

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

II 4173

L. inw.

10915

10915

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000294528

5
C 21

Hinke

Die graphische Statik der Baukonstruktionen

von

Dr.-Ing. Heinrich Müller-Breslau

Geh. Regierungsrat, Professor an der Technischen Hochschule in Berlin.

Zweiter Band. 1. Abteilung.

Vierte, vermehrte Auflage.

Mit 383 Abbildungen im Text und 7 Tafeln.



ZWIĄZEK STUDENTÓW INŻYNIERII
PRZY A. G. w KRAKOWIE
Biblioteka i Czytelnia

Nr. 163/2

Stuttgart
Alfred Kröner Verlag

1907.



II 4173

Druck von Grimme & Trömel in Leipzig.

ZWIĄZEK STUDENTÓW INŻYNIERII
PRZY A. G. w KRAKOWIE
Biblioteka i Czytelnia

Nr. 163

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die vorliegende Abteilung der *Statik der Baukonstruktionen* beschäftigt sich mit einer der wichtigsten Anwendungen der Elastizitätslehre; sie stellt sich die Aufgabe, die Formänderungen ebener Fachwerke und die Theorie des statisch unbestimmten ebenen Fachwerks möglichst vollständig darzustellen.

Den Ausgangspunkt bildet hierbei das Gesetz der virtuellen Verrückungen und der aus diesem gefolgerte Maxwellsche Satz von der Gegenseitigkeit der elastischen Formänderungen, eine *analytische* Grundlage, die auf den ersten Blick für ein Lehrbuch der *graphischen* Statik nicht recht geeignet erscheint. — Wer sich aber auf das Gebiet der Elastizitätslehre begibt, ist immer gezwungen, gewisse Vorarbeiten durch Rechnung zu erledigen, und angesichts dieser Sachlage ließe es sich kaum rechtfertigen, ein so vortreffliches Rüstzeug wie die neuere analytische Theorie beiseite zu legen und durch umständlichere Hilfsmittel zu ersetzen. Dem zeichnerischen Verfahren bleibt immer noch ein weites Feld: die Auftragung der Verschiebungspläne und die Benutzung dieser Liniengebilde zur Herleitung der Einflußlinien und Einflußzahlen, welche auf alle bei der Untersuchung eines gegebenen Fachwerks zu stellenden Fragen die bündigste Antwort geben.

Unser Buch ist folgendermaßen gegliedert:

In der Einleitung werden die Grundgesetze der neueren analytischen Theorie unter der Voraussetzung hergeleitet, daß für den Baustoff eine Proportionalitätsgrenze besteht und die Beanspruchung innerhalb dieser Grenze liegt, eine Annahme, welche bei den hier ausschließlich in Betracht kommenden Trägern aus Schweißeisen, Flußeisen und Stahl zulässig ist. Der Verfasser hat sich hierbei möglicher Kürze befleißigt, hofft aber, die Schwierigkeiten, welche diese allgemeinen

Lehren dem Anfänger zu bieten pflegen, durch Einflechtung von leicht zu überschauenden Sonderfällen gehoben zu haben.

Der I. Abschnitt lehrt in den §§ 1—4 die verschiedenen Darstellungsweisen der Knotenpunktsverschiebungen ebener Fachwerke und zwar in erster Linie die zeichnerischen Verfahren, nebenbei aber auch den in vielen Fällen einfacheren rechnerischen Weg. Dieser wichtigste Teil des Buches ist besonders ausführlich behandelt worden; es wurden auch schwierigere Aufgaben mit Zuhilfenahme der Kinematik behandelt. § 5 enthält sodann als Fortsetzung der Einleitung eine Reihe von Aufgaben über das statisch unbestimmte Fachwerk und zeigt, daß sich die Ermittlung der statisch nicht bestimmbareren Größen stets mit Hilfe von einfachen Verschiebungsplänen durchführen läßt und daß der vorgetragene Lehrstoff selbst bei Behandlung verwickelterer Fälle nicht im Stiche läßt. Damit ist die Theorie des ebenen Fachwerks abgeschlossen.

Der II. Abschnitt enthält lediglich Anwendungen; es werden die wichtigsten statisch unbestimmten Träger ausführlicher betrachtet, zuerst der Zweigelenkbogen, sodann die versteiften Stabbögen, der beiderseits eingespannte Bogen, der Balken auf mehreren Stützen, verschiedene seltenere Anordnungen statisch unbestimmter Balken-, Bogen- und Kettenbrücken und die mehrteiligen Fachwerkbalken. Dieser für den praktischen Ingenieur bestimmte Teil des Buches hat in der neuen Auflage erhebliche Erweiterungen erfahren. Den Schluß der reichhaltigen Aufgabensammlung bildet die Untersuchung eines vierteiligen, dreifach statisch unbestimmten Netzwerks; sie ist besonders wichtig, da Träger dieser Art für zerlegbare Brücken gewisse Vorzüge besitzen. Hier galt es, nicht allein durch Vorführung einer strengen Untersuchung die im I. Bande vorgetragene bequeme angenäherte Berechnung zu prüfen und zu bestätigen, sondern auch falsche Ansichten zu bekämpfen, die neuerdings auf diesem Gebiete laut geworden sind.

Alle Untersuchungen des II. Abschnitts sind als Beispiele zur Erläuterung der allgemeinen Theorie aufgefaßt worden, ein Verfahren, welches der Verfasser in seinen Vorträgen an der hiesigen technischen Hochschule als vorteilhaft erkannt hat und welches die Bewältigung dieses wichtigen Lehrstoffs ohne großen Zeitaufwand gestattet. Der Lernende hat in der Tat nur nötig, ein einziges schwierigeres Beispiel sorgfältig durchzuarbeiten, um sich volle Sicherheit auf dem ganzen Gebiete zu erwerben. Daß diese auf die Beherrschung der allgemeinen Gesetze hinzielende Vortragsweise seitens des Studierenden anfangs

etwas mehr geistige Anstrengung verlangt als die Beschränkung auf die einfachsten Sonderfälle, von denen jeder von Grund aus entwickelt wird, ist selbstverständlich. Dafür bietet sie aber auch mehr als eine Gebrauchsanweisung für die Behandlung leichter Aufgaben.

Berlin, im Juni 1902.

H. Müller-Breslau.

Vorwort zur vierten Auflage.

Von der vorigen Auflage unterscheidet sich die vorliegende durch eine analytische Ergänzung des kinematischen Verfahrens, die Gleichungen zur Berechnung der statisch unbestimmten Größen X_a , X_b , . . . so zu gestalten, daß jede Gleichung nur eine einzige Unbekannte enthält, ferner durch eine Umarbeitung der Untersuchung des auf mehreren Stützen ruhenden Balkens; hier wurde auch ein von verschiedenen Seiten gewünschtes Zahlenbeispiel eingeschaltet. Die Angaben über die zur Einleitung gehörige Literatur wurden durch einen Auszug aus der grundlegenden Maxwellschen Arbeit ergänzt. Hierdurch glaubt der Verfasser am wirksamsten dem von anderer Seite unternommenen Versuche entgegenzutreten, die Tragweite der Maxwellschen Arbeit herabzusetzen.

Berlin, im Januar 1907.

H. Müller-Breslau.

Inhalt.

Einleitung.

Grundgesetze der Theorie der elastischen Träger.

	Seite
A. Das Fachwerk	1
B. Gesetze für beliebige isotrope, feste Körper	37
Literatur zur Einleitung	51

I. Abschnitt.

Bestimmung der Formveränderungen ebener Fachwerke, mit Anwendungen auf die Untersuchung statisch unbestimmter und statisch bestimmter Träger.

§ 1. Verschiebungspläne nach dem Verfahren von Williot	59
§ 2. Darstellung der Formveränderung von Stabzügen mit gelenkartigen Knoten	87
§ 3. Die Biegungslinie als Seilpolygon betrachtet	99
§ 4. Einflußlinien und Einflußzahlen für elastische Verschiebungen	136
§ 5. Das statisch unbestimmte Fachwerk	139
§ 6. Allgemeines über das Auftragen der Einflußlinien	179
Literatur zum I. Abschnitt	197

II. Abschnitt.

Formeln, Regeln und Beispiele für die Berechnung der wichtigsten statisch unbestimmten Fachwerke.

§ 7. Der Bogen mit zwei Gelenken	199
§ 8. Zweigelenkbogen mit gesprengter Zugstange und verwandte Trägerarten	245
§ 9. Kette, versteift durch einen Fachwerkbalken	266
§ 10. Einfach statisch unbestimmte Bogen- und Kettenbrücken mit mehreren Öffnungen	288
§ 11. Fachwerkbogen mit eingespannten Kämpfern	296

	Seite
§ 12. Durchgehender Balken mit drei Stützpunkten	358
§ 13. Durchgehender Balken mit vier Stützpunkten	367
§ 14. Durchgehender Balken mit beliebig vielen Stützen	381
§ 15. Verschiedene Arten statisch unbestimmter Bogen-, Balken- und Kettenbrücken	405
§ 16. Beispiele für die Einführung eines statisch unbestimmten Hauptsystems	437
§ 17. Aufgaben über statisch unbestimmte mehrteilige Fachwerkbalken . .	444
§ 18. Untersuchung der Formveränderung eines vierteiligen statisch bestimmten Netzwerks Mehrtensscher Bauart.	473
§ 19. Herleitung der Biegungslinien aus den Momentenlinien	478
Literatur zum II. Abschnitt	485

Einleitung.

Grundgesetze der Theorie der elastischen Träger.

A. Das Fachwerk.

a. Voraussetzungen und Erklärungen. Elastizitätsbedingungen. Gesetz von der Zusammenzählung der einzelnen Wirkungen.

1. — Wird ein aus elastischen Stäben gebildetes und auf elastischen Stützen ruhendes Fachwerk der Einwirkung von äußeren Kräften und Temperaturänderungen ausgesetzt, so erfährt es vor Eintritt des Gleichgewichts, dessen schließliches Zustandekommen vorausgesetzt werden möge, im allgemeinen eine Formveränderung. Die Verschiebungen, welche die Knotenpunkte dabei erfahren, bezeichnet man als *elastische*, sobald sie nur eine Folge der Dehnbarkeit der Stäbe und der Elastizität der Widerlager sind. Ihre Werte sind meistens so klein, daß es zulässig ist, sie als verschwindende Größen zu behandeln und bei Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen sämtliche Kräfte in den für starre Stäbe und Stützen gültigen Lagen zu denken.

Die folgenden Untersuchungen sind an die Annahme ganz allmählich wachsender Kräfte gebunden, setzen also voraus, daß der Gleichgewichtszustand eintritt, ohne daß Schwingungen entstehen. Sie beschäftigen sich mit ebenen und räumlichen Fachwerken, beschränken sich aber auf den Fall sehr kleiner und nur elastischer Formänderungen. Ihr erstes Ziel ist die Herleitung von allgemeinen Beziehungen zwischen den Änderungen der Stablängen und den Verschiebungen der Knotenpunkte — Beziehungen, die nicht allein die Bestimmung der Gestalt des verschobenen Fachwerks möglich machen, sondern auch die Grundlage für die Ermittlung der Spannkkräfte und Stützenwiderstände derjenigen statisch unbestimmten Fachwerke bilden werden, welche sich durch Beseitigung von Stäben oder Auflagerbedingungen in statisch bestimmte und ausschließlich elastischen Formänderungen unterworfenen Stabgebilde verwandeln lassen.

2. — Es wird zunächst angenommen, daß die äußeren Kräfte nur in den Knotenpunkten angreifen, mithin sämtliche Stäbe ausschließlich auf Zug oder auf Druck beansprucht werden. Die Gewichte der Stäbe

sind hierbei auf die Knotenpunkte verteilt zu denken. Alle gegebenen äußeren Kräfte werden *Lasten* genannt, zur Unterscheidung derselben von den an den Auflagern hervorgerufenen *Widerständen*. Eine Last werden wir allgemein mit P bezeichnen, hingegen den Buchstaben Q anwenden, wenn es dahingestellt sein soll, ob die damit gemeinte äußere Kraft eine Last oder ein Stützenwiderstand ist. Vor Einwirkung der äußeren Kräfte und der Temperaturänderungen seien sämtliche Stäbe spannungslos.

Es wird vorausgesetzt, daß für den Baustoff eine Proportionalitätsgrenze besteht und die Beanspruchung innerhalb dieser Grenze liegt, eine Annahme, welche bei den hier ausschließlich in Betracht kommenden Trägern aus Schweißeisen, Flußeisen und Stahl zulässig ist. Bedeutet dann

S die Spannkraft in irgendeinem Stabe,

s die anfängliche Länge dieses Stabes,

Δs die Strecke, um welche s zunimmt (sie ist negativ, sobald sich der Stab verkürzt),

$\frac{\Delta s}{s}$ das *Verlängerungsverhältnis* des Stabes,

F den Querschnitt des prismatisch vorausgesetzten Stabes,

E die für alle Punkte des Stabes gleich groß angenommene Elastizitätsziffer (auch Elastizitätskoeffizient oder Elastizitätsmodul genannt),

t die für alle Punkte des Stabes gleiche Temperaturerhöhung,

ε das einer Temperaturerhöhung um 1° Cels. entsprechende Verlängerungsverhältnis,

$\sigma = \frac{S}{F}$ die im Stabe hervorgerufene *Spannung* — positiv, sobald der Stab gezogen wird, so ist

$$(1) \quad \frac{\Delta s}{s} = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon t = \frac{S}{EF} + \varepsilon t.$$

Schreibt man $\frac{\Delta s}{s} = \frac{\sigma + \varepsilon Et}{E}$, so erkennt man, daß die Temperaturerhöhung denselben Einfluß auf Δs besitzt, wie eine Zunahme der Spannung um εEt , ein Gesetz, von dem wir später öfter Gebrauch machen werden. Man darf im Mittel annehmen

für <i>Schweißeisen</i>	$E = 2000000 \frac{k}{qcm}$
„ <i>Flußeisen</i>	$E = 2150000$ „
„ <i>Stahldraht</i>	$E = 2150000$ „
„ <i>Flußstahl</i>	$E = 2200000$ „
„ <i>Stahlguß</i>	$E = 2150000$ „

ferner für

Wir nennen die Gleichung (7) eine *Elastizitätsbedingung*. Ist die Anzahl der Fachwerkstäbe r , so lassen sich r Elastizitätsbedingungen aufstellen.

4. — Die Aufgabe der Theorie des Fachwerks besteht in der Ermittlung der Stützenwiderstände und Spannkkräfte, sowie in der Aufsuchung der Gestalt des verschobenen Fachwerks. Der letztere Teil dieser Aufgabe ist als gelöst zu betrachten, sobald die Seitenverschiebungen Δx , Δy , Δz sämtlicher Knotenpunkte bekannt sind.

Als gegeben wollen wir außer den auf das Fachwerk wirkenden Lasten P und den Temperaturänderungen t vorläufig auch die Verschiebungen der Stützpunkte annehmen; denn diese können meistens nur geschätzt oder durch Beobachtung bestimmt werden; sie lassen sich in den seltensten Fällen durch die auf die Widerlager wirkenden Kräfte und die Temperaturänderungen der Stützen ausdrücken, da wichtige Ursachen jener Verschiebungen, wie das Nachgeben des Baugrundes und die Formänderung der Mauerwerkskörper, bislang noch sehr wenig erforscht sind.

Wir setzen zunächst voraus, daß an den Auflagerstellen keine Reibungswiderstände auftreten und unterscheiden dann drei Arten von Stützung:

a) Der Stützpunkt w wird in einer Fläche geführt. Der Stützenwiderstand wirkt rechtwinklig zu der in w an jene Fläche gelegten Berührungsebene; seine Richtung ist gegeben, seine Größe wird gesucht. Bei ruhendem Widerlager ist die Verschiebung von w in der Richtung des Auflagerdruckes = 0; im Gegenfalle möge dieselbe einen durch die Beobachtung gefundenen, gegebenen Wert annehmen.

b) Der Stützpunkt w wird in einer Linie geführt; er kann sich in der Richtung der in w an jene Linie gelegten Tangente frei bewegen. Der in w angreifende Auflagerdruck liegt in der zur Tangente rechtwinkligen Ebene und muß durch Angabe zweier Seitenkräfte bestimmt werden. Bei ruhendem Widerlager sind die in die Richtungen dieser Seitenkräfte fallenden Seitenverschiebungen des Punktes w gleich Null. Gibt das Widerlager nach, so mögen jene Verschiebungen gegebene, durch Beobachtung gefundene Werte besitzen.

c) Kann sich ein Stützpunkt w nach keiner Richtung hin frei bewegen, so ist zur Bestimmung des an demselben angreifenden Widerstandes die Angabe von drei Seitenkräften erforderlich, und diesen Kräften stehen bei nachgebendem Widerlager drei beobachtete Seitenverschiebungen gegenüber.

Wie also die Stützung eines Punktes w immer beschaffen sein mag — stets ist die Anzahl der an dem Auflager auftretenden unbekannteren äußeren Kräfte ebenso groß wie die Anzahl der gegebenen

Seitenverschiebungen, welche letztere die *Auflagerbedingungen* genannt werden sollen.

Die Anzahl der Knotenpunkte sei k , diejenige der Stäbe r . Für jeden Knotenpunkt lassen sich drei *Gleichgewichtsbedingungen* aufstellen. Bedeuten nämlich Q_{xm} , Q_{ym} , Q_{zm} die den Achsen x , y , z parallelen Seitenkräfte der in irgendeinem Knotenpunkte m angreifenden äußeren Kraft Q_m , ferner S_1, S_2, \dots, S_p die Spannkkräfte in den von m ausgehenden Stäben und $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ die Neigungswinkel der Stabachsen gegen die Achsen x, y, z , so muß sein:

$$(8) \quad \begin{cases} Q_{xm} + \sum_1^p S \cos \alpha = 0 \\ Q_{ym} + \sum_1^p S \cos \beta = 0 \\ Q_{zm} + \sum_1^p S \cos \gamma = 0. \end{cases}$$

Im ganzen stehen beim räumlichen Fachwerk zur Verfügung:

$3k$ Gleichgewichtsbedingungen,

r Elastizitätsbedingungen von der Art der Gleichung (7),

a Auflagerbedingungen,

und diese Gleichungen enthalten als Unbekannte:

r Spannkkräfte S ,

a nach bestimmten Richtungen wirkende Stützenwiderstände,

$3k$ Seitenverschiebungen $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ von k Knotenpunkten.

(Beim ebenen Fachwerk tritt $2k$ an die Stelle von $3k$.)

Die Anzahl der Unbekannten ist also ebenso groß wie die Anzahl der Gleichungen. Letztere sind durchweg vom ersten Grade; sie lassen sich eindeutig auflösen, sobald ihre Nennerdeterminante einen von Null verschiedenen Wert besitzt — was hier vorausgesetzt werden soll. Eine nähere Untersuchung dieser Nennerdeterminante ist überflüssig, weil später ein anderer, viel einfacherer Weg zur Lösung der gestellten Aufgabe eingeschlagen und aus der vorstehenden Untersuchung nur gefolgert werden soll,

daß sich die Spannkkräfte S , ferner die nach bestimmten Richtungen wirkenden Stützenwiderstände C und die Seitenverschiebungen $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ darstellen lassen als lineare Funktionen der den Koordinatenachsen parallelen Seitenkräfte $P_1, P_2, P_3 \dots$ der Lasten, der Änderungen $t_1, t_2, t_3 \dots$ der anfänglichen Stabtemperaturen und der nach bestimmten Richtungen erfolgenden Verschiebungen $\delta_{w1}, \delta_{w2}, \delta_{w3} \dots$ der Stützpunkte w .

Für jede der zu suchenden Unbekannten, die wir allgemein mit Z bezeichnen wollen, ergibt sich hiernach ein Ausdruck von der Form:

$$(9) \quad Z = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \dots \\
+ \mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \mu_3 t_3 + \dots \\
+ \nu_1 \delta_{w1} + \nu_2 \delta_{w2} + \nu_3 \delta_{w3} + \dots,$$

wobei α , μ , ν Werte sind, welche von den Abmessungen und Richtungen der Stäbe, den Werten E und ε , den Koordinaten x , y , z der Knotenpunkte und von der Art der Stützung des Fachwerkes abhängen, nicht aber von den Größen P ; t , δ_w .

Ist insbesondere die Anzahl der Stäbe und der Auflagerkräfte zusammen $3k$ für das räumliche und $2k$ für das ebene Fachwerk, und besitzt die Nennerdeterminante der Gleichgewichtsbedingungen einen von Null verschiedenen Wert, so ist es möglich, sämtliche S und C mit Hilfe dieser Gleichungen (oder mittels anderer bequemerer Verfahren, die für das ebene Fachwerk im ersten Bande mitgeteilt worden sind und für das räumliche im dritten Bande folgen werden) als lineare Funktionen der Lasten P darzustellen; sie sind dann unabhängig von den t und δ_w , und das Fachwerk ist ein statisch bestimmtes.

5. — Wird ein Fachwerk durch bestimmte Lasten P beansprucht, bestimmten Temperaturänderungen unterworfen, und erleiden die Stützpunkte bestimmte Verschiebungen, so sagen wir: *das Fachwerk wird von bestimmten Ursachen P , t , δ_w angegriffen* und sprechen dann kurz von einer *bestimmten Angriffsweise des Fachwerkes*.

Erfolgt die Stützung stets in denselben Punkten und in jedem dieser Punkte immer auf dieselbe Art, so nennen wir das Fachwerk ein solches von *unveränderlicher Stützungsart*.

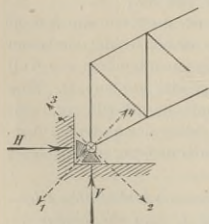


Fig. 2.

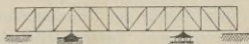


Fig. 3.

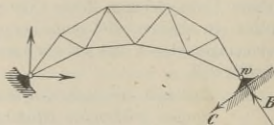


Fig. 4.

Beispiele für *veränderliche* Stützungsart bieten die Figuren 2 bis 4. An dem in Fig. 2. abgebildeten Auflager eines ebenen Fachwerkes wirken einer Verschiebung des Stützpunktes in der Richtung des Pfeiles 1 zwei Widerstände V und H entgegen, einer Verschiebung in der Richtung 3 nur ein Widerstand V , einer solchen in der Richtung 2 nur ein Widerstand H , während sich der Punkt w in der Richtung 4 frei bewegen kann.

Der Fachwerkbalken in Fig. 3 wird bei geringer Belastung der Außenfelder nur in zwei Punkten gestützt und ist dann statisch bestimmt. Infolge kleiner

Senkungen der Enden kann er in einen auf vier Stützen ruhenden, mithin zweifach statisch unbestimmten Balken übergehen.

Eine mit der Angriffsweise veränderliche Art der Stützung kann auch durch größere Reibungswiderstände verursacht werden. Erhält z. B. der in Fig. 4 dargestellte ebene Träger links ein festes und rechts ein bewegliches Auflager, und ist der an dem letzteren auftretende Reibungswiderstand groß genug, um eine Bewegung des Stützpunktes zu hindern, so ist der Träger statisch unbestimmt (Bogen mit zwei Gelenken). Sonst ist er statisch bestimmt, und es darf dann der in der Auflagerbahn wirkende Widerstand $C = fB$ angenommen werden, wo f die Reibungsziffer und B den zur Auflagerbahn rechtwinkligen Widerstand bedeutet. Der Sinn von C ist entgegengesetzt dem Sinne der Verschiebung des Stützpunktes w .

Läßt sich ein Fachwerk in Teile zerlegen, welche im Falle unelastischer Stäbe starr wären, und ist die gegenseitige Stützung dieser Teile von unveränderlicher Art, sind ferner sämtliche Stäbe widerstandsfähig gegen Zug und Druck, so bezeichnen wir das Fachwerk als ein solches von *unveränderlicher Gliederung*.

Ein Beispiel von veränderlicher Gliederung infolge wechselnder Art der gegenseitigen Stützung einzelner Teile zeigt Fig. 5. Dieselbe stellt zwei durch ein Gelenk G verbundene gegliederte Scheiben eines ebenen Fachwerks dar. Die Scheiben sind so geformt, daß sie sich infolge einer sehr kleinen, im Sinne der beigefügten Pfeile erfolgten Drehung in den Punkten m berühren, während sie bei Eintritt einer entgegengesetzten Drehung nur in G aufeinander wirken. Im zweiten Falle sind die beiden Punkte m als zwei verschiedene Knoten zu behandeln, und es ergeben sich für dieselben vier Gleichgewichtsbedingungen. Andernfalls bilden sie einen einzigen Knotenpunkt, für den sich nur zwei Gleichgewichtsbedingungen aufstellen lassen.

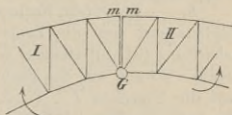


Fig. 5.

Eine veränderliche Gliederung liegt auch vor, wenn das Fachwerk Stäbe besitzt, die nur nach einer Richtung widerstandsfähig sind, die also aus Seilen oder Ketten bestehen und deshalb nur Zugkräfte aufnehmen können, oder die sich mit halbzyklindrischen Endflächen gegen die in den Knoten angeordneten Gelenkbolzen stützen und infolgedessen nur Widerstand gegen Druck leisten.

Das wichtigste Beispiel hierfür ist der im ersten Bande (§ 34) dieses Buches untersuchte Fachwerkbalken mit Gegendiagonalen. Die früher für diesen Träger aufgestellte Theorie ist durch die Bemerkung zu vervollständigen, daß zuweilen in allen oder einzelnen Feldern beide Diagonalen gleichzeitig gespannt werden, und der Träger infolgedessen statisch unbestimmt wird, „daß aber die genaueren Werte der Spannkraft von den früher angegebenen stets sehr wenig abweichen und die schärfere Berechnung deshalb unterbleiben darf.“

Ein anderes Beispiel führt die Fig. 6 vor. Das hier abgebildete ebene Fachwerk ist im allgemeinen fünffach statisch unbestimmt, weil es 36 Knotenpunkte und 74 Stäbe besitzt, mithin die Anzahl der Stäbe um 5 größer ist als die Zahl $2 \cdot 36 - 3 = 69$, wo $3 =$ Anzahl der an den Widerlagern auftretenden Unbekannten^{*)}. Sind die Stäbe 1 bis 9 nur imstande, Zugkräfte zu übertragen, und wird das Fachwerk so beansprucht, daß die Stäbe 2 und 3 spannungslos werden, so ist es für die

*) Man erkennt dies auch ohne weiteres, wenn man an das statisch bestimmte Dreieckssystem die Knotenpunkte e und f mittels der Stäbe 1, 4, 6 und 9 anschließt. Die Stäbe 2, 3, 5, 7, 8 sind dann überzählig.

fragliche Angriffsweise nur dreifach statisch unbestimmt. Werden auch noch 5, 7, 8 spannungslos, so treten 1, 4, 6, 9 ebenfalls außer Tätigkeit (weil sonst Gleichgewicht an den Knoten e und f nicht möglich ist) und das Fachwerk geht in ein statisch bestimmtes über.

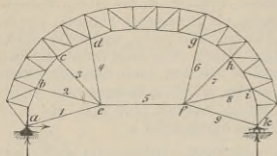


Fig. 6.

zu bezeichnen und die augenblickliche Art der gegenseitigen Stützung einzelner Teile des Fachwerks, sowie die Art der Stützung durch die Widerlager anzugeben, so daß man vielfach auf den Weg des Versuchs angewiesen ist.

6. — Bei einem Fachwerke von unveränderlicher Gliederung und Stützungsart sind die Zahlen k , r , a (vergl. S. 5), ferner die in der Gleichung (9) auftretenden Werte α , μ , ν unabhängig von der Angriffsweise. Wirken auf das Fachwerk einmal die Ursachen, P' , t' , δ_w' , hierauf die Ursachen P'' , t'' , δ_w'' , und entspricht den ersteren der Wert Z' der gesuchten Unbekannten, den letzteren der Wert Z'' , so folgt aus den linearen Beziehungen (9), für den von den Ursachen P' , t' , δ_w' , P'' , t'' , δ_w'' hervorgerufene Wert Z die Gleichung

$$Z = Z' + Z''.$$

Es ist also bei der Bestimmung der Spannkraft S , sowie der nach bestimmten Richtungen wirkenden Auflagerkräfte und der nach bestimmten Richtungen gebildeten Seitenverschiebungen der Knotenpunkte zulässig, die Einflüsse der einzelnen auf das Fachwerk wirkenden Ursachen getrennt zu ermitteln und schließlich zusammen zu zählen — ein sehr wichtiges Gesetz, welches in der Folge *das Gesetz von der Zusammenzählung der einzelnen Wirkungen* genannt werden soll. Dasselbe gilt nur für Fachwerke von unveränderlicher Gliederung und Stützungsart.

Hat man aber bei Untersuchung eines *in bestimmter Weise angegriffenen* Fachwerks mit einseitig widerstehenden Stäben die wirkungslosen Stäbe ausgeschieden, so darf man auf das übrig bleibende Stabgebilde das eben bewiesene Gesetz anwenden. Hierbei dürfen die Einflüsse der einzelnen Ursachen auf die Spannkraft S eines nur gegen $\left\{ \begin{array}{l} \text{Zug} \\ \text{Druck} \end{array} \right\}$ widerstandsfähigen Stabes $\left\{ \begin{array}{l} \text{negativ} \\ \text{positiv} \end{array} \right\}$ ausfallen. Bedingung ist nur, daß sich für die Summe S sämtlicher Beiträge ein $\left\{ \begin{array}{l} \text{positiver} \\ \text{negativer} \end{array} \right\}$ Wert ergibt. Auch wenn die Stützungsart veränderlich ist, darf jenes Gesetz

— falls eine bestimmte Angriffsweise vorliegt — angewendet werden. Es ist dann zunächst die Art der augenblicklichen Stützung zu ermitteln, und diese Stützungsart muß der Berechnung sämtlicher einzelner Wirkungen zugrunde gelegt werden. Dies gilt sowohl für die Stützung durch die Widerlager, als auch für die gegenseitige Stützung einzelner Teile des Fachwerks.

b. Gesetz der virtuellen Verschiebungen. Arbeitsgleichungen. Clapeyronsches Gesetz.

7. — Um zu einer sehr einfachen und fruchtbaren Beziehung zwischen den Änderungen Δs der Stablängen und den von denselben Ursachen herrührenden Verschiebungen der Fachwerksknoten zu gelangen, multiplizieren wir die auf Seite 3 abgeleitete Gleichung

$$\Delta s_{ik} = (\Delta x_k - \Delta x_i) \cos \alpha_{ik} + (\Delta y_k - \Delta y_i) \cos \beta_{ik} + (\Delta z_k - \Delta z_i) \cos \gamma_{ik}$$

mit einer Spannkraft, welche im Stabe $i-k$ durch irgendeinen *nur gedachten* Belastungszustand des Fachwerks erzeugt sein möge, und die zur Unterscheidung von der *wirklichen* Spannkraft S_{ik} mit \bar{S}_{ik} bezeichnet werden soll. Hierauf stellen wir eine ähnliche Gleichung für jeden Stab auf, addieren alle diese Gleichungen und erhalten:

$$\Sigma \bar{S}_{ik} \Delta s_{ik} = \Sigma [\bar{S}_{ik} (\Delta x_k - \Delta x_i) \cos \alpha_{ik} + \bar{S}_{ik} (\Delta y_k - \Delta y_i) \cos \beta_{ik} + \bar{S}_{ik} (\Delta z_k - \Delta z_i) \cos \gamma_{ik}],$$

wofür auch geschrieben werden darf:

$$(10) \Sigma \bar{S}_{ik} \Delta s_{ik} = - \Sigma [(\bar{S}_{ik} \cos \alpha_{ik} \Delta x_i + \bar{S}_{ik} \cos \beta_{ik} \Delta y_i + \bar{S}_{ik} \cos \gamma_{ik} \Delta z_i) + (\bar{S}_{ki} \cos \alpha_{ki} \Delta x_k + \bar{S}_{ki} \cos \beta_{ki} \Delta y_k + \bar{S}_{ki} \cos \gamma_{ki} \Delta z_k)],$$

denn es ist $\cos \alpha_{ki} = -\cos \alpha_{ik}$, $\cos \beta_{ki} = -\cos \beta_{ik}$, $\cos \gamma_{ki} = -\cos \gamma_{ik}$, hingegen $\bar{S}_{ki} = \bar{S}_{ik}$. Man vergleiche die auf ein ebenes Fachwerk sich beziehende Figur 7, in welcher die \bar{S} als Kräfte aufgefaßt worden sind, welche an den Knotenpunkten angreifen, also den weggenommenen Stab ik ersetzen.

Das Bildungsgesetz der rechten Seite der Gleichung (10) läßt sich wie folgt aussprechen: Man zerlege die in i wirkende Kraft \bar{S}_{ik} in die den Achsen x, y, z parallelen Seitenkräfte $\bar{S}_{ik} \cos \alpha_{ik}$, $\bar{S}_{ik} \cos \beta_{ik}$, $\bar{S}_{ik} \cos \gamma_{ik}$, multipliziere diese Kräfte der Reihe nach mit den Seitenverschiebungen Δx_i , Δy_i , Δz_i ihres Angriffspunktes i , verfähre in gleicher

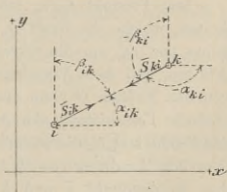


Fig. 7.

Weise mit sämtlichen Kräften \bar{S} und addiere alle diese Produkte. Ordnet man nun die so erhaltene Summe nach den Knotenpunkten und be-

zeichnet die Ordnungsziffer eines beliebigen Knotens mit m , so gelangt man (wenn man auf der linken Seite den jetzt entbehrlichen Zeiger ik fortläßt) zu der Gleichung

$$(11) \quad \Sigma \bar{S} \Delta s = - \Sigma (\Delta x_m \Sigma_m \bar{S} \cos \alpha + \Delta y_m \Sigma_m \bar{S} \cos \beta + \Delta z_m \Sigma_m \bar{S} \cos \gamma),$$

in welcher sich die Summen $\Sigma_m \bar{S} \cos \alpha$, $\Sigma_m \bar{S} \cos \beta$, $\Sigma_m \bar{S} \cos \gamma$ über alle in m angreifenden Spannkkräfte \bar{S} erstrecken.

Die äußeren Kräfte des *gedachten* Belastungszustandes sollen, damit sie von den in Wirklichkeit auftretenden äußeren Kräften Q_m unterschieden werden, mit \bar{Q}_m bezeichnet werden; sie mögen mit den Achsen x, y, z die Winkel $\bar{\xi}_m, \bar{\eta}_m, \bar{\zeta}_m$ einschließen. *Hinsichtlich der Kräfte \bar{Q} und \bar{S} wird nur vorausgesetzt, daß sie miteinander im Gleichgewichte sind.* Für den Knotenpunkt m erhält man die Bedingungen:

$$(12) \quad \begin{cases} \bar{Q}_m \cos \bar{\xi}_m + \Sigma_m \bar{S} \cos \alpha = 0 \\ \bar{Q}_m \cos \bar{\eta}_m + \Sigma_m \bar{S} \cos \beta = 0 \\ \bar{Q}_m \cos \bar{\zeta}_m + \Sigma_m \bar{S} \cos \gamma = 0, \end{cases}$$

und es läßt sich nun (11) umformen in:

$$\Sigma \bar{Q}_m (\Delta x_m \cos \bar{\xi}_m + \Delta y_m \cos \bar{\eta}_m + \Delta z_m \cos \bar{\zeta}_m) = \Sigma \bar{S} \Delta s.$$

Diese Gleichung kann man aber noch kürzer fassen, wenn man beachtet, daß die Projektion δ_m der wirklichen Verschiebung mm' des Knotens m auf die Richtung der gedachten Kraft \bar{Q}_m durch die Formel

$$\delta_m = \Delta x_m \cos \bar{\xi}_m + \Delta y_m \cos \bar{\eta}_m + \Delta z_m \cos \bar{\zeta}_m$$

bestimmt ist. Es ergibt sich dann die Gleichung:

$$(13) \quad \Sigma \bar{Q}_m \delta_m = \Sigma \bar{S} \Delta s,$$

in welche die Verschiebung δ_m als positive oder negative Größe einzuführen ist, je nachdem sie denselben oder den entgegengesetzten Sinn hat wie die Kraft \bar{Q}_m .

Das Produkt $\bar{Q}_m \delta_m$ läßt sich als diejenige mechanische Arbeit deuten, welche die Kraft \bar{Q}_m verrichtet, wenn ihr Angriffspunkt m im Sinne von \bar{Q}_m um die Strecke δ_m verschoben wird. Um nun auszudrücken, daß diese Verschiebung durch Ursachen erzeugt wird, welche von den Kräften \bar{Q} ganz unabhängig sind, bezeichnet man δ_m als eine *virtuelle Verschiebung des Angriffspunktes m der Kraft \bar{Q}_m* und nennt das Produkt $\bar{Q}_m \delta_m$ die *virtuelle Arbeit der Kraft \bar{Q}_m* . Ebenso bezeichnet man den Ausdruck $(-\bar{S}_{ik} \Delta s_{ik})$ als die virtuelle Arbeit der beiden in dem Knotenpunkt i und k angreifenden, gegeneinander gerichteten Kräfte \bar{S}_{ik} (Fig. 7) und Δs_{ik} als die gegenseitige virtuelle Verschiebung ihrer Angriffspunkte.

Die Gleichung

$$\Sigma \bar{Q}_m \delta_m - \Sigma \bar{S} \Delta s = 0$$

drückt demnach den unter dem Namen *Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten* (oder besser: *Gesetz der virtuellen Verschiebungen*) bekannten Satz aus:

Die Summe der virtuellen Arbeiten sämtlicher in den Knotenpunkten angreifenden äußeren und inneren Kräfte \bar{Q} und \bar{S} ist im Falle einer verschwindend kleinen Formveränderung des Fachwerks gleich Null.

Man nennt auch das Produkt $(+ \bar{S}_{ik} \Delta s_{ik})$ die *virtuelle Formänderungsarbeit* des durch die beiden Kräfte \bar{S}_{ik} beanspruchten Stabes s_{ik} und den Ausdruck $\Sigma \bar{S} \Delta s$ die *virtuelle Formänderungsarbeit* des Fachwerks. Die Gleichung (13) sagt also aus: daß die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte ebenso groß ist wie die virtuelle Formänderungsarbeit des Fachwerks.

Die Anwendung dieses Gesetzes auf den wirklichen Belastungszustand und den wirklichen Formänderungszustand liefert die Gleichung:

$$(14) \quad \Sigma Q_m \delta_m = \Sigma S \Delta s,$$

in welcher jetzt δ_m die Projektion des wirklichen Weges des Knotens m auf die Richtung von Q_m bedeutet.

Wir werden die Gleichungen (13) und (14) auch als *Arbeitsbedingungen* oder *Arbeitsgleichungen* bezeichnen und z. B. die am häufigsten benutzte Gleichung (13) kurz die *Arbeitsgleichung für den Belastungszustand* (\bar{Q}) nennen, wobei wir dann stillschweigend voraussetzen, daß es sich um den wirklichen Verschiebungszustand handelt.

8. — Für die Folge ist es wichtig, die von den äußeren Kräften Q verrichtete mechanische Arbeit A zu bestimmen, und zwar für den Fall, daß das anfangs spannungslose Fachwerk keinen Temperaturänderungen unterworfen wird.

Die äußeren und inneren Kräfte wachsen allmählich von Null bis zu ihren Endwerten Q und S an. Sind Q_x, S_x gleichseitige Zwischenwerte dieser Kräfte, und nehmen in dem Augenblicke, in welchem die Q_x und S_x wirken, die Verschiebungen δ und Δs um $d\delta$ und $d(\Delta s)$ zu, so ist nach (13):

$$\Sigma Q_x d\delta = \Sigma S_x d\Delta s,$$

und diese Gleichung gilt für jedes der unendlich kleinen Zeiteilchen, in welche sich die ganze Bewegungsdauer zerlegen läßt. Hieraus folgt

aber (mit $\Delta s = \frac{Ss}{EF}$):

$$(15) \quad \Sigma \int_0^Q Q_x d\delta = \Sigma \int_0^S S_x d\Delta s = \Sigma \int_0^S S_x \frac{dS_x s}{EF} = \Sigma \frac{S^2 s}{2EF} = \frac{1}{2} \Sigma S \Delta s.$$

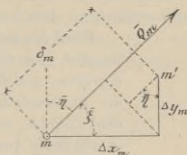


Fig. 8.

Da nun nach (14)

$$\frac{1}{2} \sum S \Delta s = \frac{1}{2} \sum Q_m \delta_m$$

ist, so erhält man für die gesuchte Arbeit $A = \sum \int_0^Q Q_x d\delta$ den Ausdruck:

$$(16) \quad A = \frac{1}{2} \sum Q_m \delta_m$$

und gelangt zu dem zuerst von *Clapeyron* bewiesenen Gesetze:

Wird ein anfänglich spannungsloses Fachwerk, dessen Temperatur sich in keinem Punkte ändert, von äußeren Kräften ergriffen, welche allmählich von Null aus anwachsen, so ist die mechanische Arbeit der äußeren Kräfte unabhängig von dem Gesetze, nach welchem diese Kräfte zunehmen und auch unabhängig von der Reihenfolge, in der die äußeren Kräfte am Fachwerke angebracht werden; sie ist stets halb so groß, als wenn sämtliche Kräfte Q während der ganzen Formänderung ihre Endwerte hätten.

c) Anwendung der Gleichung $\sum \bar{Q} \delta = \sum \bar{S} \Delta s$ auf statisch bestimmte Fachwerke. Die Maxwell'schen Gleichungen.

9. — Die Änderungen Δs der Stablängen s eines statisch bestimmten Fachwerks seien bekannt; auch seien die durch Nachgeben der elastischen Widerlager entstandenen Verschiebungen der Stützpunkte gegeben. Zu lösen seien folgende Aufgaben:

1. *Aufgabe.* Gesucht ist die Strecke δ_m , um welche sich die Entfernung zweier Knotenpunkte m und m_1 ändert.

Man nehme in m und m_1 zwei entgegengesetzt gleiche, zusammenfallende Kräfte von der Größe *eins* an (Fig. 9) und wähle ihren Sinn so, daß sie infolge der Vergrößerung der Entfernung mm_1 um δ_m die positive virtuelle Arbeit $1 \cdot \delta_m$ verrichten. Hierauf bestimme man mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen die von jenen Kräften erzeugten Stützwiderstände \bar{C} und Spannkkräfte \bar{S} und schreibe für diesen *gedachten* Belastungszustand die Arbeitsgleichung $\sum \bar{Q} \delta = \sum \bar{S} \Delta s$ an. Bezeichnet man die virtuelle Arbeit der Kräfte \bar{C} mit \bar{L} , so erhält man die Gleichung

$$(17) \quad 1 \cdot \delta_m + \bar{L} = \sum \bar{S} \Delta s,$$

aus welcher sich δ_m unmittelbar berechnen läßt.

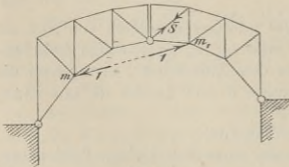


Fig. 9.

Diese zuerst von *Maxwell* (unter der Voraussetzung $\bar{L} = 0$) aufgestellte Beziehung zwischen den Änderungen Δs und der gegenseitigen Verschiebung zweier Knotenpunkte bildet die Grundlage für alle folgenden Untersuchungen.

Die beiden in m und m_1 angreifenden Kräfte *Eins* mögen die *Belastungseinheiten des Punktpaares* m, m_1 genannt werden und δ_m die *gegenseitige Verschiebung des Punktpaares* m, m_1 . Ist m_1 ein außerhalb des Fachwerks liegender fester Punkt, so gibt die Gleichung (17) die Verschiebung δ_m des Knotens m im Sinne $m_1 m$ an, d. h. die Projektion des Weges des Knotens m auf die Richtung $m_1 m$. Fig. 10 veranschaulicht den Fall zweier anfänglich senkrecht übereinander liegender Punkte m, m_1 ; sie stellt einen Teil eines *Gerberschen Balkens* vor, dessen schwebender Teil (I) bei m ein bewegliches Auflager erhält.

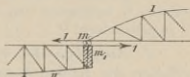


Fig. 10.

Es sei beispielsweise die Aufgabe gestellt, für den in der Figur 11 angegebenen Belastungszustand eines Bogenträgers mit drei Gelenken die wagerechte Verschiebung δ_h des Scheitelgelenkes G zu berechnen. Infolge der Elastizität der Widerlager mögen sich die Kämpfergelenke A und B in wagerechter Richtung um ξ_1 beziehungsweise ξ_2 verschieben und in senkrechter Richtung um η_1 bzw. η_2 . Die Richtungen dieser Verschiebungen sind in Fig. 11 durch gestrichelte Pfeile angedeutet worden.

Es sollen Temperaturveränderungen berücksichtigt werden. Dann ist $\Delta s = \frac{Ss}{EF} + \epsilon t s$, welcher Wert nach Ermittlung der *wirklichen* Spannkkräfte S für jeden Stab des

Fig. 11.

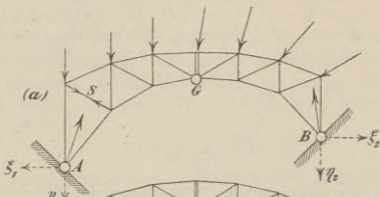
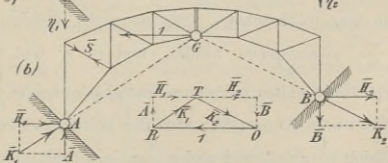


Fig. 12.



Fachwerks berechnet wird. Fig. 12 gibt den *gedachten* Belastungszustand an. Die Verschiebung δ_h soll nach links positiv gezählt werden, und es wurde daher in G eine nach links gerichtete Last *Eins* angenommen; diese ruft Kämpferdrücke \bar{K}_1 und

\bar{K}_2 hervor, welche beziehungsweise die Richtungen AG und GB haben und durch das Kräftedreieck ORT bestimmt sind. Ihre wagerechten und senkrechten Seitenkräfte seien $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \bar{A}, \bar{B}$. Die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte ist dann:

$$\bar{L} = -\bar{A}\eta_1 - \bar{H}_1\xi_1 + \bar{B}\eta_2 + \bar{H}_2\xi_2;$$

denn die Kräfte \bar{A}, \bar{H}_1 haben den entgegengesetzten Sinn wie die Verschiebungen η_2, ξ_1 , während \bar{B}, \bar{H}_2 von gleichem Sinne sind wie die Verschiebungen η_2, ξ_2 . Die Bedingung:

$$1 \cdot \delta_h + \bar{L} = \Sigma \bar{S} \Delta s \text{ liefert}$$

$$\delta_h = \Sigma \bar{S} \left(\frac{Ss}{EF} + \epsilon ts \right) + \bar{A}\eta_1 + \bar{H}_1\xi_1 - \bar{B}\eta_2 - \bar{H}_2\xi_2.$$

In gleicher Weise kann man die senkrechte Verschiebung δ_s des Scheitलगelenkes G bestimmen und hierauf δ_h und δ_s zur Gesamtverschiebung des Punktes G zusammensetzen.

2. *Aufgabe.* Es wird die Änderung δ_m des Winkel φ gesucht, welchen die beiden durch die Knotenpunkte i, k bzw. i_1, k_1 bestimmten Geraden (m) und (m_1) eines ebenen Fachwerks miteinander bilden. Fig. 13.

Um δ_m zu erhalten, wird die Gleichung $\Sigma \bar{Q} \delta = \Sigma \bar{S} \Delta s$ auf den in der Figur 13 dargestellten *gedachten Belastungszustand* und den *wirklichen Verschiebungszustand* angewendet. In i und k sind zwei

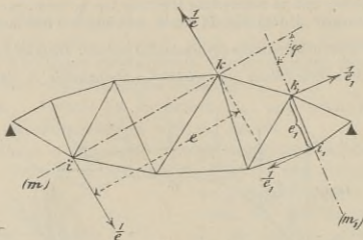


Fig. 13.

zur Geraden (m) rechtwinklige, entgegengesetzt gleiche Kräfte von der Größe $\frac{1}{e}$ angenommen worden, und in i_1 und k_1 zwei zur Geraden (m_1) rechtwinklige, entgegengesetzt gleiche Kräfte $\frac{1}{e_1}$. Der Sinn dieser Kräfte wurde so gewählt, daß die beiden Kräftepaare (deren Momente gleich $\frac{1}{e} e = 1$ und gleich $\frac{1}{e_1} e_1 = 1$ sind) infolge Vergröße-

*) $\frac{1}{e} = 1 \frac{1}{e} = \text{Krafteinheit} \times \frac{\text{Längeneinheit}}{e}$.

ung des Winkels φ um δ_m die positive Arbeit $1 \cdot \delta_m$ verrichten. Der Wert dieser Arbeit ergibt sich aus der folgenden Betrachtung.

Dreht sich eine unbegrenzte Gerade (m), welche die Angriffspunkte i und k eines zur (m) rechtwinkligen Kräftepaars enthält (Fig. 14), um den verschwindend kleinen Winkel τ in die Lage (m'), und sind i', k' die schließlichen Lagen von i, k , so nehme man, behufs Bestimmung der Arbeit des Kräftepaars, zunächst an, daß i und k die Kreisbogenteilchen ii'' und kk'' beschreiben, deren gemeinsamer Mittelpunkt der Schnittpunkt von (m) und (m') ist.

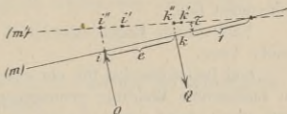


Fig. 14.

Hierauf verschiebe man i'' und k'' in die Lagen i' und k' . Während des ersten Teiles dieser verschwindend kleinen Bewegung verrichtet das Kräftepaar, dessen Moment $M = Qe$ sein möge, die Arbeit $\overline{Q}i i'' - \overline{Q}k k'' = Qe\tau = M\tau$, und während des zweiten Teiles ist die geleistete Arbeit = 0, weil die Verschiebungen $i'' i'$ und $k'' k'$ rechtwinklig zu Q sind. Mithin gibt $M\tau$ die Gesamtarbeit des Kräftepaars an. Drehen sich also die Geraden (m) und (m_1) der Figur 13 im Sinne der in i und k beziehungsweise in i_1 und k_1 angreifenden Kräftepaars (deren Momente = 1 sind) um die Winkel τ und τ_1 , so ist, wegen $\tau + \tau_1 = \delta_m$, die von beiden Paaren verrichtete Arbeit = $1 \cdot \tau + 1 \cdot \tau_1 = 1 \delta_m$, wobei δ_m als Bogenlänge für den Halbmesser 1 aufzufassen ist.

Bezeichnet man nun die virtuelle Arbeit der von den beiden Kräftepaaren etwa erzeugten Stützenwiderstände mit \overline{L} und die Spannkkräfte des gedachten Belastungszustandes mit \overline{S} , so ergibt sich zur Bestimmung von δ_m die mit (17) der Form nach übereinstimmende Gleichung:

$$\delta_m + \overline{L} = \Sigma \overline{S} \Delta s.$$

Sind i_1 und k_1 zwei außerhalb des Fachwerks gelegene feste Punkte, so liefert die vorstehende Gleichung den Drehungswinkel δ_m der Geraden m .

Die Änderung δ_m des Winkels φ in Figur 13 nennen wir die *gegenseitige Drehung des Geradenpaares* (m) (m_1) und die vier in i, k, i_1, k_1 angreifenden Kräfte $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e_1}\right)$ fassen wir unter dem Namen *Belastungseinheit des Geradenpaares* (m) (m_1) zusammen. Es entsprechen diese Begriffe den auf Seite 13 erklärten, auf das Punktpaar m, m_1 sich beziehenden.

10. — Bei Lösung der beiden in Nr. 9 vorgeführten Aufgaben

ist nach folgender Regel verfahren worden. Um die Verschiebung bzw. Drehung δ_m zu bestimmen, wurde das Fachwerk so belastet gedacht, daß die angenommenen Lasten zusammen die virtuelle Arbeit $1 \cdot \delta_m$ verrichten. Auf diesen gedachten Belastungszustand und auf den wirklichen Verschiebungszustand wurde die Bedingung $\Sigma Q \delta_m = \Sigma \bar{S} \Delta s$ angewendet und eine Gleichung erhalten, aus welcher sich δ_m unmittelbar berechnen ließ.

Nach dieser Regel lassen sich nun die verschiedenartigsten Aufgaben lösen.

Soll beispielsweise für ein ebenes Fachwerk die Änderung δ_m der in bestimmter Richtung gemessenen Entfernung mf eines Knotens m von einer durch zwei Knoten i und k gehenden Geraden (m_1) ermittelt werden, so denke man das Fachwerk auf die in Fig. 15 an-

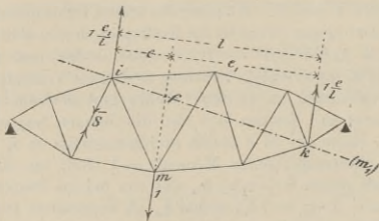


Fig. 15.

gegebene Weise belastet. Die in m angenommene Last Eins hat die Richtung fm ; die ihr parallelen, in i und k wirksamen Kräfte $1 \frac{e_1}{l}$ und $1 \frac{e_2}{l}$ besitzen eine mit der Geraden mf zusammenfallende, von m nach f gerichtete Mittelkraft von der Größe e_{ins} . Die gesamte virtuelle Arbeit dieser drei Lasten ist $= 1 \cdot \delta_m$, und es ergibt sich daher nach Berechnung der von diesen Lasten hervorgerufenen Spannkkräfte \bar{S} und Stützenwiderstände (welche letztere die Arbeit \bar{L} verrichten mögen) die Arbeitsbedingung:

$$1 \cdot \delta_m + \bar{L} = \Sigma \bar{S} \Delta s,$$

welche dieselbe Form hat wie die Gleichung (17).

Noch verschiedenartiger sind die bei räumlichen Fachwerken zu stellenden und mit Hilfe der oben angegebenen Regel lösbaren Aufgaben. Wir begnügen uns damit, eine derselben anzuführen. Es sei die Änderung der Länge des Lotes gesucht, welches von einem Knoten-

punkte m auf die durch irgend drei Knotenpunkte h, i, k bestimmte Ebene $[m_1]$ gefällt ist und dessen Fußpunkt f sein möge. Man nehme in m eine von f nach m gerichtete Last Eins an, ferner drei in h, i, k angreifende, zur Ebene $[m_1]$ rechtwinklige Lasten, deren Mittelkraft in die Gerade mf fällt, von m nach f gerichtet ist und die Größe Eins besitzt. Die Gesamtarbeit der vier Lasten ist dann $= 1 \cdot \delta_m$, und das oben angegebene Verfahren ermöglicht wieder die unmittelbare Berechnung von δ_m .

d. Anwendung der Gleichung $\Sigma \bar{Q}\delta = \Sigma \bar{S}\Delta s$ auf statisch unbestimmte Fachwerke.

11. — Wir leiten die Berechnung der statisch unbestimmten Fachwerke durch Lösung einer einfachen Aufgabe ein, wenden aber hierbei ein ganz allgemeines, stets zum Ziele führendes Verfahren an.

Es soll der in Fig. 16 dargestellte, über drei Öffnungen gespannte ebene Bogenträger untersucht werden. Bei A und D sind feste, bei

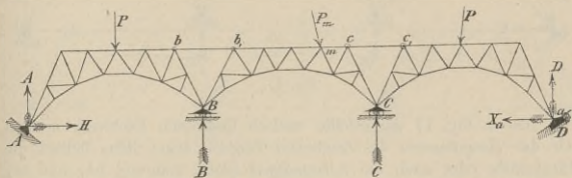


Fig. 16.

B und C bewegliche Auflagergelenke angeordnet. In den auf waagrechten Geraden geführten Stützpunkten B und C greifen senkrechte Widerstände B und C an. Die senkrechten und wagerechten Seitenkräfte der in A und D wirksamen Auflagerkräfte seien A und H , beziehungsweise D und X_a .

Die Anzahl der an den Auflagern auftretenden unbekanntes Kräfte ist $= 6$, die Anzahl der Stäbe $= 83$, diejenige der Knotenpunkte $= 43$. Da $6 + 83 > 2 \cdot 43$ ist, so ist das Fachwerk (Bd. I Absch. XIII) statisch unbestimmt, und zwar ist es dreifach statisch unbestimmt, weil $6 + 83 - 2 \cdot 43 = 3$ ist*). Werden drei der zu berechnenden Un-

*) Man erkennt auch ohne weiteres, daß der aus drei gegliederten Scheiben und zwei Stäben bb_1, cc_1 bestehende Träger statisch bestimmt wäre, wenn nur drei Stützenwiderstände vorhanden wären. Nun treten aber deren 6 auf, so daß eine dreifache Unbestimmtheit vorliegt.

bekanntes zunächst als gegeben angenommen, z. B. die Auflagerkraft X_a (deren Angriffspunkt die Ordnungsziffer a erhalten möge) und die Spannkraften X_b und X_c der beiden Stäbe bb_1 und cc_1 , so lassen sich die übrigen Spannkraften und Auflagerkräfte für jeden Belastungszustand mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen eindeutig berechnen. Zu diesem Zwecke wird das Fachwerk durch Beseitigung der beiden Stäbe bb_1 und cc_1 und durch Umwandlung des festen Auflagergelenkes D in ein auf wagerechter Bahn verschiebbares statisch bestimmt gemacht, und hierauf werden, damit der Spannungszustand des Fachwerks ungeändert bleibt, die Spannkraften X_b , X_c der beseitigten Stäbe als äußere Kräfte wieder hinzugefügt. Auch wird in a die wagerechte Kraft X_a angebracht. Fig. 17. Die Kräfte X_a , X_b , X_c in Fig. 17 werden vorübergehend zu den Lasten gerechnet.

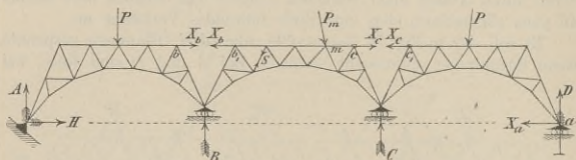


Fig. 17.

Das in Fig. 17 dargestellte statisch bestimmte Fachwerk nehmen wir das *Hauptsystem* des fraglichen Trägers; seine Stäbe heißen die *Hauptstäbe* oder auch die *notwendigen Stäbe*, während bb_1 und cc_1 in Fig. 16 *überzählige Stäbe* genannt werden. In gleicher Weise unterscheidet man *notwendige* und *überzählige Auflagerkräfte*. Eine überzählige Auflagerkraft ist X_a in Fig. 16.

Die Spannkraft S in irgend einem Hauptstabe ist, da sämtliche Gleichgewichtsbedingungen vom ersten Grade sind, eine lineare Funktion der Kräfte P , X_a , X_b , X_c ; sie läßt sich in der Form darstellen:

$$(18) \quad S = S_0 - S_a X_a - S_b X_b - S_c X_c,$$

worin S_a , S_b , S_c sowohl von den Lasten P als auch von den Kräften X unabhängig sind, während S_0 eine Funktion ersten Grades der gegebenen Lasten P ist. Die Werte S_0 , S_a , S_b , S_c können wie folgt gedeutet werden.

Das Glied S_0 stellt diejenige Spannkraft vor, welche in dem fraglichen Stabe entsteht, sobald X_a , X_b , X_c gleich Null angenommen werden, sobald also nur die Lasten P auf das Hauptnetz wirken, ein Belastungszustand, welcher in Fig. 18 dargestellt worden ist und in der Folge kurz der „Zustand $X = 0$ “ heißen möge.

S_a darf als diejenige Spannkraft aufgefaßt werden, welche in dem fraglichen Stabe erzeugt wird, sobald sämtliche Lasten P und ebenso

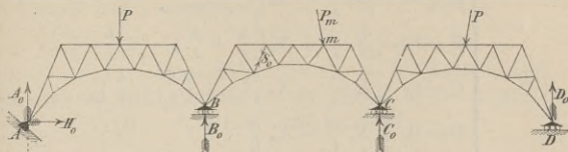


Fig. 18.

die Größen X_b , X_c gleich Null angenommen werden, während $X_a = -1$ gesetzt wird. Dieser Belastungszustand möge der „Zustand $X_a = -1$ “ heißen; er ist in der Fig. 19 angegeben worden. Die im Punkte a angreifende wagerechte Last $X_a = -1$ ruft an den Auflagern des Hauptnetzes Widerstände hervor, über deren Größe die Fig. 19 Aufschluß

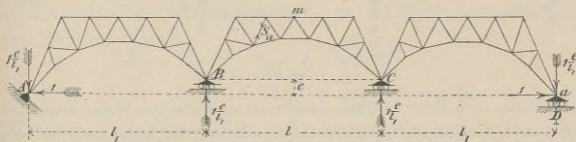


Fig. 19.

gibt. (Der bei A erzeugte Widerstand muß die Richtung BA und eine wagerechte Seitenkraft von der Größe 1 haben; seine senkrechte Seitenkraft besitzt deshalb die Größe $1 \frac{e}{l_1}$. Ebenso schließt man auf den senkrechten Widerstand bei D und findet dann die in B und C angreifenden Auflagerkräfte.)

In gleicher Weise können S_b und S_c als die den Belastungszuständen: $X_b = -1$ und $X_c = -1$ entsprechenden Spannkraften betrachtet werden. Diese beiden Zustände sind in den Figuren 20 und 21 dargestellt worden. Größe und Richtung der Auflagerkräfte sind den Figuren zu entnehmen. Im Belastungsfalle Fig. 20 sind die Stäbe des Teiles CD spannungslos, im Belastungsfalle Fig. 21 diejenigen des Teiles AB .

Alle diese Spannkraften S_0 , S_a , S_b , S_c lassen sich mit Hilfe der im ersten Bande unseres Buches entwickelten Verfahren bestimmen, worauf S

gegeben ist durch Gleichung (18), während für die notwendigen Auflagerkräfte A, B, C, H die folgenden Werte gefunden werden:

$$(19) \quad \begin{cases} A = A_0 + X_a \frac{e}{l_1} - X_b \frac{h^*}{l_1} \\ B = B_0 - X_a \frac{e}{l_1} + X_b \left(\frac{h}{l_1} + \frac{h}{l} \right) - X_c \frac{h}{l} \\ C = C_0 - X_a \frac{e}{l_1} - X_b \frac{h}{l} + X_c \left(\frac{h}{l_1} + \frac{h}{l} \right) \\ D = D_0 + X_a \frac{e}{l_1} - X_c \frac{h}{l_1} \\ H = H_0 + X_a \end{cases}$$

Die Aufgabe der Berechnung des Fachwerks ist jetzt auf diejenige zurückgeführt: die statisch nicht bestimmbar GröÙen X_a, X_b, X_c zu

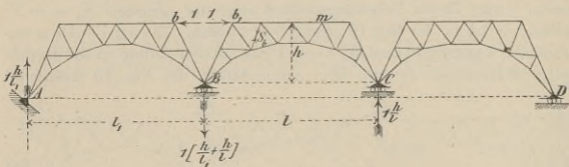


Fig. 20.

ermitteln, und diese Aufgabe kann man in einfacher Weise lösen, indem man die Arbeitsbedingung $\Sigma Q\delta = \Sigma \bar{S}\Delta s$ der Reihe nach auf die drei gedachten Belastungszustände: $X_a = -1$; $X_b = -1$; $X_c = -1$ und — in allen drei Fällen — auf den wirklichen Verschiebungszustand

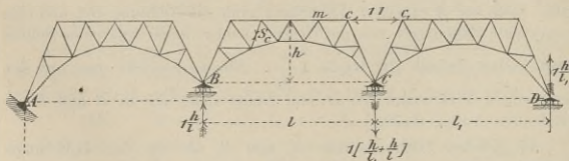


Fig. 21.

angewendet. Man gelangt dann zu drei Gleichungen ersten Grades, welche nur die Unbekannten X_a, X_b, X_c enthalten.

*) Den Zuständen $X_a = -1$; $X_b = -1$; $X_c = -1$ müssen entsprechen: $A = -\frac{e}{l_1}$; $A = +\frac{h}{l_1}$; $A = 0$. Vergl. Fig. 19, 20, 21. Auf dieselbe Weise prüfe man die Ausdrücke für B, C, D, H .

Nehmen wir an, daß sich infolge der Nachgiebigkeit der Widerlager Stützpunkt A in senkrechter Richtung um δ_A nach abwärts verschiebt,

„	A	„	wagerechter	„	„	δ_H	„	links,
„	B	„	senkrechter	„	„	δ_B	„	abwärts,
„	C	„	„	„	„	δ_C	„	„
„	D	„	„	„	„	δ_D	„	„
„	D	„	wagerechter	„	„	δ_a	„	rechts,

so lautet die Arbeitsgleichung für den Zustand $X_a = -1$ (Fig. 19):

$$(I) \quad L_a + 1 \cdot \delta_a = \Sigma S_a \Delta s, \text{ wobei}$$

$$L_a = 1 \frac{e}{l_1} (\delta_A - \delta_B - \delta_C + \delta_D) + 1 \cdot \delta_H$$

die virtuelle Arbeit der an den Auflagern des statisch bestimmten Hauptnetzes angreifenden Stützenwiderstände bedeutet.

Für den Zustand $X_b = -1$ ergibt sich, wenn δ_b die Änderung der Länge s_b des überzähligen Stabes bb_1 bezeichnet;

$$(II) \quad L_b + 1 \cdot \delta_b = \Sigma S_b \Delta s, \text{ wo}$$

$L_b = -1 \frac{h}{l_1} \delta_A + 1 \left(\frac{h}{l_1} + \frac{h}{l} \right) \delta_B - 1 \frac{h}{l} \delta_C =$ virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte, und für den Zustand $X_c = -1$ (wenn $\delta_c =$ Änderung der Stablänge $cc_1 = s_c$)

$$(III) \quad L_c + 1 \cdot \delta_c = \Sigma S_c \Delta s, \text{ wo}$$

$$L_c = -1 \frac{h}{l} \delta_B + 1 \left(\frac{h}{l_1} + \frac{h}{l} \right) \delta_C - 1 \frac{h}{l_1} \delta_D.$$

Wird $\Delta s = \frac{Ss}{EF} + \varepsilon ts$ gesetzt und zur Abkürzung die Bezeichnung

$$\varrho = \frac{s}{EF}$$

eingeführt, so gehen mit Berücksichtigung von (18) die Bedingungen (I), (II), (III) über in die *Maxwellschen* Gleichungen*):

$$(20) \quad \begin{cases} L_a + \delta_a = \Sigma S_a S_a \varrho - X_a \Sigma S_a^2 \varrho - X_b \Sigma S_a S_b \varrho - X_c \Sigma S_a S_c \varrho + \Sigma S_a \varepsilon ts \\ L_b + \delta_b = \Sigma S_b S_b \varrho - X_a \Sigma S_b S_a \varrho - X_b \Sigma S_b^2 \varrho - X_c \Sigma S_b S_c \varrho + \Sigma S_b \varepsilon ts \\ L_c + \delta_c = \Sigma S_c S_c \varrho - X_a \Sigma S_c S_a \varrho - X_b \Sigma S_c S_b \varrho - X_c \Sigma S_c^2 \varrho + \Sigma S_c \varepsilon ts. \end{cases}$$

Die auf der rechten Seite stehenden Summen erstrecken sich über sämtliche notwendigen Stäbe.

Bezeichnet man nun mit F_b, F_c die Querschnitte der beiden überzähligen Stäbe, mit E_b, E_c die Elastizitätsziffern, mit t_b, t_c die Temperaturveränderungen, und mit $\varepsilon_b, \varepsilon_c$ die Verlängerungsverhältnisse für $t = 1^\circ$, so hat man in die Gleichungen (20) zu setzen:

$$(21) \quad \delta_b = \frac{X_b s_b}{E_b F_b} + \varepsilon_b t_b s_b; \quad \delta_c = \frac{X_c s_c}{E_c F_c} + \varepsilon_c t_c s_c.$$

*) *Maxwell* nimmt $t = 0$ und $L = 0$ an.

und ist jetzt imstande, die Unbekannten X_a , X_b , X_c zu berechnen, vorausgesetzt, daß die Formänderungen der Stützen bekannt oder als Funktionen von X darstellbar sind. Daß die letztere Aufgabe meistens auf unüberwindliche Schwierigkeiten stößt, wurde bereits auf Seite 3 angeführt und begründet. Infolgedessen begnügt man sich in der Regel damit, bei der Untersuchung neuer Arten statisch unbestimmter Träger festzustellen, welchen Einfluß die gegenseitigen Verschiebungen der Stützpunkte auf den Spannungszustand des Trägers ausüben. Ist dieser Einfluß ein wesentlicher und schädlicher, so dürfen die fraglichen Träger nur dann ausgeführt werden, wenn auf nahezu unverschiebliche Stützen gerechnet werden darf; sie sind z. B. bei unsicherem Baugrunde zu verwerfen; auch ist in diesem Falle bei der Aufstellung der Träger besonders darauf zu achten, daß die Stützpunkte genau die in der Rechnung vorausgesetzte Lage erhalten.

Zuweilen aber ist es möglich, die Formänderungen der Widerlager bei der Berechnung der Träger teilweise zu berücksichtigen. Wird z. B. der in der Fig. 16 dargestellte Träger bei B und C durch Säulen von der Länge h' gestützt, und entsprechen diesen Säulen die Werte E' , F' , t' , ε' , so ist bei Vernachlässigung der Formänderung der Grundpfeiler und des Baugrundes zu setzen:

δ_B gleich der durch den Druck B erzeugten Verkürzung der Säule, vermindert um die Dehnung dieser Säule infolge der Temperaturerhöhung, d. i.

$$\delta_B = \frac{Bh'}{E'F'} - \varepsilon't'h'$$

und ebenso ist einzuführen:

$$\delta_C = \frac{Ch'}{E'F'} - \varepsilon't'h'.$$

Nun drückt man B und C mittels (19) durch X_a , X_b , X_c aus und löst schließlich die Gleichungen (20) nach den drei Unbekannten X auf.

Dem Einfluß beobachteter Stützenverschiebungen kann man auch in der Weise Rechnung tragen, daß man die Stützen durch Stäbe ersetzt, welche die Stützpunkte mit außerhalb des Fachwerks liegenden festen Punkten verbinden, und diesen Stäben, die wir *Auflagerstäbe* oder *Stützstäbe* nennen wollen, solche Werte ζ beilegt, daß die Änderungen Δs ihrer Längen mit den beobachteten Stützpunktverschiebungen übereinstimmen. Es fallen dann die Arbeiten L_a , $L_b \dots$ fort; dafür müssen aber die in den Gleichungen (20) stehenden Summen über alle Stäbe — Fachwerkstäbe und Auflagerstäbe — ausgedehnt werden. Durch diese Einführung der schon von *Maxwell* benutzten Auflagerstäbe gewinnt manche allgemeine Untersuchung an Kürze.

12. — Die in den Gleichungen (20) stehenden Summenausdrücke lassen sich auf eine sehr einfache und für die Folge sehr nützliche Weise deuten. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir mit

δ_{ma} die Verschiebung, welche der Angriffspunkt m irgend einer Last P_m in der Richtung von P_m erfährt, sobald auf das statisch bestimmte Hauptnetz nur die Belastung $X_a = -1$ wirkt [Zustand $X_a = -1$ (Fig. 19)],

δ_{mb} desgleichen die Verschiebung von m im Sinne von P_m und infolge von $X_b = -1$ (Fig. 20),

δ_{mc} desgleichen die Verschiebung von m im Sinne von P_m und infolge von $X_c = -1$ (Fig. 21),

ferner mit

δ_{aa} die nach rechts positiv gezählte wagerechte Verschiebung des Punktes a , für den Fall, daß auf das statisch bestimmte Hauptnetz nur die Belastung $X_a = -1$ wirkt,

δ_{ab} die wagerechte Verschiebung von a infolge von $X_b = -1$,

δ_{ac} " " " " " " " " $X_c = -1$,

weiter mit

δ_{ba} die gegenseitige Verschiebung des Punktpaares b, b_1 , d. i. die Änderung der Strecke bb_1 für den Fall, daß auf das statisch bestimmte Hauptnetz nur die Last $X_a = -1$ wirkt,

δ_{bb} die Änderung der Strecke bb_1 infolge von $X_b = -1$,

δ_{bc} " " " " " " " " $X_c = -1$,

δ_{ca} " " " " " " " " $X_a = -1$,

δ_{cb} " " " " " " " " $X_b = -1$,

δ_{cc} " " " " " " " " $X_c = -1$,

schließlich mit

δ_{at} die nach rechts positive, wagerechte Verschiebung des Punktes a , für den Fall, daß das statisch bestimmte, unbelastete Hauptnetz nur einer Temperaturänderung unterworfen wird,

δ_{bt} die in diesem Falle entstehende Änderung der Strecke bb_1 ,

δ_{ct} " " " " " " " " " " " " cc_1 ;

sodann setzen wir fest, daß bei der Ermittlung aller hier aufgeführten Verschiebungen δ die Stützen des statisch bestimmten Hauptnetzes vollkommen starr angenommen werden sollen.

Jetzt schreiben wir die Arbeitsbedingung für den Belastungszustand $X = 0$ (Fig. 18) an, setzen in dieselbe die dem Zustande $X_a = -1$ (welcher die Spannkkräfte S_a und Änderungen $\Delta s_a = \frac{S_a s}{EF}$ hervorruft) entsprechenden Verschiebungen ein und erhalten

$$\sum P_m \delta_{ma} = \sum S_0 \Delta s_a = \sum S_0 \frac{S_a s}{EF},$$

woraus, mit $\frac{s}{EF} = \rho$:

$$(22) \quad \Sigma S_a S_a \rho = \Sigma P_m \delta_{ma};$$

und ebenso finden wir:

$$\Sigma S_a S_b \rho = \Sigma P_m \delta_{mb}; \quad \Sigma S_a S_c \rho = \Sigma P_m \delta_{mc}.$$

Wird die Arbeitsbedingung für den Belastungszustand $X_a = -1$ angeschrieben, und werden in dieselbe der Reihe nach die den Zuständen $X_a = -1$, $X_b = -1$, $X_c = -1$ entsprechenden Verschiebungen eingeführt, so entstehen die Gleichungen

$$1 \cdot \delta_{aa} = \Sigma S_a \Delta s_a; \quad 1 \cdot \delta_{ab} = \Sigma S_a \Delta s_b; \quad 1 \cdot \delta_{ac} = \Sigma S_a \Delta s_c,$$

und aus diesen folgt

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma S_a S_a \rho = \delta_{aa}; \quad \Sigma S_a S_b \rho = \delta_{ab}; \quad \Sigma S_a S_c \rho = \delta_{ac}. \\ \text{Ebenso wird erhalten:} \\ \Sigma S_b S_a \rho = \delta_{ba}; \quad \Sigma S_b S_b \rho = \delta_{bb}; \quad \Sigma S_b S_c \rho = \delta_{bc}; \\ \Sigma S_c S_a \rho = \delta_{ca}; \quad \Sigma S_c S_b \rho = \delta_{cb}; \quad \Sigma S_c S_c \rho = \delta_{cc}. \end{array} \right.$$

Schließlich liefern die für die Belastungszustände $X_a = -1$, $X_b = -1$, $X_c = -1$ angeschriebenen und jedesmal auf die nur von den Temperaturänderungen herrührenden Verschiebungen angewandten Arbeitsbedingungen die Gleichungen:

$$(24) \quad \Sigma S_a \varepsilon t s = 1 \cdot \delta_{at}; \quad \Sigma S_b \varepsilon t s = 1 \cdot \delta_{bt}; \quad \Sigma S_c \varepsilon t s = 1 \cdot \delta_{ct}.$$

Die drei Bedingungen (20) lassen sich nun umformen in:

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_a + \delta_a = \Sigma P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} - X_c \delta_{ac} + \delta_{at} \\ L_b + \delta_b = \Sigma P_m \delta_{mb} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} - X_c \delta_{bc} + \delta_{bt} \\ L_c + \delta_c = \Sigma P_m \delta_{mc} - X_a \delta_{ca} - X_b \delta_{cb} - X_c \delta_{cc} + \delta_{ct} \end{array} \right.$$

und hierin ist nach Gleichung (23):

$$(26) \quad \delta_{ab} = \delta_{ba}; \quad \delta_{ac} = \delta_{ca}; \quad \delta_{bc} = \delta_{cb}.$$

Die Gleichungen (25) werden sich später in vielen Fällen als sehr nützlich erweisen, da sich die Verschiebungen δ der Knotenpunkte der meisten Fachwerke in sehr einfacher Weise durch Zeichnung feststellen lassen. Wir werden die Figuren, welche diese Verschiebungen liefern, in der Folge *Verschiebungspläne* nennen. (Vergleiche Abschnitt I.) Um die Unbekannten X_a , X_b , X_c mit Hilfe der Gleichungen (25) bestimmen zu können, genügt es, für das statisch bestimmte Hauptnetz vier Verschiebungspläne zu zeichnen, den ersten für den Belastungszustand $X_a = -1$, den zweiten für den Zustand $X_b = -1$, den dritten für $X_c = -1$ und schließlich den vierten für das unbelastete und nur Temperaturänderungen ausgesetzte Hauptnetz.

13. — Das in No. 9 zur Berechnung eines statisch unbestimmten Fachwerks benutzte Verfahren führt stets zum Ziele; dasselbe besteht darin, die Spannkkräfte der überzähligen Stäbe und die überzähligen Stützenwiderstände mit Hilfe von Arbeitsbedingungen von der Art der Gleichung (13) zu bestimmen. Zuweilen stellt es sich nun als zweck-

mäßiger heraus, zunächst andere Werte X als Unbekannte einzuführen und die Stabkräfte und Auflagerkräfte als lineare Funktionen dieser *statisch nicht bestimmbar* Größen darzustellen.

Wir sprechen deshalb allgemeiner aus:

Sämtliche Spannkkräfte S und nach bestimmten Richtungen wirkenden Auflagerkräfte C eines statisch unbestimmten Fachwerks lassen sich auf die Form bringen:

$$(27) \quad \begin{aligned} S &= S_0 - S' X' - S'' X'' - S''' X''' - \dots \\ C &= C_0 - C' X' - C'' X'' - C''' X''' - \dots \end{aligned}$$

wobei X' , X'' , $X''' \dots$ gewisse statisch nicht bestimmbar Größen bedeuten, während S_0 , S' , $S'' \dots$, C_0 , C' , $C'' \dots$ Werte vorstellen, welche von den Unbekannten X unabhängig sind. Insbesondere bedeuten S_0 und C_0 die Spannkkräfte und Auflagerkräfte des statisch bestimmten Hauptnetzes, in welches das Fachwerk übergeht, sobald sämtliche Größen X verschwinden; sie sind geradlinige Funktionen der Lasten P , während die S' , $S'' \dots$, C' , $C'' \dots$ von den P unabhängig sein sollen. Beispielsweise lassen sich S' und C' als diejenigen Werte deuten, welche die Spannkkräfte und Auflagerkräfte annehmen, sobald sämtliche Lasten P und sämtliche X verschwinden, ausgenommen X' , welchem der Wert (-1) beizulegen ist — ein Belastungszustand, welcher kurz der Zustand $X' = -1$ genannt werden soll.

Weiter darf man sagen:

Die durch die Ursache $X' = -1$ hervorgerufenen Auflagerkräfte C' und Spannkkräfte S' sind miteinander im Gleichgewicht, und ebenso sind die C'' im Gleichgewichte mit den S'' , die C''' mit den S''' u. s. w.

Infolge dieser Auffassung gelten die Gleichungen (27) nicht nur für die notwendigen, sondern auch für die überzähligen Stäbe und Auflagerkräfte. Ist z. B. X'' die Spannkraft in einem überzähligen Stabe, so entsprechen diesem die Werte:

$$S_0 = 0, \quad S' = 0, \quad S'' = -1, \quad S''' = 0, \quad S'''' = 0 \text{ u. s. w.}$$

und es folgt dann $S = X''$.

Schreibt man nun die Arbeitsbedingung (13) der Reihe nach für die Belastungszustände

$$X' = -1; \quad X'' = -1; \quad X''' = -1; \dots$$

an und wendet sie jedesmal auf den wirklichen Verschiebungszustand an, so gelangt man zu den Gleichungen:

$$(28) \quad L' = \sum S' \Delta s; \quad L'' = \sum S'' \Delta s; \quad L''' = \sum S''' \Delta s; \dots$$

in denen L' , L'' , $L''' \dots$ die beziehungsweise von den Auflagerkräften C' , C'' , $C''' \dots$ verrichteten virtuellen Arbeiten bedeuten.

Bei der Anwendung der Gleichungen (29) kommt es hauptsächlich darauf an, die von den Lasten P abhängigen Summen möglichst schnell zu bestimmen. In der Regel wird es sich empfehlen, den in No. 12 eingeschlagenen Weg zu wählen und zu setzen:

$$(30) \quad \Sigma S_0 S' \rho = \Sigma P_m \delta_m'; \quad \Sigma S_0 S'' \rho = \Sigma P_m \delta_m''; \quad \text{u. s. w.}$$

wobei δ_m' , δ_m'' . . . diejenigen Verschiebungen bedeuten, welche der Angriffspunkt m irgend einer Last P_m in der Richtung von P_m erfährt, sobald auf das Fachwerk beziehungsweise nur die Ursache $X' = -1$ oder nur die Ursache $X'' = -1$, u. s. w. wirkt.

Alle übrigen (S_0 nicht enthaltenden) Summenausdrücke sind unabhängig von den Lasten; sie brauchen also nur einmal bestimmt zu werden und werden häufig am schnellsten durch Rechnung gefunden, nachdem man die Spannkkräfte S' , S'' . . . berechnet oder mit Hilfe von Kräfteplänen ermittelt hat. Es lassen sich aber diese Summen auch auf dem in No. 13 angegebenen Wege als Verschiebungen deuten und dann oft mit Hilfe einfacher Verschiebungspläne angeben.

14. — Hat man die statisch nicht bestimmbareren Größen X auf dem in No. 11 bis 13 beschriebenen Wege ermittelt und hierauf mit Hilfe der Gleichungen (18) bzw. (27) die Spannkkräfte S berechnet, so kann man die Änderungen Δs sämtlicher Stablängen s angeben und ist nun imstande, alle die in Nr. 9 und 10 behandelten Aufgaben zu lösen und zwar genau nach dem früher benutzten Verfahren. Dasselbe besteht in der Anwendung der Gleichung $\Sigma \bar{Q}_m \delta_m = \Sigma \bar{S} \Delta s$ auf den wirklichen Verschiebungszustand und auf einen gedachten Belastungszustand, welcher letzterer so zu wählen ist, daß die virtuelle Gesamtarbeit der Lasten $= 1 \cdot \delta_m$ ist, wobei δ_m die gesuchte gegenseitige Verschiebung eines Punktpaares m , m_1 oder die gesuchte gegenseitige Drehung eines Geradenpaares u. s. w. bedeutet. Hierbei ist zu beachten, daß zwischen den gedachten äußeren und inneren Kräften \bar{Q} und \bar{S} nur Gleichgewicht zu bestehen braucht, daß also die Spannkkräfte in den überzähligen Stäben und die überzähligen Auflagerkräfte gleich Null gesetzt werden dürfen.

Es liege beispielsweise der in Fig. 16 dargestellte Bogenträger vor. Gesucht sei die Verschiebung δ_m , welche irgend ein dem mittleren Bogen angehörender Knotenpunkt m in der Richtung $m_1 m$ erfährt. Die auf Seite 21 angegebene Verschiebungen der Stützpunkte sollen berücksichtigt werden.

Zuerst wird der Träger durch Beseitigung der überzähligen Stäbe und Auflagerbedingungen statisch bestimmt gemacht (Fig. 22). Hierauf wird in m eine von m_1 nach m gerichtete Last von der Größe *eins* angebracht und zur Berechnung der durch diese Last an den Auflagern des Hauptnetzes hervorgerufenen Widerstände \bar{A} , \bar{B} , . . . geschritten.

Bildet $m_1 m$ mit der Wagerechten den Winkel α , und ist der lotrechte Abstand des Stützpunktes B von der mm_1 gleich r , so lauten die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned} \bar{H} &= 1 \cdot \cos \alpha; & \bar{A} l_1 - \bar{H} e &= 0 \\ \bar{C} l - 1 \cdot r &= 0; & \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} &= 1 \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

und aus diesen findet man:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= 1 \frac{e \cos \alpha}{l_1}; & \bar{C} &= 1 \frac{r}{l}; \\ \bar{B} &= 1 \cdot \left(\sin \alpha - \frac{e \cos \alpha}{l_1} - \frac{r}{l} \right)^{*} \end{aligned}$$

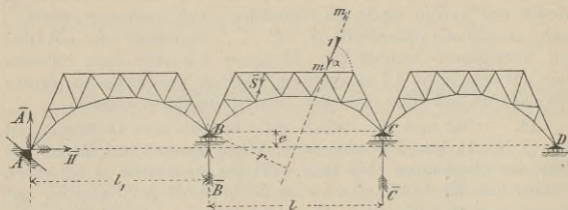


Fig. 22.

Nun bestimmt man die von den äußeren Kräften $1, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{H}$ in den Stäben des Hauptnetzes hervorgerufenen Spannkkräfte \bar{S} und schreibt die Arbeitsgleichung an:

$$1 \cdot \delta_m - \bar{A} \delta_A - \bar{B} \delta_B - \bar{C} \delta_C - \bar{H} \delta_H = \Sigma \bar{S} \Delta s,$$

in welche die *wirklichen* Änderungen Δs der Stablängen einzuführen sind. Es ist also zu setzen:

$$\Delta s = \frac{Ss}{EF} + \epsilon t s \quad \text{wo} \quad S = S_0 - S_a X_a - S_b X_b - S_c X_c.$$

Auf diesem Wege erhält man stets δ_m als lineare Funktion der Lasten P , der Temperaturänderungen t , der statisch nicht bestimmaren Größen X und der nach bestimmten Richtungen erfolgenden Verschiebungen der Stützpunkte. Da nun zwischen den X, P, t , ebenfalls nur Beziehungen ersten Grades bestehen, so folgt, daß im Falle unveränderlicher Gliederung und Stützungsart das in Nr. 6 ausgesprochene Gesetz von der Zusammenzählung der einzelnen Wirkungen für alle diejenigen Größen δ_m gilt, welche sich mittels einer Bedingung von der Form $1 \cdot \delta_m + \bar{L} = \Sigma \bar{S} \Delta s$ bestimmen lassen.

*) Wir empfehlen dem Leser, diese Kräfte auch durch Zeichnung zu bestimmen.

15. — Es möge noch darauf hingewiesen werden, daß bei der Auswahl der als überzählig zu bezeichnenden Stäbe und Auflagerbedingungen innerhalb gewisser Grenzen nach Willkür verfahren werden darf.

Führt man z. B. die Widerstände der beiden Mittelstützen des in der Fig. 23 dargestellten durchgehenden Balkens als statisch nicht bestimmbare Größen (X) ein, so erhält man das in der Fig. 24 abgebildete Hauptnetz; dasselbe ist ein einfacher Balken. Hingegen gelangt man zu dem aus drei Einzelbalken bestehenden Hauptnetze (Fig. 25) oder

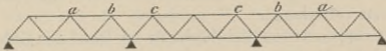


Fig. 23.

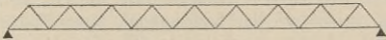


Fig. 24.

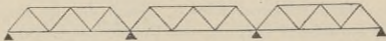


Fig. 25.

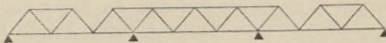


Fig. 26.

zu dem einen *Gerberschen* Balken vorstellenden Hauptnetze (Fig. 26), je nachdem man die beiden Stäbe bc oder die beiden Stäbe ab als überzählig bezeichnet.

Auch ist hervorzuheben, daß bei der Ermittlung der Verschiebungen δ_m andere Hauptnetze gebildet werden dürfen, wie bei der Bestimmung der Spannkkräfte.

e. Der Maxwellsche Satz von der Gegenseitigkeit der elastischen Formänderungen und das Gesetz von Betti.

16. — Wir betrachten ein auf starren Stützen ruhendes, ebenes oder räumliches Fachwerk von unveränderlicher Gliederung und Stützungsart (Seite 6) und setzen einen spannungslosen Anfangszustand voraus. Auch nehmen wir an, daß keine Temperaturänderungen entstehen. Es gilt dann das auf Seite 12 nachgewiesene *Clapeyronsche* Gesetz, und es

ergibt sich für die mechanische Arbeit A der äußeren Kräfte der nur von den Lasten P abhängige Ausdruck:

$$(31) \quad A = \frac{1}{2} \sum P\delta = \frac{1}{2} (P_a\delta_a + P_b\delta_b + \dots + P_m\delta_m + \dots),$$

in welchem bis jetzt unter $P_a, P_b, \dots, P_m \dots$ Einzellasten verstanden wurden und unter $\delta_a, \delta_b, \dots, \delta_m \dots$ die wirklichen Verschiebungen der Angriffspunkte $a, b, \dots, m \dots$ derselben, im Sinne der $P_a, P_b, \dots, P_m \dots$ —

Für die Folge ist es nun nützlich, den Buchstaben P und δ eine allgemeinere Bedeutung beizulegen und unter jedem der in der Gleichung auftretenden Produkte $\frac{1}{2} P\delta$ die mechanische Arbeit einer ganzen Gruppe von Lasten zu verstehen.

Solche Gruppen lassen sich leicht an der Hand der Untersuchungen in Nr. 9 und Nr. 10 bilden.

Werden z. B. die beiden Lasten *Eins* in der Fig. 9 mit P_m multipliziert (wobei man natürlich entweder *Eins* oder P_m als Zahl zu betrachten hat), so entsteht eine Lastengruppe, deren Beitrag zur Arbeit A gleich $\frac{1}{2} P_m\delta_m$ ist, wenn δ_m die gegenseitige Verschiebung des Punktpaares m, m_1 bedeutet.

Multipliziert man die vier Lasten in Fig. 13 mit P_m , so erhält man eine Gruppe, deren entsprechendes δ_m gleich der im Bogenmaß ausgedrückten gegenseitigen Drehung des Geradenpaares $(m), (m_1)$ ist.

In gleicher Weise läßt sich aus der Figur 15 durch Multiplikation der dort angenommenen Lasten mit P_m eine Lastengruppe ableiten, deren zugehöriges δ_m gleich der Änderung der Entfernung mf ist.

Die vorliegenden Beispiele dürften genügen, um die Bildung von Lastengruppen zu erläutern, und es sei nur noch hervorgehoben, daß jede am Fachwerk vorkommende Last stets nur einer einzigen Gruppe zugewiesen werden darf. Der Kürze wegen nennen wir eine solche Gruppe von Kräften eine *Belastung* und das entsprechende δ *den Weg dieser Belastung*. Unter anderem werden wir in der Folge öfter von der Belastung P_m eines Punktpaares m, m_1 oder eines Geradenpaares $(m), (m_1)$ * sprechen, Belastungen, die nach der vorstehenden Erklärung durch Multiplikation der auf Seite 13 und 15 eingeführten *Belastungseinheiten* jener Paare mit P_m entstehen.

Sämtliche δ sind lineare Funktionen der Belastungen P ; sie lassen sich daher auf die Form bringen:

$$(32) \quad \begin{cases} \delta_a = \delta_{aa}P_a + \delta_{ab}P_b + \dots + \delta_{am}P_m + \dots \\ \delta_b = \delta_{ba}P_a + \delta_{bb}P_b + \dots + \delta_{bm}P_m + \dots \\ \dots \\ \delta_m = \delta_{ma}P_a + \delta_{mb}P_b + \dots + \delta_{mm}P_m + \dots \\ \dots \end{cases}$$

wobei die mit einem Doppelzeiger behafteten Werte δ unabhängig sind von den Belastungen P . Um diese Werte zu deuten, setze man

in irgend einer der Gleichungen (32) sämtliche P gleich Null, mit Ausnahme eines einzigen, dem man den Wert Eins beilege. Dann ergibt sich beispielsweise δ_{mb} als derjenige Wert, welchen der Weg δ_m für den Fall annimmt, daß auf das Fachwerk nur die Belastung $P_b = 1$ wirkt.

17. — Wir setzen jetzt voraus, daß nur zwei Belastungen auftreten, etwa P_m und P_n . Die entsprechenden Wege sind

$$\begin{aligned}\delta_m &= \delta_{mm}P_m + \delta_{mn}P_n \\ \delta_n &= \delta_{nm}P_m + \delta_{nn}P_n.\end{aligned}$$

Wird zuerst nur die Belastung P_m aufgebracht, so ist der Weg derselben $= \delta_{mm}P_m$, und es verrichtet deshalb die von Null aus allmählich anwachsende Belastung P_m die mechanische Arbeit $\frac{1}{2} \delta_{mm}P_m^2$. Fügt man die ebenfalls von Null aus anwachsende Belastung P_n hinzu, so nimmt die Arbeit der äußeren Kräfte erstens um $\frac{1}{2} \delta_{nn}P_n^2$ zu, weil die wachsende Belastung P_n den Weg $\delta_{nn}P_n$ zurücklegt, und zweitens um $P_m(\delta_{nm}P_n)$, weil der Weg der bereits vorhandenen Belastung P_m die Vergrößerung $\delta_{nm}P_n$ erfährt. Im ganzen entsteht:

$$A = \frac{1}{2} \delta_{mm}P_m^2 + \frac{1}{2} \delta_{nn}P_n^2 + \delta_{nm}P_mP_n.$$

Wird zuerst die Belastung P_n aufgebracht und nachher P_m , so ergibt sich durch Vertauschung von m und n :

$$A = \frac{1}{2} \delta_{nn}P_n^2 + \frac{1}{2} \delta_{mm}P_m^2 + \delta_{nm}P_nP_m.$$

Nach dem Clapeyronschen Gesetze müssen aber die beiden für A gewonnenen Ausdrücke übereinstimmen, und es folgt daher die wichtige Gleichung:

$$(33) \quad \delta_{nm} = \delta_{mn}.$$

Dieselbe wurde zuerst von *Maxwell* bewiesen und soll in der Folge stets als *Maxwellscher Lehrsatz* angeführt werden.

Von den vielen Sätzen, welche sich aus der Gleichung (33) ergeben, sind die folgenden für die späteren Untersuchungen von besonderer Bedeutung.

1. Die gegenseitige Verschiebung δ_{mn} eines Punktpaares m, m_1 infolge der Belastungseinheit eines anderen Punktpaares n, n_1 ist ebenso groß wie die gegenseitige Verschiebung δ_{nm} des Punktpaares n, n_1 infolge der Belastungseinheit des Punktpaares m, m_1 .

2. Die gegenseitige Drehung δ_{mn} eines Geradenpaares $(m), (m_1)$ infolge der Belastungseinheit eines anderen Geradenpaares $(n), (n_1)$ ist ebenso groß wie die gegenseitige Drehung δ_{nm} des Geradenpaares $(n), (n_1)$ infolge der Belastungseinheit des Geradenpaares $(m), (m_1)$.

18. — Zu einem anderen Beweise für den Maxwellschen Satz führt die folgende Betrachtung.

Ein Fachwerk, welches den in Nr. 16 angeführten Voraussetzungen genügt, werde von beliebigen Belastungen P_m ergriffen. Infolgedessen entstehen Spannkraften S_m und Änderungen der Stablängen um

$$\Delta s_m = \frac{S_m s}{EF}.$$

Nach Entfernung der P_m mögen andere Belastungen P_n auf das Fachwerk wirken und die Spannkraften S_n sowie die Längenänderungen

$$\Delta s_n = \frac{S_n s}{EF}$$
 hervorbringen.

Es bedeute nun (δ_{mn}) den Wert, welchen der Weg δ_m irgend einer Belastung P_m annimmt, wenn auf das Fachwerk nur die Belastungen P_n wirken, ferner (δ_{nm}) den nur durch die Belastungen P_m hervorgerufenen Weg irgend einer Belastung P_n . Die Werte δ wurden durch Klammern ausgezeichnet, da sie eine andere Bedeutung haben als die früher erklärten δ_{mn} und δ_{nm} , deren ersteres z. B. den Wert von δ_m für den Fall vorstellte, daß nur *eine* Belastung P_n wirkt und diese die Größe *Eins* besitzt.

Schreibt man nun die Arbeitsbedingung (13) einmal an

für den Kräftezustand (P_m, S_m) und den hiervon unabhängigen Verschiebungszustand $[(\delta_{mn}) \Delta s_m]$

und hierauf

für den Kräftezustand (P_n, S_n) und den hiervon unabhängigen Verschiebungszustand $[(\delta_{nm}) \Delta s_n]$,

so erhält man die Gleichungen:

$$\sum P_m (\delta_{mn}) = \sum S_m \Delta s_m = \sum S_m \frac{S_n s}{EF} \text{ und}$$

$$\sum P_n (\delta_{nm}) = \sum S_n \Delta s_n = \sum S_n \frac{S_m s}{EF}$$

und gelangt zu dem zuerst von *Betti* nachgewiesenen Gesetze

$$(34) \quad \sum P_m (\delta_{mn}) = \sum P_n (\delta_{nm}).$$

Wirkt auf das Fachwerk das eine Mal nur eine Belastung $P_m = 1$, sodann nur eine Belastung $P_n = 1$, so entsteht aus (34):

$$\delta_{mn} = \delta_{nm}$$

und hieraus folgt, daß der *Maxwellsche* Satz nur ein besonderer Fall des viel allgemeineren, aber erst später entdeckten *Bettischen* Satzes ist.

19. — Um die Anwendung des Maxwellschen Satzes auf die Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke zu erläutern, behandeln wir zunächst die in Nr. 11 und 13 bereits auf anderem Wege gelöste Aufgabe: *die überzählige Auflagerkraft X_a und die Spannkraften X_b, X_c*

der überzähligen Stäbe des in der Fig. 16 dargestellten Bogenträgers zu bestimmen.

Es sollen sowohl Temperaturänderungen als auch die auf Seite 21 angeführten Verschiebungen der Stützpunkte berücksichtigt werden.

Wir rechnen (wie in Fig. 17 auf Seite 18) die Kräfte X_a , X_b , X_c zu den auf das Hauptnetz wirkenden Lasten und erhalten für die Wege δ_a , δ_b , δ_c der Belastungen X_a , X_b , X_c die Werte:

$$(35) \quad \begin{cases} \delta_a = \sum P_m \delta_{am} - \delta_{aa} X_a - \delta_{ab} X_b - \delta_{ac} X_c + \delta_{at} + \delta_{aw} \\ \delta_b = \sum P_m \delta_{bm} - \delta_{ba} X_a - \delta_{bb} X_b - \delta_{bc} X_c + \delta_{bt} + \delta_{bw} \\ \delta_c = \sum P_m \delta_{cm} - \delta_{ca} X_a - \delta_{cb} X_b - \delta_{cc} X_c + \delta_{ct} + \delta_{cw} \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet:

δ_{am} den Einfluß der Ursache $P_m = 1$ auf den Weg δ_a ,

δ_{aa} desgl. den Einfluß der Ursache $X_a = -1$,

δ_{ab} " " " " " $X_b = -1$,

δ_{ac} " " " " " $X_c = -1$,

δ_{at} desgl. den Einfluß von Temperaturänderungen,

δ_{aw} " " " " " Verschiebungen der Stützpunkte,

und ebenso lassen sich die übrigen, mit Doppelzeigern behafteten Werte δ deuten.

Um δ_{aw} zu bestimmen, wird die Arbeitsbedingung für den Belastungszustand $X_a = -1$ (Fig. 19) angeschrieben und dabei jedem Stabe die Längenänderung $\Delta s = 0$ beigelegt. Es ergibt sich dann

$$1 \cdot \delta_{aw} + 1 \cdot \delta_H + 1 \cdot \frac{e}{l_1} (\delta_A - \delta_B - \delta_C + \delta_D) = 0$$

und hieraus und aus ähnlichen, für die Belastungszustände $X_b = -1$, $X_c = -1$ aufgestellten Gleichungen folgt

$$\delta_{aw} = -L_a; \quad \delta_{bw} = -L_b; \quad \delta_{cw} = -L_c \quad (\text{vergl. Seite 21}).$$

Setzt man nun diese Werte in (35) ein und beachtet, daß die Buchstaben der Doppelzeiger miteinander vertauscht werden dürfen, daß also $\delta_{am} = \delta_{ma}$, $\delta_{bm} = \delta_{mb}$, $\delta_{cm} = \delta_{mc}$, $\delta_{ab} = \delta_{ba}$, . . . ist, so gelangt man zu den auf Seite (24) erhaltenen Gleichungen (25).

Der eben eingeschlagene Weg führt immer zum Ziele. Man darf aussprechen:

Jedes statisch unbestimmte Fachwerk läßt sich durch Beseitigung von überzähligen Stäben und Auflagerkräften in ein statisch bestimmtes Fachwerk (Hauptnetz genannt) verwandeln. Auf dieses Hauptnetz wirken außer den gegebenen Lasten P_m und den Temperaturänderungen noch gewisse vorläufig unbekannte Belastungen X_a , X_b , X_c , X_d . . . deren Wege δ_a , δ_b , δ_c , δ_d . . ., jedoch bestimmten Bedingungen unterworfen sind. Es gelten die Gleichungen:

Nach Einsetzen sämtlicher Stäbe denke man die ursprünglichen Stabtemperaturen wieder hergestellt, schreibe also den erwärmten Stäben die Temperaturänderung ($-t'$), den abgekühlten die Temperaturerhöhung ($+t'$) zu. Man erkennt dann, daß man den fraglichen Bearbeitungs-Fehlern Rechnung trägt, wenn man die in die früheren Entwicklungen eingeführten Temperaturänderungen t für die um ωs zu langen oder zu kurzen Stäbe um $t' = \frac{\omega}{\varepsilon}$ vergrößert beziehungsweise verkleinert.

Werden überzählige Stäbe absichtlich mit unrichtigen Längen eingesetzt, so bezeichnet man das Stabgebilde als ein *Fachwerk mit künstlicher Anspannung*.

g. Ausnahmefälle.

21. — Alle vorstehenden Entwicklungen sind an die Voraussetzung gebunden, daß es zulässig sei, bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen die Formänderung des Fachwerks zu vernachlässigen; sie gelten also nur für Stabgebilde, deren Knoten sehr geringe Verschiebungen erleiden, und führen, auf Träger von ungenügender Steifigkeit (z. B. mangelhaft versteifte Kettenbrücken) angewendet, mitunter zu ganz unrichtigen Ergebnissen. Es gibt aber auch Fälle, in denen bereits sehr geringe elastische Formänderungen die angenäherte Berechnungsweise unbrauchbar machen, und hierzu gehören die im ersten Bande, Abschnitt XIII, als Fachwerke von unendlich kleiner Verschiebbarkeit bezeichneten Stabgebilde, deren

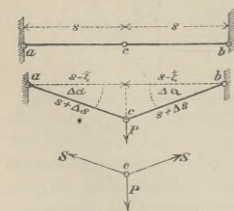


Fig. 30.

Knotenpunkte sich selbst dann gegeneinander (wenn auch nur unendlich wenig) verschieben würden, wenn sämtliche Stäbe und Stützen starr wären. Ein besonders einfaches Fachwerk dieser Art stellt Fig. 30 dar. Die Achsen der beiden wagerechten Stäbe ac und bc fallen in dieselbe Gerade. a und b sind feste Auflagergelenke. Die um a und b mit den Halbmessern s geschlagenen Kreise haben ein Bogenelement gemein, innerhalb dessen sich c frei bewegen

kann. Wird das Fachwerk durch eine senkrechte Last P beansprucht, und verschiebt sich jedes der beiden Auflagergelenke um die gleiche wagerechte Strecke ξ , so entstehen in den Stäben ac und bc gleich große Spankräfte S . Man erhält:

$$2 S \sin \Delta \alpha = P;$$

$$\sin \Delta \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \Delta \alpha}; \quad \cos \Delta \alpha = \frac{s - \xi}{s + \Delta s}; \quad \Delta s = \frac{S s}{E F}; \quad \text{also}$$

$$4 S^2 \left[1 - \frac{E^2 F^2 (s - \xi)^2}{s^2 (E F + S)^2} \right] = P^2,$$

und diese Gleichung liefert für S einen bestimmten endlichen Wert, welcher desto größer ist, je größer E und F sind. Werden die Widerlager und die Stäbe vollkommen starr angenommen, so ergibt sich (wegen $\xi = 0$, $\Delta s = 0$, $\sin \Delta \alpha = 0$) für die Spannkraft S , selbst bei sehr kleiner Last P , der unrichtige Wert $S = \infty$.

Zu einem ähnlichen Ergebnisse führt die genauere Berechnung des auf Seite 460 des ersten Bandes angeführten Paskalschen Sechsecks. Gleichgewicht tritt hier selbst bei starren Stäben im allgemeinen erst nach einer gegenseitigen Verschiebung der Knotenpunkte ein. Da diese Formänderung aber unendlich klein ist, so darf bei Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen die ursprüngliche Gestalt des Fachwerks beibehalten werden, und es ergeben sich dann (nach Band I, Abschnitt XIII) für die Spannkraft S unendlich große oder unbestimmte Werte. Werden aber die elastischen Verschiebungen berücksichtigt, so liefern die Gleichgewichtsbedingungen für jede Spannkraft S einen ganz bestimmten endlichen Wert. Immerhin ist es ratsam, derartige bereits ausgeführte Fachwerke zu vermeiden, wegen der verhältnismäßig großen Anstrengungen, welche die Stäbe selbst bei geringer Belastung erleiden.

B. Gesetze für beliebige isotrope, feste Körper.

a. Voraussetzungen und Erklärungen. Gesetz der virtuellen Verschiebungen.

22. — Wir werden in diesem Buche außer Fachwerken noch Träger untersuchen, die aus irgendwie miteinander befestigten geraden oder krummen Stäben zusammengesetzt sind und *Stabwerke* genannt werden mögen. Die Theorie derselben leiten wir durch Entwicklung einiger Gesetze ein, welche für beliebige feste Körper, die nur elastische, verschwindend kleine Formänderungen erleiden, gelten.

23. — An irgendeiner Stelle eines im Gleichwichte befindlichen festen Körpers denken wir uns ein unendlich kleines Teilchen abgegrenzt. Die auf die Seitenflächen desselben wirkenden Kräfte sollen *Flächenkräfte* genannt und insbesondere als *innere Kräfte* oder *Oberflächenkräfte* bezeichnet werden, je nachdem die durch sie beanspruchten Flächen im Innern des Körpers liegen oder zur Oberfläche gehören; außer ihnen wird an dem Körperteilchen im allgemeinen noch eine

auf die Masse desselben wirkende äußere Kraft angreifen, welche eine *Massenkraft* heißt (z. B. die Erdanziehung, Ergänzungskräfte der relativen Bewegung).

Nehmen wir nun an, es erleide ein anfänglich im Gleichgewichte befindlicher Körper durch Hinzutreten äußerer Kräfte und durch Temperaturänderung eine Umgestaltung. Dieselbe hört auf, sobald sich ein neuer Gleichgewichtszustand gebildet hat und bestehen bleibt; während ihrer Erzeugung werden die Flächenkräfte des betrachteten Körperteilchens eine bestimmte Arbeitssumme verrichten, und von dieser ist besonders derjenige Teil von Wichtigkeit, der nur von der Formänderung des Körperteilchens abhängig ist, der also verschwindet, wenn sich das Teilchen bewegt, ohne seine Gestalt zu ändern. Man nennt diesen Teil der Gesamtarbeit der Flächenkräfte *die Formänderungsarbeit des Körperteilchens*; ihre Integration über den ganzen Körper liefert die Formänderungsarbeit des Körpers. Bei der Berechnung dieser Arbeit ist zu beachten, daß die Flächenkräfte, deren schließliche Werte wir ganz allgemein mit R bezeichnen wollen, sich im Verlaufe jener Umgestaltung ändern.

Denkt man sich hingegen die Flächenkräfte während der ganzen Dauer der Formänderung mit ihren Endwerten R wirkend und bestimmt die von den R geleistete Formänderungsarbeit unter der Voraussetzung einer *willkürlichen* Formänderung, die man sich zwar als möglich vorstellen kann, die aber nicht von den die Kräfte R erzeugenden, sondern von irgendwelchen anderen Ursachen herrührt, so erhält man einen Ausdruck dA_v , welcher die *virtuelle Formänderungsarbeit* des Körperteilchens heißt, während jene willkürliche, mögliche Umgestaltung eine *virtuelle Formänderung* genannt werden soll.

Wir fassen jetzt eine unendlich kleine virtuelle Formänderung eines im Gleichgewichte befindlichen Körpers und insbesondere die Bewegung und Umgestaltung eines Körperteilchens ins Auge und bezeichnen die virtuelle Arbeit der auf dieses Körperteilchen wirkenden Massenkraft mit dA_m , diejenige der Flächenkräfte mit dA_f . Letztere Arbeit besteht aus zwei Teilen; der eine, dA_v , hängt nur von der Umgestaltung des Körperteilchens ab, der andere, nämlich $dA_f - dA_v$, von der Bewegung des Massenmittelpunktes und der Drehung des Körperteilchens um diesen Punkt. Somit stellt $dA_m + dA_f - dA_v$ diejenige virtuelle Arbeit vor, welche sämtliche auf das Körperteilchen wirkenden Kräfte verrichten, wenn dessen Bewegung ohne eine Formveränderung vor sich geht. Diese Arbeit muß aber = Null sein, da die Mittelkraft der auf das Körperteilchen wirkenden Kräfte (des vorausgesetzten Gleichgewichtszustandes wegen) zu Anfang = Null ist und auch während der ganzen Dauer der gedachten unendlich kleinen Bewegung bis auf eine verschwindende Größe den Wert Null behält.

Es folgt mithin $dA_m + dA_f = dA_v$ und, wenn entsprechende Gleichungen für sämtliche Körperteilchen gebildet und hierauf addiert werden,

$$(37) \quad A_m + A_f = A_v.$$

Da sich nun in dem Ausdrucke A_f die Arbeiten der *inneren* Flächenkräfte gegenseitig tilgen, weil auf die Flächen, in denen aneinander grenzende Körperteilchen zusammenhängen, bei gleichen Verschiebungen entgegengesetzt gleiche Kräfte wirken, so leuchtet ein, daß A_f die *virtuelle Arbeit der Oberflächenkräfte*, mithin $A_f + A_m$ die *virtuelle Arbeit sämtlicher äußeren Kräfte* vorstellt, und es drückt deshalb die Gleichung (37) das Gesetz aus:

Bei einer verschwindend kleinen virtuellen Formänderung eines im Gleichgewichte befindlichen Körpers ist die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte gleich der virtuellen Formänderungsarbeit.

Die Ableitung dieses Satzes nimmt an, daß alle anfänglich sich deckenden Seitenflächen von aneinander grenzenden Körperteilchen auch während des ganzen Verlaufs der Formänderung sich decken, weil nur dann die Arbeiten der auf diese Flächen wirkenden Kräfte sich aufheben. Besteht nun der betrachtete Körper aus mehreren einander berührenden Teilen, von denen jeder einzelne der gemachten Annahme entspricht, und finden gegenseitige Verschiebungen von anfänglich zusammenliegenden Berührungsflächen je zweier Teile statt, so müssen, wenn das bewiesene Gesetz gelten soll, alle diese Flächen zur Oberfläche gezählt werden, d. h. es sind die auf diese Flächen wirkenden Kräfte, soweit sich ihre Arbeiten nicht tilgen, zu den äußeren Kräften zu rechnen. So sind z. B. bei aufeinander reibenden Teilen eines Körpers die an den Berührungsstellen wirkenden Reibungswiderstände als äußere Kräfte aufzufassen.

24. — Um einen allgemeinen Ausdruck für A_v abzuleiten, beziehen wir den Körper auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem und denken an irgendeiner Stelle, aber innerhalb eines Körperteiles, dessen Spannungen sich *stetig* ändern, ein Parallelopipedon von den anfänglichen Kantenlängen dx, dy, dz abgegrenzt.

Die Spannung in der zur x -Achse senkrechten, den Punkt (x, y, z) enthaltenden Seitenfläche $dydz$ sei in die Seitenspannungen

σ_x , parallel der x -Achse und positiv, wenn im Sinne von $(-x)$ wirkend,

τ_{xy} , " " y - " " " " " " " " $(-y)$ " "

τ_{xz} , " " z - " " " " " " " " $(-z)$ " "

zerlegt und in gleicher Weise mögen die Spannungen in den dem Punkte (x, y, z) anliegenden Seitenflächen $dx dz$ und $dx dy$ durch ihre Seitenspannungen

$$\begin{array}{ccc} \sigma_y, & \tau_{yz}, & \tau_{yx}, \\ \sigma_x, & \tau_{zx}, & \tau_{xy} \end{array}$$

gegeben werden. Die σ sind Zug- oder Druckspannungen, die τ Schubspannungen.

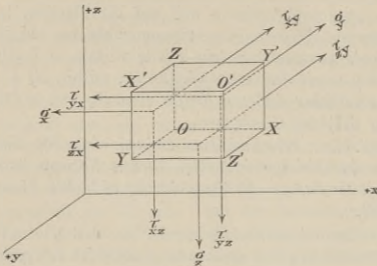


Fig. 31.

Durch Multiplikation dieser Spannungen mit den entsprechenden Flächeninhalten gelangt man zu den Kräften, welche jene Flächen beanspruchen. Auf die Fläche $dy dx$ wirken z. B. die drei Kräfte:

$$\sigma_x dy dx, \quad \tau_{xy} dy dx, \quad \tau_{xz} dy dx.$$

Wird die Momentensumme aller am Parallelepipedon $dx dy dz$ angreifenden Kräfte in bezug auf die der y -Achse parallele Schwerachse

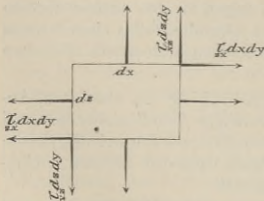


Fig. 32.

des Körperteilchens gleich Null gesetzt und hierbei davon abgesehen, daß sich die Spannungen in gegenüberliegenden Seitenflächen um Differenziale unterscheiden, weil die Berücksichtigung dieser Unterschiede zu unendlich kleinen Größen der vierten Ordnung führen würde, welche gegen die der dritten Ordnung verschwinden, so erhält man

(mit Hinweis auf Fig. 32, in der die Projektion des Körperteilchens auf die (xz) -Ebene dargestellt ist) die Gleichung:

$$(\tau_{xz} dx dy) dz = (\tau_{zx} dy dx) dx$$

und hieraus und aus ähnlichen Momentengleichungen für die der x -Achse und z -Achse parallelen Schwerachsen des Körperteilchens folgt:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

weshalb die kürzere Bezeichnung eingeführt werden soll:

$$\tau_x = \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_y = \tau_{zx} = \tau_{xz}; \quad \tau_z = \tau_{xy} = \tau_{yx},$$

wobei zu bemerken ist, daß

$$\tau_x \perp dx; \quad \tau_y \perp dy; \quad \tau_z \perp dz.$$

Es ändere sich nun die anfängliche Länge dx um die Strecke $\Delta dx = \Delta' \left(\frac{dx}{2} \right) + \Delta'' \left(\frac{dx}{2} \right)$ so zwar, daß sie die dem Punkte (x, y, z) anliegende Fläche gegen den Massenmittelpunkt M im Sinne der $(-x)$ um $\Delta' \left(\frac{dx}{2} \right)$ verschiebt und die gegenüberliegende Fläche im Sinne der $(+x)$ um $\Delta'' \left(\frac{dx}{2} \right)$. Die auf jene Flächen wirkenden Kräfte:

$$\sigma_x dy dz \quad \text{und} \quad \left(\sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx} dx \right) dy dz$$

liefern dann zur virtuellen Formänderungsarbeit den Beitrag:

$$\sigma_x dy dz \Delta' \left(\frac{dx}{2} \right) + \left(\sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx} dx \right) dy dz \Delta'' \left(\frac{dx}{2} \right)$$

und hierfür darf man nach Streichung der kleinen Größe vierter Ordnung: $\frac{d\sigma_x}{dx} dx dy dz \Delta'' \left(\frac{1}{2} dx \right)$ setzen:

$$\sigma_x dy dz \Delta dx = \sigma_x \frac{\Delta dx}{dx} dV$$

worin $dV = dx dy dz$ den Inhalt des Körperteilchens bedeutet.

Hieraus und aus ähnlichen Betrachtungen folgt: Ändern sich die anfänglichen Längen dx, dy, dz um Strecken $\Delta dx, \Delta dy, \Delta dz$ und bezeichnet man die in der Folge *Dehnungen* genannten Verlängerungsverhältnisse mit

$$(38) \quad \varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}, \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}, \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz},$$

so ist der von den Spannungen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ abhängige Teil der virtuellen Formänderungsarbeit dA_v des Körperteilchens $(dx dy dz)$ gleich

$$(39) \quad (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z) dV.$$

Gleichzeitig mit den Dehnungen entstehen Winkeländerungen und infolgedessen leisten auch die Schubkräfte Arbeit. Es sei, mit Bezugnahme auf Fig. 31

$$\begin{array}{ll} \gamma_x & \text{die Änderung des Winkels } YOZ, \\ \gamma_y & \text{'' '' '' '' } ZOZ, \\ \gamma_z & \text{'' '' '' '' } XOY. \end{array}$$

Man nennt $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ die *Gleitungen* im Punkte x, y, z ; sie seien positiv oder negativ, je nachdem sie Verkleinerungen oder Vergrößerungen der Winkel YOZ, ZOZ, XOY vorstellen. Bei Berechnung der infolge der Gleitungen von den Schubkräften verrichteten virtuellen Formänderungsarbeit darf man wieder die Spannungsunterschiede in den einander gegenüberliegenden Flächen vernachlässigen und den Punkt xyz an Stelle des Massenmittelpunktes als ruhend annehmen.

Ändert sich der Winkel YOZ um γ_x , so verschiebt sich die Fläche YO' im Sinne OZ gegen die Fläche OY' um $\gamma_x dy$, wobei die in YO' und senkrecht zu dx wirksame Schubkraft $\tau_x dx$ die virtuelle Arbeit $\tau_x dx \gamma_x dy$ verrichtet, oder es verschiebt sich die Fläche ZO' im Sinne OY gegen die Fläche OZ' um die Strecke $\gamma_x dx$, bei welcher Bewegung die in ZO' und senkrecht zu dx wirkende Schubkraft $\tau_x dx$ die Arbeit $\tau_x dx \gamma_x dx$ leistet. In beiden Fällen wird die Arbeit

$$\tau_x \gamma_x dx dy dz = \tau_x \gamma_x dV$$

erhalten, und ebenso ergeben sich für die den Gleitungen γ_x, γ_y entsprechenden Arbeiten die Ausdrücke $\tau_y \gamma_y dV$ und $\tau_z \gamma_z dV$, so daß die gesamte virtuelle Formänderungsarbeit der an dem Teilchen $(dx dy dz)$ angreifenden Flächenkräfte gleich

$$dA_v = (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z) dV$$

ist. Für den ganzen Körper erhält man:

$$(40) \quad A_v = \int (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z) dV.$$

Bei unstetigen Spannungen muß der Körper in Teile zerlegt werden, innerhalb welcher alle Spannungen stetig sind. Die Werte A_v werden für die einzelnen Teile gesondert berechnet und schließlich addiert.

Setzt man (nach Nr. 23) A_v gleich der virtuellen Arbeit der äußeren Kräfte Q , so erhält man:

$$(41) \quad \sum Q_m \delta_m = \int (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z) dV,$$

wo δ_m die den Dehnungen $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ und Gleitungen $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ entsprechende Verschiebung des Angriffspunktes m der Kraft Q_m im Sinne von Q_m bedeutet, d. i. die Projektion des Weges von m auf die Richtung von Q_m . Zu erinnern ist daran, daß bei Ableitung der Gleichung (41) hinsichtlich der äußeren und inneren Kräfte nur die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen vorausgesetzt wurde, und daß die Dehnungen, die Gleitungen und die ihnen entsprechenden Verschiebungen δ von den Kräften Q und den Spannungen σ und τ unabhängig zu denken sind und von irgendwelchen anderen Ursachen herrühren können.

25. — Wir setzen jetzt fest, daß $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ die bei einer gegebenen Angriffsweise des Körpers entstehenden *wirklichen Dehnungen* und *Gleitungen* sind, bezeichnen mit $\bar{Q}, \bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z, \bar{\tau}_x, \bar{\tau}_y, \bar{\tau}_z$ die äußeren Kräfte* und Spannungen eines nur *gedachten* Belastungszustandes, wenden auf den letzteren und auf den wirklichen Formänderungszustand die Gleichung (41) an, und erhalten die Beziehung:

$$(42) \quad \Sigma \bar{Q}_m \delta_m = \int (\bar{\sigma}_x \varepsilon_x + \bar{\sigma}_y \varepsilon_y + \bar{\sigma}_z \varepsilon_z + \bar{\tau}_x \gamma_x + \bar{\tau}_y \gamma_y + \bar{\tau}_z \gamma_z) dV,$$

welche der für das Fachwerk abgeleiteten Gleichung (13) gegenüber zu stellen ist, und in welcher δ_m die Projektion des wirklichen Weges des Punktes m auf die gedachte Kraft \bar{Q}_m bedeutet.

Die wirklichen Dehnungen und Gleitungen sollen hier nur für den isotropen (d. h. in allen Punkten gleich beschaffenen) Körper angegeben werden. Es wird ein spannungsloser Anfangszustand angenommen. Die anfängliche Temperatur ändere sich im Punkte (x, y, z) um t .

Die Seite dx des Körperteilchens ($dx dy dz$) erleidet, wenn die Spannung σ_x allein wirkt, die Dehnung $\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\sigma_x}{E}$, während die Temperaturänderung den Einfluß $\frac{\Delta dx}{dx} = \varepsilon t$ erzeugt und infolge von σ_y und σ_z entsteht: $\frac{\Delta dx}{dx} = -\frac{\sigma_y + \sigma_z}{mE}$, wobei $\frac{1}{m}$ die Wertziffer der Querdehnung (abgerundet $\frac{1}{3}$ für Eisen und Stahl) bedeutet.*) Das Zusammenwirken aller Ursachen ruft die Dehnung hervor:

$$(43) \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{mE} + \varepsilon t \text{ und ebenso ergibt sich:} \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{mE} + \varepsilon t, \\ \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{mE} + \varepsilon t, \end{cases}$$

während die nur von den Schubspannungen abhängigen Gleitungen die Werte annehmen:

$$(44) \quad \gamma_x = \frac{\tau_x}{G}, \quad \gamma_y = \frac{\tau_y}{G}, \quad \gamma_z = \frac{\tau_z}{G},$$

wobei

$$(45) \quad G = \frac{mE}{2(m+1)}$$

die *Schub-Elastizitätsziffer* (auch *Gleitmodul* genannt) bedeutet.**)

*) Vergl. Band I, § 12.

***) Vergl. u. a. *Grashof*, Theorie der Elastizität und Festigkeit, 2. Auflage, Berlin 1878, Seite 24 und 30.

b. Anwendung der Gleichung (42).

26. — Wir werden bei Berechnung der Stabwerke die Gleichung (42) in derselben Weise benutzen wie die Gleichung (13) bei Untersuchung des Fachwerks. Zunächst werden wir die nach bestimmten Richtungen wirkenden Seitenkräfte C der Stützenwiderstände sowie die Spannungen σ und τ als lineare Funktionen der gegebenen Lasten P und gewisser statisch nicht bestimmbarer Größen $X', X'', X''' \dots$ darstellen, und zwar in der Form:

$$(46) \quad \begin{cases} C = C_0 - C' X' - C'' X'' - C''' X''' - \dots \\ \sigma_x = \sigma_{x0} - \sigma'_x X' - \sigma''_x X'' - \sigma'''_x X''' - \dots \\ \sigma_y = \sigma_{y0} - \sigma'_y X' - \sigma''_y X'' - \sigma'''_y X''' - \dots \\ \sigma_z = \sigma_{z0} - \sigma'_z X' - \sigma''_z X'' - \sigma'''_z X''' - \dots \\ \tau_x = \tau_{x0} - \tau'_x X' - \tau''_x X'' - \tau'''_x X''' - \dots \\ \tau_y = \tau_{y0} - \tau'_y X' - \tau''_y X'' - \tau'''_y X''' - \dots \\ \tau_z = \tau_{z0} - \tau'_z X' - \tau''_z X'' - \tau'''_z X''' - \dots \end{cases}$$

Die mit dem Zeiger 0 behafteten Werte sind Funktionen ersten Grades der Lasten P und unabhängig von den Größen X', X'', \dots . Die Werte $C', C'' \dots, \sigma', \sigma'' \dots, \tau', \tau'' \dots$ sind unabhängig von den P und X .

Es bedeuten:

C', σ', τ' die Stützenwiderstände und Spannungen für den Zustand $X' = -1$,

C'', σ'', τ'' die Stützenwiderstände und Spannungen für den Zustand $X'' = -1$ u. s. w.

Wird nun die Gleichung (42) der Reihe nach auf die Belastungszustände: $X' = -1, X'' = -1, \dots$ angewendet und jedesmal auf den wirklichen Verschiebungszustand, so ergeben sich die zur Berechnung der Größen X', X'', \dots ausreichenden Bedingungen:

$$(47) \quad \begin{cases} L' = \int (\sigma'_x \varepsilon_x + \sigma'_y \varepsilon_y + \sigma'_z \varepsilon_z + \tau'_x \gamma_x + \tau'_y \gamma_y + \tau'_z \gamma_z) dV \\ L'' = \int (\sigma''_x \varepsilon_x + \sigma''_y \varepsilon_y + \sigma''_z \varepsilon_z + \tau''_x \gamma_x + \tau''_y \gamma_y + \tau''_z \gamma_z) dV \\ \dots \end{cases}$$

unter $L', L'' \dots$ die den Zuständen $X' = -1, X'' = -1, \dots$ entsprechenden virtuellen Arbeiten der Auflagerkräfte verstanden.

27. — Wird die durch bestimmte Dehnungen und Gleitungen $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ bedingte gegenseitige Verschiebung δ_m zweier Punkte m und m_1 des Körpers gesucht, so bringe man in m und m_1 zwei entgegengesetzt gleiche, in die Gerade mm_1 fallende und voneinander weg gerichtete Kräfte *Eins* an (Fig. 9) und stelle für diesen

gedachten Belastungszustand und für den wirklichen Verschiebungszustand die Gleichung (42) auf. Man erhält:

$$(48) \quad 1 \cdot \delta_m + \bar{L} = \int (\bar{\sigma}_x \varepsilon_x + \bar{\sigma}_y \varepsilon_y + \bar{\sigma}_z \varepsilon_z + \bar{\tau}_x \gamma_x + \bar{\tau}_y \gamma_y + \bar{\tau}_z \gamma_z) dV,$$

worin $\bar{\sigma}$, $\bar{\tau}$ und \bar{C} Spannungen und Stützenwiderstände bedeuten, welche mit der Belastungseinheit des Punktpaares m , m_1 im Gleichgewichte sind.

Auf diese Weise lassen sich alle die Aufgaben behandeln, welche in Nr. 9, 10, 14 für das Fachwerk gelöst worden sind.

c. Das Clapeyronsche Gesetz und die Sätze von Maxwell und Betti.

28. — Es wird vorausgesetzt, daß die äußeren und inneren Kräfte allmählich von Null aus wachsen, daß also auch die Umgestaltung des Körpers allmählich vor sich geht, ohne daß Schwingungen entstehen. Für jede der unendlich kleinen Formänderungen, in welche sich die ganze Formänderung zerlegen läßt, gilt die Gleichung (42) und es ergibt sich daher die Beziehung

$$(49) \quad \Sigma \int Q d\delta = \iint (\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_x d\gamma_x + \tau_y d\gamma_y + \tau_z d\gamma_z) dV,$$

wo Q , σ_x , σ_y , σ_z , τ_x , τ_y , τ_z die Werte der äußeren Kräfte und Spannungen in dem Augenblicke bedeuten, in welchem die Verschiebungen δ und $d\delta$ zunehmen und die Dehnungen und Gleitungen um $d\varepsilon_x$, $d\varepsilon_y$, $d\varepsilon_z$, $d\gamma_x$, $d\gamma_y$, $d\gamma_z$.

Der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (48) gibt die *mechanische Arbeit der äußeren Kräfte* Q an, der Ausdruck rechts die *wirkliche Formänderungsarbeit* A des Körpers. Behält der Körper in jedem Punkte die anfängliche Temperatur, ist also $t=0$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left(d\sigma_x - \frac{1}{m} d\sigma_y - \frac{1}{m} d\sigma_z \right); & d\gamma_x &= \frac{1}{G} d\tau_x, \\ d\varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left(d\sigma_y - \frac{1}{m} d\sigma_x - \frac{1}{m} d\sigma_z \right); & d\gamma_y &= \frac{1}{G} d\tau_y, \\ d\varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left(d\sigma_z - \frac{1}{m} d\sigma_x - \frac{1}{m} d\sigma_y \right); & d\gamma_z &= \frac{1}{G} d\tau_z \text{ also} \\ \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_x d\gamma_x + \tau_y d\gamma_y + \tau_z d\gamma_z \\ &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x d\sigma_x + \sigma_y d\sigma_y + \sigma_z d\sigma_z - \frac{1}{m} d(\sigma_y \sigma_x + \sigma_x \sigma_z + \sigma_x \sigma_y) \right] \\ &+ \frac{1}{G} [\tau_x d\tau_x + \tau_y d\tau_y + \tau_z d\tau_z] \end{aligned}$$

und hieraus durch Integration:

$$(50) \quad A = \frac{1}{2} \int \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{2}{m} (\sigma_y \sigma_x + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y) \right] \frac{dV}{E} \\ + \frac{1}{2} \int (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) \frac{dV}{G}.$$

Nun gilt aber auch andererseits die Gleichung:

$$\Sigma Q \delta = \int (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z) dV \\ = \int \left[\sigma_x \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_x}{m} \right) + \sigma_y \left(\sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \right) \right. \\ \left. + \sigma_z \left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \right) \right] \frac{dV}{E} + \int (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) \frac{dV}{G},$$

und diese läßt sich leicht umformen in

$$\Sigma Q \delta = 2A.$$

Da nun, nach (50), $\Sigma \int Q d\delta = A$ ist, so ergibt sich:

$$\Sigma \int Q d\delta = \Sigma \frac{Q \delta}{2}$$

und hieraus folgt, daß das in Nr. 8 für das Fachwerk bewiesene *Clapeyronsche Gesetz* auch für den isotropen festen Körper gilt.

Aus der Gültigkeit des Clapeyronschen Gesetzes folgt aber auch ohne weiteres diejenige des in Nr. 17 für den Fall $t = 0$ und $L = 0$ abgeleiteten *Maxwellschen Lehrsatzes*.

29. — Um den Maxwellschen Satz noch auf eine ähnliche Weise wie in Nr. 18 als besonderen Fall des allgemeineren Gesetzes von *Betti* herzuleiten, nehmen wir an, daß auf den Körper zuerst beliebige Belastungen P_m wirken. Den Körper denken wir durch drei einander rechtwinklig schneidende Flächenscharen in unendlich kleine Teilchen zerlegt, in deren Seitenflächen nur Normalspannungen auftreten, welche dann Hauptspannungen heißen und mit $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'$ bezeichnet werden sollen. Die entsprechenden Dehnungen sind (wegen $t = 0$)

$$(51) \quad \begin{cases} \varepsilon_1' = \left[\sigma_1' - \frac{1}{m} (\sigma_2' + \sigma_3') \right] \frac{1}{E} \\ \varepsilon_2' = \left[\sigma_2' - \frac{1}{m} (\sigma_3' + \sigma_1') \right] \frac{1}{E} \\ \varepsilon_3' = \left[\sigma_3' - \frac{1}{m} (\sigma_1' + \sigma_2') \right] \frac{1}{E}; \end{cases}$$

die Gleitungen sind $= 0$.

Jetzt ersetzen wir die Belastungen P_m durch andere Belastungen P_n , behalten aber die vorhin angenommene Zerlegung des Körpers bei. Es treten dann Normalspannungen σ_1'' , σ_2'' , σ_3'' auf, und diese erzeugen Dehnungen:

$$(52) \quad \begin{cases} \varepsilon_1'' = \left[\sigma_1'' - \frac{1}{m} (\sigma_2'' + \sigma_3'') \right] \frac{1}{E} \\ \varepsilon_2'' = \left[\sigma_2'' - \frac{1}{m} (\sigma_3'' + \sigma_1'') \right] \frac{1}{E} \\ \varepsilon_3'' = \left[\sigma_3'' - \frac{1}{m} (\sigma_1'' + \sigma_2'') \right] \frac{1}{E}. \end{cases}$$

Außerdem werden durch die P_n Schubspannungen τ'' und Gleitungen γ'' hervorgerufen.

Bezeichnen wir nun mit $(\delta_{m,n})$ den Weg irgendeiner Belastung P_m für den Fall, daß auf den Körper nur die Belastungen P_n wirken, und mit $(\delta_{n,m})$ den Weg irgendeiner Belastung P_n infolge ausschließlicher Wirkung der P_m , und wenden wir die Gleichung (42) zuerst an

auf den Belastungszustand (P_m) und den hiervon unabhängigen, den Belastungen P_n entsprechenden Verschiebungszustand,

sodann:

auf den Belastungszustand (P_n) und den hiervon unabhängigen, den P_m entsprechenden Verschiebungszustand,

so erhalten wir, da die Stützenwiderstände, der Voraussetzung gemäß, keine Arbeit verrichten, die Gleichungen:

$$\Sigma P_m (\delta_{m,n}) = \int (\sigma_1' \varepsilon_1'' + \sigma_2' \varepsilon_2'' + \sigma_3' \varepsilon_3'') dV$$

$$\Sigma P_n (\delta_{n,m}) = \int (\sigma_1'' \varepsilon_1' + \sigma_2'' \varepsilon_2' + \sigma_3'' \varepsilon_3') dV,$$

bei deren Aufstellung zu beachten ist, daß den Gleitungen γ'' die Schubspannungen $\tau' = 0$ gegenüberstehen und den Schubspannungen τ'' die Gleitungen $\gamma' = 0$.

Mit Hilfe von (51) und (52) läßt sich nun leicht nachweisen, daß

$$\sigma_1' \varepsilon_1'' + \sigma_2' \varepsilon_2'' + \sigma_3' \varepsilon_3'' = \sigma_1'' \varepsilon_1' + \sigma_2'' \varepsilon_2' + \sigma_3'' \varepsilon_3'$$

ist, und deshalb auch

$$\Sigma P_m (\delta_{m,n}) = \Sigma P_n (\delta_{n,m}).$$

Hieraus aber folgt, wie auf Seite 34, als besonderer Fall:

$$\delta_{m,n} = \delta_{n,m}.$$

Man erhält

$$\partial A = (\delta_{am} P_a + \delta_{bm} P_b + \dots + \delta_{mm} P_m + \dots) \partial P_m,$$

wofür man (nach dem Gesetze: $\delta_{mn} = \delta_{nm}$) auch schreiben darf:

$$\frac{\partial A}{\partial P_m} = \delta_{ma} P_a + \delta_{mb} P_b + \dots + \delta_{mm} P_m + \dots = \delta_m.$$

Da die Gleichung (41) hinsichtlich der äußeren und inneren Kräfte nur die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen verlangt, so ist es erlaubt, bei Anwendung der Formeln (53) und (55) die statisch nicht bestimmbarē Größen X als willkürliche Veränderliche aufzufassen. Differentiiert man also nach P_m , so darf man nicht nur alle übrigen Belastungen, sondern auch sämtliche X als unveränderlich ansehen.

Betrachtet man die statisch nicht bestimmbarē Größen X (welche sich stets auf Kräfte zurückführen lassen) ebenso wie die P als unabhängige Veränderliche der Gleichungen (46), d. h. rechnet man die X vorübergehend zu den Belastungen, so dürfen die Werte σ' , σ'' , \dots , τ' , τ'' , \dots als Differentialquotienten der σ und τ aufgefaßt werden; denn es ist

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial X'} = -\sigma'_x; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial X'} = -\sigma'_y; \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial X'} = -\sigma'_z; \quad \frac{\partial \tau_x}{\partial X'} = -\tau'_x \dots \text{u. s. w.}$$

Die Gleichungen (47) lassen sich dann auf die gemeinsame Form bringen

$$(56) \quad -L_X = \int \left(\varepsilon_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial X} + \varepsilon_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial X} + \varepsilon_z \frac{\partial \sigma_z}{\partial X} + \gamma_x \frac{\partial \tau_x}{\partial X} + \gamma_y \frac{\partial \tau_y}{\partial X} + \gamma_z \frac{\partial \tau_z}{\partial X} \right) dV,$$

wobei X irgendeine der statisch nicht bestimmbarē Größen und L_X die virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte für den Zustand $X = -1$ bedeutet. Führt man für die Dehnungen und Gleitungen die durch (43) und (44) gegebenen Werte ein, so gelangt man zu dem übersichtlichen Gesetze:

$$(57) \quad \frac{\partial A_t}{\partial X} - L_X = 0.$$

Verrichten die Stützenwiderstände keine Arbeit ($L_X = 0$) und findet an keiner Stelle des Körpers eine Änderung der anfänglichen Temperatur statt ($t = 0$), so geht (54) über in

$$(58) \quad \frac{\partial A}{\partial X} = 0$$

und diese Gleichung sagt aus:

daß die statisch nicht bestimmbaren Größen X die Formänderungsarbeit A , welche als Funktion der zuerst unabhängig veränderlich gedachten Werte X darzustellen ist, zu einem Minimum machen.

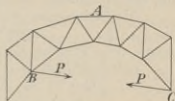
Wendet man die *Castiglianoschen* Sätze auf das Fachwerk an, welches ja nur ein besonderer Fall des eben untersuchten Körpers ist, so hat man zu setzen:

$$(59) \quad A_i = \Sigma \frac{S^2 s}{2EF} + \Sigma \epsilon t S s.$$

Literatur zur Einleitung.

Die Grundlagen für die in der Einleitung vorgetragenen Untersuchungen hat Clerk Maxwell in der im Philosophical Magazine, Band 27, Seite 294 abgedruckten Abhandlung: „On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames“ geschaffen.

Nach einer kurzen Einleitung wendet sich *Maxwell* zur Lösung der Aufgabe: Gesucht ist die Änderung δ der Entfernung BC zweier Knotenpunkte B und C eines Fachwerks infolge der Änderung Δs der Länge s irgendeines Stabes A . Er bringt zwischen den Punkten B und C einen Zug P an, ermittelt die im Stabe A hierdurch hervorgerufene Spannkraft S und betrachtet das Fachwerk als eine Maschine, an welcher die beiden Kräfte P einen Widerstand S überwinden. Das *Clapeyronsche* Gesetz liefert die Arbeitsbedingung



$$(I) \quad \frac{1}{2} P\delta + \frac{1}{2} S\Delta s = 0.$$

Bedeutet nun S' die im Stabe A durch den Zug $P=1$ erzeugte Spannkraft, so ist $S=PS'$, und es ergibt sich aus (I) die Grundgleichung

$$(II) \quad \delta = -S'\Delta s.$$

Aus ihr folgert *Maxwell* den Satz:

Ist S' die Spannkraft im Stabe A infolge einer Zugeinheit zwischen den Punkten B und C , so bringt eine Dehnung des Stabes A von der Größe $\Delta s=1$ die Punkte B und C einander näher um eine Strecke S' .

Dieser Satz liefert die zu einer willkürlich gewählten Längenänderung Δs gehörige Knotenpunktverschiebung δ . Werden sämtliche Stablängen um willkürliche Werte Δs geändert, so entsteht

$$(III) \quad \delta = -\sum S'\Delta s.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung entwickelt nun *Maxwell* die Bedingungen zur Berechnung der Spannkräfte in den überzähligen Stäben eines statisch unbestimmten Fachwerks. Die wichtigsten Stellen seiner Arbeit mögen hier wörtlich wiedergegeben werden:

Theorem. If S' be the tension of the piece A due to a tension-unity between the points B and C , then an extension-unity taking place in A will bring B and C nearer by a distance S' .

For let P be the tension and Δs the extension of A , S be the tension and δ the extension of the line BC ; then supposing all the other pieces inextensible, no work will be done except in stretching A , or

$$\frac{1}{2} P\delta + \frac{1}{2} S\Delta s = 0.$$

But $S=PS'$, therefore

$$\delta = -S'\Delta s,$$

which was to be proved.

Problem I. A tension P_m is applied between the points m_1 and m_2 of a frame, which is simply stiff; to find the extension of the line joining n_1 and n_2 , all the pieces except A being inextensible, the extensibility of A being ρ .

Determine the tension in each piece due to unit tension between m_1 and m_2 , and let S_m be the tension in A due to this cause.

Determine also the tension in each piece due to unit tension between n_1 and n_2 and let S_n be the tension in the piece A due to this cause.

Then the actual tension of A is $P_m S_m$ and its extension is $P_m S_m \rho$ and the extension of the line $n_1 n_2$ due to this cause is $-P_m S_m S_n \rho$ by the last theorem.

Cor. If the other pieces of the frame are extensible, the complete value of the extension in $n_1 n_2$ due to a tension P_m in $m_1 m_2$ is

$$(IV) \quad = -P_m \Sigma P_m S_n \rho,$$

where $\Sigma S_m S_n \rho$ means the sum of the products of $S_m S_n \rho$, which are to be found for each piece in the same way, as they were found for A .

Mit $P_m = 1$ entsteht

$$\delta_{nm} = -\Sigma S_m S_n \rho.$$

Aus dem Ausdrucke (IV) folgert *Maxwell* den Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen, $\delta_{nm} = \delta_{mn}$, dem Verfasser den Namen *Maxwell'scher Satz* beigelegt hat, ein Benennung, die sich schnell eingebürgert hat.

Die Gleichungen zur Berechnung der Spannkraft in den überzähligen Stäben X_a, X_b, X_c, \dots eines statisch unbestimmten Fachwerks, an welchem zwischen irgend zwei Punkten B und C ein Zug P angreift, entwickelt *Maxwell* wie folgt:

Let S_a, S_b, S_c, \dots be the tensions in A due to unit tension in X_a, X_b, X_c, \dots ; also let X_a, X_b, X_c, \dots be the tensions of X_a, X_b, X_c, \dots and $\rho_a, \rho_b, \rho_c, \dots$ their extensibilities. Then the tensions in A

$$= PS' + X_a S_a + X_b S_b + X_c S_c + \dots;$$

the extension of A

$$\Delta s = \rho (PS' + X_a S_a + X_b S_b + X_c S_c + \dots);$$

the extension of X_a

$$(V) \quad \begin{cases} = -P \Sigma S' S_a \rho - X_a \Sigma S_a^2 \rho - X_b \Sigma S_a S_b \rho - X_c \Sigma S_a S_c \rho - \dots = X_a \rho_a \\ \text{the extension of } X_b \\ = -P \Sigma S' S_b \rho - X_a \Sigma S_a S_b \rho - X_b \Sigma S_b^2 \rho - X_c \Sigma S_c S_b \rho - \dots = X_b \rho_b \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Hier haben wir die Anwendung der Gleichung $1 \cdot \delta = -\Sigma S' \Delta s$ auf die gedachten Belastungszustände $X_a = 1, X_b = 1, \dots$, und die hiervon unabhängigen wirklichen Formänderungen δ und Δs .

Stützenverschiebungen müssen bei der Benutzung der Gleichungen (V) mit Hilfe von Auflagerstäben berücksichtigt werden, vergl. Seite 22. Die hiermit verbundene Auffassung der Verschiebungen von Knotenpunkten als Längenänderungen von Stäben, welche diese Stäbe mit außerhalb des Fachwerks liegenden festen Punkten verbinden, findet sich ebenfalls bereits bei *Maxwell*. Die fragliche Stelle lautet:

In structures acted on by weights, in which we wish to determine the deflection at any point, we may regard the points of support as the extremities of pieces, connecting the structure with the centre of the earth; and if the supports are capable of resisting a horizontal thrust, we must suppose them connected by a piece of equivalent elasticity*). The deflection is then the shortening of a piece, extending from the given point to the centre of the earth.

*) Beispiel: Verbindung der Kämpfergelenke eines Zweigelenkbogens durch eine Zugstange, deren Verlängerung gleich der beobachteten Änderung Δl der Stützweite ist.

Die ersten praktischen Anwendungen der *Maxwellschen* Gleichungen (III) und (V) zur Berechnung von statisch unbestimmten Fachwerken gab *Mohr**); er beginnt seine Untersuchungen mit der Berechnung des Horizontalschubes eines Zweigelenkbogens und bestimmt die von der Längenänderung $\Delta s^{**})$ eines Stabes A erzeugte Änderung δ der Stützweite l wie folgt:

„Man kann diese Bewegung auch hervorrufen durch einen Horizontalschub X gegen die Auflager, welcher in der elastischen Stange A die Spannung $S'X$ erzeugt. Während die Kraft X den Weg δ zurücklegt und sonach die mechanische Arbeit $-X\delta$ leistet, wird die widerstehende Spannung $S'X$ der Stange A auf dem Wege Δs überwunden und dadurch die mechanische Arbeit $S'X\Delta s$ absorbiert. Nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit sind diese Arbeiten gleich groß und demnach

$$-X\delta = S'X\Delta s$$

oder

$$-\delta = S'\Delta s.^{44}$$

In diese über alle Stäbe ausgedehnte *Maxwellsche* Grundgleichung setzt *Mohr* die wirklichen Längenänderungen Δs ein und erhält eine Gleichung zur Berechnung von X .^{***)}

In seiner zweiten Abhandlung untersucht *Mohr* mit Hilfe der *Maxwellschen* Gleichungen (V) das Balkenfachwerk mit überzähligen Stäben (mit Vertikalen und zwei sich kreuzenden steifen Diagonalen in jedem Felde) und den Fachwerkbalken auf mehreren Stützen. In dieser zweiten Arbeit zeigt *Mohr* auch die Benutzung des *Maxwellschen* Satzes $\delta_{mn} = \delta_{nm}$ zur Bestimmung der Einflußlinie für die lotrechte Verschiebung eines Fachwerkknotens und deren Verwertung zur Ermittlung der Einflußlinien für die Stützenwiderstände eines Balkens auf mehreren Stützen. In der dritten Arbeit (1881) behandelt *Mohr* den beiderseits eingespannten symmetrischen Fachwerkbogen.

Mohr verfolgt auch den von *Maxwell* nicht berücksichtigten Einfluß von Temperaturänderungen. Wenn er aber später — im Zivilingenieur, 1885†) — die Tragweite der *Maxwellschen* Arbeit durch den Ausspruch herabzudrücken sucht: *Die Natur des Clapeyronschen Theorems gestattet nicht ohne weiteres, die Betrachtung auf die Bestimmung der Temperatureinwirkungen auszudehnen*, so stellt er damit eine Behauptung auf, die durch den klaren Inhalt des Satzes widerlegt wird, den *Maxwell* aus seiner Grundgleichung I folgert. Denn, sobald eine Längenänderung

*) *Mohr*, *Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerkträger*, Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover 1874, Seite 223.

—, *Beitrag zur Theorie des Fachwerks*, dieselbe Zeitschrift 1874, Seite 509, und 1875, Seite 17.

—, *Beitrag zur Theorie des Bogenfachwerks*, dieselbe Zeitschrift 1881, Seite 243.

***) Die von *Mohr* angewandten Bezeichnungen habe ich durch die in diesem Buche benutzten ersetzt.

****) Die aus dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten folgende allgemeine und einzige Bedingung für das Gleichgewicht zwischen den inneren und äußeren Kräften eines elastischen Körpers hat bereits *Navier* benutzt. Beachtenswert ist, daß auch *Clapeyron* von dieser allgemeinen Gleichung ausgegangen ist; die virtuellen Verschiebungen ersetzte er durch die wirklichen. Eine Anwendung des *Clapeyronschen* Gesetzes auf Körper, welche sich in Prismen zerlegen lassen, die nur auf Zug oder Druck beansprucht werden, findet man schon in dem bekannten Werke:

Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique et l'élasticité des corps solides*, Paris (1852, 1866), Seite 87.

†) *Mohr*, *Beitrag zur Theorie des Fachwerks*. Zivilingenieur 1885, Seite 308.

$\Delta s = 1$ eine Knotenpunktverschiebung $\delta = -S'$ verursacht, wie dies *Maxwell* klipp und klar ausspricht, so erzeugt $\Delta s = \varepsilon t s$ die Verschiebung $\delta = -S' \varepsilon t s$. Was hätte wohl *Maxwell* mit der Gleichung (I) anfangen sollen, wenn er für Δs nur die von der Spannkraft S' erzeugte Längenänderung $\Delta s = S' \rho$ hätte einsetzen dürfen.

Aus *Maxwells* Entwicklungen geht vielmehr deutlich hervor, daß er die δ und Δs als *virtuelle Verrückungen veruertet*; er wendet Gleichung (II) auf Belastungs- und Verschiebungszustände an, *die voneinander ganz unabhängig sind*, genau so, wie dies — 10 Jahre später — *Mohr* getan hat.*)

Im Jahre 1884 veröffentlichte *Krohn* eine Herleitung des *Maxwellschen* Satzes von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen ($\delta_{mn} = \delta_{nm}$) und zeigte seine Anwendung auf die Ermittlung der Einflußlinie für den Horizontalschub eines Zweigelenkbogens**), und 1885 gab der Verfasser die allgemeine Deutung der Einflußlinien der Werte $\sum S_a S_a \rho$, $\sum S_a S_b \rho$, . . . als Biegungslinien, ohne hierzu den Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen zu benutzen und ohne hinsichtlich der Größen X einschränkende Voraussetzungen zu machen.***) Sodann stellte der Verfasser 1886 †) die allgemeinen Elastizitätsgleichungen

$$L_a + \delta_a - \delta_{at} = \sum P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} - X_c \delta_{ac} \dots$$

auf, deren Gültigkeit nicht auf das Fachwerk beschränkt ist, und zeigte deren Anwendung zur Berechnung verschiedener Tragwerke, die aus geraden und krummen, auf Biegung beanspruchten Stäben bestehen.

Neben den *Maxwellschen* Sätzen bilden die Sätze von *Castigliano* die Grundpfeiler, auf denen sich die gegenwärtige Theorie der statisch unbestimmten Konstruktionen aufgebaut hat. *Castigliano* ist in seinem hervorragenden Werke „Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques“, Turin 1879, sogar einen wesentlichen Schritt weiter gegangen als *Maxwell*, insofern er seine Untersuchungen nicht auf die verhältnismäßig einfache Theorie des Fachwerks beschränkte, sondern auch die auf Biegung und Abscherung beanspruchten Tragwerke behandelte. Den Einfluß der Temperaturänderungen hat er ebenfalls bestimmt, sowohl beim Fachwerk als auch bei den biegefesten Trägern. Die Wirkung von Stützenverschiebungen läßt sich bei der Anwendung des *Castiglianoschen* Verfahrens mit Hilfe des Satzes von der Abgeleiteten der Formänderungsarbeit, unter Umständen mit Benutzung von Stützstäben leicht untersuchen. ††)

Den aus dem Satze von der Abgeleiteten der Formänderungsarbeit folgenden Satz von der kleinsten Formänderungsarbeit gab bereits früher *Menabrea* in der

*) In seinen vor kurzem erschienenen „Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik“ (1906) wiederholt *Mohr* seinen oben wiedergegebenen Ausspruch über das *Clapeyronsche* Theorem und bezeichnet des Verfassers gegenteilige Behauptung als falsch und irreführend. Verfasser ist dieser und anderen Stellen der *Mohrschen* „Abhandlungen“ bereits in einer Beilage zu seinem Buche „Erddruck auf Stützmauern“ entgegengetreten u. a. auch mit der oben wiederholten wörtlichen Wiedergabe der wichtigsten Teile der *Maxwellschen* Arbeit.

**) *Krohn*, *Der Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen* und Anwendung desselben zur Berechnung statisch unbestimmter Fachwerkträger. Zeitschrift des Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 1884. Seite 269.

***) *Müller-Breslau*, *Beitrag zur Theorie des Fachwerks*, dieselbe Zeitschrift 1885.

†) *Müller-Breslau*, *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen*. Dritte Auflage 1904.

††) *Mehrtens* erklärt im III. Bande seiner „Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen“ 1905, S. 435: man könne mit Hilfe der Verfahren von *Maxwell* und

Abhandlung: Nouveau principe sur la distribution des tensions dans les systèmes élastiques, Comptes rendus 1858, I. S. 1056.)*

Den Zusammenhang zwischen den Verfahren von *Maxwell* und *Castigliano* zeigte der Verfasser, indem er die *Maxwellsche* Grundgleichung $\delta = -\Sigma S'\Delta s$ auf einen beliebig gestalteten elastischen Körper anwendete und aus der so erhaltenen Gleichung

$$\delta = \int (\sigma_x' \varepsilon_x + \sigma_y' \varepsilon_y + \sigma_z' \varepsilon_z + \tau_x' \gamma_x + \tau_y' \gamma_y + \tau_z' \gamma_z) dV$$

den Satz $\delta = \frac{\delta A_i}{\delta P}$ ableitete.**)

Außer den in der vorstehenden Darstellung genannten Schriften führen wir noch an:

1. Fränkel, *Das Prinzip der kleinsten Arbeit der inneren Kräfte elastischer Systeme und seine Anwendung auf die Lösung baustatischer Aufgaben* (Zeitschrift des Hannov. Arch.- u. Ing.-Vereins 1882). Es wird der Satz von der kleinsten Formänderungsarbeit zuerst für das Fachwerk, dann aber auch für den isotropen festen Körper bewiesen.
2. Castigliano, *Intorno ad una proprietà dei sistemi elastici*, Atti della Academia delle Scienze di Torino, Band 17 (1882) Seite 705; enthält die erste allgemeine (d. h. für den beliebig geformten isotropen elastischen Körper gültige) Entwicklung des *Maxwellschen* Satzes, sowie einen Bericht über das auf Seite 34 und 48 unseres Buches abgeleitete Gesetz von *Betti*. Letzteres schließt den *Maxwellschen* Satz als besonderen Fall ein und wird von *Betti* in der Form gegeben:

$$\begin{aligned} & \int_S \rho (Xu' + Yv' + Zw') dS + \int_s (Lu' + Mv' + Nw') ds \\ &= \int_S \rho (X'u + Y'v + Z'w) dS + \int_s (L'u + M'v + N'w) ds. \end{aligned}$$

Dabei bedeuten: $\rho X dS$, $\rho Y dS$, $\rho Z dS$ die an einem Körperteilchen $dS = dx dy dz$ angreifenden, den Koordinatenachsen x , y , z parallelen Massenkkräfte ($\rho =$ Dichtigkeit an der Stelle xyz), ferner $L ds$, $M ds$, $N ds$ die auf ein Oberflächenteilchen ds wirkenden ebenfalls den Koordinatenachsen x , y , z parallelen äußeren Kräfte, und u , v , w die von allen diesen Kräften herrührenden Verschiebungen eines Punktes (xyz) im Sinne der x , y , z , während u' , v' , w' durch die Kräfte $\rho X' dS$, $\rho Y' dS$, $\rho Z' dS$, $L' ds$, $M' ds$, $N' ds$ erzeugt werden.

Castigliano die Einwirkungen der Temperatur und der Stützlage nicht angeben, und es sei daher des Verfassers Behauptung, die Sätze von *Maxwell* und *Castigliano* bilden die Grundpfeiler der gegenwärtigen Theorie der statisch unbestimmten Konstruktionen, *unwahr*. Wer sich von der oberflächlichen Urteilsweise des Herrn *Mehrtens* überzeugen will, schlage das 10. Kapitel des ersten Teiles des *Castigliano*-schen Werkes nach. Die Überschrift von Nr. 6 lautet: *Lehrsatz über den Einfluß von Temperaturänderungen*. Verfasser verweist noch auf die Beilage zu seinem Buche „*Erddruck auf Stützmauern*“; dort hat er sich etwas eingehender mit Herrn *Mehrtens* beschäftigt. Auch ein Hinweis auf den Schluß des § 18 des vorliegenden Buches dürfte hier am Platze sein.

*) Man sehe auch *Comptes rendus* 1884. Seite 174.

**) Müller-Breslau, *Der Satz von der Abgeleiteten der ideellen Formänderungsarbeit*. Zeitschrift des Arch.- u. Ing.-Vereins zu Hannover 1884. Seite 211.

3. Swain, *On the application of the principle of virtual velocities to the determination of the deflection and stresses of frames.* Journal of the Franklin Institute, 1883, Febr. bis April. Seite 102, 194, 250.
4. Melan, *Über den Einfluß der Wärme auf elastische Systeme.* Wochenschrift des österreich. Arch.- u. Ing.-Vereins 1883. Seite 183 u. 202.
5. Melan, *Beitrag zur Berechnung statisch unbestimmter Stabsysteme.* Zeitschrift des österreich. Arch.- u. Ing.-Vereins 1884. Seite 100.
6. Weyrauch, *Arbeitsbedingungen für statisch unbestimmte Systeme.* Wochenblatt für Arch. u. Ing. 1884. Seite 200.
7. Müller-Breslau, *Bedingungsgleichungen für statisch unbestimmte Körper.* Wochenblatt für Arch. u. Ing. 1884.
8. Weyrauch, *Theorie elastischer Körper.* Leipzig 1884.
9. Forchheimer, *Die Gegenseitigkeit der Verschiebungen.* Zeitschrift des österreich. Ing.- u. Arch.-Vereins 1886; gibt u. a. eine sehr übersichtliche, auf das Clapeyronsche Gesetz sich stützende und auf Seite 32 dieses Buches wieder-gegebene Ableitung des Maxwellschen Satzes.
10. Land, *Die Gegenseitigkeit elastischer Formänderungen* u. s. w. Wochenblatt für Baukunde 1887. Seite 14.

ERSTE ABTEILUNG.

Formänderung ebener Fachwerke. — Untersuchung der ebenen,
statisch unbestimmten Fachwerke.

I. Abschnitt.

Bestimmung der Formveränderungen ebener Fachwerke, mit Anwendungen auf die Untersuchung statisch unbestimmter Träger.

§ 1.

Verschiebungspläne nach dem Verfahren von Williot.

31. — Ein statisch bestimmtes ebenes Fachwerk sei durch gegebene Lasten beansprucht und gegebenen Temperaturänderungen ausgesetzt. Die in den Stäben hervorgerufenen Spannkkräfte S , welche (nach Seite 6) von den Temperaturänderungen unabhängig sind, seien mit Hilfe der im ersten Bande unseres Buches entwickelten Verfahren gefunden, auch seien die Änderungen Δs sämtlicher Stablängen s mittels der Gleichung

$$\Delta s = \frac{Ss}{EF} + \varepsilon ts \text{ (vergl. S. 2)}$$

berechnet. Gesucht seien die Verschiebungen der Knotenpunkte. — So lautet die Aufgabe, deren geometrische Lösung das Ziel unserer nächsten Untersuchungen ist.

Die Knotenpunkte werden wir mit kleinen Buchstaben, welche die Stelle von Ordnungsziffern vertreten, bezeichnen, die Stäbe hingegen mit arabischen Ziffern. Die Längen der Stäbe 1, 2, ... seien = s_1, s_2, \dots ; für ihre Änderungen $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots$ mögen, um übersichtliche Figuren zu erhalten, die kürzeren Zeichen $\Delta 1, \Delta 2, \dots$ eingeführt werden.

Wir beginnen mit der Behandlung des einfachsten und wichtigsten, fast alle Anwendungen umfassenden Falles, nämlich mit der Untersuchung eines Fachwerks, welches man in der Weise erzeugen kann, daß man zu einem Stabdreieck abc (Fig. 33) zwei neue Stäbe füt,

die in einem neuen Knoten d miteinander verbunden sind, hierauf an zwei beliebige Knoten dieses Stabgebildes wieder zwei neue Stäbe mit einem neuen Knoten e anschließt u. s. f. Die Bestimmung der durch *gegebene* Änderungen der Stablängen hervorgerufenen Verschiebungen der Knotenpunkte eines derartigen Fachwerks stützt sich auf die Lösung der folgenden Aufgabe.

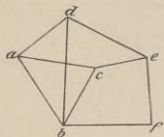


Fig. 33.

32. Erste Hauptaufgabe. Der Knotenpunkt c ist mit den Knoten a und b durch zwei Stäbe 1 und 2 verbunden, deren Längen s_1 und s_2

sich um die gegebenen Strecken $\Delta 1$ und $\Delta 2$ ändern, während sich die Punkte a und b in die neuen Lagen a' und b' bewegen. Gesucht ist die Verschiebung cc' des Punktes c (der mit a und b nicht in derselben Geraden liegen darf). Fig. 34a.

Um die neue Lage von c durch Zeichnung zu bestimmen, löse man bei c die Verbindung beider Stäbe, verschiebe den Stab 1 parallel

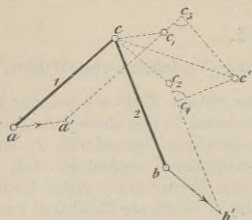


Fig. 34a.

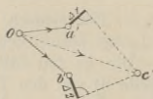


Fig. 34b.

mit sich selbst in die Lage $a'e_1$ und den Stab 2 parallel mit sich selbst in die Lage $b'e_2$. Hierauf ändere man die Längen der Stäbe in der vorgeschriebenen Weise. Wird z. B. der Stab 1 gedehnt, der Stab 2 verkürzt, so verlängere man $a'e_1$ um $e_1e_3 = \Delta 1$ und bringe von $b'e_2$ die Strecke $e_2e_4 = \Delta 2$ in Abzug. Nun schlage man mit den neuen Stablängen $a'e_3$ und $b'e_4$ als Halbmesser Kreisbögen, deren Mittelpunkte a' und b' sind. Der Schnittpunkt c' jener Bögen gibt die gesuchte neue Lage des Punktes c an. In dem hier vorausgesetzten Falle verschwindend kleiner Verschiebungen dürfen die Kreisbögen e_3c' und e_4c' durch die auf den Geraden $a'e_3$ und $b'e_4$ errichteten Lote ersetzt werden.

Es empfiehlt sich nun, die Verschiebung cc' in einer besonderen Figur und in *gehöriger Vergrößerung* darzustellen. Von einem beliebig

gewählten Punkte O aus (welcher der *Ursprung* oder der *Pol* genannt wird, Fig. 34b) trage man die gegebenen Verschiebungen $Oa' = aa'$ und $Ob' = bb'$ der Punkte a und b nach Größe, Richtung und Sinn auf. An die *Polstrahlen* Oa' und Ob' füge man in a' und b' die den Stäben 1 und 2 parallelen Längenänderungen $\Delta 1$ und $\Delta 2$ und errichte in den Endpunkten der letzteren Lote, deren Schnittpunkt c' dann die verlangte Verschiebung des Punktes c bestimmt; dieselbe wird nach Größe, Richtung und Sinn durch den Polstrahl Oc' dargestellt.

Besonders zu achten ist auf den Sinn, in welchem die Längenänderungen $\Delta 1$ und $\Delta 2$ anzutragen sind. Man merke folgendes:

Ist der Knoten c mit a durch einen Stab 1 verbunden, welcher gedehnt wird, so verschiebt sich c gegen a im Sinne ac , und es muß deshalb $\Delta 1$ an a' im Sinne ac gefügt werden.

Ist der Knoten c mit b durch einen Stab 2 verbunden, welcher verkürzt wird, so verschiebt sich c gegen b im Sinne cb , und es muß deshalb $\Delta 2$ an b' im Sinne cb angetragen werden.

Durch wiederholte Lösung der eben behandelten Aufgabe ist man imstande, die Verschiebungen der Knotenpunkte einer gegliederten Scheibe von der in Nr. 31 beschriebenen Art für den Fall zu bestimmen, daß die Richtungslinie eines Stabes (der im allgemeinen einem der beiden Dreiecke abc und abd , Fig. 33, angehören muß) ungeändert bleibt und die Verschiebung eines Punktes der Mittellinie dieses Stabes

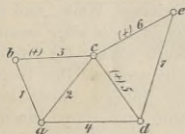


Fig. 35a.

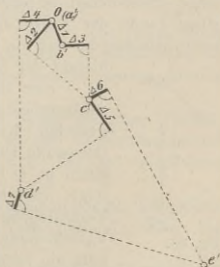


Fig. 35b.

gleich Null ist. Als Beispiel wählen wir das in der Figur 35a dargestellte Fachwerk und setzen voraus, daß der Punkt a und die Richtung des Stabes 1 festliegen. Die in der Figur mit dem Zeichen $(+)$ versehenen Stäbe 3, 5, 6 mögen Dehnungen, alle übrigen aber Verkürzungen erleiden.

Punkt O in Fig. 35b ist der beliebig angenommene Pol. Die Verschiebung von a ist gleich Null, mithin fällt der Punkt a' mit O zusammen. Die Verschiebung Ob' des Punktes b ist gleich der Verkürzung $\Delta 1$ des Stabes 1. Der Knoten c wird mit a durch den Stab 2 und mit b durch den Stab 3 verbunden, er nähert sich a um $\Delta 2$ und entfernt sich von b um $\Delta 3$. Trägt man also an a' im Sinne ca die Strecke $\Delta 2 \parallel 2$ an und an b' im Sinne bc die Strecke $\Delta 3 \parallel 3$ und errichtet auf diesen Strecken in ihren Endpunkten Lote, so bestimmt deren Schnittpunkt die Verschiebung Oc' des Punktes c . Der Knoten d ist mit a und b durch 4 bzw. 5 verbunden, seine Verschiebung Od' erhält man, wenn man $\Delta 4 \parallel 4$ an a' im Sinne da anträgt, ferner $\Delta 5 \parallel 5$ an c' im Sinne cd und auf $\Delta 4$ und $\Delta 5$ in deren Endpunkten Lote errichtet, deren Schnittpunkt der Punkt d' ist. Auf dieselbe Weise wird Punkt e' bestimmt.

Die Figur 35b, deren Polstrahlen Ob' , Oc' , nach Größe, Richtung und Sinn die Verschiebungen der Knoten b , c , darstellen, nennen wir den *Verschiebungsplan* des Fachwerks $abcde$ oder auch — nach dem Erfinder des vorstehenden Verfahrens — einen *Williotschen Verschiebungsplan*.

33. Zusammensetzung der Verschiebungen infolge von zwei getrennt betrachteten, verschwindend kleinen Bewegungen. — Bewegung einer starren Scheibe. Will man die Formveränderung einer irgendwie gestützten, gegliederten Scheibe, die aber äußerlich statisch bestimmt sein möge, untersuchen, so nehme man zuerst die Richtung eines Stabes und einen Punkt der Achse dieses Stabes als festliegend an, zeichne den Verschiebungsplan auf die vorhin beschriebene Weise, und erteile

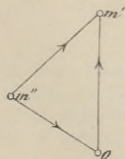


Fig. 36.

hierauf der Scheibe — *die jetzt als starr anzusehen ist* — eine Bewegung, durch welche die wirklichen Auflagerbedingungen erfüllt werden. Den Weg, den irgendein Knotenpunkt m infolge dieser zweiten Bewegung zurücklegt, stelle man durch einen Polstrahl $m''O$ (Fig. 36) dar, der *nach* dem Pole hinzeigt, weil hierdurch die Zusammensetzung dieser Verschiebung mit der zuerst gefundenen elastischen Verschiebung Om' erleichtert wird. Denn es gibt nun die Strecke $m''m'$ nach Größe, Richtung und

Sinn den Weg des Knotens m für den Fall an, daß die beiden getrennt betrachteten Bewegungen gleichzeitig erfolgen.

Die Verschiebungen der Punkte einer starren Scheibe erhält man unmittelbar durch Anwendung des Satzes, daß sich jede verschwindend kleine Bewegung einer starren Figur auf eine Drehbewegung um einen festen Punkt \mathfrak{P} zurückführen läßt. Stellen nämlich die Polstrahlen

$a''O, b''O, c''O, \dots$ (Fig. 37) nach Größe, Richtung und Sinn die Verschiebungen der Knoten a, b, c, \dots dar, so muß sein

$$(I) \quad a''O \perp a\mathfrak{P}; \quad b''O \perp b\mathfrak{P}; \quad c''O \perp c\mathfrak{P}; \quad \dots;$$

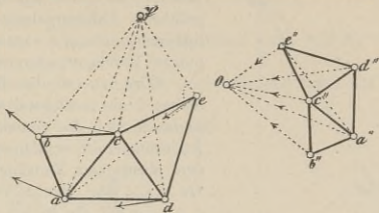


Fig. 37.

denn die Richtung der Verschiebung eines jeden Punktes einer starren Figur ist rechtwinklig zu den Geraden, welche diesen Punkt mit dem augenblicklichen Drehpunkte verbindet, und weiter ergibt sich

$$(II) \quad \overline{a''O} : \overline{b''O} : \overline{c''O} : \dots = \overline{a\mathfrak{P}} : \overline{b\mathfrak{P}} : \overline{c\mathfrak{P}} : \dots;$$

weil sich die Verschiebungen der Punkte a, b, c, \dots zu einander verhalten wie die entsprechenden Geschwindigkeiten und die letzteren wie die Entfernungen der Punkte vom Drehpol \mathfrak{P} .

Aus den Beziehungen (I) und (II) folgt aber:

1. Verbindet man die Punkte a'', b'', \dots des Verschiebungsplanes so durch gerade Linien, daß jedem Fachwerkstabe ik eine Gerade $i''k''$ entspricht, so bilden diese Geraden eine Figur, welche der sich bewegendenden starren Scheibe ähnlich ist.

2. Die Verbindungsgerade zweier beliebiger Punkte m, n der Scheibe ist rechtwinklig zu der Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte m'', n'' . (Es ist beispielsweise in Fig. 37: $a''b'' \perp ab$; $a''e'' \perp ae$.)

Hat man also mit Hilfe der Auflagerbedingungen zwei Punkte der Figur $a''b''c'' \dots$ bestimmt, so ist man imstande, diese Figur zu zeichnen.

Es sei noch hervorgehoben, daß sich die vorstehenden Ergebnisse auch aus den in Nr. 32 entwickelten Gesetzen ableiten lassen. Werden beispielsweise die Änderungen $\Delta 5, \Delta 6, \Delta 7$ der Seiten des Stabdreiecks cde in Fig. 35a gleich Null angenommen, so entspricht diesem Dreieck in der Fig. 35b ein ähnliches Dreieck $e'd'e'$, dessen Seiten rechtwinklig zu den entsprechenden Seiten des Dreiecks cde sind. Auch aus Fig. 34 folgt ohne weiteres, daß der Verbindungsgeraden zweier starr miteinander verbundenen Punkte a und c (wegen $\Delta 1 = 0$) im Verschiebungsplane eine zu ac rechtwinklige Gerade $a'e'$ entspricht.

34. Fachwerkträger mit einem festen und einem beweglichen Auflagergelenk. Gesucht ist der Verschiebungsplan des in der Fig. 38a

dargestellten Trägers, der bei a ein festes und bei g ein auf schräger Bahn geführtes Auflagergelenk besitzt. Die mit dem Zeichen (+) versehenen Stäbe mögen Verlängerungen erleiden.

Wird zuerst die Richtung des Stabes 1 als festliegend vorausgesetzt, so lassen sich die von den gegebenen Änderungen der Stablängen herrührenden elastischen Verschiebungen Ob' , Oc' , \dots Og' der Knotenpunkte b , c , \dots g auf die in Nr. 32 beschriebene Weise bestimmen. Dieselben müssen noch mit denjenigen Verschiebungen $b''O$, $c''O$, \dots $g''O$ zusammengesetzt werden, welche die Knotenpunkte erfahren, wenn das starre Fachwerk so um a gedreht wird, daß sich für den auf einer festen Geraden geführten Punkt g eine Gesamtverschiebung $g''g'$ ergibt, welche zu dieser Geraden parallel ist. Die von den Punkten a'' , b'' , c'' , \dots g'' gebildete, der Figur $abcdefg$ ähnliche Figur $a''b''c''d''e''f''g''$ ist demnach durch die Bedingungen bestimmt, daß a'' mit a' zusammenfallen muß, weil a ruht, und daß ferner $a''g'' \perp ag$ und $g''g'$ parallel zur Bahn des Auflagergelenkes g sein muß. Die (in der Fig. nicht ausgezogenen) Strecken $b''b''$, $c''c''$, \dots $g''g''$ stellen nach Größe, Rich-

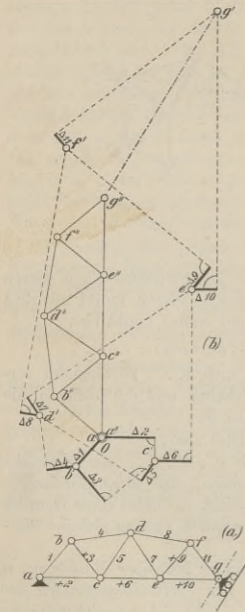


Fig. 38.

tung und Sinn die gesuchten Verschiebungen der Knotenpunkte b , c , \dots g dar.

Meistens ist es zweckmäßig, zuerst einen Knotenpunkt in der Nähe der Trägermitte und einen von diesem Punkte ausgehenden Stab festzuhalten, weil sich nach dem in Fig. 38 befolgten Verfahren für die vom festen Auflager entfernter liegenden Knotenpunkte zuweilen sehr große elastische Verschiebungen ergeben. Als zweites Beispiel ist deshalb in Fig. 39 der Verschiebungsplan eines einfachen Fachwerkbalkens vorgeführt worden. Zuerst wurde der Knoten a und die Richtung des

Stabes 1 festgehalten, und die Lage der Punkte b', c', \dots, h' ermittelt, wobei, der Deutlichkeit der Figur wegen, die Zeichen $\Delta 1, \Delta 2, \dots$ durch die bloßen Ziffern 1, 2, \dots ersetzt worden sind. Hierauf wurde die der Figur $hgadecbf$ ähnliche Figur $h''g''a''d''e''c''b''f''$ mit Hilfe der Bedingungen bestimmt, daß

- erstens h'' mit h' zusammenfallen muß, weil die Verschiebung von h gleich Null ist,
- zweitens $e''e'$ wagerecht sein muß, weil sich e auf einer Wagerechten bewegt,
- drittens $h''e'' \perp he$ sein muß.

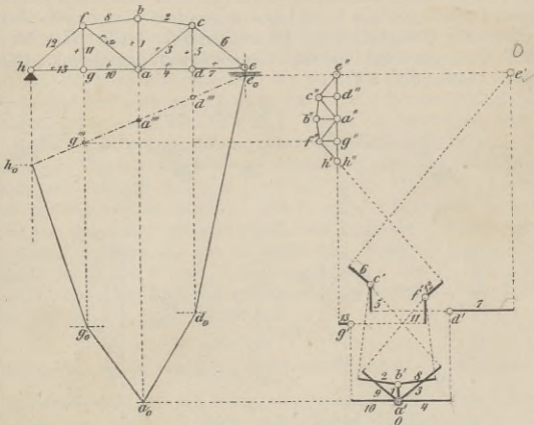


Fig. 39.

Damit sind die Verschiebungen $b''b', c''c', \dots$ der Knotenpunkte b, c, \dots gegeben.

Projiziert man die Punkte h', g', a', d', e' in h_0, g_0, a_0, d_0, e_0 auf die Senkrechten durch die entsprechenden Knotenpunkte h, g, a, d, e und verbindet h_0 und e_0 durch eine Gerade, welche jene Senkrechten in g''', a''', d''' schneiden mögen, so geben die Strecken $g'''g_0, a'''a_0, d'''d_0$ an, um wieviel sich die Knotenpunkte g, a, d in senkrechter Richtung verschieben. Man nennt diese Projektionen der Gesamtverschiebungen auch *Durchbiegungen* und beispielsweise $g'''g_0$ die *senkrechte Durchbiegung des Fachwerks an der Stelle g*.

Das Polygon $h_0 g_0 a_0 d_0 e_0$ heißt *Biegungspolygon* oder *Biegungslinie* der unteren Gurtung und die Gerade $h_0 e_0$ die *Schlußlinie*. Wird nur das Polygon $h_0 g_0 a_0 d_0 e_0$ verlangt (was häufig der Fall ist), so braucht in dem hier vorliegenden wichtigen Falle eines Trägers mit wagerechter Auflagerbahn die Figur $h''g''a''d''e''c''b''f''$ nicht gezeichnet zu werden.

35. Gerberscher Fachwerkbalken. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden. 1. Die Koppelträger cd und gh werden gelenkartig mit den gestützten Teilen verbunden. 2. Jeder Koppelträger wird (wie ein einfacher Balken) an dem einen Ende mit einem festen, an dem anderen mit einem beweglichen Auflagergelenke versehen. Im ersten Falle darf auf den Pfeilern nur *ein* festes Lager angeordnet werden; alle übrigen Lager müssen beweglich sein. Im zweiten Falle erhält jeder der gestützten Teile ein festes und ein bewegliches Auflagergelenk. (Vergl. Band I, Abschnitt X, § 41.)

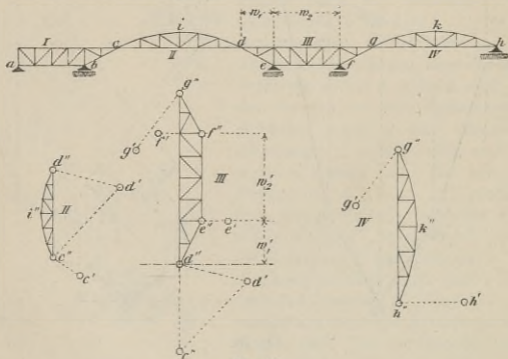


Fig. 40.

Ein Beispiel für die erste Anordnung zeigt die Fig. 40. Die Koppelträger II und IV sind mit den gestützten Teilen I und III durch die Gelenke c, d, g verbunden. Das Auflagergelenk a ist fest, während sich die Auflagergelenke b, e, f, h auf wagerechten Bahnen bewegen können. Die Darstellung der durch gegebene Änderungen der Stablängen bedingten Verschiebungen der Knotenpunkte erfolgt zweckmäßig in vier getrennten Figuren, entsprechend den vier Scheiben I, II, III, IV. Zuerst nehme man von jeder Scheibe einen beliebigen Punkt und die Richtung eines durch diesen Punkt gehenden Stabes

als festliegend an, bestimme die elastischen Verschiebungen der Knotenpunkte auf die in Nr. 32 angegebene Weise und erteile hierauf den nunmehr als starre Gebilde anzusehenden Scheiben Bewegungen, durch welche die Auflagerbedingungen erfüllt werden und der Zusammenhang der Scheiben in den Punkten e, d, g wiederhergestellt wird. Der erste Teil dieser Untersuchung — die Bestimmung des irgendeinem Knoten m entsprechenden Punktes m' — ist bereits durch mehrere Beispiele erläutert worden, und es sind deshalb in die Fig. 40 nur die wichtigsten dieser Punkte eingetragen worden, nämlich:

die Punkte e', d' des Verschiebungsplanes für die Scheibe *II*,
 " " d', e', f', g' " " " " *III*,
 " " g', h' " " " " *IV*.

Der Verschiebungsplan für die Scheibe *I* wurde überhaupt fortgelassen, da dieses Trägerstück ein festes und ein bewegliches Auflagergelenk besitzt, mithin ganz nach Nr. 34 behandelt werden kann. Es bleibt jetzt nur noch zu erläutern, wie die den Figuren $eid, defg, gkh$ ähnlichen Figuren $e''i''d'', d''e''f''g'', g''k''h''$ zu bestimmen sind.

Der Punkt e'' des Planes *II* ist durch die dem Plane *I* zu entnehmende Verschiebung $e''e'$ des Gelenkes e gegeben; von d'' ist vorläufig nur bekannt, daß $e''d'' \perp cd$ sein muß. Im Plane *III* liegt e'' auf der Wagerechten durch e' , und f'' auf der Wagerechten durch f' , weil sich die Auflagergelenke e und f auf wagerechten Bahnen bewegen. Bedeuten w_1' und w_2' die in senkrechter Richtung gemessenen Abstände der Punkte d'' und e'' , beziehungsweise e'' und f'' , ferner w_1, w_2 die in wagerechter Richtung gemessenen Entfernungen der entsprechenden Punkte d, e, f , so verhält sich

$$w_1' : w_2' = w_1 : w_2$$

und mittels dieser Beziehung läßt sich $w_1' = w_2' \frac{w_1}{w_2}$ bestimmen und damit auch die Lage der in Fig. 40 strichpunktirten Wagerechten, auf welcher der Punkt d'' liegen muß. Diesen Punkt selbst aber findet man, indem man $e''d'$ aus dem Plane *II* in den Plan *III* überträgt und $e''d'' \perp cd$ zieht. Ist noch mit Hilfe der Geraden $d''e'' \perp de$ der Punkt e'' ermittelt worden, so sind zwei Punkte der Figur $d''e''f''g''$ bekannt, und damit ist diese Figur vollständig bestimmt. Nun überträgt man $d'd''$ aus *III* in den Plan *II* und zeichnet die Figur $e''i''d''$, macht hierauf in *IV* die Strecke $g'g''$ gleich und parallel der ebenso bezeichneten Strecke des Planes *III*, zieht $g''h'' \perp gh$ bis zur Wagerechten durch h' und erhält auf diese Weise zwei Punkte der nunmehr bestimmten Figur $g''k''h''$.

Ein Beispiel für die zweite Anordnung ist in der Fig. 41 dargestellt worden. Bei a und g wird der Träger durch feste, bei b und f durch bewegliche Auflagergelenke (letztere mit wagerechten Bahnen)

unterstützt. Der Koppelträger *II* ist bei *c* durch ein Gelenk mit *I* verbunden und erhält bei *d* ein wagerechtes Gleitlager. Die Verschiebungspläne für die Scheiben *I* und *III* werden nach Nr. 34 gezeichnet. Von der Scheibe *II* nehme man zuerst wieder einen beliebigen Punkt und die Richtung eines durch diesen Punkt gehenden Stabes als festliegend an, und erteile hierauf dieser Scheibe eine Bewegung, durch

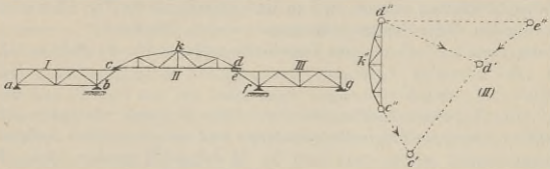


Fig. 41.

welche bei *c* der Zusammenhang der Scheiben *I* und *II* wiederhergestellt und der Bedingung genügt wird, daß die senkrechten Projektionen der Verschiebungen der Punkte *d* und *e* gleich groß werden. Hiernach findet man die der Figur *ckd* ähnliche Figur *c''k''d''* auf die folgende Weise. Man macht die Strecke *c''c'* nach Größe, Richtung und Sinn gleich dem durch den Verschiebungsplan für die Scheibe *I* gegebenen Wege des Knotens *c* und die Strecke *e''d'* gleich der aus dem Plane für die Scheibe *III* zu entnehmenden Verschiebung des Punktes *e*. Hierauf zieht man *c''d''* \perp *cd* bis zur Wagerechten durch *e''* und erhält in der Strecke *d''d'* nach Größe, Richtung und Sinn die Verschiebung von *d*. Die Figur *c''k''d''* ist durch die beiden Punkte *c''* und *d''* vollständig bestimmt.

36. Bogenträger mit drei Gelenken. Die beiden gegliederten Scheiben *I* und *II*, welche bei *a* und *b* feste Auflagergelenke besitzen und bei *c* durch ein Gelenk miteinander verbunden sind, werden zuerst getrennt untersucht, wobei von jeder Scheibe ein beliebiger Punkt und die Richtung eines durch diesen Punkt gehenden Stabes als festliegend angesehen werden. Hierauf werden den als starr anzusehenden Scheiben Bewegungen erteilt, welche die Auflagerbedingungen befriedigen und den Zusammenhang der Scheiben bei *c* wiederherstellen. Fig. 42 gibt nur die Lage der den Gelenken *a*, *b*, *c* entsprechenden Punkte *a'*, *b'*, *c'* der beiden Verschiebungspläne *I* und *II* an; die den übrigen Knoten *m* entsprechenden Punkte *m'* wurden fortgelassen. Zur Bestimmung der den Figuren *acd* und *bee* ähnlichen Figuren *a''c''d''* und *b''c''e''* stehen die folgenden Bedingungen zur Verfügung:

1. Die Verschiebung $a''a'$ von a ist gleich Null; mithin muß a'' mit a' zusammenfallen.
2. Aus gleichem Grunde muß b'' mit b' zusammenfallen.
3. Im Plane I muß sein: $a''c'' \perp ac$ und im Plane II : $b''c'' \perp bc$.
4. Die Pläne I und II müssen für die Verschiebung von c denselben Wert $c''c'$ liefern.

Man lege nun im Plane I durch a' eine zu ac rechtwinklige Gerade, ziehe durch c' zu ac eine Parallele, welche jene Gerade in k schneidet und bestimme auf diese Weise die Projektion kc' der Verschiebung $c''c'$ auf die Richtung ac . Diese Projektion übertrage man in den Plan II , errichte hier in k auf $c'k$ ein Lot und bestimme dessen Schnittpunkt c'' mit der durch b'' rechtwinklig zu bc gezogenen Geraden $b''c''$. Jetzt ist die Figur $b''c''e''$ gegeben, da zwei Punkte derselben bekannt sind. Überträgt man noch kc'' aus dem Plane II in den Plan I , so kennt man auch zwei Punkte (a'' und c'') der Figur $a''c''d''$, kann also auch diese Figur zeichnen. Auch läßt sich im Plane II die Projektion ie' von $c''c'$ auf die Richtung bc finden und in den Plan I übertragen, worauf dann c'' mittels $c''i \perp c'i$ bestimmt werden kann.

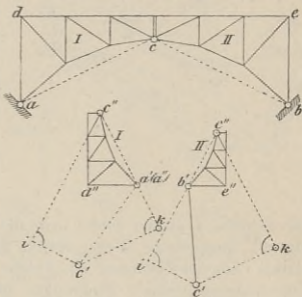


Fig. 42.

37. — Dem in Nr. 31 beschriebenen und als Fachwerk einfachster Art bezeichneten Stabgebilde läßt sich ein sehr wichtiges Scheibengebilde von ähnlicher Entstehungsweise an die Seite stellen. Man erhält dasselbe, indem man drei gegliederte Scheiben I, II, III durch drei Gelenke g_1, g_2, g_3 zu einem *Scheibendreieck* vereinigt (Fig. 43), an dieses zwei weitere Scheiben IV und V , die in einem Gelenke g_6 aneinanderhängen, mittels zweier Gelenke g_4 und g_5 anschließt, in derselben Weise zwei neue Scheiben VI und VII hinzufügt und so fortfährt. Sind sämtliche Scheiben Fachwerke von der in Nr. 31 angegebenen Art, so ist es möglich, den Verschiebungsplan des Gebildes durch wiederholte Lösung der in Nr. 32 behandelten Aufgabe zunächst unter der Voraussetzung zu erhalten, daß nur die Richtung eines Stabes (der im allgemeinen dem Scheibendreiecke $III III$ angehören muß) und ein Punkt in der Achse dieses Stabes festliegen, und hierauf

können dann mit Hilfe von Nr. 33 auch solche Fälle erledigt werden, in denen das Gebilde in anderer, aber ebenfalls statisch bestimmter Weise gestützt wird.

Soll z. B. das in Fig. 43 dargestellte Fachwerk untersucht werden, und gehört der Stab, dessen Richtungslinie zunächst festgehalten wird,

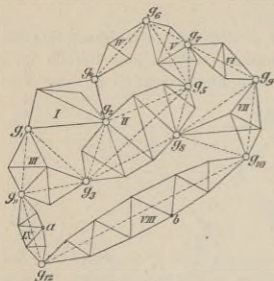


Fig. 43.

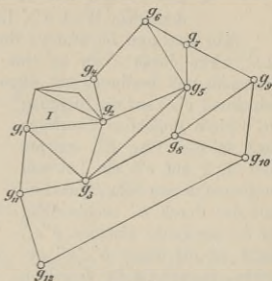


Fig. 44.

der Scheibe *I* an, so denke man die übrigen Scheiben auf die in der Fig. 44 angegebene Weise durch Stäbe ersetzt und schreibe diesen Stäben Längenänderungen zu, welche mit den wirklichen gegenseitigen Verschiebungen ihrer Endpunkte übereinstimmen, so daß z. B. die Längenänderung des gedachten Stabes g_2g_3 gleich der gegenseitigen Verschiebung des der Scheibe *II* angehörenden Punktpaares g_2, g_3 ist. Es liegt jetzt ein Fachwerk von der in Nr. 31 beschriebenen Art vor; man ist imstande, der Reihe nach die Verschiebungen der Gelenke $g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8, g_9, g_{10}, g_{11}, g_{12}$ anzugeben, und hierauf mit Hilfe von Nr. 33 die wirklichen Auflagerbedingungen zu befriedigen. Um den zweiten Teil dieser Aufgabe lösen zu können, müssen die Stützpunkte in passender Weise mit den Gelenken durch Stäbe verbunden gedacht werden. Besitzt z. B. das Scheibengebilde zwei Auflagergelenke *a* und *b* (von denen das eine fest, das andere beweglich sein muß), so sind noch die Stäbe $ag_{11}, ag_{12}, bg_{10}, bg_{12}$ hinzuzufügen.

Der auf dem angegebenen Wege erhaltene Verschiebungsplan soll kurz der *Plan I* heißen; er enthält die den wirklichen Auflagerbedingungen entsprechenden Verschiebungen $m''m'$ sämtlicher Knotenpunkte *m* der Scheibe *I*, die Verschiebungen $g''g'$ sämtlicher Mittelgelenke *g* und die Verschiebung des beweglichen Auflagergelenks.

Um nun die zur Anfertigung des Planes *I* erforderlichen Längenänderungen der gedachten Stäbe zu erhalten, muß im allgemeinen für

jede einzelne Scheibe ein besonderer Verschiebungsplan unter der Voraussetzung gezeichnet werden, daß die Richtung eines Stabes der fraglichen Scheibe und ein Punkt in der Achse dieses Stabes festliegen. Fig. 45 stellt einen Teil des auf diese Weise für die Scheibe *III* erhaltenen Planes (kurz Plan *III* genannt) vor; er dient zur Bestimmung der Änderungen $\Delta(g_1g_3)$, $\Delta(g_3g_{11})$, $\Delta(g_{11}g_1)$ der Entfernungen g_1g_3 , g_3g_{11} , $g_{11}g_1$. Behufs Ermittlung von $\Delta(g_1g_3)$, projiziere man die Polstrahlen Og_1' und Og_3' in $\overline{Og_1}$ und $\overline{Og_3}$ auf eine zur g_1g_3 parallele Gerade 1—3. Es stellt dann $\overline{Og_1}$ die Verschiebung von g_1 in der Richtung g_3g_1 dar, ferner $\overline{Og_3}$ die Verschiebung von g_3 in derselben Richtung und es gibt mithin die Strecke

$$\overline{g_1g_3} = \Delta(g_1g_3)$$

die gegenseitige Verschiebung des Punktpaares g_1, g_3 an; sie hat denselben Sinn wie die Strecke g_1g_3 und bedeutet deshalb eine Verlängerung des gedachten Stabes g_1g_3 . Auf dieselbe Weise wird der Wert $\Delta(g_3g_{11})$ durch Projizieren der Punkte g_3' und g_{11}' auf die zur g_3g_{11} parallele Gerade 3—11 gefunden und $\Delta(g_1g_{11})$ mittels der Projektionen von g_1' und g_{11}' auf die Gerade 1—11. Für

$\Delta(g_1g_{11})$ ergab sich in der Fig. 45 ein positiver Wert, für $\Delta(g_3g_{11})$ hingegen ein negativer, so daß dem gedachten Stabe g_3g_{11} eine Verkürzung zuzuschreiben ist.

Der in Fig. 45 für die Scheibe *III* gezeichnete Einzelplan läßt sich mit Vorteil verwerten, um nach Vollendung des Planes *I* die wirklichen Verschiebungen $r''r'$ sämtlicher Knoten r dieser Scheibe darzustellen. Zu diesem Zwecke übertrage man die im Plane *I* für die Gelenke g_1, g_3, g_{11} gefundenen wirklichen Verschiebungen $g_1''g_1', g_3''g_3', g_{11}''g_{11}'$ in den Plan *III* und zeichne hierauf die der Scheibe *III* ähnliche Figur $g_1''g_3''r''g_{11}''$, welche bereits durch zwei der Punkte g_1'', g_3'', g_{11}'' bestimmt wird, so daß man die Schärfe der Zeichnung leicht prüfen kann. Hat man nämlich $g_1''g_1', g_3''g_3', g_{11}''g_{11}'$ aus Plan *I* in Plan *III* übertragen, so muß bei sorgfältiger Zeichnung sein: $g_1''g_3'' \perp g_1g_3$, $g_3''g_{11}'' \perp g_3g_{11}$ und $g_{11}''g_1'' \perp g_{11}g_1$.

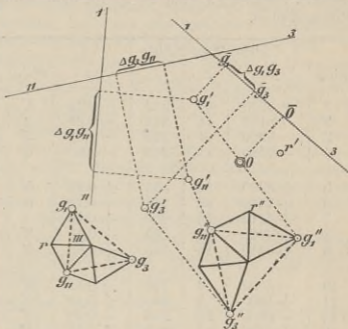


Fig. 45.

Zahlenbeispiel. Zur Erläuterung untersuchen wir den auf Tafel 1 im Maßstabe 1:100 aufgetragenen Dachbinder, und zwar zunächst mit Hilfe des allgemeinen Verfahrens. Auf die im vorliegenden und in vielen anderen Fällen möglichen Vereinfachungen werden wir an geeigneter Stelle hinweisen.

Die von dem Eigengewichte des Dachstuhls und dem Schnee herrührende senkrechte Belastung jedes der mittleren Knotenpunkte betrage 1125^k , jedes Endknotens: $\frac{1}{2} 1125^k$. Der auf jedes Feld der linken Dachhälfte wirkende Winddruck sei $= 700^k$. Die mit Hilfe eines Cremonaschen Kräfteplanes (der hier nicht wiedergegeben worden ist) erhaltenen Spannkkräfte S , sowie die Stablängen s , Querschnitte F (ohne Abzug für Nietlöcher) und Längenänderungen $\Delta s = \frac{Ss}{EF}$ sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt worden. Temperaturänderungen blieben unberücksichtigt. Die Elastizitätsziffer wurde (für Schweißeisen): $E = 1800000^k$ f. d. *qcm* angenommen*). Zur besseren Übersicht wurden die Δs (in Millimetern) auch in das Trägernetz auf Tafel 1 eingeschrieben.

Linke Trägerhälfte					Rechte Trägerhälfte				
Stab	S	F	s	Δs	Stab	S	F	s	Δs
1	— 9910	44	212	— 0,27	1'	— 9530	44	212	— 0,26
2	— 9110	44	212	— 0,24	2'	— 8730	44	212	— 0,23
3	— 8320	44	212	— 0,22	3'	— 7940	44	212	— 0,21
4	— 7520	44	212	— 0,20	4'	— 7140	44	212	— 0,19
5	+ 8970	13	245	+ 0,94	5'	+ 6970	13	245	+ 0,73
6	+ 7470	13	245	+ 0,78	6'	+ 6170	13	245	+ 0,65
7	+ 4110	12	254	+ 0,48					
8	+ 4210	12	245	+ 0,48	8'	+ 2820	12	245	+ 0,32
9	+ 5710	12	245	+ 0,65	9'	+ 3620	12	245	+ 0,41
10	— 1500	9	122	— 0,11	10'	— 800	9	122	— 0,06
11	+ 1500	5	245	+ 0,41	11'	+ 800	5	245	+ 0,22
12	— 3000	16	245	— 0,26	12'	— 1600	16	245	— 0,14
13	+ 1500	5	245	+ 0,41	13'	+ 800	5	245	+ 0,22
14	— 1500	9	122	— 0,11	14'	— 800	9	122	— 0,06
	<i>kilogr.</i>	<i>qcm.</i>	<i>cm.</i>	<i>mm.</i>		<i>kilogr.</i>	<i>qcm.</i>	<i>cm.</i>	<i>mm.</i>

Der zu untersuchende Träger besteht aus den beiden gegliederten Scheiben *ach* und *iqh*, welche kurz mit *I* und *II* bezeichnet werden sollen und die mittels des Gelenkes *h* und des Stabes *ai* miteinander verbunden sind.

Zuerst wurde in Fig. 47 der Verschiebungsplan für die Scheibe *I* unter der Voraussetzung aufgetragen, daß der Knoten *a* und die Richtung des Stabes *ab* festliegen. Sämtliche Verschiebungen wurden in zwanzigfacher Vergrößerung gezeichnet. *O* ist der beliebig angenommene Pol. *a'* fällt mit *O* zusammen. Die Verschiebung *Ob'* des Punktes *b* ist gleich der Längenänderung $\Delta 12$ des Stabes 12. Die Punkte *e'*, *d'*, *e'* ferner *f'*, *g'*, *h'* wurden nach dem in Nr. 32 beschriebenen Verfahren bestimmt. Hierauf wurde der (rot ausgezogene) Verschiebungsplan *II* für die Scheibe *II* in Angriff genommen, vorerst für den Fall, daß Punkt *i* und die Richtung des Stabes *ik* festgehalten werden. Nach Ermittlung der Punkte *k'*, *l'*, *m'*, *q'* und *n'*, *p'*, *h'*

*) Bei Berechnung von Formveränderungen empfiehlt es sich im allgemeinen, *E* nicht zu hoch anzunehmen, um den schwierig zu berechnenden Einfluß der Verschwächung durch Niete und das Nachgeben der Verbindungen zu berücksichtigen.

konnte die Änderung $\Delta(hi)$ der Entfernung hi als Projektion der Strecke $h'i'$ auf eine zu hi parallele Gerade angegeben werden und ebenso die Änderung $\Delta(iq)$ und $\Delta(hq)$ der Abstände iq und hq . [Im vorliegenden Falle wäre allerdings hierzu die Aufzeichnung des Planes II nicht nötig gewesen; denn es ist offenbar $\Delta(hi)$ gleich der Summe der Längenänderungen der Stäbe $9'$ und $8'$, d. h. $\Delta(hi) = +0,41 + 0,32 = +0,73^{mm}$ und ebenso findet man ohne weiteres: $\Delta(hq) = \Delta 4' + \Delta 3' + \Delta 2' + \Delta 1' = -0,19 - 0,21 - 0,23 - 0,26 = -0,89^{mm}$ und $\Delta(iq) = \Delta 6' + \Delta 5' = +0,65 + 0,73 = +1,38^{mm}$.]

Jetzt war es möglich, den Plan I zu vollenden. Mit Hilfe von $\Delta(hi)$ und $\Delta 7$ wurde die Lage von i' , ferner mittels $\Delta(hq)$ und $\Delta(iq)$ die Lage von q' gefunden und hierauf den Auflagerbedingungen genügt. Da e festliegt und q auf einer Wagerechten geführt wird, so fällt e'' mit e' zusammen, während q'' der Schnittpunkt der rechtwinklig zu eq gezogenen Geraden $e''q''$ mit der Wagerechten durch q' ist. Durch die Punkte e'' und q'' ist die dem gegebenen Fachwerke ähnliche Figur $e''d''b''g''h''f''a''i''q''$ vollständig bestimmt, und damit sind auch die Verschiebungen sämtlicher Knoten der Scheibe I sowie diejenigen der Punkte i und q gegeben.

Behufs Darstellung der Verschiebungen der Knotenpunkte der Scheibe II wurden die Verschiebungen $q''q'$ und $h''h'$ aus Plan I in II übertragen und auf diese Weise zwei Punkte der Figur $q''m''k''p''h''n''i''l''$ gefunden. Bei sorgfältiger Zeichnung muß $q''h'' \perp qh$ sein, ferner muß die Verschiebung $i''i'$ mit der bereits im Plane I erhaltenen Verschiebung $h''h'$ nach Größe und Richtung übereinstimmen. [Wegen der geraden Gurtung hk hätte man auch im Plane I einen Punkt h' mit Hilfe von $\Delta 12'$ und $\Delta(hk) = -0,19 - 0,21 = -0,40^{mm}$ ermitteln können, hierauf n' mittels $\Delta 13'$ und $\Delta 8'$, p' mittels $\Delta 3'$ und $\Delta 14'$ sodann l' und m' . Plan II kann also bei Untersuchung des vorliegenden Trägers entbehrt werden; er ist aber nötig, sobald h, p, k, m, q oder h, n, i oder i, l, q nicht in einer Geraden liegen.

Vergleichende Messungen zeigen, daß im vorliegenden Falle von allen Knoten des Trägers der Punkt g die größte Verschiebung erfährt. Man findet $\overline{g''g'} = 7,6^{mm}$. Die wagerechte Verschiebung des Punktes q ist: $\overline{q''q'} = 6,5^{mm}$.

Die Figuren 49 bis 52 zeigen weitere Arten von Fachwerken, deren Verschiebungspläne auf dem im vorstehenden Beispiele angegebenen Wege erhalten werden können.

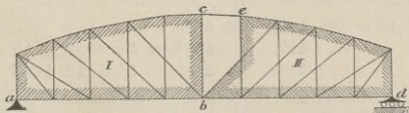


Fig. 49.

Der einfache Fachwerkbalken in Fig. 49 besteht aus den beiden Scheiben abc und bde (deren Ränder durch Schraffierung hervorgehoben wurden) und dem Stabe ce . Die sich schneidenden Diagonalen und Vertikalen sind an den Kreuzungsstellen nicht miteinander verbunden.

Fig. 50 stellt einen versteiften Gelenkbogen (vergl. Band I, Abschnitt XII) dar, welcher in die Scheiben I und II und den Stab ce

zerlegt werden kann, Fig. 51 einen Fachwerkbogen mit drei Gelenken, dessen Kämpfer durch eine Stange verbunden sind.

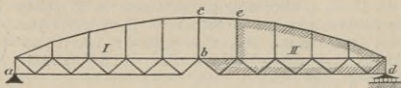


Fig. 50.

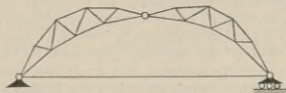


Fig. 51.

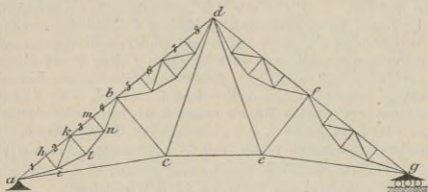


Fig. 52.

Soll die Formveränderung des in Fig. 52 abgebildeten Trägers untersucht werden, so nehme man zunächst den Punkt c und die Richtung des Stabes ce als festliegend an, ermittle e' , sodann:

d' mit Hilfe von $\Delta(dc)$ und $\Delta(de)$

b' " " " $\Delta(bc)$ " $\Delta(bd) = \Delta 5 + \Delta 6 + \Delta 7 + \Delta 8$

a' " " " $\Delta(ac)$ " $\Delta(ab) = \Delta 1 + \Delta 2 + \Delta 3 + \Delta 4$,

und ebenso bestimme man f' und g' . Nun befriedige man die Auflagerbedingungen, übertrage die hierbei gefundenen Verschiebungen $b''b'$, $d''d'$, $f''f'$, $g''g'$ der Punkte b , d , f , g in die nach Nr. 32 für die einzelnen Scheiben angefertigten Pläne und zeichne in diese letzteren schließlich die den Scheiben ab , bd , df , fg ähnlichen Figuren $a''b''$, $b''d''$, $d''f''$, $f''g''$ ein.

38. Fachwerkträger verschiedener Art. Liegt ein Fachwerk vor von anderer als in den vorstehenden Untersuchungen beschriebener Art, so verwandle man dasselbe — am besten durch Änderung der Stützung — zunächst in ein solches, dessen Verschiebungsplan durch

wiederholte Lösung der in Nr. 32 vorgeführten Hauptaufgabe erhalten werden kann, nachdem man vorher nötigenfalls für einzelne Teile (Scheiben) besondere Pläne zur Bestimmung der gegenseitigen Verschiebungen derjeniger Gelenke gezeichnet hat, in denen diese Teile aneinander hängen. Hierauf beseitige man die neu hinzugefügten Stützen, und schreibe den starr zu denkenden Gliedern des nunmehr beweglichen Fachwerks Verschiebungen und Drehungen zu, durch welche die wirklichen Auflagerbedingungen erfüllt werden. Die folgenden Beispiele werden genügen, dieses Verfahren zu erläutern.

1. Beispiel. Das in Fig. 53 dargestellte Fachwerk besteht aus zwei gegliederten Scheiben *I* und *II*, die im Gelenke *c* aneinander hängen und durch die Stäbe 4 und 7 mit dem Kopfe *e* der Pendel-

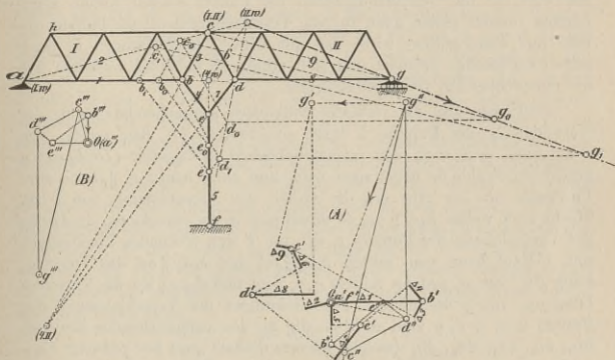


Fig. 53.

säule 5 verbunden sind. Bei *a* ist ein festes, bei *g* ein auf wagerechter Bahn bewegliches Auflagergelenk angeordnet. Will man die Verschiebungen der Knotenpunkte dieses Fachwerks ermitteln, so bestimme man zunächst mit Hilfe von Einzelplänen (*I*) und (*II*), die nach Nr. 32 für die Scheiben *I* und *II* aufgetragen werden, die Änderungen $\Delta 1$, $\Delta 2$, $\Delta 8$, $\Delta 9$ der kurz mit 1, 2, 8, 9 bezeichneten Strecken *ab*, *ac*, *dg*, *eg*. Hierauf nehme man an, der Knoten *g* sei frei, setze dafür aber *b* in der Richtung *ab* geführt voraus und zeichne den Plan Fig. 53A.

O ist der beliebige angenommene Pol. *a'* und *f'* fallen mit *O* zusammen, da *a* und *f* feste Punkte sind. Die Wagerechte $Ob' = \Delta 1$ gibt die Verschiebung von *b* an. Mittels $\Delta 2$ und $\Delta 3$ wird nach Nr. 32

der Punkt e' bestimmt, hierauf der Reihe nach: e' mittels $\Delta 4$ und $\Delta 5$, d' mittels $\Delta 6$, und $\Delta 7$, g' mittels $\Delta 8$ und $\Delta 9^*$).

Jetzt verwandle man das Fachwerk durch Beseitigung der Führung des Punktes b in eine zwangsläufige kinematische Kette, drehe die Scheibe I so um das Auflagergelenk a , daß der Punkt g eine (im Plane A durch einen Strahl $g''O$ darzustellende) Verschiebung erfährt, die, mit der vorhin gefundenen Og' zusammengesetzt, eine wagerechte Gesamtverschiebung $g''g'$ ergibt, und bestimme schließlich auch die von den Knotenpunkten d, e, e, b bei dieser Bewegung beschriebenen Wege: $d''O, e''O, e''O, b''O$.

Zu einer einfachen Lösung dieser Aufgabe führen die im ersten Bande (Abschnitt XIII) mitgeteilten Untersuchungen kinematischer Ketten. Die dort für die Geschwindigkeiten der Punkte solcher Ketten abgeleiteten Gesetze gelten auch für die Verschiebungen dieser Punkte, sobald* nur vorausgesetzt wird, daß alle diese Verschiebungen in demselben Zeiteilchen erfolgen und sich mithin zu einander verhalten wie die entsprechenden Geschwindigkeiten.

Stellt man also die vorläufig willkürlich anzunehmende Größe der Verschiebung des Punktes b durch eine Strecke bb_0 dar, welche, von b aus, auf dem nach dem augenblicklichen Drehpunkte (*Drehpole*) a gezogenen Strahle ba abgetragen wird, und zieht man $b_0e_0 \parallel bc$ bis zum Polstrahle ea , so gibt ce_0 die Größe der Verschiebung von e an. Macht man weiter $b_0e_0 \parallel be$, so erhält man in der Strecke ee_0 die Größe der Verschiebung des Punktes e , der um f sich drehenden Pendelsäule, und hierauf kann man mittels $e_0d_0 \parallel cd$ und $e_0d_0 \parallel ed$ die Verschiebung dd_0 von d , sodann mittels $e_0g_0 \parallel cg$ und $d_0g_0 \parallel dg$ die Verschiebung gg_0 von g bestimmen. Die Richtungen der Verschiebungen der Punkte b, e, e, d, g sind rechtwinklig zu den entsprechenden Strecken $bb_0, ce_0, ee_0, dd_0, gg_0$ (welche letztere deshalb „um 90° gedrehte Verschiebungen“ genannt werden sollen) und damit sind die Richtungen der Strahlen bestimmt, die im Plane A die Punkte $g'', d'', e'' \dots$ mit dem Pole O verbinden. Es ist $g''O \perp gg_0, d''O \perp dd_0, e''O \perp ce_0$ u. s. w. Die Länge des Strahles $g''O$ folgt aus der Bedingung, daß g'' auf der Wagerechten durch g' liegen muß, und hierauf ist d'' gegeben durch $g''d'' \perp gd, e''$ durch: $e''d'' \perp cd$ oder $g''e'' \perp ge$, ferner b'' durch: $e''b'' \perp eb$, sodann e'' durch $b''e'' \perp be$ oder $d''e'' \perp de$.

*) Anstatt Scheibe I in b zu führen, kann man auch die Richtung des Stabes ah festlegen. Der Plan (I) wird dann überflüssig, da man die Knotenpunkte der Scheibe I schrittweise durch je zwei Stäbe an den Stab ah anschließen kann. Plan (II) ist auch bei der oben angenommenen Stützungsart entbehrlich, doch möge wiederholt werden, daß die Anfertigung von Einzelplänen für die verschiedenen Scheiben den Vorzug der größeren Übersichtlichkeit besitzt.

Wir teilen noch drei andere Verfahren mit, die Punkte d'' , e'' , b'' , c'' zu ermitteln:

1. Man zeichne einen Linienzug $g_1 d_1 e_1 b_1 c_1$, dessen Seiten den entsprechenden Seiten des Zuges $g_0 d_0 e_0 b_0 c_0$ parallel sind (so daß also $g_1 d_1 \parallel g d$, $d_1 e_1 \parallel de$, ...) und dessen Ecken auf den Geraden gg_0 , dd_0 , ee_0 , ... liegen. Macht man hierbei $gg_1 = g''O$, so ist auch $d''O = dd_1$, $e''O = ee_1$, u. s. w.

2. Man bestimme die Pole, um welche sich die einzelnen Glieder der bewegten zwangläufigen Kette gegen das ruhende, kurz mit w bezeichnete Widerlager, dem die festen Punkte a und f angehören, drehen. Der Pol ($I \cdot w$) der Scheibe I fällt mit a zusammen, der Pol $I \cdot II$ von I gegen II mit dem Gelenke c . Die Glieder I , 4 , 5 der Kette bilden mit dem Widerlager zusammen ein Gelenkviereck, und es liegt daher der Pol ($4 \cdot w$) von 4 gegen w im Schnittpunkte der Geraden ab und fe . Ebenso folgt, daß der Pol ($4 \cdot II$) von 4 gegen II der Schnittpunkt der Geraden cb und de ist, und nun läßt sich der Pol ($II \cdot w$) von II gegen w mittels der Bedingungen finden, daß die drei Punkte ($I \cdot w$), ($I \cdot II$) und ($II \cdot w$) in einer Geraden liegen müssen, desgleichen die Punkte ($4 \cdot II$), ($4 \cdot w$), ($II \cdot w$). Durch den Pol ($II \cdot w$) sind die Richtungen gg_0 und dd_0 gegeben, und man ist jetzt imstande, die Punkte g'' , d'' , e'' , b'' , c'' auf die zuerst beschriebene Art zu bestimmen.

3. Man nehme die Verschiebung des Punktes b der um a sich drehenden Scheibe I zunächst beliebig groß an und stelle sie in einem besonderen Plane (Fig. 53B) durch einen zur Geraden ba rechtwinkligen Polstrahl $b'''O$ dar, wobei es gleichgültig ist, ob b''' unterhalb oder oberhalb des Poles O liegend gewählt wird. Hierauf bestimme man die gleichzeitig von den Punkten c , e , d , g beschriebenen Wege, indem man die Reihe zieht:

$$\begin{array}{l} b'''c''' \perp bc \quad \text{und} \quad a'''c''' \perp ac, \\ b'''e''' \perp be \quad \text{,,} \quad f'''e''' \perp fe, *) \\ c'''d''' \perp cd \quad \text{,,} \quad e'''d''' \perp ed, \\ c'''g''' \perp cg \quad \text{,,} \quad d'''g''' \perp dg. \end{array}$$

Die Strahlen, welche die Punkte b''' , c''' , e''' , d''' , g''' mit dem Pole O verbinden, stellen nach Größe und Richtung die Verschiebungen der Punkte b , c , e , d , g dar. Nun ermittle man im Plane (A) mit Hilfe von $g''O \parallel g'''O$ diejenige Verschiebung, welche g erfahren muß, damit die Auflagerbedingung bei g erfüllt wird, und hierauf die zugehörigen Verschiebungen $c''O$, $d''O$, ... indem man eine Figur $g''c''d''$... zeichnet, deren Seiten parallel sind den entsprechenden Seiten der Figur $g'''c'''d'''$...

Die Figur (B) ist offenbar nichts weiter als der *Williotsche* Ver-

*) f''' fällt mit a''' zusammen.

schiebungsplan derjeniger kinematischen Kette, in welche das zu untersuchende Fachwerk durch Beseitigung des beweglichen Auflagers g übergeht*).

Überträgt man schließlich die auf einem der beschriebenen Wege gefundenen Verschiebungen $b''b'$, $c''d''$, $d''d'$, $g''g'$ aus dem Plane (A) in die für die Scheiben (I) und (II) angefertigten Einzelpläne, und zeichnet in (I) die der Scheibe abc ähnliche Figur $a''b''c''$ (deren Punkt a'' mit dem Punkte a' dieses Planes zusammenfällt) sodann in (II) die der Scheibe cdg ähnliche Figur $c''d''g''$, so ist man in stande, die Verschiebungen $m''m'$ sämtlicher Knoten m der Scheiben I und II anzugeben.

Auf ähnliche Weise wie das eben untersuchte Fachwerk kann auch das in Fig. 54 dargestellte behandelt werden. Es ist zweckmäßig, zu-

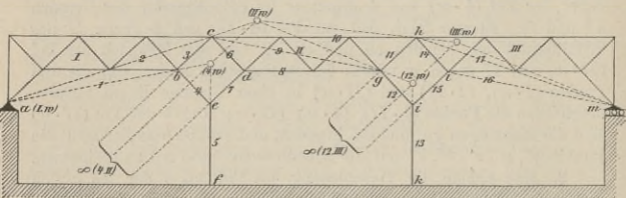


Fig. 54.

nächst den Punkt a und die Richtung von ab festliegend anzunehmen und sich die Führung des Gelenkes m beseitigt zu denken. Hierauf drehe man die Scheibe I so um a , daß der Punkt m eine wagerechte Gesamtverschiebung $m''m'$ erfährt. Die Pole, um welche sich die Scheiben II und III infolge dieser zweiten Bewegung drehen, sind in der Fig. 54 angegeben worden**). An ihrer Stelle können auch die um 90° gedrehten Verschiebungen oder ein Williotscher Plan benutzt werden, und es wird dem Leser empfohlen, zur Übung die betreffenden Figuren selbst zu entwerfen***).

*) Daß es sich bei Aufzeichnung der Figur (B) in der Tat nur um die wiederholte Lösung der in Nr. 32 vorgeführten Hauptaufgabe handelt, lehrt ein Blick auf Fig. 34. Ist $\Delta 1 = 0$ und $\Delta 2 = 0$, so entsprechen den Geraden ac und cb in Fig. 34a die zu ihnen rechtwinkligen Geraden $a'e'$ und $e'b'$ des Verschiebungsplanes Fig. 34b. Vergl. auch den Anfang von Seite 62.

***) Das Zeichen $\infty(4 \cdot II)$ deutet an, daß der Pol $(4 \cdot II)$ mit dem unendlich fernen Schnittpunkte der Stäbe 3 und 7 zusammenfällt.

****) Bei Polbestimmungen müssen häufig Gerade durch die Schnittpunkte von außerhalb des Zeichenblattes sich treffenden Linien gelegt werden, was zwar keinerlei Schwierigkeiten bietet, immerhin aber umständlich genug ist, um dann die Bevorzugung anderer Verfahren zu veranlassen.

2. Beispiel. Fig. 55 zeigt einen statisch bestimmten Bogenträger mit drei Öffnungen. Derselbe besteht aus vier gegliederten Scheiben, die in den Gelenken c, g, i aneinander hängen. Die Scheiben I und II sind durch zwei Stäbe mit dem Kopfe der Pendelsäule ef verbunden, in gleicher Weise III und IV mit der Säule lm . Bei a und n sind feste Auflagergelenke angeordnet.

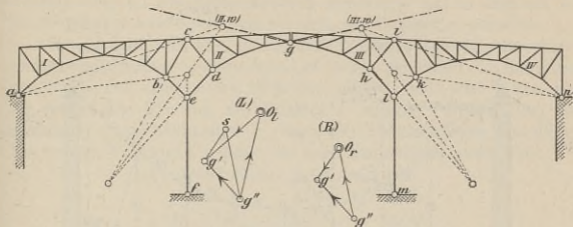


Fig. 55.

Wird der Verschiebungsplan dieses Trägers verlangt, so setze man zunächst voraus, es sei bei g die Verbindung der Scheiben II und III gelöst, nehme dafür aber den Punkt b in der Richtung ab geführt an und den Punkt k in der Richtung nk . Für diese Stützungsart ermittle man (genau wie im Beispiel 1) die Verschiebungen der Punkte b, c, e, d, g der linken Trägerhälfte und der Punkte k, i, l, h, g der rechten Hälfte — am besten in zwei besonderen Figuren (L) und (R); deren Pole O_l und O_r seien. Hierauf drehe man die Scheiben I und IV so um die Gelenke a bzw. n , daß der Zusammenhang der Scheiben II und III in g wieder hergestellt wird.

Der erste Teil dieser Untersuchung möge für den Punkt g der linken Trägerhälfte die Verschiebung $O_l g'$ (Plan L) ergeben haben und für den Punkt g der rechten Hälfte die Verschiebung $O_r g'$ (Plan R). Infolge der zweiten Bewegung dreht sich die Scheibe II um den Pol ($II \cdot w$), dessen Lage in der auf Seite 74 beschriebenen Weise gefunden wird, und es muß deshalb der Strahl $g'' O_l$ rechtwinklig zu der durch die Punkte ($II \cdot w$) und g bestimmten Geraden sein. Im Plane R hingegen ist $g'' O_r$ rechtwinklig zur Geraden $g - (III \cdot w)$. Da nun beide Pläne Verschiebungen $g'' g'$ liefern müssen, die nach Größe, Richtung und Sinn übereinstimmen, so läßt sich die Lage der Punkte g'' in folgender Weise ermitteln.

Man mache in (L) die Strecke $g's$ gleich und parallel dem Strahle $g' O_r$, des Planes (R) und lege durch den Punkt s , rechtwinklig zu $g - (III \cdot w)$ eine Gerade. Dieselbe schneidet die gegebene Richtung

Längen sich um die gegebenen Strecken Δ' und Δ'' vergrößern, mit festen Punkten der Widerlager verbunden.

Von dem beliebig angenommenen Pole O aus (Plan A) wird Δ' aufgetragen, und im Endpunkte dieser der linken Rückhaltkette parallelen Strecke ein Lot errichtet, welches die Wagerechte durch O in a' schneidet. Oa' stellt die Verschiebung von a dar. An a' wird die Verlängerung $\Delta 1$ des Kettengliedes 1 angetragen und in dem auf $\Delta 1$ im Endpunkte errichteten Lote der Ort des Punktes c' gefunden.

Es empfiehlt sich nun, den Punkt c' zunächst beliebig anzunehmen und gewissermaßen vorauszusetzen, es werde der Punkt c in der durch den Strahl Oc' angegebenen Richtung geführt; dafür aber denke man die wagerechte Führung des Punktes x beseitigt. Denn durch die Annahme eines bestimmten c' sind die Verschiebungen sämtlicher Knoten des Fachwerks gegeben, da man schrittweise finden kann:

Punkt d'	mittels $\Delta(bd)$	und $\Delta 2$,	
„ e'	„ $\Delta(be)$	„ $\Delta(de)$,	
„ f'	„ $\Delta(df)$	„ $\Delta(ef)$,	
„ g'	„ $\Delta(dg)$	„ $\Delta(fg)$,	
„ h'	„ $\Delta 4$	„ $\Delta 3$,	

u. s. f. die Punkte i', k', l', m', n', o' , hierauf:

Punkt p'	auf der Wagerechten durch O	mittels Δnp ,
„ q'	mittels $\Delta(nq)$	und $\Delta(pq)^*$
„ r'	„ $\Delta(nr)$	„ $\Delta(qr)$
„ s'	„ $\Delta 9$	„ $\Delta 10$ u. s. w. bis Punkt w' .

Schließlich erhält man den Punkt x' , indem man in O und w' die Strecken Δ'' (parallel zur rechten Rückhaltkette) und $\Delta 15$ anträgt und in den Endpunkten dieser Strecken Lote errichtet.

Jetzt wird die vorübergehend angenommene Führung des Punktes c wieder beseitigt, und hierdurch das Fachwerk in eine zwangläufige kinematische Kette verwandelt, der eine Bewegung zu erteilen ist, durch welche der Punkt x eine Verschiebung $x''O$ erfährt, die mit Ox' zusammengesetzt eine wagerechte Gesamtverschiebung $x''x'$ ergibt. Die Pole, um welche sich die einzelnen Glieder des Fachwerks bei dieser zweiten Bewegung drehen, werden wie folgt ermittelt.

Der Pol ($I \cdot w$) der Scheibe I gegen das Widerlager fällt mit b zusammen, der Pol ($I \cdot II$) mit n , während ($II \cdot w$) durch den Schnittpunkt der Geraden ($I \cdot w$) — ($I \cdot II$) mit der Senkrechten durch p bestimmt ist, weil sich p auf einer Wagerechten bewegt.

Die Stäbe 4, 5, 6 bilden mit der Scheibe I ein Gelenkviereck,

*) $\Delta(pq)$ und $\Delta(np)$ werden einem für die Scheibe II gezeichneten besonderen Plane entnommen. Im Plane (A) haben wir, um eine übersichtliche Figur zu erhalten, nur die Punkte $a', c', d', n', p', q', w', x'$ angegeben.

und es ist deshalb der unendlich ferne Schnittpunkt von 4 und 6 der Pol von 5 gegen I ; derselbe liegt in der Senkrechten durch b ; denn die Pole $(5 \cdot w)$, $(5 \cdot I)$, $(I \cdot w)$ fallen in eine Gerade. Da nun die Verschiebungsrichtung des Punktes c rechtwinklig zur Achse des um a sich drehenden Stabes 1 ist, und c auch dem Stabe 3 angehört, so ist der Schnittpunkt \mathfrak{P} von 1 mit der Senkrechten durch b der Pol von 3 gegen w , und es bewegt sich deshalb h rechtwinklig zur Geraden $\mathfrak{P}h$. Daraus ergibt sich aber, daß $(5 \cdot w)$ mit \mathfrak{P} zusammenfällt und ebenso kann gefolgert werden, daß sich \mathfrak{P} auch mit $(7 \cdot w)$ deckt.

Ganz ähnlich läßt sich beweisen, daß der Schnittpunkt \mathfrak{P}' der Geraden $\mathfrak{P}o$ mit der Senkrechten durch p der gemeinschaftliche Pol der Stäbe 9, 11 und 13 ist; denn die Pole $(9 \cdot w)$, $(11 \cdot w)$, $(13 \cdot w)$ liegen auf der Geraden, welche durch $(II \cdot w)$ und die unendlich fernen Schnittpunkte der Stäbe 8 und 10, 10 und 12, 12 und 14 geht.

Legt man nun durch \mathfrak{P} und den oberen Endpunkt einer der linken Trägerhälfte angehörenden Hängestange eine Gerade, desgleichen durch $(I \cdot w)$ und den unteren Endpunkt, so erhält man im Schnittpunkte beider Geraden den Pol dieser Stange. Auf diese Art ist in Fig. 56 der kurz mit (4) bezeichnete Pol $(4 \cdot w)$ des Stabes 4 bestimmt worden; der Beweis folgt daraus, daß die Punkte $(5 \cdot w)$, $(4 \cdot 5)$, $(4 \cdot w)$ in einer Geraden liegen, desgleichen die Punkte $(I \cdot w)$, $(4 \cdot I)$, $(4 \cdot w)$. Ähnlich werden die Pole der Hängestangen der rechten Hälfte ermittelt. An Stelle der Punkte \mathfrak{P} und $(I \cdot w)$ treten hier die Punkte \mathfrak{P}' und $(II \cdot w)$. In der Figur sind die kurz mit (12) und (14) bezeichneten Pole $(12 \cdot w)$ und $(14 \cdot w)$ der Stäbe 12 und 14 angegeben worden. Pol (8) von 8 ist der Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ und $(I \cdot w) - (II \cdot w)$. Der Pol von $(15 \cdot w)$ gehört der Geraden \mathfrak{P}' (14) und der Mittellinie der rechten Rückhaltkette an.

Um die Verschiebungen zu ermitteln, welche die Punkte der betrachteten Kette erfahren, ziehe man im Plane A den Strahl $x''O$ rechtwinklig zur rechten Rückhaltkette bis zur Wagerechten durch x' , hierauf $x''w'' \perp xw$ und Ow'' rechtwinklig zu der Geraden, welche den Punkt w mit dem Pole \mathfrak{P}' verbindet. Den Punkt v'' findet man mittels der Bedingungen $v''w'' \perp vw$ und $v''O \perp v(14)$ und den Punkt n'' mit Hilfe von $v''n'' \perp vn$ und $n''O \perp n(I \cdot w)$, womit je zwei Punkte der den Scheiben npq und nmb ähnlichen Figuren $n''p''q''$ und $n''m''a''$ bestimmt sind. Bei richtiger Zeichnung muß hierbei p'' in die Wagerechte durch O fallen.

Damit Fig. (A) deutlich bleibe, haben wir die bereits gefundenen Punkte $x''w''v''n''p''$ in eine besondere Fig. (B) übertragen und in dieser die Ermittlung der fraglichen Verschiebungen fortgesetzt. Nach Auftragung der Figuren $n''p''q''$ und $n''m''a''$ wurden der Reihe nach bestimmt:

u''	mittels:	$u''w'' \perp uw$	und	$u''t'' \perp ut$
s''	"	$s''u'' \perp su$	"	$s''r'' \perp sr$
o''	"	$o''s'' \perp os$	"	$o''n'' \perp on$
l''	"	$l''o'' \perp lo$	"	$l''k'' \perp lk$
h''	"	$h''l'' \perp hl$	"	$h''g'' \perp hg$
e''	"	$e''h'' \perp eh$	"	$e''d'' \perp ed$

Bei sorgfältiger Zeichnung muß eine von e'' aus rechtwinklig zu ca gezogene Gerade den Pol O des Verschiebungsplanes treffen. Ferner muß sein:

$$u''O \perp u\mathfrak{P}', \quad s''O \perp s\mathfrak{P}', \quad o''O \perp o\mathfrak{P}', \quad l''O \perp l\mathfrak{P}, \quad h''O \perp h\mathfrak{P}.$$

4. Beispiel. Fig. 57 stellt eine gegliederte Scheibe der folgenden Erzeugungsweise dar. An ein aus vier Stäben bestehendes Gelenkviereck 1, 2, 3, 4 werden die Knoten 5, 6, 7, . . . n so angeschlossen, daß 5 verbunden wird mit 4 und 2, 6 mit 5 und 3, 7 mit 6 und 4, . . . n mit $n-1$ und $n-3$, worauf schließlich noch der Stab $n1$ hinzugefügt wird. In Fig. 57 ist $n=8$. Wird der Verschiebungsplan

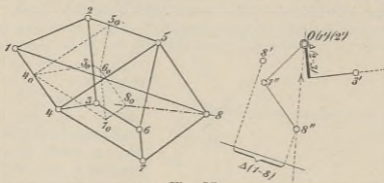


Fig. 57.

für den Fall gesucht, daß der Knoten 1 und die Richtung des Stabes 1—2 festliegen, so nehme man zuerst an, es sei der Knoten 3 auf irgend einer festen Geraden geführt, der Stab 1—8 hingegen beseitigt. Trägt man dann vom Pole O des Verschiebungsplanes aus die (in Fig. 57 positiv vorausgesetzte) Längenänderung $\Delta(2-3)$ des Stabes 2—3 auf und errichtet im Endpunkte derselben ein Lot, so ist dieses der Ort des Punktes $3'$. Dieser Punkt selbst wird beliebig angenommen; die Gerade, welche ihn mit O verbindet, gibt die Richtung an, in welcher 3 vorläufig geführt wird.

Nun bestimmt man der Reihe nach die Punkte $4', 5', 6', 7', 8'$, beseitigt hierauf die Führung des Knotens 3 und erteilt den nunmehr starr zu denkenden, zwangläufig miteinander verbundenen Stäben Bewegungen, durch welche die Bedingung erfüllt wird, daß die gegenseitige Verschiebung der Punkte 8 und 1 gleich der Längenänderung $\Delta(1-8)$ des Stabes 1—8 ist. Dazu ermittelt man mit Hilfe der um 90° gedrehten Verschiebungen $3-3_0, 4-4_0, \dots, 8-8_0$ die zur Ge-

raden $8-8_0$ rechtwinklige Richtung des Strahles $8''O$ und bestimmt auf diesem den Punkt $8''$ mittels der Bedingung, daß die Projektion der Gesamtverschiebung $8''8'$ des Punktes 8 auf eine zum Stabe (1—8) parallele Gerade gleich der (in der Fig. 57 negativ angenommenen) Längenänderung $\Delta(1-8)$ dieses Stabes ist. Jetzt kann man $7''$ finden mittels $7''-8'' \perp 7-8$ und $7''O \perp 7-7_0$, hierauf $6''$, $5''$, Damit sind die Gesamtverschiebungen $m''m'$ sämtlicher Knoten m bestimmt.

Dem eben betrachteten Stabgebilde entspricht ein Scheibengebilde von ähnlicher Entstehungsweise. Ein Beispiel bietet der in Fig. 54 dargestellte Träger. Die Glieder I, 4, 5 bilden mit dem die festen Punkte a und f verbindenden starren Widerlager ein Gelenkviereck, an das der Knoten d mittels II und 7 zwangsläufig angeschlossen wird, hierauf i mittels 12 und 13, sodann l mittels 15 und III, welches letzte Glied schließlich bei m eine Führung erhält.

5. Beispiel. Es soll noch eine sehr lehrreiche Aufgabe mitgeteilt und auf zweierlei Art gelöst werden. Die zweite Lösung wird nach einem Verfahren erfolgen, das selbst in den schwierigsten Fällen übersichtlich zum Ziele führt.

An ein aus Stäben gebildetes Gelenkfünfeck 1—2—3—4—5 seien weitere Knoten 6, 7, 8, m , n durch je zwei Stäbe in der Weise angeschlossen, daß 6 verbunden wird mit 5 und 2, 7 mit 6 und 3, , m mit $(m-1)$ und $(m-4)$, , n mit $(n-1)$ und $(n-4)$. Der Knoten 1 und die Richtung des Stabes 1—2 liegen fest; m werde in einer ruhenden Geraden m_0m_0 geführt, ebenso n in n_0n_0 . Es soll der Verschiebungsplan gezeichnet werden.

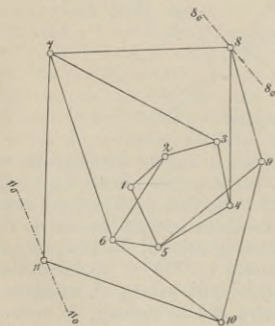


Fig. 58a.

In Fig. 58a ist $m=8$ und $n=11$. Vom Pole O aus (Fig. 58b) wurden die Längenänderungen $\Delta(1-2)$ und $\Delta(1-5)$ der Stäbe 1—2 und 1—5 aufgetragen und an $\Delta(1-2)$ die Strecke $\Delta(2-3)$ gesetzt. Die in den Endpunkten von $\Delta(2-3)$ und $\Delta(1-5)$ auf diesen Strecken errichteten Lote sind die Örter von $3'$ beziehungsweise $5'$. Werden die Punkte $3'$ und $5'$ vorläufig willkürlich angenommen, wird also gewissermaßen zunächst vorausgesetzt, es seien die Knoten 3 und 5 (statt 8 und 11) in festen, den Polstrahlen $O3'$ und $O5'$ parallelen Geraden geführt, so lassen sich die Punkte $4'$, $6'$, $7'$, $8'$, $9'$, $10'$, $11'$ schrittweise bestimmen, da 4 durch zwei Stäbe mit 3 und 5 verbunden ist, desgleichen 6 mit 2 und 5, u. s. f.

Jetzt hebe man die Führung der Punkte 3 und 5 wieder auf, und drehe die Stäbe 2—3 und 1—5 so um die in Ruhe bleibenden Gelenke 1 und 2, daß 8 eine Verschiebung $8''O$ erfährt, die, mit $O8'$ zusammengesetzt, eine zur Führung 8_08_0

parallele Verschiebung $8''8'$ ergibt und ebenso für den Punkt 11 eine zu 11_0-11_0 parallele Gesamtverschiebung $11''11'$ erhalten wird. Behufs Darstellung dieser Bewegung zeichne man im Plane Fig. 58b eine Figur $1''-2''-3''-4'' \dots 8'' \dots 11''$,

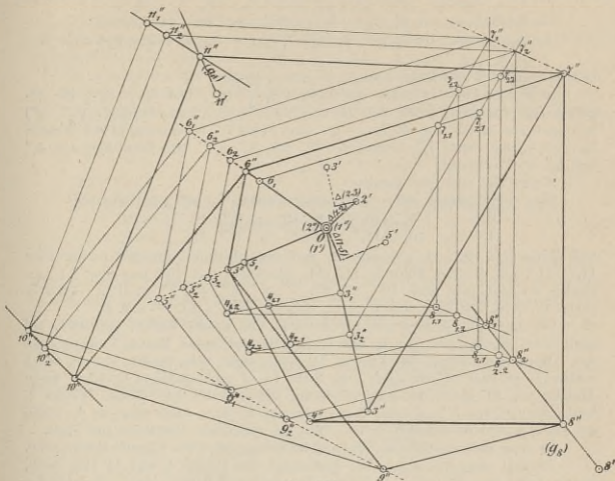


Fig. 58b.

deren Seiten rechtwinklig zu den ihnen entsprechenden Stäben des Fachwerks $1-2-3-4 \dots 8 \dots 11$ sind, deren Punkte $1'', 2''$ mit O zusammenfallen, und deren Punkte $8'', 11''$ in gegebenen Geraden (g_s) beziehungsweise (g_{11}) liegen. Die zu 8_0-8_0 parallele (g_s) ist durch den Punkt $8'$ bestimmt, die zu $11_0=11_0$ parallele (g_{11}) durch den Punkt $11'$. Diese rein geometrische Aufgabe läßt sich mit Hilfe des folgenden (bereits im ersten Bande mehrfach benutzten) Satzes der Geometrie der Lage lösen.

Ändert ein n-Eck in der Weise seine Form, daß sämtliche Seiten desselben durch feste Punkte einer und derselben Geraden gehen (die im vorliegenden Falle die unendlich ferne Gerade ist) während $n - 1$ Eckpunkte gerade Linien beschreiben, so bewegt sich auch der letzte Endpunkt in einer Geraden.

Man nehme auf der zum Stabe $2-3$ rechtwinkligen Geraden $O3''$ zunächst zwei beliebige Punkte $(3_1'', 3_2'')$ versuchsweise an, ebenso auf der zu $1-5$ rechtwinkligen $O5''$ zwei beliebige Punkte $(5_1, 5_2)$, ziehe durch $3_1''$ und $3_2''$ gerade Linien rechtwinklig zum Stabe $3-4$ und bestimme auf denselben die Schnittpunkte $4_1 \cdot 1, 4_1 \cdot 2, 4_2 \cdot 1, 4_2 \cdot 2$ der durch 5_1 und 5_2 rechtwinklig zu $5-4$ gelegten Geraden. Es sind dann

$[O, 3_1'', 4_1 \cdot 1, 5_1]$; $[O, 3_1'', 4_1 \cdot 2, 5_2]$; $[O, 3_2'', 4_2 \cdot 1, 5_1]$; $[O, 3_2'', 4_2 \cdot 2, 5_2]$ vier versuchsweise Lösungen für das verlangte Viereck $O, 3'', 4'', 5''$.

Der ersten Lösung entsprechen die Punkte $6_1, 7_1 \cdot 1, 8_1 \cdot 1,$

„ zweiten „ „ „ „ $6_2, 7_1 \cdot 2, 8_1 \cdot 2,$

„ dritten „ „ „ „ $6_1, 7_2 \cdot 1, 8_2 \cdot 1,$

„ vierten „ „ „ „ $6_2, 7_2 \cdot 2, 8_2 \cdot 2.$

Die Bestimmung von $6_1, 7_1 \cdot 1, 8_1 \cdot 1$ erfolgt der Reihe nach mittels:

$$5_1 - 6_1 \perp 5 - 6, \quad 0 - 6_1 \perp 2 - 6, \quad 6_1 - 7_1 \cdot 1 \perp 6 - 7, \quad 3_1'' - 7_1 \cdot 1 \perp 3 - 7, \\ 7_1 \cdot 1 - 8_1 \cdot 1 \perp 7 - 8, \quad 4_1 \cdot 1 - 8_1 \cdot 1 \perp 4 - 8,$$

und in gleicher Weise findet man $6_2, \dots, 8_2 \cdot 2.$

In den Punkten, in denen die Geraden $8_1 \cdot 1 - 8_1 \cdot 2$ und $8_2 \cdot 1 - 8_2 \cdot 2$ die gegebene (g_8) schneiden, erhält man die zu ($3_1'', 3_2''$) gehörenden Lösungen ($8_1'', 8_2''$) und kann nun in der Geraden $7_1 \cdot 1 - 7_1 \cdot 2$ den Punkt $7_1''$ bestimmen, in der Geraden $7_2 \cdot 1 - 7_2 \cdot 2$ den Punkt $7_2''$, hierauf $6_1'', 6_2''$ und $5_1'', 5_2''$. (Die Ermittlung von $4_1''$ und $4_2''$ ist überflüssig.)

Weiter läßt sich jetzt angeben:

$$9_1'' \text{ mittels } 8_1'' - 9_1'' \perp 8 - 9 \text{ und } 5_1'' - 9_1'' \perp 5 - 9$$

$$10_1'' \text{ „ } 9_1'' - 10_1'' \perp 9 - 10 \text{ „ } 6_1'' - 10_1'' \perp 6 - 10$$

$$11_1'' \text{ „ } 10_1'' - 11_1'' \perp 10 - 11 \text{ „ } 7_1'' - 11_1'' \perp 7 - 11$$

und ebenso $9_2'', 10_2'', 11_2''$, worauf $11''$ bestimmt ist als Schnittpunkt der Geraden $11_1'' - 11_2''$ mit der zur Führung $11_0 - 11_0$ parallelen q_{11} . Hat man aber $11''$ gefunden, so kann man auch $10'', 9'', 8'', 7'', 6'', 5'', 4'', 3''$ ermitteln, denn es liegen $10_1'', 10_2'', 10''$ in einer Geraden, desgleichen $9_1'', 9_2'', 9''$ u. s. w.

Die mitgeteilte Lösung gilt für jedes m und n und bezieht sich auch auf gegliederte Scheiben von der in Abschnitt XIII des ersten Bandes beschriebenen Art. Wird die Führung des Knotens 11 durch einen Stab ersetzt, der 11 mit 1 verbindet, so liegt $11''$ auf einer zum Stabe 11—1 rechtwinkligen Geraden, deren Abstand von $11'$ gleich der Längenänderung dieses Stabes ist. (Vergl. Beispiel 4, worin der Ort von $8''$ auf diese Weise bestimmt wurde.) Auch wenn an die Stelle der Stäbe gegliederte Scheiben treten, führt das entwickelte Verfahren zum Ziele.

Zu einer anderen, ebenfalls allgemeinen Lösung führt die folgende Betrachtung.

Beseitigt man wie vorhin die Stützungen der Punkte 8 und 11 (Fig. 58 a), nimmt dafür aber an, es sei jeder der Knoten 3 und 5 mit einem außerhalb des Fachwerks liegenden festen Punkte durch einen Stab verbunden, und legt man diesen Stäben (die zur Unterscheidung von den wirklichen Fachwerkstäben als *gedachte* bezeichnet werden mögen) beliebige Längenänderungen Δx und Δy bei, so lassen sich die Verschiebungen sämtlicher Knotenpunkte durch wiederholte Lösung der ersten Hauptaufgabe (Nr. 32) bestimmen. Punkt 8 wird sich im allgemeinen von der Führung $8_0 - 8_0$ entfernen; die Projektion seiner Verschiebung auf eine zu $8_0 - 8_0$ rechtwinklige Gerade wird einen endlichen Wert δ_8 annehmen, und ebenso wird sich auch für die Projektion der Verschiebung von 11 auf eine zu $11_0 - 11_0$ rechtwinklige Gerade ein endlicher Wert δ_{11} ergeben.

Zwischen δ_8, δ_{11} und den Änderungen der Stablängen bestehen nach Nr. 4 Beziehungen ersten Grades, die sich auf die Form

$$(I) \quad \begin{cases} \delta_8 = \alpha_8 \Delta x + \beta_8 \Delta y + \delta_8' \\ \delta_{11} = \alpha_{11} \Delta x + \beta_{11} \Delta y + \delta_{11}' \end{cases}$$

bringen lassen, worin δ_8' und δ_{11}' von den Längenänderungen der wirklichen Stäbe abhängig sind und diejenigen Werte bezeichnen, welche δ_8 und δ_{11} für den Fall annehmen, daß die beiden gedachten Stäbe starr vorausgesetzt werden (Zustände $\Delta x = 0$ und $\Delta y = 0$). Verschwinden auch die Längenänderungen der wirklichen Stäbe (was kurz durch $\Delta s = 0$ angedeutet werden soll), so ergibt sich $\delta_8' = 0, \delta_{11}' = 0$.

Weiter bedeuten:

$$\alpha_8, \alpha_{11} \text{ die Werte von } \delta_8, \delta_{11} \text{ für den Zustand: } \Delta x = 1, \Delta y = 0, \Delta s = 0;$$

$$\beta_8, \beta_{11} \text{ „ „ „ } \delta_8, \delta_{11} \text{ „ „ „ } \Delta x = 0, \Delta y = 1, \Delta s = 0;$$

und es können somit die sechs Koeffizienten der rechten Seiten der Gleichungen I mit Hilfe von drei Verschiebungsplänen, welche den drei angeführten Zuständen entsprechen, bestimmt werden, worauf die Bedingungen: $\delta_8 = 0$ und $\delta_{11} = 0$, d. h.

$$\alpha_8 \Delta x + \beta_8 \Delta y + \delta_8' = 0$$

$$\alpha_{11} \Delta x + \beta_{11} \Delta y + \delta_{11}' = 0$$

diejenigen Längenänderungen Δx und Δy liefern, welche den beiden gedachten Stäben zugeschrieben werden müssen.

Es leuchtet ein, daß sich auf diesem Wege die Ermittlung der Verschiebungen der Knoten jedes statisch bestimmten Fachwerks auf die wiederholte Lösung der ersten Hauptaufgabe und die Auflösung einer Gruppe von Gleichungen ersten Grades zurückführen läßt.

§ 2.

Darstellung der Formveränderung von Stabzügen mit gelenkartigen Knoten.

39. — Werden gerade Stäbe so aneinander gereiht, daß jeder Stab nur mit dem vorhergehenden und dem nachfolgenden zusammenhängt, so entsteht ein Gebilde, welchem wir den Namen *Stabzug* beilegen. Die Knotenpunkte bezeichnen wir mit den Ziffern 0, 1, 2, . . . (m - 1), m, (m + 1), . . . n, die Stablängen mit $s_1, s_2, \dots, s_m, \dots, s_n$ und die Winkel, welche die Mittellinien aufeinander folgender Stäbe einschließen, mit $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots, \mathfrak{S}_m, \dots, \mathfrak{S}_{n-1}$. Fig. 59.

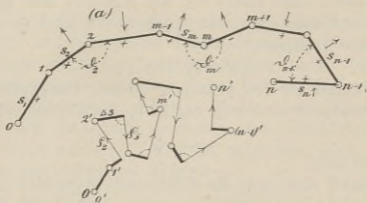


Fig. 59.

Greifen alle äußeren Kräfte in den Knotenpunkten an, und sind die Stäbe durch reibungslose Gelenke miteinander verbunden — was beides hier vorausgesetzt werden möge — so wird jeder Stab nur auf Zug oder Druck beansprucht; seine Mittellinie bleibt gerade, und die gegenseitigen Verschiebungen der Knotenpunkte des Gebildes sind bestimmt durch die Änderungen $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n, \Delta \mathfrak{S}_1, \Delta \mathfrak{S}_2, \dots$ der Längen s und Winkel \mathfrak{S} . Eine übersichtliche Darstellung dieser Verschiebungen ist u. a. von Wert für die Theorie des Fachwerks, dessen Knotenpunkte häufig durch Stabzüge mit leicht zu berechnenden Winkeländerungen $\Delta \mathfrak{S}$ verbunden werden können.

Zunächst werde angenommen, es seien sämtliche Δs und $\Delta \mathfrak{S}$ bekannt, auch werde vorausgesetzt, daß die Richtung der Achse irgend eines Stabes und ein Punkt dieser Achse festliegen, beispielsweise die Richtung des Stabes s_1 und der Knotenpunkt 0 . Die übrigen Stäbe ($s_2, s_3, \dots, s_m, \dots, s_n$) werden sich um gewisse Winkel $\psi_2, \psi_3, \dots, \psi_m, \dots, \psi_n$ drehen, und zwar ist:

$$\psi_2 = \Delta \mathfrak{S}_1; \quad \psi_3 = \psi_2 + \Delta \mathfrak{S}_2; \quad \dots; \quad \psi_m = \psi_{m-1} + \Delta \mathfrak{S}_{m-1}; \quad \dots$$

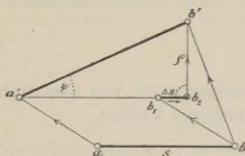


Fig. 60a.



* Fig. 60b.

Wir betrachten nun einen beliebigen Stab s , dessen Endpunkte die Ordnungsziffern a und b tragen mögen. Fig. 60. Der Weg aa' des Punktes a sei gegeben. Behufs Bestimmung der neuen Lage b' des Punktes b verschieben wir den Stab ab parallel mit sich selbst in die Lage $a'b_1$, ändern seine Länge um das gegebene Maß $\overline{b_1b_2} = \Delta s$ und drehen ihn schließlich um den gegebenen Winkel ψ . Hierbei beschreibt b_2 den Kreisbogen

$$\overline{b_2b'} = (s + \Delta s) \psi,$$

der aber — wegen der Beschränkung unserer Untersuchung auf sehr kleine Verschiebungen — durch ein in b_2 auf $a'b_2$ errichtetes Lot von der Länge

$$\rho = s \psi$$

ersetzt werden darf.

Es empfiehlt sich nun, die Knotenpunktverschiebungen (wie im § 1) in einer besonderen Figur und in gehöriger Vergrößerung von einem beliebig gewählten Pole O aus aufzutragen, so zwar, daß jede Verschiebung nach Größe, Richtung und Sinn durch einen vom Pole ausgehenden Strahl dargestellt wird. In Fig. 60b bezeichnet Oa' die gegebene Verschiebung des Punktes a ; an diese wurde die dem Stabe s parallele Strecke Δs angetragen und hieran die zu s rechtwinklige Strecke ρ ; es stellt dann der Strahl Ob' die gesuchte Verschiebung des Punktes b vor.

Auf diese Weise sind in Fig. 59b die Verschiebungen der Knotenpunkte des in der Fig. 59a abgebildeten Stabzuges schrittweise ermittelt worden. Die Werte Δs und $\rho = s \psi$ wurden in der Reihenfolge

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \rho_2, \Delta s_3, \rho_3, \dots, \Delta s_m, \rho_m, \dots, \Delta s_n, \rho_n$$

nach Größe, Richtung und Sinn aneinander gesetzt, wobei allgemein $\Delta s_m \parallel s_m$, $\varphi_m \perp s_m$. Anstatt der Zeichen $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots$ wurden die kürzeren $\Delta 1, \Delta 2, \dots$ gebraucht. Die (in der Figur nicht ausgezogenen) Polstrahlen $O1', O2', O3', \dots$ stellen nach Größe, Richtung und Sinn die gesuchten Verschiebungen der Knoten 1, 2, 3 . . . dar. In Fig. 59 geben kleine Pfeile den Drehungssinn der einzelnen Stäbe an. Einem positiven ψ entspricht im vorliegenden Falle eine Drehung nach links, einem negativen eine Drehung nach rechts. Die an die Stäbe gesetzten (+) und (−) bedeuten die Vorzeichen der entsprechenden Δs . Die ein (+) tragenden Stäbe werden gedehnt, die übrigen verkürzt.

Wird der Stabzug in einer anderen als der eben vorausgesetzten Art gestützt, so nehme man zuerst die Richtung irgend einer Stabachse und einen Punkt derselben als festliegend an, zeichne den Verschiebungsplan auf die beschriebene Weise und erteile hierauf dem nunmehr als starres Ganzes zu betrachtenden Gebilde eine Bewegung, durch welche die wirklichen Auflagerbedingungen befriedigt werden. Die Verschiebungen, welche die Knotenpunkte infolge dieser zweiten Bewegung erfahren, werden — genau wie im § 1 (Nr. 33) — durch Strahlen $m''O$ dargestellt, die *nach* dem Pole hinzeigen, und deren Zusammensetzung mit den Strahlen Om' die Gesamtverschiebungen $m''m'$ liefern (Fig. 36, S. 62).

Wir werden die Ergebnisse der vorstehenden Betrachtungen hauptsächlich auf die Darstellung der Formänderungen von gegliederten Scheiben anwenden, die sich in Dreiecke zerlegen lassen. Die Winkel $\Delta \varphi$, zwischen den aufeinander folgenden Seiten der die Knotenpunkte derartiger Scheiben verbindenden Stabzüge sind entweder Dreieckswinkel, oder sie setzen sich aus solchen zusammen, und es erfordert daher die Berechnung der $\Delta \varphi$ nur die Lösung der folgenden, auch für spätere Untersuchungen sehr wichtigen Aufgabe:

40. — Zweite Hauptaufgabe. Gegeben seien die Änderungen $\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3$ der Seitenlängen s_1, s_2, s_3 eines Dreiecks ABC , gesucht die Änderungen $\Delta \alpha_1, \Delta \alpha_2, \Delta \alpha_3$ der Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Fig. 61a.

Zu einer sehr einfachen Darstellung der $\Delta \alpha$ gelangt man mit Hilfe eines Williot'schen Verschiebungsplanes. Man nehme A und die Richtung der Seite AB als festliegend an. Dann fällt A' mit dem Pole O zusammen (Fig. 61b) und $A'B' = \Delta s_3$ gibt die Verschiebung von B an. In A' und B' trage man die Strecken Δs_2 und Δs_1 an und errichte auf diesen in ihren Endpunkten Lote, deren Schnittpunkt C' die Verschiebung OC' von C bestimmt. Denkt man sich nun den Punkt C' auf dem in Nr. 39 beschriebenen Wege mittels der dem Stabe s_2 entsprechenden Werte Δs_2 und $\varphi_2 = s_2 \psi_2$ gefunden, so erkennt man, daß

das Lot $\overline{C'C_2}$ von C' auf Δs_2 gleich ρ_2 ist. Der Stab s_2 dreht sich aber, da s_3 festliegt, um $\Delta\alpha_1$; es ergibt sich daher:

$$\overline{C'C_2} = \rho_2 = s_2 \Delta\alpha_1,$$



Fig. 61a.

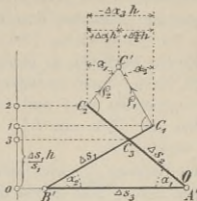


Fig. 61b.

und ebenso findet man (indem man den Pol von A' nach B' verlegt, also B als ruhend ansieht):

$$\overline{C'C_1} = \rho_1 = s_1 \Delta\alpha_2.$$

Wir bezeichnen nun den Schnittpunkt von Δs_1 und Δs_2 mit C_3 , errichten in einem beliebigen Punkte O der $A'B'$ auf dieser Geraden ein Lot, ziehen durch C_1, C_2, C_3 Parallelen zu $A'B'$, welche jenes Lot in 1, 2, 3 schneiden und erhalten:

$$\overline{O1} : \Delta s_1 = h : s_1; \quad \overline{O1} = \Delta s_1 \frac{h}{s_1}; \quad \overline{O2} = \frac{\Delta s_2}{s_2} h; \quad \overline{O3} = \frac{\Delta s_3}{s_3} h,$$

wo h die zu AB rechtwinklige Höhe des Dreiecks ABC bedeutet.

Weiter projizieren wir die Strecken $\overline{C_2 C'}$ und $\overline{C_1 C'}$ auf eine zur $A'B'$ parallele Gerade und finden für die Projektionen die Werte:

$\overline{C_2 C'} \sin \alpha_1 = \rho_2 \sin \alpha_1 = s_2 \sin \alpha_1 \Delta\alpha_1 = \Delta\alpha_1 h$ und $\overline{C_1 C'} \sin \alpha_2 = \Delta\alpha_2 h$, deren algebraische Summe $= -\Delta\alpha_3 h$ ist, weil die Summe der Dreieckswinkel auch nach der Formänderung 180° beträgt, mithin

$$\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2 + \Delta\alpha_3 = 0 \text{ ist.}$$

Ersetzt man in Fig. 61b die Längenänderungen $\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3$ durch die Verhältniszahlen $\frac{\Delta s_1}{h}, \frac{\Delta s_2}{h}, \frac{\Delta s_3}{h}$ (welche nach einem Zahlenmaßstabe durch Strecken dargestellt werden), so liefert diese Figur die Werte $\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2, \Delta\alpha_3$.

Es braucht übrigens nur das durch die Punkte 1, 3, 2 bestimmte Viereck $C_1 C_3 C_2 C'$ gezeichnet zu werden. 3 wird beliebig gewählt; 1 und 2 haben von 3 die Abstände:

$$\overline{31} = \frac{\Delta s_1}{s_1} - \frac{\Delta s_3}{s_3}; \quad \overline{23} = \frac{\Delta s_2}{s_2} - \frac{\Delta s_3}{s_3}.$$

Behufs Vermeidung von Fehlern bei der Feststellung der Vorzeichen der $\Delta\alpha$, versehe man die Strecken C_2C' und C_1C' mit Pfeilen, die nach C' hinzeigen. Diese Pfeile geben an, in welchem Sinne sich die Seiten s_2 und s_1 gegen die Seite s_3 drehen. In dem in der Figur dargestellten Falle dreht sich s_2 nach rechts, s_1 nach links; $\Delta\alpha_1$ und $\Delta\alpha_2$ sind also positiv, während sich für $\Delta\alpha_3$ ein negativer Wert ergibt.

Aus der Fig. 61b, deren Längenabmessungen wir uns durch h dividiert denken, läßt sich auch eine einfache Formel ableiten. Es ist nämlich:

$$-\Delta\alpha_3 = \overline{C_2C_3} \cos \alpha_1 + \overline{C_3C_1} \cos \alpha_2$$

$$\overline{C_2C_3} = \left(\frac{\Delta s_2}{s_2} - \frac{\Delta s_3}{s_3} \right) \frac{1}{\sin \alpha_1}; \quad \overline{C_3C_1} = \left(\frac{\Delta s_1}{s_1} - \frac{\Delta s_3}{s_3} \right) \frac{1}{\sin \alpha_2}$$

und es folgt daher:

$$(1) \quad \Delta\alpha_3 = \left(\frac{\Delta s_3}{s_3} - \frac{\Delta s_1}{s_1} \right) \cotg \alpha_2 + \left(\frac{\Delta s_3}{s_3} - \frac{\Delta s_2}{s_2} \right) \cotg \alpha_1.$$

Sind die Längenänderungen lediglich Folge von Spannkraften S_1 , S_2 , S_3 , welche die Spannungen

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{F_1}; \quad \sigma_2 = \frac{S_2}{F_2}; \quad \sigma_3 = \frac{S_3}{F_3}$$

erzeugen, so hat man

$$\frac{\Delta s_1}{s_1} = \frac{\sigma_1}{E_1}; \quad \frac{\Delta s_2}{s_2} = \frac{\sigma_2}{E_2}; \quad \frac{\Delta s_3}{s_3} = \frac{\sigma_3}{E_3}.$$

Bei gleich großen Elastizitätsziffern (E) ergibt sich

$$(2) \quad \begin{cases} E\Delta\alpha_3 = (\sigma_3 - \sigma_1) \cotg \alpha_2 + (\sigma_3 - \sigma_2) \cotg \alpha_1 \\ E\Delta\alpha_2 = (\sigma_2 - \sigma_3) \cotg \alpha_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) \cotg \alpha_3 \\ E\Delta\alpha_1 = (\sigma_1 - \sigma_2) \cotg \alpha_3 + (\sigma_1 - \sigma_3) \cotg \alpha_2. \end{cases}$$

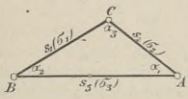


Fig. 62a.

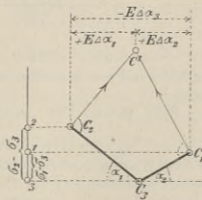


Fig. 62b.

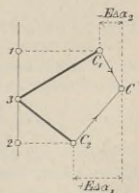


Fig. 62c.

In diesem Falle ist es zweckmäßig, die Werte $E\Delta\alpha$ (an Stelle der $\Delta\alpha$) durch Zeichnung darzustellen, also in Fig. 61b die $\frac{\Delta s}{s}h$ durch die entsprechenden σ zu ersetzen. Man gelangt dann zu dem in der Fig. 62

angegebenen Verfahren, das einer weiteren Erläuterung nicht mehr bedarf. Zu achten ist auf die Vorzeichen der Spannungsunterschiede $\sigma_1 - \sigma_3$ und $\sigma_2 - \sigma_3$. In Fig. 62b wurden beide Werte positiv angenommen, in Fig. 63c der erste positiv, der andere negativ. In letzterer Figur wurde C_3 mit 3 zusammenfallend gewählt. Hinsichtlich der Vorzeichen der Winkeländerungen stimmt Fig. 62b mit Fig. 61b überein. In dem in der Fig. 62c dargestellten Falle erfährt sowohl s_1 als auch s_2 eine Drehung nach rechts; es ist mithin $\Delta\alpha_2$ negativ, $\Delta\alpha_1$ positiv.

Will man die Werte $E\Delta\alpha$ berechnen, so führt man zweckmäßig die Hilfsgrößen ein:

$$\omega_1 = \cotg \alpha_1 (\sigma_2 - \sigma_3); \quad \omega_2 = \cotg \alpha_2 (\sigma_3 - \sigma_1); \quad \omega_3 = \cotg \alpha_3 (\sigma_1 - \sigma_2)$$

und hat dann:

$$E\Delta\alpha_1 = \omega_3 - \omega_2; \quad E\Delta\alpha_2 = \omega_1 - \omega_3; \quad E\Delta\alpha_3 = \omega_2 - \omega_1.$$

Zur besseren Übersicht schreibe man auf jede Dreiecksseite die betreffende Spannung und in jeden Winkel dessen Kotangente, wie dies Fig. 63 angibt. Für das dort dargestellte (mit dem Dreieck 11-12-13 des auf Tafel 2 abgebildeten Fischbauchträgers übereinstimmende) Dreieck, in dessen Seiten die Spannungen:

$$-141, +463, -17 \text{ klgr f. d. qcm}$$

herrschen, erhält man:

$$\omega_1 = 0,496 (+463 + 17) = +238;$$

$$\omega_2 = 1,079 (-17 + 141) = +134;$$

$$\omega_3 = 0,295 (-141 - 463) = -178;$$

$$E\Delta\alpha_1 = -178 - 134 = -312^k \text{ f. d. qcm}; \quad E\Delta\alpha_2 = +238 + 178 = +416;$$

$$E\Delta\alpha_3 = 134 - 238 = -104.$$

Sehr zweckmäßig ist es auch, die Werte ω zeichnerisch zu ermitteln und hierzu ein in möglichst großem Maßstabe angefertigtes Trägernetz zu benutzen. Fig. 64 (Tafel 2, welche zwei Dreiecke des auf dieser Tafel abgebildeten Fischbauchträgers darstellt) gibt eine Anordnung an, die recht übersichtlich ist. Die auf den Stäben stehenden roten Zahlen bedeuten die Spannungen in klgr f. d. qcm. Die Spannungsunterschiede in den die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ einschließenden Seiten sind für das Dreieck I:

$$+463 + 17 = +480; \quad -17 + 141 = +124; \quad -141 - 463 = -604$$

und für das Dreieck II:

$$-128 + 141 = +13; \quad -141 + 576 = +435; \quad -576 + 128 = -448;$$

dieselben werden beziehungsweise mit $\cotg \alpha_1, \cotg \alpha_2, \cotg \alpha_3$ multipliziert. Die Ergebnisse sind für das Dreieck I:

$$\omega_1 = +238; \quad \omega_2 = +134; \quad \omega_3 = -178$$

und für das Dreieck II:

$$\omega_1 = +13; \quad \omega_2 = +177; \quad \omega_3 = -183.$$

Die Strecken, welche diese Werte ω darstellen, wurden in Fig. 64 durch Doppelstriche bezeichnet. Der Spannungsmaßstab lautet: $4^{\text{mm}} = 100^k \text{ f. d. qcm}$; nur für ω_1 im Dreieck II wurde der Maßstab $1^{\text{mm}} = 1^k \text{ f. d. qcm}$ gewählt.

Ist für jedes Dreieck nur eine Winkeländerung $\Delta\alpha$ zu bestimmen [ein Fall, der vorliegt, wenn das Fachwerk in Fig. 77 (Seite 95) durch den mittels kräftiger Linien angedeuteten Stabzug ersetzt werden soll] so gewährt die folgende Darstellungsweise die beste Übersicht. Vom Scheitel A Fig. 65 des fraglichen Winkels α_1 wird auf die gegenüberliegende Seite ein Lot gefällt, und auf diesem werden die absoluten Werte der Spannungsunterschiede aufgetragen, indem

$$\overline{AA_1} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad \text{und} \quad \overline{AA_2} = \sigma_1 - \sigma_2$$

gemacht wird. Zieht man nun $A_1B \parallel s_1$, ebenso $A_2C \parallel s_1$, so ist $\overline{A_1B} = (\sigma_1 - \sigma_3) \cotg \alpha_2$ und $\overline{A_2C} = (\sigma_1 - \sigma_2) \cotg \alpha_3$. Die Vorzeichen werden an die Strecken geschrieben. In Fig. 65 ist $\sigma_1 > \sigma_3$ und $\sigma_2 > \sigma_1$ vorausgesetzt worden. Dann folgt:

$$E\Delta\alpha_1 = \overline{A_1B} - \overline{A_2C}.$$

Temperaturänderungen können nach Seite 2 durch Vergrößerung der Spannungen $\sigma = \frac{S}{F}$ um

εEt berücksichtigt werden. Ist beispielsweise für einen schweißeisernen Stab: $S = 20000^{kg}$,

$F = 50 \text{ qcm}$, also $\frac{S}{F} = 400$, und wird der Stab

um 30° C . erwärmt, so ist demselben bei Ermittlung der $E\Delta\alpha$ nach dem zuletzt beschriebenen

Verfahren eine Spannung $\sigma = 400 + \varepsilon Et = 400 + 22 \cdot 30 = 1060^{kg}$ f. d. qcm zuzuschreiben, wobei $\varepsilon = 0,000012$ und $E = 1800000$ angenommen wurden. Im Falle einer Abkühlung um 30° erhält man $\sigma = 400 - 22 \cdot 30 = -260$.

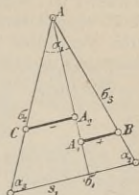


Fig. 65.

41. Untersuchung der Formänderung eines Fachwerkbalkens.

Zahlenbeispiel. (Figuren auf Tafel 2.) Es sollen die Verschiebungen der Knotenpunkte der unteren Gurtung des auf Tafel 2 abgebildeten Hauptträgers einer zweigleisigen Eisenbahnbrücke für die in Fig. 66 angegebene Probelastung bestimmt werden.*) Die durch diese Belastung erzeugten Spannkkräfte sind in Fig. 67 auf folgende Weise ermittelt worden.

Mit beliebiger Polweite H wurde in Fig. 66 zu den Achsenbelastungen eine Seillinie gezeichnet und in diese ein Polygon $I III III \dots X$ einbeschrieben, dessen Ecken den in der oberen Gurtung liegenden Angriffspunkten $0, 2, 4, \dots, 18, 20$ der Zwischenträger entsprechen. Hierauf wurden in Fig. 67 mittels eines Büschels, dessen Strahlen I, II, \dots, X parallel den gleichbezeichneten Polygonseiten sind, auf einer vom Mittelpunkte O des Büschels um H entfernten Senkrechten die Knotenlasten $P_2, P_4, P_6, \dots, P_{18}$ abgeschnitten und durch einen zur Schlußlinie des Seilpolygons parallelen Strahl s die an den Stützpunkten 0 und 20 angreifenden Auflagerdrücke A und B bestimmt. Schließlich wurde ein Cremonascher Kräfteplan gezeichnet. In demselben bedeuten:

O_1, O_3, O_5, \dots die Spannkkräfte der oberen Gurtung,
 U_1, U_2, U_4, \dots " " unteren "
 D_2, D_3, D_4, \dots " " Füllungsstäbe.

*) Bei Belastungsproben handelt es sich stets um die Ermittlung der von der beweglichen Belastung allein hervorgerufenen Durchbiegungen.

Die Figuren 68 und 69 bieten eine übersichtliche Zusammenstellung der Stablängen (in *cm*), Querschnittsinhalte (*qcm*), Spannkkräfte (*Tonnen*) und Spannungen (*kilogr. f. d. qcm*). Die in den Figuren 70 bis 75 abgebildeten Querschnitte wurden voll gerechnet; die Elastizitätsziffer wurde (für Schweißeisen) = 1800000^{kg} f. d. *qcm* angenommen.

Der Füllungsstab 1—2 erhält den Querschnitt: Fig. 72 mit $F = 52$ *qcm*
 Die Füllungsst. 2—3, 3—4 erhalten „ Fig. 73 „ $F = 60$ „
 „ „ 4—5, 5—6, 6—7, 7—8 „ Fig. 74 „ $F = 68$ „
 „ „ 8—9, 9—10 „ Fig. 75 „ $F = 90$ „

Fig. 76 zeigt den Verschiebungsplan der einen Stabzug bildenden unteren Gurtung. Die nach Nr. 40 ermittelten Werte $F\Delta\alpha$ der an dieser Gurtung liegenden Dreieckswinkel α sind in die betreffenden Winkel eingeschrieben worden; sie bestimmen die Änderungen $\Delta\vartheta$ der Stabzugswinkel ϑ . Zuerst wurde der Knoten 9 und die Richtung des Stabes 7—9 festliegend, der Stabzug aber sonst frei angenommen. Es entspricht dann:

$$\begin{aligned} \text{dem Stabe 7—5 der Wert } E\psi_{7-5} &= E\Delta\vartheta_7 = +212 + 363 + 294 \\ &= +869^{\text{kg}} \text{ f. d. } qcm, \\ \text{„ „ 5—3 „ „ } E\psi_{5-3} &= +869 + (301 + 439 + 426) \\ &= +2035, \\ \text{„ „ 3—1 „ „ } E\psi_{3-1} &= 2035 + (447 + 541 + 412) \\ &= +3435, \\ \text{„ „ 1—0 „ „ } E\psi_{1-0} &= 3435 + (2170 + 926) \\ &= +6531, \end{aligned}$$

und ebenso ergeben sich für die rechts an 9 sich schließenden Stäbe der Reihe nach die Werte:

$$E\psi = 850; 1754; 2433; 3421; 4943; 8389.$$

Alle auf der linken Seite des ruhenden Stabes 7—9 befindlichen Stäbe erfahren eine Drehung nach rechts, die auf der rechten Seite eine Drehung nach links.

Für den Stab 0—1 erhält man nun

$$\rho_{0-1} = s \cdot \psi = \frac{s \cdot E\psi}{E} = 271^{\text{cm}} \frac{6531}{1800000} = 0,983^{\text{cm}} = 9,83^{\text{mm}}$$

für den folgenden Stab: $\rho = 6,21^{\text{mm}}$ u. s. f. Diese Werte wurden in Fig. 66 (in Klammern) an die einzelnen Stäbe geschrieben; desgleichen

wurden die Längenänderungen $\Delta s = \frac{Ss}{EF} = \frac{\sigma s}{E}$ angegeben. Für den

$$\text{Stab 0—1 ergibt sich z. B.: } \Delta s_{0-1} = \frac{478 \cdot 271}{1800000} = 0,072^{\text{cm}} = 0,72^{\text{mm}}.$$

Nach Erledigung dieser Rechnungen konnte der Verschiebungsplan aufgetragen werden. An die Strecke $7'—9' = \Delta s_{7-9} = 0,94^{\text{mm}}$ (Maßstab 2:1) wurden links der Reihe nach angetragen:

$\Delta s_{7-5} = 0,98^{\text{mm}}$, $\varrho_{7-5} = 1,77^{\text{mm}}$, $\Delta s_{5-3} = 1,00^{\text{mm}}$, $\varrho_{5-3} = 4,25^{\text{mm}}$,
u. s. w.

und rechts die Strecken:

$\Delta s_{9-11} = 0,95^{\text{mm}}$, $\varrho_{9-11} = 1,70^{\text{mm}}$, $\Delta s_{11-13} = 0,93^{\text{mm}}$, $\varrho_{11-13} = 3,53^{\text{mm}}$,
u. s. f.

Die Endpunkte der Strecken ϱ_{7-5} , ϱ_{5-3} , ... bestimmen die Punkte $5'$, $3'$, ..., diejenigen von ϱ_{9-11} , ϱ_{11-13} , ... die Punkte $11'$, $13'$, ...

Schließlich wurde zur Erfüllung der wirklichen Auflagerbedingungen geschritten und die dem Stabzuge $0-1-3-5 \dots 19-20$ ähnliche Figur $0''-1''-3''-5'' \dots 19''-20''$ gezeichnet. Der Punkt $0''$ fällt mit $0'$ zusammen, weil Knoten 0 festliegt, während $20''$ auf der Wagerechten durch $20'$ liegen muß, da der Knoten 20 auf einer wagerechten Auflagerbahn geführt wird; $0''-20''$ ist rechtwinklig zu $0-20$.*)

Damit sind die Verschiebungen $1''$, $3''$, ... der Knoten 1, 3, ... nach Größe, Richtung und Sinn bestimmt.

In Fig. 76 wurde noch die Biegungslinie der unteren Gurtung eingetragen. Die Eckpunkte 0_0 , 1_0 , 3_0 , ... derselben liegen senkrecht unter den entsprechenden Knoten 0, 1, 3, ... und auf den Wagerechten durch die Punkte $0'$, $1'$, $3'$, ...; die größte senkrechte Verschiebung ($28,8^{\text{mm}}$) erfährt der Knotenpunkt 9. Wird nur das Biegungspolygon gesucht, so braucht die Figur $0''-1''-2'' \dots 20''$ nicht gezeichnet zu werden.

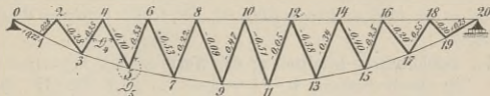


Fig. 77.

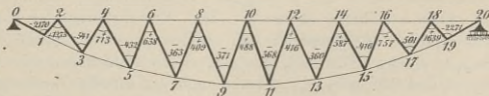


Fig. 78.

Will man die Verschiebungen sämtlicher Knotenpunkte haben, so muß man den in Fig. 77 kräftig ausgezogenen Stabzug $0-1-2-3 \dots 18-19-20$ untersuchen. In Fig. 77 sind die Längenänderungen der Stäbe (in mm) und in Fig. 78

*) Probe: Die Verschiebung $20''-20'$ muß im vorliegenden Falle gleich der Summe der Längenänderungen Δs der Stäbe der oberen Gurtung sein. Da diese Stäbe gleiche Länge und gleichen Querschnitt haben, so findet man:

$$\overline{20''-20'} = \frac{s}{EF} \sum \Delta s = \frac{360 \cdot 1592000^{\text{mm}}}{1800000 \cdot 278} = 1,15^{\text{cm}} = 11,5^{\text{mm}}.$$

die Werte $E\Delta\alpha$ (in *kly* f. d. *gem*) angegeben worden. Dem Leser wird empfohlen, diese Aufgabe zu lösen. Es ist zweckmäßig, zuerst den Knoten 10 und die Richtung des Stabes 10—9 als ruhend anzusehen.

42. — Wir wollen die im vorstehenden gelehrte Darstellungsweise der Verschiebungen kurz das *Stabzugverfahren* nennen; dasselbe liefert übersichtlichere Figuren als das Verfahren von Williot und verdient namentlich dann den Vorzug, wenn die nach Williot zur Bestimmung der Punkte m' auf den Δs zu errichtenden Lote sich unter sehr spitzen Winkeln schneiden. Dagegen erfordert das Stabzugverfahren etwas mehr Zeit, es sei denn, daß die Winkeländerungen noch anderweitig gebraucht werden, was beispielsweise der Fall ist, wenn für ein unter der Voraussetzung gelenkartiger Knoten berechnetes, in Wirklichkeit aber vernietetes Fachwerk die von den festen Verbindungen herrührenden Spannungsänderungen nachgewiesen werden sollen — eine Aufgabe, die sich, wie in der zweiten Abteilung dieses Bandes gezeigt werden wird, mit Hilfe der Winkeländerungen besonders einfach lösen läßt. Hierbei wird allerdings vorausgesetzt, daß diese Zusatzspannungen (welche auch *Nebenspannungen* heißen) und die Verschiebungen für ein und denselben Belastungszustand verlangt werden, ein Fall, der häufig eintritt.

Auch die Anwendung eines gemischten Verfahrens ist oft am Platze. So kann es z. B. vorteilhaft sein, bei Untersuchung der in den Figuren 50 bis 56 dargestellten Träger die für die einzelnen Scheiben erforderlichen Sonderpläne nach dem Stabzugverfahren zu zeichnen, während es im übrigen zweckmäßig ist, den früher befolgten Weg einzuschlagen.

43. **Zeichnerische Ermittlung der Werte ϱ .** Wir betrachten (wie in Nr. 39) einen Stabzug 0—1—2—...— n Fig. 79, dessen Knoten 0 und Stabrichtung 0—1 festliegen und suchen die nur von den Winkeländerungen $\Delta\varpi$ abhängigen Verschiebungen, nehmen also an, es seien sämtliche $\Delta s = 0$. Der Verschiebungsplan besteht dann aus einem Linienzuge $O—2'—3'—...—n'$, dessen Seiten $\overline{O2'} = \varrho_2 = s_2 \Delta\varpi_2$, $\overline{2'3'} = \varrho_3 = s_3 \Delta\varpi_3$, ... beziehungsweise rechtwinklig zu den Stäben s_2, s_3, \dots sind, und der offenbar bestimmt ist, sobald die Projektionen $\delta_2', \delta_3', \dots$ der Verschiebungen $O2', O3', \dots$ auf eine Gerade AB (deren Richtung aber keiner der Stabachsen parallel sein darf, damit sie von keiner Seite ϱ rechtwinklig geschnitten wird) gegeben sind.

Die Seitenverschiebungen δ' lassen sich sehr leicht finden. Dazu nehmen wir zunächst an, es ändere sich nur der Winkel ϖ_1 , es drehe sich also der Stabzug 1—2—...— n um $\Delta\varpi_1$. Punkt m , der vom Drehpunkte 1 den Abstand e haben möge, verschiebt sich in einer zur Geraden 1— m rechtwinkligen Richtung und um eine Strecke: $\delta_{m \cdot 1} = e \Delta\varpi_1$,

deren Projektion $\delta_{m \cdot 1}'$ auf die zur AB parallele mm_1 durch die Gleichung:

$$\delta_{m \cdot 1}' : \delta_{m \cdot 1} = x_1 : e$$

bestimmt ist, worin x_1 den Abstand des Knotens 1 von der Geraden mm_1 bedeutet. Man erhält:

$$\delta_{m \cdot 1}' = x_1 \Delta \mathfrak{S}_1$$

und, wenn sämtliche Winkel die vorgeschriebenen Änderungen $\Delta \mathfrak{S}$ erfahren:

$$(3) \dots \delta_m' = x_1 \Delta \mathfrak{S}_1 + x_2 \Delta \mathfrak{S}_2 + \dots + x_{m-1} \Delta \mathfrak{S}_{m-1} = \sum_1^{m-1} x \Delta \mathfrak{S}.$$

Die Winkeländerungen $\Delta \mathfrak{S}_m, \Delta \mathfrak{S}_{m+1}, \dots$ sind ohne Einfluß auf die Bewegung von m .

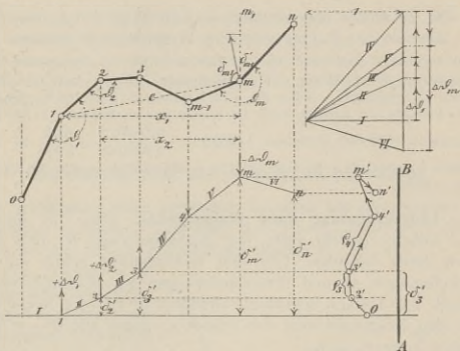


Fig. 79.

Der auf der rechten Seite der Gleichung (3) stehende Ausdruck läßt sich nun deuten als das auf den Punkt m bezogene statische Moment von Kräften $\Delta \mathfrak{S}_1, \Delta \mathfrak{S}_2, \dots, \Delta \mathfrak{S}_{m-1}$, welche in den links von m gelegenen Knotenpunkten angreifen und die Richtung AB haben, und hieraus (und aus Band I) ergibt sich das folgende Verfahren, die Werte ρ durch Zeichnung zu bestimmen.

Man zeichne zu den Gewichten*) $\Delta \mathfrak{S}_1, \Delta \mathfrak{S}_2, \dots, \Delta \mathfrak{S}_{m-1}$ mit der Polweite 1 (Zahleneinheit) ein Seilpolygon, dessen erste Seite zweckmäßig rechtwinklig zu AB angenommen wird. Die den Knotenpunkten

*) Der Ausdruck *Gewicht* ist hier natürlich in mathematischem Sinne zu nehmen. Die $\Delta \mathfrak{S}$ sind Zahlen, ihre Auftragung macht die Anfertigung eines besonderen Zahlenmaßstabes nötig.

2, 3, . . . m, . . . n entsprechenden, parallel zu AB gemessenen Abstände des Seilpolygons von der Seite I sind dann beziehungsweise $= \delta_2', \delta_3', \dots \delta_m', \dots \delta_n'$. Zieht man also durch die Punkte 1, 2, . . . m, . . . n des Seilpolygons Parallelen zur Seite I und zeichnet einen Linienzug $0'2' \dots m' \dots n'$, dessen Ecken in jenen Parallelen liegen, und dessen Seiten rechtwinklig zu den entsprechenden Seiten des Stabzuges sind, so erhält man die Werte:

$$\rho_2 = \overline{0' - 2'}, \rho_3 = \overline{2' - 3'}, \dots, \rho_n = \overline{(n-1)' - n'}.$$

Will man diese Strecken ρ in ν -facher Vergrößerung erhalten, so ersetze man die $\Delta \mathfrak{S}$ durch die Gewichte $\nu \Delta \mathfrak{S}$ oder die Polweite 1 durch die Polweite $\frac{1}{\nu}$.

In Fig. 79 wurde angenommen, daß die Winkel \mathfrak{S}_{m-1} und \mathfrak{S}_m abnehmen, alle übrigen \mathfrak{S} hingegen eine Vergrößerung erfahren.

Wir empfehlen dem Leser, die auf Tafel 2 in Fig. 76 angegebenen Werte ρ durch Zeichnung zu bestimmen und die Ergebnisse mit den durch die Rechnung gewonnenen zu vergleichen. Sollen die ρ im Maßstabe 2:1 erhalten werden, so sind (wenn die Polweite = 1 gewählt wird) die Knoten des im Maßstabe 1:300 gezeichneten Fachwerks mit den Gewichten $2 \cdot 300 \Delta \mathfrak{S} = \frac{600 \cdot E \Delta \mathfrak{S}}{1800000} = \frac{E \Delta \mathfrak{S}}{3000}$ zu belasten.

Dem Knoten 1 entspricht z. B. $E \Delta \mathfrak{S} = 2170 + 926 = 3096$, und es ist daher seine Belastung = 1,032.

44. Längenänderung einer Stabzugsehne. Eine für die Folge wichtige Aufgabe besteht darin, die Längenänderung der zwei Knoten 0 und n eines Stabzuges (Fig. 80) verbindenden Sehne durch die Längenänderungen Δs und Winkeländerungen $\Delta \mathfrak{S}$ auszudrücken. Wir bezeichnen den Abstand irgendeines Knotens m von der Sehne $0 - n$ mit y_m , den Neigungswinkel des Stabes s_m gegen die $0 - n$ mit φ_m und setzen $s_m \cos \varphi_m = e_m$.

Die Vergrößerung von \mathfrak{S}_m um $\Delta \mathfrak{S}_m$ erzeugt für sich allein $\Delta l = y_m \Delta \mathfrak{S}_m$, ein Ergebnis, das ohne weiteres aus Nr. 43 (und auch aus Fig. 80) folgt, während der Änderung der Stablänge s_m um Δs_m $\Delta l = \Delta s_m \cos \varphi_m$ entspricht. Im ganzen entsteht daher:

$$\Delta l = \sum_1^{n-1} y_m \Delta \mathfrak{S}_m + \sum_1^n \Delta s_m \cos \varphi_m^*)$$

und für den Fall $t = 0$ (wegen $\Delta s = \frac{\sigma s}{E}$):

$$(4) \quad \Delta l = \sum_1^{n-1} y_m \Delta \mathfrak{S}_m + \sum_1^n \frac{\sigma_m}{E} e_m.$$

* $\sum_1^{n-1} y_m \Delta \mathfrak{S}_m = \sum_{m=1}^{m=n-1} y_m \Delta \mathfrak{S}_m$ bedeutet die Summe der Werte $y_1 \Delta \mathfrak{S}_1, y_2 \Delta \mathfrak{S}_2, \dots$

Will man diese Formel auch dann anwenden, wenn Temperaturänderungen berücksichtigt werden sollen, so muß man die Spannung $\sigma = \frac{S}{F}$ um den Betrag εEt erhöhen. Vergl. den Schluß von Nr. 40.

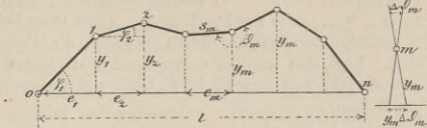


Fig. 80.

Der Ausdruck $\sum y \Delta s$ läßt sich als das auf die Sehne 0 — n bezogene statische Moment von Gewichten $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots$ deuten, welche in den Knoten 1, 2, ... des Stabzuges angreifen und parallel zu 0 — n sind. Es ist also möglich, diesen Ausdruck mit Hilfe eines Seilpolygons darzustellen.

§ 3.

Die Biegelinie als Seilpolygon betrachtet.

45. Auffassung eines beliebigen Polygons als Seilpolygon. Jeder aus Geraden bestehende Linienzug 0 — 1 — 2 — 3 — ... (Fig. 81) läßt sich als das Seilpolygon endlicher Kräfte P_1, P_2, P_3, \dots deuten, die in den Punkten 1, 2, 3, ... angreifen, und deren Richtungen innerhalb gewisser Grenzen willkürlich gewählt werden dürfen.

Das Größenverhältnis dieser Kräfte ist durch die Seiten eines zweiten Linienzuges $ABCD \dots$ bestimmt, dessen Ecken auf den durch einen beliebigen Pol O parallel zu den Geraden 0 — 1, 1 — 2, 2 — 3, ...

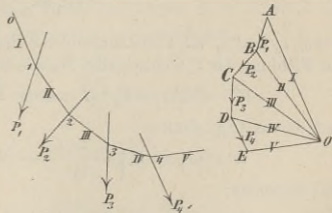


Fig. 81.

gezogenen Strahlen I, II, III, \dots liegen, und dessen Seiten AB, BC, CD, \dots die Richtungen der Kräfte P_1, P_2, P_3, \dots haben. Es verhält sich:

$$P_1 : P_2 : P_3 : \dots = \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} : \dots$$

Sollen alle Kräfte endlich werden, so darf die Richtung keiner Kraft in eine der beiden angrenzenden Seiten des Linienzuges 0 — 1 — 2 — 3 — ...

fallen, es darf also z. B. P_2 weder die Richtung von II noch die von III haben.

Wird ein Linienzug $0-1-2-3-\dots$ als das Seilpolygon *paralleler Kräfte* betrachtet (Fig. 82), so bestehen zwischen der Polweite H , den Kräften P und den in der Richtung der P gemessenen Abständen $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$ der Punkte $1, 2, 3, \dots$ von einer beliebigen Geraden AB einfache Beziehungen, die es gestatten, die P durch die η auszudrücken. Legt man nämlich durch den Punkt 2 eine Parallele zu AB , welche die Richtung von P_3 in $3'$ trifft und verlängert $1-2$ bis $3''$, so erhält man:

$$\overline{3''-3'} = (\eta_2 - \eta_1) \frac{\lambda_3}{\lambda_2}; \quad \overline{3-3'} = \eta_3 - \eta_2, \text{ also}$$

$$\overline{3''-3} = \overline{3''-3'} - \overline{3-3'} = (\eta_2 - \eta_1) \frac{\lambda_3}{\lambda_2} - (\eta_3 - \eta_2),$$

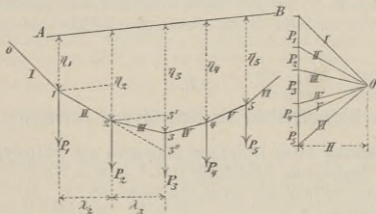


Fig. 82.

wobei λ_2 und λ_3 die Projektionen der Seiten $1-2$ und $2-3$ auf eine zur Richtung der P rechtwinklige Gerade bedeuten. Weiter findet man:

$$\overline{3''-3} : \lambda_3 = P_2 : H, \text{ mithin: } \overline{3''-3} = P_2 \frac{\lambda_3}{H}$$

und daraus folgt dann:

$$P_2 = H \left[\frac{\eta_2 - \eta_1}{\lambda_2} - \frac{\eta_3 - \eta_2}{\lambda_3} \right],$$

und allgemein:

$$(1) \quad P_m = H \left[\frac{\eta_m - \eta_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{\eta_{m+1} - \eta_m}{\lambda_{m+1}} \right].$$

46. Die Biegungslinie. An der Hand der vorstehenden Betrachtungen möge nun die Biegungslinie eines Stabzuges $0-1-2-\dots m \dots$ (Fig. 83) als Seilpolygon paralleler Kräfte gedeutet werden.

Den in einer senkrechten Ebene angenommenen Stabzug beziehen wir auf ein beliebiges rechtwinkliges Achsenkreuz x, y , dessen Wahl an die einzige Einschränkung gebunden ist, daß keiner der Neigungs-

winkel $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \dots$ der Stäbe $s_1, s_2, s_3 \dots$ gegen die x -Achse gleich 90° sein darf. Sodann setzen wir voraus, es seien die Verschiebungen sämtlicher Knotenpunkte in je zwei den Achsen x und y parallele Seitenverschiebungen Δx und Δy (das sind die Änderungen der Koordinaten x und y) zerlegt und denken uns die Δy auf den durch die Knotenpunkte parallel zur y -Achse gelegten Geraden von einer beliebig angenommenen Geraden AB aus aufgetragen.

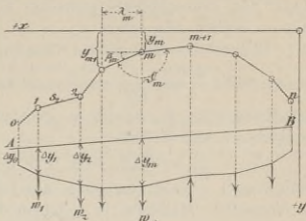


Fig. 83.

Den Linienzug, welcher die Endpunkte der Δy verbindet, nennen wir die *Biegelinie* und die von dieser Linie, von der AB und den $\Delta y_0, \Delta y_n$ begrenzte Fläche die *Biegungsfläche für die Richtung y* . Die der y -Achse parallelen Kräfte, deren Seilpolygon die Biegelinie ist, bezeichnen wir mit $w_1, w_2, \dots, w_m, \dots$; sie sind, wenn die Polweite = 1 ist, bestimmt durch:

$$(2) \quad w_m = \frac{\Delta y_m - \Delta y_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{\Delta y_{m+1} - \Delta y_m}{\lambda_{m+1}}$$

Differentiieren wir nun die Gleichung

$$y_{m-1} - y_m = s_m \sin \beta_m$$

und ersetzen (da es sich um verschwindend kleine Verschiebungen handelt) das Differentialzeichen durch das Zeichen Δ , so erhalten wir:

$$\Delta y_{m-1} - \Delta y_m = \Delta s_m \sin \beta_m + s_m \cos \beta_m \Delta \beta_m$$

und (nach Division durch $\lambda_m = s_m \cos \beta_m$):

$$\frac{\Delta y_m - \Delta y_{m-1}}{\lambda_m} = - \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \beta_m - \Delta \beta_m.$$

Ebenso ergibt sich:

$$\frac{\Delta y_{m+1} - \Delta y_m}{\lambda_{m+1}} = - \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg} \beta_{m+1} - \Delta \beta_{m+1},$$

weshalb entsteht:

$$w_m = - \Delta \beta_m + \Delta \beta_{m+1} - \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \beta_m + \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg} \beta_{m+1}.$$

Nun ist aber: $\beta_{m+1} + 180^\circ - \beta_m = \vartheta_m$,

mithin: $\Delta \beta_{m+1} - \Delta \beta_m = \Delta \vartheta_m$,

und es findet sich schließlich

$$(3) \quad w_m = \Delta \vartheta_m - \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \beta_m + \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg} \beta_{m+1}.$$

Für $\beta_m = 90^\circ$ oder $\beta_{m+1} = 90^\circ$ wird w_m unendlich groß, und es leuchtet ein, daß die zu Anfang der Untersuchung hinsichtlich der Lage des Achsenkreuzes gemachte Einschränkung geboten ist, wenn alle w endlich sein sollen.

Bleiben die anfänglichen Stabtemperaturen ungeändert, ist also für jeden Stab: $\frac{\Delta s}{s} = \frac{S}{EF} = \frac{\sigma}{E}$, und besitzen sämtliche Stäbe die gleiche Elastizitätsziffer E , so ist es zweckmäßig, die Biegungslinie als das Seilpolygon von Kräften

$$(4) \quad w_m = E\Delta\vartheta_m - \sigma_m \operatorname{tg} \beta_m + \sigma_{m+1} \operatorname{tg} \beta_{m+1}$$

aufzufassen. Wählt man dann die Polweite E , so erhält man die Δy in demselben Maßstabe, in welchem der Stabzug gezeichnet ist. Will man die Δy in ν -mal größerem Maßstabe darstellen, so mache man die Polweite $= \frac{E}{\nu}$. Es ist dieses Verfahren — bei überall gleichem E — auch dann zu empfehlen, wenn Temperaturänderungen berücksichtigt werden sollen; man muß dann aber die Spannungen $\sigma = \frac{S}{F}$ um εEt vergrößern. Vergl. den Schluß von Nr. 40.

Nach Aufzeichnung des Seilpolygons sind die Δy bestimmt, sobald die Schlußlinie AB gegeben ist, sobald also beispielsweise zwei Verschiebungen Δy bekannt sind.

Zahlenbeispiel (Figuren auf Tafel 2). Es sollen die senkrechten Seitenverschiebungen der Knotenpunkte der oberen Gurtung des in Fig. 84 abgebildeten Fischbauchträgers bestimmt werden. Die Belastung ist in Fig. 66 angegeben; den Kräfteplan zeigt Fig. 67. *) Die Stablängen s und Querschnittsinhalte F sind in Fig. 68 zusammengestellt, die Spannkraft S und Spannungen σ in Fig. 69. Die roten Zahlen in Fig. 84 bedeuten die nach Nr. 40 ermittelten Werte $E\Delta\alpha$ (*kgf* f. d. *qcm*) der Dreieckswinkel, aus denen sich die Winkel $\vartheta_2, \vartheta_4, \dots$ zusammensetzen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} E\Delta\vartheta_2 &= +1719 + 1373 + 243 = 3335^k \text{ f. d. } qcm; & E\Delta\vartheta_4 &= 298 + 713 + 25 = 1036; \\ E\Delta\vartheta_6 &= 1371; & E\Delta\vartheta_8 &= 457; & E\Delta\vartheta_{10} &= 1246; & E\Delta\vartheta_{12} &= 581; & E\Delta\vartheta_{14} &= 1025; \\ E\Delta\vartheta_{16} &= 1150; & E\Delta\vartheta_{18} &= 3856. \end{aligned}$$

Da die Neigungswinkel sämtlicher Obergurtstäbe gegen die wagerechte x -Achse gleich Null sind, so folgt aus Gleich. (4)

$$w_m = E\Delta\vartheta_m.$$

Die Gewichte w_m wurden im Maßstabe: 1000^{kg} f. d. *qcm* = 5^{mm} aufgetragen. Der Längenmaßstab der Trägerzeichnung ist 1:300, der für die Verschiebungen ist 600 mal so groß (nämlich 2:1), und es wurde daher die Polweite $\frac{E}{600} = \frac{1800000}{600} = 3000^{kg}$ f. d. *qcm* = 15^{mm} gewählt. Nach Aufzeichnung des Seilpolygons wurde die Schlußlinie AB mittels der Bedingungen festgelegt, daß die senk-

*) Vergl. Nr. 41; dort ist die Formänderung der unteren Gurtung dieses Trägers untersucht worden.

rechten Verschiebungen der Knoten 0 und 20 gleich Null sind. Die für die Durchbiegungen gefundenen Werte wurden in die Figur eingeschrieben.

Im vorliegenden Falle lassen sich auch die wagerechten Verschiebungen der Knoten 2, 4, . . . der oberen Gurtung sehr schnell angeben. So erfährt 8 eine Verschiebung nach links, welche gleich der Summe der (in die Fig. 84 eingetragenen) Verkürzungen der Stäbe 0—2, 2—4, 4—6, 6—8 ist, also = 1,09 + 1,12 + 1,16 + 1,17 = 4,54^{mm}. Für den Knoten 18 erhält man die wagerechte Verschiebung 10,32^{mm}. Das ganze Verfahren ist sehr übersichtlich und liefert auch recht zuverlässige Ergebnisse.

Wir empfehlen dem Leser, zur Übung auch die Biegelinie der *unteren* Gurtung dieses Trägers durch ein Seilpolygon darzustellen. Zuerst müssen die den einzelnen Stäben entsprechenden Werte $\sigma \operatorname{tg} \beta$ berechnet werden, wobei die Vorzeichen streng zu beachten sind. Für die Stäbe 0—1 bis 7—9 ist β negativ, für 11—13 bis 19—20 positiv (vergl. auch die Textfigur 83 auf S. 101). Man erhält mit den in der Fig. 68 angegebenen Höhenzahlen:

$$\text{für den Stab } 0-1: \sigma \operatorname{tg} \beta = -478 \frac{1,268}{2,4} = -253,$$

$$\text{„ „ „ } 1-3: \sigma \operatorname{tg} \beta = -492 \frac{2,546 - 1,268}{3,0} = -210,$$

für die folgenden Stäbe der Reihe nach:

$$\sigma \operatorname{tg} \beta = -151; -98; -47; 0; +47; +98; +151; +219; +264.$$

Die $E\Delta s$ sind für die Knoten 1, 3, 5, . . . 19:

$$3096; 1400; 1166; 869; 850; 904; 679; 988; 1522; 3446,$$

und es ergeben sich mithin für die Gewichte w_m nach Gleichung (3) die Werte (*klgr* f. d. *qcm*)

$$w_1 = 3096 + 253 - 210 = 3139$$

$$w_3 = 1400 + 210 - 151 = 1459$$

$$w_5 = 1166 + 151 - 98 = 1219$$

$$w_7 = 869 + 98 - 47 = 920$$

$$w_9 = 850 + 47 + 0 = 897$$

$$w_{11} = 904 - 0 + 47 = 951$$

$$w_{13} = 679 - 47 + 98 = 730$$

$$w_{15} = 988 - 98 + 151 = 1041$$

$$w_{17} = 1522 - 151 + 219 = 1590$$

$$w_{19} = 3446 - 219 + 264 = 3491.$$

Die Polweite wähle man wie vorhin = 3000^{kg} f. d. *qcm*; man erhält dann die senkrechten Verschiebungen im Maßstabe 2:1.

Will man die senkrechten Verschiebungen *sämtlicher* Knotenpunkte des Trägers mit Hilfe *eines* Seilpolygons darstellen, so betrachte man den in Fig. 77 (Seite 95) durch kräftige Linien dargestellten Stabzug. Dieser letztere Weg führt aber nur dann zum Ziele, wenn alle Füllungsstäbe (wie im vorliegenden Beispiele) eine gegen die Senkrechte geneigte Lage haben.

Wollte man die senkrechten Verschiebungen der Knotenpunkte *beider* Gurtungen des in Fig. 85 abgebildeten Trägers durch *ein* Seilpolygon darstellen, und zu diesem Zwecke den Stabzug 0—1—2—3—4—5— . . . 9—11—10—13— . . . 16 untersuchen, so würde man unendlich große w -Kräfte erhalten, da den senkrechten Stäben Winkel $\beta = 90^\circ$ entsprechen. Hat man aber für dieses Fachwerk die Biegelinie der einen Gurtung ermittelt, so findet man diejenige der anderen sehr schnell mit Hilfe der Bedingung, daß sich die senkrechten Verschiebungen entsprechender Punkte (z. B. 1 und 0, 3 und 2, u. s. w.) um die Längenänderung des Verbindungsstabes unterscheiden. Verschiebt sich also beispielsweise 4 um δ_4 nach abwärts und verkürzt sich der Stab 5—4 um Δs , so ist $\delta_5 = \delta_4 + \Delta s$.

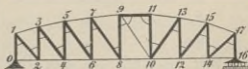


Fig. 85.

beitsgleichung $\Sigma \bar{Q}\delta = \Sigma \bar{S}\Delta s$ an. Da sich $m-1$ gegen m im Sinne der $(+y)$ um $\Delta y_{m-1} - \Delta y_m$ verschiebt und $(m+1)$ gegen m um $\Delta y_{m+1} - \Delta y_m$, so ist die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte (mit Rücksicht auf Gleichung 2, Seite 101):

$$\Sigma \bar{Q}\delta = -\frac{1}{\lambda_m}(\Delta y_{m-1} - \Delta y_m) - \frac{1}{\lambda_{m+1}}(\Delta y_{m+1} - \Delta y_m) = w_m.$$

Die absoluten Werte der in den drei Stäben o_m, d_m, d_{m+1} infolge der gedachten Belastung entstehenden Spannkkräfte seien $= \mu_1, \mu_2, \mu_3$; sie können auf die in Fig. 86c angegebene Weise ermittelt werden, worauf dann

$$(5) \quad w_m = \Sigma \bar{Q}\delta = \Sigma \bar{S}\Delta s = -\mu_1 \Delta o_m + \mu_2 \Delta d_m + \mu_3 \Delta d_{m+1}$$

erhalten wird. Das erste Glied ist negativ, weil der Stab o_m durch μ_1 gedrückt wird.

Bezeichnet man nun mit h_m die parallel zur y -Achse gemessene Höhe des Fachwerks im Punkte m , so findet man:

$$\mu_1 : \frac{1}{\lambda_m} = \lambda_m \sec \beta_m : h_m \quad \text{und hieraus} \quad \mu_1 = \frac{\sec \beta_m}{h_m},$$

$$\mu_2 : \frac{1}{\lambda_m} = d_m : h_m = \lambda_m \sec \varphi_m : h_m \quad \text{,,} \quad \mu_2 = \frac{\sec \varphi_m}{h_m},$$

ebenso:

$$\mu_3 = \frac{\sec \varphi_{m+1}}{h_m},$$

weshalb der oben für w_m angegebene Ausdruck übergeht in:

$$(6) \quad w_m = \frac{-\Delta o_m \sec \beta_m + \Delta d_m \sec \varphi_m + \Delta d_{m+1} \sec \varphi_{m+1}}{h_m}.$$

Ganz ähnlich wird entwickelt:

$$(7) \quad w_k = \frac{+\Delta u_k \sec \gamma_k - \Delta d_k \sec \varphi_k - \Delta d_{k+1} \sec \varphi_{k+1}}{h_k}.$$

Die Polweite ist $= 1$ (Zahleneinheit) oder $= \frac{1}{\nu}$ zu wählen, je nachdem die Δy in demselben oder im ν -fachen Maßstabe der Trägerzeichnung dargestellt werden sollen.

Es dürfte hier noch eine Bemerkung über die Vorzeichen der Winkel β, γ, φ am Platze sein.

Liegt die durch den Knoten r parallel zur y -Achse gezogene Gerade zwischen den Knoten $(r-1)$ und $(r+1)$, wo r eine beliebige Ordnungsziffer bedeutet, so genügt die Festsetzung, daß unter β, γ, φ die *spitzen* Neigungswinkel der Stäbe gegen die x -Achse zu verstehen sind. Ob diese Winkel nach oben oder unten positiv gezählt werden, ist gleichgültig, weil die Ausdrücke für w_m und w_k nur die Sekanten enthalten und $\sec(-\alpha) = \sec(+\alpha)$ ist. — Anders in dem in Fig. 87 dargestellten, zuweilen bei Bogenträgern vorkommenden Falle. Bedeutet

hier r einen Knotenpunkt der unteren Gurtung, so ist $\sec \varphi_r$ positiv oder negativ, je nachdem $r - 1$ links oder rechts von r liegt, und $\sec \varphi_{r+1}$ positiv oder negativ, je nachdem sich $r + 1$ rechts oder links von r befindet. Auch ist zu beachten, daß die w -Kräfte in der Reihenfolge $\dots w_{r-1}, w_r, w_{r+1}, \dots$ durch das Seilpolygon verbunden werden müssen, und daß h_r der in der Richtung der y gemessene Abstand des Knotens r von der Verlängerung des Stabes $(r - 1) - (r + 1)$ ist.

Zur Abkürzung führen wir die Bezeichnungen ein:

$$\Delta' o = \Delta o \sec \beta,$$

$$\Delta' u = \Delta u \sec \gamma,$$

$$\Delta' d = \Delta d \sec \varphi$$

und schreiben:

$$(8) \quad w_m = \frac{-\Delta' o_m + \Delta' d_m + \Delta' d_{m+1}}{h_m}$$

$$(9) \quad w_k = \frac{+\Delta' u_k - \Delta' d_k - \Delta' d_{k+1}}{h_k}$$

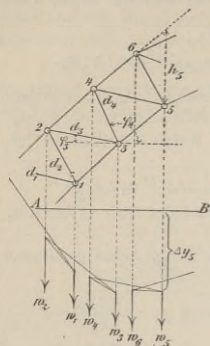


Fig. 87.

Für das Fachwerk in Fig. 86 haben $\Delta' o$, $\Delta' u$, $\Delta' d$ dieselben Vorzeichen wie die Längenänderungen Δo , Δu , Δd ; sie sind also positiv oder negativ je nachdem die entsprechenden Stäbe gedehnt oder verkürzt werden. Wendet man aber die Gleichungen (8) und (9) auf das Fachwerk in Fig. 87 an, so hat (wenn r einen Knoten der unteren Gurtung bedeutet) $\Delta' d_r$ dasselbe oder das entgegengesetzte Vorzeichen wie Δd_r je nachdem $r - 1$ links oder rechts von r liegt, und $\Delta' d_{r+1}$ dasselbe oder das entgegengesetzte Vorzeichen von $\Delta' d_{r+1}$ je nachdem $r + 1$ rechts oder links von r liegt.

Die $\Delta' o$, $\Delta' u$, $\Delta' d$ bestimme man durch Zeichnung und benutze hierzu ein in großem Maßstabe angefertigtes Trägernetz.

Zahlenbeispiel. Es sollen die senkrechten Verschiebungen sämtlicher Knotenpunkte des in Fig. 88 dargestellten schmiedeeisernen Netzwerks unter der Voraussetzung bestimmt werden, daß in jedem Knoten der unteren Gurtung die Last 12^t angreift und E den überall gleichen Wert 1800000^{kg} f. d. qem hat. Der Träger ist symmetrisch in bezug auf die Senkrechte durch die Mitte. Es genügt deshalb, die eine Hälfte zu untersuchen.

In die rechte Hälfte des Trägernetzes wurden die Spannkraften in *Tonnen* und die Querschnitte in *qem* (eingeklammerte Zahlen) eingetragen, und in die linke Hälfte die 180-fachen, mit den Sekanten der Stabneigungswinkel multiplizierten Längenänderungen (in *cm*). Für einen wagerechten Gurtungsstab ist $\Delta' o = \Delta o$ bzw. $\Delta' u = \Delta u$, z. B. für den Stab 1 - 3:

$$180 \Delta' o = \frac{Oo}{\left(\frac{1}{180} E\right) F} = \frac{48000^{kg} \cdot 400^{cm}}{10000 \cdot 70} = 27,4^{cm}.$$

Für einen Füllungsstab erhält man (wegen $d = \lambda \sec 45^\circ = \lambda \sqrt{2}$):

$$180 \Delta' d = 180 \Delta d \frac{d}{\lambda} = \frac{Dd^2}{(\frac{1}{180}E)F\lambda} = \frac{2D\lambda}{10000F}$$

z. B. für den Stab 1—2:

$$180 \Delta' d = \frac{2 \cdot 34000 \cdot 200}{10000 \cdot 50} = 27,2^{mm}.$$

Die Gleichungen (8) und (9) liefern nun:

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{300} [+24,0 + 22,7 - 27,2] = 0,0975 & w_4 &= \frac{1}{300} [+28,8 + 22,7] = 0,2575 \\ w_2 &= \frac{1}{300} [+27,4 + 27,2 - 18,0] = 0,1830 & w_5 &= \frac{1}{300} 26,2 = 0,1310 \\ w_3 &= \frac{1}{300} [+25,3 + 18,0 - 22,7] = 0,1030 \end{aligned}$$

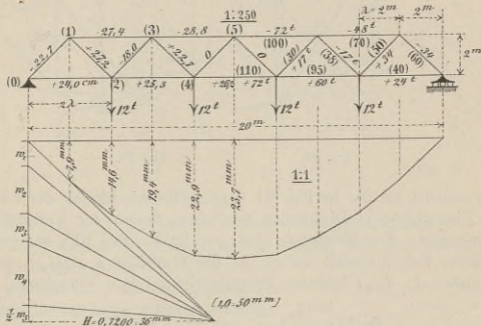


Fig. 88.

Die Werte w und die Polweite H sind Zahlen. Wählt man $H = 1$, so liefert das Seilpolygon die 180-fachen Durchbiegungen im Maßstabe der Trägerzeichnung (d. i. in 1 : 250). In Fig. 88 wurden die Durchbiegungen im Maßstabe 1 : 1 dargestellt und deshalb die Polweite $H = \frac{1 \cdot 250}{300} = 0,72$ angenommen. Der Maßstab für die Zahlen w lautet: $1 = 50^{mm}$.

II. Fall. Gesucht sind die senkrechten Verschiebungen der Knotenpunkte der unteren Gurtung eines (in senkrechter Ebene angenommenen) Fachwerks mit Vertikalen (*Ständerfachwerk*).

Wir bezeichnen (Fig. 89 und 90) mit

- | | | |
|-------------|--|------------------------------|
| o_m | die Länge des Obergurtstabes | } im m^{ten} Felde, |
| u_m | " " " Untergurtstabes | |
| d_m | " " " der Diagonale | |
| h_m | " " " Vertikale mm , | |
| β_m | den Neigungswinkel von o_m gegen die Wagerechte, | |
| γ_m | " " " " u_m " " " | |
| φ_m | " " " " d_m " " " | |
| λ_m | die Feldweite. | |

d. i.

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} w_m &= \frac{1}{h_m} [-\Delta' o_m + \Delta' u_{m+1} + \Delta' d_m - \Delta' d_{m+1} - a_{m-1} + b_m] \\ \text{[Fig. 91.]} \quad \text{worin } a_{m-1} &= \Delta h_{m-1} \frac{h_m}{\lambda_m} \quad \text{und} \quad b_m = \Delta h_m \frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}}. \end{aligned} \right.$$

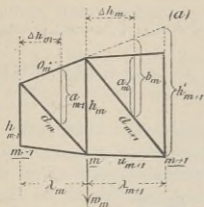


Fig. 91a.

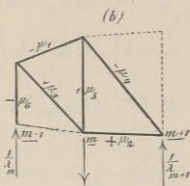


Fig. 91b.

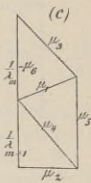


Fig. 91c.

Die Werte a_{m-1} , b_m (welche dasselbe Vorzeichen haben, wie Δh_{m-1} bezieh. Δh_m) werden zweckmäßig auf die in Fig. 91a angegebene Weise durch Zeichnung bestimmt; auch ist es häufig zweckmäßig, die Multiplikationen der Längenänderungen mit den Sekanten zeichnerisch auszuführen und die Glieder des Klammerausdruckes mit dem Zirkel zu addieren. Nur achte man hierbei auf die Vorzeichen!

Durch Betrachtung des Spiegelbildes der Fig. 91 ergibt sich für die in der Fig. 92 dargestellte Anordnung der Füllungsstäbe (und mit der dort für h'_{m-1} angegebenen Bedeutung):

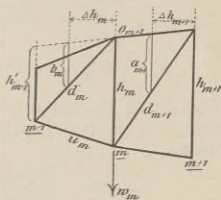


Fig. 92.

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} w_m &= \frac{1}{h_m} [-\Delta' o_{m+1} + \Delta' u_m - \Delta' d_m + \Delta' d_{m+1} - a_{m+1} + b_m] \\ \text{[Fig. 92.]} \quad \text{worin } a_{m+1} &= \Delta h_{m+1} \frac{h_m}{\lambda_{m+1}} \quad \text{und} \quad b_m = \Delta h_m \frac{h'_{m-1}}{\lambda_m}. \end{aligned} \right.$$

Ist links von der Vertikale mm eine linkssteigende Diagonale und rechts davon eine rechtssteigende angeordnet, Fig. 93, so erhält man:

$$w_m = -\mu_1 \Delta o_m - \mu_2 \Delta o_{m+1} + \mu_3 \Delta d_m + \mu_4 \Delta d_{m+1} + \mu_5 \Delta h_m - \mu_6 \Delta h_{m-1} - \mu_7 \Delta h_{m+1},$$

$$\mu_1 = \frac{\sec \beta_m}{h_m}; \quad \mu_2 = \frac{\sec \beta_{m+1}}{h_m}; \quad \mu_3 = \frac{\sec \varphi_m}{h_m}; \quad \mu_4 = \frac{\sec \varphi_{m+1}}{h_m};$$

$$\mu_5 = \mu_1 \sin \beta_m - \mu_2 \sin \beta_{m+1} = \frac{1}{h_m} (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1}); \quad \mu_6 = \frac{1}{\lambda_m};$$

$$\mu_7 = \frac{1}{\lambda_{m+1}} \text{ mithin:}$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_m = \frac{1}{h_m} [-\Delta' o_m - \Delta' o_{m+1} + \Delta' d_m + \Delta' d_{m+1} + c_m - a_{m-1} - a_{m+1}] \\ \text{worin } c_m = \Delta h_m (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1}); \quad a_{m-1} = \Delta h_{m-1} \frac{h_m}{\lambda_m}; \\ a_{m+1} = \Delta h_{m+1} \frac{h_m}{\lambda_{m+1}}. \end{array} \right.$$

[Fig. 93.]

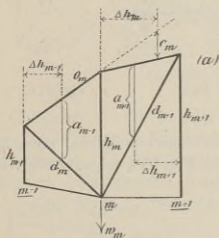


Fig. 93a.

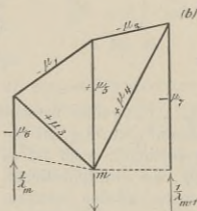


Fig. 93b.

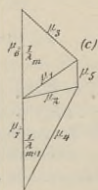


Fig. 93c.

Liegt der in Fig. 93a dargestellte Wert c_m oberhalb der Verlängerung von o_m (ist also $\beta_{m+1} > \beta_m$), so hat c_m das entgegengesetzte Vorzeichen von Δh_m .

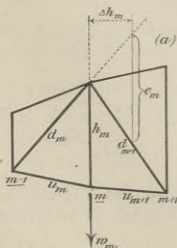


Fig. 94a.

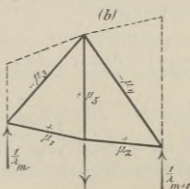


Fig. 94b.

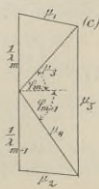


Fig. 94c.

Bei der in Fig. 94 abgebildeten Anordnung ergibt sich für die m^{te} Vertikale die Spannkraft

$$\begin{aligned} \mu_5 &= \mu_3 \sin \varphi_m + \mu_4 \sin \varphi_{m+1} = \frac{\sec \varphi_m}{h_m} \sin \varphi_m + \frac{\sec \varphi_{m+1}}{h_m} \sin \varphi_{m+1} \\ &= \frac{\text{tg } \varphi_m + \text{tg } \varphi_{m+1}}{h_m} \end{aligned}$$

und man findet deshalb:

$$(13) \quad \begin{cases} w_m = \frac{1}{h_m} [+ \Delta' u_m + \Delta' u_{m+1} - \Delta' d_m - \Delta' d_{m+1} + e_m] \\ \text{[Fig. 94.]} \quad \text{worin } e_m = \Delta h_m (\text{tg } \varphi_m + \text{tg } \varphi_{m+1}). \end{cases}$$

III. Fall. *Ständerfachwerk*; gesucht sind die senkrechten Verschiebungen der Knotenpunkte der *oberen* Gurtung. Man gelangt auf dem vorhin eingeschlagenen Wege zu den folgenden, den in Fig. 95, 96, 97, 98 dargestellten Anordnungen der Füllungsstäbe entsprechenden Formeln:

$$(14) \quad \begin{cases} w_m = \frac{1}{h_m} [- \Delta' o_m + \Delta' u_{m+1} + \Delta' d_m - \Delta' d_{m+1} - b_m + a_{m+1}] \\ \text{[Fig. 95.]} \quad \text{worin } b_m = \Delta h_m \frac{h'_{m-1}}{\lambda_m}; \quad a_{m+1} = \Delta h_{m+1} \frac{h_m}{\lambda_{m+1}}. \end{cases}$$

$$(15) \quad \begin{cases} w_m = \frac{1}{h_m} [- \Delta' o_{m+1} + \Delta' u_m - \Delta' d_m + \Delta' d_{m+1} + a_{m-1} - b_m] \\ \text{[Fig. 96.]} \quad \text{worin } b_m = \Delta h_m \frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}}; \quad a_{m-1} = \Delta h_{m-1} \frac{h_m}{\lambda_m}. \end{cases}$$

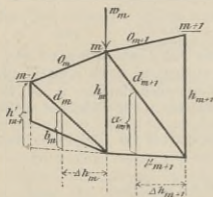


Fig. 95.

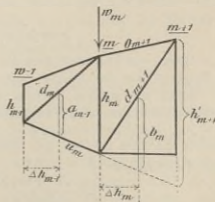


Fig. 96.

$$(16) \quad \begin{cases} w_m = \frac{1}{h_m} [- \Delta' o_m - \Delta' o_{m+1} + \Delta' d_m + \Delta' d_{m+1} - e_m] \\ \text{[Fig. 97.]} \quad \text{worin } e_m = \Delta h_m (\text{tg } \varphi_m + \text{tg } \varphi_{m+1}). \end{cases}$$

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_m = \frac{1}{h_m} [+ \Delta' u_m + \Delta' u_{m+1} - \Delta' d_m - \Delta' d_{m+1} - c_m + a_{m-1} + a_{m+1}] \\ \text{wo } c_m = \Delta h_m (\operatorname{tg} \gamma_m - \operatorname{tg} \gamma_{m+1}); \quad a_{m-1} = \Delta h_{m-1} \frac{h_m}{\lambda_m}; \\ a_{m+1} = \Delta h_{m+1} \frac{h_m}{\lambda_{m+1}}. \end{array} \right.$$

[Fig. 98.]

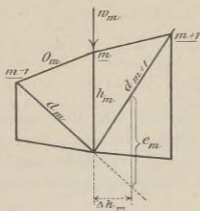


Fig. 97.

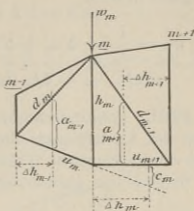


Fig. 98.

Hat man die Biegungslinie der einen Gurtung bestimmt, so findet man diejenige der anderen mittels der Bedingung, daß sich die beiden senkrecht übereinander gelegenen Knotenpunkte m gegeneinander um Δh_m verschieben.

Ein Zahlenbeispiel findet sich in Nr. 49.

Die Berechnung der Werte w_m mit Hilfe der Gleichungen (8) — (17) ist dem in Nr. 46 angegebenen Verfahren vorzuziehen, sobald die Änderungen der Dreieckswinkel nicht ohnehin zu anderen Zwecken (z. B. Untersuchung von Nebenspannungen) berechnet werden müssen.

Anmerkungen zu Nr. 47.

1. — Liegt ein Fachwerk von der unter *Fall I* behandelten Art vor, und wird nur die Biegungslinie der oberen Gurtung verlangt, so ist es zuweilen zweckmäßig, die den Knoten der unteren Gurtung entsprechenden Gewichte w auf die benachbarten oberen Knotenpunkte zu verteilen. Von w_m in Fig. 99 kommt auf den Knoten $(m-1)$ der Teil: $w_m'' = w_m \frac{\lambda_{m+1}}{a}$ und auf $(m+1)$ der Teil: $w_m' = w_m \frac{\lambda_m}{a}$. Die Verteilung von w_r liefert:

$$w_r'' = -w \frac{\lambda_{r+1}}{a} \quad \text{und} \quad w_r' = +w_r \frac{\lambda_r}{a}.$$

Nun wird w_m'' zu w_{m-1} addiert, w_m' zu w_{m+1} u. s. w., so daß sich z. B. für den oberen Knoten $(m-1)$ im ganzen ergibt:

$$w_{m-1} = w_m'' + w_{m-1} + w_{m-2}'.$$

Dieses Verfahren ist namentlich dann am Platz, wenn die durch einen Knoten r der unteren Gurtung parallel zur Verschiebungsrichtung gelegte Gerade nicht zwischen $r-1$ und $r+1$ liegt. Bei derartigen Fachwerken kann es vorkommen, daß einzelne Stabachsen mit der Verschiebungsrichtung zusammenfallen, wie beispielsweise d_5 in

Fig. 100. Man berechne dann die Werte w zunächst ohne Rücksicht auf diejenigen Füllungsstäbe, welche die Richtung der w haben und deren Einfluß auf die w dann nachträglich gesondert anzugeben ist. So findet man für das Fachwerk in Fig. 100 unter der vorläufigen Annahme $\Delta d_5 = 0$ die Werte:

$$\begin{aligned} w_2 &= \frac{1}{h_2} (-\Delta' o_2 + \Delta' d_2 + \Delta' d_3); & w_3 &= \frac{1}{h_3} (+\Delta' u_3 - \Delta' d_3 - \Delta' d_4) \\ w_4 &= \frac{1}{h_4} (-\Delta' o_4 + \Delta' d_4); & w_5 &= \frac{1}{h_5} (+\Delta' u_5 - \Delta' d_6) \\ w_6 &= \frac{1}{h_6} (-\Delta' o_6 + \Delta' d_6 + \Delta' d_7) & & \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

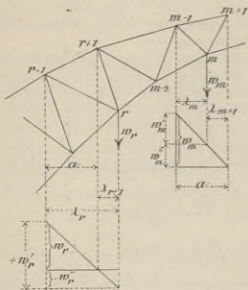


Fig. 99.

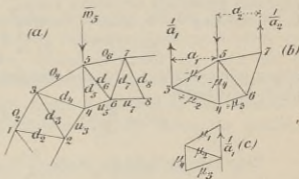


Fig. 100.

sodann: $\bar{w}_3 = w_2' + w_3$; $\bar{w}_5 = w_4 + w_5 + w_6''$; $\bar{w}_7 = w_6' + w_7 + w_8''$; u. s. w. wobei zu beachten ist, daß $\Delta' d_3$ das entgegengesetzte Vorzeichen von Δd_3 hat, weil der Knoten 3 links von der Senkrechten durch 2 liegt (vergl. Seite 106). Der Einfluß von Δd_5 auf \bar{w}_5 ist $= -\mu_4 \Delta d_5$, worin μ_4 den mittels des Kräfteplanes in Fig. 100c bestimmten Wert bedeutet. w_7 ist unabhängig von Δd_5 und der Einfluß von Δd_5 auf \bar{w}_3 ist $= +\frac{\Delta d_5}{a_1}$, weshalb schließlich erhalten wird:

$$\bar{w}_3 = w_2' + w_3 + \frac{\Delta d_5}{a_1}; \quad \bar{w}_5 = w_4 + w_5 + w_6'' - \mu_4 \Delta d_5; \quad \bar{w}_7 = w_6' + w_7 + w_8''.$$

Ähnlich wird verfahren, wenn die Biegungslinie der unteren Gurtung gesucht wird. Die den oberen Knoten entsprechenden Gewichte w_m werden in den angeführten Sonderfällen, zweckmäßig auf die Knotenpunkte der unteren Gurtung verteilt.

2. — Es verdient hervorgehoben zu werden, daß die Spannkraft μ durch parallele äußere Kräfte erzeugt werden und sich infolgedessen auch mit Hilfe der im ersten Bande (IX. Abschnitt) für den einfachen Fachwerkbalken entwickelten Formeln berechnen lassen. So sind z. B. die Spannkraft in den Stäben o_m, d_m, d_{m+1} des in der (Fig. 86) dargestellten Fachwerks, falls auf dieses nur äußere Kräfte, welche die Richtung der w haben, wirken:

$$\begin{aligned} O_m &= -\frac{M_m \sec \beta_m}{h_m}; & D_m &= \left(\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \right) \sec \varphi_m; \\ D_{m+1} &= \left(\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} \right) \sec \varphi_{m+1} \end{aligned}$$

und es ergeben sich (da die gedachten Lasten $\frac{1}{\lambda_m}$ und $\frac{1}{\lambda_{m+1}}$ die Momente: $M_{m-1}=0$, $M_m=1$, $M_{m+1}=0$ erzeugen) für die Spannkräfte μ_1, μ_2, μ_3 die Werte:

$$\mu_1 = -\frac{\sec \beta_m}{h_m}; \quad \mu_2 = +\frac{\sec \varphi_m}{h_m}; \quad \mu_3 = +\frac{\sec \varphi_{m+1}}{h_m}.$$

Auch leuchtet ein, daß die Glieder des Ausdrucks:

$$w_m = -\frac{\Delta o_m \sec \beta_m}{h_m} + \frac{\Delta d_m \sec \varphi_m}{h_m} + \frac{\Delta d_{m+1} \sec \varphi_{m+1}}{h_m} = -\frac{\Delta' o_m}{h_m} + \frac{\Delta' d_m}{h_m} + \frac{\Delta' d_{m+1}}{h_m}$$

als diejenigen Spannkräfte gedeutet werden dürfen, welche in den Stäben o_m, d_m, d_{m+1} entstehen, wenn $M_{m-1}=0$ und $M_{m+1}=0$ angenommen werden, während M_m der Reihe nach die Werte $\Delta o_m, \Delta d_m, \Delta d_{m+1}$ beigelegt werden.

Bestimmt man nun diese Spannkräfte mit Hilfe des im § 36 des ersten Bandes mitgeteilten Zimmermannschen Verfahrens, so gelangt man zu der in Fig. 101 angegebenen Darstellung der Glieder von w_m . Es wurde auf der durch den Knoten 2 in der Richtung von w_2 gelegten Geraden abgetragen:

$$\frac{\bar{2}h}{2} = \frac{\Delta o_2}{\lambda_2}; \quad \frac{\bar{2}i}{2} = \frac{\Delta d_2}{\lambda_2}; \quad \frac{\bar{2}k}{2} = \frac{\Delta d_3}{\lambda_3};$$

sodann wurden durch h, i, k zum Obergurtstabe o_2 die Parallelen hh', ii', kk' gezogen und erhalten:

$$\bar{h}h' = \frac{\Delta' o_2}{h_2}; \quad \bar{2}i' = \frac{\Delta' d_2}{h_2}; \quad \bar{2}k' = \frac{\Delta' d_3}{h_2}.$$

Trägt man an Stelle der Werte $\frac{\Delta o_2}{\lambda_2}, \frac{\Delta d_2}{\lambda_2}, \frac{\Delta d_3}{\lambda_3}$ die Werte $\Delta o_2 \frac{e}{\lambda_2}, \Delta d_2 \frac{e}{\lambda_2}, \Delta d_3 \frac{e}{\lambda_3}$ auf, wo e eine beliebige, aber für alle Knotenpunkte gleich groß angenommene Strecke bedeutet, und zeichnet man das Seilpolygon der Kräfte:

$$w_m = e \left[-\frac{\Delta' o_m}{h_m} + \frac{\Delta' d_m}{h_m} + \frac{\Delta' d_{m+1}}{h_m} \right]$$

$$w_k = e \left[+\frac{\Delta' u_k}{h_k} - \frac{\Delta' d_k}{h_k} - \frac{\Delta' d_{k+1}}{h_k} \right] \text{ (vergl. Fig. 86),}$$

so geben die Ordinaten desselben die mit e multiplizierten Verschiebungen an. Sind die Strecken $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots$ gleich groß ($=\lambda$) oder hat die Mehrzahl derselben die gleiche Größe λ , so wähle man $e=\lambda$. Die schließlich nötig werdende Division der Ordinaten des Seilpolygons durch e bezieh. λ kann natürlich auch durch Wahl einer geeigneten Polweite umgangen werden.

Ähnliche Untersuchungen lassen sich auch für das Fachwerk mit Vertikalen durchführen. So folgt z. B. aus der für die Vertikale mm in Fig. 93 bei unten angreifender Belastung gefundenen Formel

$$V_m = \frac{M_m}{h_m} (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1})$$

ohne weiteres, daß die Längenänderung Δh_m dieser Vertikalen nur auf das Gewicht w_m Einfluß besitzt, und daß die Größe dieses Einflusses: $\frac{\Delta h_m}{h_m} (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1})$ ist.

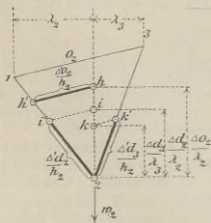


Fig. 101.

Es läßt sich dieser Wert als diejenige Spannkraft deuten, welche in der fraglichen Vertikale entsteht, sobald das Moment $M_m = \Delta h_m$ wird.

Für die Vertikale mm in Fig. 95 wurde bei oben angreifender Belastung gefunden:

$$V_m = \frac{M_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{M_m}{\lambda_m} \left[1 - \frac{\lambda_m (\operatorname{tg} \beta_m + \operatorname{tg} \gamma_{m+1})}{h_m} \right],$$

ein Ausdruck, der sich leicht umformen läßt in:

$$V_m = \frac{M_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{M_m h'_{m-1}}{\lambda_m h_m}$$

und aus dem dann gefolgert werden kann, daß der Einfluß von Δh_m auf den Wert w_{m-1} gleich $\frac{\Delta h_m}{\lambda_m}$ ist und auf w_m gleich $\left(-\frac{\Delta h_m}{\lambda_m} \frac{h'_{m-1}}{h_m} \right)$.

48. Bestimmung der Längenänderung einer Stabzugsehne. Wir betrachten einen Stabzug $0-1-2-\dots-n$, der in einer senkrechten Ebene liegen möge, und dessen Sehne $0n$ mit der Wagerechten den Winkel α bildet. Die senkrechten Seitenverschiebungen seien mit Hilfe eines Seilpolygons gefunden, dessen Gewichte w_m nach Nr. 47 (also ohne Zuhilfenahme der Winkeländerungen) berechnet worden sind. Gesucht sei die Änderung Δl der Länge l der Sehne $0n$. Bedeutet:

η_m die Länge des vom Knoten m auf die Sehne $0n$ gefällten Lotes,

φ_m den Neigungswinkel des Stabes s_m gegen $0n$,

so ist nach Seite 98:

$$\Delta l = \sum_1^{n-1} \eta_m \Delta \varphi_m + \sum_1^n \Delta s_m \cos \varphi_m,$$

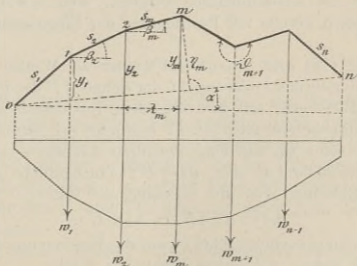


Fig. 102.

und diese Beziehung wird zweckmäßig so umgeformt, daß Δl durch die bereits bei Ermittlung der Biegungslinie benutzten Werte w ausgedrückt wird. Dazu führen wir ein:

$$\Delta s_m = w_m + \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \beta_m - \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg} \beta_{m+1} \quad (\text{nach Gleich. (3) auf Seite 101),}$$

$$r_m = y_m \cos \alpha, \quad \varphi_m = \beta_m - \alpha,$$

wo β_m den Neigungswinkel des Stabes s_m gegen die Wagerechte,

y_m den in senkrechter Richtung gemessenen Abstand des Knotens m von der Geraden On

bedeutet, und erhalten:

$$\Delta l = \cos \alpha \left[\sum_1^{n-1} y_m w_m + c \right], \quad \text{wolin}$$

$$c = \sum_1^{n-1} y_m \left(\frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \beta_m - \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \operatorname{tg} \beta_{m+1} \right) + \sum_1^n \frac{\Delta s_m \cos (\beta_m - \alpha)}{\cos \alpha}.$$

Der Stab s_m liefert zu dem Werte c die drei Glieder:

$$- y_{m-1} \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \beta_m, \quad + y_m \frac{\Delta s_m}{s_m} \operatorname{tg} \beta_m, \quad + \frac{\Delta s_m \cos (\beta_m - \alpha)}{\cos \alpha}$$

deren Summe $\left[\text{wegen } y_m - y_{m-1} = \lambda_m (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \alpha) = \frac{s_m \sin (\beta_m - \alpha)}{\cos \alpha} \right]$

gleich

$$\frac{\Delta s_m}{\cos \alpha} [\operatorname{tg} \beta_m \sin (\beta_m - \alpha) + \cos (\beta_m - \alpha)] = \Delta s_m \sec \beta_m$$

ist, weshalb sich ergibt: $c = \sum_1^n \Delta s_m \sec \beta_m$ und

$$(18) \quad \Delta l = \cos \alpha \left(\sum_1^{n-1} y_m w_m + \sum_1^n \Delta s_m \sec \beta_m \right).$$

Diese Formel ist außerordentlich bequem, weil sowohl die w als auch die $\Delta s \sec \beta$ bereits zur Bestimmung der Biegungslinie berechnet worden sind.

Gleichung (18) setzt voraus, daß keiner der Winkel β gleich 90° ist. Will man nun die Änderung Δl der Sehne AB des in der Fig. 103 dargestellten Fachwerks mit Endvertikalen, für dessen obere Gurtung die Biegungslinie bereits nach Nr. 47 bestimmt sei, durch die Werte w ausdrücken — eine für die Folge wichtige Aufgabe — so denke man sich die starren Stäbe $0A'$, $A'A$, nB' , $B'B$ hinzugefügt. $A'A$ und $B'B$ erhalten die Richtung AB , und es ergibt sich dann

$$\Delta l = \Delta (AB) = \Delta (A'B'),$$

so daß die Aufgabe zurückgeführt ist auf die Bestimmung der Änderung der Länge der Sehne $A'B'$ eines Stabzuges $A'012 \dots m \dots nB'$, dessen Anfangspunkt und Endpunkt in der fraglichen Sehne liegen. Man erhält

$$(19) \quad \Delta l = \sum_0^n y_m w_m + \sum_1^n \Delta' o_m,$$

wolin $\Delta' o_m = \Delta o_m \sec \beta_m$, vergl. Seite 106.

worin zu setzen ist:

$$w_0 = \frac{1}{h_0} (\Delta' u_0 - \Delta' d_1 - c_0)$$

$$w_n = \frac{1}{h_n} (\Delta' u_n - \Delta' d_n - c_n).$$

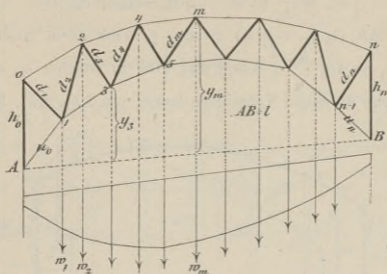


Fig. 104.

c_0 und c_n haben die in Fig. 103 angegebene Bedeutung. Die Summe $\Sigma \Delta' d_m$ erstreckt sich über alle schrägen Füllungsstäbe (d_1 bis d_n).

Aufgabe. Es soll die Biegelinie der unteren Gurtung des in der Fig. 105 dargestellten Fachwerkträgers bestimmt werden. Bei (0) hat der Träger ein festes, bei (5) ein bewegliches Auflagergelenk. Letzteres wird auf einer unter dem Winkel ψ geneigten Geraden geführt.

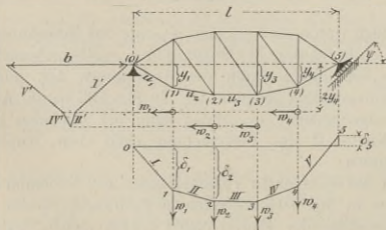


Fig. 105.

Nachdem die Gewichte w_1 bis w_4 mittels Formel (10) berechnet worden sind, wird mit der Polweite 1 das Seilpolygon $I II III IV V$

gezeichnet und die Schlußlinie eingetragen. Diese Linie ist durch die Bedingungen bestimmt, daß der Knoten (5) die senkrechte Verschiebung $\delta_5 = -\Delta l \sin \psi$ erfährt, wo Δl die Änderung der Stabzugsehne 0—5 bedeutet, und daß ferner $\delta_0 = 0$ ist. Für Δl aber ergibt sich, wenn 0—5 als Sehne des Stabzuges 0—1—2—3—4—5 aufgefaßt wird, der Wert:

$$\Delta l = -\sum_1^4 y_m w_m + \sum_1^5 \Delta' u_m, *)$$

und zwar ist das erste Glied negativ, weil die Knoten 1, 2, 3, 4 unterhalb der Sehne 0—5 liegen. Werden nun w_1, w_2, w_3, w_4 als wagerechte Kräfte betrachtet, die von 0—5 beziehungsweise die Abstände $\alpha y_1, \alpha y_2, \alpha y_3, \alpha y_4$ haben, wo α eine beliebige Zahl bedeutet,**) und wird zu diesen wagerechten Kräften mit der Polweite 1 ein Seilpolygon gezeichnet, so besteht zwischen der Strecke b , welche die äußersten Seiten dieses Polygons auf der Verlängerung von 0—5 abschneiden und den Gewichten w die Beziehung:

$$1 \cdot b = \sum_1^4 \alpha y_m w_m, \text{ und hieraus folgt: } \sum_1^4 y_m w_m = \frac{b}{\alpha}.$$

Da dem Seilpolygon $I II \dots$ und $I' II'' \dots$ dieselbe Polweite entspricht, so ist $I' \perp I, II'' \perp II, \dots$. In Fig. 105 wurde $\alpha = 2$ gewählt, weshalb sich schließlich

$$\delta_5 = -\Delta l \sin \psi = \sin \psi \left(\frac{1}{2} b - \sum_1^5 \Delta' u_m \right)$$

ergibt. Fig. 105 setzt voraus, daß δ_5 negativ ist, daß sich also Punkt (5) nach oben verschiebt.

Werden die δ in ν -facher Vergrößerung dargestellt (werden also die Polweiten 1 durch die Polweiten $1:\nu$ ersetzt) so müssen in die Formel für δ_5 natürlich auch die ν -fachen Werte $\Delta' u$ eingeführt werden.

49. Auffassung der Biegungsfläche als Momentenfläche. Berechnung der Durchbiegungen. Es sei 0'1'2' . . . m' . . . n' (Fig. 106) die Biegelinie des Stabzuges 0—1—2— . . . m . . . n für die Verschiebungsrichtung AA' und AB die Schlußlinie. Die Durchbiegung an der Stelle m sei δ_m , und der zwischen dem Seilpolygon und der Geraden 0'n' gelegene Teil von δ_m möge mit η_m bezeichnet werden. Den Stabzug denken wir uns in einer senkrechten Ebene.

Die von der Biegelinie und der Geraden 0'n' eingeschlossene Fläche läßt sich als die *Culmannsche* Momentenfläche eines einfachen Balkens $A'B'$ deuten, dessen bewegliches Auflagergelenk auf einer zu

*) Die Bedeutung von $\Delta' u$ ist auf Seite 106 erklärt.

**) Je flacher der Stabzug ist, desto größer muß α gewählt werden, damit eine deutliche Figur erhalten wird.

AA' rechtwinkligen Bahn geführt wird, dessen Stützpunkte auf den durch 0 und n zur Verschiebungsrichtung gezogenen Parallelen liegen und der mit $w_1, w_2, \dots, w_m, \dots, w_{n-1}$ belastet ist. Sind die w mittels einer der Gleichungen (3) oder (6) bis (17) berechnet worden, so ist die Polweite des Seilpolygons gleich der Zahl 1, und es besteht

dann zwischen dem Biegemomente $M_{w \cdot m}$ des Balkenquerschnitts m und der Verschiebung η_m die Beziehung:

$$(22) \quad 1 \cdot \eta_m + M_{w \cdot m}$$

Wurde w_m aus Gleich. (4), Seite 102, gefunden, so ist die Polweite = E , und es ergibt sich:

$$(23) \quad \eta_m = \frac{M_{w \cdot m}}{E}$$

Hiermit ist die Bestimmung der Durchbiegungen η auf die Berechnung der Biegemomente eines einfachen Balkens zurückgeführt. Sind die Verschiebungen δ_0 und δ_n bekannt, so findet man nach Ermittlung der η die δ mit Hilfe von:

$$\delta_m = \eta_m + \delta_0 \frac{x_m'}{l} + \delta_n \frac{x_m}{l}$$

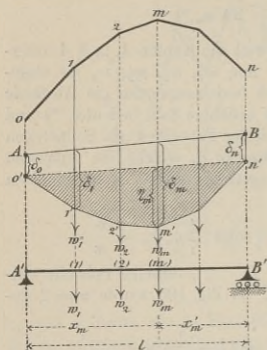


Fig. 106.

Die Berechnung der Momente ist namentlich dann sehr einfach (und meistens schneller zum Ziele führend als die Aufzeichnung des Seilpolygons) wenn der Balken $A'B'$ symmetrisch belastet wird und die w -Kräfte in gleichen Abständen λ wirken. Man beachte dann das im § 33 des ersten Bandes gelehrt Verfahren und berechne zuerst die Verhältnisse $M_w | \lambda$.*)

Zahlenbeispiel. Für den auf Seite 107 (Fig. 88) untersuchten Fachwerkbalken wurde erhalten:

$$w_1 = 0,0975; \quad w_2 = 0,1830; \quad w_3 = 0,1030; \quad w_4 = 0,2575; \quad w_5 = 0,1310,$$

und zwar entsprechen diese Werte den 180-fachen Längenänderungen der Stäbe. Die w wurden mittels der Gleichungen (8) und (9) berechnet, weshalb nach (22):

$$\eta_m = \frac{M_{w \cdot m}}{180} = \frac{\lambda (M_w \cdot m | \lambda)}{180}$$

und mit $\lambda = 2000 \text{ mm}$:

$$\eta_m = \frac{100}{9} (M_w \cdot m | \lambda) \text{ Millimeter.}$$

*) $M | \lambda = \frac{M}{\lambda}$

Die Berechnung der Querkräfte Q und der $(M_w | \lambda)$ geschieht nun nach folgendem Ansatz:

$Q_5 = \frac{1}{2} w_5 = 0,0655$	$(M_{w.1} \lambda) = Q_1 = 0,7065$
$\quad + 0,2575 = w_4$	$\quad + 0,6090 = Q_2$
$\frac{Q_4 = 0,3230}{+ 0,1030 = w_3}$	$(M_{w.2} \lambda) = \frac{1,3155}{+ 0,4260 = Q_3}$
$\frac{Q_3 = 0,4260}{+ 0,1830 = w_2}$	$(M_{w.3} \lambda) = \frac{1,7415}{+ 0,3230 = Q_4}$
$\frac{Q_2 = 0,6090}{+ 0,0975 = w_1}$	$(M_{w.4} \lambda) = \frac{2,0645}{+ 0,0655 = Q_5}$
$\frac{Q_1 = 0,7065}{}$	$(M_{w.5} \lambda) = \frac{2,1300}{}$

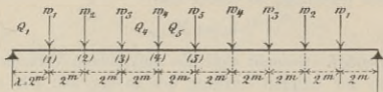


Fig. 107.

Hierauf erhält man (da $\delta_0 = 0$ und $\delta_n = 0$ ist, vergl. Fig. 106) die Durchbiegungen:

$$\delta_1 = \eta_1 = \frac{100}{9} \cdot 0,7065 = 7,85^{mm}; \quad \delta_2 = \frac{100}{9} \cdot 1,3155 = 14,6^{mm};$$

$$\delta_3 = 19,35^{mm}; \quad \delta_4 = 22,9^{mm}; \quad \delta_5 = 23,7^{mm};$$

dieselben stimmen mit den in Fig. 88 durch Zeichnung ermittelten Verschiebungen überein.

50. Aufgaben. Die folgenden Beispiele zeigen die Anwendung der in Nr. 45 bis 48 entwickelten Gesetze auf die Ermittlung der Biegelinien der wichtigsten statisch bestimmten Träger. Die Form der Lösungen wählen wir so, daß auch die rechnerische Bestimmung der Durchbiegungen erledigt wird, indem wir angeben, in welcher Weise die Biegelinien am zweckmäßigsten als Momentenlinien gedeutet werden.

Wir setzen voraus, daß die Werte w mittels der Gleichung (3) oder mit Hilfe von (6) bis (17) berechnet worden sind. Wird Gleichung (4) angewendet, so liefern die folgenden Regeln die E -fachen Durchbiegungen.

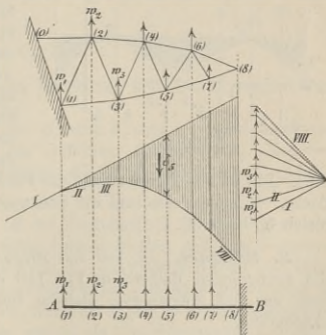


Fig. 108.

1. Beispiel. Gesucht sind die Durchbiegungen $\delta_2, \delta_3, \dots$ des in Fig. 108 dargestellten *Freitragers*.

Man zeichne das Seilpolygon der gedachten Kräfte w_1 bis w_7 (welche in Fig. 108 negativ, also nach oben gerichtet angenommen wurden) und mache die erste Seite desselben zur Schlußlinie. Der neben δ_5 stehende Pfeil gibt die Richtung der positiven Verschiebungen an. Die schraffierte Biegungsfläche läßt sich als Momentenfläche eines Balkens AB deuten, der bei B eingespannt, sonst aber frei und mit w_1, w_2, \dots belastet ist. Hat man also die Momente M_{w_1}, M_{w_2}, \dots dieses Balkens berechnet, so findet man:

$$\delta_m = M_{w \cdot m}.$$

2. Beispiel. Gesucht sind die senkrechten Verschiebungen der Knotenpunkte der unteren Gurtung des in der Fig. 109 abgebildeten *Fachwerkbalkens mit überstehenden Enden*. Ob A oder B auf einer wagerechten Bahn verschiebbar ist, ist gleichgültig.

Man bestimme (durch Zeichnung oder Rechnung) die Momentenlinie $C'A'NB'D'$ eines bei C' und D' frei aufliegenden Balkens, auf welchen die Lasten w_1, w_2, \dots (die in Fig. 109 teils positiv, also abwärts wirkend, teils negativ, mithin aufwärts gerichtet, angenommen wurden) wirken, bringe hierauf die Auflagersenkrechten in A' und B' mit der Momentenlinie zum Schnitte und lege durch diese beiden Punkte die Schluß-

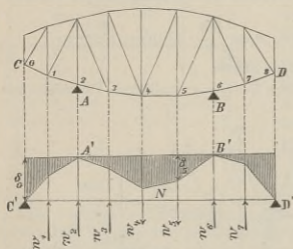


Fig. 109.

linie. Die in der Figur schraffierte Fläche ist die verlangte Biegungsfläche. Beispielsweise sind die Senkungen der Knotenpunkte 0 und 5 gleich δ_0 bzw. δ_5 .

3. Beispiel. Es soll die Biegungsfläche der oberen Gurtung des *Gerberschen Balkens* in Fig. 110 ermittelt werden. Die Verteilung der auf wagerechten Bahnen beweglichen Auflagergelenke ist gleichgültig.

Nach Berechnung der w , welche teils positiv, teils negativ ausfallen, werden die folgenden Momentenlinien aufgetragen:

$C'ND'$	für den einfachen Balken $C'D'$	mit den Lasten w_1 bis w_3 ,
$D'LE'$	" " "	" " " " w_4 " w_{12} ,
$E'RF'$	" " "	" " " " w_{13} " w_{15} .

Hierauf werden die Senkrechten durch die Punkte A und B mit der Momentenlinie $D'LE'$ in A' und B' zum Schnitte gebracht, die Strecken:

$$\overline{A'A''} = \delta' = \text{Senkung des Punktes } A,$$

$$\overline{B'B''} = \delta'' = \text{ " " " } B$$

abgetragen und schließlich der durch A'' und B'' gehende Linienzug $C'D''E''F'$, dessen Ecken senkrecht unter D und E liegen, eingezeichnet.

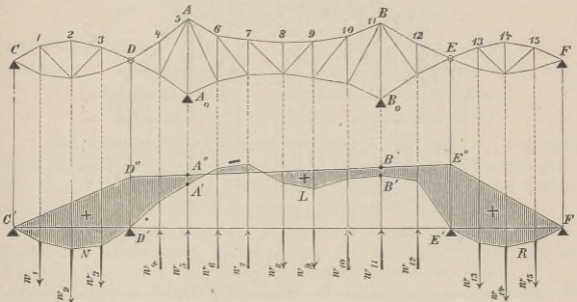


Fig. 110.

Die Fläche zwischen diesem Linienzuge und den Momentenlinien ist die gesuchte Biegungsfläche.

Bei starren Stützen A_0 und B_0 sind δ' und δ'' beziehungsweise gleich den Längenänderungen der Vertikalen AA_0 und BB_0 . Erleiden diese Stäbe Verkürzungen, so liegen A'' und B'' oberhalb A' und B' , sonst unterhalb.

4. Beispiel. Gesucht ist die Biegelinie für die obere Gurtung des in Fig. 111 dargestellten *Fachwerkbogens mit drei Gelenken*. Die Werte w_1 bis w_3 und w_5 bis w_7 seien nach Nr. 46 mit Hilfe der Winkeländerungen $\Delta\vartheta$ berechnet worden. Ist auch w_4 bekannt, so läßt sich die Momentenlinie des durch die Lasten w beanspruchten einfachen Balkens $A'B'$ ermitteln, worauf die Durchbiegungen $\delta_m = M_{w..m}$ gegeben sind. Um w_4 berechnen zu können, muß man die Winkeländerung $\Delta\vartheta_4$ haben, und diese läßt sich wie folgt bestimmen.

Nach Gleich. (4), Seite 98 ist die durch die Änderungen der Winkel ϑ und der Spannungen σ in den Gurtstäben bedingte Änderung Δl der Stützweite AB zunächst für den Fall $t = 0$:

$$\Delta l = y_1 \Delta \vartheta_1 + y_2 \Delta \vartheta_2 + y_3 \Delta \vartheta_3 + y_4 \Delta \vartheta_4 + y_5 \Delta \vartheta_5 + y_6 \Delta \vartheta_6 + y_7 \Delta \vartheta_7 + \frac{\sigma_1}{E} \lambda_1 + \frac{\sigma_2}{E} \lambda_2 + \dots + \frac{\sigma_8}{E} \lambda_8$$

und man erhält somit, bei gegebener Verschiebung Δl , für $\Delta \vartheta_4$ den Wert:

$$(24) \quad \Delta \vartheta_4 = \frac{\Delta l - \sum_1^9 y_m \Delta \vartheta_m - \sum_5^7 y_m \Delta \vartheta_m - \sum_1^8 \frac{\sigma_m}{E} \lambda_m}{y_4}$$

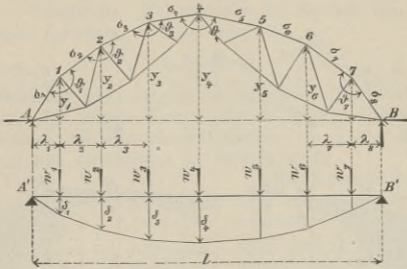


Fig. 111.

Bei starren Stützen ist $\Delta l = 0$. Sind die Kämpfer A und B durch eine Zugstange vom Querschnitte F_0 verbunden, so ist Δl gleich der

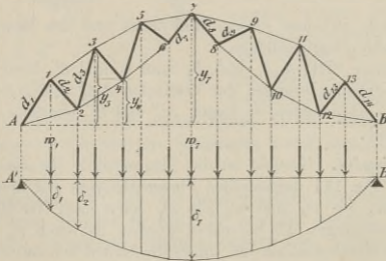


Fig. 112.

Verlängerung dieser den Horizontalschub H des Bogens aufnehmenden Stange; es folgt dann $\Delta l = \frac{Hl}{EF_0}$. Sollen Temperaturänderungen berücksichtigt werden, so sind die Spannungen σ in Gleich. (24) zu

ersetzen durch die Werte $\sigma_m + \varepsilon E t_m$, während für Δl der Wert $\frac{Hl}{EF_0} + \varepsilon t_0 l$ einzuführen ist. Hierbei bedeutet t_m die Temperaturänderung für den Stab s_m der oberen Gurtung und t_0 die Temperaturänderung für die Stange AB .

Will man die Biegelinie ermitteln, ohne die Winkeländerungen zu berechnen, so bestimmt man w_1 bis w_6 (Fig. 112) und w_8 bis w_{13} mit Hilfe der in Nr. 47 entwickelten Formeln und wendet dann die Beziehung:










$$\Delta l = \sum_1^6 y_m w_m + y_7 w_7 + \sum_8^{13} y_m w_m + \sum_1^{14} \Delta' d_m^*)$$

an. Man erhält:

$$w_7 = \frac{\Delta l - \sum_1^6 y_m w_m - \sum_8^{13} y_m w_m - \sum_1^{14} \Delta' d_m}{y_7}$$

Zahlenbeispiel. (Figuren auf Tafel 2.) Es soll die Biegelinie der unteren Gurtung des in Fig. 113 abgebildeten Fachwerkbogens mit drei Gelenken für den Fall bestimmt werden, daß auf den Träger nur eine im Scheitelgelenk angreifende Einzellast 1000^{kg} wirkt.

Sämtliche Stäbe sind aus Winkeleisen zusammengesetzt; die Inhalte ihrer Querschnitte (ohne Abzug für Nietlöcher) sind in der folgenden Tabelle, sowie in Fig. 113 zusammengestellt worden.

	Form des Querschnitts	Winkeleisensorte	Inhalt des Querschnitts
Obere Gurtung		80 · 80 · 10 ^{mm}	30 ^{cm}
Untere „		90 · 90 · 11 „	74 „
Endvertikale		90 · 90 · 11 „	37 „
Vertikale bei (1)		80 · 80 · 10 „	30 „
„ „ (2) (3) (4)		60 · 60 · 10 „	22 „
1 ^{te} Diagonale		90 · 90 · 11 „	37 „
2 ^{te} und 5 ^{te} Diagonale		80 · 80 · 10 „	30 „
3 ^{te} Diagonale		70 · 70 · 10 „	26 „
4 ^{te} „		60 · 60 · 10 „	22 „

*) Die Stäbe $A1, 6-7, 7-8$ und $13B$, werden hier zweckmäßig mit d_1, d_7, d_8, d_{14} bezeichnet.

Die in die linke Hälfte des Trägernetzes (Fig. 113) eingeschriebenen Zahlen geben die Spannkkräfte (in *kilogr.*) an; dieselben können u. a. sehr schnell mit Hilfe eines Cremonaschen Kräfteplanes erhalten werden. [Der vorliegende Träger wurde im ersten Bande, § 45 und § 46, für verschiedene Belastungsweisen untersucht. Die in Fig. 113 angegebenen Spannkkräfte stimmen mit den früher mit S_a bezeichneten überein und sind — in *Tonnen* ausgedrückt — in der Tabelle am Anfang von § 46, Band I, enthalten. Die dort fehlende Spannkraft im ersten Stabe des Untergurts findet man, indem man den Horizontalschub $H = 1875^{kg}$ mit der Sekante des Stabneigungswinkels multipliziert; es ergibt sich der *Druck*: $1875 \frac{3}{3} \frac{3}{3} = 2081^{kg}$.]

Die schwarzen Zahlen in der rechten Hälfte des Trägernetzes (Fig. 113) bedeuten die Stablängen (in *cm*), während Fig. 114 eine übersichtliche Zusammenstellung der 10000-fachen Längenänderungen (aufgetragen im Maßstabe 1:40) bietet. Diese Werte sind für $E = 1800000^{kg}$ f. d. *qcm* (Schweißeisen) berechnet worden, und es ergab sich beispielsweise für den ersten Stab der oberen Gurtung:

$$10000 \Delta o_1 = \frac{10000 \cdot O_1 o_1}{EF} = + \frac{10000 \cdot 315 \cdot 300}{1800000 \cdot 30} = + 17,5^{cm} \\ = + 175^{mm},$$

für die Diagonale des ersten Feldes:

$$10000 \Delta d_1 = \frac{10000 \cdot D_1 d_1}{EF} = - \frac{10000 \cdot 509 \cdot 485}{1800000 \cdot 37} = - 37,1^{cm} \\ = - 371^{mm},$$

und für die Endvertikale:

$$10000 \Delta h_0 = \frac{10000 \cdot V_0 h_0}{EF} = + \frac{10000 \cdot 400 \cdot 525}{1800000 \cdot 37} = + 31,5^{cm} \\ = + 315^{mm}.$$

Nach Berechnung dieser Längenänderungen wurden die 10000-fachen Werte $\Delta'u$, $\Delta'd$ (vergl. Seite 108) durch Zeichnung ermittelt. Für den ersten Stab der unteren Gurtung wurde z. B. der durch eine kräftig ausgezogene, mit dem fraglichen Stabe zusammenfallende Linie dargestellte Wert $10000 \Delta'u = - 577^{mm}$ gefunden, für die erste Diagonale: $10000 \Delta'd = - 600^{mm}$. Die Gewichte w wurden mittels Gleichung (10), Seite 109, bestimmt, da die Füllungsglieder die in der Fig. 91 dargestellte Anordnung haben. Es ist im vorliegenden Falle $\Delta'o = \Delta o$ und $b_m = a_m$, vergl. Fig. 91, also:

$$w_m = \frac{1}{h_m} (-\Delta o_m + \Delta'u_{m+1} + \Delta'd_m - \Delta'd_{m+1} - a_{m-1} + a_m).$$

Die 10000-fachen Werte a sind ebenfalls in der Fig. 114 angegeben*). Man erhält (mit Weglassung des Faktors 10000)

*) Die Strecke, welche a_3 darstellt, wurde — weil sehr klein — nicht eingezeichnet.

$$\begin{array}{l|l}
 w_1 = \frac{1}{3810} [-175 - 600 - 600 + 477 - 400 + 201] = -0,29 & y_1 w_1 = -417,6^{mm} \\
 w_2 = \frac{1}{2090} [-372 - 633 - 477 + 300 - 201 + 77] = -0,49 & y_2 w_2 = -1254,4 \\
 w_3 = \frac{1}{1390} [-529 - 663 - 300 - 104 - 77 - 11] = -0,89 & y_3 w_3 = -2990,4 \\
 w_4 = \frac{1}{1410} [-473 - 616 + 104 - 601 + 11 - 53] = -1,15 & y_4 w_4 = -4416,0 \\
 \hline
 \Sigma \Delta' u = -(577 + 600 + 633 + 663 + 616) \cdot 2 = -6178. & \Sigma y w = -9078,4
 \end{array}$$

Da nun im vorliegenden Falle:

$$\Delta l = 2 \sum_1^4 y w + y_5 w_5 + \Sigma \Delta' u = 0$$

ist, so folgt

$$w_5 = - \frac{\left(\sum_1^4 y w \right) 2 + \Sigma \Delta' u}{y_5} = + \frac{9078,4 \cdot 2 + 6178}{4000} = + 6,08.$$

Die Ordinaten $\delta_1, \delta_2, \dots$ der gesuchten Biegelinie sollen zunächst berechnet und zu diesem Zwecke als Biegemomente eines mit w_1, w_2, \dots belasteten einfachen Balkens gedeutet werden. Für die Werte $(M_w | \lambda)$ erhält man dann folgenden Ansatz:

$$\begin{array}{l|l}
 Q_5 = \frac{1}{2} w_5 = 3,04 & (M_{w \cdot 1} | \lambda) = Q_1 = 0,22 \\
 \quad \quad \quad - 1,15 = w_4 & \quad \quad \quad + 0,51 = Q_2 \\
 \hline
 Q_4 = + 1,89 & (M_{w \cdot 2} | \lambda) = \quad + 0,73 \\
 \quad \quad \quad - 0,89 = w_3 & \quad \quad \quad + 1,00 = Q_3 \\
 \hline
 Q_3 = + 1,00 & (M_{w \cdot 3} | \lambda) = \quad + 1,73 \\
 \quad \quad \quad - 0,49 = w_2 & \quad \quad \quad + 1,89 = Q_4 \\
 \hline
 Q_2 = + 0,51 & (M_{w \cdot 4} | \lambda) = \quad + 3,62 \\
 \quad \quad \quad - 0,29 = w_1 & \quad \quad \quad + 3,04 = Q_5 \\
 \hline
 Q_1 = + 0,22 & (M_{w \cdot 5} | \lambda) = \quad + 6,66
 \end{array}$$

Da nun in die Formel für w die 10000-fachen Längenänderungen eingeführt wurden, so ergibt sich:

$$\delta_m = \frac{M_w}{10000} = \frac{\lambda (M_{w_m} | \lambda)}{10000} = \frac{3000 (M_{w_m} | \lambda)}{10000}, \text{ also:}$$

$$\begin{array}{ll}
 \delta_1 = 0,3 \cdot 0,22 = 0,066^{mm}; & \delta_2 = 0,3 \cdot 0,73 = 0,219^{mm}; \\
 \delta_3 = 0,3 \cdot 1,73 = 0,519^{mm}; & \delta_4 = 0,3 \cdot 3,62 = 1,086^{mm}; \\
 \delta_5 = 0,3 \cdot 6,66 = 1,998^{mm}.
 \end{array}$$

Will man diese Werte durch Zeichnung finden und zwar im Maßstabe 25 : 1, so ist für das Seilpolygon der Gewichte w die Polweite $10000 \frac{1}{300} \cdot \frac{1}{25} = \frac{4}{3}$ anzunehmen, weil der Längenmaßstab der Trägerzeichnung = 1 : 300 ist. Die Werte w und die Polweite sind Zahlen, für welche in Fig. 113 der Maßstab 1 = 12^{mm} gewählt wurde.

Nach Ermittlung der Biegungslinie der *unteren* Gurtung ist diejenige der *oberen* Gurtung durch die Bedingung bestimmt, daß sich der Abstand zweier senkrecht übereinander gelegenen Knotenpunkte m um die Strecke Δh_m ändert. Für den oberen Knotenpunkt 2 ergibt sich hiernach eine senkrechte Verschiebung von $0,219 - \Delta h_2 = 0,219 - 0,012 = 0,207^{\text{mm}}$. In Fig. 113 sind die auf zwei Stellen abgerundeten Werte der Durchbiegungen zusammengestellt worden.

51. Vollständige Bestimmung der Verschiebungen. Durch Aufzeichnung einer Biegungslinie erhält man zunächst nur die Projektionen der Verschiebungen der Knotenpunkte auf eine feste Richtung, nicht aber diese Verschiebungen selbst. Wird also die vollständige Bestimmung der Formänderung eines Fachwerks verlangt, und will man

diese Aufgabe mit Hilfe des Seilpolygons lösen, so muß man *zwei* Biegungslinien zeichnen. Wurde hierbei der Träger einmal auf ein Achsenkreuz (x_1, y_1) , dann auf die Achsen (x_2, y_2) bezogen, Fig. 115, und sind mm_1 und mm_2 die für den Knoten m erhaltenen Ordinaten der für die Richtungen y_1 und y_2 ermittelten Biegungslinien, so ist die Verschiebung mm' des Punktes m bestimmt durch $m_1m' \perp m_1m$, $m_2m' \perp m_2m$. Es möge

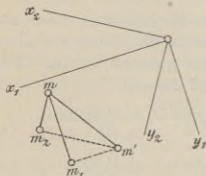


Fig. 115.

aber noch eine andere Darstellungsweise der Verschiebungen (die meistens den Vorzug verdienen wird) gezeigt werden, darin bestehend, daß nach Auftragung *einer* Biegungslinie das im § 2 gelehrt Stabzugverfahren zu Hilfe genommen wird. In Fig. 116 ist dieser Weg erläutert worden.

Gegeben seien die Verschiebungen Δy des auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz (x, y) bezogenen Stabzuges $0-1-2-3-\dots$; außerdem sei die Verschiebung Δx irgendeines Knotens bekannt. Es werde die vollständige Darstellung der Verschiebungen sämtlicher Knoten gefordert.

AB sei die Schlußlinie der Biegungslinie $0''1''2''3''\dots$. Die Punkte $0'', 1'', 2''\dots$ projiziere man durch Parallelen zu AB auf eine zur y -Achse parallele Gerade, welche von der Schlußlinie in A geschnitten werde, und ziehe durch A und durch die Projektionen $0'''$, $1'''$, $2''' \dots$ der Punkte $0'', 1'', 2'', \dots$ Parallelen $g_A, g_0, g_1, g_2, \dots$ zur x -Achse. Auf der g_A nehme man den Pol O des verlangten Verschiebungsplanes beliebig an und bestimme nun zunächst die Verschiebung desjenigen Knotens, dessen Δx bekannt ist.

In Fig. 116 wurde Δx_2 als gegeben angenommen und der Strahl $O2'$, welcher die Verschiebung des Punktes 2 nach Größe, Richtung

und Sinn darstellt, eingezeichnet; sein Endpunkt 2' liegt auf der Geraden g_2 (weil die Projektion von $O2'$ auf die Richtung y gleich Δy_2 sein muß) und im (negativ vorausgesetzten) Abstände Δx_2 von der durch O parallel zur y -Achse gezogenen Geraden OO' .

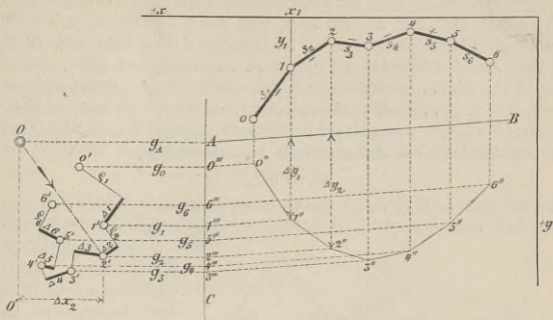


Fig. 116.

Trägt man nun an $2'$ die dem Stabe s_2 parallele Strecke $\Delta 2$ an, welche gleich der Änderung der Länge s_2 ist und den Sinn $2-1$ oder $1-2$ erhält, je nachdem der Stab s_2 gedehnt oder verkürzt wird, und errichtet man im Endpunkte von $\Delta 2$ auf $\Delta 2$ ein Lot (ρ_2), welches die Gerade g_1 in $1'$ schneidet, so gibt der Polstrahl $O1'$ nach Größe, Richtung und Sinn die Verschiebung des Knotenpunktes 1 an, wie ohne weiteres aus dem im § 2 gelehrtens Stabzugverfahren hervorgeht. Auf dieselbe Weise wurde die Lage des Punktes $0'$ bestimmt und — wieder von $2'$ aus — der Reihe nach $3'$, $4'$, $5'$, $6'$ festgelegt. In Fig. 116 ist vorausgesetzt worden, daß alle Stäbe mit Ausnahme von s_5 Verkürzungen erleiden.

Will man die Δx durch Rechnung bestimmen, so differenziere man die Gleichung

$$s_m^2 = (x_{m-1} - x_m)^2 + (y_{m-1} - y_m)^2$$

und ersetze das Differentialzeichen durch das Zeichen Δ . Man erhält:

$$2s_m \Delta s_m = 2(x_{m-1} - x_m)(\Delta x_{m-1} - \Delta x_m) + 2(y_{m-1} - y_m)(\Delta y_{m-1} - \Delta y_m)$$

und hieraus

$$\Delta x_{m-1} - \Delta x_m = \Delta s_m \sec \beta_m - (\Delta y_{m-1} - \Delta y_m) \operatorname{tg} \beta_m,$$

wo β_m den Neigungswinkel des Stabes s_m gegen die x -Achse bedeutet. Kennt man also einen der beiden Werte Δx_{m-1} und Δx_m , so kann man auch den anderen angeben, so daß es möglich ist, mit Hilfe der vorstehenden Formel und mittels des in Nr. 49 zur Bestimmung der Δy entwickelten Verfahrens sämtliche Seitenverschiebungen Δx , Δy eines Stabzuges durch Rechnung zu finden, sobald ein Wert Δx

und zwei Werte Δy bekannt sind. Ein anderes rechnerisches Verfahren läßt sich leicht durch Projizieren des im § 2 eingeführten, durch Aneinanderreihung der Δs und ρ entstandenen Linienzuges auf zwei rechtwinklige Achsen x und y ableiten.

52. Einführung stellvertretender Stabzüge. Die in der Fig. 116 gezeigte Darstellungsweise der Verschiebungen wird besonders übersichtlich, sobald sämtliche $\Delta s = 0$ sind, weil der Verschiebungsplan dann aus einem Linienzuge $0'1'2' \dots$ besteht, dessen Eckpunkte $0', 1', 2', \dots$ in den Geraden g_0, g_1, g_2, \dots liegen, und dessen Seiten $0'-1', 1'-2', \dots$ rechtwinklig zu den entsprechenden Stabrichtungen $0-1, 1-2, \dots$ sind.*) Auch ist zu beachten, daß sich im Falle des Verschwindens der Δs für die Gewichte w (nach Gleich. 3, S. 101) die von der Lage des Achsenkreuzes x, y unabhängigen Werte

$$w_m = \Delta \mathfrak{S}_m$$

ergeben, und es liegt daher der Gedanke sehr nahe, daß es zuweilen vorteilhaft sein dürfte, den *elastischen* Stabzug behufs Darstellung der

Verschiebungen seiner Knotenpunkte durch einen aus *starr*en Gliedern bestehenden zu ersetzen.**)

Zu einem solchen *stellvertretenden Stabzuge* gelangt man, indem man zwischen je zwei aufeinander folgenden Knotenpunkten $m-1, m$ einen neuen Knoten m_0 annimmt und diesen sowohl mit $m-1$ als auch mit m durch starre (in Fig. 117 gestrichelt angegebene) Stäbe verbindet.

Der neue Randwinkel bei m sei $\alpha_m = \mathfrak{S}_m + \omega_m + \alpha_{m+1}$, der Randwinkel bei m_0 sei τ_m . Die Änderungen

*) Vergl. auch Seite 97, Fig. 79. Dort wurde dieses Gesetz bereits auf anderem Wege abgeleitet.

**) Der Umstand, daß $w_m = \Delta \mathfrak{S}_m$ von der Lage des Achsenkreuzes (x, y) unabhängig ist, vereinfacht auch die Anwendung zweier Biegungslinien. Schließen die beiden Richtungen, welche den Gewichten w zugeschrieben werden sollen, den Winkel ψ ein, so denke man das Kräftepolygon nach Aufzeichnung der ersten Biegungslinie um ψ gedreht, um einzusehen, daß jede Seite des zweiten Seilpolygons mit der entsprechenden Seite der ersten Biegungslinie den Winkel ψ bilden muß. Mit Rücksicht auf die käuflichen Winkelbretchen wird man für ψ einen der Winkel:

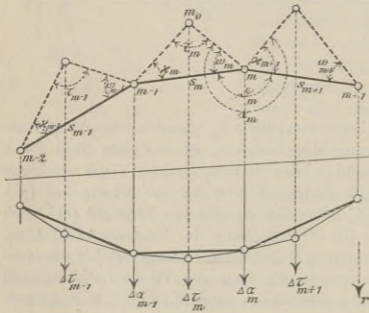


Fig. 117.

von τ_m und α_m sind:

$$\Delta\tau_m = \frac{\Delta s_m}{s_m} (\cotg \alpha_m + \cotg \omega_m)$$

$$\Delta\alpha_m = \Delta\varphi_m + \Delta\omega_m + \Delta\alpha_{m+1} = \Delta\varphi_m - \frac{\Delta s_m}{s_m} \cotg \alpha_m - \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \cotg \omega_{m+1}.$$

Betrachtet man die $\Delta\tau$ und $\Delta\alpha$ als Kräfte, welche in der Richtung r wirken, und verbindet man dieselben durch ein Seilpolygon mit der Polweite Eins, so ist dieses Seilpolygon die Biegungslinie des aus starren Gliedern bestehenden Stabzuges für die Richtung r , und das eingeschriebene Polygon, dessen Ecken den Knoten . . . $(m-2)$, $(m-1)$, m , $(m+1)$. . . entsprechen, ist die Biegungslinie des elastischen Stabzuges . . . $(m-2)$ $(m-1)$ m $(m+1)$. . .

Die Punkte m_0 wird man so annehmen, daß die Kotangenten der Winkel α und ω runde Zahlen sind. Wählt man z. B. $\omega_m = \alpha_m = 45^\circ$, so erhält man sehr einfach:

$$\Delta\tau_m = 2 \frac{\Delta s_m}{s_m} \text{ und } \Delta\alpha_m = \Delta\varphi_m - \frac{\Delta s_m}{s_m} - \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}}. *)$$

Hat die Elastizitätsziffer E für alle Stäbe denselben Wert, so ersetze man die Gewichte $\Delta\tau$ und $\Delta\alpha$ durch die Gewichte $E\Delta\tau$ bzw. $E\Delta\alpha$ und die Polweite 1 durch die Polweite E . Sollen dann Temperaturänderungen unberücksichtigt bleiben, so treten in den vorstehenden Formeln an die Stelle der Verlängerungsverhältnisse $\Delta s/s$ die Spannungen σ . Ist $\omega = \alpha = 45^\circ$, so erhält man:

$$E\Delta\tau_m = 2\sigma_m, \quad E\Delta\alpha_m = E\Delta\varphi_m - \sigma_m - \sigma_{m+1}. **)$$

30° , 60° , 45° , 90° wählen. Auf weitere Beziehungen zwischen den beiden Biegungslinien gehen wir nicht ein, da sich der Linienzug $0'1'2'3'$. . . ebenfalls schnell zeichnen läßt und die Verschiebungen sofort nach Größe und Richtung liefert, so daß man die Zusammensetzung der Seitenverschiebungen (nach Fig. 115) spart.

*) Es ist darauf zu achten, daß keiner der hinzugefügten starren Stäbe die Richtung r erhalten darf, wenn außer der Biegungslinie noch die vollständige Darstellung der Verschiebungen mit Hilfe des Linienzuges $0'1'2'$. . . (Fig. 116) ohne jede weitere Zwischenrechnung erfolgen soll. Diese Zwischenrechnung, welche, wie leicht einzusehen ist, in der Ermittlung des Wertes ρ für jeden in die Richtung r fallenden Stab bestehen würde, ist zwar nicht schwierig, immerhin aber umständlicher als die Annahme besonderer Winkel ω und α für diese Stelle des Stabzuges. Wird nur die Biegungslinie für die Richtung r verlangt, so dürfen Stäbe von der Richtung r vorkommen, denn es entsprechen dann den beiden Endpunkten solcher Stäbe im Sinne r gleichgroße Verschiebungen. Zu beachten ist auch, daß die Gewichte $\Delta\tau$ und $\Delta\alpha$ in der Reihenfolge . . . $\Delta\tau_{m-1}$, $\Delta\alpha_{m-1}$, $\Delta\tau_m$, $\Delta\alpha_m$, $\Delta\tau_{m+1}$, $\Delta\alpha_{m+1}$. . . durch das Seilpolygon verbunden werden müssen.

**) Vergl. S. 102. Dem Einfluß von Temperaturänderungen t kann man auch Rechnung tragen, indem man σ ersetzt durch $\sigma + \epsilon Et$.

Für die in der Fig. 118 angegebene Lage der eingeschalteten Punkte m_0 ergibt sich:

$$\Delta \tau_m = - \frac{\Delta s_m}{s_m} (\cotg \alpha_m + \cotg \omega_m)$$

$$\Delta \alpha_m = \Delta \vartheta_m + \frac{\Delta s_m}{s_m} \cotg \alpha_m + \frac{\Delta s_{m+1}}{s_{m+1}} \cotg \omega_{m+1}.$$

Welche der beiden Anordnungen (Fig. 117 oder Fig. 118) gewählt wird, ist für das Ergebnis gleichgültig. Man strebe zur Erzielung übersichtlicher Kräftepolygone nach Möglichkeit gleiche Vorzeichen der Gewichte w an. Z. B. wird man bei einfachen Balkenbrücken in der Regel für die $\Delta \alpha$ der oberen und auch der unteren Gurtung positive Werte erhalten und sich infolgedessen bei Untersuchung einer oberen Gurtung für die in Fig. 118 gegebene Anordnung entscheiden,

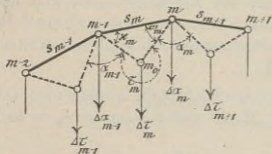


Fig. 118.

weil die Δs und σ der Obergurtstäbe negativ sind. Bei einer unteren Gurtung wird besser nach Fig. 117 verfahren.

Eine andere Behandlungsweise des stellvertretenden Stabzuges schließt sich der auf Seite 104 bis 112 gelösten Aufgabe an: die Gewichte w_m zu bestimmen, ohne vorher die Winkeländerungen $\Delta \vartheta$ zu berechnen. Dieses Verfahren kommt natürlich nur dann in Frage, wenn die Winkeländerungen nicht ohnehin zu anderen Zwecken*) angegeben werden müssen; dasselbe möge an dem in Fig. 119 dargestellten Beispiele erläutert werden.

Gesucht sei die Biegelinie (für die Richtung r) der Gurtung $\dots (m-1) m (m+1) \dots$ eines einfachen Dreiecknetzes. Die den eingeschalteten Knoten m_0 entsprechenden Gewichte $\Delta \tau_m$ werden wie vorhin berechnet, das Gewicht w_m für einen Knoten m der Gurtung hingegen nach der auf Seite 105 bewiesenen Gleichung:

$$w_m = \Sigma \mu \cdot \Delta s.$$

Hierin bedeutet μ die Spannkraft, welche in einem Stabe des in Fig. 119^I herausgetragenen Fachwerkteiles infolge der drei unter sich im Gleichgewichte befindlichen parallelen äußeren Kräfte $\frac{1}{e}$, $\frac{1}{e'}$, $\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{e'}\right)$ entsteht und Δs die Längenänderung des Stabes für denjenigen Belastungszustand, für welchen die Biegelinie gesucht wird. e und e' sind die gegenseitigen Abstände jener 3 Kräfte, deren Richtung ge-

*) Z. B. Bestimmung von Nebenspannungen. Vergl. auch Seite 96.

legentlich der früheren Ableitung der Gleichung $w_m = \sum \mu \Delta s$ parallel den w vorausgesetzt wurde, jetzt aber willkürlich gewählt werden darf, weil ja die Größe der w eines aus starren Gliedern bestehenden Stabzuges unabhängig von der Richtung r ist. Die Summe \sum erstreckt sich über die in der Fig. 119^I mit den Ziffern 1, 2, 3, . . . 6, 7 bezeichneten Stäbe, deren Spannkräfte μ in Fig. 119^{II} mittels eines Cremonaschen Kräfteplanes dargestellt wurden. Für die Fachwerkstäbe 3 und 5 ergaben sich Zugkräfte μ , für die übrigen Druckkräfte. Sind also die Längenänderungen der Stäbe 1, 2, 3 . . . beziehungsweise $= \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$ so folgt:

$$w_m = -\mu_1 \Delta_1 - \mu_2 \Delta_2 + \mu_3 \Delta_3 - \mu_4 \Delta_4 + \mu_5 \Delta_5 - \mu_6 \Delta_6 - \mu_7 \Delta_7.$$

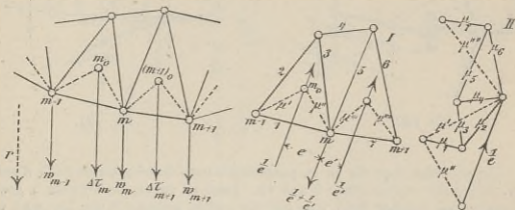


Fig. 119.

Es wird sich empfehlen, die Richtung der Kraft $\frac{1}{e}$ so zu wählen, daß e einen festen, durch eine runde Zahl ausdrückbaren Wert annimmt. Bei Ermittlung der verschiedenen w sind also verschiedene Kraftrichtungen anzunehmen.

Eine wichtige Anwendung der stellvertretenden Stabzüge findet sich in Nr. 75.

Übungsaufgaben zu den §§ 1 bis 3.

1. Aufgabe. Es soll die Änderung $\Delta \zeta_b$ des Randwinkels ζ_b des in Fig. 120 dargestellten Fachwerks mit Hilfe eines Williot'schen Verschiebungsplanes bestimmt werden.

Lösung. Man nehme den Punkt a und die Richtung des Stabes ab als festliegend an, ermittle nach Nr. 32 (S. 58) der Reihe nach die Verschiebungen Ob' , Oc' , Od' , Oe' der Punkte b, c, d, e und denke hierauf die Verschiebung von e nach dem Stabzugverfahren bestimmt. Man erkennt dann, daß das Lot von e' auf $\Delta 7$ gleich $s_7 \Delta \zeta_b$ ist und findet

$$\Delta \zeta_b = \frac{\rho}{s_7}.$$

Der Drehungssinn von s_7 gegen s_1 ist in der Figur durch einen Pfeil angegeben worden; hiernach ist $\Delta \zeta_b$ positiv. Wir setzen voraus, daß die Stäbe 2, 4, 5 gedehnt, die übrigen verkürzt werden.

2. Aufgabe. Behufs Darstellung der Biegelinie der oberen Gurtung des in Fig. 121 abgebildeten Fachwerks soll das Gewicht w_b mit Hilfe eines Williot'schen Planes dargestellt werden und zwar ohne gesonderte Ermittlung von Δs_b .

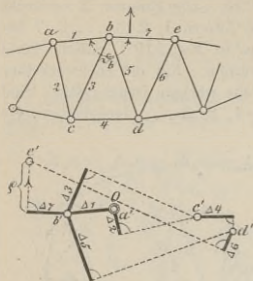


Fig. 120.

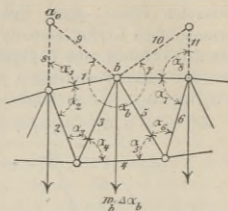


Fig. 121.

Lösung. Man füge die zu w_b parallelen starren beliebig langen Stäbe 8 und 11 hinzu, ferner die starren Stäbe 9 und 10. Dann ist (wenn die Polweite 1 gewählt wird) $w_b = \Delta a_b$, welcher Wert nun auf die soeben gezeigte Weise bestimmt wird. Man nehme hierbei a_0 und die Richtung des Stabes 9 als festliegend an.

3. Aufgabe. Mit Bezugnahme auf Fig. 121 beweise man, daß, sobald die Polweite = E gewählt wird und $\frac{\Delta s}{s} = \frac{\sigma}{E}$ ist, das Gewicht w_b nach der Formel

$$w_b = \cotg \alpha_1 (0 - \sigma_1) + \cotg \alpha_2 (\sigma_2 - \sigma_1) + \cotg \alpha_3 (\sigma_2 - \sigma_3) + \cotg \alpha_4 (\sigma_4 - \sigma_3) \\ + \cotg \alpha_5 (\sigma_4 - \sigma_5) + \cotg \alpha_6 (\sigma_6 - \sigma_5) + \cotg \alpha_7 (\sigma_6 - \sigma_7) + \cotg \alpha_8 (0 - \sigma_7)$$

berechnet werden darf.

Lösung. Man gelangt zur vorstehenden Formel ohne weiteres, indem man nach Gl. (2) Seite 90 die Änderungen der Dreieckswinkel, aus denen sich a_b zusammensetzt, bestimmt und dieselben addiert. Die Multiplikationen mit \cotg werden zweckmäßig zeichnerisch ausgeführt. Man könnte auch den Ausdruck nach den Spannungen σ ordnen. Der Einfluß von σ_2 auf w_b ist dann $= \sigma_2 \frac{s_2}{r_2}$, wo s_2 die Länge des Stabes 2 und r_2 das Lot von b auf 2 bedeutet. Wie stellt man den Einfluß der Spannung eines von b ausgehenden Stabes z. B. den von σ_3 am bequemsten dar?

4. Aufgabe. Gesucht sei die Biegelinie (für die Richtung r) eines Stabzuges, dessen Δs und Δs gegeben sind; einzelne Stäbe haben aber die Richtung r .

*) Zur besseren Übersicht wurden die Spannungen 0 der Stäbe 8 und 11 mit aufgeführt.

Lösung. Fällt s_m mit der Richtung r zusammen, so schalte man nach Fig. 122 zwischen $m-1$ und m mittels starrer Stäbe, welche mit s_m Winkel von 45° einschließen, einen neuen Knoten m_0 ein, dessen Gewicht $w_{m_0} = -2 \frac{\Delta s_m}{s_m}$ ist. Für w_{m-1} und w_m erhält man:

$$w_{m-1} = \Delta s_{m-1} + \frac{\Delta s_m}{s_m} w_m = \Delta s_m + \frac{\Delta s_m}{s_m}.$$

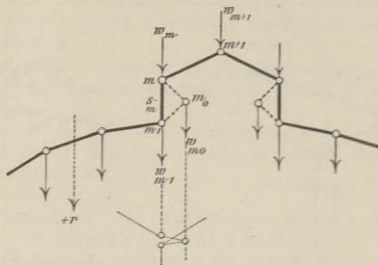


Fig. 122.

Ist Δs_m positiv, so ist w_{m_0} im Sinne $(-r)$ anzunehmen. Figur 122 setzt also voraus, daß der Stab s_m gedrückt wird. Zu beachten ist, daß die Gewichte in der Reihenfolge w_{m-1} , w_{m_0} , w_m durch das Seilpolygon verbunden werden müssen wie dies in Fig. 122 angedeutet ist.

5. Aufgabe. Es soll der Verschiebungsplan für die untere Gurtung 0—2—4—6 des in der Fig. 123 dargestellten Trägers mit Hilfe eines stellvertretenden, aus starren Gliedern bestehenden Stabzuges 0—1—2—3—4—5—6 gezeichnet werden.

Die *Lösung* besteht darin, daß zuerst nach Nr. 52 die Biegelinie für die zur Bahn des beweglichen Auflagers rechtwinklige Richtung r gezeichnet wird, weil dann die Schlußlinie $0''6''$ sofort gegeben ist. Hierauf wird der Linienzug $6'5'4'3'2'1'0'$ nach Nr. 51 bestimmt. Die Strahlen $00'$, $02'$, $04'$ stellen nach Größe, Richtung und Sinn die Verschiebungen der Punkte 0, 2, 4 dar. — Von den drei für diesen Träger in diesem Buche mitgeteilten Verfahren (vergl. Fig. 38, 105, 123) ist das erste im allgemeinen das einfachste. Die *Lösung* in Fig. 105 verdient den Vorzug, sobald die lotrechten Verschiebungen δ durch Rechnung bestimmt werden sollen und die

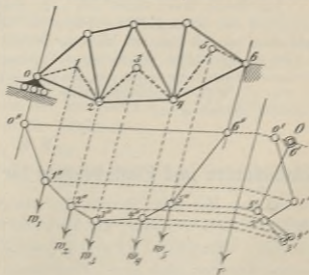


Fig. 123.

zuletzt angegebene (Fig. 123) wird vorteilhaft, sobald die Winkeländerungen noch zu anderen Zwecken (z. B. zur Ermittlung von Nebenspannungen) gebraucht werden.

6. Aufgabe. Ein Fachwerk sei in der Weise erzeugt, daß zu einem Stabdreieck abc zwei neue Stäbe gefügt werden, die in einem neuen Knoten d miteinander verbunden sind, hierauf an zwei beliebige Knoten dieses Stabgebildes wieder zwei Stäbe mit einem Knoten e angeschlossen werden u. s. f. Es sollen die Winkeländerungen dieses Fachwerks berechnet werden.

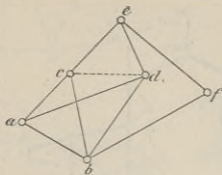


Fig. 124.

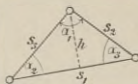


Fig. 125.

Die Lösung stützt sich auf die Gleichung

$$\Delta s_1 = h \Delta \alpha_1 + \Delta s_2 \cos \alpha_3 + \Delta s_3 \cos \alpha_2,$$

welche einen besonderen Fall der auf S. 98 für Δl abgeleiteten Formel darstellt, und durch welche die Änderung der Seitenlänge s_1 eines Dreiecks (Fig. 125) bestimmt ist, sobald die Änderungen des Gegenwinkels und der beiden anderen Dreiecksseiten bekannt sind.

Liegt beispielsweise das Fachwerk in Fig. 124 vor, so berechnet man auf die in Nr. 40 gezeigte Weise die Winkeländerungen der Dreiecke acb und abd und drückt hierauf die Änderung der Entfernung ed durch die Längenänderungen $\Delta \overline{ac}$ und $\Delta \overline{ad}$ der Seiten ac und ad und durch die Winkeländerung $\Delta(\overline{cad}) = \Delta(\overline{cab}) - \Delta(\overline{dab})$ aus. Jetzt bestimmt man die Winkeländerungen der Dreiecke acd , edb und cde , drückt $\Delta \overline{eb}$ durch $\Delta \overline{ce}$, $\Delta \overline{cb}$ und $\Delta(\overline{ceb})$ aus, u. s. w.

Auf diesem Wege lassen sich z. B. sämtliche Winkeländerungen der in den Figuren 49 und 50 abgebildeten Fachwerke berechnen, wie denn überhaupt leicht einzusehen ist, daß sich mit Hilfe der Formel für Δs_1 und mittels der in Nr. 37 und 38 durchgeführten allgemeineren Untersuchungen die in den §§ 2 und 3 angegebenen Darstellungsweisen auf ähnliche Art erweitern lassen, wie dies im § 1 mit dem von Williot ursprünglich auch nur für einen sehr einfachen Fall gegebenen Verfahren geschehen ist.

§ 4.

Einflußlinien und Einflußzahlen für elastische Verschiebungen.

53. — Mit Hilfe der in den vorigen Paragraphen gelehrteten Verfahren ist man imstande, die Formänderung eines statisch bestimmten, irgendwie belasteten Fachwerks festzustellen. Es bedürfen aber diese Untersuchungen noch einer Ergänzung für den Fall, daß der Einfluß der am Fachwerk angreifenden Lasten P_1, P_2, \dots auf irgendeine der die Formänderung bestimmenden Größen *gesondert* angegeben werden soll, etwa zu dem Zweck, die Grenzwerte dieser Größe (für welche

natürlich das Gesetz von der Zusammenzählung der einzelnen Wirkungen gelten muß) zu ermitteln. Zwar könnte man diese Aufgabe in der Weise behandeln, daß man das Fachwerk zuerst nur mit P_1 belastet, dann nur mit P_2 u. s. w. und für jeden dieser Fälle einen Verschiebungsplan zeichnet; doch ist dieses Verfahren so umständlich, daß die Aufsuchung einer anderen Lösung geboten erscheint. Die Handhabe hierzu bietet der Maxwellsche Satz von der Gegenseitigkeit der elastischen Formänderungen (S. 31), dessen Anwendung zunächst an zwei Beispielen gezeigt werden soll.

1. Aufgabe. Gesucht ist die Einflußlinie für die Senkung δ_m des Knotenpunktes m eines durch lotrechte Lasten P beanspruchten Fachwerkträgers.

Man nehme das gewichtslose Fachwerk nur mit einer in m angreifenden lotrechten Kraft Eins belastet an, ermittle die hierbei entstehenden Spannkkräfte S und Längenänderungen Δs und bestimme (nach einem der in §§ 1—3 angegebenen Verfahren) die diesen Δs entsprechende Biegelinie derjenigen Gurtung (beispielsweise ACB), an welcher die Lasten P angreifen sollen. Ist nun die bei k gemessene

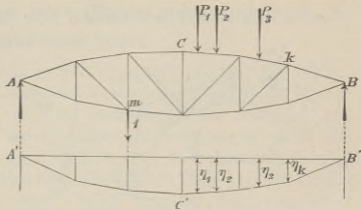


Fig. 126.

Ordinate dieser Biegelinie = η_k , so verschiebt die in m angreifende Last Eins den Knoten k im lotrechten Sinne um η_k , und es wird deshalb (nach dem Maxwellschen Satze) eine in k angreifende Last Eins den Knotenpunkt m ebenfalls um η_k verschieben. Hieraus folgt aber, daß die gezeichnete Biegelinie die Einflußlinie für δ_m ist.

Die Lasten P_1, P_2, P_3 , denen die Ordinaten η_1, η_2, η_3 entsprechen, verursachen beispielsweise bei m die Senkung

$$\delta_m = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 + P_3 \eta_3.$$

Beispiel. In Fig. 113 auf Tafel 2 wurden die senkrechten Verschiebungen der Knotenpunkte eines Bogenträgers mit drei Gelenken für den Fall aufgetragen, daß im Scheitelgelenk eine Last $1^t = 1000^{kg}$ wirkt. Die für die untere und obere Gurtung erhaltenen Biegelinien sind daher die Einflußlinien für die lotrechte Verschiebung δ des Scheitelgelenks; mit Hilfe der ersteren kann der Einfluß von Lasten festgestellt werden, welche in den unteren Knotenpunkten angreifen, mittels der zweiten der Einfluß der Belastung der oberen Knoten. Ist die oben angreifende Verkehrslast: $p = 0,665^t$ f. d. Meter und $p\lambda = 0,665 \cdot 3,0 = 2^t$ f. d. Knotenpunkt, so folgt für volle Belastung (also mit Vernachlässigung der kleinen negativen Beitragsstrecken an den Trägerenden)

$$\delta_{max} = p\lambda [2,00 + 2(1,10 + 0,52 + 0,21 + 0,04)] = 11,5^{mm}.$$

Von der ständigen Belastung $g\lambda = 0,37 \cdot 3,0 = 1,11^t$ eines Feldes möge der Teil $g_u\lambda = 0,27$ (Gewicht der Hälfte eines Feldes des Hauptträgers) an der unteren Gurtung angreifend angenommen werden, der Teil $g_o\lambda = 0,84^t$ an der oberen Gurtung. Die Durchbiegung infolge der ständigen Belastung beträgt dann:

$$\delta_y = g_u\lambda [2,00 + 2(1,09 + 0,52 + 0,22 + 0,07)] + g_o\lambda \left[2,00 + 2 \left(1,10 + 0,52 + 0,21 + 0,04 \frac{0,03^*}{2} \right) \right] = 6,4^{mm}.$$

2. Aufgabe. Ein Fachwerk sei mit beliebig gerichteten Kräften P_1, P_2, \dots belastet. Gesucht sei die Projektion δ_r der Verschiebung eines Knotens C auf eine feste Richtung r . Der Einfluß jeder Last P soll gesondert angegeben werden.

Man zeichne den Verschiebungsplan für den Fall, daß auf das Fachwerk nur eine Last $P_r = 1$ wirkt, welche in C angreift und die Richtung r hat. Für irgendeinen Knoten m ergebe dieser Plan die Verschiebung $m''m'$, deren Projektion auf die Richtung von P_m mit $\pm \delta_{mr}$ bezeichnet werden möge,^{**}) wobei das obere oder untere Vorzeichen gelten soll, je nachdem der Sinn jener Projektion mit dem Sinne von P_m übereinstimmt oder nicht.

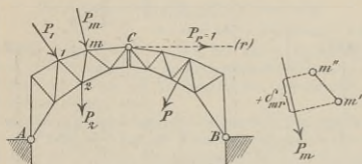


Fig. 127.

Nun ist aber nach dem Maxwellschen Satze die gesuchte Verschiebung δ_{rm} , welche Punkt C in der Richtung r und infolge von $P_m = 1$ erfährt, ebenso groß wie die bereits dargestellte Verschiebung δ_{mr} , welche der Punkt m in der Richtung P_m und infolge von $P_r = 1$ erleidet, und daraus folgt, daß der Einfluß von P_m auf die Verschiebung δ_r gleich $P_m \delta_{mr}$ ist. Auf die gleiche Weise findet man die Einflüsse der Lasten P_1, P_2, \dots , so daß man schließlich

$$\delta_r = P_1 \delta_{1r} + P_2 \delta_{2r} + \dots + P_m \delta_{mr} + \dots$$

erhält. Die Größen $\delta_{1r}, \delta_{2r}, \dots$ nennen wir kurz die den einzelnen Lasten P_1, P_2, \dots entsprechenden *Einflußzahlen*; sie ergeben sich sämtlich aus dem für $P_r = 1$ gezeichneten Verschiebungsplane.

54. — Das in den vorstehenden Beispielen angewandte Verfahren ist ein allgemeines und führt auch dann zum Ziele, wenn die δ nicht Verschiebungen und die P nicht Einzellasten bedeuten, sondern diese Buchstaben zur Bezeichnung der auf Seite 30 erklärten Begriffe „Weg

*) Die Knotenpunkte an den Trägerenden sind nur mit $\frac{1}{2} g_o\lambda$ belastet.

***) Nach der auf Seite 31 eingeführten Bezeichnungsweise.

einer Belastung“ und „Belastung“ dienen. Stets wird man die darzustellende Größe

$$\delta_r = \delta_{ra} P_a + \delta_{rb} P_b + \dots + \delta_{rm} P_m + \dots$$

mittels des Maxwellschen Satzes umformen in

$$\delta_r = \delta_{ar} P_a + \delta_{br} P_b + \dots + \delta_{mr} P_m + \dots$$

und dann die Einflußzahlen $\delta_{ar}, \delta_{br}, \dots, \delta_{mr}, \dots$ einem für den Zustand $P_r = 1$ gezeichneten Verschiebungsplane (an dessen Stelle häufig eine Biegelinie treten darf) entnehmen. *Es verdient hervorgehoben zu werden, daß diese Regel auch für statisch unbestimmte Fachwerke gilt.*

§ 5.

Das statisch unbestimmte Fachwerk.

a. Berechnung der statisch nicht bestimmaren Größen mittels des Maxwellschen Satzes.

55. — Wir haben bereits in der Einleitung gezeigt, daß die Berechnung eines statisch unbestimmten Fachwerks in die Lösung zweier Aufgaben zerfällt. Erstens sind die Spannkkräfte der Stäbe und die Stützenwiderstände mittels der Gleichgewichtsbedingungen durch die gegebenen Lasten P und gewisse statisch nicht bestimmare Größen X auszudrücken, und zweitens sind die Größen X mit Hilfe von Gleichungen zu berechnen, welche man erhält, indem man die Formveränderung des statisch bestimmten Fachwerks, in welches das unbestimmte im Falle des Verschwindens sämtlicher Größen X übergeht, gewissen Bedingungen unterwirft.

Der einzuschlagende Weg ist meistens sehr leicht zu finden, wie die folgenden Aufgaben zeigen werden, bei deren Lösung wir von den in der Einleitung angestellten allgemeineren Untersuchungen zunächst nur den Maxwellschen Satz zu Hilfe nehmen, während wir uns im übrigen lediglich auf die §§ 1—3 stützen. Denn es kommt uns besonders darauf an, zu zeigen, daß die Berechnung eines gegebenen statisch unbestimmten Fachwerks für denjenigen eine sehr leichte Aufgabe ist, welcher sich mit der Darstellung der Formänderung statisch bestimmter Fachwerke vertraut gemacht hat und das von uns kurz als Maxwellscher Satz bezeichnete allgemeine Gesetz kennt.*) Später

*) Die Untersuchung von Fachwerken, welche erst entworfen werden sollen, ist nur insofern umständlicher, als die statisch nicht bestimmaren Größen von den zunächst unbekanntem Stabquerschnitten abhängen. Im allgemeinen wird man die Querschnittsgrößen zuerst schätzungsweise annehmen, hierauf die X und S ermitteln, die erforderlichen Querschnitte bestimmen und im Falle größerer Unterschiede zwischen den gerechneten und den geschätzten Querschnitten das ganze Verfahren

werden wir auch die übrigen in der Einleitung angegebenen Verfahren verwenden.

56. Untersuchung eines über zwei Öffnungen gestreckten Balkens ACB , Fig. 128, welcher durch lotrechte Lasten P beansprucht wird.

Der naheliegendste Rechnungsgang ist der folgende. Wäre der Widerstand X der Mittelstütze bekannt, so ließen sich die in A und B angreifenden Stützendrücke und sämtliche Spannkkräfte S des aus aneinandergereihten Dreiecken bestehenden Fachwerks angeben.

Nimmt man zunächst $X = 0$ an, so entsteht ein einfacher Balken AB , dessen Stützenwiderstände $A_0 = \frac{\Sigma P b}{l_1 + l_2}$ und $B_0 = \frac{\Sigma P a}{l_1 + l_2}$ sind, und dessen Spannkkräfte S_0 leicht gefunden werden können, beispielsweise mittels eines Cremonaschen Kräfteplanes.

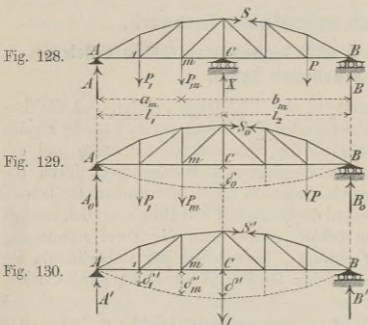
Dieser einfache Balken wird an der Stelle C eine lotrechte Durchbiegung δ_0 erfahren, deren Größe sich nach einem der in den §§ 1 bis 3 gezeigten Verfahren ermitteln läßt. (Das gestrichelte Polygon in Fig. 129 sei die Biegelinie der Gurtung ACB .) Denkt man jetzt die Kräfte P beseitigt und belastet den einfachen Balken AB nur

mit einer in C angreifenden, nach *oben* gerichteten Last X , so wird der Punkt C im lotrechten Sinne um $\delta' X$ gehoben, wobei δ' die mit Hilfe eines zweiten Verschiebungsplanes zu bestimmende lotrechte *Senkung* bedeutet, welche C erfährt, sobald der einfache Balken AB nur durch eine in C angreifende, lotrechte, *abwärts* gerichtete Last von der Größe 1 beansprucht wird. Sind nun die Stützen des in Fig. 128 abgebildeten Trägers vollkommen starr, so muß die lotrechte Verschiebung von C gleich Null sein, und es folgt hieraus die Bedingung:

$\delta_0 - \delta' X = 0$, aus welcher sich

$$X = 1 \frac{\delta_0}{\delta'}$$

wiederholen. Vereinfachend wirkt hierbei der Umstand, daß der Einfluß der Belastung auf die Größen X nur von dem gegenseitigen Verhältnis der Querschnitte abhängt. Vergl. auch Nr. 74.



ergibt. Würde sich, bei nachgebenden Widerlagern, Punkt C gegen die relativ festliegend gedachte Gerade AB in lotrechter Richtung um δ_0 nach unten verschieben, so wäre X aus der Gleichung $\delta_0 - \delta'X = \delta_0$ zu berechnen. Nach Bestimmung von X können die Spannkraften S in den Stäben des Balkens ACB mittels der Formel

$$S = S_0 - S'X$$

gefunden werden, unter S' die Spannkraft für den in Fig. 130 dargestellten Belastungsfall $X = -1$ verstanden, und ganz ebenso erhält man die Stützenwiderstände:

$$A = A_0 - A'X, \quad B = B_0 - B'X.$$

Den Einfluß von Temperaturänderungen wird man stets gesondert bestimmen; man wird also die Verschiebung δ_0 des durch die Lasten P beanspruchten Balkens AB (Fig. 129) unter der Voraussetzung ermitteln, daß die Stäbe die Längenänderungen $\Delta s_0 = \frac{S_0 s}{EF}$ erfahren, und schließlich wird man mit Hilfe eines dritten Verschiebungsplanes diejenige lotrechte Verrückung δ_t feststellen, welche der Punkt C des einfachen Balkens AB erfährt, sobald sich die Stablängen um $\Delta s_t = \varepsilon t s$ ändern. Der entsprechende Widerstand der Mittelstütze ist dann:

$$X_t = 1 \frac{\delta_t}{\delta'};$$

er erzeugt im Träger ACB (Fig. 128) die Spannkraften: $S_t = -S'X_t$. Im Falle gleichmäßiger Erwärmung sämtlicher Stäbe ist $\delta_t = 0$, sobald die drei Punkte A, B, C in derselben Wagerechten liegen.

Unsere Aufgabe ist hiermit gelöst. Die Auflösung leidet aber noch an einer Weitläufigkeit, die darin besteht, daß δ_0 für jeden zu untersuchenden Belastungsfall von neuem bestimmt werden muß. Diese Schwierigkeit läßt sich nun durch Anwendung des Maxwell'schen Satzes leicht heben. Bezeichnet man nämlich mit δ_m' die dem Knoten m entsprechende Ordinate der in Fig. 130 für den Zustand $X = -1$ gezeichneten Biegelinie, so darf man schließen: Eine in C angreifende lotrechte Last Eins senkt den Punkt m um δ_m' , und es wird daher eine in m angreifende Last Eins den Punkt C ebenfalls um δ' senken und eine Last P_m wird auf die Senkung δ_0 den Einfluß $\delta_0 = P_m \delta_m'$ ausüben. Daraus folgt aber

$$\delta_0 = P_1 \delta_1' + P_2 \delta_2' + \dots + P_m \delta_m' + \dots^*)$$

und es ist daher der Einfluß der Lasten P auf X

$$X = \frac{1}{\delta'} [P_1 \delta_1' + P_2 \delta_2' + \dots + P_m \delta_m' + \dots] = \frac{1}{\delta'} \sum P_m \delta_m'.$$

Man darf aussprechen:

*) Vergl. auch Seite 138.

Die für den Zustand $X = -1$ gezeichnete Biegelinie der zur Aufnahme der Lasten bestimmten Gurtung ist die Einflußlinie für X . Der Multiplikator dieser Linie ist $= 1 | \delta'$.

57. Untersuchung eines Fachwerkbogens mit Kämpfergelenken und ohne Scheitelgelenk, Fig. 131. Der Träger sei durch beliebig gerichtete Lasten P beansprucht. Die an den festen Auflagergelenken A und B

angreifenden Widerstände seien in die zur Geraden AB rechtwinkligen Seitenkräfte A und B und die in die Gerade AB fallenden Seitenkräfte C und X zerlegt.

Wird $X = 0$ angenommen, wird also das feste Auflagergelenk durch ein in der Richtung AB bewegliches Lager ersetzt, so geht das Fachwerk in ein statisch bestimmtes über (Fig. 132). Die Auflagerkräfte A_0, B_0, C_0 und die Spannkraften S_0 lassen sich für diesen Zustand leicht angeben.

Um X zu ermitteln, wird das erhaltene statisch bestimmte Fachwerk mit einer Kraft $X = -1$ belastet (Fig. 133), welche die Spannkraften S' und

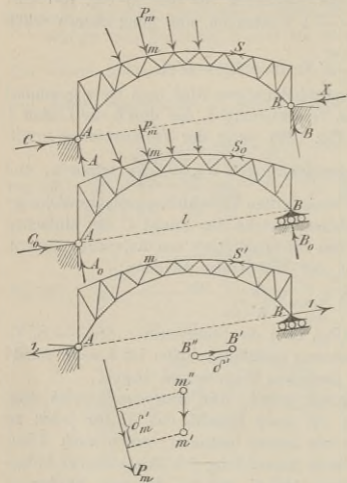


Fig. 131–133.

Änderungen $(\Delta s)' = \frac{S's}{EF}$ der Stablängen hervorruft; dann wird für diese Angriffsweise ein Verschiebungsplan gezeichnet.

Dieser Plan möge für den Punkt B die zu AB parallele Verschiebung $B''B' = \delta'$ liefern und für irgendeinen Knotenpunkt m die Verschiebung $m''m'$. Bezeichnet δ'_m die Projektion der Strecke $m''m'$ auf die Richtung von P_m , so folgt:

Eine in B und im Sinne AB angreifende Kraft 1 verschiebt den Punkt m im Sinne von P_m um δ'_m , und es wird deshalb eine in m angreifende Last $P_m = 1$ eine Verlängerung der Stützweite $AB = l$ um δ'_m verursachen und eine Last P_m eine Verlängerung um $P_m \delta'_m$. Da

nun eine von B nach A gerichtete Kraft X eine Verkürzung von AB um $X\delta'$ herbeiführt, so beträgt die Änderung von l im ganzen:

$$\Delta l = \Sigma P_m \delta_m' - X\delta'.$$

Hieraus folgt aber für das Bogenfachwerk in Fig. 131 für den Fall unbeweglicher Widerlager (d. h. für $\Delta l = 0$):

$$X = \frac{\Sigma P_m \delta_m'}{\delta'}.$$

Geben die Widerlager nach und verschiebt sich hierbei B gegen A um δ_w , so ändert sich X um einen Wert ΔX , der durch die Gleichung

$$\delta_w = -\Delta X \delta'$$

gegeben ist. Den Einfluß X_t einer Temperaturänderung findet man, indem man die Änderungen $\Delta s_t = \epsilon t s$ der Stablängen berechnet, die hierdurch bedingte Vergrößerung δ_t der Strecke AB mit Hilfe eines Verschiebungsplanes bestimmt und die Bedingung $0 = \delta_t - X_t \delta'$ aufstellt. Es ergibt sich:

$$\Delta X = -1 \frac{\delta_w}{\delta'} \quad \text{und} \quad X_t = 1 \frac{\delta_t}{\delta'}.$$

Bei gleichmäßiger Erwärmung ist $\delta_t = \epsilon t l$.

Sobald X bekannt ist, können sämtliche Spannkraften S des Bogenfachwerks mittels der Formel

$$S = S_0 - S'X$$

berechnet werden. Für die Stützenwiderstände erhält man: $A = A_0$, $B = B_0$, $C = C_0 + X$.

58. Der Binder eines Freidaches (Fig. 134) sei bei B und C mittels fester Auflagergelenke und außerdem noch durch eine Stange AD gestützt, welche bei D gelenkartig mit dem Widerlager verbunden ist.

Der Träger wird statisch bestimmt, sobald der Stab AD (dessen Spannkraft $= X$ sei) weggenommen wird. Für diesen Zustand $X = 0$ werden die Spannkraften S_0 ermittelt und hierauf wird der Verschiebungsplan für den in Fig. 136 dargestellten Zustand $X = -1$, dem die Spannkraften S' entsprechen mögen, aufgezeichnet.*). Die Verschiebung von A sei dargestellt durch den Polstrahl OA' , diejenige von m durch Om' . Die Projektion von OA' auf die Richtung von AD sei δ' (positiv im Sinne der in Fig. 136 angenommenen Kraft 1), diejenige von Om' auf P_m sei δ_m' (positiv im Sinne von P_m). Dann kann wie in der vorigen Aufgabe mittels des Maxwellschen Satzes die Beziehung gefunden werden:

$$\Delta l = \Sigma P_m \delta_m' - X\delta',$$

*) Beispielsweise nach dem in Nr. 32 angegebenen Verfahren.

wo l die Länge des Stabes AD bedeutet. Besitzt dieser Stab den Querschnitt F_1 und die Elastizitätsziffer E_1 , so ist seine durch die Spannkraft X hervorgebrachte Längenänderung:

$$\Delta l = \frac{Xl}{E_1 F_1},$$

und man erhält schließlich für X den Wert:

$$X = \frac{\sum P_m \delta'_m}{\delta' + \frac{l}{E_1 F_1}}.$$

Wird noch der Einfluß einer Änderung der Temperatur gesucht, so bestimmt man mit Hilfe eines zweiten Verschiebungsplanes die von den Änderungen $\Delta s = \epsilon t s$ herrührende gegenseitige Verschiebung δ_t des Punktepaares A, D und stellt die Bedingung auf:

$$\Delta l = \delta_t - X_t \delta',$$

in welche für Δl jetzt der Wert:

$$\Delta l = \frac{X_t l}{E_1 F_1} + \epsilon_1 t_1 l$$

einzusetzen ist, unter ϵ_1 und t_1 die Ausdehnungsziffer und die Temperaturänderung des Stabes AD verstanden. Man findet:

$$X_t = \frac{\delta_t - \epsilon_1 t_1 l}{\delta' + \frac{l}{E_1 F_1}}.$$

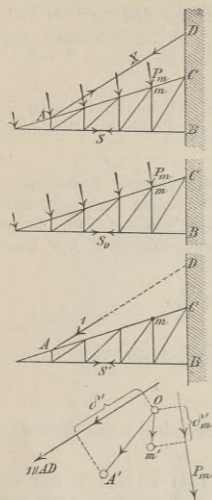


Fig. 134—136.

59. Untersuchung des in Fig. 137 dargestellten Dachstuhl einer dreischiffigen Halle. Bei A ist ein festes, bei B ein auf wagerechter Bahn bewegliches Auflagergelenk angeordnet. CD und EF sind Säulen mit Kopf- und Fußgelenken (sogenannte Pendelsäulen oder Schwingstützen). Die lotrecht wirkenden Widerstände X_a und X_b der Säulen sollen als die statisch nicht bestimmbar GröÙen eingeführt werden; ihre Angriffspunkte erhalten die Ordnungsbuchstaben a und b .

Den Zustand $X_a = 0$, $X_b = 0$ (den wir kurz den Zustand $X = 0$ nennen wollen) zeigt Fig. 138; die Zustände $X_a = -1$ und $X_b = -1$ sind in den Figuren 139 und 140 dargestellt worden. In allen drei Fällen handelt es sich um die Untersuchung eines einfachen Fachwerkbalkens AB ; die Stützenwiderstände und die Spannkräfte (S_0 , S_a , S_b) lassen sich also leicht ermitteln. Ist dies geschehen, so werden die von

den Spannkraften S_a und S_b sowie von Temperaturänderungen t hervorgerufenen Längenänderungen

$$\Delta s_a = \frac{S_a s}{EF}, \quad \Delta s_b = \frac{S_b s}{EF}, \quad \Delta s_t = \varepsilon t s$$

berechnet und die durch diese Δs verursachten Verschiebungen der Knotenpunkte ermittelt.

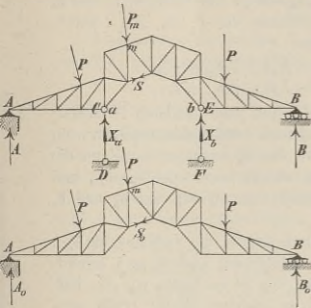


Fig. 137 u. 138.

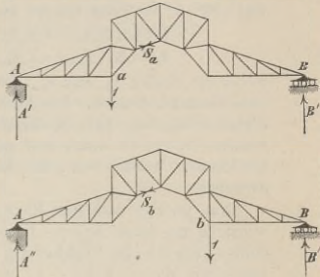


Fig. 139 u. 140.

Der erste dieser Pläne liefert:

$$\begin{aligned} \delta_{ma} &= \text{Verschiebung von } m \text{ im Sinne von } P_m^*) \quad \text{infolge } X_a = -1 \\ \delta_{aa} &= \text{'' '' '' '' '' '' } X_a = -1^{**}) \quad X_a = -1 \\ \delta_{ba} &= \text{'' '' '' '' '' '' } X_b = -1 \quad X_a = -1. \end{aligned}$$

Der zweite Plan liefert:

$$\begin{aligned} \delta_{mb} &= \text{Verschiebung von } m \text{ im Sinne von } P_m \quad \text{infolge } X_b = -1 \\ \delta_{ab} &= \text{'' '' '' '' '' '' } X_a = -1 \quad X_b = -1 \\ \delta_{bb} &= \text{'' '' '' '' '' '' } X_b = -1 \quad X_b = -1. \end{aligned}$$

Der dritte Plan endlich:

$$\begin{aligned} \delta_{mt} &= \text{Verschiebung von } m \text{ im Sinne von } P_m \quad \text{infolge der } t \\ \delta_{at} &= \text{'' '' '' '' '' '' } X_a = -1 \quad \text{'' '' } t \\ \delta_{bt} &= \text{'' '' '' '' '' '' } X_b = -1 \quad \text{'' '' } t. \end{aligned}$$

*) Abgekürzte Ausdrucksweise an Stelle von: δ_{ma} = Projektion der Verschiebung von m auf die Richtung von P_m , positiv im Sinne von P_m . Zu beachten ist, daß der zweite Buchstabe des an δ gesetzten Doppelzeigers stets auf die Ursache der Verschiebung hinweisen soll und mit dem Zeiger der Belastung X übereinstimmt.

***) Diese Verschiebung wird also positiv gezählt im Sinne der in a (Fig. 139) angenommenen Last 1.

(Nach dem Maxwell'schen Satze muß sich $\delta_{ab} = \delta_{ba}$ herausstellen, eine Bedingung, die zur Prüfung der Zuverlässigkeit der Zeichnung benutzt werden kann.)

Die Gleichungen zur Berechnung der X ergeben sich nun wie folgt.

Die auf das Fachwerk AB wirkenden Belastungen P_m , X_a , X_b werden im Verein mit Temperaturänderungen t und etwaigen anderen Ursachen (z. B. Bewegungen der Widerlager A und B) die Punkte a und b im Sinne $X_a = -1$ und $X_b = -1$ um Strecken δ_a und δ_b verschieben, welche geradlinige Funktionen der P , X_a , X_b , t sind*) und sich auf die Form bringen lassen:

$$\begin{aligned}\delta_a &= \sum P_m \delta_{am} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} + \delta_{at} + \delta_{aw}, \\ \delta_b &= \sum P_m \delta_{bm} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} + \delta_{bt} + \delta_{bw},\end{aligned}$$

wobei die Größen δ_{aw} und δ_{bw} den Einfluß jener „anderen Ursachen“ zum Ausdruck bringen. Die Koeffizienten der X sind bereits vorhin erklärt worden (δ_{aa} ist z. B. der Wert, den δ_a annimmt, wenn nur die Ursache $X_a = -1$ wirkt) und ganz ebenso lassen sich die δ_{am} und δ_{bm} deuten, welche bezw. den Einfluß von $P_m = 1$ auf δ_a und δ_b darstellen.

Nun ist aber nach dem Maxwell'schen Satze die Verschiebung δ_{am} , welche a im Sinne $X_a = -1$ und infolge der Last $P_m = 1$ erfährt, ebenso groß wie die Verschiebung δ_{ma} von m im Sinne von P_m , hervorgerufen durch $X_a = -1$, und in gleicher Weise ergibt sich $\delta_{bm} = \delta_{mb}$, so daß obige Gleichungen übergehen in

$$\begin{aligned}\delta_a &= \sum P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} + \delta_{at} + \delta_{aw} \\ \delta_b &= \sum P_m \delta_{mb} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} + \delta_{bt} + \delta_{bw}.\end{aligned}$$

Die auf der rechten Seite stehenden δ sind mit Ausnahme der δ_{aw} und δ_{bw} durch die vorhin angeführten drei Verschiebungspläne bereits bestimmt; für δ_a und δ_b sind die lotrechten Verschiebungen der Stützpunkte a und b einzuführen.

Setzen wir bei A und B starre Widerlager voraus, nehmen wir ferner an, daß weitere Ursachen, welche „Störungsglieder“ δ_{aw} , δ_{bw} erzeugen, nicht vorhanden sind, so ist $\delta_{aw} = 0$, $\delta_{bw} = 0$. Vernachlässigen wir noch die Zusammendrückung der Grundpfeiler der Säulen und des Baugrundes, so ist δ_a gleich der Verkürzung der durch X_a auf Druck beanspruchten Säule CD , vermindert um die Verlängerung, welche diese Säule infolge der Temperaturerhöhung erfährt.**)

*) Diese Eigenschaft ist in der Einleitung erörtert worden; sie folgt aber auch ohne weiteres aus den Untersuchungen in den §§ 1—3; denn zwischen den auf feste Richtungen projizierten Verschiebungen δ und Δs bestehen nur Beziehungen ersten Grades, ebenso zwischen den Δs und den Lasten.

**) Es ist streng darauf zu achten, daß bei der Untersuchung des Einflusses der Bewegungen der Stützen auf die Glieder δ_{aw} und δ_{bw} nur die Widerlager des statisch bestimmten Trägers (hier der einfache Balken AB) in Betracht kommen;

Es ergibt sich:

$$\delta_a = \frac{X_a h_a}{E_a F_a} - \varepsilon_a t_a h_a,$$

worin E_a , F_a , t_a , ε_a , h_a beziehungsweise die Elastizitätsziffer, den Querschnitt, die Temperaturerhöhung, die Ausdehnungsziffer für $t = 1^\circ$ und die Länge der Säule CD bedeuten; und ebenso folgt:

$$\delta_b = \frac{X_b h_b}{E_b F_b} - \varepsilon_b t_b h_b.$$

Jetzt können die Größen X_a , X_b aus den beiden für δ_a und δ_b abgeleiteten Gleichungen berechnet und hierauf die Spannkkräfte:

$$S = S_0 - S_a X_a - S_b X_b$$

bestimmt werden.

60. Übungsaufgaben. Der im vorstehenden Beispiele eingeschlagene Weg führt bei jedem statisch unbestimmten Fachwerke, welches sich durch Beseitigung von überzähligen Stäben und Auflagerbedingungen in ein statisch bestimmtes verwandeln läßt, zum Ziele. Treten mehrere statisch nicht bestimmbare Größen X_a , X_b , X_c , ... auf, so erhält man:

$$(I) \quad \begin{cases} \delta_a = \sum P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} - X_c \delta_{ac} - \dots + \delta_{at} + \delta_{aw} \\ \delta_b = \sum P_m \delta_{mb} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} - X_c \delta_{bc} - \dots + \delta_{bt} + \delta_{bw} \\ \delta_c = \sum P_m \delta_{mc} - X_a \delta_{ca} - X_b \delta_{cb} - X_c \delta_{cc} - \dots + \delta_{ct} + \delta_{cw} \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Die als Koeffizienten der P und X auftretenden δ sind bestimmt, sobald die den Belastungszuständen $X_a = -1$, $X_b = -1$, $X_c = -1 \dots$ entsprechenden Verschiebungen der Knotenpunkte ermittelt worden sind. Die δ_{aw} , δ_{bw} , $\delta_{cw} \dots$ werden in der Regel $= 0$ gesetzt. Will man sie berücksichtigen, so beachte man, daß (nach Seite 35) $\delta_{aw} = -L_a$, $\delta_{bw} = -L_b$, ... ist, wobei L_a die virtuelle Arbeit der Stützenwiderstände des statisch bestimmten Hauptnetzes für den Belastungszustand $X_a = -1$ ist, L_b für den Zustand $X_b = -1$, u. s. w. Die δ_a , δ_b , $\delta_c \dots$ werden schließlich gewissen Bedingungen unterworfen und hierauf werden die Gleichungen (I) aufgelöst. *Dem Leser wird empfohlen, an dieser Stelle das in der Einleitung vorgeführte Beispiel noch einmal an der Hand des Maxwell'schen Satzes durchzugehen und dann die in*

die X_a und X_b sind gewissermaßen Lasten, welche außer den P auf diesen statisch bestimmten Träger wirken. Die Bewegungen der überzähligen Stützenpunkte (C und E) werden bei Aufstellung der Bedingungen berücksichtigt, denen die Verschiebungen δ_a und δ_b schließlich unterworfen werden. Als weitere Ursachen von Störungsgliedern δ_{aw} und δ_{bw} kommen in Wirklichkeit nur noch künstliche Anspannungen und unrichtige Ablängungen von Stäben in Betracht; diese lassen sich aber nach Seite 36 bei Wahl der Temperaturen t berücksichtigen. In der Regel werden die Glieder δ_{aw} und δ_{bw} gestrichen, da sie sich schwierig schätzen lassen. Vergl. auch Seite 22 den letzten Absatz.

den Figuren 141 bis 145 abgebildeten Fachwerke in derselben Weise zu behandeln. Welche Größen als statisch nicht bestimmbar einzuführen sind, ist in den Figuren angegeben worden. Feste Auflagergelenke sind mit (ft) bezeichnet.

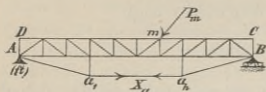


Fig. 141.

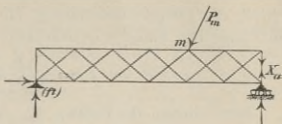


Fig. 142.

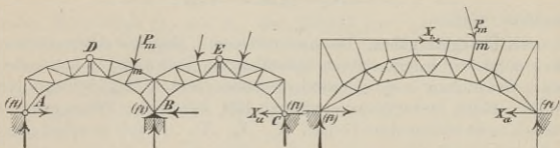


Fig. 143.

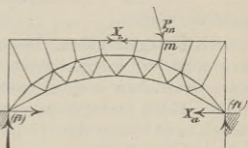


Fig. 144.

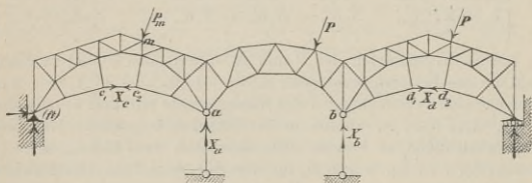


Fig. 145.

61. Über die Wahl der Größen X . In der Regel wird es nicht schwer fallen, diejenigen Spannkraften und Stützenwiderstände eines statisch unbestimmten Fachwerks herauszufinden, welche zweckmäßig zu den mit Hilfe von Elastizitätsgleichungen zu bestimmenden Größen X gewählt werden. Vor allem wird man danach streben, daß das statisch bestimmte Fachwerk, welches durch Beseitigung der als überzählig bezeichneten Stäbe und Auflagerbedingungen gewonnen wird, möglichst einfach ist. So leuchtet z. B. ohne weiteres ein, daß die in Nr. 57 durchgeführte Verwandlung des Bogens mit zwei festen Gelenken in ein Fachwerk mit einem festen und einem beweglichen Gelenke zweckmäßiger ist als die Verwandlung in einen Bogenträger mit drei Gelenken, zu welcher man durch Wegnahme eines Gurtstabes gelangt wäre; denn

die Darstellung der Formänderung ist für diesen Bogenträger etwas umständlicher als für das Fachwerk in Fig. 132.

Sodann ist hervorzuheben, daß nicht jeder Stab und jede Auflagerbedingung eines statisch unbestimmten Fachwerks als überzählig bezeichnet werden dürfen. Wollte man z. B. bei dem in Fig. 146 abgebildeten sichelförmigen Bogenträger, dessen Gurtstäbe EG und JF sich in einem Punkte C der Geraden AB schneiden, die Spannkraft

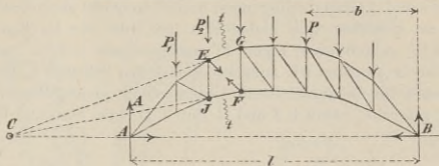


Fig. 146.

des Schrägstabes EF zur Größe X wählen, so würde man mit $X = 0$ einen Bogenträger mit einem Gelenkviereck erhalten, der zwar im allgemeinen steif, im vorliegenden Sonderfalle aber von unendlich kleiner Beweglichkeit wäre, da die drei Punkte A, C, B in dieselbe Gerade fallen. Daß EF ein notwendiger Stab ist, mithin nicht entfernt werden darf, erkennt man auch, wenn man die Spannkraft D des Stabes EF mittels des Ritterschen Verfahrens berechnet, d. h. die Summe der auf den Drehpunkt C bezogenen Momente der am Trägerteile links vom Schnitte tt angreifenden Kräfte $= 0$ setzt. In dieser Gleichung kommen außer D nur noch die Lasten P_1, P_2 und der Stützenwiderstand A vor, und für den letzteren findet man aus der Momentengleichung für den Punkt B den Wert $A = \frac{\Sigma P b}{l}$, so daß für D ein nur von den Kräften P abhängiger Ausdruck erhalten wird, der nur bei ganz bestimmter Lastverteilung verschwindet.

Ein besonders lehrreiches Beispiel bietet der Träger in Fig. 147*), welcher drei feste Auflagergelenke A, B, C und zwei Mittelgelenke D und E besitzt und einfach statisch unbestimmt ist. Er sei so geformt, daß sich die Geraden AD und CE in einem Punkte F der Senkrechten durch B schneiden.

Sind die Scheiben I und II unbelastet, so gehen die Widerstände der Stützen A und C beziehungsweise durch die Gelenke D und E . Zerlegt man nun den Widerstand der Mittelstütze in die senkrechte

*) Vergl. auch Fig. 143, Seite 148.

Seitenkraft B und in die wagerechte H , und belastet die Scheibe III mit einer Kraft P , so erhält man (mit den in die Figur eingetragenen Hebelarmen h und r) die Gleichgewichtsbedingung

$$Hh = Pr$$

und erkennt, daß H im allgemeinen nicht $= 0$ gesetzt werden darf; und in der Tat führt die Beseitigung der wagerechten Stützung des Punktes B zu einem Fachwerke, welches zwar die erforderliche Anzahl von Stäben und Auflagerbedingungen besitzt, trotzdem aber verschieblich ist, wie am sichersten und einfachsten mit Hilfe der im Band I Abschnitt XIII eingeführten Figur F' nachgewiesen werden kann. Zu diesem Zwecke ersetzen wir zunächst die steifen Scheiben I, II und III, deren Gestalt für die anzustellende Untersuchung gleichgültig ist, durch einfacher geformte, nämlich I und II durch je einen Stab und III durch

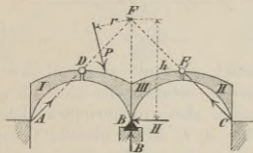


Fig. 147.

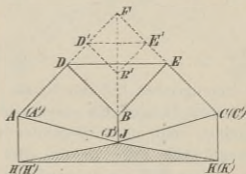


Fig. 148.

ein Dreieck (Fig. 148); sodann verbinden wir jedes feste Auflagergelenk durch *zwei* Stäbe und das bewegliche Auflagergelenk durch *einen* in die Richtung des Stützenwiderstandes B fallenden Stab mit dem die Gesamtheit der Widerlager vorstellenden Dreiecke HJK und erhalten auf diese Weise ein sehr leicht zu übersehendes Fachwerk. Daß sich nun für dieses Stabgebilde eine Figur (F') zeichnen läßt, welche der Fachwerksfigur (F) unähnlich ist, lehrt ein Blick auf die Abbildung 148*); und damit ist bewiesen, daß jenes Fachwerk beweglich ist. Die Beweglichkeit ist allerdings — starre Stäbe vorausgesetzt — eine unendlich kleine, der Träger ist aber infolgedessen unbrauchbar.

Es möge schließlich noch darauf hingewiesen werden, daß im allgemeinen ein statisch unbestimmtes Fachwerk mit Hilfe der Figur F' auf Beweglichkeit untersucht werden muß, noch ehe auf die Frage, welche Größen mit X zu bezeichnen sind, eingegangen wird; denn es kann vorkommen, daß die Beweglichkeit nicht erst durch Beseitigung-

*) Die Punkte A' , C' , H' , J' , K' wurden mit den entsprechenden Punkten A , C , H , J , K zusammenfallend angenommen.

von Stäben oder Auflagerkräften herbeigeführt wird, sondern schon vorher besteht. Beispiele hierfür bieten die Figuren 149 und 150. Erstere stellt ein ebenes Stabgebilde von endlicher Beweglichkeit vor, was leicht zu erkennen ist, weil das Gebilde aus der Form *a* in die Form *b* gebracht werden kann, und letztere zeigt ein ebenes Fachwerk, welches selbst dann von unendlich kleiner Beweglichkeit sein würde, wenn sämtliche Stäbe starr wären; denn die Scheibe 1—2—3—4 kann sich so lange um den Punkt *C*, in welchem die Achsen der an

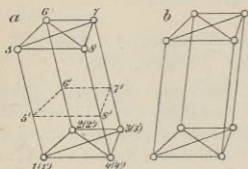


Fig. 149.

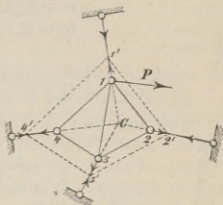


Fig. 150.

der Scheibe angreifenden Stäbe zusammentreffen, drehen, bis jene Achsen nicht mehr durch einen Punkt gehen, was nach einer unendlich kleinen Drehung der Scheibe der Fall sein wird. Bezüglich der Stabgebilde von unendlich kleiner Beweglichkeit verweisen wir noch auf die in der Einleitung, Seite 37, angestellten Betrachtungen. Dort wurde gezeigt, daß bei solchen Fachwerken die Vernachlässigung der Längenänderungen der Stäbe nicht erlaubt ist, auch hervorgehoben, daß derartige Stabwerke als Träger ungeeignet sind.

b. Aufstellung von Elastizitätsgleichungen, deren jede nur eine Unbekannte enthält.

62. Allgemeines. Die Elastizitätsbedingungen I auf Seite 149 (s. auch Seite 35, Gleich. 35) lassen sich stets so umformen, daß in jeder Bedingung nur eine Unbekannte *X* vorkommt, welche dann ohne weiteres aus dieser Gleichung berechnet werden kann. Um dies zu erreichen, muß man die statisch nicht bestimmbareren Größen so wählen, daß alle diejenigen Koeffizienten δ der *X* verschwinden, welche einen aus zwei verschiedenen Buchstaben gebildeten Zeiger haben, nämlich:

$$\delta_{ab} = \delta_{ba}, \delta_{ac} = \delta_{ca}, \delta_{bc} = \delta_{cb}, \text{ u. s. f.}$$

Es ergeben sich dann die einfachen Beziehungen:

$$(II) \quad \begin{cases} \delta_a = \sum P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} + \delta_{az} + \delta_{aw} \\ \delta_b = \sum P_m \delta_{mb} - X_b \delta_{bb} + \delta_{bz} + \delta_{bw} \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Diese Umformung bezweckt nicht allein die Umgehung der an und für sich einfachen Aufgabe, Gleichungen mit mehreren Unbekannten aufzulösen, sondern auch die Vermeidung größerer Fehler, die bei Anwendung der Bedingungen (I) meistens unausbleiblich sind, sobald die Verschiebungen δ auf *zeichnerischem* Wege ermittelt werden. Liegt beispielsweise ein zweifach statisch unbestimmtes Fachwerk vor, für welches der Einfluß einer Einzellast P_m auf die Größen X_a und X_b angegeben werden soll, so hat man (wenn $\delta_a = 0$ und $\delta_b = 0$ sind):

$$0 = P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab}$$

$$0 = P_m \delta_{mb} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb}$$

und hieraus:

$$\frac{X_a}{P_m} = \frac{\delta_{ma} \delta_{bb} - \delta_{mb} \delta_{ab}}{\delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2}, \quad \frac{X_b}{P_m} = \frac{\delta_{mb} \delta_{aa} - \delta_{ma} \delta_{ba}}{\delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2}.$$

Man erhält also, falls die Glieder, aus denen die vorstehenden Brüche bestehen, positiv sind, die $X:P$ als Verhältnisse von Unterschieden und kann schon bei geringen Zeichenfehlern zu ganz unrichtigen Ergebnissen gelangen. Wurden z. B. für Zähler und Nenner von $X_a:P_m$ die Werte $151,87 - 149,12 = 2,75$ und $223,81 - 220,58 = 3,23$ anstatt der genaueren: $151,58 - 149,34 = 2,24$ und $224,67 - 220,68 = 3,99$ erhalten, so findet man

$$\frac{X_a}{P_m} = \frac{2,75}{3,23} = 0,85 \quad \text{statt} \quad \frac{X_a}{P_m} = \frac{2,24}{3,99} = 0,56,$$

bekommt also trotz der geringen Fehler in den einzelnen Zahlen einen um 52% zu großen Wert $X_a:P_m$.

Nach den Erfahrungen des Verfassers empfiehlt sich die Anwendung der Gleichungen (I) bei mehrfach statisch unbestimmten Fachwerken nur dann, wenn die Verschiebungen δ durch Rechnung ermittelt werden und zwar auf mehrere Dezimalstellen, die erst nach Bestimmung der X zum Teil abzuwerfen sind. Meistens kommen nur parallele Lasten in Betracht, in welchem Falle nur die Berechnung von Biegungslinien nach dem in Nr. 49 gelehrteten Verfahren verlangt wird.

Entscheidet man sich aber für die Anwendung von Verschiebungsplänen, so forme man die Gleichungen (I) auf die im folgenden gelehrtete Weise in (II) um. Dabei wird sich zeigen, daß diese Umwandlung bei Fachwerken von niedrigerem Grade statischer Unbestimmtheit (und diese kommen ja fast allein vor) sehr einfach ist. Je größer die Anzahl der X , desto umständlicher wird es, die Gleichungen (II) herbeizuführen.

Vorausgeschickt werde noch, daß in Nr. 63 bis 66 die X entweder Einzelkräfte oder Momente von an starren Scheiben angreifenden Kräftepaaren bedeuten. Im ersten Falle bezeichnet das zugehörige δ eine Verschiebung, im zweiten einen (im Bogenmaß ausgedrückten)

Drehungswinkel. Ist also z. B. X_a eine im Punkte a angreifende Einzelkraft, so bedeutet δ_a die Projektion der Verschiebung von a auf die Richtung X_a . Stellt X_a das Moment eines an einer starren Scheibe $[a]$ angreifenden Kräftepaars vor, so gibt δ_a den Winkel an, um den sich die Scheibe $[a]$ dreht. Die $\delta_a, \delta_b, \dots$ werden in entgegengesetztem Sinne positiv gezählt wie die zugehörigen Größen X . Bezüglich der übrigen Bezeichnungen verweisen wir auf Seite 34 (vergl. auch Nr. 59). Greifen zwei Einzelkräfte X_r, X_s an demselben Punkte an, so wählen wir für diesen den Buchstaben r oder s , je nachdem wir den Punkt als den Angriffspunkt von X_r oder von X_s besonders ins Auge fassen.

Schließlich machen wir darauf aufmerksam, daß in den folgenden Beispielen bei unverschieblichen Widerlagern mit den Größen $\delta_{aw}, \delta_{bw}, \dots$ auch stets die $\delta_a, \delta_b, \dots$ verschwinden, so daß sich für den Einfluß der Lasten P auf die Größen X die Formeln ergeben:

$$(III) \quad X_a = \frac{\sum P_m \delta_{ma}}{\delta_{aa}}; \quad X_b = \frac{\sum P_m \delta_{mb}}{\delta_{bb}}; \dots$$

und für den Einfluß von Temperaturänderungen die Ausdrücke:

$$(IV) \quad X_{at} = 1 \frac{\delta_{at}}{\delta_{aa}}; \quad X_{bt} = 1 \frac{\delta_{bt}}{\delta_{bb}}; \dots$$

63. Das zweifach statisch unbestimmte Fachwerk. Als statisch nicht bestimmbar lassen sich hier stets zwei in einem und demselben Punkte angreifende Einzelkräfte X_a und X_b einführen. Die Gleichungen (II) gelten, sobald $\delta_{ba} = \delta_{ab} = 0$ ist. Um dies zu erreichen, wähle man die Richtung von X_a willkürlich, bestimme die Verschiebung aa_1 , welche a infolge des Belastungszustandes $X_a = -1$ erleidet und nehme X_b rechtwinklig zu aa_1 an. Dann wird $\delta_{ba} = 0$; denn es bedeutet δ_{ba} die Verschiebung, welche b in der Richtung X_b erfährt, wenn nur die Ursache $X_a = -1$ wirkt. Trägt man nun den Verschiebungsplan für den Zustand $X_b = -1$ auf, so muß sich bei sorgfältiger Zeichnung für den Punkt b eine zu X_a rechtwinklige Verschiebung bb_1 ergeben; denn sobald $\delta_{ba} = 0$ ist, muß auch $\delta_{ab} = 0$ sein, weil $\delta_{ba} = \delta_{ab}$ ist.

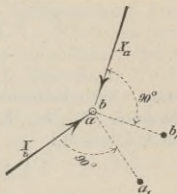


Fig. 151.

1. Beispiel. Der in Fig. 152 dargestellte, über zwei Öffnungen gespannte Bogenträger, welcher bei A und C feste, bei B ein bewegliches Auflagergelenk besitzt, ist zweifach statisch unbestimmt. Als Größen X sollen die nach festen Richtungen wirkenden Seitenkräfte X_a und X_b des in A angreifenden Stützenwiderstandes eingeführt

werden. Im Falle $X_a = 0$ und $X_b = 0$ geht der Träger in einen statisch bestimmten Balken mit den Stützen B und C und einem auskragenden Arme BA über. Für diesen Balken wird nach willkürlicher Wahl der Richtung von X_a der dem Zustande $X_a = -1$ entsprechende Verschiebungsplan gezeichnet, welcher für a die Verschiebung aa_1 und für irgendeinen Knoten m die Verschiebung mm_1 ergeben möge. Nun wird X_b rechtwinklig zu aa_1 angenommen und der Verschiebungsplan für $X_b = -1$ aufgetragen; derselbe liefert für den Punkt b eine zu X_a rechtwinklige Verschiebung bb_2 und für m die Verschiebung

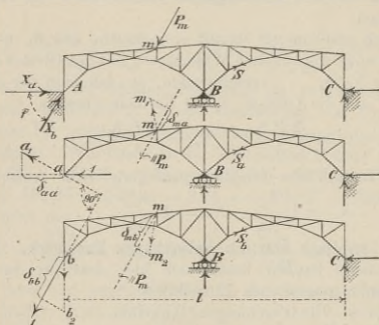


Fig. 152.

mm_2 . Nach Bestimmung der in die Figur 152 eingetragenen Projektionen δ_{aa} , δ_{bb} , δ_{ma} , δ_{mb} (von denen δ_{ma} negativ ist) erhält man den Einfluß von P_m :

$$X_a = P_m \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}; \quad X_b = P_m \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}}.$$

Wird sämtlichen Stäben die gleiche Temperaturänderung t zugeschrieben, und liegen A , B , C in einer zur Bahn des Lagers B parallelen Geraden, so erfährt der Endpunkt A des Balkens ABC infolge t eine wagerechte Verschiebung von der Größe εtl (wo $l = \overline{AC}$), deren Projektionen auf die Richtungen von $X_a = -1$ und $X_b = -1$ beziehungsweise $\delta_{at} = \varepsilon tl$ und $\delta_{bt} = \varepsilon tl \cos \varphi$ sind (wo φ den Neigungswinkel von X_b gegen die Wagerechte bedeutet) und es ergibt sich deshalb:

$$X_{at} = 1 \frac{\varepsilon tl}{\delta_{aa}}; \quad X_{bt} = 1 \frac{\varepsilon tl \cos \varphi}{\delta_{bb}}.$$

2. Beispiel. Der Fachwerkbogen in Fig. 153 ist bei A und B fest gelagert und besitzt einen überzähligen Stab CD ; er ist also zweifach statisch unbestimmt. Wir verwandeln das feste Gelenk in ein bewegliches, denken uns aus dem Stabe CD ein Stück EF herausgeschnitten, führen die Punkte E und F in der Geraden CD , fügen die starren Stäbe EG , FG , GH und AH hinzu und bringen in H zwei Kräfte X_a und X_b an, welche wir so bestimmen, daß die gegenseitige Verschiebung des Punktepaares CD ebenso groß wird wie die Längenänderung des überzähligen Stabes, und daß ferner (unbewegliche Widerlager vorausgesetzt) die Verschiebung des Punktes A den Wert Null annimmt. Dann stimmen die Spannkraften der Träger in den Figuren 153 und 154 miteinander überein. Die Spannkraft des Stabes AH

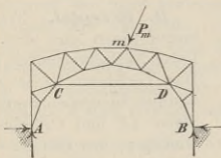


Fig. 153.

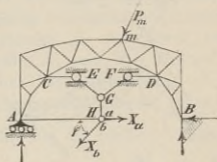


Fig. 154.

gibt den wagerechten Widerstand des festen Auflagergelenks A an. Zu beachten ist, daß $GH \perp CD$ und $\angle EGH = \angle FGH$ sein muß, damit sich für die Stäbe CE und FD gleich große Spannkraften ergeben; auch empfiehlt es sich, den Stäben CE und FD Querschnitte F' , F'' und Temperaturänderungen t' , t'' zuzuschreiben, welche zur Folge haben, daß die Summe der Längenänderungen von CE und FD gleich der Längenänderung des überzähligen Stabes CD ist. Entsprechen dem letzteren daher die Werte F , t und ist $\overline{CD} = s$, $\overline{CE} = s'$, $\overline{FD} = s''$, so muß sein:

$$\frac{s'}{F'} + \frac{s''}{F''} = \frac{s}{F} \quad \text{und} \quad t's' + t''s'' = ts.$$

Es wird dann außer der Verschiebung des Punktes A die gegenseitige Verschiebung des Punktepaares EF gleich Null gesetzt und hieraus $\delta_a = 0$, $\delta_b = 0$ gefolgert. Wählt man nun nach willkürlicher Annahme der Richtung von X_a die Kraft X_b rechtwinklig zu der Verschiebung, welche a infolge von $X_a = -1$ erfährt, so gelten wie vorhin die Gleichungen:

$$X_a = P_m \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}; \quad X_b = P_m \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}}.$$

Schreibt man sämtlichen Stäben die gleiche Temperaturänderung t zu (mit Ausnahme der Stäbe CE und FD , für welche t' bezieh. t'' anzunehmen sind), so erhält man wie im vorigen Beispiele:

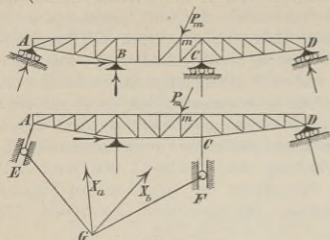


Fig. 155 u. 156.

$$X_{at} = 1 \frac{\varepsilon t l}{\delta_{aa}};$$

$$X_{bt} = -1 \frac{\varepsilon t l \cos \varphi}{\delta_{bb}}.$$

Das Minuszeichen ist erforderlich, weil X_b jetzt einen anderen Richtungspfeil besitzt.

3. Beispiel. Träger mit einem festen und drei beweglichen Auflagergelenken, Fig. 155. Das Verfahren ist in der Abbildung angegeben worden. Die Stäbe AE und CF sind rechtwinklig zu den Bahnen der Auflager A und C ; ihre Endpunkte E und F werden in den Richtungen AE und CF geführt.

64. Das dreifach statisch unbestimmte Fachwerk. Man schließe an das statisch bestimmte Fachwerk, in welches das unbestimmte infolge Beseitigung der überzähligen Stäbe und Auflagerbedingungen übergeht, auf irgendeine Weise eine starre Scheibe an und belaste diese mit einem Kräftepaare, dessen Moment $= X_a$ ist, ferner mit zwei in demselben Punkte (b, c) angreifenden Einzelkräften X_b und X_c . Hierauf nehme man die Werte δ_a (Drehungswinkel der Scheibe), δ_b (Verschiebung von b im Sinne $X_b = -1$) und δ_c (Verschiebung von c im Sinne

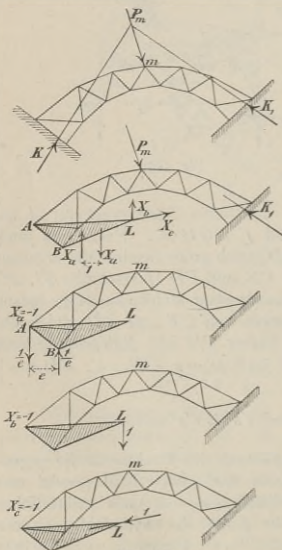


Fig. 157.

$X_c = -1$) so an, daß die an der Scheibe angreifenden Kräfte auf das statisch bestimmte Fachwerk genau dieselbe Wirkung ausüben, wie

die beseitigten überzähligen Glieder. Wählt man nun den Pol, um den sich die Scheibe infolge des Belastungsfalles $X_a = -1$ dreht, zum Angriffspunkte von X_b und X_c , so erzielt man, daß $\delta_{ba} = 0$ und $\delta_{ca} = 0$ wird, und es müssen sich dann bei sorgfältiger Zeichnung oder Rechnung die Drehungswinkel δ_{ab} und δ_{ac} , welche die Scheibe infolge $X_b = -1$ und $X_c = -1$ erfährt, ebenfalls $= 0$ ergeben. Nimmt man schließlich, bei willkürlich gewählter Richtung von X_b , die Richtung von X_c rechtwinklig zu der Verschiebung an, welche der Punkt (b, c) infolge der Ursache $X_b = -1$ erfährt, so wird $\delta_{bc} = 0$ und damit auch $\delta_{cb} = 0$, und es gelten dann die Gleichungen (II).

1. Beispiel. Liegt der in Fig. 157 dargestellte, in der Regel als *Fachwerkbogen mit eingespannten Enden* bezeichnete Träger vor, so ersetzt man das linke Widerlager durch die starre Scheibe ABL und den nach Lage und Größe vorläufig unbekanntem Kämpferdruck K durch ein Kräftepaar mit dem Momente X_a und durch zwei nach festen Richtungen wirkende Einzelkräfte X_b und X_c . Hierauf zeichnet man den Verschiebungsplan für den Belastungszustand $X_a = -1$, indem man in A und B zwei entgegengesetzt gleiche, im Abstände e voneinander wirkende, parallele Kräfte von der Größe $\frac{1}{e}$ annimmt, bestimmt die Verschiebungen AA_1 und BB_1 von A und B und wählt hierauf den Angriffspunkt L von X_b und X_c so, daß $LA \perp AA_1$ und $LB \perp BB_1$ ist. Dann ist L der Drehpol der Scheibe für den Zustand $X_a = -1$; es ergibt sich $\delta_{ba} = 0$, $\delta_{ca} = 0$ und deshalb auch $\delta_{ab} = 0$, $\delta_{ac} = 0$.

Die Richtung von X_a wird willkürlich gewählt und die Richtung von X_c rechtwinklig zu der Verschiebung angenommen, welche L infolge $X_b = -1$ erfährt, damit $\delta_{cb} = \delta_{bc} = 0$ werde. Schließlich werden bei starren Widerlagern die Werte δ_a , δ_b und $\delta_c = 0$ gesetzt und die Gleichungen (II) aufgelöst. Für den Einfluß von P_m gelten die Gleichungen III, für denjenigen von t die Gleichungen IV (S. 154 u. 155).

2. Beispiel. Soll der in Fig. 158 abgebildete, über 3 Öffnungen gespannte Bogenträger mit den festen Auflagergelenken A, D und den beweglichen Auflagergelenken B, C untersucht werden, so ersetze man die Stützen A und C auf die in der Figur angegebene Weise durch eine starre Scheibe AF und einen zur Bahn des Auflagers C rechtwinkligen Stab CF , belaste die Scheibe mit einem Kräftepaare X_a und zwei in demselben Punkte L angreifenden Einzelkräften X_b, X_c und verfähre wie bei Lösung der vorigen Aufgabe. Behufs Bestimmung des Punktes L ermittle man für den Zustand $X_a = -1$ die Verschiebungen von A und C , hierauf die Verschiebung von F und trage AL und FL rechtwinklig zu den Bewegungsrichtungen der Punkte A

bezieh. F ein. Bei starren Widerlagern sind δ_a , δ_b und δ_c gleich Null zu setzen.

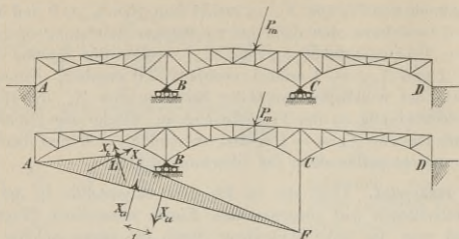


Fig. 158.

65. Das vierfach statisch unbestimmte Fachwerk. Man lasse die Kräfte X_a , X_b , X_c , X_d auf eine aus zwei starren Scheiben I , II und zwei starren Stäben I' , II' gebildete kinematische Kette (Fig. 159) wirken, welche mit dem statisch bestimmten Hauptsysteme so verbunden wird, daß sich die von den Ursachen $X_a = -1$, $X_b = -1$, $X_c = -1$, $X_d = -1$ hervorgerufenen Spannkkräfte S_a , S_b , S_c , S_d eindeutig und auf möglichst einfache Weise mittels der Gleichgewichtsbedingungen bestimmen lassen. Die Scheibe I belaste man hierbei mit den Einzelkräften X_a und X_b *, die Scheibe II mit den Einzelkräften X_c und X_d . Die ganze Anordnung wähle man so, daß man die Belastungszustände $X_a = -1$ und $X_b = -1$ vollständig erledigen kann, ohne die Lage der Scheibe II zu kennen.

Die Lage von X_a darf willkürlich angenommen werden; X_b muß durch den Pol I_a gehen, um den sich die Scheibe I infolge der Belastung $X_a = -1$ dreht. Man erreicht dann: $\delta_{ba} = \delta_{ab} = 0$.

Nach Bestimmung der Verschiebungen infolge der Ursache $X_b = -1$, welche für die Scheibe I den Pol I_b liefern möge, gebe man der Scheibe II eine solche Lage, daß die Pole II_a und II_b , um welche sich II bei Eintreten der Belastungszustände $X_a = -1$ und $X_b = -1$ dreht, zusammenfallen, und diesen gemeinschaftlichen (in der Fig. 159) mit L bezeichneten Pol wähle man zum Angriffspunkte der Kräfte X_c und X_d . Dann wird nämlich $\delta_{ca} = 0$, $\delta_{cb} = 0$, $\delta_{da} = 0$, $\delta_{db} = 0$ und infolgedessen auch $\delta_{ac} = 0$, $\delta_{bc} = 0$, $\delta_{ad} = 0$, $\delta_{bd} = 0$. Schließlich nehme man bei willkürlicher Wahl der Richtung von X_c die Kraft X_d rechtwinklig zu der Verschiebung an, welche Punkt L infolge $X_c = -1$ erfährt, damit $\delta_{ac} = \delta_{cd} = 0$ werde. Die Gültigkeit der Elastizitätsgleichungen II ist hiermit erreicht.

*) Die Kraft X_a darf auch durch ein Kräftepaar ersetzt werden.

Die Lage des Punktes L bestimmt man am schnellsten mit Hilfe des im I. Bande Abschnitt XIII abgeleiteten Satzes von den drei Polen. Die Pole $(I \cdot I')$ von I gegen I' und $(I' \cdot II)$ von I' gegen II fallen mit Gelenk B bezieh. dem Schnittpunkte von AB und CD zusammen, Pol $(I \cdot II)$ mit A . Die durch I_a und $(I \cdot I')$, ferner durch I_b und $(I' \cdot I')$ gelegten Geraden sind die Örter der Pole I'_a und I'_b , um welche sich I' infolge von $X_a = -1$ bzw. $X_b = -1$ dreht, und welche mit $(I' \cdot II)$ in derselben Geraden liegen. Da nun weiter die 3 Pole $(I \cdot II)$, I_a , II_a in einer Geraden liegen müssen, desgleichen die Pole $(I \cdot II)$, I_b , II_b , so ergibt sich die folgende Bestimmungsweise der gesuchten Kette.

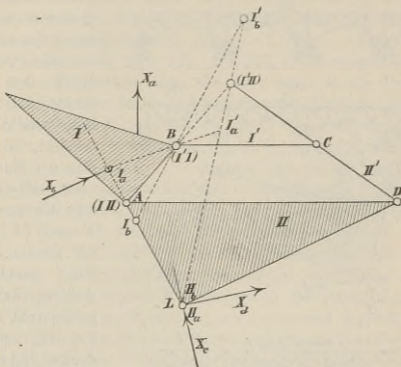


Fig. 159.

Man nehme $(I \cdot II)$ in der Geraden $I_a - I_b$ an, wähle die Lage des Stabes BC nach Belieben, bestimme die Pole I'_a und I'_b , um welche sich I' infolge $X_a = -1$ und $X_b = -1$ dreht, bringe die Geraden $I'_a - I'_b$ und AB in $(I' \cdot II)$ zum Schnitt und stelle nun die (durch den Punkt $I' \cdot II$ gehende) Richtung des Stabes CD , dessen Länge willkürlich ist, fest. Schließlich findet man L als Schnittpunkt der Geraden $I'_a - I'_b$ und $I_a - I_b$.

Beispiel. In Fig. 160 ist das beschriebene Verfahren auf einen über drei Öffnungen gespannten Bogenträger mit den festen Gelenken A und E und den auf wagerechten Geraden beweglichen Gelenken B , C und D angewendet worden. Die Scheibe I wurde mit dem Kräftepaare X_a und der Einzelkraft X_b belastet. Die Einführung eines

Kräftepaars X_a bietet den Vorteil, daß sich die Spannkkräfte S_a und Längenänderungen Δs_a für den Zustand $X_a = -1$ angeben lassen, ohne daß über die Länge des Stabes CG etwas festgesetzt zu werden braucht, denn wie lang auch CG gewählt wird, stets werden durch die Scheibe I infolge $X_a = -1$ auf die Punkte A und C des statisch bestimmten Hauptsystems zwei entgegengesetzt gleiche lotrechte Kräfte $\frac{1}{e}$ übertragen, wobei $e =$ dem wagerechten Abstände AC ist. Hat man nun für diesen Belastungszustand die Verschiebungen der Punkte A

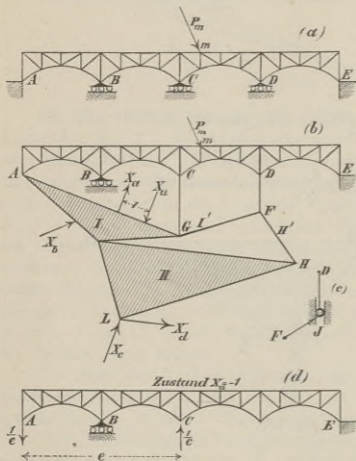


Fig. 160.

und C ermittelt, so kann man durch eine passende Wahl des Punktes G eine bequemere Lage des Poles erzielen, um den sich I dreht und durch den dann X_b gehen muß. Ist der Belastungsfall $X_a = -1$ erledigt, so untersucht man den Zustand $X_b = -1$. Hierbei braucht man die Lagen der Stäbe I' und II' noch nicht zu kennen und wird diese nachträglich so wählen, daß der Angriffspunkt L (d. i. der Pol II_a und zugleich der Pol II_b) günstig liegt, wobei zu beachten ist, daß man den Stab DF auch nach Fig. 160c durch zwei Stäbe DJ und FJ ersetzen darf, deren gemeinsames Gelenk J in lotrechter Richtung geführt wird. Bei starren Widerlagern wird schließlich $\delta_a = 0$, $\delta_b = 0$, $\delta_c = 0$, $\delta_d = 0$ gesetzt.

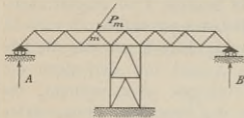
66. Träger von höherem Grade statischer Unbestimmtheit. Ist die Anzahl der statisch nicht bestimmaren Werte X größer als 4, so ist es möglich, das gesteckte Ziel durch wiederholte Lösung der in Fig. 159 behandelten Aufgabe zu erreichen: die Pole II_a und II_b miteinander zur Deckung zu bringen. Um dies an einem Beispiele zu zeigen, denken wir uns den Bogenträger in Fig. 160 rechts von E noch um mehrere

Öffnungen verlängert und nehmen an, daß über sämtlichen Mittelstützen bewegliche Lager mit wagerechten Bahnen angeordnet sind, an beiden Enden hingegen feste Auflagergelenke. Die beweglichen Auflager seien beseitigt, an ihre Stelle mögen lotrechte Stäbe treten, an welche in gleicher Weise wie an die Stäbe CG und DF noch weitere starre Stäbe und Scheiben angereiht werden sollen. Ebenso wie nun die Scheibe II in Abb. 160 an den Stab DF und an die Scheibe I so angeschlossen wurde, daß sich II infolge der beiden Belastungszustände $X_a = -1$ und $X_b = -1$ um denselben Pol L dreht, denken wir uns weitere Scheiben III , IV , V hinzugefügt, deren Anzahl mit derjenigen der rechts von E sich anreihenden Trägeröffnungen übereinstimmt, die sämtlich mit I und mit je einem der von den beseitigten Stützpunkten ausgehenden lotrechten Stäben so verbunden sind, daß jeder Scheibe für die beiden Belastungszustände $X_a = -1$, $X_b = -1$ derselbe Drehpol entspricht, und zwar falle III_a mit III_b in M zusammen, IV_a mit IV_b in N usw. Es bleiben dann alle etwa noch an die Punkte L , M , N , . . . anzuschließenden Stäbe und Scheiben bei Eintreten jener beiden Belastungszustände in Ruhe, und es folgt, wenn an diesen Gliedern Kräfte X_e , X_f , X_g , . . . angreifen: $\delta_{ea} = \delta_{eb} = 0$, $\delta_{fa} = \delta_{fb} = 0$, . . . $\delta_{ga} = \delta_{gb} = 0$, $\delta_{fa} = \delta_{fb} = 0$, . . . Gesetzt nun, es sei der Träger fünfmal statisch unbestimmt, ein Fall, der vorliegt, wenn rechts von E in Fig. 160 noch eine Öffnung hinzutritt. Dann kommen nur die Scheiben II und III in Betracht; man füge die in einem Gelenke T aneinanderhängenden Glieder LT und TM hinzu, bestimme die Pole S_c und S_a , um welche sich die Scheibe $S = TM$ infolge von $X_e = -1$ bezieh. $X_a = -1$ dreht und belaste S mit einer in die Gerade $S_c S_a$ fallenden Einzelkraft X_e . Dann ergibt sich $\delta_{ec} = \delta_{ea} = 0$ und $\delta_{ec} = \delta_{ea} = 0$, und es gelten die Gleichungen (5), weil sämtliche δ , die in den Gleichungen (4) in Verbindung mit den X auftreten und deren Zeiger aus zwei ungleichen Buchstaben bestehen, verschwinden.

Wäre der Träger sechsfach statisch unbestimmt, so würde man an die Scheiben II , III , IV eine Scheibe S' auf irgendeine Weise so anschließen haben, daß die Drehpole S'_c und S'_a sich decken, und hierauf würde man diesen gemeinschaftlichen Pol zum Angriffspunkte von zwei Einzelkräften X_e und X_f wählen, wobei die Richtung von X_f rechtwinklig zu der Richtung der Verschiebung sein muß, welche der Angriffspunkt dieser Kraft infolge $X_e = -1$ erfährt. Die Möglichkeit nun, im Falle noch höheren Grades statischer Unbestimmtheit, weitere Scheiben S'' , S''' , . . . so anzureihen, daß S''_c mit S''_a zusammenfällt, S'_c mit S'''_a u. s. w. bildet die Handhabe zur planmäßigen Ausbildung unseres Verfahrens; denn alle an die gemeinschaftlichen Pole angeschlossenen folgenden Stäbe und Scheiben bleiben nicht nur beim Ein-

treten der Zustände $X_a = -1$, $X_b = -1$, sondern auch in den Belastungsfällen $X_c = -1$ und $X_d = -1$ in Ruhe.

67. Ein zweites Verfahren zur Erzielung voneinander unabhängiger Elastizitätsgleichungen. Wir beginnen mit einem einfachen Beispiele. Es liege das in Fig. 161 dargestellte symmetrische Fachwerk vor. Als



statisch unbestimmte Größen sollen zwei Werte X_a und X_b eingeführt werden, die mit den Stützenwiderständen A und B durch die Gleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} A = X_a + X_b \\ B = X_a - X_b \end{cases}$$

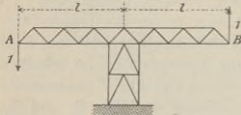
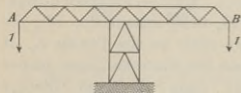


Fig. 161.

verbunden sind. Die *Belastung**) $X_a = -1$ erzeugt dann $A = B = -1$ und die Belastung $X_b = -1$ bringt $A = -1$, $B = +1$ hervor. Im ersten Falle mögen sich die Stützpunkte A und B senken um $\delta_{Aa} = \delta_{Ba}$, im zweiten Falle senkt sich A um δ_{Ab} , während B angehoben wird um $\delta_{Bb} = \delta_{Ab}$. Daß die Summe $\sum S_a S_b \rho = 0$ ist, folgt ohne weiteres daraus, daß jedem Gliede $S_a S_b \rho$ der linken Hälfte des Tragwerks ein gleich großes, aber mit dem entgegengesetzten Vorzeichen behaftetes Glied der rechten Hälfte entspricht.

Man findet dies aber auch aus der Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen auf den Belastungszustand $X_a = -1$ und den Verschiebungszustand $X_b = -1$, welche zu der Gleichung führt

$$1 \cdot \delta_{Ab} - 1 \cdot \delta_{Bb} = \sum S_a S_b \rho = 0.$$

Nun folgt:

$$X_a = \frac{\sum P_m \delta_{ma}}{\delta_{aa}}, \quad X_b = \frac{\sum P_m \delta_{mb}}{\delta_{bb}},$$

wo δ_{aa} und δ_{bb} durch die Gleichungen gegeben sind:

$$\delta_{aa} = \sum S_a^2 \rho = 1 \cdot \delta_{Aa} + 1 \cdot \delta_{Ba} = 2\delta_{Aa}$$

$$\delta_{bb} = \sum S_b^2 \rho = 1 \cdot \delta_{Ab} + 1 \cdot \delta_{Bb} = 2\delta_{Ab}.$$

Wenden wir uns jetzt zu dem unsymmetrisch gebauten, in Fig. 162 dargestellten Tragwerke. Die Gleichungen (1) ersetzen wir durch die allgemeineren Ausdrücke

$$(2) \quad \begin{cases} A_1 = \alpha_{1a} X_a + \alpha_{1b} X_b \\ A_2 = \alpha_{2a} X_a + \alpha_{2b} X_b, \end{cases}$$

*) Die Erklärung des Begriffs Belastung findet man auf Seite 31.

wo α_{1a} , α_{1b} , α_{2a} , α_{2b} Koeffizienten sind, über die wir so verfügen wollen, daß $\delta_{ab} = 0$ wird und im übrigen möglichst einfache Zustände $X_a = -1$ und $X_b = -1$ entstehen.

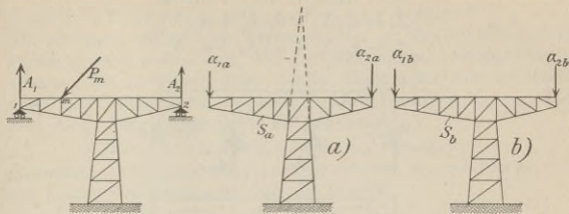


Fig. 162.

Für den Zustand $X_a = 1$ ist

$$A_1 = \alpha_{1a}, \quad A_2 = \alpha_{2a}.$$

Wir wählen $\alpha_{1a} = 1$ und nehmen α_{2a} so groß an, daß die Mittelkraft aus α_{1a} und α_{2a} durch den Schnittpunkt der Pfeilergurtungen geht. Dann werden die Spannkkräfte in den Füllungsstäben der Pfeilerwand gleich Null. Es sind diese Kräfte also unabhängig von X_a , was die Untersuchung des Pfeilers jedenfalls sehr erleichtert. Nach Aufzeichnung des Verschiebungsplanes für den Zustand $X_a = -1$, welcher für die Stützpunkte 1 und 2 die Senkungen δ_{1a} und δ_{2a} liefert, wenden wir uns zum Zustande $X_b = -1$ und verfügen über $A_1 = \alpha_{1b}$ und $A_2 = \alpha_{2b}$ so, daß $\delta_{ab} = 0$ wird.

Aus

$$\delta_{ba} = \sum S_b S_a \rho = \alpha_{1b} \cdot \delta_{1a} + \alpha_{2b} \delta_{2a}$$

folgt

$$\alpha_{2b} = -\alpha_{1b} \frac{\delta_{1a}}{\delta_{2a}},$$

wo α_{1b} beliebig groß (z. B. gleich 1) angenommen werden darf.

Für X_a und X_b erhält man nach Darstellung des Verschiebungszustandes $X_b = -1$, der für 1 und 2 die Senkungen δ_{1b} und δ_{2b} liefern möge, die Werte

$$X_a = \frac{\sum P_m \delta_{ma}}{\delta_{aa}}, \quad X_b = \frac{\sum P_m \delta_{mb}}{\delta_{bb}},$$

wo

$$\delta_{aa} = \sum S_a^2 \rho = \alpha_{1a} \delta_{1a} + \alpha_{2a} \delta_{2a}$$

$$\delta_{bb} = \sum S_b^2 \rho = \alpha_{1b} \delta_{1b} + \alpha_{2b} \delta_{2b}.$$

Zweites Beispiel. Untersuchung des in Fig. 163 abgebildeten Bogenträgers mit drei Öffnungen. Die Stützenwiderstände A_1, A_2, A_3 sollen in der Form dargestellt werden:

$$A_1 = \alpha_{1a} X_a + \alpha_{1b} X_b + \alpha_{1c} X_c$$

$$A_2 = \alpha_{2a} X_a + \alpha_{2b} X_b + \alpha_{2c} X_c$$

$$A_3 = \alpha_{3a} X_a + \alpha_{3b} X_b + \alpha_{3c} X_c.$$

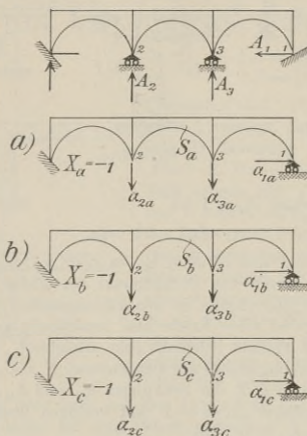


Fig. 163.

Die Belastungszustände $X_a = -1, X_b = -1, X_c = -1$ sind in der Figur angegeben. Die wagerechte, nach rechts positiv gezählte Verschiebung von Punkt 1, sowie die Senkungen der Punkte 2 und 3 infolge dieser drei Belastungen seien der Reihe nach

$$\begin{aligned} &\delta_{1a}, \delta_{2a}, \delta_{3a} \\ &\delta_{1b}, \delta_{2b}, \delta_{3b} \\ &\delta_{1c}, \delta_{2c}, \delta_{3c}. \end{aligned}$$

Wir denken uns zunächst $\alpha_{1a}, \alpha_{2a}, \alpha_{3a}$, beliebig groß angenommen und die zugehörige Biegelinie gezeichnet. Hierauf stellen wir die Bedingung auf

$$(I) \quad \sum S_a S_b \varphi = \delta_{ab} = \delta_{1a} \alpha_{1b} + \delta_{2a} \alpha_{2b} + \delta_{3a} \alpha_{3b} = 0,$$

welche gestattet, einen der Werte α_{1b} , α_{2b} , α_{3b} zu berechnen, während die anderen zunächst wieder willkürlich angenommen werden dürfen.

Hierauf schreiben wir noch die Bedingungen an:

$$(II) \quad \sum S_b S_c \rho = \delta_{bc} = \delta_{1b} \alpha_{1c} + \delta_{2b} \alpha_{2c} + \delta_{3b} \alpha_{3c} = 0$$

$$(III) \quad \sum S_a S_c \rho = \delta_{ac} = \delta_{1a} \alpha_{1c} + \delta_{2a} \alpha_{2c} + \delta_{3a} \alpha_{3c} = 0$$

und erkennen, daß von den Werten α_{1c} , α_{2c} , α_{3c} nur ein einziger willkürlich gewählt werden darf, weil zwei Gleichungen befriedigt werden müssen. Die Auflösung dieser beiden Gleichungen wird erleichtert, wenn dafür gesorgt wird, daß einer der drei Werte δ_{1b} , δ_{2b} , δ_{3b} gleich Null wird. Dazu benutzen wir die Gleichung

$$\sum S_b S_a \rho = \delta_{ba} = \delta_{1b} \alpha_{1a} + \delta_{2b} \alpha_{2a} + \delta_{3b} \alpha_{3a} = 0$$

und setzen, um beispielsweise $\delta_{1b} = 0$ zu erhalten, $\alpha_{2a} = 0$ und $\alpha_{3a} = 0$. Die Lösung der Aufgabe ist dann die folgende:

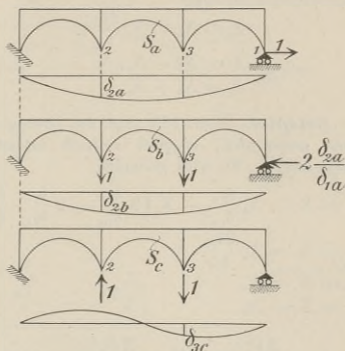


Fig. 164.

Man nehme willkürlich an:

$$\alpha_{1a}, \alpha_{2b}, \alpha_{3b}, \alpha_{1c},$$

setze $\alpha_{2a} = 0$, $\alpha_{3a} = 0$, berechne aus (I) den Wert

$$\alpha_{1b} = -\alpha_{2b} \frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}} - \alpha_{3b} \frac{\delta_{3a}}{\delta_{1a}},$$

sodann aus (II):

$$\alpha_{2c} = -\alpha_{3c} \frac{\delta_{2b}}{\delta_{2b}},$$

schließlich aus (III):

$$\alpha_{1c} = -\alpha_{2c} \frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}} - \alpha_{3c} \frac{\delta_{3a}}{\delta_{1a}}.$$

Der Bogen sei symmetrisch. Wir setzen

$$\alpha_{1a} = \alpha_{2b} = \alpha_{3c} = \alpha_{3e} = 1$$

und finden, wegen $\delta_{3a} = \delta_{2a}$ und $\delta_{3b} = \delta_{2b}$,

$$\alpha_{1b} = -2 \frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}}, \quad \alpha_{2c} = -\alpha_{3c} = -1, \quad \alpha_{1e} = 0.$$

Diese drei Zustände sind in Fig. 164 dargestellt worden. Es ergeben sich die Werte

$$X_a = \frac{\sum P_m \delta_{ma}}{\delta_{aa}}, \quad X_b = \frac{\sum P_m \delta_{mb}}{\delta_{bb}}, \quad X_c = \frac{\sum P_m \delta_{mc}}{\delta_{cc}},$$

wo

$$\delta_{aa} = 1 \cdot \delta_{1a}, \quad \delta_{bb} = 2\delta_{2b} - 2 \frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}} \delta_{1b}, \quad \delta_{cc} = 2\delta_{3c}.$$

Die Stützenwiderstände sind

$$A_1 = X_a - X_b \frac{2\delta_{2a}}{\delta_{1a}},$$

$$A_2 = X_b - X_c,$$

$$A_3 = X_b + X_c.$$

Drittes Beispiel. Figur 165 zeigt die Lösung für einen über vier Öffnungen gespannten, vierfach statisch unbestimmten symmetrischen Bogenträger. Es wird gefunden:

$$A_1 = X_a - X_b \frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}} - X_c \left(2 \frac{\delta_{3a}}{\delta_{1a}} - 2 \frac{\delta_{3b}}{\delta_{2b}} \cdot \frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}} \right),$$

$$A_2 = X_b - X_c \frac{2\delta_{3b}}{\delta_{2b}},$$

$$A_3 = X_c - X_d,$$

$$A_4 = X_c + X_d,$$

wo

$$X_a = \frac{\sum P_m \delta_{ma}}{\delta_{aa}}, \quad X_b = \frac{\sum P_m \delta_{mb}}{\delta_{bb}} \quad \text{u. s. w.}$$

und

$$\delta_{aa} = 1 \cdot \delta_{1a}, \quad \delta_{bb} = 1\delta_{2b} - 1 \frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}} \delta_{1b}$$

$$\delta_{cc} = 2\delta_{3c} - 2 \frac{\delta_{3b}}{\delta_{2b}} \delta_{2c} - \left(2 \frac{\delta_{3a}}{\delta_{1a}} - 2 \frac{\delta_{3b}}{\delta_{2b}} \cdot \frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}} \right) \delta_{3c}, \quad \delta_{dd} = 2\delta_{4d}.$$

Die Richtigkeit der Lösung ergibt sich aus den folgenden Ansätzen, welche nachweisen, daß die Summen

$$\begin{array}{ccc} \sum S_a S_b \rho, & \sum S_a S_c \rho, & \sum S_a S_d \rho \\ & \sum S_b S_c \rho, & \sum S_b S_d \rho \\ & & \sum S_c S_d \rho \end{array}$$

sämtlich gleich Null sind.

Für den Belastungszustand $X_b = -1$ und den Verschiebungszustand $X_a = -1$ erhalten wir:

$$\sum S_b S_a \rho = 1 \cdot \delta_{2a} - 1 \frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}} \cdot \delta_{1a} = 0,$$

hierauf für den Belastungszustand $X_a = -1$ und den Verschiebungszustand $X_b = -1$ nach dem Maxwellschen Satze

$$\sum S_a S_b \rho = 0 = 1 \cdot \delta_{1b},$$

woraus sich die Zeichenprobe $\delta_{1b} = 0$ ergibt.

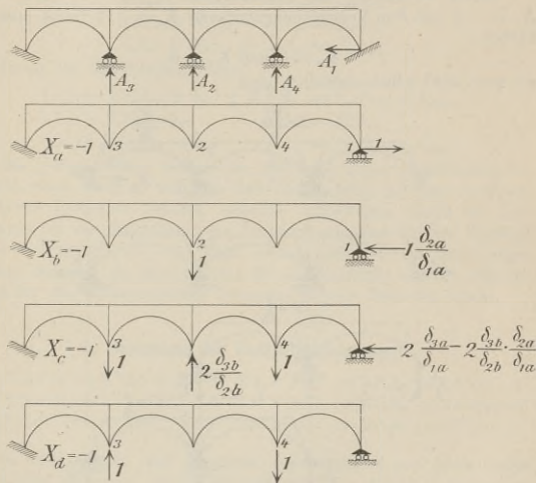


Fig. 165.

Durch Verbindung des Belastungszustandes $X_c = -1$ mit den Verschiebungszuständen $X_a = -1$ und $X_b = -1$ erhalten wir jetzt (wegen $\delta_{1a} = \delta_{3a}$, $\delta_{1b} = \delta_{3b}$ und $\delta_{1b} = 0$)

$$\sum S_c S_a \rho = 2\delta_{3a} - 2 \frac{\delta_{3b}}{\delta_{2b}} \delta_{2a} - \left(2 \frac{\delta_{3a}}{\delta_{1a}} - 2 \frac{\delta_{3b}}{\delta_{2b}} \cdot \frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}} \right) \delta_{1a} = 0$$

$$\sum S_c S_b \rho = 2\delta_{3b} - 2 \frac{\delta_{3b}}{\delta_{2b}} \delta_{2b} = 0.$$

Die Verbindung der Kräftezustände $X_a = -1$ und $X_b = -1$ mit dem Verschiebungszustande $X_c = -1$ liefert die Proben:

$$\sum S_a S_c \rho = 1 \cdot \delta_{1c} = 0$$

$$\sum S_b S_c \rho = 1 \cdot \delta_{2c} - \frac{\delta_{2a}}{\delta_{1a}} \delta_{1c} = 0.$$

Es müssen also δ_{1c} und δ_{2c} gleich Null sein.

Daß die Summen $\sum S_a S_a \rho$, $\sum S_b S_a \rho$, $\sum S_c S_a \rho$ gleich Null sind, folgt ohne weiteres aus der Symmetrie der Zustände $X_a = -1$, $X_b = -1$, $X_c = -1$ und der Antisymmetrie des Zustandes $X_d = -1$.

Durch Verbindung der Kräftezustände $X_a = -1$, $X_b = -1$, $X_c = -1$ mit dem Verschiebungszustande $X_d = -1$ findet man die Proben:

$$\delta_{1d} = 0 \text{ und } \delta_{2d} = 0,$$

die aber wohl selbstverständlich sind.

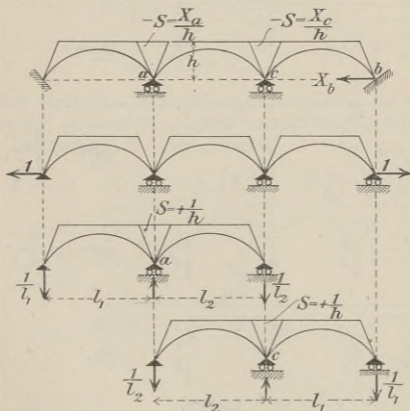


Fig. 166.

Es leuchtet wohl ein, daß wir es hier mit einem allgemeinen, stets zum Ziele führenden Verfahren zu tun haben. Freilich muß auch vor Einschlagen dieses Weges geprüft werden, ob es nicht besser ist, eine größere Anzahl von Gleichungen aufzulösen und dafür einfachere Biegungslinien und Verschiebungspläne einzutauschen.

Führt man z. B. bei dem über drei Öffnungen gespannten Bogenträger (Fig. 166) als statisch unbestimmte Größen außer dem Horizontal-

schube X_b noch die Stützenmomente X_a und X_b ein, so erhält man sehr einfache Zustände $X = -1$. Das statisch bestimmte Hauptsystem besteht aus drei gelenkartig miteinander verbundenen einfachen Balken. Jede der beiden Biegelinien für $X_a = -1$ und $X_c = -1$ erstreckt sich nur über zwei Öffnungen. Beim symmetrischen Träger ist die X_a -Linie das Spiegelbild der X_c -Linie. Ferner ist im Falle der Symmetrie

$$\delta_{cc} = \delta_{aa}, \quad \delta_{cb} = \delta_{ba}.$$

Man erhält dann für eine Einzellast die Bedingungen

$$\begin{aligned} X_a \delta_{aa} + X_b \delta_{ab} + X_c \delta_{ac} &= P_m \delta_{ma} \\ X_a \delta_{ab} + X_b \delta_{bb} + X_c \delta_{cb} &= P_m \delta_{mb} \\ X_a \delta_{ac} + X_b \delta_{ba} + X_c \delta_{cc} &= P_m \delta_{mc}, \end{aligned}$$

aus denen die Gleichungen folgen:

$$\begin{aligned} (X_a + X_c) (\delta_{aa} + \delta_{cc}) + 2 X_b \delta_{ab} &= P_m (\delta_{ma} + \delta_{mb}) \\ (X_a + X_c) \delta_{ab} + X_b \delta_{bb} &= P_m \delta_{mb} \\ (X_a - X_c) (\delta_{aa} - \delta_{cc}) &= P_m (\delta_{ma} - \delta_{mc}). \end{aligned}$$

Die geringe Mühe, welche die Auflösung dieser Gleichungen verursacht, wird, wenn es sich um eine Vergleichung mit den vorhin angegebenen Lösungen handelt, reichlich aufgewogen durch die Zeitersparnis bei der Darstellung der Verschiebungspläne für die Zustände $X_a = -1$ und $X_c = -1$. Dazu kommt noch, wie wir später zeigen werden, daß sich die Einflußlinien für die Stabkräfte aus den Einflußlinien für die Stützenmomente besonders bequem herleiten lassen.

c. Anwendung der Elastizitätsgleichungen:

$$(V) \begin{cases} X' \Sigma S'^2 \rho + X'' \Sigma S'' S' \rho + X''' \Sigma S' S'' \rho + \dots = \Sigma P_m \delta_m' + \Sigma S' \epsilon ts - L' \\ X' \Sigma S'' S' \rho + X'' \Sigma S''^2 \rho + X''' \Sigma S'' S''' \rho + \dots = \Sigma P_m \delta_m'' + \Sigma S'' \epsilon ts - L'' \\ X' \Sigma S''' S' \rho + X'' \Sigma S''' S'' \rho + X''' \Sigma S'''^2 \rho + \dots = \Sigma P_m \delta_m''' + \Sigma S''' \epsilon ts - L''' \end{cases}$$

welche voraussetzen, daß sämtliche Spannkkräfte S und (nach festen Richtungen wirkenden) Stützenwiderstände C des statisch unbestimmten Fachwerks auf die Form gebracht worden sind:

$$\begin{aligned} S &= S_0 - S' X' - S'' X'' - S''' X''' - \dots \\ C &= C_0 - C' X' - C'' X'' - C''' X''' - \dots, \end{aligned}$$

wobei X' , X'' , $X''' \dots$ die statisch nicht bestimmbaren Größen bedeuten.*)

δ_m' , δ_m'' , \dots sind die Verschiebungen, welche der Angriffspunkt m einer Last P_m erfährt, sobald auf das Fachwerk beziehungsweise nur die Ursache $X' = -1$ oder nur die Ursache $X'' = -1$ u. s. w. wirkt.

*) Vergl. Seite 25 bis 27.

während L', L'', \dots die virtuellen Arbeiten der Stützenwiderstände $C', C'' \dots$ bedeuten. Alle in den obigen Gleichungen enthaltenen, von den $S', S'', S''' \dots$ abhängigen Summenausdrücke erstrecken sich über sämtliche Stäbe des Fachwerks, über die notwendigen *und* überzähligen. Der Wert ρ ist

$$\rho = \frac{s}{EF}.$$

Meistens werden die Widerlager starr angenommen und die virtuellen Arbeiten $L = 0$ gesetzt.

In der Regel hat man es mit lotrechten Lasten zu tun; die δ_m' , δ_m'' , δ_m''' , \dots sind dann Ordinaten von *Biegungslinien*, deren Berechnung sich (nach Nr. 49) stets auf die Ermittlung von Angriffsmomenten einfacher Balken zurückführen läßt. Aber auch der Einfluß schräg gerichteter, nicht paralleler Kräfte P kann auf dem am Schluß von Nr. 51 angegebenen Wege leicht durch Rechnung erledigt werden, nachdem die den Zuständen $X' = -1$, $X'' = -1$, \dots entsprechenden Biegungslinien für irgendeine Verschiebungsrichtung bestimmt worden sind. Wenn wir also in den folgenden Beispielen durchweg lotrechte Lasten annehmen, so geschieht dies nur der kürzeren Darstellungsweise wegen. Vergl. auch Nr. 75.

67. Untersuchung eines über drei Öffnungen gespannten Bogenträgers, Fig. 167, mit Scheitelgelenken in den Seitenöffnungen, festen Kämpfergelenken und wagerechten Gleitlagern über den Mittelpfeilern.

Der Träger ist einfach statisch unbestimmt; als statisch nicht bestimmbare Größe wird zweckmäßig der Horizontalschub X eingeführt. Die Spannkkräfte S sollen in der Form

$$S = S_0 - S'X$$

dargestellt werden. Wird $X = 0$ gesetzt, so geht der Bogen in einen *Gerberschen Balken* über, dessen Spannkkräfte S_0 sich leicht bestimmen lassen. S' bedeutet den Wert, welchen S annimmt, sobald $X = -1$ gemacht wird. Diesen Belastungszustand zeigt Fig. 168. In A und B greifen die wagerechten, nach außen gerichteten Kräfte 1 an; außerdem müssen — damit sich die Bogenteile AE und BF nicht um die Gelenke E und F drehen — die lotrechten, nach unten gerichteten Kräfte $\frac{2h}{l_1}$ angebracht werden. Letztere bedingen bei C und D gleich große, nach oben wirkende Widerstände.

Nachdem die Spannkkräfte S' für sämtliche Stäbe bestimmt worden sind (beispielsweise mit Hilfe eines Cremonaschen Kräfteplanes), kann X mit Hilfe der Elastizitätsbedingung

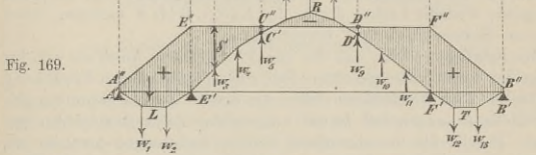
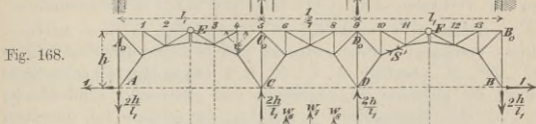
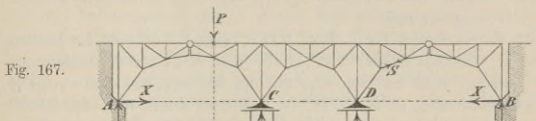
$$X \Sigma S'^2 \rho = \Sigma P_m \delta_m' + \Sigma S'_s t s - L$$

berechnet werden. Am besten bestimmt man getrennt:

den Einfluß einer Last P :
$$X = \frac{P\delta'}{\sum S'^2 \rho}$$

„ „ „ Temperaturänderung
$$X_t = \frac{\sum S' \varepsilon t s}{\sum S'^2 \rho}$$

„ „ „ von Verschiebungen der Stützen
$$\Delta X = - \frac{L'}{\sum S'^2 \rho}$$



Die Werte X_t und ΔX können bereits nach Ermittlung der S' ausgerechnet werden. L' bedeutet die virtuelle Arbeit der an den Stützpunkten A, B, C, D angreifenden äußeren Kräfte des Zustandes $X = -1$. Wird z. B. der Einfluß einer Vergrößerung der Stützweite AB um Δl gesucht, ferner der Einfluß von Senkungen der Punkte C und D um Strecken η' und η'' , so hat man zu setzen:

$$L' = 1 \Delta l - \frac{2h}{l_1} (\eta' + \eta''),$$

weil den in A und B angreifenden wagerechten Kräften 1 die positive virtuelle Arbeit $1 \cdot \Delta l$ entspricht und den nach oben gerichteten Kräften $\frac{2h}{l_1}$ die negative Arbeit $\left(-\frac{2h}{l_1} \eta' - \frac{2h}{l_1} \eta''\right)$.

Zur Bestimmung von X infolge von P muß — da P an der oberen Gurtung angreift — die Biegelinie dieser oberen Gurtung ermittelt werden, und zwar für den Zustand $X = -1$. Entscheidet man sich

beispielsweise für den in Nr. 46 (Seite 100) angegebenen Weg, so berechne man die von den Spannungen $\sigma' = \frac{S'}{F}$ abhängigen Änderungen $\Delta' \vartheta$ der Randwinkel ϑ , schreibe den Knoten 1, 2, 3 ... die Gewichte $w_1 = \Delta' \vartheta_1$, $w_2 = \Delta' \vartheta_2$, $w_3 = \Delta' \vartheta_3$, ... zu (denn die obere Gurtung ist wagerecht und es verschwinden in Gleich. 3, Seite 101 die Glieder mit Δs) und verfähre im übrigen nach Beispiel 3 auf Seite 123. In Fig. 169 wurden die Gewichte w_1, w_2, w_{12}, w_{13} positiv, die anderen w negativ vorausgesetzt.

Die Linienzüge $A'LE'$, $E'C'RD'F'$ und $F'TB'$ sind die Momentenkurven einfacher Balken $A'E'$, $E'F'$ und $F'B$, welche beziehungsweise belastet sind mit w_1, w_2 , mit w_3 bis w_{11} und mit w_{12}, w_{13} . Der Schlußlinienzug $A''E''F''B''$ ist bestimmt durch die Längenänderungen der Vertikalen AA_0 , CC_0 , DD_0 und BB_0 ; es ist nämlich:

$$\overline{A''A'} = \overline{\Delta AA_0}; \quad \overline{C''C'} = \overline{\Delta CC_0}; \quad \overline{D''D'} = \overline{\Delta DD_0}; \quad \overline{B''B'} = \overline{\Delta BB_0}.$$

Diese Vertikalen werden gedrückt, und es liegen daher die Punkte A'' , C'' , D'' , B'' oberhalb A' , C' , D' , B' .*) Die in Fig. 169 schraffierte Fläche ist die gesuchte Biegungsfläche und gleichzeitig Einflußfläche für X (mit dem Multiplikator $1: \Sigma S'^2 \rho$); der mittlere Teil derselben ist negativ, weshalb Lasten, die in den Knoten 6 bis 8 angreifen, einen negativen Horizontalschub X hervorbringen.

Hinzuzufügen bleibt, daß der für X_t abgeleitete Ausdruck sich für den in der Regel vorausgesetzten Fall einer gleichmäßigen Erwärmung des Bogens noch vereinfachen läßt. Zu diesem Zwecke schreiben wir den Stablängen s des bei B auf wagerechter Bahn verschiebbar gedachten Bogens die verschwindend kleinen Änderungen $\Delta s = \omega s$ zu, wobei ω für alle Stäbe gleich sein soll, und wenden auf diesen Verschiebungszustand und auf den Belastungszustand $X = -1$ das Gesetz der virtuellen Verschiebungen an. Wir erhalten dann, da sich $l = l_2 + 2l_1$ um $\Delta l = \omega l$ ändert, die Beziehung

$$1 \cdot \omega l = \Sigma S' \omega s, \text{ d. h. } \Sigma S' s = l$$

und finden nun (falls neben t auch ε einen festen Wert besitzt)

$$X_t = \frac{\varepsilon t \Sigma S' s}{\Sigma S'^2 \rho} = \frac{\varepsilon t l}{\Sigma S'^2 \rho}.$$

68. Kette, versteift durch einen Gerberschen Balken. Wir knüpfen an die im ersten Bande (§ 49) durchgeführte Untersuchung an, welche lehrte, daß eine über beliebig viele Öffnungen gespannte Kette mit durchgehendem Versteifungsbalken ein statisch bestimmtes Tragwerk ist, sobald der Versteifungsbalken ebensoviel Mittelgelenke erhält als

*) Wir erinnern daran, daß wir die lotrechten Verschiebungen stets nach unten positiv zählen.

die Brücke Öffnungen besitzt, und die Mittelgelenke so verteilt sind, daß nach Weglassung irgendeines derselben (welches wir kurz das Gelenk G' nennen wollen) der Versteifungsbalken ein Gerberscher wird. *) Wir zeigten auch, daß nach Bestimmung des Horizontalzuges H der Kette die Spannkräfte Z der Hängestangen sich mittels des Gesetzes leicht angeben lassen, daß die Kette das Seilpolygon der Kräfte Z ist, womit dann alle am Balken angreifenden Kräfte bestimmt sind; und schließlich ermittelten wir H , indem wir das Angriffsmoment für den Balkenquerschnitt G' gleich Null setzten. Fehlt nun das Gelenk G' , wird also die Kette durch einen Gerberschen Balken versteift, so entsteht ein einfach statisch unbestimmtes Tragwerk, als dessen statisch nicht bestimmbar Größe X am zweckmäßigsten der Horizontalzug der Kette gewählt wird. Zur Berechnung von X dienen, wenn sämtliche Spannkräfte S auf die Form

$$S = S_0 - S'X$$

gebracht werden, die Formeln:

Einfluß einer Einzellast:
$$X = \frac{P\delta'}{\sum S'^2 \rho} \text{ (**)}$$

„ „ Temperaturänderung:
$$X_t = \frac{\sum S' \varepsilon t s}{\sum S'^2 \rho}$$

„ von Verschiebungen der Stützen:
$$\Delta X = - \frac{L'}{\sum S'^2 \rho}$$

Das Verfahren möge an dem in Fig. 170 abgebildeten Träger erläutert werden. Der Versteifungsbalken besitzt hier zwei in der Mittelöffnung liegende Gelenke G und J . Um den Belastungszustand $X = -1$ zu erhalten, denke man in den Kettengliedern Drücke S'_1, S'_2, S'_3, \dots erzeugt, denen ein Horizontalschub von der Größe Eins entspricht. Fig. 170b gibt an, wie diese Kräfte und die zugehörigen Drücke $S'_9, S'_{10}, S'_{11}, \dots$, in den Hängestangen dargestellt werden können, wobei es genügte, die linke Trägerhälfte zu behandeln. Die Drücke $S'_9, S'_{10}, S'_{11}, \dots$ bilden die Belastungen des Versteifungsbalkens, dessen Stützenwiderstände A', B', C', D' nach Abschnitt VI, Band I, zu bestimmen sind, worauf die Spannkräfte S' der Stäbe des Balkens mit Hilfe eines Cremonaschen Kräfteplanes gezeichnet werden können. Ist dies geschehen, so werden die Spannungen $\sigma' = \frac{S'}{F}$ oder die Längenänderungen $(\Delta s)' = \frac{S' s}{EE}$ sämtlicher Balkenstäbe berechnet, hierauf

*) Wie beim Gerberschen Balken die Gelenke über die verschiedenen Öffnungen zu verteilen sind, lehrt Abschnitt VI von Band I.

**) Es handelt sich hier nur um diejenigen Lasten, welche nach Ausführung der Versteifung der Kette aufgebracht werden, in der Regel also nur um die bewegliche Belastung. Vergl. Band I, § 49.

nach Nr. 46 oder Nr. 47 die Gewichte w ermittelt und die in Fig. 170d schraffierte Biegungsfläche der Gurtung A_0D_0 bestimmt. Dieselbe ist die Einflußfläche für X (Multiplikator $= \frac{1}{\sum S'^2 \rho}$) und wird begrenzt durch die Momentenlinien $A'B'G'$, $G'LJ'$, $J'C'D'$ der mit den entsprechenden Gewichten w belasteten einfachen Balken $A'G'$, $G'J'$, $J'D'$ und den Schlußlinienzug $A'G''J''D'$, welcher bestimmt ist durch die Verkürzungen $\overline{B''B'}$ und $\overline{C''C'}$ der Vertikalen $\overline{B_0B}$ und $\overline{C_0C}$.*) Zu beachten ist, daß sich der Ausdruck $\sum S'^2 \rho$ auf sämtliche Stäbe des Tragwerks (Balkenstäbe, Hängestangen, Glieder der Tragketten und Rückhaltketten) bezieht.

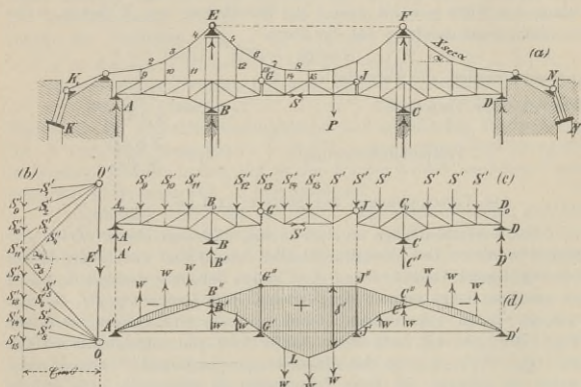


Fig. 170.

Bei der Berechnung von X_t wird meistens angenommen, daß sich die dem spannungslosen Anfangszustande entsprechenden Temperaturen sämtlicher Stäbe um den gleichen Betrag t ändern. Es stellt sich dann heraus, daß der Einfluß der Temperaturänderungen der Balkenstäbe und Hängestangen ein verhältnismäßig sehr geringer ist, und daß es genügt, im Zähler des für X_t erhaltenen Ausdruckes nur die Glieder der Tragketten und Rückhaltketten zu berücksichtigen. Für ein unter

*) Die Vertikalen A_0A und D_0D des in der Fig. 170 abgebildeten Trägers sind für den Belastungszustand $X = -1$ spannungslos; ihre Längenänderungen sind also $= 0$.

α gegen die Wagerechte geneigtes Glied der Tragkette erhält man $S' = -1 \cdot \sec \alpha$, und für die Glieder der Rückhaltketten ergeben sich z. B. bei der in Fig. 171 veranschaulichten Anordnung die Werte $S' = -1 \sec \alpha'$. Daraus folgt dann:

$$X_t = - \frac{\varepsilon t}{\Sigma S'^2 \rho} \left\{ \Sigma s \sec \alpha + 2 (s_a + s_b) \sec \alpha' \right\},$$

worin $s_a = \overline{KK_1}$ und $s_b = \overline{K_1K_2}$. Die Summe $\Sigma s \sec \alpha$ erstreckt sich nur über die Glieder der Tragkette. Infolge einer Erhöhung der Temperatur wird der Horizontalzug der Kette verkleinert.

Verschiebungen der Widerlager bleiben meistens unberücksichtigt, obgleich Längenänderungen schlanker Mittelpfeiler und ein Nachgeben der Verankerungen von merklichem Einfluß auf X sein können. Es senke sich z. B. der Stützpunkt E um η_{11} , F um η_{12} , auch verschiebe sich der Stützpunkt K im Sinne KK_1 um η_{13} und der entsprechende Stützpunkt des rechten Endpfeilers um η_{14} . In den Punkten E und K greifen beim Eintreten des Zustandes $X = -1$ die Stützenwiderstände an:

$$\begin{aligned} E' &= 1 (\operatorname{tg} \alpha_4 + \operatorname{tg} \alpha_5), \text{ nach abwärts gerichtet} \\ K' &= 1 \sec \alpha' \quad , \quad \text{„ oben „ „} \quad *) \end{aligned}$$

und entsprechend gleiche Widerstände wirken bei F und N .

Die virtuelle Arbeit dieser Auflagerkräfte ist:

$$L' = (\operatorname{tg} \alpha_4 + \operatorname{tg} \alpha_5) (\eta_{11} + \eta_{12}) + \sec \alpha' (\eta_{13} + \eta_{14})$$

und man erhält daher:

$$\Delta X = - \frac{1}{\Sigma S'^2 \rho} \left[(\operatorname{tg} \alpha_4 + \operatorname{tg} \alpha_5) (\eta_{11} + \eta_{12}) + \sec \alpha' (\eta_{13} + \eta_{14}) \right].$$

69. Kette, über eine Öffnung gespannt und durch einen Bogenträger mit 2 Kämpfergelenken versteift, Fig. 172. Dieses Tragwerk ist zweifach statisch unbestimmt. Als statisch nicht bestimmbare Größen werden zweckmäßig der Horizontalzug X' der Kette und der Horizontalschub X'' des Bogens eingeführt. Die Spannkraften werden auf die Form $S = S_0 - S'X' - S''X''$ gebracht.

*) Wir setzen voraus, daß bei K_1 und K_2 bewegliche Lager angeordnet sind. Der Widerstand des auf wagerechter Bahn geführten Stützpunktes K_2 ist lotrecht, der Widerstand bei K_1 halbiere den Winkel KK_1K_2 . Dann wird jedes der beiden Kettenglieder KK_1 und K_1K_2 durch eine Spannkraft $X \sec \alpha'$ beansprucht, wo α' den Neigungswinkel von K_1K_2 gegen die Wagerechte bedeutet. In K greift also ein von K_2 nach K_1 gerichteter Widerstand $X \sec \alpha'$ an und im Falle $X = -1$ ein von K_2 nach K_1 gerichteter von der Größe $1 \sec \alpha'$.

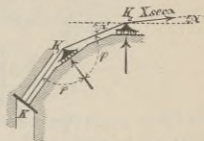


Fig. 171.

Fig. 175 zeigt den einfachen Balken AB , in welchen das Fachwerk im Falle $X' = 0$ und $X'' = 0$ übergeht, während die Figuren 173 und 174 diesen Balken im Belastungszustande $X' = -1$ bzw. $X'' = -1$ darstellen.

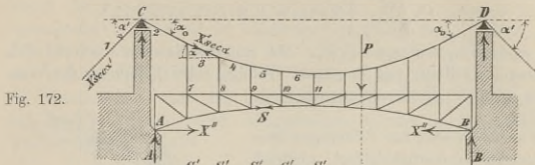


Fig. 172.

Fig. 173.

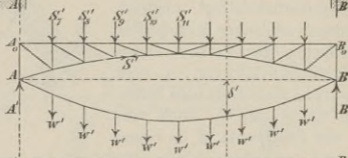


Fig. 174.

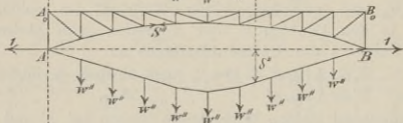
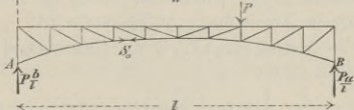


Fig. 175.



Bei Eintreten des Zustandes $X' = -1$ greifen am Balken AB die lotrechten Lasten S'_7, S'_8, \dots an (d. h. die Drücke in den Hängestangen, welche genau so bestimmt werden wie im vorigen Beispiele), und im Belastungsfalle $X'' = -1$ befindet sich der Balken unter dem Einflusse zweier wagerechter Kräfte 1. Nach Berechnung der den Spannkraften S' und S'' entsprechenden Knotenpunktsgewichte w' und w'' werden die Biegungslinien (δ' und δ'') als Momentenlinien einfacher Balken AB ermittelt*) und schließlich die Elastizitätsgleichungen aufgelöst:

$$\begin{aligned} X' \sum S'^2 \rho + X'' \sum S' S'' \rho &= P \delta' + \sum S' \varepsilon t s - L' \\ X' \sum S'' S' \rho + X'' \sum S''^2 \rho &= P \delta'' + \sum S'' \varepsilon t s - L'' \end{aligned}$$

*) In Fig. 173 und 174 wurden die Längenänderungen der Endständer AA_0 und BB_0 vernachlässigt.

Man erhält den Einfluß der Belastung

$$X' = P(\omega''\delta' - \omega\delta'')$$

$$X'' = P(\omega'\delta'' - \omega\delta')$$

worin
$$\omega' = \frac{\sum S'^2 \rho}{N}, \quad \omega'' = \frac{\sum S''^2 \rho}{N}, \quad \omega = \frac{\sum S' S'' \rho}{N}$$

$$N = \sum S'^2 \rho \cdot \sum S''^2 \rho - (\sum S' S'' \rho)^2,$$

ferner den Einfluß einer Temperaturänderung:

$$X'_t = \omega'' \sum S' \varepsilon t s - \omega \sum S'' \varepsilon t s$$

$$X''_t = \omega' \sum S'' \varepsilon t s - \omega \sum S' \varepsilon t s$$

und den Einfluß einer Bewegung der Stützen:

$$\Delta X' = -\omega'' L' + \omega L''$$

$$\Delta X'' = -\omega' L'' + \omega L'.$$

Die von S' abhängigen Summenausdrücke erstrecken sich über die Stäbe des Bogens, die Hängestangen, die Tragkette und die Rückhaltketten, die von S'' abhängigen nur über den Bogen, da für die Kettenglieder und Hängestangen $S'' = 0$ ist.

Wird eine gleichmäßige Temperaturänderung angenommen, so darf man, wie im vorigen Beispiele,

$$\sum S' \varepsilon t s = \sum s \sec \alpha + 2s' \sec \alpha'$$

setzen, worin sich $\sum s \sec \alpha$ nur über die Glieder der Tragkette erstreckt und s' die Länge einer Rückhaltkette (bis zur Ankerplatte gemessen!) bedeutet. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Rückhaltkette entweder geradlinig oder, wenn gebrochen, derart mit Zwischenstützen versehen ist, daß die Spannkraft in der ganzen Kette gleich groß ist. Vergl. Fig. 171. Weiter darf man (ähnlich wie beim ersten Beispiel, Fig. 167)

$$\sum S'' \varepsilon t s = \varepsilon t l$$

setzen.

Sollen $\Delta X'$ und $\Delta X''$ unter der Voraussetzung berechnet werden, daß sich die Stützpunkte C und D um η_1 beziehungsweise η_2 senken, daß ferner die Ankerplatten links und rechts in der Richtung der Rückhaltketten um η_3 beziehungsweise η_4 nachgeben und l sich um Δl ändert, so hat man zu setzen:

$$L' = 1 \cdot (\operatorname{tg} \alpha_0 + \operatorname{tg} \alpha') (\eta_1 + \eta_2) + 1 \cdot \sec \alpha' (\eta_3 + \eta_4)$$

$$L'' = 1 \cdot \Delta l \quad (\text{vergl. das vorige Beispiel}).$$

70. Übungsaufgaben. Die durch einen einfachen Balken versteifte Kette in Fig. 176 ist einfach statisch unbestimmt. Kennt man den Horizontalzug X , so kann man die Spannkraften in den Hängestangen mittels der Bedingung finden, daß die Kette das Seilpolygon dieser Kräfte ist.

Figur 177 stellt ein dreifach statisch unbestimmtes Hängewerk (*System Ordish-Lefevre*) dar. Sind die Spannkräfte X' , X'' , X''' der lotrechten Hängestangen bekannt, so sind die in den Tragketten AC , CD , EB , ED , AD , DB und in den Rückhaltketten auftretenden

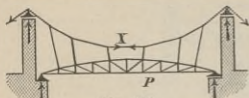


Fig. 176.

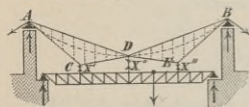


Fig. 177.

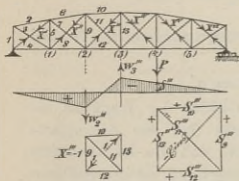


Fig. 179.

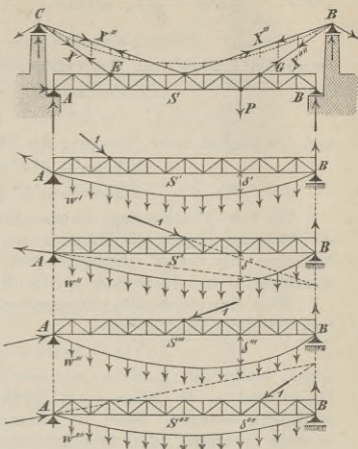


Fig. 178.

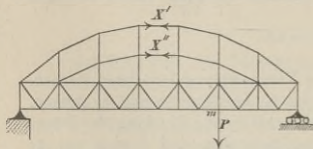


Fig. 180.

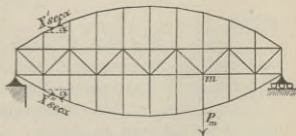


Fig. 181.

Kräfte gegeben. Die durch eine gestrichelte Linie angedeutete Kette hat nur das Gewicht der Tragketten aufzunehmen. Bei symmetrischer Anordnung ist die Biegelinie für $X''' = -1$ das Spiegelbild der Biegelinie für $X' = -1$.

Ein ähnliches Hängewerk zeigt Figur 178; dasselbe ist vierfach statisch unbestimmt. Die Belastungszustände $X' = -1$, $X'' = -1$,

$X''' = -1$, $X'''' = -1$ des Versteifungsbalkens sind in der Figur dargestellt worden; es ist zu beachten, daß am festen Auflager A schräge Widerstände hervorgerufen werden.

Das Balkenfachwerk in Fig. 179 besitzt in jedem Felde zwei sich kreuzende Diagonalen, welche aber beide imstande sind, Zug- und Druckkräfte zu übertragen. Hat das Fachwerk also n Felder, so ist es n -fach statisch unbestimmt. In der Figur ist der Kräfteplan für $X''' = -1$ vorgeführt worden; die Wirkung dieser Kraft erstreckt sich nur über die Stäbe 9, 10, 11, 12, 13, und es treten daher nur zwei Gewichte w auf, nämlich w_2''' und w_3''' , welche am besten nach Nr. 47 Gleich. 10 berechnet werden. Man erhält für w_2''' einen positiven, für w_3''' einen negativen Wert und gelangt daher zu der in der Abbildung angedeuteten Biegelinie (δ'''). Ebenso werden die Zustände $X' = -1$, $X'' = -1$ usw. untersucht.

Die Figuren 180 und 181 zeigen zweifach statisch unbestimmte Tragwerke, welche in ähnlicher Weise behandelt werden wie die versteiften Kettenbrücken in Fig. 170, 172, 176.

Wir heben zum Schluß noch einmal hervor, daß bei Anwendung der Gleichungen V auf Seite 163 die Summe Σ sich über sämtliche Stäbe erstreckt, über die notwendigen und überzähligen. So entsprechen beispielsweise dem überzähligen Stabe des ersten Feldes des Trägers in Fig. 179 die Werte: $S' = -1$; $S'' = 0$; $S''' = 0$; $S'''' = 0$; usw. dem des zweiten Feldes: $S' = 0$; $S'' = -1$; $S''' = 0$; $S'''' = 0$ usw. Man vergl. auch Seite 26 der Einleitung.

§ 6.

Allgemeines über das Auftragen der Einflußlinien.

71. Sind die Einflußlinien für die Größen X eines durch parallele Lasten P beanspruchten Fachwerks nach einem der in Nr. 56 bis 69 angegebenen Verfahren bestimmt worden, so lassen sich die Einflußlinien der Spannkraft S und Stützenwiderstände C mittels der zwischen den S , C und X bestehenden Beziehungen ersten Grades darstellen. Soll beispielsweise die Einflußlinie für eine Spannkraft

$$S = S_0 - S_a X_a - S_b X_b - S_c X_c - \dots$$

aufgetragen werden, so nehme man zuerst sämtliche $X = 0$ an, zeichne die S_0 -Linie des statisch bestimmten Hauptsystems auf die im I. Bande gezeigte Weise und verkleinere die Ordinaten derselben um die Summe der beziehungsweise mit S_a , S_b , S_c , ... multiplizierten entsprechenden Ordinaten der Einflußlinien für X_a , X_b , X_c , ... , wobei es sich empfiehlt, die Multiplikation mit Hilfe von Winkeln α , β , γ ... aus-

zuführen, welche der Reihe nach durch

$$\operatorname{tg} \alpha = S_a, \quad \operatorname{tg} \beta = S_b, \quad \operatorname{tg} \gamma = S_c, \quad \dots$$

bestimmt sind.*)

In Fig. 182 ist dieses allgemeine Verfahren an einem Bogenträger mit festen Kämpfergelenken (A, B) und auf wagerechter Bahn beweglichem Auflagergelenke C erläutert worden. Als statisch nicht bestimmbare Größen sind eingeführt: der Horizontalschub X_a und der Widerstand X_b der Mittelstütze. Gesucht sei die Einflußlinie für die

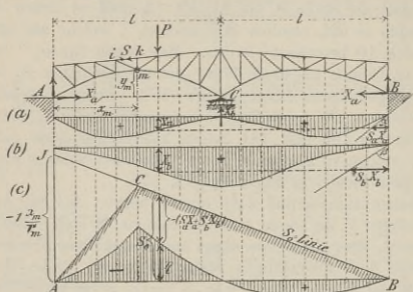


Fig. 182.

Spannkraft S im Stabe $i-k$ der oberen Gurtung. Werden X_a und $X_b = 0$ gesetzt, so liegt ein einfacher Balken AB vor, und es besteht deshalb die S_0 -Linie aus zwei Geraden AC und CB , welche nach

Fig. 182c durch Auftragung von $AJ = -1 \frac{x_m}{r_m}$ bestimmt sind, wobei

r_m das Lot vom Knotenpunkt m auf den Stab ik bedeutet. Die den Belastungszuständen $X_a = -1$ und $X_b = -1$ entsprechenden Spannkraften S_a und S_b stellen sich hier *negativ* heraus, während X_a und X_b nur positive Werte besitzen; das Glied: $-(S_a X_a + S_b X_b)$ ist also positiv; addiert man dasselbe zu dem negativen Werte S_0 , so erhält man für $P = 1$:

$$S = S_0 - S_a X_a - S_b X_b = P \eta$$

und gelangt zu der in der Fig. 182c voll schraffierten Einflußfläche für S . Dieselbe ermöglicht für jeden Belastungszustand die Ermittlung von

$$S = \Sigma P \eta.$$

72. Die ziemlich umfangreiche Arbeit, welche die Auftragung der Einflußlinien für sämtliche Spannkraften S eines mehrfach statisch un-

*) Auch der Proportionalzirkel leistet gute Dienste.

bestimmten Fachwerks verursacht, läßt sich durch Verwertung der zwischen den einzelnen Größen S stattfindenden statischen Beziehungen meistens erheblich abkürzen. In der Regel liegen Fachwerke vor, die aus aneinander gereihten Dreiecken bestehen; es ist dann zu empfehlen, die Spannkräfte in den Füllungsstäben durch die Gurtkräfte auszudrücken. Bei belasteter oberer Gurtung betrachte man einen unteren Knotenpunkt m (Fig. 183), nehme zuerst $U_{m-1} = +1$ und $U_{m+1} = 0$ an und bestimme mit Hilfe des in Fig. 183a dargestellten Kräftepolygons die entsprechenden Spannkräfte: $-\alpha_m$ (Druck) und $+\alpha_{m+1}$ (Zug) der Wandglieder D_m und D_{m+1} . Ganz ebenso ermittle man für den Zustand $U_{m-1} = 0$ und $U_{m+1} = +1$ die Spannkräfte $+\nu_m$ und $-\nu_{m+1}$ jener Glieder, um hierauf die für jeden Belastungszustand gültigen Formeln zu erhalten:

$$D_m = -\alpha_m U_{m-1} + \nu_m U_{m+1} = \nu_m \left(-\frac{\alpha_m}{\nu_m} U_{m-1} + U_{m+1} \right)$$

$$D_{m+1} = +\alpha_{m+1} U_{m-1} - \nu_{m+1} U_{m+1} = \nu_{m+1} \left(+\frac{\alpha_{m+1}}{\nu_{m+1}} U_{m-1} - U_{m+1} \right).$$

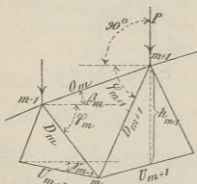


Fig. 183.

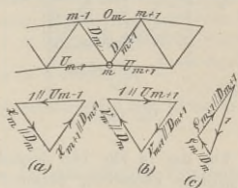


Fig. 184.

Die Einflußlinien für die Klammerausdrücke wollen wir kurz die Einflußlinien für D_m beziehungsweise D_{m+1} nennen und die Faktoren ν_m und ν_{m+1} als *Multiplikatoren* dieser Linien bezeichnen. Die D_m -Linie erhält man, wenn man die mit $\alpha_m : \nu_m$ multiplizierte U_{m-1} -Linie von der U_{m+1} -Linie in Abzug bringt, und ganz entsprechend ergibt sich die D_{m+1} -Linie. Zur Ausführung der Multiplikationen mit $\alpha_m : \nu_m$ und $\alpha_{m+1} : \nu_{m+1}$ benutze man Hilfswinkel oder den Proportionalzirkel.

Bei belasteter unterer Gurtung drücke man die Spannkräfte D durch die Spannkräfte O aus.

Die oben für D_m und D_{m+1} abgeleiteten Gleichungen gelten auch für den Fall belasteter unterer Gurtung, so lange im Knoten m keine Last angreift. Liegt die Lasteinheit bei m , so treten rechts noch Glieder ρ_m beziehungsweise ρ_{m+1} hinzu, die der Fig. 184c zu entnehmen sind. Hierauf ist zu achten, wenn beide Gurte belastet sind. Vergl. auch das ähnliche allgemeine Verfahren in Band I, § 30, Seite 242.

Sind nicht nur die Lasten, sondern überhaupt alle äußeren Kräfte (also auch die Stützenwiderstände) einander parallel, ein Fall, der bei Balken auf mehreren Stützen, sowie bei den Versteifungsbalken von Kettenbrücken in der Regel vorliegen wird, so gehe man, falls sämtliche Wandglieder gegen die Richtung der Lasten geneigt sind (Fig. 184), von den bereits im I. Bande benutzten Gleichungen aus:

$$D_m \cos \varphi_m = -U_{m-1} \cos \gamma_{m-1} - O_m \cos \beta_m$$

$$D_{m+1} \cos \varphi_{m+1} = -U_{m+1} \cos \gamma_{m+1} - O_m \cos \beta_m.$$

Sind dann mittels des in Nr. 71 beschriebenen Verfahrens die Einflußlinien für die $O \cos \beta$ und $U \cos \gamma$ gefunden worden, so sind auch die Einflußlinien für die $D \cos \varphi$ bestimmt.

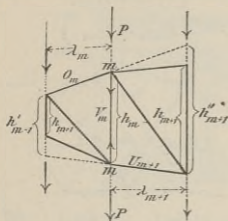


Fig. 185.

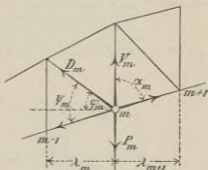


Fig. 186.

Für das in Fig. 185 dargestellte, von parallelen äußeren Kräften angegriffene Fachwerk, dessen Stäbe zum Teil in die Krafrichtung fallen, gelten die Beziehungen:

$$-O_m \cos \beta_m = +U_{m+1} \cos \gamma_{m+1} = \frac{M_m^*}{h_m}$$

$$D_m \cos \varphi_m = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}$$

$$V_m = \frac{h'_{m-1}}{\lambda_m} \left[\frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \cdot \frac{h_{m-1}}{h'_{m-1}} - \frac{M_m}{h_m} \right] \text{ Last am Obergurt}$$

$$V_m = \frac{h''_{m+1}}{\lambda_{m+1}} \left[\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} \cdot \frac{h_{m+1}}{h''_{m+1}} \right] \text{ Last am Untergurt;}$$

*) M_m bedeutet das Angriffsmoment für den Knoten m ; dasselbe wird in der Form: $M_m = M_{0m} - M_m' X' - M_m'' X'' - \dots$ dargestellt, wenn X' , X'' , \dots die statisch nicht bestimmbar sind. Die Formeln für O , D und V sind im I. Bande, § 34 u. 38, abgeleitet worden. Die Ausdrücke für die V wurden oben in anderer Form geschrieben wie früher. Die Formeln für O und U gelten bei beliebig gerichteten äußeren Kräften.

aus denen hervorgeht, daß es zweckmäßig sein wird, zunächst die Einflußflächen für die Werte $\frac{M}{h}$ darzustellen, um in dem Unterschiede zweier aufeinanderfolgender $\frac{M}{h}$ -Flächen eine $D \cos \varphi$ -Fläche zu erhalten. Auch die V_m -Fläche ist durch zwei aufeinanderfolgende $\frac{M}{h}$ -Flächen, von denen aber die eine mit einem Höhenverhältnis multipliziert werden muß, bestimmt; ferner treten bei den V -Flächen Multiplikatoren auf.

Bei gerader Gurtung wird die Ermittlung der Kräfte V wesentlich einfacher. So findet man z. B. für den in Fig. 186 dargestellten Fall einer geraden unteren Gurtung die Gleichgewichtsbedingung:

$$(V_m - P) \sin \alpha_m + D_m \sin \psi_m = 0$$

und hieraus:

$$V_m = -\frac{D_m \sin \psi_m}{\sin \alpha_m} + P = \frac{\sin \psi_m}{\sin \alpha_m \cos \varphi_m} \left(-D_m \cos \varphi_m + \frac{P \cos \varphi_m \sin \alpha_m}{\sin \psi_m} \right).$$

Solange die über den Träger wandernde Lasteinheit außerhalb der Felder λ_m und λ_{m+1} liegt, unterscheidet sich die Einflußfläche für den Klammerausdruck von der $D_m \cos \varphi_m$ -Fläche nur durch das Vorzeichen; an der Stelle m ist zu der in entgegengesetztem Sinne zu nehmenden Ordinate der $D_m \cos \varphi_m$ -Linie noch der Betrag: $\frac{1 \cdot \cos \varphi_m \sin \alpha_m}{\sin \psi_m}$

zu addieren. Ist die untere Gurtung rechtwinklig zur Richtung der Lasten, so wird $\frac{\sin \psi_m}{\sin \alpha_m \cos \varphi_m} = \operatorname{tg} \varphi_m$.

Besonders einfach wird die ganze Untersuchung für Parallelträger, deren äußere Kräfte rechtwinklig zu den Gurtungen sind. Hier kommt es nur darauf an, die Momente und Querkräfte zu bestimmen, aus denen sich dann sämtliche Stabkräfte berechnen lassen.

Für das in Fig. 187 dargestellte Fachwerk ergibt sich z. B., wenn Q_m die Querkraft für das m^{te} Feld bedeutet,

$$\begin{aligned} -O_m h &= +U_{m+1} h = M_m; & D_m \sin \varphi_m &= Q_m \\ V_m &= -Q_m, & \text{Last oben,} \\ V_m &= -Q_{m+1}, & \text{Last unten.} \end{aligned}$$

Da nun $Q_m = \frac{1}{\lambda_m} (M_m - M_{m-1})$ ist, so kann man nach Ermittlung der M -Flächen jede $Q\lambda$ -Fläche als den Unterschied zweier aufeinanderfolgender M -Flächen gewinnen, oder man zeichnet zuerst die $Q\lambda$ -Flächen und benutzt hierauf die Beziehung

$$M_m = M_{m-1} + Q_m \lambda_m,$$

um aus der einen M -Fläche schrittweise alle übrigen abzuleiten.

Liegt das Fachwerk in Fig. 188 vor, und sind $m-1$ und $m+1$ Knotenpunkte der belasteten Gurtung, ferner Q die Querkraft für das Feld $(m-1)-(m+1)$, so beachte man die Beziehungen:

$$\begin{aligned} M_{m+1} &= M_{m-1} + Q\lambda; & M_m &= M_{m-1} + Qe. \\ O_{m-1}h &= -M_{m-1}, & U_m h &= +M_m, & O_{m+1}h &= -M_{m+1} \\ D_m \sin \varphi_m &= -D_{m+1} \sin \varphi_{m+1} = +Q. \end{aligned}$$

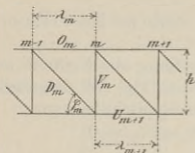


Fig. 187.

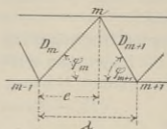


Fig. 188.

73. Auf eine sehr übersichtliche Weise lassen sich die Einflußflächen für die Spannkkräfte *einfach* statisch unbestimmter Träger gewinnen; denn hier erscheint S in der Form

$$S = S_0 - S'X = S' \left(\frac{S_0}{S'} - X \right),$$

und es ist daher möglich, wenn S' als Multiplikator herausgezogen wird, jede S -Fläche als den Unterschied der X -Fläche und einer meistens von nur wenigen Geraden begrenzten S_0/S' -Fläche (deren Aufzeichnung ebenso schnell vor sich geht, wie die der S_0 -Fläche) darzustellen.

Wir werden meistens die X und die $\eta' = S_0/S'$ (Figur 189a) von derselben Geraden $N'N$ aus auftragen und erhalten dann die S -Fläche (deren Ordinaten mit η bezeichnet werden mögen) gewissermaßen auf die X -Linie als gebrochene Null-Achse bezogen. Gibt man aber der Einführung einer allen S -Flächen gemeinsamen geraden Nulllinie (die bei lotrechter Belastung meistens wagerecht gewählt wird) den Vorzug, so gelangt man zu der Darstellungsweise in Fig. 189b, in welcher die Ordinaten η' von der X -Linie aus aufgetragen wurden, und aus welcher ohne weiteres das Gesetz abgelesen werden kann, daß innerhalb eines Gebietes, in welchem die S_0/S' -Linie der Fig. 189b) geradlinig verläuft, entsprechende Seiten der S -Linie und X -Linie sich in Punkten einer Geraden schneiden, welche durch den Nullpunkt der S_0/S' -Linie geht und parallel zu P ist.*) Auf Grund dieser Eigenschaft

*) Die S -Linie ist also innerhalb eines von einer geraden S_0 -Linie beherrschten Gebietes affin mit der X -Linie.

läßt sich die S -Linie aus der X -Linie ableiten, sobald eine Ordinate und die Nullpunkte der S_0/S' -Linie bekannt sind.)*

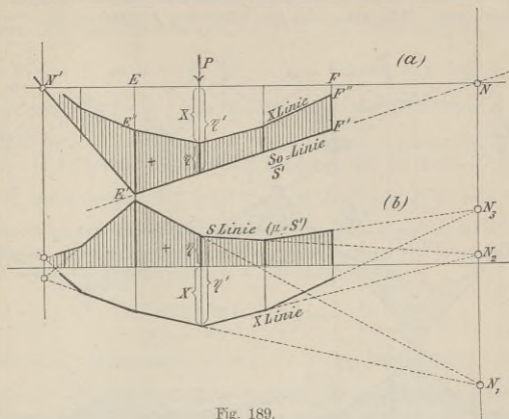


Fig. 189.

Beispiel. Für den in Fig. 190 abgebildeten, einfach statisch unbestimmten Bogenträger sei nach dem in Nr. 67 beschriebenen Verfahren die Einflußlinie für den Horizontalschub X ermittelt und von der geraden Nulllinie $A'B'$ aus aufgetragen worden.***) Es soll die Einflußfläche für die Spannkraft O des dem Knotenpunkte m gegenüberliegenden Stabes der oberen Gurtung gezeichnet werden.

Den Belastungszustand $X = -1$ zeigt Fig. 193. In A und B wurden Kräfte (K') angebracht, deren wagerechte nach außen gerichtete Seitenkräfte von der Größe 1 sind und welche durch die Gelenke E und F gehen müssen, damit sich die Bogenteile AE und BF nicht um E beziehungsweise F drehen. Sodann wurden die einander gleichen Kräfte (C') und (D') hinzugefügt, welche den (K') das Gleichgewicht halten. Der aus drei Geraden bestehende Linienzug A, C_1, D_1, B ist das Seilpolygon (Mittelkraftpolygon) der Kräfte K', C', D', K' .

*) Wir erinnern hier u. a. an die Ermittlung der Nullpunkte der S_0 -Linien mit Hilfe von Polbestimmungen kinematischer Ketten. Band I, XIII. Abschnitt.

**) In Figur 190 vernachlässigten wir die dem Zustande $X = -1$ entsprechenden Längenänderungen der von den Stützpunkten A, C, D, B ausgehenden lotrechten Füllungsstäbe. Vergl. Fig. 169, Seite 171.

Ein behufs Bestimmung der Spannkraft O' durch das Fachwerk geführter Schnitt tt trifft die Seilpolygonseite C_1D_1 , welche die Lage der Mittelkraft (R) der links von tt wirksamen äußeren Kräfte K' und O' bestimmt. Mißt man also den lotrechten Abstand y_m des Punktes

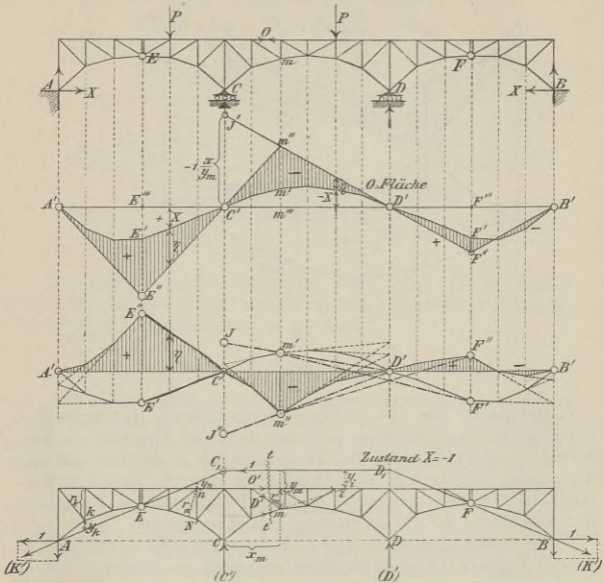


Fig. 190, 191, 192, 193.

m von der Seite C_1D_1 und erwägt, daß die wagerechte Seitenkraft von R die Größe 1 besitzt, so lautet die Rittersche Momentengleichung für den Drehpunkt m :

$$O' r_m - 1 \cdot y_m = 0, \text{ woraus } O' = +1 \frac{y_m}{r_m},$$

weshalb schließlich

$$O = O' \left(\frac{O_0}{O'} - X \right) = \frac{y_m}{r_m} \left(r_m O_0 - X \right)$$

erhalten wird.

[Die vorstehende Beschreibung der Bestimmungsweise der Spannkraft S' berücksichtigt eine beliebige Neigung der vom Schnitte tt getroffenen Seite des Mittelkraftspolygons; sie liefert z. B. für den Obergurtstab des ersten Feldes: $O' = -1 \frac{y_k}{r_k}$, für den Untergurtstab des 5ten Feldes: $U' = -1 \cdot \frac{y_n}{r_n}$, für die vom Schnitte tt getroffene Diagonale: $D' = -1 \cdot \frac{y_i}{r_i}$, wo r_i das Lot von i auf D' bedeutet.]

Im Falle $X=0$ geht der Träger in einen Gerberschen Balken über, und es besteht deshalb (nach Band I, § 40) die Einflußlinie für $\frac{r_m}{y_m} O_0$ aus 4 Geraden $A'E''$, $E''C'm''$, $m''D'F''$ und $F''B'$ (Fig. 191), deren Nullpunkte den Auflagergelenken entsprechen und deren Schnittpunkte in den Senkrechten durch E , m , F liegen. Die Gerade $D'm''$ muß auf der Senkrechten durch C die Strecke:

$$\overline{C'J'} = \frac{r_m}{y_m} \left(-\frac{x_m}{r_m} \right) = -\frac{x_m}{y_m}$$

abschneiden. Bringt man nun von der $\frac{r_m}{y_m} \cdot O_0$ -Fläche die X -Fläche in Abzug, so erhält man die in Fig. 191 durch Schraffierung hervorgehobene O -Fläche; der Multiplikator derselben ist $= y_m/r_m$. Lotrechte Lasten P erzeugen:

$$O = \frac{y_m}{r_m} \Sigma P \eta.$$

In Fig. 192 ist die O -Fläche noch einmal, auf eine wagerechte Nulllinie bezogen, dargestellt worden. Nach Auftragung der X -Linie wurde die Gerade $D'm'$ mit der Senkrechten durch C' in J zum Schnitt gebracht, die Strecke $\overline{JJ''} = 1 \frac{x_m}{y_m}$ abgetragen und mittels der Geraden $J''D'$ der Punkt m'' der O -Linie bestimmt. Zur Festlegung der Punkte F'' und E'' dienten die aus dem Verlauf der O_0 -Linie (welche man für diesen Zweck nur zu skizzieren braucht) gefolgerten Bedingungen, daß sich die Geraden $m''F''$ und $m'E''$ in einem Punkte der Senkrechten durch D' schneiden müssen und die (in unserer Figur nicht ausgezogenen) Geraden $m''E''$ und $m'E'$ in einem Punkte der Senkrechten durch C' , und schließlich wurden die sechs Zweige der O -Linie in der auf Seite 185 beschriebenen Weise (vergl. auch Fig. 189) aus den entsprechenden Zweigen der X -Linie abgeleitet.

Die Darstellungsweise in Fig. 191 ist unbedingt die übersichtlichere und verdient stets den Vorzug. Nach den Erfahrungen, welche der Verfasser bei den von ihm selbst und von den Hörern seiner Vorträge

durchgeführten Berechnungen gesammelt hat, empfiehlt sich folgendes Vorgehen.

Man verteile die Zeichnungen im allgemeinen*) auf 4 Blätter, welche der Reihe nach zur Auftragung der Einflußlinien für die Obergurtstäbe, Untergurtstäbe, Diagonalen und Vertikalen benutzt werden. Auf jedem dieser Blätter bestimme man mit Hilfe einer einzigen X -Linie nach dem in Fig. 191 angewandten Verfahren die Einflußlinien für die in Frage kommenden Spannkkräfte, und trage schließlich jede Einflußlinie von einer besonderen, geraden Nulllinie aus auf, wobei die Ordinaten der nach Fig. 191 angefertigten Zeichnung zu entnehmen

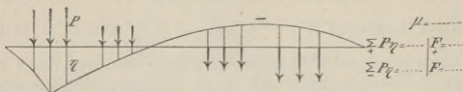


Fig. 194.

sind. Nun gebe man die gefährlichsten Zugstellungen (welche am besten durch Versuche bestimmt werden) an und schreibe neben jede Einflußlinie die folgenden Werte:

1. den Multiplikator (den wir von jetzt an stets mit μ bezeichnen werden),
2. die den Lasten P entsprechenden Werte $\Sigma P\eta$, wobei es sich empfiehlt, durch einen an das Zeichen Σ gesetzten Zeiger $+$ oder $-$ anzudeuten, daß es sich um den Einfluß der auf den positiven oder den negativen Beitragsstrecken liegenden Lasten P handelt,
3. diejenigen Größen, durch welche der Einfluß der ständigen Belastung bestimmt wird. Bei ungleichen Feldweiten ist es am zweckmäßigsten, die Inhalte F^+ und F^- des positiven beziehungsweise negativen Teiles der Einflußfläche zu berechnen und die von der ständigen Belastung (g für die Längeneinheit) herrührende Spannkraft S_g mittels der Formel $S_g = g(F^+ - F^-)$ zu ermitteln, wobei die unter den F stehenden $+$ und $-$ nicht Vorzeichen, sondern nur Zeiger bedeuten. Haben sämtliche Felder die gleiche Länge λ , so ist die Rechnung mit Knotenlasten $g\lambda$ vorzuziehen. Man bestimme dann die Summe aller positiven, an den Knotenpunkten gemessenen Ordinaten, desgleichen die Summe aller negativen Ordinaten, bezeichne diese Summen kurz mit Σ^+ und Σ^- und setze schließlich $S_g = g\lambda(\Sigma^+ - \Sigma^-)$.

*) Auf Vereinfachungen, die sich an der Hand der Betrachtungen in Nr. 72 ergeben, werden wir in dem von den wichtigsten Trägern handelnden Abschnitt II hinweisen.

Auf diese Weise erhält man sehr übersichtliche Kräftepläne, die von jedermann schnell geprüft werden können.

Die Formeln zur Berechnung der Grenzwerte der Spannkkräfte lauten mit den vorstehenden Bezeichnungen und mit Berücksichtigung des Einflusses ($S_t = \pm S' X_t = \pm \mu X_t$) einer Erwärmung beziehungsweise Abkühlung:

$$(1) \quad \begin{cases} \max S = \mu \left[+ \sum_+ P \eta + g \frac{(F - \bar{F})}{+} + X_t \right] \\ \min S = \mu \left[- \sum_- P \eta + g \frac{(F - \bar{F})}{+} + X_t \right]; \end{cases}$$

und bei gleichlangen Feldern:

$$(2) \quad \begin{cases} \max S = \mu \left[+ \sum_+ P \eta + g \lambda \left(\frac{\Sigma}{+} - \frac{\Sigma}{-} \right) + X_t \right] \\ \min S = \mu \left[- \sum_- P \eta + g \lambda \left(\frac{\Sigma}{+} - \frac{\Sigma}{-} \right) - X_t \right]. \end{cases}$$

Es ist darauf zu achten, daß die neben die Einflußlinien zu schreiben den: μ , $\frac{\Sigma P \eta}{+}$, $\frac{\Sigma P \eta}{-}$, $\frac{F}{+}$, $\frac{\bar{F}}{-}$, $\frac{\Sigma}{+}$, $\frac{\Sigma}{-}$ die absoluten Werte der fraglichen Größen vorstellen.

Ähnlich verfähre man bei mehrfach statisch unbestimmten Fachwerken. Den Maßstab für die Einflußlinien (den man für die Gurtkräfte und die Spannkkräfte in den Füllungsstäben im allgemeinen verschieden annehmen muß) wähle man nicht zu groß, damit man möglichst viele Ordinaten mit dem Zirkel addieren kann. Bei Bestimmung der $\frac{\Sigma P \eta}{+}$ und $\frac{\Sigma P \eta}{-}$ beachte man das auf Seite 120 des I. Bandes Gesagte.

Bei gleichförmiger Verkehrslast p erhält man (mit der Bezeichnung $q = g + p$):

$$(3) \quad \begin{cases} \max S = \mu \left[\frac{q F}{+} - \frac{g F}{-} + X_t \right] \\ \min S = \mu \left[\frac{g F}{+} - \frac{q F}{-} - X_t \right], \end{cases}$$

wofür man bei gleichlangen Feldern auch setzen darf:*)

$$(4) \quad \begin{cases} \max S = \mu \left[\frac{q \lambda \Sigma}{+} - \frac{g \lambda \Sigma}{-} + X_t \right] \\ \min S = \mu \left[\frac{g \lambda \Sigma}{+} - \frac{q \lambda \Sigma}{-} - X_t \right]. \end{cases}$$

Noch sei hervorgehoben, daß es manchmal zweckmäßig ist, den Einfluß S_p der ständigen Belastung nach Ermittlung von X_p gesondert mit Hilfe eines Cremonaschen Kräfteplanes zu bestimmen, und im Falle gleichförmiger Verkehrslast die folgenden für alle Träger von unver-

*) Band I, Seite 118.

änderlicher Gliederung und Stützungsart (vergl. Seite 6 u. 7) geltenden Beziehungen zu benutzen.

Die Spannkraft $_{max}S$ entsteht, wenn die positiven Beitragsstrecken mit q , die negativen mit g belastet werden, und die Spannkraft $_{min}S$ erhält man, wenn man die positiven Beitragsstrecken mit g und die negativen mit q belastet. Die Zusammenzählung beider Belastungen führt zur gänzlichen Belastung des Trägers mit $q + g$. Hat man nun S_g in der Form

$$(5) \quad S_g = g C_0$$

dargestellt, wo C_0 den Wert bedeutet, den S_g im Falle $g = 1$ annehmen würde, so findet man

$$(6) \quad _{max}S + _{min}S = (q + g) C_0,$$

kann also nach Berechnung des einen Grenzwertes ohne weiteres den anderen angeben.

Ist die Berechnung von $_{max}S$ einfacher als die von $_{min}S$, so wird man den Einfluß von p in der Form

$$(7) \quad _{max}S_p = p C_1$$

ermitteln und erhält dann

$$(8) \quad \begin{cases} _{max}S = g C_0 + p C_1 \\ _{min}S = q C_0 - p C_1 \end{cases}$$

$$\text{Probe: } _{max}S + _{min}S = (g + q) C_0.$$

Sollte die Berechnung von $_{min}S$ die einfachere sein, so suche man

$$(9) \quad _{min}S = -p C_2$$

auf, um dann zu erhalten:

$$(10) \quad \begin{cases} _{min}S = g C_0 - p C_2 \\ _{max}S = q C_0 + p C_2. \end{cases}$$

Die Gesetze (6) bis (10) gelten nicht nur für Spannkräfte, sondern auch für die nach festen Richtungen gebildeten Seitenkräfte von Stützenwiderständen, für Angriffsmomente und Querkräfte; sie gestatten in vielen Fällen eine wesentliche Abkürzung der Rechnung. Zu beachten ist, daß die nach den Gleichungen (8) und (10) berechneten Grenzwerte S noch um den Einfluß S_t einer Temperaturänderung zu vergrößern sind.

Annahmen, behufs Vereinfachung der Berechnung von neu zu entwerfenden statisch unbestimmten Trägern.

74. Die genaue Berechnung von neu zu entwerfenden statisch unbestimmten Fachwerken wird durch den Umstand sehr erschwert, daß die Größen X von den vorläufig unbekanntem Stabquerschnitten oder — wenn es sich nur um den Einfluß der Belastung handelt — von dem gegenseitigen Verhältnisse dieser Querschnitte abhängen. Es müssen

deshalb im allgemeinen die Querschnittflächen zunächst abgeschätzt und hierauf an der Hand der Ergebnisse der schärferen Untersuchung geändert werden. Bei wesentlichen Abweichungen zwischen den so erhaltenen und den zuerst angenommenen Querschnitten muß die ganze Rechnung wiederholt werden.

In vielen wichtigen Fällen läßt sich nun eine Abkürzung (ohne daß die Ergebnisse der Rechnung an Zuverlässigkeit einbüßen) dadurch erzielen, daß bei der Berechnung der Größen X die Formänderungen der Füllungsglieder des statisch bestimmten Hauptsystems vernachlässigt und hinsichtlich der Gurtungen vereinfachende Annahmen (z. B. Einführung eines gleichen Querschnitts für die Stäbe einer oder auch beider Gurtungen) gemacht werden.

Es liege z. B. der in Nr. 57 untersuchte Fachwerkbogen vor. Behufs Bestimmung von X muß für den Zustand $X = -1$, welchem die Längenänderungen $(\Delta s)' = \frac{S's}{EF}$ entsprechen, ein Williot'scher Verschiebungsplan gezeichnet werden. Hierbei weise man jedem Füllungsstabe zunächst den Wert $(\Delta s)' = 0$ zu, was zur Folge hat, daß einem zwei Knoten i und k verbindenden Wandgliede ik im Verschiebungsplane eine zu ik rechtwinklige Gerade $i'k'$ entspricht, und ferner nehme

man für alle Gurtstäbe gleich große Werte $\frac{1}{EF}$ an. Setzt man nun

$(\Delta s)' = S's$ (anstatt $\Delta s' = \frac{S's}{EF}$), so liefert der Verschiebungsplan die

EF -fachen Knotenpunktverschiebungen; es bleibt aber die Gleichung $X = \frac{\sum P_m \delta_m'}{\delta'}$ bestehen, da in Zähler und Nenner die in gleichem

Maße vergrößerten Verschiebungen δ_m' und δ' eingeführt werden. Hingegen ist die (einer gleichmäßigen Temperaturerhöhung entsprechende)

Formel $X_t = 1 \frac{\varepsilon t l}{\delta'}$ zu ersetzen durch $X_t = \frac{\varepsilon E F t l}{\delta'}$. Meistens sind

die Feldweiten annähernd gleich und dann empfiehlt es sich, den Wert $\frac{s}{EF}$ für alle Gurtstäbe gleich groß anzunehmen und mit $(\Delta s)' = S'$

zu rechnen. Der Einfluß von t ist jetzt: $X_t = \frac{\varepsilon E F t l}{s \delta'}$. Will man

für die obere und die untere Gurtung verschieden große Querschnitte F_o und F_u einführen und einem Obergurtstabe den Wert $(\Delta s)' = S'$

zuweisen, so muß man für einen Untergurtstab $(\Delta s)' = S' \frac{F_o}{F_u}$

annehmen und $X_t = \frac{\varepsilon E F_o t l}{s \delta'}$ setzen. Hervorzuheben bleibt aber, daß

im allgemeinen unter F_o und F_u nicht die mittleren Querschnitte der

oberen und unteren Gurtung zu verstehen sind und unter s nicht eine mittlere Stablänge, sondern daß häufig die Längenänderungen gewisser Stäbe von ganz hervorragendem Einflusse auf die Formänderung des Fachwerkes sind und die Abmessungen dieser Stäbe daher besonders ins Gewicht fallen. Erhält z. B. der betrachtete Bogenträger im Scheitel eine wesentlich geringere Höhe wie an den Kämpfern, so muß man für F_o , F_u und s die Gurtquerschnitte und die Stablänge im Scheitel wählen.

Indem wir hinsichtlich der bei den wichtigsten Fachwerken einzuführenden Annahmen auf den folgenden Abschnitt verweisen, heben wir noch hervor, daß die dort bevorzugte Benutzung der Biegelinien den Vorteil bietet, bereits bei Berechnung der Werte w häufig das besondere Gewicht einzelner Stäbe erkennen zu lassen. Es ist dieser Weg nach den Erfahrungen des Verfassers unbedingt dann vorzuziehen, wenn nur Lasten gleicher Richtung in Betracht kommen, wenn es sich also beispielsweise um den besonders wichtigen Fall *lotrechter* Lasten handelt.

In der Regel greifen die Lasten P in den Knotenpunkten des statisch bestimmten Hauptsystems an, und dieses Hauptsystem ist meistens ein einfaches Dreiecknetz. Werden die Gleichungen (V) auf Seite 163 angewendet, so handelt es sich zunächst darum, die den Belastungszuständen $X' = -1$, $X'' = -\frac{1}{2}$, . . . entsprechenden Biegelinien (δ' , δ'' . . .) dieses Dreiecknetzes zu bestimmen.

Bezeichnet nun M_m' das durch die Ursache $X' = -1$ hervorgerufene Angriffsmoment für den Knotenpunkt m , so ergibt sich für den dem Punkte m gegenüberliegenden Gurtstab s_m die Spannkraft $S_m' = \mp \frac{M_m'}{r_m}$, wobei r_m die Länge des Lotes von m auf s_m bedeutet. Das obere Vorzeichen bezieht sich auf die obere, das untere auf die untere Gurtung. Das Gewicht w_m' des Knotens m ist (nach Nr. 47)

$$(1) \quad w_m' = \mp \frac{(\Delta s_m)'}{r_m} = \mp \frac{S_m' s_m}{EF_m r_m} = \pm \frac{M_m' s_m}{EF_m r_m^2}$$

und ebenso erhält man für die Zustände $X'' = -1$, $X''' = -1$, . . . die Gewichte

$$w_m'' = \frac{M_m'' s_m}{EF_m r_m^2}; \quad w_m''' = \frac{M_m''' s_m}{EF_m r_m^2}; \quad \dots$$

Hat E für alle Stäbe denselben Wert, so multipliziere man die w' , w'' , . . . mit E . Außerdem empfiehlt sich stets noch die Multiplikation mit einer vorläufig beliebigen Querschnittsgröße F_c (die aber für alle w gleich genommen werden muß), womit sich dann

$$(2) \quad w' = \frac{M_m' s_m}{r_m^2} \frac{F_c}{F_m}; \quad w_m'' = \frac{M_m'' s_m}{r_m^2} \frac{F_c}{F_m}; \quad \dots$$

ergibt. Legt man diese Gewichte der Berechnung der Ordinaten δ' , δ'' , . . . der den Zuständen $X' = -1$, $X'' = -1$, . . . entsprechenden Biegelinien zugrunde, so muß man alle Glieder der Gleichungen (V) (mit Ausnahme der Glieder $\Sigma P_m \delta_m'$, $\Sigma P_m \delta_m''$. . .) mit EF_c multiplizieren. Auch ist zu beachten, daß eine weitere Multiplikation mit ν erforderlich wird, sobald die Werte w' , w'' . . . aus irgendeinem Grunde mit ν multipliziert werden.*)

Wendet man diese Regeln beispielsweise auf das einfach statisch unbestimmte Fachwerk an, so erhält man zur Berechnung von X die Gleichung:

$$EF_c L' = \Sigma P_m \delta_m' - X \Sigma S'^2 s \frac{F_c}{F} + EF_c \Sigma \varepsilon t S' s$$

und findet hieraus für den Einfluß einer Last P , für den Einfluß von Temperaturänderungen und für den Einfluß von Verschiebungen der Widerlager der Reihe nach die Werte:

$$(3) \quad \begin{cases} X = P_m \frac{\delta_m'}{\mathfrak{N}}; & X_t = \frac{\varepsilon EF_c \Sigma S' t s}{\mathfrak{N}}, & \Delta X = \frac{-EF_c L'}{\mathfrak{N}} \\ & \text{wo } \mathfrak{N} = \Sigma S'^2 s \frac{F_c}{F}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen (2) und (3) werden wir im folgenden Abschnitte vorzugsweise anwenden.

Verwertung von stellvertretenden, aus steifen Gliedern gebildeten Stabzügen.

75. Bedeutet X die Spannkraft eines Stabes ik , der als überzählig bezeichnet werden darf, durch dessen Beseitigung also das x -fach statisch unbestimmt angenommene Fachwerk seine Steifigkeit nicht verliert, und werden alle Spannkräfte auf die Form

$$(1) \quad S = \mathfrak{S}_0 - \mathfrak{S}' X$$

gebracht, unter \mathfrak{S}_0 und \mathfrak{S}' die den Zuständen $X = 0$ und $X = -1$

*) Wäre z. B. das Fachwerk in Fig. 195 ein Parallelträger von der Höhe h , und hätten sämtliche Gurtstäbe die gleiche Länge λ , so wäre $\frac{s_m}{r_m^2} = \frac{\lambda}{h^2}$. Man würde dann die w' , w'' , . . . mit $\nu = \frac{h^2}{\lambda}$ multiplizieren und einfacher $w' = M_m' \frac{F_c}{F_m}$ u. s. w. setzen.

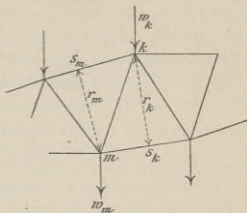


Fig. 195.

entsprechenden Werte von S verstanden, so lautet die Arbeitsgleichung für den Zustand $X = -1$:

$$(2) \quad 0 = \sum \mathcal{E}' \Delta s,$$

wobei vorausgesetzt wird, daß Bewegungen der Widerlager ausgeschlossen sind und die Summe in (2) auch den Stab ik , dem $\mathcal{E}' = -1$ entspricht, umschließt. Die Einführung von $\Delta s = S \rho = (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}' X) \rho$, wo $\rho = s : EF$, und die Beachtung der Gleichungen (30) auf Seite 27 liefert den Ausdruck

$$(3) \quad X = \frac{\sum P_m \delta'_m}{\sum \mathcal{E}'^2 \rho},$$

in welchem δ'_m die Verschiebung bedeutet, die der Angriffspunkt m von P_m im Sinne von P_m erfährt, sobald auf das nunmehr $(x-1)$ fach statisch unbestimmte Fachwerk nur die Ursache $X = -1$ wirkt.*)

Auf Grund dieses Gesetzes darf die Einflußlinie für jede Stabkraft und — wie ohne weiteres einleuchtet — auch für jeden nach einer festen Richtung wirkenden Stützenwiderstand als *Biegungslinie* (deren Multiplikator in dem hier betrachteten Falle $= 1 : \sum \mathcal{E}'^2 \rho$ ist) gedeutet werden, wobei nur die Einschränkung besteht, daß das Fachwerk infolge Beseitigung des fraglichen Stabes nicht seine Steifigkeit und infolge Aufhebung des fraglichen Stützenwiderstandes nicht seine Standfestigkeit einbüßt.***) Zu beachten ist allerdings, daß die Anwendung der Gleichung (3) zur Aufsuchung der X -Linie die Auftragung der Biegungslinie für ein durch die Ursache $X = -1$ belastetes $(x-1)$ fach statisch unbestimmtes Fachwerk erheischt; sie bietet nur in ganz bestimmten Fällen (die wir bei den späteren Anwendungen behandeln wollen) einen Ersatz für den früher gewiesenen Weg: die Einflußlinien für x passend ausgewählte Größen X', X'', \dots mit Hilfe von x Biegungslinien eines *statisch bestimmten* Fachwerks zu ermitteln und hierauf die Einflußlinien aller übrigen Größen mittels der Gleichgewichtsbedingungen zu gewinnen.

Trotzdem ist die in Gleichung (3) ausgesprochene Deutung jeder Einflußlinie als Biegungslinie stets von Vorteil; denn sie gestattet eine unmittelbare Verwertung der in Nr. 51 behandelten Beziehungen zwischen den vollständigen Verschiebungsplänen und den Biegungslinien — Gesetze, die uns bei Beachtung des in Nr. 52 gelehrtten Kunstgriffs der Einführung von stellvertretenden steifen Stabzügen in den Stand setzen, nach Auftragung der Einflußlinien für eine feste Lastichtung schnell Figuren zu zeichnen, welche auch die Wirkung anders gerichteter Kräfte P bestimmen.

*) Gleichung (3) hat dieselbe Form wie die früher für das einfach statisch unbestimmte Fachwerk aufgestellte Beziehung: $X = \frac{\sum P \delta'}{\sum S'^2 \rho}$; vergl. S. 166 u. 167.

**) Vergl. Nr. 61.

Zwei Beispiele werden genügen, dieses Verfahren zu erläutern. In Figur 196 handelt es sich um die Ermittlung des rechtsseitigen wagerechten Stützenwiderstandes H eines Bogenträgers mit festen Kämpfergelenken. Nach Einschaltung der Knotenpunkte 1, 3, 5, 7, ... 15 sei die einer lotrechten Belastung entsprechende Einflußlinie nach einem der früher beschriebenen Verfahren aus der dem Zustande $X = -1$ entsprechenden Biegelinie des aus starren Gliedern bestehenden Stabzuges 0-1-2-3-4-...-16 abgeleitet und der besseren Übersicht wegen von einer wagerechten Geraden aus aufgetragen. Zieht man dann durch die Punkte 0, 1, 2, ... der H -Linie wagerechte Geraden g_0, g_1, g_2, \dots ,

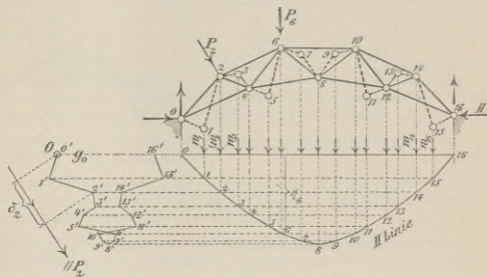


Fig. 196.

wählt in g_0 einen beliebigen Pol $O \equiv O'$ und zeichnet von O' aus einen Linienzug $O'1'2'3' \dots 16'$, dessen Seiten rechtwinklig zu den entsprechenden Seiten des Stabzuges $0123 \dots 16$ sind, und dessen Eckpunkte in den Geraden g_1, g_2, g_3, \dots liegen, so sind die Polstrahlen $O1', O2', O3', \dots$ proportional den Verschiebungen, welche die Punkte $1', 2', 3', \dots$ infolge des Belastungszustandes $H = -1$ erfahren, und ihre Richtungen stimmen (auch dem Sinne nach) mit den Verschiebungsrichtungen überein. Greift also in 2 eine Last P_2 an und ist δ_2 die Projektion des Strahles $O2'$ auf die Richtung von P_2 , so ist der Einfluß von P_2 auf H :

$$H = P_2 \delta_2.$$

Fig. 197 zeigt die Einflußlinie für die Spannkraft U im Untergurtstabe eines Bogenträgers der eben behandelten Art, setzt aber voraus, daß die Berechnung des Trägers auf Grund der Annahme starrer Füllungsglieder durchgeführt werden darf. Bei Bestimmung der einer lotrechten Belastung entsprechenden H -Linie und der hieraus nach Nr. 73

abgeleiteten U -Linie wird dann nur die Einschaltung von zwei Knotenpunkten (1 und 9) und von vier starren Stäben erforderlich.*) Der Linienzug $0'1'2'3' \dots 9'10'$ muß sich bei sorgfältiger Ausführung der Zeichnung schließen, weil er als Verschiebungsplan für den Zu-

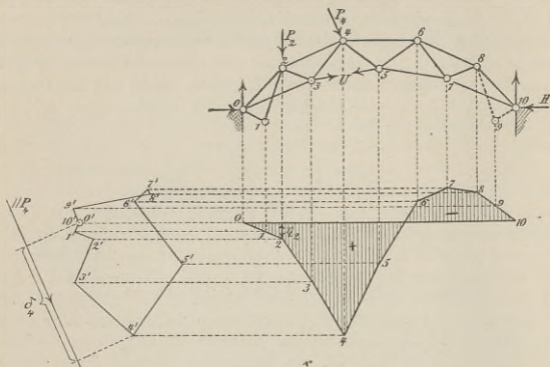


Fig. 197.

stand $U = -1$ aufgefaßt werden kann und für diesen Belastungsfall die Punkte 0 und 10 festliegen. Die Lasten P_2 und P_4 in Fig. 197 erzeugen, wenn die U -Linie einen Multiplikator μ besitzt,

$$R = \mu (P_2 \eta_2 + P_4 \delta_4).$$

*) Kommen lotrechte Füllungsstäbe vor, so beachte man die Lösung der Aufgabe 4 auf Seite 136.

Literatur zum I. Abschnitt.

1. Mohr, *Beitrag zur Theorie des Fachwerks*, Zeitschr. d. Arch. u. Ing. Ver. zu Hannover 1875, S. 17. Hier wird zum ersten Male die Biegelinie des Fachwerks als Seilpolygon behandelt. Man sehe auch die Literaturangaben zur Einleitung.
2. Williot, *Notations pratiques sur la statique graphique*, Publications scientifiques industrielles, 1877; enthält die Begründung der von uns als das Williot'sche Verfahren bezeichneten Darstellungsweise der Verschiebungen.
3. Herzmansky, *Durchbiegung eiserner Fachwerke*, Zeitschr. d. österr. Ing. u. Arch. Ver. 1878, S. 185—189.
4. Steiner, F., *Studien über Fachwerke*, Techn. Blätter 1880, S. 134. Unter anderem wird die lotrechte Biegelinie einer wagerechten Gurtung als Seilpolygon der Winkeländerungen $\Delta\alpha$ dargestellt.
5. Skibinski, *Das Deformationspolygon und dessen Anwendung zur graphischen Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke*, Zeitschr. d. österr. Ing. u. Arch. Ver. 1888, S. 23.
6. Mohr, *Beitrag zur Theorie des Fachwerks*, Civilingenieur 1885.
7. Müller-Breslau, *Beitrag zur Theorie des Fachwerks*, Zeitschr. d. Arch. u. Ing. Ver. zu Hannover, 1885. Berechnung der Gewichte w auf die im § 3 des vorliegenden Buches gezeigte Weise und (wohl die erste) ganz allgemeine Benutzung der Biegelinien zur Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke.
8. Müller-Breslau, *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre*, 1886. (Zweite Auflage: 1893. Dritte Auflage: 1904.) Die §§ 5—11 behandeln die Darstellung und allgemeine Verwertung der Biegelinien zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme.
9. Mohr, *Über Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne*, Civilingenieur 1887. Anwendung des Williot'schen Verfahrens auf die einfachsten Fälle (Balken auf zwei Stützen und Dreigelenkbogen). Wir verweisen auch auf Bd. I, Seite 554.
10. Ovazza, *Sul calcolo delle deformazioni dei sistemi articolati*, Atti della Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXIII, 1888.
11. Ovazza, *Sul calcolo delle frecce elastiche delle travi reticolari*, Atti della Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXIII, 1888.
12. Müller-Breslau, *Beitrag zur Theorie der ebenen, elastischen Träger*, Zeitschr. d. Arch. u. Ing. Ver. zu Hannover, 1888, S. 605. Einführung des Stabzugverfahrens; vergl. § 2 des vorliegenden Buches.

13. Land, *Kinematische Theorie der statisch bestimmten Träger*, Zeitschr. d. österr. Ing. u. Arch. Ver., 1888, S. 11 u. 162 stützt sich hauptsächlich auf die Anwendung der Williot'schen Verschiebungspläne kinematischer Ketten. Ein Anhang beschäftigt sich mit den Biegungslinien elastischer Stabzüge; dabei ist die Ersetzung der elastischen Gebilde durch Gliederketten aus starren Scheiben beachtenswert. Diese Umwandlung verdankt ähnlichen Gründen ihre Entstehung, wie der von uns in Nr. 52 Seite 131 des vorliegenden Buches eingeführte stellvertretende Stabzug; während aber die Form dieses Stabzuges einmal angenommen und dann für alle Belastungszustände beibehalten wird (was namentlich für die Anwendungen in Nr. 75 sehr wichtig ist), ändert die von Land benutzte Gliederkette mit wechselnder Belastung ihre Gestalt.
14. Müller-Breslau, *Beiträge zur Theorie der ebenen, elastischen Träger*, Centralblatt der Bauverwaltung, 1889, zeigt u. a. die auf Seite 153—163 des vorlieg. Buches angegebenen Umformungen der Elastizitätsgleichungen.

II. Abschnitt.

Formeln, Regeln und Beispiele für die Berechnung der wichtigsten statisch unbestimmten Fachwerke.

76. Mit Hilfe der im § 5 enthaltenen Untersuchungen läßt sich die Berechnung jedes ebenen statisch unbestimmten Fachwerks, das durch Kräfte von beliebiger Richtung beansprucht wird, durchführen. Zweck des vorliegenden Abschnittes ist es nun, die wichtigsten Trägerarten etwas eingehender zu untersuchen.

§ 7.

Der Bogen mit zwei Gelenken.

a. Bestimmung des Horizontalschubs.

77. Allgemeines Verfahren. Wirkt auf einen Fachwerkbogen mit 2 Kämpfergelenken und ohne Scheitelgelenk eine Einzellast P in den Abständen a und b von den Auflagerlotrechten (Fig. 198), so entstehen Stützenwiderstände, deren jede sich in eine lotrechte Seitenkraft A beziehungsweise B und in eine Seitenkraft H' nach der Richtung der Schlußlinie AB zerlegen läßt. Die wagerechte Seitenkraft von H' (d. i. der *Horizontalschub*) ist

$$H = H' \cos \alpha,$$

wobei α den Neigungswinkel der Schlußlinie bedeutet.

Die Kräfte A und B stimmen mit den Auflagerwiderständen eines einfachen Balkens überein und sind

$$A = \frac{Pb}{l}; \quad B = \frac{Pa}{l}.$$

Die statisch nicht bestimmbare Kraft H ist von den Längenänderungen sämtlicher Stäbe abhängig und wird, falls die Formänderungen der Füllungsstäbe vernachlässigt werden, was meistens zulässig ist, wie folgt ermittelt.

Man berechne für jeden Gurtstab die Ausdrücke:

$$(1) \quad w_m = \frac{s_m y_m}{r_m^2} \frac{F_c}{F_m} \quad \text{und} \quad z_m = y_m w_m,$$

wobei s_m die Länge des Gurtstabes bedeutet,

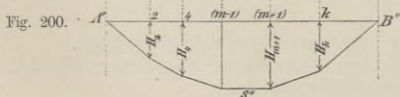
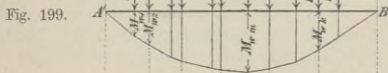
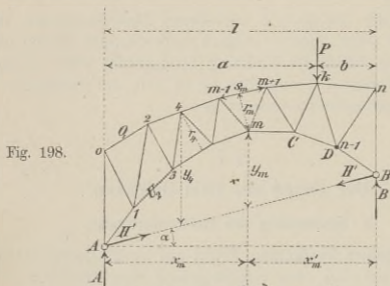
m die Ordnungsziffer des gegenüberliegenden Knotenpunktes,

r_m das Lot von m auf s_m ,

y_m den lotrechten Abstand des Punktes m von der Schlußlinie,

F_m die Querschnittsfläche des Stabes s_m ,

F_c eine beliebige, aber für alle Stäbe gleiche Querschnittsfläche, welche im allgemeinen gleich dem am häufigsten vorkommenden Gurtquerschnitte gesetzt wird, damit möglichst viele der Verhältnisse $F_c : F_m = 1$ werden.



Nun bestimme man (durch Rechnung oder Zeichnung) die Biegemomente $M_{w1}, M_{w2}, \dots, M_{wk}, \dots$ für einen *einfachen* (d. h. einen bei A' und B' , Fig. 199, frei aufliegenden) Balken, dessen Stützpunkte lotrecht unter A beziehungsweise B liegen, und auf welchen lotrechte, durch die entsprechenden Knotenpunkte des Bogens gehende Lasten $w_1,$

w_2, \dots, w_m, \dots wirken, worauf man für eine im Knoten k des Bogens angreifende Last P den Horizontalschub erhält.

$$(2) \quad H_k = P \frac{M_{wk}}{\sum x_m}$$

Darin ist: $\sum x_m = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_m$.

Es folgt dieses Verfahren aus Gleichung (V) S. 169. Hiernach wird $H_k = P \frac{\delta'_k}{\sum S'^2 \rho}$,

wo $\rho = \frac{s}{EF}$, ferner δ' die Ordinate der Biegelinie für den Zustand $H = -1$ und S' die Stabkraft für $H = -1$ ist. Man erhält für einen Stab der oberen beziehungsweise unteren Gurtung: $S' = -\frac{y}{r}$ und $S' = +\frac{y}{r}$, so daß der Nenner

des für H_k angegebenen Bruches nach Multiplikation mit EF_c in $EF_c \sum S'^2 \frac{s}{EF} = \sum \frac{y^2 s}{r^2} \frac{F_c}{F} = \sum x$ übergeht. Die δ' -Linie darf nach Nr. 74 als Momentenlinie

eines mit den Gewichten $w_m = \frac{M'_m s_m}{r m^2} \frac{F_c}{F_m}$ belasteten einfachen Balkens aufgefaßt werden, wobei $M'_m = y_m$ das Angriffsmoment infolge $H = -1$ ist. Damit ergeben sich die oben angeführten Gewichte w_m .

Die auf diese Weise berechneten Werte H_2, H_4, \dots bestimmen in Figur 200 die aus Geraden bestehende Einflußlinie für den Fall oben angreifender Lasten, und ganz entsprechend würden H_1, H_3, \dots die Einflußlinie für unten wirkende Lasten liefern. Der erstere Fall liegt in der Regel vor, und es ist dann meistens zulässig, auch die ständige Last ausschließlich auf die oberen Knotenpunkte zu verteilen. Man kommt dann mit der Einflußlinie $A''S''B''$ in Fig. 200 aus.

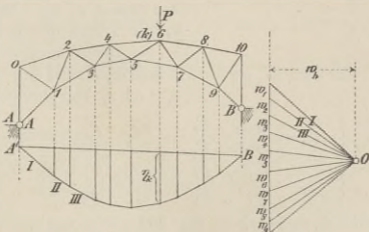


Fig. 201.

Will man die H -Linie durch Zeichnung bestimmen, so nehme man die Polweite w_h des die Gewichte w verbindenden Seilpolygons so an, daß dessen Ordinate r_k (Fig. 201) den Horizontalschub H_k angibt. Stellt man dann die Lasteinheit durch eine Strecke c dar, so erhält man (wegen $M_{wk} = w_h r_k$) die Bedingung

$$H_k = \frac{c w_h \eta_k}{\sum x_m} = \eta_k,$$

und hieraus folgt die Polweite

$$w_h = \frac{\sum x_m}{c}.$$

Drückt man bei Berechnung der x_m alle Abmessungen in Metern aus, so muß man auch c in Metern angeben. Wird beispielsweise der Kräftemaßstab $50^{\text{mm}} = 1^t$ gewählt, und ist die Trägerzeichnung im Maßstabe $1:75$ gefertigt, so wird die Lasteinheit durch eine Strecke von der Länge $c = 75 \cdot 0,050 = 3,75^{\text{m}}$ dargestellt, und man muß dann

$w_h = \frac{\sum x_m}{3,75}$ wählen. w_h und w_m enthalten dieselbe Einheit; sie sind,

wenn die Gleichung (1) angewandt wird, Zahlen und bedingen die Anfertigung eines besonderen Zahlenmaßstabes.*)

Man könnte auch den Ausdruck $\sum x_m = \sum y_m w_m$ als das auf die Achse AB bezogene Moment von Kräften w_m , welche parallel zu AB sind, auffassen und mittels eines Seilpolygons bestimmen, jedoch führt die Berechnung von $\sum x_m$ schneller und übersichtlicher zum Ziele. Ebenso unzweckmäßig wäre es, die Gewichte w_m durch Zeichnung zu ermitteln.

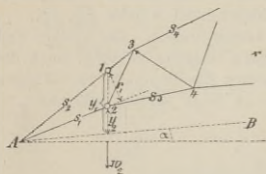


Fig. 202.

Hinsichtlich der Werte w und x ist noch folgendes zu bemerken. Werden die Gurtungen nach Fig. 202 am Auflager zusammengeführt, so weise man den Stab s_1 dem lotrecht über 2 gelegenen Punkte 1 des Stabes s_2 zu. Bezeichnet dann r_1 die Länge des Lotes von 1 auf s_1 , so findet man für den Punkt 2 des Balkens AB das von den Stäben s_1 und s_2 herrührende Gewicht:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_2 = \frac{y_1 s_1}{r_1^2} \frac{F_c}{F_1} + \frac{y_2 s_2}{r_2^2} \frac{F_c}{F_2} \quad \text{ferner:} \\ x_2 = \frac{y_1^2 s_1}{r_1^2} \frac{F_c}{F_1} + \frac{y_2^2 s_2}{r_2^2} \frac{F_c}{F_2}. \end{array} \right.$$

Beim *Ständerfachwerk* in Fig. 203 geben wir zwei lotrecht übereinandergelegenen Knotenpunkten dieselbe Ordnungsziffer und bezeichnen die lotrechten Abstände der Knotenpunkte von der Schlußlinie mit

$y_{m\alpha}$ für den unteren Knoten m und mit
 $y_{m\sigma}$ „ „ oberen „ m .

*) Infolge von Kürzungen wird die Einheit der w_h und w_m später zuweilen eine andere werden.

Ferner nennen wir:

- h_m die lotrechte Trägerhöhe in m ,
- β_m, γ_m den Neigungswinkel des m^{ten} Stabes der oberen beziehungsweise unteren Gurtung gegen die Wagerechte,
- λ_m die Weite des m^{ten} Feldes,
- F_{om} den Querschnitt des m^{ten} Obergurtstabes,
- F_{um} den Querschnitt des m^{ten} Untergurtstabes,

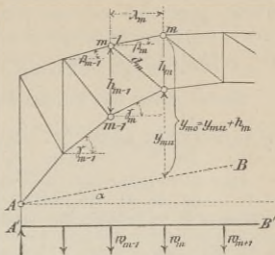


Fig. 203.

und erhalten für den oberen Knotenpunkt m , welchem der $(m + 1)^{\text{te}}$ Stab der unteren Gurtung gegenüberliegt, (aus Gleich. (1) nach einfacher Umformung):

$$w_m = y_{mo} \frac{\lambda_{m+1}}{h_m^2} \sec^3 \gamma_{m+1} \frac{F_c}{F_{u(m+1)}}; \quad z_m = \frac{y_{mo}^2 \lambda_{m+1}}{h_m^2} \sec^3 \gamma_{m+1} \frac{F_c}{F_{u(m+1)}}$$

während dem unteren Knoten m entspricht:

$$w_m = \frac{y_{mu} \lambda_m}{h_m^2} \sec^3 \beta_m \frac{F_c}{F_{om}}; \quad z_m = \frac{y_{mu}^2 \lambda_m}{h_m^2} \sec^3 \beta_m \frac{F_c}{F_{om}}$$

Durch Zusammenfassung der in dieselbe Lotrechte fallenden Gewichte w ergibt sich:

$$(4) \quad \begin{cases} w_m = \frac{1}{h_m^2} \left(y_{mu} \lambda_m \sec^3 \beta_m \frac{F_c}{F_{om}} + y_{mo} \lambda_{m+1} \sec^3 \gamma_{m+1} \frac{F_c}{F_{u(m+1)}} \right) \\ z_m = \frac{1}{h_m^2} \left(y_{mu}^2 \lambda_m \sec^3 \beta_m \frac{F_c}{F_{om}} + y_{mo}^2 \lambda_{m+1} \sec^3 \gamma_{m+1} \frac{F_c}{F_{u(m+1)}} \right) \end{cases}$$

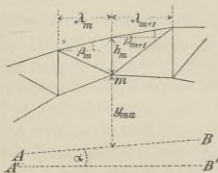


Fig. 204.

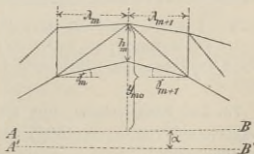


Fig. 205.

Bildet der Ständer bei m , Fig. 204, die Grenze zwischen den links- und rechtssteigenden Diagonalen, so liegen dem Knoten m zwei Ober-

gurtstäbe gegenüber und man erhält:

$$(5) \quad w_m = \frac{y_{mu}}{h_m^2} \left(\lambda_m \sec^3 \beta_m \frac{F'_c}{F'_{om}} + \lambda_{m+1} \sec^3 \beta_{m+1} \frac{F'_c}{F'_{o(m+1)}} \right); \quad x_m = y_{mu} w_m.$$

Ebenso ergibt sich für den Fall in Fig. 205:

$$(6) \quad w_m = \frac{y_{mo}}{h_m^2} \left(\lambda_m \sec^3 \gamma_m \frac{F'_c}{F'_{um}} + \lambda_{m+1} \sec^3 \gamma_{m+1} \frac{F'_c}{F'_{u(m+1)}} \right); \quad x_m = y_{mo} w_m.$$

Liegt die Lotrechte durch einen Knoten r rechts von $r+1$ (oder links von $r-1$) — vergl. Fig. 99 auf Seite 113 —, so ist bei der zeichnerischen Bestimmung der Momente M_o zu beachten, daß die Gewichte in der Reihenfolge w_{r-1} , w_r , w_{r+1} durch das Seilpolygon verbunden werden müssen. Will man rechnen, so verteile man im Falle $\frac{\text{oben}}{\text{unten}}$ angreifender Belastung sämtliche Gewichte w auf die $\frac{\text{oberen}}{\text{unteren}}$ Knotenpunkte. Auf die Punkte $r-1$ und $r+1$ würden z. B. bei Zerlegung von w_r die Anteile: $-w_r \frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_r - \lambda_{r+1}}$ und $+w_r \left(1 - \frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_r - \lambda_{r+1}} \right)$ kommen. Dieses Verfahren ist zuweilen auch dann zu empfehlen, wenn r zwischen $r-1$ und $r+1$ liegt.

78. Einfluß der Temperatur. Wächst die bei der Aufstellung des Bogens herrschende Temperatur überall um den gleichen Betrag t , so ändert sich der Horizontalschub um

$$(7) \quad H_t = \frac{\varepsilon E t l F_c \sec^2 \alpha}{\sum x_m}.$$

Meistens genügt es, mit $t = \pm 35^\circ$ Cels. zu rechnen. Dann ist für Schmiedeeisen und Stahl (mit $\varepsilon E = 240'$ für das qm):

$$(8) \quad H_t = \pm 8400 \frac{l F_c}{\sum x_m} \sec^2 \alpha \text{ Tonnen,}$$

worin die Abmessungen in Metern einzuführen sind.

Die Formel (7) folgt aus Gleich. (V), Seite 169. Danach ist $H_t = \frac{\sum S' \varepsilon t s}{\sum S'^2 \rho} = \frac{E F_c \sum S' \varepsilon t s}{\sum x_m}$. Wendet man nun das Gesetz der virtuellen Verschiebungen auf den Zustand $H = -1$ an, und führt als mögliche Formänderungen die Änderungen $\Delta s = \varepsilon t s$ der Stablängen ein, ferner die ihnen entsprechende Änderung $\varepsilon t l \sec \alpha$ der Weite $AB = l \sec \alpha$, so erhält man: $1 \sec \alpha \cdot \varepsilon t \sec \alpha = \sum S' \varepsilon t s$ und gelangt zur Formel (7).

79. Der Sichelträger, Fig. 206. Bei der Ermittlung der H -Linie sichelförmiger Träger empfiehlt sich die Annahme eines überall gleichen Gurtquerschnitts. Man verstehe dann unter F'_c den Mittelwert aller F'_o und F'_u und setze die in den Gleichungen (1), (3), (4) auftretenden Querschnittsverhältnisse = 1. Haben alle Felder gleiche (oder annähernd gleiche) Weite, so weichen bei nicht zu großer Pfeilhöhe auch die Längen der Gurtstäbe wenig voneinander ab, und es ist dann ratsam,

für $s_m \frac{F_c}{F_m}$ einen festen Mittelwert einzuführen und sämtliche w und α durch diesen Wert zu dividieren. Man setze also z. B. für den in Fig. 206 dargestellten Träger

$$(9) \quad w_m = \frac{y_m}{r_m^2}, \quad \alpha_m = y_m w_m,$$

berechne dann aber H_t mittels der Formel:

$$(10) \quad H_t = \frac{\varepsilon E l F_c \sec^2 \alpha}{\lambda \sum \alpha_m} t^*).$$

Zahlenbeispiele. I. Die Knotenpunkte der Gurtungen des in Fig. 206 abgebildeten Sichelträgers liegen in Parabeln von 4,0 bezieh. 2,5^m Pfeilhöhe. Die Stützweite ist = 20^m, die Feldweite = 2^m. Die Ordinaten y , Strecken r , Gewichte w und Größen α sind in der folgenden Tabelle angegeben. Für w_2 bis w_{10} und α_2 bis α_{10} gelten die Gleich. (9), während w_1 und α_1 nach den Gleich. (5) zu berechnen sind. Der erste Untergurtstab ist als halber Stab behandelt worden.

m	y_m	r_m	$w_m = \frac{y_m}{r_m^2}$	$\alpha_m = y_m w_m$	Ausnahmefälle
1	0,475	0,20	—	—	
2	1,440	0,52	5,33	7,67	
3	1,275	0,63	3,21	4,10	$w_1 = \frac{0,475}{0,20^2} + \frac{1}{2} \frac{0,72}{0,22^2} = 19,31^{**}$
4	2,560	0,94	2,90	7,42	
5	1,875	1,01	1,84	3,45	$\alpha_1 = \frac{0,475^2}{0,20^2} + \frac{1}{2} \frac{0,72^2}{0,22^2} = 11,00$
6	3,360	1,26	2,12	7,11	
7	2,275	1,29	1,37	3,11	
8	3,840	1,45	1,83	7,01	
9	2,475	1,44	1,19	2,95	
10	4,000	1,525	1,72	6,88	

$$\sum \alpha_m = 2 \sum_{1}^9 \alpha + \alpha_{10} = 2 \cdot 53,82 + 6,88 = 114,52.$$

Für den mit den Gewichten w belasteten Balken $A'B'$ wurden jetzt von der Mitte aus die Querkräfte nach der Formel $Q_m = Q_{m+1} + w_m$ berechnet, hierauf die Momente $M_m = M_{m-1} + Q_m \lambda'$ und schließlich die Ordinaten $H_m = \frac{M_m}{\sum \alpha_m}^{***}$ der H -Linie. Wegen $\lambda' = 1$ ist $M_m = M_{m-1} + Q_m$. Wäre λ' nicht = 1, aber konstant, so würde man trotzdem $\lambda' = 1$ setzen, dafür aber $\sum \alpha_m$ durch λ' dividieren. Wir schreiben den vollständigen Ansatz der Rechnung hin.

*) Streng genommen wäre λ durch den Mittelwert von $\left(s_m \frac{F_c}{F_m} \right)$ zu ersetzen, doch erwäge man die Schwierigkeit, t zutreffend zu schätzen und rechne daher so einfach wie möglich. Aus diesem Grunde wird man auch, falls α klein ist, $\sec^2 \alpha = 1$ setzen.

***) Die Ordinate des lotrecht über 1 gelegenen Punktes 1' der oberen Gurtung ist = 0,72 und das Lot von 1' auf die Verlängerung des ersten Untergurtstabes = 0,22.

****) Bei den M_m und Q_m haben wir den Zeiger w hier fortgelassen.

$Q_{10} = \frac{1}{2} w_{10} = 0,86$	$M_1 = 39,96 = Q_1$	
$\quad \quad \quad + 1,19$	$\quad \quad \quad + 20,65$	
$Q_9 = \frac{2,05}{1,83}$	$M_2 = \frac{60,61}{15,32}$	$H_2 = \frac{60,61}{114,52} = 0,53$
$Q_8 = \frac{3,88}{1,37}$	$M_3 = \frac{75,93}{12,11}$	
$Q_7 = \frac{5,25}{2,12}$	$M_4 = \frac{88,04}{9,21}$	$H_4 = \frac{88,04}{114,52} = 0,77$
$Q_6 = \frac{7,37}{1,84}$	$M_5 = \frac{97,25}{7,37}$	
$Q_5 = \frac{9,21}{2,90}$	$M_6 = \frac{104,62}{5,25}$	$H_6 = \frac{104,62}{114,52} = 0,91$
$Q_4 = \frac{12,11}{3,21}$	$M_7 = \frac{109,87}{3,88}$	
$Q_3 = \frac{15,32}{5,33}$	$M_8 = \frac{113,75}{2,05}$	$H_8 = \frac{113,75}{114,52} = 0,99$
$Q_2 = \frac{20,65}{19,31}$	$M_9 = \frac{115,80}{0,86}$	
$Q_1 = 39,96$	$M_{10} = 116,66$	$H_{10} = \frac{116,66}{114,52} = 1,02$

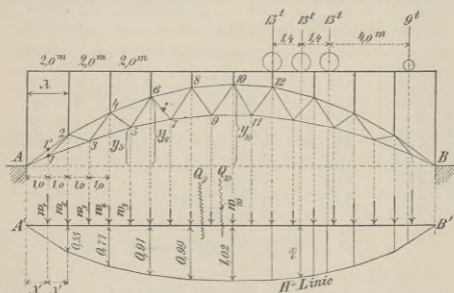


Fig. 206.

Die gleichförmig angenommene ständige Belastung sei $g = 1,45'$ f. d. m , also für ein Feld: $g\lambda = 2,90'$; sie erzeugt:

$$H_g = g\lambda (2(H_2 + H_4 + H_6 + H_8) + H_{10}) = 2,90 \cdot 7,42 = 21,5'.$$

Ein vom rechten Auflager bis zum Querträger 12 vorgeschobener Lastenzug (mit den in der Fig. angegebenen Achsendrücken und Radständen) ruft hervor:

$$H = \Sigma P\eta = 39,0'.$$

Der Einfluß einer gleichmäßigen Temperaturerhöhung um $t = 35^\circ \text{C}$. ist nach Gleich. (10):

$$H_t = \frac{240 \cdot 20 \cdot F_c}{2,0 \cdot 114,52} \cdot 35 = 733 F_c,$$

wobei F_c den mittleren Gurtquerschnitt in qm bedeutet.

II. In neuerer Zeit sind mehrfach Sichelträger von bedeutender Pfeilhöhe ausgeführt worden, z. B. für die Douro-Brücke bei Porto und den Garabit-Viadukt. Es ist hier zulässig, die Werte y_m , s_m und β_m zur Vereinfachung der Rechnung auf eine durch die Mitten der Höhen h_m geführte Bogenachse zu beziehen und, mit Hinweis auf Figur 207, die Gleichungen (4) zu ersetzen durch

$$w_m = \frac{2y_m}{h_m^2} \frac{s_m^3}{\lambda_m^2} \frac{F_c}{F_m}; \quad x_m = y_m w_m.$$

Kürzt man sämtliche w durch 2, und nimmt man für F_m einen festen Mittelwert F_c an, so erhält man:

$$(11) \quad w_m = \frac{y_m}{h_m^2} \frac{s_m^3}{\lambda_m^2}; \quad x_m = y_m w_m$$

und für den Einfluß von t :

$$(12) \quad H_t = \frac{\varepsilon E I F_c \sec^2 \alpha}{2 \sum x_m} t.$$

Wir wenden die Formeln (11) und (12) auf die Berechnung des Horizontal-schubes der Eisenbahnbrücke über den Douro bei Porto an. Figur 208 stellt die Hälfte des sichel förmigen Bogenträgers dar.

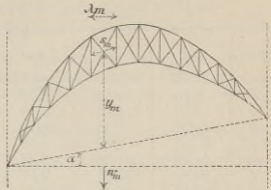


Fig. 207.

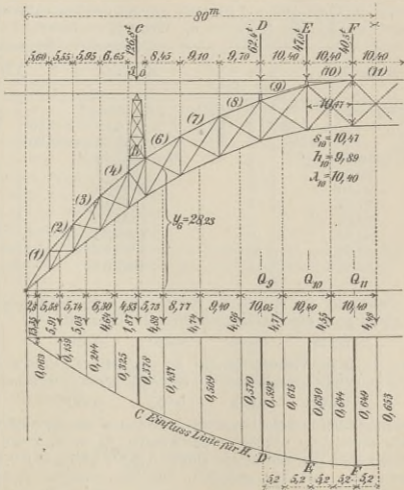


Fig. 208.

Die folgende Tabelle gibt an:

die in den Mitten der Felder gemessenen lotrechten Höhen h_m ,
 die Längen s_m der Verbindungslinien der Mittelpunkte der aufeinander-
 folgenden Vertikalen,
 die Ordinaten der Mittelpunkte der Strecken s_m ,
 die Feldweiten λ_m , Gewichte w_m und Werte x_m .

m	y_m	s_m	h_m	λ_m	$w_m = \frac{y_m s_m^3}{h_m^2 \lambda_m^2}$	$x_m = y_m w_m$
1	3,20	8,51	2,17	5,60	13,35	42,74
2	9,33	8,07	5,19	5,55	5,91	55,14
3	15,06	8,17	6,79	5,95	5,03	75,75
4	20,61	8,62	8,02	6,65	4,64	95,65
5	24,45	3,72	8,64	3,00	1,87	45,70
6	28,23	10,01	9,01	8,45	4,88	137,90
7	33,15	10,14	9,38	9,10	4,74	157,25
8	37,13	10,31	9,63	9,70	4,66	173,15
9	40,09	10,68	9,80	10,40	4,71	188,92
10	41,90	10,47	9,89	10,40	4,55	190,46
11	42,50	10,40	9,93	10,40	4,48	190,51

$$\Sigma x_m = 2 \sum_1^{10} x_m + x_{11} = 2 \cdot 1162,66 + 190,51 = 2515,83.$$

Nun werden die Querkräfte und Momente des mit den Gewichten w_m belasteten Balkens berechnet und aus den Momenten die Werte H ermittelt:

m	Querkräfte	m	Momente	$H = \frac{M}{2515,83}$
11	$Q_{11} = \frac{1}{2} w_{11} = 2,24$	1	$M_1 = Q_1 \cdot 2,8 = 158,42$	0,063
10	$Q_{10} = Q_{11} + w_{10} = 6,79$	2	$M_2 = M_1 + Q_2 \cdot 5,58 = 399,65$	0,159
9	$Q_9 = Q_{10} + w_9 = 11,50$	3	$M_3 = M_2 + Q_3 \cdot 5,74 = 613,86$	0,244
8	$Q = 16,16$	4	$M = 817,29$	0,325
7	20,90	5	950,84	0,378
6	25,78	6	1098,56	0,437
5	27,65	7	1281,85	0,509
4	32,29	8	1433,76	0,570
3	37,32	9	1549,33	0,615
2	43,23	10	1619,95	0,644
1	56,58	11	1643,24	0,653

Nach Aufzeichnung der Einflußlinie für H mißt man, entsprechend den Angriffspunkten C, D, E, F der Fahrbahnbelastung, die Ordinaten

$$0,378 \quad 0,592 \quad 0,630 \quad 0,649,$$

während *Seyrig* in seiner Veröffentlichung: *Le pont sur le Douro à Porto* (Paris 1878) auf Seite 31 mittels einer wesentlich umständlicheren Berechnung der Werte

$$0,370 \quad 0,592 \quad 0,637 \quad 0,650$$

findet. Die Abweichungen beider Ergebnisse sind ganz unwesentlich. Bei gänzlicher Belastung der Brücke werden in den Punkten C, D, E, F auf den Bogen seitens der Verkehrslast die senkrechten Drücke $126,8^t$; $62,4^t$; $47,0^t$; $40,5^t$ (vergl. die angezogene Quelle, Seite 34) ausgeübt. Dieselben erzeugen — nach unserer Berechnung —

$$H = 2 [126,8 \cdot 0,378 + 62,4 \cdot 0,592 + 47,0 \cdot 0,630 + 40,5 \cdot 0,649] = 281,53^t.$$

Seyrig findet 280,62^t. Es ist dies die Summe der Horizontalschübe der beiden das Gleis stützenden Bogenträger.

Bei Berechnung von H_t darf der mittlere Querschnitt der einen Gurtung eines Bogens $F_c = 0,0560 \text{ qm}$ gesetzt werden (vergl. die Quelle, Seite 26, Mittelwert von $\frac{1}{4} \omega_1$) und es folgt dann für $t = 30^\circ$ für jeden Bogenträger:

$$H_t = \frac{\varepsilon E t l F_c}{2 \sum x_m} = \frac{240 \cdot 30 \cdot 160 \cdot 0,0560}{2 \cdot 2515,83} = 12,82^t.$$

Dabei ist $E = 2000000^{kg}$ für den qcm angenommen worden. Setzt man, wie dies bei der Berechnung der Douro-Brücke geschehen ist, $E = 1600000$, so erhält man $H_t = \frac{16}{20} 12,82 = 10,26^t$, während Seyrig (Seite 41) den Wert $H_t = \frac{1}{2} \cdot 17,74 = 8,87^t$ findet.

Es ist hier hervorzuheben, daß bei Vernachlässigung der Formänderung der Gitterstäbe der aus $\sum S'^2 \frac{s}{EF}$ hervorgegangene Wert $\sum x$ stets ein größeres H_t liefert, da in jener Summe nur die Quadrate von S' auftreten, daß es aber bei der großen Unsicherheit, in welcher man sich bezüglich der anzunehmenden Temperaturänderung t befindet, nur zu empfehlen ist, H_t reichlich groß zu rechnen.

80. Formel für den Horizontalschub parabelförmiger Sichelträger.

Liegen die Knotenpunkte beider Gurtungen in Parabeln, so läßt sich für H ein einfacher Ausdruck herleiten, welcher sehr zuverlässige Ergebnisse liefert. Zu diesem Zwecke nehmen wir unendlich kleine Felder an, und ersetzen die nach Gleichung (9) zu berechnenden Einzelgewichte w durch eine stetige Belastung, welche dem Gesetze folgt:

$$w = \frac{y_u}{h^2} \sec^2 \beta + \frac{y_o}{h^2} \sec^2 \gamma.$$

Die Bezeichnungen sind aus der Fig. 209 ersichtlich. Die Kämpfer sind in derselben Wagerechten gedacht. Das erste Glied entspricht dem Teilchen ds der oberen Gurtung und ergibt sich durch Einführung von

r_u (d. i. Abstand des Punktes u von der Tangente in o) $= h \cos \beta$, und ebenso entsteht das zweite Glied. Die Summe: $\sum x_m$ ist zu ersetzen durch:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= \int_0^l \frac{y_u^2}{h^2} \sec^2 \beta dx + \int_0^l \frac{y_o^2}{h^2} \sec^2 \gamma dx \\ &= \frac{f_u^2}{f^2} \int_0^l \left[1 + \left(\frac{dy_o}{dx} \right)^2 \right] dx + \frac{f_o^2}{f^2} \int_0^l \left[1 + \left(\frac{dy_u}{dx} \right)^2 \right] dx, \end{aligned}$$

wobei zu beachten ist, daß $y_u : h = f_u : f$ und $y_o : h = f_o : f$. Führt man ein:

$$y_o = \frac{4f_o x(l-x)}{l^2} \quad \text{und} \quad y_u = \frac{4f_u x(l-x)}{l^2},$$

so erhält man nach Ausführung der Integration und nach gehöriger Zusammenziehung:

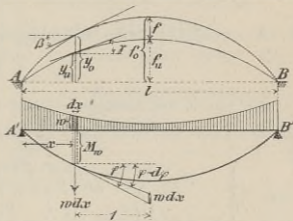


Fig. 209.

$$w = \frac{f_o + f_u}{f^2} \left[\frac{1}{4} (l^2 + 16 f_o f_u) \frac{1}{x(l-x)} - \frac{16 f_o f_u}{l^2} \right]$$

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{3lf^2} \left[3l^2(f_o^2 + f_u^2) + 32f_o^2 f_u^2 \right].$$

Die Differentialgleichung der Momentenlinie (M_w) lautet, da diese Linie das mit der Polweite 1 gezeichnete Seilpolygon der Belastungsfläche ist:

$$(13) \quad -d(\operatorname{tg} \varphi) = w dx, \text{ oder } \frac{d^2 M_w}{dx^2} = -w,$$

wo φ den Neigungswinkel des auf eine wagerechte Schlußlinie bezogenen Seilpolygons bedeutet. Denn zwei aufeinander folgende Tangenten müssen auf einer Lotrechten im Abstände 1 von der Stelle (x) das Lastteilchen $w dx$ abschneiden.

Wird nun die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 M_w}{dx^2} = -\frac{f_o + f_u}{f^2} \left[\frac{1}{4} (l^2 + 16 f_o f_u) \frac{1}{x(l-x)} - \frac{16 f_o f_u}{l^2} \right]$$

zweimal integriert, und werden die beiden Konstanten mittels der Bedingungen bestimmt

$$x=0 \text{ und } x=l \text{ muß liefern } M_w=0$$

(deren eine auch durch die Forderung ersetzt werden darf, daß für $x = \frac{1}{2}l$ der Wert $\frac{dM_w}{dx} = 0$ werden muß), so ergibt sich:

$$M_w = \frac{f_o + f_u}{f^2} \left[\frac{1}{4} (l^2 + 16 f_o f_u) \left(\frac{x}{l} \log. \operatorname{nat.} \frac{l}{x} + \frac{l-x}{l} \log. \operatorname{nat.} \frac{l}{l-x} \right) - 8 f_o f_u \frac{x}{l} \frac{l-x}{l} \right].$$

Für eine in den Abständen a und b von A bzw. B gelegene Last P erhält man jetzt (nach der Formel $H = P \frac{M_w}{\Sigma x} = P \frac{M_w}{\mathfrak{R}}$):

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} H = \frac{3Pl(f_o + f_u)[(l^2 + 16 f_o f_u) \alpha_1 - f_o f_u \alpha_2]}{3l^2(f_o^2 + f_u^2) + 32f_o^2 f_u^2} \\ \text{wo } \alpha_1 = \frac{1}{4} \left(\frac{a}{l} \log. \operatorname{nat.} \frac{l}{a} + \frac{b}{l} \log. \operatorname{nat.} \frac{l}{b} \right); \quad \alpha_2 = 8 \frac{a}{l} \frac{b}{l}. \end{array} \right.$$

Zur Erleichterung der Benutzung dieser Formel diene die folgende Tabelle, welche gestattet, zwischen Kämpfer und Scheitel 10 Punkte der H -Linie schnell festzulegen. Im allgemeinen wird man diese Punkte durch eine krumme Linie verbinden und in diese ein Polygon beschreiben, dessen Ecken den Querträgern entsprechen.

$\frac{a}{l}$	α_1	α_2	$\frac{a}{l}$	α_1	α_2
0,05	0,0496	0,38	0,30	0,1527	1,68
0,10	0,0813	0,72	0,35	0,1619	1,82
0,15	0,1057	1,02	0,40	0,1683	1,92
0,20	0,1251	1,28	0,45	0,1720	1,98
0,25	0,1406	1,50	0,50	0,1733	2,00

Für den in Figur 206 dargestellten parabolischen Sichelträger ist z. B. $f_o = 4,0^m$; $f_u = 2,5^m$; $l = 20^m$, mithin

$$H = \frac{2184}{299} \alpha_1 - \frac{39}{299} \alpha_2,$$

und man erhält demnach für $\frac{a}{l} = 0,1 \quad 0,2 \quad 0,3 \quad 0,4 \quad 0,5$ die Werte

$$H = 0,50 \quad 0,75 \quad 0,89 \quad 0,97 \quad 1,01,$$

welche sich von den vorhin berechneten:

$$H = 0,53 \quad 0,77 \quad 0,91 \quad 0,99 \quad 1,02$$

nur unwesentlich unterscheiden.

Für den von Temperaturänderungen parabelförmiger Bögen herrührenden Horizontalschub H_t findet man, indem man in Gleichung (10) den Wert $\lambda \Sigma z_m$

durch $\int_0^l \left(\frac{y_u^2}{h^2} \sec^2 \beta + \frac{y_o^2}{h^2} \sec^2 \gamma \right) dx$ ersetzt, die einfache Formel:

$$(15) \quad H_t = \varepsilon E F_c t \frac{3l^2 (f_o - f_u)^2}{3l^2 (f_o^2 + f_u^2) + 32f_o^2 f_u^2},$$

und beispielsweise für den Bogenträger in Fig. 206 (mit $\varepsilon E = 240$; $t = 35^\circ$):

$$H_t = 240 F_c 35 \frac{3 \cdot 20^2 (4,0 - 2,5)^2}{3 \cdot 20^2 (4,0^2 + 2,5^2) + 32 \cdot 4,0^2 \cdot 2,5^2} = 759 F_c \text{ Tonnen.}$$

Vorhin ergab sich der hiervon nur wenig verschiedene Wert $H_t = 733 F_c$.

81. Bogenträger mit fast wagerechter oberer Gurtung. Zu den am häufigsten ausgeführten Arten von Bogenträgern gehört der in Figur 210 dargestellte Träger mit annähernd oder genau wagerechter oberer Gurtung. Meistens wird die Höhe im Scheitel sehr klein gewählt, und es stellt sich dann heraus, daß die Querschnittsverhältnisse



Fig. 210.

nisse der dem Scheitel zunächst gelegenen Gurtstäbe von wesentlichem Einfluß auf die Ergebnisse sind. Die Gewichte w der Knoten in der Nähe der Auflagern spielen eine untergeordnete Rolle. Wir empfehlen bei Berechnung der H -Linie folgende Annahmen:

Man benutze die Gleichungen (4), ersetze die veränderlichen Glieder $\sec^3 \beta_m \frac{F_c}{F_{om}}$ und $\sec^3 \gamma_{m+1} \frac{F_c}{F_{um+1}}$ durch die festen Werte $\frac{F_c}{F_o}$ bzw. $\frac{F_c}{F_u}$, nehme die willkürliche Querschnittsfläche $F_c = F_o$ an und kürze die w und z durch die (konstant gedachte) Feldweite λ . Man erhält dann:

$$(16) \quad w_m = \left(y_{mu} + y_{mo} \frac{F_o}{F_u} \right) \frac{1}{h_m^2} \quad \text{und} \quad z_m = \left(y_{mu}^2 + y_{mo}^2 \frac{F_o}{F_u} \right) \frac{1}{h_m^2},$$

wo für $F_o : F_u$ das Verhältnis der Querschnitte der oberen und unteren Gurtung in der Nähe des Scheitels einzusetzen ist.

Für den Knotenpunkt 0 und für den Scheitel s hat man bezw. zu setzen:

$$(17) \quad w_o = \frac{F_o}{F_u} \frac{1}{h_o}; \quad \varkappa_o = \frac{F_o}{F_u}$$

$$(18) \quad w_s = \frac{2y_s}{h_s^2} \frac{F_o}{F_u}; \quad \varkappa_s = \frac{2y_s^2}{h_s^2} \frac{F_o}{F_u} \quad (\text{vergl. Formel 5}).$$

Der Einfluß einer Temperaturänderung ist:

$$(19) \quad H_t = \frac{\varepsilon E F_o l t}{\lambda \Sigma \varkappa_m}$$

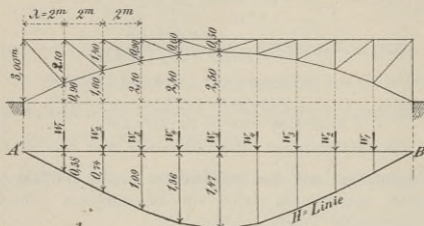


Fig. 211.

Zahlenbeispiel. I. Für den schmiedeeisernen Bogenträger in Fig. 211 erhält man mit $F_o : F_u = 1$ (ein Querschnittsverhältnis, für welches der Verfasser in einer ganzen Reihe von Fällen recht befriedigende Ergebnisse erzielt hat):

$w_1 = \frac{0,9 + 3,0}{2,1^2} = 0,88$	$\varkappa_1 = \frac{0,9^2 + 3,0^2}{2,1^2} = 2,224$	$\varkappa_o = 1,000$
$w_2 = \frac{1,6 + 3,0}{1,4^2} = 2,35$	$\varkappa_2 = \frac{1,6^2 + 3,0^2}{1,4^2} = 5,898$	
ebenso $w_3 = 6,30$; $w_4 = 15,00$	$\varkappa_3 = 16,556$; $\varkappa_4 = 41,000$	
schließlich $w_5 = \frac{2 \cdot 2,5}{0,5^2} = 20,00$	$\varkappa_5 = \frac{2 \cdot 2,5^2}{0,5^2} = 50,00$	
$\Sigma \varkappa_m = 2 \cdot 66,678 + 50,000 = 183,356$		

Die Momente des mit den Gewichten w belasteten Balkens $A'B'$ sind, wenn die Feldweite $\lambda = 1$ gesetzt wird:

$$M_1 = 34,53; \quad M_2 = 68,18; \quad M_3 = 99,48; \quad M_4 = 124,48; \quad M_5 = 134,48.$$

Der durch λ dividierte Wert $\Sigma \varkappa_m$ ist $\frac{183,356}{2,0} = 91,678$, und es ergibt sich daher:

$$H_1 = \frac{34,53}{91,678} = 0,38; \quad H_2 = \frac{68,18}{91,678} = 0,74;$$

ebenso $H_3 = 1,09$; $H_4 = 1,36$; $H_5 = 1,47$.

Ist die ständige Belastung $g = 1,45^t$ f. d. m , so ist die Belastung eines Knotens:

$$g\lambda = 1,45 \cdot 2,0 = 2,9^t.$$

Der Horizontalschub infolge des Eigengewichtes beträgt dann:

$$H_g = g\lambda [2(H_1 + H_2 + H_3 + H_4) + H_5] = 2,9 \cdot 8,61 = 25,0^t.$$

Der Einfluß einer Temperaturänderung um $t = 35^\circ$ ist:

$$H_t = \frac{\varepsilon E t l F_o}{\lambda \Sigma \pi_m} = \frac{240 \cdot 35 \cdot 20 \cdot F_o}{2,0 \cdot 183,356} = 460 F_o \text{ (abgerundet).}$$

II. Will man die Untersuchung für verschiedene Querschnittsverhältnisse $F_o : F_u$ durchführen, so berechne man (unter der Voraussetzung: $\lambda = 1$) die

Momente M_m' infolge der Gewichte: $w_m' = \frac{y_m}{h_m^2}$ und die Momente M_m'' infolge der

$w_m'' = \frac{h_o}{h_m^2}$ und bestimme H_m mittels der Formel:

$$(20) \quad H_m = \frac{M_m' + \frac{F_o}{F_u} M_m''}{\frac{1}{\lambda} \left(\Sigma \pi_m' + \frac{F_o}{F_u} \Sigma \pi_m'' \right)}.$$

Für den Scheitel ist $w_s' = \frac{2y_o}{h_s^2}$ und $w_s'' = 0$; $\pi_s' = y_s w_s'$ und $\pi_s'' = 0$. Der Einfluß von t ist:

$$(21) \quad H_t = \frac{\varepsilon E t l F_o}{\lambda \left(\Sigma \pi_m' + \frac{F_o}{F_u} \Sigma \pi_m'' \right)}.$$

Man erhält:

m	w_m'	w_m''	π'	π''	M_m'	M_m''	
0			0	1,000			
1	0,20	0,68	0,184	2,041	20,29	14,24	$\Sigma \pi' = 95,868$
2	0,82	1,53	1,306	4,592	40,38	27,80	
3	2,60	3,70	5,444	11,111	59,65	39,83	$\Sigma \pi'' = 87,488$
4	6,67	8,33	16,000	25,000	76,32	48,16	
5	20,00	0	50,000	0	86,32	48,16	

Die nach Gleichung (20) berechneten Werte H_m sind für verschiedene Verhältnisse $F_o : F_u$ in der folgenden Tabelle zusammengestellt worden.

m	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
1	0,39	0,39	0,38	0,38	0,37	0,37
2	0,77	0,76	0,75	0,74	0,73	0,73
3	1,13	1,11	1,10	1,09	1,07	1,06
4	1,42	1,40	1,38	1,36	1,34	1,32
5	1,55	1,52	1,49	1,47	1,44	1,42

Der Einfluß von $t = 35^\circ$ C. wird der Reihe nach (abgerundet):

$$H_t = 540 F_o; 510 F_o; 480 F_o; 460 F_o; 440 F_o; 410 F_o.$$

In der Nähe des Scheitels weichen also die H -Linien wesentlich voneinander ab. Den Einfluß dieser Unterschiede auf die Spannkkräfte werden wir später besprechen. Vergl. Nr. 85.

82. **Bogenträger von nahezu unveränderlicher Höhe.** Die in den Figuren 212 und 213 dargestellten Bogenträger mit annähernd konstantem r_m , welche häufig der Kürze wegen *Parallelträger* genannt werden, sind meistens so gebildet, daß die oberen und unteren Knotenpunkte in Kreisbögen mit gemeinsamem Mittelpunkte liegen. Bedeutet dann h den Unterschied der beiden Kreishalbmesser, so darf man r_m durch h ersetzen und, bei gleichen (oder annähernd gleichen) Feldweiten, die Formeln

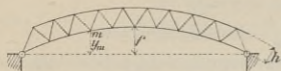


Fig. 212.

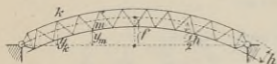


Fig. 213.

anwenden. Man vergl. die Begründung von (9) und (10). Kürzt man alle w und \varkappa durch $1:h_m^2$ und nimmt einen überall gleichen Gurtquerschnitt an, so erhält man sehr einfach:

$$w_m = \frac{y_m}{h_m^2} \frac{F_c}{F_m}; \quad \varkappa = y_m w_m;$$

$$H_t = \frac{\varepsilon E l F_c}{\lambda \sum \varkappa_m} t$$

anwenden. Man vergl. die Begründung von (9) und (10). Kürzt man alle w und \varkappa durch $1:h_m^2$ und nimmt einen überall gleichen Gurtquerschnitt an, so erhält man sehr einfach:

$$(22) \quad w_m = y_m; \quad \varkappa_m = y_m^2; \quad H_t = \frac{\varepsilon E F_c l h^2}{\lambda \sum y_m^2} t.$$

In den Formeln für H_t bedeutet F_c einen mittleren Gurtquerschnitt.

Die Gleichungen (22) liefern auch dann noch brauchbare Werte, wenn die Trägerhöhe h sich vom Scheitel nach dem Kämpfer hin etwas ändert. In den Ausdruck für H_t muß dann ein Mittelwert h eingesetzt werden.

Will man für die obere und untere Gurtung verschiedene mittlere Querschnitte F_o und F_u einführen, so wähle man $F_c = F_o$ und setze für einen Knoten m der unteren und einen Knoten k der oberen Gurtung beziehungsweise:

$$(23) \quad w_m = y_m; \quad \varkappa_m = y_m^2 \quad \text{und} \quad w_k = y_k \frac{F_o}{F_u}; \quad \varkappa_k = y_k^2 \frac{F_o}{F_u}.$$

Für *Parabelbögen* lassen sich die gewonnenen Ergebnisse noch erheblich vereinfachen. Dazu nehmen wir mit Bezugnahme auf Fig. 214 an, es folgen die Gurtungen den Gesetzen:

$$y_o = y + h_o \quad \text{bzw.} \quad y_u = y - h_u,$$

wobei

$$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}$$

die Gleichung einer Parabel von der Pfeilhöhe f ist. Sodann ersetzen wir (ähnlich wie in Nr. 80) die Einzellasten w durch eine stetige Belastung, welche an der Stelle x die Höhe

$$w = y_u + y_o \frac{F_o}{F_u} = y - h_u + (y + h_o) \frac{F_o}{F_u}$$

hat, und welcher dann die Momentengleichung

$$\frac{d^2 M_w}{dx^2} = -w = -\frac{4fx(l-x)}{l^2} \left(1 + \frac{F_o}{F_u}\right) - h_o \frac{F_o}{F_u} + h_u$$

entspricht. Durch zweimalige Integration dieser Beziehung finden wir

$$M_w = \frac{f}{3l^2} (xl^3 - 2lx^3 + x^4) \left(1 + \frac{F_o}{F_u}\right) + \frac{1}{2} \left(h_o \frac{F_o}{F_u} - h_u\right) x(l-x),$$

wobei die Konstanten mittels der Bedingung bestimmt werden, daß $x=0$ und $x=l$ den Wert $M=0$ liefern müssen. Das Moment M_w dividieren wir durch

$$\mathfrak{R} = \int_0^l \left[(y-h_u)^2 + (y+h_o)^2 \frac{F_o}{F_u} \right] dx = \frac{8f^2 l}{15} \frac{F_o + F_u}{F_u} \omega, \text{ wo}$$

$$(24) \quad \omega = 1 + \frac{5}{2} \frac{h_o F_o - h_u F_u}{f(F_o + F_u)} + \frac{15}{8} \frac{h_o^2 F_o + h_u^2 F_u}{f^2 (F_o + F_u)}.$$

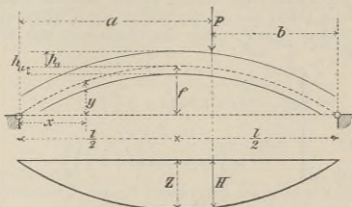


Fig. 214.

Der von einer Temperaturänderung t herrührende Wert H ist:

$$H_t = \frac{\varepsilon E F_o l h^2 t}{\mathfrak{R}}, \text{ d. i.}$$

$$(25) \quad H_t = \frac{15 \varepsilon E t h^2 F_o F_u}{8 f^2 (F_o + F_u) \omega}.$$

Indem wir dann schließlich x durch a ersetzen, erhalten wir den Einfluß einer Einzelkraft P auf H :

$$(26) \quad H = P \frac{M_w}{\mathfrak{R}} = \frac{5P}{8f^2 \omega} a(l-a) \left[l^2 + a(l-a) + \frac{3}{2} \frac{l^2}{f} \frac{h_o F_o - h_u F_u}{F_o + F_u} \right].$$

Die nach Gleichung (26) aufgetragene H -Linie weicht so wenig von einer Parabel ab, daß der Gedanke nahe liegt, sie durch eine Parabel zu ersetzen, so zwar, daß beide Linien mit der Nulllinie gleich große Flächen einschließen. Die Bedingung hierfür lautet:

$$\frac{Z 2l}{3} = \frac{P}{\mathfrak{R}} \int_0^l M_w dx$$

und liefert für Z den Wert:

$$(27) \quad Z = \frac{3Pl}{16f} \nu, \text{ wo}$$

$$(28) \quad \nu = \frac{f(F_o + F_u) + 1,25(h_o F_o - h_u F_u)}{f(F_o + F_u) + 2,5(h_o F_o - h_u F_u) + \frac{15}{8f}(h_o^2 F_o + h_u^2 F_u)}$$

Die Gleichung der parabelförmigen H -Linie ist:

$$(29) \quad H = \frac{3Pab}{4fl} \nu;$$

sie liefert auch für flache Kreisbögen sehr zuverlässige Ergebnisse.

Für den in Fig. 212 dargestellten Fall ist $h_o = h$ und $h_u = 0$. Man findet:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu = \frac{f(F_o + F_u) + 1,25hF_o}{f(F_o + F_u) + 2,5hF_o \left(1 + 0,75 \frac{h}{f}\right)} \\ H_t = \frac{15 \varepsilon E t h^2 F_o F_u}{8f \left[f(F_o + F_u) + 2,5hF_o \left(1 + 0,75 \frac{h}{f}\right) \right]} \end{array} \right.$$

Setzt man einmal $F_o = F_u$, sodann $F_o = 2F_u$, so erhält man, wenn $f = 4h$ ist, $\nu = 0,84$ bzw. $\nu = 0,81$ und erkennt hieraus, daß das Querschnittsverhältnis $F_o : F_u$ in der Regel keinen wesentlichen Einfluß auf H haben wird. Mit der zulässigen Vereinfachung $F_o = F_u$ gehen die Gleichungen (28) für den Träger in Fig. 212 über in:

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu = \frac{8f + 5h}{8f + 2,5h \left(4 + 3 \frac{h}{f}\right)}; \\ H_t = \frac{15 \varepsilon E t h^2 F_o}{2f \left[8f + 2,5h \left(4 + 3 \frac{h}{f}\right) \right]}, \end{array} \right.$$

Fig. 212*.

wo jetzt F_o einen Mittelwert der Querschnitte F_o und F_u bedeutet.*)

Für den zweiten wichtigen Sonderfall in Fig. 213 ergibt sich mit $F_o = F_u = F_c$ (wegen $h_o = h_u = \frac{1}{2}h$):

$$(32) \quad \nu = \frac{1}{1 + \frac{15}{32} \frac{h^2}{f^2}} \quad \text{und} \quad H_t = \frac{15 \varepsilon E t h^2 F_c \nu}{16f^2}.$$

Fig. 213.

Der Verfasser empfiehlt die Anwendung parabelförmiger H -Linien auf das dringendste. Vergl. des Verfassers: Theorie und Berechnung der eisernen Bogenbrücken (Berlin 1880) Seite 34.

b. Ermittlung der Spannkkräfte.

83. Allgemeine Beziehungen. Nach Bestimmung des Horizontal-schubes H läßt sich das Angriffsmoment M_m für den Knotenpunkt m (Fig. 198) in der Form darstellen:

$$(33) \quad M_m + M_{o,m} - H'y_m \cos \alpha = M_{o,m} - H'y_m,$$

wo $M_{o,m}$ den Wert des Momentes für den Fall $H = 0$ bedeutet, d. i. das Angriffsmoment für den Knoten m eines einfachen Balkens AB . Durch M_m aber ist die Spannkraft des dem Knoten m gegenüber-

*) Maßgebend sind hauptsächlich die Querschnitte in der Nähe des Scheitels.

liegenden Gurtstabes bestimmt. So erhält man für die Gurtkräfte O_1 und U_2 in Fig. 198 die Werte:

$$O_1 = -\frac{M_1}{r_1} \quad \text{und} \quad U_2 = +\frac{M_2}{r_2}.$$

Soll die Spannkraft D in Fig. 215 aus der Momentengleichung für den Schnittpunkt i der Gurtkräfte U und O ermittelt werden, so findet man:

$$(34) \quad M_i - Dr_i = 0, \quad \text{wo} \quad M_i = M_{oi} - Hy_i$$

und M_{oi} , das Angriffsmoment der links vom Schnitte $t-t$ wirksamen *lotrechten* Kräfte A und P in bezug auf den Punkt i bedeutet, während $-Hy_i$ den Einfluß von H' angibt; r_i ist der Hebelarm von D .

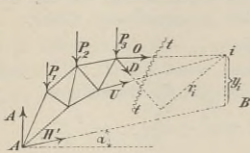


Fig. 215.

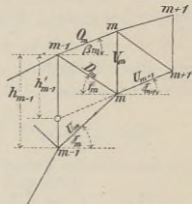


Fig. 216.

Bei Berechnung der Angriffsmomente und Spannkräfte für das *Ständerfachwerk* (Fig. 216) führen wir die Bezeichnungen ein:

M_m^o = Angriffsmoment für den oberen Knotenpunkt m

M_m^u = " " " unteren " " m

und finden dann:

$$(35) \quad O_m = -\frac{M_m^u}{h_m \cos \beta_m}; \quad U_m = +\frac{M_{m-1}^o}{h_{m-1} \cos \gamma_m}.$$

Die Spannkräfte in den Füllungsstäben kann man wie vorhin mittels der durch Formel (34) dargestellten Ritterschen Momentengleichung bestimmen, oder auch auf die folgende Weise:

Man führt durch O_m, D_m, U_m einen lotrechten Schnitt, setzt die Summe der links vom Schnitte wirkenden wagerechten Kräfte = 0, erhält dann zunächst

$$D_m \cos \varphi_m + O_m \cos \beta_m + U_m \cos \gamma_m + H = 0,$$

drückt nun O und U mittels Gleich. (35) aus und berücksichtigt schließlich, daß

$$M_m^o = M_m^u - Hh_m$$

ist, weil sich beim Übergange vom unteren zum oberen Knoten m

nur der Einfluß von H auf das Moment ändert. Man gelangt dann zu der übersichtlichen Formelgruppe:

$$(36) \quad \begin{cases} O_m \cos \beta_m = -\frac{M_m^u}{h_m}; & U_m \cos \gamma_m = +\frac{M_{m-1}^o}{h_{m-1}}, \\ D_m \cos \varphi_m = \frac{M_m^o}{h_m} - \frac{M_{m-1}^o}{h_{m-1}} = \frac{M_m^u}{h_m} - \frac{M_{m-1}^u}{h_{m-1}}. \end{cases}$$

Hiernach ist man z. B. imstande, mit Hilfe der Einflußlinien für die Größen: $M^u : h$ und $M^o : h$ sämtliche Spannkkräfte O , U , D zu bestimmen.

Auch die Spannkkräfte in den Ständern lassen sich durch die Momente M^u und M^o ausdrücken. Greift die Belastung oben an, auf welchen Fall wir uns hier beschränken wollen, so folgt aus dem Gleichgewicht der am unteren Knotenpunkte m angreifenden Kräfte:

$$V_m + D_m \sin \varphi_m + U_{m+1} \sin \gamma_{m+1} - U_m \sin \gamma_m = 0,$$

und aus dieser Bedingung erhält man, wenn man D_m , U_{m+1} und U_m mittels der Gleichungen (36) bestimmt und die Beziehungen

$$\operatorname{tg} \varphi_m + \operatorname{tg} \gamma_m = \frac{h_{m-1}}{\lambda_m} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \varphi_m + \operatorname{tg} \gamma_{m+1} = \frac{h'_{m-1}}{\lambda_m}$$

belastet, die einfache Formel:

$$(37) \quad V_m = \frac{h'_{m-1}}{\lambda_m} \left(\frac{M_{m-1}^o}{h_{m-1}} \frac{h_{m-1}}{h'_{m-1}} - \frac{M_m^o}{h_m} \right).$$

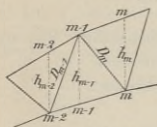


Fig. 217.

Darin bedeutet h'_{m-1} die obere der Strecken, in welche h_{m-1} durch die Verlängerung des Stabes U_{m+1} zerlegt wird.

Auf ähnliche Weise können auch die Spannkkräfte D des Strebenfachwerks dargestellt werden. Man denke sich die punktierten Ständer eingeschaltet, Fig. 217, und findet:

$$(38) \quad \begin{cases} D_m \cos \varphi_m = \frac{M_m^o}{h_m} - \frac{M_{m-1}^o}{h_{m-1}} = \frac{M_m^u}{h_m} - \frac{M_{m-1}^u}{h_{m-1}}, \\ D_{m-1} \cos \varphi_{m-1} = \frac{M_{m-2}^o}{h_{m-2}} - \frac{M_{m-1}^o}{h_{m-1}} = \frac{M_{m-2}^u}{h_{m-2}} - \frac{M_{m-1}^u}{h_{m-1}}. \end{cases}$$

Werden in jedem Felde zwei sich kreuzende steife Diagonalen angeordnet (Fig. 218), so ist die genaue Berechnung der Spannkkräfte eine außerordentlich mühsame Arbeit, weil außer H noch in jedem Felde eine statisch nicht bestimmbare Größe, nämlich die Spannkraft in einer der beiden Diagonalen, auftritt. Wir begnügen uns deshalb hier mit einem Annäherungsverfahren.*)

*) Das genauere Verfahren findet sich in: Müller-Breslau, Theorie und Berechnung der eisernen Bogenbrücken (Berlin 1880), Seite 72. Eine nachträgliche

und, wenn $s_o \parallel s_u$ ist, wenn also $\sin \gamma_1 = \sin \gamma_2$ und $\sin \gamma_3 = \sin \gamma_4$ ist,

$$(39) \quad \frac{D}{D'} = - \frac{d'^2}{d^2} \frac{F}{F'}$$

Man nehme (wenigstens bei der ersten Berechnung) $F = F'$ an, und benutze die vorstehende Gleichung auch dann, wenn s_o und s_u nur annähernd parallel sind.

Werden nun, vom Kreuzungspunkte J der Diagonalen aus, auf diesen die Strecken JC und JE (Fig. 218) so angetragen, daß $JC:JE = d'^2 F : d^2 F'$ ist, und wird das Parallelogramm JF gezeichnet, so gibt JF die Richtung der Mittelkraft \mathfrak{D} aus den Spannkraften D und D' an. Sind o und u die Schnittpunkte der Geraden JF mit den Gurtungen, ferner M_o und M_u die für die Punkte o und u berechneten Angriffsmomente, so ergeben sich die Spannkraften für die Gurtungen:

$$(40) \quad O = - \frac{M_u}{r_u} \quad \text{und} \quad U = + \frac{M_o}{r_o},$$

wenn r_o das Lot von Punkt o auf die untere Gurtung und r_u das Lot von u auf die obere Gurtung bedeutet.

Die Spannkraften D und D' werden durch Zerlegung von \mathfrak{D} gefunden, und bei Berechnung von \mathfrak{D} verfährt man genau so, als befände sich in dem fraglichen Felde nur eine die Punkte o und u verbindende Diagonale.

Behufs Ermittlung der H -Linie nach Nr. 77 werden den Punkten o und u die Gewichte $w_o = \frac{s_u y_o}{r_o^2} \frac{F_o}{F_u}$ und $w_u = \frac{s_o y_u}{r_u^2} \frac{F_o}{F_o}$ zugeschrieben, ferner die Werte $x_o = w_o y_o$; $x_u = w_u y_u$. Die Berechnung von H erfolgt dann nach Gleichung (7). In der Regel sind die in Nr. 82 angeführten Vereinfachungen $w_o = y_o$ und $w_u = y_u$ zulässig oder — was noch mehr zu empfehlen ist — die Benutzung der parabelförmigen H -Linie.

Zur Bestimmung der Grenzwerte der Spannkraften bedient man sich im allgemeinen am zweckmäßigsten der Einflußlinien.

84. Einflußlinien für die Angriffsmomente und Spannkraften. Die Einflußfläche für das Angriffsmoment

$$(41) \quad M_m = M_{o,m} - H y_m = y_m \left(\frac{M_{o,m}}{y_m} - H \right)$$

ergibt sich — wenn y_m als Multiplikator angesehen wird*) — als der Unterschied der $(M_{o,m} : y_m)$ -Fläche und der H -Fläche. Nach Aufzeichnung der H -Linie $A'S'B'$ (Fig. 220) trage man auf der Lotrechten durch A

*) Vergl. Seite 174. Wir werden die Multiplikatoren der Einflußflächen mit μ bezeichnen und stets an die betreffenden Flächen setzen.

die Strecke $\overline{A'A''} = 1 \frac{x_m}{y_m}$ ab,*) verbinde A'' und B' durch eine Gerade, bestimme auf dieser senkrecht unter m den Punkt m' und ziehe $A'm'$. Die schraffierte Fläche ist dann die Einflußfläche für M_m^{**} ; sie gestattet die Berechnung der Grenzwerte ${}_{\max} M_m$ und ${}_{\min} M_m$ in der Form:

$${}_{\max} M_m = \mu \left(\sum_+ P \eta + g \left(F_+ - F_- \right) + H_t \right)$$

$${}_{\min} M_m = -\mu \left(\sum_- P \eta - g \left(F_+ - F_- \right) + H_t \right),$$

wobei $\sum_+ P \eta$, $\sum_- P \eta$, F_+ und F_- die auf Seite 188 erklärte Bedeutung haben; dort ist auch gezeigt, daß man im Falle gleich langer Felder auch setzen darf:

$$g \left(F_+ - F_- \right) = g \lambda \left(\sum_+ - \sum_- \right).$$

Figur 220 setzt voraus, daß m der oberen Gurtung angehört und die Belastung oben angreift. Ist m ein Knoten der unbelasteten Gur-

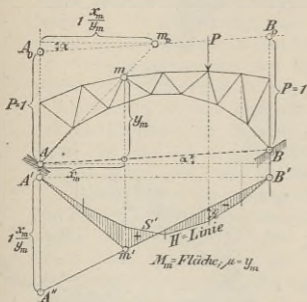


Fig. 220.

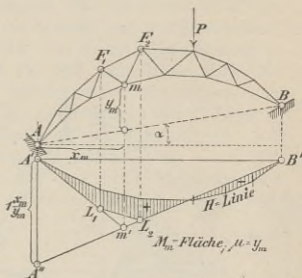


Fig. 221.

tung (Fig. 221), so beachte man, daß jedem Felde $F_1 F_2$ eine gerade Einflußlinie $L_1 L_2$ entsprechen muß.

Durch die Momente M_m sind die Spannkkräfte in den Gurtungen bestimmt.

Bei Untersuchung eines Füllungsstabes gehen wir, mit Bezugnahme auf Fig. 215, von der für jeden Neigungswinkel des Stabes gültigen

*) Die zeichnerische Bestimmung von $1 \cdot \frac{x_m}{y_m}$ ist in der Fig. 220 angedeutet worden. Der Verfasser zieht die Berechnung vor.

***) Wäre $A'A'' = 1 \cdot x_m$, so wäre das Dreieck $A'm'B'$ nach Band I, S. 134, die Einflußfläche für das Moment M_m .

Gleichung $Dr_i = \pm M_i$ aus und ermitteln zunächst die Einflußfläche für $M_i = M_{o_i} - Hy_i$. Nach Aufzeichnung der H -Linie machen wir $A'A'' = 1 \cdot \frac{x_i}{y_i}$, Fig. 222, ziehen die Gerade $A''B'$, bestimmen auf dieser

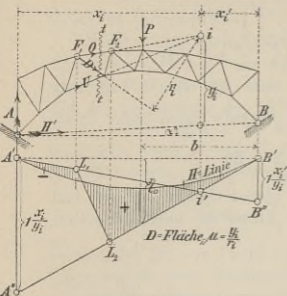


Fig. 222.

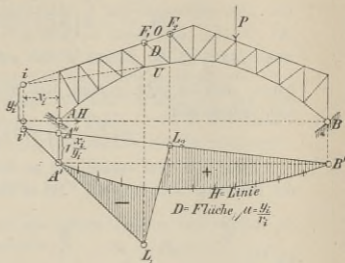


Fig. 223.

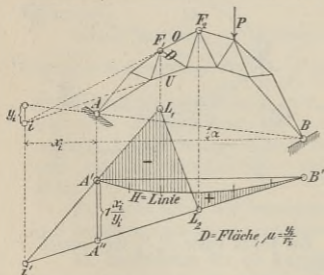


Fig. 224.

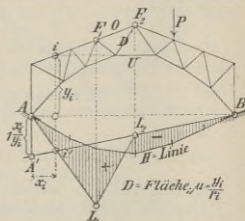


Fig. 225.

senkrecht unter i den Punkt i' , verbinden i' und A' und tragen schließlich die dem Felde F_1F_2 entsprechende Gerade L_1L_2 ein. Fassen wir jetzt die in Fig. 222 schraffierte Fläche als Einflußfläche für die Spannkraft D auf, so ist der Multiplikator derselben

$$\mu = \frac{y_i}{r_i}.$$

Die Einflußflächen für D und M_i haben gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen, je nachdem die Spannkraft D in Fig. 215 links oder rechts um i dreht. Bei Feststellung dieser Vorzeichen schlage man zur Vermeidung von Irrtümern folgenden Weg ein. Man nehme eine rechts von F_2 gelegene Last P an, und setze zunächst $H=0$, betrachte also den Träger als einfachen Balken. Am linken Auflager greift dann nur $A = P \frac{b}{l}$ an, und man erhält aus der Gleichung $Ax_i - Dr_i = 0$ mit $P=1$ den Wert:

$$D = + A \frac{x_i}{r_i} = + 1 \frac{b}{l} \frac{x_i}{r_i} = \mu \cdot 1 \frac{b}{l} \cdot \frac{x_i}{y_i} = \mu \eta_0,$$

wo η_0 die unter P gemessene Ordinate der Geraden $B'A''$ bedeutet. Für den Einfluß von $H' = H \sec \alpha$ hat man nun: $H y_i + Dr_i = 0$, woraus $D = -\mu H$, weshalb sich im ganzen

$$D = \mu (\eta_0 - H)$$

ergibt, woraus für den vorliegenden Fall folgt: daß D positiv ist, so lange $\eta_0 > H$ ist. Erwägt man übrigens, daß die Gerade $B'A''$ die mit $x_i : y_i$ multiplizierte A -Linie ist, so braucht man zur Entscheidung der Vorzeichenfrage nur den Einfluß von A und $H' = H \sec \alpha$ zu prüfen. So findet man in dem in Fig. 223 dargestellten Falle, daß A sowohl wie H eine Zugkraft D hervorbringen, und folgert dann, daß die Ordinaten der Geraden $B'A''$ zu denjenigen der H -Linie zu fügen sind, und daß die Einflußfläche rechts von F_2 positiv ist. Auf dieselbe Weise prüfe man die Figuren 224 und 225.

Bislang haben wir vorausgesetzt, daß der Punkt i auf dem Zeichenblatte liegt. Fällt er über dasselbe hinaus, so läßt sich der zur Festlegung der Geraden $B'A''$ dienende Wert $x_i : y_i$, sowie der Multiplikator $\mu = y_i : r_i$ wie folgt ermitteln. Man verlängere die Gurtstäbe O und U (Fig. 226) und ziehe an beliebiger Stelle eine Gerade ST parallel zu dem links an den fraglichen Füllungsstab D sich anschließenden Wandgliede $F_1 F'$. Hierauf lege man durch S und T Parallelen zu $A F_1$ und $A F'$, bestimme deren Schnittpunkt i_a und messe die in der Fig. 226 mit η_i , ξ_i , ρ_i bezeichneten Strecken. ρ_i bedeutet das Lot von S auf den Stab D . Man erhält dann:

$$\frac{x_i}{y_i} = \frac{\xi_i}{\eta_i} \quad \text{und} \quad \frac{y_i}{r_i} = \frac{\eta_i}{\rho_i}.$$

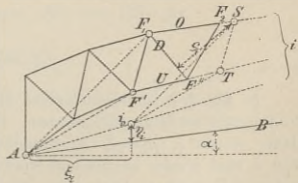


Fig. 226.

des Nullpunktes N auf dem im I. Bande, § 30, gezeigten Wege, zweitens durch Ermittlung der Strecke L_2T , welche die Geraden $B'A''$ und $A'B''$ auf der Senkrechten durch den der belasteten Gurtung angehörenden Endpunkt F_2 des Stabes D abschneidet. Wir wiesen früher das Gesetz nach: Zerlegt man $P=1$ nach den Richtungen von O und D und ist die zu D parallele Seitenkraft $= [D]$, so ist $\overline{L_2T} = [D]$, vorausgesetzt, daß die Einflußfläche den Multiplikator 1 hat*).

Da nun im vorliegenden Falle ein Multiplikator $\mu = \frac{y_i}{r_i}$ eingeführt ist, so muß $P=1$ ersetzt werden durch $\frac{1}{\mu} = 1 \frac{r_i}{y_i}$. An die Stelle von $[D]$ tritt jetzt der in Fig. 227 gefundene Wert Z . Die zweite Bestimmungsart der Geraden $A'L_1$ und L_2L_1 verdient natürlich den Vorzug.

Ferner ist zu beachten, daß die Strecke $A'A'' = 1 \cdot \frac{x_i}{y_i} = D_A \frac{r_i}{y_i}$ ist, wo D_A den absoluten Wert der von einem Stützenwiderstande $A=1$ im fraglichen Wandgliede erzeugten Spannkraft bedeutet, und ebenso läßt sich $\overline{B'B''} = D_B \frac{r_i}{y_i}$ aus der durch $B=1$ hervorgerufenen

Spannkraft D_B berechnen, während schließlich $1 \frac{y_i}{r_i} = D_H$ gleich dem absoluten Werte der Spannkraft infolge einer in A angreifenden, von A nach B gerichteten Belastung 1 $\sec \alpha$ ist. Hiernach kann man den Linienzug $A'L_1L_2B'$ mit Hilfe von zweien der drei Strecken: $A'A'' = D_A : D_H$, $B'B'' = D_B : D_H$ und Z bestimmen.**)

Die Benutzung der Spannkraften D_A , D_B , D_H liefert wohl die übersichtlichsten und schärfsten Zeichnungen, vorausgesetzt, daß man die geringe Mühe nicht scheut, diese Werte durch *Rechnung* zu bestimmen. Man gehe dann von den Gleichungen (36) und (38) aus.

Als Beispiel sei hier die Ermittlung der D_A , D_B , D_H für den auf S. 206 dargestellten Sichelträger mitgeteilt; denn gerade für diese Träger ist das fragliche Verfahren besonders am Platze. Durch die unteren Knotenpunkte $1'$, $3'$, $5'$, $7'$, ... wurden senkrechte Geraden gezogen, welche die obere Gurtung in 1 , 3 , 5 , 7 , ... schneiden.***) Aus den Angriffsmomenten M_1 , M_2 ,

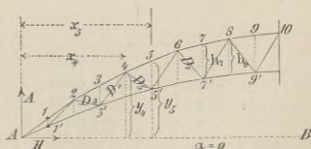


Fig. 228.

*) Vergl. Band I, § 30.

**) Vergl. auch Band I, § 30; dort wurden die D_A und D_B mit D' bzw. D'' bezeichnet.

***) Der bequemeren Schreibweise der Momente wegen ist die Bezeichnung der unteren Knotenpunkte anders gewählt wie in Fig. 206.

M_3, M_4, M_5, \dots findet man dann für jeden Belastungszustand für eine linkssteigende Diagonale:

$$D_m \cos \varphi_m = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{(m-1)}}{h_{m-1}} \quad \text{z. B. } D_5 \cos \varphi_5 = \frac{M_5}{h_5} - \frac{M_4}{h_4}$$

und für eine rechtssteigende Diagonale:

$$D_m \cos \varphi_m = \frac{M_{(m-1)}}{h_{m-1}} - \frac{M_m}{h_m} \quad \text{z. B. } D_4 \cos \varphi_4 = \frac{M_5}{h_5} - \frac{M_4}{h_4}$$

Den Zuständen $A=1, B=1, H=1$, entsprechen nun für den Knoten m der Reihe nach die Werte:

$$M_m = 1 \cdot x_m, \quad M_m = 1 \cdot x_m', \quad M_m = -1 \cdot y_m$$

so daß man z. B. für D_5 und D_4 die Gleichungen erhält:

$$\text{Einfluß von } A=1; D_5 \cos \varphi_5 = \frac{x_5}{h_5} - \frac{x_4}{h_4}; D_4 \cos \varphi_4 = \frac{x_5}{h_5} - \frac{x_4}{h_4};$$

$$,, \quad ,, \quad B=1; D_5 \cos \varphi_5 = \frac{x_5'}{h_5} - \frac{x_4'}{h_4}; D_4 \cos \varphi_4 = \frac{x_5'}{h_5} - \frac{x_4'}{h_4};$$

$$,, \quad ,, \quad H=1; D_5 \cos \varphi_5 = \frac{y_4}{h_4} - \frac{y_5}{h_5}; D_4 \cos \varphi_4 = \frac{y_4}{h_4} - \frac{y_5}{h_5}.$$

Die Ergebnisse der Rechnung sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt worden.

m	x_m	$x_m' = l - x_m$	h_m	y_m	$\frac{x_m}{h_m}$	$\frac{x_m'}{h_m}$	$\frac{y_m}{h_m}$
1	1,0	19,0	0,245	0,72	4,082	77,550	2,939
2	2,0	18,0	0,565	1,44	3,540	31,858	2,549
3	3,0	17,0	0,725	2,00	4,138	23,448	2,759
4	4,0	16,0	0,985	2,56	4,061	16,244	2,599
5	5,0	15,0	1,085	2,96	4,608	13,825	2,728
6	6,0	14,0	1,285	3,36	4,669	10,895	2,615
7	7,0	13,0	1,325	3,60	5,283	9,811	2,717
8	8,0	12,0	1,465	3,84	5,461	8,191	2,621
9	9,0	11,0	1,445	3,92	6,228	7,612	2,713
10	10,0	10,0	1,525	4,00	6,557	6,557	2,623

	Einfluß von		
	$A=1$	$B=1$	$H=1$
$D_2 \cos \varphi_2 =$	+ 0,542	+ 45,692	- 0,390
$D_3 \cos \varphi_3 =$	+ 0,598	- 8,410	- 0,210
$D_4 \cos \varphi_4 =$	+ 0,077	+ 7,204	- 0,160
$D_5 \cos \varphi_5 =$	+ 0,547	- 2,419	- 0,129
$D_6 \cos \varphi_6 =$	- 0,061	+ 2,930	- 0,113
$D_7 \cos \varphi_7 =$	+ 0,614	- 1,084	- 0,102
$D_8 \cos \varphi_8 =$	- 0,178	+ 1,620	- 0,096
$D_9 \cos \varphi_9 =$	+ 0,767	- 0,579	- 0,092
$D_{10} \cos \varphi_{10} =$	- 0,329	+ 1,055	- 0,090

Mit Hilfe dieser Werte lassen sich die Einflußlinien für die Spannkkräfte D oder — was zweckmäßiger ist — für die $D \cos \varphi$ sehr schnell auftragen. Fig. 229b zeigt

die $D_8 \cos \varphi_8$ -Fläche. Die Einflüsse von A und H haben gleiche Vorzeichen und es wurde daher $\overline{A'A''} = 1 \cdot \frac{0,178}{0,096} = 1,85$ auf der entgegengesetzten Seite der H -Fläche abgetragen, damit sich die Einflüsse von A und H summieren. Die Gerade $A'B''$ konnte nicht mittels der Strecke $B'B'' = \frac{1,620}{0,096} = 16,88$ festgelegt werden, da dies zu viel Platz erfordert hätte, sondern wurde bestimmt mit Hilfe von $\overline{FL_1} = \frac{8}{10} \cdot 16,88 = 5,06$. Der Multiplikator der gezeichneten Einflußfläche ist $\mu = 0,096$.

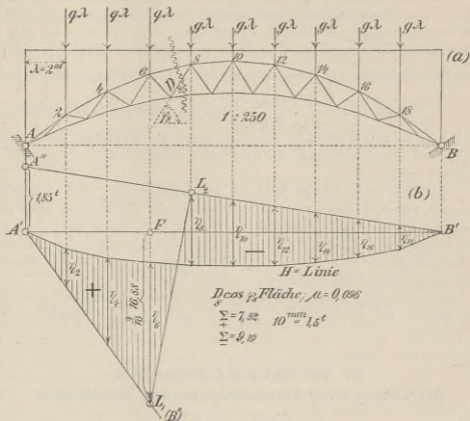


Fig. 229.

Wir wollen an der vorliegenden Figur noch die Berechnung der Spannkraften infolge einer gleichförmigen Belastung erläutern und nehmen zu diesem Zwecke eine ständige Belastung $g = 1,45^t$ f. d. m der Stützweite und eine bewegliche $p = 2,6^t$ an. Die Knotenlasten sind dann: $g\lambda = 1,45 \cdot 2,0 = 2,9^t$ und $p\lambda = 2,6 \cdot 2,0 = 5,2^t$. Um $\max D_8$ zu erhalten, werden die Knoten rechts von D_8 nur mit $g\lambda$ belastet, die Knoten links davon mit $g\lambda = (g + p)\lambda = 8,1^t$. Man mißt nun:

$$\Sigma = r_2 + r_4 + r_6 = 7,92; \quad \Sigma = r_8 + r_{10} + r_{12} + r_{14} + r_{16} + r_{18} = 9,10$$

und erhält:

$$\max D_8 \cos \varphi_8 = \mu (q\lambda \Sigma - g\lambda \Sigma) = 0,096 (8,1 \cdot 7,92 - 2,9 \cdot 9,10) = + 3,6^t.$$

*) Vergl. Seite 188. Genauer ist $\max D \cos \varphi = \mu (qF - gF)$; doch ist der oben angegebene Weg schneller zum Ziele führend und sein Ergebnis genügend scharf.

Vertauscht man g und q , so findet man:

$$\min D_s \cos \varphi_s = \mu \left(g \lambda \sum_+ - q \lambda \sum_- \right) = 0,096 (2,9 \cdot 7,92 - 8,1 \cdot 9,10) = -4,9^t.$$

Zu diesen Werten tritt noch infolge Erwärmung bezw. Abkühlung $D_s \cos \varphi_s = \mp \mu H_t^*)$.

In den vorstehenden Untersuchungen wurden sämtliche Einflußflächen aus derselben H -Linie mittels Ziehen weniger Geraden abgeleitet. Dieses einfache Verfahren führt bei den Gurtstäben stets zum Ziele, versagt aber zuweilen bei Berechnung der Spannkkräfte in den Wandgliedern; denn hier kann es bei sehr nahe an der Geraden AB liegenden Punkten i vorkommen, daß die Werte $x_i : y_i$ (bezw. $D_A : D_H$), welche bei endlichem x_i mit $y_i = 0$ unendlich werden, sehr groß ausfallen, und daß infolgedessen die fraglichen Einflußflächen zu viel Platz beanspruchen. Das Herausziehen eines Multiplikators muß dann unterbleiben; die Einflußfläche ist zunächst für $H = 0$ aufzutragen, und hierauf muß der Einfluß von H mit Berücksichtigung der Vorzeichen hinzugefügt werden. In dem zuletzt durchgeführten Beispiele (Fig. 229) würde man also $\overline{A'A''} = 0,178$ (statt $\frac{0,178}{0,096}$)

und $\overline{FL_1} = \frac{3}{10} \cdot 1,62$ (statt $\frac{3}{10} \cdot \frac{1,62}{0,096}$) machen, und schließlich würde man die H -Linie durch die $(0,096 H)$ -Linie ersetzen, wobei die Multiplikation der Ordinaten H mit $0,096$ am übersichtlichsten mit Hilfe eines Winkels, dessen Tangente $= 0,096$ ist, ausgeführt wird.

Der Verfasser pflegt dieser letzteren Darstellungsweise nach Möglichkeit aus dem Wege zu gehen, indem er gleich von vornherein die H -Linie nach zwei verschiedenen Maßstäben (unter Umständen auch noch nach einem dritten sehr kleinen Maßstabe) aufträgt und dann die größere H -Linie zur Untersuchung aller Gurtstäbe benutzt, die kleinere zur Berechnung der Füllungsglieder. Nur bei den Wandgliedern von Sichelträgern sind diese Maßregeln zuweilen fruchtlos.

Bezüglich der Einführung wagerechter Nullachsen, sowie der übersichtlichen Zusammenstellung der Einflußflächen und der Ergebnisse der Rechnung verweisen wir auf Nr. 73.

c. Vollständiges Zahlenbeispiel. Berechnung einer Eisenbahnbrücke mit Bogenträgern.

(Tafel 3 und 4.)

85. Eine eingleisige Eisenbahnbrücke soll zwei Hauptträger mit den in Fig. 230 auf Tafel 3 angegebenen Längenabmessungen erhalten. Die Knotenpunkte der unteren

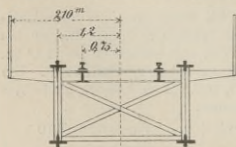


Fig. 231.

gegeben worden. — Gesucht sind die Spannkkräfte und Querschnittsabmessungen des Hauptträgers.

*) Wie man H_t in die Rechnung einführt, darüber gibt das in Nr. 85 behandelte vollständige Zahlenbeispiel Auskunft.

1. Die *H-Linie* des vorliegenden Trägers wurde bereits in Nr. 81 (Seite 212, Fig. 211) berechnet. Das Querschnittsverhältnis $F'_0 : F_w$ ist gleich 1 gewählt; demselben entsprechen die in Fig. 240 eingeschriebenen Werte H .

2. Die Spannkkräfte S_y infolge der ständigen Belastung wurden, nach Berechnung von $H_y = 12,5^t$ in Fig. 232, mittels eines Cremonaschen Kräfteplanes bestimmt und hierauf in die Fig. 233 eingetragen.

3. Die Spannkkräfte S_p infolge der beweglichen Belastung sind mit Hilfe von Einflußlinien nach dem in Nr. 84 gelehrteten Verfahren bestimmt worden. Dabei waren einige Vereinfachungen möglich, die sich aus der gewählten Trägerform ergeben.

Liegt in Fig. 221 der Punkt m der unteren Gurtung auf einer Parabel von der Gleichung $y_m = \frac{4fx_m x_m'}{l^2}$, so erhält man für den Abstand des Punktes m' von der Geraden $A'B'$ den Ausdruck: $\frac{\overline{A'A''}}{l} \cdot \frac{x_m'}{l} = 1 \frac{x_m}{y_m} \frac{x_m'}{l} = 1 \frac{l}{4f}$; und es ist daher der Ort von m' eine zu $A'B'$ parallele Gerade. Im vorliegenden Falle ist $l = 20^m$ und $f = 2,5^m$, mithin $\frac{l}{4f} = 2,0^t$, und durch diesen Wert sind sämtliche O -Flächen bestimmt; vergl. Fig. 240, in der die O_3 -Fläche durch Schraffierung hervorgehoben ist, und welche die Ordinaten der auf wagerechte Nulllinien bezogenen O -Flächen liefert.

Fig. 241 enthält die Darstellung der Einflußflächen für U_2, U_3, U_4, U_5 . Behufs Ermittlung der (schraffierten) U_5 -Fläche wurde $A4''$ gleich dem für den oberen Knotenpunkt 4 berechneten Werte $x_4 : y_{04} = x_4 : h_0 = \frac{3}{5}^t$ gemacht, sodann auf der Geraden $4''B$ der Punkt $4'$ lotrecht unter 4 bestimmt und die Gerade $A4'$ gezogen. Da nun y_0 den festen Wert h_0 besitzt und die Trägerfelder gleich lang sind, so zerlegen die den Knotenpunkten 1, 2, 3 entsprechenden Punkte $1'', 2'', 3''$ die Strecke $A4''$ in gleiche Teile^{*)}, und damit sind die Einflußflächen für U_2, U_3, U_4 bestimmt. Für den ersten Stab der unteren Gurtung erhält man $U_1 = H \sec \gamma_1 = 1,097 H$ und, da die in Fig. 240 oberhalb der H -Linie eingezeichnete Laststellung den Horizontalschub $H_p = \Sigma P \eta = 43,2^t$ erzeugt, $U_{1p} = 1,097 \cdot 43,2 = 47,4^t$.

Die Ermittlung der Spannkkräfte in den Füllungsstäben wird durch den Umstand vereinfacht, daß sich die Gurtstäbe O_{m-1} und U_m in demselben Punkte i schneiden wie O_m und U_m . Hat man also in Fig. 234 die D_4 -Fläche mit Hilfe von $A A_4 = x_4 : h_0$ als den Unterschied der von Geraden begrenzten Fläche $A L_1 L_2 B A$ und der H -Fläche erhalten, so findet man die V_5 -Fläche (indem man $L_1 L_2$ durch $L'L''$ ersetzt) als den Unterschied der Fläche $A L' L'' B A$ und der H -Fläche. Links von F'_0 und rechts von F'_2 stimmen also die Einflußflächen für D_4 und V_5 überein; die Vorzeichen sind jedoch entgegengesetzte, auch sind die Multiplikatoren verschieden, nämlich $\mu = h_0 : r_4$ für die D_4 -Fläche und $\mu = h_0 : (x_4 - x_3)$ für die V_5 -Fläche. Es liefert also die Fig. 244, welche die auf die H -Linie als gebrochene Nullachse bezogenen D -Flächen enthält, auch sämtliche V -Flächen^{***)}.

*) Vergl. Seite 213; dort wurde für $g \lambda = 2,90^t$ der Wert $H_y = 25,0^t$ gefunden.

**) Hieraus folgt, daß die Punkte $1', 2', 3', 4'$ auf einer Parabel liegen, deren Pfeil $= 1 \frac{l}{4h_0}$ ist.

***) Wir heben noch hervor, daß sich die V_0 -Fläche, wegen $V_0 = A - H \operatorname{tg} \gamma_1 = \operatorname{tg} \gamma_1 (A \cot \gamma_1 - H)$, auch als den Unterschied der $A \cot \gamma_1$ -Fläche und der H -Fläche deuten läßt. Der Multiplikator ist $= 1 \operatorname{tg} \gamma_1 = 3,0 : 6,67 = 0,45$. Die $A \cot \gamma_1$ -Fläche ist ein Dreieck $A A_1 B$, welches bestimmt ist durch $\overline{A A_1} = 1 \cot \gamma_1 = 6,67 : 3,0 = 2,22$.

Nach Aufzeichnung der Einflußflächen wurden auf den Tafeln 3 und 4 die gefährlichsten Zugstellungen durch Probieren bestimmt und die denselben entsprechenden Werte $\Sigma P\eta$ und $\Sigma P\eta$ ermittelt; letztere sind nebst den Multiplikatoren $\begin{matrix} + \\ - \end{matrix}$ auf den Tafeln angegeben. Die Multiplikation der Ordinaten η mit den P ist mit Hilfe von Maßstäben ausgeführt worden. So wurde z. B. auf Tafel 3 die H -Linie im Maßstabe $1^t = 25^{\text{mm}}$ aufgetragen, und hierauf wurden die den Raddrücken $6,5^t$ und $4,5^t$ entsprechenden Ordinaten der Einflußlinien mit den Maßstäben $6,5^t = 25^{\text{mm}}$ bzw. $4,5^t = 25^{\text{mm}}$ gemessen. Für die Füllungsstäbe wurden auf Tafel 4 kleinere Maßstäbe gewählt.

Die Berechnung der von der beweglichen Belastung herrührenden Spannkkräfte S_p erfolgte nach den Formeln:

$$\max S_p = \mu \Sigma P\eta; \quad \min S_p = -\mu \Sigma P\eta.$$

Die Ergebnisse wurden in Fig. 236 zusammengestellt.

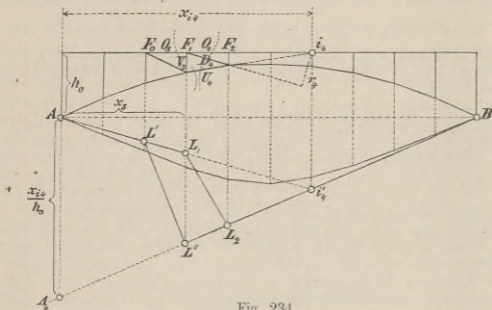


Fig. 234.

4. *Einfluß der Temperaturänderung.* Außer den Spannkkräften S_g und S_p entstehen infolge einer (hier gleichmäßig vorausgesetzten) Änderung der Aufstellungstemperatur um t° noch Spannkkräfte S_t , deren absolute Werte

$$S_t = \mu H_t$$

sind. Hinsichtlich der Vorzeichen ist zu beachten, daß ein positives H_t in der oberen Gurtung und in den Vertikalen Zugspannungen, in den übrigen Stäben Druckspannungen erzeugt. Wird $t = \pm 35^\circ \text{C.}$ angenommen, so ist (nach Seite 208) abgerundet $H_t = \pm 460 F_0$, wo für F_0 zur Sicherheit der größte Obergurtquerschnitt (der immer einem der mittelsten Felder angehören wird) gesetzt werden soll; derselbe wird wie folgt berechnet.

Die obere Gurtung wird vorwiegend auf Druck beansprucht. Ist also σ die zulässige Spannung, so muß sein:

$$\begin{aligned} -\sigma F_0 = \min O &= -\mu \Sigma P\eta + O_g + O_t = -\mu \Sigma P\eta + O_g - \mu H_t \\ &= -\mu \Sigma P\eta + O_g - \mu 460 F_0 \end{aligned}$$

und hieraus folgt:

$$F_0 = \frac{\mu \Sigma P\eta - O_g}{\sigma - 460 \mu}$$

Für das 5. Feld ist $\mu = 5,0$, $\Sigma P\eta = 8,9$, $O_y = -10,0$ mithin, wenn $\sigma = 700^{kg}$ f. d. $qem = 7000^t$ f. d. qm gestattet wird,

$$F_o = \frac{5,0 \cdot 8,9 + 10,0}{7000 - 460 \cdot 5,0} = 0,0116 \text{ } qm.$$

Für das 4. Feld ergibt sich:

$$F_o = \frac{4,0 \cdot 10,5 + 8,0}{7000 - 460 \cdot 4,0} = 0,0097 < 0,0116,$$


und man findet daher

$$H_t = \pm 460 F_{o,max} = \pm 460 \cdot 0,0116 = \pm 5,3^t \text{ und } S_t = \pm 5,3 \mu.$$


Die hiernach berechneten Spannkkräfte S_t sind in die Fig. 235 eingetragen worden; die *oberen* Vorzeichen gelten für den Fall einer *Zunahme* der Temperatur.

5. Die *Gesamtspannkkräfte*, welche durch Zusammenzählung der Einflüsse der ständigen und beweglichen Belastung, sowie der Temperaturänderung erhalten werden, sind in die Fig. 237 eingeschrieben worden.


6. Über die *gewählten Stabquerschnitte* und die größten Beanspruchungen gibt die folgende Tabelle Aufschluß. Zu derselben ist zu bemerken, daß die untere Gurtung in der Nähe des Scheitels denselben Querschnitt erhalten hat wie die obere Gurtung, damit die in die Rechnung eingeführte Annahme $F_o : F_u = 1$ erfüllt werde. Bei den vorzugsweise auf Druck beanspruchten Gurtstäben und Vertikalen wurden die Nietlöcher nicht in Abzug gebracht, wohl aber bei den von größeren Zugkräften ergriffenen Diagonalen.

Obere Gurtung. ( = Querschnitt.)

Feld	Winkel-eisen-sorte	Inhalt des vollen Querschnittes F	Größte Spannkraft S	$\sigma = \frac{S}{F}$
5 u. 4	10 · 15 · 1,2 <i>cm</i>	114 <i>qem</i>	81000 ^{kg}	710 ^{kg} f. d. <i>qem</i>
3	10 · 10 · 1,0 „	76 „	50000	660 „ „ „
2 u. 1	7 · 7 · 0,9 „	47 „	30000	640 „ „ „

Untere Gurtung. ( = Querschnitt.)

Feld	Winkel-eisen-sorte	Inhalt des vollen Querschnittes F	Größte Spannkraft S	$\sigma = \frac{S}{F}$
5 u. 4	10 · 15 · 1,2 <i>cm</i>	114 <i>qem</i>	66000 ^{kg}	580 ^{kg} f. d. <i>qem</i>
3, 2 u. 1	10 · 10 · 1,3 „	97 „	67000	690 „ „ „

Diagonalen. ( = Querschnitt.)

Feld	Winkel-eisen-sorte	Inhalt des vollen Querschnittes F	Größte Spannkraft S	$\sigma = \frac{S}{F - 2d\delta}^*)$
5 u. 4	14 · 14 · 1,4 <i>cm</i>	74 <i>qem</i>	39000 ^{kg}	580 ^{kg} f. d. <i>qem</i>
3	11 · 11 · 1,3 „	54 „	29000	600 „ „ „
2	9 · 9 · 1,3 „	43 „	27000	720 „ „ „
1	9 · 9 · 1,1 „	37 „	21000	650 „ „ „

*) d = Nietdurchmesser = 2,2 *cm*; δ = Eisenstärke = 1,4, 1,3 und 1,1 *cm*.

Vertikalen. (\square = Querschnitt.)

Winkelleisensorte durchweg $7,5 \cdot 7,5 \cdot 1,2$; $F = 33 \text{ qcm}$; $S = 21000^{kg}$

$$\sigma = \frac{21000}{33} = 640^{kg} \text{ f. d. qcm.}$$

Die Knickfestigkeit der gedrückten Stäbe wird am besten mittels der Eulerschen Formel beurteilt. Hiernach soll das kleinste Trägheitsmoment J^2 des Querschnitts bei 5facher Sicherheit mindestens sein:

$$J = \frac{5 S s^2}{\pi^2 E} = \frac{5 S s^2}{10 \cdot 2000000},$$

wo s die Stablänge in cm bedeutet. Für die erste Diagonale ist z. B. erforderlich:

$$J = \frac{5 \cdot 10000 \cdot 290^2}{10 \cdot 2000000} = 210,$$

hingegen vorhanden: $J = 2 \cdot 139,7 = 279,4$. Auf dieselbe Weise überzeugt man sich, daß auch die übrigen Stäbe genügende Sicherheit gegen Knicken bieten.

7. Einfluß des Querschnittsverhältnisses $F_o : F_u$. Es sollen noch einige Rechnungsergebnisse mitgeteilt werden, welche den Einfluß des Querschnittsverhältnisses $F_o : F_u$ auf die Spannkkräfte klarlegen. Nimmt man, anstatt $F_o : F_u = 1$, einmal $F_o : F_u = 0,7$, sodann $F_o : F_u = 1,2$ an, so erhält man die folgenden Ordinaten der H -Linie und Werte H_g und H_t :*)

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0,39 \\ 0,37 \end{pmatrix}^{**);} \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0,77 \\ 0,73 \end{pmatrix}; \quad H_3 = \begin{pmatrix} 1,13 \\ 1,06 \end{pmatrix}; \quad H_4 = \begin{pmatrix} 1,42 \\ 1,32 \end{pmatrix}; \quad H_5 = \begin{pmatrix} 1,55 \\ 1,42 \end{pmatrix};$$

$$H_g = \begin{pmatrix} 8,97 \\ 3,38 \end{pmatrix} g\lambda = \begin{pmatrix} 13,0' \\ 12,2 \end{pmatrix}; \quad H_t = \begin{pmatrix} 540 \\ 410 \end{pmatrix} F_o,$$

und hieraus ergeben sich für den am stärksten beanspruchten Obergurtstab O_5 die Werte:

$$\Sigma P\eta = \begin{pmatrix} 7,0 \\ 10,1 \end{pmatrix}; \quad S_g = \begin{pmatrix} 7,5 \\ 12,5 \end{pmatrix}.$$

Der erforderliche Querschnitt F_o ist daher (vergl. Seite 227)

$$\text{für } \frac{F_o}{F_u} = 0,7 \quad F_o = \frac{5,0 \cdot 7,0 + 7,5}{7000 - 5 \cdot 540} = 0,0099 \text{ qm}$$

$$\text{für } \frac{F_o}{F_u} = 1,2 \quad F_o = \frac{5,0 \cdot 10,1 + 12,5}{7000 - 5 \cdot 410} = 0,0127 \text{ qm,}$$

während sich für $F_o : F_u = 1,0$ der Wert $F_o = 0,0116 \text{ qm}$ ergab.

Der Horizontalschub infolge einer Temperaturänderung wird

$$H_t = \pm \begin{pmatrix} 540 \cdot 0,0099 \\ 420 \cdot 0,0127 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 5,3' \\ 5,3 \end{pmatrix},$$

er stimmt also mit dem für $F_o : F_u = 1$ berechneten $H_t = \pm 5,3'$ überein, so daß die in Fig. 235 zusammengestellten Spannkkräfte S_t gültig bleiben.

Für den Untergurtstab U_4 (der stärker beansprucht wird als U_5) findet man

$$\Sigma P\eta = \begin{pmatrix} 14,3 \\ 11,7 \end{pmatrix}; \quad S_g = - \begin{pmatrix} 9,6 \\ 6,9 \end{pmatrix}; \quad S_t = - 17,9; \quad \mu = 3,37$$

$$\min U_4 = - \mu \Sigma P\eta + S_g + S_t = - \begin{pmatrix} 76' \\ 64' \end{pmatrix}.$$

Diesen Spannkkräften würden bei einer zulässigen Inanspruchnahme von $\sigma = 700^{kg}$ f. d. qcm die Querschnitte

*) Vergl. Nr. 81, S. 213.

**) In den folgenden Wertangaben bezieht sich die obere Zahl auf $F_o : F_u = 0,7$, die untere auf $F_o : F_u = 1,2$.

$$F_u = \frac{76}{0,700} = 109 \text{ qcm} \text{ bzw. } F_u = \frac{64}{0,700} = 91 \text{ qcm}$$

genügen. Es ist jedoch erforderlich, das in die Rechnung eingeführte Querschnittsverhältnis $F_o : F_u$ auch der Ausführung zugrunde zu legen, oder sich doch demselben möglichst zu nähern, da dieses Verhältnis von bedeutendem Einfluß auf die Beanspruchung namentlich der oberen Gurtung ist; und es empfiehlt sich daher, die soeben berechneten Querschnitte F_u zu ersetzen durch

$$F_u = \frac{F_o}{0,7} = \frac{99}{0,7} = 142 \text{ qcm} \text{ bzw. durch } F_u = \frac{F_o}{1,2} = \frac{127}{1,2} = 106 \text{ qcm.}$$

Für die Ausführung wäre nun streng genommen derjenige Wert $F_o : F_u$ zu ermitteln, der den billigsten Träger liefert, welche Forderung man im vorliegenden Falle auch durch die des kleinsten Trägergewichtes ersetzen darf. Die genaue Beantwortung dieser Frage würde aber sehr mühsame und zeitraubende Rechnungen verlangen und kann daher nur angenähert gegeben werden. Dazu beachte man, daß von den äußeren Kräften nur der Horizontalschub H von $F_o : F_u$ abhängt und der Einfluß einer Änderung von H desto größer wird, je größer μ ist. Da die Werte μ der Gurtstäbe nach den Kämpfern hin abnehmen, so werden auch die Unterschiede der Stabkräfte für verschiedene $F_o : F_u$ in den äußeren Feldern kleiner sein als in den mittleren. Dies zeigt in der Tat die folgende Tabelle, welche die absoluten Werte der größten Spannkkräfte angibt.

$F_o : F_u$	O_5	O_4	O_3	O_2	O_1	U_5	U_4	U_3	U_2	U_1
0,7	69	63	46	29	13	69	76	73	70	72
1,0	81	71	50	30	13	61	66	65	64	67
1,2	89	73	50	32	14	57	64	64	63	65
	Tonnen									

Da nun weiter eine Änderung von H auf die Spannkkräfte in den Füllungsstäben einen bedeutend geringeren Einfluß hat als auf die Gurtkräfte, so ist ersichtlich, daß es hauptsächlich darauf ankommen wird, das Gewicht der Gurtungen der Mittelfelder miteinander zu vergleichen. Dieses Gewicht ist proportional $F_o + F_u$, weshalb wir noch folgende Zusammenstellung geben,

$F_o : F_u$	F_o	F_u	$F_o + F_u$
0,7	99	142	241
0,8	105	131	136
0,9	111	123	234
1,0	116	116	232
1,2	127	106	233
	qcm		

aus welcher hervorgeht, daß sich wesentliche Unterschiede in den Gewichten der für die letzten vier Querschnittsverhältnisse berechneten Träger nicht herausstellen werden.*) Das Ergebnis, daß in der Nähe von $F_o : F_u = 1$ eine Änderung dieses Wertes nur eine geringe Änderung von $F_o + F_u$ nach sich zieht, fand der Verfasser

*) Man erwäge auch, daß sich bei Ausarbeitung des Entwurfs stets Abweichungen zwischen den berechneten und schließlich gewählten Querschnitten ergeben werden. Z. B. haben wir vorhin $F = 116$ durch $F = 114$ ersetzt.

auch in anderen Beispielen bestätigt, und dies ist der Grund, der ihn veranlaßte, dem Werte $F_o : F_u = 1$ den Vorzug zu geben, um so mehr, als die gleichartige Ausbildung der beiden Gurtungen in der Nähe des Scheitels (Verwendung derselben Eisensorten) nur Vorteile bietet.

8. *Berücksichtigung der Längenänderungen der Füllungsstäbe bei Ermittlung der H-Linie.* Bei Berechnung der H-Linie wurden bislang die Formänderungen der Wandglieder vernachlässigt und auch hinsichtlich der Querschnittsänderung der Gurtungen Annahmen gemacht, welche der Wirklichkeit nicht ganz entsprechen. Es erscheint daher nicht unwichtig, die Zulässigkeit jener Voraussetzungen zu prüfen. Wir wollen die genauere Berechnung der H-Linie nach drei verschiedenen Verfahren durchführen.

Erstes Verfahren. Es werden die Spannkkräfte S' für den Zustand $H = -1$ (Figur 246, Tafel 4) und die denselben entsprechenden Längenänderungen $\Delta s = \frac{S' s}{EF}$ *)

(Fig. 247) berechnet, am besten für $E = 1$, und nun wird für diesen Zustand ein Williot'scher Verschiebungsplan gezeichnet. Der Knotenpunkt V und die Richtung des Stabes $V5$ (vergl. Fig. 245) werden zunächst festliegend gedacht; es fällt dann V' und (da der Stab $V5$ spannungslos ist) auch $5'$ mit dem Pole O zusammen. Nach Bestimmung der Punkte $4', IV', 3', III', \dots, 0', A'$, welche auf die in Nr. 32 beschriebene Weise erfolgt, ist man imstande, die Biegelinie für den Zustand $H = -1$ zu zeichnen und die Änderung δ_A der Stützweite anzugeben. Diese letztere ist doppelt so groß, wie die wagerechte Verschiebung von A gegen den Knotenpunkt V , nämlich

$$\delta_A = 2 \cdot 2200 = 4400 \text{ dm.}$$

Aus den in die Fig. 245 eingeschriebenen Ordinaten $\delta_0, \delta_1, \dots$ der Biegelinie erhält man nun die Ordinaten

$$H_m = 1 \frac{\delta_m}{\delta_A}$$

der H-Linie, nämlich

$$H_0 = \frac{41}{4400} = 0,01; H_1 = \frac{1750}{4400} = 0,40; H_2 = \frac{3350}{4400} = 0,76; H_3 = \frac{4790}{4400} = 1,09;$$

$$H_4 = \frac{5930}{4400} = 1,35; H_5 = \frac{6400}{4400} = 1,46;$$

dieselben weichen von den früher berechneten Werten:

$$0; 0,38; 0,74; 1,09; 1,36; 1,47$$

nur unwesentlich ab. Man findet nun weiter $H_g = 12,6'$ (statt $12,5'$) und für den Stab O_5 : $\Sigma P \eta = 8,3'$ (statt $8,9'$), erhält also nahezu dieselben Spannkkräfte S_g und S_p wie früher.

Nur für H_t findet man einen wesentlich anderen Wert, nämlich (nach Seite 144)

$$H_t = \pm 1 \frac{E \delta_t^{**})}{\delta_A} = \pm \frac{E \varepsilon t l}{\delta_A} = \frac{200000 \cdot 0,000012 \cdot 35^\circ \cdot 200}{4400} = \pm 3,8' \text{ (statt } 5,3').$$

Im Obergurtstabe O_5 verursacht also eine Temperaturänderung um $t = 35^\circ$ Cels. eine Spannkraft: $S_t = \mp 5 \cdot 3,8 = \mp 19'$ (statt $\mp 26,5'$). Worin diese Abweichung ihren Grund hat, ist bereits auf Seite 204 gelegentlich der Untersuchung der Dour-

*) In diese Formel sind die vollen Querschnitte einzusetzen; dieselben sind in Figur 238 auf Tafel 3 zusammengestellt worden, die Stablängen in Fig. 239.

**) Die Multiplikation des Zählers mit E ist erforderlich, weil δ_A für $E = 1$ berechnet wurde. Zu beachten ist ferner, daß l in dm und E in Tonnen f. d. qdm auszudrücken sind.

Brücke hervorgehoben worden; es ist ein Vorzug der Näherungstheorie, für H_i stets zu große Werte zu liefern, da gerade die Schätzung von l auf sehr unsicherer Grundlage beruht, und es sich deshalb dringend empfiehlt, nicht zu günstig zu rechnen. Zu beachten ist auch, daß ein Ausweichen der Widerlager um Δl eine Änderung von H um $\Delta H = -1 \frac{E\Delta l}{8A}$ verursacht, so daß beispielsweise dem kleinen Werte $\Delta l = 5 \text{ mm} = 0,05 \text{ dm}$ bereits

$$\Delta H = -\frac{200000 \cdot 0,05}{4400} = -2,3'$$

entspricht.

Als zweites Verfahren wählen wir das im §. 2 beschriebene Stabzugverfahren und berechnen zu diesem Zwecke zunächst die Änderungen $\Delta \vartheta$ der oberen Rand-

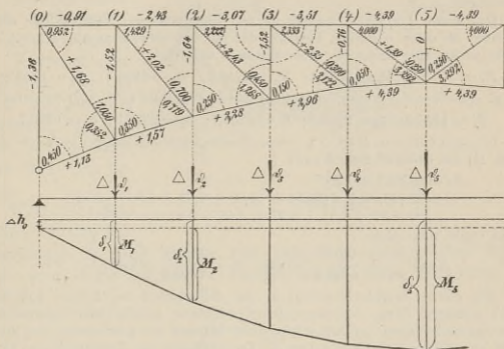


Fig. 243.

winkel ϑ . In Fig. 243 geben die auf den einzelnen Stäben stehenden Zahlen die Spannungen $\sigma' = \frac{S'}{F}$ für den Zustand $H = -1$ in Tonnen für das qdm an und die in die Winkel eingeschriebenen Zahlen die Cotangenten dieser Winkel.^{*)} Die Änderung von ϑ_3 wird beispielsweise (für $E = 1$)

$$\Delta \vartheta_3 = 2,222 (2,43 + 3,07) + 0,450 (2,43 + 1,52) + 0,150 (2,96 + 1,52) + 2,122 (2,96 - 2,35) + 0,300 (-0,76 - 2,35) = +15,03,$$

und auf diese Weise erhält man:

$$\Delta \vartheta_0 = -2,42; \quad \Delta \vartheta_1 = +5,33; \quad \Delta \vartheta_2 = +7,93; \quad \Delta \vartheta_3 = +15,03; \quad \Delta \vartheta_4 = +33,54; \quad \Delta \vartheta_5 = +46,94.$$

Wird nun zunächst der Stab $V5$ festgehalten, so sind die Drehungswinkel ψ der Obergurtstäbe (5) (4) ... (1) sowie der Endvertikale (h_0):

^{*)} Fig. 243 wurde verzerrt gezeichnet, damit die Zahlen in der Nähe des Scheitels Platz fanden.

$$\psi_5 = \frac{1}{2} \Delta S_5 = 23,47; \quad \psi_4 = \psi_5 + \Delta S_4 = 57,01; \quad \psi_3 = \psi_4 + \Delta S_3 = 72,04 \text{ u. s. w.}$$

$$\psi_2 = 79,97; \quad \psi_1 = 85,30; \quad \psi_0 = 82,88$$

und die den Stäben entsprechenden Werte ρ (d. i. Drehungswinkel mal Stablänge*)

$$\rho_5 = 20 \cdot 23,47 = 469,4^{dm}; \quad \rho_4 = 20 \cdot 57,01 = 1140,2^{dm}; \quad \rho_3 = 20 \cdot 72,04 = 1440,8^{dm};$$

$$\rho_2 = 20 \cdot 79,97 = 1599,4^{dm}; \quad \rho_1 = 20 \cdot 85,30 = 1706^{dm}; \quad \rho_0 = 30 \cdot 82,88 = 2486,4^{dm}.$$

Berechnet man nun noch die (in Fig. 247 zusammengestellten) Längenänderungen $\Delta(5) = -87,7$, $\Delta(4) = -70,2$, . . . $\Delta(1) = -18,3$, $\Delta h_0 = -40,9$ der Stäbe (5), (4), . . . (1), h_0 und reiht (nach Fig. 245) die Strecken

$$\Delta(5), \rho_5, \Delta(4), \rho_4, \Delta(3), \rho_3, \dots \Delta h_0, \rho_0$$

aneinander, so erhält man dieselben Punkte $4', 3', \dots A'$, deren Lagen vorhin mittels des Williot'schen Verfahrens festgelegt worden sind. Das Stabzugverfahren erfordert etwas mehr Zeit, liefert aber übersichtlichere und vor allem genauere Zeichnungen.

Das dritte Verfahren besteht in der Herleitung der Biegungslinie aus den Momenten M eines einfachen Balkens, der mit den Gewichten $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots \Delta S_5$, belastet wird. Man findet für diese Momente die Werte

$$M_1 = 1706,0; \quad M_2 = 3305,4; \quad M_3 = 4746,2; \quad M_4 = 5886,4; \quad M_5 = 6355,8,$$

fügt zu denselben die Verkürzung (40,9) der Endvertikale (Fig. 247) und erhält

$$\delta_1 = 1746,9; \quad \delta_2 = 3346,3; \quad \delta_3 = 4787,1; \quad \delta_4 = 5927,3; \quad \delta_5 = 6396,7.$$

Die dem Zustande $H = -1$ entsprechende Änderung der Stützweite wird nach Gleich. (4) auf Seite 98 (mit $E = 1$)

$$\delta_A = h_0 \Sigma \Delta S + \lambda \Sigma \sigma'$$

$$= 30 [46,94 + 2(33,54 + 15,03 + 7,93 + 5,33 - 2,42)]$$

$$- 20 (4,39 + 3,51 + 3,07 + 2,43 + 0,91) 2 = 4400,4$$

und es ergibt sich daher:

$$H_0 = \frac{\delta_0}{\delta_A} = \frac{40,9}{4400,4} = 0,01; \quad H_1 = \frac{1746,8}{4400,4} = 0,40; \text{ u. s. w.}$$

Ein viertes Verfahren würde in der Berechnung der δ -Linie auf dem in Nr. 47 gezeigten Wege bestehen. Die Gewichte w werden hier unmittelbar aus den Längenänderungen der Stäbe berechnet, während die Bestimmung von δ_A nach Nr. 48 zu erfolgen hat. Wir halten die Durchführung der Zahlenrechnung für entbehrlich, da dieses Verfahren bereits auf Seite 126 bis 128 durch ein Beispiel erläutert worden ist.

d. Einführung der Kämpferdrucklinie und der zweiten H -Linie.

86. Die Kämpferdrucklinie ist der geometrische Ort des Punktes F , Fig. 248, in welchem die von einer Einzellast hervorgerufenen Kämpferdrücke K_1 und K_2 diese Last treffen; zur Bestimmung derselben zeichne man die Einflußlinien für die Stützenwiderstände A und H und setze A mit $H' = H \sec \alpha$ zur Mittelkraft K_1 zusammen. Der in senkrechter Richtung gemessene Abstand η des Punktes F von der Geraden AB ist durch die Gleich. $\eta : a = A : H$ gegeben. Mit $A = \frac{Pb}{l}$

*) Vergl. Seite 87. Nicht zu verwechseln mit der im § 5 eingeführten Bezeichnung $\rho = \frac{s}{EF}$.

ein Moment $M_m = 0$, woraus dann folgt, daß lotrecht unter E der Nullpunkt E_0 der gesuchten Einflußfläche liegen muß, und damit ist der Linienzug $A'm'B'$ und infolgedessen auch die schraffierte M_m -Fläche bestimmt. Es verdient indes hervorgehoben zu werden, daß die Ermittlung der Einflußflächen auf dem in Nr. 84 gewiesenen Wege im allgemeinen den Vorzug verdient, weil die Aufzeichnung der Kämpferdrucklinie des Zweigelenkbogens in der Regel wesentlich umständlicher ist als die des Bogens mit drei Gelenken. Auch liefert das frühere Verfahren schärfere Zeichnungen.

88. Die zweite H -Linie. Die Verkehrslast eines Bogenträgers sei von B aus um die Strecke ξ vorgerückt und erzeuge in dieser Lage (Fig. 249) am linken Auflager die Widerstände A und H . Letztere seien an der Stelle ξ als Ordinaten aufgetragen; ihre Endpunkte beschreiben, während die Last von B bis A vorgeschoben wird, zwei

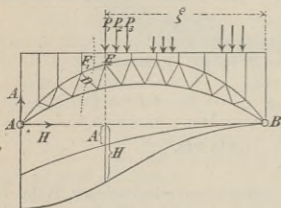


Fig. 249.

Linien, welche zur Unterscheidung von den Einflußlinien für A und H die *zweite A-Linie* bzw. die *zweite H-Linie* genannt werden sollen, und zuweilen mit Vorteil zur Berechnung der größten Spannkraften in den Füllungsstäben verwendet werden können. Die zweite A -Linie wurde bereits (unter der Bezeichnung: A -Polygon) im I. Bande bei der Berechnung der Balkenbrücken benutzt; ihre zeichnerische und rechnerische Ermittlung findet sich dort auf Seite 137 bis 139, 145 bis 152 und 187 (Gleich. 6). Die zweite H -Linie aber bestimmt man, indem man H für verschiedene Zugstellungen mit Hilfe der Einflußlinie für H berechnet.

Die Anwendung dieser beiden Linien ist zu empfehlen, sobald sich für die Mehrzahl der Füllungsstäbe nur *eine* Belastungsscheide ergibt und diese in dem Felde $F_1 F_2$ (Fig. 222 bis 225) liegt, welches der durch den fraglichen Stab und außerdem noch durch zwei Gurtstäbe geführte Schnitt trifft, ein Fall, der namentlich bei parabelförmigen Sichelträgern vorkommt. Hier sind die Belastungsgesetze meistens dieselben wie für den einfachen Balken, weil der Einfluß von H verhältnismäßig gering ist, und es stellt sich in der Regel heraus, daß in einer linkssteigenden Diagonale D (Fig. 249) der größte Zug bzw. der größte Druck auftritt, je nachdem die Belastung von B aus bis F_2 oder von A aus bis F_1 reicht.)*

*) Ob dieser Fall vorliegt oder nicht, kann auch mit Hilfe der Kämpferdrucklinie entschieden werden, vergl. Nr. 89.

Wegen der verhältnismäßig kleinen Feldweiten der Bogenbrücken erweisen sich in der Regel die im I. Bande als *Grundstellungen* bezeichneten Lagen der Verkehrslast als die ungünstigsten; d. h. es ist die *erste* Achse des von *B* aus vorrückenden Zuges über F_2 zu setzen und die erste Achse des von *A* aus auffahrenden über F_1 . Will man bei größeren Feldweiten sicher gehen, so nehme man die erste Achse etwas stärker belastet an. Man vergl. das im I. Bande in Nr. 148 über die Berechnung von Balkenbrücken Gesagte.

Sind nun D_A und D_H die Spannkkräfte, welche in dem fraglichen Füllungsstabe D infolge $A = 1$ bzw. $H = 1$ hervorgerufen werden, so ist der Einfluß der von *B* bis F_2 vorgeschobenen Verkehrslast:

$$\max D = AD_A + HD_H,$$

und ebenso erhält man den Einfluß der von *A* bis F_1 reichenden Belastung:

$$\min D = BD_B + HD_H,$$

wo B und H die am rechten Auflager hervorgerufenen Widerstände sind und D_B die Spannkraft infolge $B = 1$ bedeutet.

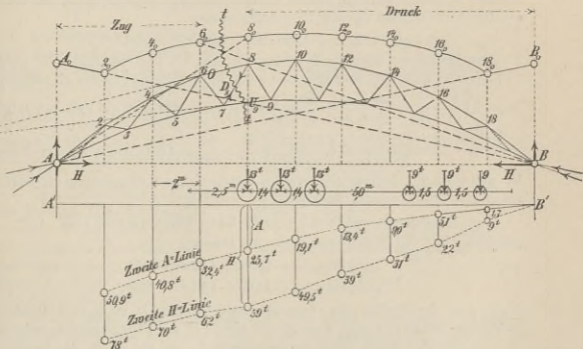


Fig. 250.

89. Zahlenbeispiel. Es liege der in Fig. 250 dargestellte Träger vor, dessen *H-Linie* auf Seite 206 ermittelt wurde. $A_0 2_0 4_0 \dots B_0$ ist die Kämpferdrucklinie; sie wurde nach Nr. 86 bestimmt; ihre äußersten Teile sind gerade Linien $A_0 2_0$ und $B_0 18_0$, welche bzw. durch *B* und *A* gehen, wie sich leicht aus Gleichung (42) folgern läßt.

Die ständige Belastung sei $g = 1,45^t$ f. d. *m*, also für ein Feld: $g\lambda = 1,45 \cdot 2,0 = 2,9^t$; die bewegliche Belastung bestehe aus einem Eisenbahnzuge mit den in Fig. 250 angegebenen Achsenlasten und Radständen. Die in die Figur eingeschrie-

benen, den Knoten der oberen Gurtung entsprechenden Ordinaten der zweiten A -Linie wurden mit Hilfe der Tabelle I auf Seite 310 des I. Bandes berechnet, und die Ordinaten der zweiten H -Linie auf die in Nr. 79 an einem Beispiele gezeigte Weise aus der Einflußlinie für H . Gesucht seien die Grenzwerte der Spannkraft D_8 . Die Einflüsse D_A, D_B, D_H von $A=1, B=1, H=1$ sind bereits auf Seite 226 berechnet worden.

Zunächst ist anzugeben, bei welchen Laststellungen diese Grenzwerte entstehen. Bewegt sich über den Träger eine Einzellast von B bis 8 , so beschreibt der zugehörige linke Kämpferdruck den Winkel B_0A8_0 ; er dreht stets links um den Schnittpunkt i von O und U , und es kann ihm daher nur durch einen rechts um i drehenden, am linken Trägerstücke angreifenden Druck D_8 das Gleichgewicht gehalten werden. Rückt die Last von A bis 6 vor, so beschreibt der rechte Kämpferdruck den Winkel A_0B6_0 , er dreht links um i und erzeugt einen Zug D_8 , welcher, am rechten Trägerstücke angreifend, rechts um i dreht, es entsteht also $\min D$ oder $\max D$, je nachdem der Eisenbahnzug von B bis 8 oder von A bis 6 vorgerückt ist.

Der von B bis zum Knoten 8 vorgeschobene Eisenbahnzug erzeugt am linken Auflager: $A=25,7$ und $H=59^t$. Infolge von $A=1$ würde entstehen: $D_8 \cos \varphi_8 = -0,178$ und $H=1$ würde erzeugen: $D_8 \cos \varphi_8 = -0,096$. Daher entsteht infolge der Verkehrslast:

$$\min D_8 \cos \varphi_8 = -0,178 \cdot 25,7 - 0,096 \cdot 59 = -10,24^t$$

Zur Hervorbringung von $\max D_8$ muß der Eisenbahnzug von A bis 6 vorgerückt werden; es entsteht dann am rechten Auflager: $B=9,0^t, H=31^t$ *) und man erhält (da $B=1$ den Einfluß $D_8 \cos \varphi_8 = +1,620$ ausübt):

$$\max D_8 \cos \varphi_8 = +1,620 \cdot 9,0 - 0,096 \cdot 31 = +11,60^t$$

Der Einfluß der ständigen Belastung wird nun wie folgt bestimmt. Die rechts vom Schnitte tt in den Knotenpunkten 8 bis 18 angreifenden Lasten $g\lambda$ erzeugen:

$$A = g\lambda \left(\frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} + \frac{5}{10} + \frac{6}{10} \right) = 2,1 g\lambda = 6,1^t \text{ und die links von } tt \text{ an-}$$

$$\text{greifenden } g\lambda \text{ rufen } B = g\lambda \left(\frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} \right) = 1,0 g\lambda = 2,9 \text{ hervor; ferner}$$

ist nach Seite 201 der von der gesamten ständigen Last hervorgerufene Horizontal-schub $H_g = 21,5^t$, weshalb der Einfluß von g auf D_8 :

$$D_8 \cos \varphi_8 = -0,178 \cdot 6,1 + 1,620 \cdot 2,9 - 0,096 \cdot 21,5 = +1,53^t$$

gefunden wird. Im ganzen erzeugt also die Belastung:

$$\min D_8 \cos \varphi_8 = -10,24 + 1,53 = -8,7^t$$

$$\max D_8 \cos \varphi_8 = +11,60 + 1,53 = +13,1^t,$$

wozu noch der Einfluß der Temperaturänderung mit $D_8 \cos \varphi_8 = -0,096 H^t = \mp 0,096 \cdot 733 F_e$ hinzutritt, wenn F_e den Mittelwert der Gurtquerschnitte bedeutet.

In derselben Weise dürfen die Spannkraften $D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, D_{10}$ berechnet werden. Für D_2 und D_3 gelangt man zu anderen Belastungsgesetzen; es verdient dann die Anwendung der Einflußlinien den Vorzug.**)

90. Näherungsformel für die zweite H -Linie im Falle gleichmäßiger Belastung. Die Verkehrslast sei $=p$ f. d. Längeneinheit der Stützweite l und bedecke die Strecke ξ , Fig. 251; einem Lastteilchen pdx entspreche der Horizontal-

*) Diese Werte sind den Spiegelbildern der in Fig. 250 gezeichneten Linien zu entnehmen; sie erscheinen in Fig. 250 unter dem Knotenpunkte 14.

**) Die Berechnung von D_2 ist überflüssig, da man am Bogenende ein volles Stehblech anordnen wird.

schub dH . Dann ist $H = \int_0^{\xi} dH$, und es läßt sich H als Funktion von ξ darstellen,

sobald dH als Funktion von x ausgedrückt werden kann, eine Aufgabe, deren Lösung für den in Nr. 80 behandelten parabelförmigen Sichelträger und den in Nr. 82 untersuchten Bogenträger mit nahezu unveränderlicher Höhe h zu einfachen Ergebnissen führt.

a. *Der parabolische Sichelträger.* Ersetzt man in Gleichung (14) (Seite 205) P durch $p dx$, ferner a durch $l-x$ und b durch x , so erhält man

$$dH = \frac{3 p dx l (f_o + f_u)}{3 l^2 (f_o^2 + f_u^2) + 32 f_o^2 f_u^2} \left\{ (l^2 + 16 f_o f_u) \frac{1}{4} \left(\frac{x}{l} \log \text{nat.} \frac{l}{x} + \frac{l-x}{l} \log \text{nat.} \frac{l}{l-x} \right) - f_o f_u 8 \frac{x}{l} \frac{l-x}{l} \right\}$$

und, indem man diesen Ausdruck von 0 bis ξ integriert:

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} H = \frac{3 p l^2 (f_o + f_u) [(l^2 + 16 f_o f_u) \alpha' - f_o f_u \alpha'']}{3 l^2 (f_o^2 + f_u^2) + 32 f_o^2 f_u^2} \\ \text{wo } \alpha' = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\xi^2}{l} + \frac{\xi^2}{l^2} \log \text{nat.} \frac{l}{\xi} - \frac{(l-\xi)^2}{l^2} \log \text{nat.} \frac{l}{l-\xi} \right\} \\ \text{und } \alpha'' = \frac{1}{4} \frac{\xi^2}{l^2} \left(3 - 2 \frac{\xi}{l} \right). \end{array} \right.$$

Zur Erleichterung der Berechnung diene die folgende Tabelle, in welcher die Werte α' und α'' für $\xi = 0$ bis $\xi = 0,5 l$ angegeben sind und zwar für 10 Teilpunkte der halben Stützweite. Der Verlauf der zweiten H -Linie für $\xi > 0,5 l$ ergibt sich aus der folgenden Betrachtung.

Ist $C_o E_o$ (Fig. 251) die Ordinate der gesuchten Linie für $\xi = 0,5 l$, so entspricht der vollen Belastung die Ordinate $A A' = 2 C_o E_o$. Bedeckt nun die Last von B aus die Strecke $l - \xi$, so nehme man zunächst gänzliche Belastung des Trägers an und bringe den Einfluß einer von A aus um ξ vorgeschobenen Belastung in Abzug, indem man von einer durch A' zu AB gezogenen Parallelen aus die Strecke $C' E' = C E$ abträgt. Es ist dann E' ein Punkt der zweiten H -Linie.

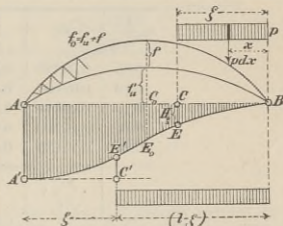


Fig. 251.

$\frac{\xi}{l}$	α'	α''	$\frac{\xi}{l}$	α'	α''
0,05	0,00140	0,0097	0,30	0,02920	0,2880
0,10	0,00471	0,0373	0,35	0,03707	0,3757
0,15	0,00941	0,0810	0,40	0,04534	0,4693
0,20	0,01520	0,1387	0,45	0,05386	0,5670
0,25	0,02185	0,2083	0,50	0,06250	0,6667

Infolge gänzlicher Belastung ($\xi = l$) entsteht:

$$(45) \quad H = \frac{p l^2 (f_0 + f_u) (3l^2 + 16f_0 f_u)}{8[3l^2 (f_0^2 + f_u^2) + 32f_0^2 f_u^2]}$$

Ersetzt man in dieser Formel p durch g , so erhält man den Einfluß der ständigen Belastung. Für den in Nr. 79 in anderer Weise behandelten Sichelträger ergibt sich z. B. wegen $g = 1,45^t$:

$$H_g = \frac{1,45 \cdot 20^2 (4,0 + 2,5) (3 \cdot 20^2 + 16 \cdot 4,0 \cdot 2,5)}{8[3 \cdot 20^2 (4,0^2 + 2,5^2) + 32 \cdot 4,0^2 \cdot 2,5^2]} = 21,4^t,$$

ein Wert, der von dem früher erhaltenen $H_g = 21,5^t$ fast gar nicht abweicht.

b. *Bogenträger von nahezu unveränderlicher Höhe h* (Fig. 212 und 213 auf Seite 209). Hier empfiehlt es sich, von der parabelförmigen Einflußlinie für H auszugehen und Gleich. (29) auf Seite 211 zu benutzen. Man erhält dann für ein Lastteilchen $p dx$:

$$dH = \frac{3 p dx \cdot x (l - x) \nu}{4 fl}$$

und, indem man diesen Ausdruck von 0 bis ξ integriert,

$$(46) \quad H = \frac{p l^2 \nu}{8 f} \frac{\xi^2}{l^2} \left(3 - 2 \frac{\xi}{l} \right).$$

Zur Erleichterung der Berechnung der H -Linie diene die folgende Tabelle, deren Werte noch mit $\frac{p l^2 \nu}{8 f}$ zu multiplizieren sind.

$\frac{\xi}{l}$	H	$\frac{\xi}{l}$	H
0,05	0,00725	0,30	0,21600
0,10	0,02800	0,35	0,28175
0,15	0,06075	0,40	0,35200
0,20	0,10400	0,45	0,42525
0,25	0,15625	0,50	0,50000
	$\cdot \frac{p l^2 \nu}{8 f}$		$\cdot \frac{p l^2 \nu}{8 f}$

Infolge gänzlicher Belastung des Bogens entsteht

$$(47) \quad H_p = \frac{p l^2 \nu}{8 f}$$

und infolge der ständigen Belastung

$$(48) \quad H_g = \frac{g l^2 \nu}{8 f}$$

Die Ziffer ν ist nach einer der Gleichungen (28), (30), (31), (32) Seite 216 zu berechnen.

Aufgabe. Gesucht sei die durch eine gleichförmige Belastung hervorgerufene Spannkraft $\max D_p$ des linkssteigenden Füllungsstabes eines Trägers von nahezu unveränderlicher Höhe h . Fig. 252. Es sollen die zweiten Linien für A und H , sowie die Kämpferdrucklinie benutzt werden; wobei es erlaubt sei, die Lasten unmittelbar am Bogenträger angreifend anzunehmen.*)

*) Rechnet man mit gleichförmiger Belastung (die stets einer Schätzung unterliegt), so ist die Annahme unmittelbarer Belastung immer zulässig. Man gestalte dann überhaupt die Untersuchung möglichst einfach.

Die Kämpferdrucklinie ist nach Nr. 86 eine wagerechte Gerade im Abstände $4f:3v$ von der AB ; sie wird von der durch das Gelenk A und den Schnittpunkt i der Stäbe O und U gelegten Geraden in E geschnitten. Die Senkrechte durch E ist eine Belastungsscheide, denn eine durch E gehende Last ruft am linken Auflager einen Kämpferdruck hervor, der die Richtung Ai hat und das Moment $M_i = 0$ erzeugt. Lasten rechts von E verursachen bei A Kämpferdrücke, welche links um i drehen und den fraglichen Stab D auf Druck beanspruchen; denn eine am Trägerstück links vom Schnitt tt angreifende Zugkraft würde ebenfalls links um i drehen. Durch Lasten, welche zwischen E und F_2 aufgebracht werden, wird D gezogen, während Lasten links von F_1 wieder Drücke D hervorbringen. Dies letztere einzusehen, stelle man für die rechts von tt angreifenden Kräfte die Momentengleichung in bezug auf i auf. Die Aufsuchung der Belastungsscheide zwischen F_1, F_2 darf man sparen; man rechnet genügend genau, wenn man behufs Erzeugung von $max D$

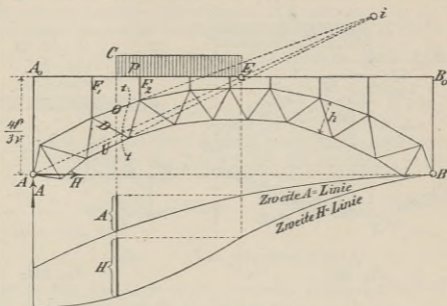


Fig. 252.

den Träger zwischen E und der Mitte C des Feldes $F_1 F_2$ belastet und den auf den Querträger F_1 entfallenden Teil der Belastung des Feldes $F_1 F_2$ unberücksichtigt läßt, also links von tt nur die äußeren Kräfte A und H annimmt. Dabei ist A gleich dem Unterschiede der bei C und E gemessenen Ordinaten der zweiten A -Linie, und ganz entsprechend wird auch H gefunden. Schließlich erhält man mit den auf Seite 221 eingeführten Bezeichnungen D_A und D_H :

$$max D = D_A A + D_H H. *)$$

Man könnte auch A und H zum Kämpferdrucke K zusammensetzen und hierauf nach Band I, Nr. 184 verfahren.

Wird $min D$ gesucht, so werden die Einflüsse der auf den beiden negativen Beitragsstrecken $A_0 C$ und EB_0 aufzubringenden Belastungen getrennt ermittelt und dann zusammengezählt. Wird die Strecke $A_0 C$ belastet, so handelt es sich um die Bestimmung der am rechten Auflager hervorgerufenen Widerstände B und H .

*) Wir erinnern daran, daß es häufig zweckmäßiger ist, $D \cos \varphi$ zu berechnen.

$$(50) \quad \begin{cases} \min M^o = -g \frac{l^2}{8f'} c_o - p C_o - H_t y_o \\ \max M^o = -q \frac{l^2}{8f'} c_o + p C_o + H_t y_o \end{cases}$$

$$(51) \quad \begin{cases} \min M^u = +g \frac{l^2}{8f'} c_u - p C_u - H_t y_u \\ \max M^u = +q \frac{l^2}{8f'} c_u + p C_u + H_t y_u, \end{cases}$$

wo H_t den absoluten Wert des Horizontalschubes infolge einer Temperaturänderung bedeutet.

Zur Ermittlung von $\min M^o_p$ legen wir durch A und o eine Gerade, welche die Kämpferdrucklinie in der Belastungsscheide E schneidet, bestimmen senkrecht unter E den Punkt N der H -Parabel und erhalten in dem schraffierten Parabelabschnitte den zur negativen Beitragsstrecke $B_o E$ gehörigen Teil der M^o -Fläche. Der Inhalt dieses Abschnittes verhält sich zum Inhalt der H -Fläche wie $\xi_o^2 : l^2$, ist also $= \frac{\xi_o^2}{l^2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3l}{16f} \cdot \nu \cdot l = \frac{\xi_o^2}{8lf'}$ und daraus folgt, daß die von B_o bis E reichende Belastung das Moment

$$(53) \quad \min M^o_p = -p \nu \frac{\xi_o^2}{8lf'} = -\frac{p y_o \xi_o^2}{8f'l}$$

erzeugt. Schneidet nun eine durch B und o gelegte Gerade die Kämpferdrucklinie innerhalb der Stützweite in E' , wie dies Fig. 253 voraussetzt, so muß noch die Strecke $A_o E'$ belastet werden, und es entsteht dann:

$$(54) \quad \min M^o_p = -\frac{p y_o}{8f'l} (\xi_o^2 + \xi_o'^2).$$

In diesem Falle ist

$$(55) \quad C_o = \frac{y_o}{8f'l} (\xi_o^2 + \xi_o'^2).$$

Liegt E' links von A_o , so ist in vorstehender Gleichung $\xi_o' = 0$ zu setzen. Ganz ebenso erhält man für C_u den Ausdruck

$$(56) \quad C_u = \frac{y_u}{8f'l} (\xi_u^2 + \xi_u'^2).$$

Anmerkung. Weitere analytische Untersuchungen dieser Art findet der Leser in des Verfassers „Theorie und Berechnung der eisernen Bogenbrücken“, Berlin 1880. Dort ist allerdings nur der Fall $\nu = 1$ behandelt worden, und es unterscheiden sich daher die gewonnenen Formeln von den hier abgeleiteten dadurch, daß f an die Stelle von f' tritt. Dem Leser wird es hiernach keine Schwierigkeiten bereiten, auch die in dem angeführten Buche für *Einzellasten* gegebenen einfachen und bequemen Gleichungen für den Fall eines von 1 verschiedenen Wertes ν umzubilden.

§ 8.

Zweigelenkbogen mit gesprengter Zugstange und verwandte Trägerarten.

92. Eine für Brücken und Dachstühle wichtige Anordnung des Bogens mit zwei Gelenken ist die in Fig. 255 dargestellte. Die Kämpfer A und B sind durch ein Zugband verbunden, welches an dem Fach-

werkbogen durch senkrechte Stäbe befestigt ist; das Auflager A ist fest, das andere (B) wird auf einer wagerechten Geraden geführt. Zur Bestimmung der Stützenwiderstände sind die Gleichgewichtsbedingungen ausreichend; der Träger verhält sich in dieser Beziehung

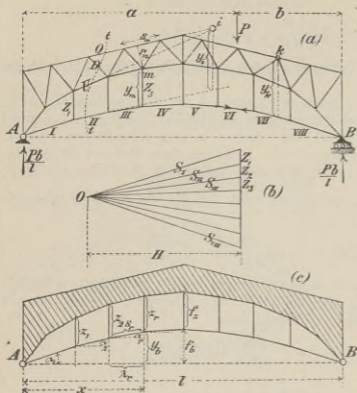


Fig. 255.

wie ein einfacher Balken; er ist jedoch *innerlichstatisch unbestimmt*. Als statisch nicht bestimmbare Größe wird zweckmäßig die wagerechte Projektion H der Spannkraft des Zugbandes eingeführt; dieselbe ist für alle Glieder gleich groß. Zieht man von einem Punkte O aus Parallelen zu den Stäben I, II, III, \dots so schneiden diese auf einer im Abstände H von O eingetragenen Senkrechten die Spannkraften Z der Hängestangen ab, und die Längen der von O ausgehenden Strahlen geben die Spannkraften $S_I, S_{II}, S_{III}, \dots$ der Stäbe I, II, III, \dots an. Damit sind alle am Fachwerkbogen angreifenden Kräfte bekannt.

Will man die Stabkräfte aus den Momenten M berechnen, so führe man durch m einen senkrechten Schnitt und zerlege die Spannkraft der geschnittenen Zugstange in eine senkrechte und eine wagerechte Seitenkraft; die erstere geht durch den Drehpunkt m , und die letztere übt das Angriffsmoment $-Hy_m$ aus. Da nun die äußeren Kräfte mit denen eines einfachen Balkens übereinstimmen, so erhält man

$$(1) \quad M_m = M_{om} - Hy_m,$$

d. i. dieselbe Gleichung, welche auf Seite 216 für den Bogen mit festen Kämpfergelenken gefunden wurde. Nur bedeutet jetzt y nicht mehr den Abstand des fraglichen Knotenpunktes von der Geraden AB , sondern von dem Zugbande.

Wird behufs Berechnung einer Spannkraft D das Angriffsmoment für den Schnittpunkt i der an D grenzenden Gurtstäbe O und U gesucht, so mißt man den senkrechten Abstand y_i des Punktes i von

demjenigen Gliede der Zugstange, welches der durch O, D, U geführte Schnitt tt trifft und erhält:

$$(2) \quad M_i = M_{oi} - Hy_i,$$

oder allgemeiner

$$M_i = M_{oi} \pm Hy_i,$$

wobei das Vorzeichen von der Lage des Punktes i abhängt.

Es bedarf jetzt nur eines Hinweises darauf, daß die in Nr. 84 gelehrteten Verfahren, die Einflußflächen für senkrechte Belastung aus ein und derselben H -Linie deren Bestimmung in Nr. 93 gezeigt werden wird, zu ermitteln, auch auf den vorliegenden Fall angewendet werden dürfen; man hat nur auf die andere Bedeutung von y zu achten.

Hinsichtlich der Gestalt des Stabzuges I, II, III, \dots ist die vorstehende Untersuchung an keinerlei Voraussetzungen gebunden. Dieser

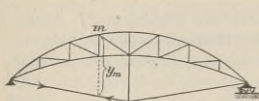


Fig. 256.

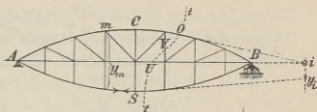


Fig. 257.

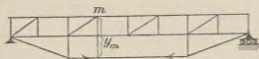


Fig. 258.

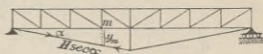


Fig. 259.

Stabzug darf auch nach unten gesprengt werden; es entstehen dann Träger der in den Fig. 256 bis 259 dargestellten Art. Die senkrechten Zwischenstäbe werden hier auf Druck beansprucht. Die Tragwerke in den Figuren 258 und 259 bezeichnet man auch als verspannte Balken, und den Träger in Fig. 257 als versteifte Kette, und man nennt dann das Dreiecksfachwerk $ACBA$ den *Versteifungsbalken der Kette* ASB . Nicht unzweckmäßig dürfte es sein, den mit dem Dreiecksfachwerk durch senkrechte Stäbe verbundenen Stabzug in allen hier vorgeführten Fällen die *dritte Gurtung* zu nennen und festzusetzen, daß, falls kurz von der *oberen* und der *unteren* Gurtung gesprochen wird, hierunter die Gurtungen des Dreiecksfachwerks zu verstehen sind. Die dritte Gurtung kann auch oberhalb des Dreiecksfachwerks liegen; sie wird dann auf Druck beansprucht, während die Zwischenstäbe (eine durchweg nach unten hohl liegende dritte Gurtung vorausgesetzt) Zug-

spannungen erleiden. Bezeichnet man für diesen in Figur 260 dargestellten Fall mit H die wagerechte Seitenkraft des in der dritten Gurtung auftretenden Druckes, so bleibt die Gleichung $M_m = M_{om} - Hy_m$ gültig. Für M_i erhält man je nach der Lage des Punktes i gegen den vom Schnitte $t-t$ getroffenen Stab der dritten Gurtung: $M_i = M_{oi} \pm Hy_i$.

Den in Fig. 260 abgebildeten Träger pflegt man auch einen durch einen Balken versteiften Stabbogen zu nennen und bezeichnet dann das

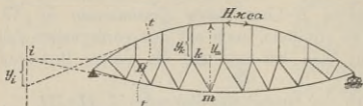


Fig. 260.

Dreieckfachwerk als den *Versteifungsbalken des Stabbogens*.*) Dieser Balken, welcher zugleich bestimmt ist, den Horizontalschub des Bogens aufzunehmen, erhält meistens (abgesehen von den Endfeldern) parallele

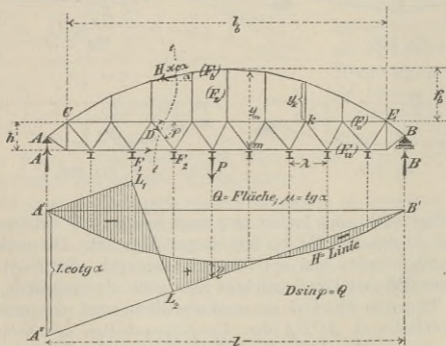


Fig. 261.

Gurtungen. Die Untersuchung der Füllungsstäbe gestaltet sich dann besonders einfach. Es handele sich z. B. um die links steigende Diago-

*) Unseres Wissens ist diese Trägerart zuerst von dem verstorbenen österreichischen Ingenieur Langer gegeben worden und dürfte daher wohl am besten *Langerscher Balken* genannt werden.

nale D des Trägers in Fig. 261. Führt man den Schnitt tt , zerlegt den Druck $H \sec \alpha$ des von tt getroffenen Stabes der dritten Gurtung in die Seitenkräfte H (wagerecht) und $H \operatorname{tg} \alpha$ (senkrecht) und setzt man schließlich die Summe aller links vom Schnitte tt wirkenden lotrechten Kräfte $= 0$, so erhält man:

$$A - \sum_0^t P - D \sin \varphi - H \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

wo $\sum_0^t P$ die Summe der links vom Schnitte t angreifenden Lasten bedeutet. Hierin ist nun

$$A - \sum_0^t P = Q_0$$

die Querkraft für den Schnitt tt eines *einfachen Balkens* AB , und es ergibt sich daher

$$D \sin \varphi = Q, \text{ wo}$$

$$(3) \quad Q = Q_0 - H \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha (Q_0 \operatorname{cotg} \alpha - H).$$

Man nennt Q die Querkraft für den Schnitt tt des *Versteifungs-Balkens*, betrachtet $\operatorname{tg} \alpha$ als Multiplikator und erhält dann die Einflußfläche für Q als den Unterschied der $Q_0 \operatorname{cotg} \alpha$ -Fläche und der H -Fläche. Macht man also (Figur 261) $A'A'' = 1 \operatorname{cotg} \alpha$, zieht $A''B'$, hierauf $A'L_1 \parallel B'A''$, schließlich L_1L_2 , so ist die schraffierte Fläche die Q -Fläche; denn wäre $A'A'' = 1$, so würde nach Band I, Seite 132, der Linienzug $A'L_1L_2B'$ die auf die Achse $A'B'$ bezogene Q_0 -Linie sein.

Auf dieselbe Weise werden die Spannkraften in den Füllungsstäben der in den Figuren 258, 259, 270 abgebildeten Versteifungsbalken bestimmt.

93. Die Bestimmung der Einflußlinie für H unterscheidet sich von der in Nr. 77 gelehrtten Weise, die H -Linie eines Zweigelenkbogens zu berechnen, nur dadurch, daß die Summe: $\sum \frac{S'^2 s}{EF}$, welche sich bisher nur auf die Stäbe des Bogens bezog, und für welche der Ausdruck $\frac{1}{EF_0} \sum x_m$ gefunden wurde, um die der dritten Gurtung und den senkrechten Zwischenstäben entsprechenden Glieder vermehrt werden muß. Sind nun $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ die Neigungswinkel der Glieder der dritten Gurtung, so sind die Spannkraften S und Z ,

$$(4) \quad S_1 = H \sec \alpha_1; \quad S_2 = H \sec \alpha_2; \quad \dots^*)$$

*) Es sind dies die absoluten Werte. Die unterhalb des Dreieckfachwerks liegende dritte Gurtung (Fig. 255 bis 259) wird gezogen; ist sie nach oben gesprengt, so werden die lotrechten Zwischenstäbe auf Zug beansprucht, sonst auf Druck. Liegt die dritte Gurtung oberhalb des Dreieckfachwerks, Fig. 260, so wird sie gedrückt; die Zwischenstäbe werden dann gezogen.

$$(5) \quad Z_1 = H(\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2); \quad Z_2 = H(\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_3); \quad \dots$$

und man erhält für die allgemein mit S' bezeichneten Spannkkräfte des Zustandes $H = -1$ die absoluten Werte:

$$(6) \quad \begin{cases} S'_r = \sec \alpha_r \text{ für das } r^{\text{te}} \text{ Glied des Zugbandes,} \\ S'_r = (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1}) \text{ für die } r^{\text{te}} \text{ Zwischenstange.} \end{cases}$$

Sind also die Längen dieser Stäbe $= s_r$ bzw. z_r und ihre Querschnitte $= F_{sr}$ bzw. $= F_{zr}$, so ergibt sich:

$$(7) \quad \Sigma \frac{S'^2 s}{EF} = \frac{1}{EF_c} \Sigma z_m + \Sigma \frac{s_r \sec^2 \alpha_r}{EF_{sr}} + \Sigma \frac{z_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1})^2}{EF_{zr}}.$$

Man darf nun stets die Annahme machen, daß sich der Querschnitt der dritten Gurtung so ändert, daß die Spannung $\sigma = \frac{H \sec \alpha_r}{F_{sr}}$ einen festen Wert annimmt. Erfordert also H den Querschnitt F_b (d. i. der Querschnitt eines wagerechten Gliedes der dritten Gurtung), so wird $F_{sr} = F_b \sec \alpha_r$, und man erhält, wenn man für alle Zwischenstäbe denselben Querschnitt F_z annimmt,

$$(8) \quad \Sigma \frac{S'^2 s}{EF} = \frac{1}{EF_c} \left\{ \Sigma z_m + \frac{F_c}{F_b} \Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha_r + \frac{F_c}{F_z} \Sigma z_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1})^2 \right\},$$

wo λ_r die Horizontalprojektion von s_r bedeutet (Fig. 255c).

Die Bestimmung der H -Linie geschieht jetzt nach folgender Regel:

Man berechne die Momente M_{wm} eines mit den Gewichten

$$w_m = \frac{y_m s_m}{r_m^2} \frac{F_c}{F_m} \text{ belasteten einfachen Balkens } A'B' \text{ (vergleiche$$

Fig. 198 bis 200) und dividiere sie durch

$$(9) \quad \mathfrak{N} = \Sigma z_m + \frac{F_c}{F_b} \Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha_r + \frac{F_c}{F_z} \Sigma z_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1})^2,$$

wobei $z_m = y_m w_m$. Das Ergebnis ist: $H_m = \frac{M_{wm}}{\mathfrak{N}}$.

Die beiden letzten Glieder des Ausdruckes für \mathfrak{N} sind von verhältnismäßig geringem Einfluß auf H und lassen sich meistens erheblich vereinfachen. Liegen z. B. die Knotenpunkte der dritten Gurtung in einer Parabel mit der Gleichung

$$y_b = 4f_b \frac{x(l-x)}{l^2} \text{ (Fig. 255)}$$

und folgen auch die Längen z der Zwischenstäbe dem Gesetze:

$$z = 4f_z \frac{x(l-x)}{l^2},$$

so darf man stets genügend genau setzen:

$$\Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha_r = \int_0^l dx \left[1 + \left(\frac{dy_b}{dx} \right)^2 \right] = l \left[1 + \frac{16}{3} \frac{f_b^2}{l^2} \right]$$

$$\begin{aligned} \Sigma x_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1})^2 &= \lambda_b \Sigma x_r \frac{(\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1})^2}{\lambda_b} = \lambda_b \int_0^l x dx \left[\frac{d(\operatorname{tg} \alpha)}{dx} \right]^2 \\ &= \lambda_b \int_0^l x dx \left(\frac{d^2 y_b}{dx^2} \right)^2 = \lambda_b \left(\frac{8 f_b}{l^2} \right)^2 \int_0^l x dx = \frac{128}{3} \lambda_b \frac{f_b^2 f_z}{l^3}, \end{aligned}$$

wo λ_b den Mittelwert der annähernd gleich großen Feldweiten λ_r bedeutet, und man erhält dann den schnell zu berechnenden Ausdruck:

$$(10) \quad \mathfrak{R} = \Sigma x_m + \frac{F_c}{F_b} l \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f_b^2}{l^2} \right) + \frac{128}{3} \frac{F_c}{F_z} \lambda_b \frac{f_b^2 f_z}{l^3}.$$

Für den Fall eines *Zweigelenkbogens mit wagerechter Zugstange* ($f_b = 0$ in Fig. 255) ergibt sich

$$(11) \quad \mathfrak{R} = \Sigma x_m + \frac{F_c}{F_b} l,$$

ein Wert, der auch bei geringer Sprengung des Zugbandes genügend genau ist und daher auch für die in den Fig. 256 und 275 dargestellten Träger brauchbar bleibt. Bei Berechnung von Dachbindern dieser Art ist es sogar zulässig, $\mathfrak{R} = \Sigma x_m$ zu setzen, weil ja die Bestimmung des größten Schneedruckes und besonders des Winddruckes auf einer ziemlich unsicheren Schätzung beruht.

Kürzungen der Werte w_m und x_m ziehen natürlich auch eine entsprechende Änderung der beiden letzten Glieder des Ausdruckes \mathfrak{R} nach sich. Nimmt man z. B. bei Untersuchung des in Fig. 261 dargestellten Trägers für alle Obergurtstäbe denselben Querschnitt F_o an und für alle Untergurtstäbe denselben Querschnitt F_u , und setzt man die willkürliche Querschnittsfläche $F_c = F_o$, so empfiehlt es sich, einem Knotenpunkte m der unteren Gurtung das Gewicht

$$(12) \quad \dots w_m = y_m \left(\text{statt } w_m = \frac{y_m s_m}{r_m^2} = \frac{y_m \lambda}{h^2} \right)$$

zuzuschreiben und einem oberen Knotenpunkte k das Gewicht:

$$(13) \quad \dots w_k = y_k \frac{F_o}{F_u} \left(\text{statt } w_k = \frac{y_k \lambda}{h^2} \frac{F_o}{F_u} \right).$$

Diese besonderen Werte w sind aus den allgemeineren durch Division mit $\lambda : h^2$ erhalten worden, und es müssen daher auch die beiden letzten Glieder von \mathfrak{R} mit $\lambda : h^2$ dividiert werden. Man erhält:

$$(14) \quad \mathfrak{R} = \Sigma y_m^2 + \frac{F_o}{F_u} \Sigma y_k^2 + \frac{h^2}{\lambda} \left[\frac{F_o}{F_b} \Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha_r + \frac{F_o}{F_z} \Sigma x_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1})^2 \right],$$

wofür man stets

$$(15) \quad \mathfrak{N} = \Sigma y_k^2 + \frac{F_o}{F_u} \Sigma y_m^2 + \frac{h^2}{\lambda} \left[\frac{F_o}{F_b} l_b \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f_b^2}{l_b^2} \right) + \frac{128}{3} \frac{F_o}{F_a} \lambda \frac{f_b^3}{l_b^3} \right]^*)$$

setzen darf; auch ist es in der Regel erlaubt, das zweite Glied des Klammerausdruckes und den Faktor $\left(1 + \frac{16}{3} \frac{f_b^2}{l_b^2} \right)$ zu streichen. Man erhält dann:

$$(16) \quad \mathfrak{N} = \Sigma x_m^2 + \frac{F_o}{F_u} \Sigma y_k^2 + \frac{h^2 l_b}{\lambda} \frac{F_o}{F_b}.$$

94. Der Einfluß einer Temperaturänderung auf H ist durch die allgemeine, für jedes einfach statisch unbestimmte Fachwerk gültige Gleichung gegeben:

$$(17) \quad H_t = \frac{\Sigma S' \varepsilon t s}{\Sigma \frac{S'^2 s}{EF}},$$

wo S' die Stabkraft für $H = -1$ ist. Sind ε und t für sämtliche Stäbe gleich groß, so wird $H_t = 0$; denn setzt man in die dem Spannungszustande $H = -1$ entsprechende Arbeitsgleichung

$$\Sigma S' \Delta s = 0,$$

welche für beliebige mögliche Δs gilt, $\Delta s = \omega s$, wobei ω eine Konstante ist, d. h. nimmt man an, daß die geänderte Form des Fachwerks der ursprünglichen ähnlich ist, so findet man

$$\Sigma S' s = 0.$$

Wird nun vorausgesetzt, daß sich die dem spannungslosen Anfangszustande entsprechenden Wärmegrade der Stäbe des Dreieckfachwerks und der Zwischenstäbe um t ändern, diejenigen der dritten Gurtung hingegen um $t + \Delta t$, so erhält man für H_t den Wert

$$H_t = \frac{\varepsilon t \Sigma_I S' s_i + \varepsilon \Delta t \Sigma_{II} S'_r s_r}{\Sigma \frac{S'^2 s}{EF}},$$

wobei sich Σ_I über sämtliche Stäbe erstreckt, hingegen Σ_{II} nur über die dritte Gurtung. Erstere Summe ist $= 0$, und letztere geht für den Fall einer *gezogenen* dritten Gurtung [wegen $S_r = + H \sec \alpha_r$ und $S'_r = - \sec \alpha_r$] in $-\Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha_r$ über, weshalb sich

*) Für die Stäbe AC und EB , deren Spannkraften nur von den Stützendrücken abhängen, ergibt sich $S' = 0$; die dritte Gurtung reicht nur von C bis E . Ihr Pfeil ist $= f_b$, ihre Spannweite $= l_b$.

$$(18) \quad H = - \frac{\varepsilon \Delta t \sum \lambda_r \sec^2 \alpha_r}{\sum \frac{S'^2 s}{EF}}$$

$$= - \frac{\varepsilon E F_c \Delta t \sum \lambda_r \sec^2 \alpha_r}{\sum x_m + \frac{F_c}{F_b} \sum \lambda_r \sec^2 \alpha_r + \frac{F_c}{F_z} \sum x_r \left(\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1} \right)^2}$$

ergibt, und hieraus folgt: wird die dritte Gurtung stärker erwärmt als die übrigen Teile des Bogens, so nimmt der Horizontalzug ab; im Gegenfalle wächst H um ein positives H_t . Für den in der Fig. 260 dargestellten Träger findet man, daß der Horizontaldruck H zu- oder abnimmt, je nachdem die dritte Gurtung mehr oder weniger erwärmt wird als der Versteifungsbalken.

Es ist nun stets zulässig, die Formel (18) durch die einfachere:

$$(19) \quad H_t = \mp \frac{\varepsilon E F_c l \Delta t}{\sum x_m}$$

zu ersetzen; denn, da die Wahl von Δt einer groben Schätzung unterliegt, so hat es natürlich keinen Zweck, die übrigen Glieder allzu peinlich zu berechnen.

Für x_m ist in (19) der Wert $x_m = \frac{y_m^2 s_m}{r_m^2} \frac{F_c}{F_m}$ einzuführen.

Eine Kürzung der x bedingt auch eine entsprechende Änderung des Zählers von H_t . Setzt man z. B. für den Träger in

Figur 261, $w_m = y_m$ und $w_k = y_k \frac{F_o}{F_u}$, ferner $x_m = y_m^2$, $x_k = y_k^2 \frac{F_o}{F_u}$, so

muß man den Zähler von H_t in Gleich. (19) durch $\frac{s}{r^2} = \frac{\lambda}{h^2}$ dividieren;

es ergibt sich dann:

$$(20) \quad H_t = \mp \frac{\varepsilon E F_c l h^2 \Delta t}{\lambda \left[\sum y_m^2 + \frac{F_o}{F_u} \sum y_k^2 \right]}$$

95. Näherungsformeln für den durch einen Balken mit parallelen Gurtungen versteiften Parabelbogen. Wir bezeichnen mit h_o und h_u die Abstände der Gurtungen von der die Bogenenden AB verbindenden wagerechten Geraden, mit y' die auf die Gerade AB bezogene Ordinate des Bogens an der Stelle x ; sodann betrachten wir den Bogen als stetig gekrümmt und setzen für eine Einzelast P (unter Vernachlässigung der Dehnung der Hängestangen:*)

$$H = P \frac{M_w}{\sum y_m^2 \lambda + \frac{F_o}{F_u} \sum y_k^2 \lambda + h^2 \frac{F_o}{F_b} l \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f^2}{l^2} \right)}$$

$$= P \frac{M_w}{\int_0^l (y' + h_u)^2 dx + \int_0^l (y' - h_o)^2 dx + h^2 \frac{F_o}{F_b} l \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f^2}{l^2} \right)}$$

*) Dafür wollen wir die Abmessungen l_b und f_b (Fig. 261) durch die größeren l und f ersetzen.

woraus, wegen $y' = 4f \frac{xx'}{l^2}$, nach Division durch h^*)

$$(32) \quad \frac{M_g^u}{h} = -\frac{gl^2}{8fh} \sqrt{h_u} - g \frac{xx'}{2h} (\nu - 1).$$

Ebenso erhält man für einen Knotenpunkt der oberen Gurtung:

$$(33) \quad \frac{M_g^o}{h} = \frac{gl^2}{8fh} \sqrt{h_o} - g \frac{xx'}{2h} (\nu - 1).$$

Zeichnet man also eine Parabel $A'S'B'$, deren Pfeil $= \frac{l^2}{8h} (\nu - 1)$ ist, zieht die zu $A'B'$ parallelen Geraden CD und EF in den Abständen $\frac{l^2 \sqrt{h_u}}{8fh}$ bzw. $\frac{l^2 \sqrt{h_o}}{8fh}$ von der $A'B'$, und mißt entsprechend u und o die Abstände Y_u und Y_o der Parabel von jenen Geraden, so findet man

$$(34) \quad \frac{M_p^u}{h} = -g Y_u, \quad \frac{M_p^o}{h} = +g Y_u,$$

denn die auf $A'B'$ bezogene Ordinate der Parabel an der Stelle x ist $= \frac{4}{l^2} \cdot \frac{l^2 (\nu - 1)}{8h} x x' = \frac{xx' (\nu - 1)}{2h}$. Figur 265 setzt voraus, daß $\nu > 1$ ist. Ergibt sich $\nu < 1$, so liegt S' oberhalb $A'B'$.

Behufs Ermittlung von M_p^u bringen wir die untere Gurtung des Versteifungsbalkens in A_u und B_u mit den Auflagersenkrechten zum Schnitt, bestimmen den lotrecht über u gelegenen Punkt u' des Bogens und folgern aus der Gleichung

$M^u = M_o - H y_u$, in welcher M_o das Moment für den Querschnitt x eines einfachen Balkens bedeutet, daß M_u dieselbe Form hat wie das Moment für den Punkt u' eines in den Punkten A_u und B_u gestützten Zweigelenkbogens. Diesem Zweigelenkbogen muß natürlich der für den versteiften Bogen

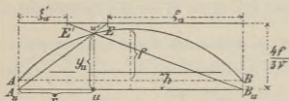


Fig. 266.

Seite 254) zugeschrieben werden. Die Kämpferdrucklinie ist eine Wagerechte im Abstände $\frac{4f}{3\nu}$ von der $A_u B_u$ und werde von den Geraden $A_u u'$ und $B_u u'$ in Punkten E, E' geschnitten, deren Abstände von den Auflagersenkrechten ξ_u und ξ_u' sind, Fig. 266.

Dann ergibt sich $\frac{\min M_p^u}{h} = -p C_u$, wo

$$(35) \quad C_u = \frac{y_u (\xi_u^3 + \xi_u'^3) \nu}{8flh}.$$

Die beiden Grenzwerte von $M^u : h$ sind nun

$$(36) \quad \begin{cases} \frac{\min M_u}{h} = -g Y_u - p C_u \\ \frac{\max M_u}{h} = -g Y_u + p C_u \end{cases}$$

*) Wir berechnen die $\frac{M}{h}$, weil die Spannkkräfte in den Gurtstäben diesen Werten proportional sind.

und ebenso ergibt sich:

$$(37) \quad \begin{cases} \frac{\min M^o}{h} = +gY_o - pC_o \\ \frac{\max M^o}{h} = +gY_o + pC_o, \text{ wo} \end{cases}$$

$$(38) \quad C_o = \frac{y_o(\xi_o^3 + \xi_o'^3)v}{8flh}$$

Die Ermittlung von ξ_o und ξ_o' zeigt die ohne weitere Erklärung verständliche Figur 267. Liegt E' links von A , so ist $\xi_o' = 0$ zu setzen, hingegen $\xi_o = 0$, wenn E rechts von B fällt. — Durch die vorstehenden Formeln sind die Spannkkräfte in den Gurtingungen bestimmt.

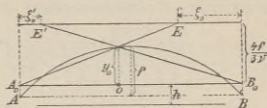


Fig. 267.

2. *Querkräfte.* Wird zunächst $H_g = 0$ angenommen, so entstehen Momente M_{og} , welche gleich den Ordinaten eines in eine Parabel vom Pfeil $\frac{gl^2}{8}$ eingeschriebenen Polygons sind und für das m te Feld ergibt sich die Querkraft:

$$Q_{omg} = \frac{M_{omg} - M_o(m-1)g}{\lambda} = \text{tg } \beta_m. \quad \text{Fig. 268.}$$

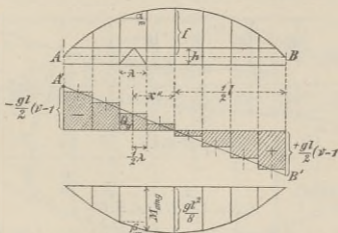


Fig. 268.

Mit Berücksichtigung von H_g erhält man also:

$$Q_{mg} = Q_{omg} - H_g \text{tg } \alpha_m = \text{tg } \beta_m - \frac{gl^2}{8f} v \text{tg } \alpha_m,$$

und wegen $\text{tg } \alpha_m : \text{tg } \beta_m = f : \frac{gl^2}{8}$,

$$(39) \quad Q_{mg} = -Q_{omg}(v-1).$$

Man hat also nur nötig, die im ersten Bande Seite 128 für die Querkräfte Q_{og} des einfachen Balkens gewonnenen Werte mit $-(v-1)$ zu multiplizieren und gelangt zu der in Fig. 268 dargestellten Querkraftsfläche. Will man rechnen, so setze man

$$(40) \quad Q_{mg} = -gx_m''(v-1).$$

Die Bestimmung des Einflusses der beweglichen Belastung p geschieht sehr übersichtlich wie folgt.

Im Abstände $\frac{4f}{3v}$ von der AB wird die Wagerechte $A'B'$ gezogen, und durch A eine Parallele zum m ten Stabe ($F'F''$) der dritten Gurtung gelegt (Fig. 269), welche die $A'B'$ in E schneidet. Eine durch E gehende Last P erzeugt — eine stetig gekrümmte H -Linie vorausgesetzt —

$$H = \frac{3Pab}{4fl} v = \frac{Pb}{l} \frac{a}{\frac{4f}{3v}} = \frac{Pb}{l} \cotg \alpha_m = A \cotg \alpha_m$$

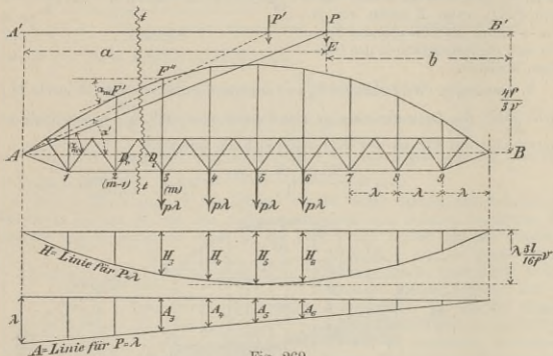


Fig. 269.

und bringt die Querkraft

$$Q_m = A - H \operatorname{tg} \alpha_m = 0$$

hervor. Eine links von E liegende Last P' verursacht $H = A \cotg \alpha'$ und die Querkraft $Q_m = A - A \cotg \alpha' \operatorname{tg} \alpha_m = A \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha_m}{\operatorname{tg} \alpha'}\right)$, welche positiv ist, weil $\operatorname{tg} \alpha_m < \operatorname{tg} \alpha'$ ist, während Lasten rechts von E negative Querkräfte Q_m erzeugen. Liegt aber P links von $m - 1$, so entsteht

$$Q_m = A - P - H \operatorname{tg} \alpha_m = -B - H \operatorname{tg} \alpha_m,$$

und hieraus darf man schließen, daß zur Erzielung von $\max Q_{mp}$ nur die zwischen dem Schnitte tt und der Senkrechten durch E gelegenen Knotenpunkte (mit je $p\lambda$) zu belasten sind.)* Zeichnet man nun die Einflußlinie für H und A unter der Voraussetzung, daß sich über den Träger die Last $1 \cdot \lambda$ bewegt und addiert die unter den belasteten Knotenpunkten gemessenen Ordinaten H und A , so erhält man

$$\max Q_{mp} = (\Sigma A - \operatorname{tg} \alpha_m \Sigma H) p,$$

*) Wir machen die zweckmäßige (etwas zu ungünstige) Annahme fester Knotenlasten $p\lambda$. Vergl. Band I Seite 118.

wobei in dem in der Fig. 269 dargestellten Falle

$$\Sigma A = A_3 + A_4 + A_5 + A_6; \quad \Sigma H = H_3 + H_4 + H_5 + H_6$$

ist. Die beiden Grenzwerte von Q sind nun

$$\max Q_m = -g x_m'' (\nu - 1) + p (\Sigma A - \operatorname{tg} \alpha_m \Sigma H)$$

$$\min Q_m = -q x_m'' (\nu - 1) + p (\Sigma A - \operatorname{tg} \alpha_m \Sigma H);$$

durch dieselben sind die Spannkkräfte der beiden Diagonalen D_r und D_l bestimmt.

Die vorstehend abgeleiteten Formeln lassen sich auch zur Berechnung der Spannkkräfte des in der Fig. 270 dargestellten Trägers benutzen. In den Gleichungen (21) bis (30) zur Bestimmung von H muß man h_o mit h_u vertauschen, F_o mit F_u .

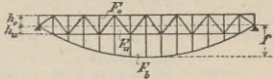


Fig. 270.

96. Zahlenbeispiel. Es soll die H -Linie des in Fig. 271 dargestellten Trägers zunächst angenähert, sodann aber mit Berücksichtigung der Längenänderungen sämtlicher Stäbe ermittelt werden. Die Knotenpunkte der dritten Gurtung liegen in einer Parabel, deren Pfeil $f = 6,12^m$ ist. *)

1. *Vernachlässigung der Längenänderungen der Füllungsstäbe.* Die Gewichte w der einzelnen Knotenpunkte des Versteifungsbalkens sind nach den

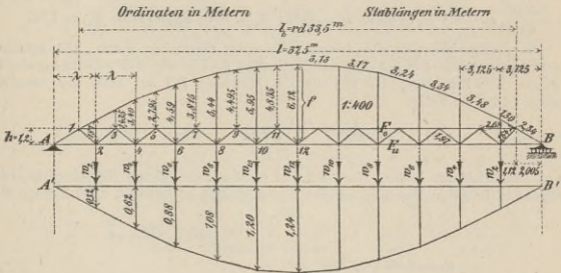


Fig. 271.

Gleich. (12) und (13) zu berechnen, worauf \mathfrak{R} durch Gleich. (16) und H durch die Formel

$$H = P \frac{M_w}{\mathfrak{R}}$$

bestimmt ist. Geschätzt seien: $\frac{F_o}{F_u} = 0,37$; $\frac{F_o}{F_b} = 0,40$. Man erhält

$$\text{für einen unteren Knoten } m; \quad w_m = y_m$$

$$\text{für einen oberen Knoten } k; \quad w_k = y_k \frac{F_o}{F_u} = 0,37 y_k,$$

*) Figur 271 stellt den Hauptträger einer 1889 in Hannover nach den Plänen des Verfassers erbauten Straßenbrücke über die Ihme dar.

und wenn die den Knoten 1, 3, 5, 7, ... entsprechenden w auf die Angriffspunkte 2, 4, 6, ... der Querträger verteilt werden:

$$\begin{aligned} w_2 &= 1,87 + \frac{1}{2} \cdot 1,435 \cdot 0,37 = 2,14 \\ w_4 &= \frac{1}{2} \cdot 1,435 \cdot 0,37 + 3,40 + \frac{1}{2} \cdot 2,795 \cdot 0,37 = 4,18 \\ w_6 &= \frac{1}{2} \cdot 2,795 \cdot 0,37 + 4,59 + \frac{1}{2} \cdot 3,815 \cdot 0,37 = 5,80 \\ w_8 &= \frac{1}{2} \cdot 3,815 \cdot 0,37 + 5,44 + \frac{1}{2} \cdot 4,495 \cdot 0,37 = 6,95 \\ w_{10} &= \frac{1}{2} \cdot 4,495 \cdot 0,37 + 5,95 + \frac{1}{2} \cdot 4,835 \cdot 0,37 = 7,64 \\ w_{12} &= \frac{1}{2} \cdot 4,835 \cdot 0,37 + 6,12 + \frac{1}{2} \cdot 4,835 \cdot 0,37 = 7,88. \end{aligned}$$

Die Angriffsmomente M_w des mit diesen Gewichten w belasteten Balkens $A'B'$ sind, wenn die Feldweite $\lambda = 1$ gesetzt wird:*)

$$\begin{array}{l|l|l} M_{w_2} = 30,65 & M_{w_6} = 83,49 & M_{w_{10}} = 113,60 \\ M_{w_4} = 59,16 & M_{w_8} = 102,02 & M_{w_{12}} = 117,54. \end{array}$$

Nun findet man:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= \Sigma y_m^2 + \frac{F'_a}{F'_u} \Sigma y_k^3 + \frac{h^2 l_b}{\lambda} \frac{F'_a}{F'_b} = 2 (1,87^2 + 3,40^2 + 4,59^2 + 5,44^2 + 5,95^2) + 6,12^2 \\ &+ 0,37 \cdot 2 (1,435^2 + 2,795^2 + 3,815^2 + 4,495^2 + 4,835^2) + \frac{1,2^2 \cdot 33,5}{3,125} \cdot 0,40 = 296,20 \end{aligned}$$

und (da die M_w vorher für $\lambda = 1$ berechnet worden sind) mit $P = 1$:

$$H = \frac{M_w \cdot \lambda}{296,20} = \frac{M_w \cdot 3,125}{296,20} = \frac{M_w}{94,78}, \text{ also}$$

$$H_2 = \frac{30,65}{94,78} = 0,32; \quad H_4 = 0,62; \quad H_6 = 0,88; \quad H_8 = 1,08; \quad H_{10} = 1,20; \quad H_{12} = 1,24.$$

2. Berücksichtigung der Längenänderungen sämtlicher Stäbe. Die Inhalte der Stabquerschnitte (ohne Abzug der Nietlöcher) sind in Fig. 272 zusammengestellt worden. Zur Ermittlung der H -Linie soll Gleichung (V) auf Seite 169 benutzt werden. Dieselbe liefert

$$H_m = P_m \frac{\delta_m}{\Sigma \frac{S'^2 \delta_m}{EF}}$$

wo S' die Stabkraft infolge $H = -1$ und δ_m die durch diesen Belastungszustand verursachte lotrechte Verschiebung des Knotenpunktes m bedeutet. Die Summe Σ

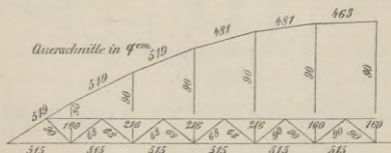


Fig. 272.

umfaßt sämtliche Stäbe des Fachwerks. Den Kräfteplan für $H = -1$ zeigt Fig. 273 a. Man denke sich in den Stäben der dritten Gurtung Zugkräfte S'_1, S'_2, \dots hervorgerufen, deren wagerechte Seitenkraft = 1 ist, bestimme die in den lotrechten Zwischenstäben hierdurch erzeugten Drücke, $S' = Z'$ (welche beim Parabelbogen

*) Vergl. Seite 206. Die rechnerische Bestimmung der M_w ist der zeichnerischen Ermittlung unbedingt vorzuziehen.

von gleicher Feldweite den konstanten Wert $-\frac{8f\lambda}{l^2} = -\frac{8 \cdot 6,12}{37,5 \cdot 12} = -0,11$ annehmen) und zeichne hierauf für den mit den Kräften S_1' und Z' belasteten Versteifungsbalken einen Cremonaschen Plan. Die Ergebnisse sind in die Fig. 273 b eingeschrieben, ebenso (in Klammern) die den Stäben der dritten Gurtung entsprechenden Werte $\frac{S'^2 s}{EF}$. Bei Berechnung der letzteren wurde die für alle Stäbe gleiche Elastizitätsziffer E , deren Größe auf das Verhältnis $\delta_m = \Sigma \frac{S'^2 s}{EF}$ ohne Einfluß ist, $= 1$ gesetzt.

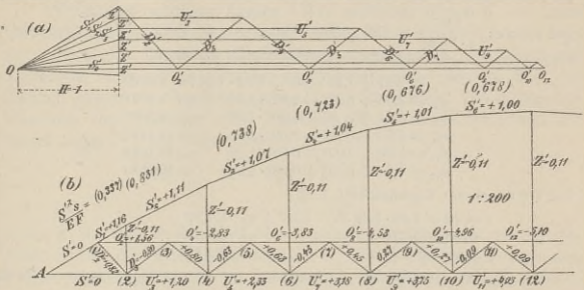


Fig. 273.

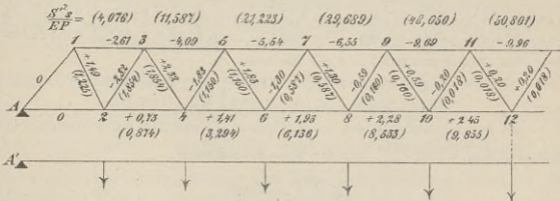


Fig. 274.

Als Einheiten wurden die Tonne und das *cm* gewählt, so daß sich beispielsweise für das dritte Feld der Wert

$$\frac{S'^2 s}{EF} = \frac{1,07^2 \cdot 334}{1 \cdot 519} = 0,738$$

ergab.

Jetzt wurden für den Zustand $H = -1$ die Längenänderungen $\Delta s = \frac{S' s}{EF}$ der Stäbe des Versteifungsbalkens berechnet und in Fig. 274*) zusammengestellt

*) Diese Figur ist verzerrt gezeichnet worden, um Platz für die Zahlen zu gewinnen.

(nicht eingeklammerte Zahlen), desgleichen die Werte $\frac{S'^2 s}{EF} = S' \Delta s$ (eingeklammerte Zahlen). Für den zweiten Untergurtstab wurden z. B. erhalten:

$$\Delta s = \frac{1,20 \cdot 312,5}{1 \cdot 515} = 0,7282 = 0,73 \text{ und } S' \Delta s = 1,20 \cdot 0,7282 = 0,874. *)$$

Die Durchbiegungen δ_m lassen sich als Momente M_w eines einfachen Balkens $A'B'$ (Fig. 271) deuten, welcher mit Gewichten w belastet wird, zu deren Berechnung die Gleichungen (6) und (7) auf Seite 105 dienen. Wegen $\sec \varphi_1 = \frac{1,64}{1,12} = 1,46$ und $\sec \varphi = \frac{1,97}{\frac{1}{2} \cdot 3,125} = 1,26$ ergeben sich, wenn die überall gleiche Abmessung h zunächst = 1 gesetzt wird, für die unteren Knoten die Werte:

$$\begin{aligned} w_2 &= 2,61 + 1,49 \cdot 1,46 - 2,32 \cdot 1,26 = 1,8622 \\ w_4 &= 4,09 + (2,32 - 1,83) \cdot 1,26 = 4,7074 \\ w_6 &= 5,54 + (1,83 - 1,30) \cdot 1,26 = 6,2078 \\ w_8 &= 6,55 + (1,30 - 0,59) \cdot 1,26 = 7,4446 \\ w_{10} &= 9,69 + (0,59 - 0,20) \cdot 1,26 = 10,1814 \\ w_{12} &= 9,96 + (0,20 + 0,20) \cdot 1,26 = 10,4640 \end{aligned}$$

und für die oberen Knotenpunkte:

$$\begin{array}{l|l} w_1 = -1,49 \cdot 1,46 = -2,18 & w_7 = 1,93 \\ w_3 = 0,73^{**}) & w_9 = 2,28 \\ w_5 = 1,41 & w_{11} = 2,45. \end{array}$$

Werden die Gewichte der oberen Knoten auf die Querträger-Angriffspunkte 2, 4, 6, . . . verteilt, so erhält man für diese letzteren die Gewichte:

$$\begin{array}{l|l} w_2 = 1,8622 - 2,18 \frac{2,005}{3,125} + \frac{1}{2} 0,73 = 0,83 & w_8 = 7,4446 + \frac{1}{2} (1,93 + 2,28) = 9,55 \\ w_4 = 4,7074 + \frac{1}{2} (0,73 + 1,41) = 5,78 & w_{10} = 10,1814 + \frac{1}{2} (2,28 + 2,45) = 12,55 \\ w_6 = 6,2078 + \frac{1}{2} (1,41 + 1,93) = 7,88 & w_{12} = 10,4640 + \frac{1}{2} (2,45 + 2,45) = 12,91, \end{array}$$

denselben entsprechen mit $\lambda = 1$ die Momente:

$$\begin{array}{l|l|l} M_{w_2} = 43,045 & M_{w_6} = 121,695 & M_{w_{10}} = 169,255 \\ M_{w_4} = 85,260 & M_{w_8} = 150,250 & M_{w_{12}} = 175,710. \end{array}$$

Die Zusammenzählung der in die Figuren 273 und 274 eingeschriebenen (eingeklammerten) Werte $\frac{S'^2 s}{EF}$ gibt für beide Trägerhälften:

$$\Sigma \frac{S'^2 s}{EF} = 362,937,$$

und hierzu tritt noch für die Hängestangen, für welche durchweg $S' = -0,11$ und $F = +90 \text{ qcm}$ ist, das Glied:

$$\frac{0,11^2}{1 \cdot 90} \cdot [2 (1,87 + 3,40 + 4,59 + 5,44 + 5,95) + 6,12] = 0,00654$$

weshalb

$$\Sigma \frac{S'^2 s}{EF} = 362,937 + 0,654 = 363,59.$$

*) Die Stablängen (in Metern) sind in Fig. 271 angegeben.

***) An jedem Knoten 3, 5, 7, . . . greifen zwei Diagonalen an, deren Längenänderungen entgegengesetzt gleich sind und sich daher tilgen.

Da nun bei Berechnung der M_w sowohl $h=1$ als auch $\lambda=1$ gesetzt wurde, so folgt jetzt für $P=1$

$$H = \frac{M_w}{363,59} \cdot \frac{\lambda}{h} = \frac{M_w \cdot 312,5}{363,59 \cdot 120} = \frac{M_w}{139,62}, \text{ also}$$

$$H_2 = \frac{43,045}{139,62} = 0,31; H_4 = 0,61; H_6 = 0,87; H_8 = 1,08; H_{10} = 1,21; H_{12} = 1,26.$$

Diese genaueren Werte weichen von den vorhin berechneten nur unwesentlich ab.

Wir empfehlen dem Leser, zur Übung die δ_m -Linie noch mit Hilfe eines Williot'schen Planes oder mittels des Stabzugverfahrens zu bestimmen.

97. Einfluß schräger Lasten. Wir schließen diesen § mit einer Untersuchung des Einflusses schräger Lasten auf einen Zweigelenkbogen mit gesprengter Zugstange (Dachbinder) und machen auf diejenigen Annahmen aufmerksam, welche zur Vereinfachung des im § 5 erledigten strengeren Verfahrens gemacht werden dürfen. Der allgemeine Ausdruck für H infolge einer Einzellast P_m ist (nach der ersten der Gleichungen (V) auf Seite 169):

$$(41) \quad H = P_m \frac{\delta_m'}{\sum \frac{S'^2 s}{EF}}$$

worin S' die dem Zustande $H=-1$ entsprechende Spannkraft irgend-eines Stabes des Fachwerks ist, und δ_m' die Verschiebung bedeutet, welche der Angriffspunkt m der Last P_m im Sinne von P_m erfährt, sobald nur die Ursache $H=-1$ wirkt. Die Ermittlung der Verschiebungen δ' , die in Fig. 275 mit Hilfe eines Williot'schen Planes erfolgte, darf stets unter der Voraussetzung starrer Füllungsstäbe durchgeführt werden; auch ist es zulässig, sämtlichen Gurtstäben denselben Querschnitt F_e zuzuschreiben. Setzt man dann bei der Berechnung der

Längenänderungen $\Delta s = \frac{S's}{EF_e}$ der Gurtstäbe sowohl $E=1$ als auch $F_e=1$, so muß man in Gleich. (41) den Nenner durch den Wert $\sum S'^2 s \frac{F_e}{F}$ ersetzen. In Fig. 275 liegt ein symmetrischer Träger vor.

Es wurde bei Aufzeichnung des Verschiebungsplanes zunächst der Mittelpunkt und die Richtung des Stabes s_5 als festliegend angesehen, hierauf $6'4' = \Delta 5^*)$ gemacht und $5'4' \perp 54$, $5'6' \perp 56$ gezogen. Die Anschließung der Punkte $3'$, $1'$, $0'$, A' erfolgte nach Nr. 32. — Die Punkte $8'$, $10'$, B' liegen in bezug auf die Senkrechte durch $5'$ symmetrisch zu $2'$, $1'$, A' ; und ebenso würde man, falls auch in den Knoten 1 , 3 , 5 , 7 , 9 , C , D Lasten angreifen sollten, die symmetrisch zu $3'$ und $1'$ gelegenen Punkte $7'$, $9'$ eintragen und endlich C' , D' , welche in Fig. 275 fortgelassen sind, bestimmen. Behufs Erfüllung der wirklichen Auflagerbedingungen mußte schließlich der Verschiebungs-

*) Wir erinnern an die Bezeichnung $\Delta s_5 = \Delta 5$.

pol aus dem Mittelpunkte von $\Delta 5$ in den dem festen Auflager A entsprechenden Punkte A' gelegt werden, worauf sich beispielsweise die Verschiebung δ_2' des Knotens 2 im Sinne von P_2 gleich der Projektion des Strahles $A'2'$ und die Richtung von P_2 ergab.*)

Wären nun Zugstange und Zwischenstäbe nicht vorhanden, so würde sich

$$\Sigma S'^2 s \frac{F_c}{F} = \delta_B' = \overline{A'B'}$$

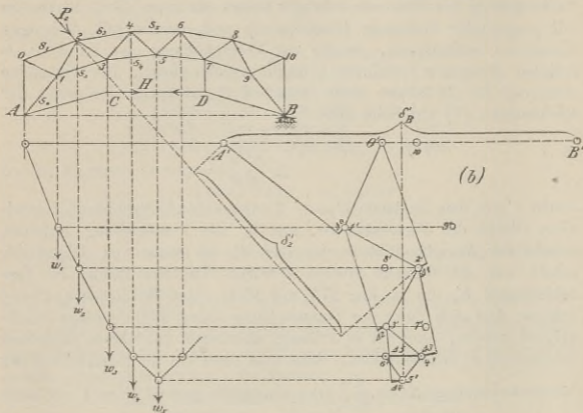


Fig. 275.

ergeben, d. h. gleich der Verschiebung, welche B infolge des Belastungszustandes $H = -1$ erfährt. Im vorliegenden Falle ist aber

$$\Sigma S'^2 s \frac{F_c}{F} = \delta_B' + \Sigma_z S'^2 s \frac{F_c}{F},$$

wobei sich das Zeichen Σ_z über die Glieder der Zugstange und die Zwischenstäbe erstreckt, und hierfür darf stets

$$\Sigma S'^2 s \frac{F_c}{F} = \delta_B' + l \frac{F_c}{F_b}$$

*) Die bei unsymmetrischem Träger nach Nr. 33, Seite 63, zu zeichnende Figur $A''0''1'' \dots B''$ schrumpft hier zu einem mit A' sich deckenden Punkte zusammen.

gesetzt werden,*) womit sich

$$H = P_m \frac{\delta_m'}{\delta_b' + l \frac{F_c}{F_b}}$$

ergibt, oder, falls man die Lasteinheit durch eine Strecke von der Länge $\delta_b' + l \frac{F_c}{F_b}$ darstellt,

$$H = P_m \delta_m'$$

Will man die Punkte 5', 6', 4', . . . in Fig. 275b aus der nach Nr. 93 für die lotrechte Lastenrichtung ermittelten Biegungslinie ableiten, was manchmal vorteilhaft ist, so beachte man die Beziehung:

$w_m = \frac{\Delta s_m}{r_m}$ (absolut genommen). Hat man also die Gewichte w nicht

mittels der Gleichungen auf Seite 250 berechnet, sondern von den später gezeigten Vereinfachungen Gebrauch gemacht, so muß man bei Aufzeichnung des Linienzuges 5', 4', 2', 0', 1', A' die Längenänderungen

$\Delta s = w r$ auftragen und auch das Glied $l \frac{F_c}{F_b}$ entsprechend ändern.

Liegt z. B. ein Sichelträger vor und wird nach Seite 205 das Gewicht

$w_m = \frac{y_m}{r_m^2}$ (statt $\frac{y_m s_m}{r_m^2}$) eingeführt, so folgt für den dem Knoten m

gegenüberliegenden Gurtstab: $\Delta s_m = \frac{y_m}{r_m}$ und es muß $\frac{l}{s_c} \frac{F_c}{F_b}$ an die

Stelle von $l \frac{F_c}{F_b}$ treten, wo s_c die mittlere Gurtstablänge bedeutet.

Sind sämtliche Füllungsstäbe mit Ausnahme eines etwa vorhandenen Endständers gegen die Lotrechte geneigt, so bestimme man 4', 3', 2', 0', indem man 5'—4' \perp 5—4, 4'—3' \perp 4—3, 3'—2' \perp 3—2, 2'—1' \perp 2—1 und 1'—0' \perp 1—0 zieht, worauf A' am schnellsten mit Hilfe von $\Delta s_o = \Delta 0$ festgelegt wird.

Schließlich sei noch daran erinnert, daß sich die Punkte 4', 2', 0', A' auch nach dem Stabzugverfahren ermitteln lassen, wie das in Nr. 85 durchgeführte Zahlenbeispiel gezeigt hat.

Wird die Zugstange durch geneigte Stäbe mit dem Fachwerkbogen verbunden, Figur 276**), so führe man die Spannkraft X irgend eines Gliedes derselben als statisch nicht bestimmbare Größe ein, ermittle die von der Ursache $X = -1$ hervorgerufenen Spannkräfte und Längenänderungen und zeichne — wie in Figur 275 — einen Williot'schen Verschiebungsplan. Die Bestimmung der S' für die Glieder der Zug-

*) Vergl. Seite 251, Gleich. (11).

**) In dieser Weise sind z. B. die Dachbinder der Queens-Street-Station der North British Railway in Glasgow angeordnet.

stange und für die Zwischenstäbe hat hierbei nach Fig. 276b zu erfolgen.*) Zu betonen ist, daß alle vorhin als zulässig bezeichneten Annahmen auch für den Fall schräger Hängestangen statthaft sind;

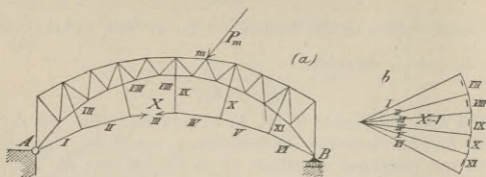


Fig. 276.

die Berechnung von X darf dann bei der üblichen geringen Sprengung der Zugstange mittels der Formel

$$X = P_m \frac{\delta_m'}{\delta_B' + l \frac{F_c}{F_b}} \quad (\text{vergl. Seite 265})$$

erfolgen.

Hinsichtlich der bei der Berechnung von Dachbindern in Betracht zu ziehenden Belastungsfälle wird auf Band I, § 39, verwiesen.

§ 9.

Kette, versteift durch einen Fachwerkbalken.

98. Eine sehr wichtige Trägerart, deren Berechnung sich von der Untersuchung der im vorigen § behandelten Stabgebilde nur wenig unterscheidet, ist die in Fig. 277 dargestellte, durch einen einfachen Balken versteifte Kette. Bei R und T seien auf wagerechter Bahn geführte Auflager angeordnet; die Hängestangen seien lotrecht.

Da es zweckmäßig ist, den Versteifungsbalken nur durch die bewegliche Belastung zu beanspruchen, so wird man das Bauwerk zunächst als unversteifte Kettenbrücke ausführen und die Dreiecke des Versteifungsbalkens erst dann schließen, wenn die Kettenglieder und die Hängestangen die der ständigen Belastung entsprechenden Längenänderungen erfahren haben.

Die Aufsuchung der Form der meistens durch drei angenommene Punkte R , W , T geführten Kette und die Ermittlung der Spannkraften

*) Die Unterschiede in den Spannkraften der einzelnen Glieder werden stets gering sein; durch entsprechende Neigung der Hängestangen läßt sich sogar erreichen, daß in allen Teilen der Zugstange dieselbe Spannkraft X auftritt.

infolge der ständigen Belastung ist bereits im I. Bande (S. 404—408) unseres Buches beschrieben worden, und wir fügen nur noch hinzu, daß auf dem dort angegebenen Wege die Gestalt der durch die ständige Belastung *gespannten* Kette — nicht diejenige der *spannungslosen* — gefunden wird, daß also die Längen, welche den Kettengliedern und Hängestangen in der Werkstatt zu geben sind, $= s - \frac{S_g s}{EF}$ sein müssen,

wenn allgemein s die Länge des fraglichen Stabes auf Grund der erwähnten Formbestimmung und S_g die Spannkraft infolge der ständigen Belastung bedeutet. Daß außerdem noch der Unterschied zwischen Aufstellungs- und Werkstatt-Temperatur berücksichtigt werden muß, ist selbstverständlich, ebenso daß bei Bemessung der Pfeilerhöhen der Verkürzung Rechnung zu tragen ist, welche die Pfeiler infolge der ständigen Belastung erfahren werden.

Wird nur ein Teil (g_e) der ständigen Belastung (g) vor Ausführung der Versteifung aufgebracht, der Rest (g_n) erst *nach* Einfügung des Balkens, so ist in der vorstehenden Betrachtung S_{g_e} an die Stelle von S_g zu setzen. Die beschriebene Formbestimmung liefert die Gestalt der mit g_e belasteten Kette und der Einfluß von g_n muß, ebenso wie derjenige der beweglichen Belastung, nach den in den folgenden Untersuchungen abgeleiteten Verfahren festgestellt werden.

Andererseits könnte man aber auch außer der gesamten ständigen Belastung (g) noch eine Belastung g' auf die unversteifte Brücke bringen und nach Vollendung des Versteifungsbalkens wieder entfernen. Es würde dann, bei Untersuchung der nach der Versteifung hinzutretenden Lasten, g' als eine negative Belastung aufzufassen sein.

Ähnliche Verhältnisse lassen sich natürlich bei jedem statisch unbestimmten Träger herbeiführen. So könnte man z. B. einen Zweigelenkbogen zunächst mit Scheitelgelenk ausführen und dieses Gelenk nach Aufbringung der gesamten ständigen Belastung g oder eines Teiles von g vernichten; auch eine später wieder zu beseitigende Belastung g' könnte zuweilen von Vorteil sein.

Die Untersuchung des Einflusses der nach erfolgter Versteifung der Kette auf den Balken gebrachten Belastungen beginnen wir wie immer mit der Betrachtung der Wirkung einer Einzellast.

99. Der Horizontalzug H infolge einer Einzellast. Verbindet man die senkrecht über den Balkenstützen A, B gelegenen Punkte A'', B'' der Kette durch eine Gerade (die *Schlußlinie*) und bezeichnet die Strecke, welche Kette und Schlußlinie auf der Lotrechten durch irgendeinen Knotenpunkt m abschneiden, mit y_m (Fig. 277), so ist das auf m bezogene Angriffsmoment:

$$M_m = M_{0m} - Hy_m,$$

wo M_{0m} den Wert von M_m für den Fall bedeutet, daß der von den Lasten P ergriffene Balken nicht an der Kette hängt, sondern nur in

A und B gestützt wird. Für den Zustand $H = -1$ ergibt sich $M'_m = y_m$ und hieraus folgt, daß die Berechnung des von einer Einzelast P hervorgerufenen Horizontalzuges H sich von der Ermittlung der Werte H für die im vorigen § behandelten Trägerarten nur insofern unterscheidet, als die im Nenner des allgemeinen Ausdrucks für H stehende Summe $\Sigma \frac{S'^2 s}{EF}$ von den Rückhaltketten beeinflußt wird. Die Spannkraft der unter α' geneigten linken Rückhaltkette ist $= H \sec \alpha'$

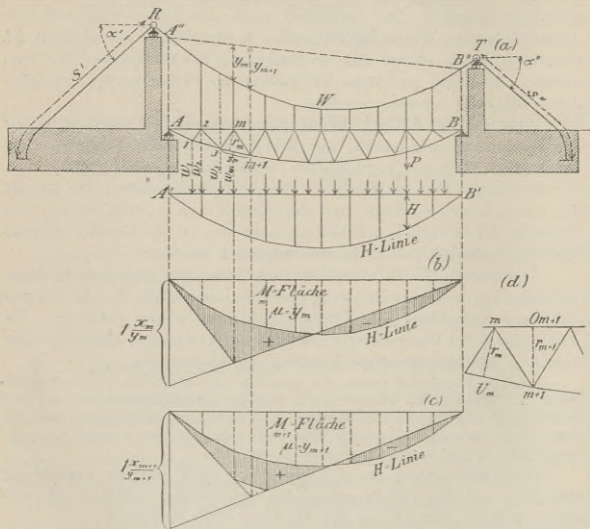


Fig. 277.

und nimmt für $H = -1$ den Wert $S' = -\sec \alpha'$ an. Ist also die Länge dieser Kette $= s'$ und der Querschnitt $F = F_k \sec \alpha'$, wo F_k den zur Aufnahme der Spannkraft $S = H_{max}$ bestimmten Scheitel-Querschnitt der Tragkette RWT bedeutet, so ergibt sich $\frac{S'^2 s}{EF} = \frac{s' \sec \alpha'}{EF_k}$, wobei allerdings vorausgesetzt wird, daß sämtliche Glieder der Rückhaltkette gleich gespannt sind, daß also die Stützung derselben auf die in

Figur 171 (Seite 175) dargestellte Weise erfolgt. Bezeichnen s'' und α'' die entsprechenden Werte der rechten Rückhaltkette, so führen die vorstehenden Betrachtungen zu der folgenden Bestimmungsweise der Einflußlinie für H .

Man berechne die Momente M_w eines mit den Gewichten $w_m = \frac{y_m s_m}{r_m^2} \frac{F_c}{F_m}$ belasteten einfachen Balkens $A'B'$ (unter F_c eine beliebig große, aber konstante Querschnittsfläche verstanden) und dividiere dieselben durch

$$(1) \quad \mathfrak{R} = \sum z_m + \frac{F_c}{F_b} (\sum \lambda_r \sec^2 \alpha_r + s' \sec \alpha' + s'' \sec \alpha'') \\ + \frac{F_c}{F_a} \sum z_r (tg \alpha_r - tg \alpha_{r+1})^2,$$

worin $z_m = y_m w_m$. Das Ergebnis ist $H = \frac{M_w}{\mathfrak{R}}$.*)

Die zweite der Summen in Gleichung (1) erstreckt sich über sämtliche Glieder der Tragkette, die dritte über alle Hängestangen. Für

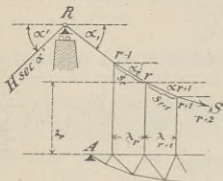


Fig. 278.

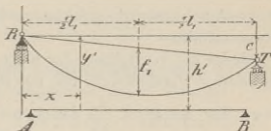


Fig. 279.

beide Summen lassen sich einfache, genügend genaue Näherungsformeln ableiten. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Kette als stetig gekrümmte Parabel und setzen mit Bezugnahme auf die Bezeichnungen in Fig. 279:

$$y' = \frac{4 f_1 x (l_1 - x)}{l_1^2} + \frac{cx}{l_1} \quad \text{und}$$

$$\sum \lambda_r \sec^2 \alpha_r = \int_0^{l_1} dx \left[1 + \left(\frac{dy'}{dx} \right)^2 \right] = l_1 \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f_1^2}{l_1^2} + \frac{c^2}{l_1^2} \right)$$

*) Die Bezeichnungen sind dieselben wie im vorigen §; sie wurden überdies in die Figuren 277 und 278 eingetragen. Die Knotenpunkte des Balkens und der Kette wurden für sich numeriert; ... $m-1$, m , $m+1$... sind die Ordnungsziffern der Knotenpunkte des Balkens, ... $r-1$, r , $r+1$... diejenigen der Knotenpunkte der Kette.

$$\begin{aligned}
 \text{ferner } \Sigma x_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1})^2 &= \lambda \Sigma (h' - y') \lambda \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1}}{\lambda} \right)^2 \\
 &= \lambda \int_0^{l_1} (h' - y') dx \left(\frac{d^2 y'}{dx^2} \right)^2 = \lambda \left(\frac{8f_1}{l_1^2} \right)^2 \int_0^{l_1} (h' - y') dx \\
 &= \lambda \left(\frac{8f_1}{l_1^2} \right)^2 l_1 \left(h' - \frac{2}{3} f_1 - \frac{c}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Wir erhalten dann:

$$(2) \quad \mathfrak{N} = \Sigma x_m + \frac{F'_c}{F'_h} s_0 + \frac{64 f_1^2 (3 h' - 2 f_1 - 1,5 c) \lambda}{3 l_1^3} \frac{F'_c}{F'_z}, \text{ wo}$$

$$(3) \quad s_0 = l_1 \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f_1^2}{l_1^2} + \frac{c^2}{l_1^2} \right) + s' \sec \alpha' + s'' \sec \alpha''.$$

Das von den Abmessungen der Hängestangen abhängige letzte Glied von \mathfrak{N} darf in der Regel gestrichen werden; sein Einfluß ist sehr gering. Bei Berechnung der Werte w_m und x_m ist es zulässig, allen Gurtstäben denselben Querschnitt zuzuschreiben. Man setze daher

$$(4) \quad w_m = \frac{y_m s_m}{r_m^2}$$

und verstehe unter dem bislang willkürlichen F'_c den Mittelwert der Gurtquerschnitte.

Erfolgt die Versteifung der Kette durch einen nach Fig. 282 (S. 274) angeordneten Parallelträger von der Höhe h , so nimmt bei gleich langen Feldern der Ausdruck $\frac{s_m}{r_m^2}$ den festen Wert $\frac{\lambda}{h^2}$ an. Setzt man dann

$$(5) \quad w_m = y_m \text{ und } x_m = y_m w_m = y_m^2,$$

so muß man mit

$$(6) \quad \mathfrak{N} = \Sigma y_m^2 + \frac{h^2}{\lambda} \left[\frac{F'_c}{F'_h} s_0 + \frac{64 f_1^2 (3 h' - 2 f_1 - 1,5 c) \lambda}{3 l_1^3} \frac{F'_c}{F'_z} \right]$$

rechnen.

Für die durch einen Parallelträger versteifte Kette ist aber noch eine weitere Vereinfachung möglich, bestehend in der Einführung einer parabelförmigen H -Linie. Die Entwicklung ist ähnlich der in Nr. 82 für den Horizontalschub eines Zweigelenkbogens gegebenen Ableitung. Man betrachte die Kette als stetig gekrümmte Parabel, deren Gleichung

$$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}$$

ist (Fig. 280), und ersetze die Einzelgewichte w durch eine stetige Belastung, so zwar, daß das Balkenteilchen dx mit $2y dx$ belastet wird, wobei die Ziffer 2 ausdrückt, daß an der Stelle dx die Gewichte *zwei*er Knoten (eines oberen und eines unteren) zu berücksichtigen sind. Man erhält dann an der Angriffsstelle von P das Moment

$$\begin{aligned}
 & \text{für die Rückhaltketten: } \Sigma S' s = -(s' \sec \alpha' + s'' \sec \alpha'') \\
 & \text{,, ,, Hängestangen: } \Sigma S' s = -\Sigma x_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1}) \\
 & = -\Sigma (h' - y') \lambda \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1}}{\lambda} \right) = + \int_0^{l_1} (h' - y') dx \frac{d^2 y'}{dx^2} \\
 & = - \left(\frac{8 f_1}{l_1^2} \right) \int_0^{l_1} (h' - y') dx = - \frac{8 f_1}{l_1^2} l_1 \left(h' - \frac{2}{3} f_1 - \frac{c}{2} \right)
 \end{aligned}$$

und erhalten:

$$(11) \quad H_t = - \frac{\varepsilon E F_c t}{\mathfrak{N}} \left[s_0 + \frac{8 f_1 (3 h' - 2 f_1 - 1,5 c)}{3 l_1} \right],$$

wobei \mathfrak{N} und s_0 nach Gleichung (2) und (3) zu berechnen sind.

Das Vorzeichen deutet an, daß infolge einer Erhöhung der Aufstellungstemperatur der Horizontalzug der Kette abnimmt.

Wird die Kette durch einen Parallelträger versteift, so läßt sich Gleich. (11) noch erheblich vereinfachen. Man ersetze dann nach Streichung des unwesentlichen Einflusses der Hängestangen und Einführung eines mittleren Gurtquerschnittes den Wert

$$\mathfrak{N} = \Sigma \frac{y_m^2 s_m}{r_m^2} + \frac{F_c}{F_b} s_0$$

durch

$$\mathfrak{N} = 2 \int_0^l \frac{y^2 dx}{h^2} + \frac{F_c}{F_b} s_0 = \frac{16 f^2 l}{15 h^2} + \frac{F_c}{F_b} s_0,$$

um dann zu erhalten:

$$H_t = - \varepsilon E F_b t \frac{15 h^2}{16 f^2} \frac{s_0}{l} \frac{F_c}{F_b} \frac{1}{1 + \frac{15 h^2}{16 f^2} \frac{s_0}{l} \frac{F_c}{F_b}},$$

oder nach einfacher Umformung:

$$(12) \quad H_t = - \varepsilon E F_b t (1 - \nu),$$

wo ν nach Gleich. (8) auf Seite 271 zu berechnen ist.

101. Einflußflächen. Die Einflußflächen für die Momente

$$M_m = M_{0m} - H y_m \quad \text{und} \quad M_{m+1} = M_{0m+1} - H y_{m+1}$$

sind in den Figuren 277b und 277c (für den Fall in den oberen Balkenknoten angreifender Lasten) dargestellt worden. Ihre Aufzeichnung bedarf keiner weiteren Erläuterung mehr, da sie nach den in den §§ 7 und 8 für die M -Flächen gegebenen Regeln erfolgt. Nach Berechnung der Momente M_m , M_{m+1} findet man die Spannkkräfte in den Gurtungen:

$$U_m = + \frac{M_m}{r_m}; \quad O_{m+1} = - \frac{M_{m+1}}{r_{m+1}} \quad (\text{vergl. Fig. 277d}).$$

Auch die Ermittlung der Spannkkräfte in den Füllungsstäben gestaltet sich ganz ähnlich wie beim Zweigelenbogen und bei den im

§ 9 untersuchten Trägerarten. Wir führen durch A und B (Fig. 281) lotrechte Schnitte, welche die Tragkette in A'' beziehungsweise B'' treffen, zerlegen die Spannkraft S_1 und S_n der äußersten Kettenglieder in die lotrechten Seitenkräfte A_o, B_o und die in die Schlußlinie fallenden Seitenkräfte $H',$ und finden zunächst aus der auf B'' bezogenen Momentengleichung:

$$(A_o + A_u)l - Pb = 0,$$

daß $A_o + A_u$ ebenso groß ist, wie der Stützenwiderstand $A = \frac{Pb}{l}$

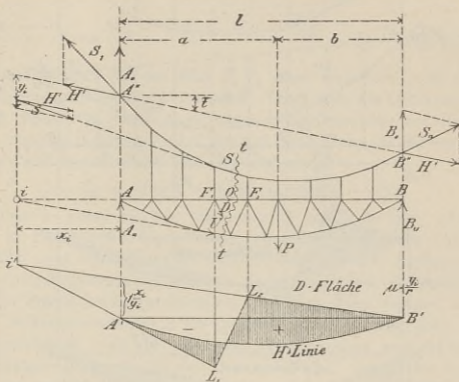


Fig. 281.

eines einfachen Balkens AB , und daß ferner $B_o + B_u = B = \frac{Pa}{l}$ ist.

Sodann führen wir behufs Bestimmung von D den Schnitt tt , wählen den Treffpunkt i von O und U zum Drehpunkt, bestimmen die Strecke y_i , welche der Kettensab S und die Schlußlinie $A''B''$ auf der Lotrechten durch i abschneiden, zerlegen die Spannkraft S (welche auf die in der Fig. 281 angegebene Weise in ihrer Richtung verschoben wird) in eine lotrechte Seitenkraft und in die zur Schlußlinie parallele $H' = H \sec \tau$ (wo τ den Neigungswinkel der Schlußlinie bedeutet) und erhalten die Momentengleichung

$$(13) \quad M_{0i} - Hy_i + Dr_i = 0.$$

Hierin bedeutet M_{0i} das auf den Punkt i bezogene Angriffsmoment für den Fall, daß AB ein einfacher, nicht an der Kette hängender

Balken ist, ein Balken also, dessen Stützenwiderstände $A_o + A_u = A$ und $B_o + B_u = B$ sind; r_i aber ist der Hebelarm von D in bezug auf i . Die Gleichung (13) hat dieselbe Form wie Gleichung (34) auf Seite 217, und hieraus folgt die aus der Figur 281 ersichtliche Bestimmungsweise der D -Fläche. Man vergleiche die Figuren 222 bis 225 auf Seite 222 und beachte behufs Feststellung der Vorzeichen,

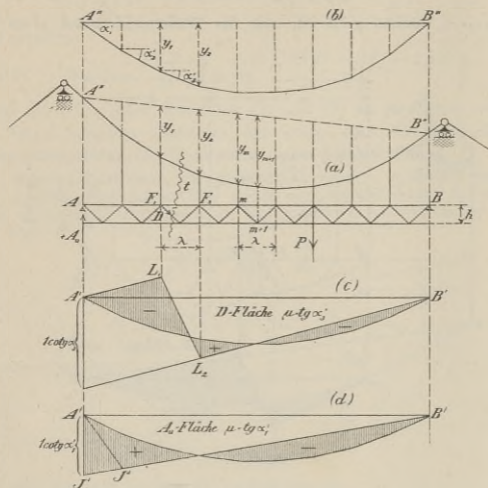


Fig. 282.

daß bei der in Fig. 281 angenommenen Lage des Punktes i der Einfluß von H auf D gleich $+H \frac{y_i}{r_i}$ (also positiv) ist, während sich im Falle $H=0$ die Momentengleichung

$$-(A_o + A_u) x_i + D r_i = 0$$

und hieraus der ebenfalls positive Wert

$$D = + A \frac{x_i}{r_i}$$

ergeben würde.

Es leuchtet ein, daß sich auch die anderen im § 7 zur Bestimmung der D -Flächen angegebenen Verfahren auf den vorliegenden Fall

anwenden lassen; wir führen dies aber hier nicht weiter aus, empfehlen vielmehr dem Leser, diese leichte Arbeit selbst vorzunehmen und weisen nur noch auf den wichtigsten Sonderfall hin, nämlich den in Fig. 282 abgebildeten Versteifungsbalken mit parallelen Gurtungen. Hier ergeben sich die Spannkraften in den Füllungsstäben in bekannter Weise aus den Querkräften Q , und es genügt daher, die Ermittlung der Q -Fläche für irgend ein Feld F_1F_2 zu zeigen.*)

Sind M_1 und M_2 die Angriffsmomente für die Knoten F_1 , F_2 , so besteht, da auf den Balken nur lotrechte Kräfte wirken, die Beziehung

$$Q = \frac{M_2 - M_1}{\lambda} = \frac{M_{02} - Hy_2 - M_{01} + Hy_1}{\lambda} = Q_0 - H \frac{y_2 - y_1}{\lambda},$$

wo Q_0 die Querkraft für das Feld F_1F_2 eines einfachen nicht an der Kette hängenden Balkens AB bedeutet. Trägt man die Ordinaten y_1y_2 nach Fig. 282b von einer wagerechten Schlußlinie aus auf und bezeichnet man die Neigungswinkel der auf diese Weise erhaltenen neuen Kettenlinie mit α' , so erhält man die Gleichung

$$(14) \quad Q = Q_0 - H \operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \alpha' (Q_0 \operatorname{ctg} \alpha' - H),$$

welche dieselbe Form hat wie Gleichung (3) auf Seite 249; sie führt zur der in Figur 282c angegebenen Darstellungsweise der Q -Fläche. Figur 282d zeigt schließlich die Einflußfläche für den Auflagerdruck A_u , unter der Voraussetzung, daß bei A ein Querträger angeordnet ist; sie gilt für Träger beliebiger Gurtform und folgt ohne weiteres daraus, daß dem Balkenquerschnitte A die Querkraft $Q = A_u$ entspricht. Fehlt der Endquerträger, wird also der erste Zwischenträger unmittelbar auf das Widerlager gelegt, so ist das Dreieck $A'J'B'$ durch das Dreieck $A'J''B'$ zu ersetzen.**)

102. Formeln für den gleichmäßig belasteten Versteifungsbalken mit parallelen Gurtungen. Wird die statische Berechnung auf Grund der stets zulässigen Annahme durchgeführt, es liegen die Knoten der Kette in einer Parabel, deren Gleichung $y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}$ ist, Fig. 280, und wird ferner die auf Seite 271 abgeleitete parabelförmige H -Linie benutzt, so lassen sich die von einer gleichförmigen Belastung verursachten Momente M und Querkräfte Q auch schnell durch Rechnung bestimmen. Die bezüglichen Formeln und Regeln sollen hier zusammengestellt werden; sie werden in ähnlicher Weise entwickelt, wie die auf Seite 244—245 und 255—259 für den Zweigelenkbogen bzw. den versteiften Stabbogen hergeleiteten Gesetze.

1. *Kette und Hängestangen.* Es möge der allgemeinere Fall vorausgesetzt werden, daß nur ein Teil (g_s) der ständigen Belastung g vor Ausführung der Ver-

*) Bildet die vom Schnitte t getroffene Diagonale (D) mit der Wagerechten den Winkel φ , so ist $D \sin \varphi = Q$.

**) Die Auflager des Versteifungsbalkens und des ersten Zwischenträgers sind bündig liegend angenommen.

steifung aufgebracht werde, der Rest $g_n = g - g_v$ hingegen erst *nach* Vollendung des Balkens. Die Belastung g_v erzeugt: $H_1 = \frac{g_v l^2}{8f}$ (*), während g_n nur $H_2 = \frac{g_n l^2 v}{8f}$ hervorbringt. Infolge gänzlicher gleichförmiger Belastung des Balkens mit p entsteht $H_p = \frac{p l^2 v}{8f}$ und infolge einer Erniedrigung der Aufstellungstemperatur $H_t = + \varepsilon E F_k t (1 - v)$, weshalb der Größtwert von H :

$$(15) \quad H_{\max} = \frac{l^2}{8f} [g_v + (g_n + p) v] + \varepsilon E F_k t (1 - v)$$

ist. Die größte Spannkraft in einem unter α geneigten Gliede der Kette ist nun

$$(16) \quad S_{\max} = H_{\max} \sec \alpha$$

und die größte Spannkraft in einer Hängestange:

$$(17) \quad Z_{\max} = H_{\max} (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1}) = H_{\max} \frac{8f\lambda}{l^2}$$

2. *Momente und Querkräfte des gänzlich belasteten Balkens.* Ist der ganze Balken mit p für die Längeneinheit belastet, so entsteht an der Stelle x das Moment

$$M_p = \frac{p x (l - x)}{2} - H_p y = \frac{p x (l - x)}{2} - \frac{p l^2}{8f} v \cdot \frac{4f x (l - x)}{l^2}, \text{ d. i.}$$

$$(18) \quad M_p = \frac{p x (l - x)}{2} (1 - v)$$

und im Felde $F_1 F_2$ (Fig. 286) dessen Mitte von der Trägermitte den Abstand x'' haben möge, die Querkraft:

$$Q_p = \frac{p l}{2} - p x - H_p \operatorname{tg} \alpha'' = p x'' - \frac{p l^2 v}{8f} \operatorname{tg} \alpha''.$$

Der Winkel α'' , den das Kettenglied des fraglichen Feldes mit der vorerst in eine wagerechte Lage gebrachten Schlußlinie $A''B''$ bildet, ist ebenso groß, wie der Neigungswinkel einer an der Stelle x an die Parabel vom Pfeile f gelegten Tangente, weshalb

$$\operatorname{tg} \alpha'' = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x) = \frac{8f}{l^2} \left(\frac{l}{2} - x \right) = \frac{8f}{l^2} x''$$

und

$$(19) \quad Q_p = p x'' (1 - v).$$

M_p und Q_p sind also ebenso groß wie Moment und Querkraft für den Querschnitt x eines nicht an der Kette hängenden, nur bei A und B aufliegenden Balkens, der gleichmäßig mit $p (1 - v)$ für die Längeneinheit belastet ist.

Der Einfluß M_p bzw. Q_p der ständigen Belastung erhält man, indem man p durch g_n ersetzt.

3. *Grenzwerte der Momente infolge der beweglichen Belastung.* Um das Moment $\min M_p m$ für einen (oberen oder unteren) Knoten m an der Stelle x zu bestimmen (Fig. 283, in welcher der Parallelträger durch eine Gerade ersetzt ist) mache man $B''T = \frac{4f}{3v}$, ziehe $TS \parallel B''A''$, lege durch den Kettenpunkt m' (senkrecht über m) die Geraden $A''E$ und $B''E'$ und belaste den Balken rechts von E und links von E' . Es entsteht dann (vergl. Seite 245):

$$(20) \quad \min M_p = - \frac{p y v}{8f l} (\xi^3 + \xi'^3),$$

*) Wir vernachlässigen hier den Umstand, daß die Stützweite der Kette in der Regel etwas größer ist als die des Balkens.

während die Belastung der positiven Beitragstrecke EE' hervorbringt:

$$(21) \quad \max M_p = + \frac{pyv}{8fl} (\xi^3 + \xi'^3) + \frac{px(l-x)}{2} (1-v),$$

weil $\min M_p + \max M_p = M_p$ ist.

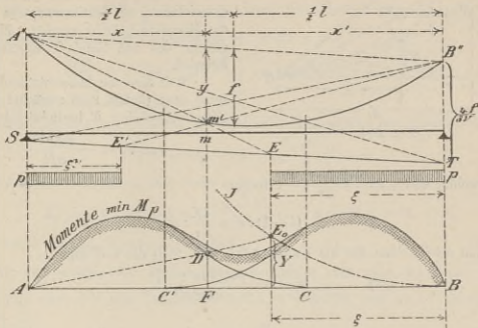


Fig. 283.

Die Ergebnisse der Gleich. (20) lassen sich auch recht übersichtlich wie folgt durch Zeichnung darstellen. Man trage von der Geraden AB (Fig. 283) aus eine kubische Parabel BJ auf, deren Gleichung

$$Y = \frac{p \xi^3}{6l}$$

ist, und verbinde den lotrecht unter E liegenden Punkt E_0 dieser Parabel mit A . Die Gerade AE_0 schneidet dann auf der Lotrechten durch m die Strecke

$$\overline{FD} = Y \frac{y}{4f} = \frac{pyv \xi^3}{8fl} \quad (\text{absolut genommen})$$

ab, und es ist deshalb D ein Punkt der $\min M_p$ -Linie, zunächst allerdings unter der Voraussetzung, daß nur eine Belastungsscheide E in Betracht kommt. Bestimmt man aber die Punkte D für alle Querschnitte, die zwischen A und der Stelle C liegen, welcher $\xi = 0$ entspricht, zeichnet man das Spiegelbild $C'B$ der so erhaltenen Kurve und addiert schließlich zwischen C' und C die Ordinaten beider Kurven, so erhält man die endgültige $\min M_p$ -Linie. Dieselbe wurde in Fig. 283 durch Schraffierung hervorgehoben. Behufs Aufzeichnung der kubischen Hilfsparabel berechne man

für irgendeine Abszisse ξ_1 die Ordinate $Y_1 = \frac{p \xi_1^3}{6l}$ und bringe dann die Gleichung der Parabel auf die Form: $Y = Y_1 \frac{\xi^3}{\xi_1^3}$. Eine bequeme Konstruktion dieses Ausdrucks ist in der ohne weiteres verständlichen Fig. 284 angegeben; die Geraden LM und NO sind parallel zur Abszissenachse.

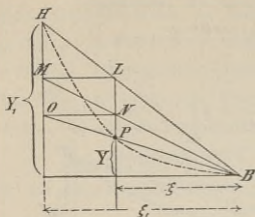


Fig. 284.

und beachte, daß $y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}$, ferner

$$(l - \xi) : x = \frac{4f}{3v} : y$$

ist. Man erhält dann für die Kurve ADC (Fig. 283) die Gleichung

$$(22) \quad \min M_p = - \frac{px [3vx' - l]^3}{54v^2x'^2},$$

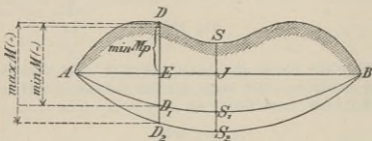


Fig. 285.

worin $x' = l - x$ ist. Die Berücksichtigung der zweiten Belastungsscheide erfolgt in derselben Weise wie beim zeichnerischen Verfahren. Der Punkt C (Fig. 283) liegt bei $x = l - \frac{l}{3v}$ und der Punkt C' bei $x = \frac{l}{3v}$.

4. Die Momente M_t infolge einer Temperaturänderung sind:

$$(23) \quad M_t = \mp H_t y = \mp \frac{8H_t f}{l^2} \frac{x(l-x)}{2};$$

sie sind ebenso groß wie die Momente eines nicht an der Kette hängenden einfachen Balkens AB , welcher gleichmäßig mit $\mp \frac{8H_t f}{l^2}$ für die Längeneinheit belastet ist.

5. Die Gesamtmomente:

$$\min M = \min M_p - H_t y + M_g$$

$$\max M = \max M_p + H_t y + M_g$$

$$= - \min M_p + M_p + H_t y + M_g$$

lassen sich nun sehr übersichtlich wie folgt darstellen.

Die Ordinaten Y wachsen sehr schnell, weshalb es sich empfiehlt, ξ_p nicht größer anzunehmen als gerade erforderlich, damit die Zeichnung nicht zu viel Raum beansprucht. Am besten ist es, die Punkte der kubischen Parabel nur für diejenigen Querschnitte zu bestimmen, für welche die Momente gesucht werden. Man vergleiche das auf Tafel 5 durchgeführte Beispiel.

Will man die Momente rechnen, so setze man (indem man zunächst nur die Belastungsscheide E berücksichtigt):

$$\min M_p = - \frac{pyv\xi^3}{8fl}$$

Man zeichne zuerst die Linie $ADSB$, deren Ordinaten die größten negativen Momente $\min M_p$ angeben und addiere hierzu die Ordinaten einer Parabel AS_1B von der Pfeilhöhe.

$$\overline{S_1J} = -H_t f + \frac{g_n l^2}{8} (1 - \nu).$$

Je nachdem $H_t f > \frac{g_n l^2}{8} (1 - \nu)$ ist, wird diese Parabel unterhalb oder oberhalb der AB aufgetragen; ihre Ordinate an der Stelle x ist

$$\overline{ED_1} = -H_t y + g_n \frac{x(l-x)}{2} (1 - \nu) = -H_t y + M_g$$

und es ergibt sich daher: $\min M = -\overline{DD_1}$.

Jetzt zeichnet man eine zweite Parabel AS_2B , welche die Pfeilhöhe

$$\overline{S_2J} = H_t f + (p + g_n) \frac{l^2}{8} (1 - \nu)$$

hat und deren Ordinate an der Stelle x

$$\overline{ED_2} = H_t y + (p + g_n) \frac{x(l-x)}{2} (1 - \nu) = H_t y + M_p + M_g$$

ist, weshalb man $\max M = +\overline{DD_2}$ erhält.

6. Das größte aller Balken-Momente entsteht sehr nahe der Stelle $x = \frac{1}{4} l$. Es kommt dort nur eine Belastungsscheide in Betracht, und es ist daher (wegen $y = \frac{3}{4} f$):

$$\begin{aligned} \max M &= \max M_p + M_g + H_t y = -\min M_g + M_p + M_g + \frac{3 H_t f}{4} \\ &= \frac{p x [3 \nu x' - l]^2}{54 \nu^2 x'^2} + \frac{p x x'}{2} (1 - \nu) + \frac{g_n x x'}{2} (1 - \nu) + \frac{3 H_t f}{4}. \end{aligned}$$

Mit $x = \frac{1}{4} l$ und $x' = \frac{3}{4} l$ geht dieser Wert über in *

$$(24) \quad M = \frac{3 p l^2}{32 \nu^2} \left(\nu - \frac{4}{9} \right)^2 + \frac{3}{32} (p + g_n) l^2 (1 - \nu) + \frac{3}{4} H_t f.$$

Für den Gurtquerschnitt des Versteifungsbalkens ergibt sich nun an der betrachteten Stelle der Wert

$$F = \frac{M}{h \sigma},$$

wo σ die zulässige Spannung bedeutet. Es empfiehlt sich, den auf diese Weise gefundenen Querschnitt der Berechnung der Ziffer ν zugrunde zu legen, weil die Momente mit abnehmendem ν wachsen und es deshalb ratsam ist, den Wert ν eher etwas zu klein als zu groß zu nehmen. Wir setzen daher:

$$(25) \quad F_0 = \frac{3 l^2}{32 h \sigma} \left[\frac{p}{\nu^2} \left(\nu - \frac{4}{9} \right)^2 + (p + g_n) (1 - \nu) \right] + \frac{3 H_t f}{4 h \sigma}.$$

7. Grenzwerte der Querkräfte infolge der beweglichen Belastung. Nachdem die Schlußlinie $A''B''$ in wagerechte Lage gebracht worden ist (Fig. 282 u. 286), wird im Abstände $\overline{S'B''} = 4f : 3\nu$ die Wagerechte SS' eingetragen.*) Hierauf wird, behufs Ermittlung der Querkraft $\max Q_p$ des Feldes $F_1 F_2$, durch A'' eine Parallele

*) Damit Fig. 286 recht deutlich werde, nahmen wir die Balkenachse zusammenfallend mit der Geraden SS' an.

zu dem Kettengliede $F'F''$ gezogen, der Schnittpunkt E dieser Geraden mit SS' bestimmt und (vorausgesetzt, daß E links von B'' liegt) der Balken zwischen E und der Feldmitte belastet. Für diesen Belastungszustand werden nun mit Hilfe der

zweiten A -Linie und der zweiten H -Linie die Werte A und H dargestellt, und dann wird gefunden:

$$(26) \quad \max Q_p = A - H \operatorname{tg} \alpha'',$$

wo α'' den Winkel bedeutet, welchen $F'F''$ mit der Wagerechten einschließt. Die zweite A -Linie ist eine Parabel, deren Scheitel bei B_0 liegt, und die zweite H -Linie wird in derselben Weise bestimmt wie beim Bogen mit zwei Gelenken (Gleich. (46), Seite 242); nur mit dem Unterschiede, daß ν einen anderen Wert annimmt. Vergleiche auch die auf Seite 243

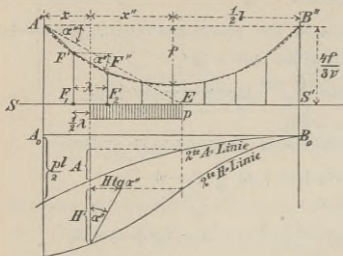


Fig. 286.

gelöste Aufgabe. Liegt E rechts von B_0 , so wird der Balken von der Mitte des Feldes F_1F_2 bis B belastet.

Zur Berechnung von $\min Q_p$ dient schließlich die Gleichung

$$(27) \quad \min Q_p + \max Q_p = Q_p = px''(1 - \nu).$$

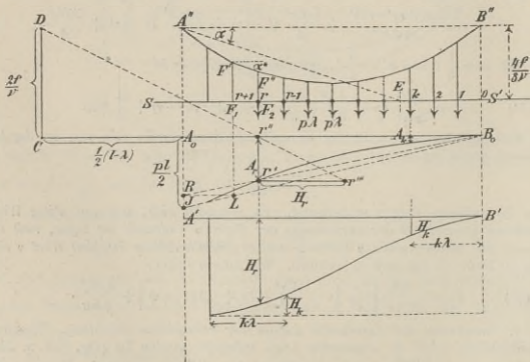


Fig. 287 u. 288.

Ein zweites Verfahren, $\max Q_p$ zu ermitteln, ist auf Seite 258 und 259 erläutert worden; dasselbe setzt gleiche Feldweiten und feste Werte der Knotenlasten voraus;

und ein drittes Verfahren, ebenfalls für gleichlange Felder und feste Knotenlasten, ergibt sich wie folgt:

Belastet man r Knotenpunkte, von B aus gezählt, Fig. 287, mit je $p\lambda$, so entsteht

$$(28) \quad A_r = \frac{pr\lambda(r+1)\lambda}{2l}$$

und (nach der Formel 9, Seite 271, mit $l = n\lambda$):

$$(29) \quad \begin{cases} H_r = \frac{3p\lambda v}{4fl} [1(n-1) + 2(n-2) + 3(n-3) + \dots + r(n-r)] \lambda^2 \\ = \frac{p\lambda^3 v}{8fl} r(r+1)(3n-2r-1), \end{cases}$$

wofür man mit Rücksicht auf Gleichung (28) auch schreiben darf

$$(30) \quad H_r = A_r \frac{1,5l - 0,5\lambda - r\lambda}{2f} v.$$

Zur zeichnerischen Bestimmung der Werte A_r und H_r mache man (nach Fig. 287) $\overline{A_oJ} = \frac{pl}{2}$, bestimme senkrecht unter $r+1$ auf der Geraden B_oJ den Punkt L , ziehe $LR \parallel A_oB_o$ und verbinde R mit B_o . Die Geraden B_oA_o und B_oR schneiden auf der Senkrechten durch r die Kraft $r''r' = A_r$ ab.

Verlängert man jetzt B_oA_o um $A_oC = 0,5(l-\lambda)$, macht $CD = 2f:v$ und bringt die Gerade Dr'' mit der Wagerechten durch r' in r''' zum Schnitt, so erhält man $r'r''' = H_r$, welcher Wert nun von einer Wagerechten $A'B'$ aus als Ordinate aufgetragen wird.

Soll nun die Querkraft $max Q_p$ für das Feld F_1F_2 bestimmt werden, so suche man mit Hilfe von $A''E \parallel F''F''$ die Belastungsscheide E auf und nehme nur die zwischen E und dem Schnitte tt gelegenen Knoten belastet an. Es seien dies die Knoten $r, (r-1), \dots, k+1$. Dann entsteht

$$A = A_r - A_k; \quad H = H_r - H_k; \quad max Q_p = A - H \operatorname{tg} \alpha''^{**}$$

8. Die Querkräfte Q_t infolge einer Temperaturänderung sind

$$Q_t = \mp H_t \operatorname{tg} \alpha'' = \mp \frac{8fH_t}{l^2} x'';$$

sie sind ebenso groß wie die Querkräfte eines nicht an der Kette hängenden einfachen Balkens AB , welcher gleichmäßig mit $\mp \frac{8fH_t}{l^2}$ für die Längeneinheit belastet ist.

9. Die Gesamtquerkräfte:

$$\begin{aligned} max Q &= max Q_p + \frac{8fH_t}{l^2} x'' + Q_p^{**}) \\ min Q &= min Q_p - \frac{8fH_t}{l^2} x'' + Q_p \\ &= - max Q_p + Q_p - \frac{8fH_t}{l^2} x'' + Q_p \end{aligned}$$

lassen sich jetzt übersichtlich wie folgt darstellen.

*) Dieses Verfahren läßt sich selbstverständlich auch beim Zweigelenkbogen mit annähernd konstanter Höhe h , sowie bei dem im vorigen § behandelten Versteifungsbalken mit parallelen Gurtungen anwenden.

***) H_t sei der absolute Wert des Horizontalzuges infolge einer Temperaturänderung.

Man trage von der Wagerechten $A'B'$ aus (Fig. 289) die Querkräfte $max Q_p$ auf und addiere zu denselben die Querkräfte eines gleichmäßig mit $g_n(1-\nu) + \frac{8fH_t}{l^2}$ für die Längeneinheit belasteten Balkens, welche letztere in bekannter Weise mittels einer Geraden J_1M gewonnen werden, wobei $A'M = \frac{1}{2}l$ und $\overline{J_1A'} = g_n(1-\nu)\frac{2}{l} + \frac{4fH_t}{l}$ ist. Das Ergebnis ist:

$$max Q_p + \overline{A'J_1} \frac{x''}{0,5l} = max Q_p + \frac{8fH_t}{l^2} x'' + g_n(1-\nu) x'' = max Q.$$

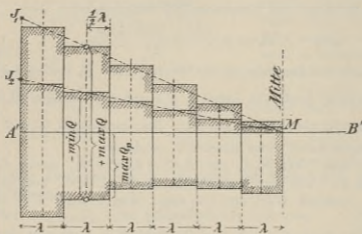


Fig. 289.

Ersetzt man die Gerade J_1M durch die mit Hilfe von

$$\overline{A'J_2} = \frac{4fH_t}{l} - (g_n + p)(1-\nu)\frac{l}{2}$$

bestimmte Gerade J_2M , so erhält man:

$$\begin{aligned} max Q_p + \overline{A'J_2} \frac{x''}{0,5l} &= max Q_p + \frac{8fH_t}{l^2} x'' - p(1-\nu) x'' - g_n(1-\nu) x'' \\ &= max Q_p + \frac{8fH_t}{l^2} x'' - Q_p - Q_g = -min Q. \end{aligned}$$

Innerhalb eines Feldes hat Q einen festen Wert.

103. Zahlenbeispiel (Tafel 5). Es soll eine versteifte Kettenbrücke mit folgenden Abmessungen berechnet werden:

Stützweite der Kette $l_1 = 75^m$, des Balkens $l = 72^m$; Pfeil der Kette, gemessen bis zur Schlußlinie $f = 9,0^m$ ($f_1 = \text{rund } 9,7^m$); Länge der unter $\alpha' = 35^\circ$ geneigten Rückhaltkette $s' = 27^m$; Höhe des Versteifungsbalkens $h = 2,0^m$; Feldweite $\lambda = 3^m$.

Die ständige Belastung für jeden der beiden die Brückenbahn stützenden Hauptträger sei $g = 2,8^t$ für den Meter, die bewegliche $p = 1,5^t$. Es sei in Aussicht genommen, die Brücke zuerst unversteift auszuführen (vergl. Seite 266) weshalb $g_0 = g = 2,8^t$ und $g_n = 0$. Die Temperaturänderung sei $t = \pm 40^\circ \text{ C}$.

1. Abschätzung des Querschnittsverhältnisses $F_c : F_k$ ($F_c =$ Gurtquerschnitt des Balkens, $F_k =$ Querschnitt der Kette im Scheitel) behufs Berechnung der Ziffer ν . Es ist

$$\frac{s_0}{l} = \frac{l_1}{l} \left[1 + \frac{16}{3} \frac{f_1^2}{l_1^2} + 2 \frac{s'}{l_1} \sec \alpha' \right] = 2,09 \text{ und}$$

$$\nu = \frac{1}{1 + \frac{15}{16} \frac{h^2}{f^2} \frac{s_0}{l} \frac{F_c}{F_k}} = \frac{1}{1 + 0,0968 \frac{F_c}{F_k}}$$

Schätzt man zuerst $F_c : F_k = 0,40$ bis $0,45$, so erhält man $\nu = 0,962$ bis $\nu = 0,957$, also rund $\nu = 0,96$. Aus der Formel

$$\sigma F_k = H_{max} = \frac{l^2}{8f} [g_\nu + (g_n + p)\nu] + \varepsilon E F_k t (1 - \nu)$$

folgt nun der erforderliche Kettenquerschnitt im Scheitel

$$F_k = \frac{l^2 [g_\nu + (g_n + p)\nu]}{8f [\sigma - \varepsilon E t (1 - \nu)]}$$

und, wenn für eine schweißeiserne Flacheisenkette die Beanspruchung

$$\sigma = 1000^{kp} \text{ f. d. } qcm = 10000^t \text{ f. d. } qm$$

zugelassen und $\varepsilon E = 240^t$ f. d. qm gesetzt wird:

$$F_k = \frac{72^2 (2,8 + 1,5 \cdot 0,96)}{8 \cdot 9 [10000 - 240 \cdot 40 \cdot 0,04]} = 0,0317 qm.$$

Der Neigungswinkel α der äußersten Glieder der parabelförmig gerechneten Kette ist durch

$$\sec \alpha_1 = \sqrt{1 + \frac{16f^2}{j^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{5}$$

bestimmt, und es muß daher der Kettenquerschnitt bis zu $F_k \sec \alpha_1 = \frac{0,0317}{2} \sqrt{5} = 0,0356 qm$ anwachsen. Im vorliegenden Falle empfiehlt es sich, der Kette den überall gleichen Querschnitt $0,0356 qm$ zu geben, also auch $F_k = 0,0356$ zu setzen.

Nun ergibt sich der Horizontalzug infolge der Temperaturänderung:

$$H_t = \varepsilon E F_k t (1 - \nu) = 240 \cdot 0,0356 \cdot 40 \cdot 0,04 = 13,7^t$$

und der Gurtquerschnitt des Balkens nach Gleichung (25) (wegen $g_n = 0$):

$$F_c = \frac{3l^2 p}{32 h \sigma} \left[\frac{1}{\nu^2} \left(\nu - \frac{4}{9} \right)^2 + (1 - \nu) \right] + \frac{3H_t f}{4h \sigma}$$

Wird $\sigma = 750^{kp}$ f. d. $qcm = 7500^t$ f. d. qm gestattet, so folgt:

$$F_c = \frac{3 \cdot 72^2 \cdot 1,5}{32 \cdot 2,0 \cdot 7500} \left[\frac{1}{0,96^2} \left(0,96 - \frac{4}{9} \right)^2 + 0,04 \right] + \frac{3 \cdot 13,7 \cdot 9,0}{4 \cdot 2,0 \cdot 7500} = 0,0154.$$

Hiernach ist:

$$\frac{F_c}{F_k} = \frac{0,0154}{0,0356} = 0,433 \text{ und } \nu = \frac{1}{1 + 0,0968 \cdot 0,433} = 0,9598,$$

also rund $\nu = 0,96$, übereinstimmend mit dem zuerst gefundenen Werte von ν . Eine Wiederholung der Rechnung ist daher nicht erforderlich, und es darf die Untersuchung der Versteifungsbalkens mit $\nu = 0,96$ durchgeführt werden.

Der größte Horizontalzug der Kette ist

$${}_{max} H = \frac{l^2}{8f} (g + p\nu) + H_t = \frac{72^2}{8 \cdot 9,0} (2,8 + 1,5 \cdot 0,96) + 13,7 = 319^t$$

und der größte Zug in einer Hängestange:

$${}_{max} Z = H_{max} (\operatorname{tg} \alpha_m - \operatorname{tg} \alpha_{m+1}) = H_{max} \frac{8f\lambda}{j^2} = 319 \frac{8 \cdot 9,0 \cdot 3,0}{72^2} = 14^t.$$

Für die Rückhaltkette erhält man:

$$S_{max} = H_{max} \sec 35^\circ = 389^t,$$

und der Druck auf den Kettenpfeiler ist:

$$H_{max} (\operatorname{tg} 35^\circ + \operatorname{tg} \alpha_1^*) = 319 [0,7 + 0,5] = 383^t.$$

2. *Spannkkräfte in den Gurtungen*, Fig. 290. Die zur Ermittlung der Belastungsscheiden dienende Wagerechte SS' liegt im Abstände

$$\frac{4f}{3v} = \frac{4 \cdot 9,0}{3 \cdot 0,96} = 12,5^m$$

von der $A''B''$; ihre Schnittpunkte $1_0, 2_0, 3_0, \dots$ mit den Geraden $A''1', A''2', A''3'', \dots$ bestimmen die den Knotenpunkten 1, 2, 3, \dots entsprechenden Belastungsscheiden. In Fig. 290 wurde die Kette parabolisch angenommen. Auf der Senkrechten durch B'' wurde die Strecke $B''0'' = 4f = 36^m$ aufgetragen und in 24 gleiche Teile zerlegt. Die von den Teilpunkten $1'', 2'', 3'', \dots$ nach A'' gezogenen Strahlen schneiden dann die Senkrechten durch 1, 2, 3, \dots in den Kettenpunkten $1', 2', 3', \dots$ und die Gerade SS' in den Punkten $1_0, 2_0, 3_0, \dots$.

Die Werte $\frac{M}{h}$ wurden nach dem auf Seite 276 bis 279 zur Ermittlung der Momente M benutzten Verfahren bestimmt. Punkt 1_0 liegt im Abstände $\xi_1 = 45,91^m$ von der Senkrechten $B''B'$, und es ist daher die zugehörige Ordinate der nach Fig. 284, Seite 278 aufzutragenden kubischen Hilfsparabel:

$$\frac{p \xi_1^3}{6lh} = \frac{1,5 \cdot 45,91^3}{6 \cdot 72 \cdot 2,0} = 168,0 \text{ Tonnen.}$$

Die Pfeilhöhen der gemeinen Parabeln $A'L_1B'$ und $A'L_2B'$ sind (wegen $g_n = 0$), bezw.

$$\frac{H_1 f}{h} = \frac{13,7 \cdot 9,0}{2,0} = 61,65 \text{ Tonnen} = \text{rund } 62 \text{ Tonnen}$$

und

$$\frac{H_2 f}{h} + \frac{p l^2}{8h} (1 - v) = 61,65 + \frac{1,5 \cdot 72^2 \cdot 0,04}{8 \cdot 2,0} = \text{rund } 81 \text{ Tonnen.}$$

Die Zeichnung liefert für die Knoten 1, 2, 3, \dots 12:

$$\begin{aligned} \max \frac{M}{h} = & + 32; + 59; + 80; + 97; + 108; + 115; + 118; + 118; + 115; \\ & + 111; + 109; + 108 \text{ Tonnen} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \frac{M}{h} = & - 29; - 53; - 72; - 86; - 95; - 101; - 102; - 101; - 97; - 93; \\ & - 90; - 89 \text{ Tonnen.} \end{aligned}$$

Durch diese Werte sind die in Fig. 293 zusammengestellten Spannkkräfte in den Gurtungen bestimmt.

3. *Spannkkräfte D in den Diagonalen*. In einer unter dem Winkel φ gegen die Wagerechte geneigten Diagonale entsteht die Spannkraft

$$D = \pm \frac{Q}{\sin \varphi},$$

wo Q die Querkraft für das fragliche Feld bedeutet. Das obere Vorzeichen gilt für eine linkssteigende, das untere für eine rechtssteigende Diagonale. Da φ für sämtliche Diagonale gleich groß ist $\left(\frac{1}{\sin \varphi} = 1,8028 \right)$, so wurden an Stelle der Quer-

*) Genügend genau ist $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{4f}{l}$.

kräfte Q sofort die Werte $Q' = \frac{Q}{\sin \varphi}$ dargestellt und zwar nach dem auf Seite 280, Fig. 287 und 288 für die Ermittlung der Kräfte Q angegebenen Verfahren. Hier- nach sind die Ordinaten der für feste Knotenlasten $p\lambda$ aufgetragenen zweiten ($A : \sin \varphi$)- Linie durch die Strecke (Fig. 291)

$$\overline{A_0 J} = \frac{pl}{2 \sin \varphi} = \frac{1,5 \cdot 72 \cdot 1,8028}{2} = 97,35^t$$

bestimmt. Die Ordinaten der zweiten ($H : \sin \varphi$)-Linie wurden nach Festlegung des Punktes D [mittels $\overline{A_0 C} = \frac{1}{2}(l - \lambda) = \frac{1}{2}(72 - 3) = 34,50^m$ und $\overline{CD} = \frac{2f}{v} = \frac{2 \cdot 9,0}{0,96} = 18,75^m$] auf die früher beschriebene Weise (Fig. 287) aus den Werten $A : \sin \varphi$ hergeleitet; die Hilfslinien sind größtenteils wieder ausgelöscht worden. Für $A : \sin \varphi$ und $H : \sin \varphi$ wurden auf Tafel 5 die kürzeren Zeichen A' und H' eingeführt.

Wird nun beispielsweise $\max Q'_p$ für das dritte Feld gesucht, so zieht man von A'' aus zu dem Kettenglied III eine Parallele, bringt diese mit der Wage- rechten SS' in III_0 zum Schnitt und erhält in der Senkrechten durch III_0 eine Belastungsscheide.*) Hierauf nimmt man die zwischen dem fraglichen Felde und III_0 gelegenen Knotenpunkte 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 mit je $p\lambda$ belastet an und findet für diesen Zustand:

$$\frac{A}{\sin \varphi} = A_3' - A_{11}'; \quad \frac{H}{\sin \varphi} = H_3' - H_{11}', \quad \text{mithin}$$

$$\max Q'_p = (A_3' - A_{11}') - (H_3' - H_{11}') \operatorname{tg} \alpha_3.$$

Der Kürze wegen haben wir auf Tafel 5 den Wert $A_3' - A_{11}'$ mit A_{III} bezeichnet und den Wert $(H_3' - H_{11}') \operatorname{tg} \alpha_3$ mit T_{III} . Die letztere Kraft ist mittels der zum Kettenglied III rechtwinkligen Geraden III' bestimmt worden.

Auf dieselbe Weise wurde die Kraft $\max Q'_p$ für alle Felder der linken Balken- hälfte in der Form dargestellt:

$$\max Q'_{pI} = A_I - T_I; \quad \max Q'_{pII} = A_{II} - T_{II}; \quad \text{u. s. w.,}$$

wobei zu beachten ist, daß nur den Feldern I bis $VIII$ Belastungsscheiden $I_0 \dots VIII_0$ entsprechen. Für das IX^{te} Feld entsteht $\max Q'_p$, sobald sämtliche rechts von diesem Felde gelegenen Knoten belastet sind, weshalb $A_{IX} = A_9'$ und $T_{IX} = H_9 \operatorname{tg} \alpha_9$, und ebenso folgt $A_X = A_{10}'$, $T_X = H_{10} \operatorname{tg} \alpha_{10}$ u. s. w.

Die so gewonnenen Kräfte $\max Q'_p$ sind in Fig. 292 im Maßstabe $1^{\text{mm}} = 1^t$ von der Geraden AM aus nach unten aufgetragen worden. Hierauf wurde die Gerade $J_1 M$ mittels

$$AJ_1 = \frac{4fH_1}{l \sin \varphi} = \frac{4 \cdot 9,0 \cdot 13,7}{72} \cdot 1,8028 = 12,35^t$$

festgelegt und für jedes Feld die Kraft $\max Q'$ nach dem auf Seite 281, Fig. 289, angegebenen Verfahren bestimmt.

Zur Ermittlung der $\min Q'$ müßte die Gerade $J_1 M$ durch eine Gerade $J_2 M$ (Fig. 289) ersetzt werden, wobei

$$AJ_2 = \frac{4fH_1}{l \sin \varphi} - p(1 - v) \frac{l}{2 \sin \varphi} = 11,96^t$$

zu machen wäre. Es unterscheiden sich aber die Ordinaten der Geraden $J_1 M$ und

*) Ist die Kette parabelförmig, so sind die von A'' aus nach den bereits in Fig. 290 benutzten Punkten $1'', 3'', 5'', 7'', \dots$ gezogenen Geraden beziehungsweise parallel zu den Kettengliedern I, II, III, IV, \dots

$J_2 M$ so wenig voneinander, daß es im vorliegenden Falle erlaubt ist, $\min Q' = -\max Q$ zu setzen.

Die Ergebnisse lauten für die Felder 1, 2, 3, . . . 12:

$$\left. \begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix} \right\} Q' = \pm 39^t; 33^t; 29^t; 26^t; 24^t; 23^t; 23^t; 24^t; 25^t; 25^t; 25^t; 25^t;$$

denselben entsprechen die in die Figur 293 eingeschriebenen Spannkkräfte D .

Der Widerstand A am linken Auflager des Balkens ist, falls kein Endquerträger angeordnet wird:

$$A = D_1 \sin \varphi, \text{ woraus } \max A = +21,6^t; \min A = -21,6^t.$$

Der positive Widerstand ist nach oben gerichtet; der negative Wert A muß durch einen Anker aufgenommen werden.

Ist ein Endquerträger vorhanden, so entsteht

$$\max A = 21,6 + \frac{p\lambda}{2} = 21,6 + \frac{1,5 \cdot 3,0}{2} = +24^t,$$

während $\min A$ den oben angegebenen Wert behält, weil bei der Belastung, welche $\min A$ erzeugt, der Knoten 0 unbelastet bleibt.

Wir empfehlen dem Leser, auf Grund der angegebenen Spannkkräfte nunmehr die Längenänderungen sämtlicher Stäbe zu berechnen, die genauere Einflußlinie für H als Biegungslinie für den Zustand $H = -1$ darzustellen und für einige Momente und Querkräfte die Einflußflächen abzuleiten. Diese schärfere Ermittlung der H -Linie erfolgt genau wie bei dem in Nr. 96 behandelten Zahlenbeispiele, und es dürfte deshalb überflüssig sein, hier näher darauf einzugehen.

104. Der Stabbogen mit darüberliegendem Versteifungsbalken, Fig. 294, läßt sich als umgekehrte versteifte Kette deuten und mit

Hilfe der im vorstehenden entwickelten Verfahren untersuchen. Die Glieder des Stabbogens und die senkrechten Zwischenstäbe werden natürlich auf *Druck* beansprucht; auch muß man zur Bestimmung der Punkte A'' und B'' die äußersten Glieder des Bogens über R und T hinaus verlängern. End-

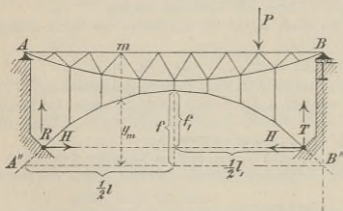


Fig. 294.

lich sind bei Berechnung des Horizontalschubes H mit Hilfe der für den Horizontalzug der Kette abgeleiteten Formeln die Längen s' und s'' der Rückhaltketten gleich Null zu setzen.

In Fig. 294 ist ein bei A und B auf den Pfeilern gelagerter Balken gezeichnet worden, in Fig. 295 ein an den Enden mit den Kämpfergelenken durch senkrechte Stäbe verbundenes Versteifungsfachwerk. Während das erstere Tragwerk Lasten beliebiger Richtung aufzunehmen vermag, ist letzteres nur senkrechten Lasten gewachsen. Damit es fähig

werde, auch wagerechte Lasten auf die Pfeiler zu übertragen, lege man *einen* Knoten des Versteifungsbalkens auch im wagerechten Sinne fest, z. B. *B* in Fig. 295 a. Führt man dagegen den Stabbogen bis an den Balken heran, Fig. 296, so erhält man ein Fachwerk, welches nur in den Punkten *R* und *T* gestützt zu werden braucht; dasselbe ist steif und einfach statisch unbestimmt.

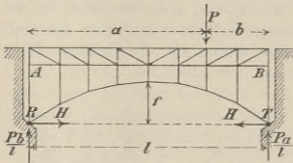


Fig. 295.

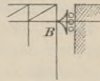


Fig. 295 a.

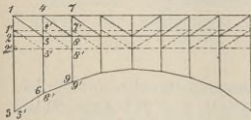


Fig. 295 b.

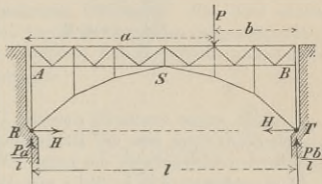


Fig. 296.

Für den in Fig. 295 dargestellten Träger ist die Anzahl der Knotenpunkte $k = 27$, der Stäbe $s = 50$ und der Seitenkräfte der Stützenwiderstände $a = 4^*$), mithin

$$2k = s + a \quad (\text{d. h. } 54 = 50 + 4),$$

so daß man versucht sein könnte, den Träger für einen statisch bestimmten zu halten. Ein Blick auf die in Fig. 295 b eingetragene Figur F' lehrt aber, daß hier ein bewegliches Stabgebilde vorliegt, ein Tragwerk, welches sich nur in gewissen Belastungsfällen als brauchbar erweist, dann aber statisch unbestimmt ist; und zwar ist leicht einzusehen, daß einer am Versteifungsbalken angreifenden wagerechten Last erst dann von den Spannkraften der anfänglich senkrecht stehenden Zwischenstäbe das Gleichgewicht gehalten werden kann, wenn diese Stäbe infolge einer Verschiebung des Balkens eine geneigte Lage angenommen haben. Fällt der Stabbogen mit der Geraden RT zusammen ($f = 0$), so ist das Fachwerk ein solches von unendlicher Beweglichkeit; Gleichgewicht ist in diesem Falle bei einer wagerechten Belastung des

^{*}) Wir erinnern daran, daß bei Ermittlung der Zahl a der Widerstand eines festen Auflagers in zwei Seitenkräfte zerlegt werden muß. Einem beweglichen Auflager entspricht $a = 1$.

Versteifungsbalkens überhaupt nicht möglich. Sonst ist die Beweglichkeit — starre Stäbe vorausgesetzt — eine unendlich kleine, und es liegt einer der auf Seite 37 hervorgehobenen Ausnahmefälle vor.

Haben Stabbogen und Versteifungsbalken einen Knotenpunkt gemein und wird trotzdem das eine Balkenaufleger festgemacht (Fig. 297), so entsteht ein steifes, zweifach statisch unbestimmtes Fachwerk. Als statisch nicht bestimmbar Größen führt man zweckmäßig die wagerechten Auflagerwiderstände H_o und H_u ein; man berechne sie mit Hilfe des im § 5 gelehrt allgemeinen Verfahrens und leite die Einflußlinie für H_o und H_u aus den Biegelinien für die Zustände $H_o = -1$ und $H_u = -1$ ab.

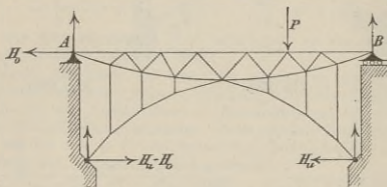


Fig. 297.

Eine solche zweifache statische Unbestimmtheit entsteht natürlich auch dann, wenn eine der Hängestangen der in Fig. 277 dargestellten versteiften Kettenbrücke die Länge Null erhält; und man kann hieraus schon schließen, daß im Falle sehr kurzer mittlerer Hängestangen die unter der Voraussetzung einer einfachen statischen Unbestimmtheit gewonnenen Ergebnisse nicht mehr ganz scharf sein können, eine Tatsache, die sich auch in der Weise erklären läßt, daß die Neigungswinkel sehr kurzer Stäbe schon bei einer geringen Formveränderung des Fachwerks sich wesentlich ändern können, was dann zur Folge hat, daß die Annahme verschwindend kleiner Winkeländerungen nicht mehr zutrifft.

§ 10.

Einfach statisch unbestimmte Bogen- und Kettenbrücken mit mehreren Öffnungen.

105. Die nächste Untersuchung beschäftigt sich mit einer Reihe *einfach statisch unbestimmter Bogen- und Kettenbrücken mit mehreren Öffnungen*, deren Berechnung sich eng an die Untersuchungen der vorigen Paragraphen anschließt. Als statisch nicht bestimmbar Größe

wird durchweg der Horizontalschub (beziehungsweise Horizontalzug) H eingeführt und zur Ermittlung von H infolge einer senkrechten, in m angreifenden Last P_m wird die Gleichung

$$H = P_m \frac{\delta'_m}{\sum S'^2_s \frac{F_c}{F}}$$

benutzt, wobei δ' die mit EF_c multiplizierte senkrechte Verschiebung bedeutet, welche m bei Eintreten des gedachten Belastungszustandes $H = -1$ erfahren würde, während S' die Stabkraft für den Zustand $H = -1$ ist. Die zu betrachtenden Tragwerke lassen sich in zwei Gruppen scheiden; bei den Gebilden der einen Gruppe besteht das statisch bestimmte Hauptnetz aus einer Reihe von *Einzelbalken*, während die anderen im Falle $H = 0$ in *Gerbersche Balken* übergehen.

a. Das statisch bestimmte Hauptnetz besteht aus einer Folge von Einzelbalken.

106. Bogenbrücke mit mehreren Öffnungen. Die über einem Mittelpfeiler zusammentreffenden Bögen erhalten dort ein gemeinschaftliches, auf wagerechter Bahn geführtes Kämpfergelenk, damit diese

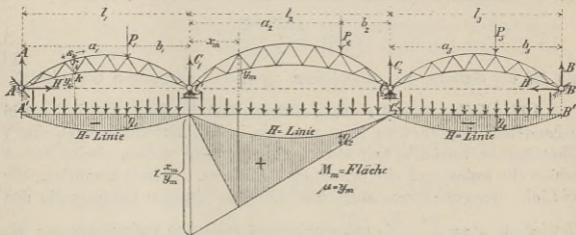


Fig. 298.

Pfeiler nur senkrechte Drücke erfahren. An den Enden sind feste Kämpfergelenke angeordnet, Fig. 298.

Liegen sämtliche Gelenke in einer wagerechten Geraden, so sind die senkrechten Stützenwiderstände A, B, C unabhängig von H und ebenso groß als bestände das Tragwerk aus einzelnen Balken AC_1, C_1C_2, \dots . Man erhält z. B. für die in Fig. 298 angenommene Belastung:

$$A = P_1 \frac{b_1}{l_1}; \quad C_1 = P_1 \frac{a_1}{l_1} + P_2 \frac{b_2}{l_2}; \quad C_2 = P_2 \frac{a_2}{l_2} + P_3 \frac{b_3}{l_3}; \quad B = \frac{P_3 a_3}{l_3}.$$

Um die H -Linie zu bestimmen, berechne man für jede einzelne Öffnung die den Gewichten $w = \frac{ys}{r^2} \frac{F_c}{F}$ entsprechenden einfachen Balkenmomente M_w — *genau wie beim Zweigelenbogen* (Seite 200) — und dividiere dieselben durch die über die Knotenpunkte *sämtlicher* Öffnungen auszudehnende Summe: $\Sigma x = \Sigma yw$. Man erhält für $P = 1$:

$$H = \frac{M_w}{\Sigma x}.$$

Aus der durchweg positiven H -Linie werden alle übrigen Einflußlinien ganz in derselben Weise abgeleitet wie beim Zweigelenbogen.

In Fig. 298 ist beispielsweise die M_m -Fläche für einen Knotenpunkt m der Mittelöffnung $C_1 C_2$ dargestellt worden; sie unterscheidet sich von der M_m -Fläche eines Zweigelenbogens $C_1 C_2$ (abgesehen von den kleineren Ordinaten der H -Linie) nur dadurch, daß sie links von C_1 und rechts von C_2 einen aus den negativ zu nehmenden H -Flächen bestehenden Zuwachs erhält. Denn Lasten, welche außerhalb der Öffnung $C_1 C_2$ liegen, beeinflussen das zweite Glied des Ausdruckes

$$M_m = M_{om} - Hy_m.$$

Für den infolge einer gleichmäßigen Zunahme der Anfangstemperatur um t° entstehenden Horizontalschub findet man (vergl. S. 204)

$$H_t = \frac{\varepsilon Et F_c \Sigma l}{\Sigma x_m},$$

wo Σl die Summe der Stützweiten sämtlicher Öffnungen bedeutet.

107. Kette, versteift durch mehrere Einzelbalken. Der in Nr. 106 behandelten Bogenbrücke kann man die in Fig. 299 dargestellte, durch Einzelbalken versteifte Kettenbrücke an die Seite stellen. Jeder Balken erhält ein festes und ein bewegliches Auflager. Behufs Ermittlung der H -Linie berechne man auch hier für jede einzelne Öffnung die den Gewichten $w = \frac{ys}{r^2} \frac{F_c}{F}$ entsprechenden einfachen Balkenmomente M_w und dividiere dieselben durch den Ausdruck

$$\mathfrak{N} = \Sigma x + \frac{F_c}{F_b} (\Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha_r + s' \sec \alpha' + s'' \sec \alpha'') \\ + \frac{F_c}{F_z} \Sigma x_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1})^2,$$

dessen Summen sich über sämtliche Öffnungen erstrecken. Man erhält für $P = 1$:

$$H = \frac{M_w}{\mathfrak{N}}.$$

Aus der durchweg positiven H -Linie werden die übrigen Einflußlinien in derselben Weise abgeleitet wie im § 9, Nr. 101. In Fig. 299 ist als Beispiel die M_m -Fläche für einen Knotenpunkt der Mittelöffnung gezeichnet worden.

Für den Horizontalzug infolge einer Temperaturänderung erhält man nach Seite 271 und 272:

$$H_t = \frac{\varepsilon E F_c t \Sigma S' s}{\mathcal{R}} = - \frac{\varepsilon E F_c t}{\mathcal{R}} [\Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha + s' \sec \alpha' + s'' \sec \alpha'' + \Sigma \lambda_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1})].$$

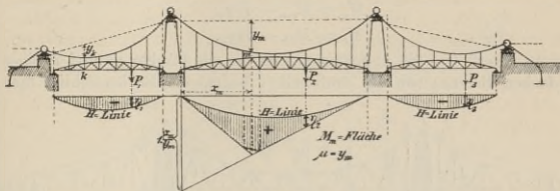


Fig. 299.

Die in den vorstehenden Formeln noch enthaltenen Summenausdrücke darf man für die einzelnen Öffnungen nach den Formeln berechnen:

$$\Sigma \lambda_r \sec^2 \alpha = l_1 \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f_1^2}{l_1^2} + \frac{c^2}{l_1^2} \right)$$

$$\Sigma \lambda_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1})^2 = \frac{64 f_1^2 (3 h' - 2 f_1 - 1,5 c) \lambda}{3 l_1^3}$$

$$\Sigma \lambda_r (\operatorname{tg} \alpha_r - \operatorname{tg} \alpha_{r+1}) = \frac{8 f_1 (3 h' - 2 f_1 - 1,5 c)}{3 l_1},$$

wo l_1 , f_1 und c die in Fig. 279 auf Seite 269 angegebene Bedeutung haben.

Die im § 9 für Versteifungsbalken mit parallelen Gurtungen nachgewiesenen Vereinfachungen sind natürlich auch bei der Kettenbrücke mit mehreren Öffnungen ausführbar.

108. Hängebrücke über drei Öffnungen, bestehend aus drei Scheiben, Fig. 300, 301. Jede Scheibe ruht auf zwei Gleitlagern. An den beiden äußeren Scheiben greifen die Rückhaltketten S_1 und S_6 an so daß jede dieser beiden Scheiben durch drei Widerstände gestützt wird, deren Richtungen sich nicht in einem und demselben Punkte schneiden. Die mittelste Scheibe wird durch vier Kräfte gestützt, näm-

lich durch die an den beiden beweglichen Auflagern auftretenden Widerstände und durch die Spannkraften S_3 und S_4 , welche an den mit Hilfe der Stäbe S_2 und S_5 festgehaltenen Gleitlagern C angreifen. Das vorliegende Tragwerk ist deshalb einfach statisch unbestimmt; es unterscheidet sich von dem im I. Bande, § 47, Seite 389 untersuchten Hängewerke nur dadurch, daß das Scheitelgelenk fehlt. Als statisch unbestimmte Größe wird wieder der Horizontalzug, d. i. die überall gleiche wagerechte Seitenkraft H der Kettenstäbe $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ eingeführt. Man findet dann für die Mittelöffnung, mit den aus der Figur ersichtlichen Bezeichnungen, die Angriffsmomente

$$M_m = M_{0m} - Hy_m$$

$$M_k = M_{0k} - Hy_k,$$

wo M_{0m} und M_{0k} die Angriffsmomente für die Punkte m und k eines einfachen Balkens von der Stützweite l bedeuten. Berücksichtigt man

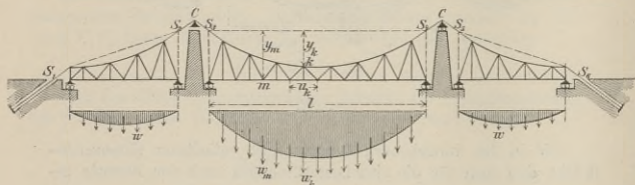


Fig. 300.

bei Ermittlung der Durchbiegungen δ' für den Zustand $H = -1$ nur die Formänderungen der Gurtungen, so erhält man

$$w_m = - \frac{\Delta \hat{O}_m}{r_m} = + \frac{y_m \sigma_m}{r_m^2 E F_m}$$

$$w_k = + \frac{\Delta u_k}{r_k} = + \frac{y_k u_k}{r_k^2 E F_k}$$

Will man auch die Formänderungen der Füllungsglieder berücksichtigen, so bedient man sich am zweckmäßigsten der Formeln (6) und (7) auf Seite 105. Die Vertikalen sind für den Belastungsfall $H = -1$ spannungslos, sie haben also keinen Einfluß auf die Durchbiegungen δ' .

Für die über die Seitenöffnung gelegte Scheibe findet man, nach Zerlegung von S_1 in A' und H' (Fig. 301) und von S_2 in B' und H' , die Gleichgewichtsbedingungen

$$(A - A') l = Pb, \quad (B + B') l = Pa$$

$$A' = H(\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha), \quad B' = H(\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha),$$

mithin
$$A = \frac{Pb}{l} + H(\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha)$$

$$B = \frac{Pa}{l} - H(\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha).$$

Die Angriffsmomente sind

$$M_m = M_{0m} - Hy_m, \quad M_k = M_{0k} - Hy_k.$$

Die Spannkraft in einer Diagonale ist

$$D = D_0 - H \frac{y_i}{r_i},$$

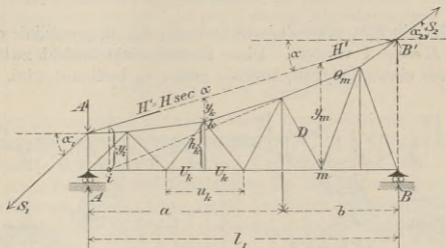


Fig. 301.

wo r_i das Lot von i auf D bedeutet. M_{0m} , M_{0k} , D_0 sind die Werte für den einfachen Balken AB . Damit sind auch die Gewichte w bestimmt. Zu beachten ist, daß in der Formel

$$H = P_m \frac{\delta_m'}{\sum S'^2 s \frac{F_c}{F}}$$

die im Nenner stehende Summe die drei Scheiben und die sechs Stäbe S_1 bis S_6 umfaßt. Bezüglich des Einflusses der ständigen Belastung g und einer Belastung g' wird auf Seite 267 verwiesen.

b. Das statisch bestimmte Hauptnetz ist ein Gerberscher Balken.

109. Ausleger-Bogenbrücke mit drei Öffnungen. Das Tragwerk in Fig. 302 besteht aus einem Zweigelenkbogen AB mit Auslegern AG_1 und BG_2 , welche zur Unterstützung der Einzelbalken CG_1 und G_2D bestimmt sind. Wird eines der beiden festen Lager A , B in ein auf wagerechter Bahn bewegliches verwandelt, so entsteht ein Gerberscher Balken (Zustand $H=0$), dessen Angriffsmomente mit M_0 bezeichnet

zur Σw zu vereinigen, das Moment $\Sigma w \frac{l}{4}$ zu berechnen, welches dieses Gewicht in der Mitte eines einfachen Balkens $A'B'$ hervorbringt, hierauf senkrecht zu $A'B'$ die Strecke $\overline{RT} = \frac{\Sigma w l}{4 \Sigma z}$ aufzutragen und die Geraden TA' und TB' zu ziehen. Es ist dann $A'G_1''$ die Verlängerung der Geraden TA' und $B'G_2''$ die Verlängerung von TB' . Lasten P , welche links von A' oder rechts von B' aufgebracht werden, rufen einen *negativen* Horizontalschub H hervor.

Hätte beispielsweise der mittlere Teil AB die Abmessungen des in Fig. 211 auf Seite 212 dargestellten Zweigelenkbogens, so würde zwischen A und B die in Fig. 211 dargestellte H -Linie ohne jede Änderung beizubehalten sein. Man würde dann $\Sigma w = (w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4) 2 + w_5 = (0,33^*) + 0,88 + 2,35 + 15,00) 2 + 20,00 = 57,12$ erhalten, mithin

$$\overline{RT} = \frac{\Sigma w l}{4 \cdot \Sigma z} = \frac{57,12 \cdot 20}{4 \cdot 183,356} = 1,56.$$

Der Horizontalschub infolge einer Temperaturänderung ist ebenso groß wie der eines Zweigelenkbogens AB .

Behufs Herleitung der übrigen Einflußlinien aus der H -Linie beachte man, daß sich die Mittelöffnung bei unbelasteten Seitenöffnungen genau wie ein gewöhnlicher Zweigelenkbogen verhält. Will man also beispielsweise die M_m -Fläche zeichnen, so trage man (wie in Fig. 220, Seite 221) $\overline{A'J} = 1 \frac{x_m}{y_m}$ auf, ziehe JB' , bestimme m' lotrecht unter m ,

verbinde m' mit A' und subtrahiere die H -Fläche von dem die $\frac{M_{0m}}{y_m}$ -Fläche vorstellenden Dreiecke $A'm'B'$. Der Unterschied beider Flächen ist die M_m -Fläche des Zweigelenkbogens AB ; der Multiplikator ist $= y_m$. Verlängert man nun die Geraden $m'A'$ und $m'B'$ bis zu ihren Schnittpunkten G_1', G_2' mit den Senkrechten durch G_1, G_2 , und zieht man schließlich die Geraden $G_1'C', G_2'D'$, so gibt der Linienzug $C'G_1'A'm'B'G_2'D'$ die auf $A'B'$ als Nulllinie bezogenen $\frac{M_{0m}}{y_m}$ -Linie des Gerberschen Balkens $CABD$ an, und die in Fig. 302 schraffierte, zwischen dieser Linie und der H -Linie gelegene Fläche ist daher die gesuchte M_m -Fläche.

110. Stabbogen, versteift durch einen Gerberschen Balken. Ganz ebenso wie der in Nr. 109 untersuchte Träger werden die in den Figuren 303 und 304 dargestellten Stabgebilde behandelt. Zuerst

*) Der Wert $w_0 = \frac{h_0}{h_0^2} = \frac{1}{3,0} = 0,33$ wurde früher nicht gebraucht, da er ohne Einfluß auf die Momente M_w ist.

werden die Einflußlinien für die Mittelöffnung genau so gezeichnet, als wären die Seitenöffnungen gar nicht vorhanden, und schließlich werden sie über A' und B' hinaus auf die vorhin beschriebene Weise verlängert. In Fig. 303 ist eine Q -Fläche eingezeichnet worden.

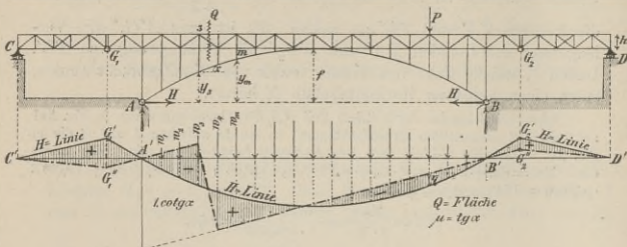


Fig. 303.

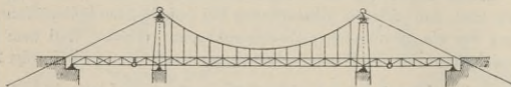


Fig. 304.

§ 11.

Fachwerkbogen mit eingespannten Kämpfern.

111. Der bereits auf Seite 156 in ganz allgemeiner Weise behandelte Bogenträger mit eingespannten Enden ist dreifach statisch unbestimmt und erfordert daher die Aufstellung von drei Elastizitätsbedingungen. Diese soll hier nach zwei verschiedenen Verfahren erfolgen, von denen das erste an die Voraussetzung senkrechter Lasten gebunden ist, während die zweite Untersuchung Einzelkräfte beliebiger Richtung berücksichtigen wird. Bei der Herleitung der Elastizitätsgleichungen dürfen die Längenänderungen der Füllungsstäbe in der Regel vernachlässigt werden. Beim Bogen mit eingespannten Kämpfern erweist sich der Einfluß der Temperaturänderungen (welche doch nur geschätzt werden können) als so bedeutend, daß eine allzu peinliche Ermittlung der übrigen Einflüsse noch viel weniger am Platze ist, wie beim Zweigelenkbogen. Auch die Annahme eines überall gleichen oder nach einem einfachen Gesetze sich ändernden Gurtquerschnitts ist

zur Vereinfachung der Rechnung meistens zulässig. Trotzdem ist auch das genaue Verfahren im folgenden durch ein Zahlenbeispiel ausführlich erläutert worden.

a. Erstes Verfahren.

112. Einfluß einer senkrechten Einzellast (Fig. 305). Die Einzellast P erzeugt Stützenwiderstände (Kämpferdrücke) K_1 und K_2 , welche P in demselben Punkte C treffen, und deren Schnittpunkte mit den Senkrechten durch die äußersten Stützpunkte A und B mit F_1 und

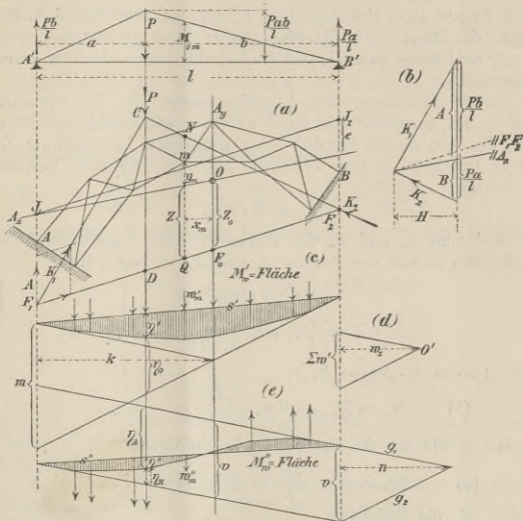


Fig. 305.

F_2 bezeichnet werden mögen. Der Linienzug F_1CF_2 heißt das *Mittelkraftpolygon* und die Gerade F_1F_2 die *Schlußlinie*.

Der senkrechte Abstand NQ eines Punktes des Mittelkraftpolygons von der Schlußlinie ist gleich dem durch den Horizontalschub H des Bogens dividierten Biegemomente M_o eines durch die Last P be-

anspruchten einfachen Balkens $A'B'$, dessen Stützweite $= l$ ist und der an den Enden frei aufliegt.*) Es folgt deshalb

$$\overline{CD} = \frac{Pab}{lH},$$

und hiernach ist das Dreieck F_1CF_2 und somit auch die Richtung von K_1 und K_2 bestimmt, sobald die Schlußlinie F_1F_2 und der Horizontal Schub H gegeben sind.

Wir beziehen den Bogenträger auf eine senkrechte Achse A_y und eine schräg liegende Achse A_x . Neigung der A_x und Lage des Ursprungs O seien vorläufig beliebig. Die Lage der Schlußlinie bestimmen wir durch Angabe ihres Schnittpunktes F_o mit der Achse A_y , d. h. durch Angabe der Strecke x_o in Fig. 305a, ferner durch die Strecke e , welche die zur Schlußlinie parallele Gerade J_1J_2 auf der Senkrechten durch B abschneidet.

Behufs Ermittlung des Angriffsmomentes M_m für irgendeinen Knotenpunkt m führen wir durch m einen senkrechten Schnitt, zerlegen den von diesem Schnitte in N getroffenen Kämpferdruck (hier K_2) im Punkte N in eine senkrechte und eine wagerechte Seitenkraft und erhalten:

$$M_m = H \cdot \overline{Nm}.$$

Sind nun y_m und x_m der senkrechte bezw. wagerechte Abstand des Punktes m von den Achsen A_x und A_y , so ergibt sich

$$\overline{Nm} = \overline{NQ} - y_m - x,$$

$$\frac{x - x_o}{x_m} = \frac{e}{l}, \quad \text{also } x = \frac{e}{l} x_m + x_o,$$

mithin (wegen $H \cdot \overline{NQ} = M_{o_m}$):

$$(1) \quad M_m = M_{o_m} - Hy_m - \frac{He}{l} x_m - Hx_o.$$

Indem wir nun die Bezeichnungen einführen

$$(2) \quad Hx_o = X'; \quad \frac{He}{l} = X''; \quad H = X''',$$

erhalten wir die Gleichung

$$(3) \quad M_m = M_{o_m} - X' - X''x_m - X'''y_m,$$

welche die Berechnung der Momente M_m gestattet, sobald die drei statisch nicht bestimmbareren Größen X' , X'' , X''' gefunden sind.

Zur Berechnung der X bedienen wir uns der Gleichungen (V) auf Seite 169. Wir nehmen starre Widerlager an, setzen also $L' = 0$,

*) Man betrachte F_1CF_1 als Culmannsche Momentenfläche des einfachen Balkens $A'B'$.

$L'' = 0$, $L''' = 0$. Auch vernachlässigen wir die Formänderung der Füllungsstäbe.

Die Spannkraft des einem Knotenpunkte m gegenüberliegenden Gurtstabes ist

$$(4) \quad S = \mp \frac{M_m}{r_m},$$

und zwar gilt das obere Vorzeichen für die obere, das untere für die untere Gurtung. Den Zuständen $X' = -1$, $X'' = -1$, $X''' = -1$ entsprechen die Momente:

$$(5) \quad M_m' = +1; \quad M_m'' = +x_m; \quad M_m''' = +y_m$$

und die Stabkräfte:

$$(6) \quad S' = \mp \frac{1}{r_m}; \quad S'' = \mp \frac{x_m}{r_m}; \quad S''' = \mp \frac{y_m}{r_m}.$$

Wählen wir nun das Achsenkreuz A_x , A_y derart, daß die Summen

$$\Sigma S' S'' \frac{s}{EF}; \quad \Sigma S' S''' \frac{s}{EF}; \quad \Sigma S'' S''' \frac{s}{EF} \quad *)$$

verschwinden, daß also die Bedingungen:

$$(7) \quad \Sigma \frac{x_m s_m}{EF_m r_m^2} = 0; \quad \Sigma \frac{y_m s_m}{EF_m r_m^2} = 0; \quad \Sigma \frac{x_m y_m s_m}{EF_m r_m^2} = 0$$

erfüllt werden, so gehen die Gleichungen (V) für eine Einzellast P über in:

$$(8) \quad \begin{cases} X' \Sigma \frac{s_m}{EF_m r_m^2} = P \delta' + \Sigma S' \varepsilon t s \\ X'' \Sigma \frac{x_m^2 s_m}{EF_m r_m^2} = P \delta'' + \Sigma S'' \varepsilon t s \\ X''' \Sigma \frac{y_m^2 s_m}{EF_m r_m^2} = P \delta''' + \Sigma S''' \varepsilon t s, \end{cases}$$

wo δ' , δ'' , δ''' die an der Stelle P gemessenen Ordinaten der den Zuständen $X' = -1$, $X'' = -1$, $X''' = -1$ entsprechenden Biegelinien bedeuten.

Zur weiteren Vereinfachung der Rechnung schreiben wir sämtlichen Gurtstäben denselben Querschnitt F (Mittelwert der F_m) zu und setzen feste Werte E , ε , t voraus. Multiplizieren wir dann die Gleichungen (8)

mit EF , so erhalten wir mit der Bezeichnung: $\frac{s_m}{r_m^2} = w_m'^{**})$ den Einfluß einer Einzellast P :

*) In den angezogenen Gleichungen (V) ist $\rho = \frac{s}{EF}$.

***) Sollen verschieden große Gurtquerschnitte F_m berücksichtigt werden, so muß $w_m' = \frac{s_m}{r_m^2} \frac{F}{F_m}$ gesetzt werden.

$$(9) \quad X' = P \frac{EF\delta'}{\Sigma w'_m}; \quad X'' = P \frac{EF\delta''}{\Sigma x_m^2 w'_m}; \quad X''' = P \frac{EF\delta'''}{\Sigma y_m^2 w'_m},$$

ferner den Einfluß einer gleichmäßigen Erwärmung um t° :

$$(10) \quad X'_t = \frac{\varepsilon EFt\Sigma S's}{\Sigma w'_m}; \quad X''_t = \frac{\varepsilon EFt\Sigma S''s}{\Sigma x_m^2 w'_m}; \quad X'''_t = \frac{\varepsilon EFt\Sigma S'''s}{\Sigma y_m^2 w'_m}.$$

Die Bedingungen, welche durch geeignete Wahl der Lagen der Achsen A_x , A_y zu erfüllen sind, lauten:

$$(11) \quad \Sigma x_m w'_m = 0, \quad \Sigma y_m w'_m = 0, \quad \Sigma x_m y_m w'_m = 0.$$

Wird dem Knotenpunkte m das Gewicht w'_m beigelegt, so fordern die Gleichungen (11):

1. Der Ursprung O muß mit dem Schwerpunkte der Gewichte w' zusammenfallen.
2. Die Richtung der Achse A_x muß so gewählt werden, daß das Zentrifugalmoment der Gewichte w' gleich Null ist.

In der Regel wird der Bogen symmetrisch sein in bezug auf die Senkrechte durch die Mitte. Dann fällt die Achse A_y mit der Symmetrieachse zusammen, und die Achse A_x mit der wagerechten Schwerachse der Gewichte w' .

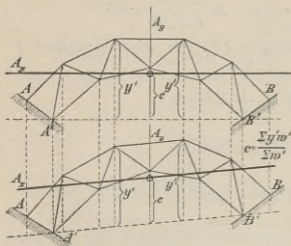


Fig. 306.

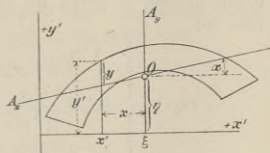


Fig. 307.

Einen steigenden Bogen leite man, falls der Unterschied in der Höhenlage der Kämpfer gering ist, nach Fig. 306 aus einem symmetrischen Bogen ab und schreibe den einander entsprechenden Knotenpunkten beider Bogenhälften gleiche Gewichte w' zu.*) Man erreicht hierdurch, daß die Achse A_y mit der Mittelsenkrechten und die A_x mit der zu $A'B'$ parallelen Schwerachse der Gewichte w' zusammenfällt.

Ganz allgemein findet man die Achsen A_x , A_y wie folgt. Man bezieht den Bogen zunächst auf ein beliebiges rechtwinkliges Achsenkreuz x' , y' mit wagerechter x' -Achse (Fig. 307), berechnet die Summen:

$$\Sigma w', \quad \Sigma w'x', \quad \Sigma w'y', \quad \Sigma w'x'^2, \quad \Sigma w'y'^2, \quad \Sigma w'x'y',$$

*) Diese Annahme ist ebenso zulässig wie die Annahme $F: F_m = 1$.

bezeichnet mit ξ , η die Koordinaten von O in bezug auf x' , y' , mit α den Neigungswinkel der A_x gegen die x' -Achse und hat dann:

$$\begin{aligned}x &= \xi - x' \\ y &= y' - x' \operatorname{tg} \alpha - (\eta - \xi \operatorname{tg} \alpha).\end{aligned}$$

Die Gleichungen $\Sigma w' x = 0$, $\Sigma w' y = 0$, $\Sigma w' x y = 0$ liefern nun:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned}\xi &= \frac{\Sigma w' x'}{\Sigma w'}, \quad \eta = \frac{\Sigma w' y'}{\Sigma w'} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\xi \Sigma w' y' - \Sigma w' x' y'}{\xi \Sigma w' x' - \Sigma w' x'^2}.\end{aligned}\right.$$

Schließlich bestimmt man noch

$$\begin{aligned}\Sigma w' x^2 &= \Sigma w' x'^2 - \xi^2 \Sigma w' \\ \Sigma w' y^2 &= \Sigma w' y'^2 - \eta^2 \Sigma w' - \operatorname{tg}^2 \alpha \Sigma w' x^2.\end{aligned}$$

Natürlich kann man auch die auf der Darstellung von Momenten zweiter Ordnung beruhende Ermittlung von $\operatorname{tg} \alpha$ auf zeichnerischem Wege mit Hilfe von Band I, § 5–7 ausführen.

Nach Festlegung der Achsen A_y , A_x bestimme man die Zähler der für X' , X'' , X''' gefundenen Ausdrücke (9) wie folgt.

Man erwäge, daß den Zuständen $X' = -1$, $X'' = -1$, $X''' = -1$ die Momente

$$(13) \quad M_m' = 1; \quad M_m'' = x_m; \quad M_m''' = y_m$$

entsprechen, und daß sich die mit EF multiplizierten Durchbiegungen δ' , δ'' , δ''' als die Momente eines einfachen Balkens $A'B'$ (des statisch bestimmten Hauptsystems) deuten lassen, welcher beziehungsweise belastet wird mit den Gewichten:

$$(14) \quad w_m' = \frac{M_m' s_m}{r_m^2}; \quad w_m'' = \frac{M_m'' s_m}{r_m^2}; \quad w_m''' = \frac{M_m''' s_m}{r_m^2} \text{ *)}, \text{ d. h. mit}$$

$$(14) \quad w_m' = \frac{s_m}{r_m^2}; \quad w_m'' = \frac{x_m s_m}{r_m^2}; \quad w_m''' = \frac{y_m s_m}{r_m^2}.$$

Bezeichnet man also die unter P gemessenen Ordinaten dieser einfachen Momentenlinien mit M_w' , M_w'' , M_w''' , so erhält man: $EF\delta' = M_w'$; $EF\delta'' = M_w''$; $EF\delta''' = M_w'''$ und findet schließlich für die Einflußlinien der Größen X' , X'' , X''' die Gleichungen:

$$(15) \quad X' = P \frac{M_w'}{\Sigma w_m'}; \quad X'' = P \frac{M_w''}{\Sigma x_m w_m''}; \quad X''' = P \frac{M_w'''}{\Sigma y_m w_m'''} \text{ **)}$$

Aus den Einflußlinien für die Größen X' , X'' , X''' kann man jetzt alle übrigen Einflußlinien ableiten und zwar lassen sich hierzu verschiedene Verfahren anwenden.

*) Vergl. Seite 192, Gleichung (2), in welcher $\frac{F_c}{F_m} = 1$ zu setzen ist.

**) Die Gleichung für $H = X'''$ stimmt mit der im § 7 zur Berechnung des Horizontalschubes eines Zweigelenkbogens erhaltenen Formel überein. Nur ist jetzt y auf eine andere Achse bezogen. Wir machen noch auf die im § 7 für verschiedene Sonderfälle gezeigten Umformungen und Kürzungen der Gewichte w aufmerksam; dieselben sind natürlich auch bei eingespannten Bogenträgern brauchbar.

1. Mit Hilfe der Gleichungen

$$\frac{M_m}{h_m} = \frac{M_{am}}{h_m} - \frac{X'}{h_m} - X'' \frac{x_m}{h_m} - X''' \frac{y_m}{h_m}$$

ermittle man die ($M:h$)-Linien und hieraus nach Seite 217 und 218 die Einflußlinien für die Stabkräfte.

An Stelle von $\frac{X'}{h_m}$ schreibe man $\frac{X'}{d} \frac{d}{h_m}$, wo d eine beliebig anzunehmende Strecke bedeutet. Die Multiplikation der $\frac{X'}{d}$; X'' , X''' mit $\frac{d}{h_m}$, $\frac{x_m}{h_m}$, $\frac{y_m}{h_m}$ führe man (nach Seite 179 und 180) mit Hilfe von Winkeln aus, deren Tangenten gleich den Multiplikatoren sind.

2. Man bestimme für verschiedene Lagen der Einzellast $P=1$ die Mittelkraftpolygone F_1CF_2 (Fig. 305) und benutze diese zur Berechnung der Ordinaten ($M:h$)-Linien.

3. Nach Aufzeichnung der Einflußlinien für die Gurtkräfte bestimme man die Einflußlinien für die Spannkräfte in den Füllungsstäben nach Nr. 72.

4. Man nehme die Lasteinheit P der Reihe nach in sämtlichen Querträgerangriffspunkten an, zeichne für jeden einzelnen dieser Belastungszustände einen Cremonaschen Kräfteplan und bestimme die Einflußlinien der Stabkräfte mit Hilfe dieser Kräftepläne.

113. Die Aufgabe, das Mittelkraftpolygon F_1CF_2 (Fig. 305) zu zeichnen, läßt sich — außer durch Bestimmung der Werte $x_0 = \frac{X'}{H}$ und $e = \frac{X''}{H} l$ — noch in folgender Weise lösen.

Verbindet man die Gewichte w' und w'' durch Seilpolygone (Fig. 305), deren Polweiten w_I und w_{II} sein mögen,*) so erhält man nach Eintragung der Schlußlinien s' , s'' die Momente

$$M_w' = w_I \eta'; \quad M_w'' = w_{II} \eta''. \quad (\text{Fig. 305 c u. e}).$$

Die äußersten Seiten des ersten Seilpolygons schneiden sich auf der Achse A_g , da ja diese Gerade die senkrechte Schwerachse der Gewichte w' ist, und man findet:

$$\Sigma w' : w_I = m : k \text{ also } \Sigma w' = w_I \frac{m}{k} \text{ und (nach Gleich. (15))}$$

$$X' = P \frac{\eta' k}{m}.$$

*) Zum ersten Seilpolygon haben wir in Fig. 305 d das zugehörige Kräftepolygon teilweise gezeichnet.

Die äußersten Seiten des zweiten Seilpolygons schneiden auf der Achse A_y die Strecke $v = \frac{\sum x w''}{w_H}$ ab; sie sind einander parallel, weil die Summe der Gewichte w'' (nämlich $\sum w'' = \sum x w'$) gleich Null und deshalb die Mittelkraft der w'' unendlich klein und unendlich fern ist. Es ergibt sich nach (15):

$$X'' = P \frac{\eta''}{v},$$

und, wenn die Lasteinheit P durch eine Strecke von der Länge v dargestellt wird:

$$X'' = \eta''; \quad X' = \frac{vk}{m} \eta' = n \eta',$$

wobei n nach Fig. 305e mittels der parallel zu den äußersten Seiten des ersten Seilpolygons gezogenen Geraden g_1 und g_2 bestimmt werden kann.

Zerlegt man nun die Kämpferdrücke K_1, K_2 nach senkrechter Richtung und nach der Richtung der Achse A_x , und bezeichnet man die senkrechten Seitenkräfte mit A und B (Fig. 305b), so findet man leicht:

$$A : H = \left(\overline{CD} + \frac{e}{l} a \right) : a, \quad \text{wo } CD = \frac{Pab}{lH},$$

weshalb

$$A = \frac{Pb}{l} + \frac{He}{l} = \frac{Pb}{l} + X'' = \frac{vb}{l} + \eta'',$$

und hieraus folgt, daß das Seilpolygon der Gewichte w'' die Strecke $v = P$, welche seine äußersten Seiten auf der Last P abschneiden, in die Teile

$$\eta_A = A \quad \text{und} \quad \eta_B = B$$

zerlegt. Hat man also den Horizontalschub H mit Hilfe eines die Gewichte w''' verbindenden Seilpolygons durch eine Strecke η''' dargestellt (was möglich ist, weil nach Gleichung (15) die Kraft $X''' = H$ proportional η''' ist), so ist man imstande, die Kämpferdrücke nach Größe und Richtung anzugeben, und braucht jetzt nur noch einen Punkt des Linienzuges $F_1 C F_2$ zu bestimmen (Fig. 308).

Besonders einfach gestaltet sich nun die Bestimmung der Schnittpunkte R der Kämpferdrücke mit der Achse A_x . Wir bezeichnen die Entfernung des Punktes R_1 von der A_y mit ξ und berechnen diese Strecke, indem wir die Summe der Momente der im Gleichgewichte befindlichen Kräfte K_1, K_2, P in bezug auf F_0 gleich Null setzen. Vorher ersetzen wir jedoch P durch die beiden in F_1 und F_2 angreifenden Seitenkräfte $\frac{Pb}{l}$ und $\frac{Pa}{l}$, zerlegen K_1 und K_2 auf die in

Besonders einfach gestaltet sich die doppelte Bestimmung der Lage von K_2 , wenn man die willkürliche Polweite des Seilpolygons II so wählt, daß $v = m$ wird (was durch zweimaliges Aufzeichnen dieses Seilpolygons zu bewirken ist). Dann wird $\eta_o \frac{v}{m} = \eta_o$ und $n = k$.

114. Wir wenden nun das im vorstehenden entwickelte Verfahren auf einen symmetrischen Bogenträger (Fig. 309a) an und stützen uns hierbei auf die im ersten Bande unseres Buches, Seite 23 und 24, Fig. 26, gezeigte Darstellung der höheren Momente paralleler Kräfte.

Die durch Rechnung zu bestimmenden Gewichte $w' = \frac{s}{r^2}$ *) werden zunächst als lotrechte Kräfte aufgefaßt und in der Reihenfolge w_1', w_2', w_3', \dots durch den Seilzug I (Pol O_I , Polweite w_I) verbunden. Die Polweite w_I darf beliebig groß angenommen werden. Die Seiten des Seilpolygons I schneiden auf der Achse A_y die den Gewichten w'' proportionalen Strecken $\frac{w'x}{w_I}$ ab, welche für die Knotenpunkte der linken Trägerhälfte positiv sind, für diejenigen der rechten negativ. Betrachtet man diese Strecken als senkrechte, an die Stelle der w' tretende Kräfte, verbindet sie durch ein Seilpolygon II (Pol O_{II} , beliebige Polweite $= w_{II}$), und mißt man senkrecht unter der in Frage kommenden Last P die durch den Seilzug II und dessen äußerste Seiten bestimmten Strecken η_A, η_B, v , so erhält man

$$\eta_A : \eta_B : v = A : B : P$$

und für den Kräftemaßstab $P = v$:

$$\eta_A = A; \quad \eta_B = B.$$

Da die x -Achse wagerecht ist, so sind A und B die senkrechten Stützenwiderstände.

Jetzt wird die Achse A_x als wagerechte Schwerachse der Gewichte w' bestimmt. Hierbei empfiehlt es sich, zur Erzielung einer recht deutlichen Zeichnung den Bogen verzerrt aufzutragen.

In Fig. 309b wurden die Höhen verdoppelt, auch sind die Gewichte w' zunächst in der Reihenfolge $w_1', w_3', w_5', w_4', w_2', \frac{1}{2}w_6''^{**})$ durch einen Seilzug III (Pol O_{III} , beliebige Polweite w_{III}) verbunden worden, um eine Durchkreuzung aufeinander folgender Seiten zu vermeiden. Der Schnittpunkt der äußersten Polygonseiten bestimmt die A_x , und auf dieser Achse werden von den Seiten des Seilzuges die den Gewichten w''' proportionalen Strecken $\frac{w'2y}{w_{III}}$ abgeschnitten, welche positiv oder negativ zu nehmen sind, je nachdem sie oberhalb oder unterhalb der A_x liegenden Knotenpunkten entsprechen. Diese Strecken wurden (an Stelle der w') als wagerechte Kräfte aufgefaßt und durch einen Seilzug IV (Pol O_{IV} , beliebige Polweite w_{IV}) verbunden, dessen äußerste Seiten auf der A_x eine Strecke u abschneiden, für welche die Beziehung gilt:

$$u_{w_{IV}} = \Sigma \frac{w'2y}{w_{III}} 2y.$$

Hieraus folgt für eine Bogenhälfte $\Sigma w'y^2 = \frac{1}{4}w_{III}w_{IV}u$ und für den ganzen Träger:

$$\Sigma w'y^2 = \frac{1}{2}w_{III}w_{IV}u.$$

*) Siehe die zweite Fußnote auf Seite 299.

***) $\frac{1}{2}w_6'$, weil nur die Hälfte des symmetrischen Bogens betrachtet wird.

Um nun die zur Ermittlung von

$$H = X''' = P \frac{M_w'''}{\sum w' y^2}$$

dienenden Momente M_w''' zu bestimmen, wurden die Strecken $\frac{2y w'}{w_{III}}$ (an Stelle der w') als senkrechte Kräfte aufgefaßt und durch ein Seilpolygon V (Pol O_V , Polweite w_V) verbunden, jetzt aber in der Reihenfolge 1, 2, 3, . . .^{*)}. Ist η''' die Ordinate dieses Seilzuges, so ist das Biegemoment des mit den Gewichten $\frac{2y w'}{w_{III}}$ belasteten Balkens $A'B'$ gleich $w_V \eta'''$, und man erhält daher für einen durch die Gewichte $w''' = w' y$ beanspruchten Balken:

$$M_w''' = \frac{1}{2} w_{III} w_V \eta''', \text{ weshalb}$$

$$H = P \frac{w_V \eta'''}{w_{IV} \cdot u} = \frac{v w_V}{w_{IV} u} \eta'''.$$

Wählt man also $w_V = \frac{w_{IV} \cdot u}{v}$ (z. B. $w_{IV} = \frac{1}{2} v$ und $w_V = \frac{1}{2} u$ wie dies in Fig. 309b geschehen ist^{**}), so findet man:

$$H = \eta''',$$

und ist jetzt imstande, für jede Einzellast P die Kämpferdrücke K_1 und K_2 zu ermitteln. Um die Lagen dieser Kräfte anzugeben, bestimmt man mit Hilfe der zur ersten Seite des Seilzuges I parallelen Geraden ED die Strecke n und trägt dieselbe auf der Achse A_y von O aus nach T hin ab. Nun dreht man die vom Seilzug I und dessen letzter Seite auf P abgeschnittene Strecke η_0 um 90° nach links, verbindet ihren Endpunkt mit dem Endpunkte der Strecke η_A durch eine (strichpunktierte) Gerade und zieht zu dieser von T aus eine Parallele; dieselbe schneidet die A_x im Durchgangspunkte von K_1 .

115. Einfluß einer Temperaturänderung. Zur Berechnung der von einer Temperaturänderung herrührenden Werte X könnten die Gleichungen (10) und (6) benutzt werden; der folgende Weg verdient jedoch den Vorzug.

Wir denken die Spannkkräfte $S''' = \mp 1 \frac{y_m}{r_m}$ durch zwei entgegengesetzt gleiche, nach außen gerichtete Kräfte von der Größe $1 \sec \alpha$ (Fig. 310) hervorgerufen, welche mit der Achse A_x (deren Neigungswinkel $= \alpha$ sei) zusammenfallen und deren Angriffspunkte L_1 und L_2 mit den Bogenenden durch starre Stäbe verbunden seien^{***}). Sodann

^{*)} Im zugehörigen Kräfteplan ist die Reihenfolge der Strahlen durch Ziffern angegeben.

^{**} w_V ist die einzige Polweite, welche nicht willkürlich, sondern durch die vorhergehenden Polweiten bestimmt ist. Der Maßstab, in welchem die w' aufgetragen werden, ist, solange nur der Einfluß von Lasten in Frage kommt (nicht auch der von Temperaturänderungen) ganz gleichgültig.

^{***} Diese Kräfte erzeugen das Angriffsmoment $M_m = 1 \sec \alpha (y_m \cos \alpha) = y_m$ und die Stabkraft $S_m''' = \mp \frac{y_m}{r_m}$. Diese Formel gilt auch für die Füllungsstäbe; an Stelle der Knoten m treten die bekannten Drehpunkte der Ritterschen Momenten-Gleichungen.

fassen wir $1 \sec \alpha$ als eine Spannkraft (und zwar als einen *Druck*) auf, der in einem die Knoten L_1 und L_2 verbindenden Stabe auf irgendeine Weise erzeugt wird und wendet auf das nunmehr nur von inneren Kräften beanspruchte und in keinem Punkte gestützte Fachwerk das Gesetz der virtuellen Verschiebungen an, indem wir den Stablängen s die Änderungen $\omega \cdot s$ zuschreiben, wo ω einen festen Wert vorstellt. Wir erhalten dann die Arbeitsgleichung

$$\sum S''' \omega s + \sum_1 S''' \omega s - 1 \sec \alpha \cdot \overline{\omega L_1 L_2} = 0,$$

wobei sich das erste Glied auf die Stäbe des Bogenfachwerks bezieht, das zweite auf die hinzugefügten starren Stäbe, mit Ausnahme von $L_1 L_2$, das dritte schließlich auf den Stab $L_1 L_2$. Wird ω gehoben und werden die Punkte L_1, L_2 so angenommen, daß $\sum_1 S''' s = 0$ wird, so ergibt sich

$$\sum S''' s = \overline{L_1 L_2} \sec \alpha$$

und wir erhalten sehr einfach:

$$(16) \quad X_1''' = \frac{\varepsilon E F l''' \sec \alpha}{\sum y_m w_m''''},$$

wo l''' die Länge der Strecke $L_1 L_2$ bedeutet.

Zur Bestimmung des Punktes L_1 bezeichnen wir die Längen der Stäbe AL_1, CL_1, AC mit a, b, c , die durch die Kraft $1 \sec \alpha$ in diesen Stäben erzeugten Spannkraften mit S_a''', S_b''', S_c''' und suchen die Erfüllung der Gleichung

$$S_a''' a + S_b''' b + S_c''' c = 0$$

herbeizuführen. Geht der erste Füllungsstab des Bogenfachwerks durch den Punkt A , so ergibt sich der in Fig. 311 dargestellte Kräfteplan, in welchem S_a''' die Spannkraft im ersten Gliede der unteren Gurtung bedeutet. Mit den aus der Figur zu entnehmenden Bezeichnungen der Winkel folgt, wenn AE und AE' so gezogen werden, daß $\angle L_1 EA = \psi$ und $\angle L_1 E' A = \beta$ wird:

$$\frac{-S_c'''}{S_b'''} = \frac{\sin(\psi - \gamma)}{\sin(180^\circ - \psi)} = \frac{\overline{CE}}{AC} = \frac{\overline{CE}}{c},$$

$$\frac{-S_a'''}{S_b'''} = \frac{\sin \varrho}{\sin \beta} = \frac{\overline{L_1 E'}}{\overline{AL_1}} = \frac{\overline{L_1 E'}}{a},$$

und hieraus:

$$S_a''' a + S_b''' (\overline{CE} + \overline{L_1 E'}) + S_c''' c = 0.$$

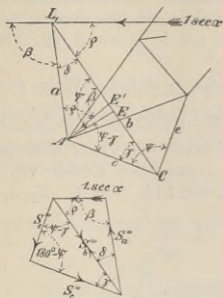


Fig. 311.

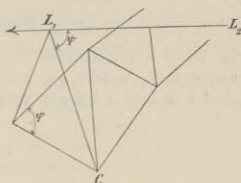


Fig. 312.

Die oben aufgestellte Bedingung wird hiernach erfüllt, sobald $\overline{CE} + \overline{L_1 E'} = b$, d. h. sobald $\beta = \psi$ wird.

Ähnlich folgt: Geht der erste Füllungsstab von C aus (Fig. 312), so muß, damit $aS_a''' + bS_b''' + cS_c''' = 0$ werde, der Winkel $L_2 L_1 C = \psi$ sein.

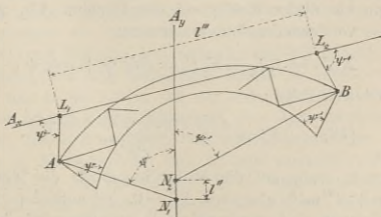


Fig. 313.

In derselben Weise wird der Punkt L_2 bestimmt und damit die Länge der Strecke $\overline{L_1 L_2} = l'''$ gefunden. In Fig. 313 wurden

fassen wir $1 \sec \alpha$ als eine Spannkraft (und zwar als einen *Druck*) auf, der in einem die Knoten L_1 und L_2 verbindenden Stabe auf irgendeine Weise erzeugt wird und wendet auf das nunmehr nur von inneren Kräften beanspruchte und in keinem Punkte gestützte Fachwerk das Gesetz der virtuellen Verschiebungen an, indem wir den Stablängen s die Änderungen $\omega \cdot s$ zuschreiben, wo ω einen festen Wert vorstellt. Wir erhalten dann die Arbeitsgleichung

$$\sum S''' \omega s + \sum_1 S''' \omega s - 1 \sec \alpha \cdot \overline{L_1 L_2} = 0,$$

wobei sich das erste Glied auf die Stäbe des Bogenfachwerks bezieht, das zweite auf die hinzugefügten starren Stäbe, mit Ausnahme von $L_1 L_2$, das dritte schließlich auf den Stab $L_1 L_2$. Wird ω gehoben und werden die Punkte L_1, L_2 so angenommen, daß $\sum_1 S''' s = 0$ wird, so ergibt sich

$$\sum S''' s = \overline{L_1 L_2} \sec \alpha$$

und wir erhalten sehr einfach:

$$(16) \quad X_i''' = \frac{\varepsilon E F l''' \sec \alpha}{\sum y_m w_m''''},$$

wo l''' die Länge der Strecke $L_1 L_2$ bedeutet.

Zur Bestimmung des Punktes L_1 bezeichnen wir die Längen der Stäbe AL_1, CL_1, AC mit a, b, c , die durch die Kraft $1 \sec \alpha$ in diesen Stäben erzeugten Spannkräfte mit S_a''', S_b''', S_c''' und suchen die Erfüllung der Gleichung

$$S_a''' a + S_b''' b + S_c''' c = 0$$

herbeizuführen. Geht der erste Füllungsstab des Bogenfachwerks durch den Punkt A , so ergibt sich der in Fig. 311 dargestellte Kräfteplan, in welchem S_c''' die Spannkraft im ersten Gliede der unteren Gurtung bedeutet. Mit den aus der Figur zu entnehmenden Bezeichnungen der Winkel folgt, wenn AE und AE' so gezogen werden, daß $\angle L_1 EA = \psi$ und $\angle L_1 E' A = \beta$ wird:

$$\frac{-S_c'''}{S_b'''} = \frac{\sin(\psi - \gamma)}{\sin(180^\circ - \psi)} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CE}}{c},$$

$$\frac{-S_a'''}{S_b'''} = \frac{\sin \varphi}{\sin \beta} = \frac{\overline{L_1 E'}}{\overline{AL_1}} = \frac{\overline{L_1 E'}}{a},$$

und hieraus:

$$S_a''' a + S_b''' (\overline{CE} + \overline{L_1 E'}) + S_c''' c = 0.$$

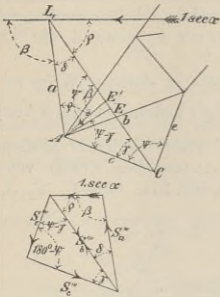


Fig. 311.

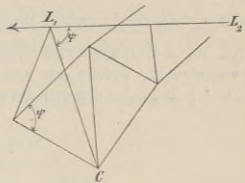


Fig. 312.

Die oben aufgestellte Bedingung wird hiernach erfüllt, sobald $\overline{CE} + \overline{L_1 E'} = b$, d. h. sobald $\beta = \psi$ wird.

Ähnlich folgt: Geht der erste Füllungsstab von C aus (Fig. 312), so muß, damit $a S_a''' + b S_b''' + c S_c''' = 0$ werde, der Winkel $L_2 L_1 C = \psi$ sein.

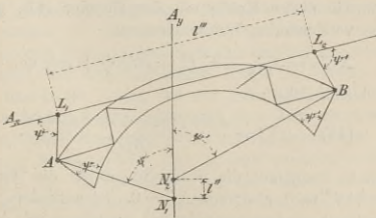


Fig. 313.

In derselben Weise wird der Punkt L_2 bestimmt und damit die Länge der Strecke $\overline{L_1 L_2} = l'''$ gefunden. In Fig. 313 wurden

die äußersten Füllungsstäbe durch A beziehungsweise B gehend angenommen.

Durch eine Reihe ganz ähnlicher Schlußfolgerungen wird für die im Zähler des Ausdruckes für X'' stehende Summe der Wert

$$(17) \quad \Sigma S''s = l'', \text{ und damit } X_t'' = \frac{\varepsilon E F t l''}{\Sigma x_m w_m''}$$

gefunden, wobei l'' den gegenseitigen Abstand der auf der Achse A_y gelegenen Punkte N_1 und N_2 bedeutet, welche erhalten werden, sobald man von A und B aus Gerade zieht, die mit der Achse A_y die Winkel ψ und ψ' bilden.

Um schließlich noch die Summe $\Sigma S's$ in einfacher Weise zu berechnen, denken wir uns die Momente $M' = 1$ und Spannkkräfte $S_m' = \mp \frac{1}{r_m}$ durch an den Bogenenden angreifende rechts drehende Kräftepaare hervorgebracht, welche aus zur Achse A_x parallelen Kräften von der Größe 1 bestehen und deren Arm = 1 ist, Fig. 314. Sind E_1, E_2, J_1, J_2

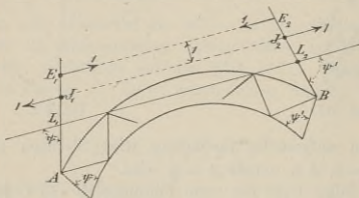


Fig. 314.

die Schnittpunkte dieser Kräfte mit den Geraden AL_1 und BL_2 , so folgt aus den vorstehenden Untersuchungen

$$\Sigma S's = \overline{J_1 J_2} - \overline{E_1 E_2} = \cotg \psi + \cotg \psi',$$

und es ergibt sich daher:

$$(18) \quad X_t' = \frac{\varepsilon E F t (\cotg \psi + \cotg \psi')}{\Sigma w_m'}$$

Für den in bezug auf die Senkrechte durch die Mitte symmetrischen Bogen ist $l''' = 0$, also auch $X_t'' = 0$. Ist außerdem, was ebenfalls in der Regel (zum mindesten annähernd) zutreffen wird, $\psi = \psi' = 90^\circ$, also $\cotg \psi = \cotg \psi' = 0$, so folgt auch $X_t' = 0$ und (wegen $\alpha = 0$)

$$(19) \quad X_t''' = H_t = \frac{\varepsilon E F t l'''}{\Sigma y_m w_m'''}$$

worin l''' die gegenseitige wagerechte Entfernung derjenigen Punkte der Kämpfer bedeutet, von denen die äußersten Füllungsstäbe ausgehen.*) In diesem wichtigen Falle erzeugt also die Temperaturänderung zwei in die Achse A_x fallende Kämpferdrücke von der Größe H_t .

Wird die Gestalt eines leicht ansteigenden Bogens nach Seite 300 aus einer symmetrischen Grundform entwickelt, so ist es ebenfalls zulässig, als Folge der Temperaturänderung einen mit der A_x -Achse zusammenfallenden Kämpferwiderstand anzunehmen. Die Größe desselben ist (wegen $K_t = H_t \sec \alpha = X_t''' \sec \alpha$)

$$(20) \quad K_t = \frac{\varepsilon E F t l''' \sec \alpha}{\Sigma y_m w_m'''}$$

Wird der Einfluß der Belastung nach Nr. 114 mit Hilfe von Seilpolygonen dargestellt, so wird man auch die in den Nennern der Werte X_t' , X_t'' , X_t''' auftretenden Summenausdrücke mittels jener Seilzüge berechnen. Man muß dann auf die Einheiten der in Frage kommenden Größen achten. Für den in Fig. 309 untersuchten Bogen ist z. B.

$$H_t = \frac{\varepsilon E F t l'''}{\Sigma y_m w_m'''} = \frac{\varepsilon E F t l'''}{\Sigma y_m^2 w_m'}$$

und $\Sigma y_m^2 w_m' = \frac{1}{2} w_{III} w_{IV} u$, weshalb

$$H_t = 2 \frac{\varepsilon E F t l'''}{w_{III} w_{IV} u}$$

Nun ist $w_m' = \frac{s_m}{r_m^2}$ der reziproke Wert einer Länge, also $\Sigma y_m^2 w_m'$ eine Länge und man muß deshalb eine der drei Strecken w_{III} , w_{IV} , u (gleichgültig welche) mit dem Maßstabe messen, in welchem die w' aufgetragen worden sind, die andern beiden aber mit dem Längenmaßstabe der Zeichnung.

b. Zweites Verfahren.

116. Wir entwickeln noch ein zweites Verfahren, welches auch über den Einfluß schräger Lasten Aufschluß gibt und sich eng an die in Nr. 64, Seite 156, gegebene allgemeine Lösung anlehnt. Zu dem Zwecke ersetzen wir das linke Widerlager durch eine starre Scheibe (Fig. 315a), und fügen in dem vorläufig beliebig angenommenen Punkte O derselben zwei sich aufhebende Kräfte K_1 hinzu, welche dieselbe Richtung und Größe haben, wie der linke Kämpferwiderstand K_1 . Die eine dieser beiden Kräfte bildet mit dem Kämpferwiderstande K_1 ein Kräftepaar, dessen Moment $K_1 c$ wir mit X_a bezeichnen; die andere zerlegen wir in X_b (senkrecht) und X_c (mit vorläufig willkürlicher Richtung). X_a , X_b , X_c führen wir als die statisch nicht bestimmbareren Größen ein. Sind dieselben bekannt, so läßt sich K_1 wie folgt finden: Zunächst stellt man Größe und Richtung von K_1 mittels des Kräftezuges $X_c X_b$ in Fig. 315b fest. Nun bestimmt man die in Fig. 315a

*) Für den Träger in Fig. 306 ist $l''' = \overline{A'B'}$.

mit Z bezeichneten senkrechten Kräfte, welche ein dem Kräftepaare (K_1, K_1) gleichwertiges Paar bilden, mittels der Bedingung $Zk = X_a$, bildet hierauf in Fig. 315b die Mittelkraft L von Z und K_1 und zieht durch O zu L eine Parallele; sie schneidet die Senkrechte durch A im Durchgangspunkte F_1 des Kämpferdruckes K_1 .

Bei Aufstellung der Elastizitätsbedingungen legen wir dem Punkte O die Ordnungsziffern b oder c bei, je nachdem wir O als den Angriffspunkt von X_b oder X_c bezeichnen wollen. Zur Berechnung des Einflusses einer in m angreifenden, beliebig gerichteten Last P_m benutzen wir die Gleichungen:

$$(21) \quad X_a = P_m \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}, \quad X_b = P_m \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}}, \quad X_c = P_m \frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}},$$

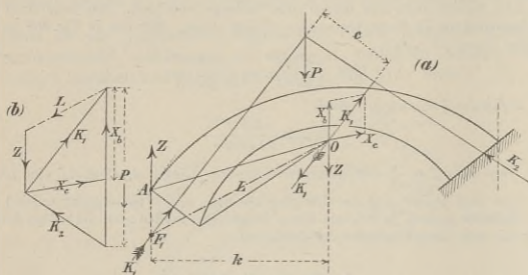


Fig. 315.

in denen die δ die in der Einleitung erklärte Bedeutung haben, und deren Gültigkeit voraussetzt, daß der Angriffspunkt von X_b , X_c und die Richtung von X_c nach den auf Seite 156 und 157 (im Beispiel 1) gegebenen Regeln bestimmt werden. (Erzielung von $\delta_{ab} = \delta_{ba} = 0$; $\delta_{aa} = \delta_{ca} = 0$; $\delta_{bc} = \delta_{cb} = 0$.)

Wir fassen (Fig. 316) den Stabzug 0—1—2—3—4 8—9 mit der ruhenden Seite 0—1 ins Auge, und schließen an diesen den (vorläufig noch nicht gegebenen) Punkt $O \equiv 10$ mittels der starren Stäbe 9—10 und 8—10 an. Das Dreieck 8—9—10 ist dann die das linke Widerlager vertretende Scheibe. Die Stablängen bezeichnen wir mit $d_1, d_2, d_3 \dots$ und die in demselben Sinne zu messenden Winkel zwischen den aufeinander folgenden Seiten mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$

Werden die Formänderungen der Füllungsstäbe vernachlässigt, was meistens erlaubt ist, so sind die Verschiebungen der Knotenpunkte

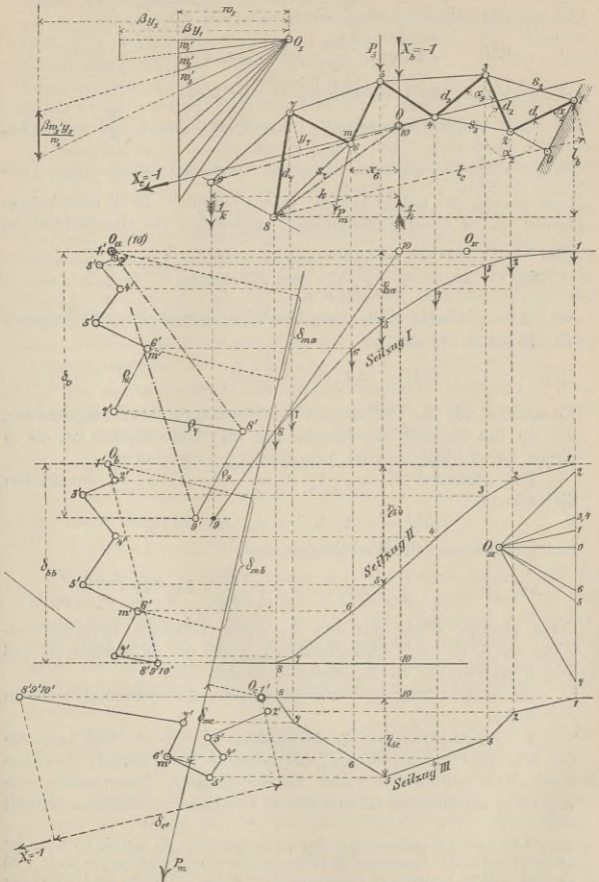


Fig. 316.

durch die Änderungen $\Delta\alpha$ der Winkel α vollständig bestimmt. Dabei ist mit den geläufigen Bezeichnungen s_m und r_m :

$$(22) \quad \Delta\alpha_m = + \frac{\Delta s_m}{r_m} \text{ bzw. } \Delta\alpha_m = - \frac{\Delta s_m}{r_m},$$

je nachdem α_m ein Dreieckswinkel ist oder nicht.

Dem Angriffsmomente M_m entspricht $S_m = \mp \frac{M_m}{r_m}$ und $\Delta s_m = \mp \frac{M_m s_m}{r_m E F_m}$, wobei sich das obere Vorzeichen auf die obere Gurtung bezieht, das untere auf die untere Gurtung. Ist α ein Dreieckswinkel, so ist s ein Untergurtstab, anderenfalls ein Obergurtstab, so daß allgemein:

$$(23) \quad \Delta\alpha_m = + \frac{M_m s_m}{r_m^2 E F_m} \text{ und } E F_c \Delta\alpha_m = \frac{M_m s_m}{r_m^2} \frac{F_c}{F_m},$$

wo F_c eine beliebig große, aber konstante Querschnittsgröße bedeutet.

Rechnen wir also mit

$$(24) \quad \Delta\alpha_m = \frac{s_m}{r_m^2} \frac{F_c}{F_m} M_m,$$

so erhalten wir die $E F_c$ -fachen Verschiebungen, eine Vergrößerung, die auf das Ergebnis der Gleichungen (21) ohne Einfluß ist, da in diesen nur Verhältnisse von Verschiebungen vorkommen.

Den Zuständen $X_a = -1$, $X_b = -1$, $X_c = -1$ entsprechen die Momente:

$$M_m' = -1, \quad M_m'' = x_m, \quad M_m''' = y_m,$$

und infolgedessen die Winkeländerungen:

$$\Delta\alpha_m' = - \frac{s_m}{r_m^2} \frac{F_c}{F_m}; \quad \Delta\alpha_m'' = x_m \frac{s_m}{r_m^2} \frac{F_c}{F_m}; \quad \Delta\alpha_m''' = \frac{y_m s_m}{r_m^2} \frac{F_c}{F_m},$$

deren absolute Werte mit den im ersten Verfahren benutzten Gewichten w_m' , w_m'' , w_m''' übereinstimmen, wobei nur zu beachten ist, daß jetzt y rechtwinklig zu X_c gemessen werden muß.*)

Die Aufzeichnung der Verschiebungspläne geschieht nun in folgender Weise.

I. Verschiebungsplan für den Zustand $X_a = -1$. Man betrachte die Winkeländerungen $-\Delta\alpha_m'$ als lotrechte nach abwärts gerichtete Kräfte und verbinde sie durch einen Seilzug I , dessen erste Seite wagerecht anzunehmen ist und dessen Polweite w_I willkürlich gewählt

*) Es wird sich später zeigen, daß die Richtung von X_c mit der Richtung der Achse A_x in Fig. 305 zusammenfällt. Wäre die wagerechte Projektion von X_c (d. i. H) als statisch nicht bestimmbar Größe eingeführt worden, so würde die Übereinstimmung der $\Delta\alpha'''$ mit den früheren w''' eine vollständige sein.

werden darf. Durch die den Knotenpunkten 1, 2, 3, . . . 9 des Stabzuges entsprechenden Punkte des Seilzuges lege man wagerechte Gerade g_1, g_2, g_3, \dots und zeichne von dem beliebig in g_1 angenommenen Punkte 1' aus einen Linienzug 1'2'3'4' . . . 9', dessen Seiten rechtwinklig zu den entsprechenden Seiten des Stabzuges 1—2—3—4 . . . 9 sind. Die von dem mit 1' zusammenfallenden Pole O_n nach den Punkten 2', 3', 4' . . . gezogenen Strahlen stellen dann die Verschiebungen der Knoten 2, 3, 4, . . . nach Größe und Richtung dar, und man findet daher den einer Einzellast P_m entsprechenden Wert $\delta_{m,n}$ als Projektion des Strahles $O_n m'$ auf die Richtung von P_m und zwar in einem von der Polweite w_1 und den Werten E, F abhängigen, vorläufig gleichgültigen Maßstabe. Da nun der (die Ziffer 10 tragende) Punkt O in Ruhe bleiben soll, muß 10' mit O_n zusammenfallen, und es ist mithin die Lage von 10 durch die Bedingungen: $9-10 \perp 9'-10', 8-10 \perp 8'-10'$ bestimmt; auch leuchtet ein, daß Punkt 10 in der senkrechten Schwerachse der Gewichte — $\Delta \alpha' = w'$ liegt, wodurch das Zusammenfallen von X_8 mit der früher benutzten Achse A_y bewiesen ist.

Ein zweites Verfahren der Aufzeichnung des Linienzuges 1' 2' 3' . . . besteht in der Berechnung der Drehungswinkel ψ und Werte $\rho = \psi d$ für die einzelnen Stäbe $d_1, d_2 \dots$. Man erhält:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \Delta \alpha_1; \psi_2 = \psi_1 + \Delta \alpha_2; \psi_3 = \psi_2 + \Delta \alpha_3; \dots \dots \dots \\ \rho_1 &= d_1 \psi_1; \rho_2 = d_2 \psi_2; \rho_3 = d_3 \psi_3; \dots \dots \dots \end{aligned}$$

und macht nun:

$$1' - 2' = \rho_1; 2' - 3' = \rho_2; 3' - 4' = \rho_3; \dots \dots \dots$$

Ein drittes Verfahren stützt sich auf den Umstand, daß die Strecken ρ nur von den $\Delta \alpha$ und d abhängen, nicht aber von der Gestalt des Stabzuges. Reiht man also die Stablängen d wagerecht aneinander, wie dies die in kleinerem Maßstabe gezeichnete Fig. 317 zeigt, so findet man die Werte ρ als die Unterschiede aufeinander folgender Ordinaten eines die Gewichte — $\Delta \alpha$ verbindenden Seilpolygons.

Schließlich könnte man viertens die Punkte 1', 2', 3' mit Hilfe eines Williot'schen Verschiebungsplanes festlegen.

Das erste Verfahren läßt im Stich, sobald der Stabzug lotrechte Stäbe enthält, und es führt zu ungenauen Ergebnissen, falls Stabrichtungen vorkommen, die von der Lotrechten nur wenig abweichen.

Man denke sich z. B. den Stab 7—8 der lotrechten Lage genähert, um einzusehen, daß eine genaue Bestimmung des Punktes 8' infolge des entstehenden schleifenden Schnittes schwierig ist. Man würde dann ρ_7 berechnen oder von dem Seilpolygon in Fig. 317 das Stück 6—7—8 aufzeichnen, welches durch ρ_6 und $\Delta \alpha_7$

bestimmt ist. Besitzen mehrere Stäbe eine solche Lage, so wird man von der Anwendung des ersten Verfahrens ganz absehen. Am übersichtlichsten ist die Bestimmung der ρ nach Fig. 317.

Nach Ermittlung von $\delta_{m\alpha}$ findet man den Einfluß von P_m auf X_α mittels der ersten der Gleichungen (21), in der $\delta_{\alpha\alpha}$ den Drehungswinkel (ψ) der Scheibe 8—9—10 für den betrachteten Belastungszustand $X_\alpha = -1$ bedeutet. Nun entspricht dem Stabe 9—10 der Wert $\rho_9 = 9' - 10'$, also der Drehungswinkel $\psi_9 = \frac{9' - 10'}{9 - 10} = \frac{\delta_v}{k}$ und man erhält daher:

$$X_\alpha = P_m \delta_{m\alpha} \frac{k}{\delta_v},$$

und für die durch die Gleichung $Zk = X_\alpha$ bestimmte Kraft Z den Wert:

$$Z = P_m \frac{\delta_{m\alpha}}{\delta_v}.$$

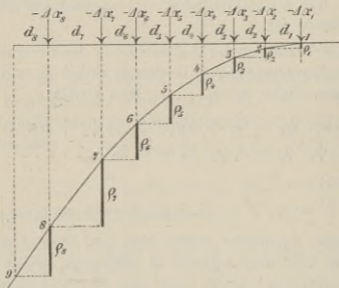


Fig. 317.

Einer in 5 angreifenden lotrechten Last P_5 entspricht:

$$Z = \frac{P_5 \eta_{5\alpha}}{\delta_v},$$

d. h. ein Wert, zu dessen Ermittlung die Aufzeichnung des Seilzuges I genügen würde.

II. *Verschiebungsplan für den Zustand $X_\alpha = -1$.* Die Gewichte $-\Delta\alpha' = \frac{s_m}{r_m^2} \frac{F_c}{F_m}$ werden durch die Gewichte $-\Delta\alpha'' = -\frac{s_m x_m}{r_m^2} \frac{F_c}{F_m}$ (welche rechts von O positiv, also abwärts gerichtet sind) ersetzt und nun wird das vorhin beschriebene Verfahren wiederholt. Der die

neuen Gewichte verbindende Seilzug *II* kann aus dem Seilzuge *I* in derselben Weise abgeleitet werden wie in Fig. 309. Nur muß die Lage des Poles O_{II} (bei beliebig anzunehmender Polweite w_{II}) so gewählt werden, daß die erste Seite des Seilzuges *II* wagerecht liegt. Nach Eintragung des vom Pole O_b aus gezeichneten Linienzuges $1' 2' 3' \dots 8' 9'$ findet man den einer schrägen Last P_m entsprechenden Wert δ_{mb} als Projektion von $O_b m'$ auf die Richtung von P_m und die Verschiebung δ_{bb} des Angriffspunktes $b \equiv 10$ von X_b als Projektion des Strahles $O_b 10'$ auf die Richtung von $X_b = -1$. Infolgedessen findet man den Einfluß der schrägen Last P_m :

$$X_b = P_m \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}}$$

und den Einfluß einer lotrechten Last P_5 :

$$X_b = P_5 \frac{\eta_{5b}}{\delta_{bb}}.$$

Zur Ermittlung des letzteren Wertes würde die Aufzeichnung des Seilzuges *II* genügen.

Noch sei aus dem Zusammenfallen der Punkte $8', 9', 10'$ der Schluß gezogen, daß sämtliche Punkte der Scheibe $8-9-10$ bei Eintreten des Zustandes $X_b = -1$ dieselbe Verschiebung $O_b 8' = O_b 9' = O_b 10'$ erfahren, daß also der Drehungswinkel $\delta_{ab} = 0$ wird — eine Bedingung, an welche die Gültigkeit der Gleichungen (21) bekanntlich gebunden ist.

III. Verschiebungsplan für den Zustand $X_c = -1$. Da die Verschiebung δ_{cb} , welche der Angriffspunkt c von X_c im Sinne von X_c und infolge von $X_b = -1$ erfährt, gleich Null sein soll, so muß die Richtung von X_c rechtwinklig zum Strahle $O_b 10'$ des soeben gezeichneten Verschiebungsplanes angenommen werden. Ist dies geschehen, so

werden die Gewichte $\Delta''' \alpha_m = y_m \frac{s_m}{r_m^2} \frac{F'_c}{F'_m} = y_m w'_m$ (absolut genommen)

bestimmt oder aber es werden — was meistens bequemer ist — Gewichte ermittelt, welche den Werten $y_m w'_m$ proportional sind, beispielsweise die in der Figur 316 (im Kräfteplane der w') dargestellten:

$\frac{\beta}{w_I} y_m w'_m$, wo β eine beliebige runde Zahl bedeutet. Die algebraische

Summe dieser teils positiven teils negativen Gewichte muß gleich Null sein (eine sehr scharfe Zeichenprobe!). Da nämlich die Richtung von X_c durch die Bedingung $\delta_{cb} = 0$ bestimmt wurde, so muß nach dem Maxwell'schen Satze auch $\delta_{bc} = 0$ sein, d. h. es muß die Verschiebung des Angriffspunktes b von X_b in der Richtung von X_b und hervorgerufen durch $X_c = -1$ gleich Null sein. Hieraus folgt aber:

$O_1 10' \perp X_b$, was nur der Fall ist, wenn die äußersten Seiten des Seilzuges III zusammenfallen.

Man erhält schließlich für eine schräge Last P_m und eine senkrechte Last P_5 :

$$X_e = P_m \frac{\delta_{m e}}{\delta_{e e}} \quad \text{und} \quad X_e = P_{m5} \frac{\eta_{5 e}}{\delta_{e e}},$$

wo $\delta_{e e}$ die Projektion von $O_1 10'$ auf die Richtung von X_e bedeutet.

Die gestellte Aufgabe ist somit gelöst; und es möge nur noch daran erinnert werden, daß man die den Linienzug $O_b 2' 3' \dots 10'$ beziehungsweise $O_b 2' 3' \dots 10'$ bestimmenden Strecken ϱ auch in der bei Herleitung des Verschiebungsplanes für $X_a = -1$ beschriebenen Weise durch Rechnung oder mit Hilfe eines gestreckten Stabzuges (Fig. 317) oder mittels eines Williot'schen Planes ermitteln kann — und daß diese Abänderung des in der Fig. 316 befolgten Verfahrens zuweilen geboten ist.

Es verdient hervorgehoben zu werden, daß ganz besondere Sorgfalt auf die Bestimmung der Lage des Punktes O und der Richtung der Kraft X_e zu verwenden ist. Etwa hierbei begangene Zeichenfehler sind von großem Einfluß. Will man diesen Teil der Aufgabe durch Rechnung lösen, so beachte man, daß (wegen $\Sigma y w' = 0$) der Punkt O mit dem Schwerpunkte der Gewichte w' und die Kraft X_e mit der früher benutzten Achse A_e zusammenfällt, weshalb die auf Seite 314 abgeleiteten Formeln brauchbar sind; die y dürfen hierbei zunächst lotrecht gemessen werden.

Andererseits liefern die vorstehend entwickelten Verschiebungspläne einen Beitrag zur Lehre vom Schwerpunkte und den Momenten zweiter Ordnung. Mit Hilfe des Linienzuges $O_2 1' 2' \dots$ (den man dann um 90° nach links drehen wird) vermag man den Schwerpunkt O einer Gruppe von Punkten zu bestimmen, welche mit den Gewichten w' belastet sind und die Linienzüge $O_b 1' 2' \dots$, $O_c 1' 2' \dots$ können zur Ermittlung der Trägheitsmomente $\Sigma w' x^2$ und $\Sigma w' y^2$ benutzt werden. Man findet nämlich:

$$\delta_{bb} = \Sigma \frac{w' x}{w_I} \cdot \frac{x}{w_{II}}; \quad \delta_{cc} = \Sigma \frac{w' y \beta}{w_I} \cdot \frac{y}{w_{III}};$$

also für $w_I = w_{II} = w_{III} = 1$ und $\beta = 1$:

$$\delta_{bb} = \Sigma w' x^2; \quad \delta_{cc} = \Sigma w' y^2.$$

IV. *Einfluß einer Temperaturänderung.* Wir gehen von den Formeln aus:

$$(25) \quad X_{at} = 1 \frac{\delta_{at}}{\delta_{aa}}; \quad X_{bt} = 1 \frac{\delta_{bt}}{\delta_{bb}}; \quad X_{ct} = 1 \frac{\delta_{ct}}{\delta_{cc}},$$

in welchen δ_{at} den von der Temperaturänderung hervorgerufenen Drehungswinkel der Scheibe 8—9—10 bedeutet, während δ_{bt} und δ_{ct} die von der gleichen Ursache herrührenden Verschiebungen des Punktes 10 im Sinne von X_b beziehungsweise X_c sind.

Wir nehmen eine gleichmäßige Erwärmung des Trägers an und machen zur Vereinfachung der Rechnung die stets zulässige Annahme, daß sich auch die Strecken 1—0 und 8—9 in demselben Maße aus-

dehnen können, wie die Fachwerkstäbe. Es sind dann alle Winkeländerungen = 0 und der Stabzug 1—2—3 8 nimmt eine Form an, welche der anfänglichen Gestalt ähnlich ist. Man erhält $\delta_{at} = 0$, ferner, da die Verschiebungen von 10 mit denen des Punktes 8 übereinstimmen:

$$\delta_{bt} = \varepsilon t l_b, \quad \delta_{ct} = \varepsilon t l_c,$$

wo l_b und l_c die Projektionen der Strecke 8—1 auf die Richtungen von X_b und X_c bedeuten. Hiernach ergibt sich:

$$X_{at} = 0; \quad X_{bt} = \frac{\varepsilon t l_b}{\delta_{bb}}; \quad X_{ct} = \frac{\varepsilon t l_c}{\delta_{cc}}.$$

Sollen hierin die in Fig. 316 dargestellten Strecken δ_{bb} und δ_{cc} eingesetzt werden, so ist zu beachten, daß jene Verschiebungspläne die EF_c -fachen Verschiebungen liefern, daß also die Zähler der Ausdrücke für X_{bt} , X_{ct} mit EF_c multipliziert werden müssen. Weitere Umformungen sind dadurch bedingt, daß die Polweiten der Seilzüge II, III (welche letztere die Biegungslinien für $X_b = -1$ und $X_c = -1$ vorstellen) nicht = 1 sondern = w_{II} beziehungsweise w_{III} sind, daß also die entsprechenden Verschiebungen noch mit w_{II} beziehungsweise w_{III} zu multiplizieren sind. Schließlich wurden die Gewichte $w'' = xw'$ und $w''' = yw'$ durch die Gewichte $\frac{xw'}{w_I}$ und $\frac{\beta y w'}{w_I}$ ersetzt; was eine weitere Multiplikation mit w_I beziehungsweise $\frac{w_I}{\beta}$ zur Folge hat. Man erhält daher:

$$X_{bt} = \frac{\varepsilon EF_c l_b t}{w_I w_{II} \delta_{bb}} \quad \text{und} \quad X_{ct} = \beta \frac{\varepsilon EF_c l_c t}{w_I w_{III} \delta_{cc}}.$$

Von den in den Nennern erscheinenden drei Strecken (w_I , w_{II} , δ_{bb} beziehungsweise w_I , w_{III} , δ_{cc}) müssen je zwei mit dem Längenmaßstabe gemessen werden (z. B. w_{II} und δ_{bb} , ferner w_{III} und δ_{cc}) und je eine (nämlich beide Male w_I) mit dem Maßstabe, nach welchem die Gewichte w' aufgetragen worden sind*).

Zeichnet man die Verschiebungspläne nach dem Verfahren von Williot, so fasse man die den Zuständen $X_a = -1$, $X_b = -1$, $X_c = -1$ entsprechenden Spannkkräfte S_a , S_b , S_c , als Zahlen auf. Die mit EF_c multiplizierten Längenänderungen

$$\Delta s_a = S_a s_a, \quad \Delta s_b = S_b s_b, \quad \Delta s_c = S_c s_c$$

sind dann Längen, welche in einem geeigneten — vom Maßstabe der Zeichnung unabhängigen — Maßstabe aufgetragen werden, mit dem auch die δ_{bb} , δ_{cc} gemessen werden. Man erhält dann:

$$X_{bt} = \varepsilon EF_c t \frac{l_b}{\delta_{bb}}; \quad X_{ct} = \varepsilon EF_c t \frac{l_c}{\delta_{cc}}.$$

*) Vergl. den Schluß von Nr. 115, Seite 311.

117. Der Kämpferdruck, dessen Zerlegung die Unbekannten X_a , X_b , X_c lieferte, ist die Mittelkraft der Spannkkräfte in den drei am Widerlager angreifenden Stäben. Ersetzt man diese drei Stäbe durch drei andere, von irgendeinem Schnitte tt getroffene Stäbe, Fig. 318, so gelangt man zu der folgenden Lösung, die sich von der eben beschriebenen nur unwesentlich unterscheidet und deshalb nur einer kurzen Erläuterung bedarf.

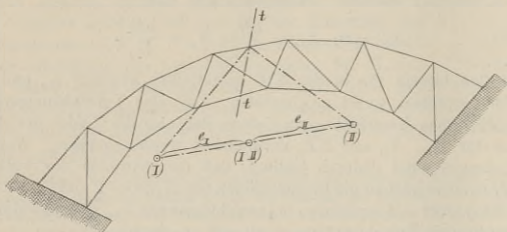


Fig. 318.

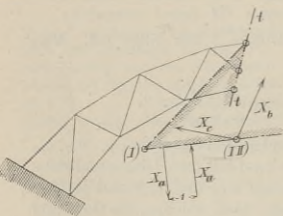


Fig. 319.

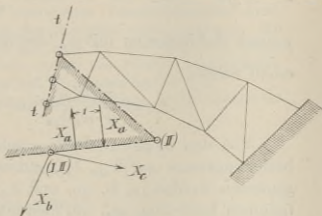


Fig. 320.

Man betrachte zunächst den links vom Schnitte tt gelegenen Teil des Bogenträgers, Fig. 319, ersetze die Spannkkräfte in den durchschnittenen Stäben wieder durch ein Kräftepaar X_a und zwei Einzelkräfte X_b und X_c und stelle sich vor, es greifen X_a , X_b und X_c an einer starren Scheibe I an, welche mit den durchschnittenen Stäben durch drei in der Linie tt liegende Gelenke, von denen auch zwei zusammenfallen dürfen, befestigt ist. Diese Scheibe wird sich beim Eintreten des Belastungszustandes $X_a = -1$ um einen leicht zu bestimmenden Pol (I) drehen.

In derselben Weise verfähre man mit dem rechten Trägerteile, Fig. 320, und ermittle den Pol (II) der Scheibe II für den Zustand $X_a = -1$. Nun suche man den in der Verbindungsgeraden der Pole (I) und (II) liegenden Pol (III) von I gegen II auf und wähle diesen Punkt zum Angriffspunkte von X_b und X_c ; er spielt dieselbe Rolle wie der Punkt O in Fig. 315 und möge bezeichnet werden

mit b_I	als Angriffspunkt	der an I	angreifenden Kraft	X_b ,
„ b_{II} „	„ „ „	„ „	„ „	X_b ,
„ c_I „	„ „ „	„ „	„ „	X_c ,
„ c_{II} „	„ „ „	„ „	„ „	X_c .

Es bedeutet dann, mit den auf Seite 31 und 32 erklärten Begriffen,
 δ_{ba} die gegenseitige Verschiebung des Punktepaares $b_I b_{II}$ im Sinne der Belastung $X_b = -1$ und infolge der Belastung $X_a = -1$,
 δ_{ca} desgleichen des Punktepaares $c_I c_{II}$ im Sinne $X_c = -1$ und infolge von $X_a = -1$,
 δ_{cb} desgleichen des Punktepaares $c_I c_{II}$ im Sinne $X_c = -1$ und infolge von $X_b = -1$.

Da nun der Punkt (III) im Belastungsfalle $X_a = -1$ als gemeinschaftlicher Punkt der beiden Scheiben I und II angesehen werden darf, so ist

$$\delta_{ba} = 0 \quad \text{und} \quad \delta_{ca} = 0.$$

Soll auch δ_{cb} verschwinden, so muß, nach willkürlicher Annahme der Richtung von X_b , die Richtung von X_c rechtwinklig zu der Geraden $e_I' e_{II}'$ gewählt werden, wo e_I' und e_{II}' die Endpunkte der Strecken $O e_I'$ und $O e_{II}'$ sind, welche die Verschiebungen der Punkte e_I und e_{II} für den Belastungszustand $X_b = -1$ darstellen.

Als Rechen- und Zeichenproben stehen die Bedingungen

$$\delta_{ab} = 0, \quad \delta_{ac} = 0, \quad \delta_{bc} = 0$$

zur Verfügung, welche der Reihe nach aussagen: es müssen die Winkel, um welche sich die Scheiben I und II in den Belastungsfällen $X_b = -1$ und $X_c = -1$ gegeneinander drehen, gleich Null sein, und es muß die Gerade $b_I' b_{II}'$ mit X_b einen rechten Winkel bilden, wo b_I' und b_{II}' die Endpunkte der Strecken $O b_I'$ und $O b_{II}'$ sind, durch welche die Verschiebungen der Punkte b_I und b_{II} für den Belastungszustand $X_c = -1$ dargestellt werden.

Wir heben noch hervor, daß

$$\delta_{aa} = \Sigma \frac{S_a^2 s}{EF} = \Sigma_I \frac{S_a^2 s}{EF} + \Sigma_{II} \frac{S_a^2 s}{EF}$$

den Winkel bedeutet, um den sich die Scheibe I gegen die Scheibe II dreht. Die Summe Σ_I bezieht sich hierbei auf den Trägerteil links vom Schnitte tt (wobei die linken Abschnitte der durch den Schnitt tt

geteilten Stäbe mitzurechnen sind) und die Summe Σ_{II} umfaßt das Stabwerk rechts von tt ; die erste Summe ist gleich dem Drehungswinkel der Scheibe I , die zweite gleich dem Drehungswinkel von II . Das Verhältnis der beiden Strecken e_I und e_{II} , in welche die Strecke $(I)(II)$ durch den Pol (III) zerlegt wird, ist

$$\frac{e_I}{e_{II}} = \frac{\Sigma_I \frac{S_a^2 s}{EF}}{\Sigma_{II} \frac{S_a^2 s}{EF}}$$

In Fig. 321 ist der Schnitt tt durch einen Knotenpunkt der oberen Gurtung geführt worden. Punkt G erfahre als Punkt der

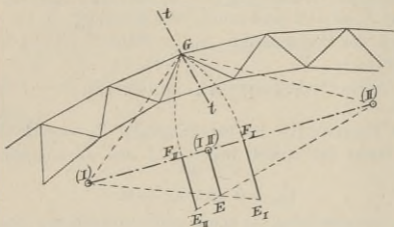


Fig. 321.

Scheibe I die zum Polstrahle $G(I)$ rechtwinklige Verschiebung δ_I und als Punkt der Scheibe II die zu $G(II)$ rechtwinklige Verschiebung δ_{II} . Macht man dann $(I)F_I = (I)G$ und $(II)F_{II} = (II)G$ und errichtet

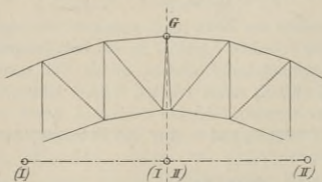


Fig. 322.

man auf der Geraden $(I)(II)$ in den Punkten F_I und F_{II} die Lote $\overline{F_I E_I} = \delta_I$ und $\overline{F_{II} E_{II}} = \delta_{II}$, so bestimmt der Schnittpunkt E der beiden Geraden $(I)E_I$ und $(II)E_{II}$ den Pol (III) . Es ist $E(III) \perp (I)(II)$.

Besitzt der Träger eine Symmetrieachse tt , so halbiert der Pol ($I II$) die Strecke ($I II$), Fig. 322. Ist eine Scheitelvertikale vorhanden, so halbiere man sie durch einen längs der Achse geführten Schnitt und weise je eine Hälfte derselben jedem der beiden Träger-teile zu. Bezüglich der Einzelheiten dieser Untersuchung verweisen wir auf den zweiten Teil des folgenden Zahlenbeispiels.

Fallen die beiden Kämpfer zusammen, so entsteht der Fachwerkring, Fig. 323, dessen Berechnung mithin durch die vorstehenden Betrachtungen ebenfalls erledigt ist.

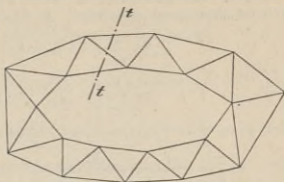


Fig. 323.

c. Zahlenbeispiel. Erster Teil.

118. Aufgabe. Es sollen die Einflußlinien für den in Fig. 324 dargestellten Bogenträger ermittelt werden. Spannweite und Pfeilhöhe der unteren Gurtung sind 60 m und 15 m , Länge der Scheitelvertikale $1,5\text{ m}$, der Vertikale am Kämpfer $3,95\text{ m}$.

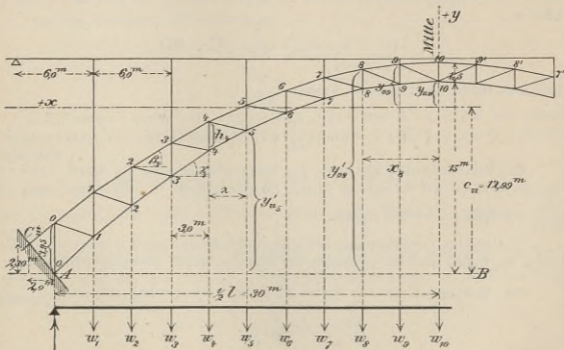


Fig. 324.

Die Knotenpunkte $0, 1, 2, \dots$ beider Gurtungen liegen in Parabeln; ihre auf die Schlußlinie AB der unteren Gurtung bezogenen Ordinaten y'_0 und y'_u , sowie die Höhen $h_m = y'_{0m} - y'_{um}$ sind, auf zwei Dezimalstellen abgerundet, in der Tabelle I, Seite 326, zusammengestellt worden. Die Verkehrslast wird nur auf die Knotenpunkte $1, 3, 5, 7, 9, 9', 7', \dots$ übertragen, sie sei gleichmäßig verteilt und

$p = 2,5^t$ f. d. m . Ebenso groß sei die gleichförmig verteilt angenommene ständige Belastung g .)

119. Die Gewichte w_m sollen zunächst unter der Voraussetzung starrer Füllungsstäbe berechnet werden. Es ist dann (nach Gl. 14 auf Seite 111):

$$\begin{aligned} w_m &= \frac{1}{h_m} (-\Delta o_m \sec \beta_m + \Delta u_{m+1} \sec \gamma_{m+1}) \\ &= \frac{1}{h_m} \left(-\frac{O_m o_m}{EF_{om}} \sec \beta_m + \frac{U_{m+1} u_{m+1}}{EF_{u(m+1)}} \sec \gamma_{m+1} \right) \end{aligned}$$

und, da $o_m = \lambda \sec \beta_m$, $u_{m+1} = \lambda \sec \gamma_{m+1}$,

$$\begin{aligned} O_m &= -\frac{M_m^u}{h_m} \sec \beta_m, \quad U_{m+1} = +\frac{M_m^o}{h_m} \sec \gamma_{m+1}, \\ (1) \quad w_m &= \frac{1}{h_m^2} \left[M_m^u \frac{\lambda \sec^3 \beta_m}{EF_{om}} + M_m^o \frac{\lambda \sec^3 \gamma_{m+1}}{EF_{u(m+1)}} \right], \end{aligned}$$

wo M_m^u das Angriffsmoment für den m ten Knotenpunkt der unteren Gurtung,

M_m^o desgl. für den m ten Knotenpunkt der oberen Gurtung bedeutet.

Wegen der großen Pfeilhöhe wachsen die Gurtquerschnitte F_o und F_u vom Scheitel nach dem Kämpfer ziemlich stark an, und es möge deshalb die für die Rechnung besonders bequeme Annahme gemacht werden,

$$F_{om} = F_s \sec^3 \beta_m, \quad F_{u(m+1)} = F_s \sec^3 \gamma_{m+1},$$

wo F_s den Gurtquerschnitt im Scheitel des Bogens bedeutet. Es geht dann Gleich. (1) über in

$$(2) \quad w_m = \frac{1}{h_m^2} \frac{\lambda}{EF_s} (M_m^o + M_m^u)$$

und nach Heben des konstanten Faktors $\frac{\lambda}{EF_s}$ in

$$(3) \quad w_m = \frac{1}{h_m^2} (M_m^o + M_m^u).$$

Bei Ermittlung des Einflusses der Temperaturänderung ist später daran zu denken, daß die auf Grund der Gleich. (3) gewonnenen Verschiebungen noch mit $\frac{\lambda}{EF_s}$ multipliziert werden müssen.

Wir wenden zur Ermittlung der Kämpferdrücke das unter a beschriebene Verfahren an, wollen aber die Ordinaten der Seillinien durch Rechnung bestimmen.

120. Zustand $X' = -1$. Es ist $M_m^o = M_m^u = +1$, mithin $w'_m = \frac{2}{h_m^2}$, wofür

$$(4) \quad w'_m = \frac{1}{h_m^2}$$

gesetzt werden darf. Nach Berechnung der Momente M' eines mit den Gewichten w'_m belasteten Balkens von der Stützweite $l = 60^m$ (Fig. 305c) erhält man

$$(5) \quad X' = \frac{M'}{\sum w'}.$$

*) Diese Annahme machen wir hier der Einfachheit wegen. Bei einer Bogenbrücke mit größerer Pfeilhöhe wächst g nach dem Kämpfer hin.

Die Berechnung der M' erfolgt am schnellsten nach dem auf Seite 201 beschriebenen Verfahren mit Hilfe der Querkräfte $Q'_m = Q'_{m+1} + w'_m$ nach der Formel $\frac{M'_m}{\lambda} = \frac{M'_{m-1}}{\lambda} + Q'_m$ und ist in der Tabelle I übersichtlich zusammengestellt worden. X' wurde nur für die Knotenpunkte 1, 3, 5, 7, 9 ausgerechnet, da es im vorliegenden Falle zulässig ist, auch die ständige Belastung ausschließlich auf diese Knotenpunkte zu verteilen.

121. Zustand $X'' = -1$. Es ist $M''_m = M''_{m+1} = 1 \cdot x_m$, mithin $w''_m = \frac{2x_m}{h_m^2}$, wofür

$$(6) \quad w''_m = \frac{x_m}{h_m^2}$$

gesetzt werden darf. Für die linke Trägerhälfte sind die w'' positiv, für die rechte negativ. Für einen mit den w'' belasteten einfachen Balken von der Stützweite l (Fig. 305e) ergibt sich im vorliegenden Falle, wegen der symmetrischen Trägerform, in der Mitte das Moment $M'' = 0$. Es darf deshalb die M'' -Linie der einen Trägerhälfte auch als Momentenlinie eines Balkens von der Stützweite $\frac{1}{2}l$ aufgefaßt werden. Der Stützenwiderstand A'' ist dann

$$A'' = \frac{\sum_0^{\frac{1}{2}l} w'' x}{\frac{1}{2}l} = \frac{\sum_0^{\frac{1}{2}l} x^2}{\frac{1}{2}l \cdot h_m^2},$$

und die Querkraft für das Feld 0 1

$$Q'' = A'' - w''_0.$$

Aus den Momenten M'' findet man

$$(7) \quad X'' = \frac{M''}{\sum_0^{\frac{1}{2}l} w'' x} = \frac{M''}{2 \sum_0^{\frac{1}{2}l} \frac{x_m^2}{h_m^2}}.$$

Die Tabelle I enthält die Ausrechnung der Werte X'' und die aus ihnen folgenden lotrechten Seitenkräfte der Kämpferdrücke für $P=1$, nämlich (vergl. Seite 303)

$$(8) \quad A = 1 \frac{b}{l} + X'' \quad \text{und} \quad B = 1 - A.$$

Für die rechte Trägerhälfte erhält man gleich große Werte X'' , nur sind diese negativ.

122. Zustand $X''' = -1$. Bezeichnen y_o und y_u die Ordinaten der Gurtknoten in bezug auf eine mit X''' zusammenfallende x -Achse, so ist $M'''_m = 1 \cdot y_u$ und $M'''_{m+1} = 1 \cdot y_o$ und

$$(9) \quad w_m''' = \frac{1}{h_m^2} (y_u + y_o).$$

Die neue x -Achse muß so bestimmt werden, daß $\sum w_m''' = 0$ wird; ihr Abstand c_u von der Schlußlinie AB der unteren Gurtung ist

$$(10) \quad c_u = \frac{\sum_0^{\frac{1}{2}l} (y_u' + y_o') \frac{1}{h_m^2}}{\sum_0^{\frac{1}{2}l} 2 \frac{1}{h_m^2}}.$$

Tabelle I.

m	y^a	y^o	h_m	h_m^2	$w'_m = \frac{1}{h_m}$	$\frac{x_m}{\lambda}$	$w''_m = \frac{x_m}{h_m^2}$	$\frac{x_m^2}{h_m^3}$	Q' infolge w'	M' infolge w'	$X' = \frac{M'}{\sum w'}$ $= \frac{M'}{2 \cdot 2,45}$	Q'' infolge w''	M'' infolge w''	$X'' = \frac{M''}{\sum w''}$ $= \frac{M''}{2 \cdot 47,89 \lambda^2}$	$\frac{b}{l}$	$A = \frac{b}{l} + X''$	$B = \frac{b}{1 - A}$
0	0,00	3,95	3,95	15,6	0,06	10	0,60 λ	6,00 λ^2							0,950	0,99374	0,00626
1	2,85	6,33	3,48	12,1	0,08	9	0,72 "	6,48 "	2,39	2,39 λ	1,46327	+	4,189 λ^2	0,04374	0,950	0,99374	0,00626
2	5,40	8,47	3,07	9,42	0,11	8	0,88 "	7,04 "	2,31	4,70 "	4,224	+	7,658 "	0,107	0,850	0,957	0,043
3	7,65	10,35	2,70	7,29	0,14	7	0,98 "	6,86 "	2,20	6,90 "	6,637	+	10,247 "	0,129	0,750	0,879	0,121
4	9,60	11,98	2,38	5,66	0,18	6	1,08 "	6,48 "	2,06	8,96 "	8,498	+	11,856 "	0,106	0,650	0,756	0,244
5	11,25	13,36	2,11	4,45	0,22	5	1,10 "	5,50 "	1,88	10,84 "	8,498	+	12,385 "	0,041	0,550	0,591	0,409
6	12,60	14,49	1,89	3,57	0,28	4	1,12 "	4,48 "	1,66	12,50 "	8,498	+	11,814 "	0,041	0,450	0,409	0,409
7	13,65	15,37	1,72	2,96	0,34	3	1,02 "	3,06 "	1,38	13,88 "	8,498	+	10,123 "	0,041	0,350	0,300	0,300
8	14,40	16,00	1,60	2,56	0,39	2	0,78 "	1,56 "	1,04	14,92 "	9,533	+	7,412 "	0,041	0,250	0,200	0,200
9	14,85	16,37	1,52	2,31	0,43	1	0,43 "	0,43 "	0,65	15,57 "	9,533	+	3,921 "	0,041	0,150	0,100	0,100
10	15,00	16,50	1,50	2,25	0,22 ¹⁾	0	0 "	0 "	0,22	15,79 "	9,533	+	0 "	0,041	0,050	0,000	0,000
				Summa	2,45	Summa	47,89 λ^2			Balken von der Stützweite l			Balken von der Stützweite $\frac{1}{2} l$				$A'_0 = B_0$ $A'_7 = B_7$ usw.

1) Es ist nur die Hälfte von w'_{10} eingetragen worden.

2) $A'' = \frac{47,89 \lambda^2}{10 \lambda}$; $Q'_1 = A'' - w''_0 = (4,789 - 0,60) \lambda = 4,189 \lambda$.

Tabelle II.

m	$\frac{1}{h_m^2}$	$y'_u + y'_o$	$(y'_u + h'_o)$	$\frac{1}{y_m^2}$	$y_u = c_u - y'_u$	$y_o = c_o - y'_o$	$w''' = \frac{1}{(y_u + y_o) h_m^2}$	Q''' infolge w'''	M''' infolge w'''	$(y_u^2 + y_o^2) \frac{1}{h_m^2}$	$X''' = \frac{M''': \lambda}{2 \cdot 58,536 \cdot \lambda} = \frac{M'''}{39,024 \lambda}$
0	0,06	3,95	0,2370		-12,99	-9,04	-1,322	1,320	1,320 λ	15,028	0,0338 = H_1
1	0,08	9,18	0,7344		-10,14	-6,66	-1,344	2,664	3,984 "	11,774	
2	0,11	13,87	1,5257		-7,59	-4,52	-1,332	3,996	7,980 "	8,584	0,204 = H_3
3	0,14	18,00	2,5200		-5,34	-2,64	-1,117	5,113	13,093 "	4,968	
4	0,18	21,58	3,8844		-3,39	-1,01	-0,792	5,905	18,998 "	2,252	0,487 = H_6
5	0,22	24,61	5,4142		-1,74	+0,37	-0,301	6,206	25,204 "	0,696	
6	0,28	27,09	7,5852		-0,39	+1,50	+0,311	5,895	31,099 "	0,673	0,797 = H_7
7	0,34	29,02	9,8668		+0,66	+2,38	+1,034	4,861	35,960 "	2,074	
8	0,39	30,40	11,8560		+1,41	+3,01	+1,724	3,137	39,097 "	4,309	1,002 = H_9
9	0,43	31,22	13,4246		+1,86	+3,38	+2,253	0,884	39,981 "	6,400	
10	0,22 ¹⁾	30,00 ²⁾	6,6000		+2,01		+0,884 ³⁾			1,778 ⁴⁾	
Summa ==										58,536	

1) 0,22 ist die Hälfte von $\frac{1}{h_{10}^2}$; die andere Hälfte gehört zur rechten Trägerhälfte.

2) $2 y'_{u \cdot 10} = 2 \cdot 15,0 = 30,0$.

3) $2 y_u \cdot 0,22 = 2 \cdot 2,01 \cdot 0,22 = 0,884$.

4) $2 y_u^2 \cdot 0,22 = 1,778$.

mithin ergibt sich (für $P=1$)

$$(13) \quad B\xi'' = \frac{a}{2} - X'$$

Nun ist

$$y_k = (e + \xi'') \frac{B}{H},$$

folglich

$$(14) \quad Hy_k = Be + \frac{1}{2} a - X',$$

und für die Knotenpunkte 1, 3, 5, 7, 9 der Reihe nach

$$\begin{aligned} Hy_k &= 0,00626 \cdot 27 + 1,5 - 1,46327 = 0,20575 \\ &= 0,043 \cdot 21 + 4,5 - 4,224 = 1,179 \\ &= 0,121 \cdot 15 + 7,5 - 6,637 = 2,678 \\ &= 0,244 \cdot 9 + 10,5 - 8,498 = 4,198 \\ &= 0,409 \cdot 3 + 13,5 - 9,533 = 5,194. \end{aligned}$$

Aus diesen Werten ergeben sich

	für $m=1$	3	5	7	9
die Strecken y_k	$= 6,09^m$	$5,78^m$	$5,50^m$	$5,26^m$	$5,18^m$
e'	$= 0,21^m$	$1,23^m$	$3,05^m$	$5,55^m$	$8,79^m$
e''	$= 32,87^m$	$27,42^m$	$22,13^m$	$17,20^m$	$12,70^m$

In Fig. 326 auf Tafel 6 sind die Kämpferdrücke dargestellt worden.

124. Beziehungen zwischen den Spannkraften U , O , D , V und den Momenten M^o , Fig. 327. Durch die Angriffsmomente M^o für die Knotenpunkte

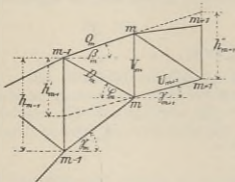


Fig. 327.

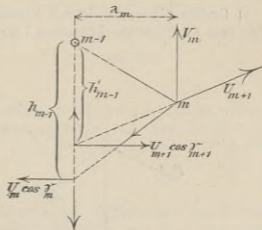


Fig. 328.

der oberen Gurtung sind die Spannkraften U ohne weiteres bestimmt; es empfiehlt sich, die Einflußlinien für die wagerechten Seitenkräfte

$$(15) \quad U_{m+1} \cos \gamma_{m+1} = + \frac{M_m^o}{h_m}$$

aufzutragen. Für die obere Gurtung erhält man dann

$$O_m \cos \beta_m = - U_{m+1} \cos \gamma_{m+1} - H,$$

$$(16) \quad O_m \cos \beta_m = - \frac{M_m^o}{h_m} - H.$$

Diese Gleichung gilt auch für O_{10} .

Die Spannkkräfte D_m sind bestimmt durch

$$(17) \quad D_m \cos \varphi_m = \frac{M_m^o}{h_m} - \frac{M_{m-1}^o}{h_{m-1}},$$

und die Spannkkräfte V (mit Ausnahme von V_o und V_{10}) durch

$$(18) \quad V_m \lambda_m = M_{m-1}^o - M_m^o \frac{h'_{m-1}}{h_m}.$$

Zu dieser Formel, die wir früher nur für senkrechte äußere Kräfte hergeleitet haben, gelangt man am schnellsten durch Betrachtung des Gleichgewichts der am unteren, unbelasteten Knotenpunkte m angreifenden Kräfte. Zerlegt man U_{m+1} und U_m nach Fig. 328 in ihre wagerechten und senkrechten Seitenkräfte und wählt man den oberen Knotenpunkt $m-1$ zum Drehpunkt, so findet man

$$V_m \lambda_m = U_m \cos \gamma_m \cdot h_{m-1} - U_{m+1} \cos \gamma_{m+1} h'_{m-1},$$

und aus dieser Gleichung findet man mit Hilfe der Formel (15) sofort die Gleichung (18).*)

Die Berechnung der Strecken h'_{m-1} gestaltet sich besonders einfach, da die Knotenpunkte der unteren Gurtung in einer Parabel vom Pfeile $f=15,0^m$ liegen. Es ist nämlich

$$\operatorname{tg} \gamma_m - \operatorname{tg} \gamma_{m+1} = \text{Konstante} = \frac{8f\lambda}{l^2},$$

mithin

$$h'_{m-1} = h_{m-1} - \lambda (\operatorname{tg} \gamma_m - \operatorname{tg} \gamma_{m+1}) = h_{m-1} - \frac{8f\lambda^2}{l^2} = h_{m-1} - \frac{8f}{20^2},$$

$$(19) \quad h'_{m-1} = h_{m-1} - 0,30.$$

*) Greifen die Lasten in den Knotenpunkten der unteren Gurtung an, so betrachte man den Gleichgewichtszustand der am oberen Knotenpunkte m angreifenden

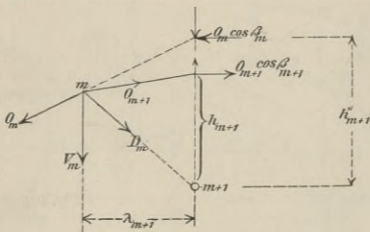


Fig. 329.

Kräfte. Man findet dann aus der Momentengleichung für den unteren Knotenpunkt ($m-1$) (Fig. 329)

$$V_m \lambda_{m+1} = O_{m+1} \cos \beta_{m+1} \cdot h_{m+1} - O_m \cos \beta_m h''_{m+1}$$

$$\text{und, da } O_m \cos \beta_m = -\frac{M_m^u}{h_m} \text{ ist,}$$

$$(18a) \quad V_m \lambda_{m+1} = -M_{m+1}^u + M_m^u \frac{h''_{m+1}}{h_m}.$$

Man erhält für

$m = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9
$h'_{m-1} = 3,65$	3,18	2,77	2,40	2,08	1,81	1,59	1,42	1,30 ^m
$\frac{h'_{m-1}}{h_m} = 1,05$	1,04	1,03	1,01	0,99	0,96	0,92	0,89	0,86

Die Spannkraft in der Scheitelvertikale ergibt sich, da der obere Knotenpunkt 10 unbelastet ist, ohne weiteres aus O_{10} (Fig. 330), und für die Spannkraft V_0 finden wir durch Untersuchung des Gleichgewichts am oberen, unbelasteten Knotenpunkte 0 nach Fig. 331 die Gleichung

$$\begin{aligned} V_0 \lambda_1 + O_0 \cos \beta_0 \cdot k + D_1 \cos \varphi_1 \cdot h_1 &= 0, \\ (20) \quad V_0 \lambda_1 &= -0,095 O_0 \cos \beta_0 - 3,48 D_1 \cos \varphi_1. \end{aligned}$$

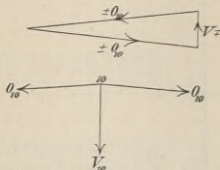


Fig. 330.

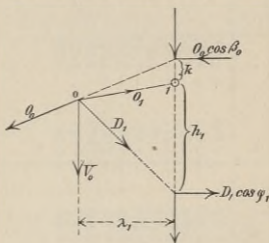


Fig. 331.

125. Einflußlinien für die Momente M^o . Bedeutet η_1 den in senkrechter Richtung gemessenen Abstand eines Knotenpunktes m von dem zu einer Last 1 gehörigen Mittelkraftspolygon (Fig. 325), so ist der Einfluß dieser Last 1 auf das Angriffsmoment M_m nach Seite 298

$$M_m = H \eta_1;$$

es ist positiv oder negativ, je nachdem m unterhalb oder oberhalb des Mittelkraftspolygons liegt. Auf diese Weise kann man die Einflüsse der in den Knotenpunkten 1, 3, 5 . . . angreifenden Lasten 1 auf sämtliche Angriffsmomente M_m^o schnell ermitteln. Auch die Anwendung der Formeln

$$M_m = Bx'' - Hy_m \quad (\text{für die Knotenpunkte rechts von der Last})$$

und $M_m = Ax' - Hy_m$ (für die Knotenpunkte links von der Last)

führt bei gleichen Feldweiten sehr schnell zum Ziele, weil sich die Werte Bx' und Ax' von Knotenpunkt zu Knotenpunkt um die konstanten Beträge $B\lambda$ und $A\lambda'$ ändern. Die Ergebnisse der Rechnung sind für alle Momente M^o in der Tabelle III zusammengestellt worden. Die Tabellen IV, V, VI und VII enthalten die mittels der Formeln (15) bis (20) berechneten Ordinaten der Einflußlinien für die $U \cos \gamma$, $O \cos \beta$, $D \cos \varphi$ und $V\lambda$.

III. Momente M_m^0 .

	1	3	5	7	9	9'	7'	5'	3'	1'
M_0^0	-2,470	-5,590	-6,105	-4,473	-1,705	+0,755	+1,887	+1,635	+0,830	+0,154
M_1^0	+0,431	-3,204	-4,627	-4,102	-2,317	-0,403	+0,722	+0,839	+0,474	+0,093
M_2^0	+0,340	-0,770	-3,032	-3,540	-2,688	-1,320	-0,252	+0,160	+0,166	+0,039
M_3^0	+0,257	+1,718	-1,310	-2,770	-2,799	-1,977	-0,018	-0,392	-0,088	-0,006
M_4^0	+0,184	+1,256	+0,533	-1,801	-2,659	-2,383	+1,585	-0,823	-0,292	-0,042
M_5^0	+0,118	+0,846	+2,498	-0,633	-2,269	-2,539	-1,953	-1,132	-0,444	-0,070
M_6^0	+0,061	+0,486	+1,585	+0,734	-1,628	-2,444	-2,122	-1,320	-0,546	-0,089
M_7^0	+0,017	+0,177	+0,793	+2,301	-0,737	-2,099	-2,091	-1,385	-0,597	-0,100
M_8^0	-0,027	-0,080	+0,123	+1,067	+0,405	-1,503	+1,861	-1,329	-0,596	-0,103
M_9^0	-0,059	-0,285	-0,420	+0,040	+1,807	-0,647	-1,424	-1,146	-0,543	-0,096
M_{10}^0	-0,082	-0,440	-0,846	-0,755	+0,450	+0,450	-0,795	-0,846	-0,440	-0,082

IV. $M_m^0 \frac{1}{h_m} = U_{m+1} \cos \gamma_{m+1}$.

	1	3	5	7	9	9'	7'	5'	3'	1'
$M_0^0 : h_0$	-0,625	-1,415	-1,546	-1,132	-0,432	+0,191	+0,478	+0,414	+0,210	+0,039
$M_1^0 : h_1$	+0,124	-0,921	-1,330	-1,179	-0,666	-0,116	+0,207	+0,241	+0,136	+0,027
$M_2^0 : h_2$	+0,111	-0,251	-0,988	-1,153	-0,876	-0,430	-0,082	+0,052	+0,054	+0,013
$M_3^0 : h_3$	+0,095	+0,636	-0,485	-1,026	-1,037	-0,732	-0,377	-0,145	-0,033	-0,002
$M_4^0 : h_4$	+0,077	+0,528	+0,224	-0,757	-1,117	-1,001	-0,666	-0,346	-0,123	-0,018
$M_5^0 : h_5$	+0,056	+0,401	+1,184	-0,300	-1,075	-1,203	-0,926	-0,536	-0,210	-0,033
$M_6^0 : h_6$	+0,032	+0,257	-0,839	+0,388	-0,861	-1,293	-1,123	-0,698	-0,289	-0,047
$M_7^0 : h_7$	+0,008	+0,103	-0,461	+1,338	-0,428	-1,220	-1,216	-0,805	-0,347	-0,058
$M_8^0 : h_8$	-0,017	-0,050	+0,077	+0,667	+0,253	-0,939	+1,163	-0,831	-0,373	-0,064
$M_9^0 : h_9$	-0,039	-0,187	-0,276	+0,026	+1,189	-0,426	-0,937	-0,754	-0,357	-0,063
$M_{10}^0 : h_{10}$	-0,055	-0,293	-0,564	-0,530	+0,300	+0,300	-0,530	-0,564	-0,293	-0,055

$$\text{V. } O_m \cos \beta_m = -\frac{M_m^0}{h_m} - H.$$

Last in	1	3	5	7	9	9'	7'	5'	3'	1'
$O_0 \cos \beta_0$	+ 0,59	+ 1,21	+ 1,06	+ 0,34	- 0,57	- 1,19	- 1,27	- 0,90	- 0,41	- 0,07
$O_1 \cos \beta_1$	- 0,16	+ 0,72	+ 0,84	+ 0,38	- 0,34	- 0,89	- 1,00	- 0,73	- 0,34	- 0,06
$O_2 \cos \beta_2$	- 0,14	+ 0,05	+ 0,50	+ 0,36	- 0,13	- 0,57	- 0,72	- 0,54	- 0,26	- 0,05
$O_3 \cos \beta_3$	- 0,13	- 0,84	- 0,00	+ 0,23	+ 0,03	- 0,27	- 0,42	- 0,34	- 0,17	- 0,03
$O_4 \cos \beta_4$	- 0,11	- 0,73	- 0,71	- 0,04	+ 0,12	- 0,00	- 0,13	- 0,14	- 0,08	- 0,02
$O_5 \cos \beta_5$	- 0,09	- 0,60	- 1,67	- 0,50	+ 0,07	+ 0,20	+ 0,13	+ 0,05	+ 0,01	- 0,00
$O_6 \cos \beta_6$	- 0,07	- 0,46	- 1,33	- 1,19	- 0,14	+ 0,29	+ 0,33	+ 0,21	+ 0,08	+ 0,01
$O_7 \cos \beta_7$	- 0,04	- 0,31	- 0,95	- 2,13	- 0,57	+ 0,22	+ 0,42	+ 0,32	+ 0,14	+ 0,02
$O_8 \cos \beta_8$	- 0,02	- 0,15	- 0,56	- 1,46	- 1,26	- 0,06	+ 0,37	+ 0,34	+ 0,17	+ 0,03
$O_9 \cos \beta_9$	+ 0,00	- 0,02	- 0,21	- 0,82	- 2,19	- 0,58	+ 0,14	+ 0,27	+ 0,15	+ 0,03
$O_{10} \cos \beta_{10}$	+ 0,02	+ 0,09	+ 0,08	- 0,27	- 1,30	- 1,30	- 0,27	+ 0,08	+ 0,09	+ 0,02

$$\text{VI. } D_m \cos \varphi_m = \frac{M_m^0}{h_m} - \frac{M_{m-1}^0}{h_{m-1}}.$$

Last in	1	3	5	7	9	9'	7'	5'	3'	1'
$D_1 \cos \varphi_1$	+ 0,75	+ 0,49	+ 0,22	- 0,05	- 0,23	- 0,31	- 0,27	- 0,17	- 0,07	- 0,01
$D_2 \cos \varphi_2$	- 0,01	+ 0,67	+ 0,34	+ 0,03	- 0,21	- 0,31	- 0,29	- 0,19	- 0,08	- 0,01
$D_3 \cos \varphi_3$	- 0,02	+ 0,89	+ 0,50	+ 0,13	- 0,16	- 0,30	- 0,30	- 0,20	- 0,09	- 0,01
$D_4 \cos \varphi_4$	- 0,02	- 0,11	+ 0,71	+ 0,27	- 0,08	- 0,27	- 0,29	- 0,20	- 0,09	- 0,02
$D_5 \cos \varphi_5$	- 0,02	- 0,13	+ 0,96	+ 0,46	+ 0,04	- 0,20	- 0,26	- 0,19	- 0,09	- 0,02
$D_6 \cos \varphi_6$	- 0,02	- 0,14	- 0,35	+ 0,69	+ 0,21	- 0,09	- 0,20	- 0,16	- 0,08	- 0,01
$D_7 \cos \varphi_7$	- 0,02	- 0,15	- 0,38	+ 0,95	+ 0,43	+ 0,07	- 0,09	- 0,11	- 0,06	- 0,01
$D_8 \cos \varphi_8$	- 0,02	- 0,15	- 0,38	- 0,67	+ 0,68	+ 0,28	+ 0,05	- 0,03	- 0,03	- 0,01
$D_9 \cos \varphi_9$	- 0,02	- 0,14	- 0,35	- 0,64	+ 0,94	+ 0,51	+ 0,23	+ 0,08	+ 0,02	+ 0,00
$D_{10} \cos \varphi_{10}$	- 0,02	- 0,11	- 0,29	- 0,56	- 0,89	+ 0,73	+ 0,41	+ 0,19	+ 0,06	+ 0,01

VII. $V_m \lambda$.

Last in	1	3	5	7	9	9'	7'	5'	3'	1'
$V_0 \lambda$	- 2,66	- 1,83	- 0,85	+ 0,13	+ 0,87	+ 1,18	+ 1,06	+ 0,69	+ 0,30	+ 0,05
$V_1 \lambda$	- 2,92	- 2,23	- 1,25	- 0,17	+ 0,73	+ 1,18	+ 1,13	+ 0,75	+ 0,33	+ 0,06
$V_2 \lambda$	+ 0,08	- 2,40	- 1,47	- 0,42	+ 0,48	+ 0,97	+ 0,98	+ 0,67	+ 0,30	+ 0,05
$V_3 \lambda$	+ 0,07	- 2,54	- 1,68	- 0,69	+ 0,19	+ 0,72	+ 0,80	+ 0,56	+ 0,26	+ 0,04
$V_4 \lambda$	+ 0,07	+ 0,45	- 1,85	- 0,95	- 0,11	+ 0,43	+ 0,58	+ 0,44	+ 0,21	+ 0,04
$V_5 \lambda$	+ 0,07	+ 0,42	- 1,94	- 1,17	- 0,41	+ 0,13	+ 0,35	+ 0,30	+ 0,15	+ 0,03
$V_6 \lambda$	+ 0,06	+ 0,38	+ 0,98	- 1,34	- 0,71	- 0,19	+ 0,08	+ 0,13	+ 0,08	+ 0,02
$V_7 \lambda$	+ 0,05	+ 0,32	+ 0,85	- 1,38	- 0,95	- 0,51	- 0,20	- 0,05	- 0,00	+ 0,00
$V_8 \lambda$	+ 0,04	+ 0,25	+ 0,68	+ 1,35	- 1,10	- 0,76	- 0,43	- 0,20	- 0,07	- 0,01
$V_9 \lambda$	+ 0,02	+ 0,16	+ 0,48	+ 1,03	- 1,15	- 0,95	- 0,64	- 0,34	- 0,09	- 0,02

126. Einfluß einer Temperaturänderung. Ändert sich die dem spannungslosen Anfangszustande entsprechende Temperatur um t° , so entsteht nach Nr. 115

$$(21) \quad H_t = X_t''' = \frac{\varepsilon t l'''}{\sum_o \frac{1}{h^2} (y_u^2 + y_o^2) \frac{\lambda}{EF_s}}$$

$$X'' = 0, \quad X' \text{ angenähert} = 0.$$

Der im Nenner von X_t''' stehende Faktor $\frac{\lambda}{EF_s}$ ist derselbe, der auf Seite 324 beim Übergang von Gleich. (2) zur Gleich. (3) gehoben worden war. Für l''' darf $l = 60^m$ gesetzt werden. Es entsteht dann, mit $\varepsilon E = 250 \text{ t/qm}$ für Flußeisen,

$$(22) \quad H_t = \frac{\varepsilon E \frac{l}{\lambda} F_s t}{\sum_o \frac{1}{h^2} (y_u^2 + y_o^2)} = \frac{250 \cdot 20 F_s t}{2 \cdot 58,536} = 42,7 F_s t,$$

wo F_s den Gurtquerschnitt im Scheitel der Brücke bedeutet.*) In der Regel genügt es, mit $t = \pm 35^\circ \text{ C.}$ zu rechnen. Dies würde $H_t = \pm 1500 F_s$ liefern. Wir wollen aber, da der Einfluß der Füllungsglieder diesen Wert erheblich verkleinert, nur

$$H_t = \pm 1400 F_s$$

annehmen. Die Berechnung von F_s soll mit Hilfe der auf Seite 185 abgeleiteten Näherungsformeln (4) erfolgen.

Die Summe der positiven Ordinaten der Einflußlinie für $O_{10} \cos \beta_{10}$ ist

$$\sum_+ = 2 (0,02 + 0,09 + 0,08) = 0,38,$$

die Summe der negativen Ordinaten

$$\sum_- = 2 (0,27 + 1,30) = 3,14.$$

Die Knotenlast setzt sich zusammen aus der ständigen Last $2,5 \cdot 6,0 = 15^t$ und der ebenso großen Verkehrslast 15^t . Der größte Druck O_{10} ist, wegen $\sec \beta_{10} = 1,00$,

$$\min O_{10} = -30 \cdot 3,14 + 15 \cdot 0,38 = -88,5^t; \quad \max O < \min O.$$

Der Einfluß von H_t auf O_{10} ist

$$O_{10} = \frac{H_t y_{u10}}{h_{10}} = \pm \frac{1400 \cdot 2,01 F_s}{1,5} = \pm 1880 F_s.$$

Wird eine Beanspruchung von $\sigma = 950 \text{ kg/qcm} = 9500 \text{ t/qm}$ gestattet, so ergibt sich F_s aus der Gleichung

$$88,5 + 1880 F_s = 9500 F_s.$$

Man erhält $F_s = 0,0116 \text{ qm}$.

Ganz ebenso findet man für $U_{10} \cos \gamma_{10} = U_{10}$ die Werte

$$\sum_+ = 1,22, \quad \sum_- = 3,04$$

$$\begin{aligned} \min U_{10} &= -30 \cdot 3,04 + 15 \cdot 1,22 - \frac{H_t \cdot y_{o9}}{h_9} \\ &= -73 - \frac{1400 \cdot 3,38}{1,52} F_s = -73 - 3110 F_s. \end{aligned}$$

*) Da die Querschnitte der beiden Gurtungen nicht gleich groß ausfallen, so setze man für F_s den Mittelwert der beiden Gurtquerschnitte.

Aus der Gleichung

$$73 + 3110 F_s = 9500 F_s$$

folgt $F_s = 0,0114$ qm. Der mittlere Gurtquerschnitt beträgt also im Scheitel rund $F_s = 0,012$ qm und es darf daher mit

$$H_t = +1400 \cdot 0,012 = 17^t$$

gerechnet werden. Dieser Horizontalschub erzeugt die folgenden Momente

$$M^o = -H^t \cdot y_o$$

für Knotenpunkt	0	1	2	3	4	
	$M^o = +153,68$	$+113,22$	$+76,84$	$+44,88$	$+17,17$ tm	
für	5	6	7	8	9	10
	$M^o = \mp 6,29$	$\mp 25,50$	$\mp 40,46$	$\mp 51,17$	$\mp 57,46$	$\mp 59,67$ tm,

und aus diesen Momenten ergeben sich mit Hilfe der Formeln (15) bis (19) die in Tabelle VIII zusammengestellten Spannkkräfte in Tonnen.

VIII. Einfluß der Temperaturänderung.

m	$\pm U_m \cos \gamma_m$	$\pm O_m \cos \beta_m$	$\pm D_m \cos \varphi_m$	$\pm V_m \lambda$
0		56 ^t		26 ^t
1	39 ^t	50	6 ^t	35
2	33	42	8	33
3	25	34	8	31
4	17	24	10	27
5	7	14	4	23
6	3	4	10	18
7	13	7	11	12
8	24	15	8	5
9	32	21	6	2
10	38	23	2	

127. Querschnittsberechnung. Es genügt hier, die Berechnung eines Stabquerschnittes zu besprechen. Wir wählen die Diagonale D_0 . Die Einflußlinie für $D_0 \cos \varphi_0$ liefert $\Sigma = 0,90$, $\Sigma = 1,05$. Es ergibt sich also einschließlich des Einflusses der Temperaturänderung

$$\min D_0 \cos \varphi_0 = -30 \cdot 1,05 + 15 \cdot 0,90 - 10 = -28^t,$$

$$\min D_0 = -28 \sec \varphi_0 = -28 \cdot 1,03 = -29^t.$$

$\max D_0$ ist kleiner als $\min D_0$. Das erforderliche Trägheitsmoment des Querschnitts ist bei 5-facher Knicksicherheit nach der Eulerschen Formel

$$J_{\min} = 2,5 D d^2 \text{ cm}^4,$$

wo d die Länge der Diagonale in Metern bedeutet. Man erhält

$$J_{\min} = 2,5 \cdot 29 \cdot 9,58 = 695 \text{ cm}^4.$$

Zwei gleichschenklige Winkeleisen von den Abmessungen $12 \cdot 1,1$ cm, Fig. 332, besitzen $J_{\min} = 2 \cdot 340 = 680$, genügen also. Der Querschnittsinhalt ist $F = 2 \cdot 25,4 = 50,8$ qcm und die Beanspruchung

$$\sigma = \frac{29}{50,8} = 0,57 \text{ t/qcm} = 570 \text{ kg/qcm}.$$

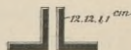


Fig. 332.

Die auf diesem Wege gewonnenen Querschnitte sind in der Tabelle IX zusammengestellt worden unter Beifügung der Werte

$$\frac{s}{F} = \frac{\text{Stablänge in cm}}{\text{Querschnittsinhalt in qcm}}$$

Die Stabängen sind für die Gurtungen, Diagonalen und Vertikalen mit o , u , d , h bezeichnet worden.



Fig. 333.

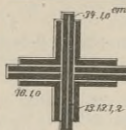


Fig. 334.

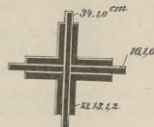


Fig. 335.

IX. Querschnitte.

a) Gurtungen.

		F	o	$\frac{o}{F}$			F	u	$\frac{u}{F}$
O_0	4 Winkeleisen 13 · 1,2 1 Platte 34 · 1,1 2 Platten 16 · 1,1, Fig. 333	193	259	1,3	U_1	4 Winkeleisen 13 · 1,2 2 Platten 34 · 1,0 4 „ 16 · 1,0, Fig. 334	252	414	1,6
O_1		193	383	2,0	U_2		252	394	1,6
O_2	4 Winkeleisen 13 · 1,4	139	369	2,6	U_3	4 Winkeleisen 13 · 1,2 1 Platte 34 · 1,0 2 Platten 16 · 1,0, Fig. 335	186	375	2,0
O_3	4 „ 13 · 1,2	120	354	3,0	U_4		186	358	1,9
O_4	4 „ 13 · 1,2	120	342	2,8	U_5	4 Winkeleisen 13 · 1,4	139	342	2,5
O_5	4 „ 13 · 1,2	120	330	2,8	U_6	4 „ 13 · 1,4	139	329	2,4
O_6	4 „ 13 · 1,2	120	321	2,7	U_7	4 „ 13 · 1,4	139	318	2,3
O_7	4 „ 13 · 1,2	120	312	2,6	U_8	4 „ 13 · 1,4	139	309	2,2
O_8	4 „ 13 · 1,2	120	307	2,6	U_9	4 „ 13 · 1,4	139	303	2,2
O_9	4 „ 13 · 1,4	139	302	2,2	U_{10}	4 „ 13 · 1,2	120	300	2,5
O_{10}	4 „ 13 · 1,2	120	300	2,5					

b) Füllungsstäbe.

		F	d	$\frac{d}{F}$			F	h	$\frac{h}{F}$
D_1	2 Winkeleisen 12 · 1,1	45	320	6,3	V_0	2 Winkeleisen 15 · 1,4	81	395	4,9
D_2	2 „ 12 · 1,1	45	314	6,2	V_1	2 „ 15 · 1,4	81	348	4,3
D_3	2 „ 12 · 1,1	45	311	6,1	V_2	2 „ 13 · 1,2	60	307	5,1
D_4	2 „ 12 · 1,1	45	310	6,1	V_3	2 „ 13 · 1,2	60	270	4,5
D_5	2 „ 12 · 1,1	45	310	6,1	V_4	2 „ 11 · 1,0	42,5	238	5,6
D_6	2 „ 12 · 1,1	45	310	6,1	V_5	2 „ 11 · 1,0	42,5	211	5,0
D_7	2 „ 12 · 1,1	45	310	6,1	V_6	2 „ 9 · 1,1	37,5	189	5,1
D_8	2 „ 13 · 1,2	54	312	5,2	V_7	2 „ 9 · 1,1	37,5	172	4,6
D_9	2 „ 13 · 1,2	54	315	5,2	V_8	2 „ 8 · 1,0	30	160	5,3
D_{10}	2 „ 13 · 1,2	54	321	5,3	V_9	2 „ 8 · 1,0	30	152	5,0
D_{11}	2 „ 14 · 1,3	63	330	5,7	V_{10}	2 „ 8 · 1,0	30	150	5,0

		U	$\frac{u}{F}$	$\Delta u = \frac{Uu}{F}$	$U\Delta u$	sec γ	Δu sec γ
Untere Gurtung	1	-0,349	1,6	-0,56	+0,195	1,38	-0,77
	2	-0,376	1,6	-0,60	+0,226	1,31	-0,79
	3	-0,407	2,0	-0,81	+0,330	1,25	-1,01
	4	-0,440	1,9	-0,84	+0,370	1,19	-1,00
	5	-0,479	2,5	-1,20	+0,575	1,14	-1,37
	6	-0,521	2,4	-1,25	+0,651	1,10	-1,38
	7	-0,561	2,3	-1,29	+0,724	1,06	-1,37
	8	-0,598	2,2	-1,32	+0,789	1,03	-1,36
	9	-0,631	2,2	-1,39	+0,877	1,01	-1,40
	10	-0,658	2,5	-1,65	+1,086	1,00	-1,65
Summe:					5,823		

		D	$\frac{d}{F}$	$\Delta d = D \frac{d}{F}$	$D\Delta d$	sec φ	Δd sec φ
Diagonalen	1	-0,037	6,3	-0,23	+0,009	1,07	-0,25
	2	-0,040	6,2	-0,25	+0,010	1,05	-0,26
	3	-0,046	6,1	-0,28	+0,013	1,04	-0,29
	4	-0,051	6,1	-0,31	+0,016	1,03	-0,32
	5	-0,055	6,1	-0,34	+0,019	1,03	-0,35
	6	-0,057	6,1	-0,35	+0,020	1,03	-0,36
	7	-0,054	5,2	-0,28	+0,015	1,04	-0,29
	8	-0,046	5,2	-0,24	+0,011	1,05	-0,25
	9	-0,035	5,3	-0,19	+0,007	1,07	-0,20
	10	-0,010	4,7	-0,05	+0,000	1,10	-0,05
Summe:					+0,120		

		V_m	$\frac{h_m}{F}$	$\Delta h_m = \frac{V_m h_m}{F}$	$V_m \Delta h_m$	$\frac{h'_{m-1}}{\lambda}$	$\Delta h_m \frac{h'_{m-1}}{\lambda}$	$\frac{h_{m-1}}{\lambda}$	$\Delta h_m \frac{h_{m-1}}{\lambda}$
Vertikalen	0	+0,035	4,9	+0,17	+0,006	2,10*)	+0,36		
	1	+0,016	4,3	+0,07	+0,001	1,22	+0,08	1,32	+0,09
	2	+0,012	5,1	+0,06	+0,001	1,06	+0,06	1,16	+0,07
	3	+0,009	4,5	+0,04	+0,000	0,92	+0,04	1,02	+0,04
	4	+0,003	5,6	+0,02	+0,000	0,80	+0,01	0,90	+0,02
	5	-0,005	5,0	-0,02	+0,000	0,69	-0,02	0,79	-0,02
	6	-0,014	5,1	-0,07	+0,001	0,60	-0,04	0,70	-0,05
	7	-0,025	4,6	-0,12	+0,003	0,53	-0,06	0,63	-0,07
	8	-0,038	5,3	-0,20	+0,008	0,47	-0,09	0,57	-0,11
	9	-0,048	5,0	-0,24	+0,012	0,43	-0,10	0,53	-0,13
10	-0,058	2,5**)	-0,14	+0,008			0,51	-0,13	
Summe:					+0,040				

*) $\frac{h'_0}{\lambda_0} = \frac{2,30}{2,0} + \operatorname{tg} \gamma_1 = 1,15 + 0,95 = 2,10$.

***) Es ist nur die halbe Scheitelvertikale in Rechnung gestellt worden.

Die Gewichte w_a für den Zustand $X_a = -1$ sind nun

$$w_{0a} = \frac{0,17}{2,00} = +0,08 \text{ (nach Gleich. (24))}$$

$$w_{0a} = \frac{1}{3,95} (-0,56 - 0,77 - 0,00 + 0,25 - 0,36 + 0,09) = -0,34$$

$$w_{1a} = \frac{1}{3,48} (-0,93 - 0,79 - 0,25 + 0,26 - 0,08 + 0,07) = -0,49$$

$$w_{2a} = \frac{1}{3,07} (-1,28 - 1,01 - 0,26 + 0,29 - 0,06 + 0,04) = -0,74$$

$$w_{3a} = \frac{1}{2,70} (-1,55 - 1,00 - 0,29 + 0,32 - 0,04 + 0,02) = -0,94$$

$$w_{4a} = \frac{1}{2,38} (-1,53 - 1,37 - 0,32 + 0,35 - 0,01 - 0,02) = -1,22$$

$$w_{5a} = \frac{1}{1,11} (-1,61 - 1,38 - 0,35 + 0,36 + 0,02 - 0,05) = -1,43$$

$$w_{6a} = \frac{1}{2,89} (-1,64 - 1,37 - 0,36 + 0,29 + 0,04 - 0,07) = -1,65$$

$$w_{7a} = \frac{1}{1,72} (-1,63 - 1,36 - 0,29 + 0,25 + 0,06 - 0,11) = -1,79$$

$$w_{8a} = \frac{1}{1,60} (-1,69 - 1,40 - 0,25 + 0,20 + 0,09 - 0,13) = -1,99$$

$$w_{9a} = \frac{1}{1,52} (-1,47 - 1,65 - 0,20 + 0,05 + 0,10 - 0,13) = -2,17.$$

Die Biegelinie für den Zustand $X_a = -1$ läßt sich als die Momentenlinie eines Freitragers CG deuten, dessen Einspannungsstelle dem Scheitelquerschnitt des Bogens entspricht, Fig. 338*), und der mit den Gewichten $-w_a$ belastet ist. Nach Berechnung der Querkräfte:

$Q_0 = -0,08$	$Q_4 = 2,43$	$Q_8 = 8,52$
$Q_1 = -0,08 + 0,34 = 0,26$	$Q_5 = 3,65$	$Q_9 = 10,51$
$Q_2 = 0,26 + 0,49 = 0,75$	$Q_6 = 5,08$	$Q_{10} = 12,68$
$Q_3 = 0,75 + 0,74 = 1,49$	$Q_7 = 6,73$	

findet man $M_0 = -0,08 \cdot 2,0$, also $\frac{M_0}{\lambda} = -0,08 \cdot \frac{2}{3} = -0,05$,

$M_1 : \lambda = -0,05 + 0,26 = 0,21$	$M_5 : \lambda = 8,53$	$M_8 : \lambda = 28,86$
$M_2 : \lambda = 0,21 + 0,75 = 0,96$	$M_6 : \lambda = 13,61$	$M_9 : \lambda = 39,37$
$M_3 : \lambda = 0,96 + 1,49 = 2,45$	$M_7 : \lambda = 20,34$	$M_{10} : \lambda = 52,05.$
$M_4 : \lambda = 2,45 + 2,43 = 4,88$		

Nun ist $\delta_{aa} = \Sigma S_a^2 \frac{s}{EF} = \Sigma S_a \Delta s_a$

$$= \Sigma O \Delta o + \Sigma U \Delta u + \Sigma D \Delta d + \Sigma V \Delta v$$

$$= 2 [7,759 + 5,823 + 0,120 + 0,040] = 2 \cdot 13,74,$$

und man erhält daher aus den die Durchbiegungen δ_{ma} (für $E=1$) vorstellenden Momenten M :

$$X_a = P_m \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}} = 1 \frac{M_m}{2 \cdot 13,74} = \frac{M_m}{2 \cdot 13,74} = \frac{M_m : \lambda}{9,16} \cdot 3,0$$

*) Vergl. auch Seite 121, Fig. 108.

Den in den Knotenpunkten 1, 3, 5, 7, 9 angreifenden Lasten entspricht also der Reihe nach

$$X_{a \cdot 1} = \frac{0,21}{9,16} = 0,02293$$

$$X_{a \cdot 3} = \frac{2,45}{9,16} = 0,267$$

$$X_{a \cdot 5} = \frac{8,53}{9,16} = 0,931$$

$$X_{a \cdot 7} = \frac{20,34}{9,16} = 2,225$$

$$X_{a \cdot 9} = \frac{39,37}{9,16} = 4,289.$$

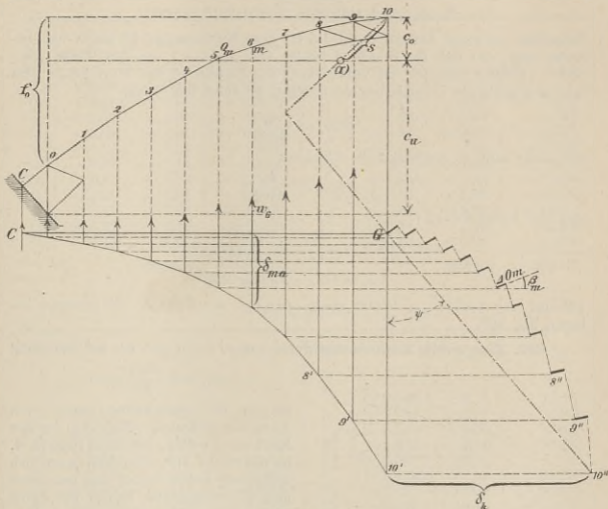


Fig. 338.

Wir wenden uns jetzt zur Bestimmung des Poles (I), um den sich eine nach Seite 320, Fig. 319, an die Scheitelvertikale angeschlossene starre Scheibe I dreht, und ermitteln zunächst die wagerechte Verschiebung δ_h des oberen Knotenpunktes 10 nach dem in Nr. 51, Seite 129, beschriebenen Verfahren. Aus der, einen Sonderfall der Fig. 116, Seite 129, bildenden (nur als Skizze anzusehenden) Fig. 338 folgt die einfache, leicht zu beweisende Gleichung

$$\delta_h = \sum_0^{10} \Delta \delta_m \sec \beta_m + \sum_0^9 \delta_{m\alpha} (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m-1}) + \delta_{10\alpha} \operatorname{tg} \beta_{10}.$$

Da nun die Knotenpunkte 0, 1, 2, . . . 10 der oberen Gurtung in einer Parabel von

der Pfeilhöhe $f_o = 12,55$ und der Spannweite $l = 60^m = 20\lambda$ liegen, und da ferner die Feldweite konstant ist, so ergibt sich

$$\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m-1} = 2 \operatorname{tg} \beta_{10} = \frac{8 f_o \lambda}{l^2} = \frac{8 \cdot 12,55}{20^2 \lambda} = \frac{0,2510}{\lambda}$$

und

$$\delta_h = 15,56 + \left(\sum_0^9 \delta_{m\alpha} + \frac{1}{2} \delta_{10\alpha} \right) \frac{0,2510}{\lambda} = 15,56 + \left(\sum_0^9 \frac{M_m}{\lambda} + \frac{M_{10}}{2\lambda} \right) 0,2510,$$

wo M_m die vorhin berechneten Momente infolge der Gewichte w_α sind.

Es ergibt sich (für $E=1$)

$$\delta_h = 15,56 + (119,16 + 26,02) 0,2510 = 52,00.$$

Bezeichnet man den Abstand des Poles (I) vom Knotenpunkte 10 mit s und beachtet man, daß sich die Scheibe I infolge von $X_\alpha = -1$ um den Winkel $\frac{1}{2} \delta_{\alpha\alpha}$ dreht, so findet man für die Verschiebung des Punktes 10 den Wert $\frac{1}{2} \delta_{\alpha\alpha} s$. Da nun andererseits die Verschiebung des Punktes 10 durch die Strecke

$$\overline{G10''} = \frac{\delta_h}{\sin \psi}$$

dargestellt wird, so ergibt sich die Gleichung

$$\frac{1}{2} \delta_{\alpha\alpha} s = \frac{\delta_h}{\sin \psi}$$

und man findet daher

$$c_o = s \sin \psi = \frac{\delta_h}{0,5 \delta_{\alpha\alpha}} = \frac{52,00}{13,74} = 3,78^m,$$

$$c_u = 16,5 - 3,78 = 12,72^m,$$

während sich vorhin $c_u = 12,99^m$ ergab. Die Lage der Kraft X_e ist nunmehr bekannt, Fig. 336.

130. Eine zweite Bestimmungsweise von c_u ergibt sich aus der Bedingung

$$\delta_{\alpha e} = \Sigma \frac{S_\alpha S_e s}{EF} = 0,$$

wo S_e die Spannkraften infolge von $X_e = -1$ bedeuten. Fügt man zu der Kraft $X_e = -1$ in beliebiger Höhe (z. B. in der Höhe 10^m , Fig. 339) zwei sich aufhebende Kräfte 1 hinzu, und bezeichnet man die Spannkraften infolge der durch einen gefiederten Pfeil dargestellten Kraft 1 mit S' , und den Hebelarm des außer dieser Kraft noch angreifenden Kräftepaars mit e , so ist

$$S_e = S' + S_o \cdot e,$$

und man erhält

$$\Sigma \frac{S' S_\alpha s}{EF} + e \Sigma \frac{S_o^2 s}{EF} = 0,$$

woraus (wegen $\delta_{\alpha\alpha} = 2 \cdot 13,74$)

$$e = - \frac{\sum_0^l S' \Delta s_\alpha}{\delta_{\alpha\alpha}} = - \frac{\sum_0^{\frac{1}{2}l} S' \Delta s_\alpha}{13,74}.$$

In der Tabelle XI sind die Spannkkräfte S'^{*}), die aus Tabelle X übernommenen Längenänderungen Δs_a infolge $X_a = -1$ und die Produkte $S' \Delta s_a$ zusammengestellt worden. Man erhält

$$e = \frac{14,7572 + 20,6132 + 1,6929 + 0,2690}{13,74} = 2,72^m,$$

also, wie vorhin, $e_u = 10,0 + 2,72 = 12,72^m$.

Tabelle XI.

Gurtungen.

	O'	Δo_a	$O' \Delta o_a$		U'	Δu_a	$U' \Delta u_a$
O_0	+ 3,29	+ 0,43	+ 1,4147				
O_1	+ 2,63	+ 0,73	+ 1,9199	U_1	- 2,11	- 0,56	+ 1,1816
O_2	+ 1,84	+ 1,04	+ 1,9136	U_2	- 1,38	- 0,60	+ 0,8280
O_3	+ 1,03	+ 1,31	+ 1,3493	U_3	- 0,62	- 0,81	+ 0,5022
O_4	+ 0,19	+ 1,34	+ 0,2546	U_4	+ 0,15	- 0,84	- 0,1260
O_5	- 0,65	+ 1,46	- 0,9490	U_5	+ 0,95	- 1,20	- 1,1400
O_6	- 1,47	+ 1,53	- 2,2491	U_6	+ 1,75	- 1,25	- 2,1875
O_7	- 2,21	+ 1,57	- 3,4697	U_7	+ 2,52	- 1,29	- 3,2508
O_8	- 2,81	+ 1,66	- 4,6646	U_8	+ 3,22	- 1,32	- 4,2504
O_9	- 3,23	+ 1,46	- 4,7158	U_9	+ 3,77	- 1,39	- 5,2403
O_{10}	- 3,33	+ 1,67	- 5,5611	U_{10}	+ 4,20	- 1,65	- 6,9300
		Summe:	- 14,7572			Summe:	- 20,6132

Füllungsstäbe.

	D'	Δd_a	$D' \Delta d_a$		V'	Δh_a	$V' \Delta h_a$
D_1	+ 0,510	- 0,23	- 0,1173	V_0	- 0,634	+ 0,17	- 0,1078
D_2	+ 0,584	- 0,25	- 0,1460	V_1	- 0,732	+ 0,07	- 0,0512
D_3	+ 0,653	- 0,28	- 0,1828	V_2	- 0,693	+ 0,06	- 0,0416
D_4	+ 0,723	- 0,31	- 0,2241	V_3	- 0,630	+ 0,04	- 0,0252
D_5	+ 0,783	- 0,34	- 0,2662	V_4	- 0,545	+ 0,02	- 0,0109
D_6	+ 0,807	- 0,35	- 0,2825	V_5	- 0,449	- 0,02	+ 0,0090
D_7	+ 0,776	- 0,28	- 0,2173	V_6	- 0,357	- 0,07	+ 0,0250
D_8	+ 0,659	- 0,24	- 0,1582	V_7	- 0,150	- 0,12	+ 0,0180
D_9	+ 0,479	- 0,19	- 0,0910	V_8	- 0,010	- 0,20	- 0,0020
D_{10}	+ 0,149	- 0,05	- 0,0075	V_9	+ 0,174	- 0,24	- 0,0418
		Summe:	- 1,6929	V_{10}	+ 0,289	- 0,14	- 0,0405
						Summe:	- 0,2690

131. Für den Zustand $X_b = -\frac{1}{\lambda}$, den wir an Stelle des Zustandes $X_b = -1$

untersuchen wollen, ergeben sich die Momente $M^o = -\frac{x}{\lambda}$ und $-$ für die linke

*) Die Berechnung der S' erfolgte wieder mit Hilfe der Formeln (15) bis (20) auf Seite 329.

Bogenhälfte — die in der Tabelle XII angegebenen Spannkkräfte S_b und Längenänderungen Δs_b .

Tabelle XII.

		O_b	$\frac{o}{F}$	$\Delta o_b = \frac{Oo}{F}$	$O_b \cdot \Delta o_b$	sec β	Δo_b sec β
Obere Gurtung	0	+ 3,29	1,3	+ 4,28	14,081	1,30	+ 5,56
	1	+ 3,31	2,0	+ 6,62	21,912	1,28	+ 8,47
	2	+ 3,21	2,6	+ 8,35	26,803	1,23	+ 10,27
	3	+ 3,06	3,0	+ 9,18	28,091	1,18	+ 10,83
	4	+ 2,87	2,8	+ 8,04	23,075	1,14	+ 9,17
	5	+ 2,61	2,8	+ 7,31	19,079	1,10	+ 8,04
	6	+ 2,26	2,7	+ 6,10	13,786	1,07	+ 6,53
	7	+ 1,81	2,6	+ 4,71	8,525	1,04	+ 4,90
	8	+ 1,28	2,6	+ 3,33	4,262	1,02	+ 3,40
	9	+ 0,66	2,2	+ 1,45	0,957	1,01	+ 1,46
Summe:					160,571		

		U_b	$\frac{u}{F}$	$\Delta u_b = \frac{Uu}{F}$	$U_b \cdot \Delta u_b$	sec γ	Δu_b sec γ
Untere Gurtung	1	- 3,49	1,6	- 5,58	19,474	1,38	- 7,70
	2	- 3,39	1,6	- 5,42	18,374	1,31	- 7,10
	3	- 3,26	2,0	- 6,52	21,255	1,25	- 8,15
	4	- 3,09	1,9	- 5,87	18,138	1,19	- 6,99
	5	- 2,87	2,5	- 7,18	20,607	1,14	- 8,19
	6	- 2,61	2,4	- 6,26	16,339	1,10	- 6,89
	7	- 2,24	2,3	- 5,15	11,536	1,06	- 5,46
	8	- 1,80	2,2	- 3,96	7,128	1,03	- 4,08
	9	- 1,26	2,2	- 2,77	3,490	1,01	- 2,80
	10	- 0,66	2,5	- 1,65	1,089	1,00	- 1,65
Summe:					137,430		

		D_b	$\frac{d}{F}$	$\Delta d_b = \frac{Dd}{F}$	$D_b \cdot \Delta d_b$	sec φ	Δd_b sec φ
Diagonalen	1	- 0,058	6,3	- 0,37	0,021	1,07	- 0,40
	2	- 0,021	6,2	- 0,13	0,003	1,05	- 0,14
	3	+ 0,011	6,1	+ 0,07	0,008	1,04	+ 0,07
	4	+ 0,074	6,1	+ 0,45	0,033	1,03	+ 0,46
	5	+ 0,156	6,1	+ 0,95	0,148	1,03	+ 0,98
	6	+ 0,261	6,1	+ 1,59	0,415	1,03	+ 1,64
	7	+ 0,387	5,2	+ 2,01	0,779	1,04	+ 2,09
	8	+ 0,519	5,2	+ 2,70	1,401	1,05	+ 2,84
	9	+ 0,634	5,3	+ 3,36	2,130	1,07	+ 3,60
	10	+ 0,724	4,7	+ 3,40	2,462	1,10	+ 3,74
Summe:					7,400		

	V	$\frac{h_m}{F}$	$\Delta h_m = \frac{Vh}{F}$	$V \cdot \Delta h$	$\frac{h'_{m-1}}{\lambda}$	$\frac{h'_{m-1}}{\lambda} \Delta h_m$	$\frac{h_{m-1}}{\lambda}$	$\frac{h_{m-1}}{\lambda} \Delta h_m$
Vertikalen	0	-0,017	4,9	-0,08	0,001	2,10	-0,17	
	1	-0,183	4,3	-0,79	0,145	1,22	-0,96	1,32
	2	-0,227	5,1	-1,16	0,263	1,06	-1,23	1,16
	3	-0,263	4,5	-1,18	0,310	0,92	-1,09	1,02
	4	-0,313	5,6	-1,75	0,548	0,80	-1,40	0,90
	5	-0,350	5,0	-1,75	0,613	0,69	-1,21	0,79
	6	-0,387	5,1	-1,97	0,762	0,60	-1,18	0,70
	7	-0,413	4,6	-1,90	0,785	0,53	-1,00	0,63
	8	-0,407	5,3	-2,16	0,879	0,47	-1,02	0,57
	9	-0,380	5,0	-1,90	0,722	0,43	-0,82	0,53
			Summe:	5,028				

Für die Gewichte w_b erhält man die Werte:

$$w_{cb} = -\frac{0,08}{2} = -0,04$$

$$w_{0b} = \frac{1}{3,95} (-5,56 - 7,70 - 0,00 + 0,40 + 0,17 - 1,04) = -3,48$$

$$w_{1b} = \frac{1}{3,48} (-8,47 - 7,10 - 0,40 + 0,14 + 0,96 - 1,35) = -4,66$$

$$w_{2b} = \frac{1}{3,07} (-10,27 - 8,15 - 0,14 - 0,07 + 1,23 - 1,20) = -6,06$$

$$w_{3b} = \frac{1}{2,70} (-10,83 - 6,99 + 0,07 - 0,46 + 1,09 - 1,58) = -6,93$$

$$w_{4b} = \frac{1}{2,38} (-9,17 - 8,19 + 0,46 - 0,98 + 1,40 - 1,38) = -7,50$$

$$w_{5b} = \frac{1}{2,11} (-8,04 - 6,89 + 0,98 - 1,64 + 1,21 - 1,38) = -7,47$$

$$w_{6b} = \frac{1}{1,89} (-6,53 - 5,46 + 1,64 - 2,09 + 1,18 - 1,20) = -6,59$$

$$w_{7b} = \frac{1}{1,72} (-4,90 - 4,08 + 2,09 - 2,84 + 1,00 - 1,23) = -5,79$$

$$w_{8b} = \frac{1}{1,60} (-3,40 - 2,80 + 2,84 - 3,60 + 1,02 - 1,01) = -4,34$$

$$w_{9b} = \frac{1}{1,52} (-1,46 - 1,65 + 3,60 - 3,74 + 0,82) = -1,60.$$

Die Momente M_m eines mit den Gewichten w_b belasteten Freitragers sind für $\lambda = 1$ (in derselben Weise berechnet wie auf Seite 340)

$M_0 = 0,03$	$M_4 = 47,14$	$M_8 = 203,20$
$M_1 = 3,55$	$M_5 = 75,81$	$M_9 = 256,06$
$M_2 = 11,73$	$M_6 = 111,95$	$M_{10} = 310,52.$
$M_3 = 25,97$	$M_7 = 154,68$	

Da nun X_b proportional M_m ist und für eine mit dem Scheitel zusammenfallende Last 1 den Wert $X_b = 0,5$ annehmen muß, so entsprechen den in den Knotenpunkten 1, 3, 5, 7, 9 angreifenden Lasten 1 der Reihe nach die Werte

$$X_{b1} = \frac{3,55}{2 \cdot 310,52} = 0,00572 \quad \left| \quad \begin{array}{l} X_{b5} = 0,122 \\ X_{b7} = 0,249 \\ X_{b9} = 0,412. \end{array} \right.$$

$$X_{b3} = \frac{25,97}{2 \cdot 310,52} = 0,042$$

Andererseits muß auch sein

$$X_b = \frac{M_m}{\Sigma S_b^2 \frac{s}{EF}} = \frac{M_m}{\Sigma S_b \Delta s_b},$$

wo nach Tabelle XII

$$\Sigma S_b \Delta s_b = 2 (160,571 + 137,430 + 7,400 + 5,028) = 2 \cdot 310,43.$$

Dieser Wert stimmt mit $2 \cdot M_{10}$ in befriedigender Weise überein. Noch sei hervor-
gehoben, daß für alle links vom Scheitel gelegenen Lasten

$$B = X_b \text{ und } A = 1 - X_b \text{ ist.}$$

132. Zustand $X_c = -1$. Tabelle XIII enthält die Spannkkräfte S_c infolge
der in der Höhe $c_n = 12,72^m$ angreifenden Belastung $X_c = -1$ sowie die zuge-
hörigen Δs_c .

Tabelle XIII.

		O	$\frac{o}{F}$	$\Delta o = \frac{Oo}{F}$	$O \cdot \Delta o$	sec β	Δo sec β
Obere Gurtung	0	+ 4,19	1,3	+ 5,45	22,836	1,30	+ 7,08
	1	+ 3,63	2,0	+ 7,26	26,354	1,28	+ 9,29
	2	+ 2,93	2,6	+ 7,62	22,327	1,23	+ 9,37
	3	+ 2,22	3,0	+ 6,66	14,785	1,18	+ 7,86
	4	+ 1,50	2,8	+ 4,20	6,300	1,14	+ 4,79
	5	+ 0,77	2,8	+ 2,16	1,663	1,10	+ 2,38
	6	+ 0,07	2,7	+ 0,19	0,013	1,07	+ 0,20
	7	- 0,57	2,6	- 1,48	0,844	1,04	- 1,54
	8	- 1,07	2,6	- 2,78	2,975	1,02	- 2,84
	9	- 1,42	2,2	- 3,12	4,430	1,01	- 3,15
10	- 1,52	2,5	- 3,80	5,776	1,00	- 3,80	

Summe: 108,303

		U	$\frac{u}{F}$	$\Delta u = \frac{Uu}{F}$	$U \Delta u$	sec γ	Δu sec γ
Untere Gurtung	1	- 3,07	1,6	- 4,91	15,074	1,38	- 5,78
	2	- 2,41	1,6	- 3,86	9,303	1,31	- 5,06
	3	- 1,73	2,0	- 3,46	5,986	1,25	- 4,32
	4	- 1,04	1,9	- 1,98	2,059	1,19	- 2,36
	5	- 0,35	2,5	- 0,88	0,308	1,14	- 1,00
	6	+ 0,33	2,4	+ 0,79	0,261	1,10	+ 0,87
	7	+ 1,09	2,3	+ 2,51	2,736	1,06	+ 2,66
	8	+ 1,59	2,2	+ 3,50	5,565	1,03	+ 3,60
	9	+ 2,07	2,2	+ 4,55	9,419	1,01	+ 4,60
	10	+ 2,40	2,5	+ 6,00	14,400	1,00	+ 6,00

Summe: 65,111

		D	$\frac{d}{F}$	$\Delta d = \frac{Dd}{F}$	$D\Delta d$	sec φ	$\Delta d \text{ sec } \varphi$
Diagonalen	1	+ 0,413	6,3	+ 2,60	1,074	1,07	+ 2,78
	2	+ 0,474	6,2	+ 2,94	1,394	1,05	+ 3,09
	3	+ 0,527	6,1	+ 3,21	1,692	1,04	+ 3,34
	4	+ 0,584	6,1	+ 3,56	2,079	1,03	+ 3,67
	5	+ 0,633	6,1	+ 3,86	2,443	1,03	+ 3,98
	6	+ 0,652	6,1	+ 3,98	2,595	1,03	+ 4,10
	7	+ 0,635	5,2	+ 3,30	2,096	1,04	+ 3,43
	8	+ 0,528	5,2	+ 2,75	1,452	1,05	+ 2,89
	9	+ 0,376	5,3	+ 1,96	0,737	1,07	+ 2,10
	10	+ 0,021	4,7	+ 0,10	0,002	1,10	+ 0,10
Summe:					15,564		

		V	$\frac{h}{F}$	$\Delta h = \frac{Vh}{F}$	$V\Delta h$	$\frac{2c}{\lambda}$	$\frac{2c}{\lambda} \Delta h_m$	$\frac{h_{m-1}}{\lambda}$	$\frac{h_{m-1}}{\lambda} \Delta h_m$
Vertikalen	0	- 0,550	4,9	- 2,70	1,318	2,10	- 5,67		
	1	- 0,687	4,3	- 2,95	2,027	1,22	- 3,60	1,32	- 3,89
	2	- 0,657	5,1	- 3,35	2,201	1,06	- 3,55	1,16	- 3,89
	3	- 0,603	4,5	- 2,71	1,634	0,92	- 2,49	1,02	- 2,76
	4	- 0,541	5,6	- 3,03	1,639	0,80	- 2,42	0,90	- 2,73
	5	- 0,458	5,0	- 2,29	1,049	0,69	- 1,58	0,79	- 1,81
	6	- 0,353	5,1	- 1,80	0,635	0,60	- 1,08	0,70	- 1,26
	7	- 0,223	4,6	- 1,03	0,230	0,53	- 0,56	0,63	- 0,65
	8	- 0,090	5,3	- 0,48	0,043	0,47	- 0,23	0,57	- 0,27
	9	+ 0,047	5,0	+ 0,24	0,011	0,43	+ 0,10	0,53	+ 0,13
10	+ 0,132	2,5	+ 0,33	0,044			0,51	+ 0,17	
Summe:					10,831				

Für die Gewichte w_o erhält man die Werte:

$$w_{0c} = -\frac{2,70}{2,0} = -1,35$$

$$w_{0e} = \frac{1}{3,95} [-7,08 - 6,78 + 0,00 - 2,60 + 5,67 - 3,89] = -3,72$$

$$w_{1c} = \frac{1}{3,48} [-9,29 - 5,06 + 2,60 - 2,94 + 3,60 - 3,89] = -4,30$$

$$w_{2c} = \frac{1}{3,07} [-9,37 - 4,32 + 2,94 - 3,21 + 3,55 - 2,76] = -4,29$$

$$w_{3c} = \frac{1}{2,70} [-7,86 - 2,36 + 3,21 - 3,56 + 2,49 - 2,73] = -4,00$$

$$w_{4c} = \frac{1}{2,38} [-4,79 - 1,00 + 3,56 - 3,86 + 2,42 - 1,81] = -2,30$$

$$w_{5c} = \frac{1}{2,11} [-2,38 + 0,87 + 3,86 - 3,98 + 1,58 - 1,26] = -0,62$$

$$w_{6c} = \frac{1}{1,89} [-0,20 + 2,66 + 3,98 - 3,30 + 1,08 - 0,65] = +1,89$$

$$w_{7c} = \frac{1}{1,72} [+1,54 + 3,60 + 3,30 - 2,75 + 0,56 - 0,27] = +3,48$$

$$w_{8c} = \frac{1}{1,60} [+ 2,84 + 4,60 + 2,75 - 1,96 + 0,23 + 0,13] = + 5,37$$

$$w_{9c} = \frac{1}{1,52} [+ 3,15 + 6,00 + 1,96 - 0,10 - 0,10 + 0,17] = + 7,34$$

$$\frac{1}{2} w_{10c} = \frac{1}{1,50} [+ 3,80 + 0,10 - 0,33 \cdot 0,46^*)] = + \frac{3,75}{1,50} = + 2,500.$$

Das Gewicht $\frac{1}{2} w_{10c}$ hat keinen Einfluß auf die Momente M des mit den Gewichten w belasteten Freitragers; es wurde aber berechnet, um die Probe

$$\sum_0^9 w_c + w_{10c} + \frac{1}{2} w_{10c} = + 20,58 - 20,58 = 0$$

ausführen zu können. Aus den Momenten

$M_1 = 5,97 \lambda$	$M_5 = 66,62 \lambda$	$M_9 = 121,10 \lambda$
$M_2 = 15,34 \lambda$	$M_6 = 87,20 \lambda$	$M_{10} = 130,94 \lambda$
$M_3 = 29,00 \lambda$	$M_7 = 105,89 \lambda$	$M_{11} = 133,44 \lambda$
$M_4 = 46,66 \lambda$		

ergeben sich die Werte

$$X_c = \frac{M}{\Sigma S_c^2 \frac{s}{EF}} = \frac{M}{\Sigma S_c \Delta s_c},$$

wo nach Tabelle XIII

$$\Sigma S_c \Delta s_c = 2 (108,303 + 65,111 + 15,564 + 10,831) = 2 \cdot 199,809.$$

Für die Knotenpunkte 1, 3, 5, 7, 9 erhält man

$X_{c1} = 0,0448$	$X_{c7} = 0,795$
$X_{c3} = 0,218$	$X_{c9} = 0,983$
$X_{c5} = 0,500$	

133. Die Gleichung der Kämpferdrucklinie ergibt sich aus der Gleichgewichtsbedingung (Fig. 336)

$$X_c y_k = X_b c + X_a.$$

Man findet für die Knotenpunkte 1, 3, 5, 7, 9 der Reihe nach

$X_c y_k = 0,1773$	$y_k = 3,96^m$
$X_c y_k = 1,149$	$y_k = 5,27^m$
$X_c y_k = 2,761$	$y_k = 5,52^m$
$X_c y_k = 4,466$	$y_k = 5,62^m$
$X_c y_k = 5,534$	$y_k = 5,63^m$

Bezogen auf die Schlußlinie AB der unteren Gurtung, erhält man die Ordinaten ($y_k' = y_k + c_u$):

$$y_k' = 16,68^m; 17,99^m; 18,24^m; 18,34^m; 18,35^m;$$

dieselben weichen von den früher erhaltenen Ordinaten

$$y_k' = 19,08^m; 18,77^m; 18,49^m; 18,25^m; 18,17^m$$

nur in der Nähe des Kämpfers wesentlich ab.

134. Einfluß der Temperaturänderung. Ändert sich die dem spannungslosen Anfangszustande des Bogens entsprechende Temperatur überall um denselben Betrag t ,

*) $0,46 = \operatorname{tg} \varphi_{10} = \frac{1,37}{3,0}$.

so entsteht ein Kämpferdruck X_{et} , der sehr annähernd in der Höhe $c_u = 12,72^m$ über der Schlußlinie AB der unteren Gurtung liegt und den Wert

$$X_{et} = \frac{\varepsilon E t l'''}{\Sigma S_c^2 \frac{s}{EF}} = \frac{\varepsilon E t l'''}{2 \cdot 199,809} = \frac{25 \cdot t l'''}{400} \text{ kg}$$

besitzt, wo (nach Fig. 312 auf Seite 308)

$$l''' = l + 2 c_u \cos \psi = 6000 + 2 \cdot 1272 \cdot 0,026 = 6066 \text{ cm}$$

ist. *) Mit $t = \pm 35^\circ$ Cels. ergibt sich

$$X_{et} = \frac{25 \cdot 35 \cdot 6066}{400} = 13300 \text{ kg.}$$

Früher erhielten wir $X_{et} = 17000 \text{ kg}$, ein Wert, der erst bei $t = 35 \frac{17000}{13300} = 45^\circ$ Cels. entstehen wird. Man vergl. die auf Seite 209 an die Berechnung des Horizontal-schubes H_t der Douro-Brücke bei Porto geknüpfte Bemerkung.

e. Näherungsformeln zur Berechnung der Kämpferdrücke.

135. Formel für X_a . Um zu einfachen, geschlossenen Formeln für die Unbekannten X_a , X_b und X_c zu gelangen, ersetzen wir die Einzelgewichte w_a , w_b , w_c durch stetige Belastungen.

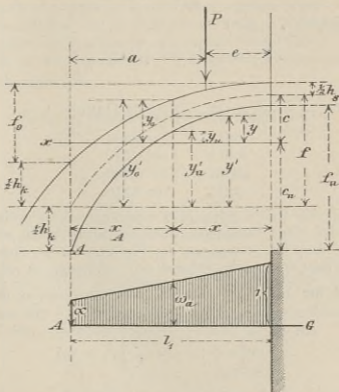


Fig. 340.

*) Wir haben die Werte $\frac{s}{F}$ (Seite 336) in $\frac{1}{\text{cm}}$ ausgedrückt. Man erkennt, daß man genügend genau $l''' = l'$ setzen darf.

An Stelle der w_a nehmen wir die in Fig. 340 dargestellte trapezförmige Belastungsfläche an, deren Höhe am Kämpfer = α , und im Scheitel = 1 sein möge. Im Abstände x_A von A ist die Belastungshöhe

$$\omega_a = \alpha + (1 - \alpha) \frac{x_A}{l_1}.$$

Der Freiträger AG wird dann an der Stelle x_A durch das Moment

$$M = \frac{\alpha x_A^2}{2} + (1 - \alpha) \frac{x_A^3}{6l_1}$$

beansprucht, wo $l_1 = \frac{1}{2}l$ ist. Der Inhalt der Belastungsfläche ist für beide Bogenhälften

$$\mathfrak{S} = (1 + \alpha) l_1,$$

und man erhält daher (für $x_A = a \leq l_1$)

$$X_a = \frac{M}{(1 + \alpha) l_1},$$

$$(2) \quad X_a = \frac{l_1}{6(1 + \alpha)} \left[3\alpha \frac{a^2}{l_1^2} + (1 - \alpha) \frac{a^3}{l_1^3} \right].$$

Für den vorhin untersuchten Bogenträger ergab sich am Kämpfer $w_a = 0,34$, in der Nähe des Scheitels $w_a = 2,17$. Das Verhältnis dieser beiden Werte ist

$$\alpha = \frac{0,34}{2,17} = 0,16^*.$$

und es folgt daher (mit $l_1 = 30^m$)

$$X_a = \frac{a^2}{l_1^2} \left(2,069 + 3,621 \frac{a}{l_1} \right).$$

Dies gibt für

$\frac{a}{l_1} = 0,1$	$X_a = 0,02431 \text{ tm}$
$= 0,3$	$= 0,284$
$= 0,5$	$= 0,970$
$= 0,7$	$= 2,256$
$= 0,9$	$= 4,316,$

d. s. Werte, die mit den früher gefundenen befriedigend übereinstimmen. Jedenfalls wird die Formel bei einer vorläufigen Querschnittsberechnung recht gute Dienste leisten; es kommt dann nur darauf an, das *Verhältnis* α der Gewichte w_a für die Knotenpunkte am Kämpfer und im Scheitel von vornherein zu schätzen.

136. Formel für X_b . Wir nehmen die Belastungshöhe an der Stelle x gleich

$$\omega_b = \omega_a x = \omega_a (l_1 - x_A)$$

$$= \left[\alpha + (1 - \alpha) \frac{x_A}{l_1} \right] (l_1 - x_A)$$

*) Da die Querschnittsabmessungen bei einem neu zu entwerfenden Bogen nicht bekannt sind, so muß man α zunächst schätzen. Man nehme etwa

$$\alpha = \frac{h_s^2}{h_k^2} \sqrt{1 + \frac{l_1}{f}},$$

wo h_s und h_k die Werte von h im Scheitel und am Kämpfer bedeuten. Im vorliegenden Falle liefert diese Formel zufällig ebenfalls $\alpha = 0,16$.

an, und erhalten M durch zweimalige Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 M}{dx_A^2} = \left[\alpha + (1 - \alpha) \frac{x_A}{l_1} \right] (l_1 - x_A).$$

Die Integrations-Konstanten werden mit Hilfe der Bedingungen bestimmt:

$$x_A = 0 \text{ muß liefern } \frac{dM}{dx_A} = 0,$$

$$x_A = 0 \quad ,, \quad ,, \quad M = 0.$$

Es ergibt sich

$$M = \alpha l_1 \frac{x_A^3}{2} + (1 - 2\alpha) \frac{x_A^3}{6} - (1 - \alpha) \frac{x_A^4}{12 l_1}.$$

Da nun X_b proportional M ist und für $x_A = l_1$ den Wert 0,5 annehmen muß, so folgt für $x_A = a \leq l_1$

$$\frac{X_b}{0,5} = \frac{\alpha l_1 \frac{a^2}{2} + (1 - 2\alpha) \frac{a^2}{6} - (1 - \alpha) \frac{a^4}{12 l_1}}{\alpha l_1 \frac{l_1^2}{2} + (1 - 2\alpha) \frac{l_1^2}{6} - (1 - \alpha) \frac{l_1^3}{12}},$$

und schließlich

$$(3) \quad X_b = \frac{1}{3\alpha + 1} \frac{a^2}{l_1^2} \left[3\alpha + (1 - 2\alpha) \frac{a}{l_1} - 0,5 (1 - \alpha) \frac{a^2}{l_1^2} \right].$$

Lasten, welche rechts vom Scheitel liegen, rufen negative Werte X_b hervor. Vergl. Fig. 336; die Linie $A'DD'B'$ ist die Einflußlinie für X_b . Verschiebt man den Zweig $D'B'$ um die Strecke 1 nach unten, so entsteht die stetige Kurve $A'DB''$, und diese ist die Einflußlinie für den senkrechten, rechtsseitigen Stützenwiderstand B .

Für $\alpha = 0,16$ ergibt sich:

$$X_b = \frac{a^2}{l_1^2} \left[0,324 + \frac{a}{l_1} \left(0,460 - 0,284 \frac{a}{l_1} \right) \right]$$

und für

$$\begin{array}{ll} \frac{a}{l_1} = 0,1 & X_b = 0,00367 \\ & = 0,3 \quad = 0,0393 \\ & = 0,5 \quad = 0,121 \\ & = 0,7 \quad = 0,248 \\ & = 0,9 \quad = 0,411, \end{array}$$

welche Werte mit den früher gefundenen ebenfalls befriedigend übereinstimmen.

137. Formel für e . Die mit der Kraft X_c zusammenfallende x -Achse habe vom Mittelpunkte der Scheitelvertikale den Abstand e . Es ist

$$f - e = \frac{\int_0^{l_1} (y_o' \omega_a + y_u' \omega_a) dx_A}{\int_0^{l_1} (\omega_a + \omega_a) dx_A},$$

wo, mit den in die Figur 340 eingetragenen Bezeichnungen,

$$\frac{y_o' + y_u'}{2} = y' = f - f \frac{x^2}{l_1^2}$$

ist. Es ergibt sich also

$$f - c = \frac{\int_0^{l_1} \omega_a y' dx_A}{\int_0^{l_1} \omega_a dx_A} = \frac{\int_0^{l_1} \omega_a y' dx_A}{0,5(1+\alpha)l_1} = \frac{5+3\alpha}{6(1+\alpha)} f$$

und

$$(4) \quad c = \frac{1+3\alpha}{6(1+\alpha)} f.$$

Für unser Beispiel ist $f_o = 12,55^m$, $f_u = 15,00^m$, $f = \frac{1}{2}(f_o + f_u) = 13,775^m$ und $\alpha = 0,16$, mithin

$$c = 2,93^m \text{ und } c_u = 12,82^m,$$

während wir auf Seite 327 und 342 die Werte $c_u = 12,99^m$ und $c_u = 12,72^m$ fanden.

138. Formel für X_c . Ist M das Angriffsmoment an der Stelle X des Freitragers AG infolge einer dem Gesetze

$$\omega_c = \omega_a(y_o + y_u) = 2 \omega_a y = 2 \left[1 - (1 - \alpha) \frac{x}{l_1} \right] \left(c - f \frac{x^2}{l_1^2} \right)$$

folgenden stetigen Belastung, so ist

$$X_c = \frac{M}{\int_0^{l_1} (y_o^2 + y_u^2) \omega_a dx}.$$

Integriert man die Differentialgleichung

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 M}{dx^2} = - \left[1 - (1 - \alpha) \frac{x}{l_1} \right] \left(c - f \frac{x^2}{l_1^2} \right)$$

und bestimmt man die beiden Integrationskonstanten mit Hilfe der Bedingungen:

$$x = 0 \text{ muß liefern } \frac{dM}{dx} = 0$$

$$x = l_1 \text{ ,, ,, } M = 0,$$

so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M &= c \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{x^2}{l_1^2} \right) - \frac{1-\alpha}{6} \left(1 - \frac{x^3}{l_1^3} \right) \right] l_1^2 \\ &- f \left[\frac{1}{12} \left(1 - \frac{x^4}{l_1^4} \right) - \frac{1-\alpha}{20} \left(1 - \frac{x^5}{l_1^5} \right) \right] l_1^2. \end{aligned}$$

Da nun

$$y_o = c + \frac{h_u}{2} - f_o \frac{x^2}{l_1^2},$$

$$y_u = c - \frac{h_u}{2} - f_u \frac{x^2}{l_1^2}$$

ist, so folgt

$$y_o^2 + y_u^2 = k_1^2 - k_2^2 \frac{x^2}{l_1^2} + k_3^2 \frac{x^4}{l_1^4},$$

wo

$$k_1^2 = 2c^2 + \frac{1}{2} h_u^2$$

$$k_2^2 = 2c(f_o + f_u) - h_u(h_k - h_s)$$

$$k_3^2 = f_o^2 + f_u^2.$$

Es ergibt sich dann

$$\int_0^{l_1} (y_o^2 + y_u^2) \omega_a dx = \frac{k_1^2 l_1}{2} (1 + \alpha) - \frac{k_2^2 l_1}{4} \left(\frac{1}{3} + \alpha \right) + \frac{k_3^2 l_1}{6} \left(\frac{1}{5} + \alpha \right)$$

und für eine bei $x = e$ gelegene Last 1:

$$(5) \quad X_e = \frac{l_1 e_0}{k^2} \left[1 - \frac{e^2}{l_1^2} - \frac{1-\alpha}{3} \left(1 - \frac{e^3}{l_1^3} \right) \right] - \frac{f l_1}{2 k^2} \left[\frac{1}{3} \left(1 - \frac{e^4}{l_1^4} \right) - \frac{1-\alpha}{5} \left(1 - \frac{e^5}{l_1^5} \right) \right],$$

wo

$$k^2 = k_1^2 (1 + \alpha) - \frac{1}{6} k_2^2 (1 + 3\alpha) + \frac{1}{15} k_3^2 (1 + 5\alpha).$$

Drückt man e , f_0 und f_u durch f , h_s und h_k aus, so erhält man

$$(6) \quad k^2 = \frac{f^2}{90} \cdot \frac{7 + 42\alpha + 15\alpha^2}{1 + \alpha} + \frac{h_s^2}{30} (11 + 5\alpha) + \frac{h_s h_k}{30} (3 + 5\alpha) + \frac{h_k^2}{30} (1 + 5\alpha),$$

und gelangt schließlich zu der Formel (für $x \geq 0$):

$$(7) \quad X_e = \gamma_1 - \frac{e^2}{l_1^2} \left\{ \gamma_2 - \frac{e}{l_1} \left[\gamma_3 + \frac{e}{l_1} \left(\gamma_4 - \gamma_5 \frac{e}{l_1} \right) \right] \right\},$$

wo

$$(7a) \quad \begin{cases} \gamma_1 = \frac{2(2 + 10\alpha + 3\alpha^2)}{\beta} \\ \gamma_2 = \frac{15(1 + 3\alpha)}{\beta} \\ \gamma_3 = \frac{5(1 - \alpha)(1 + 3\alpha)}{\beta} \\ \gamma_4 = \frac{15(1 + \alpha)}{\beta} \\ \gamma_5 = \frac{9(1 - \alpha^2)}{\beta} \end{cases}$$

$$\beta = \frac{f}{l_1} (7 + 42\alpha + 15\alpha^2) + \frac{3(1 + \alpha)}{f l_1} [h_s^2 (11 + 5\alpha) + h_s h_k (3 + 5\alpha) + h_k^2 (1 + 5\alpha)].$$

Für unser Zahlenbeispiel ist

$$f = 13.775^m, \quad l_1 = 30^m, \quad h_s = 1,5^m, \quad h_k = 3,95^m, \quad \alpha = 0,16;$$

man findet $\beta = 7,12577$ und

$$X_e = 1,032 - \frac{e^2}{l_1^2} \left\{ 3,115 - \frac{e}{l_1} \left[0,872 + \frac{e}{l_1} \left(2,442 - 1,231 \frac{e}{l_1} \right) \right] \right\}.$$

Es ergeben sich daher die folgenden Ordinaten der X_e -Linie und der Kämpferdrucklinie:

$\frac{e}{l_1}$	X_e	$y_k^*)$	$y_k' = c_u + y_k = 12,82^m + y_k$
0,9	0,0198	6,23 ^m	19,05 ^m
0,7	0,184	6,03	18,85
0,5	0,476	5,85	18,67
0,3	0,792	5,67	18,49
0,1	1,002	5,54	18,36

*) Nach der auf Seite 348 abgeleiteten Formel

$$y_k = \frac{X_b e + X_a}{X_c}.$$

139. Die Formel für X_{ct} infolge einer Temperaturänderung lautet

$$X_{ct} = \frac{\varepsilon t l}{2 \int_0^{l_1} (y_0^2 + y_u^2) \omega_a - \frac{dx}{EF_s h_s^2}};$$

denn es ist zu beachten, daß der Wert $\omega_a = 1$ im Scheitel mit $1:EF_s h_s^2$ multipliziert werden muß. Man erhält

$$(8) \quad X_{ct} = 2\varepsilon E t \frac{h_s^2}{k^2} F_s.$$

Zwischen k und β besteht die Beziehung

$$(9) \quad k^2 = \frac{\beta l_1 f}{90(1+\alpha)}.$$

Für unser Zahlenbeispiel ($\alpha = 0,16$, $f = 13,8$, $h_s^2 = 2,25$, $t = 35^\circ$, $\varepsilon E = 25$, $F_s = 120$ qcm) ergibt sich $k^2 = \frac{7,13 \cdot 30 \cdot 13,8}{90 \cdot 1,16} = 28,3$ und

$$X_{ct} = 16700 \text{ kg.}$$

Dieser Wert darf natürlich nur mit der in Nr. 126 unter Vernachlässigung der Längenänderungen der Füllungsstäbe gefundenen Zahl $X_{ct} = 17000$ kg verglichen werden.

140. Für den Sonderfall $\alpha = 1,0$ erhält man nach einer einfachen Zwischenrechnung für eine Last $P = 1$:

$$(10) \quad X_a = \frac{1}{4} \frac{a^2}{l_1},$$

$$(11) \quad X_b = \frac{1}{4} \frac{a^2}{l_1^2} \left(3 - \frac{a}{l_1}\right),$$

$$(12) \quad X_{eyk} = X_b c + X_a = \frac{a^2 b^2}{4 l_1^3}.$$

Die Strecken x_A und x_B , welche die x -Achse und die Kämpferdrücke K_1 und K_2 auf den Senkrechten durch A und B abschneiden, Fig. 341, sind durch die Gleichungen bestimmt

$$X_e x_B = X_b l_1 - X_a = \frac{a^2 b}{4 l_1^2}$$

$$X_e x_A = 1 \cdot a - X_b l_1 - X_a = \frac{b^2 a}{4 l_1^2},$$

und man findet daher

$$(13) \quad \frac{x_B}{y_k} = \frac{l_1}{b} \quad \text{und} \quad \frac{x_A}{y_k} = \frac{l_1}{a}.$$

Ist also die Kämpferdrucklinie bekannt, so kann man die Schnittpunkte F_1 und F_2 der Kämpferdrücke K_1 und K_2 mit den Senkrechten durch A und B wie folgt bestimmen. Man verbindet den Punkt C der Kämpferdrucklinie mit den Punkten J_1 und J_2 , in denen die x -Achse die Senkrechten durch A und B trifft durch Gerade und zieht $OF_1 \parallel CJ_1$ und $OF_2 \parallel CJ_2$. Dieses einfache Gesetz ist nur an die Annahme eines konstanten Wertes ω_a gebunden; es ist also nicht notwendig, daß die Mittellinie des Bogens parabolisch ist.

Liegt P sehr nahe an A , so ist die Ermittlung des Punktes F_1 unbequem. Man bestimmt dann die Richtung von K_1 zweckmäßiger durch Berechnung des Schnittpunktes L_1 von K_1 mit der x -Achse. Man findet

Beim Parabelbogen ist also für $\alpha = 1$ die Kämpferdrucklinie eine wagerechte Gerade.

Der Horizontalschub infolge einer Temperaturänderung ist (nach Gleichung (8) mit dem oben für k^2 angegebenen Werte)

$$X_{ct} = \frac{45}{8} \varepsilon E t \frac{h_a^2}{f^2} \nu F_a,$$

wofür man auch rund

$$(19) \quad X_{ct} = 6 \varepsilon E t F_a \frac{h_a^2}{f^2} \nu$$

setzen darf.

Für unser Zahlenbeispiel ergibt sich mit $\alpha = 1$

$$\nu = 0,92, \quad c = 4,59^m, \quad c_u = 11,16^m, \quad y_k = 7,99^m, \quad y_k' = 19,15^m,$$

ferner für

$\alpha : l$	X_a	X_b	X_c
= 0,1	0,075	0,007	0,034
0,3	0,675	0,061	0,244
0,5	1,875	0,156	0,528
0,7	3,675	0,282	0,778
0,9	6,075	0,425	0,920

$$X_{ct} = 6 \cdot 25 \cdot 35 \cdot 120 \frac{1,5^2}{13,8^2} 0,92 = 6850 \text{ kg.}$$

Die Werte c , c_u , X_a und X_{ct} weichen von den früher gewonnenen erheblich ab, während die von den senkrechten Lasten herrührenden, auf Tafel 6, Fig. 342, dargestellten Kämpferdrücke mit den früher ermittelten befriedigend übereinstimmen. Diese Übereinstimmung herrscht aber nur bezüglich der Größe dieser Kräfte, die Unterschiede der Lagen sind so wesentlich, daß die Annahme $\alpha = 1,0$ höchstens für eine ganz rohe Überschlagrechnung brauchbar ist. Ein gutes Bild von der Zulässigkeit der verschiedenen Näherungsverfahren liefert die folgende Untersuchung.

141. Vergleichung der auf verschiedenen Wegen gefundenen Werte ${}_{\min} O_{10}$ und ${}_{\min} U_1$. Die nächstfolgende Tabelle enthält die Ordinaten der Einflußlinie für das Moment M_0^* , bezogen auf den oberen Knotenpunkt 0, und zwar:

I nach dem im ersten Teile unseres Zahlenbeispiels durchgeführten Verfahren $\left(w' = \frac{1}{h_m^2} \right)$,

II auf Grund der im zweiten Teile durchgeführten genaueren, die Längenänderungen sämtlicher Stäbe berücksichtigenden Untersuchung*),

III auf Grund der für $\alpha = 0,16$ berechneten Werte X_a , X_b , X_c ,

IV auf Grund der Annahme $\alpha = 1$.

) Die Ordinaten sind für eine links vom Scheitel gelegene Last $P = 1$ mittels der Formel $M_0^ = X_a + X_b l_1 + X_c (c_u - y_0') - P x_A$ berechnet worden. Liegt P rechts vom Scheitel, so wird X_b negativ und das Glied $P x_A$ fällt fort.

M_0 -Linie.

Last in	I		II		III		IV	
1	-2,470		-2,413		-2,789		-2,470	
3	-5,590		-5,561		-5,905		-4,736	
5	-6,105		-6,024		-6,178		-4,638	
7	-4,473		-4,333		-4,279		-3,256	
9	-1,705		-1,721		-1,466		-1,542	
9'		+0,755		+0,559		+0,874		-0,042
7'		+1,887		+1,727		+1,841		+0,824
5'		+1,635		+1,656		+1,562		+1,002
3'		+0,830		+0,919		+0,737		+0,604
1'		+0,150		+0,244		+0,189		+0,110
Summe	-20,343	+5,257	-20,052	+5,105	-20,617	+5,203	-16,684	+2,540
$X_{\epsilon} =$	17,0 ^t		13,3 ^t		16,7 ^t		6,8 ^t	
$c_u - y_{\infty}$	12,99 - 3,95 = 9,04 ^m		8,77 ^m		8,87 ^m		7,21 ^m	

Die ständige Belastung eines Knotenpunktes beträgt 15^t, die bewegliche ebenfalls 15^t. Da nun

$$U_1 = \frac{M_0 \sec \gamma_1}{h_0} = \frac{M_0 \cdot 1,38}{3,95} = 0,35 M_0$$

ist, so ergibt sich der Einfluß der Belastung:

$$\begin{aligned} \text{I } \min U_1 &= 0,35 [-20,343 \cdot 30 + 5,257 \cdot 15] = -186^t \\ \text{II } \min U_1 &= 0,35 [-20,052 \cdot 30 + 5,105 \cdot 15] = -183^t \\ \text{III } \min U_1 &= 0,35 [-20,617 \cdot 30 + 5,203 \cdot 15] = -189^t \\ \text{IV } \min U_1 &= 0,35 [-16,684 \cdot 30 + 2,540 \cdot 15] = -163^t, \end{aligned}$$

und der Einfluß der Temperaturänderung

$$\begin{aligned} \text{I } U_1 &= \pm 0,35 \cdot 17,0 \cdot 9,04 = \pm 54^t \\ \text{II } U_1 &= \pm 0,35 \cdot 13,3 \cdot 8,77 = \pm 41^t \\ \text{III } U_1 &= \pm 0,35 \cdot 16,7 \cdot 8,87 = \pm 52^t \\ \text{IV } U_1 &= \pm 0,35 \cdot 6,8 \cdot 7,21 = \pm 17^t. \end{aligned}$$

Im ganzen entsteht also

$$\begin{array}{cccc} \text{im Falle} & \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \\ \min U_1 & = -240^t & -224^t & -241^t & -180^t. \end{array}$$

Für die Spannkraft $\min O_{10}$ erhält man mittels der in der Tabelle angegebenen Ordinaten der Einflußlinie (wegen $\cos \beta_{10} = 1,0$).

 O_{10} -Linie.

Last in	I		II		III		IV	
1	+0,02		+0,05		+0,01		+0,04	
3	+0,09		+0,15		+0,08		+0,17	
5	+0,08		+0,14		+0,04		+0,10	
7		-0,27		-0,28		-0,35		-0,46
9		-1,30		-1,37		-1,42		-1,70
Summe	+0,19	-1,57	+0,34	-1,65	+0,13	-1,77	+0,31	-2,16
$X_{\epsilon t}$	17,0 ^t		13,3 ^t		16,7 ^t		6,8 ^t	
y_{10}^m	2,01		2,28		2,18		3,84	
h_{10}	1,5		1,5		1,5		1,5	

infolge der Belastung

$$\text{I } \min O_{10} = 2 [-1,57 \cdot 30 + 0,19 \cdot 15] = -88,5^t$$

$$\text{II } \min O_{10} = 2 [-1,65 \cdot 30 + 0,34 \cdot 15] = -88,8^t$$

$$\text{III } \min O_{10} = 2 [-1,77 \cdot 30 + 0,13 \cdot 15] = -102,3^t$$

$$\text{IV } \min O_{10} = 2 [-2,16 \cdot 30 + 0,31 \cdot 15] = -120,3^t,$$

und infolge einer Temperaturänderung

$$\text{I } \min O_{10} = \pm \frac{17,0 \cdot 2,01}{1,5} = \pm 22,8^t$$

$$\text{III } \min O_{10} = \pm \frac{16,7 \cdot 2,18}{1,5} = \pm 24,3^t$$

$$\text{II } \min O_{10} = \pm \frac{13,3 \cdot 2,28}{1,5} = \pm 20,2^t$$

$$\text{IV } \min O_{10} = \pm \frac{6,8 \cdot 3,84}{1,5} = \pm 17,4^t.$$

Es ergibt sich also im ganzen

$$\min O_{10} = \begin{array}{cccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \\ -111^t & -109^t & -127^t & -138^t. \end{array}$$

Die Übereinstimmung der nach I und III berechneten Werte mit den nach II (d. i. unter Berücksichtigung der Längenänderungen sämtlicher Stäbe) gefundenen kann als befriedigend bezeichnet werden; denn man darf nicht außer acht lassen, daß der ohnehin auf einer ziemlich rohen Schätzung beruhende Einfluß der Temperaturänderung eine große Rolle spielt. Dagegen müssen die Abweichungen der Ergebnisse II und IV als zu groß bezeichnet werden, so daß die Annahme $\alpha = 1$ nicht zu empfehlen ist.

Schließlich werde noch hervorgehoben, daß sich der Bogen mit eingespannten Kämpfern nur bei verhältnismäßig großer Pfeilhöhe zur Ausführung empfiehlt, weil geringe Pfeilhöhen stets beträchtliche Spannungen durch Temperaturänderungen im Gefolge haben.

§ 12.

Durchgehender Balken mit drei Stützpunkten.

142. Die Einflußlinie für den Widerstand C der Mittelstütze, mit deren Aufzeichnung die Untersuchung des Trägers zweckmäßig begonnen wird, erhält man nach Nr. 56, Seite 140, indem man für den Zustand $C = -1$ die Biegelinie der zur Aufnahme der Lasten bestimmten Gurtung zeichnet und ihre Ordinaten (η) durch die demselben Zustande entsprechende Senkung (c) des Stützpunktes C , welcher auch der anderen, unbelasteten Gurtung angehören kann, dividiert. In Fig. 343 ist die fragliche Biegelinie als Seilpolygon von Gewichten w aufgefaßt worden. Dreieck $A'B'C'$ stellt die Momentenfläche des mit $C = -1$ belasteten einfachen Balkens vor; y_m sei das Moment an der Stelle m . Dann ergibt sich mit der meistens zulässigen Vernachlässigung der Formänderungen der Füllungsstäbe: $w_m = \frac{y_m s_m}{r_m^2 E F_m}$, wofür bei konstantem E

$$w_m = \frac{y_m s_m}{r_m^2} \frac{F_c}{F_m}$$

gesetzt werden möge, unter F_c eine beliebige Querschnittsfläche verstanden. Diese Abänderung der w ist auf das Ergebnis

$$C = P \frac{\eta}{c},$$

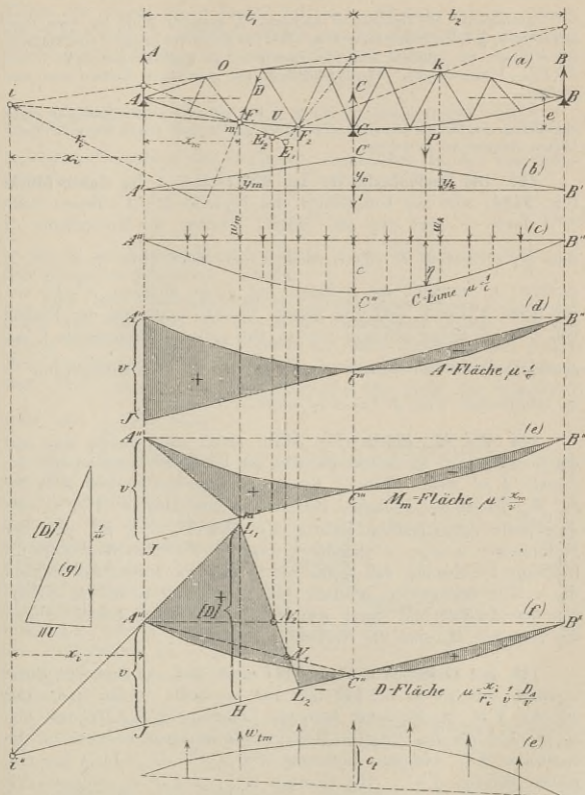


Fig. 343.

welches nur von dem Verhältnis $\eta : c$ abhängig ist, ohne Einfluß, und aus demselben Grunde leuchtet ein, daß sowohl die Höhe des Momenten-Dreiecks $A'B'C'$ als auch die Polweite des Seilzuges beliebig gewählt werden dürfen. Aus der C -Linie lassen sich nun mit Leichtigkeit alle übrigen Einflußlinien ableiten.

Anmerkung. Die Gewichte w erscheinen in derselben Form wie beim Zweigelenkbogen, § 7; die früher für gewisse Arten des Fachwerks gezeigten Umformungen der w lassen sich natürlich auch hier verwerten. Es empfiehlt sich in der Regel, $F_c : F_m = 1$ anzunehmen. Für Parallelträger mit gleichlangen Feldern setze man $w_m = y_m$.

Noch sei hervorgehoben, daß wir es in Fig. 343c des kleinen Maßstabes wegen unterließen, den Seilzug durch ein einbeschriebenes Polygon, dessen Ecken den Querträgern entsprechen, zu ersetzen.

143. Die Einflußfläche für den Widerstand A der linken Stütze (Fig. 343d) wird als Unterschied des Dreiecks $B''JA''$, dessen Seite $B''J$ durch C'' geht, und der C -Fläche erhalten; ihr Multiplikator ist $\mu = \frac{1}{v}$, wo $v = \overline{A''J}$. Wäre nämlich der Balken nur in A und B gestützt, so bestände die A -Fläche aus einem Dreiecke $A''JB''$ von der Höhe $\overline{A''J} = 1$, und von diesem Dreieck muß nun der Einfluß von C so in Abzug gebracht werden, daß einer im Stützpunkte C angreifenden Last die Ordinate $A = 0$ entspricht. Der Multiplikator $\frac{1}{v}$ ist erforderlich, weil $\overline{A''J} = v$ ist, statt $\overline{A''J} = 1$.

144. Die M_m -Fläche (Fig. 343e) erhält man, indem man auf der Geraden $B''C''$ senkrecht unter m den Punkt m'' bestimmt und die Gerade $A''m''$ zieht. Wäre $\overline{A''J} = x_m$, so wäre das Dreieck $A''m''B''$ die M_m -Fläche des einfachen Balkens AB und Dreieck $A''m''C''$ die M_m -Fläche des einfachen Balkens AC . Da $\overline{A''J} = v$ ist, muß der Multiplikator $\mu = x_m : v$ eingeführt werden. Zu demselben Ergebnis führt die Überlegung, daß rechts von m gelegene Lasten das Moment $M_m = Ax_m$ hervorrufen, weshalb sich rechts von m die M_m -Fläche von der A -Fläche nur durch den Multiplikator unterscheidet. Durch die Momente M_m sind die Gurtkräfte gegeben.

145. Die D -Fläche in Figur 343f ergibt sich aus ähnlichen Überlegungen, wie sie in Nr. 143 und 144 angestellt worden sind. Der auf die $A''B''$ als Nullachse bezogene Linienzug $A''L_1L_2B''$ läßt sich als die D -Linie des einfachen Balkens AB auffassen, und der auf die Nullachse $A''C''$ bezogene Linienzug $A''L_1L_2C''$ als D -Linie des einfachen Balkens $A''C''$. Die Geraden $A''L_1$ und $B''L_2$ müssen sich daher senkrecht unter dem Schnittpunkte i der Gurtstäbe O und U

treffen, und die Punkte N_1, N_2 , in denen $L_1 L_2$ von den Geraden $A''B''$ und $A''C''$ geschnitten wird, müssen senkrecht unter den Belastungsscheiden E_1 und E_2 liegen, welche man erhält, wenn man D als Füllungsstab eines einfachen Balkens AC oder eines einfachen Balkens AD ansieht. Damit ist der Punkt L_1 auf dreifache Weise bestimmt. Treten nur rechts von r Lasten auf, so greift links von dem durch die Stäbe O, D, U geführten Schnitt nur die äußere Kraft A an und die Momentengleichung in bezug auf Punkt i lautet:

$$-Dr_i - Ax_i = 0;$$

sie liefert: $D = -A \frac{x_i}{r_i}$ und führt zu den in der Figur 343f angegebenen Vorzeichen der D -Fläche. Auch lehrt sie, daß der Multiplikator

$$\mu = \frac{x_i}{vr_i} = \frac{D_A}{v}$$

ist, wo D_A der absolute Wert der durch $A = 1$ im fraglichen Füllungsstabe erzeugten Spannkraft bedeutet.

Eine vierte, besonders einfache Bestimmungsweise des Punktes L_1 , ergibt sich schließlich aus dem früher bewiesenen Gesetze, daß die Strecke $L_1 H$ im Falle $\mu = 1$ gleich der durch Zerlegung von $P = 1$ nach den Richtungen von U und D gewonnenen Seitenkraft [D] sein muß*), bei Auftreten eines Multiplikators μ also gleich der Seitenkraft einer Last $\frac{1}{\mu}$ (Fig. 343g).

146. Die Einflußfläche für die Querkraft Q im Felde $F_1 F_2$ zeigt Fig. 344; ihre Aufzeichnung empfiehlt sich bei Untersuchung von Parallelträgern, da hier die Spannkräfte in den Füllungsstäben durch die Querkräfte Q bestimmt sind. Nach Eintragung der Geraden $B''J$ wird $A''L_1 \parallel B''L_2$ gezogen. Der Multiplikator ist $= 1 : v$. Der Beweis wird wie in Nr. 145 geführt.

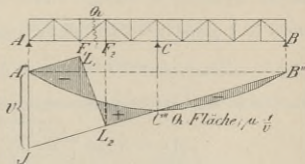


Fig. 344.

Den Kräftemaßstab wird man in Figur 343 und 344 zweckmäßig so wählen, daß die Lasteinheit durch eine Strecke von der Länge v dargestellt wird. Dann

*) Vergl. Band I, Seite 240, Fig. 226. Bei obenliegender Fahrbahn erfolgt die Zerlegung nach den Richtungen O und D .

wird der Multiplikator der A -Fläche und Q -Fläche $= 1$, der M_m -Fläche $= x_m$ und der D -Fläche $= D_A$.

147. Gehört der Stützpunkt C nicht der belasteten Gurtung an, so ist C'' kein Punkt der dem Seilzuge $A''C''B''$ einbeschriebenen C -Linie.

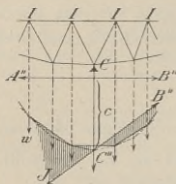


Fig. 345.

Die Gerade $B''J$ geht aber nach wie vor durch den Punkt C'' , und c bedeutet auch hier den Abstand des Punktes C'' von der Schlußlinie $A''B''$. Vergl. Fig. 345, welche einen Teil der A -Fläche darstellt.

148. Der Einfluß einer Temperaturänderung auf den Stützenwiderstand C ist ganz allgemein:

$$C_t = 1 \frac{\delta_{ct}}{\delta_{cc}}$$

wo δ_{ct} und δ_{cc} die Senkungen bedeuten, welche der Knotenpunkt C des einfachen Balkens AB infolge einer Erwärmung bzw. infolge der Belastung $C = -1$ erfährt. Wird eine gleichmäßige Erhöhung der Aufstellungstemperatur vorausgesetzt und der Abstand des Punktes C von der Wagerechten AB mit e bezeichnet, so ergibt sich $\delta_{ct} = \epsilon t e$. Für δ_{cc} ist der Wert

$$\delta_{cc} = c \frac{1}{EF_c} w_P \cdot \frac{l_1 l_2}{y_n (l_1 + l_2)}$$

einzuführen, unter w_P die Polweite des Seilzuges $A''C''B''$ verstanden. Es muß nämlich die Ordinate e des für den Zustand $C = -1$ gezeichneten Seilpolygons multipliziert werden: mit $1 : EF_c$, weil die EF_c -fachen Gewichte w benutzt worden sind, mit w_P , weil die Polweite nicht $= 1$ gewählt worden ist und mit $\frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} : y_n$, weil die Höhe des Momentendreiecks $A'C'B'$ für den Zustand $C = -1$ gleich $\frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2}$ statt $= y_n$ ist. Infolgedessen ergibt sich der Stützenwiderstand

$$(1) \quad C_t = \frac{\epsilon EF_c e y_n (l_1 + l_2)}{c l_1 l_2 w_P} t,$$

dessen Einfluß auf die Stabkräfte am besten mit Hilfe eines Cremonaschen Kräfteplanes untersucht wird. In der vorstehenden Formel ist w_P als *Zahl* aufzufassen, welche mit dem Maßstabe gemessen wird, nach welchem die *Zahlen* $w = \frac{yS}{r^2}$ aufgetragen worden sind. Die Strecken e , y_n , l_1 , l_2 , c messe man mit dem Längenmaßstabe der Zeichnung.

In der Regel wird beim durchgehenden Balken der Einfluß einer Temperaturänderung gar nicht berücksichtigt und für unwesentlich erachtet. Dies letztere trifft aber nur bei gleichförmiger Erwärmung zu, und es möge daher noch der wichtige Fall betrachtet werden, daß die obere Gurtung infolge Sonnenbestrahlung eine um Δt höhere Temperatur annimmt als die untere. Man rechnet dann genügend genau, wenn man den Füllungsstäben und der unteren Gurtung den Wert $t = 0$ zuschreibt und die Längenänderungen der Obergurtstäbe (zunächst für $\varepsilon = 1$) nach der Formel $\Delta s = s \Delta t$ bestimmt. Nun er-

mittele man die Gewichte $w_t = -\frac{\Delta s}{r} = -\frac{s \Delta t}{r}$ der unteren Knotenpunkte, verbinde dieselben durch ein Seilpolygon (Polweite = w_{tP}) und messe unter C die Ordinate c_t (Fig. 318e). Man findet dann $\delta_{\sigma t} = -\varepsilon w_{tP} c_t$ und

$$(2) \quad C_t = -\frac{\varepsilon E F_c c_t y_n (l_1 + l_2)}{c l_1 l_2} \frac{w_{tP}}{w_P} \Delta t,$$

w_{tP} ist eine Zahl, welche mit dem Maßstabe gemessen werden muß, nach welchem die Zahlen w_t aufgetragen worden sind.*) Ist die obere Gurtung um Δt kälter als die untere, so entsteht ein positives C_t .

Es möge noch für die in Fig. 346 dargestellte Trägerform eine Näherungsformel für C_t aufgestellt werden. Dazu gehen wir von dem Ausdrucke

$$(3) \quad C_t = \frac{\Sigma S' \varepsilon t s}{\Sigma S'^2 \frac{s}{EF}}$$

aus, wo S' die durch die Belastung $C = -1$ in den Stäben des einfachen Balkens AB hervorgerufenen Spannkkräfte bedeuten. Wir berücksichtigen nur die Längenänderungen der Gurtstäbe und erhalten für diese Stäbe die Werte

$$S' = \mp \frac{l_2 x}{(l_1 + l_2) h} \quad (\text{linke Seitenöffnung}),$$

$$S' = \mp \frac{l_1 x}{(l_1 + l_2) h} \quad (\text{rechte Seitenöffnung}).$$

Die oberen Vorzeichen gelten für die obere, die unteren für die untere Gurtung. Es ergibt sich also bei unendlich kleiner Feldweite

$$\Sigma S'^2 \frac{s}{EF} = \frac{2}{(l_1 + l_2)^2} \left[l_2^2 \int_0^{l_1} \frac{x^2 dx}{h^2 EF} + l_1^2 \int_0^{l_2} \frac{x^2 dx}{h^2 EF} \right].$$

Diesen Ausdruck schreiben wir in der Form

$$\Sigma S'^2 \frac{s}{EF} = \frac{2}{EF h^2 (l_1 + l_2)^2} \left(l_2^2 \int_0^{l_1} x^2 \omega dx + l_1^2 \int_0^{l_2} x^2 \omega dx \right),$$

*) In der Regel empfiehlt es sich, für die verhältnismäßig großen Gewichte w_t einen anderen Maßstab zu wählen als für die Gewichte w .

wo F_s und h_s die Werte von F und h über der Mittelstütze bedeuten, während

$$\omega = \frac{h_s^2 F_s}{h^2 F}$$

ist. Die Querschnittsinhalte F mögen sich mit x so ändern, daß ω eine lineare Funktion ist, welche an den Trügerenden die Werte α_1 bzw. α_2 annimmt.^{*)} Dann ist

$$\int_0^l x^2 \omega dx = \frac{l^3}{4} + \frac{\alpha l^3}{12},$$

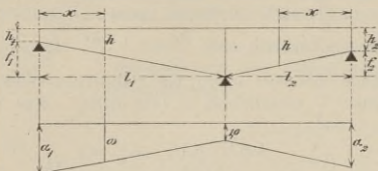


Fig. 346.

und man erhält

$$\Sigma \frac{S'^2 s}{EF} = \frac{l_1^2 l_2^2 [l_1 (3 + \alpha_1) + l_2 (3 + \alpha_2)]}{6 E F_s h_s^3 (l_1 + l_2)^2}.$$

Weiter ergibt sich für die um Δt erwärmte obere Gurtung

$$\Sigma S' \varepsilon \Delta t s = - \frac{\varepsilon \Delta t}{l_1 + l_2} \left[l_2 \int_0^{l_1} \frac{x dx}{h} + l_1 \int_0^{l_2} \frac{x dx}{h} \right].$$

Da nun

$$\int_0^{l_1} \frac{x dx}{h} = \int_0^{l_1} \frac{x dx}{h_1 + f_1 \frac{x}{l_1}} = \frac{l_1^2}{f_1} \left(1 - \frac{\ln \frac{h_s}{h_1}}{\frac{h_s}{h_1} - 1} \right),$$

so gelangt man schließlich zu der Formel

$$(4) \quad C_t = - 6 \varepsilon E F_s \Delta t \frac{h_s (l_1 + l_2)}{l_1 l_2} \frac{l_1 \psi_1 + l_2 \psi_2}{l_1 (3 + \alpha_1) + l_2 (3 + \alpha_2)},$$

wo (mit den abkürzenden Bezeichnungen $\frac{h_s}{h_1} = \tau_1$ und $\frac{h_s}{h_2} = \tau_2$)

$$(5) \quad \begin{cases} \psi_1 = \frac{\tau_1}{\tau_1 - 1} \left(1 - \frac{\ln \tau_1}{\tau_1 - 1} \right) \\ \psi_2 = \frac{\tau_2}{\tau_2 - 1} \left(1 - \frac{\ln \tau_2}{\tau_2 - 1} \right), \end{cases}$$

$$(6) \quad \alpha_1 = \frac{F_s}{F_1} \frac{h_s^2}{h_1^2}, \quad \alpha_2 = \frac{F_s}{F_2} \frac{h_s^2}{h_2^2}.$$

^{*)} Es ist dies dieselbe einfache Annahme, die in Nr. 135 bei der Berechnung des Bogens mit eingespannten Kämpfern gemacht wurde.

Das Biegemoment, welches C_t über der Mittelstütze erzeugt, ist

$$M = - C_t \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2},$$

es ruft in der oberen oder unteren Gurtung die Spannkraft

$$S = \mp \frac{M}{h_s}$$

und die Spannung

$$\sigma = \pm \frac{M}{h_s F_s}$$

hervor. Man erhält also über der Stütze die Beanspruchung

$$(7) \quad \sigma = \pm 6 \varepsilon E \Delta t \frac{l_1 \psi_1 + l_2 \psi_2}{l_1 (3 + \alpha_1) + l_2 (3 + \alpha_2)}.$$

Der Stützenwiderstand ist, absolut genommen,

$$(8) \quad C_t = \sigma F_s \frac{h_s (l_1 + l_2)}{l_1 l_2}.$$

Ist

$$l_1 = l_2 = l, \quad \psi_1 = \psi_2 = \psi, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha,$$

so ergibt sich

$$(9) \quad \sigma = 6 \varepsilon E \Delta t \frac{\psi}{3 + \alpha},$$

$$(10) \quad C_t = 2 \sigma F_s \frac{h_s}{l}.$$

Für

$$\tau = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$$

erhält man

$$\psi = 0,500 \quad 0,614 \quad 0,676 \quad 0,717 \quad 0,747 \quad 0,770 \quad 0,788 \quad 0,803 \quad 0,816 \quad 0,830.$$

Für $h_1 = 0$ also für $\tau = \infty$ wird $\psi = 1$.

Es sei z. B. $l_1 = l_2 = 30^m$, $h_s = 4,5^m$, $h_1 = h_2 = 2,25^m$, also $h_s : h_1 = 2$ und $\psi = 0,614$; ferner $F_1 = 100$ qcm und $F_s = 300$ qcm, mithin $\alpha = 3 \cdot 2^2 = 12$. Dann ergibt sich für $\Delta t = 20^\circ$ und für Flußeisen

$$\sigma = 6 \cdot 25 \cdot 20 \frac{0,614}{3 + 12} = \text{rd. } 120 \text{ kg/qcm,}$$

ferner

$$C_t = - 2 \cdot 120 \cdot 300 \frac{4,5}{30} = - 10800 \text{ kg.}$$

Die vorstehenden Formeln gelten auch für den Fall einer geneigten oberen Gurtung, weil $\sec \beta$ so wenig von 1 abweicht, daß man $\Delta t \sec \beta$ konstant annehmen darf.

Wir erinnern wieder daran, daß der vorstehenden Rechnung die ungünstige Voraussetzung starrer Füllungsstäbe zugrunde liegt. Dafür ist der durch Formel (1) gegebene Einfluß einer gleichmäßigen Erwärmung vernachlässigt worden. Will man nach Berechnung sämtlicher Stabquerschnitte C_t genauer bestimmen (was immer zu empfehlen ist) so benutze man die Formel (1). Daß dies nicht ganz überflüssig ist, haben wir in dem im § 11 durchgeführten Zahlenbeispiele gesehen.

149. Bei der Drehbrücke „Neuhof“ über den Reiherstieg bei Hamburg-Neuhof hat die Maschinenbaugesellschaft Nürnberg die in der Figur 347 dargestellte eigenartige Anordnung der Füllungsstäbe gewählt. Es mögen die Formeln für die Ge-

wichte w mit Berücksichtigung der Längenänderungen der Füllungsstäbe aufgestellt werden. Zu beachten ist zunächst, daß im Belastungsfalle $C = -1$ sämtliche Vertikalen spannungslos sind, daß also die Gewichte w_m und w_k der dem gewöhnlichen

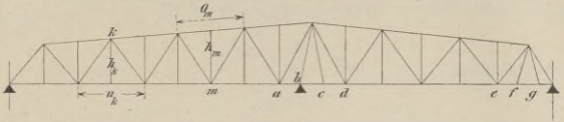


Fig. 347.

Strebensystem angehörigen Knotenpunkte m und k nach den auf Seite 105 abgeleiteten Formeln

$$w_m = \frac{-\Delta o_m \sec \beta_m + \Delta d_m \sec \varphi_m + \Delta d_{m+1} \sec \varphi_{m+1}}{h_m}$$

$$w_k = \frac{+\Delta u_k - \Delta d_k \sec \varphi_k - \Delta d_{k+1} \sec \varphi_{k+1}}{h_k}$$

zu berechnen sind.

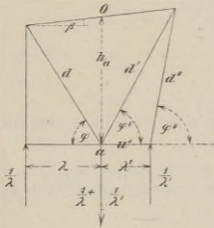


Fig. 348.

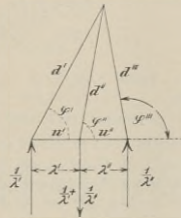


Fig. 349.

Um w_a für den Knotenpunkt a zu finden, berechne man für den in Fig. 348 dargestellten Belastungsfall die Stabkräfte μ ; man findet

$$\text{für den Stab } o \text{ den Wert } \mu = -\frac{\sec \beta}{h_a}$$

$$\text{„ „ „ } d \text{ „ „ } \mu = +\frac{\sec \varphi}{h_a}$$

$$\text{„ „ „ } u' \text{ „ „ } \mu = -\frac{\cotg \varphi''}{\lambda'}$$

$$\text{„ „ „ } d'' \text{ „ „ } \mu = -\frac{1}{\lambda' \sin \varphi''}$$

$$\text{„ „ „ } d' \text{ „ „ } \mu = +\left(\frac{1}{h_a} + \frac{\cotg \varphi''}{\lambda'}\right) \sec \varphi',$$

und hierauf mittels der auf Seite 105 abgeleiteten Formel

$$w = \Sigma \mu \Delta s,$$

$$w_a = \frac{-\Delta o \sec \beta + \Delta d \sec \varphi + \Delta d' \sec \varphi'}{h_a} + \frac{\cotg \varphi''}{\lambda'} (\Delta d' \sec \varphi' - \Delta d'' \sec \varphi'' - \Delta u').$$

In derselben Weise werden die Gewichte w_d und w_e berechnet.

Nun bestimmt man für den in Fig. 349 angegebenen Belastungszustand

$$\begin{aligned} \text{für den Stab } u' \text{ den Wert } \mu &= + \frac{\cotg \varphi'}{\lambda'} \\ \text{„ „ „ } u'' \text{ „ „ } \mu &= + \frac{\cotg \varphi'''}{\lambda''} \\ \text{„ „ „ } d' \text{ „ „ } \mu &= - \frac{\cotg \varphi'}{\lambda'} \sec \varphi' \\ \text{„ „ „ } d''' \text{ „ „ } \mu &= - \frac{\cotg \varphi'''}{\lambda''} \sec \varphi''' \\ \text{„ „ „ } d'' \text{ „ „ } \mu &= \left(+ \frac{\cotg \varphi'}{\lambda'} - \frac{\cotg \varphi'''}{\lambda''} \right) \sec \varphi'', \end{aligned}$$

und findet schließlich

$$w_b = \frac{\cotg \varphi'}{\lambda'} (\Delta u' + \Delta d'' \sec \varphi'' - \Delta d' \sec \varphi') + \frac{\cotg \varphi'''}{\lambda''} (\Delta u'' - \Delta d'' \sec \varphi'' - \Delta d''' \sec \varphi''').$$

In derselben Weise berechnet man w_c , w_f und w_g .

Die vorstehende Entwicklung zeigt, daß die Berechnung der Gewichte w für Ausnahmefälle nicht die geringsten Schwierigkeiten bereitet. Man denke aber auch daran, daß für solche Fälle noch das sehr allgemeine Williot'sche Verfahren zur Verfügung steht. Im vorliegenden Falle gibt der Verfasser allerdings der Verwendung der Gewichte w den Vorzug, weil nach Berechnung der für beide Verfahren erforderlichen Längenänderungen Δo , Δu und Δd die Ausrechnung der Werte w so wenig Zeit in Anspruch nimmt, daß die größere Einfachheit und Genauigkeit der Seillinie, gegenüber dem zeichnerisch viel umständlicheren und mit größeren Fehlern behafteten Verfahren von Williot, die geringe rechnerische Mehrarbeit wieder ausgleicht. Auch lassen sich die Seillinien stets schnell durch Rechnung bestimmen.

§ 13.

Durchgehender Balken mit vier Stützpunkten.

150. Die Widerstände der Endstützen. Als statisch nicht bestimmbare Größen führen wir die Widerstände $X_a = A$ und $X_b = B$ der Endstützen ein, weisen den Angriffspunkten derselben die Ordnungsziffern a und b zu und erhalten mit den auf Seite 147 erklärten allgemeinen Bezeichnungen:

$$(1) \quad \begin{cases} \delta_a = P_m \delta_{ma} - A \delta_{aa} - B \delta_{ab} + \delta_{at} \\ \delta_b = P_m \delta_{mb} - A \delta_{ba} - B \delta_{bb} + \delta_{bt}, \end{cases}$$

wo δ_a , δ_b die lotrechten Verschiebungen sind, welche die Punkte a und b infolge der Nachgiebigkeit der Widerlager gegen die durch die beiden mittleren Stützpunkte bestimmte Gerade erfahren; sie werden in der Regel gleich Null gesetzt.

Das statisch bestimmte Hauptssystem (Zustand $A=0$, $B=0$) ist ein Balken mit über die Stützen C_1' , C_2' ragenden Enden; seine Biegelinien, gezeichnet für die Zustände $A=-1$, $B=-1$, liefern die Verschiebungen δ_{ma} , δ_{aa} , δ_{ba} , δ_{mb} , δ_{ab} , δ_{bb} .

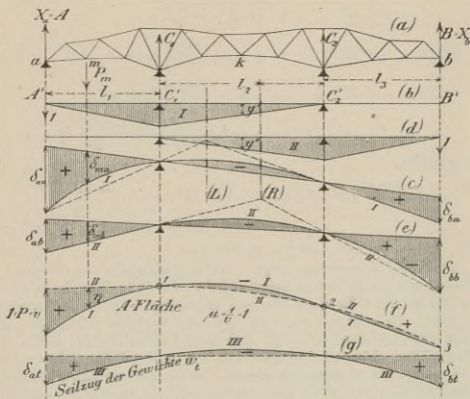


Fig. 350.

Die Momentenfläche des Zustandes $A=-1$ besteht aus einem Dreieck I (Fig. 350b) von der Höhe $-l_1$, mit dessen Hilfe die w -Kräfte genau so berechnet werden wie im vorigen Paragraphen. Beispielsweise ist bei Vernachlässigung der Formänderungen der Füllungsstäbe das Gewicht des Knotens k : $w'_k = -\frac{y'_k s_k}{r_k^2} \frac{F'_c}{F_k}$. Die Gewichte w' sind negativ; es entspricht ihnen also ein nach oben gebrochener Seilzug I^*), dessen rechte Endseite als Biegelinie des spannungslosen Trägeteiles $C_2'B'$ — der nur eine Drehung aber keine Form-

^{*)} In Fig. 350 zeichneter wir der Einfachheit wegen Seilkurven. Auch haben wir die Höhen der Momentendreiecke in kleinerem Maßstabe aufgetragen.

veränderung erfährt — aufzufassen ist. Nach Eintragung der durch die Stützpunkte $C_1' C_2'$ bestimmten Schlußlinie ergibt sich die in Fig. 321 c schraffierte Fläche als Biegungsfläche für den Zustand $A = -1$; sie liefert die Verschiebungen δ_{ma} , δ_{aa} , δ_{ba} .

Ganz in derselben Weise wird die Biegungsfläche für den Zustand $B = -1$ erhalten und damit δ_{bb} , δ_{mb} , δ_{ab} , gewonnen (wobei die Zeichenprobe $\delta_{ab} = \delta_{ba}$ zu beachten ist), so daß jetzt alle Werte gegeben sind, durch welche der Einfluß einer Last P_m bestimmt ist. Dieser ergibt sich aus den Gleichungen

$$(2) \quad \begin{cases} 0 = P_m \delta_{ma} - A \delta_{aa} - B \delta_{ab} \\ 0 = P_m \delta_{mb} - A \delta_{ba} - B \delta_{bb}, \end{cases}$$

und zwar erhält man A und B als lineare Funktionen der Veränderlichen δ_{ma} , δ_{mb} . Beispielsweise wird

$$(3) \quad A = K_a \delta_{ma} + K_b \delta_{mb},$$

wo K_a und K_b feste, von der Lage der Last P unabhängige Werte sind, und dafür darf man auch schreiben: $A = K_a (\delta_{ma} + K' \delta_{mb})$, wo K' einen neuen Festwert bedeutet. Da nun nach diesem Gesetze A proportional der um $K' \delta_{mb}$ vermehrten Ordinate δ_{ma} ist, da ferner einer im Stützpunkte C_1 oder C_2 angreifenden Last P der Wert $A = 0$ entspricht, und da endlich die im Stützpunkte A wirksame Last P den Gegendruck $A = P$ hervorruft, so ergibt sich die folgende einfache Darstellungsweise der A -Fläche (Fig. 350f).

Man zeichne den Seilzug II der Gewichte $w'' = \frac{y'' s}{r^2} \frac{F_c}{F}$ mit beliebiger Polweite und führe hierauf das die Gewichte $w' = \frac{y' s}{r^2} \frac{F_c}{F}$ verbindende Seilpolygon I durch die Punkte 1, 2 und 3, in denen das Polygon II die Senkrechten durch die Stützen C_1, C_2, B schneidet. Die von beiden Seilzügen eingeschlossene Fläche ist die gesuchte A -Fläche. Mit den aus Fig. 350f ersichtlichen Bezeichnungen η und v erhält man:

$$(4) \quad A = \frac{\eta}{v} \cdot P$$

und, wenn die Lasteinheit P durch eine Strecke von der Länge v dargestellt wird, was hier vorausgesetzt werden möge, $A = \eta$.

Das Seilpolygon I läßt sich sehr schnell zeichnen, weil die rechte äußerste Seite durch die Punkte 2 und 3 festgelegt ist. Bringt man diese Seite mit der Mittelkraft der zwischen den Stützpunkten C_1 und C_2 liegenden Gewichte w' zum Schnitt, so bestimmt dieser Schnittpunkt und der Punkt 1 die Lage der durch 1 gehenden Seite des Polygons I .

151. Temperaturänderungen. Um noch die wichtige Aufgabe des Einflusses der ungleichen Erwärmung der beiden Gurtungen zu lösen, zeichnen wir das Seilpolygon (*III*) (Fig. 350) der Gewichte $w_t = \frac{s \Delta t}{r}$, wo s die Stablängen der um Δt stärker erwärmten Gurtung bedeuten, bestimmen die Strecken δ_{at} und δ_{bt} und lösen die Gleichungen auf:

$$A_t \delta_{aa} + B_t \delta_{ab} = \varepsilon \delta_{at} w_{III}$$

$$A_t \delta_{ba} + B_t \delta_{bb} = \varepsilon \delta_{bt} w_{III},$$

wo w_{III} die Polweite des Seilpolygons *III* bedeutet. Die Multiplikation mit dem Ausdehnungskoeffizienten ε ist erforderlich, weil w_t nicht gleich $\frac{\Delta s}{r} = \frac{\varepsilon s \Delta t}{r}$, sondern $= \frac{s \Delta t}{r}$ gesetzt worden ist.

Man erhält

$$\begin{aligned} B_t &= \varepsilon w_{III} \frac{\delta_{aa} \delta_{bt} - \delta_{ba} \delta_{at}}{\delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ba} \delta_{ab}} \\ &= \varepsilon w_{III} \frac{\delta_{bt} - \delta_{at} \frac{\delta_{ba}}{\delta_{aa}}}{\delta_{bb} \left[1 - \frac{\delta_{ba}}{\delta_{aa}} \frac{\delta_{ab}}{\delta_{bb}} \right]}. \end{aligned}$$

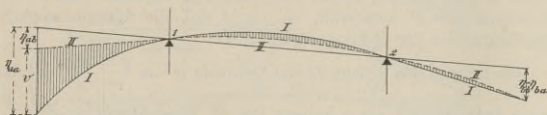


Fig. 351.

Bestimmt man nun mittels der durch die Punkte 1 und 2 der Seilpolygone *I* und *II* gelegten Geraden die Strecken η_{aa} , η_{ab} und $\eta_{ba} = \eta_{bb}$, Fig. 351, so findet man, da ja *I* und *II* in einem gewissen, hier gleichgültigen Maßstabe die Biegungslinien für die Belastungszustände $A = -1$ und $B = -1$ vorstellen,

$$\frac{\delta_{ba}}{\delta_{aa}} = \frac{\eta_{ba}}{\eta_{aa}} \quad \text{und} \quad \frac{\delta_{ba}}{\delta_{aa}} \cdot \frac{\delta_{ab}}{\delta_{bb}} = \frac{\eta_{ba}}{\eta_{aa}} \cdot \frac{\eta_{ab}}{\eta_{bb}} = \frac{\eta_{ab}}{\eta_{aa}}.$$

Da nun weiter

$$\delta_{bb} = \frac{w_{II} \cdot \eta_{bb}}{EF_0}$$

ist, wo w_{II} die Polweite des Seilpolygons bedeutet, so erhält man schließlich den einfachen Ausdruck

$$B_t = \varepsilon E F_c \frac{w_{III}}{w_{II}} \frac{\delta_{bt} \eta_{aa} - \delta_{at} \eta_{ba}}{\eta_{bb} (\eta_{aa} - \eta_{ab})},$$

und auf dieselbe Weise findet man

$$A_t = \varepsilon E F_c \frac{w_{III}}{w_I} \frac{\delta_{at} \eta_{bb} - \delta_{bt} \eta_{ab}}{\eta_{bb} (\eta_{aa} - \eta_{ab})}.$$

w_I, w_{II}, w_{III} sind Zahlen, welche mit dem Maßstabe gemessen werden, in welchem die entsprechenden Gewichte w', w'', w_t aufgetragen worden sind.

152. Untersuchung einer Seitenöffnung. Aus der Einflußlinie für A , welche zweckmäßig auf eine wagerechte Nulllinie ($J C_1'' C_2'' B''$ in

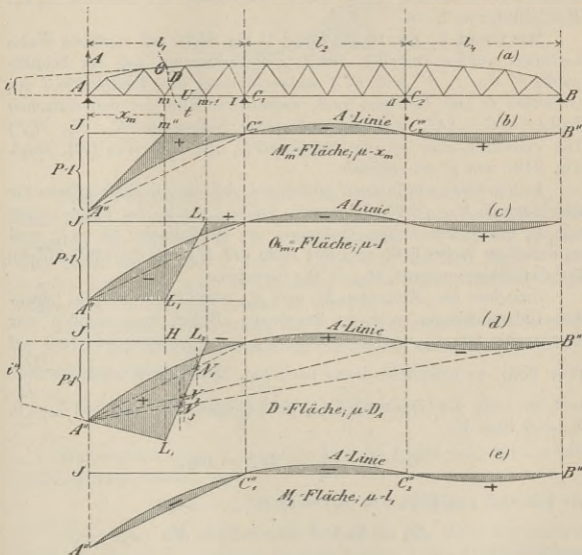


Fig. 352.

Fig. 352) bezogen wird, lassen sich nun alle zur Berechnung der ersten Öffnung erforderlichen Einflußflächen auf dieselbe Weise ableiten wie dies im § 12 für den Träger mit drei Stützen geschehen ist. Die

Figuren 352b, c, d sind ohne weiteres verständlich, wenn beachtet wird, daß der Einfluß der rechts vom Schnitte tt gelegenen Lasten auf das Moment M_m , die Querkraft Q_{m+1} und die Spannkraft D proportional dem Stützenwiderstande A ist, weil dann links von tt nur die äußere Kraft A angreift, und daß alle Einflußflächen in die einem einfachen Balken AC_1 entsprechenden übergehen müssen, sobald die gebrochene A -Linie durch die Gerade $A''C_1''$ (d. i. die A -Linie des einfachen Balkens AC_1) ersetzt wird.

Um die M_m -Fläche zu erhalten, bestimme man m'' senkrecht unter m und ziehe die Gerade $A''m''$. Multiplikator = x_m .

Die Q -Fläche für das $(m+1)^{te}$ Feld entsteht nach Ziehen der wagerechten Geraden $A''L_1$ durch Eintragung der Geraden L_2L_1 . Multiplikator = 1.

Der Punkt L_1 der D -Fläche ist in Fig. 352d auf vierfache Weise bestimmt worden, nämlich mittels der Bedingung, daß der Schnittpunkt i'' von L_1A'' und $B''J$ senkrecht unter dem Treffpunkte i der Gurtstäbe O und U liegen muß, sodann mit Hilfe der den einfachen Balken AC_1 , AC_2 , AB entsprechenden Nullpunkte N_1 , N_2 , N_3 .*) Das einfachste aber ist, die Strecke HL_1 mit Hilfe von $[D]$, vergl. Fig. 343f und g, zu ermitteln.

In Fig. 350e wurde noch mittels der A -Linie die Einflußfläche für das Moment M_{C_1} (Stützenmoment), welches wir in der Folge kürzer mit M_I bezeichnen wollen, bestimmt; der Multiplikator ist = l_1 ; und in derselben Weise ließe sich mit Hilfe der B -Linie die Einflußfläche für das Stützenmoment $M_{C_2} = M_{II}$ herleiten.

Zwischen den Momenten M_I und M_{II} besteht eine für die folgenden Untersuchungen wichtige Beziehung. Bringt man nämlich nur eine rechts von C_2 und im Abstände ξ von C_2 angreifende Last auf

(Fig. 353), so entspricht dieser nach Fig. 350c der Wert $\delta_{ma} = \frac{\xi \delta_{ba}}{l_3}$ und die erste der Gleichungen (1) geht (wegen $\delta_{ab} = \delta_{ba}$) mit $\delta_a = 0$, $\delta_{a'1} = 0$ über in:

$$0 = P\delta_{ba} \frac{\xi}{l_3} - A\delta_{aa} - B\delta_{ba};$$

sie läßt sich mit Hilfe der Gleichungen

$$Al_1 = M_I \text{ und } Bl_3 - P\xi = M_{II}$$

umformen in

$$\frac{M_{II}}{M_I} = - \frac{l_3}{l_1} \frac{\delta_{aa}}{\delta_{ba}}$$

und führt zu dem wichtigen Gesetze:

*) Die Hilfslinien wurden in Fig. 352 fortgelassen. Vergl. dafür Fig. 343a u. f.

Wird nur eine Außenöffnung belastet, so nimmt das Verhältnis $M_{II} : M_I$ einen von der Größe und Lage der Lasten unabhängigen Wert an.*)

Die Momentenlinie der Öffnung l_2 besteht also, falls nur die Öffnung l_3 belastet wird, aus einer durch einen festen Punkt L gehenden Geraden, und die Lage dieses Punktes kann auf die in Fig. 353 gezeigte Weise ermittelt werden. Man findet nämlich:

$$- M_{II} : M_I = e' : e = \cotg \beta : \cotg \alpha = \left(\frac{l_3}{\delta_{ba}} \right) : \left(\frac{l_1}{\delta_{aa}} \right).$$

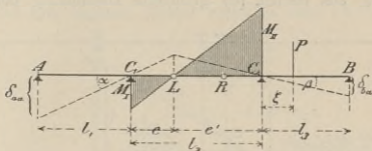


Fig. 353.

Ganz in derselben Weise läßt sich mit Hilfe von δ_{bb} und δ_{aa} der feste Punkt R bestimmen, durch welchen im Falle ausschließlicher Belastung der Öffnung l_1 die Momentengerade der Öffnung l_2 geht. Man nennt die Punkte L und R *Festpunkte*, die ihre Lage bestimmenden Lotrechten sind in Fig. 350c und e (strichpunktiert) eingetragen und mit (L) , (R) bezeichnet worden.

In der Folge werden wir für die Verhältnisse zwischen den Strecken, in welche die Öffnung l_2 durch die Festpunkte zerlegt wird, die Bezeichnungen einführen:

$$\frac{e'}{e} = \frac{\overline{LC_2}}{\overline{LC_1}} = \kappa; \quad \frac{\overline{RC_1}}{\overline{RC_2}} = \kappa'.$$

Wir erhalten dann, je nachdem nur die rechte oder nur die linke Außenöffnung belastet wird,

$$M_{II} = -\kappa M_I \text{ bzw. } M_I = -\kappa' M_{II}.$$

Wenn man die A -Fläche nach dem in Fig. 350f angegebenen Verfahren zeichnet, so stellen die Seilpolygone I und II die Biegungs-

*) Kennt man also den zur Öffnung l_3 gehörigen Zweig der M_I -Linie, so kann man sofort den entsprechenden Zweig der M_{II} -Linie zeichnen, oder umgekehrt. Hat man innerhalb der Öffnung l_3 einen Belastungszug so aufgestellt, daß M_I (absolut genommen) möglichst groß ist, so entspricht derselben Zugstellung auch ein Größtwert von M_{II} .

linien für die Belastungszustände $A = -1$ und $B = -1$ in verschiedenen Maßstäben vor. Dies macht aber nichts aus, da es bei der Bestimmung der Festpunkte nur auf die Verhältnisse $\delta_{aa} : \delta_{ba}$ und $\delta_{bb} : \delta_{ab}$ ankommt.

153. Untersuchung der Mittelöffnung. a. Querkräfte. Für das m^{te} Feld ergibt sich nach Band I, Seite 162, Gleich. (2)

$$(6) \quad Q_m = Q_{om} = \frac{M_{II} - M_I}{l_2},$$

wo Q_{om} die Querkraft für das m^{te} Feld eines einfachen Balkens $I-II$ bedeutet. Die aus Gleich. (6) gefolgerte Darstellung der Q_m -Fläche

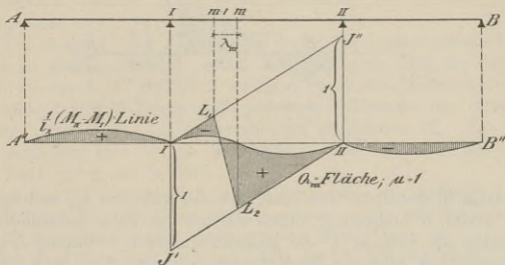


Fig. 354.

zeigt Fig. 354; sie erfordert nach Auftragung der durch die Einflußlinien für M_I und M_{II} bestimmten $\frac{1}{l_2}(M_{II} - M_I)$ -Linie nur das Ziehen der parallelen Geraden IJ'' und IIJ' und der Geraden L_1L_2 ; die letztere ändert ihre Lage von Feld zu Feld, die anderen Linien können für die ganze Mittelöffnung benutzt werden.

b. Momente. Zwischen den Querkräften und den Momenten bestehen Beziehungen von der Form

$$(7) \quad Q_m = \frac{M_m - M_{m-1}}{\lambda_m}.$$

Bei gleichlangen Feldern kann man also mittels der Gleichung

$$\frac{M_m}{\lambda} = \frac{M_{m-1}}{\lambda} + Q_m$$

die $M : \lambda$ -Flächen schrittweise aus den Q -Flächen herleiten, indem man von der bereits durch die $M_I : l_1$ -Fläche bestimmten $M_I : \lambda$ -Fläche ausgeht.

Zu einer anderen Darstellung der Einflußlinien für die Momente gelangt man, wenn man den Einfluß einer Einzellast P auf sämtliche Querschnitte verfolgt. Fig. 355a zeigt die Momentenfläche für den im Punkte C mit P belasteten Balken; sie ist bestimmt durch die Stützmente $M_I = \eta_I$ und $M_{II} = \eta_{II}$ und durch das Moment $\overline{CS} = P \frac{\xi \xi'}{l_2}$, welches P im Querschnitte C eines einfachen Balkens III erzeugen würde. Die Punkte S liegen in einer Parabel, deren Pfeilhöhe für $P = 1$ gleich $\frac{l_2}{4}$ ist. Es empfiehlt sich, den Wert $1 \cdot \frac{l_2}{4}$ als Moment aufzufassen und den Maßstab hierfür nicht zu klein zu wählen. Der

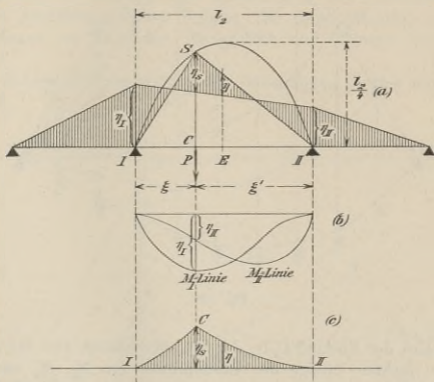


Fig. 355.

Einfluß von $P = 1$ auf das Moment für irgendeinen Querschnitt E ist $M = P\eta$. Zeichnet man also die Momentenflächen für alle Lagen von $P = 1$, so erhält man sämtliche Ordinaten der Einflußlinien für die Momente. Wir wollen aber die in Fig. 355 dargestellte Konstruktion nur zur Ermittlung der Ordinate η_s des Punktes C benutzen, den wir in der Folge kurz die *Spitze* nennen wollen. Die Zweige IC und CII (Fig. 355c) lassen sich dann sehr schnell mit Hilfe der folgenden einfachen Betrachtung zeichnen.

In Fig. 356 haben wir den Ort der Spitzen C und die Zweige CII einer Mittelöffnung mit 10 gleich langen Feldern dargestellt. Für den mit der Stütze I zusammenfallenden Querschnitt ist dieser Zweig die M_I -Linie. Liegt nun die Last $P=1$ im Knotenpunkte 4, so ist für die ersten vier Felder:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4,$$

und daraus folgt, wegen $Q_m = \frac{M_m - M_{m-1}}{\lambda}$, bei konstantem λ ,

$$(8) \quad M_1 - M_I = M_2 - M_1 = M_3 - M_2 = M_4 - M_3.$$

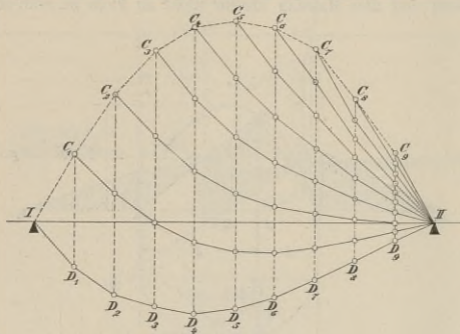


Fig. 356.

Es wird also der Abstand C_4D_4 des Orts der Spitzen von der M_I -Linie durch die rechten Zweige der Einflußlinien für M_3 , M_2 und M_1 in vier gleiche Teile zerlegt und ganz allgemein der Abstand C_mD_m in m gleiche Teile.

Tritt die Last auf die rechte Seitenöffnung über, so ist die Querkraft Q für sämtliche Felder der Mittelöffnung gleich groß. Besitzt also die rechte Seitenöffnung n gleich weite Felder, so hat man zur Bestimmung der zu l_3 gehörigen Zweige der Einflußlinien für $M_1, M_2, M_3 \dots M_{n-1}$ nur nötig, die von den Einflußlinien für M_I und M_{II} auf den Senkrechten durch die Knotenpunkte abgeschnittenen Strecken in n gleich lange Teile zu zerlegen. In Fig. 357 ist dies für den Fall dargestellt worden, daß die Öffnung $I-II$ 6 gleich lange Felder besitzt.

Sind die Feldweiten nicht gleich lang, so findet man an Stelle von Gleich. (8) die Beziehung

(9) $(M_1 - M_I) : (M_2 - M_1) : (M_3 - M_2) : (M_4 - M_3) = \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$;
 man muß also die Strecke $D_4 C_4$ in Teile zerlegen, die, von unten
 nach oben gezählt, sich zueinander verhalten wie $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$.

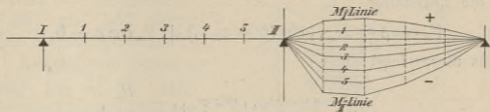


Fig. 357.

Fig. 358, die sich auf eine Mittelöffnung mit 6 Feldern bezieht, zeigt die Ausführung dieser Teilung. Es empfiehlt sich, mindestens zwei Scharen von Parallelen für größere und kleinere Ordinaten zu benutzen.

In derselben Weise werden die linksseitigen Zweige der M -Linie bestimmt.

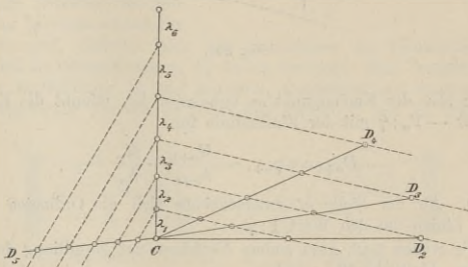


Fig. 358.

Kennt man aber die Einflußlinien für die Momente M , so bereitet die Darstellung der Einflußlinien für sämtliche Stabkräfte nicht die geringsten Schwierigkeiten. Wir verweisen besonders auf das ausführliche Zahlenbeispiel im § 11*) und machen nur noch auf eine Vereinfachung aufmerksam, die bei dem in der Regel vorliegenden Falle einer

*) Im vorliegenden Falle sind natürlich die Momente M_m für zwei senkrecht übereinander liegende Punkte m gleich groß; $M_m^o = M_m^n$.

geradlinigen oberen oder unteren Gurtung zu einer erheblichen Zeitersparnis führt.

Ist die eine Gurtung, beispielsweise die obere Gurtung, geradlinig und β ihr Neigungswinkel, Fig. 359, so besteht zwischen V_m und D_{m+1} die Beziehung

$$V_m \cos \beta + D_{m+1} \cos (\beta + \varphi_{m+1}) + P_m \cos \beta = 0,$$

und aus dieser folgt

$$\frac{V_m}{\gamma} = -D_{m+1} \cos \varphi_{m+1} - \frac{P_m}{\gamma},$$

$$\text{wo } \gamma = \frac{\cos (\beta + \varphi_{m+1})}{\cos \beta \cos \varphi_{m+1}}.$$

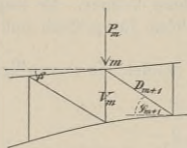


Fig. 359.

Solange also der Knotenpunkt m unbelastet ist, stimmt die Einflußlinie für $-V_m : \gamma$ mit der Einflußlinie für

$$D_{m+1} \cos \varphi_{m+1} = \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}} - \frac{M_m}{h_m}$$

überein. An der Stelle m unterscheiden sich die Ordinaten dieser beiden Linien um den Wert $1 : \gamma$.

Wir wollen noch zwei andere Verfahren zur Ermittlung der Einflußlinien der Stabkräfte angeben.

Das erste setzt gleiche Feldweiten voraus und beruht auf Verwertung des in Band I, § 33, mitgeteilten *Zimmermannschen* Verfahrens. Es ist in Fig. 360 für einen Teil eines Ständerfachwerks mit oberliegender Fahrbahn dargestellt worden. Mit Hilfe der Ordinaten η' und η'' der $M_m : \lambda$ -Linie und $M_{m-1} : \lambda$ -Linie sind die irgend-einer Lastlage P entsprechenden Ordinaten η_D und η_V der D_m -Linie und V_m -Linie bestimmt worden.

Ein anderes Verfahren bringt die Spannkkräfte S in den Stäben auf die Form

$$S = S_0 + S_I M_I + S_{II} M_{II},$$

wo S_0 die Spannkraft für $M_I = 0$ und $M_{II} = 0$ ist, d. h. für den Fall, daß die Mittelöffnung durch Beseitigung der den Mittelstützen C_1 und C_2 gegenüberliegenden Gurtstäbe in einen einfachen Balken verwandelt wird, während S_I und S_{II} die Spannkräfte für die in den Figuren 361 und 362 dargestellten Belastungszustände $M_I = 1$ und $M_{II} = 1$ bedeuten.

154. Die bei der Untersuchung von Eisenbahnbrücken zu leistenden zeichnerischen Arbeiten werden erheblich vereinfacht, wenn man die im I. Bande auf Seite 168 unter Nr. 99 gegebenen und begründeten Ratschläge befolgt. Danach empfiehlt es sich, bei der Untersuchung der in den Stäben der Mittelöffnung durch möglichst ungünstige Belastung der Mittelöffnung hervorgerufenen Beanspruchungen, einzelne Teile von Fahrzeugen zu vernachlässigen, welche auf die Seitenöffnungen zu stehen kommen. Man braucht dann von den Einflußlinien für die Momente, Querkräfte und Stabkräfte S der Mittelöffnung nur die zwischen den Stützen I und II liegenden

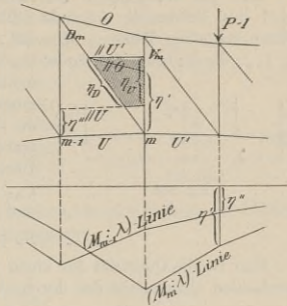


Fig. 360.

Beanspruchungen, einzelne Teile von Fahrzeugen zu vernachlässigen, welche auf die Seitenöffnungen zu stehen kommen. Man braucht dann von den Einflußlinien für die Momente, Querkräfte und Stabkräfte S der Mittelöffnung nur die zwischen den Stützen I und II liegenden

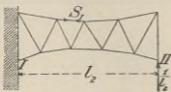


Fig. 361.

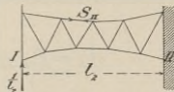


Fig. 362.

Zweige zu zeichnen, und findet die ungünstigste Wirkung der Belastung der Seitenöffnung auf die in Rede stehenden M , Q und S sehr schnell wie folgt. Man stellt über der rechten Seitenöffnung den Eisenbahnzug so auf, daß ein möglichst großes Moment M_{II} entsteht; vernachlässigt hierbei den etwa über der Mittelöffnung stehenden Teil des äußersten Fahrzeugs und zeichnet mittels des Festpunktes L die in Fig. 353 schraffierte Momentenfläche; diese gibt den Einfluß der behandelten Belastung auf das Moment für jeden Querschnitt der Mittelöffnung an.

Die für das Trägerstück $C_1 C_2$ konstante Querkraft ist $Q = \frac{M_{II} - M_I}{l_2}$

und der Einfluß auf die Stabkräfte S der Mittelöffnung ist $S = S_I M_I + S_{II} M_{II}$. Und ganz in derselben Weise wird der Einfluß der Belastung der linken Seitenöffnung untersucht.

155. Die Widerstände der Mittelstützen. Es seien $r-1$, r , $r+1$ drei aufeinander folgende Stützpunkte eines auf beliebig vielen Stützen ruhenden Balkens, M_{r-1} , M_r , M_{r+1} die Stützenmomente, C_{r-1} , C_r , C_{r+1} die Stützenwiderstände. C_{or} bedeute den Wert, welchen C_r annehmen würde, wenn sämtliche Stützenmomente gleich Null wären, wenn also die Trägerstücke l_r und l_{r+1} in einfache Balken verwandelt würden. Üben die einfachen Balken l_r und l_{r+1} auf die Stütze r die Drücke B_r und A_{r+1} aus, so ist

$$C_{or} = B_r + A_{r+1}.$$

Nun ist die Querkraft für einen unmittelbar rechts oder links von r gedachten Querschnitt des durchgehenden Balkens:

$$Q_2 = + A_{r+1} + \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}} \quad \text{bzw.} \quad Q_1 = - B_r + \frac{M_r - M_{r-1}}{l_r},$$

und man erhält daher wegen $Q_2 = Q_1 + C_r$, den allgemeinen Ausdruck:

$$C_r = C_{or} + \frac{M_{r-1} - M_r}{l_r} + \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}}.$$

Hiernach ergibt sich für den Stützenwiderstand C_1 des Trägers mit drei Öffnungen (da das Moment M für die Endstütze gleich 0 ist) der Wert

$$C_1 = C_{o1} - \frac{M_I}{l_1} + \frac{M_{II} - M_I}{l_2},$$

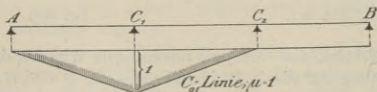


Fig. 364.

und es ist deshalb die C_1 -Linie bestimmt durch die in Fig. 364 dargestellte C_{o1} -Linie, und die Einflußlinien für M_I und M_{II} . In gleicher Weise wird auch die C_2 -Linie ermittelt.

156. Die Einflußlinie für die Vertikale über der Mittelstütze erhält man mit Hilfe einer Bedingung für das Gleichgewicht der am

oberen oder unteren Knotenpunkte (Fig. 365) angreifenden Kräfte. Ist die obere Gurtung geradlinig, so zerlege man die in n angreifenden Kräfte rechtwinklig zu O und nach der Richtung von O und setze die Summe der rechtwinklig zu O wirkenden Kräfte gleich Null. Man erhält dann V_n ausgedrückt durch D_n , D_1 und P_n . Sonst betrachte man den unteren Knotenpunkt, bilde die in der Richtung der einen unteren Gurtung und rechtwinklig hierzu wirkenden Seitenkräfte und setze wieder die Summe der letzteren gleich Null. Man erhält dann V ausgedrückt durch U_1 und C oder U_n und C .

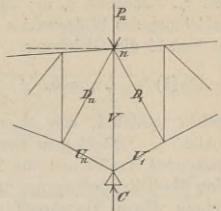


Fig. 365.

Andere Behandlungsweisen des durchgehenden Balkens auf 4 Stützen findet man in den folgenden Paragraphen.

§ 14.

Durchgehender Balken mit beliebig vielen Stützen.

157. Die Elastizitätsgleichungen. Ein auf $(n + 1)$ Stützpunkten ruhender, nirgends durch ein Gelenk unterbrochener Balken ist $(n - 1)$ -fach statisch unbestimmt, weil es der Beseitigung von $(n - 1)$ Stützen bedarf, um diesen Träger in einen statisch bestimmten zu verwandeln. Die Untersuchung dieses Balkens soll zunächst ganz allgemein durchgeführt werden, ohne Rücksicht darauf, ob ein Fachwerk oder ein vollwandiger Träger vorliegt.

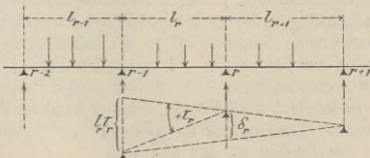


Fig. 366.

Drei beliebige aufeinander folgende Stützpunkte mögen die Ordnungsbuchstaben $r - 1$, r , $r + 1$ tragen, ihre wagerechten Abstände seien l_r , l_{r+1} , Fig. 366. Die Geraden $r - (r - 1)$ und $r - (r + 1)$, welche den Punkt r mit den benachbarten Stützpunkten verbinden, nennen wir

das r^{te} Geradenpaar, und den Winkel, um welchen sie sich infolge des Nachgebens der Widerlager gegeneinander drehen, bezeichnen wir mit τ_r . Bedeutet δ_r die nach oben positiv genommene lotrechte Verschiebung des Stützpunktes r gegen die Punkte $(r-1)$ und $(r+1)$, so besteht die Gleichung

$$(1) \quad l_r \tau_r = \delta_r \frac{l_{r+1} + l_r}{l_{r+1}}, \text{ d. h. } \tau_r = \delta_r \frac{l_{r+1} + l_r}{l_r l_{r+1}},$$

welche gestattet, aus einem gegebenen δ_r auf die Drehung τ_r zu schließen. Drückt man nun andererseits τ_r durch die auf den Balken wirkenden Kräfte und die Temperaturänderungen aus, so erhält man eine Elastizitätsbedingung, und es leuchtet ein, daß sich durch Wiederholung dieses Verfahrens ebensoviele Gleichungen aufstellen lassen, als Mittelstützen vorhanden sind — im ganzen also $(n-1)$ Bedingungen.

Als statisch nicht bestimmbar Größen sollen die Stützenmomente $M_1, M_2, \dots, M_{r-1}, M_r, M_{r+1}, \dots, M_{n-1}$ eingeführt werden, und es kommt daher zunächst darauf an, die Biegelinien für die Zustände

$$M_1 = 1, M_2 = 1, \dots, M_r = 1, M_{n-1} = 1$$

aufzutragen, sowie die gegenseitigen Drehungen der den Mittelstützen 1, 2, \dots , $r-1$, r , $r+1$, \dots , $n-1$ entsprechenden Geradenpaare zu ermitteln. Hierbei bezeichnen wir allgemein mit τ_{pq} die gegenseitige Drehung des p^{ten} Geradenpaares infolge $M_q = 1$ und erinnern an die in der Einleitung bewiesene Beziehung

$$(2) \quad \tau_{pq} = \tau_{qp}.$$

Fig. 367b zeigt die Momentenfläche für den Zustand $M_r = +1$, erzeugt durch die aus vier Kräften $\left(\frac{1}{l_r}, \frac{1}{l_{r+1}}\right)$ bestehende Belastungseinheit des r^{ten} Geradenpaares.*) Fig. 367c sei die zugehörige Biegelinie, d. i. das Seilpolygon der in bekannter Weise aus dem Momentendreiecke Δ_r berechneten Gewichte w^{**}); die äußersten Seilseiten sind als Biegelinien der links von $r-1$ und rechts von $r+1$ gelegenen, bei Eintritt des Zustandes $M_r = +1$ spannungslosen Balkenstücke aufzufassen, und es leuchtet zunächst ein, daß der fragliche Belastungsfall nur auf die gegenseitige Drehung des $(r-1)^{\text{ten}}$, r^{ten} und $(r+1)^{\text{ten}}$ Geradenpaares von Einfluß ist, daß sich also

$$(3) \quad \begin{cases} \tau_{(r-2)r} = 0, & \tau_{(r-3)r} = 0, & \dots \\ \tau_{(r+2)r} = 0, & \tau_{(r+3)r} = 0, & \dots \end{cases}$$

*) Vergl. Seite 31—33.

**) Für das Fachwerk erfolgt die Berechnung der w nach § 12, Nr. 142. Für den vollwandigen Balken, für den obige Gleichungen ebenfalls gelten, wird die Ermittlung der Gewichte w in der zweiten Abteilung dieses Bandes gezeigt werden.

ergibt. Drückt man demnach die Drehung τ_r durch die Lasten P , die statisch nicht bestimmbar sind M und die Temperaturände-

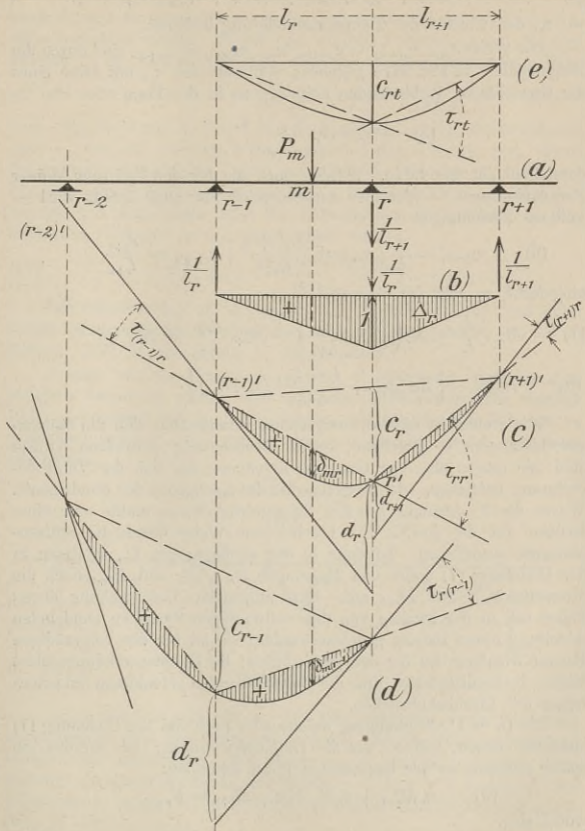


Fig. 367.

rungen aus, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (3) die der Stütze r entsprechende Elastizitätsbedingung:

$$(4) \quad \tau_r = \sum P_m \delta_{mr} + \tau_{r(r-1)} M_{r-1} + \tau_{rr} M_r + \tau_{r(r+1)} M_{r+1} + \tau_{rt},$$

wo τ_{rt} den Einfluß der Temperaturänderung bedeutet.

Die Werte δ_{mr} , $\tau_{r(r-1)} = \tau_{(r-1)r}$, τ_{rr} , $\tau_{r(r+1)} = \tau_{(r+1)r}$ sind durch die Biegelinie in Fig. 367c gegeben; während sich τ_{rt} mit Hilfe eines die Gewichte w_t verbindenden Seilpolygons in der Form

$$(5) \quad \tau_{rt} = c_{rt} \frac{l_{r+1} + l_r}{l_{r+1} l_r}$$

darstellen läßt, Fig. 367c. Werden noch die für den Fall sehr kleiner Formänderungen — der hier ausschließlich ins Auge gefaßt wird — gültigen Beziehungen

$$(6) \quad \tau_{r(r-1)} = \frac{d_r}{l_r}; \quad \tau_{rr} = c_r \frac{l_{r+1} + l_r}{l_{r+1} l_r}; \quad \tau_{r(r+1)} = \frac{d_{r+1}}{l_{r+1}}$$

eingeführt, so geht (4) über in:

$$(7) \quad M_{r-1} \frac{d_r}{l_r} + M_r \left(\frac{c_r}{l_r} + \frac{c_r}{l_{r+1}} \right) + M_{r+1} \frac{d_{r+1}}{l_{r+1}} = N_r, \text{ wo}$$

$$(8) \quad N_r = - \left\{ \sum P_m \delta_{mr} + \frac{l_r + l_{r+1}}{l_r l_{r+1}} (\delta_r + c_{rt}) \right\}.$$

Wir wollen in diesem Paragraphen voraussetzen, daß die Stützenverschiebungen δ_r gegebene, durch Beobachtung gefundene Größen sind; sie mögen also von Ursachen herrühren, die sich der Vorausberechnung entziehen, wie beispielsweise das Nachgeben der Fundamente. Wären die δ_r abhängig von den Stützendrücken, so müßte man diese Drücke auf die in Nr. 155 beschriebene Weise durch die Stützenmomente ausdrücken. Ist dann δ_r nur abhängig von C_r , so treten in der Gleichung (7) außer den Momenten M_{r-1} , M_r und M_{r+1} noch die Momente M_{r-2} und M_{r+2} auf. Eine allgemeine Untersuchung dieses Falles soll in der zweiten von den vollwandigen Systemen handelnden Abteilung dieses Bandes gegeben werden; sie ist für den vollwandigen Balken wichtiger als für den gegliederten; ihr Hauptanwendungsgebiet bilden die Schiffbrücken und die durchlaufenden gelenklosen Schienenträger der Eisenbahnbrücken.

Die $(n - 1)$ Gleichungen, welche sich nach Art der Gleichung (7) aufstellen lassen, nennen wir die *Grundgleichungen*; wir werden sie später meistens in der bequemerer Form schreiben:

$$(9) \quad \alpha_r M_{r-1} + \beta_r M_r + \alpha_{r+1} M_{r+1} = N_r,$$

wobei also:

$$(10) \quad \alpha_r = \tau_{(r-1)r} = \tau_{r(r-1)}; \quad \beta_r = \tau_{rr}; \quad \alpha_{r+1} = \tau_{(r+1)r} = \tau_{r(r+1)}.$$

Ehe wir uns mit der Auflösung dieser Gleichungen beschäftigen, machen wir darauf aufmerksam, daß bis jetzt stillschweigend vorausgesetzt worden ist, es seien die Biegelinien mit der Polweite 1 gezeichnet und die Gewichte w aus den Längenänderungen der Fachwerkstäbe berechnet worden. Wählt man nun die Polweite = w_P , gibt dem Dreieck \triangle_r die beliebig gewählte, aber für alle Stützpunkte feste Höhe y_c , und setzt man z. B. $w = \frac{ys}{r^2} \frac{F_c}{F}$ statt $w = \frac{ys}{r^2 EF}$ (Seite 358), so muß man die Werte d , c und δ_{mr} noch mit $w_P:EF_c y_c$ multiplizieren, oder — was auf dasselbe hinauskommt — das Glied $\delta_r + c_{r,i}$ durch jenen Ausdruck dividieren. Sind außerdem die Gewichte w_i für $\varepsilon = 1$ berechnet (Seite 370) worden, so muß c_i in (8) noch mit ε multipliziert werden und man erhält, wenn die Polweite des die Gewichte w_i verbindenden Seilzuges = w_{iP} angenommen wird:

$$(11) \quad N_r = - \left\{ \sum P_m \delta_{mr} + \frac{EF_c(l_r + l_{r+1})y_c}{w_P l_r l_{r+1}} (\delta_r + \varepsilon c_{r,i} w_{iP}) \right\}.$$

Die Strecken δ_{mr} , y_c , δ_r , $c_{r,i}$, l_r , l_{r+1} werden mit ein und demselben Längenmaßstabe gemessen, w_P und w_{iP} sind (ebenso wie die w) Zahlen. EF_c ist eine Kraft, N_r ein Moment.

Solange nur der Einfluß der Lasten P untersucht wird, hat man lediglich darauf zu achten, daß sämtliche Momentendreiecke dieselbe Höhe y_c erhalten und sämtliche Seilzüge mit der gleichen Polweite w_P gezeichnet werden; wie groß y_c und w_P gewählt werden, ist dann gleichgültig.

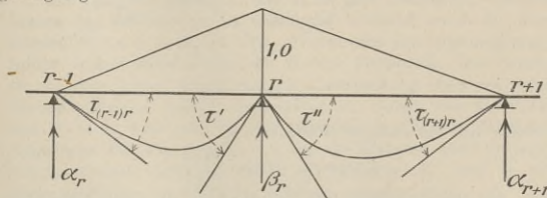


Fig. 368.

Am zweckmäßigsten ist es, die Biegelinien durch Rechnung zu bestimmen und ihre Ordinaten nach Fig. 368 von einer wagerechten Geraden aus aufzutragen. Die Werte α_r , β_r und α_{r+1} werden dann gedeutet als die Widerstände der Stützen $r-1$, r , $r+1$ des mit den Gewichten w belasteten, bei r durch ein Gelenk unterbrochenen Balkens $(r-1) - r - (r+1)$.

*) Die Längenänderungen der Füllungsstäbe sind hierbei vernachlässigt.

158. Einfluß der Belastung einer einzelnen Öffnung. Die Festpunkte L und R . Wir verfolgen jetzt nur den Einfluß der Lasten P , nehmen also $\delta_r = 0$ und $c_{r,t} = 0$ an; auch setzen wir zunächst voraus, daß nur außerhalb der Öffnungen l_r, l_{r+1} Kräfte P auftreten. Die Momentenlinien der Balkenteile l_r, l_{r+1} bestehen dann aus zwei durch die Stützmomente M_{r-1}, M_r, M_{r+1} , bestimmten Geraden mit den Nullpunkten L_r, L_{r+1} , und zwischen jenen drei Momenten gelten die Gleichungen:

$$(12) \quad \alpha_r M_{r-1} + \beta_r M_r + \alpha_{r+1} M_{r+1} = 0$$

$$(13) \quad M_{r-1} = -M_r \frac{a_r}{b_r}; \quad M_{r+1} = -M_r \frac{a_{r+1}}{b_{r+1}} \quad (\text{s. Fig. 369}),$$

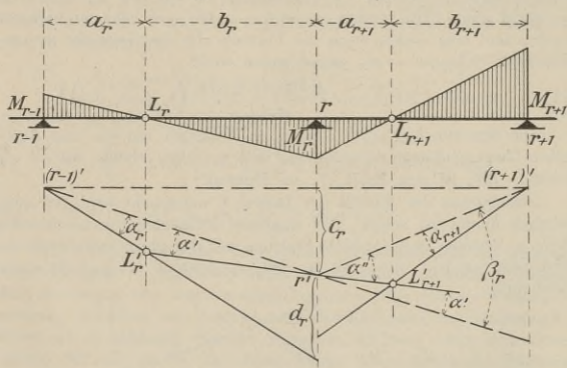


Fig. 369.

aus denen sich die einfache Beziehung

$$\beta_r = \alpha_r \frac{a_r}{b_r} + \alpha_{r+1} \frac{b_{r+1}}{a_{r+1}}$$

ergibt. Mit Hilfe derselben läßt sich die Lage des einen Nullpunktes leicht bestimmen, sobald die des anderen gegeben ist. Bringt man nämlich die Senkrechten durch L_r und L_{r+1} mit den äußersten Seiten der für den Belastungsfall $M_r = 1$ gezeichneten Biegelinie in L_r' und L_{r+1}' zum Schnitt, so findet man:

$$\angle L_r' r' (r-1)' = \alpha' = \alpha_r \frac{a_r}{b_r} *); \quad \angle L_{r+1}' r' (r+1)' = \alpha'' = \alpha_{r+1} \frac{b_{r+1}}{a_{r+1}}$$

*) Man denke daran, daß es sich hier um sehr kleine Formänderungen handelt. In Fig. 369 wurden nur die Punkte $(r-1)'$, r' , $(r+1)'$ und die äußersten Seiten der fraglichen Biegelinie gezeichnet. Vergl. auch Fig. 367c.

also:

$$\beta_r = \alpha' + \alpha'',$$

und hieraus folgt, daß die drei Punkte L_r , r' , L'_{r+1} in einer Geraden liegen.*)

Wir setzen nunmehr voraus, daß nur die r^{te} Öffnung belastet wird und die Stützenmomente M_{r-1} und M_r auf irgendeine Weise gefunden sind. Innerhalb einer unbelasteten Öffnung besteht die Momentenlinie aus einer Geraden, Fig. 370. Die Nullpunkte dieser Geraden seien links von der belasteten Öffnung: L_1, L_2, L_3, \dots , rechts davon: $R_n, R_{n-1}, R_{n-2}, \dots$. Der Punkt L_1 fällt mit dem Stützpunkte 0 zusammen; seine Lage ist also bestimmt, und damit sind auch schrittweise mittels des soeben bewiesenen Gesetzes die Punkte L_2, L_3, \dots gegeben. Und ganz auf dieselbe Weise kann man, von R_n ausgehend, der Reihe nach R_{n-1}, R_{n-2}, \dots finden.

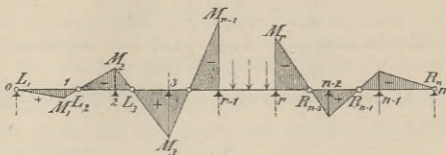


Fig. 370.

Die Lage der Punkte L und R ist ganz unabhängig von der Belastung des Balkens; sie ist vollständig bestimmt durch die den Zuständen $M_1 = +1$, $M_2 = +1, \dots$ entsprechenden Biegelinien. Es führen deshalb diese Punkte den Namen *Festpunkte*; ihre Ermittlung ist die erste Arbeit, welche bei der Untersuchung eines auf mehreren Stützen ruhenden Balkens auszuführen ist. Kennt man die Punkte L und R , so ist man nach Fig. 370 imstande, den Einfluß der Belastung irgendeiner Öffnung $(r-1) - r$ auf die Momente aller übrigen Öffnungen schnell anzugeben, sobald die Momente M_{r-1} und M_r für die Endquerschnitte der belasteten Öffnung gefunden sind.

Bevor wir nun die Ermittlung dieser beiden Momente vornehmen, zeigen wir noch die Bestimmung der Festpunkte L und R auf rechnerischem Wege und führen die Bezeichnungen ein:

$$(14) \quad x_r = \frac{b_r}{a_r}, \quad x'_r = \frac{b'_r}{a'_r},$$

wo b'_r und a'_r die Strecken sind, in welche der Festpunkt R_r die Öffnung l_r zerlegt, Fig. 371.

*) Ein Sonderfall dieser Beziehung wurde bereits im § 13 gefunden.

Für die links von der belasteten Öffnung liegenden Öffnungen gelten die Gleichungen

$$(15) \quad \begin{cases} \beta_1 M_1 + \alpha_2 M_2 = 0 \\ \alpha_2 M_1 + \beta_2 M_2 + \alpha_3 M_3 = 0 \\ \alpha_3 M_2 + \beta_3 M_3 + \alpha_4 M_4 = 0 \\ \dots \\ \alpha_k M_{k-1} + \beta_k M_k + \alpha_{k+1} M_{k+1} = 0 \\ \dots \end{cases}$$

sie lassen sich auf die Form bringen

$$\alpha_k \frac{M_{k-1}}{M_k} + \beta_k + \alpha_{k+1} \frac{M_{k+1}}{M_k} = 0.$$

Nun ist aber

$$\frac{M_{k+1}}{M_k} = -\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}} = -x_{k+1}$$

$$\frac{M_{k-1}}{M_k} = -\frac{a_k}{b_k} = -\frac{1}{x_k},$$

und es besteht daher zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zahlen x die Beziehung

$$(16) \quad x_{k+1} = \frac{\beta_k - \frac{\alpha_k}{x_k}}{\alpha_{k+1}}.$$

Da nun die erste Gleichung die Zahl

$$(17) \quad x_2 = \frac{\beta_1}{\alpha_2}$$

liefert, so ist man imstande, alle Werte x schrittweise zu berechnen und die Strecken

$$(18) \quad a_k = \frac{l_k}{1 + x_k},$$

welche die Festpunkte L bestimmen, anzugeben.

Ganz ebenso geschieht die Bestimmung der Festpunkte R . Man beginnt am rechten Ende des Balkens und schreitet nach links vor, berechnet also x'_k aus x'_{k-1} mittels der Formel

$$(19) \quad x'_k = \frac{\beta_k - \frac{\alpha_{k+1}}{x'_{k+1}}}{\alpha_k}.$$

Bezeichnet n die Ordnungsziffer der letzten Stütze, so ist der erste Wert:

$$(20) \quad x'_{n-1} = \frac{\beta_{n-1}}{\alpha_{n-1}}.$$

Schließlich berechnet man die Strecken a' mittels der Formel

$$(21) \quad a'_k = \frac{l_k}{1 + \varkappa'_k}.$$

Die Aufgabe, die Momente M_{r-1} und M_r für die Endquerschnitte der belasteten Öffnung l_r zu ermitteln, wird nun wie folgt gelöst.

Wir stellen uns zunächst vor, es sei l_r unbelastet, es sei also die Momentenlinie dieser Öffnung eine durch den Punkt L_r gehende Gerade. Wir erhalten dann

$$M_r = -\varkappa_r M_{r+1}$$

und gelangen durch die Verbindung dieser Gleichung mit der Bedingung

$$\alpha_{r-1} M_{r-2} + \beta_{r-1} M_{r-1} + \alpha_r M_r = 0$$

zu der Gleichung

$$(22) \quad \alpha_{r-1} M_{r-2} + \beta_{r-1} M_{r-1} = \varkappa_r \alpha_r M_{r-1},$$

und diese Gleichung bleibt auch bestehen, wenn zwischen $r-1$ und r Lasten hinzutreten, weil hierdurch das Verhältnis zwischen den Momenten M_{r-2} und M_{r-1} nicht beeinflusst wird. Die Gültigkeit der Gleichung (22) ist nur an die Bedingung gebunden, daß der Träger zwischen 0 und $r-1$ unbelastet bleibt.

Ganz ebenso läßt sich zeigen, daß zwischen M_r und M_{r+1} die Beziehung besteht:

$$(23) \quad \alpha_{r+1} M_{r+1} + \beta_r M_r = \varkappa'_r \alpha_r M_r,$$

sobald rechts von r keine Lasten auf den Balken wirken. Ist also nur die Öffnung l_r belastet, so gilt sowohl (22) als (23) und die beiden Elastizitätsbedingungen:

$$\alpha_{r-1} M_{r-2} + \beta_{r-1} M_{r-1} + \alpha_r M_r = N_{r-1} = -\sum P_m \delta_m^{(r-1)}$$

$$\alpha_r M_{r-1} + \beta_r M_r + \alpha_{r+1} M_{r+1} = N_r = -\sum P_m \delta_{mr}$$

gehen über in

$$(24) \quad \begin{cases} \varkappa_r M_{r-1} + M_r = \frac{N_{r-1}}{\alpha_r} = -\sum P_m \frac{\delta_m^{(r-1)}}{\alpha_r} \\ M_{r-1} + \varkappa'_r M_r = \frac{N_r}{\alpha_r} = -\sum P_m \frac{\delta_{mr}}{\alpha_r}; \end{cases}$$

sie führen zu einer sehr einfachen Darstellung der Momente M_{r-1} und M_r .

Trägt man nämlich M_{r-1} und M_r bei $(r-1)$ und r als Ordinaten auf, Figur 371, und verbindet die Endpunkte derselben durch eine Gerade, so sind die Ordinaten dieser Geraden an den Stellen L_r und R_r :

$$Y = M_{r-1} \frac{b_r}{l_r} + M_r \frac{a_r}{l_r} = \frac{a_r}{l_r} (M_{r-1} \varkappa_r + M_r)$$

$$Y' = \frac{a'_r}{l_r} (M_r \varkappa'_r + M_{r-1}).$$

Beachtet man nun die Gleichungen (24), so findet man

$$(25) \quad \begin{cases} Y = -\frac{a_r}{\alpha_r l_r} \sum P_m \delta_{m(r-1)} \\ Y' = -\frac{a'_r}{\alpha_r l_r} \sum P_m \delta_{mr}, \end{cases}$$

und diese Werte lassen sich leicht zeichnerisch bestimmen.

Fig. 371, in welcher $d_r = \alpha_r l_r$ ist, zeigt die Ermittlung von Y und Y' für den Fall, daß über der Öffnung l_r nur eine Einzellast P liegt. Damit ist aber die Aufgabe gelöst, die Zweige $(r-1) - r$ der Einflußlinien für M_{r-1} und M_r zu zeichnen.

Will man den Einfluß der Last $P=1$ nicht nur auf M_{r-1} und M_r , sondern auf sämtliche Momente der Öffnung l_r haben, so muß

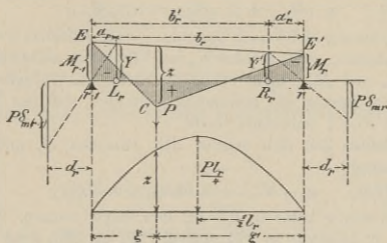


Fig. 371.

man die in Fig. 371 dargestellte, durch Schraffierung hervorgehobene Momentenfläche auftragen; dieselbe ist bestimmt durch $x = P \frac{\xi \xi'}{l_r}$; denn das Dreieck ECE' ist die Momentenfläche eines einfachen Balkens l_r . Die Strecke x aber wird als Ordinate einer Parabel erhalten, deren Pfeil $= 0,25 Pl_r$ ist.

Zu einer anderen, ebenfalls sehr einfachen Darstellung der Zweige $(r-1) - r$ der Einflußlinien für M_{r-1} und M_r führt die folgende Rechnung. Man findet zunächst ohne weiteres

$$M_r = Y' \frac{b_r}{c_r} - Y \frac{a'_r}{c_r},$$

und

$$M_{r-1} = Y \frac{b'_r}{c_r} - Y' \frac{a_r}{c_r},$$

setzt hierin für eine Einzellast $P_m = 1$ die Werte

der Einfluß der Belastung einer rechts von l_r gelegenen Öffnung l_r gesucht, so bestimme man mittels des von Stütze $(v-1)$ bis Stütze v laufenden Zweiges der M_{v-1} -Linie das Moment M_{v-1} , hierauf mittels eines nach Fig. 370 durch die Festpunkte L_{v-2} , L_{v-3} , . . . geführten Geradenzuges die Momente M_{v-2} , M_{v-3} , . . . , M_r , M_{r-1} und setze die letzteren in die Gleichung (28) ein.

Auch leuchtet ein, daß man durch Anwendung der Gleichung $S = S_o + S_{r-1}M_{r-1} + S_rM_r$ die zwischen $(r-1)$ und r gelegenen Zweige der S -Linien gewinnen kann.

Ganz besonders einfach gestaltet sich die Untersuchung eines Endfeldes. So kann man z. B. alle zur Behandlung der Öffnung l_1 erforderlichen Einflußlinien auf die im § 13 in Nr. 152 gezeigte Weise aus der Einflußlinie für den Widerstand A der Endstütze herleiten, nachdem man die A -Linie mit Hilfe der M_1 -Linie bestimmt hat. Es liegt hier die Umkehrung der in Nr. 152 gelösten Aufgabe vor; dort wurde die M_1 -Linie aus der A -Linie entwickelt.

159. Zahlenbeispiel. Berechnung der Einflußlinien für die Stützenmomente M_1 und M_2 eines Fachwerkbalkens mit vier Öffnungen von 28^m, 32^m, 32^m, 28^m Stützweite. Figur 373 zeigt die Hälfte des Balkens. Für den Zustand $M_1 = 1$ ist das Angriffsmoment für den m ten Knotenpunkt der Seitenöffnung

$$M_m' = 1,0 \frac{m}{7}$$

und für den m ten Knotenpunkt einer Mittelöffnung (wir zählen hier von Stütze 2 aus)

$$M_m' = 1,0 \frac{m}{8}$$

Wir berücksichtigen, da es sich nur um den ersten Rechnungsgang handeln möge, nur die Formänderungen der Gurtstäbe und nehmen eine solche Veränderlichkeit des Gurtquerschnitts an, daß für $F_o = F_u$ (s. Seite 207)

$$w_m = \frac{2 M_m' \lambda}{h_m^2}$$

gesetzt werden darf. Durch den Faktor 2 wird berücksichtigt, daß jedem Knotenpunkte zwei Gurtstäbe entsprechen. Wir setzen $\lambda = 1$ und erhalten die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Gewichte.

Seitenöffnung					Mittelöffnung				
m	h	h^2	$7h^2$	$w = \frac{2m}{7h^2}$	m	h	h^2	$8h^2$	$w = \frac{2m}{8h^2}$
1	2,50	6,25	44	0,046	1	4,69	22,0	176	0,011
2	2,56	6,55	46	0,087	2	3,75	14,1	113	0,035
3	2,75	7,56	53	0,113	3	3,12	9,73	78	0,077
4	3,12	9,73	68	0,118	4	3,00	9,00	72	0,111
5	3,75	14,1	99	0,101	5	3,12	9,73	78	0,128
6	4,69	22,0	154	0,078	6	3,75	14,1	113	0,106
7	6,00	36,0	—	0,056	7	4,69	22,0	176	0,080
					8	6,0	—	—	—

Die Gewichte w wurden schließlich auf zwei Stellen abgerundet und dabei w_1 in der Seitenöffnung auf 0,06 erhöht. Dann ergibt sich für den linken Auflagerdruck α_1 eine zweistellige Zahl, ohne daß man abzurunden braucht, und das erleichtert die Berechnung der Momente. Man findet

$$\alpha_1 = \frac{1}{7} (0,08 + 0,10 \cdot 2 + 0,12 \cdot 3 + 0,11 \cdot 4 + 0,09 \cdot 5 + 0,06 \cdot 6) = \frac{1,89}{7} = 0,27.$$

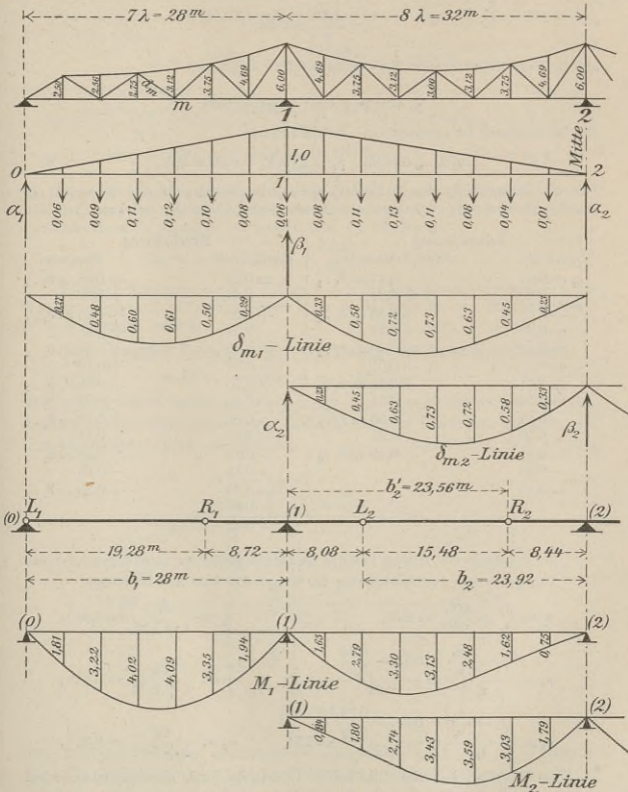


Fig. 373.

Auf die andere Stütze kommt

$$\sum_1^6 w = 0,27 = 0,29.$$

Weiter ist

$$\alpha_2 = \frac{1}{8} (0,08 + 0,11 \cdot 2 + 0,13 \cdot 3 + 0,11 \cdot 4 + 0,08 \cdot 5 + 0,04 \cdot 6 + 0,01 \cdot 7) \\ = \frac{1,84}{8} = 0,23;$$

auf die linke Stütze kommt $\sum_1^7 w = 0,23 = 0,33$. Es ist also

$$\beta_1 = 0,29 + 0,23 + 0,06 = 0,68.$$

Die Mittelöffnung ist symmetrisch. Mithin entsteht

$$\alpha_2 = \alpha_3 = 0,23, \quad \beta_2 = 2 \cdot 0,33 + 0,06 = 0,72.$$

Für die Biegelinie des Zustandes $M_1 = +1$ erhalten wir den folgenden, in unserem Buche schon oft angewandten Ansatz, wobei wir wieder mit $\lambda = 1$ rechnen.

Seitenöffnung		Mittelöffnung	
Querkräfte	Momente	Querkräfte	Momente
$\alpha_1 = 0,27$	$0,27 = \delta_{1 \cdot 1}$	$\alpha_2 = 0,23$	$+ 0,23 = \delta_{1 \cdot 1}$
$- 0,06$	$+ 0,21$	$- 0,01$	$+ 0,22$
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
$+ 0,21$	$+ 0,48 = \delta_{1 \cdot 2}$	$+ 0,22$	$+ 0,45 = \delta_{1 \cdot 2}$
$- 0,09$	$+ 0,12$	$- 0,04$	$+ 0,18$
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
$+ 0,12$	$+ 0,60 = \delta_{1 \cdot 3}$	$+ 0,18$	$+ 0,63 = \delta_{1 \cdot 3}$
$- 0,11$	$+ 0,01$	$- 0,08$	$+ 0,10$
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
$+ 0,01$	$+ 0,61 = \delta_{1 \cdot 4}$	$+ 0,10$	$+ 0,73 = \delta_{1 \cdot 4}$
$- 0,12$	$- 0,11$	$- 0,11$	$- 0,01$
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
$- 0,11$	$+ 0,50 = \delta_{1 \cdot 5}$	$- 0,01$	$+ 0,72 = \delta_{1 \cdot 5}$
$- 0,10$	$- 0,21$	$- 0,13$	$- 0,14$
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
$- 0,21$	$+ 0,29 = \delta_{1 \cdot 6}$	$- 0,14$	$+ 0,58 = \delta_{1 \cdot 6}$
$- 0,08$		$- 0,11$	$- 0,25$
<hr/>		<hr/>	<hr/>
$- 0,29$		$- 0,25$	$+ 0,33 = \delta_{1 \cdot 7}$
		$- 0,08$	
		<hr/>	
		$- 0,33$	

Die δ_{m_2} -Linie der zweiten Öffnung ist das Spiegelbild der zugehörigen δ_{m_1} -Linie. Nun gehen wir zur Bestimmung der Festpunkte über und berechnen:

$$x_2 = \frac{\beta_1}{\alpha_2} = \frac{0,68}{0,23} = 2,96, \quad a_2 = \frac{32}{1 + 2,96} = 8,08^m,$$

$$x_3 = \frac{\beta_2 - \frac{\alpha_2}{x_2}}{\alpha_3} = \frac{0,72 - \frac{0,23}{2,96}}{0,23} = 2,79, \quad a_3 = \frac{32}{1 + 2,79} = 8,44^m,$$

$$x_4 = \frac{\beta_3 - \frac{\alpha_3}{x_3}}{\alpha_4} = \frac{0,68 - \frac{0,23}{2,79}}{0,27} = 2,21, \quad a_4 = \frac{28}{1 + 2,21} = 8,72^m.$$

Die Strecken, in welche die beiden Öffnungen durch die Festpunkte zerlegt werden, sind in Fig. 373 angegeben; sie liefern:

sie l_r zerlegt, zu einander verhalten wie α_r zu β_r , so ist die von der Geraden g_r auf der Senkrechten I_r abgeschnittene Ordinate:

$$(29) \quad Y = \frac{M_{r-1}\alpha_r + M_r\beta_r}{\alpha_r + \beta_r}$$

und die r^{te} Grundgleichung läßt sich mithin auch schreiben:

$$(30) \quad (\alpha_r + \beta_r) Y + \alpha_{r+1} M_{r+1} = N_r.$$

Zieht man nun die Senkrechte II_r so, daß sie die Strecke $l_{r+1} + e$ im Verhältnis

$$(31) \quad e' : e = (\alpha_r + \beta_r) : \alpha_{r+1}$$

teilt, so schneidet die Gerade $U'C'$, welche die Endpunkte von Y und M_{r+1} verbindet, auf II_r die Ordinate

$$(32) \quad T_r = \frac{Y e' + M_{r+1} e}{e' + e} = \frac{Y(\alpha_r + \beta_r) + M_{r+1} \alpha_{r+1}}{\alpha_r + \beta_r + \alpha_{r+1}}$$

ab, und es folgt aus der Vergleichung dieses Ausdruckes mit der Beziehung (30) das Gesetz:

Die mit Hilfe der Senkrechten I_r bestimmte Gerade $U'C'$ schneidet auf der Senkrechten II_r das gegebene Moment ab:

$$(33) \quad \overline{E_r E'_r} = T_r = \frac{N_r}{\alpha_r + \beta_r + \alpha_{r+1}}.$$

Jetzt werde angenommen, es sei ein Punkt L'_r der Geraden g_r gegeben. Denkt man durch L'_r verschiedene Geraden g_r gelegt, so kann man zu jeder derselben die zugehörige Gerade g_{r+1} finden, indem man von dem Punkte U' , in welchem die g_r von der I_r geschnitten wird, durch den festen Punkt E'_r die Gerade $U'E'_r C'$ zieht und C' mit B' verbindet. Alle die Geraden g_{r+1} , welche in dieser Weise zu verschiedenen Geraden g_r gezeichnet werden können, schneiden sich in einem Punkte L'_{r+1} , welcher auf der durch die Punkte L'_r und E'_r bestimmten Geraden liegt und gefunden wird, indem zu einer beliebigen g_r die zugehörige g_{r+1} gezeichnet und mit der Geraden $L'_r E'_r$ zum Schnitt gebracht wird.*)

Übersichtlicher aber verfährt man, wenn man, von dem senkrecht unter L'_r gelegenen Punkte L_r ausgehend, zunächst auf die Lage von L_{r+1} schließt. Man legt durch L_r eine beliebige Gerade, welche die Senkrechten I_r und $B'B$ in U'' bzw. B'' schneidet, führt hierauf durch U'' und E_r eine Gerade bis zu ihrem Schnittpunkte C'' mit der

*) Es folgt dies aus dem bekannten Satze der Geometrie der Lage: Bewegen sich die Ecken (U' , B' , C') eines Dreiecks auf drei Strahlen (I_r , $B'B$, $C'C$) eines Strahlenbüschels, und gehen hierbei zwei Seiten (g_r und $U'C'$) des Dreiecks durch feste Punkte (L'_r und E'_r), so geht auch die dritte Seite (g_{r+1}) durch einen festen Punkt (L'_{r+1}), welcher mit den beiden anderen festen Punkten in einer Geraden liegt.

Senkrechten durch C und zieht schließlich die Gerade $C''B''$. Letztere bestimmt dann den Punkt L_{r+1} .

Mit Hilfe der vorstehenden Entwicklungen ist man imstande, das M -Polygon zu zeichnen. Die Gerade g_1 , Fig. 375, geht (wegen $M_0 = 0$) durch den Stützpunkt 0; es fällt also L_1 mit 0 zusammen. Aus der Lage von L_1 schließt man in der vorhin beschriebenen Weise auf die Lage von L_2 , sodann auf die von $L_3, L_4 \dots$, und zeichnet den Linienzug $L_1 L_2' L_3' \dots$, dessen Seiten auf den Senkrechten $II_1, II_2, II_3 \dots$ die gegebenen Momente $T_1, T_2, T_3 \dots$ abschneiden. Jetzt ist in jeder Öffnung ein Punkt L' des M -Polygons bekannt, und da die Gerade g_n nicht nur durch L_n' , sondern auch durch den Stützpunkt n gehen muß, so ist der Linienzug g_n, g_{n-1}, \dots, g_1 bestimmt.

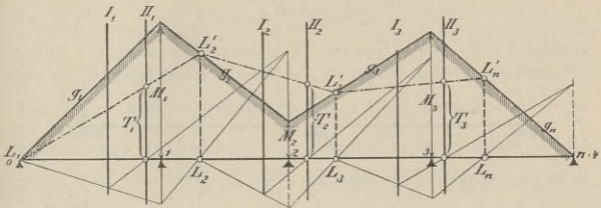


Fig. 375.

Man kann natürlich auch in der Weise vorgehen, daß man nicht von L_1 , sondern von dem in der letzten Öffnung gegebenen, mit Stützpunkt n zusammenfallenden Punkte R_n ausgeht, in den vorhergehenden Öffnungen Punkte $R_{n-1}, R_{n-2}, \dots, R_1$ auf ähnliche Art bestimmt, wie vorhin die Punkte L_2, L_3, \dots , hierauf mit Hilfe der T_{n-1}, T_{n-2}, \dots einen Linienzug $R'_{n-1}, R'_{n-2}, \dots$ zeichnet und schließlich g_1 durch L_1 und R_1' legt. Zur Ermittlung der Punkte R sind (an Stelle der I_r) Senkrechte I_r' zu bestimmen, welche l_{r+1} im Verhältnis $\alpha_{r+1} : \beta_r$ teilen, Fig. 376.

Es ist leicht einzusehen, daß die Punkte L und R mit den früher benutzten Festpunkten übereinstimmen. Zu diesem Zwecke nehme man nur eine einzige Öffnung belastet an und streiche die von den Temperaturänderungen und Stützensenkungen abhängigen Glieder der Werte T . Dann gehen die Geraden g der links von der belasteten Öffnung gelegenen Öffnungen durch die Punkte L und die Geraden g der rechtsseitigen Öffnungen durch die Punkte R . Hieraus folgt, daß man die beiden hier mitgeteilten Verfahren zur Ermittlung der Stützenmomente auch miteinander vereinigen kann, so zwar, daß man die

Punkte L und R auf die früher gezeigte Weise mit Hilfe der Biegelinien bestimmt und nun das M -Polygon aus den Momenten T ableitet. Dieser Weg ist sehr zu empfehlen bei Aufsuchung des Einflusses von Temperaturänderungen auf einen im übrigen nach Nr. 131 mittels Einflußlinien zu behandelnden Träger. Die Momente T sind hier durch die Gleichung bestimmt:

$$T_r = \frac{-1}{\alpha_r + \beta_r + \alpha_{r+1}} \frac{\varepsilon E F_c (l_r + l_{r+1})}{l_r l_{r+1}} \frac{y_c}{w_{tP}} c_{rt}.$$

Werden negative T in Fig. 375 oberhalb der Achse $0 - n$ aufgetragen, so sind auch die Stützenmomente negativ, sobald sie durch oberhalb der $0 - n$ liegende Ordinaten dargestellt werden.

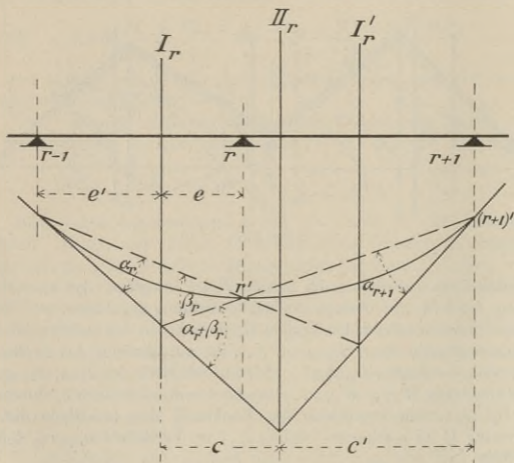


Fig. 376.

In Fig. 376 ist noch gezeigt worden, wie man die Senkrechten I_r und II_r mit Hilfe der Biegelinie $(r-1)r'(r+1)'$ des Zustandes $M_r = 1$ finden kann. Die Senkrechte I_r geht durch den Punkt, in dem die erste Seite des Biegungspolygons von der Geraden $(r+1)r'$ geschnitten wird und II_r geht durch den Schnittpunkt der äußersten Seiten. Die Senkrechte II_r fällt also mit der Mittelkraft der Gewichte w des Zustandes $M_r = 1$ zusammen.

161. **Angenäherte Ermittlung der Stützenmomente für den Balken mit parallelen Gurtungen.** Die Höhe des Trägers sei h ; der Querschnitt der oberen und unteren Gurtung habe überall den Inhalt F . Der Einfluß der Formänderung der Füllungsstäbe soll vernachlässigt werden. Das Gewicht zweier Gurtstäbe (eines Obergurtstabes und eines Untergurtstabes) beträgt

$$w = \frac{2M'\lambda}{EFh^2},$$

wo M' das Moment infolge $M_r = 1$. Nehmen wir unendlich kleine Feldlängen an, so erhalten wir für die Längeneinheit der Balkenachse die Belastung

$$\frac{dw}{dx} = \frac{2M'}{EFh^2},$$

welche wir durch die Belastung M' ersetzen wollen. Wir betrachten also die Momentenfläche für $M_r = 1$ als Belastungsfläche und erhalten die $\frac{EFh^2}{2}$ -fachen Durchbiegungen δ_{mr} . Der Inhalt des zu l_r gehörigen Teiles der Momentenfläche beträgt $\frac{l_r}{2}$; davon kommt auf die Stütze $r - 1$ der Anteil $\frac{1}{3}l_r$ auf r der Betrag $\frac{1}{3}l_r$. Es ergibt sich daher

$$\alpha_r = \frac{l_r}{6}; \quad \beta_r = \frac{l_r + l_{r+1}}{3}, \quad \alpha_{r+1} = \frac{l_{r+1}}{6},$$

und die Gleichung der drei Momente geht über in

$$\begin{aligned} M_{r-1} \frac{l_r}{6} + 2M_r \frac{l_r + l_{r+1}}{6} + M_{r+1} \frac{l_{r+1}}{6} \\ = - \sum P_m \delta_{mr} - \frac{EFh^2}{2} \frac{l_r + l_{r+1}}{l_r l_{r+1}} (\delta_r + c_r). \end{aligned}$$

Das zweite Glied auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung mußte den Faktor $\frac{EFh^2}{2}$ erhalten, weil ja δ_{mr} die $\frac{EFh^2}{2}$ -fache Durchbiegung ist.

Es werde nun die obere Gurtung gleichmäßig um t_o erwärmt, die untere um t_u . Das Gewicht eines Obergurtstabes ist allgemein

$$w = - \frac{\Delta s}{h},$$

dasjenige eines Untergurtstabes

$$w = + \frac{\Delta s}{h}.$$

Der Einfluß der Temperaturänderungen beträgt daher

$$w_t = \frac{-\varepsilon t_o \lambda + \varepsilon t_u \lambda}{h},$$

also für die Längeneinheit

$$\frac{dw_t}{dx} = \frac{\varepsilon (t_u - t_o)}{h}.$$

Die zu dieser gleichförmigen Belastung gehörige Biegelinie ist eine Parabel; es ist also

$$c_{rt} = \frac{\varepsilon (t_u - t_o) l_r l_{r+1}}{2h},$$

und man erhält schließlich die Gleichung

$$(34) \quad M_{r-1} l_r + 2M_r (l_r + l_{r+1}) + M_{r+1} l_{r+1} = N_r,$$

wo

$$(35) \quad N_r = -6 \sum P_m \delta_{mr} - \frac{3EFh^2 (l_r + l_{r+1}) \delta_r}{l_r l_{r+1}} - \frac{3}{2} \varepsilon EFh (l_r + l_{r+1}) (t_u - t_o).$$

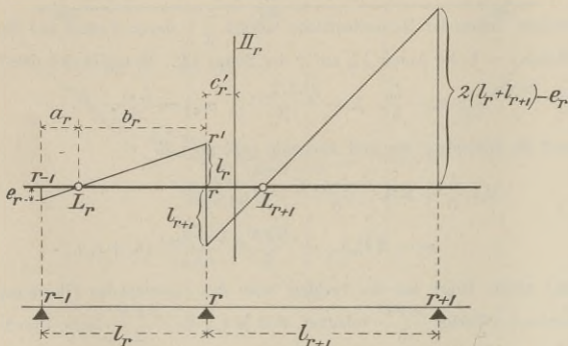


Fig. 377.

Zur Berechnung der Lage der Festpunkte L dienen nun die Formeln (vergl. Seite 388):

$$(36) \quad x_{k+1} = \frac{2(l_k + l_{k+1}) - \frac{l_k}{x_k}}{l_{k+1}}, \quad a_k = \frac{l_k}{1 + x_k},$$

wobei ausgegangen wird von

$$(37) \quad x_2 = \frac{2(l_1 + l_2)}{l_2}$$

und die Berechnung der Lage der Punkte R geschieht mittels der Formeln:

$$(38) \quad x'_k = \frac{2(l_k + l_{k+1}) - \frac{l_{k+1}}{x'_{k+1}}}{l_k}, \quad a'_k = \frac{l_k}{1 + x'_k}.$$

Den Anfang bildet

$$(39) \quad x'_{n-1} = \frac{2(l_{n-1} + l_n)}{l_{n-1}}.$$

Wie man zeichnerisch aus der Lage von L_r die Lage von L_{r+1} finden kann, zeigt Fig. 377. Mit Hilfe des Punktes L_r und der in beliebigem Maßstabe aufgetragenen Strecke $\overline{rr'} = l_r$ bestimmt man die Strecke

$$e_r = l_r \frac{a_r}{b_r} = \frac{l_r}{x_r}$$

und hierauf mittels der Strecken l_{r+1} und $2(l_r + l_{r+1}) - e_r$ die Lage des Punktes L_{r+1} .

Sehr einfach gestaltet sich auch die Berechnung des von den Lasten abhängigen Gliedes des Wertes N_r . Betrachtet man die Momentenfläche

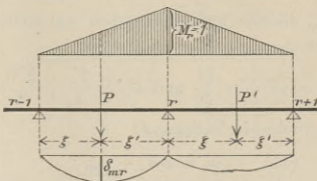


Fig. 378.

für $M_r = 1$ als Belastungsfläche der beiden Einzelbalken $(r-1)r$ und $r(r+1)$, so ist die zugehörige Momentenlinie die δ_{mr} -Linie. Man findet zwischen $(r-1)$ und r , Fig. 378,

$$\delta_{mr} = \frac{l_r}{6} \xi - 1 \frac{\xi}{l_r} \cdot \frac{\xi}{2} \cdot \frac{\xi}{3} = \frac{l_r^2}{6} \left(\frac{\xi}{l} - \frac{\xi^3}{l^3} \right),$$

und ebenso zwischen r und $r+1$

$$\delta_{mr} = \frac{l_{r+1}^2}{6} \left(\frac{\xi'}{l_{r+1}} - \frac{\xi'^3}{l_{r+1}^3} \right).$$

Führen wir also die Bezeichnungen ein

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_D = \frac{\xi}{l} - \frac{\xi^3}{l^3} \\ \omega_{D'} = \frac{\xi'}{l_{r+1}} - \frac{\xi'^3}{l_{r+1}^3}, \end{array} \right.$$

so erhalten wir für eine beliebige Gruppe lotrechter Lasten die Gleichung

$$(41) \quad M_{r-1}l_r + 2M_r(l_r + l_{r+1}) + M_{r+1}l_{r+1} = -l_r^2 \Sigma P \omega_D - l_{r+1}^2 \Sigma P \omega_{D'}.$$

Die Zahlen ω_D und $\omega_{D'}$ sind unabhängig von der Stützweite l , sie hängen nur von den Verhältnissen $\xi : l$, $\xi' : l$ ab. Auf Seite 430 findet sich eine Tabelle dieser häufig vorkommenden und ähnliche Werte. Der Zeiger D soll daran erinnern, daß die ω_D den Momenten infolge einer Dreiecklast proportional sind.

Ist nur die Öffnung l_r belastet, und zwar durch eine Einzellast $P = 1$, so ist

$$N_r = -l_r^2 \omega_D, \quad N_{r-1} = -l_r^2 \omega_{D'}$$

und man erhält auf demselben Wege, der zu den Formeln (26) führte, die folgenden einfachen Gleichungen der Einflußlinien der Momente M_r und M_{r-1}

$$(42) \quad M_r = -f_r \omega_D + v_r \omega_{D'}$$

$$(43) \quad M_{r-1} = -k_r \omega_{D'} + v_r \omega_D,$$

wo f_r , k_r und v_r dieselbe Bedeutung haben wie früher.

Nun besteht aber zwischen den Zahlen

$$\omega_D = \frac{\xi}{l} - \frac{\xi^3}{l^3} \quad \text{und} \quad \omega_{D'} = \frac{\xi'}{l} - \frac{\xi'^3}{l^3}$$

die leicht nachzuweisende Beziehung

$$(44) \quad \omega_{D'} = 3\omega_R - \omega_D,$$

wo

$$(45) \quad \omega_R = \frac{\xi}{l} - \frac{\xi^2}{l^2}$$

eine Zahl bedeutet, welche den Momenten infolge einer gleichförmigen Belastung (einer Rechtecklast) proportional ist; s. Seite 430. Man darf deshalb auch schreiben

$$(46) \quad M_r = -u_r' \omega_D + v_r \omega_R$$

$$(47) \quad M_{r-1} = -u_r \omega_D + v_r \omega_R,$$

wo

$$(48) \quad u_r' = a_r' \frac{l_r}{c_r} \quad \text{und} \quad u_r = a_r \frac{l_r}{c_r}.$$

Bei der M_{r-1} -Linie muß hierbei die Abszisse ξ von der Stütze r aus gerechnet werden; vergl. Fig. 379, in welcher auch die Strecken u_r' und u_r angegeben sind. Für die Endöffnungen ist $v = 0$. Man erhält

$$(49) \quad M_1 = -f_1 \omega_D, \quad M_{n-1} = -k_n \omega_D.$$

Es ist jetzt noch anzugeben, wie man die Gerade II_r findet, welche man braucht, um das in Nr. 160 beschriebene Verfahren durchzuführen. Diese Linie fällt nach Seite 398 mit der Mittelkraft der Gewichte w des Zustandes $M_r = 1$ zusammen, im vorliegenden Falle also mit der lotrechten Schwerlinie der Momentenfläche Δ_r . Ist also $l_{r+1} > l_r$, so

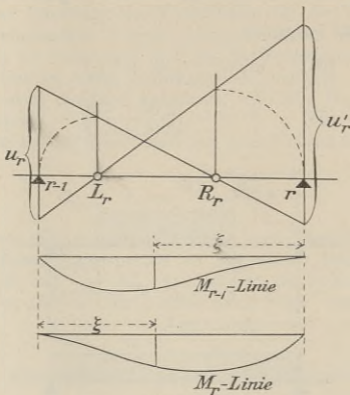


Fig. 379.

liegt die zum Stützpunkte r gehörige Gerade II_r in der Öffnung l_{r+1} , im Abstände

$$(50) \quad e_r' = \frac{1}{6} (l_{r+1} - l_r)$$

von der Stütze r . Für die in Nr. 160 gebrauchten Momente T erhält man jetzt die Werte

$$(51) \quad T_r = \frac{N_r}{3 (l_r + l_{r+1})}.$$

Wir wiederholen, daß sich dieses Verfahren ganz besonders zur Untersuchung des Einflusses von Stützenverschiebungen und Temperaturänderungen eignet. Die entsprechenden Momente T sind:

$$(52) \quad T_r = -\frac{EFh^2\delta_r}{l_r l_{r+1}}$$

und

$$(53) \quad T_r = -\frac{1}{2} \varepsilon EFh (t_u - t_o).$$

Auch der Einfluß einer gleichförmigen ständigen Belastung g läßt sich auf diesem Wege leicht finden. Der Belastung der r^{ten} Öffnung entspricht dann

$$N_r = -l_r^2 \int_0^{l_r} g \omega_D d\xi = -\frac{g l_r^3}{4}$$

und man erhält im ganzen

$$(54) \quad N_r = -\frac{g}{4} (l_r^3 + l_{r+1}^3)$$

$$(55) \quad T_r = -\frac{g (l_r^3 + l_{r+1}^3)}{12 (l_r + l_{r+1})}.$$

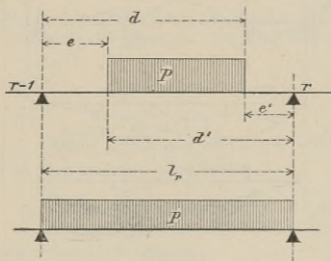


Fig. 380.

Der Einfluß einer von $\xi = e$ bis $\xi = d$ reichenden Verkehrslast p f. d. Längeneinheit (Fig. 380) ist

$$(56) \quad N_r = -l_r^2 \int_0^d p \omega_D d\xi$$

$$N_r = -\frac{p (d^2 - e^2) (2 l_r^2 - d^2 - e^2)}{4 l_r}$$

und der Einfluß auf N_{r-1} :

$$(57) \quad N_{r-1} = -\frac{p (d'^2 - e'^2) (2 l_r^2 - d'^2 - e'^2)}{4 l_r}.$$

§ 15.

Verschiedene Arten statisch unbestimmter Bogen-, Balken- und Kettenbrücken.

162. Dreifach statisch unbestimmte Bogenbrücke mit drei Öffnungen, Fig. 381 und 382. Als statisch unbestimmte Größen werden zweckmäßig die auf den Scheitelquerschnitt wirkenden Kräfte X_a , X_b , X_c eingeführt. Das statisch bestimmte Hauptsystem besteht dann aus zwei Auslegerbalken. Damit δ_{ab} , δ_{bc} und δ_{ca} gleich Null werden, ist nach der in Nr. 117 gegebenen Anweisung zu verfahren. Ein Zahlenbeispiel möge die Ermittlung der Einflußlinien für die Werte X_a , X_b , X_c eines symmetrischen Trägers erläutern. Einem senkrechten X_b entspricht hier ein wagerechtes X_c . Bei der Berechnung der Gewichte w empfehlen sich im ersten Rechnungsgange (und nur dieser soll hier vorgeführt werden) dieselben Annahmen, wie beim Bogen mit eingespannten Kämpfern.

Wir setzen also für $m = 1$ bis 5 und $m = 7$ bis 13 nach Gleich. (3) auf Seite 325

$$(1) \quad w_m = \frac{M_m^o + M_m^u}{h_m^2}.$$

Zu dem oberen Knotenpunkte 6 gehören zwei Untergurtstäbe; auch entsprechen diesem Knotenpunkte im allgemeinen zwei verschiedene Angriffsmomente M_{6l}^o und M_{6r}^o , je nachdem der Schnitt durch den linken oder den rechten Untergurtstab gelegt wird. Daher ist

$$(2) \quad w_6 = \frac{M_{6l}^o + M_{6r}^o}{h_6^2}.$$

Zum unteren Knotenpunkte 14 gehören zwei Obergurtstäbe, weshalb

$$(3) \quad w_{14} = \frac{2 M_{14}^u}{h_{14}^2};$$

wir rechnen $\frac{1}{2} w_{14}$ zur linken und $\frac{1}{2} w_{14}$ zur rechten Trägerhälfte. Die zu diesen Gewichten w gehörigen Seillinien liefern die Durchbiegungen δ_{ma} , δ_{mb} , δ_{mc} in einem Maßstabe, der voraussetzt, daß $\frac{\lambda}{EF_s} = 1$ ist, wo F_s den mittleren Gurtquerschnitt im Scheitel der Brücke bedeutet; vergl. Seite 325. In die Formeln

$$(4) \quad X_a = P_m \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}, \quad X_b = P_m \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}}, \quad X_c = P_m \frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}}$$

führen wir die Werte ein

$$(5) \quad \delta_{aa} = \frac{EF_s}{\lambda} \sum \frac{S_a^2 s}{EF}, \quad \delta_{bb} = \frac{EF_s}{\lambda} \sum \frac{S_b^2 s}{EF}, \quad \delta_{cc} = \frac{EF_s}{\lambda} \sum \frac{S_c^2 s}{EF}.$$

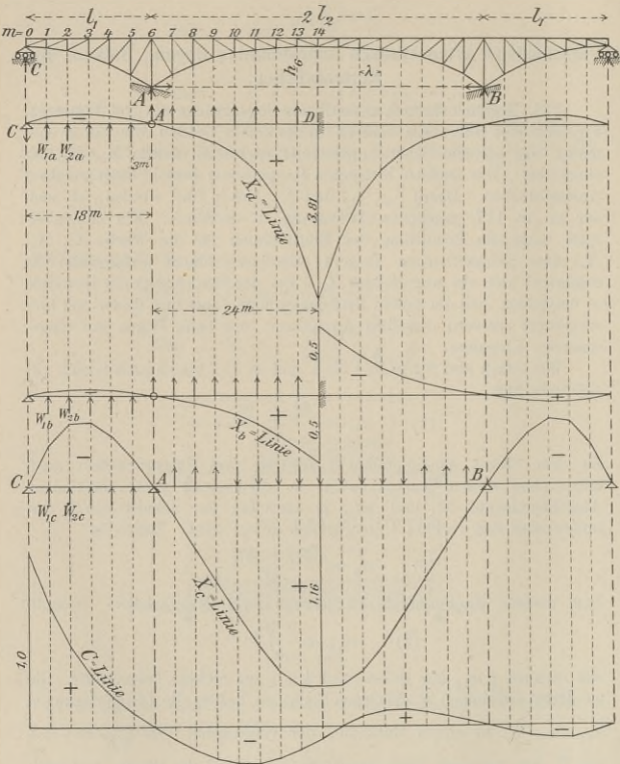


Fig. 381.

Da nun für einen Obergurtstab

$$\frac{S_a^2 s}{EF} = \frac{M_a^2}{h^2} \frac{\lambda}{EF_0} = \frac{M_a^2}{h^2} \frac{\lambda}{EF_0}$$

und für einen Untergurtstab

$$\frac{S_a^2 s}{EF} = \frac{M_a^{\circ 2}}{h^2} \frac{\lambda \sec^3 \gamma}{EF_u} = \frac{M_a^{\circ 2}}{h^2} \frac{\lambda}{EF_u}$$

ist, so ergibt sich

$$(6) \quad \delta_{aa} = \sum x_{ma}, \quad \delta_{bb} = \sum x_{mb}, \quad \delta_{cc} = \sum x_{mc},$$

wo

$$(7) \quad \begin{cases} x_m = \frac{M_m^{\circ 2} + M_m^{u 2}}{h_m^2} \text{ für } m = 1 \text{ bis } 5 \text{ und } m = 7 \text{ bis } 14, \\ x_6 = \frac{M_{6l}^{\circ 2} + M_{6r}^{\circ 2}}{h_6^2} \\ x_{14} = \frac{2 M_{14}^{\circ 2}}{h_{14}^2}. \end{cases}$$

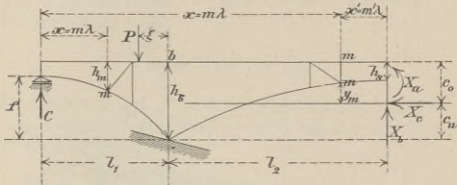


Fig. 382.

Daß δ_{ab} und δ_{bc} gleich Null sind, folgt ohne weiteres aus der Symmetrie. Die Bedingung

$$\delta_{ac} = \sum \frac{S_a S_c s}{EF} = 0$$

geht über in

$$\sum \frac{M_a M_c}{h^2} = 0$$

und lautet, mit Rücksicht auf die für $m = 6$ und $m = 14$ bestehenden Ausnahmen

$$(8) \quad \sum \left(\frac{M_a^u M_c^u + M_a^{\circ} M_c^{\circ}}{h^2} \right)_m + \left(\frac{(M_a^{\circ} M_c^{\circ})_c + (M_a^{\circ} M_c^{\circ})_r}{h^2} \right)_6 + \left(\frac{M_a^u M_c^u}{h^2} \right)_{14} = 0.$$

Die Summe \sum umfaßt $m = 1$ bis 5 und $m = 7$ bis 13.

Bei der Berechnung des Einflusses der Temperaturänderungen ist der weggehobene Wert $\frac{\lambda}{EF_u}$ wieder einzuführen. Man erhält

$$(9) \quad \begin{cases} X_{at} = \frac{\delta_{at}}{\frac{\sum S_a^2 s}{EF}} = \frac{EF_s \delta_{at}}{\lambda \sum \kappa_{mo}} \\ X_{ct} = \frac{EF_s \delta_{ct}}{\lambda \sum \kappa_{mc}} \end{cases}$$

X_{bt} wird, der Symmetrie wegen, gleich Null. Die Ermittlung der bei gleichmäßiger Erwärmung entstehenden Verschiebungen δ_{at} und δ_{ct} soll zunächst an der allgemeineren Figur 383 erläutert werden. Man wähle das Kämpfergelenk O zum Pole eines Williot'schen Verschiebungsplanes und stelle die Längenänderungen

$$\Delta s_1 = \varepsilon t s_1, \quad \Delta s_2 = \varepsilon t s_2, \quad \Delta s_3 = \varepsilon t s_3$$

durch die Strecken s_1, s_2, s_3 dar. Man erhält dann die Verschiebung $O1'$ des wagerecht geführten Punktes 1, indem man in 1 auf $O1$ ein

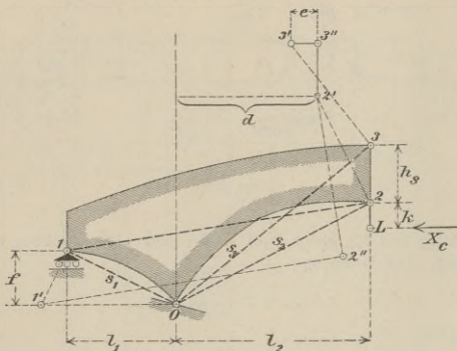


Fig. 383.

Lot errichtet und mit der Wagerechten durch O zum Schnitt bringt. Macht man nun $\overline{1'2''} = \overline{12}$ und $\parallel \overline{12}$ und errichtet in $2''$ und 2 auf $1'2''$ und $O2$ Lote, so treffen sich diese im Punkte $2'$. Von $2'$ aus trage man die senkrechte Strecke $\overline{2'3''} = \overline{23}$ an und bringe das in 3 auf $O3$ errichtete Lot mit der Wagerechten durch $3''$ in $3'$ zum Schnitt. Bezeichnet man dann die Strecken $3''3'$ und 23 mit e und h_s , so ergibt sich für den Winkel, um den sich die Scheitelvertikale dreht, der Wert $\psi = \frac{e}{h_s}$, und es drehen sich daher die nach Nr. 117 mit den Scheiteln

der beiden Trägerhälften befestigt gedachten starren Scheiben gegeneinander um

$$\delta_{at} = -2\varepsilon t \frac{e}{h_s}.$$

Das Zeichen — ist zu nehmen, weil sich die Scheitelvertikale 2 — 3 nach links, also im Sinne von X_a dreht, während δ_{at} im entgegengesetzten Sinne positiv gezählt wird wie X_a .

Die wagerechte Verschiebung des Punktes 2 wird durch das vom Punkte 2' auf die Senkrechte durch O gefällte Lot d dargestellt; sie ist also $= \varepsilon t d$, und die Verschiebung des Angriffspunktes L der Kraft X_e beträgt, wenn die Strecke $\overline{2L}$ mit k bezeichnet wird,

$$\varepsilon t (d + k\psi) = \varepsilon t \left(d + k \frac{e}{h_s} \right),$$

so daß sich schließlich ergibt

$$\delta_{et} = 2\varepsilon t \left(d + k \frac{e}{h} \right).$$

Liegen die Punkte 1 und 2 in einer Wagerechten, wie bei dem in Fig. 381 dargestellten Sonderfalle, so wird mit den aus Fig. 383 ersichtlichen Bezeichnungen:

$$(10) \quad \delta_{at} = -2\varepsilon t \frac{f}{l_1}, \quad \delta_{et} = 2\varepsilon t \left(l_2 - \frac{f^2}{l_1} \right).$$

Einflußlinie für X_a . Im Belastungsfalle $X_a = -1$ entsteht am linken Endauflager ein abwärts gerichteter Widerstand $\frac{1}{l_1}$. Die Angriffsmomente sind

$$\begin{aligned} \text{für die Seitenöffnung: } M_{ma}^u &= M_{ma}^o = -1 \frac{x_m}{l_1} \\ \text{„ „ Mittelöffnung: } M_{ma}^u &= M_{ma}^o = -1. \end{aligned}$$

Berechnet man nun die Gewichte w_{ma} und Werte x_{ma} nach den Formeln (1) bis (3) und (7) und dividiert diese Größen durch den sich später hebenden Faktor 2, so erhält man

$$\text{für } m = 1 \text{ bis } 5 \quad w_{ma} = -\frac{x_m}{l_1} \frac{1}{h_m^2} = -\frac{m}{6 h_m^2}; \quad x_{ma} = -\frac{1}{6} m w_{ma},$$

$$\text{für } m = 6 \text{ bis } 14 \quad w_{ma} = -\frac{1}{h_m^2}; \quad x_{ma} = +\frac{1}{h_m^2},$$

und für den ganzen Träger

$$(11) \quad \delta_{aa} = \sum x_{ma} = -\frac{1}{3} \sum_1^5 m w_{ma} + 2 \sum_6^{14} \frac{1}{h_m^2} + \frac{1}{h_{14}^2}.$$

Die Höhen h_m und Gewichte w_{ma} sind in den Tabellen I und II zusammengestellt worden. Die Berechnung der Trägerform ist in Band I, Seite 436, als Beispiel zur Linienführung der Gurtungen gebracht worden. Für δ_{aa} ergibt sich nach Gleich. (11) der Wert

$$\delta_{aa} = \frac{1}{3} 0,908 + 2 \cdot 2,041 + 0,694 = 5,079.$$

Tabelle I, Seitenöffnung.

m	h_m	h_m^2	$\frac{1}{h_m^2}$	$w_{ma} = -\frac{m}{6h_m^2}$	$-mw_a$	$w_{mb} = 8w_{ma}$	$w_{mc} = 2 \cdot 5,9w_{ma}$
0	1,20	1,44	0,694	0		0	0
1	1,33	1,77	0,565	-0,094	0,094	-0,75	-1,11
2	1,75	3,06	0,327	-0,109	0,218	-0,87	-1,29
3	2,51	6,30	0,159	-0,079	0,237	-0,63	-0,93
4	3,64	13,2	0,076	-0,051	0,204	-0,41	-0,60
5	5,19	26,9	0,037	-0,031	0,155	-0,25	-0,37
				$-\sum_1^5 mw_a = 0,908$			

Tabelle II, Mittelöffnung.

m	h_m	$\frac{1}{h_m}$	$-w_{ma} = \frac{1}{h_m^2}$	m'	$w_{mb} = m'w_{ma}$	$w_{mc} = \frac{2,6 - h_m}{h_m^2}$
6	7,20	0,139	0,019	8	-0,15	
7	5,19	0,193	0,037	7	-0,26	-0,10
8	3,75	0,267	0,071	6	-0,43	-0,08
9	2,74	0,365	0,133	5	-0,67	-0,02
10	2,07	0,483	0,233	4	-0,93	+0,12
11	1,64	0,610	0,372	3	-1,12	+0,36
12	1,38	0,725	0,526	2	-1,05	+0,63
13	1,24	0,806	0,650	1	-0,65	+0,88
14	1,20	0,833	0,694	0	0	+0,14 ³⁾
		4,282 ¹⁾	2,041 ²⁾			

$$1) 4,282 = \sum_7^{14} \frac{1}{h_m}; \quad 2) 2,041 = \sum_6^{14} \frac{1}{h_m^2}; \quad 3) w_{14c} = \frac{2y_{14}}{h_{14}^2} = 0,14.$$

Die δ_{ma} -Linie darf als die Momentenlinie eines mit den Gewichten w_a belasteten Balkens CAD aufgefaßt werden, der bei C frei aufliegt, bei D eingespannt und bei A durch ein Gelenk unterbrochen ist. Für den mit w_{1a} bis w_{5a} belasteten Koppelträger CA erhält man in C und A die Stützdrücke*)

$$C = -\frac{0,09 \cdot 5 + 0,11 \cdot 4 + 0,08 \cdot 3 + 0,05 \cdot 2 + 0,03}{6} = -0,21$$

$$A = -0,15,$$

*) Die Gewichte w wurden auf zwei Dezimalstellen abgerundet.

ferner die Querkräfte

$$Q_1 = -0,21, \quad Q_2 = -0,21 + 0,09 = -0,12, \quad Q_3 = -0,01, \\ Q_4 = +0,07, \quad Q_5 = +0,12, \quad Q_6 = +0,15$$

und Werte $M : \lambda$

$$M_1 : \lambda = -0,21, \quad M_2 : \lambda = -0,21 - 0,12 = -0,33, \quad M_3 : \lambda = -0,34, \\ M_4 : \lambda = -0,27, \quad M_5 : \lambda = -0,15, \quad M_6 : \lambda = 0.$$

Für den mit w_{6a} bis w_{13a} und außerdem in A mit $-0,15$ belasteten Freitragler AD findet man

$$Q_7 = 0,15 + 0,02 = 0,17, \quad Q_8 = 0,17 + 0,04 = 0,21, \\ Q_9 = 0,21 + 0,07 = 0,28, \quad Q_{10} = 0,41, \quad Q_{11} = 0,64, \quad Q_{12} = 1,01, \\ Q_{13} = 1,54, \quad Q_{14} = 2,19,$$

ferner

$$M_7 : \lambda = 0,17, \quad M_8 : \lambda = 0,17 + 0,21 = 0,38, \\ M_9 : \lambda = 0,38 + 0,28 = 0,66, \quad M_{10} : \lambda = 1,07, \quad M_{11} : \lambda = 1,71, \\ M_{12} : \lambda = 2,72, \quad M_{13} : \lambda = 4,26, \quad M_{14} : \lambda = 6,45.$$

Nun erhält man

$$X_a = \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}} = \frac{M}{\delta_{aa}} = \frac{M : \lambda}{\frac{1}{3}\delta_{aa}} = 0,591 \frac{M}{\lambda}.$$

$X_{a1} = -0,124$	$X_{a7} = +0,100$	$X_{a11} = +1,011$
$X_{a2} = -0,195$	$X_{a8} = +0,225$	$X_{a12} = +1,608$
$X_{a3} = -0,201$	$X_{a9} = +0,390$	$X_{a13} = +2,518$
$X_{a4} = -0,160$	$X_{a10} = +0,632$	$X_{a14} = +3,812$
$X_{a5} = -0,089$		

Einflußlinie für X_b . Infolge von $X_b = -1$ entsteht am linken

Endauflager der abwärts gerichtete Stützenwiderstand $1 \frac{l_2}{l_1}$, weshalb

$$\text{für die Seitenöffnung } M_{mb}^a = M_{mb}^u = -\frac{l_2}{l_1} x_m,$$

$$\text{„ „ Mittelöffnung } M_{mb}^a = M_{mb}^u = -1 \cdot x_m'.$$

Mit $x_m = m\lambda$ und $x_m' = m'\lambda$ ergeben sich also die Gewichte

$$w_{mb} = -2 \frac{l_2}{l_1} \frac{x_m}{h_m^2} = -2 \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{m}{h_m^2} \lambda$$

$$w_{mb} = -2 \frac{x_m'}{h_m^2} = -2 \frac{m'}{h_m^2} \lambda,$$

und dafür nehmen wir

$$\text{für die Seitenöffnung } w_{mb} = -8 \cdot \frac{m}{6h_m^2} = 8w_{ma},$$

$$\text{„ „ Mittelöffnung } w_{mb} = -\frac{m'}{h_m^2}.$$

Die Berechnung von δ_{bb} ist überflüssig, da X_b in der Mitte des symmetrischen Trägers den Wert 0,5 hat. Man berechnet also genau wie vorhin die durch die Gewichte w_b hervorgerufenen Momente M und findet dann aus der Gleichung

$$\frac{X_{b_m}}{X_{b_{14}}} = \frac{M_m}{M_{14}}$$

$$X_{b_m} = 0,5 \frac{M_m}{M_{14}}.$$

Auf diese Weise erhält man:

$X_{b_1} = -0,030$	$X_{b_7} = +0,024$	$X_{b_{11}} = +0,200$
$X_{b_2} = -0,047$	$X_{b_8} = +0,052$	$X_{b_{12}} = +0,284$
$X_{b_3} = -0,048$	$X_{b_9} = +0,089$	$X_{b_{13}} = +0,386$
$X_{b_4} = -0,038$	$X_{b_{10}} = +0,136$	$X_{b_{14}} = +0,500$
$X_{b_5} = -0,021$		

Für die rechte Trägerhälfte ergeben sich dieselben Ordinaten mit den entgegengesetzten Vorzeichen.

Ermittlung der Lage von X_c . Fig. 382. Am linken Endauflager wird durch die im Abstände c_u von den Kämpfern angreifende Belastung $X_c = -1$ der Widerstand $C = -1 \frac{c_u}{l_1}$ hervorgerufen, und es ergibt sich daher mit den aus der Fig. 382 ersichtlichen Bezeichnungen

$$\text{für } m = 1 \text{ bis } 5 \quad M_c^u = M_c^o = -\frac{c_u x}{l_1} = -\frac{c_u m}{6}$$

$$\text{,, } m = 6 \quad M_{c_l}^o = -1 \cdot c_u, \quad M_{c_r}^o = 1 \cdot c_u$$

$$\text{,, } m = 7 \text{ bis } 14 \quad M_c^o = 1 \cdot c_u$$

$$M_c^u = 1 \cdot y.$$

Da nun

$$\text{für } m = 1 \text{ bis } 5 \quad M_a^u = M_a^o = -1 \frac{x}{l_1} = -\frac{m}{6}$$

$$\text{,, } m = 6 \text{ „ } 14 \quad M_a^u = M_a^o = -1$$

ist, so geht die Gleichung (8) auf Seite 407 über in

$$2 \sum_1^5 \frac{m}{6} \frac{c_u m}{6 h_m^2} + \frac{c_u}{h_6^2} - \sum_6^{13} \frac{c_u}{h_m^2} - \sum_7^{14} \frac{y_m}{h_m^2} = 0$$

und, wegen $y_m = c_u - h_m$, in

$$-\frac{c_u}{3} \sum_1^5 m w_{m a} - c_u \left(2 \sum_6^{13} \frac{1}{h_m^2} + \frac{1}{h_{14}^2} \right) + \sum_6^{14} \frac{1}{h_m} = 0$$

Es folgt also mit $c_u = h_6 - c_o = 7,2 - c_o$

$$c_o = \frac{-\frac{h_6}{3} \sum_1^5 m w_{m\alpha} + \sum_6^{14} \frac{1}{h_m}}{-\frac{1}{3} \sum_1^5 m w_{m\alpha} + 2 \sum_6^{13} \frac{1}{h_m^2} + \frac{1}{h_{14}^2}}$$

$$c_o = \frac{2,4 \cdot 0,908 + 4,282}{\frac{1}{3} \cdot 0,908 + 2 \cdot 2,041 + 0,694} = 1,3^m$$

$$c_u = 7,2 - 1,3 = 5,9^m.$$

Einflußlinie für X_c . Setzt man die für M_c angegebenen Werte in die Gleichungen (1) (2) (3) und (7) ein, so erhält man mit $y_m = c_o - h_m = 1,27 - h_m$

für $m = 1$ bis 5: $w_{m\alpha} = -2 \frac{c_u m}{6 h_m^2} = 2 c_u w_{m\alpha} = 12,0 w_{m\alpha}$

$$x_{m\alpha} = 2 \frac{c_u^2}{6^2} \frac{m^2}{h_m^2} = -\frac{1}{3} c_u^2 m w_{m\alpha},$$

für $m = 6$: $w_{6\alpha} = -\frac{c_u}{h_6^2} + \frac{c_o}{h_6^2}$

$$x_{6\alpha} = \frac{c_u^2 + c_o^2}{h_6^2},$$

für $m = 7$ bis 13: $w_{m\alpha} = \frac{c_o + y_m}{h_m^2} = \frac{2c_o - h_m}{h_m^2}$

$$x_{m\alpha} = \frac{c_o^2 + y_m^2}{h_m^2} = 2 \frac{c_o^2}{h_m^2} - 2 \frac{c_o}{h_m} + 1,$$

für $m = 14$: $w_{14\alpha} = 2 \frac{y_{14}}{h_{14}^2} = 2 \frac{c_o - h_{14}}{h_{14}^2}$

$$x_{14\alpha} = 2 \frac{y_{14}^2}{h_{14}^2} = 2 \frac{c_o^2}{h_{14}^2} - 4 \frac{c_o}{h_{14}} + 2,$$

und es ergibt sich daher für den ganzen Träger

$$\delta_{cc} = -\frac{2}{3} c_u^2 \sum_1^5 m w_{m\alpha} + 2 \frac{c_u^2 + c_o^2}{h_6^2} + 2 \sum_7^{13} \left(2 \frac{c_o^2}{h_m^2} + 2 \frac{c_o}{h_m} + 1 \right)$$

$$+ 2 \frac{c_o^2}{h_{14}^2} - 4 \frac{c_o}{h_{14}} + 2,$$

$$= -\frac{2}{3} c_u^2 \sum_1^5 m w_{m\alpha} + 2 \frac{c_u^2 - c_o^2}{h_6^2} + 4 c_o^2 \sum_6^{13} \frac{1}{h_m^2} + 2 \frac{c_o^2}{h_{14}^2} - 4 c_o \sum_7^{14} \frac{1}{h_m} + 16$$

und mit Beachtung von Formel (12)

$$\delta_{cc} = -\frac{2}{3} c_u h_6 \sum_1^5 m w_{m\alpha} - 2 c_o \sum_6^{14} \frac{1}{h_m} + 18 = 32,22.$$

Die δ_{mc} -Linie der Trägerstücke CA und AB darf als die Momentenlinie der mit den Gewichten w_c belasteten einfachen Balken CA und AB betrachtet werden. Es folgt dies daraus, daß $\delta_{ac} = 0$ ist, daß also die beiden Scheitelvertikalen (14) der das statisch bestimmte Hauptsystem bildenden Auslegerbalken sich im Belastungsfalle $X_c = -1$ nicht gegeneinander drehen und in senkrechter Richtung dieselben Verrückungen erfahren. Diese Eigenschaft kann auch zur Berechnung von c_o benutzt werden. Für den Querschnitt D des mit den w_c belasteten einfachen Balkens AB ist nämlich das Biegemoment gleich dem statischen Momente der Gewichte $w_{7c}, w_{8c} \dots w_{13c}$ und $\frac{1}{2} w_{14c}$, bezogen auf die Stütze A , d. i.

$$M_D = \sum_7^{13} w_{mc} (m\lambda - l_1) + \frac{1}{2} w_{14c} l_2,$$

während sich für D als Querschnitt des Trägers CAD das Moment ergibt

$$M_D = -l_2 \sum_1^5 w_{mc} \frac{x_m}{l_1} - \sum_6^{13} w_{mc} m' \lambda.$$

Setzt man diese beiden Werte einander gleich, so findet man

$$+l_2 \sum_1^5 w_{mc} \frac{m}{6} + w_{6c} l_2 + \sum_7^{13} w_{mc} m' \lambda + \sum_7^{13} w_{mc} (m\lambda - l_1) + \frac{1}{2} w_{14c} l_2 = 0$$

und, wegen $(m' + m)\lambda - l_1 = l_2$, nach Einführung der w_c :

$$\frac{c_u}{3} \sum_1^5 m w_{ma} + \frac{c_o - c_u}{h_6^2} + \sum_7^{13} \frac{2c_o - h_m}{h_{m13}^2} + \frac{c_o - h_{14}}{h_{14}^2} = 0 \text{ oder}$$

$$-\frac{c_u}{3} \sum_1^5 m w_{ma} - c_o \left(2 \sum_6^{13} \frac{1}{h_m^2} + \frac{1}{h_{14}^2} \right) + \sum_6^{14} \frac{1}{h_m} = 0,$$

das ist dieselbe Gleichung, die auf Seite 402 auf anderem Wege gewonnen wurde.

Die Berechnung der Momente der Balken CA und AB liefert

$M_1 : \lambda = -2,51$	$M_7 : \lambda = +1,86$	$M_{11} : \lambda = +9,86$
$M_2 : \lambda = -3,91$	$M_8 : \lambda = +3,82$	$M_{12} : \lambda = +11,44$
$M_3 : \lambda = -4,02$	$M_9 : \lambda = +5,86$	$M_{13} : \lambda = +12,39$
$M_4 : \lambda = -3,20$	$M_{10} : \lambda = +7,92$	$M_{14} : \lambda = +12,46$
$M_5 : \lambda = -1,78$		

und es ergibt sich daher

$$X_c = \frac{M : \lambda}{\delta_{cc} : \lambda} = \frac{3}{32,22} \cdot \frac{M}{\lambda} = 0,0931 \frac{M}{\lambda}$$

$$\begin{array}{l|l|l}
 X_{c_1} = -0,234 & X_{c_7} = +0,173 & X_{c_{11}} = +0,918 \\
 X_{c_2} = -0,364 & X_{c_8} = +0,356 & X_{c_{12}} = +1,065 \\
 X_{c_3} = -0,374 & X_{c_9} = +0,546 & X_{c_{13}} = +1,154 \\
 X_{c_4} = -0,298 & X_{c_{10}} = +0,737 & X_{c_{14}} = +1,160 \\
 X_{c_5} = -0,166 & &
 \end{array}$$

Einflußlinie für den Widerstand C der linken Endstütze. Liegt die Last $P=1$ im Abstände ξ von der Stütze A und wird ξ nach links positiv gerechnet, so folgt

$$Cl_1 = 1 \cdot \xi + X_b l_2 + X_a + X_c c_u$$

und hieraus

$$C = \frac{1}{18} (\xi + 24 X_b + X_a + 5,9 X_c).$$

Liegt P rechts von der Mitte des Trägers, so ist das Glied ξ zu streichen. Die mit Hilfe dieser Gleichung berechnete C -Linie ist in Fig. 381 dargestellt worden.

Ordinaten der C -Linie.

	links:	rechts:
1	0,71	-0,04
2	0,47	-0,07
3	0,30	-0,07
4	0,18	-0,06
5	0,08	-0,03
6	—	—
7	-0,07	0,03
8	-0,13	0,06
9	-0,18	0,08
10	-0,21	0,10
11	-0,21	0,09
12	-0,18	0,06
13	-0,13	0,00
14	-0,07	-0,07

Die weitere Untersuchung der Mittelöffnung erfolgt nun nach dem im § 11 in dem Zahlenbeispiele angegebenen Verfahren. Man berechne der Reihe nach die Einflußlinien für

$$M_m, \frac{M_m^o}{h_m} = U_{m+1} \cos \gamma_{m+1}, \quad O_m = -\frac{M_m^o}{h_m} - H$$

und

$$D_m \cos \varphi_m = \frac{M_m^o}{h_m} - \frac{M_{m-1}^o}{h_{m-1}},$$

und schließlich die Einflußlinien für

$$V_m \cotg \varphi_{m+1} = -D_{m+1} \cos \varphi_{m+1} - P \cotg \varphi_{m+1}.$$

Die Seitenöffnung wird in derselben Weise untersucht wie die Seitenöffnung eines auf 4 Stützen ruhenden Balkens (Fig. 352, Seite 371); aus der C -Linie lassen sich hier die Einflußlinien für alle Stabkräfte schnell herleiten. Die Einflußlinie für die Vertikale über der Mittelstütze wird nach dem auf Seite 381 beschriebenen Verfahren bestimmt; man benutze die Gleichgewichtsbedingung für den oberen Knotenpunkt 6.

Der Einfluß einer gleichmäßigen Erwärmung um 35° ist (für Flußeisen) abgerundet und auf Tonnen und Meter bezogen

$$\begin{aligned} X_{at} &= -2 \frac{f}{l_1} \frac{\varepsilon Et F_s}{\lambda \delta_{aa}} \\ &= -2 \frac{6,0}{18,0} \frac{250 \cdot 35 \cdot F_s}{3,0 \cdot 5,0} = -400 F_s \\ X_{ct} &= 2 \left(l_2 - \frac{f^2}{l_1} \right) \frac{\varepsilon Et F_s}{\lambda \delta_{cc}} \\ &= 2 \left(24 - \frac{36}{18} \right) \frac{250 \cdot 35 F_s}{3 \cdot 32} = 4000 F_s. \end{aligned}$$

Der Einfluß der Temperaturänderungen ist verhältnismäßig groß, und es empfiehlt sich daher stets die Anwendung der genaueren, die Formänderungen sämtlicher Stäbe berücksichtigenden Formeln

$$\begin{aligned} X_{at} &= \frac{\delta_{at}}{\sum S_a^2 \frac{s}{EF}}, \\ X_{ct} &= \frac{\delta_{ct}}{\sum S_c^2 \frac{s}{EF}}. \end{aligned}$$

Außer der gleichmäßigen Erwärmung, welche

$$\delta_{at} = -2 \frac{f}{l_1} \varepsilon t \text{ und } \delta_{ct} = 2 \left(l_2 - \frac{f^2}{l_1} \right) \varepsilon t$$

liefert, prüfe man noch den Einfluß einer ungleichmäßigen Erwärmung der beiden Gurtungen. Dann ist

$$\delta_{at} = \sum \varepsilon t S_a s \text{ und } \delta_{ct} = \sum \varepsilon t S_c s$$

zu setzen.

163. Der Balken auf 4 Stützen, der bereits im § 13 (Fig. 350) untersucht worden ist, kann auch auf dem in Nr. 162 eingeschlagenen Wege berechnet werden. Es ist $X_c = 0$.

164. Die zweifach statisch unbestimmte Bogenbrücke mit drei Öffnungen, Fig. 384, wird in ähnlicher Weise untersucht wie der in

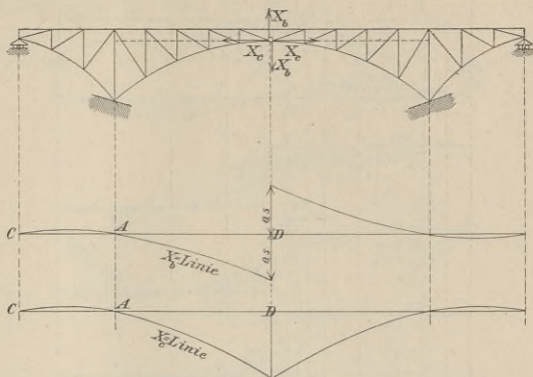


Fig. 384.

Nr. 162 behandelte Träger. Es ist $X_a = 0$, und außerdem ist der Angriffspunkt von X_b und X_c von vornherein gegeben.

165. Eingelenkbalken mit drei Öffnungen, Fig. 385. Es wird $X_c = 0$, und man erhält nach Zeichnung der Biegelinie für $X_b = -1$ den Einfluß von P

$$X_b = P \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}}$$

In den Figuren 385 sind aus der X_b -Linie die Einflußlinien für die Momente M_m und M_b , für den Stützenwiderstand A und die Spannkkräfte D und D' hergeleitet worden. Der Kräftemaßstab ist $\delta_{bb} = P = 1$. Der Einfluß einer gleichmäßigen Erwärmung ist entweder gleich Null oder (falls der Träger unsymmetrisch ist und die Auflager nicht in derselben Wagerechten liegen) unwesentlich. Ungleichmäßige Erwärmung, z. B. Sonnenbestrahlung der oberen Gurtung, kann dagegen größere Spannkkräfte hervorbringen. Man berechne dann X_{bt} mittels der Formel

$$X_{bt} = \frac{\sum \varepsilon S_b t s}{\sum S_b^2 \frac{s}{EF}}$$

und berücksichtige die Längenänderungen sämtlicher Stäbe.

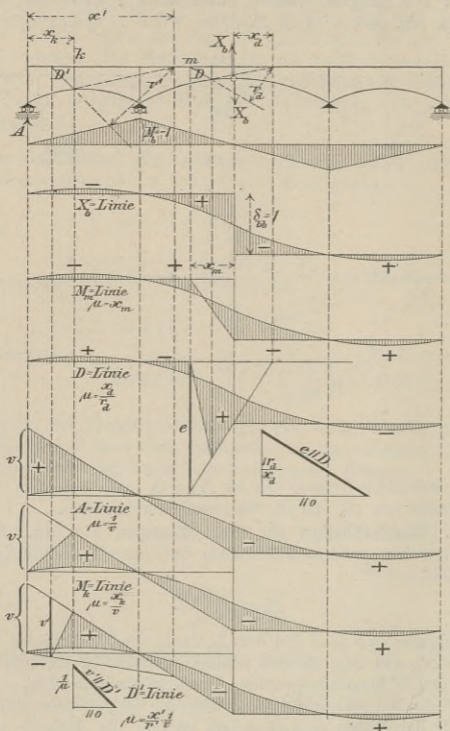


Fig. 385.

166. Der Eingelenkbogen, Fig. 386. Das statisch bestimmte Hauptsystem besteht aus zwei Freitragern; die Untersuchung dieses Trägers unterscheidet sich also von der im § 11, Nr. 116, durchgeführten nur dadurch, daß $X_a = 0$ ist und der Angriffspunkt von X_b und X_c mit dem Scheiteltgelenk zusammenfällt. Fig. 386 zeigt einen Teil des Verschiebungsplanes für $X_b = -1$. Die Strahlen Oc_1' und Oc_2' stellen

die Verschiebungen dar, welche das Scheitelgelenk als Punkt des linken oder rechten Freiträgers erfährt. Om' ist die Verschiebung des Angriffspunktes m von P_m . Wählt man $X_c \perp c_1c_2'$, so ist

$$X_b = P_m \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}} \quad \text{und} \quad X_c = P_m \frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}}$$

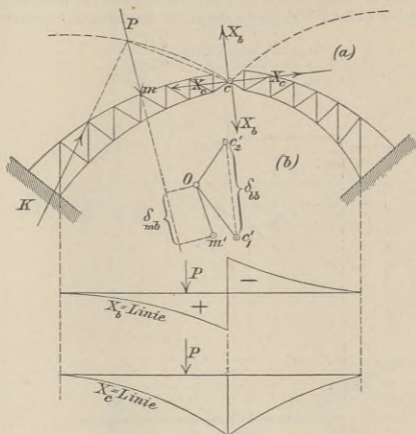


Fig. 386.

Näherungsformeln. Für einen symmetrischen Bogen mit parabelförmigen Gurtungen lassen sich auf dem im § 11 unter e , Seite 349, eingeschlagenen Wege genügend genaue Formeln zur Berechnung der von senkrechten Lasten hervorgerufenen Kräfte X_b und X_c herleiten. Das Scheitelgelenk habe von der oberen Gurtung den Abstand e_0 , von der unteren den Abstand e_u ; bezüglich der übrigen Bezeichnungen verweisen wir auf Fig. 387 und auf die Untersuchung im § 11. Für X_b gilt die auf Seite 351 für $P=1$ abgeleitete Formel

$$X_b = \frac{1}{3\alpha + 1} \frac{a^2}{l_1^2} \left[3\alpha + (1 - 2\alpha) \frac{a}{l_1} - 0,5(1 - \alpha) \frac{a^2}{l_1^2} \right]$$

und für X_c erhält man (vergl. Seite 352)

$$X_c = \frac{M}{2 \int_0^l (y_0^2 + y_u^2) \omega dx}$$

wo

$$\omega = \alpha + (1 - \alpha) \frac{x_A}{l_1}$$

und M durch die Gleichung erklärt wird

$$\begin{aligned} \frac{d^2 M}{dx^2} &= \omega (y_o + y_u) = \omega \left[f_o \frac{x^2}{l_1^2} - e_o + f_u \frac{x^2}{l_1^2} + e_u \right] \\ &= \left[\alpha + (1 - \alpha) \frac{x_A}{l_1} \right] \left[\frac{f_o + f_u}{l_1^2} (l_1 - x_A)^2 + e_u - e_o \right]. \end{aligned}$$

Da M das Biegemoment eines an der Stelle $x_A = l_1$ eingespannten, durch die stetige Belastung ω beanspruchten Freitragers ist, so sind die Integrationskonstanten der vorstehenden Differentialgleichung durch die Bedingungen bestimmt:

$$\begin{aligned} x_A = 0 \text{ muß liefern } \frac{dM}{dx_A} &= 0, \\ x_A = 0 \text{ „ „ } M &= 0. \end{aligned}$$

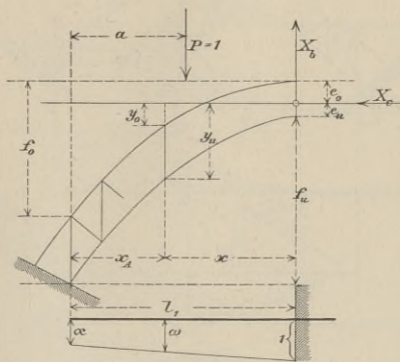


Fig. 387.

Man erhält

$$\begin{aligned} M &= \frac{(f_o + f_u) l_1^2}{60} \left[30\alpha + 10(1 - 3\alpha) \frac{x_A}{l_1} - 5(2 - 3\alpha) \frac{x_A^2}{l_1^2} + 3(1 - \alpha) \frac{x_A^3}{l_1^3} \right] \frac{x_A^3}{l_1^3} \\ &\quad + \frac{(e_u - e_o) l_1^2}{6} \left[3\alpha + (1 - \alpha) \frac{x_A}{l_1} \right] \frac{x_A^2}{l_1^2}, \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{l_1} (y_o^2 + y_u^2) \omega dx &= (f_o^2 + f_u^2) l_1 \frac{1 + 5\alpha}{15} + l_1 (f_u e_u - f_o e_o) \frac{1 + 3\alpha}{3} \\ &\quad + l_1 (e_u^2 + e_o^2) (1 + \alpha). \end{aligned}$$

Es ergibt sich also schließlich für eine an der Stelle $x_A = a$ liegende Last $P=1$ der Wert

$$X_e = \frac{l_1}{k^2} \left[\frac{1}{2} (f_o + f_u) \gamma + 5(e_o - e_u) \gamma' \right],$$

$$k^2 = 2(f_o^2 + f_u^2)(1 + 5\alpha) + 10(f_u e_u - f_o e_o)(1 + 3\alpha) + 30(e_u^2 + e_o^2)(1 + \alpha),$$

$$\gamma = \left[30\alpha + 10(1 - 3\alpha) \frac{a}{l_1} - 5(2 - 3\alpha) \frac{a^2}{l_1^2} + 3(1 - \alpha) \frac{a^3}{l_1^3} \right] \frac{a^2}{l_1^2},$$

$$\gamma' = \left[3\alpha + (1 - \alpha) \frac{a}{l_1} \right] \frac{a^2}{l_1^2}.$$

Der Einfluß einer gleichmäßigen Erwärmung um t° ist, wenn F_s den mittleren Gurtquerschnitt in der Nähe des Scheitels bedeutet, $X_{bt} = 0$ und

$$X_{ct} = \frac{2 \varepsilon E t l_1 F_s h_s^2}{2 \int_0^{l_1} (y_o^2 + y_u^2) \omega dx},$$

$$X_{ct} = \frac{60 \varepsilon E t F_s h_s^2}{k^2}.$$

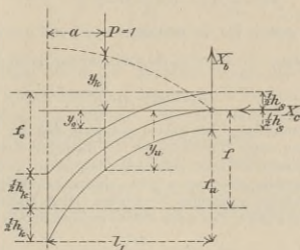


Fig. 388.

Sonderfall

$$e_o = e_u = \frac{1}{2} h_s. \quad \text{Fig. 388.}$$

$$f_o = f - \frac{1}{2} (h_k - h_s)$$

$$f_u = f - \frac{1}{2} (h_k - h_s).$$

$$X_c = \frac{f l_1}{k_1^2} \frac{a^2}{l_1^2} \left[30\alpha + 10(1 - 3\alpha) \frac{a}{l_1} - 5(2 - 3\alpha) \frac{a^2}{l_1^2} + 3(1 - \alpha) \frac{a^3}{l_1^3} \right],$$

wo

$$k_1^2 = 4f^2(1 + 5\alpha) + h_s^2(11 + 5\alpha) + h_s h_k(3 + 5\alpha) + h_k^2(1 + 5\alpha).$$

Der Einfluß einer gleichmäßigen Erwärmung ist

$$X_{ct} = \frac{60 \varepsilon E t F_s h_s^2}{k_1^2}.$$

Für $\alpha = 1$ erhält man

$$X_c = \frac{5 l_1 a^2}{24 f l_1^2} \left(6 - 4 \frac{a}{l_1} + \frac{a^2}{l_1^2} \right) v$$

$$X_{ct} = \frac{15}{6} \varepsilon E F_s t \frac{h_s^2}{f^2} v,$$

wo

$$v = \frac{1}{1 + \frac{8 h_s^2 + 4 h_s h_k + 3 h_k^2}{12 f^2}}$$

Hierzu gehört

$$X_b = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2}{l_1^2} \left(3 - \frac{a}{l_1} \right).$$

Für $\alpha = 0$ ergibt sich

$$X_c = \frac{l_1}{4f} \frac{a^3}{l_1^3} \left[10 - 10 \frac{a}{l_1} + 3 \frac{a^2}{l_1^2} \right] \nu$$

$$X_{ct} = 15 \varepsilon E F_s t \frac{h_s^2}{f^2} \nu,$$

wo

$$\nu = \frac{1}{1 + \frac{11 h_s^2 + 3 h_s h_k + h_k^2}{4 f^2}}.$$

Hierzu gehört

$$X_b = \frac{a^3}{l_1^3} \left(1 - 0,5 \frac{a}{l_1} \right).$$

Die folgende Tabelle enthält für die Grenzfälle $\alpha = 1$ und $\alpha = 0$ die Werte X_b und $X_c \frac{f}{\nu l_1}$ sowie die Zahlen $\frac{y_k}{f} \nu$, wo y_k die Ordinate der durch die Gleichung

$$y_k = (l_1 - a) \frac{X_b}{X_c}$$

bestimmten Kämpferdrucklinie. Die Zahlen beweisen, daß der Einfluß von α recht erheblich ist. Da nun beim Eingelenkbogen die Steifigkeit vom Scheitel nach dem Kämpfer stärker zunimmt als beim gelenklosen Bogen, so wird es sich empfehlen, bei der ersten Überschlagsrechnung α noch kleiner zu wählen als nach dem auf Seite 351 in der Fußnote gemachten Vorschlage. Den Einfluß der Temperaturänderung wird man auf jeden Fall noch einmal genauer mittels der Formel

$$X_{ct} = \frac{\varepsilon t l_1}{\Sigma S_s^2 \frac{s}{EF}}$$

berechnen, deren Nenner sich über die Stäbe der einen Bogenhälfte erstreckt.

$\frac{a}{l_1}$	X_b		$X_c \frac{f}{\nu l_1}$		$\frac{y_k}{f} \nu$	
	$\alpha = 1$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 0$
0,0	0	0	0	0	0,600	0,400
0,1	0,007	0,001	0,0117	0,0023	0,558	0,379
0,2	0,028	0,007	0,0437	0,0162	0,513	0,355
0,3	0,061	0,023	0,0917	0,0491	0,464	0,327
0,4	0,104	0,051	0,1520	0,1037	0,411	0,296
0,5	0,156	0,094	0,2214	0,1797	0,353	0,261
0,6	0,216	0,151	0,2970	0,2743	0,291	0,220
0,7	0,282	0,223	0,3767	0,3833	0,224	0,174
0,8	0,352	0,307	0,4587	0,5018	0,153	0,122
0,9	0,425	0,401	0,5417	0,6251	0,079	0,064
1,0	0,500	0,500	0,6250	0,7500	0	0

167. Dreifach statisch unbestimmte Kettenbrücke mit drei Öffnungen.

Fig. 389. Die Ketten CA_0 , A_0B_0 und B_0D werden durch eine auf vier Stützpunkten ruhende gegliederte Scheibe versteift und sind mit

den Endpunkten dieser Scheibe befestigt. Die Verankerung der Kette wird also erspart und man kommt mit schwachen Widerlagern aus. *) Das ganze System besitzt nur ein festgehaltenes Auflagergelenk und drei in wagerechten Bahnen geführte Stützpunkte. Trennt man den Versteifungsbalken in der Mitte durch einen senkrechten Schnitt, Fig. 390, und bringt man (nach Nr. 117) an den Scheiben *I* und *II* die Kräfte X_a , X_b , X_c an, so besteht das statisch bestimmte Hauptsystem aus

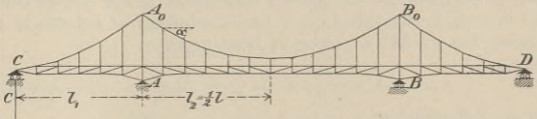


Fig. 389.

zwei Auslegerbalken, die durch die Kette miteinander verbunden sind. Den in Fig. 390 angenommenen wagerechten Verbindungsstab hat man sich unendlich klein zu denken. Bei unsymmetrischer Anordnung des Tragwerks wird die Erfüllung der Gleichungen

$$\delta_{ab} = 0, \delta_{bc} = 0, \delta_{ca} = 0$$

auf die in Nr. 117 beschriebene Weise herbeigeführt. Ist der Träger symmetrisch, so werden die beiden ersten Bedingungen durch ein senk-

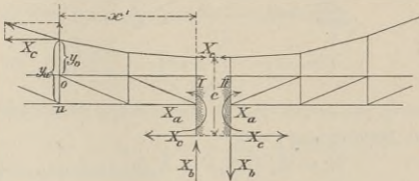


Fig. 390.

rechtes X_b und ein wagerechtes X_c befriedigt. Der Abstand c der Kraft X_c vom Scheitel der Kette wird mittels der Gleichung

$$\delta_{ac} = \sum \frac{S_a S_c s}{EF} = 0$$

*) Dafür ist allerdings der Eisenverbrauch verhältnismäßig groß. Das System wirkt aber in ästhetischer Beziehung recht vorteilhaft; es wurde von meinem ehemaligen Hörer, Herrn Diplom-Ingenieur *Eyde* bei der Mülhenthor-Brücke in Lübeck zur Ausführung gebracht. Vergl. die Mitteilungen über den Elbe-Trave-Kanal in der Zeitschrift d. Ver. deutsch. Ing. 1900.

bestimmt. Der Gang der Rechnung ist derselbe wie in dem in Nr. 162 durchgeführten Zahlenbeispiele. In den Belastungsfällen $X_a = -1$ und $X_b = -1$ werden nur die Stäbe des Versteifungsbalkens beansprucht; die Kette, die Hängestangen und der Ständer A_0A bleiben spannungslos. Es sind also nur für den Einfluß von X_c neue Formeln aufzustellen.

Der Einfluß der statisch unbestimmten Größen X auf den Widerstand C der Endstütze und auf die Momente M^o und M^u für die oberen und unteren Knotenpunkte des Versteifungsbalkens ist mit den in den Figuren 389 bis 391 angegebenen Bezeichnungen:

$$C = \frac{X_a}{l_1} + X_b \frac{l_2}{l_1} - X_c \frac{c}{l_1},$$

für die Seitenöffnung:

$$M^o = Cx + X_c y_o = X_a \frac{x}{l_1} + X_b \frac{x l_2}{l_1} - X_c \left(\frac{cx}{l_1} - y_o \right)$$

$$M^u = Cx + X_c y_u = X_a \frac{x}{l_1} + X_b \frac{x l_2}{l_1} - X_c \left(\frac{cx}{l_1} - y_u \right)$$

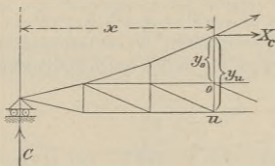


Fig. 391.

und für die Mittelöffnung

$$M^o = X_a + X_b x' - X_c (c - y_o)$$

$$M^u = X_a + X_b x' - X_c (c - y_u).$$

Näherungsformeln. Ist der Versteifungsbalken ein Parallelträger mit konstantem Gurtquerschnitte, so lassen sich einfache Näherungsformeln aufstellen, die auch im Falle schwach gekrümmter Gurtungen zur ersten Abschätzung der Querschnittsverhältnisse benutzt werden können. Die Endpunkte C der Kette sollen in der Mitte zwischen den beiden Gurtungen angenommen werden. Wir rechnen mit unendlich kleinen Feldweiten, setzen also

$$\delta_{aa} = \Sigma \frac{S_a^2 s}{EF} = \frac{1}{EFh^2} \int (M_a^o + M_a^u) dx$$

und erhalten, da für die Seitenöffnung $M_a^o = M_a^u = -\frac{x}{l_1}$ und für die Mittelöffnung $M_a^o = M_a^u = -1$ ist,

$$(1) \quad EFh^2 \delta_{aa} = 4 \int_0^{l_1} \frac{x^2}{l_1^2} dx + 4 \int_0^{l_2} dx = \frac{4}{3} (l_1 + 3l_2).$$

Nun ist weiter für die Seitenöffnung $M_b^o = M_b^u = -\frac{x l_2}{l_1}$ und für die Mittelöffnung $M_b^o = M_b^u = -x'$

$$EFh^2 \delta_{bb} = \int (M_b^{o2} + M_b^{u2}) dx = 4 \int_0^{l_1} \frac{x^2 l_2^2}{l_1^2} dx + 4 \int_0^{l_2} x'^2 dx'$$

$$(2) \quad EFh^2 \delta_{bb} = \frac{4}{3} l_2^2 (l_1 + l_2).$$

Zur Berechnung der Lage von X_c dient die Bedingung $\delta_{ac} = 0$, das ist

$$EFh^2 \delta_{ac} = \int (M_a^o M_c^o + M_a^u M_c^u) dx = 0.$$

Es genügt, diesen Wert für die Hälfte des symmetrischen Trägers zu berechnen. Für die Seitenöffnung ist

$$M_a^o M_c^o = -\frac{x}{l_1} \left(\frac{cx}{l_1} - y_o \right)$$

$$M_a^u M_c^u = -\frac{x}{l_1} \left(\frac{cx}{l_1} - y_u \right),$$

für die Mittelöffnung

$$M_a^o M_c^o = -1 \cdot (c - y_o)$$

$$M_a^u M_c^u = -1 \cdot (c - y_u),$$

und man erhält daher (wegen $y_o + y_u = 2y$) die Gleichung

$$(3) \quad \int_0^{l_1} \frac{x}{l_1} \left(\frac{cx}{l_1} - y \right) dx + \int_0^{l_2} (c - y) dx = 0$$

und nach Ausführung der Integration *unter der Voraussetzung einer parabelförmigen Kette*

$$\frac{1}{3} l_1 (c - h_p + f_1) + l_2 (c - h_p + \frac{2}{3} f_2) = 0.*$$

Hieraus folgt die einfache Gleichung

$$(4) \quad c = h_p - \frac{f_1 l_1 + 2f_2 l_2}{l_1 + 3l_2}.$$

Zu dem Werte

$$\delta_{cc} = \Sigma \frac{S_c^2 s}{EF}$$

*) Man beachte, daß $\int_0^{l_1} y x dx$ das auf die Senkrechte durch C bezogene statische Moment der Fläche ist, die von der Parabel CA_0 , dem Ständer $A_0 A$ und der Balkenachse begrenzt wird; man erhält

$$\int_0^{l_1} y x dx = \frac{h_p l_1}{2} \cdot \frac{2l_1}{3} - \frac{2}{3} f_1 l_1 \cdot \frac{l_1}{2}.$$

liefern auch die Ketten, die Hängestangen und die Ständer A_0A einen Beitrag. Es ist aber für unsere Zwecke zulässig, den Einfluß der Hängestangen und Ständer zu vernachlässigen und die Annahme $F_a = F_k \sec \alpha$ zu machen, wo F_a den Querschnitt eines um α gegen die Wagerechte geneigten Kettengliedes und F_k den Querschnitt der Kette im Scheitel bedeutet. Der Zug in einem Kettengliede ist gleich $X_c \sec \alpha$; es ist also $S_c = -1 \cdot \sec \alpha$, und man erhält für den Beitrag der Kette zu dem Werte $EFh^2 \delta_{ec}$ nach Seite 269 für eine Seitenöffnung und die halbe Mittelöffnung den Ausdruck

$$(EFh^2 \delta_{ec})_K = \frac{Fh^2}{F_k} \int_0^{l_1+l_2} dx \sec^2 \alpha = \frac{F}{F_k} h^2 \left[l_1 \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f_1^2}{l_1^2} + \frac{h_p^2}{l_1^2} \right) + l_2 \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f_2^2}{4l_2^2} \right) \right].$$

Für die linke Hälfte des Versteifungsbalkens ist der Beitrag zu $EFh^2 \delta_{ec}$:

$$(EFh^2 \delta_{ec})_B = \int_0^{l_1+l_2} (M_c^{o2} + M_c^{u2}) dx,$$

wo für die Seitenöffnung

$$\begin{aligned} M_c^{o2} + M_c^{u2} &= \left(\frac{cx}{l_1} - y + \frac{h}{2} \right)^2 + \left(\frac{cx}{l_1} - y - \frac{h}{2} \right)^2 \\ &= 2c \frac{x}{l_1} \left(\frac{cx}{l_1} - y \right) + 2y^2 - 2c \frac{yx}{l_1} + \frac{h^2}{2}, \end{aligned}$$

und für die Mittelöffnung

$$\begin{aligned} M_c^{o2} + M_c^{u2} &= \left(c - y + \frac{h}{2} \right)^2 + \left(c - y - \frac{h}{2} \right)^2 \\ &= 2c(c - y) + 2y^2 - 2cy + \frac{h^2}{2}, \end{aligned}$$

und es ergibt sich daher mit Rücksicht auf Gleichung (3)

$$\begin{aligned} (EFh^2 \delta_{ec})_B &= 2 \int_0^{l_1} y^2 dx - 2 \frac{c}{l_1} \int_0^{l_1} yx dx + 2 \int_0^{l_2} y^2 dx - 2c \int_0^{l_2} y dx + \frac{h^2}{2} (l_1 + l_2) \\ &= 2 \int_0^{l_1} y^2 dx + 2 \int_0^{l_2} y^2 dx - \frac{2c^2 (l_1 + 3l_2)^*}{3} + \frac{h^2}{2} (l_1 + l_2). \end{aligned}$$

Da nun für die Seitenöffnung

$$y = h_p \frac{x}{l_1} - y'$$

ist und für die Mittelöffnung

$$y = h_p - y'',$$

so folgt mit Rücksicht auf Gleichung (4):

$$\begin{aligned} \int_0^{l_1} y^2 dx + \int_0^{l_2} y^2 dx &= \frac{1}{3} h_p^2 l_1 - \frac{2}{3} h_p f_1 l_1 + \frac{8}{15} f_1^2 l_1 + h_p^2 l_2 - \frac{4}{3} h_p f_2 l_2 + \frac{8}{15} f_2^2 l_2 \\ &= \frac{1}{3} (l_1 + 3l_2) h_p (2c - h_p) + \frac{8}{15} (f_1^2 l_1 + f_2^2 l_2). \end{aligned}$$

*) Dieser Wert für die Summe des zweiten und vierten Gliedes der vorstehenden Gleichung folgt ohne weiteres aus Gleichung (3).

Mithin wird

$$(EFh^2 \delta_{ee})_B = \frac{16}{15} (f_1^2 l_1 + f_2^2 l_2) - \frac{2}{3} (h_p - c)^2 (l_1 + 3l_2) + \frac{1}{2} h^2 (l_1 + l_2)$$

und, da wir nur die Hälfte des Balkens berücksichtigt haben,

$$(5) \quad \frac{1}{2} EFh^2 \delta_{ee} = \frac{16}{15} (f_1^2 l_1 + f_2^2 l_2) - \frac{2}{3} (h_p - c)^2 (l_1 + 3l_2) + \frac{1}{2} h^2 (l_1 + l_2) + \frac{E}{F_k} h^2 s_o,$$

worin

$$s_o = l_1 \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f_1^2}{l_1^2} + \frac{h_p^2}{l_1^2} \right) + l_2 \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f_2^2}{4l_2^2} \right).$$

Nun lassen sich die Einflußlinien für die Größen X_a , X_b und X_c sehr schnell ermitteln. Die Gewichte

$$w = \frac{M^o + M^u}{h^2} \frac{\lambda}{EF}$$

ersetzen wir wieder durch eine stetige Belastung

$$\omega = \frac{M^o + M^u}{h^2 EF},$$

multiplizieren diese mit $\frac{1}{2} h^2 EF$ und erhalten der Reihe nach für die Seitenöffnung die folgenden Belastungsordinaten, die wir als Mittelwerte von M^o und M^u mit M bezeichnet haben. Es sind dies gewissermaßen die auf die Balkenachse bezogenen Momente

$$M_a = \frac{1}{2} (M_a^o + M_a^u) = -\frac{x}{l_1}$$

$$M_b = \frac{1}{2} (M_b^o + M_b^u) = -l_2 \frac{x}{l_1}$$

$$M_c = \frac{1}{2} (M_c^o + M_c^u) = c \frac{x}{l_1} - y,$$

und für die Mittelöffnung

$$M_a = -1, \quad M_b = -1 \cdot x', \quad M_c = c - y.$$

Die so gewonnenen Belastungsflächen sind in den Figuren 392a, b, c durch Schraffierung hervorgehoben worden, die ihnen entsprechenden Momente geben durch die entsprechenden Werte $\frac{1}{2} EFh^2 \delta_{aa}$, $\frac{1}{2} EFh^2 \delta_{bb}$, $\frac{1}{2} EFh^2 \delta_{cc}$ dividiert, die Ordinaten der Einflußlinien für X_a , X_b , X_c an. Bei der Berechnung von X_a und X_b handelt es sich um die Ermittlung der Momente für einen Balken CAD , der bei D eingespannt, bei C frei aufliegend ist und bei A ein Gelenk besitzt; während die Ordinaten der X_c -Linie sowohl über der Seitenöffnung als über der Mittelöffnung den Biegemomenten einfacher Balken CA und AB von den Stützweiten l_1 und $l = 2l_2$ proportional sind. Man vergl. auch das Zahlenbeispiel in Nr. 162. Da sich die Belastungsflächen aus Rechtecken, Dreiecken und Parabelabschnitten zusammensetzen, so können die in der Tabelle auf Seite 430 für zwanzig Teilpunkte der Stützweite berechneten Zahlen benutzt werden. Die Zeiger R , D , P weisen auf das Rechteck, das Dreieck und den Parabelabschnitt als Belastungsfläche hin; die größte Belastungshöhe ist mit α bezeichnet. Durch die über der Tabelle stehenden Figuren und die darunter stehenden Formeln dürfte die Tabelle genügend erläutert sein.)*

*) Die Zahlen ω_D haben wir bereits bei der Berechnung der durchlaufenden Balken auf Seite 402 benutzt.

Die Anwendung dieses Verfahrens auf den vorliegenden Fall liefert für die Seitenöffnung die Gleichungen:

$$X_a = -\frac{\omega_D \cdot l \cdot l_1^2}{6 \cdot \frac{1}{2} EFh^2 \delta_{aa}} = -\frac{l_1^2 \omega_D}{4(l_1 + 3l_2)}$$

$$X_b = -\frac{\omega_D l_2 l_1^2}{6 \cdot \frac{1}{2} EFh^2 \delta_{bb}} = -\frac{l_1^2 \omega_D}{4l_2(l_1 + l_2)}$$

$$X_c = \left[-\frac{\omega_D (h_p - c)}{6} + \omega_p'' \frac{f_1}{3} \right] \frac{2l_1^2}{EFh^2 \delta_c}$$

wo $\frac{1}{2} EFh^2 \delta_{cc}$ durch die Gleichung (5) bestimmt ist.

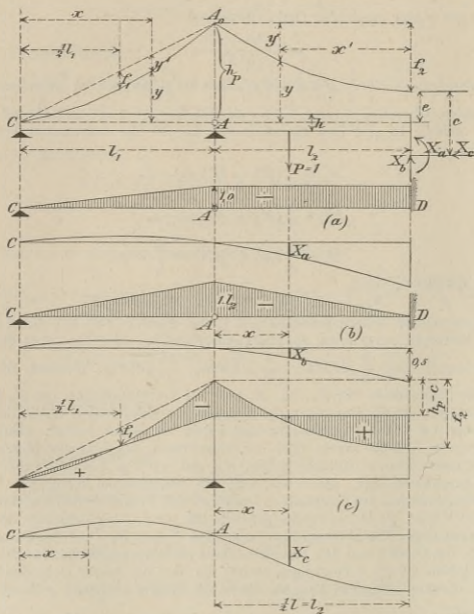


Fig. 392.

Um X_a für die Mittelöffnung zu berechnen, beachte man, daß der Koppelträger CA in Fig. 392a in A auf den Freitragler AD den Druck $\frac{2}{3} \cdot \frac{l_1}{2}$ ausübt. An der Stelle x des Freitragers entsteht also

$$M = \frac{l_1}{3} x + \frac{x^2}{2}.$$

Dividiert man diesen Wert durch $\frac{1}{2} EFh^2 \delta_{aa}$, so erhält man

$$X_a = \frac{x(2l_1 + 3x)}{4(l_1 + 3l_2)}$$

und ganz ebenso entwickelt man die Gleichung

$$X_b = \frac{l_2}{4(l_1 + l_2)} \left(2 \frac{l_1}{l_2} + 3 \frac{x}{l_2} - \frac{x^2}{l_2^2} \right) \frac{x}{l_2} \cdot *)$$

Für die Mittelöffnung erhält man

$$X_c = \left[\frac{\omega_F'' f_2}{3} - \frac{\omega_R (h_p - c)}{2} \right] \frac{2 \cdot (2l_2)^2}{EFh^2 \delta_{cc}}.$$

Die Zahlenwerte ω_F'' und ω_R dieser Gleichung entsprechen der Stützweite $l = 2l_2$.

Ist z. B. $l_1 = l_2$ und $f_1 = f_2 \frac{l_1^2}{l_2^2} = \frac{1}{4} f_2$, so ergibt sich

$$h_p - c = \frac{9}{16} f_2 = \frac{9}{4} f_1$$

und

$$\frac{1}{2} EFh^2 \frac{\delta_{cc}}{l_1} = \frac{139}{480} f_2^2 + h^2 + h^2 \frac{F}{F_k} \left(2 + \frac{5}{3} \frac{f_2^2}{l_2^2} + \frac{h_p^2}{l_2^2} \right).$$

Für $l_1 = l_2 = 32^m$, $f_2 = 8^m$, $f_1 = 2,0^m$, $h = 2,0^m$, $h_p = 10^m$ wird $h_p - c = 4,5^m$ und

$$\frac{1}{2} EFh^2 \frac{\delta_{cc}}{l_1} = 22,533 + 8,81 \frac{F}{F_k},$$

also für

$$\begin{aligned} F &= 0,51 F_k, & \frac{1}{2} \frac{EFh^2 \delta_{cc}}{l_1} &= 27 \\ F &= 0,62 F_k, & &= 28 \\ F &= 0,73 F_k, & &= 29 \\ F &= 0,85 F_k, & &= 30. \end{aligned}$$

Ist $F = 0,62 F_k$, so ergibt sich für die Seitenöffnung

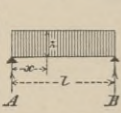
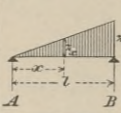


$$\begin{aligned} X_c &= \frac{32}{28} \left[-\omega_D \cdot \frac{4,5}{6} + \omega_F'' \frac{2,0}{3} \right] \\ &= -\frac{18 \omega_D + 16 \omega_F''}{21} \end{aligned}$$

und für die Mittelöffnung

$$\begin{aligned} X_c &= \frac{4 \cdot 32}{28} \left[+\omega_F'' \frac{8}{3} - \omega_R \frac{4,5}{2} \right] \\ X_c &= \frac{256 \omega_F'' - 216 \omega_R}{21}. \end{aligned}$$

*) Die für X_a und X_b gefundenen Gleichungen gelten auch für den Balken auf vier Stützen; die für X_c erhaltene auch für den in Nr. 165 untersuchten Eingelenkbalken.

Tabelle der Werte ω_R , ω_D , ω_P , ω_P'' .

				
		$\omega_R = x \frac{x}{l}$	$\omega_P = x \frac{x^2}{l^2}$	$\omega_x = \frac{4xx(l-x)}{l^2}$
	$A = B = \frac{x l}{2}$	$A = \frac{x l}{6}$ $B = \frac{x l}{3}$	$A = \frac{x l}{12}$ $B = \frac{x l}{4}$	$A = B = \frac{x l}{3}$
$M =$	$\omega_R \frac{x l^2}{2}$	$\omega_D \frac{x l^2}{6}$	$\omega_P \frac{x l^2}{12}$	$\omega_P'' \frac{x l^2}{3}$
$\frac{x}{l}$	$\omega_R = \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}$	$\omega_D = \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}$	$\omega_P = \frac{x}{l} - \frac{x^4}{l^4}$	$\omega_P'' = \frac{1}{2} \frac{x^4}{l^4} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{1}{2} \frac{x}{l}$ $= 2 \omega_D - \omega_P$ $= \omega_R (1 - \omega_R)$
0,05	0,0475	0,0499	0,0500	0,0498
0,10	0,0900	0,0990	0,0999	0,0981
0,15	0,1275	0,1466	0,1495	0,1438
0,20	0,1600	0,1920	0,1984	0,1856
0,25	0,1875	0,2344	0,2461	0,2227
0,30	0,2100	0,2730	0,2919	0,2541
0,35	0,2275	0,3071	0,3350	0,2793
0,40	0,2400	0,3360	0,3744	0,2976
0,45	0,2475	0,3589	0,4090	0,3089
0,50	0,2500	0,3750	0,4375	0,3125
0,55	0,2475	0,3836	0,4585	0,3089
0,60	0,2400	0,3840	0,4704	0,2976
0,65	0,2275	0,3754	0,4715	0,2793
0,70	0,2100	0,3570	0,4599	0,2541
0,75	0,1875	0,3281	0,4336	0,2227
0,80	0,1600	0,2880	0,3904	0,1856
0,85	0,1275	0,2359	0,3280	0,1438
0,90	0,0900	0,1710	0,2439	0,0981
0,95	0,0475	0,0926	0,1355	0,0498
$\int_0^l M dx =$	$\frac{x l^3}{12}$	$\frac{x l^3}{24}$	$\frac{x l^3}{40}$	$\frac{x l^3}{30}$

$X_a: l_1$ und X_b sind nur von dem Verhältnis $l_1: l_2$ abhängig. Man erhält für $l_1: l_2 = 1$

$$\begin{aligned} \text{für die Seitenöffnung} & \begin{cases} X_a = -\frac{\omega D}{16} \\ X_b = -\frac{\omega D}{8}, \end{cases} \\ \text{für die Mittelöffnung} & \begin{cases} X_a = \frac{1}{16} \left(2 + 3 \frac{x}{l_2} \right) \frac{x}{l_2} \\ X_b = \frac{1}{8} \left[\left(2 + 3 \frac{x}{l_2} \right) \frac{x}{l_2} - \frac{x^3}{l_2^3} \right]. \end{cases} \end{aligned}$$

Die hiernach berechneten Werte sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt worden.

Seitenöffnung				Mittelöffnung				
$\frac{x}{l_1}$	X_a	X_b	X_c	$\frac{x}{l_1}$	X_a	X_b	$\frac{x}{l}$	X_c
0,2	-0,384	-0,024	-0,043	0,2	+ 1,04	+ 0,064	0,1	+ 0,270
0,4	-0,672	-0,042	-0,105	0,4	+ 2,56	+ 0,152	0,2	+ 0,617
0,6	-0,768	-0,048	-0,146	0,6	+ 4,56	+ 0,258	0,3	+ 0,938
0,8	-0,576	-0,036	-0,125	0,8	+ 7,04	+ 0,376	0,4	+ 1,159
				1,0	+ 10,00	+ 0,500	0,5	+ 1,238

Den Einfluß von Temperaturänderungen berechne man mit Hilfe der genaueren Formeln

$$X_{at} = \frac{\sum \varepsilon t S_a s}{\sum S_a^2 \frac{s}{EF}}, \quad X_{ct} = \frac{\sum \varepsilon t S_c s}{\sum S_c^2 \frac{s}{EF}}$$

und berücksichtige die Längenänderungen sämtlicher Stäbe. X_{bt} wird = 0, weil der Träger symmetrisch ist. Die Lage von X_{ct} bestimme man mittels der Bedingung

$$\sum \frac{S_a S_c s}{EF} = 0.$$

Für den ersten Rechnungsgang empfiehlt sich die folgende Entwicklung. Man schreibe den Gliedern der Kette die Temperaturänderung t_k , der oberen Gurtung den Wert t_a und der unteren Gurtung den Wert t_u zu und lasse die Füllungsglieder, die Hängestangen und die Ständer $A_0 A$ außer acht. Man erhält dann

$$\frac{1}{2} \delta_{at} = \sum_0^{l_1+l_2} S_a \varepsilon t s = \frac{\varepsilon t_u}{h} \int_0^{l_1+l_2} M_a^o dx - \frac{\varepsilon t_a}{h} \int_0^{l_1+l_2} M_a^u dx$$

und, wegen $M_a^o = M_a^u = M_a$,

$$\frac{1}{2} \delta_{at} = \frac{\varepsilon (t_u - t_a)}{h} \int_0^{l_1+l_2} M_a dx.$$

Das Integral stellt den Inhalt der in Figur 392a schraffierten M_a -Fläche dar, weshalb

$$\frac{1}{2} \delta_{at} = \frac{\varepsilon (t_u - t_a)}{h} \left(\frac{l_1}{2} + l_2 \right)$$

und

$$X_{at} = 0,75 \varepsilon EF(t_o - t_u) \frac{h(l_1 + 2l_2)}{l_1 + 3l_2}.$$

Weiter ist

$$\frac{1}{2} \delta_{ct} = \sum_0^{l_1+l_2} \delta_c \varepsilon t s = -\varepsilon t_k \sum_0^{l_1+l_2} s \sec \alpha + \frac{\varepsilon t_u}{h} \int_0^{l_1+l_2} M_c^o dx - \frac{\varepsilon t_o}{h} \int_0^{l_1+l_2} M_c^u dx,$$

und, wegen $M_c^o = M_c + \frac{1}{2} h$ und $M_c^u = M_c - \frac{1}{2} h$,

$$\frac{1}{2} \delta_{ct} = -\varepsilon t_k s_o + \frac{1}{2} \varepsilon (t_u + t_o) (l_1 + l_2) + \frac{\varepsilon (t_u - t_o)}{h} \int_0^{l_1+l_2} M_c dx.$$

Das Integral stellt den Inhalt der in Fig. 392c schraffierten M_c -Fläche dar, und man erhält daher

$$\frac{1}{2} \delta_{ct} = -\varepsilon t_k s_o + \frac{1}{2} \varepsilon (t_u + t_o) (l_1 + l_2) + \frac{\varepsilon (t_u - t_o)}{h} \left[\frac{2}{3} (f_1 l_1 + f_2 l_2) - (h_p - c) \left(\frac{l_1}{2} + l_2 \right) \right].$$

Das letzte Glied darf als belanglos vernachlässigt werden; auch ist es zulässig, s_o durch $l_1 + l_2$ zu ersetzen; es handelt sich ja nur um eine Annäherung und die Einführung der Zahlenwerte t_o und t_u beruht ohnehin auf einer ziemlich groben Schätzung.*) Man erhält also schließlich

$$\frac{1}{2} \delta_{ct} = \varepsilon (t_u + t_o - 2t_k) \frac{l_1 + l_2}{2}$$

und

$$X_{ct} = \frac{\delta_{ct}}{\delta_{cc}}.$$

In unserem Zahlenbeispiele ist

$$l_1 = l_2, \quad h = 2^m, \quad \frac{1}{2} EFh^2 \frac{\delta_{cc}}{l_1} = 28,$$

folglich (für Flußeisen und bezogen auf Tonnen und Meter)

$$X_{at} = \frac{9}{16} \varepsilon EF(t_o - t_u) h = \frac{9}{8} \cdot 250 (t_o - t_u) F$$

$$X_{at} = 281,25 (t_o - t_u) F$$

$$X_{ct} = \varepsilon EF(t_u + t_o - 2t_k) \frac{h^2}{28} = 250 F(t_u + t_o - 2t_k) \frac{1}{7}$$

$$X_{ct} = 36 (t_u + t_o - 2t_k) F.$$

Im Falle $t_o = t_u = t_k$ wird $X_{at} = 0$ und $X_{ct} = 0$.

Liegt die obere Gurtung oberhalb der Fahrbahn, so ist sie ebenso wie die Kette der Sonnenbestrahlung ausgesetzt. Setzt man für diesen Fall $t_u = 0$, $t_o = t_k = 15^\circ$, so erhält man

$$X_{at} = 4200 F_c, \quad X_{ct} = -540 F_c,$$

wo F_c einen mittleren Gurtquerschnitt bedeutet.

*) In unserem Zahlenbeispiele würde die Summe der beiden letzten Glieder $= \frac{\varepsilon (23 t_u + 25 t_o) (l_1 + l_2)}{2 \cdot 24}$ sein, und dafür darf man setzen $\frac{1}{2} \varepsilon (t_u + t_o) (l_1 + l_2)$.

Da nun $c = 5,5^m$ und $h = 2,0^m$ ist, so entstehen in der Mittelöffnung die Gurtkräfte

$$U = \frac{M^0}{h} = + 0,5 X_{at} - 0,5 X_{ct} (5,5 - y_0)$$

$$O = - \frac{M^0}{h} = - 0,5 X_{at} + 0,5 X_{ct} (5,5 - y_0).$$

In der Mitte des Trägers ist $y_0 = 1,0^m$, $y_u = 3,0^m$, also

$$U = + 3200 F_0, \quad O = - 2800 F_0.$$

Über der Mittelstütze ist $y_0 = 9,0^m$, $y_u = 11,0^m$ und

$$U = + 1200 F_0, \quad O = - 600 F_0.$$

Wäre in der Mitte $F_0 = 1,25 F_e$ und über der Mittelstütze $F_0 = 2 F_e$, so würden sich an diesen Stellen in der oberen Gurtung die Spannungen

$$\sigma_0 = \frac{2800}{1,25} \text{ t/qm} = 224 \text{ kg/qcm} \quad \text{und} \quad \sigma_0 = - \frac{600}{2,0} = - 30 \text{ kg/qcm}$$

ergeben. Man erkennt, daß ungleichmäßige Erwärmung ziemlich erhebliche Spannungen hervorbringt. Die genauere Rechnung liefert geringere Werte, da δ_{aa} und δ_{cc} größer ausfallen.

168. Zweifach statisch unbestimmter, durch einen Balken mit parallelen Gurtungen versteifter Stabbogen. Fig. 393. Im Bogen entsteht oberhalb des Versteifungsbalkens der Horizontalschub X_a , unterhalb des Balkens der Horizontalschub X_b . Bei starren Widerlagern lauten die Elastizitätsgleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} X_a \delta_{aa} + X_b \delta_{ab} = P_m \delta_{ma} + \delta_{at} \\ X_a \delta_{ba} + X_b \delta_{bb} = P_m \delta_{mb} + \delta_{bt}. \end{cases}$$

Im Belastungsfall $X_a = - 1$ bleiben die in Fig. 393a durch gestrichelte Linien dargestellten Stäbe spannungslos.

Der Einfluß der Längenänderungen der Diagonalen des Versteifungsbalkens auf die Größen X_a und X_b ist leicht zu berücksichtigen. Es sollen daher die Gewichte w mittels der Formeln (6) und (7) auf Seite 105 berechnet werden. Für einen $\left\{ \begin{array}{l} \text{oberen} \\ \text{unteren} \end{array} \right\}$ Gurtstab von der Länge 2λ ergibt sich

$$S_a = \pm \frac{y_m}{h}, \quad \Delta s_a = \pm \frac{y_m}{h} \frac{2\lambda}{EF},$$

und für eine $\left\{ \begin{array}{l} \text{linkssteigende} \\ \text{rechtssteigende} \end{array} \right\}$ Diagonale

$$S_a = \mp \text{tg } \alpha_m \frac{d}{h}, \quad \Delta s_a = \mp \text{tg } \alpha_m \frac{d}{h} \frac{d}{EF_d},$$

wo F und F_d die konstant angenommenen Querschnitte der Gurtungen und Diagonalen bedeuten. In den Stäben des über dem Balken liegenden Bogens entstehen die Spannkraft $S_a = - \sec \alpha_m$. Der Bogen habe im Scheitel den Querschnitt F_b ; für den um α_m geneigten Stab des Bogens sei $F = F_b \sec \alpha$, so daß $\frac{S_a^2 s}{EF} = \frac{\sec^3 \alpha \lambda}{EF_b}$ wird.

Man erhält nun nach Gleich. (6), Seite 105, für einen Knotenpunkt der unteren Gurtung

$$w_m = \frac{1}{h} \left[\frac{y_m}{h} \frac{2\lambda}{EF} (+ \text{tg } \alpha_m - \text{tg } \alpha_{m+1}) \frac{d^2}{h EF_d} \frac{d}{\lambda} \right]$$

und nach Weglassung des konstanten Faktors $\frac{2\lambda}{h^2 EF}$

$$w_m = y_m + \frac{1}{2} (\operatorname{tg} \alpha_m - \operatorname{tg} \alpha_{m+1}) \lambda \frac{F}{F_d} \frac{d^3}{\lambda^3}.$$

Zu demselben Ausdrucke führt die Gleich. (7), Seite 105, für einen Knotenpunkt der oberen Gurtung. Dem Knotenpunkte 3 entspricht

$$w_3 = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha_4 \lambda \frac{F}{F_d} \frac{d^3}{\lambda^3}.$$

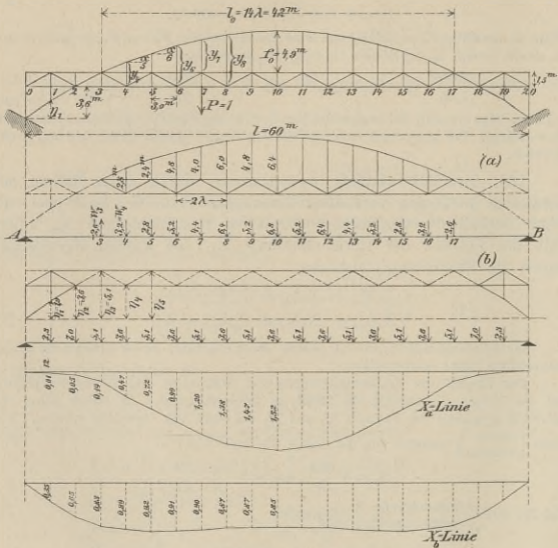


Fig. 393.

Liegen die Knotenpunkte des Bogens in einer Parabel, was hier vorausgesetzt werden möge, so ist

$$\operatorname{tg} \alpha_m - \operatorname{tg} \alpha_{m+1} = \frac{8f_0 \lambda}{l_0^2},$$

$$(2) \quad \begin{cases} w_m = y_m + 4f_0 \frac{\lambda^3}{l_0^2} \frac{F}{F_d} \frac{d^3}{\lambda^3} \\ w_3 = -\frac{y_4 - h}{2} \cdot \frac{F}{F_d} \frac{d^3}{\lambda^3} = w_{17}. \end{cases}$$

Für δ_{aa} ergibt sich der Wert

$$\delta_{aa} = \Sigma \frac{S_{\alpha}^2 s}{EF} = \Sigma \frac{16}{4} \frac{y_m^2}{h^2} \cdot \frac{2\lambda}{EF} + 2 \Sigma \frac{10}{4} \text{tg}^2 \alpha_m \frac{d^2}{h^2} \cdot \frac{d}{EF_d} + 2 \Sigma \frac{10}{4} \lambda \sec^2 \alpha \frac{1}{EF_b},$$

und wenn (genügend genau)

$$2 \Sigma \frac{10}{4} \lambda \sec^2 \alpha = l_o \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f_o^2}{l_o^3} \right) = l_o^*$$

gesetzt wird,

$$(3) \quad \delta_{aa} = \frac{2\lambda^2}{EFh^2} \left[\frac{\Sigma y_m^2}{4} + \lambda \Sigma \frac{10}{4} \text{tg}^2 \alpha_m \frac{F}{F_d} \frac{d^3}{\lambda^3} + \frac{1}{2} l_o \frac{h^2}{\lambda^3} \frac{F}{F_b} \right].$$

Schätzen wir $F_d = 0,35 F$ und $F_b = 2,5 F$, so erhalten wir mit den in die Fig. 392 eingetragenen Abmessungen

$$4 f_o \frac{\lambda^2}{l_o^2} = 4 \cdot 4,9 \frac{1}{14^2} = \frac{1}{10}, \quad \frac{F}{F_d} \cdot \frac{d^3}{\lambda^3} = \frac{1}{0,35} \cdot 1,40 = 4,0$$

$$w_m = y_m + 0,4$$

$$w_3 = w_{17} = 2,6.$$

$$\frac{16}{4} \Sigma y_m^2 = 2 (2,8^2 + 4,8^2 + 6,02^2) + 6,4^2 + 2 (2,4^2 + 4,0^2 + 4,8^2) = 264,32$$

$$4 \lambda \Sigma \frac{10}{4} \text{tg}^2 \alpha_m = \frac{4}{3,0} (1,3^2 + 1,1^2 + 0,9^2 + 0,7^2 + 0,5^2 + 0,3^2 + 0,1^2) = 6,07$$

$$\delta_{aa} = \frac{2\lambda^2}{EFh^2} [88,11 + 6,07 + 2,10] = 96,3 \frac{2\lambda^2}{EFh^2}.$$

Betrachtet man die Gewichte w als Lasten eines einfachen Balkens AB und berechnet die zugehörigen Biegemomente M'_m unter der Annahme $\lambda = 1$, so besteht zwischen den M'_m und den Durchbiegungen δ_{ma} die Beziehung

$$\delta_{ma} = \frac{2\lambda^2}{EFh^2} M'_m.$$

Für die Momente M'_m erhält man die folgenden Werte

$M'_1 = 28,0$	$M'_5 = 142,0$	$M'_9 = 201,0$
$M'_2 = 56,0$	$M'_6 = 166,6$	$M'_{10} = 209,6$
$M'_3 = 84,0$	$M'_7 = 186,0$	$M'_{11} = 213,0$
$M'_4 = 114,6$		

In Fig. 393 b sind die im Belastungsfalle $X_b = -1$ spannungslos bleibenden Stäbe durch gestrichelte Linien dargestellt worden; der obere Bogen ist spannungslos und wurde weggelassen. Man erhält für einen $\left\{ \begin{array}{l} \text{oberen} \\ \text{unteren} \end{array} \right\}$ Gurtstab von der Länge 2λ

$$S_b = \mp \frac{\tau_m}{h}, \quad \Delta s_b = \mp \frac{\tau_m}{h} \frac{2\lambda}{EF},$$

für die Diagonalen der ersten beiden Felder

$$S_b = - \text{tg} \alpha_1 \frac{d}{h}, \quad \Delta s_b = - \text{tg} \alpha_1 \frac{d^2}{hEF_d}$$

$$S_b = + \text{tg} \alpha_2 \frac{d}{h}, \quad \Delta s_b = + \text{tg} \alpha_2 \frac{d^2}{hEF_d},$$

*) Vergl. Seite 251. Für unser Beispiel ist $1 + \frac{16}{3} \frac{f_o^2}{l_o^3} = 1,07$.

für den unteren Bogen

$$S_b = -\sec \alpha_m, \quad \Delta s_b = -\sec \alpha_m \frac{\lambda}{EF_b},$$

und gelangt (nach Division der Gewichte w mit $\frac{2\lambda}{EFh^2}$) zu den Formeln

$$(4) \quad \begin{cases} w_1 = \tau_{11} + \frac{\lambda}{2} (\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2) \frac{F}{F_d} \frac{d^3}{\lambda^3} = \tau_{11} + 4f_0 \frac{\lambda^3}{l_0^2} \frac{F}{F_d} \frac{d^3}{\lambda^3} = w_{19} \\ w_2 = \tau_{12} + \frac{\lambda}{2} \operatorname{tg} \alpha_2 \frac{F}{F_d} \frac{d^3}{\lambda^3} = w_{18} \\ w_m = \tau_m \text{ (gültig für } m = 3 \text{ bis } m = 17), \end{cases}$$

$$(5) \quad \delta_{bb} = \frac{2\lambda^2}{EFh^2} \left[\frac{\sum_1^{19} \tau_m^2}{\lambda} + \lambda (\operatorname{tg}^2 \alpha_1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2) \frac{F}{F_d} \frac{d^3}{\lambda^3} + 2\lambda^* \right] \cdot \frac{h^2}{\lambda^2} \frac{F}{F_b},$$

$$(6) \quad \delta_{ab} = \sum S_a S_b \frac{s}{EF} = \sum_4^{16} y_m \tau_m \frac{2\lambda}{EFh^2}.$$

Die Einsetzung der Zahlenwerte liefert

$$w_1 = w_{19} = \tau_{11} + 0,4 = 2,3$$

$$w_2 = w_{18} = 3,6 + \frac{3,6 - 1,9}{2} \cdot 4 = 7,0$$

$$w_m = \tau_m$$

$$\sum_1^{19} \tau_m^2 = 2 \cdot 1,9^2 + 9 \cdot 3,6^2 + 8 \cdot 5,1^2 = 331,94$$

$$\lambda (\operatorname{tg}^2 \alpha_1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2) = \frac{1,9^2 + 1,7^2}{3,0} = \frac{6,5}{3}$$

$$\sum_4^{16} y_m \tau_m = 3,6 (2,8 + 4,8 + 6,0) 2 + 3,6 \cdot 6,4 + 5,1 (2,4 + 4,0 + 4,8) 2 = 235,20$$

$$\delta_{bb} = \frac{2\lambda^2}{EFh^2} [110,65 + 8,67 + 0,60] = 120 \frac{2\lambda^2}{EFh^2}$$

$$\delta_{ab} = \frac{2\lambda^2}{EFh^2} \cdot 78,4.$$

Die Momente M'' infolge der Gewichte w sind für $\lambda = 1$

$$\begin{array}{l|l|l} M_1'' = 42,3 & M_5'' = 167,5 & M_9'' = 212,8 \\ M_2'' = 82,3 & M_6'' = 186,7 & M_{10}'' = 219,7 \\ M_3'' = 115,3 & M_7'' = 202,3 & \\ M_4'' = 143,2 & & \end{array}$$

Zwischen den Momenten M_m'' und den Durchbiegungen δ_{mb} besteht die Beziehung

$$\delta_{mb} = \frac{2\lambda^2}{EFh^2} M_m''.$$

Die Gleichungen (1) gehen also über in

$$96,3 X_a + 78,4 X_b = M_m' + \frac{EFh^2}{2\lambda^2} \delta_{at}$$

$$78,4 X_a + 120 X_b = M_m'' + \frac{EFh^2}{2\lambda^2} \delta_b,$$

*) An Stelle von $\frac{1}{2} l_0$ in Gleich. (3) setzen wir 2λ ; rechnen also mit $\sec \alpha = 1$. Da $F: F_b$ ohnehin geschätzt werden muß, ist dies zulässig.

welche die Berechnung von X_a, X_b, \dots, X_k gestatten, vorausgesetzt, daß die Größen X_{k+1} bis X_n bereits bekannt sind. An die Stelle des statisch bestimmten Hauptsystems ist ein $(n-k)$ -fach unbestimmtes System getreten. Daß diese Einführung eines unbestimmten Hauptsystems zuweilen sehr nützlich ist, wird die Lösung der folgenden Aufgaben zeigen.

170. Kettenbrücke über drei Öffnungen mit durchlaufendem Versteifungsbalken und Rückhaltketten. Fig. 394. Es handle sich um den ersten Rechnungsgang, und es möge der Horizontalzug X_c der Kette infolge einer Einzellast $P=1$ und einer gleichmäßigen Erwärmung unter der Voraussetzung bestimmt werden, daß für den Balken die in Nr. 160 (Seite 393) eingeführten Annahmen gemacht werden

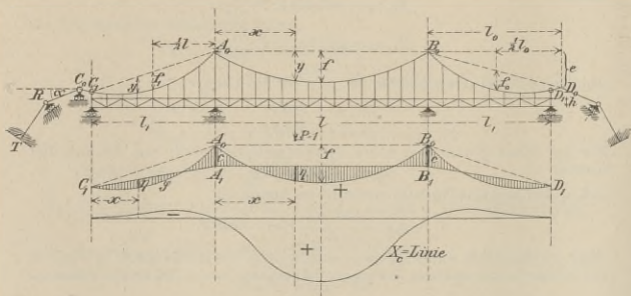


Fig. 394.

dürfen und der Querschnitt eines unter α gegen die Wagerechte geneigten Kettengliedes $F_a = F_b \sec \alpha$ ist, wo F_b den Querschnitt der Kette im Scheitel bedeutet. Die ganz unwesentlichen Längenänderungen der Hängestangen sollen vernachlässigt werden. Die Kettenlinien seien durch stetig gekrümmte Parabeln ersetzt. Die Bezeichnungen sind aus der Figur zu ersehen; man achte darauf, daß für die Kette über der Seitenöffnung der auf die Sehne $D_0 B_0$ bezogene Pfeil mit f_0 und der zur Sehne $C_1 A_0$ gehörige mit f_1 bezeichnet worden ist. Man begeht aber keinen wesentlichen Fehler, wenn man in den folgenden Formeln f_0 und l_0 durch f_1 und l_1 ersetzt.

Wäre die Kette durch drei Einzelbalken versteift (Fig. 299, Seite 291), so wäre das durch die Ursache $X_c = -1$ hervorgerufene

Angriffsmoment für irgend einen Knotenpunkt der oberen oder unteren Gurtung:

$$M^o = M^u = 1 \cdot y,$$

wo y die dem Knotenpunkte entsprechende Ordinate der Kette, bezogen auf den Sehnzug $C_1 A_0 B_0 D_1$ bedeutet. Da nun aber der Versteifungsbalken ein durchlaufender ist, so tritt an die Stelle des Sehnzuges $C_1 A_0 B_0 D_1$ der durch die Stützenmomente c bestimmte Linienzug $C_1 A_1 B_1 D_1$. Für die Strecke c ergibt sich nach Gleich. (34), Seite 400, die Beziehung

$$2c(l_1 + l) + cl = N,$$

wo N nach Gleich. (54), Seite 404, für eine gleichförmige Belastung zu berechnen ist, die für die Längeneinheit der Seitenöffnung x_1 und der Mittelöffnung x beträgt, und durch die Gleichungen

$$1 \cdot f_1 = \frac{x_1 l_1^2}{8}, \quad 1 \cdot f = \frac{x l^2}{8}$$

bestimmt ist. Man erhält also

$$N = -\frac{x_1 l_1^3}{4} - \frac{x l^3}{4} = -2(f_1 l_1 + fl)$$

und absolut genommen,

$$(1) \quad c = \frac{2(f_1 l_1 + fl)}{2l_1 + 3l}.$$

Damit sind die Momente

$$M_c^o = M_c^u = \eta$$

für den Belastungszustand $X_c = -1$ des statisch unbestimmten Hauptsystems gefunden, und die Berechnung von

$$X_c = P \frac{\delta_{m_c}}{\delta_{c_c}} + 1 \frac{\delta_{c_t}}{\delta_{c_c}}$$

auf eine sehr einfache Aufgabe zurückgeführt. Bezeichnet man mit h die Höhe des Balkens und mit F den mittleren Gurtquerschnitt, so erhält man, mit Beachtung der Entwicklungen auf Seite 270,

$$\begin{aligned} \delta_{c_c} &= \int (M_c^o{}^2 + M_c^u{}^2) \frac{dx}{EFh^2} + \frac{1}{EF_k} \int dx \sec^2 \alpha + \frac{2s' \sec \alpha'}{EF_k} \\ &= \frac{2}{EFh^2} \left[2 \int_0^{l_1} \eta^2 dx + \int_0^l \eta^2 dx \right] + \frac{s_o}{EF_k}, \end{aligned}$$

wo

$$(2) \quad s_o = 2l_o \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f_o^2}{l_o^2} + \frac{e^2}{l_o^2} \right) + l \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f^2}{l^2} \right) + 2s' \sec \alpha'.$$

s' bedeutet die Länge einer Rückhaltkette C_0RT und α' den Neigungswinkel des obersten Gliedes C_0R , vergl. Seite 175. Für die beiden Integrale ergeben sich die Werte

$$\int_0^{l_1} \eta^2 dx = \int_0^{l_1} \left(y - c \frac{x}{l_1} \right)^2 dx = \frac{8}{15} f_1^2 l_1 - \frac{2cf_1 l_1}{3} + \frac{c^2 l_1}{3}$$

$$\int_0^l \eta^2 dx = \int_0^l (y - c)^2 dx = \frac{8}{15} f^2 l - \frac{4cfl}{3} + c^2 l$$

und es folgt schließlich mit Beachtung von Gleichung (1) die Formel

$$(3) \quad \frac{EFh^2}{2} \delta_{ee} = \frac{8}{15} (2f_1^2 l_1 + f^2 l) - \frac{c^2}{3} (2l_1 + 3l) + \frac{s_0 h^2}{2} \frac{F}{F_k}$$

Die δ_{ee} -Linie ist die Biegelinie des Balkens für den Belastungszustand $X_e = -1$. Die endlichen Gewichte w_e ersetzen wir durch

$$dw_e = (M_e^o + M_e^u) \frac{dx}{EFh^2} = \frac{2\eta dx}{EFh^2}$$

und erhalten die Werte $\frac{EFh^2}{2} \delta_{ee}$ als Ordinaten einer Seillinie die mit der Polweite 1 zu der in Fig. 394 schraffierten Belastungsfläche gezeichnet ist. Wird die Polweite gleich $\frac{EFh^2}{2} \delta_{ee}$ gewählt, so ist die Seillinie die Einflußlinie für X_e . Da die Belastungsfläche aus Dreiecken, Parabelabschnitten und einem Rechtecke besteht, führt die Rechnung ebenfalls schnell zum Ziele. Mit der Bezeichnung

$$(4) \quad \frac{8}{15} (2f_1^2 l_1 + f^2 l) - \frac{c^2}{3} (2l_1 + 3l) + \frac{s_0 h^2}{2} \frac{F}{F_k} = k^3$$

ergibt sich für die Seitenöffnung, deren Belastungsfläche gleich dem Unterschiede des Parabelabschnittes C_1SA_0 und des Dreiecks $C_1A_0A_1$ ist, nach der Tabelle auf Seite 430

$$(5) \quad X_e = \frac{1}{k^3} \left(\frac{1}{3} \omega_P' f_1 l_1^2 - \frac{1}{6} \omega_D c l_1^2 \right)$$

und für die Mittelöffnung

$$(6) \quad X_e = \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{3} \omega_P' f l^2 - \frac{1}{2} \omega_R c l^2 \right).$$

Infolge einer gleichmäßigen Erwärmung um t entsteht

$$(7) \quad X_{e,t} = \frac{\varepsilon t \sum S_e s}{\delta_{ee}},$$

wo für die obere bzw. untere Gurtung des Balkens

$$S_e = -\frac{M_e^u}{h}, \quad S_e = +\frac{M_e^o}{h}$$

und für die Kette

$$S_c = -1 \cdot \sec \alpha.$$

Da $M_c^u = M_c^o$ ist, wird für den Balken $\sum S_c s = 0$. Für die Kette ist $\sum S_c s = -s_o$, mithin

$$(8) \quad X_{ct} = -\frac{\varepsilon E F t s_o h^2}{2k^3}.$$

Zahlenbeispiel. Es sei $l_1 = \frac{1}{2}l = 30^m$, $f_1 = \frac{1}{4}f = 2^m$, $e = 9^m$, $h = 1,5^m$, $s' = 12^m$, $\sec \alpha' = 1,05$. Dann ergibt sich (wenn $l_o = l_1$ und $f_o = f_1$ gesetzt wird)

$$c = \frac{9}{4}f_1 = 4,5^m$$

$$\frac{s_o}{2l_1} = 2 + \frac{16}{3} \left(\frac{1}{15}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \frac{16}{3} \left(\frac{2}{15}\right)^2 + \frac{12 \cdot 1,05}{30} = 2,63$$

$$k^3 = \frac{139}{30} \frac{f_1^2 l_1}{v} = 556 \frac{1}{v},$$

wo

$$v = \frac{1}{1 + \frac{30}{139} \cdot \frac{s_o}{2l_1} \frac{h^2}{f_1^2} \frac{F}{F_k}} = \frac{1}{1 + 0,32 \frac{F}{F_k}}.$$

Man erhält also

$$\text{für die Seitenöffnung } X_o = (1,079 \omega_F' - 1,214 \omega_D) v,$$

$$\text{für die Mittelöffnung } X_o = (17,266 \omega_F' - 14,568 \omega_D) v,$$

und ist nun imstande, die X_c -Linie mit Hilfe der auf Seite 430 stehenden Tabelle für verschiedene Werte von v schnell zu berechnen.

Die Angriffsmomente für den Versteifungsbalken sind

$$M^o = M^u = M_o - X_c \eta_1,$$

wo M_o das Moment für den nicht an der Kette hängenden, zweifach statisch unbestimmten durchlaufenden Balken bedeutet. Die Momente M_o werden am zweckmäßigsten nach dem in Nr. 160 angegebenen Verfahren ermittelt; sie sind unabhängig von v .

Gleichmäßige Erwärmung erzeugt

$$X_{ct} = -\varepsilon E F_k t \frac{30}{139} \frac{s_o}{2l_1} \frac{h^2}{f_1^2} \frac{F}{F_k} v$$

und dieser Ausdruck läßt sich umformen in

$$X_{ct} = -\varepsilon E F_k t (1 - v).$$

Für $F : F_k = 0,4 \quad 0,5 \quad 0,6 \quad 0,7$

erhält man $v = 0,89 \quad 0,86 \quad 0,84 \quad 0,82$

und mit $\varepsilon E = 250$, $t = 35^\circ$

$$-\frac{X_{ct}}{F_k} = 963, \quad 1225, \quad 1400, \quad 1575.$$

Den einzusetzenden Wert v ermittle man mit Hilfe von Versuchsrechnungen. v hängt u. a. von dem Verhältnis der ständigen Belastung zur Verkehrslast ab und ist für Kabelbrücken kleiner als für Kettenbrücken.

171. Ganz in derselben Weise wird das in Fig. 395 dargestellte Tragwerk untersucht. Der durchlaufende Balken ist nur in der Mittelöffnung mit der Kette durch Hängestangen befestigt. Die Gleichung zur Berechnung von c lautet

$$2c(l_1 + l) + cl = -\frac{\alpha l^3}{4} = -2fl$$

und liefert, absolut genommen,

$$(1) \quad c = \frac{2fl}{2l_1 + 3l}.$$

Weiter wird

$$(2) \quad s_0 = l \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f^2}{l^2} \right) + 2s' \sec \alpha',$$

wo s' die Länge einer Rückhaltkette A_0T bedeutet.

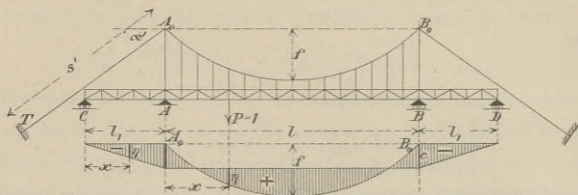


Fig. 395.

Über der Seitenöffnung wird $\eta = c \frac{x}{l_1}$, mithin ist

$$\int_0^{l_1} \eta^2 dx = \frac{c^2 l_1}{3}$$

und

$$k^3 = \frac{EFh^2 \delta_{cc}}{2} = \frac{2c^2 l_1}{3} + \frac{8}{15} f^2 l - \frac{4cfl}{3} + c^2 l + \frac{s_0 h^2 F}{2F_k},$$

wofür man mit Rücksicht auf Gleich. (1) auch setzen darf

$$(3) \quad k^3 = \frac{4}{15} f^2 l \frac{4l_1 + l}{2l_1 + 3l} + \frac{s_0 h^2 F}{2F_k}.$$

Die Gleichung der X_c -Linie lautet

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{für die Seitenöffnung } X_c = -\frac{1}{6} \omega_D \frac{c l_1^2}{k^3} \\ \text{„ „ Mittelöffnung } X_c = \frac{1}{k^3} \left(\frac{1}{3} \omega_P' f l^2 - \frac{1}{2} \omega_R c l^2 \right). \end{array} \right.$$

wo

$$(5) \quad \nu = \frac{1}{1 + \frac{5}{4} \frac{s_0}{l} \frac{h^2}{f^2} \frac{F'}{F_k}}$$

Der Einfluß einer gleichmäßigen Temperaturänderung um t° ist

$$(6) \quad X_{ot} = -\varepsilon E F_k t (1 - \nu).$$

§ 17.

Aufgaben über statisch unbestimmte mehrteilige Fachwerkbalken.

173. Im ersten Bande (Nr. 229 bis 230) haben wir die angenäherte Berechnung statisch unbestimmter mehrteiliger Fachwerke nach dem zurzeit fast allein üblichen Verfahren der Zerlegung in statisch bestimmte Teilsysteme gezeigt und bereits dort darauf hingewiesen, daß die genauere Berechnung nicht immer entbehrt werden kann, weil diese Zerlegung öfter zu wenig befriedigenden Ergebnissen führt. Es soll daher die strengere Untersuchung dieser in neuerer Zeit wieder mehr in den Vordergrund getretenen Systeme an zwei Beispielen erläutert werden. Vorweg heben wir hervor, daß die Längenänderungen der Füllungsstäbe nicht vernachlässigt werden dürfen. Bei den vom Verfasser untersuchten mehrteiligen Netzwerken lieferte eine zuerst auf Grund der Zerlegung in statisch bestimmte Teilsysteme durchgeführte Berechnung Stabquerschnitte, die sich zur Einführung in den genaueren Rechnungsgang eigneten. Denn es kommt bei der Aufstellung der Elastizitätsgleichungen nicht auf die Querschnittsinhalte selbst an, sondern nur auf das gegenseitige Verhältnis dieser Inhalte. Die Spannungszustände $X = -1$ sind namentlich für Netzwerke mit parallelen Gurtungen ganz außerordentlich einfach, so daß die genaue Berechnung dieser Fachwerke keineswegs umständlicher ist als die vieler anderer mehrfach statisch unbestimmter Systeme.

1. Untersuchung eines zweiteiligen Netzwerks mit gebrochenen Gurtungen.

Figuren auf Tafel 7.

174. Es soll der in Fig. 397 dargestellte Fachwerkträger untersucht werden. Stützweite 36^m , Höhe in der Mitte 6^m , an den Enden 2^m , Feldweite $3,6^m$. Die Knotenpunkte der Gurtungen liegen in Parabeln. Der Träger ist *einfach* statisch unbestimmt. Als statisch nicht bestimmbarer Größe möge die Spannkraft X des Stabes II' eingeführt werden.

Zuerst wurden in Fig. 400 die Spannkräfte (S_i) für den Zustand $X = -1$ ermittelt, und zu diesem Zwecke der Reihe nach die Kräftepolygone für die Knotenpunkte $l, l', k, k', i, i', \dots$ gezeichnet. Zugkräfte wurden blau, Drücke rot ausgezogen. Die Gurtkräfte wechseln von Fach zu Fach die Vorzeichen, ebenso die Spannkräfte in den Schrägstäben. Es genügte, die Stabkräfte der linken Trägerhälfte darzustellen; rechts von der Mitte ergeben sich dieselben Werte, nur mit entgegengesetzten Vorzeichen. Die Ergebnisse wurden in die Fig. 402 eingeschrieben (blaue Zahlen).

Die nächste Arbeit bestand in der Aufzeichnung der Biegelinie für den Zustand $X = -1$. — Ist nämlich

δ_{ll} die gegenseitige Verschiebung des Punktpaares l, l' infolge $X = -1$ und im Sinne $X = -1$,

δ_{ml} die Verschiebung des Angriffspunktes m einer Last P_m im Sinne von P_m und infolge von $X = -1$,

so ist der Einfluß von P_m auf X :

$$(1) \quad X = P_m \frac{\delta_{ml}}{\delta_{ll}}.$$

Wird also die Lasteinheit durch eine Strecke von der Länge δ_{ll} dargestellt, so erzeugt eine in m angreifende Last Eins im überzähligen Stabe die Spannkraft $X = \delta_{ml}$. Die fragliche Biegelinie ist dann gleichbedeutend mit der X -Linie; ihre Ermittlung muß durch eine Querschnittsabschätzung eingeleitet werden, und zwar kommt es hierbei nur auf das gegenseitige Verhältnis der Stabquerschnitte an, weil in Gleich. (1) nur das Verhältnis zwischen zwei Ordinaten der Biegelinie vorkommt. Aus demselben Grunde darf, falls E für sämtliche Stäbe den gleichen Wert besitzt, was hier vorausgesetzt wird, $E = 1$ angenommen werden. Die Zahlen in der linken Hälfte der Figur 401 geben nun die Stablängen in dm an, in der rechten Hälfte die abgeschätzten Querschnittsverhältnisse und die roten Zahlen in Figur 402 schließlich die hiernach berechneten Längenänderungen der Stäbe für den Zustand $X = -1$. Beispielsweise entspricht einem Schrägstabe des dritten Faches:

$$\Delta s_l = \frac{S_l s}{EF} = + \frac{0,50 \cdot 61}{1 \cdot 0,6} = + 5,1.$$

Die Einheiten sind gleichgültig, da es sich nur um das Verhältnis $\delta_{ml} : \delta_{ll}$ handelt. Die Bestimmung der Biegelinie erfolgte mit Hilfe eines Williot'schen Verschiebungsplanes. Zuerst wurde Punkt a , und die Richtung des Stabes aa' festliegend angenommen und aa' gleich der Längenänderung $\Delta 0$ des Stabes 0 gemacht. An a und a' wurde b mit Hilfe von $\Delta 1$ und $\Delta 2$ angeschlossen, hierauf der in bezug auf

die Wagerechte durch die Mitte von aa' symmetrisch zu b liegende Punkt b' bestimmt, sodann c fest gelegt mittels $\Delta 3$ und $\Delta 4$, nunmehr c' symmetrisch zu c liegend gefunden u. s. w. *) Man vergleiche die ausführliche Beschreibung des Williotschen Verfahrens im § 1 und namentlich die Untersuchung in Nr. 34 (Fig. 39), in welcher die Herleitung der Biegungslinie aus dem Verschiebungsplane eingehend erörtert worden ist. In Fig. 398 stellt die ausgezogene Zickzacklinie die Biegungslinie für den Fall *Fahrbahn unten* vor, die strichpunktierte für den Fall *Fahrbahn oben*, beide bezogen auf die Gerade al als Nullachse. Da im Verschiebungsplan der Punkt l' oberhalb l liegt (also ebenso wie im Fachwerke), so ist die gegenseitige Verschiebung $\delta_{ll'}$ des Punktpaares l, l' positiv, und es entsprechen daher nach Gleichung (1) den positiven $\delta_{m'l'}$, d. h. den abwärts gerichteten Verschiebungen, auch positive Werte X . In Figur 398 sind die positiven und negativen Zweige der als X -Linien aufzufassenden Biegungslinien durch blaue beziehungsweise rote Schraffierung besonders kenntlich gemacht. Da sich die Strecke $\delta_{ll'} = 42,7^{mm}$ ergab, so ist der Maßstab für die X -Linien: $1' = 42,7^{mm}$.

Nach Aufzeichnung der X -Linien lassen sich die Einflußlinien für die übrigen Stabkräfte leicht bestimmen. Wir begnügen uns damit, die Untersuchung eines Füllungsstabes und eines Gurtstabes durchzuführen.

1. *Ermittlung der Spannkraft D im Füllungsstabe $h'g$, Fig. 403.* Bezeichnet D_0 den Wert von D für den Fall, daß das Fachwerk durch Beseitigung des Stabes ll' statisch bestimmt gemacht wird, so gilt für jeden Belastungszustand die Gleichung:

$$(2) \quad D = D_0 - S_l X = D_0 + 0,43 X.$$

Zur Bestimmung der D_0 -Linie wurde das Band I Nr. 215 beschriebene Verfahren benutzt und zu diesem Zwecke das statisch bestimmte Hauptsystem durch Beseitigung des Stabes $h'g$ in eine zwangläufige kinematische Kette verwandelt. Es wurde zunächst die starre gegliederte Scheibe $aa'g'hga$ ruhend angenommen, dem Punkte h' eine Geschwindigkeit von vorläufig willkürlicher Größe erteilt und nun der Reihe nach die Geschwindigkeit von i , von i' u. s. w. nach dem Williotschen Verfahren bestimmt. Die Punkte g, g', h des Geschwindigkeitsplanes Fig. 404a fallen mit dem Pole zusammen; $g'h'$ ist rechtwinklig zur Richtung des Stabes $g'h'$, ebenso $h'i \perp h'i$, $hi \perp hi$ u. s. w. Die ausgezogene Zickzacklinie in Fig. 404b liefert — bezogen auf die Nullachse la — die senkrechten Seitengeschwindigkeiten der Punkte

*) Die Hilfslinien sind mit Ausnahme der zur Bestimmung von a dienenden wieder weggelöscht worden. Der Maßstab wurde so gewählt, daß eine Längenänderung $\Delta s = 10$ durch eine Strecke von 5^{mm} Länge dargestellt wird.

der unteren Fachwerksgurtung, die strichpunktierte diejenigen der Punkte der oberen Gurtung. Entspricht dem Punkte i beispielsweise die Ordinate δ_i , und bezeichnet δ die Projektion der Geschwindigkeit $g'h'$ auf die Richtung des Füllungsstabes D , so ist der Einfluß einer in i angreifenden senkrechten Last $1'$ auf die Spannkraft D_0 (nach dem Gesetz der virtuellen Verschiebungen): durch die Gleichung bestimmt:

$$D_0 \delta + 1 \cdot \delta_i = 0,$$

und man erhält — für den Kräftemaßstab $1' = \delta$ —

$$D_0 = -\delta_i.$$

Die beiden Linienzüge in Fig. 404b sind also die Einflußlinien für D_0 , der ausgezogene für *Fahrbahn unten*, der strichpunktierte für *Fahrbahn oben*. Rechts von g, g' fallen beide Einflußlinien zusammen. Die positiven und negativen Zweige dieser Linien wurden wieder durch blaue beziehungsweise rote Schraffierung kenntlich gemacht. Der Maßstab lautet: $25^{mm} = 1'$.

In den Figuren 405a und 406a sind nun die aus den D_0 -Linien mittels der Gleichung (2) abgeleiteten D -Linien dargestellt worden. Dabei geschah die Ermittlung der Werte $0,43 X$ mit Hilfe einer Geraden, welche in Fig. 398b auf die Weise bestimmt wurde, daß durch den oberen Endpunkt von δ_{II} parallel zur Nullachse eine Gerade gezogen und auf dieser von der Senkrechten durch a aus die dem Stabe $h'g$ entsprechende Spannkraft $S_i = 0,43$ abgesetzt wurde. Diese Spannkraft ist dem ebenfalls im Maßstabe $25^{mm} = 1'$ gezeichneten Kräfteplane des Zustandes $X = -1$, Figur 400, entnommen worden. Der Verschiedenheit der Maßstäbe der X -Linien in Figur 398 und der D -Linien ist hierdurch Rechnung getragen, und es konnten daher die Ordinaten der D_0 -Linien mit denjenigen der $0,43 X$ -Linie ohne weiteres (mit Berücksichtigung der Vorzeichen!) addiert werden. Beispielsweise ist, absolut genommen,

$$\eta_i = \delta_i - \delta_i' \text{ (Fig. 405a, 404b und 398a),}$$

und η_i negativ, weil $\delta_i > \delta_i'$.*)

Dem hiermit erledigten genaueren Verfahren ist nun folgendes Näherungsverfahren gegenübergestellt worden. Es wurde vorausgesetzt, daß Diagonale hg' spannungslos sei, daß also der durch $h'g$ geführte senkrechte Schnitt im ganzen nur drei beanspruchte Stäbe treffe. Die Einflußlinie besteht dann sowohl für *Fahrbahn unten* als auch für *Fahrbahn oben* aus drei Geraden AL_1, L_1L_2, L_2B (Fig. 405b und 406b) und wird erhalten, indem man Strecke AJ gleich der Spannkraft D_A

*) Für den Fall obeliegender Fahrbahn werden die Ordinaten der D -Linie bei l' und a' nicht genau gleich Null; sie ergaben sich aber — selbst in der vom Verfasser im doppelten Maßstabe hergestellten Zeichnung — so klein, daß sie $= 0$ gesetzt werden durften.

macht, welche im fraglichen Füllungsstabe durch einen Auflagerwiderstand $A = 1$ hervorgerufen wird, und indem man ferner die Strecke L_2H gleich der Seitenkraft $[D]$ macht, die in Fig. 407 durch Zerlegung der Lasteinheit nach den Richtungen U und D gewonnen wurde. Die Bestimmung von D_A erfolgte in Fig. 407 nach dem Culmannschen Schnittverfahren; die Schnittpunkte (U, A) und (O, D) in Figur 403 wurden durch die Gerade (L) verbunden; hierauf wurde $A = 1'$ nach den Richtungen U und L zerlegt, schließlich L nach den Richtungen O und D . Nachdem auf diese Weise der Linienzug AL_1L_2B festgelegt war, wurde angenommen, daß Lasten, welche in den Knotenpunkten $k, i', h, g', f, e', d, c', b$ des die fragliche Diagonale D nicht enthaltenden Strebenzuges angreifen, auch keinen Einfluß auf die Spannkraft D haben — sie wirken gewissermaßen auf das andere Teilfachwerk — und aus dieser Annahme ergeben sich schließlich die in den Figuren 405b und 406b schraffierten angenäherten D -Flächen.

Wir wollen nun die Ergebnisse der genaueren und genäherten Rechnungsweise prüfen und setzen hierbei einen Zug von Lokomotiven mit den aus den Figuren ersichtlichen Radständen und Achsenbelastungen voraus. Die Mittelachse des Tenders ist von der Mittelachse der Lokomotive um die doppelte Feldweite entfernt — eine sehr ungünstige Annahme. Den eingezeichneten Zugstellungen entsprechen die folgenden Werte:

	<i>Fahrbahn unten.</i>	<i>Fahrbahn oben.</i>
genau	$\begin{cases} \max D_p = \Sigma P \eta = + 31' \\ \min D_p = \Sigma P \eta = + 11' \end{cases}$	$\begin{cases} \max D_p = + 24' \\ \min D_p = - 19' \end{cases}$
angenähert	$\begin{cases} \max D_p = + 25,5' \text{ (Fehler } 21\%) \\ \min D_p = - 11' \end{cases}$	$\begin{cases} \max D_p = + 19' \text{ (Fehler } 21\%) \\ \min D_p = - 20' \end{cases}$

Die ständige Belastung sei $g = 1,74'$ f. d. Mtr., also $= 1,74 \cdot 3,6 = 6,3'$ für jeden Knotenpunkt. Es stellt sich heraus, daß die genaueren und genäherten Einflußlinien dieselben Ergebnisse liefern, nämlich:

$$\text{für Fahrbahn unten } D_g = 6,3 \cdot 0,62 = 4',$$

$$\text{für Fahrbahn oben } D_g = 0.$$

2. *Spannkraft in einem Gurtstabe.* Der einzuschlagende Weg ist derselbe wie bei Untersuchung der Füllungsstäbe. Durch Beseitigung des Stabes $i'h'$, nach dessen Spannkraft O (Fig. 408) gefragt sei, wurde das statisch bestimmte Hauptnetz in eine zwangläufige kinematische Kette verwandelt und nun wurden mit Hilfe eines Geschwindigkeitsplanes (Band I, Seite 503 u. Fig. 499b) die O_0 -Linien für die beiden Fälle *Fahrbahn unten* und *Fahrbahn oben* gezeichnet. Die Geschwindig-

keit hi' des Punktes i' wurde so gewählt, daß die Projektion von hi' auf die Richtung von O gleich 25^{mm} ist. Der Kräftemaßstab für die O_0 -Linien lautet dann: $1' = 25^{\text{mm}}$.

Dem Stabe $i'h'$ entspricht $S_i = -0,30$, weshalb

$$O = O_0 - S_i X = O_0 + 0,30 X,$$

und hierdurch ist die O -Linie gegeben; sie wurde in kleinerem Maßstabe ($1' = 12,5^{\text{mm}}$) gezeichnet — für *Fahrbahn unten* in Fig. 410a, für *Fahrbahn oben* in Fig. 411a.*)

Die Figuren 410b und 411b enthalten die Ergebnisse der Näherungstheorie; es wird genügen, die Entwicklung von 410b zu beschreiben. Der fragliche Gurtstab liegt in dem einen der beiden Teilfachwerke dem Knotenpunkte h gegenüber, in dem anderen dem Knoten i . Bezeichnen M_h, M_i die Angriffsmomente, bezogen auf h bzw. i und r_h, r_i die Lote von h und i auf O , so ergibt sich — jenachdem die Spannkraft im Stabe ih' oder im Stabe $i'h$ gleich Null angenommen wird —

$$-O = \frac{M_h}{r_h} \quad \text{oder} \quad -O = \frac{M_i}{r_i}.$$

Die Einflußlinie für $M_h : r_h$ besteht aus den Geraden $A'H$ und HB' ; sie ist bestimmt durch

$$\overline{HH'} = \frac{x_h x_h'}{l r_h} = \frac{(3 \cdot 3,6)(7 \cdot 3,6)}{(10 \cdot 3,6) \cdot 5,34} = 1,42,$$

während die aus den Geraden $A'J$ und JB' bestehenden $(M_i : r_i)$ -Linien durch die Strecke

$$\overline{J'J} = \frac{x_i x_i'}{l r_i} = \frac{(2 \cdot 3,6)(8 \cdot 3,6)}{(10 \cdot 3,6) \cdot 4,51} = 1,28$$

gegeben ist. Mit Hilfe der $(M_h : r_h)$ -Linie wird der Einfluß der in den Knotenpunkten k, h, f, d, b angreifenden Lasten gefunden, mittels der $(M_i : r_i)$ -Linie der Einfluß der übrigen Knotenlasten; schließlich werden die Endpunkte der auf diese Weise bestimmten Ordinaten durch gerade Linien verbunden. Ganz ebenso wird die Fig. 411b erhalten. Den in die Figuren eingezeichneten Zugstellungen sowie der ständigen Last $g = 1,74'$ entsprechen die Werte:

	<i>Fahrbahn unten.</i>	<i>Fahrbahn oben.</i>
genau	$\left\{ \begin{array}{l} O_p = -\Sigma P\eta = -125' \\ O_g = -g\lambda \Sigma \eta = -43' \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} O_p = -\Sigma P\eta = -114' \\ O_g = -g\lambda \Sigma \eta = -41' \end{array} \right.$
angenähert	$\left\{ \begin{array}{l} O_p = -119' \text{ (Fehler } 5\%) \\ O_g = -43' \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} O_p = -112' \\ O_g = -42' \end{array} \right.$

*) Zur Umsetzung der Strecken aus dem Maßstabe $1' = 25^{\text{mm}}$ in den Maßstab $1' = 12,5^{\text{mm}}$ diente der Winkel oberhalb Fig. 400.

Die Übereinstimmung zwischen der angenäherten und genaueren Rechnung ist also hier eine befriedigende.

Die gewöhnliche Zerlegung in zwei Teilfachwerke, von denen jedes für die Hälfte der Belastung zu berechnen ist, würde, wenn in jedem Teilfachwerke die wirkliche Richtung des Gurtstabes $i'h'$ beibehalten wird, zu der Formel

$$(3) \quad O = -\frac{1}{2} \left(\frac{M_i}{r_i} + \frac{M_h}{r_h} \right)$$

führen, und hierin wird man zweckmäßig, um allen überflüssigen Feinheiten aus dem Wege zu gehen, für M_i und M_h gleichzeitig die Größtwerte einführen, trotzdem diese bei verschiedenen Zugstellungen entstehen. Wir würden dann nach Band I, Seite 142*) erhalten

$$M_i = 702^{\text{tm}} \quad M_h = 918^{\text{tm}}, \text{ also}$$

$$O = -\frac{1}{2} \left(\frac{702}{4,51} + \frac{918}{5,34} \right) = -164^{\text{t}} = +U,$$

während sich vorhin ergab

$$\text{für Fahrbahn unten} \quad O = -125 - 43 = -168^{\text{t}},$$

$$\text{für Fahrbahn oben} \quad O = -114 - 41 = -155^{\text{t}}.$$

Es leuchtet ein, daß Formel (3) jedenfalls der Abschätzung der Querschnitts-abmessungen zugrunde gelegt werden darf, falls eine schärfere Untersuchung verlangt werden sollte. Nach der Ansicht des Verfassers ist die Gleichung (3) aber auch für die endgültige Berechnung genügend genau.

Wesentlich anders verhält es sich mit den Füllungsstäben. Hier befriedigte schon das Ergebnis der genäherten Einflußlinien nicht sonderlich, und noch ungenauer wird die Rechnung auf Grund der Zerlegung in Teilfachwerke mit den halben Lasten.

Betrachten wir beispielsweise behufs Bestimmung von $\text{max}D_p$ im Stabe $h'g$ das Teilfachwerk $lk'ih'g$. . ., Fig. 412. Der Eisenbahnzug sei bis h' vorgeschoben und die den Schrägstab D auf Druck beanspruchende Belastung des Knotens i sei vernachlässigt — eine jedenfalls sehr ungünstige Voraussetzung. Es entsteht am linken Auflager $A = 26^{\text{t}}$ und

$$\text{max}D_p = +22^{\text{t},**})$$

während sich vorhin $\text{max}D_p = +31^{\text{t}}$ ergab. Der Fehler beträgt also 41%.

Hinzugefügt werde noch, daß sich nach Aufzeichnung der X -Linie die übrigen Einflußlinien außer auf die vorhin beschriebene Art noch nach verschiedenen anderen Verfahren zeichnen lassen. So könnte man nach Ermittlung der O -Linien und U -Linien die D -Linien auf die in Band I, Seite 242 angegebene Weise bestimmen, desgl. nach Seite 181

*) An der angezogenen Stelle sind die Maximalmomente eines Balkens von 36^m Stützweite und 3,6^m Feldweite berechnet worden. g ist = 1,74' f. d. Meter. Der Eisenbahnzug stimmt mit dem im vorliegenden Beispiele eingeführten nicht ganz überein; man wird aber auch, falls man Gleichung (3) anwendet, mit den sonst üblichen Radständen rechnen, nicht mit den besonderen auf Tafel 7 angenommenen.

***) Wir haben in Fig. 412 $\text{max}D_p$ kinematisch ermittelt. Beseitigt man D und schreibt man dem Punkte h'' die lotrechte Geschwindigkeit $h'h''$ zu, so entsprechen den Punkten i und l die Geschwindigkeiten ii'' und ll'' . Wählt man h'' , so daß das Lot von h'' auf D gleich A ist, so ist das Lot von l'' auf A gleich $\text{max}D_p$.

des vorliegenden Bandes. Drittens ist es möglich, mit Hilfe der für die Knotenpunkte l', l, k', k, \dots aufzustellenden Gleichgewichtsbedingungen schrittweise die Einflußlinien für die Spankräfte in den Stäben 19', 20', 19, 20 usw. herzuleiten.

Ein viertes Verfahren besteht darin, die Lasteinheit der Reihe nach in den sämtlichen Knoten anzunehmen und für jeden dieser Belastungsfälle einen das ganze Fachwerk umfassenden Kräfteplan zu zeichnen. Die so gewonnenen Pläne enthalten dann die Ordinaten aller Einflußlinien. In Fig. 399 auf Tafel 7 ist ein Teil eines solchen Planes gezeichnet worden; er entspricht einer in h angreifenden Last 1.

2. Untersuchung eines dreifach statisch unbestimmten vierteiligen Netzwerks.

175. Allgemeines über die Berechnung der Formänderungen. Das in Fig. 413 dargestellte vierteilige Netzwerk von 30m Spannweite, 2m Feldlänge, 4m Höhe und unten liegender Fahrbahn ist im I. Bande in Nr. 230 nach dem angenäherten Verfahren der Zerlegung in vier

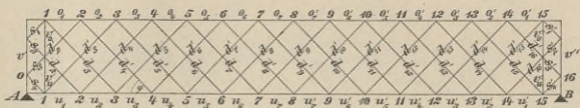


Fig. 413.

statisch bestimmte Systeme berechnet worden und soll nunmehr genauer untersucht werden. Als statisch bestimmtes Hauptsystem betrachten wir den in Fig. 414 abgebildeten, durch Beseitigung der drei Vertikalen v', v_o' und v_u' erhaltenen Träger; seine Knotenpunkte sind der Reihe nach zweistöbig an die linke, aus aneinander gereihten Dreiecken bestehende steife Endscheibe angeschlossen, und es lassen sich daher die elastischen Verschiebungen der Knotenpunkte leicht zeichnerisch ermitteln, am besten wohl mit Hilfe eines Williot'schen Verschiebungsplanes. Aber auch die analytische Berechnung der Verschiebungen gestaltet sich sehr einfach und möge hier, ihrer größeren Genauigkeit wegen, bevorzugt werden.

Zunächst ändern wir die Stützung des Hauptsystems in der Weise, daß wir den unteren Knotenpunkt 0 des Stabes v und die Richtung dieses Stabes festhalten und berechnen die vertikalen Verschiebungen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m, \dots$ der Knoten 1, 2, \dots, m, \dots der unteren Gurtung, nach dem in Nr. 9, Seite 13 und 14 entwickelten, zu der Gleichung $\delta_m = \sum S' \Delta s$ führenden Verfahren. Fig. 413 gibt Aufschluß

über die Bezeichnung der Stablängen*); in die Figuren 415, 416, 417, 418 und 419 sind die Spannkkräfte eingetragen worden, welche eine der Reihe nach in den Knotenpunkten 1, 2, 3, 4, 5 angenommene

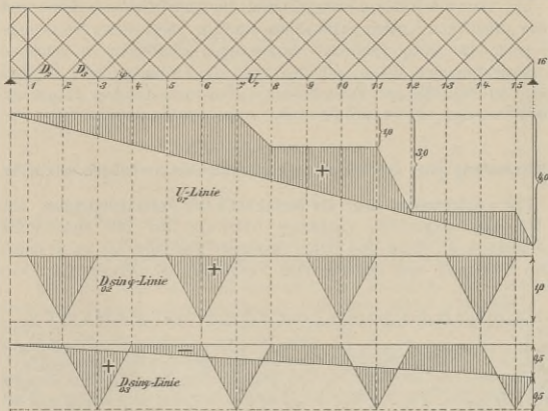


Fig. 414.

Last 1 in den Stäben des Hauptsystems erzeugt. Mit Hilfe dieser Werte erhält man

$$\eta_1 = 0,5\sqrt{2}(\Delta s_2 - \Delta s_3) + \Delta v_u - 0,5\Delta v,$$

$$\eta_2 = 1,5\sqrt{2}\Delta s_2 - 0,5\sqrt{2}\Delta s_3 - \sqrt{2}\Delta s_4 + \Delta v_u - 1,5\Delta v + \sqrt{2}\Delta d_2 - \Delta u_1,$$

$$\eta_3 = \sqrt{2}(\Delta s_1 - \Delta s_4) + 1,5\sqrt{2}(\Delta s_2 - \Delta s_3) + \Delta v_u - 2\Delta v_o - 0,5\Delta v \\ + \sqrt{2}\Delta d_3 - (\Delta u_1 + \Delta u_2),$$

$$\eta_4 = 2\sqrt{2}\Delta s_1 + 1,5\sqrt{2}\Delta s_2 - 2,5\sqrt{2}\Delta s_3 - \sqrt{2}\Delta s_4 - 2\Delta v_o + \Delta v_u \\ + 0,5\Delta v + \sqrt{2}(\Delta d_4' - \Delta d_2') - (\Delta u_1 + \Delta u_2 + \Delta u_3) + 2\Delta o_1,$$

$$\eta_5 = 2\sqrt{2}(\Delta s_1 - \Delta s_4) + 2,5\sqrt{2}(\Delta s_2 - \Delta s_3) - 2\Delta v_o + 3\Delta v_u - 0,5\Delta v \\ + \sqrt{2}(\Delta d_5' - \Delta d_3') - (\Delta u_1 + \Delta u_2 + \Delta u_3 + \Delta u_4) + 2(\Delta o_1 + \Delta o_2).$$

*) Die Bezeichnung ist so gewählt worden, daß die vier, die beiden Endscheiben verbindenden Strebenzüge

$$\text{und} \quad \begin{matrix} d_2 d_4 d_6 \dots d_{16}, & d_3 d_5 d_7 \dots d_{15} \\ d_2' d_4' d_6' \dots d_{16}', & d_3' d_5' d_7' \dots d_{15}' \end{matrix}$$

gut hervortreten.

Die übrigen Verschiebungen η findet man mit Hilfe der mittels Fig. 420 abgeleiteten Formel

$$\eta_{m+4} - \eta_m = 2\sqrt{2}(\Delta s_1 + \Delta s_2 - \Delta s_3 - \Delta s_4) + 2(\Delta v_u - \Delta v_o) + \sqrt{2}(\Delta d_{m+4} - \Delta d_{m+2}) - (\Delta u) + 2\{[\Delta o] - [\Delta u]\},$$

wo (Δu) die Längenänderung der Strecke $\overline{m(m+4)}$

$$[\Delta o] \quad " \quad " \quad " \quad " \quad \frac{1}{m-2}$$

$$[\Delta u] \quad " \quad " \quad " \quad " \quad \frac{1}{m}$$

bedeutet.

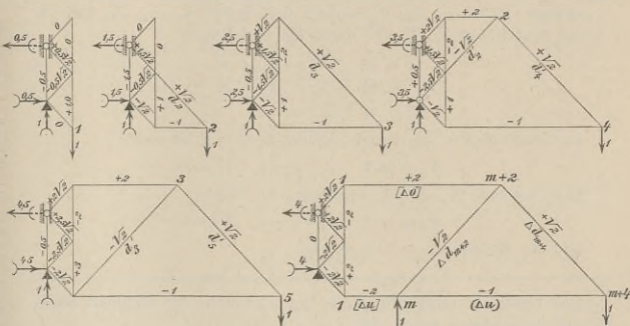


Fig. 415 bis 420.

Zur Berechnung von $\eta_{16} - \eta_{15}$ betrachten wir den in Fig. 421 dargestellten Belastungszustand. In den Diagonalen entstehen die Spannkraft $\pm 0,5\sqrt{2}$; in der oberen Gurtung werden die Stäbe $o_1, o_5, o_6,$

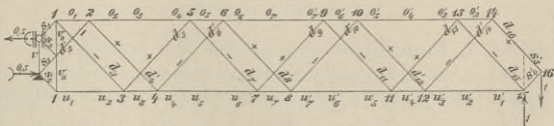


Fig. 421.

o_2' mit $+1$ beansprucht, in der unteren Gurtung die Stäbe u_3, u_7 und u_4' mit -1 ; die übrigen Gurtstäbe sind spannungslos. Von den Stäben der Endscheiben werden nur die folgenden beansprucht:

$$s_1 \text{ und } s_3' \text{ mit } +0,5\sqrt{2}$$

$$s_3 \text{ „ } s_4' \text{ „ } -0,5\sqrt{2} \text{ und } v \text{ mit } +0,5.$$

Es ergibt sich daher

$$\eta_{16} - \eta_{15} = 0,5\sqrt{2}(\Delta s_1 + \Delta s_3' - \Delta s_3 - \Delta s_4') + 0,5\Delta v + \Delta o_1 + \Delta o_5$$

$$+ \Delta o_6' + \Delta o_2' - \Delta u_3 - \Delta u_7 - \Delta u_4' + 0,5\sqrt{2}(-\Delta d_2' + \Delta d_4' - \Delta d_6'$$

$$+ \dots + \Delta d_{16}') + 0,5\sqrt{2}(-\Delta d_3 + \Delta d_5 - \Delta d_7 + \dots - \Delta d_{15}).$$

176. Berechnung von X_a , X_b und X_c . Als statisch unbestimmte Größen führen wir nicht die Spannkkräfte V_o' , V_u' , V' in den drei überzähligen Stäben v_o' , v_u' , v' , sondern drei Werte X_a , X_b , X_c ein, die mit den Größen V_o' , V_u' , V' durch die Gleichungen

$$V_o' = -X_a - X_b - X_c$$

$$V_u' = +X_a - X_b - X_c$$

$$V' = 2X_c$$

verbunden sind.*) Im Belastungsfalle $X_a = -1$ ist also

$$V_o' = +1, \quad V_u' = -1, \quad V' = 0.$$

Dem Zustande $X_b = -1$ entsprechen die Werte

$$V_o' = +1, \quad V_u' = +1, \quad V' = 0,$$

und der Zustand $X_c = -1$ erzeugt

$$V_o' = +1, \quad V_u' = +1, \quad V' = -2.$$

Die Tabelle I enthält die Werte S_a , S_b und S_c für sämtliche Stäbe, und man erkennt sofort, daß

$$\delta_{ab} = \sum S_a S_b \frac{s}{EF} = 0$$

ist, weil sich für die einander entsprechenden Stäbe der linken und rechten Hälfte des Trägers gleiche Spannkkräfte S_b und entgegengesetzt gleiche Spannkkräfte S_a ergeben. Weiter findet man

$$\delta_{bc} = \sum S_b S_c \frac{s}{EF} = 0,$$

während δ_{ac} im allgemeinen einen endlichen Wert annimmt.

Um die Rechnung tunlichst weit mit Buchstaben durchführen zu können, haben wir die Querschnittsverhältnisse $F_c:F'$ für die Gurtungen mit $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ für die Diagonalen mit $\frac{\beta_2}{\sqrt{2}}, \frac{\beta_3}{\sqrt{2}}, \dots$ und für die Glieder der Endscheiben mit $\nu, \nu', \frac{\nu''}{\sqrt{2}}$ bezeichnet und diese Zeichen in

*) Vergl. Nr. 13, Seite 25.

Tabelle I.

a) Gurtungen und Ständer.

	$\frac{F_c}{F}$	$\frac{F_c}{F}$	$\frac{s}{s_c}$	S_a	S_b	S_c		$\frac{F_c}{F}$	$\frac{F_c}{F}$	$\frac{s}{s_c}$	S_a	S_b	S_c
α_1	α_1	1,0	1	-1	+1	+1	u_1	α_1	1,0	1	+1	+1	+1
α_2	α_2	0,6	1	+1	+1	-1	u_2	α_2	0,6	1	-1	+1	-1
α_3	α_3	0,4	1	-1	-1	-1	u_3	α_3	0,4	1	+1	-1	-1
α_4	α_4	0,4	1	+1	-1	+1	u_4	α_4	0,4	1	-1	-1	+1
α_5	α_5	0,3	1	-1	+1	+1	u_5	α_5	0,3	1	+1	+1	+1
α_6	α_6	0,3	1	+1	+1	-1	u_6	α_6	0,3	1	-1	+1	-1
α_7	α_7	0,3	1	-1	-1	-1	u_7	α_7	0,3	1	+1	-1	-1
α_7'	α_7'	0,3	1	+1	-1	+1	u_7'	α_7'	0,3	1	-1	-1	+1
α_6'	α_6'	0,3	1	-1	+1	+1	u_6'	α_6'	0,3	1	+1	+1	+1
α_5'	α_5'	0,3	1	+1	+1	-1	u_5'	α_5'	0,3	1	-1	+1	-1
α_4'	α_4'	0,4	1	-1	-1	-1	u_4'	α_4'	0,4	1	+1	-1	-1
α_3'	α_3'	0,4	1	+1	-1	+1	u_3'	α_3'	0,4	1	-1	-1	+1
α_2'	α_2'	0,6	1	-1	+1	+1	u_2'	α_2'	0,6	1	+1	+1	+1
α_1'	α_1'	1,0	1	+1	+1	-1	u_1'	α_1'	1,0	1	-1	+1	-1
v	v	0,6	1	0	0	+2	v'	v	0,6	1	0	0	-2
v_o	v'	1,5	1	-1	+1	-1	v_o'	v'	1,5	1	+1	+1	+1
v_u	v'	1,5	1	+1	+1	-1	v_u'	v'	1,5	1	-1	+1	+1

b) Diagonalen.

	$\frac{F_c \sqrt{2}}{F}$	$\frac{F_c \sqrt{2}}{F}$	$\frac{s}{s_c \sqrt{2}}$	$\frac{S_a}{\sqrt{2}}$	$\frac{S_b}{\sqrt{2}}$	$\frac{S_c}{\sqrt{2}}$		$\frac{F_c \sqrt{2}}{F}$	$\frac{F_c \sqrt{2}}{F}$	$\frac{s}{s_c \sqrt{2}}$	$\frac{S_a}{\sqrt{2}}$	$\frac{S_b}{\sqrt{2}}$	$\frac{S_c}{\sqrt{2}}$
d_2	β_2	1,3	1	-1	0	-1	d_2'	β_4	1,8	1	+1	0	-1
d_4	β_8	2,4	2	+1	0	+1	d_4'	β_4	1,8	2	-1	0	+1
d_6	β_6	2,4	2	-1	0	-1	d_6'	β_8	4,2	2	+1	0	-1
d_8	β_{10}	5,7	2	+1	0	+1	d_8'	β_8	4,2	2	-1	0	+1
d_{10}	β_{10}	5,7	2	-1	0	-1	d_{10}'	β_8	4,2	2	+1	0	-1
d_{12}	β_6	2,4	2	+1	0	+1	d_{12}'	β_8	4,2	2	-1	0	+1
d_{14}	β_8	2,4	2	-1	0	-1	d_{14}'	β_4	1,8	2	+1	0	-1
d_{16}	β_2	1,3	1	+1	0	+1	d_{16}'	β_4	1,8	1	-1	0	+1
d_3	β_8	1,5	2	+1	-1	0	d_3'	β_6	2,1	2	-1	-1	0
d_5	β_7	3,3	2	-1	+1	0	d_5'	β_6	2,1	2	+1	+1	0
d_7	β_7	3,3	2	+1	-1	0	d_7'	β_6	4,8	2	-1	-1	0
d_9	β_9	4,8	2	-1	+1	0	d_9'	β_9	4,8	2	+1	+1	0
d_{11}	β_9	4,8	2	+1	-1	0	d_{11}'	β_7	3,3	2	-1	-1	0
d_{13}	β_6	2,1	2	-1	+1	0	d_{13}'	β_7	3,3	2	+1	+1	0
d_{15}	β_6	2,1	2	+1	-1	0	d_{15}'	β_8	1,5	2	-1	-1	0
s_1	v''	1,2	0,5	0	0	+1	s_1'	v''	1,2	0,5	0	0	-1
s_2	v''	1,2	0,5	0	0	-1	s_2'	v''	1,2	0,5	0	0	+1
s_3	v''	1,2	0,5	0	0	-1	s_3'	v''	1,2	0,5	0	0	+1
s_4	v''	1,2	0,5	0	0	+1	s_4'	v''	1,2	0,5	0	0	-1

die Tabelle eingetragen.*) F_c ist ein beliebiger, konstanter Querschnittsinhalt. Zwei in einem unbelasteten Knotenpunkte zusammenstoßende Diagonalen erhalten gleiche Querschnitte, also auch gleiche Werte β . Die Querschnitte der einander entsprechenden Stäbe der oberen und unteren Gurtung unterscheiden sich voneinander so wenig, daß es stets zulässig ist, ihnen gleiche Werte $F_c : F$ beizulegen. Die dritte Spalte der Tabelle enthält die Verhältniszahlen $s : s_c$, wo s_c die Feldlänge, d. i. die Länge eines Gurtstabes, bedeutet.

Mit diesen Bezeichnungen ergibt sich nun

$$\frac{EF_c}{s_c} \delta_{a_0} = \Sigma S_a S_c \frac{s}{s_c} \cdot \frac{F_c}{F} = 8 (\beta_2 + 4 \beta_6 + 2 \beta_{10} - 3 \beta_4 - 4 \beta_8)$$

und dieser Wert wird gleich Null, sobald

$$+ \beta_2 + 4 \beta_6 + 2 \beta_{10} = 3 \beta_4 + 4 \beta_8$$

ist, eine Bedingung, welche sich stets durch geringfügige und für die Endergebnisse der Untersuchung belanglose Änderungen der auf Grund der angenäherten Berechnung gewonnenen Querschnittsflächen erfüllen läßt.***) Die Zahlenwerte der vierten Spalte der Tabelle genügen der vorstehenden Bedingung, und es sind daher die drei Elastizitätsgleichungen voneinander unabhängig. Der Einfluß einer im Knotenpunkte m angreifenden Last $P_m = 1$ auf die statisch unbestimmten Größen ist also

$$X_a = \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}, \quad X_b = \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}}, \quad X_c = \frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}},$$

und hierin ist, mit den Bezeichnungen

$$\beta_3 + 2 \beta_5 + 2 \beta_7 + 2 \beta_9 = \psi_1$$

$$\beta_2 + 4 \beta_6 + 2 \beta_{10} = 3 \beta_4 + 4 \beta_8 = \psi_2,$$

*) Die Querschnittsverhältnisse $F_c : F$ runde man gut ab. Die Einführung runder Werte $F_c \sqrt{2} : F$ für die Diagonalen erleichtert die Rechnung außerordentlich.

**) Die zunächst nach der Näherungstheorie berechneten Stabquerschnitte und die ihnen entsprechenden Werte α , β und ν sind in der Tabelle VIII zusammengestellt worden; F_c wurde gleich 100 qcm gewählt. Es ergaben sich die nur wenig voneinander abweichenden Werte

$$\beta_2 + 4 \beta_6 + 2 \beta_{10} = 1,33 + 4 \cdot 2,57 + 2 \cdot 5,66 = 22,93 \text{ und}$$

$$3 \beta_4 + 4 \beta_8 = 3 \cdot 1,77 + 4 \cdot 4,04 = 21,37.$$

Der Querschnitt von d_9 wurde nun gleich 29 qcm (statt 25) angenommen; sodann wurden die Werte β , ν und ν' so abgerundet, daß sie den Teiler 3 erhielten. Ebenso wurde dafür gesorgt, daß $\sum_1^7 \alpha$ ohne Rest durch 3 geteilt werden konnte. Diese Maßnahmen erleichtern die Zahlenrechnungen, da τ_{10a} , τ_{10b} und τ_{10c} durch 30 geteilt werden müssen.

zu setzen:

$$\frac{EF_c}{s_c} \delta_{aa} = \Sigma S_a^2 \frac{s}{s_c} \frac{F_c}{F} = 4 \sum_1^7 \alpha_m + 4 v' + 8 (\psi_1 + \psi_2)$$

$$\frac{EF_c}{s_c} \delta_{bb} = \Sigma S_b^2 \frac{s}{s_c} \frac{F_c}{F} = 4 \sum_1^7 \alpha_m + 4 v' + 8 \psi_1$$

$$\frac{EF_c}{s_c} \delta_{cc} = \Sigma S_c^2 \frac{s}{s_c} \frac{F_c}{F} = 4 \sum_1^7 \alpha_m + 4 v' + 8 (v + v'') + 8 \psi_2.$$

Man erhält

$$\sum_1^7 \alpha_m = 3,3, \quad \psi_1 = 21,9, \quad \psi_2 = 22,2.$$

$$\frac{EF_c}{s_c} \delta_{aa} = 372,0, \quad \frac{EF_c}{s_c} \delta_{bb} = 194,4, \quad \frac{EF_c}{s_c} \delta_{cc} = 211,2.$$

An Stelle der Durchbiegungen δ_m berechnen wir die Werte $\frac{EF_c}{s_c} \delta_m$, indem wir die Längenänderungen $\Delta s = \frac{Ss}{EF}$ ersetzen durch $\frac{EF_c}{s_c} \Delta s = S \frac{s}{s_c} \cdot \frac{F_c}{F}$. Den sich hebenden Faktor $\frac{EF_c}{s_c}$ streichen wir. Zunächst nehmen wir das statisch bestimmte Hauptsystem auf die in Fig. 421 angegebene Art gestützt an, berechnen für die Zustände $X_a = -1$, $X_b = -1$ und $X_c = -1$ die Durchbiegungen η und finden dann für den im Abstände x_m vom linken Stützpunkte liegenden Knotenpunkt m

$$\delta_m = \eta_m - \delta_{16} \frac{x_m}{l}.$$

Die senkrechten Verschiebungen der Stützpunkte A und B stimmen mit denen der Knotenpunkte 0 und 16 überein, weil die Ständer $0A$ und $16B$ in den hier in Frage kommenden drei Belastungsfällen spannungslos sind.

Mit Hilfe der auf Seite 452—454 abgeleiteten Formeln ergeben sich die folgenden Werte η .

$$\text{Zustand } X_a = -1$$

$$\eta_{11a} = v' = 1,5$$

$$\eta_{2a} = v' - 2\beta_2 - \alpha_1 = -21$$

$$\eta_{6a} = \eta_{2a} + 4v' - 8\beta_6 - 4\alpha_1 + 3(\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_4 - \alpha_5) = -18,6$$

$$\eta_{10a} = \eta_{6a} + 4v' - 8\beta_{10} - 4\alpha_1 + 4(\alpha_2 - \alpha_3) + 4(\alpha_4 - \alpha_5) + 2(\alpha_6 - \alpha_7) = -61,0$$

$$\eta_{14a} = \eta_{10a} + 4v' - 8\beta_6 - 4\alpha_1 + 3(\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_4 - \alpha_5) = -77,5$$

$$\eta_{3a} = +3v' + 4\beta_3 - (\alpha_1 - \alpha_2) = +10,1$$

$$\eta_{7a} = \eta_{3a} + 4v' + 8\beta_7 - 4(\alpha_1 - \alpha_2) - 3(\alpha_3 - \alpha_4) - (\alpha_5 - \alpha_6) = +40,9$$

$$\eta_{11a} = \eta_{7a} + 4v' + 8\beta_9 - 4(\alpha_1 - \alpha_2) - 4(\alpha_3 - \alpha_4) - 3(\alpha_5 - \alpha_6) = +83,7$$

$$\eta_{15a} = \eta_{11a} + 4v' + 8\beta_5 - 3(\alpha_1 - \alpha_2) - (\alpha_3 - \alpha_4) = +105,3$$

$$\begin{aligned} \eta_{4a} &= +3\nu' - 6\beta_1 - 3\alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_3) &= -9,1 \\ \eta_{8a} &= \eta_{4a} + 4\nu' - 8\beta_3 - 4\alpha_1 + 4(\alpha_2 - \alpha_3) + 3(\alpha_4 - \alpha_5) + (\alpha_6 - \alpha_7) &= -39,6 \\ \eta_{12a} &= \eta_{8a} + 4\nu' - 8\beta_5 - 4\alpha_1 + 4(\alpha_2 - \alpha_3) + 3(\alpha_4 - \alpha_5) + (\alpha_6 - \alpha_7) &= -70,1 \\ \eta_{5a} &= +5\nu' + 8\beta_5 - 3(\alpha_1 - \alpha_2) - (\alpha_3 - \alpha_4) &= +23,1 \\ \eta_{9a} &= \eta_{5a} + 4\nu' + 8\beta_9 - 4(\alpha_1 - \alpha_2) - 4(\alpha_3 - \alpha_4) - 3(\alpha_5 - \alpha_6) &= +65,9 \\ \eta_{13a} &= \eta_{9a} + 4\nu' + 8\beta_7 - 4(\alpha_1 - \alpha_2) - 3(\alpha_3 - \alpha_4) - 3(\alpha_5 - \alpha_6) &= +96,7 \\ \eta_{16a} - \eta_{15a} &= -\sum_1^7 \alpha - 2(\psi_1 + \psi_2) &= -91,5 \\ \eta_{16} &= 105,3 - 91,5 = 13,8. \end{aligned}$$

Zustand $X_b = -1$

$$\eta_{1b} = \nu' = 1,5$$

$$\begin{aligned} \eta_{2b} &= \nu' - \alpha_1 &= +0,5 \\ \eta_{6b} &= \eta_{2b} + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 &= +0,8 \\ \eta_{10b} &= \eta_{6b} = +0,8, & \eta_{14b} = \eta_{2b} = +0,5 \\ \eta_{3b} &= -\nu' - 4\beta_3 - (\alpha_1 + \alpha_2) &= -9,1 \\ \eta_{7b} &= \eta_{3b} - 8\beta_7 - (\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6) &= -36,9 \\ \eta_{11b} &= \eta_{7b} - 8\beta_9 - (\alpha_7 + \alpha_7 + \alpha_6 + \alpha_5) &= -76,5 \\ \eta_{15b} &= \eta_{11b} - 8\beta_5 - (\alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) &= -95,7 \\ \eta_{4b} &= -\nu' + \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 &= -0,7 \\ \eta_{8b} &= \eta_{4b} - \alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_6 + \alpha_7 &= -0,8 \\ \eta_{12b} &= \eta_{4b} &= -0,7 \\ \eta_{5b} &= \nu' + 8\beta_5 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 &= +20,7 \\ \eta_{9b} &= \eta_{5b} + 8\beta_9 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_7 &= +60,3 \\ \eta_{13b} &= \eta_{9b} + 8\beta_7 + \alpha_6 + \alpha_5 + \alpha_4 + \alpha_3 &= +88,1 \\ \eta_{16b} - \eta_{15b} &= \sum_1^7 \alpha + 2\psi_1 &= 47,1 \\ \eta_{16b} &= -95,7 + 47,1 &= -48,6. \end{aligned}$$

Zustand $X_c = -1$

$$\eta_{1c} = -\nu' - \nu = -2,1$$

$$\begin{aligned} \eta_{2c} &= -2\nu'' - 3\nu - \nu' - 2\beta_2 - \alpha_1 &= -9,3 \\ \eta_{6c} &= \eta_{2c} - 8\beta_6 - (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) &= -30,2 \\ \eta_{10c} &= \eta_{6c} - 8\beta_{10} - (\alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_7 + \alpha_5) &= -77,0 \\ \eta_{14c} &= \eta_{10c} - 8\beta_8 - (\alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1) &= -97,9 \\ \eta_{3c} &= \nu' - \nu - \alpha_1 + \alpha_2 &= +0,5 \\ \eta_{7c} &= \eta_{3c} - \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6 &= +0,5 \\ \eta_{11c} &= \eta_{7c} - \alpha_6 + \alpha_5 &= +0,5 \\ \eta_{15c} &= \eta_{11c} - \alpha_4 + \alpha_3 - \alpha_2 + \alpha_1 &= +0,9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{14c} &= 2v'' + v' + v + 6\beta_4 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = +17,3 \\ \eta_{18c} &= \eta_{14c} + 8\beta_8 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 = +52,2 \\ \eta_{112c} &= \eta_{18c} + 8\beta_8 + \alpha_7 + \alpha_6 + \alpha_5 + \alpha_4 = +87,1 \\ \eta_{15c} &= -v' - v + \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = -1,7 \\ \eta_{19c} &= \eta_{15c} + \alpha_5 - \alpha_6 = -1,7 \\ \eta_{113c} &= \eta_{19c} + \alpha_6 - \alpha_5 + \alpha_4 - \alpha_3 = -1,7 \\ \eta_{116c} - \eta_{115c} &= v + 2v'' + \sum_1^7 \alpha + 2\psi_2 = 50,7 \\ \eta_{116c} &= 0,9 + 50,7 = 51,6. \end{aligned}$$

Die aus den Werten η berechneten Größen

$$\begin{aligned} X_a &= \frac{1}{\delta_{aa}} \left(\eta_{ma} - \frac{x}{l} \eta_{16a} \right) \\ X_b &= \frac{1}{\delta_{bb}} \left(\eta_{mb} - \frac{x}{l} \eta_{16b} \right) \\ X_c &= \frac{1}{\delta_{cc}} \left(\eta_{mc} - \frac{x}{l} \eta_{16c} \right), \end{aligned}$$

sowie die in der weiteren Untersuchung gebrauchten Ausdrücke

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_a + X_b & Y_3 &= X_a + X_c \\ Y_2 &= X_a - X_b & Y_4 &= X_a - X_c \end{aligned}$$

sind in der Tabelle II zusammengestellt worden.

Tabelle II.

m	X_a	X_b	X_c	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
1	+ 0,003	+ 0,016	- 0,018	+ 0,019	- 0,013	- 0,015	+ 0,021
2	- 0,009	+ 0,027	- 0,068	+ 0,018	- 0,036	- 0,077	+ 0,059
3	+ 0,021	- 0,006	- 0,038	+ 0,015	+ 0,027	- 0,017	+ 0,059
4	- 0,033	+ 0,055	+ 0,025	+ 0,022	- 0,088	- 0,008	- 0,058
5	+ 0,051	+ 0,181	- 0,081	+ 0,232	- 0,130	- 0,030	+ 0,132
6	- 0,064	+ 0,096	- 0,232	+ 0,032	- 0,160	- 0,296	+ 0,168
7	+ 0,094	- 0,081	- 0,104	+ 0,013	+ 0,175	- 0,010	+ 0,198
8	- 0,125	+ 0,121	+ 0,125	- 0,004	- 0,247	0	- 0,250
9	+ 0,156	+ 0,452	- 0,146	+ 0,608	- 0,296	+ 0,010	+ 0,302
10	- 0,186	+ 0,162	- 0,518	- 0,024	- 0,348	- 0,704	+ 0,332
11	+ 0,199	- 0,219	- 0,169	- 0,020	+ 0,418	+ 0,030	+ 0,368
12	- 0,217	+ 0,188	+ 0,225	- 0,029	- 0,405	+ 0,008	- 0,442
13	+ 0,229	+ 0,662	- 0,212	+ 0,891	- 0,433	+ 0,017	+ 0,441
14	- 0,241	+ 0,228	- 0,682	- 0,013	- 0,469	- 0,923	+ 0,441
15	+ 0,247	- 0,251	- 0,232	- 0,004	+ 0,498	+ 0,015	+ 0,479

177. Spannkkräfte in den Stäben der Endscheiben. Für die Spannkkräfte in den Stäben $v_1', v_o', v_u', s_1', s_2', s_3', s_4'$ der rechten Endscheibe gelten die Formeln

$$(1) \quad \begin{cases} V' = -2X_c, & V_o' = -X_a - X_b - X_c, & V_u' = +X_a - X_b - X_c, \\ S_1' \sin \varphi = -S_2' \sin \varphi = +X_c, \\ S_4' \sin \varphi = -S_3' \sin \varphi = \frac{1}{2}(B + V') = 0,5 B - X_c, \end{cases}$$

wo B den Widerstand der rechten Stütze bedeutet. Die Einflußlinien für die Spannkkräfte V und S der linken Endscheibe sind die Spiegelbilder der Einflußlinien der entsprechenden Kräfte V' und S' der rechten Scheibe. In der Tabelle III sind die Ordinaten der Linien für V_o , V_u und $S_4 \sin \varphi$ zusammengestellt worden. Die $S_4 \sin \varphi$ -Linie und die V_u -Linie

Tabelle III.

m	V_u	V_o	$S_4 \sin \varphi$	m	V_u	V_o	$S_4 \sin \varphi$
1	+ 0,730	+ 0,236	+ 0,251	9	+ 0,279	+ 0,091	+ 0,113
2	+ 0,213	+ 0,695	- 0,232	10	+ 0,072	+ 0,200	- 0,049
3	- 0,221	- 0,679	+ 0,205	11	- 0,049	- 0,151	+ 0,069
4	- 0,630	- 0,196	+ 0,608	12	- 0,113	- 0,047	+ 0,142
5	+ 0,587	+ 0,189	+ 0,181	13	+ 0,065	+ 0,023	+ 0,045
6	+ 0,170	+ 0,542	- 0,201	14	+ 0,032	+ 0,050	- 0,018
7	- 0,150	- 0,462	+ 0,137	15	+ 0,005	- 0,001	- 0,001
8	- 0,372	- 0,121	+ 0,375				

zeigt Fig. 422; vergleicht man sie mit den im I. Bande auf Seite 529 nach dem Näherungsverfahren gewonnenen Linien, so findet man eine recht gute Übereinstimmung. Um die Vergleichung zu erleichtern, haben wir die Geraden, in denen die Punkte der angenäherten Einflußlinien liegen, mit eingezeichnet; sie schneiden auf der Senkrechten durch A die Strecken 0,25, 0,50 und 0,75 ab.)* Als Lasten sind drei- oder vierachsige Lokomotiven von 1,2^m Radstand und 16^t Achsdruck angenommen worden. Die ständige Belastung beträgt $g = 1,6\frac{t}{m}$ also 3,2^t für jeden der Knotenpunkte 2 bis 14 und 2,4^t für jeden der Punkte 1 und 14. Den Einfluß des Eigengewichts ermittelt man in der Weise, daß man

$$X_{ag} = + 0,20', \quad X_{bg} = + 5,41', \quad X_{cg} = + 6,60'$$

bestimmt und hierauf die Formeln 1 benutzt. Man erhält auf diesem Wege die folgenden größten Stabkräfte, denen die nach dem Näherungsverfahren gewonnenen in Klammer beigefügt worden sind.

*) Man achte darauf, daß wir im I. Bande die S_1 -Linie, jetzt aber die $S_1 \sin \varphi$ -Linie dargestellt haben.

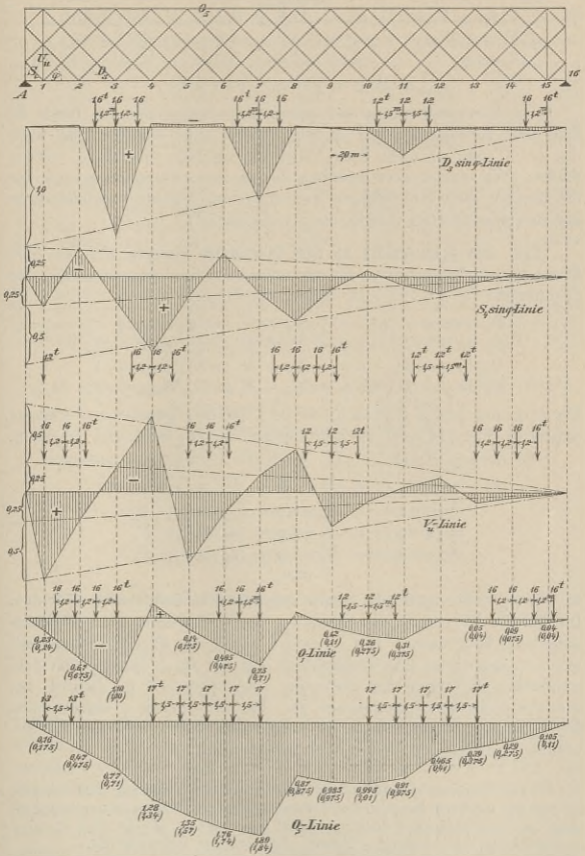


Fig. 422.

$$\begin{aligned}
 \min V &= \min V_p + V_g = -108,5 - 13,2 = -122^t (-122^t) \\
 \max V_u &= \max V_{up} + V_{ug} = +42,2 + 1,4 = +44^t (+45^t) \\
 \max V_o &= \max V_{op} + V_{og} = +41,3 + 1,0 = +42^t (+43^t) \\
 \max S_4 \sin \varphi &= +42,5 + 5,0 = +47,5^t (+47,5^t) \\
 \min S_1 \sin \varphi &= \frac{1}{2} V = -61^t (-61^t).
 \end{aligned}$$

Die Übereinstimmung der genauen und angenäherten Werte ist eine ganz vorzügliche, und es folgt daraus ohne weiteres, daß auch die O , U und D nach dem Näherungsverfahren berechnet werden dürfen. Wir wollen aber trotzdem die genauere Berechnung auch für die übrigen Stäbe durchführen und noch verschiedene Vergleichen mit den angenäherten Ergebnissen vornehmen.*)

178. Die Spannkkräfte in den Diagonalen ergeben sich aus den Gleichgewichtsbedingungen für die einzelnen Knotenpunkte. Für die Spannkkräfte D_2, D_3, D_4', D_5' gelten die Formeln

$$\begin{aligned}
 D_2 \sin \varphi &= D_{o_2} \sin \varphi + X_a + X_c = D_{o_2} \sin \varphi + Y_3 \\
 D_3 \sin \varphi &= D_{o_3} \sin \varphi - X_a + X_b = D_{o_3} \sin \varphi - Y_2 \\
 D_4' \sin \varphi &= D_{o_4'} \sin \varphi + X_a - X_c = D_{o_4'} \sin \varphi + Y_4 \\
 D_5' \sin \varphi &= D_{o_5'} \sin \varphi - X_a - X_b = D_{o_5'} \sin \varphi - Y_1.
 \end{aligned}$$

Die D_o -Linien lassen sich nach dem im I. Bande angegebenen Verfahren ermitteln. Fig. 414 zeigt die Einflußlinien für $D_{o_2} \sin \varphi$ und $D_{o_3} \sin \varphi$.

Die übrigen Kräfte D sind durch die Gleichungen bestimmt

$$\begin{aligned}
 D_2' &= -D_4', \quad D_3' = -D_5', \quad D_4' = -D_6', \text{ usw.} \\
 D_6 \sin \varphi &= -D_4 \sin \varphi = D_2 \sin \varphi - P_2 \\
 D_7 \sin \varphi &= -D_5 \sin \varphi = D_3 \sin \varphi - P_3 \\
 D_8' \sin \varphi &= -D_6' \sin \varphi = D_4' \sin \varphi - P_4 \\
 &\text{ usw.,}
 \end{aligned}$$

wo $P_2, P_3 \dots$ die in 2 oder 3 usw. angreifenden Knotenlasten bedeuten. Die Tabelle IV enthält die Ordinaten der Einflußlinien für alle linkssteigenden Diagonalen. Die $D_3 \sin \varphi$ -Linie ist in Fig. 422 dargestellt worden; sie weicht nur unwesentlich von der im I. Bande nach dem genäherten Verfahren der Zerlegung des Netzwerks in statisch bestimmte Teilsysteme gewonnenen ab. Für die $\max D \sin \varphi$ ergeben sich die folgenden Werte, denen die nach dem Näherungsverfahren gewonnenen in Klammern beigelegt worden sind.**)

*) Herr Professor *G. Mehrrens* hat in der Deutschen Bauzeitung 1902, Seite 75, die von mir im ersten Bande dieses Werkes durchgeführte Näherungsberechnung als einen „unzureichenden Notbehelf“ bezeichnet und damit nur gezeigt, daß er selbst die Spannkkräfte eines derartigen Systems noch nie genau untersucht hat.

**) Vergl. Band I, Seite 529 und 530. Die dort angenommene Belastung haben wir etwas geändert, indem wir der Einfachheit wegen die Mittelachse des Tenders an einen Knotenpunkt rückten.

Tabelle IV.

m	$D_2 \sin \varphi$	$D_3 \sin \varphi$	$D_4' \sin \varphi$	$D_5' \sin \varphi$	$D_6 \sin \varphi$	$D_7 \sin \varphi$	$D_8' \sin \varphi$	$D_9' \sin \varphi$	$D_{10} \sin \varphi$
1	-0,015	-0,004	+0,004	-0,019	-0,015	-0,004	+0,004	-0,019	-0,015
2	+0,923	-0,014	+0,009	-0,018	-0,077	-0,014	+0,009	-0,018	-0,077
3	-0,017	+0,890	-0,024	-0,015	-0,017	-0,110	-0,024	-0,015	-0,017
4	-0,008	-0,029	+0,825	-0,022	-0,008	-0,029	-0,175	-0,022	-0,008
5	-0,030	-0,020	-0,018	+0,768	-0,030	-0,020	-0,018	-0,232	-0,030
6	+0,704	-0,023	-0,015	-0,032	+0,704	-0,023	-0,015	-0,032	-0,296
7	-0,010	+0,608	-0,019	-0,013	-0,010	+0,608	-0,019	-0,013	-0,010
8	0	-0,003	+0,500	+0,004	0	-0,003	+0,500	+0,004	0
9	+0,010	+0,013	+0,019	+0,392	+0,010	+0,013	+0,019	+0,392	+0,010
10	+0,296	+0,031	+0,015	+0,024	+0,296	+0,031	+0,015	+0,024	+0,296
11	+0,030	+0,232	+0,018	+0,020	+0,030	+0,232	+0,018	+0,020	+0,030
12	+0,008	+0,022	+0,175	+0,029	+0,008	+0,022	+0,175	+0,029	+0,008
13	+0,017	+0,016	+0,024	+0,109	+0,017	+0,016	+0,024	+0,109	+0,017
14	+0,077	+0,019	-0,009	+0,013	+0,077	+0,019	-0,009	+0,013	+0,077
15	+0,015	+0,019	-0,004	+0,004	+0,015	+0,019	-0,004	+0,004	+0,015

$$\max D_2 \sin \varphi = \max D_{2y} \sin \varphi + D_{2y} \sin \varphi = 54,4 + 6,4 = 60,8' (60,0')$$

$$\max D_3 \sin \varphi = 47,8 + 5,6 = 53,4' (52,1')$$

$$\max D_4 \sin \varphi = 41,3 + 4,8 = 46,1' (45,5')$$

$$\max D_5' \sin \varphi = 35,5 + 4,0 = 39,5' (39,6')$$

$$\max D_6 \sin \varphi = 28,1 + 3,2 = 31,3' (31,0')$$

$$\max D_7 \sin \varphi = 22,5 + 2,4 = 24,9' (24,9')$$

$$\max D_8' \sin \varphi = 17,9 + 1,6 = 19,5' (20,2')$$

$$\max D_9' \sin \varphi = 13,4 + 0,8 = 14,2' (16,3')$$

$$\max D_{10} \sin \varphi = 10,2 + 0 = 10,2' (12,4').$$

179. Die Spannkraften in der oberen Gurtung. Man erhält, da $\varphi = 45^\circ$ ist,

$$O_1 = S_1 \sin \varphi - D_3 \sin \varphi$$

$$O_2 = O_1 + D_2' \sin \varphi - D_4' \sin \varphi = O_1 - 2 D_4' \sin \varphi$$

$$O_3 = O_2 - 2 D_5' \sin \varphi, \quad O_4 = O_3 - 2 D_6 \sin \varphi, \text{ usw.}$$

Tabelle V enthält die nach diesen Formeln berechneten Ordinaten der O -Linien. In Tabelle VI haben wir diese Linien nach dem Näherungsverfahren berechnet und zwar für eine Lasteinheit von $P = 120$. Die angenäherte $S_1 \sin \varphi$ -Linie zeigt Fig. 423; die Werte $D \sin \varphi$ sind der Tabelle auf Seite 530 des ersten Bandes entnommen worden; sie mußten mit 4 multipliziert werden, da jene frühere Untersuchung die Lasteinheit $P = 30$ voraussetzte. Dieses Näherungsverfahren führt außerordentlich rasch zum Ziele und liefert vorzügliche Ergebnisse. Bei der Berechnung von O_1 wurden dieselben Achslasten und Radstände

angenommen, wie bei der Ermittlung der V , S und D . Die übrigen Werte O sind für den neuen preußischen Belastungszug (Band I, Seite 338) berechnet worden. Man vergleiche die Figur 422, in der

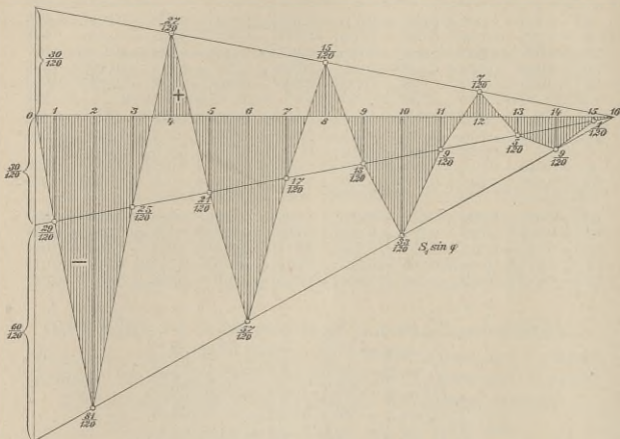


Fig. 423.

Tabelle V.

m	$-O_1$	$-O_2$	$-O_3$	$-O_4$	$-O_5$	$-O_6$	$-O_7$
1	0,228	0,236	0,198	0,168	0,160	0,168	0,130
2	0,668	0,686	0,650	0,496	0,468	0,486	0,450
3	1,102	1,054	1,024	0,990	0,770	0,746	0,716
4	-0,254	1,396	1,352	1,336	1,278	0,928	0,884
5	0,149	0,113	1,649	1,589	1,549	1,513	1,049
6	0,495	0,465	0,401	1,809	1,763	1,733	1,669
7	0,754	0,716	0,690	0,670	1,886	1,848	1,822
8	-0,128	0,872	0,880	0,880	0,874	1,874	1,882
9	0,117	0,155	0,939	0,959	0,985	1,023	1,807
10	0,263	0,293	0,341	0,933	0,995	1,025	1,073
11	0,313	0,349	0,389	0,449	0,913	0,949	0,989
12	-0,003	0,347	0,405	0,421	0,465	0,815	0,873
13	0,054	0,102	0,320	0,354	0,386	0,434	0,652
14	0,087	0,069	0,095	0,249	0,287	0,269	0,295
15	0,037	0,029	0,037	0,067	0,105	0,097	0,105

Tabelle VI ($P = 120$).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$S_1 \sin \varphi$	-29	-81	-25	+23	-21	-57	-17	+15	-13	-33	-9	+	-5	-9	1
$-D_3 \sin \varphi$			-100				-68				-36				-4
O_1	-29	-81	-125	+23	-21	-57	-85	+15	-13	-33	-45	+	-5	-9	5
$-2D_4 \sin \varphi$				-184				-120				-56			
O_2	-29	-81	-125	-161	-21	-57	-85	-105	-13	-33	-45	-	-5	-9	5
$-2D_5 \sin \varphi$	+8				-168				-104			-49	-40		
O_3	-21	-81	-125	-161	-189	-57	-85	-105	-117	-33	-45	-	-45	-9	5
$-2D_6 \sin \varphi$		+24				-152				-88		-49	-45	-24	
O_4	-21	-57	-125	-161	-189	-209	-85	-105	-117	-121	-45	-	-45	-33	5
$-2D_7 \sin \varphi$			+40				-136				-72	-	-45	-33	8
O_5	-21	-57	-85	-161	-189	-209	-221	-105	-117	-121	-117	-	-45	-33	13
$-2D_8 \sin \varphi$				+56				-120				-56			
O_6	-21	-57	-85	-105	-189	-209	-221	-225	-117	-121	-117	-	-45	-33	13
$-2D_9 \sin \varphi$	+8				+72				-104			-105	-40		
O_7	-13	-57	-85	-105	-117	-209	-221	-225	-221	-121	-117	-	-85	-33	13

die Einflußlinien für O_1 und O_5 abgebildet sind. Alle eingeklammerten Zahlen sind Ergebnisse der angenäherten Berechnung. Man erhält

$$\begin{aligned} \min O_1 &= \min O_{1p} + O_{1g} = -85,4 - 12,2 = -98' (-95') \\ \min O_2 &= -121,0 - 21,8 = -143' (-139') \\ \min O_3 &= -157,9 - 29,8 = -188' (-187') \\ \min O_4 &= -184,9 - 36,2 = -221' (-221') \\ \min O_5 &= -204,1 - 39,4 = -244' (-245') \\ \min O_6 &= -219,4 - 42,6 = -262' (-258') \\ \min O_7 &= -213,2 - 44,2 = -257' (-254'). \end{aligned}$$

180. Die Spannkraften in der unteren Gurtung wurden mit Hilfe der Formeln

$$\begin{aligned} U_1 &= S_4 \sin \varphi - D_3' \sin \varphi \\ U_2 &= U_1 + D_2 \sin \varphi - D_4 \sin \varphi = U_1 + 2D_2 \sin \varphi - P_2 \\ U_3 &= U_2 + 2D_3 \sin \varphi - P_3 \text{ usw.} \end{aligned}$$

untersucht. Zur Probe wurde U_7 noch mittels der Gleichung

$$U_7 = U_{o7} - X_a + X_b + X_c$$

berechnet. Tabelle VII enthält die Ordinaten der Einflußlinien. Man findet

$$\begin{aligned} \max U_1 &= \max U_{1p} + U_{1g} = 70,1 + 9,0 = 79' \\ \max U_2 &= 92,7 + 18,6 = 111' \\ \max U_3 &= 126,1 + 26,6 = 153' \\ \max U_4 &= 147,8 + 33,0 = 181' \\ \max U_5 &= 167,1 + 37,8 = 205' \\ \max U_6 &= 197,7 + 41,0 = 239' \\ \max U_7 &= 215,9 + 42,6 = 258' \end{aligned}$$

Tabelle VII.

m	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7
1	0,232	0,202	0,194	0,202	0,164	0,134	0,126
2	-0,250	0,596	0,568	0,586	0,550	0,396	0,368
3	0,190	0,156	0,936	0,888	0,858	0,824	0,604
4	0,586	0,570	0,512	1,162	1,118	1,102	1,044
5	0,949	0,089	0,849	0,813	1,349	1,289	1,249
6	-0,233	1,175	1,129	1,099	1,035	1,443	1,397
7	0,124	0,104	1,320	1,282	1,256	1,236	1,452
8	0,379	0,379	0,373	1,373	1,381	1,381	1,375
9	0,505	0,525	0,551	0,589	1,373	1,393	1,419
10	-0,025	0,567	0,629	0,659	0,707	1,299	1,361
11	0,089	0,149	0,613	0,649	0,689	0,749	1,213
12	0,171	0,187	0,231	0,581	0,639	0,655	0,699
13	0,154	0,188	0,220	0,268	0,486	0,520	0,552
14	-0,005	0,149	0,187	0,169	0,195	0,349	0,387
15	0,003	0,033	0,071	0,063	0,071	0,101	0,139

181. Eine sehr schnell zum Ziele führende angenäherte Berechnung der größten Gurtspannkkräfte ist die folgende. Man ermittle mit Hilfe der im I. Bande auf Seite 539 abgedruckten Tabelle der größten Biegemomente den Wert

$$\frac{\max M_{8p}}{h} = \frac{832}{4,0} = 208',$$

ferner den Wert

$$\frac{M_{8p}}{h} = \frac{gl^2}{8h} = \frac{1,6 \cdot 30^2}{8 \cdot 4,0} = 45',$$

zeichne über der Stützweite l eine Parabel vom Pfeile $45'$ und stelle die $\max M_y : h$ -Linie nach Band I Fig. 526 durch zwei Parabelstücke und eine gerade Linie von der Länge $0,12 l = 3,6^m$ dar. Dann setze

man $O_7 = -\frac{M_8}{h}$, $O_6 = -\frac{M_7}{h}$, usw. Man erhält, Fig. 424:

$$O_7 = -253', \quad O_6 = -252', \quad O_5 = -244', \quad O_4 = -225', \\ O_3 = -194', \quad O_2 = -153', \quad O_1 = -100',$$

das sind Zahlen, die von den vorhin ermittelten nur wenig abweichen.

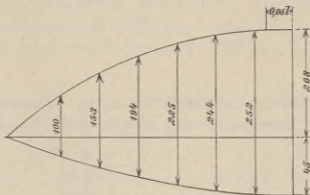


Fig. 424.

182. Einfluß einer ungleichmäßigen Erwärmung. Schreibt man allen Stäben der unteren Gurtung die Temperatur t_u , den Stäben der oberen Gurtung die Temperatur t_o und den Ständern (v) und Streben (s und d) die Temperatur t_s zu, so entsteht

$$X_{ax} = \frac{\sum \varepsilon t S_a s}{\sum S_a^2 \frac{s}{EF}} = \frac{EF_c}{s_c} \frac{\varepsilon t_u \sum S_a s + \varepsilon t_o \sum S_o s + \varepsilon t_s \sum S_s s}{\sum S_a^2 \frac{s}{s_c} \frac{F_c}{F}},$$

wo \sum_u , \sum_o , \sum_s sich der Reihe nach auf die untere und die obere Gurtung und auf die Füllungsglieder beziehen; und ähnliche Ausdrücke erhält man für X_b und X_c .

Mit Hilfe der Tabelle I findet man nun

$$\begin{aligned} \sum S_a s &= 0, & \sum S_b s &= 0, & \sum S_c s &= 0, \\ \sum S_b s &= 2,0, & \sum S_b s &= 2,0, & \sum S_b s &= -4, \\ \sum S_c s &= 0, & \sum S_c s &= 0, & \sum S_c s &= 0, \end{aligned}$$

mithin

$$\begin{aligned} X_{at} &= 0, & X_{ct} &= 0 \\ X_{bt} &= \frac{\varepsilon E F_c}{s} \frac{2t_o + 2t_u - 4t_s}{4\sum_1 \alpha + 4\nu' + 8\psi_1}. \end{aligned}$$

Für unser Zahlenbeispiel ergibt sich, wegen $F_c = 0,01 \text{ qm}$, $s_c = 2,0^m$ und $\varepsilon E = 250'/\text{qm}$

$$X_{bt} = \frac{1,25 (2t_o + 2t_u - 4t_s)}{194,4}.$$

Macht man die wohl am nächsten liegende Annahme

$$t_s = \frac{1}{2} (t_o + t_u),$$

so erhält man $X_{bt} = 0$. Nimmt man an: $t_u = 0'$, $t_o = 25^\circ$, $t_s = 5^\circ$, so erhält man trotz der sehr ungünstigen Voraussetzung den vernachlässigbaren Wert $X_{bt} = 0,2'$. Temperaturänderungen spielen also gar keine Rolle.

183. Untersuchung der Durchbiegungen. Übungsaufgaben. Wir beginnen mit der Berechnung der Biegelinie für den in Fig. 425

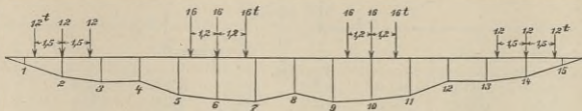


Fig. 425.

dargestellten Belastungsfall. Dieser ist so gewählt, daß die vier verschiedenen Teilsysteme möglichst ungleichmäßig belastet werden. Der Strebenzug $d_2' d_4' d_6' \dots$ wird sogar nur durch das Eigengewicht beansprucht. Die auf die einzelnen Knotenpunkte entfallenden Lasten sind, einschließlich des Eigengewichts, der Reihe nach

$$11,4' \quad 21,2' \quad 12,2' \quad 3,2' \quad 12,8' \quad 32,0' \quad 12,8' \quad 3,2' \quad 12,2' \quad 21,2' \quad 11,4';$$

sie erzeugen in den Ständern die mittels der Einflußlinien berechneten Spannkkräfte

$$V = -102,0', \quad V_u = +24,4', \quad V_o = 28,8'.$$

Die übrigen Spannkkräfte sind mit Hilfe der für die einzelnen Knotenpunkte aufgestellten Gleichgewichtsbedingungen berechnet und in der Tabelle VIII, Spalte S' , zusammengestellt worden; sie erzeugen die Längenänderungen

$$\Delta's = \frac{S's}{EF}$$

Tabelle VIII.

a) Gurtungen und Ständer.

S_{max}	F	$\frac{F_c}{F}$	$\frac{s}{s_c}$	S'	$\frac{EF_c\Delta's}{s_c}$	S_{max}	F	$\frac{F_c}{F}$	$\frac{s}{s_c}$	S'	$\frac{EF_c\Delta's}{s_c}$		
o_1	98	125	0,80	1	- 73	- 58	u_1	79	100	1,00	1	+ 18	+ 18
o_2	143	180	0,56	1	- 83	- 46	u_2	111	140	0,71	1	+ 103	+ 73
o_3	188	275	0,36	1	- 114	- 41	u_3	153	228	0,44	1	+ 136	+ 66
o_4	221	275	0,36	1	- 178	- 64	u_4	181	228	0,44	1	+ 142	+ 62
o_5	244	328	0,30	1	- 198	- 59	u_5	205	260	0,38	1	+ 160	+ 61
o_6	262	328	0,30	1	- 201	- 60	u_6	239	325	0,31	1	+ 192	+ 60
o_7	257	328	0,30	1	- 207	- 62	u_7	258	325	0,31	1	+ 200	+ 62
v	122	166	0,60	1	- 102	- 61							
v_o	42	66	1,51	1	+ 28,8	+ 43							
v_u	44	66	1,51	1	+ 24,4	+ 37							
t	<i>gem</i>				t	t							

$F_c = 100 \text{ qem}$

b) Diagonalen.

S_{max}	F	$\frac{F_c\sqrt{2}}{F}$	$\frac{s}{s_c\sqrt{2}}$	$\frac{S'}{\sqrt{2}}$	$\frac{EF_c\Delta's}{s_c\sqrt{2}}$	S_{max}	F	$\frac{F_c\sqrt{2}}{F}$	$\frac{s}{s_c\sqrt{2}}$	S'	$\frac{EF_c\Delta's}{s_c\sqrt{2}}$		
d_2	86	108	1,31	1	+ 53,2	+ 70	d'_2	64	80	1,77	1	- 4,8	- 8
d_4	44	55	2,57	2	- 32,0	- 16	d'_4	64	80	1,77	2	+ 4,8	+ 17
d_6	44	55	2,57	2	+ 32,0	+ 16	d'_6	28	35	4,04	2	- 1,6	- 13
d_8	14	25	5,66	2	0	0	d'_8	28	35	4,04	2	+ 1,6	+ 13
d_3	76	95	1,49	2	+ 22,2	+ 66	d'_3	56	70	2,02	2	- 15,6	- 63
d_5	35	44	3,22	2	- 10,0	- 64	d'_5	56	70	2,02	2	+ 15,6	+ 63
d_7	35	44	3,22	2	+ 10,0	+ 64	d'_7	20	25	5,66	2	- 2,8	- 31
d_9	20	25	5,66	2	+ 2,8	+ 31	d'_9	20	25	5,66	2	+ 2,8	+ 31
s_1	86	115	1,23	0,5	- 51	- 31							
s_2	86	115	1,23	0,5	+ 51	+ 31							
s_3	67	115	1,23	0,5	- 2,6	- 2							
s_4	67	115	1,23	0,5	+ 2,6	+ 2							

Die erste Spalte der Tabelle VIII gibt die absoluten Werte der für die Querschnittsberechnung maßgebenden größten Spannkkräfte an; sie enthält also eine Zusammenstellung der in Nr. 177 bis 180 berechneten

Werte. An Stelle der $\Delta's$ wurden die Werte $\frac{EF_c \Delta's}{s_c}$ beziehungsweise $\frac{EF_c \Delta's}{\sqrt{2} s_c}$ in Tonnen angegeben. Mit Hilfe dieser Zahlen findet man

nun mittels der in Nr. 175 abgeleiteten Formeln die Verschiebungen

$$\eta_1 = 0,5 \cdot 2 (31 + 2) + 37 + 0,5 \cdot 61 = 100,5$$

$$\eta_2 = 1,5 \cdot 2 \cdot 31 + 0,5 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 37 + 1,5 \cdot 61 + 2 \cdot 70 - 18 = 280,5$$

$$\eta_3 = 2 (-31 - 2) + 1,5 \cdot 2 (31 + 2) + 37 - 2 \cdot 43 + 0,5 \cdot 61 + 2 \cdot 66 - (18 + 73) = 85,5$$

$$\eta_4 = -2 \cdot 2 \cdot 31 + 1,5 \cdot 2 \cdot 31 + 2,5 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 43 + 37 - 0,5 \cdot 61 + 2 (17 + 8) - (18 + 73 + 66) - 2 \cdot 58 = -327,5$$

$$\eta_5 = 2 \cdot 2 (-31 - 2) + 2,5 \cdot 2 (31 + 2) - 2 \cdot 43 + 3 \cdot 37 + 0,5 \cdot 61 + 2 (63 + 63) - (18 + 73 + 66 + 62) - 2 (58 + 46) = -56,5$$

$$\eta_6 = \eta_{12} - 12^*) + 2 (16 + 16) - (73 + 66 + 62 + 61) + 2 (-58 - 46 - 41 - 18) = -255,5$$

$$\eta_7 = \eta_3 - 12 + 2 (64 + 64) - (66 + 62 + 61 + 60) + 2 (-58 - 46 - 41 - 64 - 18 - 73) = -519,5$$

$$\eta_8 = \eta_4 - 12 + 2 (13 + 13) - (62 + 61 + 60 + 62) + 2 (-58 - 46 - 41 - 64 - 59 - 18 - 73 - 66) = -1382,5.$$

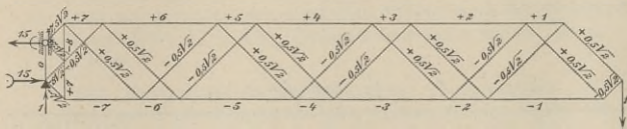


Fig. 426.

Für η_{16} ergibt sich mit Hilfe des in Fig. 426 dargestellten Belastungsfalles der allgemeine Ausdruck

$$\begin{aligned} \eta_{16} = & 7,5 \sqrt{2} (\Delta s_1 + \Delta s_2) - 8 \sqrt{2} \Delta s_3 - 7 \sqrt{2} \Delta s_4 + 0,5 \sqrt{2} (\Delta s_3' - \Delta s_4') \\ & - 8 \Delta v_o + 7 \Delta v_u + 7 \Delta o_1 + 6 (\Delta o_2 + \Delta o_3 + \Delta o_4) + 5 \Delta o_5 \\ & + 4 (\Delta o_6 + \Delta o_7 + \Delta o_7') + 3 \Delta o_6' + 2 (\Delta o_5' + \Delta o_4' + \Delta o_3') + \Delta o_2' \\ & - 7 (\Delta u_1 + \Delta u_2) - 6 \Delta u_3 - 5 (\Delta u_4 + \Delta u_5 + \Delta u_6) - 4 \Delta u_7 \\ & - 3 (\Delta u_7' + \Delta u_6' + \Delta u_5') - 2 \Delta u_4' - (\Delta u_3 + \Delta u_2 + \Delta u_1) \\ & + 0,5 \sqrt{2} (\Delta d_3 - \Delta d_5 + \Delta d_7 - \Delta d_9 + \Delta d_{11} - \Delta d_{13} + \Delta d_{15}) \\ & - 0,5 \sqrt{2} (\Delta d_2' - \Delta d_4' + \Delta d_6' - \Delta d_8' + \Delta d_{10}' - \Delta d_{12}' + \Delta d_{14}' - \Delta d_{16}'). \end{aligned}$$

Da nun ein symmetrischer Belastungsfall vorliegt und außerdem

^{*)} $2 (\Delta v_u - \Delta v_o) = 2 (37 - 43) = -12.$

$\Delta s_1 = -\Delta s_2$ und $\Delta s_3 = -\Delta s_4$ ist, so geht die vorstehende Formel über in

$$\begin{aligned} \eta_{16} = & -8\Delta v_o + 7\Delta v_u + 7(+\Delta o_1 + \Delta o_2 - \Delta u_2 - \Delta u_4 + \Delta o_5 + \Delta o_6 - \Delta u_7) \\ & + 8(-\Delta u_1 - \Delta u_2 + \Delta o_3 + \Delta o_4 - \Delta u_5 - \Delta u_6 + \Delta o_7) \\ & + 0,5\sqrt{2} (+\Delta d_3 - \Delta d_5 + \Delta d_7 - \Delta d_9 + \Delta d_7' - \Delta d_5' + \Delta d_3'). \end{aligned}$$

Die Einsetzung der Zahlenwerte liefert

$$\begin{aligned} \eta_{16} = & -8 \cdot 43 + 7 \cdot 37 + 7(-58 - 46 - 66 - 62 - 59 - 60 - 62) \\ & + 8(-18 - 73 - 41 - 64 - 61 - 60 - 62) \\ & + 0,5 \cdot 2 (+66 + 64 + 64 - 31 - 31 - 63 - 63) \end{aligned}$$

d. i. abgerundet $\eta_{16} = -6000$.

Der mit $A = 107,2^t$ belastete untere Teil des Endständers, dessen Querschnitt 180 qcm beträgt, wird um

$$\Delta s = \frac{Ss}{EF} = \frac{107,2 \cdot 100}{2150 \cdot 180} = 0,03^{cm*}$$

verkürzt, und es ergeben sich daher die Senkungen δ der Knotenpunkte aus der Formel

$$\delta_m = \frac{s_c}{EF_c} \left(\eta_m - \eta_{16} \frac{x_m}{l} \right) + 0,03^{cm},$$

wo
$$\frac{EF_c}{s_c} = \frac{2150 \cdot 100}{200}$$

Man findet der Reihe nach

$$\delta = 3,1^{mm} \quad 8,5^{mm} \quad 10,4^{mm} \quad 10,3^{mm} \quad 16,5^{mm} \quad 18,4^{mm} \quad 19,7^{mm} \quad 15,4^{mm}$$

und erkennt, daß sich bei den unbelasteten Knotenpunkten 4 und 8 in der Gurtung Knicke von $\frac{1}{2}(10,4 + 16,5) - 10,3 = 3,2^{mm}$ bzw. $19,7 - 15,4 = 4,3^{mm}$ Pfeile bilden, die bei der kurzen Feldweite genügen, um in einer gelenklosen steifen Gurtung erhebliche Biegungsspannungen hervorzurufen. Aus diesem Grunde ist das untersuchte Netzwerk nur für Träger mit Bolzengelenken zu empfehlen.

Weiter möge noch die Durchbiegung δ_s für den in Fig. 427 abgebildeten Belastungsfall angegeben werden. Da δ_s nur von den Längenänderungen des den Strebenzug $d_2', d_5', d_7', d_9' \dots$ enthaltenden Teilsystems abhängig ist, so wenden wir die Formel

$$\delta_s = \Sigma S' \frac{Ss}{EF}$$

auf die wirklichen Spannkkräfte S und auf die Spannkkräfte S' infolge

*) Es wurde für Flußeisen $E = 2150000 \text{ kg/qcm} = 2150 \text{ t/qcm}$ gesetzt.

einer am Teilsysteme in 8 angreifenden Last 1 an. Ersetzen wir diese Last 1 durch eine Last von der Größe 8, so nehmen die S' die in die linke Hälfte der Figur eingeschriebenen Werte an und wir erhalten daher

$$8 \delta_8 = \Sigma S' \Delta s = 2 [1 \cdot \Delta o_1 - 7(\Delta o_2 + \Delta o_3 + \Delta o_4 + \Delta o_5) - 15(\Delta o_6 + \Delta o_7) + 3(\Delta u_1 + \Delta u_2 + \Delta u_3) + 11(\Delta u_4 + \Delta u_5 + \Delta u_6 + \Delta u_7) + 4\sqrt{2}(-\Delta d_2' + \Delta d_4' - \Delta d_6' + \Delta d_8') - \Delta v_o - 3\Delta v_u + 2\Delta v + \sqrt{2}(\Delta s_1 - \Delta s_2) - 3\sqrt{2}(\Delta s_3 - \Delta s_4)] + \delta_o.$$

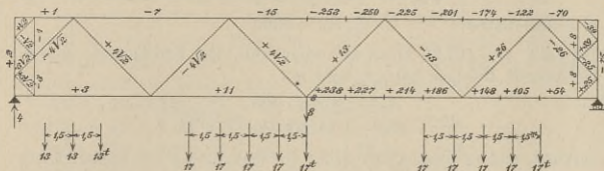


Fig. 427.

Hierin sind Δo , Δu , Δd , . . . Mittelwerte aus den Längenänderungen der einander entsprechenden Stäbe der linken und rechten Trägerhälfte. Beispielsweise erfährt der Stab o_1 durch die angegebene Verkehrslast und durch das Eigengewicht einen Druck von 75^t , Stab o_1' einen solchen von 65^t ; wir schreiben also beiden Stäben den Druck $\frac{1}{2}(75 + 65) = 70^t$ zu. Auf diese Weise sind die in die rechte Hälfte des Trägernetzes eingetragenen Spannkräfte bestimmt worden. Die für die geneigten Stäbe angegebenen Werte sind noch mit $\sqrt{2}$ zu multiplizieren. δ_o bedeutet die Verkürzung des untersten Teiles des Endständers. Man erhält schließlich

$$\delta_8 = 23^{\text{mm}} = \frac{1}{1300} l.$$

Die in Fig. 425 dargestellte Biegelinie läßt sich durch Hinzufügung eines Mittelständers, der mit den ihn kreuzenden Diagonalen befestigt werden muß, erheblich verbessern. Es werden gewissermaßen die vier Teilsysteme an der Stelle 8 miteinander verbunden und gezwungen, sich bei 8 gleich stark durchzubiegen. Die Berechnung dieses fünffach statisch unbestimmten Systems ist ziemlich einfach und keineswegs zeitraubend, sie sei dem Leser als Übungsaufgabe empfohlen. Mit der Anzahl eingeschalteter Ständer bessert sich einerseits die Über-

einstimmung der Biegungslinien der Teilsysteme, während andererseits die Schwierigkeiten der genauen Berechnung wachsen.

Als weitere Übungsaufgaben empfehlen wir die Untersuchung des in Fig. 429 dargestellten fünffach statisch unbestimmten sechsteiligen Netzwerks, dessen Elastizitätsbedingungen sich leicht voneinander un-



Fig. 428.



Fig. 429.



Fig. 430.

abhängig machen lassen und schließlich des in Fig. 430 abgebildeten einfach statisch unbestimmten Systemes, dessen Hauptsystem im Band I, Nr. 228, untersucht worden ist.

§ 18.

Untersuchung der Formveränderung eines vierteiligen statisch bestimmten Netzwerks Mehrtensscher Bauart.

184. Die Besprechung des Verschiebungsplanes des in Fig. 432 dargestellten Netzwerks muß ich durch eine Bemerkung einleiten, die sich auf einen zwischen Herrn Professor G. Mehrtens und mir in der Deutschen Bauzeitung stattgehabten Meinungswechsel bezieht.*). Die Veranlassung hierzu gab die im ersten Bande dieses Werkes an einem mehrteiligen Fachwerke Mehrtensscher Bauart von mir geübte Kritik. Ich hob auf Grund einer allgemeinen Untersuchung des statisch bestimmten mehrteiligen Netzwerks und der Berechnung eines Sonderfalles (I, Nr. 227) hervor, daß der Schlußsatz einer von Herrn Mehrtens über derartige Fachwerke veröffentlichten Abhandlung in allen Punkten unrichtig sei, und betonte besonders, daß von dem seitens des Herrn Mehrtens den Netzwerken seiner Bauart zugeschriebenen Vorzuge, alle Lasten *gleichmäßig* über das gesamte Stabwerk zu verteilen, gar keine Rede sein könne. Ich zeigte, daß in der Diagonale D_2 des als Beispiel untersuchten *vierteiligen* Trägers sogar eine Spannkraft erzeugt wird, die ebenso groß ist, als in

*) Deutsche Bauzeitung 1901, Nr. 80 u. Nr. 90 und 1902, Nr. 12.

der Diagonale eines *einteiligen* Systems gleicher Spannweite und wies darauf hin, daß man mit mehrteiligen Fachwerken vor allem das Streben nach Verkleinerung

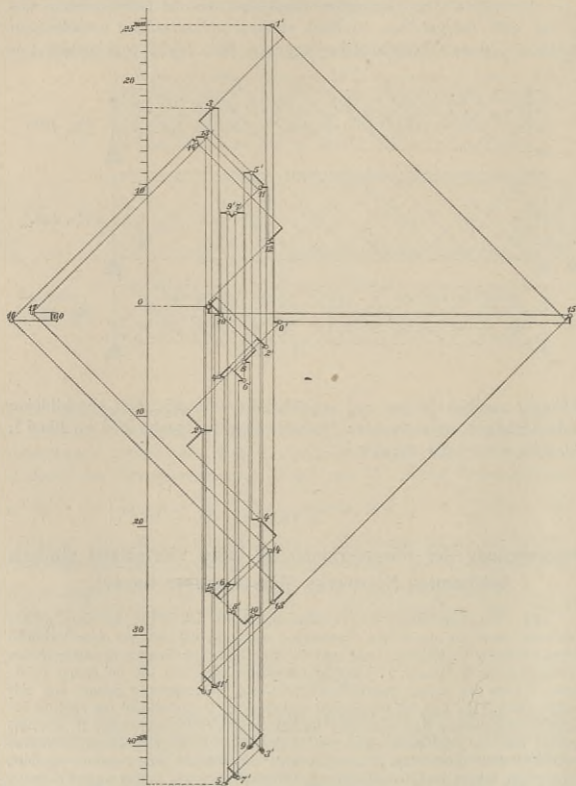


Fig. 431.

der Beanspruchung der Wandglieder verbinden müsse. Nach einem erfolglosen Versuche, die Behauptung einer gleichmäßigen Beanspruchung seines Stabwerks zu recht-

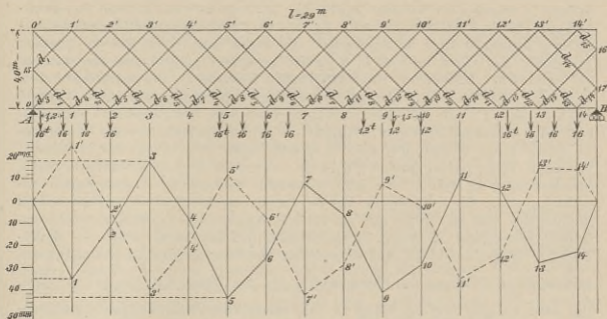


Fig. 432.

	S_{max}	F	s	S'	$\frac{S's}{F}$		S_{max}	F	s	S'	$\frac{S's}{F}$
O_1	111	140	200	-108	-154	u_1	76	95	200	-40	-84
O_2	177	235	200	-162	-138	u_2	138	175	200	-14	-16
O_3	188	235	200	-83	-71	u_3	178	225	200	+177	+157
O_4	233	325	200	-80	-49	u_4	230	290	200	+228	+157
O_5	257	325	200	-245	-151	u_5	212	290	200	+142	+98
O_6	302	380	200	-293	-154	u_6	254	325	200	+113	+70
O_7	275	380	200	-210	-111	u_7	258	325	200	+246	+151
O_8	286	380	200	-146	-77	u_8	288	360	200	+281	+156
O_9	262	380	200	-248	-131	u_9	233	310	200	+180	+116
O_{10}	300	380	200	-270	-142	u_{10}	248	310	200	+107	+69
O_{11}	209	285	200	-159	-112	u_{11}	208	290	200	+190	+131
O_{12}	226	285	200	-68	-48	u_{12}	231	290	200	+209	+144
O_{13}	138	200	200	-133	-133	u_{13}	102	150	200	+80	+107
O_{14}	160	200	200	-149	-149	u_{14}	119	150	200	-40	+53
$d_1^*)$	53	70	283	+38	+154	d_{10}	61	80	566	+16	+111
			566		+307	d_{11}	97	125	566	-78	-353
d_2	157	200	566	+153	+433	d_{12}	79	100	566	-64	-362
d_3	108	135	566	-56	-235	d_{13}	85	115	566	+46	+226
d_4	37	50	566	-3	-34				141		+14
d_5	117	150	566	+117	+441	d_{14}	90	115	424	+11	+40
d_6	48	60	566	+34	+321				566		+54
d_7	95	125	566	-65	-294				141		-99
d_8	57	80	566	-39	-276	d_{15}	142	150	424	-105	-297
d_9	96	125	566	+72	+326				566		-396

$$V_1 = O_1, V_2 = O_2, V_3 = O_{14}$$

*) Die Spannkraft D ist für eine linkssteigende Diagonale als Zug positiv angenommen, Vergl. Band I, Seite 516.

fertigen*), erklärt Herr Mehrrens schließlich: „Er habe durchaus nicht an eine gleichmäßige *Spannkraft*verteilung gedacht, sondern die konstruktiven Mängel der ungleichmäßigen Formänderungen im Auge gehabt, die daraus entspringen, daß die einzelnen Teilsysteme der Wand bei den in Vergleich gezogenen unbestimmten Anordnungen die wandernden Einzellasten nicht gleichmäßig übertragen. Bei der üblichen Zerlegung in Teilsysteme erscheine sogar nur dasjenige Wandsystem gespannt, in welchem die Knotenlast P liegt; alle anderen Wandsysteme seien spannungslos.“ Mit seinen mehrteiligen Wandgliederungen behauptet nun Herr Mehrrens, bessere Wirkungen zu erzielen; daß er sich aber auch in diesem Punkte irrt, beweist der in Fig. 431 für einen Träger seiner Bauart (Fig. 432) — dasselbe vierteilige Netzwerk, dessen Beanspruchung in Band I, Nr. 227, untersucht worden ist — gezeichnete Verschiebungsplan. Die beigegebene Tabelle enthält die absoluten Werte der mittels Einflußlinien und auf Grund der im Band I angegebenen Belastungen gefundenen größten Spannkraft S , ferner die Querschnitte und Längen der Stäbe, die Spannkraft S' infolge der in Fig. 432 dargestellten Belastung (Zugstellung für $max D_2$) einschließlich der Wirkung des Eigengewichts und die Werte $E\Delta s = \frac{S's}{F}$ in $t:cm$.

Das feste Auflager liegt bei Stütze 0. Die senkrechten Verschiebungen der Knotenpunkte 1 und 2 wurden mit Hilfe der Formel $\delta = \Sigma S'\Delta s$ berechnet; ihre wagerechten Verschiebungen sind Δu_1 und $\Delta u_1 + \Delta u_2$. Zur Bestimmung der Verschiebungen der übrigen Knotenpunkte wurde das Williot'sche Verfahren benutzt. Als Zeichnungsproben standen die Bedingungen zur Verfügung, daß die gegenseitige senkrechte Verschiebung der Knotenpunkte 16 und 17 gleich der Längenänderung des Stabes 16—17 und die Senkung des Punktes 17 gleich der Verkürzung des Stabes 17 B sein muß. Außerdem wurde die Senkung des Knotenpunktes 5 nachträglich noch gerechnet; sie stimmte mit der zeichnerisch gefundenen genau überein.

Das Ergebnis dieser Untersuchung ist außerordentlich ungünstig. Die größte Durchbiegung beträgt 43^{mm} , also $\frac{1}{700}$ der Stützweite. Die in Fig. 432 dargestellten Biegungslinien der Gurtungen bilden einen Zickzack, gegen den sich die Knicke in der für das unbestimmte System gefundenen und in demselben Maßstabe gezeichneten Linie recht winzig ausnehmen. Neun Knotenpunkte bewegen sich aufwärts. Die Strecke, um die Punkt 1' nach oben rückt, ist größer als die größte Durchbiegung des vorhin untersuchten unbestimmten Systems. Die gegenseitige senkrechte Verschiebung der Punkte 1 und 1' beträgt 60^{mm} d. i. $\frac{1}{480}$ der Stützweite. Und ebenso groß ist auch die gegenseitige senkrechte Verschiebung der nur 4^m voneinander entfernt liegenden Knotenpunkte 3 und 5. Der erste Knotenpunkt neben dem festen Auflager senkt sich bereits um 35^{mm} . Dies hat eine ganz unzulässige Drehung des Stabdreiecks 0—15—1 zur Folge und bewirkt, daß sich der Knotenpunkt 15 um rund 40^{mm} in wagerechter Richtung verschiebt. Da nun die wagerechte Verschiebung des oberen Endpunktes 0' des Endständers verhältnismäßig gering ist, so zeigt der nur 4^m hohe Endständer in der Mitte einen Knick von rund 35^{mm} Pfeil. Beim Anblick dieser beiden merkwürdigen Biegungslinien wird man unwillkürlich an die bekannte Nürnberger Schere erinnert.

*) S. Deutsche Bauzeitung 1901, Nr. 80. Dort verlangt Herr Mehrrens, daß man eine gleichmäßige Verteilung der Lasten immer dann anerkenne, wenn sämtliche Stäbe an deren Übertragung teilnehmen, ohne Rücksicht auf das Gesetz, das diese Teilnahme regelt und ohne zu prüfen, ob hierbei nicht etwa die größte Unregelmäßigkeit herrscht.

Unsere Untersuchung zeigt, daß der in Fig. 432 dargestellte Träger in jeder Hinsicht eine verfehlte Konstruktion ist. Wir verweisen noch auf die interessante Abhandlung von *Bender* über Netzwerke *Mehrtens*scher Bauart (Zentralblatt der Bauverwaltung 1905, S. 426), welche im Anschluß an des Verfassers Untersuchungen Beispiele für symmetrische Träger dieser Bauart bringt, die ebenfalls zu sehr ungünstigen Ergebnissen führen. Herr *Mehrtens* antwortete hierauf (Z. d. B. 1905, S. 580) mit der Erklärung, er habe diese Träger den Fachgenossen niemals empfohlen, sondern nur zum ersten Male nachgewiesen, daß derartige Wandgliederungen statisch bestimmt angeordnet werden können; er verstehe nicht, warum man von diesen Trägern so viel Aufhebens mache und an deren unfruchtbare Berechnung so viel Zeit und Mühe verschwende.

Da nun Herr *Mehrtens* die Versicherung, jene Systeme niemals empfohlen zu haben, im dritten Bande seiner Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen in einer gegen den Verfasser gerichteten Anmerkung wiederholt, so mögen auch an dieser Stelle die Tatsachen wiederholt werden, welche der Verfasser Herrn *Mehrtens* bereits im Zentralblatt der Bauverwaltung 1905, S. 647, und in der Beilage zu seinem Buche „Erddruck auf Stützmauern“, Stuttgart 1906, entgegengehalten hat; sie stehen mit der Versicherung des Herrn *Mehrtens* in grellem Widerspruche.

1. Herr *Mehrtens* hat sich keineswegs damit begnügt, den Nachweis der statischen Bestimmtheit zu führen, sondern er hat der neuen Trägerart die Empfehlung mit auf den Weg gegeben: „Vergleicht man schließlich die gebräuchlichen mehrteiligen Netzwerke mit den erörterten endlosen statisch bestimmten Netzwerken, so finden sich die mehr als zweiseitigen unbestimmten Anordnungen insofern im Nachteil, als sie stets $(t - 2)^{1/2}$ Viereckzüge (wo t die Teilungsziffer bedeutet) enthalten, die beweglich sind und für die Lastübertragung nicht taugen. *Dagegen verteilen die statisch bestimmten mehrteiligen Netzwerke alle Lasten gleichmäßig über das gesamte Stabwerk der Wand, der Gurte und der Ständer.*“

2. In der Deutschen Bauzeitung schreibt Herr *Mehrtens* zu seiner Verteidigung u. a. (1902, S. 74): „Ich füge noch hinzu, daß man in Amerika mit der von mir vorgeschlagenen statisch bestimmten mehrteiligen Wandgliederung Versuche angestellt hat“, und auf S. 75 sagt er von den fraglichen Trägern: „Eine größere Bedeutung haben sie für den Kriegerbrückenbau, und hierfür habe ich sie seinerzeit an maßgebender Stelle in Vorschlag gebracht.“

3. Im Jahre 1899 hatte Herr *Mehrtens* sogar den Versuch gemacht, sich seine Erfindung patentieren zu lassen. Die Patentanmeldung ist am 20. Februar 1899 unter M. 15152 Kl. 19 ausgelegt worden. Der Patentanspruch lautete: „Statisch bestimmtes mehrteiliges Netzwerk für Träger und Pfeiler, dadurch gekennzeichnet, daß die rechts- und linksfallenden Wandstäbe einen die ganze Träger- oder Pfeilerwand zwischen Ständern und Gurten ausfüllenden, ununterbrochenen Zug bilden, der von einer Ständerecke ausgeht und in einer anderen Ständerecke endet.“ In der Erläuterung des Patentanspruches behauptete Herr *Mehrtens*, daß eine an einem beliebigen Knoten angreifende Einzellast sämtliche Wandstreben sehr gleichmäßig spanne, und folgert hieraus, daß das von ihm erfundene Netzwerk sich eigne: „für Träger aller Art, bei denen man die Wirkung von Einzellasten möglichst gleichzeitig über die Trägerwand verteilen will, z. B. für Träger von großen Stützweiten, in denen man nicht zu große Querträgerentfernungen erhalten will, für Windverbände großer Brücken, für Träger von Hängebrücken, wenn es sich um gleichmäßige Übertragung von Einzellasten auf Kabel und Ketten handelt.“ Auch für Pfeiler sei das Netzwerk mit ununterbrochenem Strebenzuge verwendbar.

Diese öffentlich ausgelegte Patentanmeldung beweist, daß Herr *Mehrtens* seine Erfindung nicht nur empfohlen, sondern sogar in recht überschwenglicher Weise empfohlen hat; denn es ist ein wichtiges und umfangreiches Anwendungsgebiet, das

er an seiner Erfindung rühmt, um dem Patentamte die Möglichkeit ihrer gewerblichen Verwertung zu beweisen. Am meisten aber muß es befremden, daß Herr *Mehrtens*, nach der in der Deutschen Bauzeitung abgegebenen Erklärung, für wichtige Aufgaben der Landesverteidigung an maßgebender Stelle ein Brückensystem in Vorschlag gebracht haben will, das nach dem jetzt von ihm selbst gefällten, vernichtenden Urteile so unbrauchbar ist, daß es sich nicht einmal lohnt, „an dessen unfruchtbare Berechnung Zeit und Mühe zu verschwenden“.

§ 19.

Herleitung der Biegungslinien aus den Momentenlinien.

185. Wir schließen unsere Untersuchung des ebenen Fachwerks mit der Angabe eines Verfahrens: die Biegungslinien in der Weise aus den Momentenlinien herzuleiten, daß die Ermittlung der Durchbiegungen für eine Reihe von Belastungsfällen immer nur die Neubestimmung der Momentenlinie erfordert, während alle von den Querschnittsabmessungen und Stablängen abhängigen Größen nur einmal berechnet werden müssen.

Zu diesem Zweck setzen wir voraus, es seien die Stabkräfte durch die auf die Knotenpunkte . . . $(m-1)$, m , $(m+1)$. . . bezogenen Angriffsmomente . . . M_{m-1} , M_m , M_{m+1} , . . . ausgedrückt und auf die Form

$$(1) \quad S = \dots + \psi_{m-1} M_{m-1} + \psi_m M_m + \psi_{m+1} M_{m+1} + \dots$$

gebracht, unter ψ Werte verstanden, welche von dem jeweiligen Belastungszustande unabhängig sind. Es ist dann nach Seite 114 der Einfluß der Änderung Δs einer Stablänge s auf die Gewichte w :

$$(2) \quad \dots, w_{m-1} = \psi_{m-1} \Delta s, w_m = \psi_m \Delta s, w_{m+1} = \psi_{m+1} \Delta s, \dots$$

oder, wenn $\Delta s = \frac{Ss}{EF}$ gesetzt und S mittels Gleich. (1) bestimmt wird:

$$w_{m-1} = \frac{\psi_{m-1} s}{EF} (\dots \psi_{m-1} M_{m-1} + \psi_m M_m + \psi_{m+1} M_{m+1} \dots)$$

$$w_m = \frac{\psi_m s}{EF} (\dots \psi_{m-1} M_{m-1} + \psi_m M_m + \psi_{m+1} M_{m+1} \dots).$$

Bildet man auf diese Weise die Beiträge, welche die einzelnen Stäbe zu den Gewichten w liefern, so gelangt man schließlich zu Ausdrücken von der Form:

$$w_m = \dots + \frac{M_{m-1}}{a_{(m-1)m}} + \frac{M_m}{a_{m \cdot m}} + \frac{M_{m+1}}{a_{(m+1)m}} + \dots,$$

worin die Werte a von der Gestalt des Fachwerks und den Querschnittsabmessungen abhängig sind, nicht aber von dem Belastungszustande.

Anstatt nun die Durchbiegungen mit Hilfe eines Seilpolygons zu bestimmen, welches mit der Polweite $Eins$ zu den Gewichten w gezeichnet wird, kann man auch in der Weise verfahren, daß man das Gewicht w_m (und ebenso alle übrigen w) durch die Gewichte

$$\dots\dots M_{m-1}, M_m, M_{m+1}, \dots\dots$$

in den Abständen

$$\dots\dots a_{(m-1)m}, a_{(m+1)m} \dots\dots$$

vom Pole O ersetzt. Denn die nach den Endpunkten der Gewichte $\dots\dots M_{m-1}, M_m, M_{m+1}, \dots\dots$ gezogenen Strahlen zerlegen w_m in die Abschnitte:

$$\dots\dots, M_{m-1} \frac{1}{a_{(m-1)m}}, M_m \frac{1}{a_{m,m}}, M_{m+1} \frac{1}{a_{(m+1)m}}, \dots\dots$$

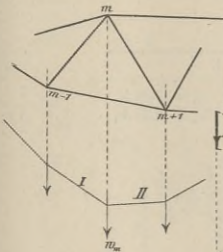


Fig. 433 a.

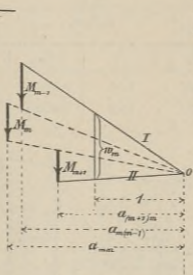


Fig. 433 b.

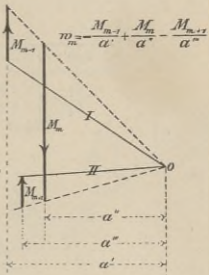


Fig. 433 c.

Vergl. Fig. 433 b, in der ein von drei Momenten abhängiges Gewicht w vorausgesetzt wurde. Treten negative Werte a auf, so werden die entsprechenden M als negative Gewichte aufgefaßt, wie dies die in der Regel vorliegende Figur 433 c angibt.

Durch die im vorstehenden beschriebene Änderung des Kräftezuges ist das gesteckte Ziel erreicht. Die von den Lasten unabhängigen Werte a werden ein für allemal berechnet, und die Untersuchung eines neuen Belastungszustandes erfordert nur die Aufzeichnung der neuen Momentenlinie. Ein Beispiel möge das Verfahren erläutern.

186. Zahlenbeispiel. Es liege der in Fig. 435 dargestellte Hauptträger einer Eisenbahnbrücke von 36^m Spannweite mit 10 Feldern vor.

Die Spannkraft in einem Stabe der oberen Gurtung ist (Fig. 434):

$$O_m = -\frac{M_m}{r_m},$$

und die Änderung der Stablänge o_m hat nur Einfluß auf w_m ; sie erzeugt:

$$w_m = -\frac{\Delta o_m}{r_m} = -\frac{O_m o_m}{EF_m r_m} = +\frac{M_m o_m}{EF_m r_m^2},$$

und man erhält, mit den in der folgenden Zusammenstellung angegebenen Querschnittsabmessungen, zunächst für $E=1$ die nachstehenden Beiträge zu den Gewichten w_1, w_3, w_5 .

Stab	o_m	r_m	F_m	
o_1	7,31	3,58	0,0160	$w_1 = 35,62 M_1$
o_2	7,23	4,58	0,0320	$w_3 = 10,77 M_3$
o_3	7,20	4,92	0,0320	$w_5 = 9,30 M_5$
Meter			qm	

Dem Untergurtstabe u_r entspricht (wegen $r_k = h_k$)

$$w_k = \frac{M_k u_k}{EF_k h_k^2}, \text{ d. i.}$$

Stab	u_k	r_k	F_k	
u_2	7,20	4,28	0,0240	$w_2 = 16,38 M_2$
u_4	7,20	4,92	0,0320	$w_4 = 9,30 M_4$

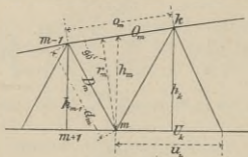


Fig. 434.

Für die Diagonale des m ten Feldes ergibt sich:

$$D_m = \left(\pm \frac{M_m}{h_m} + \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \right) \frac{d_m}{\lambda_m},$$

wobei die oberen Vorzeichen für eine linkssteigende, die unteren für eine rechtssteigende Diagonale gelten. Aus der Gleichung für D_m folgt

$$w_m = \pm \frac{\Delta d_m}{h_m} \cdot \frac{d_m}{\lambda_m} = \pm \frac{D_m d_m}{EF_m h_m} \cdot \frac{d_m}{\lambda_m} = \frac{d_m^2}{EF_m \lambda_m^2 h_m^2} M_m - \frac{d_m^2}{EF_m \lambda_m^2 h_{m-1} h_m} M_{m-1}$$

$$w_{m-1} = \mp \frac{\Delta d_m}{h_{m-1}} \frac{d_m}{\lambda_m} = \mp \frac{D_m d_m}{EF_m h_{m-1}} \frac{d_m}{\lambda_m} = -\frac{d_m^2}{EF_m \lambda_m^2 h_{m-1} h_m} M_m + \frac{d_m^2}{EF_m \lambda_m^2 h_{m-1}^2} M_{m-1}.$$

Stab	d_m	F_m	
d_1	4,69	0,0210	$w_1 = 28,61 M_1$
d_2	5,59	0,0150	$w_2 = 49,05 M_2 - 57,68 M_1; w_1 = -57,68 M_2 + 67,82 M_1$
d_3	5,59	0,0070	$w_3 = 90,99 M_3 - 97,80 M_2; w_2 = -97,80 M_3 + 105,11 M_2$
d_4	6,10	0,0060	$w_4 = 110,59 M_4 - 128,98 M_3; w_3 = -128,98 M_4 + 137,95 M_3$
d_5	6,10	0,0060	$w_5 = 120,59 M_5 - 120,59 M_4; w_4 = -120,59 M_5 + 120,59 M_4$

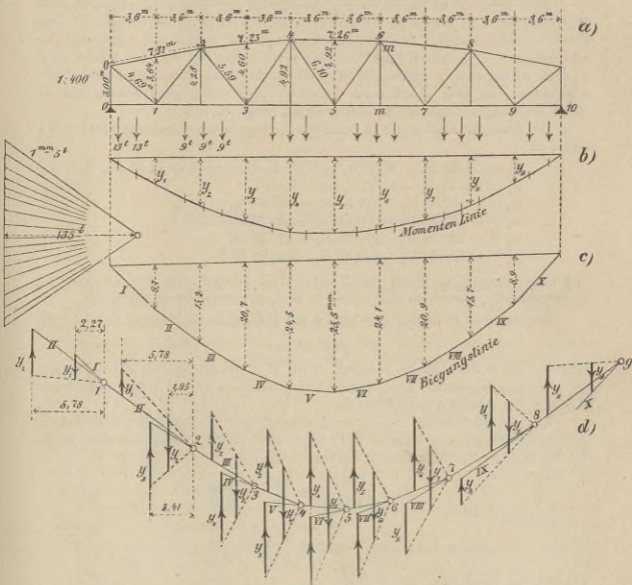


Fig. 435.

Dem linken Endständer entspricht

$$V_0 = -\frac{M_1}{\lambda}, \text{ also } w_1 = -\frac{\Delta h_0}{\lambda} = -\frac{V_0 h_0}{EF_0 \lambda} = +\frac{M_1 h_0}{EF_0 \lambda^2}$$

und mit $F_0 = 0,0160 \text{ qm}$:

$$w_1 = 14,47 M_1.$$

Für den Pfosten mm in Fig. 435 würde man, wenn K_m die Belastung des Knotens m bedeutet, erhalten:

$$V_m = + K_m = Q_{m+1} - Q_m = \frac{M_{m+1} - M_m}{\lambda} - \frac{M_m - M_{m-1}}{\lambda}$$

$$\text{mit } w_{m+1} = \frac{\Delta h_m}{\lambda}, \quad w_m = -\frac{2}{\lambda} \Delta h_m, \quad w_{m-1} = +\frac{\Delta h_m}{\lambda},$$

worein zu setzen:

$$\Delta h_m = \frac{V_m h_m}{EF} = \frac{h_m}{EF\lambda} (M_{m+1} - \angle M_m - M_{m-1}).$$

Eine derartige umständliche Berücksichtigung der Längenänderungen Δh der Zwischenpfosten ist jedoch im vorliegenden Falle entbehrlich. Man denke sich diese Stäbe vielmehr beseitigt, zeichne eine Biegelinie, welche die lotrechten Verschiebungen der Knoten 1, 3, 5, 7, 9 der unteren Gurtung und der Knoten 0, 2, 4, 6, 8, 10 der oberen Gurtung angibt und beachte schließlich, daß sich die Verschiebungen von zwei durch einen lotrechten Stab verbundenen Knoten um die Längenänderungen dieses Stabes unterscheiden (vergl. S. 103).

Die Zusammenzählung der an denselben Knotenpunkten angreifenden Gewichte w ergibt nun:

$$w_1 = 35,64 M_1 + 28,61 M_1 - 57,68 M_2 + 67,82 M_1 + 14,47 M_1, \text{ d. i.}$$

$$w_1 = 146,55 M_1 - 57,68 M_2 \text{ und ebenso:}$$

$$w_2 = -57,68 M_1 + 170,54 M_2 - 97,80 M_3$$

$$w_3 = -97,80 M_2 + 239,71 M_3 - 128,98 M_4$$

$$w_4 = -128,98 M_3 + 250,48 M_4 - 120,59 M_5$$

$$w_5 = -120,59 M_4 + 250,48 M_5 - 120,59 M_6,^*)$$

und zwar gelten diese Werte für $E=1$. Wird beispielsweise $E=1800000^*/q_m$ $= 18000000^*/q_m$ gesetzt, so sind sämtliche w durch 18000000 zu dividieren.

Die Momente M werden zweckmäßig mit Hilfe eines Seilpolygons auf die Form

$$M_m = H y_m$$

gebracht, wo H die Polweite bedeutet. Wird H in Tonnen ausgedrückt, so müssen die y im Längenmaßstabe der Trägerzeichnung gemessen und in Metern ausgedrückt werden. Die Gewichte w sind Zahlen.

In unserem Beispiele wählen wir für den Träger den Maßstab 1:400 und für die Durchbiegungen den Maßstab 1:1; ferner $H=135^t$. Wir müssen dann in die für die Gewichte w gefundenen Ausdrücke setzen:

$$M_m = \frac{135 \cdot y_m}{18000000} \cdot \frac{400}{1} = \frac{3 y_m}{1000}$$

und erhalten:

$$w_1 = 146,55 \frac{3 \cdot y_1}{1000} - 57,68 \frac{3 y_2}{1000} = \frac{y_1}{2,27} - \frac{y_2}{5,78}$$

und auf dieselbe Weise:

$$\begin{array}{l|l} w_2 = -\frac{y_1}{5,78} + \frac{y_2}{1,95} - \frac{y_3}{3,41} & w_6 = -\frac{y_5}{2,76} + \frac{y_6}{1,33} - \frac{y_7}{2,76} \\ w_3 = -\frac{y_2}{3,41} + \frac{y_3}{1,39} - \frac{y_4}{2,58} & w_7 = -\frac{y_6}{2,58} + \frac{y_7}{1,39} - \frac{y_8}{2,58} \\ w_4 = -\frac{y_3}{2,58} + \frac{y_4}{1,33} - \frac{y_5}{2,76} & w_8 = -\frac{y_7}{3,41} + \frac{y_8}{1,95} - \frac{y_9}{3,41} \\ w_5 = -\frac{y_4}{2,76} + \frac{y_5}{1,33} - \frac{y_6}{2,76} & w_9 = -\frac{y_8}{5,78} + \frac{y_9}{2,27} \end{array}$$

*) Bei Berechnung von w_6 denke man an den Einfluß von D_6 .

Die in den Nennern stehenden Zahlen geben die Polweiten a der Gewichte y in Metern an, sie werden im Maßstabe 1:400 aufgetragen.

Nach Erledigung dieser vorbereitenden Rechnungen, welche für jedes Fachwerk nur einmal auszuführen sind, ist man imstande, die Biegungslinien $I, II, III \dots$ für irgendeinen Belastungszustand schnell aus dem die Momentenlinie vorstellenden Seilpolygone abzuleiten.

Die Richtung der Seite I wird willkürlich angenommen. Mit Hilfe von y_1 und y_2 wird die Richtung der Seite II festgestellt, hierauf mittels y_1, y_2, y_3 die Richtung von II u. s. w. Man vergleiche Fig. 435d, welche durch wiederholte Anwendung des in Fig. 433c dargestellten Verfahrens entstanden ist und einer weiteren Erklärung kaum bedarf. Die Punkte 1, 2, 3, . . . dieser Figur sind in so großen Abständen voneinander angenommen worden, daß die den einzelnen Knoten entsprechenden Kräftezüge y_{m-1}, y_m, y_{m+1} gut überschaut werden können.

Literatur zum II. Abschnitt.

1. Winkler, E., *Beiträge zur Theorie der kontinuierlichen Brückenträger*. Zivilingenieur 1862.*)
2. Culmann, K., *Die Graphische Statik, IV. Abschnitt*. Zürich 1866.
3. Mohr, O., *Beiträge zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen*. Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. zu Hannover 1868, S. 19. Graphische Untersuchung des Balkens auf mehreren Stützen.
4. Mohr, *Beitrag zur Theorie des Fachwerks*. Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. zu Hannover 1874, S. 509 u. 1875, S. 17. Siehe Seite 53 der Einleitung.
5. Fränkel, *Anwendung der Theorie des augenblicklichen Drehpunktes auf die Bestimmung der Formänderung von Fachwerken u. s. w.* Zivilingenieur 1875, S. 121.
6. Winkler, *Beitrag zur Theorie der Bogenträger*. Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. zu Hannover, 1879, S. 199.
7. Mohr, *Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerkträger*. Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. zu Hannover, 1881, S. 243.
8. Müller-Breslau, *Theorie der durch einen Balken versteiften Kette*. Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. zu Hannover, 1881, S. 57 und 1883, S. 347.
9. Müller-Breslau, *Theorie des durch einen Balken verstärkten steifen Bogens*. Zivilingenieur 1883, S. 13. Sonderdruck im Verlag von Arthur Felix in Leipzig.
10. Müller-Breslau, *Influenzlinien für kontinuierliche Träger mit drei Stützpunkten*. Wochenblatt f. Archit. u. Ing. 1883, S. 353.

*) Die drei ersten der angeführten Schriften beziehen sich auf den in der zweiten Abteilung dieses Buches ausführlich behandelten vollwandigen Balken auf mehreren Stützen. Von dieser Abteilung ist bisher nur ein wenige Bogen enthaltendes Heft erschienen. Mit der Drucklegung des Schlußheftes ist jetzt begonnen worden; es wird Ende 1907, spätestens aber Anfang 1908 vollendet sein.

11. Müller-Breslau, *Zur Theorie der Versteifung labiler und flexibler Bogenträger*. Zeitschr. f. Bauwesen 1883, S. 312.
12. Swain, *On the application of the principle of virtual velocities to the determination of the deflection and stresses of frames*. Journal of the Franklin Institute 1883, Febr. bis April, S. 102, 194, 250.
13. Stelzel, *Berechnung der Ferdinandsbrücke in Graz*. Enthalten in der Schrift: v. Gabriely u. Winter, Ferdinandsbrücke in Graz, Mitteilungen des Polytechnischen Klubs in Graz 1883.
14. Müller-Breslau, *Beitrag zur Theorie des durch einen Balken versteiften Bogens*. Zeitschr. f. Bauwesen 1884, S. 323.
15. Krohn, *Der Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen und Anwendung desselben zur Berechnung statisch unbestimmter Fachwerkräger*. Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. zu Hannover 1884, S. 269. Verwertet den Maxwellschen Satz in Verbindung mit dem Williotschen Verschiebungsplan.
16. Müller-Breslau, *Vereinfachung der Theorie der statisch unbestimmten Bogenträger*. Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. zu Hannover 1884, S. 575. Ein Sonderdruck erschien bei Schmorl u. von Seefeld in Hannover.
17. Müller-Breslau, *Beitrag zur Theorie des Fachwerks*. Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. zu Hannover 1885. Enthält die Zurückführung der Einflußlinien statisch unbestimmter Größen auf Biegungslinien, ohne hinsichtlich dieser Größen einschränkende Voraussetzungen zu machen.
18. Melan, *Beitrag zur Berechnung statisch unbestimmter Stabsysteme*. Zeitschr. des österr. Archit. u. Ing.-Ver. 1884, S. 100.
19. Melan, *Theorie der eisernen Bogenbrücken* im Handbuch der Ingenieurwissenschaften, II. Band, IV. Abteilung. 1888.
20. Land, *Über die Ermittlung und die gegenseitigen Beziehungen der Einflußlinien für Träger*. Zeigt u. a. die Bestimmung der Festpunkte durchgehender Balken mit Hilfe von Biegungslinien (Seite 387, Fig. 368 unseres Buches). Das von uns in Fig. 189 gegebene allgemeine Gesetz wird von Land für einige Sonderfälle entwickelt. Zeitschr. f. Bauwesen 1890, S. 165.
21. Müller-Breslau, *Über einige Aufgaben der Statik, welche auf Gleichungen der Clapeyronschen Art führen*. Enthält die auf Seite 390 dieses Buches gegebene Lösung der Gleichungen $\alpha_r M_{r-1} + \beta_r M_r + \alpha_{r+1} M_{r+1} = N_r$, nebst verschiedenen Anwendungen. Zentralblatt d. Bauverwaltung 1891. Sonderdruck bei Ernst u. Sohn, Berlin.
22. Müller-Breslau, *Berechnung statisch unbestimmter Auslegerbogenbrücken*. Zentralblatt d. Bauverwaltung, 1898.
23. Vianello, *Der Eisenbau*. München und Berlin 1905.
24. Müller, Siegmund, *Zur Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Tragwerke*. Zentralblatt der Bauverwaltung 1897. Erschien während der Drucklegung der vorliegenden Auflage und enthält eine analytische Lösung der zuerst vom Verfasser allgemein behandelten Aufgabe, jede statisch unbestimmte Größe mittels einer einzigen Gleichung zu berechnen. Die Arbeit geht von ähnlichen Erwägungen aus, wie das in Nr. 67 angegebene Verfahren und gibt einen recht übersichtlichen Weg an, die Aufgabe schrittweise zu lösen.

Fig. 46.
1:100.

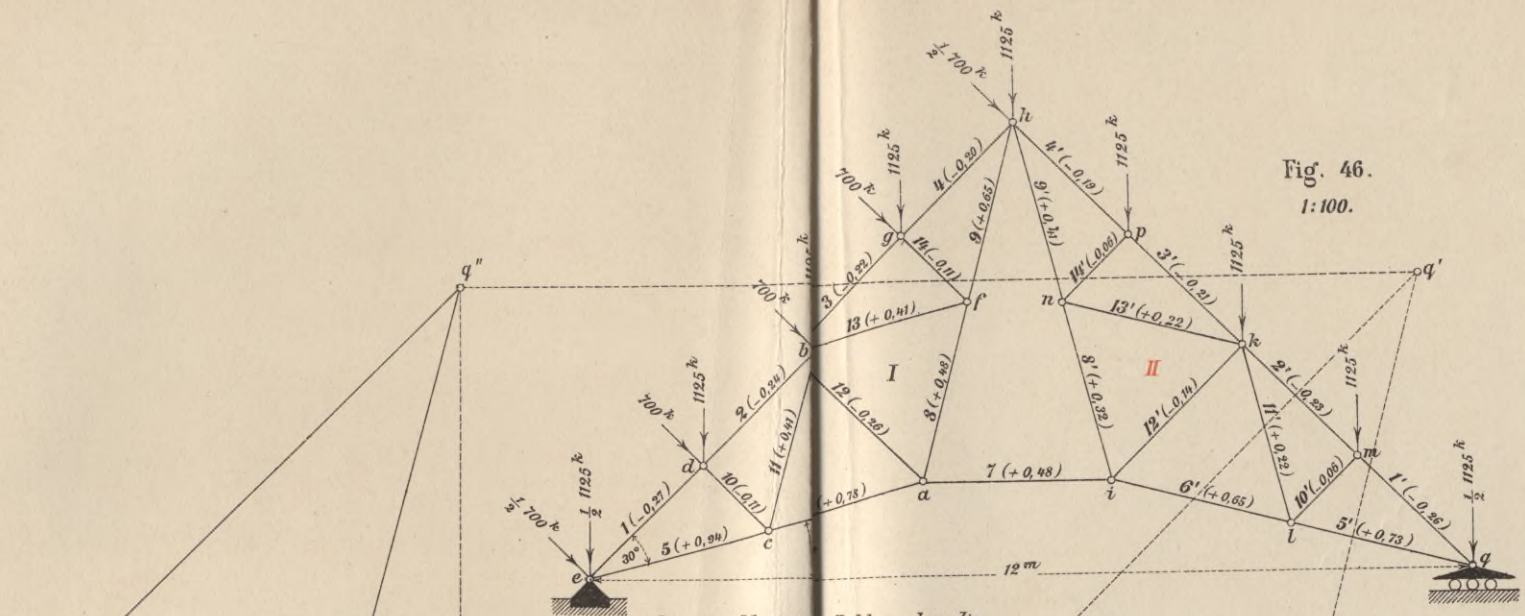


Fig. 47.
Plan I.
20:1.

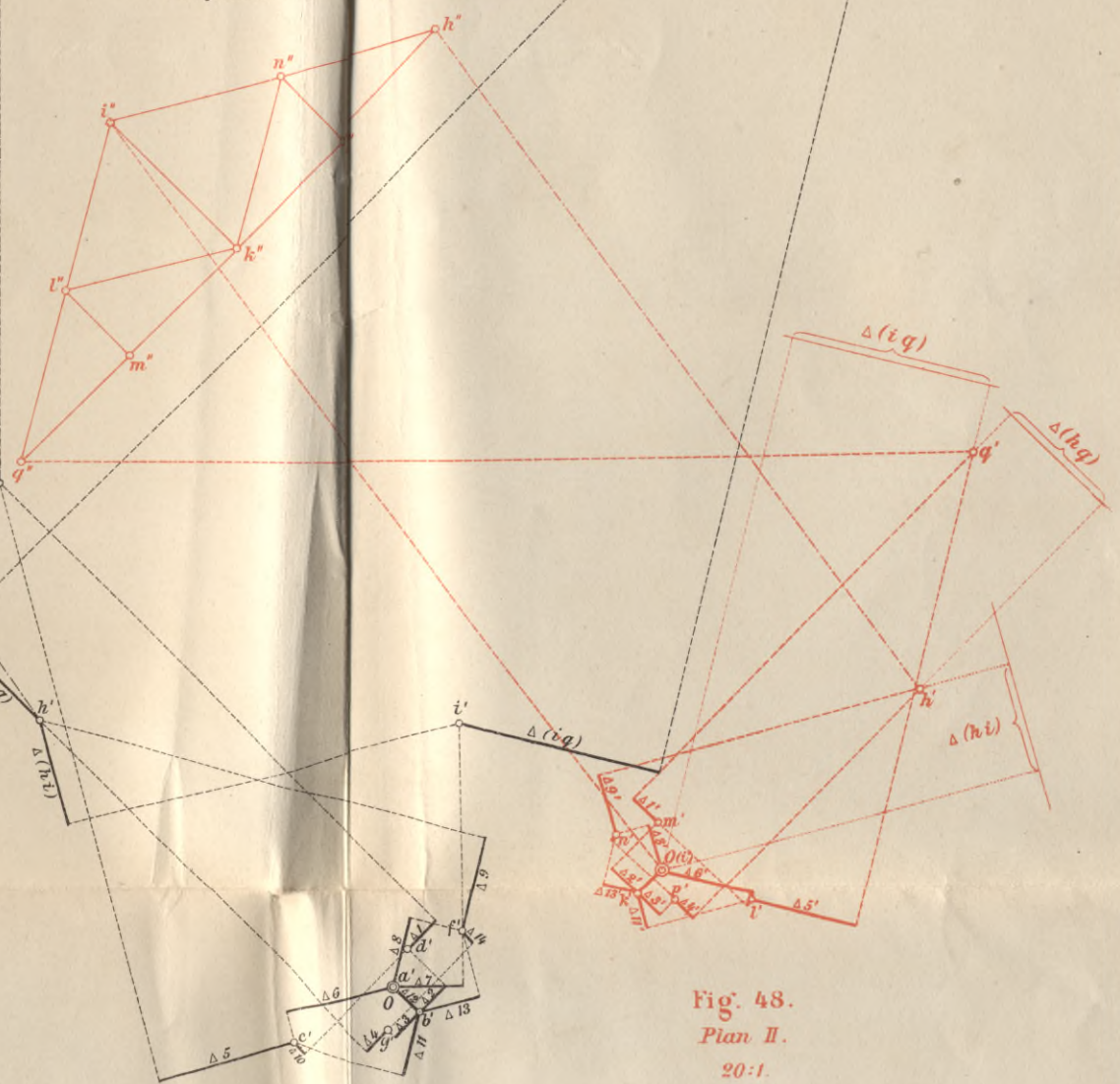
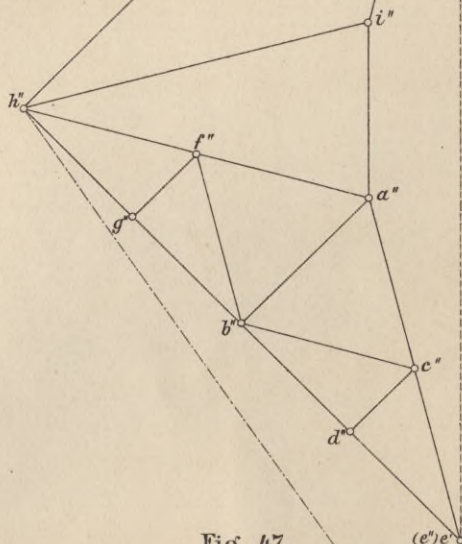


Fig. 48.
Plan II.
20:1.



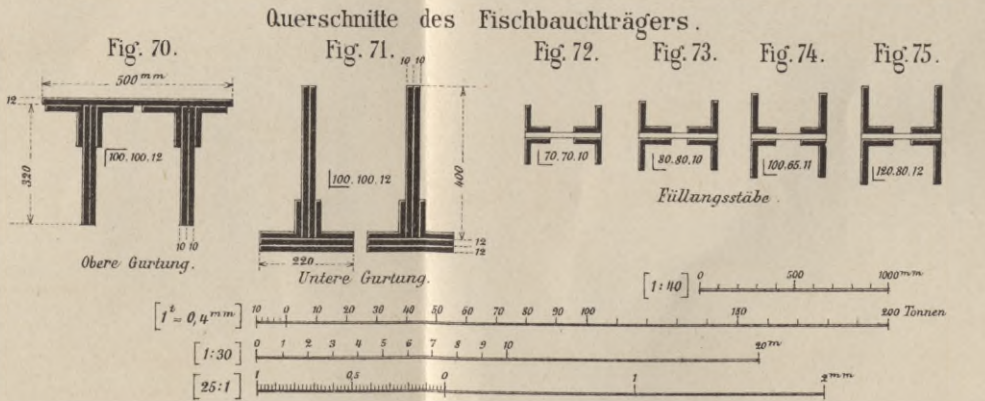
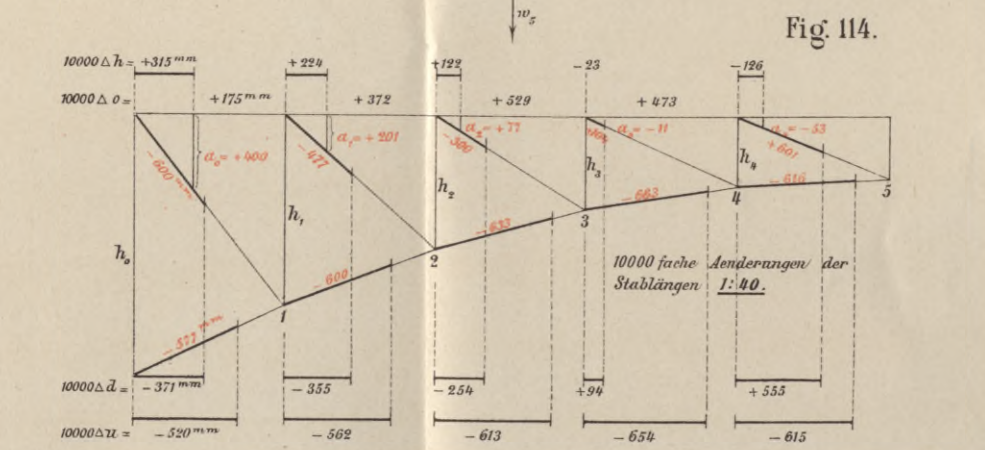
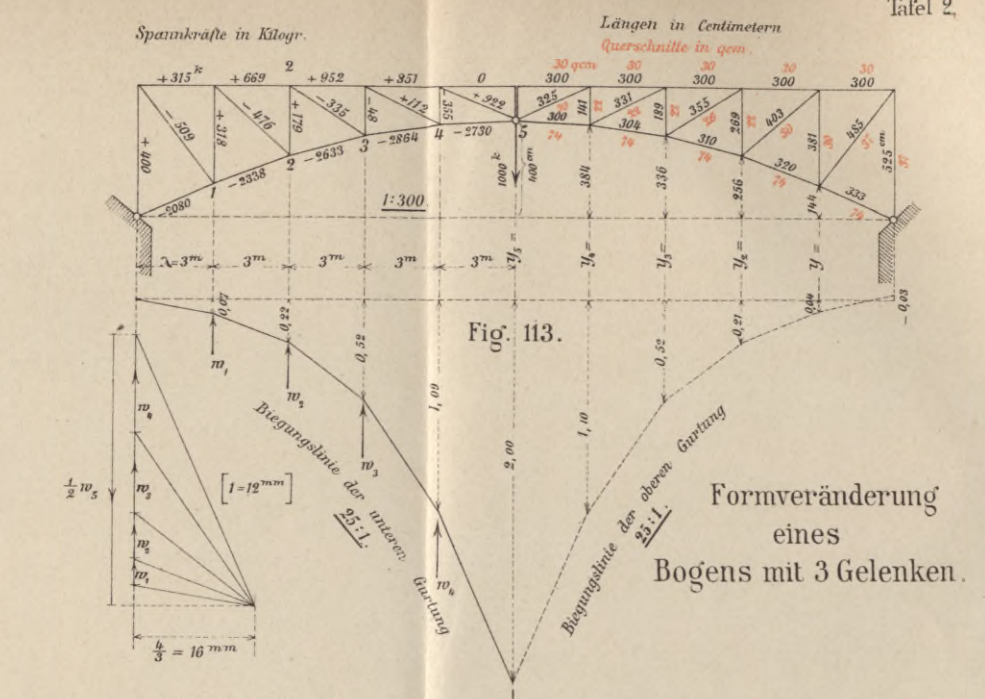
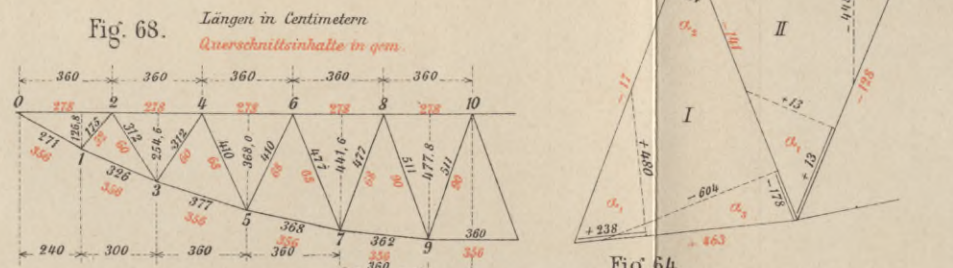
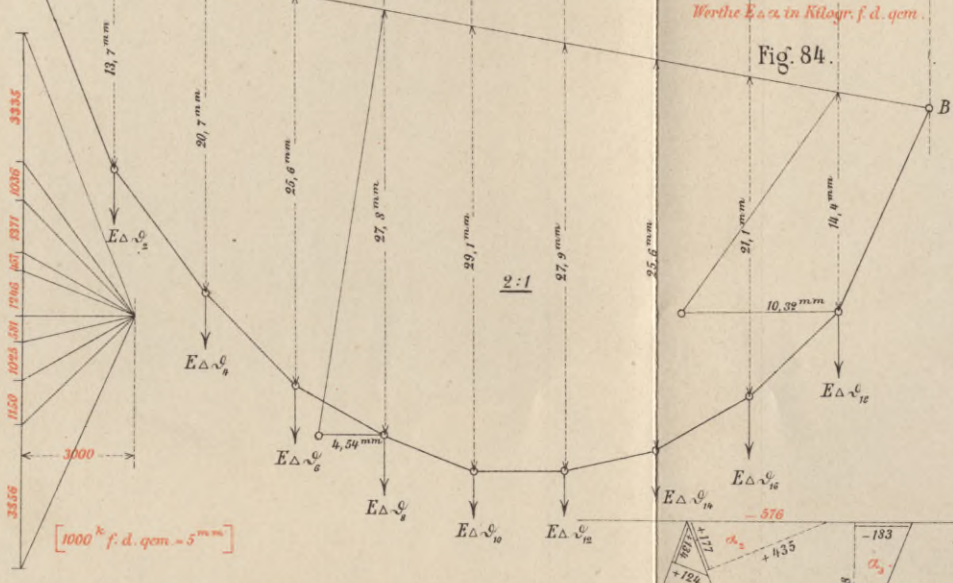
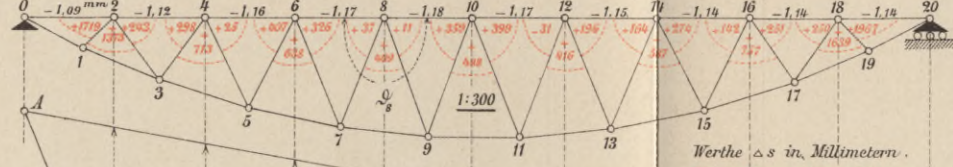
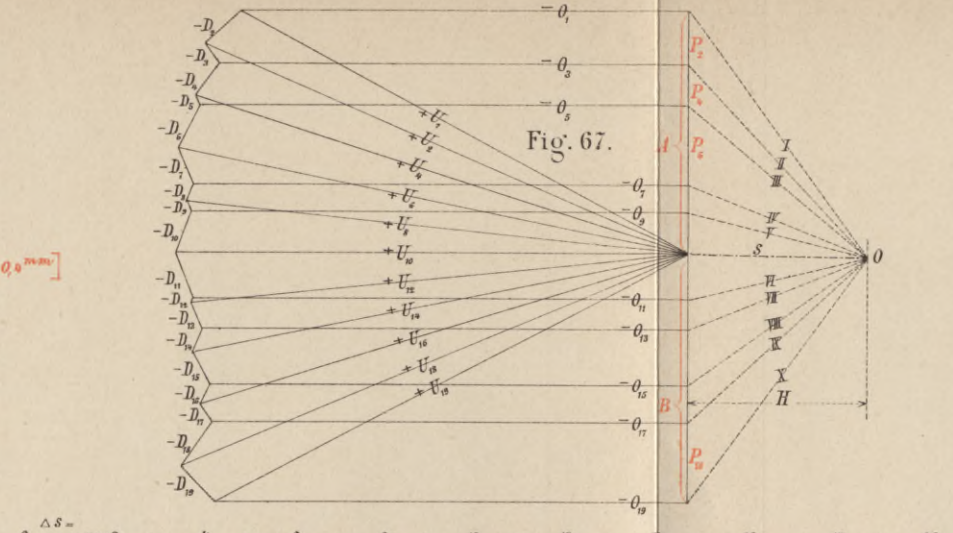
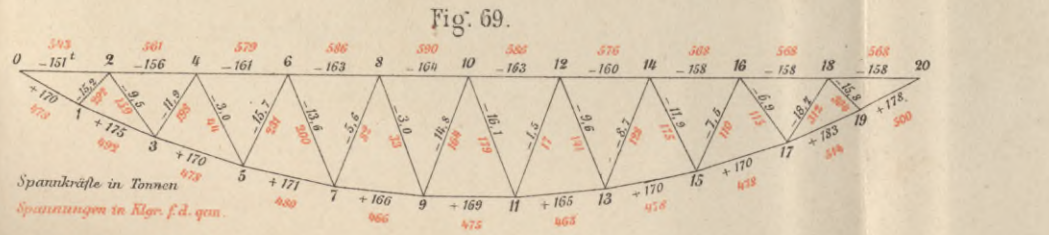
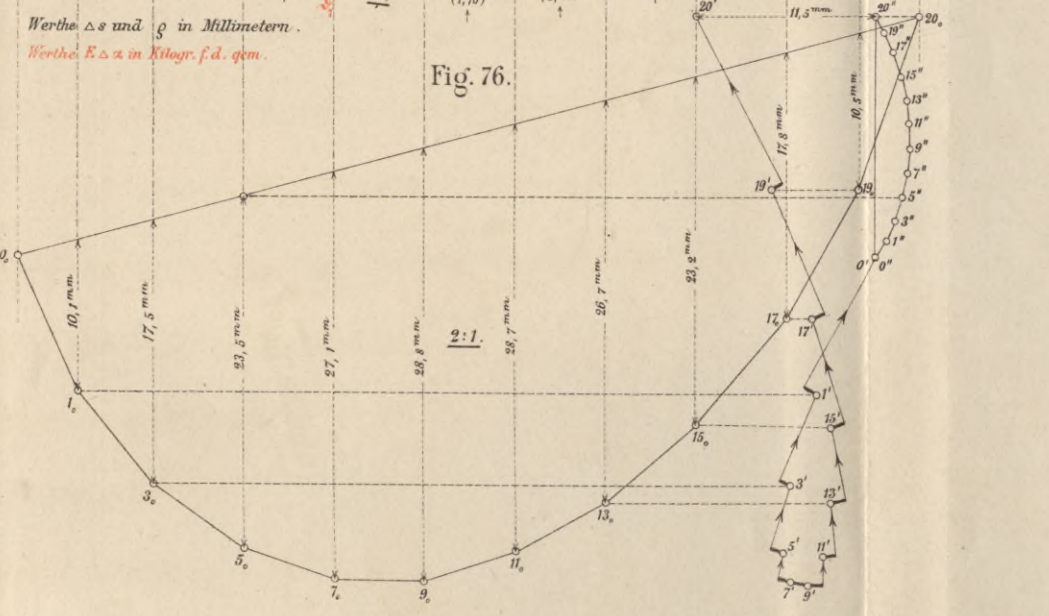
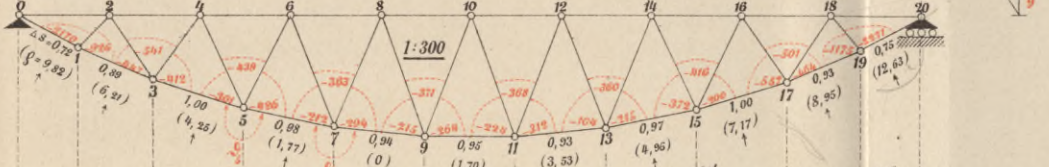
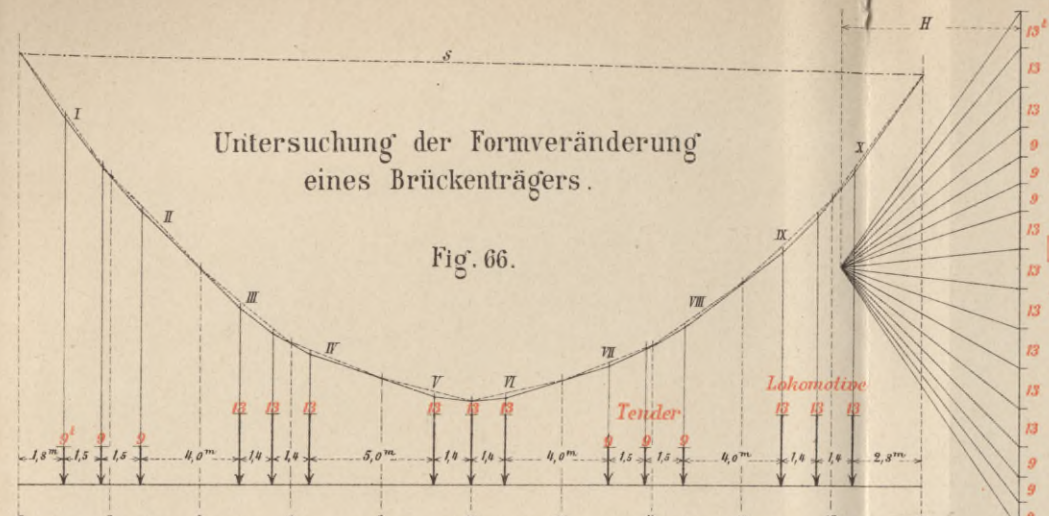




Fig. 240.

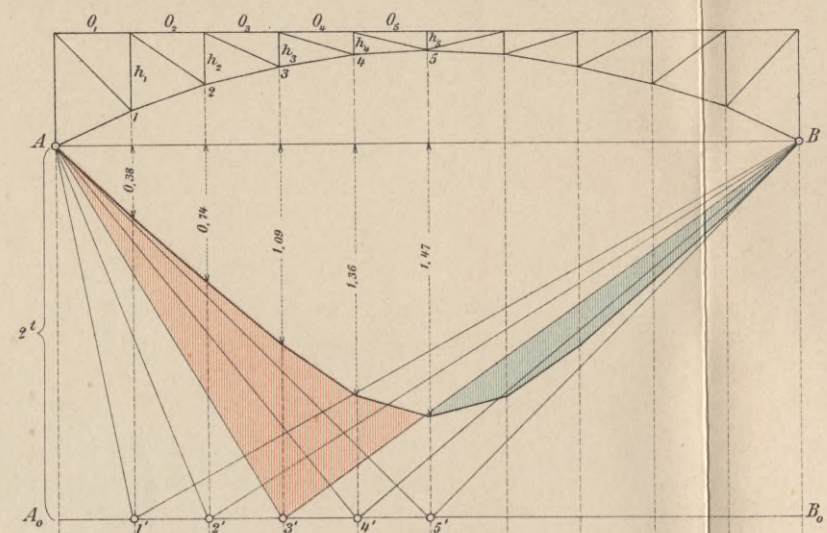


Fig. 241.

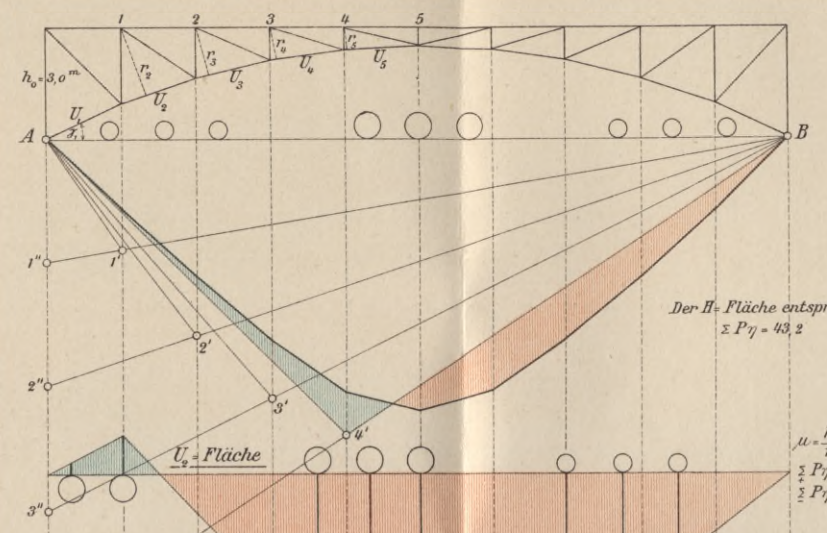


Fig. 230.

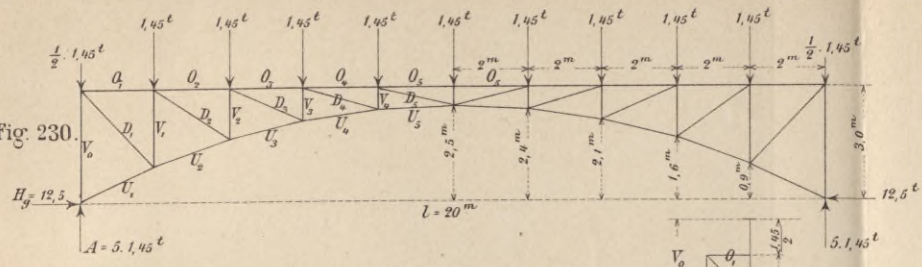


Fig. 232.

Kräfteplan für die ständige Belastung.
10 mm = 1,5 t.

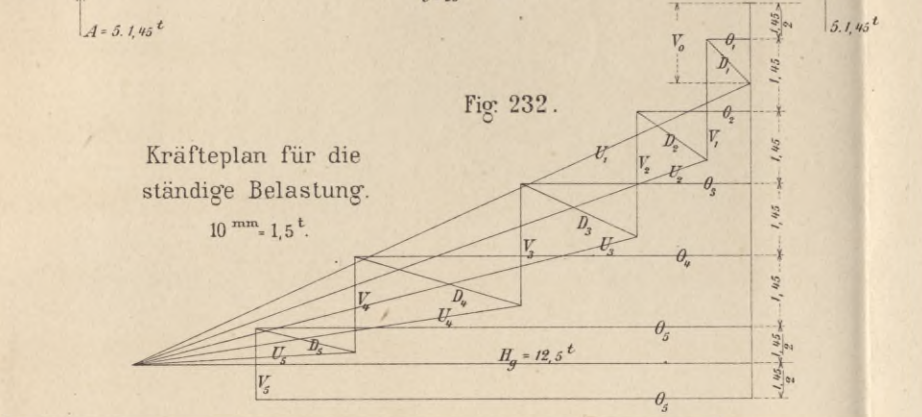


Fig. 233.

Fig. 235.

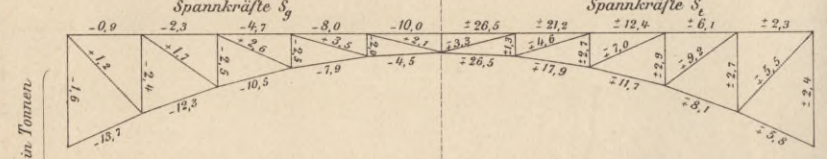


Fig. 236.

Fig. 237.

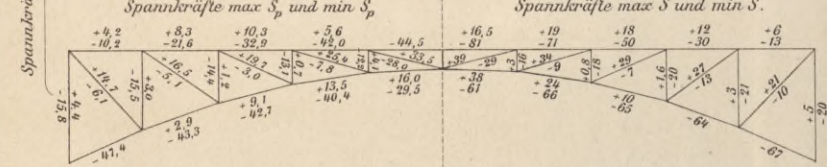


Fig. 238.

Fig. 239.

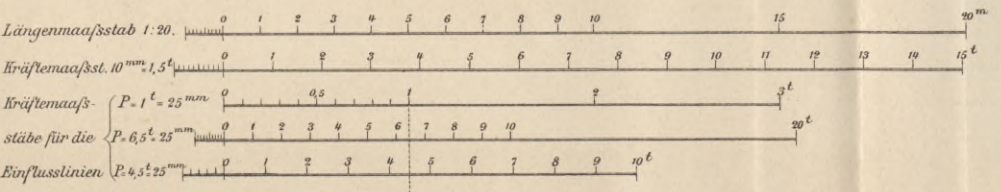
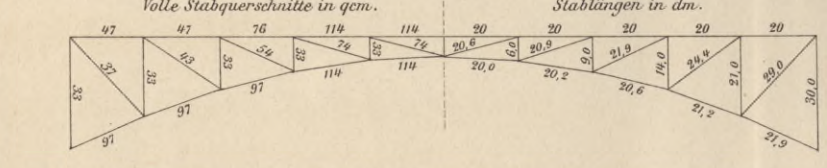


Fig. 242.

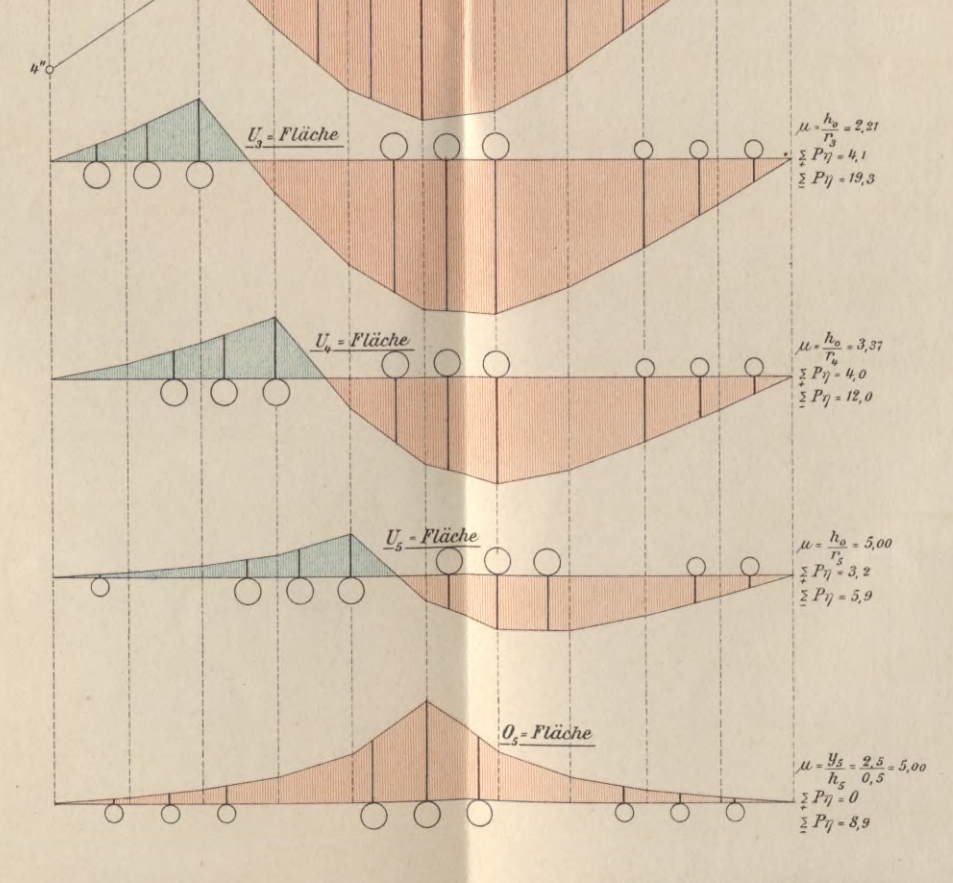
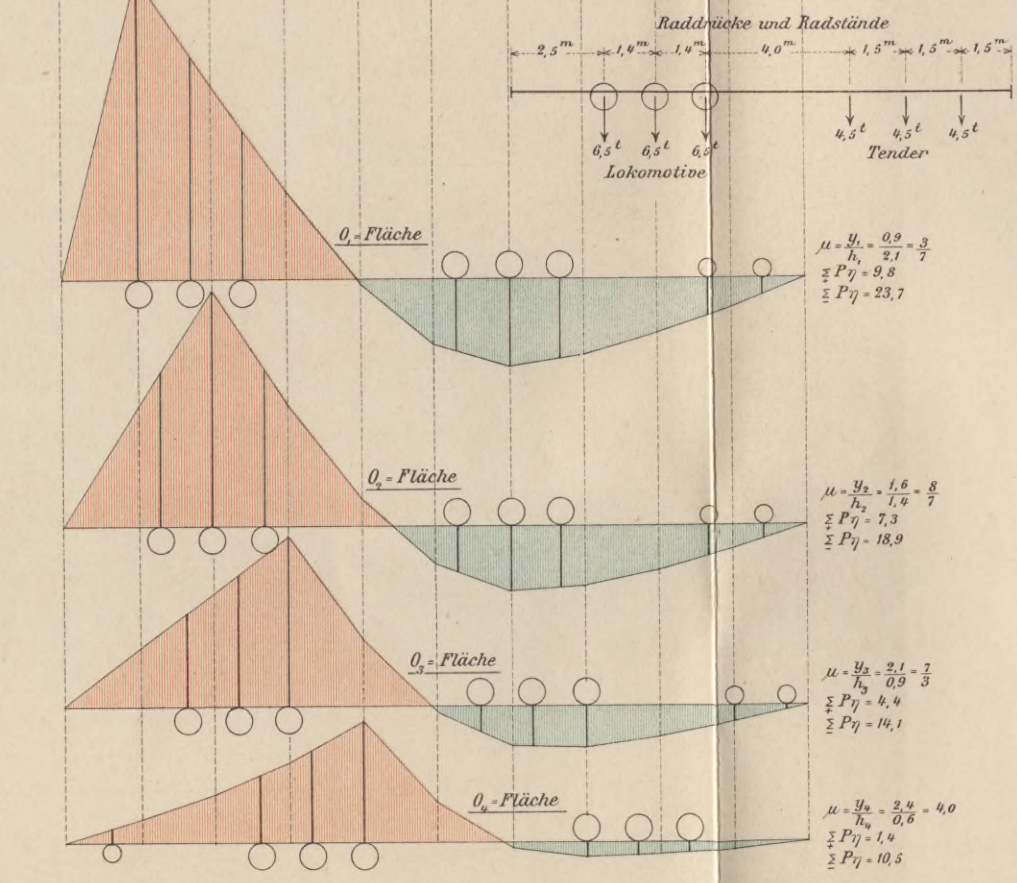




Fig. 244.

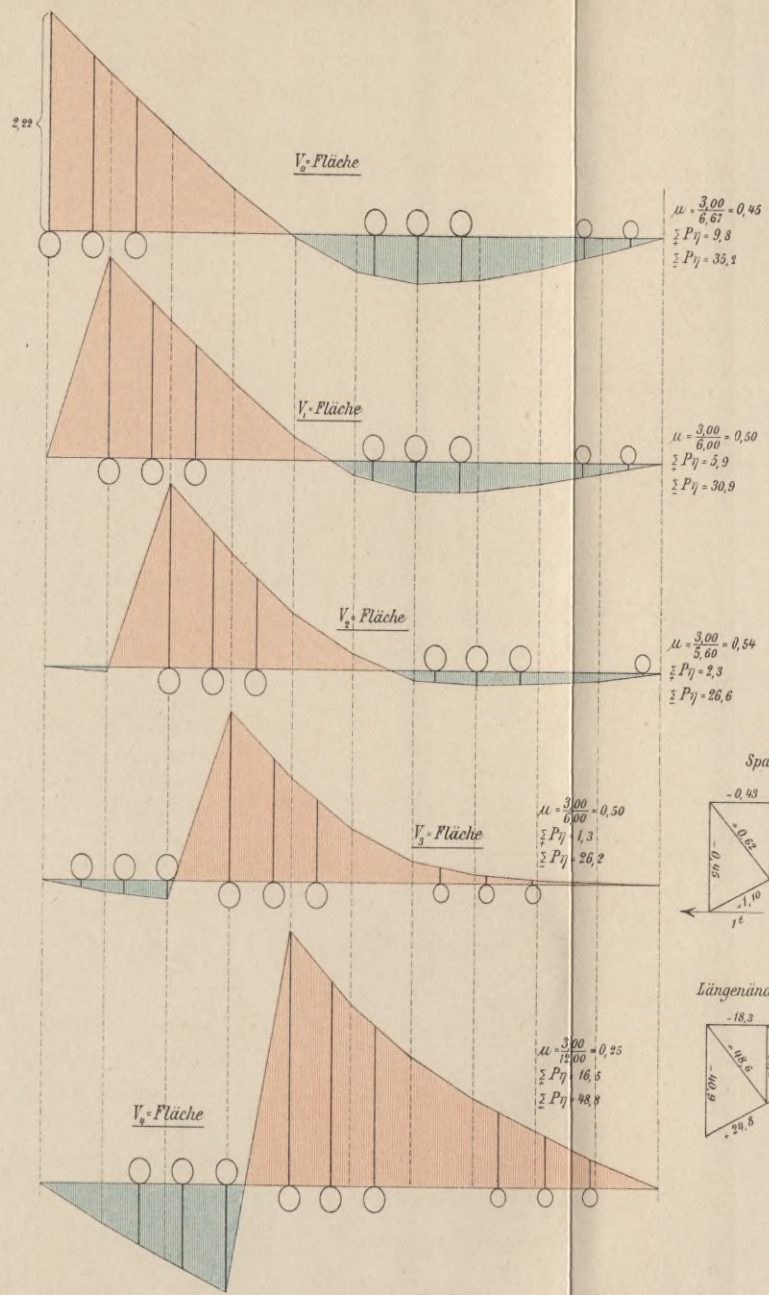
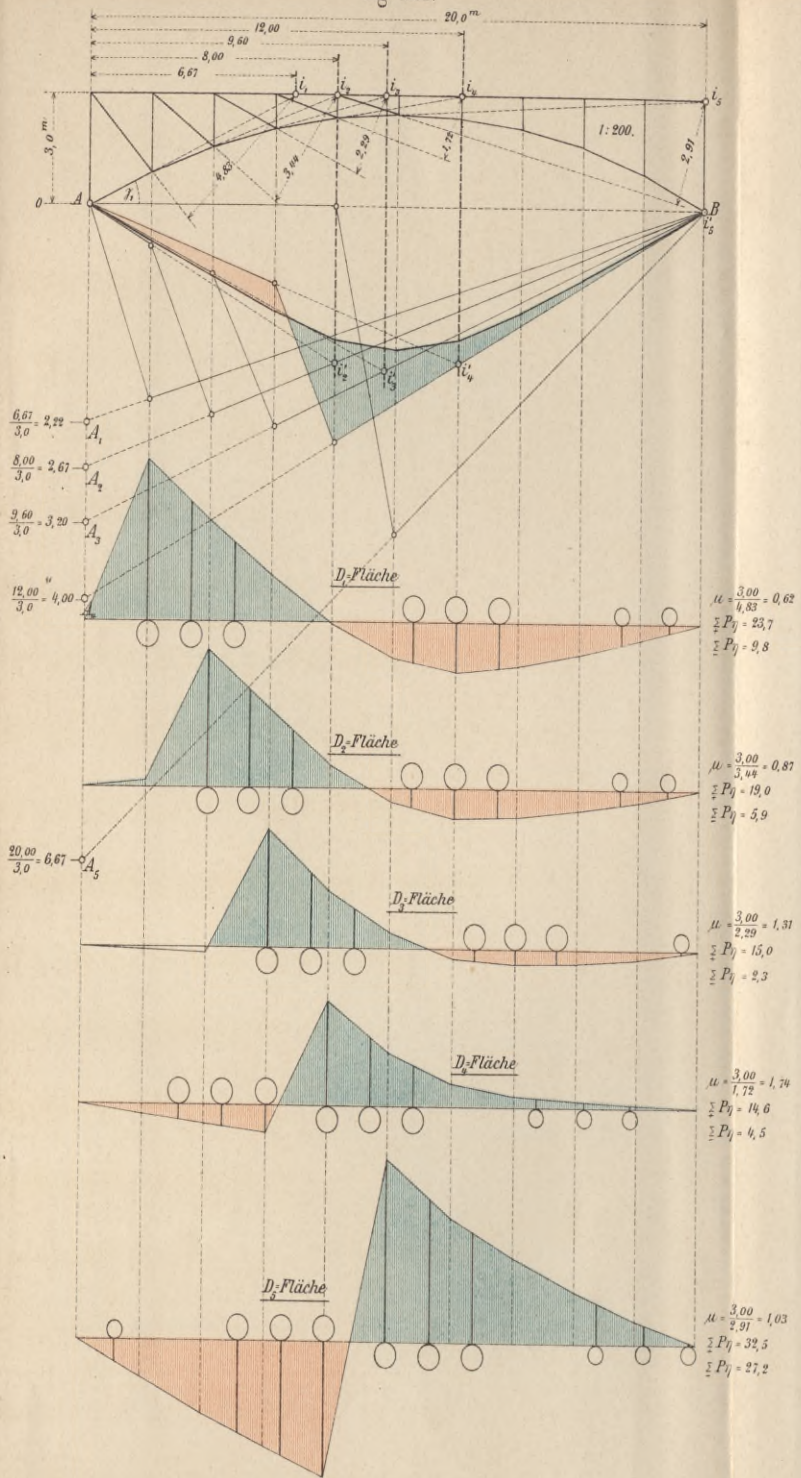


Fig. 245.

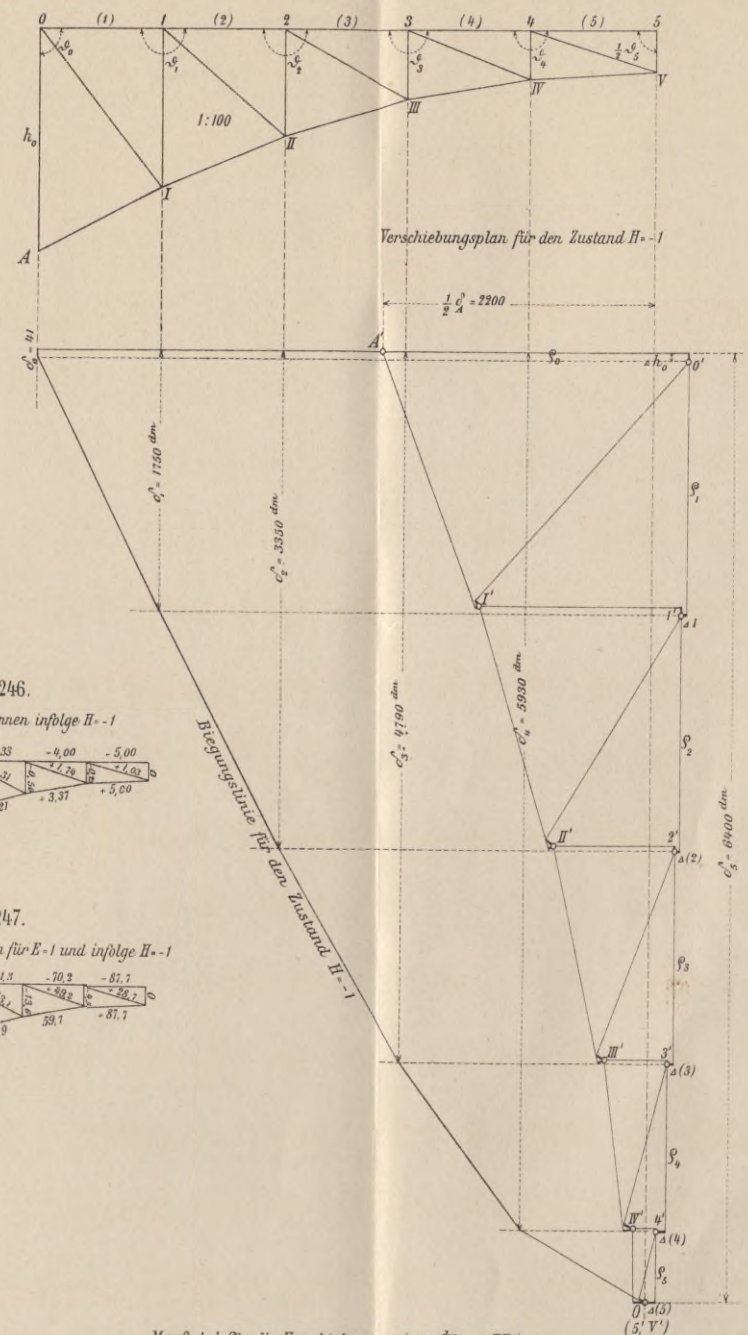


Fig. 246.

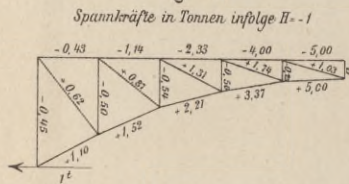


Fig. 247.

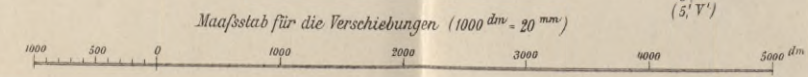
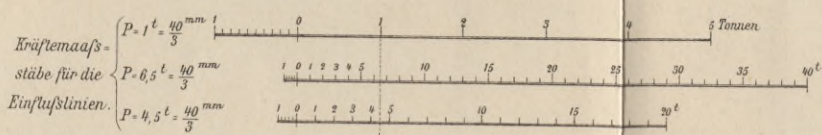
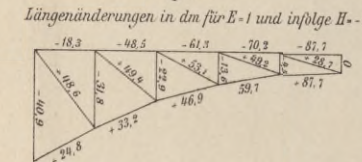
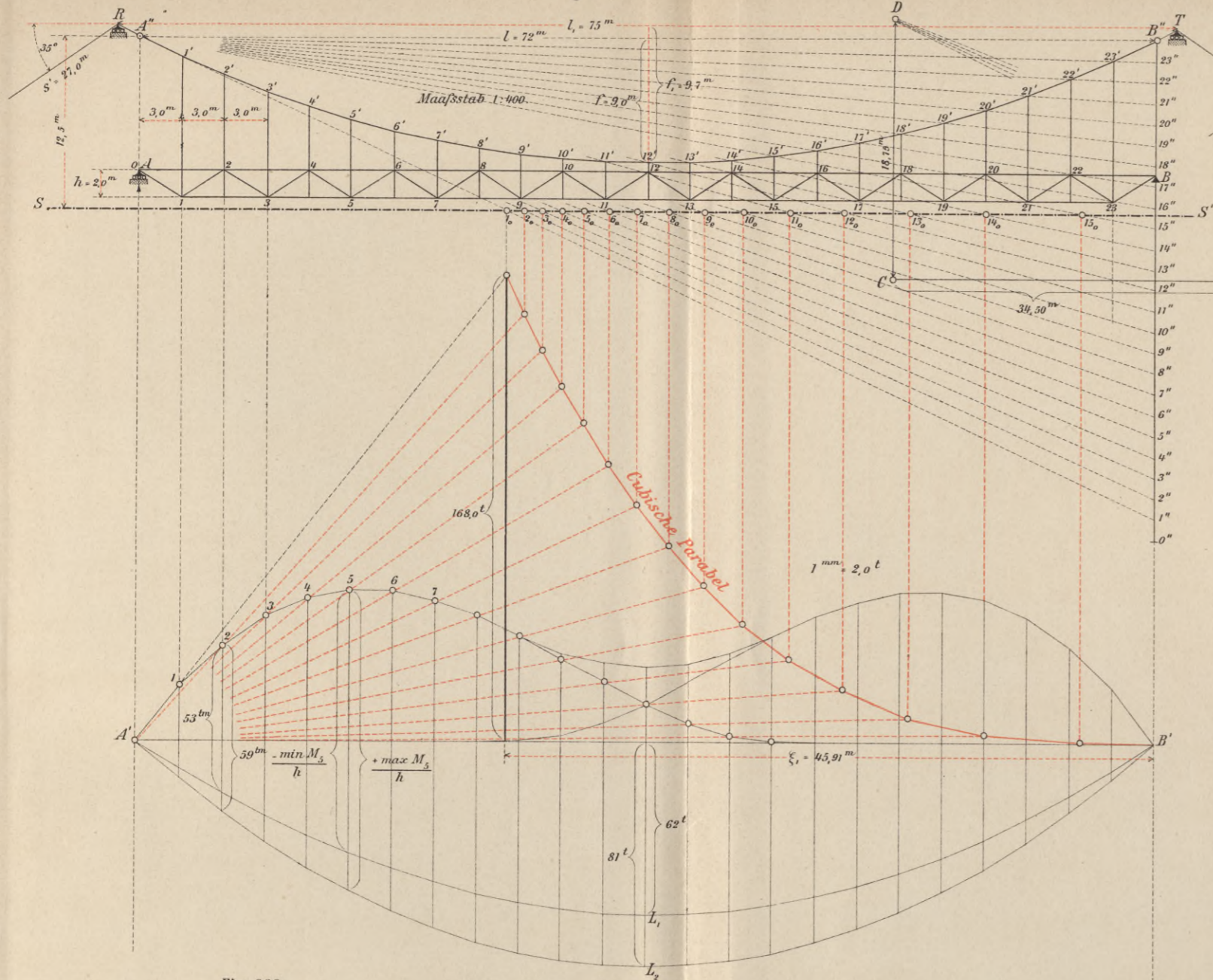


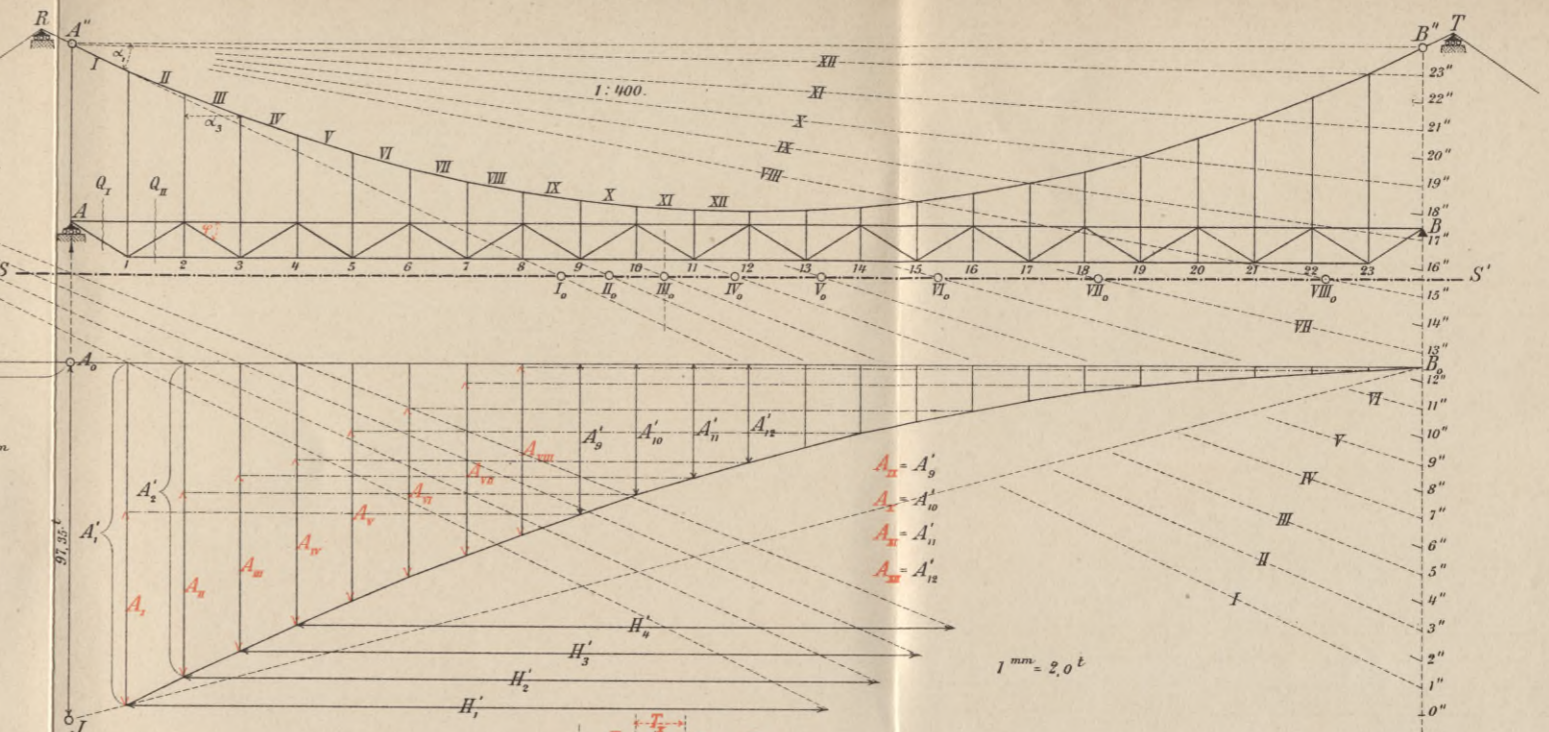


Fig. 290.



Kette, versteift durch einen Balken.

Fig. 291.



$$B''0'' = 4f = 36,0m$$

$$A' = \frac{A}{\sin \varphi}$$

$$H' = \frac{H}{\sin \varphi}$$

$$Q' = \frac{Q}{\sin \varphi}$$

Fig. 293.

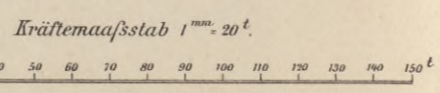
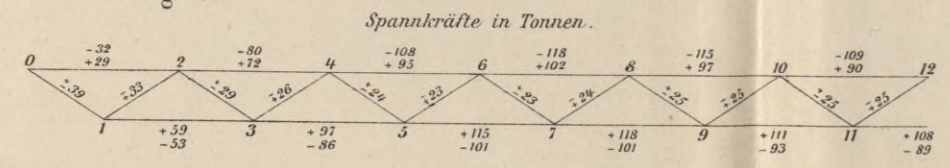
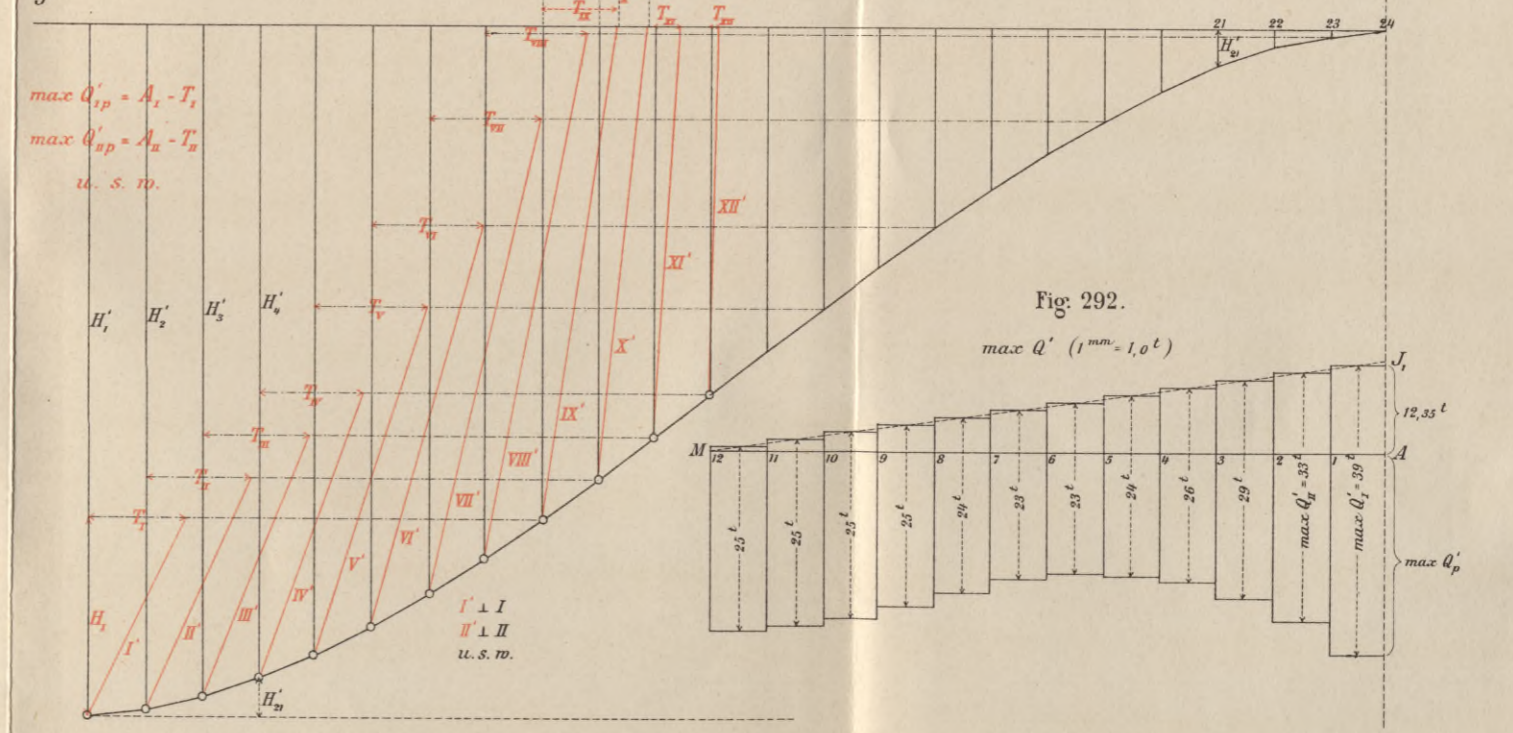


Fig. 292.



BIBLIOTEKA
KRAKÓW
*
Politechniczna

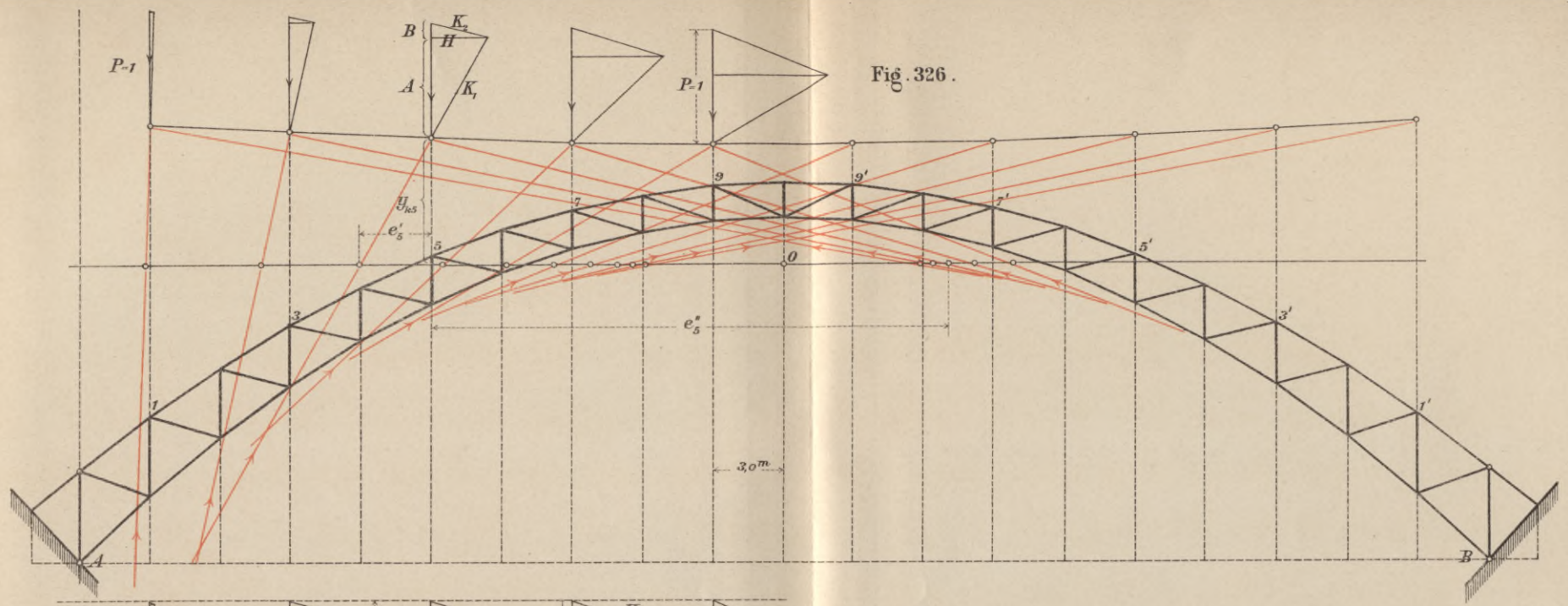


Fig. 326.

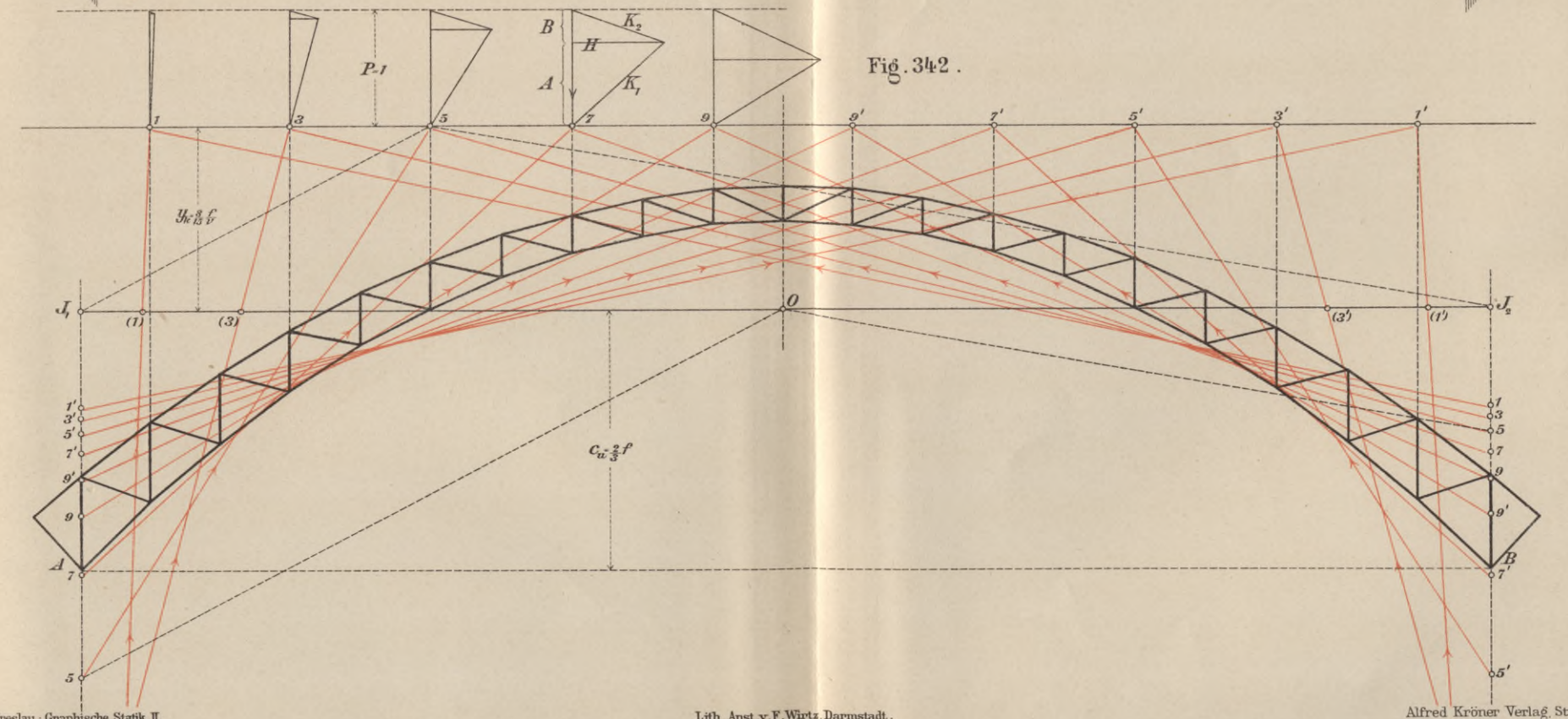


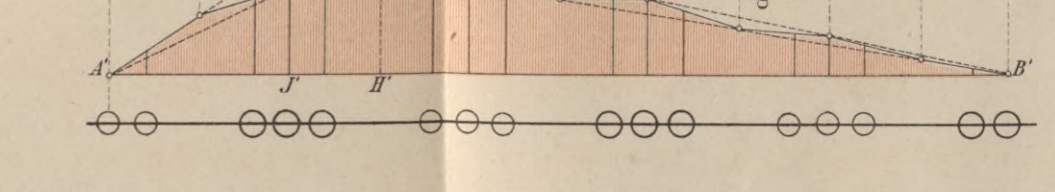
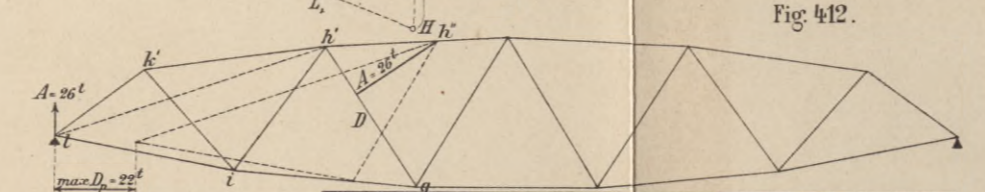
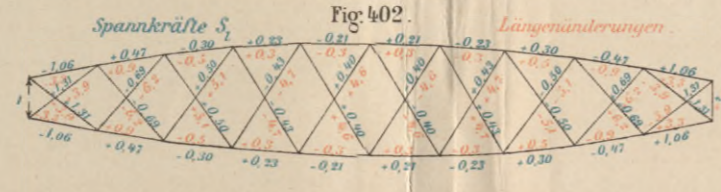
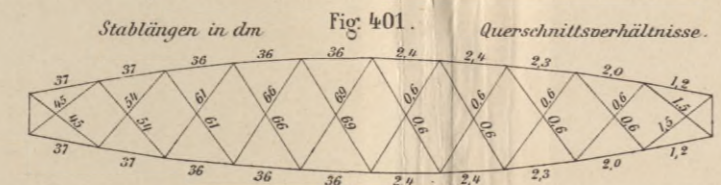
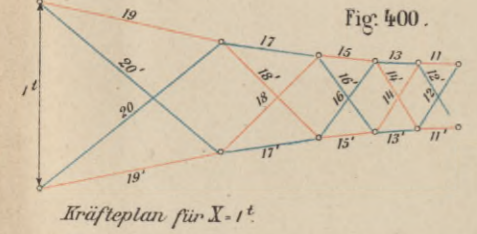
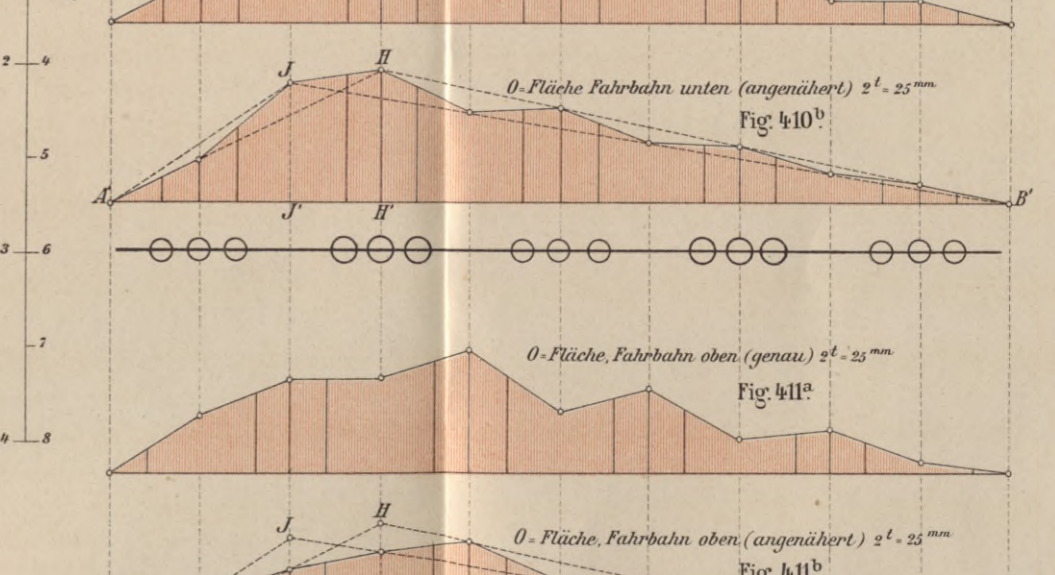
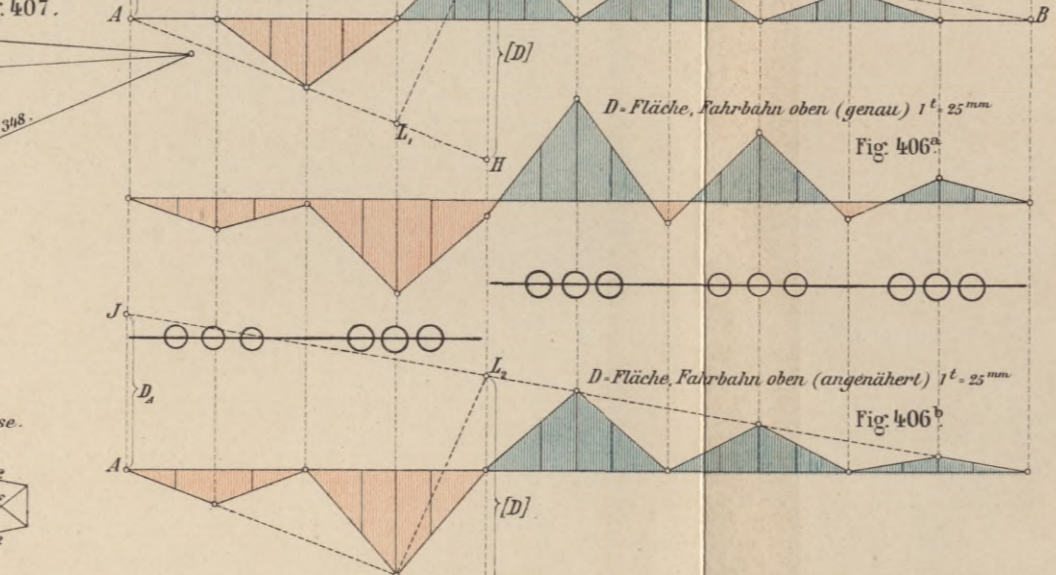
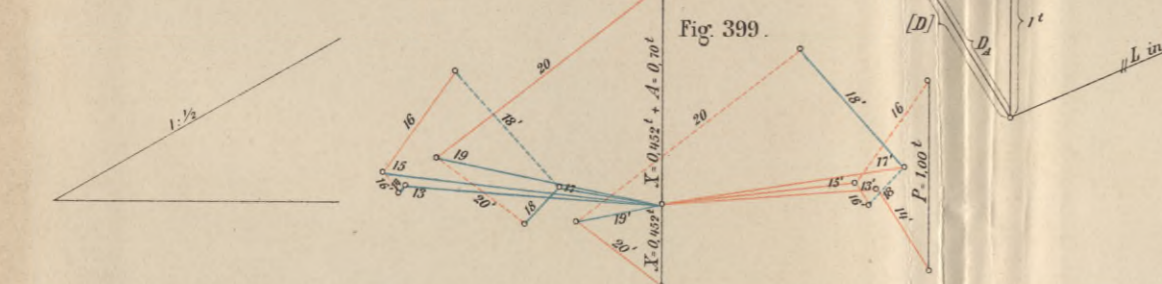
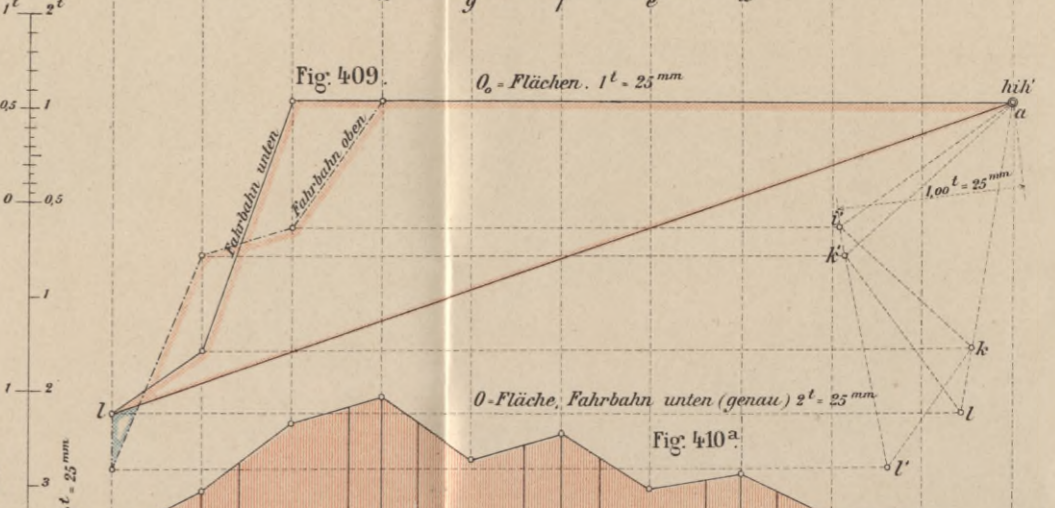
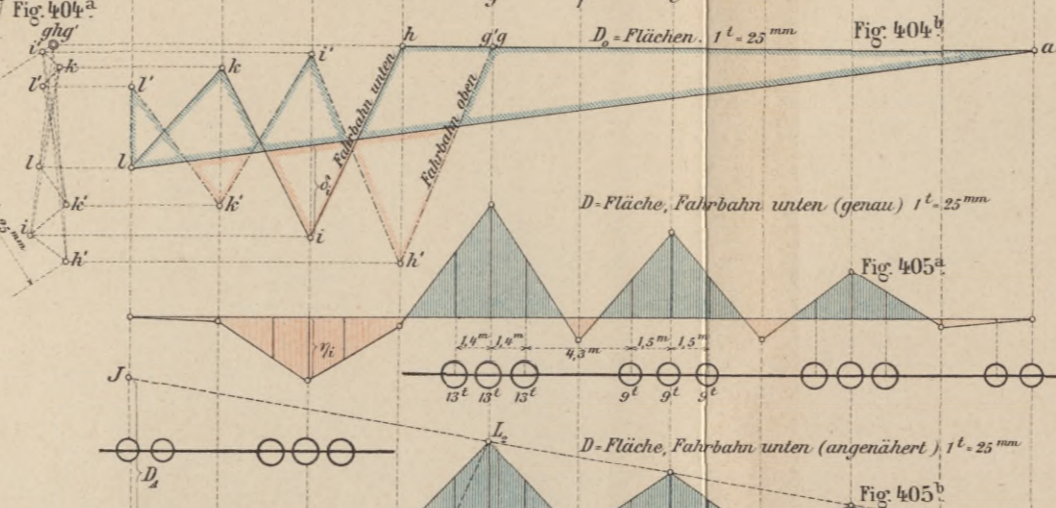
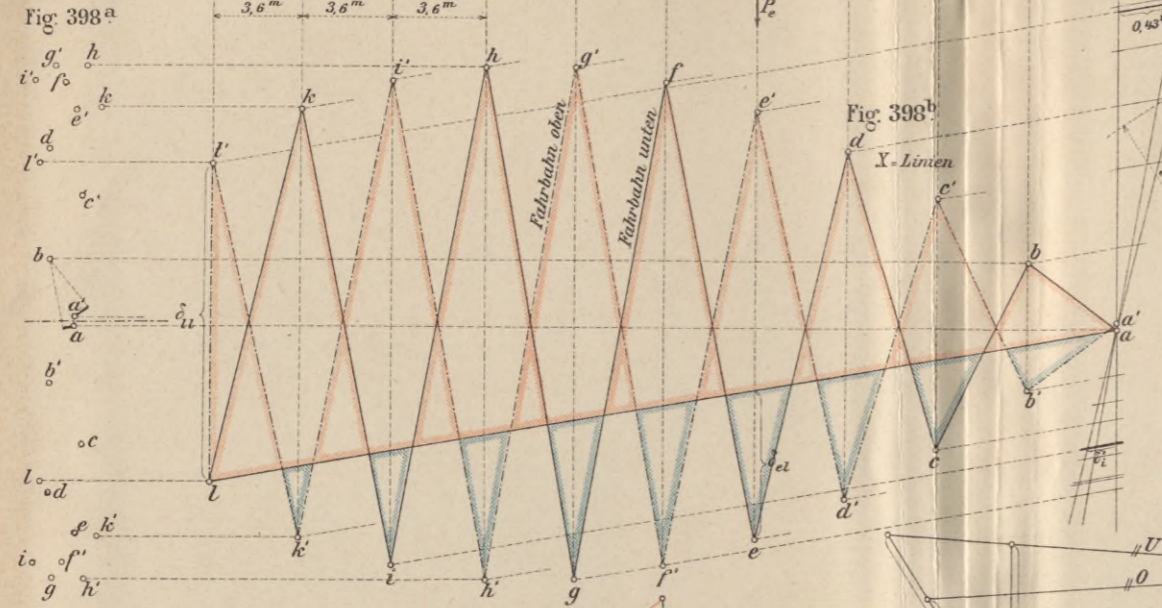
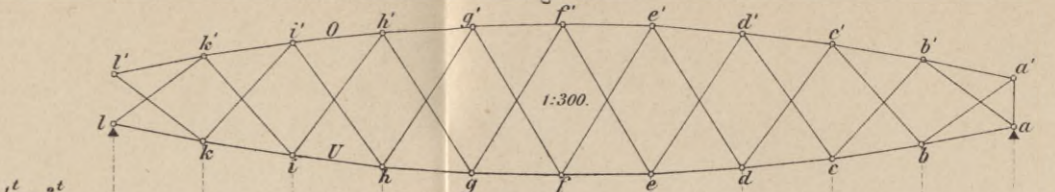
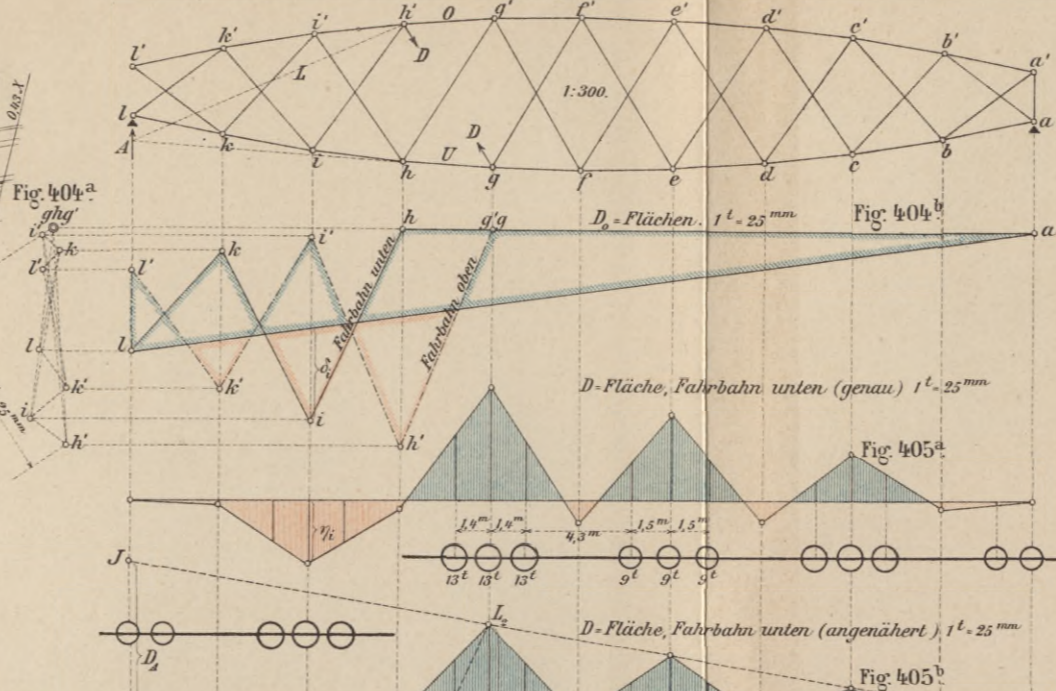
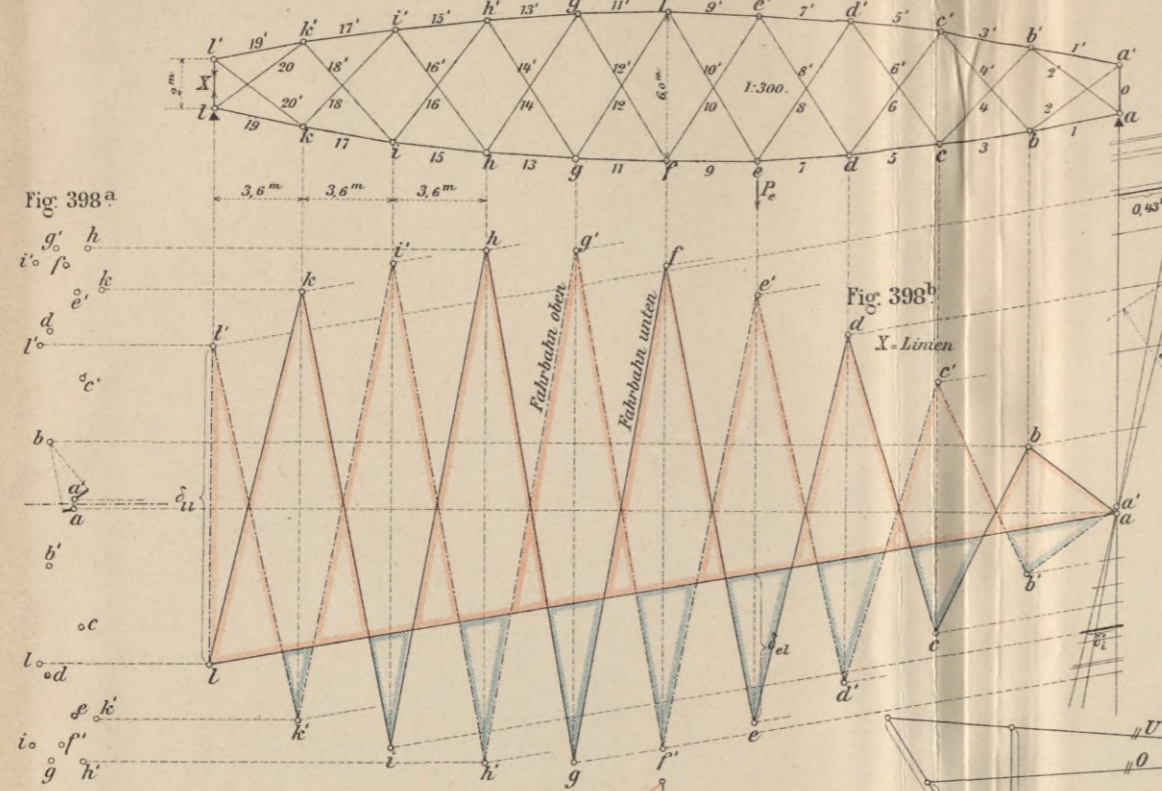
Fig. 342.



Fig. 397.

Fig. 403.

Fig. 408.



BIBLIOTEKA
KRAKÓW
*
Politechniczna

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000294528