwar in Zahlen übergehen, deren Werthe völlig willkührlich sind.

Sind demnach

$$
\begin{gathered}
\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots\ \mu_s,\\
\nu_1,\ \nu_2,\ \ldots\ \nu_s
\end{gathered}
$$

irgend welche willkührlich gewählte ganze Zahlen, und bildet man nun die Constanten

$$G_1 = \mathrm{w}_1(z_1) + \mathrm{w}_1(z_2) + \dots + \mathrm{w}_1(z_s) + \mu_1 \pi i + \Sigma \nu_\varkappa b_{\varkappa 1},$$
$$G_2 = \mathrm{w}_2(z_1) + \mathrm{w}_2(z_2) + \dots + \mathrm{w}_2(z_s) + \mu_2 \pi i + \Sigma \nu_\varkappa b_{\varkappa 2},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$G_s = \mathrm{w}_s(z_1) + \mathrm{w}_s(z_2) + \dots + \mathrm{w}_s(z_s) + \mu_s \pi i + \Sigma \nu_\varkappa b_{\varkappa s},$$

welche von den Constanten $g_1, g_2, \dots g_s$ sich nur dadurch unterscheiden, dass bei ihrer Zusammensetzung die willkührlichen Zahlen μ, ν statt der unbekannten Zahlen M, N angewendet sind, so wird die diesen Constanten $G_1, G_2, \dots G_s$ entsprechende Function

$$F = \vartheta(\mathrm{w}_1 - G_1, \mathrm{w}_2 - G_2, \dots \mathrm{w}_s - G_s),$$

ebenso wie die ursprüngliche Function f, in den gegebenen Puncten $z_1, z_2, \dots z_s$ verschwinden. Wir gelangen also zu folgendem Satz:

Sind $z_1, z_2, \dots z_s$ beliebig gegebene Puncte, ferner $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_s$, $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_s$ beliebig gewählte ganze Zahlen, und sind endlich $G_1, G_2, \dots G_s$ die mit Anwendung jener Puncte und Zahlen zusammengesetzten Constanten:

$$G_1 = \mathrm{w}_1(z_1) + \mathrm{w}_1(z_2) + \dots + \mathrm{w}_1(z_s) + \mu_1 \pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} \nu_\varkappa b_{\varkappa 1},$$

(3) $$G_2 = \mathrm{w}_2(z_1) + \mathrm{w}_2(z_2) + \dots + \mathrm{w}_2(z_s) + \mu_2 \pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} \nu_\varkappa b_{\varkappa 2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$G_s = \mathrm{w}_s(z_1) + \mathrm{w}_s(z_2) + \dots + \mathrm{w}_s(z_s) + \mu_s \pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} \nu_\varkappa b_{\varkappa s},$$

so wird

(4) $$\vartheta = (\mathrm{w}_1 - G_1, \mathrm{w}_2 - G_2, \dots \mathrm{w}_s - G_s)$$

eine von z abhängende Function sein, welche in den gegebenen Puncten $z_1, z_2, \dots z_s$ verschwindet.

Siebenter Abschnitt. Allgemeine Bemerkungen über die zwischen den willkührlichen Constanten $g_1, g_2, \dots g_s$ und zwischen den Nullpuncten $z_1, z_2, \dots z_s$ gefundenen s Gleichungen.

Wir fahren in unserer Untersuchung weiter fort. Es seien also nach wie vor $z_1, z_2, \dots z_s$ beliebig gegebene Puncte, $G_1, G_2, \dots G_s$ die in (3) angegebenen Constanten, und F die in (4) angegebene Function; also

$$F = \vartheta(\mathbf{w}_1 - G_1, \mathbf{w}_2 - G_2, \ldots \mathbf{w}_s - G_s)$$

oder, wenn wir der grösseren Deutlichkeit willen $\mathbf{w}_1(z)$, $\mathbf{w}_2(z)$, ... $\mathbf{w}_s(z)$ statt $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, ... $\mathbf{w}_s$ setzen:

$$(5) \qquad F = \vartheta(\mathbf{w}_1(z) - G_1, \mathbf{w}_2(z) - G_2, \ldots, \mathbf{w}_s(z) - G_s).$$

Wir wissen zufolge des eben aufgestellten Satzes, dass diese Function verschwindet in den gegebenen Puncten z_1, z_2, ... z_s. Sie verschwindet also, wenn wir den in ihr enthaltenen variablen Punct z in irgend einen von jenen s gegebenen Puncten, z. B. in den Punct z_s hineinfallen lassen. Sie verschwindet demnach, sobald man die in ihr enthaltenen Argumente

$$\mathbf{w}_1(z) - G_1, \quad \mathbf{w}_2(z) - G_2, \ldots, \mathbf{w}_s(z) - G_s$$

in

$$\mathbf{w}_1(z_s) - G_1, \quad \mathbf{w}_2(z_s) - G_2, \ldots, \mathbf{w}_s(z_s) - G_s$$

umwandelt. Mit andern Worten: der Ausdruck

$$\vartheta(A_1, A_2, \ldots A_s)$$

verschwindet, sobald man

$$\begin{aligned} A_1 &= \mathbf{w}_1(z_s) - G_1, \\ A_2 &= \mathbf{w}_2(z_s) - G_2, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_s &= \mathbf{w}_s(z_s) - G_s, \end{aligned}$$

setzt. Die hier angegebenen Grössen A_1, A_2, ... A_s haben aber, falls man für die G_1, G_2, ... G_s ihre Werthe (3) einsetzt, folgende Bedeutungen:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\left\{\mathbf{w}_1(z_1) + \mathbf{w}_1(z_2) + \ldots + \mathbf{w}_1(z_{s-1}) + \mu_1 \pi i + \Sigma \nu_\varkappa b_{\varkappa 1}\right\}, \\ A_2 &= -\left\{\mathbf{w}_2(z_1) + \mathbf{w}_2(z_2) + \ldots + \mathbf{w}_2(z_{s-1}) + \mu_2 \pi i + \Sigma \nu_\varkappa b_{\varkappa 2}\right\}, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_s &= -\left\{\mathbf{w}_s(z_1) + \mathbf{w}_s(z_2) + \ldots + \mathbf{w}_s(z_{s-1}) + \mu_s \pi i + \Sigma \nu_\varkappa b_{\varkappa s}\right\}. \end{aligned}$$

Nach einer allgemeinen Eigenschaft des Ausdruckes ϑ (vergl. S. 446) erleidet der Werth eines solchen Ausdruckes keinerlei Aenderung, sobald seine sämmtlichen Argumente in ihr Gegentheil umschlagen.

Wenn also $\vartheta(A_1, A_2, \ldots, A_s)$ verschwindet, so wird $\vartheta(-A_1, -A_2, \ldots, -A_s)$ ebenfalls verschwinden. Somit ergiebt sich folgender Satz:

Versteht man unter z_1, z_2, ... z_{s-1} beliebig gewählte Puncte, ferner unter μ_1, μ_2, ... μ_s, ν_1, ν_2, ... ν_s beliebig gewählte ganze

Zahlen, und endlich unter A_1, A_2, ... A_s die aus diesen Puncten und Zahlen zusammengesetzten Grössen:

$$A_1 = \mathrm{w}_1(z_1) + \mathrm{w}_1(z_2) + \ldots + \mathrm{w}_1(z_{s-1}) + \mu_1 \pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} \nu_\varkappa b_{\varkappa 1},$$

$$A_2 = \mathrm{w}_2(z_1) + \mathrm{w}_2(z_2) + \ldots + \mathrm{w}_2(z_{s-1}) + \mu_2 \pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} \nu_\varkappa b_{\varkappa 2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_s = \mathrm{w}_s(z_1) + \mathrm{w}_s(z_2) + \ldots + \mathrm{w}_s(z_{s-1}) + \mu_s \pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} \nu_\varkappa b_{\varkappa s},$$

so werden die Ausdrücke

$$\vartheta\,(A_1, A_2, \ldots, A_s)$$

und

$$\vartheta\,(-A_1, -A_2, \ldots, -A_s)$$

jederzeit gleich Null sein.

Leicht lässt sich übrigens auch der umgekehrte Satz erweisen.

Es seien A_1, A_2, ... A_s beliebig gegebene Constanten, jedoch der Art beschaffen, dass

$$\vartheta\,(A_1, A_2, \ldots, A_s) = 0, \tag{1}$$

mithin auch

$$\vartheta\,(-A_1, -A_2, \ldots, -A_s) = 0 \tag{2}$$

ist. Wir denken uns einen beliebig gelegenen festen Punct c, bilden die Constanten

$$\begin{aligned} g_1 &= \mathrm{w}_1(c) + A_1, \\ g_2 &= \mathrm{w}_2(c) + A_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ g_s &= \mathrm{w}_s(c) + A_s, \end{aligned} \tag{3}$$

und bilden endlich mit Anwendung dieser Constanten $g_1, g_2, \ldots g_s$ die von z abhängende Function:

$$F = \vartheta\,(\mathrm{w}_1(z) - g_1, \mathrm{w}_2(z) - g_2, \ldots, \mathrm{w}_s(z) - g_s). \tag{4}$$

Die in dieser Function vorhandenen Argumente verwandeln sich, wenn man den variablen Punct z in den Punct c hineinfallen lässt, in

$$\mathrm{w}_1(c) - g_1, \mathrm{w}_2(c) - g_2, \ldots, \mathrm{w}_s(c) - g_s,$$

d. i. zufolge (3) in

$$-A_1, -A_2, \ldots, -A_s.$$

Mit Rückblick auf (2) ergiebt sich daher, dass die Function F im Puncte c verschwindet. Die Function F besitzt (vgl. S. 452) im Ganzen s Nullpuncte. Einer von diesen ist also der Punct c; die übrigen sind unbekannt, und mögen mit $z_1, z_2, \ldots z_{s-1}$ bezeichnet werden. Zufolge eines kürzlich gefundenen Satzes (S. 484) müssen zwischen diesen Nullpuncten $c, z_1, z_2, \ldots z_{s-1}$ und zwischen den in der Function enthaltenen Constanten $g_1, g_2, \ldots g_s$ folgende Relationen stattfinden:

$$g_1 - [\mathbf{w}_1(c) + \mathbf{w}_1(z_1) + \ldots + \mathbf{w}_1(z_{s-1})] = M_1\pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} N_\varkappa b_{\varkappa 1},$$

. . . .

wo die M, N irgend welche unbekannte ganze Zahlen vorstellen. Mit Rückblick auf (3) verwandeln sich diese Relationen in:

$$A_1 - [\mathbf{w}_1(z_1) + \ldots + \mathbf{w}_1(z_{s-1})] = M_1\pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} N_\varkappa b_{\varkappa 1}.$$

. . . .

Somit gelangen wir zu einem Satz, der als eine Umkehrung des vorhergehenden angesehen werden kann, und so lautet:

Sind $A_1, A_2, \ldots A_s$ irgend welche Constanten von solcher Beschaffenheit, dass

$$\vartheta(A_1, A_2, \ldots A_s)$$

gleich ***Null*** *ist, so werden sich die Werthe dieser Constanten jederzeit in folgender Art darstellen lassen:*

$$A_1 = \mathbf{w}_1(z_1) + \mathbf{w}_1(z_2) + \ldots + \mathbf{w}_1(z_{s-1}) + M_1\pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=} N_\varkappa b_{\varkappa 1},$$

$$A_2 = \mathbf{w}_2(z_1) + \mathbf{w}_2(z_2) + \ldots + \mathbf{w}_2(z_{s-1}) + M_2\pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} N_\varkappa b_{\varkappa 2},$$

. . . .

$$A_s = \mathbf{w}_s(z_1) + \mathbf{w}_s(z_2) + \ldots + \mathbf{w}_s(z_{s-1}) + M_s\pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} N_\varkappa b_{\varkappa s}.$$

Unter $z_1, z_2, \ldots z_{s-1}$ sind hier passend zu wählende Puncte, und unter den M, N passend zu wählende ganze Zahlen zu verstehen.

Es seien folgende Gleichungen vorgelegt:

$$(1)\quad \begin{aligned} g_1 &= \mathrm{w}_1(z_1) + \mathrm{w}_1(z_2) + \ldots + \mathrm{w}_1(z_s) + m_1 \pi i + \Sigma n_\varkappa b_{\varkappa 1}, \\ g_2 &= \mathrm{w}_2(z_1) + \mathrm{w}_2(z_2) + \ldots + \mathrm{w}_2(z_s) + m_2 \pi i + \Sigma n_\varkappa b_{\varkappa 2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_s &= \mathrm{w}_s(z_1) + \mathrm{w}_s(z_2) + \ldots + \mathrm{w}_s(z_s) + m_s \pi i + \Sigma n_\varkappa b_{\varkappa s}, \end{aligned}$$

wo die Summationen Σ über $\varkappa = 1, 2, \ldots s$ hinerstreckt sind. Gegeben seien die Constanten g, unbekannt hingegen die Puncte z und die ganzen Zahlen m, n; diese Puncte und Zahlen sollen der Art bestimmt werden, dass jenen Gleichungen Genüge geschieht.

Es fragt sich, wie viele Lösungen diese Aufgabe zulässt.

Wir beginnen damit, dass wir mit Anwendung der gegebenen Constanten g folgende von z abhängende Function bilden:

$$(2)\qquad F = \vartheta\,(\mathrm{w}_1(z) - g_1,\ \mathrm{w}_2(z) - g_2,\ \ldots,\ \mathrm{w}_s(z) - g_s).$$

Ist $Z_1, Z_2, \ldots Z_s$, $M_1, M_2, \ldots M_s$, $N_1, N_2, \ldots N_s$ irgend ein Punct- und Zahlensystem, welches den Gleichungen (1) Genüge leistet, so wird man in dieser Function F an Stelle von g_1 den Ausdruck

$$\mathrm{w}_1(Z_1) + \mathrm{w}_1(Z_2) \ldots + \mathrm{w}_1(Z_s) + M_1 \pi i + \Sigma N_\varkappa b_{\varkappa 1},$$

und analoge Ausdrücke für die Constanten $g_2, \ldots g_s$ setzen können. Hieraus aber folgt mit Rücksicht auf einen kürzlich gefundenen Satz (S. 488) sofort, dass die Function F in den Puncten $Z_1, Z_2, \ldots Z_s$ verschwindet.

Die mit den gegebenen Constanten $g_1, g_2, \ldots g_s$ behaftete Function F wird also in den Puncten $Z_1, Z_2, \ldots Z_s$ jederzeit verschwinden, sobald nur diese Puncte, in Verbindung mit irgend welchen ganzen Zahlen M, N, den Gleichungen (1) Genüge leisten. Sind daher $Z_1', Z_2', \ldots Z_s'$ andere Puncte, die jenen Gleichungen ebenfalls Genüge leisten, so wird die Function F in diesen letztern Puncten ebenfalls verschwinden.

Wir wissen aber (vergl. S. 452), dass die Function F niemals in mehr als s Puncten verschwinden kann. Genügen also $Z_1, Z_2, \ldots Z_s$ den Gleichungen (1), und genügen $Z_1', Z_2', \ldots Z_s'$ denselben ebenfalls, so müssen die ersteren Puncte nothwendig identisch sein mit den letztern.

Für die Gleichungen (1) kann demnach, wenigstens was die Puncte $z_1, z_2, \ldots z_s$ anbelangt, niemals mehr als **eine** Lösung existiren.

Es fragt sich andererseits, ob die Gleichungen (1) überhaupt immer auflösbar sind. Auch hierüber giebt uns die aus den gegebenen Constanten $g_1, g_2, \ldots g_s$ gebildete Function F Auskunft. Diese Function verschwindet nämlich, wie wir wissen, jederzeit in s Puncten.

Sind aber $c_1, c_2, \ldots c_s$ die Puncte, in welchen

$$\vartheta\,(\mathbf{w}_1 - g_1,\ \mathbf{w}_2 - g_2,\ \ldots\ \mathbf{w}_s - g_s)$$

verschwindet, so finden zwischen jenen Puncten, und zwischen den in der Function enthaltenen Constanten jederzeit folgende Relationen statt (vergl. S. 484):

$$g_1 - [\mathbf{w}_1(c_1) + \mathbf{w}_1(c_2) + \ldots + \mathbf{w}_1(c_s)] = M_1\pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} N_\varkappa b_{\varkappa 1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

wo die M, N irgend welche unbekannte ganze Zahlen vorstellen. Daraus folgt, dass jene Puncte $c_1, c_2, \ldots c_s$ den Gleichungen (1) Genüge leisten, dass also jene Gleichungen **immer auflösbar** sind.

Wir gelangen demnach zu folgendem Satz:

Versteht man in den Gleichungen

$$g_1 = \mathbf{w}_1(z_1) + \mathbf{w}_1(z_2) + \ldots + \mathbf{w}_1(z_s) + m_1\pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} n_\varkappa b_{\varkappa 1},$$

$$g_2 = \mathbf{w}_2(z_1) + \mathbf{w}_2(z_2) + \ldots + \mathbf{w}_2(z_s) + m_2\pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} n_\varkappa b_{\varkappa 2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$g_s = \mathbf{w}_s(z_1) + \mathbf{w}_s(z_2) + \ldots + \mathbf{w}_s(z_s) + m_s\pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} n_\varkappa b_{\varkappa s}$$

*unter $g_1, g_2, \ldots g_s$ **gegebene** Constanten, unter $m_1, m_2, \ldots m_s$, $n_1, n_2, \ldots n_s$ hingegen **beliebig veränderliche** ganze Zahlen; so wird — trotz der aus diesen Zahlen entspringenden Unbestimmtheit — immer nur **ein einziges** Punctsystem $z_1, z_2, \ldots z_s$ vorhanden sein, welches den Gleichungen Genüge leistet. Dieses eine wird niemals fehlen.*

Zwölfte Vorlesung.

Die Umkehrung der Abel'schen Integrale.

Erster Abschnitt. Es wird gezeigt, wie sich mit Hülfe der s fach unendlichen ϑ-Reihe die Umkehrung der Functionen $\mathbf{w}_1(z)$, $\mathbf{w}_2(z)$, ... $\mathbf{w}_s(z)$ bewerkstelligen, nämlich z durch $\mathbf{w}_1(z)$, $\mathbf{w}_2(z)$, ... $\mathbf{w}_s(z)$ ausdrücken lässt.

Nach langen aber nothwendigen Zwischenbetrachtungen nehmen wir nun den Faden unserer eigentlichen Untersuchung wieder auf. Der aus den Functionen $\mathbf{w}$, unter Anwendung beliebiger Constanten g und beliebiger ganzer Zahlen μ, zusammengesetzte Ausdruck

$$\Theta = \left(\frac{\vartheta(\mathbf{w}_1 - g_1,\ \mathbf{w}_2 - g_2,\ \ldots\ \mathbf{w}_s - g_s)}{\vartheta\left(\mathbf{w}_1 - g_1 - \mu_1\frac{\pi i}{2},\ \mathbf{w}_2 - g_2 - \mu_2\frac{\pi i}{2},\ \ldots\ \mathbf{w}_s - g_s - \mu_s\frac{\pi i}{2}\right)}\right)^2 \tag{1}$$

ist, wie wir zuletzt (Seite 457) gefunden hatten, eine von z abhängende Function, welche auf der Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ überall regelmässig bleibt, also eine Function, die von z auf algebraische Weise abhängen muss. Zugleich wird, wie wir damals nachgewiesen hatten, die Ordnungszahl von Θ in den s Nullpuncten des Zählers:

$$\vartheta(\mathbf{w}_1 - g_1,\ \mathbf{w}_2 - g_2,\ \ldots\ \mathbf{w}_2 - g_s)$$

den Werth $+2$, ferner in den Nullpuncten des Nenners:

$$\vartheta\left(\mathbf{w}_1 - g_1 - \mu_1\frac{\pi i}{2},\ \mathbf{w}_2 - g_2 - \mu_2\frac{\pi i}{2},\ \ldots\ \mathbf{w}_s - g_s - \mu_s\frac{\pi i}{2}\right)$$

den Werth -2, und in allen übrigen Puncten der Fläche $\mathfrak{R}$ den Werth 0 besitzen.

Wir setzen der Kürze wegen $\vartheta\, U_\sigma$ für $\vartheta(U_1,\ U_2,\ \ldots\ U_s)$, und bezeichnen demnach den Ausdruck Θ in folgender Weise:

$$(2)\qquad \Theta = \left(\frac{\vartheta\, \mathbf{w}_\sigma - g_\sigma}{\vartheta\, \mathbf{w}_\sigma - g_\sigma - \mu_\sigma \frac{\pi i}{2}}\right)^2.$$

Um die algebraische Abhängigkeit zwischen Θ und z wirklich durch eine Formel ausdrücken zu können, müssen wir zunächst die Nullpuncte des Zählers und Nenners, d. i. die Nullpuncte der Functionen

$$\vartheta\, \mathbf{w}_\sigma - g_\sigma,$$
$$\vartheta\, \mathbf{w}_\sigma - g_\sigma - \mu_\sigma \frac{\pi i}{2}$$

ermitteln. Solches aber wird sich am Einfachsten bewerkstelligen lassen, wenn wir die Constanten g und die Zahlen μ nicht beliebig lassen, sondern auf geeignete Weise festsetzen.

Die auf der Fläche $\mathfrak{R}$ vorhandenen Windungspuncte sind:

$$p_1,\ p_2,\ \ldots\ p_{s+1},$$
$$q_1,\ q_2,\ \ldots\ q_{s+1},$$

und bestehen also aus $s+1$ Punctpaaren. Wir denken uns diese Punctpaare in irgend welcher andern Reihenfolge hingeschrieben, und bezeichnen sie in dieser neuen Reihenfolge mit:

$$\alpha,\ \beta,\ \ldots\ \gamma,\ \delta,$$
$$\alpha',\ \beta',\ \ldots\ \gamma',\ \delta'.$$

Alsdann ist (Formeln (9) S. 440) für jede der Functionen $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_s$:

$$(2)\qquad \begin{aligned}
\mathbf{w}_\sigma(\alpha') - \mathbf{w}_\sigma(\alpha) &= A_\sigma \frac{\pi i}{2},\\
\mathbf{w}_\sigma(\beta') - \mathbf{w}_\sigma(\beta) &= B_\sigma \frac{\pi i}{2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{w}_\sigma(\gamma') - \mathbf{w}_\sigma(\gamma) &= C_\sigma \frac{\pi i}{2},\\
\mathbf{w}_\sigma(\delta') - \mathbf{w}_\sigma(\delta) &= D_\sigma \frac{\pi i}{2},
\end{aligned}$$

$$(2\,\text{a})\qquad A_\sigma + B_\sigma + \ldots + C_\sigma + D_\sigma = 0$$

wo A_σ, B_σ, $\ldots$ C_σ, D_σ irgend welche ganze Zahlen vorstellen, deren Summe Null ist*).

*) Man würde sich über jene $s+1$ Zahlen A_σ, B_σ, $\ldots$ C_σ, D_σ noch genauer ausdrücken, nämlich sagen können, dass immer eine von ihnen $= 1$, eine andere unter ihnen $= -1$, und alle übrigen $= 0$ sind. Doch fällt solches hier nicht ins Gewicht.

Setzt man nun zur Abkürzung:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \mathbf{w}_\sigma(\alpha) + \mathbf{w}_\sigma(\beta) + \ldots + \mathbf{w}_\sigma(\gamma) + \mathbf{w}_\sigma(\delta) &= d_\sigma, \\ \mathbf{w}_\sigma(\alpha) + \mathbf{w}_\sigma(\beta) + \ldots + \mathbf{w}_\sigma(\gamma) \qquad\qquad &= g_\sigma, \end{aligned}$$

wo also d_σ ein aus $s+1$, g_s hingegen ein nur aus s Gliedern bestehendes Aggregat vorstellt; so wird zufolge (2):

$$(4)\qquad \begin{aligned} \mathbf{w}_\sigma(\alpha') + \mathbf{w}_\sigma(\beta') + \ldots + \mathbf{w}_\sigma(\gamma') + \mathbf{w}_\sigma(\delta') &= d_\sigma, \\ \mathbf{w}_\sigma(\alpha') + \mathbf{w}_\sigma(\beta') + \ldots + \mathbf{w}_\sigma(\gamma') \qquad\qquad &= g_\sigma + \mu_\sigma \frac{\pi i}{2}, \end{aligned}$$

wo μ_σ eine ganzeZahl vorstellt, nämlich $= A_\sigma + B_\sigma + \ldots + C_\sigma$ ist.

Die durch die Formeln (3) und (4) bestimmten Constanten g und μ sind es nun, welche wir in unsern Ausdruck Θ einsetzen wollen. Thun wir dies, so verwandelt sich derselbe in

$$(5)\qquad \Theta = \left(\frac{\vartheta\,\mathbf{w}_\sigma(z) - \mathbf{w}_\sigma(\alpha) - \mathbf{w}_\sigma(\beta) \ldots - \mathbf{w}_\sigma(\gamma)}{\vartheta\,\mathbf{w}_\sigma(z) - \mathbf{w}_\sigma(\alpha') - \mathbf{w}_\sigma(\beta') \ldots - \mathbf{w}_\sigma(\gamma')}\right)^2$$

Und nunmehr sind, wenn wir uns an einen früher (Seite 488) gefundenen Satz erinnern, die Nullpuncte des Zählers und ebenso auch die des Nenners leicht zu erkennen; die ersteren liegen nämlich bei $\alpha, \beta, \ldots \gamma$, die letztern bei $\alpha', \beta', \ldots \gamma'$.

Der in (5) stehende Ausdruck Θ ist demnach eine von z abhängende, auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überall regelmässige Function, deren Ordnungszahl in den Puncten $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ den Werth $+2$, in den Puncten $\alpha', \beta', \ldots \gamma'$ den Werth -2, endlich in allen übrigen Puncten der Fläche $\mathfrak{R}$ den Werth 0 besitzt*). Wort für Wort dasselbe gilt aber, wie leicht zu übersehen, und wie auch früher gelegentlich bemerkt worden ist (Seite 265), von der Function

$$(6)\qquad \varphi(z) = \frac{(z-\alpha)\,(z-\beta)\ldots(z-\gamma)}{(z-\alpha')(z-\beta')\ldots(z-\gamma')},$$

vorausgesetzt, dass man sich die Werthe dieser Function ebenfalls auf der zweiblättrigen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ ausgebreitet denkt.

Die Ausdrücke

$$\Theta \quad \text{und} \quad \varphi(z)$$

sind demnach zwei von z abhängende Functionen, welche auf der

*) Die Puncte $\alpha', \beta', \ldots \gamma'$ stellen also die Pole vor, in welchen die Function Θ unstetig ist; und ebenso stellen andererseits $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ diejenigen Puncte vor, in welchen dieselbe verschwindet.

Fläche $\mathfrak{R}$ überall regelmässig sind, und welche daselbst überall gleiche Ordnungszahlen besitzen; folglich zwei Functionen, welche nur durch einen constanten Factor von einander verschieden sein können (vergl. Seite 276). Bezeichnen wir diesen mit K, so ist also $\Theta = K \,.\, \varphi(z)$, d. i.:

$$(7) \qquad \left(\frac{\vartheta\, \mathrm{w}_\sigma(z) - \mathrm{w}_\sigma(\alpha) - \mathrm{w}_\sigma(\beta) \ldots - \mathrm{w}_\sigma(\gamma)}{\vartheta\, \mathrm{w}_\sigma(z) - \mathrm{w}_\sigma(\alpha') - \mathrm{w}_\sigma(\beta') \ldots - \mathrm{w}_\sigma(\gamma')}\right)^2 = K \,.\, \varphi(z).$$

Hiemit ist die algebraische Abhängigkeit, welche zwischen Θ und z stattfindet, ermittelt. Es handelt sich nur noch um die Bestimmung des constanten Factors K.

Zufolge (3) und (4) ist:

$$\mathrm{w}_\sigma(\alpha) + \mathrm{w}_\sigma(\beta) + \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\gamma) = d_\sigma - \mathrm{w}_\sigma(\delta),$$
$$\mathrm{w}_\sigma(\alpha') + \mathrm{w}_\sigma(\beta') + \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\gamma') = d_\sigma - \mathrm{w}_\sigma(\delta').$$

Und wir geben demgemäss, um auf die Bestimmung von K einzugehen, der Gleichung (7) zuvörderst folgende einfachere Gestalt:

$$\left(\frac{\vartheta\, \mathrm{w}_\sigma(z) + \mathrm{w}_\sigma(\delta) - d_\sigma}{\vartheta\, \mathrm{w}_\sigma(z) + \mathrm{w}_\sigma(\delta') - d_\sigma}\right)^2 = K \,.\, \varphi(z)$$

Hieraus ergiebt sich, wenn wir an Stelle des variablen Punctes z nach einander die Puncte δ und δ' substituiren:

$$\left(\frac{\vartheta\; 2\, \mathrm{w}_\sigma(\delta) - d_\sigma}{\vartheta\, \mathrm{w}_\sigma(\delta) + \mathrm{w}_\sigma(\delta') - d_\sigma}\right)^2 = K \,.\, \varphi(\delta),$$
$$\left(\frac{\vartheta\, \mathrm{w}_\sigma(\delta) + \mathrm{w}_\sigma(\delta') - d_\sigma}{\vartheta\; 2\, \mathrm{w}_\sigma(\delta') - d_\sigma}\right)^2 = K \,.\, \varphi(\delta'):$$

und hieraus durch Multiplication:

$$(7\mathrm{a}) \qquad \left(\frac{\vartheta\; 2\, \mathrm{w}_\sigma(\delta) - d_\sigma}{\vartheta\; 2\, \mathrm{w}_\sigma(\delta') - d_\sigma}\right)^2 = K^2 \,.\, \varphi(\delta) \,.\, \varphi(\delta').$$

Zufolge (2) ist

$$2\, \mathrm{w}_\sigma(\delta') - 2\, \mathrm{w}_\sigma(\delta) = D_\sigma \pi i,$$

wo D_σ eine ganze Zahl vorstellt. Der in der Gleichung (7a) auf der linken Seite unter dem Quadrat stehende Quotient hat demnach die Form:

$$\frac{\vartheta\, U_\sigma}{\vartheta\, U_\sigma + D_\sigma \pi i},$$

oder ausführlicher geschrieben die Form:

$$\frac{\vartheta(U_1,\, U_2,\, \ldots\, U_s)}{\vartheta(U_1 + D_1 \pi i,\; U_2 + D_2 \pi i,\; \ldots\, U_s + D_s \pi i)},$$

wo $D_1, D_2, \ldots D_s$ lauter ganze Zahlen sind. Jener Quotient ist demnach $= 1$. (Vergl. S. 446.) Somit erhalten wiraus (7 a):

$$1 = K^2 \cdot \varphi(\delta) \cdot \varphi(\delta'),$$

folglich:

$$K = \frac{1}{\sqrt{\varphi(\delta) \cdot \varphi(\delta')}}.$$

Und durch Einsetzung dieses Werthes verwandelt sich nun die vorhin gefundene Gleichung (7) schliesslich in:

$$(8) \qquad \left(\frac{\vartheta\, \mathrm{w}_\sigma(z) - \mathrm{w}_\sigma(\alpha) - \mathrm{w}_\sigma(\beta) \ldots - \mathrm{w}_\sigma(\gamma)}{\vartheta\, \mathrm{w}_\sigma(z) - \mathrm{w}_\sigma(\alpha') - \mathrm{w}_\sigma(\beta') \ldots - \mathrm{w}_\sigma(\gamma')}\right)^2 = \frac{\varphi(z)}{\sqrt{\varphi(\delta) \cdot \varphi(\delta')}}.$$

Somit gelangen wir zu folgendem Satz:

Bezeichnet man die zu $s + 1$ Paaren geordneten Windungspuncte

$$p_1, p_2, \ldots p_{s+1},$$
$$q_1, q_2, \ldots q_{s+1}$$

in irgend welcher andern Reihenfolge mit

$$\alpha, \beta, \ldots \gamma, \delta,$$
$$\alpha', \beta', \ldots \gamma', \delta'$$

und setzt man zur Abkürzung

$$\frac{(z-\alpha)(z-\beta)\ldots(z-\gamma)}{(z-\alpha')(z-\beta')\ldots(z-\gamma')} = \varphi(z),$$

so ist jederzeit

$$\left(\frac{\vartheta\, \mathrm{w}_\sigma(z) - g_\sigma}{\vartheta\, \mathrm{w}_\sigma(z) - g'_\sigma}\right)^2 = \frac{\varphi(z)}{\sqrt{\varphi(\delta) \cdot \varphi(\delta')}},$$

wo

$$g_\sigma = \mathrm{w}_\sigma(\alpha) + \mathrm{w}_\sigma(\beta) + \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\gamma),$$
$$g'_\sigma = \mathrm{w}_\sigma(\alpha') + \mathrm{w}_\sigma(\beta') + \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\gamma')$$

zwei Constanten sind, deren Differenz gleich einem Vielfachen von $\frac{\pi i}{2}$ *ist*), und wo* $\vartheta\, U_\sigma$ *zur Abkürzung steht für* $\vartheta(U_1, U_2, \ldots U_s)$.

---

*) Solches folgt aus den Formeln (3) und (4).

Zweiter Abschnitt. Fortsetzung. Die im vorhergehenden Abschnitt ausgeführte Umkehrung kann verallgemeinert werden, indem man an Stelle eines Werthes der Variablen z mehrere, nämlich s Werthe derselben ins Spiel bringt.

Es ist hier am Orte, noch auf einen anderen aus den Functionen **w** zusammengesetzten Ausdruck aufmerksam zu machen, der sich ebenfalls auf algebraische Weise darstellen lässt. Doch unterscheidet sich derselbe von dem eben betrachteten dadurch, dass er nicht von einer einzigen Variablen, sondern von s Variablen abhängt. An Stelle des beweglichen Punctes $z = x + iy$ treten nämlich hier s bewegliche Puncte $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $\ldots z_s = x_s + iy_s$ auf, die wir, um an Kürze zu gewinnen, der Reihe nach mit $\xi, \eta, \ldots \zeta$ bezeichnen wollen. Der in Rede stehende Ausdruck lautet nämlich, wenn wir die Bezeichnungen

$$\begin{array}{c} \alpha, \beta, \ldots \gamma, \delta \\ \alpha', \beta', \ldots \gamma', \delta' \end{array}$$

in demselben Sinne wie vorhin brauchen, folgendermassen:

$$(1) \qquad \Theta = \left(\frac{\vartheta\, \mathrm{w}_\sigma(\xi) + \mathrm{w}_\sigma(\eta) + \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\zeta) - \mathrm{w}_\sigma(\delta)}{\vartheta\, \mathrm{w}_\sigma(\xi) + \mathrm{w}_\sigma(\eta) + \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\zeta) - \mathrm{w}_\sigma(\delta')} \right)^2.$$

Um denselben näher zu untersuchen, wollen wir uns von den s Puncten $\xi, \eta, \ldots \zeta$ zu Anfang nur den ersten beweglich, die übrigen aber fest denken. Dann wird:

$$(2) \qquad \Theta = \left(\frac{\vartheta\, \mathrm{w}_\sigma(\xi) - G_\sigma}{\vartheta\, \mathrm{w}_\sigma(\xi) - G'_\sigma} \right)^2,$$

wo die Grössen

$$(3) \qquad G_\sigma = \mathrm{w}_\sigma(\delta) - \mathrm{w}_\sigma(\eta) \ldots - \mathrm{w}_\sigma(\zeta),$$

$$(3') \qquad G'_\sigma = \mathrm{w}_\sigma(\delta') - \mathrm{w}_\sigma(\eta) \ldots - \mathrm{w}_\sigma(\zeta)$$

zwei Constanten vorstellen. Da nun, wie früher (Seite 495) bemerkt wurde, für jede der Functionen **w** die Gleichungen gelten:

$$(4) \qquad \begin{aligned} \mathrm{w}_\sigma(\alpha') - \mathrm{w}_\sigma(\alpha) &= A_\sigma \frac{\pi i}{2} \\ \mathrm{w}_\sigma(\beta') - \mathrm{w}_\sigma(\beta) &= B_\sigma \frac{\pi i}{2}, \\ \ldots & \ldots \ldots \\ \mathrm{w}_\sigma(\gamma') - \mathrm{w}_\sigma(\gamma) &= C_\sigma \frac{\pi i}{2}, \\ \mathrm{w}_\sigma(\delta') - \mathrm{w}_\sigma(\delta) &= D_\sigma \frac{\pi i}{2}, \end{aligned}$$

wo A_σ, B_σ, ... C_σ, D_σ irgend welche ganze Zahlen vorstellen, deren Summe $= 0$ ist, so werden jene beiden Constanten G_σ und G'_σ nur durch ein Vielfaches von $\frac{\pi i}{2}$ von einander verschieden sein können.

Wir können daher auf den Ausdruck Θ wiederum den früher (Seite 456) gefundenen Satz in Anwendung bringen. Diesem zufolge wird Θ eine von ξ abhängende Function sein, welche auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überall regelmässig ist, also eine Function, die von ξ auf a l g e b r a i s c h e Weise abhängt. Zugleich wird jenem Satze zufolge Θ eine Function sein, welche in den Nullpuncten des Zählers die Ordnungszahl 2, in denen des Nenners die Ordnungszahl -2, und in allen übrigen zur Fläche $\mathfrak{R}$ gehörigen Puncten die Ordnungszahl 0 besitzt. Sollte der Fall eintreten, dass ein Nullpunct des Zählers mit irgend einem Nullpuncte des Nenners zusammenfällt, so wird die Ordnungszahl von Θ in einem solchen Puncte gleich $2-2$, d. i. gleich 0 sein.

Um die algebraische Abhängigkeit zwischen Θ und ξ formell ausdrücken zu können, müssen wir jene Nullpuncte wirklich zu ermitteln suchen. Bezeichnen wir die s Nullpuncte des Zählers

$$\vartheta \mathrm{w}_\sigma(\xi) - G_\sigma$$

mit A, B, ... C, und die s Nullpuncte des Nenners

$$\vartheta \mathrm{w}_\sigma(\xi) - G'_\sigma$$

mit A', B', ... C', so werden die erstern den Gleichungen:

$$(5) \qquad G_\sigma = \mathrm{w}_\sigma(A) + \mathrm{w}_\sigma(B) + \dots + \mathrm{w}_\sigma(C) + M_\sigma \pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} N_\varkappa b_{\varkappa\sigma},$$

$$\sigma = 1, 2, \dots s,$$

die letztern den Gleichungen

$$(5') \qquad G'_\sigma = \mathrm{w}_\sigma(A') + \mathrm{w}_\sigma(B') + \dots + \mathrm{w}_\sigma(C') + M'_\sigma \pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s} N'_\varkappa b_{\varkappa\sigma}$$

$$\sigma = 1, 2, \dots s,$$

Genüge leisten, wo die M, N und M', N unbekannte ganze Zahlen vorstellen. Solches folgt aus einem früher (Seite 484) gefundenen Satz. Doch werden die Puncte A, B, ... C und A', B', ... C' den eben aufgestellten Gleichungen nicht allein G e n ü g e l e i s t e n, sondern (vergl. Seite 493) durch jene Gleichungen — trotz der Unbestimmtheit der Zahlen M, N und M', N' — bereits v o l l s t ä n d i g bestimmt sein. Gelingt es uns also, irgend ein Punctsystem $A, B, \ldots C$ und irgend ein Punctsystem $A', B', \ldots C'$ zu finden, welches den Gleichungen Genüge leistet, so werden durch das eine die Nullpuncte des Zählers

$$\vartheta \mathrm{w}_\sigma(\xi) - G_\sigma,$$

und durch das andere die Nullpuncte des Nenners

$$\vartheta \mathrm{w}_\sigma(\xi) - G'_\sigma$$

dargestellt sein.

Lassen wir den beweglichen Punct ξ in den Punct δ hineinfallen, so verwandelt sich der Zähler in:

$$\vartheta \mathrm{w}_\sigma(\delta) - G_\sigma,$$

d. i. mit Hinblick auf (3) in:

$$\vartheta\, \mathrm{w}_\sigma(\eta) + \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\zeta)$$

also (vergl. S. 490) in Null*). Demnach ist δ einer von den gesuchten Nullpuncten $A, B, \ldots C$. Ebenso ergiebt sich, dass δ' einer von den Nullpuncten $A', B', \ldots C'$ ist. Es mag δ der Punct A, und δ' der Punct A' sein. Die zur Bestimmung der noch übrigen Puncte $B, \ldots C$ und $B' \ldots C'$ erforderlichen Gleichungen (5) und (5′) lauten dann folgendermassen:

$$G_\sigma = \mathrm{w}_\sigma(\delta) + \mathrm{w}_\sigma(B) + \ldots + \mathrm{w}_\sigma(C) + M_\sigma \pi i + \Sigma N_\varkappa b_{\varkappa\sigma},$$
$$G'_\sigma = \mathrm{w}_\sigma(\delta') + \mathrm{w}_\sigma(B') + \ldots + \mathrm{w}_\sigma(C') + M'_\sigma \pi i + \Sigma N'_\varkappa b_{\varkappa\sigma},$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots s$$

oder, wenn man für G_σ und G'_σ ihre eigentlichen Bedeutungen (3) und (3′) einsetzt:

$$(6) \qquad -\mathrm{w}_\sigma(\eta) \ldots - \mathrm{w}_\sigma(\zeta) = \\ = \mathrm{w}_\sigma(B) + \ldots + \mathrm{w}_\sigma(C) + M_\sigma \pi i + \Sigma N_\varkappa b_{\varkappa\sigma},$$

$$(6') \qquad -\mathrm{w}_\sigma(\eta) \ldots - \mathrm{w}_\sigma(\zeta) = \\ = \mathrm{w}_\sigma(B') + \ldots + \mathrm{w}_\sigma(C') + M'_\sigma \pi i + \Sigma N'_\varkappa b_{\varkappa\sigma}$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots s.$$

Trotz der Unbestimmtheit der Zahlen M, N und M', N' sind, wie wir bemerkt haben, durch das eine System von Gleichungen die $(s-1)$ Puncte $B \ldots C$, durch das andere die $(s-1)$ Puncte $B' \ldots C'$ völlig bestimmt. Nun ist, wie wir sehen, das eine

*) Es ist wohl zu beachten, dass unter $\xi, \eta, \ldots \zeta$ im Ganzen s Puncte, unter $\eta, \ldots \zeta$ also im Ganzen $(s-1)$ Puncte zu verstehen sind.

System von Gleichungen mit dem andern identisch. Demnach werden auch die Puncte $B, \ldots C$ identisch sein mit den Puncten $B', \ldots C'$.

Betrachtet man also, wie hier geschehen, von den Puncten $\xi, \eta, \ldots \zeta$ nur den Punct ξ allein als beweglich, so wird der Ausdruck:

$$(7) \qquad \Theta = \left(\frac{\vartheta\,\mathrm{w}_\sigma(\xi) + \mathrm{w}_\sigma(\eta) + \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\zeta) - \mathrm{w}_\sigma(\delta)}{\vartheta\,\mathrm{w}_\sigma(\xi) + \mathrm{w}_\sigma(\eta) + \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\zeta) - \mathrm{w}_\sigma(\delta')}\right)^2$$

eine von ξ abhängende, auf der Fläche $\mathfrak{R}$ überall regelmässige Function sein, welche in δ die Ordnungszahl 2, in δ' die Ordnungszahl -2 und in allen übrigen Puncten der Fläche die Ordnungszahl 0 besitzt. Wort für Wort dasselbe gilt nun aber auch von dem Ausdruck

$$(8) \qquad \psi(\xi, \eta, \ldots \zeta) = \frac{(\xi - \delta)\,(\eta - \delta)\ldots(\zeta - \delta)}{(\xi - \delta')\,(\eta - \delta')\ldots(\zeta - \delta')},$$

vorausgesetzt, dass wir von den s Puncten $\xi, \eta, \ldots \zeta$ wiederum nur den ersten als beweglich ansehen, dass wir also $\frac{\xi - \delta}{\xi - \delta'}$ als die eigentliche Function, und $\frac{(\eta - \delta)\ldots(\zeta - \delta)}{(\eta - \delta')\ldots(\zeta - \delta')}$ als einen constanten Factor ansehen.

Die beiden von $\xi, \eta, \ldots \zeta$ abhängigen Ausdrücke

$$\Theta \quad \text{und} \quad \psi(\xi, \eta, \ldots \zeta)$$

sind also, falls man $\eta \ldots \zeta$ als fest betrachtet, zwei von ξ abhängende, auf der Fläche $\mathfrak{R}$ regelmässige Functionen, deren Ordnungszahlen überall gleiche Werthe haben; folglich zwei Functionen, die nur durch einen constanten, d. i. durch einen von ξ unabhängigen Factor von einander verschieden sein können. Somit ergiebt sich also, dass der Quotient

$$\frac{\Theta}{\psi(\xi, \eta, \ldots \zeta)}$$

eine Grösse ist, die von ξ unabhängig sein muss. Ist diese Grösse aber von ξ unabhängig, so muss sie — solches folgt unmittelbar aus der in Bezug auf $\xi, \eta, \ldots \zeta$ vorhandenen Symmetrie — gleichzeitig auch von $\eta, \ldots \zeta$ unabhängig sein. Der vorstehende Quotient besitzt also einen Werth, der gleichzeitig von sämmtlichen Puncten $\xi, \eta, \ldots \zeta$ unabhängig ist, d. i. einen wirklich constanten Werth. Bezeichnen wir diesen mit K, so erhalten wir:

$$\Theta = K \cdot \psi(\xi, \eta, \ldots \zeta)$$

d. i.:

$$(9) \quad \left(\frac{\vartheta \, \mathrm{w}_\sigma(\xi) + \mathrm{w}_\sigma(\eta) + \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\zeta) - \mathrm{w}_\sigma(\delta)}{\vartheta \, \mathrm{w}_\sigma(\xi) + \mathrm{w}_\sigma(\eta) + \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\zeta) - \mathrm{w}_\sigma(\delta')}\right)^2 = K \cdot \psi(\xi, \eta, \ldots \zeta).$$

Und hiemit ist die algebraische Abhängigkeit, welche zwischen Θ einerseits und zwischen $\xi, \eta, \ldots \zeta$ andererseits stattfindet, zu Tage gefördert. Es bleibt nur noch übrig, den constanten Factor K zu bestimmen. Zu diesem Zwecke lassen wir in unserer Gleichung (9) die beweglichen Puncte $\xi, \eta, \ldots \zeta$ einmal mit den Puncten $\alpha, \beta, \ldots \gamma$, ein anderes Mal mit den Puncten $\alpha', \beta', \ldots \gamma'$ zusammenfallen, und erhalten alsdann nach einander folgende beiden Relationen:

$$\left(\frac{\vartheta \, \mathrm{w}_\sigma(\alpha) + \mathrm{w}_\sigma(\beta) + \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\gamma) - \mathrm{w}_\sigma(\delta)}{\vartheta \, \mathrm{w}_\sigma(\alpha) + \mathrm{w}_\sigma(\beta) + \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\gamma) - \mathrm{w}_\sigma(\delta')}\right)^2 = K \cdot \psi(\alpha, \beta, \ldots \gamma),$$

$$\left(\frac{\vartheta \, \mathrm{w}_\sigma(\alpha') + \mathrm{w}_\sigma(\beta') + \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\gamma') - \mathrm{w}_\sigma(\delta)}{\vartheta \, \mathrm{w}_\sigma(\alpha') + \mathrm{w}_\sigma(\beta') + \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\gamma') - \mathrm{w}_\sigma(\delta')}\right)^2 = K \cdot \psi(\alpha', \beta', \ldots \gamma').$$

Bezeichnet man mit d_σ folgende Constante:

$$\mathrm{w}_\sigma(\alpha) + \mathrm{w}_\sigma(\beta) + \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\gamma) + \mathrm{w}_\sigma(\delta) = d_\sigma,$$

so ist zufolge (4) auch:

$$\mathrm{w}_\sigma(\alpha') + \mathrm{w}_\sigma(\beta') + \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\gamma') + \mathrm{w}_\sigma(\delta') = d_\sigma.$$

Hiedurch verwandeln sich unsere beiden Relationen in:

$$\left(\frac{\vartheta \, d_\sigma - 2\, \mathrm{w}_\sigma(\delta)}{\vartheta \, d_\sigma - \mathrm{w}_\sigma(\delta) - \mathrm{w}_\sigma(\delta')}\right)^2 = K \cdot \psi(\alpha, \beta, \ldots \gamma),$$

$$\left(\frac{\vartheta \, d_\sigma - \mathrm{w}_\sigma(\delta) - \mathrm{w}_\sigma(\delta')}{\vartheta \, d_\sigma - 2\, \mathrm{w}_\sigma(\delta')}\right)^2 = K \cdot \psi(\alpha', \beta', \ldots \gamma').$$

Und nunmehr folgt durch Multiplication dieser beiden Relationen:

$$\left(\frac{\vartheta \, d_\sigma - 2\, \mathrm{w}_\sigma(\delta)}{\vartheta \, d_\sigma - 2\, \mathrm{w}_\sigma(\delta')}\right)^2 = K^2 \cdot \psi(\alpha, \beta, \ldots \gamma) \cdot \psi(\alpha', \beta', \ldots \gamma')$$

Der hier auf der linken Seite befindliche Quotient besitzt, weil zufolge (4)

$$2\, \mathrm{w}_\sigma(\delta') - 2\, \mathrm{w}_\sigma(\delta) = D_\sigma \pi i$$

ist, folgende Form:

$$\frac{\vartheta \, U_\sigma + D_\sigma \pi i}{\vartheta \, U_\sigma},$$

oder ausführlicher geschrieben, folgende:

$$\frac{\vartheta(U_1 + D_1 \pi i, \;\; U_2 + D_2 \pi i, \ldots U_s + D_s \pi i)}{\vartheta(U_1, \;\; U_2, \ldots U_s)},$$

und ist also $= 1$. Somit erhalten wir:

$$1 = K^2 . \psi(\alpha, \beta, \ldots \gamma) . \psi(\alpha', \beta', \ldots \gamma'),$$

mithin:

$$K = \frac{1}{\sqrt{\psi(\alpha, \beta, \ldots \gamma) . \psi(\alpha', \beta', \ldots \gamma')}}.$$

Substituiren wir nun schliesslich diesen Werth des constanten Factors K in die Gleichung (9), so erhalten wir folgenden Satz:

Bezeichnet man die $s + 1$ Paare von Windungspuncten

$$p_1, p_2, \ldots p_{s+1},$$
$$q_1, q_2, \ldots q_{s+1}$$

in irgend welcher andern Reihenfolge mit:

$$\alpha, \beta, \ldots \gamma, \delta,$$
$$\alpha', \beta', \ldots \gamma', \delta',$$

und setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{(\xi - \delta)(\eta - \delta) \ldots (\zeta - \delta)}{(\xi - \delta')(\eta - \delta') \ldots (\zeta - \delta')} = \psi(\xi, \eta, \ldots \zeta),$$

wo unter $\xi = x_1 + iy_1$, $\eta = x_2 + iy_2$, $\ldots$ $\zeta = x_s + iy_s$ *beliebig bewegliche Puncte verstanden werden sollen, so ist jederzeit:*

$$\left(\frac{\vartheta \mathrm{w}_\sigma(\xi) + \mathrm{w}_\sigma(\eta) + \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\zeta) - \mathrm{w}_\sigma(\delta)}{\vartheta \mathrm{w}_\sigma(\xi) + \mathrm{w}_\sigma(\eta) + \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\zeta) - \mathrm{w}_\sigma(\delta')}\right)^2 = \frac{\psi(\xi, \eta, \ldots \zeta)}{\sqrt{\psi(\alpha, \beta, \ldots \gamma) . \psi(\alpha', \beta', \ldots \gamma')}},$$

wo $\mathrm{w}_\sigma(\delta)$, $\mathrm{w}_\sigma(\delta')$ *zwei Constanten sind, die immer nur durch ein Vielfaches von* $\frac{\pi i}{2}$ *von einander verschieden sein können, und wo* ϑU_σ *zur Abkürzung steht für* $\vartheta(U_1, U_2, \ldots U_s)$.

Dritter Abschnitt. Die in Bezug auf die Functionen $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots \mathrm{w}_s$ erhaltenen Resultate lassen sich übertragen auf die mit denselben conjugirten secundären Integrale $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_s$; man gelangt alsdann zur Umkehrung dieser Integrale.

Die hier gefundenen Ergebnisse beziehen sich zunächst nur auf die eindeutigen Functionen w, lassen sich aber, wie sogleich gezeigt werden soll, auch auf diejenigen Integrale übertragen, welchen jene Functionen conjugirt sind, nämlich übertragen auf die secundären Integrale ω.

Sind ω, ω', ω'', ... irgend welche unter jenen Integralen, ferner $\mathbf{w}$, $\mathbf{w}'$, $\mathbf{w}''$, ... die denselben conjugirten eindeutigen Functionen, so findet zwischen den Werthen, mit welchen jene Integrale bei ihrer gemeinschaftlichen und willkührlichen Bahn in irgend einem Puncte z eintreffen, und zwischen den Werthen, welche diese Functionen in dem Puncte z besitzen, jederzeit folgender Zusammenhang statt:

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
\omega\,(z) &= \mathbf{w}\,(z) + m_1 A_1 + m_2 A_2 + \ldots + m_s A_s + \\
&\qquad + n_1 B_1 + n_2 B_2 + \ldots + n_s B_s, \\
\omega'\,(z) &= \mathbf{w}'(z) + m_1 A_1' + m_2 A_2' + \ldots + m_s A_s' + \\
&\qquad + n_1 B_1' + n_2 B_2' + \ldots + n_s B_s', \\
\omega''(z) &= \mathbf{w}''(z) + m_1 A_1'' + m_2 A_2'' + \ldots + m_s A_s'' + \\
&\qquad + n_1 B_1'' + n_2 B_2'' + \ldots + n_s B_s'', \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Unter den Grössen $A_\varkappa$, $B_\varkappa$, $A_\varkappa'$, $B_\varkappa'$, $A_\varkappa''$, $B_\varkappa''$ ... sind hier die constanten Werthdifferenzen zu verstehen, mit welchen die Function $\mathbf{w}$, $\mathbf{w}'$, $\mathbf{w}''$, ... in den Strömen $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ behaftet sind; ferner unter den $m_\varkappa$, $n_\varkappa$ irgend welche unbekannte ganze Zahlen (vergl. Seite 432).

Geht die gemeinschaftliche und willkührliche Bahn der Integrale durch irgend welche Puncte $z = \xi$, $z = \eta$, ... $z = \zeta$ hindurch, so wird jedem dieser Puncte ein System von Gleichungen entsprechen, welches mit dem Systeme (1) analog ist. Das erste System wird sich auf diejenigen Werthe beziehen, mit welchen die Integrale im Puncte ξ eintreffen, das zweite auf diejenigen, mit welchen sie in η eintreffen, u. s. w., endlich das letzte auf diejenigen, mit welchen sie in ζ anlangen. Von einander verschieden werden diese Systeme nur durch die in jedem derselben enthaltenen ganzen Zahlen $m_\varkappa$, $n_\varkappa$ sein. Sind $m_\varkappa^{\mathrm{I}}$, $n_\varkappa^{\mathrm{I}}$ die in dem ersten, $m_\varkappa^{\mathrm{II}}$, $n_\varkappa^{\mathrm{II}}$ die in dem zweiten, u. s. w., endlich $m_\varkappa^*$, $n_\varkappa^*$ die in dem letzten Systeme enthaltenen Zahlen, und setzt man:

$$
\begin{gathered}
m_\varkappa^{\mathrm{I}} + m_\varkappa^{\mathrm{II}} + \ldots + m_\varkappa^* = M_\varkappa, \\
n_\varkappa^{\mathrm{I}} + n_\varkappa^{\mathrm{II}} + \ldots + n_\varkappa^* = N_\varkappa, \\
\varkappa = 1, 2, \ldots s,
\end{gathered}
$$

so wird man durch Addition all jener Systeme folgende Formeln erhalten:

$$\begin{array}{ll} & \omega(\xi) + \omega(\eta) + \ldots + \omega(\zeta) = \mathrm{w}(\xi) + \mathrm{w}(\eta) + \ldots \mathrm{w}(\zeta) + \\ & \quad + M_1 A_1 + M_2 A_2 + \ldots + M_s A_s + N_1 B_1 + N_2 B_2 + \ldots + N_s B_s, \\ & \omega_1'(\xi) + \omega'(\eta) + \ldots + \omega'(\zeta) = \mathrm{w}'(\xi) + \mathrm{w}'(\eta) + \ldots \mathrm{w}'(\zeta) + \\ (2) & \quad + M_1 A_1' + M_2 A_2' + \ldots + M_s A_s' + N_1 B_1' + N_2 B_2' + \ldots + N_s B_s', \\ & \omega''(\xi) + \omega''(\eta) + \ldots + \omega''(\zeta) = \mathrm{w}''(\xi) + \mathrm{w}''(\eta) + \ldots + \mathrm{w}''(\zeta) + \\ & \quad + M_1 A_1'' + M_2 A_2'' + \ldots + M_s A_s'' + N_1 B_1'' + N_2 B_2'' + \ldots + N_s B_s'', \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Nimmt man für $\omega, \omega', \omega'', \ldots$ sämmtliche secundäre Integrale $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_s$, und beachtet man, dass die Differenzen, mit welchen die Functionen $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots \mathrm{w}_s$ in den Strömen a, b behaftet sind, durch die Grössen $a_{\varkappa\sigma}$, $b_{\varkappa\sigma}$ dargestellt werden, so verwandeln sich die Gleichungen (1) und (2) in:

$$\begin{array}{ll} & \omega_1(z) = \mathrm{w}_1(z) + m_1\pi i + \Sigma n_\varkappa b_{\varkappa 1}, \\ (3) & \omega_2(z) = \mathrm{w}_2(z) + m_2\pi i + \Sigma n_\varkappa b_{\varkappa 2}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \omega_s(z) = \mathrm{w}_s(z) + m_s\pi i + \Sigma n_\varkappa b_{\varkappa s}, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & \omega_1(\xi) + \omega_1(\eta) + \ldots + \omega_1(\zeta) = \mathrm{w}_1(\xi) + \mathrm{w}_1(\eta) + \ldots + \mathrm{w}_1(\zeta) + \\ & \quad + M_1\pi i + \Sigma N_\varkappa b_{\varkappa 1}, \\ & \omega_2(\xi) + \omega_2(\eta) + \ldots + \omega_2(\zeta) = \mathrm{w}_2(\xi) + \mathrm{w}_2(\eta) + \ldots + \mathrm{w}_2(\zeta) + \\ (4) & \quad + M_2\pi i + \Sigma N_\varkappa b_{\varkappa 2}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \omega_s(\xi) + \omega_s(\eta) + \ldots + \omega_s(\zeta) = \mathrm{w}_s(\xi) + \mathrm{w}_s(\eta) + \ldots + \mathrm{w}_s(\zeta) + \\ & \quad + M_s\pi i + \Sigma N_\varkappa b_{\varkappa s}, \end{array}$$

wo die Summation Σ über $\varkappa = 1, 2, \ldots s$ hinerstreckt ist.

Aus (3) ergiebt sich mit Rücksicht auf einen früher gefundenen Satz (Seite 446):

$$\frac{\vartheta(\omega_1(z), \omega_2(z), \ldots \omega_s(z))}{\vartheta(\mathrm{w}_1(z), \mathrm{w}_2(z), \ldots \mathrm{w}_s(z))} = $$
$$= e^{-\Sigma n_\varkappa [\omega_\varkappa(z) + \mathrm{w}_\varkappa(z) + m_\varkappa \pi i]},$$

oder kürzer geschrieben:

$$\frac{\vartheta\, \omega_\sigma(z)}{\vartheta\, \mathrm{w}_\sigma(z)} = e^{-\Sigma n_\varkappa [\omega_\varkappa(z) + \mathrm{w}_\varkappa(z) + m_\varkappa \pi i]};$$

und ebenso ergiebt sich, falls man unter $g_1, g_2, \ldots g_s$ irgend welche Constanten versteht:

$$\frac{\vartheta\, \omega_\sigma(z) - g_\sigma}{\vartheta\, \mathrm{w}_\sigma(z) - g_\sigma} = e^{-\, \Sigma n_\varkappa [\omega_\varkappa(z) + \mathrm{w}_\varkappa(z) \cdot 2 g_\varkappa + m_\varkappa \pi i]},$$

und ferner, falls man unter g_1', g_2', ... g_s' irgend welche andere Constanten versteht:

$$\frac{\vartheta\, \omega_\sigma(z) - g_\sigma'}{\vartheta\, \mathrm{w}_\sigma(z) - g_\sigma'} = e^{-\, \Sigma n_\varkappa [\omega_\varkappa(z) + \mathrm{w}_\varkappa(z) - 2 g_\varkappa' + m_\varkappa \pi i]}.$$

Durch Division der beiden letzten Formeln folgt:

$$\frac{\vartheta\, \omega_\sigma(z) - g_\sigma}{\vartheta\, \omega_\sigma(z) - g_\sigma'} = \frac{\vartheta\, \mathrm{w}_\sigma(z) - g_\sigma}{\vartheta\, \mathrm{w}_\sigma(z) - g_\sigma'} \cdot e^{\Sigma 2 n_\varkappa (g_\varkappa - g_\varkappa')}$$

Sind also die Constanten g_1, g_2, ... g_s von den Constanten g_1', g_2', ... g_s' nur durch irgend welche Vielfache von $\frac{\pi i}{2}$ verschieden, so wird

$$(5) \qquad \frac{\vartheta\, \omega_\sigma(z) - g_\sigma}{\vartheta\, \omega_\sigma(z) - g_\sigma'} = \frac{\vartheta\, \mathrm{w}_\sigma(z) - g_\sigma}{\vartheta\, \mathrm{w}_\sigma(z) - g_\sigma'}$$

sein. Und ebenso wird alsdann, wie sich in gleicher Weise aus (4) ergiebt, auch

$$(6) \qquad \frac{\vartheta\, \omega_\sigma(\xi) + \omega_\sigma(\eta) + \ldots + \omega_\sigma(\zeta) - g_\sigma}{\vartheta\, \omega_\sigma(\xi) + \omega_\sigma(\eta) + \ldots + \omega_\varkappa(\zeta) - g_\sigma'} = \frac{\vartheta\, \mathrm{w}_\sigma(\xi) + \mathrm{w}_\sigma(\eta) + \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\zeta) - g_\sigma}{\vartheta\, \mathrm{w}_\sigma(\xi) + \mathrm{w}_\sigma(\eta) + \ldots + \mathrm{w}_\sigma(\zeta) - g_\sigma}$$

sein.

Mit Rücksicht auf diese Formeln (5) und (6) können wir die vorhin (S. 498 und 504) erhaltenen Sätze auch so aussprechen:

Bezeichnet man die $s + 1$ Paare von Windungspuncten:

$$p_1,\ p_2,\ \ldots\ p_{s+1},$$
$$q_1,\ q_2,\ \ldots\ q_{s+1}$$

in irgend welcher andern Reihenfolge mit:

$$\alpha,\ \beta,\ \ldots\ \gamma,\ \delta,$$
$$\alpha',\ \beta',\ \ldots\ \gamma',\ \delta',$$

und setzt man ferner zur Abkürzung:

$$\frac{(z-\alpha)(z-\beta)\ldots(z-\gamma)}{(z-\alpha')(z-\beta')\ldots(z-\gamma')} = \varphi(z),$$

$$\frac{(\xi-\delta)(\eta-\delta)\ldots(\zeta-\delta)}{(\xi-\delta')(\eta-\delta')\ldots(\zeta-\delta')} = \psi(\xi,\ \eta,\ \ldots\ \zeta);$$

wo z, und ebenso auch ξ, η, ... ζ beliebig bewegliche Puncte vorstellen sollen, so wird jederzeit

$$(7)\qquad \left(\frac{\vartheta\,\omega_\sigma(z) - \mathrm{w}_\sigma(\alpha) - \mathrm{w}_\sigma(\beta)\ \ldots - \mathrm{w}_\sigma(\gamma)}{\vartheta\,\omega_\sigma(z) - \mathrm{w}_\sigma(\alpha') - \mathrm{w}_\sigma(\beta')\ \ldots - \mathrm{w}_\sigma(\gamma')}\right)^2 = \frac{\varphi(z)}{\sqrt{\varphi(\delta)\cdot\varphi(\delta')}},$$

$$(8)\ \left(\frac{\vartheta\,\omega_\sigma(\xi) + \omega_\sigma(\eta) + \ldots + \omega_\sigma(\zeta) - \mathrm{w}_\sigma(\delta)}{\vartheta\,\omega_\sigma(\xi) + \omega_\sigma(\eta) + \ldots + \omega_\sigma(\zeta) - \mathrm{w}_\sigma(\delta')}\right)^2 = \frac{\psi(\xi,\ \eta,\ \ldots\ \zeta)}{\sqrt{\psi(\alpha,\beta,\ldots\gamma)\cdot\psi(\alpha',\beta',\ldots\gamma')}}$$

sein. Vorausgesetzt wird dabei, dass die Anzahl der Puncte $\xi, \eta, \ldots \zeta$ *gleich* s *ist.*

Erinnern wir uns nun an die beiden zur Lösung vorgelegten Probleme, und denken wir uns beide in der secundären Form gegeben, so giebt uns die Gleichung (7) unmittelbar die Lösung des ersten, und die Gleichung (8) die Lösung des zweiten Problemes. Die Werthe

$$\mathrm{w}_\sigma(p), \quad \mathrm{w}_\sigma(q),$$

welche die eindeutige Function w_σ in den $2s + 2$ Puncten p, q, besitzt, sind nichts Anderes als die Fundamentalwerthe des Integrales ω_σ, und können daher mit

$$\overline{\omega}_\sigma(p), \quad \overline{\omega}_\sigma(q)$$

bezeichnet werden. Wir gelangen demnach zu folgenden Resultaten:

Lösung des ersten und zweiten Problems in ihrer secundären Form (Vergl. Seite 398 und 438).

Man setze aus den Fundamentalwerthen der gegebenen Integrale $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_s$ *folgende Constanten zusammen:*

$$\begin{aligned}
\overline{\omega}_\sigma(p_2) &- \overline{\omega}_\sigma(q_1) &&= \tfrac{1}{2}(b_{\sigma 2} - b_{\sigma 1}),\\
\overline{\omega}_\sigma(p_3) &- \overline{\omega}_\sigma(q_2) &&= \tfrac{1}{2}(b_{\sigma 3} - b_{\sigma 2}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\overline{\omega}_\sigma(p_s) &- \overline{\omega}_\sigma(q_{s-1}) &&= \tfrac{1}{2}(b_{\sigma s} - b_{\sigma s-1}),\\
\overline{\omega}_\sigma(p_{s+1}) &- \overline{\omega}_\sigma(q_s) &&= \qquad -\tfrac{1}{2} b_{\sigma s},\\
\overline{\omega}_\sigma(p_1) &- \overline{\omega}_\sigma(q_{s+1}) &&= \tfrac{1}{2} b_{\sigma 1};\\
&\qquad \sigma = 1, 2, \ldots s,
\end{aligned}$$

man bilde sodann eine Function ϑ, *die ausser diesen Constanten* $b_{\sigma\varkappa}$ *noch* s *beliebige Argumente* $V_1, V_2, \ldots V_s$ *in sich enthalten, und durch folgende* s *fach unendliche Reihe definirt sein soll*

$$\vartheta(V_1,\ V_2,\ \ldots\ V_s) = \\ = \sum_n e^{(b_{11}n_1^2 + 2b_{12}n_1n_2 + \ldots + b_{ss}n_s^2) + 2(V_1n_1 + V_2n_2 + \ldots + V_sn_s)};$$

gleichzeitig setze man zur Abkürzung $\vartheta\, V_\sigma$ *für* $\vartheta(V_1,\ V_2,\ \ldots\ V_s)$.

Bezeichnet man alsdann die $s+1$ Paare von Grössen

$$p_1,\ p_2,\ \dots\ p_{s+1},$$
$$q_1,\ q_2,\ \dots\ q_{s+1}$$

in irgend welcher andern Reihenfolge mit

$$\alpha,\ \beta,\ \dots\ \gamma,\ \delta,$$
$$\alpha',\ \beta',\ \dots\ \gamma',\ \delta',$$

und setzt:

$$\frac{(z-\alpha)(z-\beta)\dots(z-\gamma)}{(z-\alpha')(z-\beta')\dots(z-\gamma')} = \varphi(z),$$
$$\frac{(\xi-\delta)(\eta-\delta)\dots(\zeta-\delta)}{(\xi-\delta')(\eta-\delta')\dots(\zeta-\delta')} = \psi(\xi,\ \eta,\ \dots\ \zeta),$$

so gilt für die in dem e r s t e n *Problem enthaltene Unbekannte* z *jederzeit folgende Formel:*

$$\text{(I.)}\qquad \frac{\varphi(z)}{\sqrt{\varphi(\delta)\cdot\varphi(\delta')}} = \left(\frac{\vartheta\,\omega_\sigma(z)-\overline{\omega}_\sigma(\alpha)-\overline{\omega}_\sigma(\beta)\dots-\overline{\omega}_\sigma(\gamma)}{\vartheta\,\omega_\sigma(z)-\overline{\omega}_\sigma(\alpha')-\overline{\omega}_\sigma(\beta')\dots-\overline{\omega}_\sigma(\gamma')}\right)^2;$$

ferner für die in dem z w e i t e n *Problem enthaltenen Unbekannten* $\xi,\ \eta,\ \dots\ \zeta$ *folgende:*

$$\text{(II.)}\qquad \frac{\psi(\xi,\ \eta,\ \dots\ \zeta)}{\sqrt{\psi(\alpha,\beta,\dots\gamma)\cdot\psi(\alpha',\beta',\dots\gamma')}} = \left(\frac{\vartheta u_\sigma-\overline{\omega}_\sigma(\delta)}{\vartheta u_\sigma-\overline{\omega}_\sigma(\delta')}\right)^2.$$

Da die Grössen $\alpha,\ \alpha',\ \beta,\ \beta',\ \dots$ *und die denselben zugehörigen Fundamentalwerthe*

$$\overline{\omega}_\sigma(\alpha),\ \overline{\omega}_\sigma(\alpha'),\ \overline{\omega}_\sigma(\beta),\ \overline{\omega}_\sigma(\beta'),\ \dots$$

bekannte Constanten sind, so ist die Formel (I.) eine Relation zwischen

$$z \ \text{ und } \ \omega_1(z),\ \omega_2(z),\ \dots\ \omega_s(z),$$

andererseits die Formel (II.) eine Relation zwischen

$$\xi,\ \eta,\ \dots\ \zeta \ \text{ und } \ u_1,\ u_2,\ \dots\ u_s.$$

Jede von diesen Formeln repräsentirt aber, weil die mit

$$\alpha,\ \beta,\ \dots\ \gamma,\ \delta,$$
$$\alpha',\ \beta',\ \dots\ \gamma',\ \delta'$$

bezeichnete Anordnung der Grössenpaare p, q *eine beliebige ist, nicht* e i n e, *sondern* m e h r e r e, *nämlich* $(s+1)$ *Relationen.*

Von den $(s+1)$ *durch die Formel (I.) dargestellten Relationen wird, falls* $\omega_1(z),\ \omega_2(z),\ \dots\ \omega_s(z)$ *gegeben sind, und* z *berechnet werden soll, bereits* e i n e *ausreichend sein.*

Und ebenso werden auch die $(s+1)$ *durch die Formel (II.) dargestellten Relationen mehr als hinreichend sein, um die* s *Un-*

bekannten $\xi, \eta, \ldots \zeta$ *zu ermitteln, sobald* $u_1, u_2, \ldots u_s$ *gegeben sind.*

Vierter Abschnitt. Schliesslich ergiebt sich die Umkehrung der primären Integrale $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_s$.

Der Uebersichtlichkeit willen scheint es gerathen, das Ergebniss, zu welchem wir gelangt sind, in möglichst abgerundeter Form hinzustellen, und die Riemann'sche Fläche, welche uns wichtige Dienste geleistet hat, gegenwärtig ganz bei Seite zu lassen.

Das erste Problem ist, wie wir gesehen haben, nur ein Specialfall des zweiten. Wir beschränken uns daher hier auf das letztere (S. 393). — Es waren

$$(p_1, q_1), (p_2, q_2), \ldots (p_{s+1}, q_{s+1})$$

beliebig gegebene Grössenpaare, ferner waren $R, F_1, F_2, \ldots F_s$ folgende von z abhängende Functionen:

$$R = \sqrt{(z-p_1)(z-q_1)(z-p_2)(z-q_2)\ldots(z-p_{s+1})(z-q_{s+1})},$$

$$F_1 = \frac{g_1^{(1)} + g_2^{(1)} z + \ldots + g_s^{(1)} z^{s-1}}{R},$$

$$F_2 = \frac{g_1^{(2)} + g_2^{(2)} z + \ldots + g_s^{(2)} z^{s-1}}{R},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F_s = \frac{g_1^{(s)} + g_2^{(s)} z + \ldots + g_s^{(s)} z^{s-1}}{R},$$

wo die g beliebig gegebene Constanten vorstellen. Es handelte sich um die Umkehrung der von einer gegebenen Grösse ϑ auf willkührlicher aber gemeinsamer Bahn nach irgend einer Grösse z hinerstreckten Integrale:

$$\Omega_1(z) = C_1 + \int_\vartheta^z F_1 \,.\, dz,$$

$$\Omega_2(z) = C_2 + \int_\vartheta^z F_2 \,.\, dz,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Omega_s(z) = C_s + \int_\vartheta^z F_s \, dz.$$

Unter $C_1, C_2, \ldots C_s$ sind hier Constante zu verstehen; ob wir dieselben ganz willkührlich lassen, oder ob wir ihnen, der grösseren Bequemlichkeit willen, irgend welche besondere Werthe zuertheilen, bleibt auf die Allgemeinheit unserer Betrachtung offenbar ohne allen Einfluss.

Wir thun das Letztere.

Wir denken uns nämlich die gegebenen Constanten p, q und ε durch Puncte in einer Ebene dargestellt; grenzen sodann auf dieser Ebene ein elementares Flächenstück $\mathfrak{A}$ ab, welches den Punct ε in seinem Innern enthält, und dessen Randcurve vom Puncte p_1 nach q_1, dann über $p_2, q_2, p_3, q_3, \ldots p_{s+1}, q_{s+1}$ bis nach p_1 zurückgeht; bezeichnen ferner diejenigen Werthe, welche die Integrale

$$\Omega_1(z),\ \Omega_2(z),\ \ldots\ \Omega_s(z)$$

in irgend einem zu $\mathfrak{A}$ gehörigen Puncte z annehmen, sobald ihre von ε nach jenem Puncte durchlaufene Bahn ihrem ganzen Laufe nach innerhalb $\mathfrak{A}$ geblieben ist, mit

$$\overline{\Omega}_1(z),\ \overline{\Omega}_2(z),\ \ldots\ \overline{\Omega}_s(z),$$

und bestimmen nun die Constante C_1 der Art, dass

$$\overline{\Omega}_1(p_1) + \overline{\Omega}_1(p_2) + \ldots \overline{\Omega}_1(p_s) = \overline{\Omega}_1(p_{s+1}),$$

ferner C_2 der Art, dass

$$\overline{\Omega}_2(p_1) + \overline{\Omega}_2(p_2) + \ldots \overline{\Omega}_2(p_s) = \overline{\Omega}_2(p_{s+1})$$

wird, u. s. w., endlich C_s der Art, dass

$$\overline{\Omega}_s(p_1) + \overline{\Omega}_s(p_2) + \ldots \overline{\Omega}_s(p_s) = \overline{\Omega}_s(p_{s+1})$$

wird. Die Grössen

$$\overline{\Omega}_\sigma(p),\ \overline{\Omega}_\sigma(q), \qquad \sigma = 1, 2, \ldots s$$

können nunmehr als bekannte Constante angesehen werden, nämlich als Constante, deren Werthe numerisch berechnet werden können, sobald die Grössen p, q, g, ε numerisch gegeben sind.

Wir haben $\mathfrak{A}$ das fundamentale Flächengebiet, und $\overline{\Omega}_\sigma(p)$, $\overline{\Omega}_\sigma(q)$ die den Integralen Ω_σ zugehörigen Fundamentalwerthe genannt.

Aus diesen Fundamentalwerthen mögen nun sogleich die nachfolgenden Constanten A, B, Δ, Γ zusammengesetzt werden:

$$\begin{array}{ll|ll}
\overline{\Omega}_\sigma(q_1) - \overline{\Omega}_\sigma(p_1) = \frac{1}{2}A_1^{(\sigma)}, & & \overline{\Omega}_\sigma(p_2) - \overline{\Omega}_\sigma(q_1) = \frac{1}{2}(B_2^{(\sigma)} - B_1^{(\sigma)}), & \\
\overline{\Omega}_\sigma(q_2) - \overline{\Omega}_\sigma(p_2) = \frac{1}{2}A_2^{(\sigma)}, & & \overline{\Omega}_\sigma(p_3) - \overline{\Omega}_\sigma(q_2) = \frac{1}{2}(B_3^{(\sigma)} - B_2^{(\sigma)}), & \\
\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots & \\
\overline{\Omega}_\sigma(q_{s-1}) - \overline{\Omega}_\sigma(p_{s-1}) = \frac{1}{2}A_{s-1}^{(\sigma)}, & & \overline{\Omega}_\sigma(p_s) - \overline{\Omega}_\sigma(q_{s-1}) = \frac{1}{2}(B_s^{(\sigma)} - B_{s-1}^{(\sigma)}), & \\
\overline{\Omega}_\sigma(q_s) - \overline{\Omega}_\sigma(p_s) = \frac{1}{2}A_s^{(\sigma)}, & & \overline{\Omega}_\sigma(p_{s+1}) - \overline{\Omega}_\sigma(q_s) = -\frac{1}{2}B_s^{(\sigma)}, & \\
\overline{\Omega}_\sigma(q_{s+1}) - \overline{\Omega}_\sigma(p_{s+1}) = & & \overline{\Omega}_\sigma(p_1) - \overline{\Omega}_\sigma(q_{s+1}) = \frac{1}{2}B_1^{(\sigma)}; & \\
\quad = -\frac{1}{2}(A_1^{(\sigma)} + A_2^{(\sigma)} + \ldots A_s^{(\sigma)}) & & &
\end{array}$$

$$\varDelta = \begin{vmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} & \ldots & A_1^{(s)} \\ A_2^{(1)} & A_2^{(2)} & \ldots & A_2^{(s)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_s^{(1)} & A_s^{(2)} & \ldots & A_s^{(s)} \end{vmatrix} \qquad \Gamma_\tau^{(\sigma)} = \frac{i\pi}{\varDelta}\,\frac{\partial \varDelta}{\partial A_\sigma^{(\tau)}},$$

$$\sigma, \tau = 1, 2, \ldots s.$$

Sind nun $z_1 = \xi$, $z_2 = \eta$, ... $z_s = \zeta$ irgend welche unbekannte Grössen, durch welche die gemeinschaftliche Bahn der Integrale Ω hindurchgeht, sind ferner:

$$\begin{array}{l}
\Omega_1(\xi),\ \Omega_2(\xi),\ \ldots\ \Omega_s(\xi), \\
\Omega_1(\eta),\ \Omega_2(\eta),\ \ldots\ \Omega_s(\eta), \\
\cdots\cdots\cdots \\
\Omega_1(\zeta),\ \Omega_2(\zeta),\ \ldots\ \Omega_s(\zeta)
\end{array}$$

diejenigen Werthsysteme, mit welchen die Integrale der Reihe nach zuerst in ξ, dann in η, u. s. w. zuletzt in ζ eintreffen, und ist endlich

$$\begin{array}{l}
\Omega_1(\xi) + \Omega_1(\eta) + \ldots + \Omega_1(\zeta) = U_1, \\
\Omega_2(\xi) + \Omega_2(\eta) + \ldots + \Omega_2(\zeta) = U_2, \\
\cdots\cdots\cdots \\
\Omega_s(\xi) + \Omega_s(\eta) + \ldots + \Omega_s(\zeta) = U_s;
\end{array}$$

so handelt es sich darum, die s unbekannten Grössen $\xi, \eta, \ldots \zeta$ zu ermitteln, sobald die eben genannten Summen $U_1, U_2, \ldots U_s$ gegeben sind.

Um diese Aufgabe zu lösen, führen wir zunächst an Stelle der gegebenen Grössen $\overline{\Omega}(p)$, $\overline{\Omega}(q)$, A, B, U gewisse andere Grössen $\overline{\omega}(p)$, $\overline{\omega}(q)$ a, b, u ein, setzen nämlich:

$$\begin{array}{l}
\Gamma_1^{(\sigma)}\,\overline{\Omega}_1(p) + \Gamma_2^{(\sigma)}\,\overline{\Omega}_2(p) + \ldots + \Gamma_s^{(\sigma)}\,\overline{\Omega}_s(p) = \overline{\omega}_\sigma(p) \\
\Gamma_1^{(\sigma)}\,\overline{\Omega}_1(q) + \Gamma_2^{(\sigma)}\,\overline{\Omega}_2(q) + \ldots + \Gamma_s^{(\sigma)}\,\overline{\Omega}_s(q) = \overline{\omega}_\sigma(q);
\end{array}$$

$$\sigma = 1, 2, \ldots s.$$

$$\begin{array}{l}
\Gamma_1^{(\sigma)}\,A_\varkappa^{(1)} + \Gamma_2^{(\sigma)}\,A_\varkappa^{(2)} + \ldots + \Gamma_s^{(\sigma)}\,A_\varkappa^{(s)} = a_{\sigma\varkappa}, \\
\Gamma_1^{(\sigma)}\,B_\varkappa^{(1)} + \Gamma_2^{(\sigma)}\,A_\varkappa^{(2)} + \ldots + \Gamma_s^{(\sigma)}\,A_\varkappa^{(s)} = b_{\sigma\varkappa};
\end{array}$$

$$\sigma, \varkappa = 1, 2, \ldots s.$$

$$\Gamma_1^{(\sigma)} U_1 + \Gamma_2^{(\sigma)} U_2 + \ldots + \Gamma_s^{(\sigma)} U_s = u_\sigma.$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots s.$$

Jede der Grössen $a_{\sigma\varkappa}$ wird dann, jenachdem σ, $\varkappa$ gleich oder ungleich sind, den Werth $i\pi$ oder den Werth 0 besitzen; ferner wird, was die Grössen $b_{\sigma\varkappa}$ anbelangt, $b_{\sigma\varkappa} = b_{\varkappa\sigma}$ sein.

Sodann bilden wir unter Anwendung der Constanten $b_{\varkappa\sigma}$ und unter Zuziehung irgend welcher andern s Argumente $V_1, V_2, \ldots V$ die s fach unendliche Reihe:

$$\vartheta(V_1, V_2, \ldots V_s) =$$
$$= \sum_n e^{(b_{11}n_1^2 + 2b_{12}n_1n_2 + \ldots b_{ss}n_s^2) + 2(V_1n_1 + V_2n_2 + \ldots + V_sn_s)};$$

die Summation $\underset{n}{\Sigma}$ soll sich hier auf die ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots n_s$ beziehen, und für jede derselben von $-\infty$ bis $+\infty$ hinerstreckt sein.

Bezeichnen wir nun endlich die gegebenen $s+1$ Grössenpaare

$$p_1, p_2, \ldots p_{s+1},$$
$$q_1, q_2, \ldots q_{s+1}$$

in irgend welcher andern Reihenfolge mit:

$$\alpha, \beta, \ldots \gamma, \delta,$$
$$\alpha', \beta', \ldots \gamma', \delta'$$

und setzen wir:

$$\frac{(\xi - \delta)(\eta - \delta) \ldots (\zeta - \delta)}{(\xi - \delta')(\eta - \delta') \ldots (\zeta - \delta')} = \psi(\xi, \eta, \ldots \zeta),$$

so gilt zur Bestimmung der unbekannten Grössen $\xi, \eta, \ldots \zeta$ folgende Formel:

$$\frac{\psi(\xi, \eta, \ldots \zeta)}{\sqrt{\psi(\alpha, \beta, \ldots \gamma) \cdot \psi(\alpha', \beta', \ldots \gamma')}} = \left(\frac{\vartheta(u_1 - \overline{\omega}_1(\delta), u_2 - \overline{\omega}_2(\delta), \ldots, u_s - \overline{\omega}_s(\delta))}{\vartheta(u_1 - \overline{\omega}_1(\delta'), u_2 - \overline{\omega}_2(\delta'), \ldots, u_s - \overline{\omega}_s(\delta'))}\right)^2.$$

Da die mit

$$\alpha, \beta, \ldots \gamma, \delta$$
$$\alpha', \beta', \ldots \gamma', \delta'$$

bezeichnete Reihenfolge im Wesentlichen auf $s+1$ verschiedene Arten gewählt werden kann, so repräsentirt diese Formel im Ganzen $s+1$ Gleichungen, also eine Gleichung mehr, als zur Bestimmung der s unbekannten Grössen $\xi, \eta, \ldots \zeta$ erforderlich sind.

Schliesslich noch ein kurzer Rückblick auf den Gang und Erfolg unserer Untersuchungen.

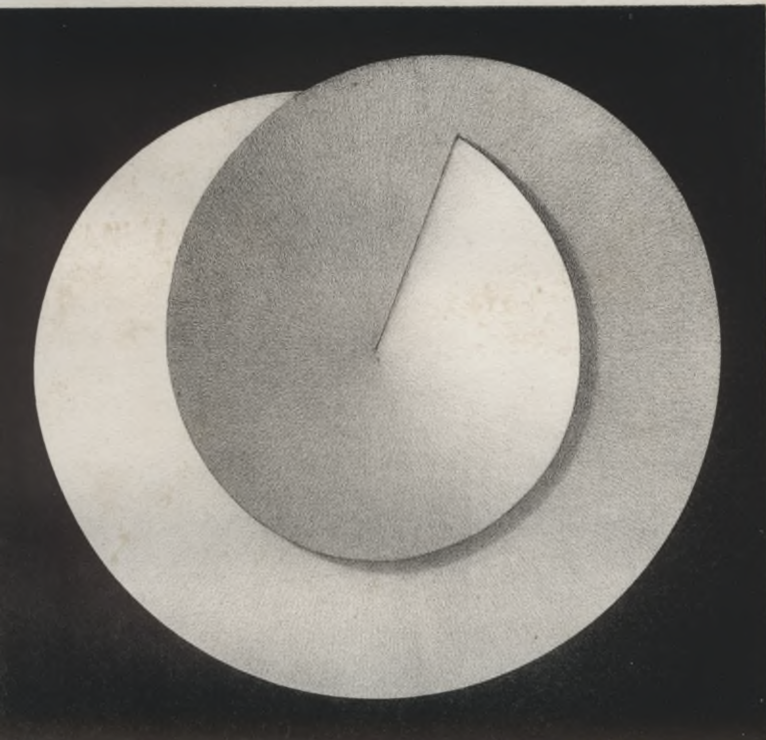
Bei Betrachtung der Abel'schen Integrale hatten wir uns (Seite 393) die Lösung zweier Probleme zur Aufgabe gemacht, welche wir kurzweg das erste und das zweite Problem nannten. Sollten besondere Namen erwünscht sein, so würde man das erste Problem als das Riemann'sche, das zweite als das Jacobi'sche Umkehrungsproblem bezeichnen können.

Jedes dieser beiden Probleme haben wir in zwei verschiedenen Formen hingestellt, in seiner primären Form (S. 393), und in seiner secundären Form (S. 398, 399 und 438, 439). Unter der primären Form verstanden wir die ursprünglich gegebene, unter der secundären Form hingegen eine gewisse abgeleitete und für den Angriff der Probleme vortheilhaftere Form.

Wir sind zur vollständigen Lösung des Riemann'schen sowohl als auch des Jacobi'schen Problemes gelangt.

Die Operationen, welche zur Lösung dieser Probleme erforderlich sind, wurden zuvörderst für den Fall zusammengestellt, dass die Probleme in ihrer secundären Form vorliegen. (Seite 508—510.)

Sodann haben wir später mit Bezug auf das Jacobi'sche Problem eine noch grössere Vollständigkeit eintreten lassen; wir haben nämlich (Seite 510—513) den Fall betrachtet, dass dieses Problem nicht in seiner secundären, sondern in seiner primären Form vorliegt, und die zur Lösung des Problems erforderlichen Operationen auch für diesen Fall vollständig angegeben. Aehnliches würde sich natürlich, wie augenblicklich zu übersehen ist, auch ausführen lassen bei dem Riemann'schen Problem.



Die Riemann'sche Windungsfläche erster Ordnung.

Vergl. Seite 162–168, 213–214 und 218–221

Lith. Anst. v. M. Singer, Leipzig.