

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

M

L. inw.

3524

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000294340





M

Elementar entwickelte

Theorie und Praxis

der

Functionen einer complexen Variabelen

in organischer Verbindung mit der Geometrie.

Ein Handbuch

für Lehrer und Freunde der Mathematik

*Math. 296.*  
*(V. 10%)*

von

Adalbert Breuer,

k. k. Professor an der Staatsoberrealschule im III. Gemeindebezirke Wiens.

Mit 84 Textfiguren.



Preis 3 fl. ö. W. = 5 Mark.

WIEN 1898. *2587.*

C. Daberkow's Verlag.

KD. 514.1: 517.5

Alle Rechte vorbehalten.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA  
KRAKÓW

II 3524

Seiner Hochwohlgeboren,

dem Herrn

DR. IGNAZ MACHE,

k. k. em. Landeschulinspector und Ritter des Ordens der eisernen Krone,

IN WIEN,

in tiefster Verehrung und treuer Ergebenheit

hochachtungsvoll gewidmet

vom

Verfasser.



## Vorwort.

Wohl auf keinem Gebiete der Mathematik herrschen so viele verschiedene Ansichten, wie in der Lehre über die complexen Größen. Dieser leidige Zustand hat seinen Grund darin, dass Analytiker und Geometer getrennte Wege marschieren und ihre Resultate von einseitigen Standpunkten aus beurtheilen.

Es liegt jedoch im Interesse der mathematischen Disciplinen, eine einheitliche Auffassung des Imaginären zur Geltung zu bringen und die mannigfachen divergenten Anschauungen durch eine natürliche Brücke zu verbinden. Dass ein dringendes Bedürfnis hiefür vorhanden ist, steht für jedermann außer Frage, welcher die bezüglichen Literaturströmungen mit dem Wunsche nach Klärung verfolgt hat.

Während auf der einen Seite dem Imaginären bloß die Bedeutung einer Fiction zugesprochen wird, ist man andererseits wieder bestrebt, dasselbe reell zu interpretieren. Indessen gewinnen bei dieser verschiedenen Behandlung die Begriffe keinesfalls an Deutlichkeit.

Bei meinen Studien über das Imaginäre in der Geometrie hat mich stets die Ahnung geleitet, dass es ein Bindeglied zwischen den anscheinend so auseinandergehenden Methoden der Analysis und der Geometrie geben müsse, und ich strebte seit Jahren darnach, dieses Glied der Ketten aufzufinden.

Nach so manchen Tragschlüssen und resultatlosen Spurenverfolgungen habe ich endlich einen Weg entdeckt, welcher nach meiner festen Überzeugung vortrefflich geeignet ist, das Zweifelgebiet wenigstens theilweise zu erschließen.

Es gehört ein gewisser Muth dazu, mit meinen Ansichten über einen Gegenstand an die Öffentlichkeit zu treten, welcher von den größten Gelehrten bereits erschöpfend behandelt zu sein scheint. Indessen hoffe ich dennoch auf eine wohlwollende Beurtheilung meines Strebens nach Erkenntnis, auch wenn meine Forschungsergebnisse auf Widerstand stoßen sollten. Ein Schritt nach vorwärts wird jedenfalls auch dadurch gethan, wenn sich wieder mehrere Fachleute mit einer schwebenden Frage intensiv befassen.

Auf keinen Fall wird man mir aber das Verdienst schmälern können, dass ich Analysis und Geometrie in vielen Punkten zur Deckung gebracht

babe, wengleich meine Methoden vielleicht als zu schwertällig bezeichnet werden könnten. Der Entdecker trifft eben selten sofort den kürzesten Weg.

Vorläufig sind es vorwiegend nur Aufgaben zweiten Grades, welche ich in Behandlung zog. Mittels der Arbeiten von Küpper, Durège, Bobek, Kötter, Stolz und Binder wird es aber sicherlich gelingen, auch Probleme höherer Ordnung in gleich instructiver Weise zu bewältigen.

Mein Weg musste von Haus aus aufs Entdecken angelegt werden. Dementsprechend ist auch der Lehrgang des Werkes ein heuristischer. Zugleich erschien mir die elementare Entwicklung des Stoffes schon aus dem Grunde geboten, um möglichst viele Leser zu gewinnen. Nicht unwesentlich schien es mir dabei, zu zeigen, dass man schon mit den einfachen Grundmitteln einen tieferen Einblick in den Organismus der Functionen gewinnen kann.

Während sich die Analysis der Formeln für complexe Coordinaten und Winkel bedient, die aus den Grundgleichungen abgeleitet werden, benützt der Geometer die Involution, um dieselben Größen figural darzustellen, respective zu bestimmen. Es kam nun in erster Linie darauf an, klarzulegen, dass imaginäre Punkte und Strahlen durch die symmetrischen Elemente der betreffenden elliptischen Involutionen äquivalent vertreten werden können.

Schwieriger gestaltete sich die Frage nach dem Bilde eines imaginären Winkels. Die Analysis misst den imaginären Winkel durch die doppelte Fläche eines Hyperbelsectors. Der Centriwinkel der letzteren wird aber durch die Hälfte jenes spitzen Winkels gemessen, welchen die symmetrischen Strahlen der entsprechenden elliptischen Involution bilden. In Anbetracht obiger Erkenntnisse verlor das Imaginäre den Charakter der Unmöglichkeit völlig; und es befestigte sich in mir immer mehr die Überzeugung, dass die Bezeichnung imaginär unglücklich gewählt wurde und eventuell durch den Ausdruck fremdartig zu ersetzen wäre.

Auf Grund obiger Ersatzmittel imaginärer Elemente konnte ich mit Hilfe der projectivischen Geometrie die Rechnungen Schritt für Schritt constructiv verfolgen. Hiebei war ich aber auch genöthigt, die Principien der neueren Geometrie zu benützen, welche ich in dem erforderlichen Ausmaße in mein Buch aufgenommen habe, da eine umfassende Kenntnis derselben in einem größeren Leserkreise nicht vorausgesetzt werden kann. Bin ich in dieser Hinsicht gelegentlich etwas zu weit in die Lehre von den Kegelschnitten gerathen, so hoffe ich andererseits wieder, dem Leser damit manche interessante Anregung zu bieten, zumal ich analytische und synthetische Methoden abwechselnd heranzog. Denselben Zweck verfolgte ich auch bei dem Einschalten wichtiger Partien aus der algebraischen Analysis. Vielleicht findet auch die in natürlichem Anschlusse begründete Cylinderprojection von Mercator einige Liebhaber.

In der Theorie der Involutionen liegt das Mittel, das Werk umgekehrt auf geometrischem Wege zu entwickeln; es wäre gewiss keine undankbare Aufgabe, diese Idee auszuführen. Die gründliche Behandlung des Apollonischen Problems wird manchem Fachgenossen schon deshalb

willkommen sein, weil die imaginären Lösungen ein passender Behelf zum Erläutern der Theorien sind. Möge das Werk dazu beitragen, Freunde der Wissenschaft zu ersprißlichem Zusammenwirken anzuregen. Freundliche Winke und Verbesserungsideen werden von mir dankbar entgegengenommen werden, denn ein Mann ist eben nicht allein im Stande, ein so schwieriges Gebiet vollkommen zu beherrschen.

In diesem Sinne sage ich heute schon meinem hochverehrten ehemaligen Landesschulinspector Herrn Dr. Ignaz Mache, welcher meinen Arbeiten stets das wärmste Interesse zuwandte, den innigsten Dank. Desgleichen erfülle ich eine angenehme Pflicht, Herrn Hochschul-Professor E. Czuber für die Mühe und Geduld herzlich zu danken, welche er bei der Durchsicht meiner Erstlingsarbeiten auf obigem Gebiete bethätigte. Seinen Rathschlägen und Winken habe ich es zum Theil zuzuschreiben, dass ich zu neuem Nachdenken angeregt wurde und schließlich in das richtige Fahrwasser gelangte.

Ferner spreche ich meinem ehemaligen Schüler Herrn Rudolf Langner, stud. techn., meine wärmste Anerkennung für die emsige Mitwirkung an der Construction der Figuren, sowie dem Besorgen der Reinschrift und Correctur aus. Zu ebenso großem Danke bin ich meinem ehem. Schüler Herrn Adolf Wessely, stud. techn., verpflichtet, welcher das Werk einer kritischen Durchsicht unterzog. In gleicher Weise haben sich meine früheren Schüler, die Herren Karl Járay, stud. techn., und Zdenko Král, stud. techn., beim Corrigieren des Satzes verdient gemacht und meinen besten Dank erworben. Alle diese Beihilfen waren um so wertvoller, als ich durch ein mehrmonatliches, nervöses Augenleiden verhindert wurde, die letzte Hand an das Werk zu legen. Schließlich erwähne ich bestens dankend des freundlichen Entgegenkommens der geehrten Firmen Heinr. Mercy und C. Angerer & Göschl betreffs der äußeren Ausstattung des Buches.

Auch erkenne ich mit Dank die Bereitwilligkeit des Herrn C. Daberkow an, meine früher erschienenen Werke durch seinen Verlag zugänglich zu machen.

Wie gern hätte ich an dieser Stelle auch dem leider am 5. September 1897 dahingeshiedenen Forscher Herrn Ch. Nehls, weiland Wasserbaudirector in Hamburg, meinen Dank für seinen brieflich mit mir gepflogenen Gedankenaustausch ausgesprochen, obwohl er ein principieller Gegner meiner Darstellungsweise war. Herr Ch. Nehls bekannte sich mit Feuereifer als Anhänger der Gauß'schen Theorien und gab sich viele Mühe, auch mich für diese zurückzugewinnen. Er kann als Neuerfinder der Laguerre'schen Methode bezeichnet werden, was die Herren Professor Dr. S. Günther in München und Oberbau-rath Dr. H. Scheffler in Braunschweig gern bestätigen werden. Diese Methode habe ich in §. 29 an der von mir erfundenen Figur 34 auf Grund meiner Formeln erläutert. Herr Ch. Nehls wurde durch die Majestät des Todes verhindert, diese ihm von mir mitgetheilte Figur nach seiner Methode zu interpretieren. Sein Nachlass enthält sicher einen großen Schatz neuer Forschungsergebnisse, deren Veröffentlichung hoffentlich durch den Sohn des Verewigten bald erfolgen wird. Ein inhaltsreicher Brief an Dr. Günther vom 27. Februar 1897, sowie zahl-

reiche Schreiben an mich legen hiefür glänzende Zeugnisse ab. In mein Werk durfte ich nach dem ausdrücklichen Wunsche des Dahingegangenen nichts von seinen Ideen, Bezeichnungsweisen und Constructions aufnehmen, da er selbst eine Publication derselben plante.

Beim Gebrauche des Buches wolle man sich des am Schlusse befindlichen Figurenverzeichnisses bedienen, welches das Aufsuchen der citirten Figuren erleichtern soll.

Möge die obige Arbeit, welche keineswegs auf einen Umsturz hienzielt, sondern vielmehr einen Ausbau der Wissenschaft bezweckt, wohlwollende Aufnahme finden und im Sinne des Autors gewürdigt werden

Wien, im Januar 1898.

Adalbert Breuer.

### § 1. Die geometrische Darstellung surdischer Zahlen.

Ist  $O$  in Fig. 1. der Nullpunkt der Zahlenlinie  $OX$ , so bestimmt jeder Punkt  $A$  in derselben mit  $O$  eine Strecke, welche unter Zugrundelegung einer bestimmten Längeneinheit eine positive oder negative Zahl versinnlicht, je nachdem  $A$  sich rechts oder links von  $O$  befindet. Durch die Zahlenlinie gewinnt man demgemäß eine Uebersicht aller ganzen und gebrochenen Zahlen.

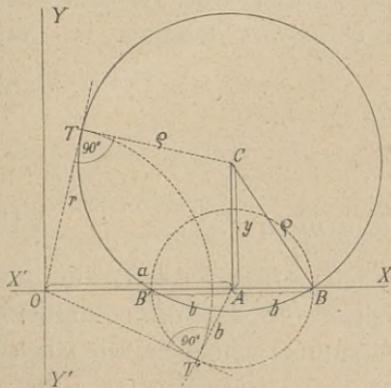


Fig. 1.

Um algebraisch-irrationale Zahlen abzubilden, bedient man sich eines Kreises vom Centrum  $C$  und dem rationalen Radius  $\rho$ , welcher die Abscissenachse  $OX$  in den reellen Punkten  $B$  und  $B'$  schneidet. Hat  $C$  die rationalen Coordinaten  $OA = a$  und  $AC = y$ , so erhält

man aus dem rechtwinkligen Dreiecke  $ABC$  gemäß:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AB'}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = \rho^2 - y^2 = b^2$$

das Wertepaar

$$AB = +b = +\sqrt{\rho^2 - y^2}, \quad \text{I.}$$

$$AB' = -b = -\sqrt{\rho^2 - y^2}. \quad \text{II.}$$

Hiebei ist  $\rho^2 > y^2$ . Ist  $ABC$  nicht zufälligerweise ein Pythagoräisches Dreieck, so sind die Zahlen  $+b$  und  $-b$  irrational; sie können arithmetisch nur durch Näherungswerte ausgedrückt werden, obgleich die Punkte  $B$  und  $B'$  genau fixiert sind. Will man aber die Strecken  $AB$  und  $AB'$  mittels der angenommenen

Längeneinheit messen, so findet man die ersteren bezüglich der letzteren incommensurabel. Die irrationalen Zahlen  $+b$  und  $-b$  erscheinen durch die Strecken  $AB$  und  $AB'$  dargestellt, wenn man  $A$  als Nullpunkt auffasst. Zählt man jedoch vom Ursprunge  $O$  aus, so ergeben sich nach Möbius mit Rücksicht auf  $AB' = -B'A$  die Streckenverbindungen

$$OB = OA + AB = a + b \quad \text{III.}$$

$$\text{und } OB' = OA + AB' = a - b, \quad \text{IV.}$$

durch welche die surdischen Zahlen  $(a + b)$  und  $(a - b)$  versinnlicht werden. Die Relationen III und IV liefern

$$OB \cdot OB' = a^2 - b^2. \quad \text{V.}$$

Nun hat aber das Product  $OB \cdot OB'$  die Bedeutung der Potenz des Punktes  $O$  in Bezug auf alle Kreise des Büschels mit den Trägern  $B$  und  $B'$  und man hat, wenn  $OT = r$  eine Tangente des Kreises  $C$  vorstellt, welche für  $a^2 > b^2$  immer möglich ist, die Beziehung

$$OB \cdot OB' = \overline{OT^2} = r^2. \quad \text{VI.}$$

Aus V. und VI. folgt hiemit

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = r^2. \quad \text{VII.}$$

Diese Relation konnte man aus dem mit  $AB = b$  als Radius beschriebenen Kreise mittels der Tangente  $OT' = r$  direct ablesen. Der Kreis vom Radius  $r$  und vom Centrum  $O$  schneidet alle Kreise des Büschels  $BB'$  orthogonal.

Nennt man

$$r = \sqrt{a^2 - b^2}$$

den Modul der conjugierten, surdischen Zahlen  $(a + b)$  und  $(a - b)$ , so liefert VII. einen leicht zu formulierenden Satz.

Für  $q^2 = y^2$  berührt der Kreis  $C$  die Abscissenachse; es sind dann die irrationalen Bestandtheile  $+b$  und  $-b$  der surdischen Zahlen gleich Null. Wenn der Kreis  $C$  den Ursprung  $O$  einschließt, dann wird  $r^2$  negativ und  $r$  imaginär; dieser Fall tritt für  $a^2 < b^2$  ein. Als Maß von  $r$  dient dann nach der Planimetrie bekanntlich die halbe kürzeste Sehne durch  $O$ , welche für alle Kreise des Büschels  $BB'$  in derselben Größe erscheint.  $OB$  und  $OB'$  haben entgegengesetzte Richtungen und daher verschiedene Vorzeichen. Mithin ist  $OB \cdot OB'$  negativ. Ist  $NN'$  die durch  $O$  normal zu  $OC$



Der entsprechende Kreis  $C$  (Fig. 2) geht dann an  $OX$  vorüber, und die Schnittpunkte  $B_i$  und  $B'_i$  sind imaginär. Legt man von  $A$  an den Kreis  $C$  die Tangente  $AD$ , so folgt aus dem rechtwinkligen Dreiecke  $ADC$

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 = y^2 - \varrho^2$$

oder  $AD = \sqrt{y^2 - \varrho^2} = b.$  III.

Beschreibt man von  $A$  aus mit  $AD$  den Kreis, so liefert dieser in  $OX$  die reellen Punkte  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{B}'$ , welche als Vertreter der imaginären Punkte  $B_i$  und  $B'_i$  gelten können, weil

$$i \cdot AD = i \cdot AB = AB_i = +i \cdot b$$

und  $-i \cdot AD = i \cdot AB' = AB'_i = -i \cdot b$

ist. Die complexen Strecken

$$OB_i = OA + AB_i = a + ib$$

und  $OB'_i = OA + AB'_i = a - ib$  IV. V.

müssen dann durch die allgemeinen surdischen Strecken

$$OB = OA + AB = a + b$$

und  $OB' = OA + AB' = a - b$  VI. VII.

versinnlicht werden. Die Punkte  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{B}'$  liegen in einer gleichseitigen Hyperbel von der Hauptachse  $EF = 2\varrho$ . Denn aus III. folgt:

$$y^2 - b^2 = \varrho^2$$

als Gleichung einer, auf den Ursprung  $C$  und die Coordinatenachse  $CA$  bezogenen Hyperbel, welcher die neuen Coordinaten  $y, +b$ , sowie  $y, -b$  von  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{B}'$  Genüge leisten. Diese Curve erscheint als der reelle Vertreter jenes imaginären Kreiszwiges, welchem das Schneiden von  $OX$  zufällt, nachdem der reelle Kreis  $C$  es nicht besorgen kann.

Aus IV. und V. fließt die Relation

$$OB_i \cdot OB'_i = a^2 + b^2$$
 VIII.

und es entsteht nun die Frage, ob das Product  $OB_i \cdot OB'_i$  ebenso als Ausdruck der Potenz  $\overline{OT}^2 = r^2$  von  $O$  in Betreff des Kreises  $C$  gilt, wie das analoge Product in § 1, VI. Die Antwort hierauf gibt nachstehende Untersuchung der Fig. 2; aus dem rechtwinkligen Dreiecke  $OTC$  folgt:

$$\overline{OT}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{CT}^2 = \overline{OC}^2 - \varrho^2.$$

Ferner erhält man aus dem rechtwinkligen Dreiecke  $ACO$

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2 = a^2 + y^2.$$

Die Substitution dieses Ausdruckes in den vorigen liefert

$$\overline{OT}^2 = a^2 + y^2 - \varrho^2,$$

woraus man mit Hilfe von III. folgert

$$\overline{OT}^2 = a^2 + b^2. \quad \text{IX.}$$

Aus VIII und IX resultiert schließlich

$$OB_i \cdot OB'_i = \overline{OT}^2 = r^2, \quad \text{X.}$$

und der vorhin citierte planimetrische Satz gilt daher auch für Secanten mit imaginären Schnittpunkten. VIII und X ergeben für den Modul  $r$  der conjugierten complexen Zahlen  $(a + ib)$  und  $(a - ib)$  den Ausdruck

$$a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib) = r^2, \quad \text{XI.}$$

aus welchem man ersieht, dass  $r$  stets reell ist.

Sind  $M$  und  $M'$  die Schnittpunkte von  $AC$  mit dem Kreise  $A$ , so ist  $AM = AM' = AD = b$ , und aus dem rechtwinkligen Dreiecke  $OAM$  ergibt sich

$$\overline{OM}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AM}^2 = a^2 + b^2. \quad \text{XII.}$$

Hieraus schließt man unter Hinblick auf IX und X

$$\overline{OM}^2 = \overline{OT}^2 = r^2.$$

Demgemäß geht der Kreis  $O$  durch die Punkte  $M$  und  $M'$ , welche als Träger eines Kreisbüschels erscheinen. Die Chordale  $MM'$  desselben enthält die Centren aller gemeinsamen Orthogonalkreise. Diese gehen sämtlich durch die imaginären Punkte  $B_i$  und  $B'_i$  der Centrale  $OX$  des Büschels  $MM'$  und haben  $OX$  zur Chordale. Denn  $\overline{OT}^2$ , sowie  $\overline{AD}^2$  sind die für alle Orthogonalkreise des Büschels  $MM'$  gleichen Potenzen der Punkte  $O$  und  $A$ . Mithin bilden diese Orthogonalkreise von der Centrale  $AC$  einen zweiten Büschel mit den imaginären Trägern  $B_i$  und  $B'_i$ , welcher dem Büschel  $MM'$  conjugiert ist. In dem ersteren Büschel kommen zwei Nullkreise (Kreispunkte) vor, die sich mit den Punkten  $M$  resp.  $M'$

decken. Den Centren zwischen  $M$  und  $M'$  entsprechen imaginäre Orthogonalkreise an dem Büschel  $MM'$ .

Die Hyperbeln für den Nullkreis  $M$  degenerieren in die Asymptoten  $MB$  und  $MB'$ . Analog verhält es sich mit dem Nullkreise  $M'$ .

Durch Variieren des Kreises  $C$  bezüglich Lage und Größe lassen sich unzählig viele complexe Zahlen in derselben Weise zur Darstellung bringen, wie früher die surdischen Zahlen. Liegt  $C$  in  $OY$ , so sind die Zahlen rein-imaginär, da  $a$  diesfalls verschwindet.

Um nun die Vertreter  $B$  und  $B'$  der conjugiert imaginären Punkte  $B_i$  und  $B'_i$  von anderen Punkten der Zahlenlinie stets klar unterscheiden zu können, thut man gut, sie mittels kleiner Kreise einzuschließen und mit gleichen Blockbuchstaben zu bezeichnen. In gleicher Weise sollen in Zukunft überhaupt solche Vertreter imaginärer Punkte eingeringelt und mit Blockschrift hervorgehoben werden. Dadurch sind Verwechslungen und Irrthümer, welche das Ersetzen von IV und V durch VI und VII leicht hervorrufen könnte, ausgeschlossen.

### § 3. Die Gauß'sche Darstellung complexer Zahlen.

Der Nullkreis  $M$  in Fig. 2 steht mit der complexen Zahl  $(a + ib)$  insofern in inniger Beziehung, als seine Coordinaten  $a$  und  $+b$  dieselben Werte besitzen wie die Bestandtheile der erstern. Analog verhält es sich mit dem Nullkreise  $M'$ , dessen Coordinaten  $a$  und  $-b$  den Bestandtheilen der conjugierten Zahl  $(a - ib)$  entsprechen. Der Nullkreis  $M$  erzeugt mit seinen imaginären Asymptoten in  $OX$  die imaginären Punkte  $B_i$  und  $B'_i$ . Das Gleiche gilt vom Nullkreise  $M'$ . Ordnet man von den beiden Erzeugnissen  $B_i$  und  $B'_i$  das erstere dem Nullkreise  $M$ , das letztere dem Nullkreise  $M'$  zu, indem man dabei das jeweilig andere ausser Acht lässt, so bestimmen  $M$  und  $M'$  eindeutig die Zahlen  $(a + ib)$ , resp.  $(a - ib)$ . In diesem Sinne kann man die Zahl  $(a + ib)$  durch  $M$ , dagegen  $(a - ib)$  durch  $M'$  darstellen. Dabei gelangt man von  $M$  durch eine Vierteldrehung rechts um das Centrum  $A$  zum Ersatzpunkte  $B$  von  $B_i$ , während man von  $M'$  in gleicher Weise den Ersatzpunkt  $B'$  von  $B'_i$  erreicht. Für die Erzeuger auf der Halbierungslinie des II. und IV. Quadranten fallen die Punkte  $B$  resp.  $B'$  in den Ursprung, denn es ist  $b = -a$  und  $a = -b$ .

Gauß bezeichnete  $M$  geradezu als das Bild der Zahl  $(a + ib)$  und  $M'$  als jenes von  $(a - ib)$ . Die complexen Zahlen waren hie-

durch als Indices einer Doppelreihe von Größen interpretiert, wobei  $a$  die Verticalreihe und  $ib$  die Horizontalreihe anzugeben hatte. In diesem Sinne heißen die imaginären Zahlen *laterale* oder seitliche Zahlen. Wie man aus der obigen Entwicklung sieht, ist diese Auffassung aus dem Grunde nicht stichhältig, weil dadurch der Erzeuger  $M$  an Stelle eines seiner Erzeugnisse, nämlich  $B_i$  gesetzt wurde. Obige geometrisch unrichtige Substitution hat die Analysis von der Geometrie getrennt, und diese Metapher muss jederzeit auf ihre Bedeutung zurückgeführt werden, wenn man die Resultate beider Disciplinen zur Deckung bringen will. Es wäre demnach hoch an der Zeit, beide Zweige der Mathematik wieder auf die gemeinsame Basis zu stellen und damit obige Divergenz zu beseitigen. Allerdings müsste mit der schon sehr stark eingewurzelten Gauß'schen Auffassung in der Geometrie, welche bloß für das graphische Rechnen ihre Berechtigung hat, ein für allemal gebrochen werden.

Nach der Gauß'schen Darstellung complexer Zahlen erscheint die Zahlenlinie  $OX$  plötzlich zu einer Zahlenebene erweitert. Thatsächlich aber sind es nur die Erzeuger  $M$  und  $M'$ , die sich in der Ebene  $XOY$  befinden und jede Stelle derselben einnehmen können. Analytisch geht dies folgendermaßen hervor. Es sei  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0$  die Gleichung eines Kreises, dessen Centrum  $M$  die Coordinaten  $a$  und  $b$  hat. Für die Schnittpunkte  $B_i$  und  $B'_i$  mit  $OX$  erhält man für  $y = 0$

$$x = a \pm ib .$$

Der zu  $OX$  symmetrische Kreis vom Centrum  $M'$  ( $a, -b$ ) gibt dieselben Schnittpunkte. Die Gauß'sche Interpretation wird sofort hinfällig, wenn man sie auf die analytische Geometrie der Ebene anwenden will, deren Gebilde ja an und für sich das ganze Feld der  $XOY$  Ebene in Anspruch nehmen. Laguerre hat wohl auch für diesen Fall einen Ausweg gesucht, indem er jede Gerade der Ebene mit denselben Befugnissen ausstattete wie die Zahlenlinie  $OX$ . Er ist durch die consequente Durchführung seiner Idee selbstredend zu richtigen Endresultaten gelangt, doch leidet seine Darstellung, abgesehen von der Complicirtheit, an dem Übel, dass sie der Weiterentwicklung der Geometrie nur indirect dienlich sein kann. Leinweber Bruno hat die imaginären Gebilde im Raume dargestellt. Für die Geometrie des Raumes ist auch dieser Ausweg verschlossen.

Schon darin, dass man die Erzeuger  $M$  und  $M'$  in einem gewissen Sinne an Stelle der Erzeugnisse  $B_i$  und  $B'_i$  setzen muss, um die Zweideutigkeit zu beheben, liegt eine gewisse Schwierigkeit.

Allerdings hat auch *Staudt* in seiner rein-geometrischen Theorie des Imaginären eine analoge Unterscheidung der beiden conjugierten imaginären Punkte eines Paares getroffen, indem er in die entsprechende Punktebeziehung (Involution) einen gewissen Sinn der Aufeinanderfolge einführte, doch ist er dabei nicht aus dem Träger (der Geraden) herausgetreten, welcher die imaginären Punkte enthält.

Es ist sehr zu beklagen, dass ein Genie wie *Gauß* bei der Darstellung des Imaginären insoferne eine Unterlassung begieng, als er seine richtigen Figuren nicht von beiden Gesichtspunkten aus erläuterte und dadurch die Geometrie in ihrer Entwicklung hemmte. Das Verdienst der Begründung des graphischen Rechnens bleibt ihm indessen für alle Zeiten ungeschmälert. Allerdings fallen ihm aber auch viele einseitige Auffassungen seiner Nachfolger zur Last, was von *E. Dühring* oft in zu harter Weise gegeißelt worden ist.

Führt man an Stelle der rechtwinkligen Coordinaten  $a$  und  $+b$  des Nullkreises  $M$  die Polarcoordinaten  $OM = r$  und  $\sphericalangle XOM = \alpha_0$  ein, so hat man  $a = r \cos \alpha_0$  und  $b = r \sin \alpha_0$ . Unter Einführung dieser neuen Bestimmungsgrößen erscheint die complexe Zahl arithmetisch in folgender Doppelbezeichnung:

$$a + ib = r (\cos \alpha_0 + i \sin \alpha_0). \quad \text{I.}$$

Späterer Zwecke wegen sollen die Winkel von nun ab nicht mehr im Gradmaß, sondern durch den zwischen den Schenkeln enthaltenen, vom Scheitel aus mit dem Radius Eins beschriebenen Bogen ausgedrückt werden. Ist  $\alpha_0$  das Gradmaß des Winkels  $XOM$ , dann ist sein Bogenmaß  $\alpha$  ausgedrückt durch

$$\alpha = \frac{2\pi}{360} \alpha_0 = \frac{\pi \alpha_0}{180}.$$

Demnach schreibt man für I.

$$a + ib = r (\cos \alpha + i \sin \alpha). \quad \text{II.}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wird als Normalform oder als goniometrische Form der complexen Zahl  $(a + ib)$  bezeichnet. Zur Bestimmung von  $\alpha$  liefert Dreieck  $OAM$  die Relationen:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{b}{a}, & r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos \alpha &= \cos \alpha_0 = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \alpha &= \sin \alpha_0 = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned} \right\} \text{III.}$$

Die Amplitude  $\alpha$ , auch Argument genannt, hat, dem Uhrzeiger entgegen, alle Werte von 0 bis  $+ 2\pi$  zu durchlaufen, während für jede Lage von  $OM$  der Modul  $r$  von 0 bis  $+ \infty$  variieren muss, wenn die ganze Ebene bestrichen werden soll. Für  $\alpha$  ist auch nach Bedarf die negative Zählweise (im Sinne des Uhrzeigers) gebräuchlich, wogegen  $r$  stets als positiv gilt.

Die Formel II ist das Fundament für die Theorie der Richtungszahlen. Hiebei ist  $(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  die Richtungsfunktion für den Strahl  $OM = r$ . Nach der Entwicklung von Drobisch wird eine Function  $f(\alpha)$  von  $\alpha$  gesucht, welche dem Modul  $r$  als Factor angefügt werden muss, damit  $rf(\alpha)$  eine Strecke nach Größe und Richtung darstelle. In der That findet man nach der Functionenlehre

$$f(\alpha) = \cos \alpha + i \sin \alpha.$$

Demnach ist

$$r_\alpha = r (\cos \alpha + i \sin \alpha) = a + ib.$$

Mithin erscheint die Richtungszahl  $r_\alpha$  mit der complexen Zahl  $(a + ib)$  identisch.  $a$  und  $b$  sind dabei gewissermaßen die parallel zu den Achsen  $OX$  und  $OY$  genommenen Componenten des Moduls  $OM = r$  als Resultante. Hiernach repräsentiert  $OX$  die reellen Zahlen,  $OY$  die rein-imaginären, während jeder Punkt  $M$  in den Quadranten eine complexe Zahl darstellt. Wie man sieht, hat sich die Analysis die Function  $f(\alpha)$  zwangsweise hergeschafft, sich aber dadurch die geometrisch richtige Basis entzogen und ist auf das Gebiet der Componentenlehre gerathen, welche in der theoretischen Mechanik in reeller Form zum Ausdrucke kommt. (Vergleiche meine Abhandlung in Grunerts Archiv für Mathematik und Physik, 2. Reihe T. XII. 1894.)

#### § 4. Die vier Species mit complexen Zahlen.

Die Gleichheit zweier complexer Zahlen erfordert, dass die reellen Bestandtheile einerseits und die imaginären Theile andererseits paarweise gleich sind. Denn wenn

$$a_1 + ib_1 = a_2 + ib_2$$

ist, so besteht die heterogene Gleichung

$$a_1 - a_2 = i (b_2 - b_1).$$

Die letztere kann nur in der Form  $0 = 0$  Geltung haben, denn

eine reelle Zahl kann nie durch imaginäre Einheiten ( $i$ ) ausgedrückt werden. Mithin ist

$$a_1 - a_2 = 0 \text{ und } b_2 - b_1 = 0, \text{ also } a_1 = a_2 \text{ und } b_1 = b_2 .$$

Die Addition complexer Zahlen wird nach dem Grundsatz, dass nur gleichartige Einheiten durch Zählung vereinigt werden können, vollzogen.

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a + ib . \quad \text{I.}$$

Hiebei ist  $a = a_1 + a_2$  und  $b = b_1 + b_2$ .

Normalförmige Zahlen liefern folgendes Schema:

$$r_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) + r_2(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) = (r_1 \cos \alpha_1 + r_2 \cos \alpha_2) + i(r_1 \sin \alpha_1 + r_2 \sin \alpha_2) = a + ib .$$

Hiebei hat man

$$a = r_1 \cos \alpha_1 + r_2 \cos \alpha_2 \text{ und } b = r_1 \sin \alpha_1 + r_2 \sin \alpha_2 .$$

Die Summe ( $a + ib$ ) ist nicht normalförmig. Zur Überführung in die Normalform dient § 3, III. Man erhält  $r^2 = a^2 + b^2$  oder

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \{ \pi - (\alpha_1 - \alpha_2) \} , \quad \text{II.}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{r_1 \sin \alpha_1 + r_2 \sin \alpha_2}{r_1 \cos \alpha_1 + r_2 \cos \alpha_2} .$$

Mithin ist

$$r_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) + r_2(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) . \quad \text{III.}$$

Als specieller Fall folgt für conjugierte Zahlen

$$(a + ib) + (a - ib) = 2a . \quad \text{IV.}$$

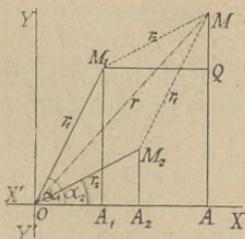
Ist in Fig. 3  $OA_1 = a_1$ ,  $A_1M_1 = b_1$ ,  $OA_2 = a_2$  und  $A_2M_2 = b_2$ ,

so sind  $M_1$  und  $M_2$  die Erzeuger der beiden Summanden. Macht man  $A_1A = a_2$ ,  $AQ = b_1$  und  $QM = b_2$ , so hat  $M$  die Coordinaten  $(a_1 + a_2)$  und  $(b_1 + b_2)$  und ist der Erzeuger der Summe. Der Construction gemäß ist  $M_1M \parallel OM_2$  und  $M_2M \parallel OM_1$  und ferner

$$\begin{aligned} OM_1 &= M_2M = r_1, & OM_2 &= M_1M = r_2, \\ \sphericalangle M_1OM_2 &= \alpha_1 - \alpha_2 \text{ und } \sphericalangle OM_1M \\ &= \sphericalangle OM_2M = \pi - (\alpha_1 - \alpha_2). \end{aligned}$$

Fig. 3.

Formel II. drückt den Carnotschen Satz für die Dreiecke  $OM_1M$  und  $OM_2M$  aus, nach welchem  $OM = r$  gefunden wird.



Mithin wird der Erzeuger  $M$  der Summe ebenso gefunden, wie der Endpunkt der Resultierenden der beiden Kräfte  $OM_1 = r_1$  und  $OM_2 = r_2$ . Der Modul  $OM = r$  ist die Resultante aus den Modulen der Summanden.

Für die Subtraction complexer Zahlen folgt analog

$$(a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2) = a + ib. \text{ V.}$$

Hierin ist  $a = a_1 - a_2$  und  $b = b_1 - b_2$ .

Sind die Zahlen normalförmig, so ergibt sich

$$r_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) - r_2(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) = (r_1 \cos \alpha_1 - r_2 \cos \alpha_2) + i(r_1 \sin \alpha_1 - r_2 \sin \alpha_2) = a + ib.$$

Hierin ist  $a = r_1 \cos \alpha_1 - r_2 \cos \alpha_2$

$$b = r_1 \sin \alpha_1 - r_2 \sin \alpha_2.$$

Formel III. in § 3 liefert für den Modul und die Amplitude der Differenz

$$r^2 = a^2 + b^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2); \quad \text{VI.}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{b}{a} = \frac{r_1 \sin \alpha_1 - r_2 \sin \alpha_2}{r_1 \cos \alpha_1 - r_2 \cos \alpha_2}.$$

Demnach erhält man

$$r_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) - r_2(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) = r(\cos \alpha + i \sin \alpha). \quad \text{VII.}$$

Als specieller Fall ergibt sich für conjugierte Zahlen

$$(a + ib) - (a - ib) = i2b. \quad \text{VIII.}$$

Die graphische Durchführung ist aus Fig. 4 zu ersehen. Es seien  $M_1$  und  $M_2$  die Erzeuger von Minuend und Subtrahend. Macht

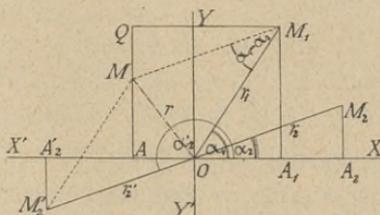


Fig. 4.

man  $A_1A = -OA_2 = -a_2$ ,  $AQ = A_1M_1 = b_1$  und  $QM = -A_2M_2 = -b_2$ , so hat  $M$  die Coordinaten  $(a_1 - a_2)$  und  $(b_1 - b_2)$  und ist der Erzeuger der Differenz.  $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle XOM$ .

Die Subtraction konnte auch in eine Addition verwandelt werden. Es ist

$$(a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 + ib_1) + (-a_2 - ib_2).$$

Ist  $OA_2' = -a_2$  und  $A_2'M_2' = -b_2$ , so ist  $M_2'$  der Erzeuger des negativ genommenen Subtrahendes.  $OM_2' = -OM_2$ ;  $\sphericalangle \alpha_2' = \pi + \alpha_2$ .  $M_2$ ,  $O$  und  $M_2'$  liegen in einer geraden Linie. Bei der Addition kann auch das Parallelogramm aus  $OM_1$  und  $OM_2'$  verwendet werden, welches die Diagonale  $OM$  liefert.  $\sphericalangle OM_1M = \sphericalangle M_1OM_2 = \alpha_1 - \alpha_2$ . Das Dreieck  $OM_1M$  liefert mittels des Carnotschen Satzes Formel VI. für den Modul  $OM = r$  der Differenz.

Mit Rücksicht auf  $i^2 = -1$  erhält man beim Multiplicieren complexer Zahlen folgendes:

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) = a + ib \quad \text{IX.}$$

Hiebei ist  $a = a_1a_2 - b_1b_2$  und  $b = a_1b_2 + a_2b_1$ .

Insbesondere folgt für conjugierte Zahlen

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 \quad \text{X.}$$

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \alpha - i \sin \alpha) = 1. \quad \text{XI.}$$

Weit eleganter gestaltet sich das Multiplicationstheorem für normalförmige Zahlen unter Benützung der bekannten Formeln

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \quad \text{XII.}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta. \quad \text{XIII.}$$

Man erhält

$$\{r_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)\} \cdot \{r_2(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2)\} = r_1 r_2 \{ \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \} = r(\cos \alpha + i \sin \alpha). \quad \text{XIV.}$$

Hierbei ist  $r = r_1 r_2$  und  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ .

Sind in Fig. 5  $M_1$  und  $M_2$  die Erzeuger der beiden Factoren, so macht man  $\sphericalangle M_1OM = \sphericalangle XOM_2$  und  $OM = OM_1 \cdot OM_2$ ; letzteres nach der Proportion  $OM : OM_1 = OM_2 : 1$  mittels eines Proportionalwinkels.  $M$  ist der Erzeuger des Productes.  $\alpha = \sphericalangle XOM$ .

Bei der Division complexer Zahlen benützt man X. wie folgt:

$$\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} = a + ib. \quad \text{XV.}$$

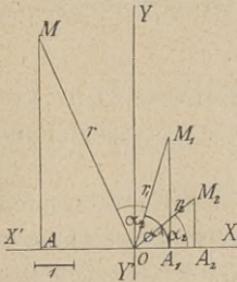


Fig. 5.

Hiebei ist:  $a = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$

und  $b = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$ .

Conjugierte complexe Zahlen geben einen complexen Quotienten.

Das Divisionstheorem für normalförmige complexe Zahlen ergibt sich mittels XI. in nachstehender Art:

$$\frac{r_1 (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)}{r_2 (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2)} = \frac{r_1 (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) (\cos \alpha_2 - i \sin \alpha_2)}{r_2 (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) (\cos \alpha_2 - i \sin \alpha_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \{ \cos (\alpha_1 - \alpha_2) + i \sin (\alpha_1 - \alpha_2) \} = r (\cos \alpha + i \sin \alpha). \text{ XVI.}$$

Hierbei ist  $r = \frac{r_1}{r_2}$  und  $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ .

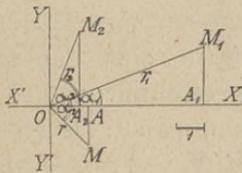


Fig. 6.

Sind in Fig. 6  $M_1$  und  $M_2$  die Erzeuger von Dividend und Divisor, so macht man  $\sphericalangle M_1 OM = - \sphericalangle XOM_2$  und  $OM = OM_1 / OM_2$ . Letzteres geschieht auf Grund der Proportion  $OM : 1 = OM_1 : OM_2$  mit Hilfe eines Proportionalwinkels.  $M$  ist der Erzeuger des Quotienten;  $\sphericalangle XOM = \alpha$  ist negativ. Die positive Amplitude  $\alpha'$  wäre:  $\alpha' = 2\pi + \alpha$ .

### § 5. Der Satz von Moivre.

Mit Rücksicht auf  $i^1 = i$ ,  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1$  überhaupt  $i^{4n} = 1$ ,  $i^{4n+1} = i$ ,  $i^{4n+2} = -1$ ,  $i^{4n+3} = -i$  u. s. f. ergibt sich nach dem binomischen Satze, wenn man nach  $i$  ordnet:

$$(a_1 + ib_1)^n = a_1^n - (n)_2 a_1^{n-2} \cdot b_1^2 + (n)_4 a_1^{n-4} \cdot b_1^4 - \dots + i \{ (n)_1 a_1^{n-1} b_1 - (n)_3 a_1^{n-3} b_1^3 + (n)_5 a_1^{n-5} b_1^5 - \dots \} = a + ib.$$

Hierbei ist  $a = a_1^n - (n)_2 a_1^{n-2} \cdot b_1^2 + (n)_4 a_1^{n-4} \cdot b_1^4 - \dots$  I.

$$b = (n)_1 a_1^{n-1} b_1 - (n)_3 a_1^{n-3} \cdot b_1^3 + (n)_5 a_1^{n-5} b_1^5 - \dots$$

Ist  $b_1^2 < a_1^2$ , so gilt der Satz auch für negative, gebrochene und irrationale Exponenten.

Wendet man § 4, XIV. auf ein Product aus  $n$  gleichen Factoren an, so folgt

$$\{r_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)\}^n = r_1^n (\cos n \alpha_1 + i \sin n \alpha_1) = r(\cos \alpha + i \sin \alpha). \text{ II.}$$

Hierbei ist  $r = r_1^n$  und  $\alpha = n \alpha_1$ .

Wie in der algebraischen Analysis streng bewiesen wird, gilt dieser Satz auch für negative und gebrochene, sowie für irrationale Exponenten.

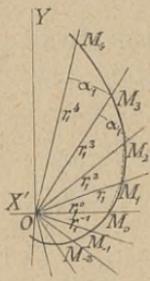


Fig. 7.

Bildet man (Fig. 7) die auf einander folgenden ganzen positiven und negativen Potenzen der complexen Zahl vom Erzeuger  $M_1$ , so liegen die Endpunkte der Modulen  $OM_4 = r_1^4$ ,  $OM_3 = r_1^3$ ,  $OM_2 = r_1^2$ ,  $OM_1 = r_1$ ,  $OM_0 = r_1^0 = 1$ ,  $OM_{-1} = r_1^{-1}$ ,  $OM_{-2} = r_1^{-2}$  u. s. f. in einer Curve, welche logarithmische Spirale heißt. Den zwischen den gezeichneten Modulen gelegenen Radienvectoren entsprechen gebrochene oder irrationale Exponenten. Die Curve hat den Ursprung  $O$  zum asymptotischen Punkte, dem sie sich in unzählig vielen Windungen ohne Ende nähert, während sie sich nach außenhin in ebenfalls unendlich vielen Windungen ins Unendliche erstreckt. Ihre Construction geschieht entweder mittels der leicht verständlichen Fig. 8 (der sogenannten Apaxe) oder mit Hilfe eines gewöhnlichen Proportionalwinkels. Auch kann man die Eigenschaft  $\triangle OM_0M_1 \sim \triangle OM_1M_2 \sim \triangle OM_2M_3$  u. s. f. benutzen.

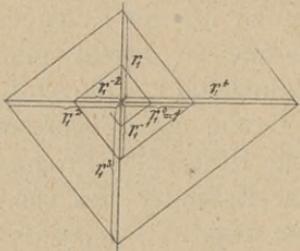


Fig. 8.

Das Radicieren einer complexen Zahl geschieht mittels der Binomialreihe für  $a_1^2 > b_1^2$ , indem man in I. statt  $n$  den Wert  $\frac{1}{n}$  setzt.

$$\sqrt[n]{a_1 + ib_1} = (a_1 + ib_1)^{\frac{1}{n}} = a + ib, \quad n \text{ ist eine ganze Zahl. III.}$$

$a$  und  $b$  sind diesfalls unendliche, convergente Reihen.

Wenn  $a_1^2 < b_1^2$  ist, so schreibt man

$$\sqrt[n]{a_1 + ib_1} = \{ib_1 + a_1\}^{\frac{1}{n}} = i^{\frac{1}{n}} [b_1 - ia_1]^{\frac{1}{n}} = i^{\frac{1}{n}} [a_2 + ib_2].$$

Dabei sind  $a_2$  und  $b_2$  unendliche, convergente Reihen.

Nun setzt man  $i^{\frac{1}{n}} = x$

oder  $i = x^n$ . Da  $x^n$  die complexen Zahl  $(0 + i)$  gibt, ist  $x$  jedenfalls complex, der Modul = 1 und die Amplitude  $\frac{\pi}{2n}$ . Der Wert von  $x$  ist also gemäß II.  $\cos \frac{\pi}{2n} + i \sin \frac{\pi}{2n}$ .

Mithin ist

$$\sqrt[n]{a_1 + ib_1} = \left(\cos \frac{\pi}{2n} + i \sin \frac{\pi}{2n}\right) \cdot (a_2 + ib_2) = a + ib, \quad \text{IV.}$$

denn das Product complexer Zahlen ist wieder complex.

Aus II. ergibt sich durch Umkehrung und Radicieren

$$\{r(\cos \alpha + i \sin \alpha)\}^{\frac{1}{n}} = r_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos \frac{\alpha}{n} + i \sin \frac{\alpha}{n}\right).$$

Schreibt man  $r_1$  statt  $r$  und  $\alpha_1$  statt  $\alpha$ , so folgt

$$\{r_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)\}^{\frac{1}{n}} = r_1^{\frac{1}{n}}\left(\cos \frac{\alpha_1}{n} + i \sin \frac{\alpha_1}{n}\right) = r(\cos \alpha + i \sin \alpha). \quad \text{V.}$$

Hiebei ist

$$r = r_1^{\frac{1}{n}} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{\alpha_1}{n}.$$

Die Functionen  $\cos \alpha_1$  und  $\sin \alpha_1$  ändern sich nicht, wenn man  $\alpha_1$  durch  $(\alpha_1 + 2k\pi)$  ersetzt, wobei  $k$  eine ganze positive oder negative Zahl ausdrückt.

Mithin folgt aus V.

$$\{r_1[\cos(\alpha_1 + 2k\pi) + i \sin(\alpha_1 + 2k\pi)]\}^{\frac{1}{n}} = r_1^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \frac{\alpha_1 + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha_1 + 2k\pi}{n} \right]; \quad \text{VI.}$$

$\cos \frac{\alpha_1 + 2k\pi}{n}$  und  $\sin \frac{\alpha_1 + 2k\pi}{n}$  nehmen hingegen verschiedene Werte an, wenn man für  $k$  nacheinander die Werte 0, 1, 2 . . .  $(n-1)$  mit beiden Vorzeichen setzt. Doch sind die entstandenen  $2n$  Werte paarweise gleich, und ihre Anzahl reducirt sich daher auf  $n$ . Andere Substitutionen von ganzen Zahlen für  $k$  bringen wegen der Periodicität der goniometrischen Functionen keine neuen Werte hervor.

Die Vieldeutigkeit der Wurzeln aus complexen Zahlen ist ein Seitenstück zu jenen aus reellen Zahlen. Es ist bei beliebigem  $n$

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1}) = 0; \quad \text{VII.}$$

daher  $x - a = 0$ ,  $x_1 = a$  erster Wurzelwert.

$$x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1} = 0.$$

Diese Gleichung verwandelt sich, wenn man durch  $a^{n-1}$  dividiert und  $\frac{x}{a} = y$  setzt in die reciproke Gleichung

$$y^{n-1} + y^{n-2} + \dots + y + 1 = 0,$$

welche  $n-1$  Wurzeln besitzt. Ist  $n$  gerade, so enthält die letzte Gleichung noch den Wurzelfactor  $(y + 1)$ , also  $y = -1$ , woraus  $x = -a$  folgt.  $x = ay$  gibt die  $(n-1)$  noch fehlenden Wurzeln von VII. Ist  $n = 2m + 1$  also ungerade, so ist

$$x^n + a^n = (x + a) (x^{n-1} - ax^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot a^{n-1}) = 0.$$

Also  $x_1 = -a$ , und das andere, wie vorhin.

Mithin hat  $x = \sqrt[n]{a}$  allgemein  $n$  Werte.

Ist  $n = 2m$  gerade, so ist

$$x^{2m} + a^{2m} = (x^m + ia^m) (x^m - ia^m) = 0.$$

$$\text{Also } x^m + ia^m = 0, \quad x = a \sqrt[m]{-i}$$

$$x^m - ia^m = 0, \quad x = a \sqrt[m]{i}.$$

Da  $\sqrt[m]{i}$  und  $\sqrt[m]{-i}$  je  $m$  Werte liefern, so gibt es im Ganzen wieder  $2m = n$  Wurzeln. Es ist einleuchtend, dass und wie man Form. VI. zur Auflösung binomischer Gleichungen  $x^m - a^m = 0$  verwenden kann.

Die Vieldeutigkeit der Wurzelgrößen tritt namentlich bei der graphischen Durchführung des Radicierens besonders klar hervor.

Es sei in Fig. 9  $M_1$  der Erzeuger der complexen Zahl  $r_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)$ . Dann erhält man für

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{r_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)} &= \sqrt[3]{r_1} \left( \cos \frac{\alpha_1}{3} + i \sin \frac{\alpha_1}{3} \right) \\ &= \sqrt[3]{r_1} \left( \cos \frac{\alpha_1 + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\alpha_1 + 2\pi}{3} \right) \\ &= \sqrt[3]{r_1} \left( \cos \frac{\alpha_1 + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\alpha_1 + 4\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

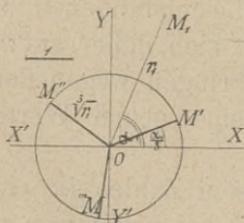


Fig. 9.

$\sqrt[3]{r_1}$  kann man mittels der logarithmischen Spirale ziehen, indem man  $r_1$  als Radiusvector einträgt, dann den Winkel zwischen  $r_1$  und dem, der Längeneinheit gleichen Radius in 3 gleiche Theile theilt, und schließlich, den zum ersten Drittel gehörigen Fahrstrahl zieht. Letzterer hat die Maßzahl  $\sqrt[3]{r_1}$ .

Ferner lässt sich das Multiplicieren zweier Zahlen  $r_1$  und  $r_2$  an der Spirale ausführen, indem man die entsprechenden Strecken als Radien einträgt und die von  $r = 1$  an gemessenen Centriwinkel addiert. Geht man mit der Winkelsumme von  $r = 1$  aus, so findet man den Vector des Productes. Enthält die Winkelsumme  $2\pi$  oder Vielfache von  $2\pi$ , so hat man entsprechend viele Windungen der Spirale zu durchlaufen. Analog kann man den Quotienten  $r_1/r_2$  constructiv finden, indem man den Centriwinkel des Divisors von jenem des Dividendes abzieht und mit der Winkeldifferenz vom Radius  $r = 1$  ausgeht, wodurch man zu jenem Radius gelangt, welcher den Quotienten darstellt. Denn die Spirale in § 5 Fig. 7 hat die Eigenschaft, dass den Amplituden  $0, \alpha_1, 2\alpha_1, 3\alpha_1, 4\alpha_1$  u. s. f. folgende Radienvectoren entsprechen:  $r_1^0 = 1, r_1^1, r_1^2, r_1^3, r_1^4$  u. s. f. Ist  $M$  ein beliebiger Punkt der Spirale mit den Polarcoordinaten  $r = OM$  und  $\sphericalangle \lambda = \sphericalangle XOM$ , so besteht infolge dessen die Gleichung

$$r = r_1^\lambda : \alpha_1, \tag{VIII}$$

mit Hilfe deren man die vorhin beschriebenen graphischen Rechnungsoperationen leicht begründen kann.

Den zuletzt entwickelten Cubikwurzeln entsprechen die Erzeuger  $M', M''$  und  $M'''$  (Fig. 9). Ist der Radicand reell, also  $\alpha_1 = 0$  oder  $\alpha_1 = \pi$  und der Wurzelexponent ungerade, so gibt es immer einen reellen Wurzelwert. Wenn der Radicand positiv, somit  $\alpha_1 = 0$  und der Exponent gerade ist, so erhält man 2 reelle, entgegengesetzt bezeichnete Wurzeln; die übrigen Wurzeln sind complex, respective rein-imaginär. Die Functionen  $\cos \frac{\alpha}{n}$  und  $\sin \frac{\alpha}{n}$  lassen sich für gewisse  $n$  algebraisch ausdrücken. Es dient dazu die Formel  $\sin \gamma = \frac{1}{2} \text{chorda } 2\gamma$ , wenn *chorda*  $2\gamma$  die planimetrisch berechenbare Seite eines regulären Polygons ist.  $\cos \gamma = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma}$ ; also für  $\alpha = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{8}$ , u. s. f., ferner für nach Doppelten, resp. Halben fortschreitende Vielfache und aliquote Theile dieser Bogen.

Speciell für  $n = 2$  ermittelt man aus VI.

$$(a + ib)^{\frac{1}{2}} = \{r_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)\}^{\frac{1}{2}} = r_1^{\frac{1}{2}} \left( \cos \frac{\alpha_1}{2} + i \sin \frac{\alpha_1}{2} \right). \tag{IX}$$

Da  $r_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$  und  $\cos \alpha_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  ist, so erhält man

$$\text{mittels der Formeln } \cos \frac{\alpha_1}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha_1}{2}}$$

$$\sin \frac{\alpha_1}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha_1}{2}}$$

für  $k = 0$  und  $k = 1$  aus VI. die bekannten Formeln

$$\sqrt{a + ib} = \pm \left\{ \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right\}. \quad \text{X.}$$

Wäre  $b$  negativ, so hätte man statt  $\alpha_1$  den Wert  $(2\pi - \alpha_1)$  oder auch  $-\alpha_1$  zu setzen, und es ergibt sich

$$\sqrt{a - ib} = \pm \left\{ \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right\}. \quad \text{XI.}$$

Ist  $a > 0$  und  $b > 0$ , so ist  $\sqrt{-a} = +i\sqrt{a}$  und  $\sqrt{-b} = \pm i\sqrt{b}$ .  
Mithin erhält man

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \pm \sqrt{ab}. \quad \text{XII.}$$

## § 6. Die Reihen für Cosinus und Sinus.

Entwickelt man den identischen Ausdruck

$$(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)^n = \cos^n \alpha_1 (1 + itg \alpha_1)^n$$

linker Hand nach dem Moivreschen und rechter Hand nach dem binomischen Satze, so ergibt sich mit Rücksicht auf die Werte der Potenzen von  $i$

$$\begin{aligned} \cos n \alpha_1 + i \sin n \alpha_1 = \cos^n \alpha_1 \{ & 1 + i(n)_1 tg \alpha_1 - (n)_2 tg^2 \alpha_1 - \\ & - i(n)_3 tg^3 \alpha_1 + (n)_4 tg^4 \alpha_1 + i(n)_5 tg^5 \alpha_1 - \dots + i^n tg^n \alpha_1 \}. \end{aligned}$$

Trennt man das Reelle vom Imaginären, so resultieren die Formeln

$$\cos n \alpha_1 = \cos^n \alpha_1 \{ 1 - (n)_2 tg^2 \alpha_1 + (n)_4 tg^4 \alpha_1 - \dots \} \quad \text{I.}$$

$$\sin n \alpha_1 = \cos^n \alpha_1 \{ (n)_1 tg \alpha_1 - (n)_3 tg^3 \alpha_1 + (n)_5 tg^5 \alpha_1 - \dots \} \quad \text{II.}$$

Multipliziert man rechts aus, so erhält man folgende Formeln, die sich durch wiederholte Anwendung von § 4 XII., XIII. direct gewinnen lassen, indem man  $\beta = \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots (n-1)\alpha$  setzt.

$$\cos n \alpha_1 = \cos^n \alpha_1 - (n)_2 \cos^{n-2} \alpha_1 \sin^2 \alpha_1 + (n)_4 \cos^{n-4} \alpha_1 \sin^4 \alpha_1 \dots \quad \text{III.}$$

$$\begin{aligned} \sin n \alpha_1 = & (n)_1 \cos^{n-1} \alpha_1 \sin \alpha_1 - (n)_3 \cos^{n-3} \alpha_1 \sin^3 \alpha_1 + \\ & + (n)_5 \cos^{n-5} \alpha_1 \sin^5 \alpha_1 \dots \quad \text{IV.} \end{aligned}$$

Die Reihen von I. bis IV. brechen, wenn  $n$  ungerade ist, mit den  $\frac{n+1}{2}$  Gliedern ab. Ist  $n$  gerade, dann hat die erste Reihe  $\frac{n}{2} + 1$  Glieder, die zweite  $\frac{n}{2}$  Glieder. Setzt man  $n\alpha_1 = \alpha$  und daher  $\alpha_1 = \frac{\alpha}{n}$ , so erhält man aus I. und II. bei gleichzeitiger Entwicklung der Binomialcoefficienten

$$\cos \alpha = \cos^n \frac{\alpha}{n} \left\{ 1 - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{n} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{n} - \dots \right\}$$

$$\sin \alpha = \cos^n \frac{\alpha}{n} \left\{ \frac{n}{1} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{n} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{n} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \operatorname{tg}^5 \frac{\alpha}{n} - \dots \right\}.$$

Durch Herausheben der entsprechenden Potenzen von  $n$  aus den Binomialcoefficienten transformiert man obige Ausdrücke in

$$\cos \alpha = \cos^n \frac{\alpha}{n} \left\{ 1 - \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 \cdot 2} \left( n \operatorname{tg} \frac{\alpha}{n} \right)^2 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left( n \operatorname{tg} \frac{\alpha}{n} \right)^4 - \dots \right\}$$

$$\sin \alpha = \cos^n \frac{\alpha}{n} \left\{ \left( n \operatorname{tg} \frac{\alpha}{n} \right) - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left( n \operatorname{tg} \frac{\alpha}{n} \right)^3 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right)\left(1 - \frac{4}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \left( n \operatorname{tg} \frac{\alpha}{n} \right)^5 - \dots \right\}.$$

Setzt man  $\frac{\alpha}{n} = \gamma$ , so ist  $\gamma$  ein Bogen, der mit zunehmendem  $n$  immer kleiner wird. Für  $n = \infty$  ist  $\lim \gamma = 0$  und  $\lim \cos \alpha/n = \lim \cos \gamma = \cos 0 = 1$ . Ferner ist

$$n \operatorname{tg} \frac{\alpha}{n} = \alpha \cdot \frac{n}{\alpha} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{n} = \alpha \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\gamma}.$$

Geht man auch hier zur Grenze über, so folgt

$$\lim \left( n \operatorname{tg} \frac{\alpha}{n} \right) = \alpha \lim \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\gamma} = \alpha \cdot 1 = \alpha,$$

denn der Quotient  $\frac{\operatorname{tg} \gamma}{\gamma}$  nähert sich immer mehr der Einheit, je kleiner  $\gamma$  wird. Die beiden letzten Reihen verwandeln sich beim Grenzübergang in die unendlichen Reihen

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} + \frac{\alpha^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \quad \text{V.}$$

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\alpha^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots \quad \text{VI.}$$

Da  $tg^2 \alpha_1 = tg^2 \frac{\alpha}{n}$  entschieden kleiner als 1 wird, sobald  $n$  eine gewisse Größe überschreitet, gilt die bei der Ableitung benützte Binomialreihe für  $(1 + itg \alpha_1)^n$  für jedes  $\alpha$ . Die Reihen V. und VI. convergieren hiemit ohne jede Einschränkung. Strengere Herleitungen dieser Reihen findet man in Schlömilchs algebraischer Analysis.

Späterer Zwecke wegen möge noch der reducierte Ausdruck  $(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  als Grenzwert ausgedrückt werden. Nach dem Moivreschen Satze ist

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha) &= \left\{ \cos \frac{\alpha}{n} + i \sin \frac{\alpha}{n} \right\}^n = \cos^n \frac{\alpha}{n} \left\{ 1 + itg \frac{\alpha}{n} \right\}^n \\ &= \cos^n \frac{\alpha}{n} \left\{ \left[ 1 + itg \frac{\alpha}{n} \right]^{tg \frac{\alpha}{n}} \right\}^{n \cdot \frac{1}{tg \frac{\alpha}{n}}} \end{aligned}$$

Setzt man  $\frac{\alpha}{n} = \gamma$  und  $tg \frac{\alpha}{n} = \delta$ , wobei für  $n = \infty$ ,  $\lim \delta = 0$  und auch  $\lim \gamma = 0$  ist, beachtet man ferner, dass  $\lim \cos \frac{\alpha}{n} = \lim \cos \gamma = 1$  und  $\lim n tg \frac{\alpha}{n} = \lim \frac{n}{\alpha} \cdot \alpha tg \frac{\alpha}{n} = \alpha \lim \frac{tg \gamma}{\gamma} = \alpha \cdot 1 = \alpha$  ist, so ergibt sich aus dem obigen

$$\cos \alpha + i \sin \alpha = \left\{ \lim_{\delta=0} (1 + i\delta)^{\frac{1}{\delta}} \right\}^{\alpha} \quad \text{VII.}$$

## § 7. Exponentialgrößen.

Um zunächst den Grenzwert von  $(1 + x\delta)^{\frac{1}{\delta}}$  für  $\delta = 0$  allgemein zu entwickeln, setze man  $\delta = \frac{1}{u}$ , wobei  $u$  unbeschränkt groß gedacht sei, und hat dann  $x\delta = \frac{x}{u}$  für ein endliches  $x$ ,  $\left(\frac{x}{u}\right)^2 < 1$ . Demnach ergibt sich nach dem diesfalls allgemein giltigen binomischen Satze

$$\left(1 + \frac{x}{u}\right)^u = 1 + (u)_1 \frac{x}{u} + (u)_2 \frac{x^2}{u^2} + (u)_3 \frac{x^3}{u^3} + (u)_4 \frac{x^4}{u^4} + \dots$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \frac{u}{1} \cdot \frac{x}{u} + \frac{u(u-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{x^2}{u^2} + \frac{u(u-1)(u-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{x^3}{u^3} + \\
 &\quad + \frac{u(u-1)(u-2)(u-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{x^4}{u^4} + \dots \\
 &= 1 + x + \frac{1-\frac{1}{u}}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{(1-\frac{1}{u})(1-\frac{2}{u})}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \\
 &\quad + \frac{(1-\frac{1}{u})(1-\frac{2}{u})(1-\frac{3}{u})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot x^4 + \dots
 \end{aligned}$$

Für  $u = \infty$ , resp.  $\delta = 0$  resultiert hieraus

$$\lim_{\delta=0} (1 + x\delta)^{\frac{1}{\delta}} = \lim_{u=\infty} \left(1 + \frac{x}{u}\right)^u = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \\
 + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \quad \text{I.}$$

Diese Reihe ist für jedes endliche  $x$  convergent.

Int  $x = 1$ , so ergibt sich speciell

$$\lim_{\delta=0} (1 + \delta)^{\frac{1}{\delta}} = \lim_{u=\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \\
 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \quad \text{II.}$$

Der Wert der letzteren Reihe lässt sich übersehen, wenn man sie mit der vorn um 1 vermehrten geometrischen Progression

$$S_{\infty} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

vergleicht. Es ist

$$1 + S_{\infty} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots = 3 \quad \text{III.}$$

Die Reihe II. ist vom dritten Gliede angefangen, Glied für Glied, kleiner als die Reihe III. Mithin ist die Summe der Reihe II. kleiner als 3; aber sie ist auch größer als 2, da schon die ersten zwei Glieder diese Summe geben. Demnach liegt der Wert der Reihe II. innerhalb der Grenzen 2 und 3. In der That erhält man durch Summierung der Glieder die irrationale Zahl 2.7182818285...

welche als Basis der natürlichen Logarithmen gewählt und mit dem Symbol  $e$  bezeichnet wurde. Mithin ist

$$\lim_{\delta=0} (1 + \delta)^{\frac{1}{\delta}} = \lim_{u=\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e. \quad \text{IV.}$$

Die Zahl  $e$  ist aus dem Grunde merkwürdig, weil sie bei der stetigen gesetzmäßigen Vermehrung die Hauptrolle spielt, wie man aus nachstehender Betrachtung über Zinseszinsen entnehmen kann. Ist  $K_0$  der Anfangswert,  $K_n$  der Endwert und  $p$  das Procent, so ergibt sich bei ganzjähriger Verzinsung

$$\frac{1}{1} K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Würden die Zinsen nach jedem Halbjahre zum Capital geschlagen, so ist

$$\frac{1}{2} K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100 \cdot 2}\right)^{2n}.$$

Theilt man jedes Jahr in  $x$ -Theile und verzinst immer nach solchen Intervallen, so findet sich

$$\frac{1}{x} K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100 \cdot x}\right)^{xn} = K_0 \left\{ \left(1 + \frac{p}{100 \cdot x}\right)^{\frac{100x}{p}} \right\}^{\frac{np}{100}}.$$

Setzt man  $\frac{p}{100 \cdot x} = \delta$ , so ist weiter

$$\frac{1}{x} K_n = K_0 \left\{ (1 + \delta)^{\frac{1}{\delta}} \right\}^{\frac{np}{100}};$$

für  $x = \infty$ , resp.  $\delta = 0$  bekommt man den Grenzwert

$$\lim \frac{1}{x} K_n = K_0 \left\{ \lim (1 + \delta)^{\frac{1}{\delta}} \right\}^{\frac{np}{100}} = K_0 e^{\frac{np}{100}}. \quad \text{V.}$$

Dies ist die Grundformel für die stetige Verzinsung, welche in den modernen Rechnungen über Lebensversicherung Anwendung findet. 1 fl. vermehrt sich bei 100% in 1 Jahre bei ganzjähriger Verzinsung auf 2 fl. Verzinst man aber stetig, so erhält man 2 fl. 72 kr.

Transformiert man I. folgendermaßen

$$\lim_{\delta=0} (1 + x\delta)^{\frac{1}{\delta}} = \lim_{\delta=0} \left\{ (1 + x\delta)^{\frac{1}{x\delta}} \right\}^x = \left\{ \lim_{\delta=0} (1 + x\delta)^{\frac{1}{x\delta}} \right\}^x ;$$

so ergibt sich, weil bei endlichem  $x$  für  $\delta = 0$  auch  $x\delta = 0$  wird

$$\lim_{\delta=0} (1 + x\delta)^{\frac{1}{\delta}} = e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \quad \text{VI.}$$

Um den Verlauf der Exponentialfunction  $e^x$  zu übersehen, setze man  $y = e^x$  und construiere die entsprechende Curve für die Abscisse  $x$  und die dazu rechtwinklige Ordinate  $y$ ; die Curve hat die negative  $X$ -Achse zur Asymptote und liegt oberhalb derselben. Sie schneidet  $OY$  im Abstände  $+1$  vom Ursprunge  $O$  und verläuft im ersten Quadranten ins Unendliche.

Lässt man in VI. nach dem Principe von der Permanenz der Gesetze an Stelle von  $x$  die imaginäre Einheit  $i$  treten, so folgt

$$\lim (1 + i\delta)^{\frac{1}{\delta}} = e^i. \quad \text{VII.}$$

Hiedurch geht § 6, VII. über in

$$\cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}; \quad \text{VIII.}$$

für ein negatives  $\alpha$  folgt weiter

$$\cos \alpha - i \sin \alpha = e^{-i\alpha}. \quad \text{IX.}$$

Entwickelt man  $e^{i\alpha}$  und  $e^{-i\alpha}$  nach VI. in Reihen und löst man IX. und VIII. nach  $\cos \alpha$  und  $\sin \alpha$  auf, so resultieren

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} = 1 - \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} + \frac{\alpha^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \quad \text{X.}$$

$$\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} = \frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\alpha^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots \quad \text{XI.}$$

Dies sind die in § 6 unter V. und VI. entwickelten Reihen.

In der Periodicität der Functionen X. und XI. liegt nebenbei gesagt der Grund, warum man Exponentialgrößen mit complexen Exponenten zur Integration der Kraftgleichungen für den Lichtäther verwendet, um die entsprechenden Bewegungsgleichungen zu erhalten. (Man vergleiche meine Abhandlung „Übersichtliche Darstellung der

mathematischen Theorien über die Dispersion des Lichtes.“  
1890—91.)

Verallgemeinert man die Formeln VIII. und IX., so folgt

$$\cos(\alpha + 2k\pi) + i \sin(\alpha + 2k\pi) = e^{i(\alpha + 2k\pi)} \quad \text{XII.}$$

$$\cos(\alpha + 2k\pi) - i \sin(\alpha + 2k\pi) = e^{-i(\alpha + 2k\pi)} \quad \text{XIII.}$$

Hieraus erhält man für  $\alpha = 0$

$$1 = e^{i 2k\pi} = e^{-i 2k\pi} = e^0 \quad \text{XIV.}$$

und für  $\alpha = \pi$   $-1 = e^{i(2k+1)\pi} = e^{-i(2k+1)\pi} \quad \text{XV.}$

Ferner für  $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$i = e^{i(4k+1)\frac{\pi}{2}} \quad \text{XVI.}$$

$$-i = e^{-i(4k+1)\frac{\pi}{2}} \quad \text{XVII.}$$

Mit Bezug auf XIV. ist  $e^x = e^{x \pm i 2k\pi} \quad \text{XVIII.}$

Die Exponentialfunction kann in unzählig vielen Formen an-  
geschrieben werden; sie hat die Periode  $2\pi$ . Für  $k = 0$  erhält  
man den Hauptwert  $e^x$ . Interessant ist

$$i^i = e^{i(4k+1)\frac{\pi}{2}i} = e^{-(4k+1)\frac{\pi}{2}} \quad \text{XIX.}$$

Da  $i^{-1}$  gleich  $-i$  ist, hat man ferner

$$(-i)^i = i^{-i} = e^{-i(4k+1)\frac{\pi}{2}i} = e^{(4k+1)\frac{\pi}{2}} \quad \text{XX.}$$

Hauptwert  $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$ .

Hauptwert  $(+i)^{-i} = (-i)^i = e^{\frac{\pi}{2}}$ .

### § 8. Natürliche (Napiersche) Logarithmen.

Wie schon in § 7 erwähnt wurde, dient  $e = 2.7182818285\dots$   
als Basis der von Napier eingeführten Logarithmen, welche durch  
das Functionszeichen „log. naturalis“ = log. nat. =  $l$  von den  
Briggschen oder dekadischen Logarithmen unterschieden werden.

Demgemäß ist

$$a = e^{la}. \quad \text{I.}$$

Setzt man  $y = lx$ , so entspricht dieser in Cartesischen Coordinaten verstandenen Gleichung eine Curve, welche die negative  $Y$  Achse zur Asymptote hat, rechts von ihr liegt,  $OX$  im Abstände  $+1$  durchschneidet, und im 1. Quadranten ins Unendliche verläuft.

Um zu einem anderen Ausdrücke für  $la$  zu gelangen, schreibt man I. gemäß § 7, VII. in der Gestalt

$$a = \lim \left\{ (1 + \delta \cdot la)^{\frac{1}{\delta}} \right\}, \quad \delta = 0.$$

Ist  $\delta$  unendlich klein, so gilt die Gleichung

$$a = (1 + \delta \cdot la)^{\frac{1}{\delta}}.$$

Hieraus entwickelt man

$$la = \frac{a^\delta - 1}{\delta}.$$

Demnach ergibt sich

$$la = \lim_{\delta=0} \frac{a^\delta - 1}{\delta}.$$

Eine strengere Ableitung ist die folgende: Sind  $\delta$  und  $\gamma$  gegen Null convergirende Zahlen, so kann man, da  $a^0 = 1$  ist, setzen

$$a^\delta = 1 + \gamma \quad \text{II.}$$

$$a^\delta - 1 = \gamma$$

$$\frac{a^\delta - 1}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{1}{\frac{\delta}{\gamma}};$$

$$\lim_{\delta=0} \frac{a^\delta - 1}{\delta} = \frac{1}{\lim_{\gamma=0} \frac{\delta}{\gamma}}. \quad \text{III.}$$

Um diesen Grenzwert zu entwickeln, entwickelt man aus II.

$$\frac{\delta}{a^\gamma} = (1 + \gamma)^\gamma$$

$$a^{\lim_{\delta=0} \frac{\delta}{\gamma}} = \lim_{\gamma=0} (1 + \gamma)^{\frac{1}{\gamma}} = e$$

Nimmt man hievon die natürlichen Logarithmen, so ergibt sich in Anbetracht  $le = 1$

$$\lim_{\gamma} \frac{\delta}{\gamma} \cdot la = 1$$

$$la = \frac{1}{\lim_{\gamma} \frac{\delta}{\gamma}}. \quad \text{IV.}$$

Hiermit geht III. über in

$$la = \lim_{\delta=0} \frac{a^{\delta} - 1}{\delta}. \quad \text{V.}$$

Setzt man  $a = 1 + x$ , wobei  $x^2 < 1$  ist, so kann man  $a^{\delta} = (1 + x)^{\delta}$  nach dem binomischen Satze entwickeln und erhält nach erfolgtem Reducieren

$$l(1 + x) = \lim_{\delta=0} \frac{1}{\delta} \{ (\delta)_1 x + (\delta)_2 x^2 + (\delta)_3 x^3 + (\delta)_4 x^4 + \dots \}.$$

Durch Auflösung der Binomialcoefficienten und nach geschehenem Abkürzen durch  $\delta$  erübrigt

$$l(1 + x) = \lim_{\delta=0} \left\{ x + (\delta-1) \frac{x^2}{1 \cdot 2} + (\delta-1)(\delta-2) \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \right. \\ \left. + (\delta-1)(\delta-2)(\delta-3) \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \right\}.$$

Mithin liefert der Übergang zur Grenze für  $\delta = 0$

$$l(1 + x) = \frac{x}{x^2 < 1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad \text{VI.}$$

Analog ergibt sich für ein negatives  $x$

$$l(1 - x) = - \left\{ \frac{x}{x^2 < 1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots \right\}. \quad \text{VII.}$$

Gemäß VII. ist

$$l \frac{1}{1-x} = -l(1-x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

Setzt man  $\frac{1}{1-x} = y$ , also  $x = \frac{y-1}{y}$ , so folgt hieraus

$$ly \underset{y > 1}{=} \frac{1}{1} \left( \frac{y-1}{y} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{y-1}{y} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{y-1}{y} \right)^3 + \frac{1}{4} \left( \frac{y-1}{y} \right)^4 + \dots \quad \text{VIII.}$$

Nro. VII. gibt theoretisch die Logarithmen aller positiven Zahlen unter 1, und Nro. VIII. die Logarithmen aller Zahlen größer als 1. Doch sind diese Reihen meist zu wenig convergent, so dass die Berechnung darnach zu langwierig ist.

Nimmt man die Differenz der Formeln VI. und VII., so resultiert

$$l \frac{1+x}{1-x} = 2 \left\{ \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right\}. \quad \text{IX.}$$

Setzt man  $\frac{1+x}{1-x} = 1+z$  und daher  $x = \frac{z}{2+z}$ , so liefert IX.

$$l(1+z) = 2 \left\{ \frac{1}{1} \left( \frac{z}{z+2} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{z}{z+2} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{z}{z+2} \right)^5 + \dots \right\}. \quad \text{X.}$$

Ist  $z > -1$ , so ist  $x$  immer ein positiver oder negativer echter Bruch. Für  $z = \frac{1}{2}$ ,  $z = \frac{1}{3}$ ,  $z = \frac{1}{4}$ , liefert X.  $l \frac{3}{2}$ ,  $l \frac{4}{3}$ ,  $l \frac{5}{4}$  in rasch convergierenden Reihen. (Vergleiche „Holzmüllers Elementar-Mathematik III. Theil.“)

$$l \frac{3}{2} = 2 \left\{ \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} + \dots \right\} = 0.405465 \dots$$

$$l \frac{4}{3} = 2 \left\{ \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7^5} + \dots \right\} = 0.287682 \dots$$

$$l \frac{5}{4} = 2 \left\{ \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9^5} + \dots \right\} = 0.223143 \dots$$

Bei der Berechnung eines Logarithmus auf die 6. Decimalstelle muss man so viele Glieder der Reihe entwickeln, dass die Summe der vernachlässigten Glieder kleiner ist als  $\frac{1}{4}$  Einheit der 6. Decimalstelle. Hiezu ist jedesmal eine kleine Untersuchung nöthig. Will man aus so gewonnenen Logarithmen durch Zusammensetzung die Logarithmen anderer Zahlen erhalten, so sind alle Rücksichten für das Rechnen mit unvollständigen (abgerundeten) Zahlen zu beobachten. Die zu combinierenden Logarithmen müssen auf eine oder mehrere Decimalstellen weiter entwickelt sein, als das verlangte Resultat.

Insbesondere ist  $l1 = 0$ .

Da  $2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}$ , so hat man  $l2 = l\frac{3}{2} + l\frac{4}{3} = 0.693147\dots$

aus  $3 = 2 \cdot \frac{3}{2}$ , folgt  $l3 = l2 + l\frac{3}{2} = 1.098612\dots$

Sodann ist  $l4 = 2l2 = 1.386294\dots$

Da  $5 = 4 \cdot \frac{5}{4} = 2^2 \cdot \frac{5}{4}$  ist, so ergibt sich  $l5 = 2l2 + l\frac{5}{4} = 1.609438\dots$

Ferner ist  $6 = 2 \cdot 3$  und daher  $l6 = l2 + l3 = 1.791759\dots$

Weiter erhält man  $l8 = l(2^3) = 3l2 = 2.079441\dots$

$$l9 = l3^2 = 2l3 = 2.197224\dots$$

Weil  $10 = 8 \cdot \frac{5}{4} = 2^3 \cdot \frac{5}{4}$  ist, folgt  $l10 = 3l2 + l\frac{5}{4}$   
 $= 2.302585\dots$

Setzt man in IX.  $\frac{1+x}{1-x} = \frac{u+1}{u}$ , so ist  $x = \frac{1}{2u+1}$  und man erhält

$$l\frac{u+1}{u} = 2 \left\{ \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2u+1} + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2u+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{1}{2u+1} \right)^5 + \dots \right\}$$

$$\text{oder } l(u+1) \underset{u>0}{=} lu + 2 \left\{ \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2u+1} + \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{2u+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{1}{2u+1} \right)^5 + \dots \right\}. \text{ XI.}$$

Diese Formel gibt den Logarithmus einer Zahl, wenn jener der vorhergehenden bekannt ist. Es sei  $u = 6$  also

$$l(7) = l6 + 2 \left\{ \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{13} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{13^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{13^5} + \dots \right\} = 1.945910\dots$$

Setzt man in XI.  $u = \frac{a}{z}$ , so ergibt sich

$$l(a+z) = la + 2 \left\{ \frac{z}{2a+z} + \frac{1}{3} \left( \frac{z}{2a+z} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{z}{2a+z} \right)^5 + \dots \right\}. \text{ XII.}$$

Es ist klar, dass man nach XII. nur die Logarithmen der Primzahlen zu suchen braucht, weil sich die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen aus diesen ergeben.

Noch vortheilhaftere Berechnungen lehrt die algebraische Analysis. Insbesondere wichtig ist das Interpolationsverfahren mittels Differenzenreihen, um aus den Logarithmen mehrerer Zahlen jene

der dazwischenliegenden Zahlen zu finden. Gute Methoden enthält auch Barday's Aufgabensammlung im Anhang.

Um aus den natürlichen Logarithmen die dekadischen abzuleiten, benützt man die Identität

$$10^{\lg a} = e^{la} = a.$$

Logarithmiert man dies für die Basis  $e$ , so fließt hieraus

$$\lg a \cdot l10 = la$$

$$\lg a = \frac{la}{l10} = \frac{la}{2.302585 \dots} = 0.434294 \cdot la \quad \text{XIII.}$$

$\frac{1}{l10} = M_{10} = 0.434294$  heißt der Modul des dekadischen Systems. Die Logarithmen von Decimalzahlen ergeben sich durch Zusammensetzung, z. B.

$$\lg 0.3 = \lg \frac{3}{10} = \lg 3 - \lg 10 = \lg 3 - 1$$

$$\text{oder } \lg 2.007 = \lg \frac{2007}{1000} = \lg 2007 - \lg 1000 = \lg 2007 - 3.$$

### § 9. Die natürlichen Logarithmen complexer Zahlen.

Für die nachstehenden Untersuchungen setzen wir voraus, dass die Amplitude  $\alpha$ , in der normalförmigen complexen Zahl

$$a \pm ib = r(\cos \alpha \pm i \sin \alpha) \quad \text{I.}$$

von  $-\pi$  bis  $+\pi$  gezählt werde, während der Modul  $r$  stets positiv bleibe. Dadurch sind  $b$  und  $\alpha$  an das gleiche Vorzeichen  $+$  gebunden, und es bestehen die Übergangsbeziehungen:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \alpha = \text{arc cos } \frac{a}{r} = \text{arc cos } \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad \text{II.}$$

Unter  $\text{arc cos } \frac{a}{r}$  ist stets ein positiver Bogen zwischen  $0$  und  $\pi$  zu verstehen. Führt man in I. für  $\cos \alpha$  und  $\sin \alpha$  das Wertepaar in § 7, XII. und XIII. ein, so resultieren

$$a \pm ib = re^{\pm i(\alpha + 2k\pi)}. \quad \text{III.}$$

Ersetzt man  $r$  durch  $e^{lr}$ , so folgt weiter

$$a \pm ib = e^{lr \pm i(\alpha + 2k\pi)}. \quad \text{IV.}$$

Der Exponent von  $e$ ,  $\{lr \pm i(\alpha + 2k\pi)\}$ , stellt nun offenbar den natürlichen Logarithmus der Zahl  $(a \pm ib)$  vor, welcher selbst complex ist. „Complexes“ Logarithmen werden als „allgemeine“ bezeichnet und von den reellen durch das Symbol „ $L$ “ unterschieden. Mithin ist

$$L(a \pm ib) = lr \pm i(\alpha + 2k\pi). \quad \text{V.}$$

Führt man für  $r$  und  $\alpha$  den Wert aus II. ein, so verwandelt sich V. in

$$L(a \pm ib) = \frac{1}{2} l(a^2 + b^2) \pm i \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \pm i 2k\pi. \quad \text{VI.}$$

Da  $k$  positiv oder negativ sein kann, so schreibt man bei  $i 2k\pi$  bloß das Zeichen  $+$ . Ist  $a > 0$ , so liegt  $\arccos$  zwischen  $0$  und  $\frac{\pi}{2}$ . Wenn dagegen  $a < 0$  ist, dann ist  $\arccos$  zwischen  $\frac{\pi}{2}$  und  $\pi$  gelegen. Die Formel VI. ist den beiden, in der algebraischen Analysis gebräuchlichen Formeln vorzuziehen, welche mit  $\arctg \frac{b}{a}$  respective  $(\pi + \arctg \frac{b}{a})$  operieren, und von denen die eine für  $a > 0$ , die andere für  $a < 0$  gilt. (Sie liegt meiner Abhandlung „Die Logarithmen complexer Zahlen in geometrischer Darstellung“ 1892, zugrunde.)

Formel VI. bringt die schon anno 1749 von Euler erkannte unendliche Vieldeutigkeit der allgemeinen Logarithmen zum Ausdrucke. Sie haben die Periode  $2\pi$ . Setzt man  $k = 0$ , so ergibt VI. für den Hauptwert  $L_0$  folgende Formel

$$L_0(a \pm ib) = \frac{1}{2} l(a^2 + b^2) \pm i \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad \text{VII.}$$

Bedeutet  $z$  den absoluten Wert von  $a$ , so erhält man für  $b = 0$  speciell

$$L_0(+z) = lz \quad \text{VIII.}$$

$$L_0(-z) = lz \mp i\pi. \quad \text{IX.}$$

Ferner ergeben sich, da  $b$  stets als positiv gilt, für  $a = 0$

$$L_0(+ib) = lb + i\frac{\pi}{2} \quad \text{X.}$$

$$L_0(-ib) = lb - i\frac{\pi}{2}. \quad \text{XI.}$$



lung zwei Drehungsgrößen  $\lambda$  und  $\alpha$  aus, deren Ebenen auf einander senkrecht stehen. Durch die beiden Drehungen gelangt man zum Erzeuger  $M$ , welcher die complexe Zahl  $(a + ib)$  in der Geraden  $ON$  bestimmt.

Die erste Drehung  $\lambda$  ist gemäß XV. durch den natürlichen Logarithmus von  $r$  gegeben. Die zweite Drehungsgröße  $\alpha$  ist die Gauss'sche Amplitude, die um reelle Umdrehungen  $2k\pi$  vermehrt oder vermindert werden darf. Nro. V. schreibt sich dementsprechend.

$$L(a + ib) = \lambda + i\alpha + i2k\pi. \quad \text{XVI.}$$

Die Gleichung der vom Erzeuger  $M$  für alle Werte von  $\lambda$  und  $\alpha$  beschriebenen Fläche, welche die Form einer Doppelschnecke um die Achse  $OZ$  hat, ergibt sich mit Hilfe des Achsendreibeins  $O.XYZ$  leicht, wie folgt: Ist  $M'P \perp OX$ , so sind die Coordinaten von  $M$  bestimmt durch

$$OP = x, \quad PM' = y \quad \text{und} \quad M'M = z = b.$$

Ferner ist  $\overline{OP^2} + \overline{PM'^2} = \overline{OM'^2} = a^2$  oder

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$\overline{OM^2} = \overline{OM'^2} + \overline{M'M^2} \quad \text{oder} \quad r^2 = a^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Aus XV. ist

$$lr^2 = 2\lambda.$$

Nun ist  $\lambda = \pm \arccos \frac{x}{a}$  wobei  $+$  für positive  $y$  und  $-$  für negative  $y$  gilt. Also

$$l(x^2 + y^2 + z^2) = \pm 2 \arccos \frac{x}{a} \quad \text{XVII.}$$

$r$ ,  $\lambda$  und  $\alpha$  sind die bei der Cubatur der Flächen gebräuchlichen Polarcoordinaten.

## § 10. Berechnung der Hyperbelfläche.

Fig. 11 stellt eine gleichachsige Hyperbel von der Mittelpunktsleichung

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad \text{I.}$$

vor, welche die auf einander senkrechten Asymptoten  $ON$  und  $ON'$  besitzt. Bezieht man den Curvenpunkt  $M$  mit den Coordinaten  $OP = x$  und  $PM = y$  auf das Asymptotenkreuz  $NON'$ , so sind



$$\xi_n = \xi_0 q^n. \quad \text{III.}$$

Die Streifen werden flächengleich und man hat

$$f_1 = f_2 = f_3 = \dots = f_n = \frac{a^2}{4} \left\{ q - \frac{1}{q} \right\} = \frac{a^2}{4q} \left\{ q^2 - 1 \right\}. \quad \text{IV.}$$

Als Fläche des Sehnenpolygons  $M_0 M Q Q_0$  folgt

$$F = n f_1 = \frac{n a^2}{4q} \{ q^2 - 1 \}. \quad \text{V.}$$

Setzt man in V. den Wert  $q = \left( \frac{\xi_n}{\xi_0} \right)^{\frac{1}{n}}$  aus III., so ist

$$F = \frac{a^2}{2 \left( \frac{\xi_n}{\xi_0} \right)^{\frac{1}{n}}} \left\{ \frac{\left( \frac{\xi_n}{\xi_0} \right)^{\frac{2}{n}} - 1}{\frac{2}{n}} \right\}.$$

Schreibt man  $\delta$  anstatt  $\frac{2}{n}$ , so ist für  $n = \infty$ ,  $\delta = 0$  und es folgt

$$F = \frac{a^2}{2 \left( \frac{\xi_n}{\xi_0} \right)^{\frac{\delta}{2}}} \left\{ \frac{\left( \frac{\xi_n}{\xi_0} \right)^{\delta} - 1}{\delta} \right\}.$$

Durch Übergang zur Grenze folgt nach §. 8, V.

$$H = \lim F = \frac{a^2}{2} l \left( \frac{\xi_n}{\xi_0} \right); \quad \text{VI.}$$

für  $\xi_0 = 1$  oder  $a^2 = 2 \xi_0^2 = 2$  ist

$$H_0 = l(\xi_n) = l(\xi). \quad \text{VII.}$$

Die natürlichen Logarithmen stehen mit der Hyperbelfläche hiernach in innigem Zusammenhange und werden deshalb auch hyperbolische Logarithmen genannt.

Verlängert man  $QM$  bis  $V$  in  $OX$ , so hat man  $PV = PM = y$ . Da ferner  $QV \parallel Q_0 M_0$  ist, so gilt die Proportion

$$OQ : OQ_0 = OV : OM_0 \quad \text{oder}$$

$$\xi_n : \xi_0 = (x + y) : a. \quad \text{VIII.}$$

Hiemit verwandelt sich VI. in

$$H = \frac{a^2}{2} l \left( \frac{x+y}{a} \right). \quad \text{IX.}$$

Um den Sector  $OM_0M$  zu erhalten, beachte man

$$\begin{aligned} OM_0M &= OM_0Q_0 + M_0MQQ_0 - OMQ \\ &= \frac{\xi_0 \eta_0}{2} + H - \frac{\xi \eta}{2}. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf II. ist  $\xi_0 \eta_0 = \xi \eta = a^2$ , und daher

$$OM_0M = H = \frac{a^2}{2} l \left( \frac{x+y}{a} \right). \quad \text{X.}$$

Geht man von der gleichseitigen Hyperbel durch proportionale Streckung (eventuell Verkürzung) sämtlicher Ordinaten zur allgemeinen Hyperbel mit den Halbachsen  $a$  und  $b$  über, so steht die Fläche  $H_1$  der neuen Hyperbel zu  $H$  im Ordinatenverhältnis

$$H_1 : H = y_1 : y = b : a.$$

Hieraus folgt  $H_1 = \frac{b}{a} H$  und  $y = \frac{ay_1}{b}$  und daher

$$\text{aus X.} \quad H_1 = \frac{ab}{2} l \left\{ \frac{x}{a} + \frac{y_1}{b} \right\}. \quad \text{XI.}$$

Dieser Vorgang ist jenem analog, nach welchem die Ellipsenfläche aus der Fläche des über der Hauptachse als Durchmesser beschriebenen Kreises durch Affinität entwickelt wird.

Will man statt der natürlichen Logarithmen dekadische benutzen, so beachtet man §. 8, XIII., wornach

$$\begin{aligned} \lg z &= \frac{lz}{l10} \quad \text{also} \quad lz = l10 \cdot \lg z \\ &= 2.30259 \lg z \end{aligned}$$

$$H_1 = \frac{ab}{2} l10 \cdot \lg \left( \frac{x}{a} + \frac{y_1}{b} \right)$$

$$H_1 = 1.15129 \cdot ab \lg \left( \frac{x}{a} + \frac{y_1}{b} \right). \quad \text{XII.}$$

Das Halbsegment  $M_0PM$  der allgemeinen Hyperbel ergibt sich leicht aus

$$M_0PM = OPM - OM_0M$$

$$M_0PM = \frac{1}{2}xy_1 - \frac{ab}{2} l\left(\frac{x}{a} + \frac{y_1}{b}\right). \quad \text{XIII.}$$

### § 11. Mercator's Erdkarten-Projection.

Nun möge der Berechnung der Sectorsfläche  $M_0OM$  in Fig. 11 noch eine andere Idee zu Grunde gelegt werden.

Sind in Fig. 12  $r_0, r_1, r_2, r_3, r_4 \dots r_{n-1}, r_n = r$  die Hyperbelradien, welchen die Centriwinkel  $0, \delta, 2\delta, 3\delta, \dots n\delta = \beta$  entsprechen, dann sind  $r_0\delta, r_1\delta, r_2\delta, r_3\delta \dots r_{n-1}\delta$ , die Längen der mit diesen Radien beschriebenen, den aufeinanderfolgenden  $\delta$  zugehörigen Kreisbogen. Die zu diesen Bogen gehörigen Sektoren haben die Flächen  $\frac{1}{2}r_0^2\delta, \frac{1}{2}r_1^2\delta, \frac{1}{2}r_2^2\delta \dots \frac{1}{2}r_{n-1}^2\delta$ . Ihre Summe ist, da zu jedem Kreissector ein Zwickel hinzugegeben werden müsste, um den betreffenden Hyperbelsector zu erhalten, offenbar kleiner als  $H = M_0OM$ . Ordnet man jedem  $\delta$  den

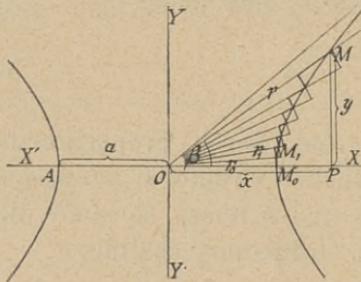


Fig. 12.

oberen Schenkel als Radius zu, so erhält man Kreissectoren, die größer sind als der entsprechende Hyperbelsector. Sie lauten

$$\frac{1}{2}r_1^2\delta, \quad \frac{1}{2}r_2^2\delta, \quad \frac{1}{2}r_3^2\delta \dots \quad \frac{1}{2}r_n^2\delta.$$

Mithin ist

$$H > \frac{1}{2} \{r_0^2\delta + r_1^2\delta + r_2^2\delta + \dots + r_{n-1}^2\delta\}$$

$$H < \frac{1}{2} \{r_1^2\delta + r_2^2\delta + r_3^2\delta + \dots + r_n^2\delta\}.$$

Der Unterschied der beiden Reihen ist

$$(r_n^2 - r_0^2) \delta.$$

Da  $\delta = \frac{\beta}{n}$  bei unendlich großem  $n$  der Grenze 0 zustrebt, so ist der Unterschied der Grenzwerte der beiden Reihen ebenfalls Null, und man hat

$$H = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2} \{r_0^2\delta + r_1^2\delta + r_2^2\delta + \dots + r_{n-1}^2\delta\}. \quad \text{I.}$$

Nun ist aus der Fig. 12

$$x = r \cos \beta, \quad y = r \sin \beta. \quad \text{II.}$$

Setzt man diese Werte in die Hyperbelgleichung §. 10, I. ein, so resultiert

$$r^2 = \frac{a^2}{\cos 2\beta}. \quad \text{III.}$$

Mithin geht I. über in

$$H = \frac{a^2}{2} \lim \left\{ \frac{\delta}{\cos 2 \cdot 0} + \frac{\delta}{\cos 2\delta} + \frac{\delta}{\cos 4\delta} + \dots + \frac{\delta}{\cos 2(n-1)\delta} \right\}. \quad \text{IV.}$$

Nun ist nach § 10, IX.

$$H = \frac{a^2}{2} l \left( \frac{x+y}{a} \right) \quad \text{und daher}$$

$$\begin{aligned} \lim \left\{ \frac{\delta}{\cos 2 \cdot 0} + \frac{\delta}{\cos 2\delta} + \frac{\delta}{\cos 4\delta} + \dots + \frac{\delta}{\cos 2(n-1)\delta} \right\} &= \\ &= l \left( \frac{x+y}{a} \right). \quad \text{V.} \end{aligned}$$

Da nach § 10, I.  $a = \sqrt{x^2 - y^2}$  ist, so ist

$$\frac{x+y}{a} = \frac{x+y}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}}.$$

Und da aus der Figur  $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \beta$  ist, so hat man

$$\frac{x+y}{a} = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \beta}} = \sqrt{\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \beta \right)}, \quad \text{VI.}$$

$$l \frac{x+y}{a} = \frac{1}{2} l \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \beta \right).$$

Setzt man das in V. ein, so folgt

$$\lim \left\{ \frac{\delta}{\cos 2 \cdot 0} + \frac{\delta}{\cos 2\delta} + \dots + \frac{\delta}{\cos 2(n-1)\delta} \right\} = \frac{1}{2} l \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \beta \right)$$

Setzt man  $\delta = \frac{\tau}{2}$ , so ist

$$\lim \left\{ \frac{\tau}{\cos 0} + \frac{\tau}{\cos \tau} + \frac{\tau}{\cos 2\tau} + \frac{\tau}{\cos 3\tau} + \dots + \frac{\tau}{\cos (n-1)\tau} \right\} =$$

$$= \text{ltg} \left( \frac{\pi}{4} + \beta \right). \quad \text{VII.}$$

$$n\tau = 2\beta.$$

Mit Hilfe der Formel VII. kann man die Mercatorsche Cylinderprojection, die den Seekarten zu Grunde liegt, berechnen. In dieser erscheinen alle Meridiane parallel. Die Abstände der darauf senkrechten Parallelkreise wachsen gegen die Pole hin. Größte Kugellinien (Orthodromen) erscheinen als Wellenlinien oberhalb und unterhalb des Äquators. Gerade Wege auf der Karte entsprechen Spiralenwegen auf der Erdoberfläche, welche alle Meridiane unter gleichen Winkeln schneiden (Loxodromen). Die Projection ist dem Original in den kleinsten Theilchen ähnlich und heißt deshalb conform. Wird in Fig. 13 der Äquatorhalbmesser  $OA$  gleich Eins gesetzt, so ist der Radius  $CM$  der Parallelkreise von der geographischen Breite  $\varphi$  ausgedrückt durch

$$\rho = \cos \varphi.$$

Die unendlich schmale Kugelzone  $MM_1R_1R$  habe die Seitenhöhe  $MM_1 = \tau = \frac{\varphi}{n}$ . Ersetzt man sie durch die Cylinderzone  $MUTR$ , dann ist die Cylinderseite  $MU = \frac{\tau}{\cos \varphi}$ , denn  $\triangle MM_1U$  ist nahezu

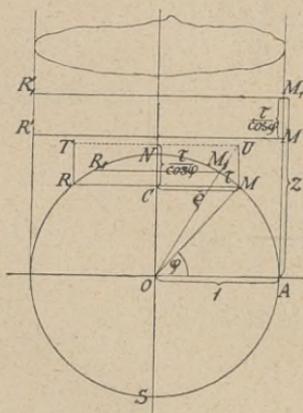


Fig. 13.

rechtwinkelig und  $\sphericalangle M_1MU = \varphi$ . Dadurch erscheint der Meridianbogen  $MM_1$  vergrößert in  $MU$ , während der Parallelkreis unverändert blieb. Um dies auszugleichen, erweitert man den Cylinder unter Beibehaltung der Höhe auf den Radius 1;  $M'M_1R_1'R'$ . Macht man dies mit allen  $n$  Kugelzonen und reiht die Cylindermäntel aufeinander, so erscheint die Erdoberfläche durch eine Cylinderfläche ersetzt, die dann meridional aufgeschlitzt und ausgebreitet wird. Für die Summe der Höhen der aufeinandergereihten Cylinder bis zur Breite  $\varphi$ , wo  $M'M_1'R_1'R'$  abschließen würde, erhält man

$$AM_1' = z = \lim \left\{ \frac{\tau}{\cos 0} + \frac{\tau}{\cos \tau} + \frac{\tau}{\cos 2\tau} + \dots + \frac{\tau}{\cos (n-1)\tau} \right\}$$

$$= l \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right),$$

VIII.

denn  $n\tau = \varphi$ , während in VII.  $n\tau = 2\beta$  war.

### § 12. Die Functionen imaginärer Winkelflächen.

In Fig. 14 wurde vom Ursprung  $O$  mit  $OA = 1$  der Kreis beschrieben und hiezu die Secante  $KL$  normal zum Durchmesser  $AB$  gezogen, welche die Sehne  $MN$  liefert.  $\sphericalangle MON = 2\gamma$  ist der zugehörige Centriwinkel und  $PM = \frac{1}{2} MN = y$

oder

$$y = \sin \gamma = \frac{1}{2} \text{ chorda } 2\gamma;$$

I.

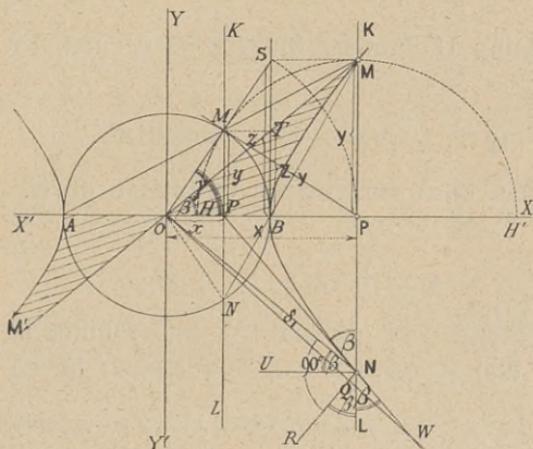


Fig. 14.

$OP = x = \cos \gamma$  ist der Abstand der Secante vom Centrum  $O$ .  
Gemäß

$$\overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{OM}^2 \text{ ist}$$

$$x^2 + y^2 = 1.$$

II.

Dies ist die Gleichung des Kreises  $O$ . Ihr entspricht die Relation

$$\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma = 1.$$

III.

Ist  $0 < \gamma < \pi$ , so ist

$$\gamma = \arccos x.$$

Wenn  $-\frac{\pi}{2} < \gamma < +\frac{\pi}{2}$ , so hat man

$$\gamma = \text{arc sin } y.$$

Da ferner  $BS = z$  die Tangente von  $\gamma$  misst, hat man auch  $\gamma = \text{arctg } y/x = \text{arctg } z$  für  $-\frac{\pi}{2} < \gamma < +\frac{\pi}{2}$ .

Vergrößert man den Abstand  $OP$  der Secante  $KL$  vom Centrum  $O$ , so wird  $MN$  immer kleiner und schrumpft für  $OP = OB = 1$  bei  $B$  in einen Punkt zusammen. Rückt man die Secante noch weiter, z. B. in die Lage  $\mathbf{KL}$ , so werden die Schnittpunkte imaginär. Bezeichnet man sie mit  $M_i$  und  $N_i$ , so ist  $\sphericalangle M_iON_i = 2i\varphi$ , der imaginäre Centriwinkel. Analog mit dem vorigen ist

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x} &= OP = \cos i\varphi \\ i\mathbf{y} &= PM_i = \sin i\varphi = \frac{1}{2} \text{ chorda } 2i\varphi \end{aligned} \right\} \text{IV.}$$

Die Kreisgleichung II. liefert für  $PM_i = i\mathbf{y}$  und  $PN_i = -i\mathbf{y}$  die Werte

$$i\mathbf{y} = \pm i\sqrt{\mathbf{x}^2 - 1}, \quad \text{wobei } \mathbf{x}^2 > 1.$$

Ersetzt man diese imaginären Ordinaten durch absolut gleiche aber reelle

$$\mathbf{y} = \pm \sqrt{\mathbf{x}^2 - 1}, \quad \mathbf{x}^2 > 1,$$

so treten an Stelle von  $M_i$  und  $N_i$  die Punkte  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{N}$ . Ihre Coordinaten  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$ , resp.  $\mathbf{x}$  und  $-\mathbf{y}$  stehen in der Beziehung

$$\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2 = 1. \quad \text{V.}$$

Mithin liegen die reellen Vertreter  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{N}$  der imaginären Kreispunkte in einer gleichseitigen Hyperbel, welche den Kreis  $O$  in  $A$  und  $B$  berührt. Sie ist der Vertreter eines imaginären Kreis-zweiges und wird deshalb von amerikanischen Autoren „Exkreis“ (excircle) genannt. Um einen Aufschluss über den Winkel  $XOM_i$  zu erhalten, gehe man auf die Definitionen in § 7, X. und XI. zurück. Da man vollständig in Unkenntnis über die Natur des Winkels ist, so setzt man ihn in der complexen Form  $(\alpha + i\varphi)$  voraus. Substituiert man den letzten Wert von  $\alpha$  in den übrigen Formeln, so folgt

$$\cos(\alpha + i\varphi) = \frac{e^{i(\alpha + i\varphi)} + e^{-i(\alpha + i\varphi)}}{2} = \mathbf{x} \quad \text{VI.}$$

$$\sin(\alpha + i\varphi) = \frac{e^{i(\alpha + i\varphi)} - e^{-i(\alpha + i\varphi)}}{2i} = i\mathbf{y}. \quad \text{VII.}$$

Gemäß VI. ist

$$e^{\varphi - i\alpha} + e^{-(\varphi - i\alpha)} = 2x.$$

Fasst man  $e^{\varphi - i\alpha}$  als Unbekannte auf, so ergibt sich durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$$e^{\varphi - i\alpha} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

Hieraus folgt durch Logarithmieren mit Bezug auf V. der Hauptwert

$$\varphi - i\alpha = L_0(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) = L_0(x \pm y).$$

Dies gibt die beiden Wurzeln

$$\begin{aligned} \varphi - i\alpha &= L_0(x + y) = l(x + y) \\ \varphi' - i\alpha' &= L_0(x - y) = L_0 \frac{x^2 - y^2}{x + y} = L_0 \frac{1}{x + y} \\ &= -L_0(x + y) = -l(x + y). \end{aligned}$$

Aus beiden Resultaten folgt, dass  $\alpha$  den Wert Null haben muss. Mithin ist

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= l(x + y) = l(x + \sqrt{x^2 - 1}) \\ \varphi' &= -l(x + y) = -\varphi \end{aligned} \right\} \text{VIII.}$$

Der Winkel  $\varphi'$  würde dem Winkel  $XON_i$  entsprechen. Man findet das bekannte Gesetz

$$\cos(-i\varphi) = \cos i\varphi$$

auch für imaginäre Winkel giltig.

Nach § 10, X. drückt  $l(x + y)$  in VIII. die doppelte Fläche des Hyperbelsectors  $BOM$  aus, wenn  $a = 1$  ist. Wenn der Centriwinkel  $BOM = \beta$  gesetzt wird, so findet man gemäß § 11, III. für  $OM = r$

$$r^2 = x^2 + y^2 = \frac{1}{\cos 2\beta}. \quad \text{IX.}$$

Ferner ist nach § 11, VI.

$$l(x + y) = \frac{1}{2} l \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \beta \right). \quad \text{X.}$$

Demnach ergibt sich aus VIII.

$$\varphi = 2 BOM = l(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \frac{1}{2} l \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \beta \right). \quad \text{XI.}$$

Dabei ist  $\beta$ , weil  $r$ ,  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  reell vorausgesetzt sind, gemäß IX. an die Bedingung

$$-\frac{\pi}{4} < \beta < +\frac{\pi}{4}$$

gebunden. Analog konnte man mit der Definition VII. verfahren. Aus

$$e^{\varphi - i\alpha} - e^{-(\varphi - i\alpha)} = 2\mathbf{y}$$

folgt, wenn man  $e^{\varphi - i\alpha}$  als Unbekannte wählt

$$\begin{aligned} e^{\varphi - i\alpha} &= \mathbf{y} \pm \sqrt{\mathbf{y}^2 + 1} \\ \varphi - i\alpha &= L_0(\mathbf{y} \pm \sqrt{\mathbf{y}^2 + 1}). \end{aligned}$$

Daraus folgen die Werte

$$\begin{aligned} \varphi - i\alpha &= L_0(\mathbf{y} + \sqrt{\mathbf{y}^2 + 1}) = L_0(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = l(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \\ \varphi' - i\alpha' &= L_0(\mathbf{y} - \sqrt{\mathbf{y}^2 + 1}) = L_0\{- (\mathbf{x} - \mathbf{y})\} \\ &= L_0(-1) + L_0(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= \pm i\pi + l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= \pm i\pi - l(\mathbf{x} + \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Mithin hat  $\alpha$  den Wert Null und  $\alpha'$  die Werte

$$\alpha' = -\pi, \quad \alpha'' = +\pi.$$

Man erhält die Winkel

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= l(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = l(\mathbf{y} + \sqrt{\mathbf{y}^2 + 1}) \\ \varphi' - i\alpha' &= -i\pi - \varphi \quad \text{oder} \quad \varphi' - i\alpha'' = i\pi - \varphi \end{aligned} \right\} \quad \text{XII.}$$

Daraus folgt für die complexe Winkelfläche

$$\alpha' + i\varphi' = \pi - i\varphi \quad \text{oder} \quad \alpha'' + i\varphi' = -(\pi + i\varphi).$$

Der Wert  $i\varphi'$  drückt denselben Schenkel aus, wenn man den Winkel negativ zählt. Man erhält wieder ein bekanntes Gesetz, nämlich

$$\sin(\pi - i\varphi) = \sin i\varphi.$$

Gemäß VIII. und XII. hat man allgemein:

$$\operatorname{arc} \cos \mathbf{x} = \pm i\varphi = i L_0(\mathbf{x} \pm \sqrt{\mathbf{x}^2 - 1}) \quad \mathbf{x}^2 > 1 \quad \text{XIII.}$$

$$\operatorname{arc\,sin} i\mathbf{y} = \begin{cases} i\varphi = i L_0 (\mathbf{y} + \sqrt{\mathbf{y}^2 + 1}) & \mathbf{y}^2 > 0 \\ \pi - i\varphi = i L_0 (\mathbf{y} - \sqrt{\mathbf{y}^2 + 1}) . \end{cases} \quad \text{XIV.}$$

Aus VI., VII. und VIII. folgt nach dem Permanenzprincipe

$$\operatorname{tg} i\varphi = \frac{\sin i\varphi}{\cos i\varphi} = i \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}} = i\mathbf{z}; \quad \text{XV.}$$

$$i\varphi = \operatorname{arctg} i \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}} = \operatorname{arctg} i\mathbf{z} = i L_0 (\mathbf{x} + \mathbf{y})$$

$$= \frac{i}{2} L_0 \frac{(\mathbf{x} + \mathbf{y})^2}{1} = \frac{i}{2} L_0 \frac{(\mathbf{x} + \mathbf{y})^2}{\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2}$$

$$= \frac{i}{2} L_0 \frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{\mathbf{x} - \mathbf{y}} = \frac{i}{2} L_0 \frac{1 + \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}}{1 - \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}}$$

$$\operatorname{arctg} i\mathbf{z} = \frac{i}{2} L_0 \frac{1 + \mathbf{z}}{1 - \mathbf{z}} \quad \mathbf{z}^2 < 1. \quad \text{XVI.}$$

Hiebei ist gemäß Fig. 14  $BT = \mathbf{z} = \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}$ .

Die Arcusfunctionen in XIII. und XIV. haben die Periode  $2\pi$ ;  $\operatorname{arctg}$  in XVI. hat die Periode  $\pi$ .

Um die Ordinate  $\mathbf{y} = \mathbf{PM}$  zu construieren, geht man nach V. vor; zieht man  $\mathbf{PM}$  tangierend an den Kreis  $O$ , dann ist

$$\mathbf{PM}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OM}^2 = \mathbf{x}^2 - 1.$$

Mithin hat man, da nach V.  $\mathbf{y}^2 = \mathbf{x}^2 - 1$  ist,

$$\mathbf{y} = \mathbf{PM} = \mathbf{PM}. \quad \text{XVII.}$$

Nun ist  $\frac{\mathbf{PM}}{\mathbf{OP}} = \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}} = \sin \gamma$ , XVIII.

wobei  $\gamma = \sphericalangle \mathbf{POM}$  ist. Demnach hat man

$$\varphi = L_0 (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \frac{1}{2} L_0 \frac{1 + \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}}{1 - \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}} = \frac{1}{2} L_0 \frac{1 + \sin \gamma}{1 - \sin \gamma}$$

$$= \frac{1}{2} L_0 \frac{2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right)}{2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right)} = \frac{1}{2} L_0 \operatorname{cotg}^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right)$$

$$= L_0 \operatorname{cotg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = L_0 \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2} \right).$$

Demnach ist mit Bezug auf X.

$$\varphi = L_0 \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{1}{2} L_0 \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \beta \right). \quad \text{XIX.}$$

### § 13. Hyperbolische Flächenfunctionen.

In Fig. 14 ist

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= OP = \sec \gamma \\ \mathbf{y} &= MP = \operatorname{tg} \gamma. \end{aligned}$$

Gemäß Fig. 14 hat man auch  $BT/OB = \mathbf{PM}/OP = \operatorname{tg} \beta$  oder  $\mathbf{z} = BT = \mathbf{y}/\mathbf{x} = \operatorname{tg} \beta$ .

$\mathbf{x}$  heißt der hyperbolische Cosinus (Cosinus hyperbolicus) und  $\mathbf{y}$  der hyperbolische Sinus, desgleichen ist  $\mathbf{z}$  die hyperbolische Tangente von  $\varphi$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \operatorname{Ch} \varphi = \sec \gamma = OP && \text{I.} \\ \mathbf{y} &= \operatorname{Sh} \varphi = \operatorname{tg} \gamma = \mathbf{PM} = BS && \text{II.} \\ \mathbf{z} &= \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}} = \operatorname{Th} \varphi = \sin \gamma = PM = BT. && \text{III.} \end{aligned}$$

Mithin ist  $MT \parallel OX$  und  $MS \parallel OX$ .

Diese Functionen sind Functionen der Hyperbelfläche, welche in Fig. 14 schraffirt ist.

Ligowsky verwendet in seinem Taschenbuche der Mathematik den Winkel  $\gamma$  zur Berechnung von  $\varphi$ . ( $\frac{\gamma}{2}$  wird durch das Symbol  $\frac{\varphi}{2}$  und  $\varphi$  durch  $\psi$  bezeichnet.) Ferner ist  $\operatorname{Ch} = \mathfrak{C}os$ ,  $\operatorname{Sh} = \mathfrak{S}in$ ,  $\operatorname{Th} = \mathfrak{T}ang$ . Da aber  $\sphericalangle \beta = \sphericalangle BOM$  den Centriwinkel des Sectors darstellt, so hätte er in mancher Hinsicht besser gethan, diesen Winkel zu benützen. Übrigens ist die Umrechnung nach § 12, XIX. leicht zu besorgen.

Wir haben das Maß  $\varphi$  des imaginären Winkels der Analysis entnommen und gesehen, dass es einen doppelten Hyperbelsector vorstellt; deshalb hat das Functionszeichen „arc“ in § 12, XIII., XIV., und XVI. eigentlich keinen Sinn mehr. Man sollte dafür „area“ schreiben. Indessen verlangt die Permanenz der Bezeichnung die Beibehaltung der Ausdrucksweise. Jedoch besteht im Vergleiche zur Kreismessung dennoch ein Zusammenhang. Denn ein Bogen  $\gamma$  stellt zugleich die doppelte Fläche des zwischen seinen Schenkeln gelegenen Kreissectors vom Radius Eins vor. Die goniometrischen Functionen reeller Winkel, sind demnach sowohl Winkel-, als auch Flächenfunctionen, während die analytischen Functionen imaginärer

Winkel bloß Flächenfunctionen sind. Aus § 12, VI. und VII. folgt mit Rücksicht auf V.

$$\cos^2 i\varphi + \sin^2 i\varphi = 1.$$

Demnach bleibt das Grundgesetz in § 12, III. auch für imaginäre Winkel bestehen. Ebenso gelten alle anderen Beziehungen der Winkelfunctionen auch für imaginäre Winkel. Gemäß § 12, VI., VII., folgt aus I., II., III.

$$Ch\varphi = \cos i\varphi \quad \text{IV.}$$

$$iSh\varphi = \sin i\varphi \quad \text{V.}$$

$$iTh\varphi = tg i\varphi. \quad \text{VI.}$$

Hiernach erhält man aus den Grundformeln für imaginäre Winkel die Formeln für die hyperbolischen Functionen durch bloße Substitution von IV. bis VI.

Gemäß III. und VI. ist

$$tg i\varphi = i \sin \gamma = itg \beta = i \frac{y}{x}. \quad \text{VII.}$$

Nach § 11, II. und III. ist

$$x = r \cos \beta, \quad y = r \sin \beta,$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\beta}}.$$

Dadurch verwandelt sich § 12, VI. und VII. in

$$\cos i\varphi = r \cos \beta = \frac{\cos \beta}{\sqrt{\cos 2\beta}} = \sec \gamma \quad \text{VIII.}$$

$$\sin i\varphi = ir \sin \beta = i \frac{\sin \beta}{\sqrt{\cos 2\beta}} = itg \gamma \quad \text{IX.}$$

$$tg i\varphi = itg \beta = i \sin \gamma. \quad \text{X.}$$

$\cos i\varphi$  und  $\sin i\varphi$  sind demnach die mit dem Hyperbelradius vervielfachten Functionen  $\cos \beta$  und  $\sin \beta$  des Centriwinkels  $\beta$ .  $\beta$  ist demnach als geometrisches Maß der imaginären Winkelfläche vollkommen geeignet; umsomehr als Gleichung X.  $tg i\varphi = itg \beta$  zutrifft. Indessen darf niemals außer Acht gelassen werden, dass die Functionen  $\cos i\varphi$  und  $\sin i\varphi$  sich auf imaginäre Hyperbelflächen beziehen. Mithin ist zu untersuchen, ob die Relationen VIII. bis X. für jeden Wert von  $\beta$  gelten. Es kann dies in Anbetracht des Zusammenhanges der Functionen von  $i\varphi$  und jenen des Winkels  $\gamma$  im

Vorhinein verneint werden. Denn gemäß  $tg \beta = \sin \gamma$  ist  $\beta$ , wie schon erwähnt wurde, an die Grenzen  $-\frac{\pi}{4}$  und  $+\frac{\pi}{4}$  gebunden.

Nach § 12, XIX ist für  $-\frac{\pi}{4} < \beta < +\frac{\pi}{4}$

$$i\varphi = \frac{i}{2} L_0 \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \beta \right); \quad \text{XI.}$$

für 
$$\frac{\pi}{4} < \beta < -\frac{\pi}{4}$$

erhält man links eine complexe Zahl, welche mit  $(\alpha + i\varphi)$  bezeichnet werden möge. Es ist dann

$$\alpha + i\varphi = \frac{i}{2} L_0 \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \beta \right). \quad \text{XII.}$$

Diese Formel gibt in allen Fällen Aufschluss. Ihr entsprechen dann gemäß VIII. bis X. die Formeln

$$\cos(\alpha + i\varphi) = \frac{\cos \beta}{\sqrt{\cos 2\beta}} \quad \text{XIII.}$$

$$\sin(\alpha + i\varphi) = \frac{i \sin \beta}{\sqrt{\cos 2\beta}} \quad \text{XIV.}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + i\varphi) = i \operatorname{tg} \beta. \quad \text{XV.}$$

#### § 14. Die cyclometrischen Functionen (Berechnung von $\pi$ ).

Setzt man in § 12, XIII., XIV., XVI. statt  $\mathbf{x}$ ,  $i\mathbf{y}$ ,  $i\mathbf{z}$  die Werte  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , ein also  $\mathbf{x} = x$ ,  $\mathbf{y} = y/i = -iy$ ,  $\mathbf{z} = z/i = -iz$ , so erhält man, da  $x^2 < 1$  und  $y^2 < 1$  gedacht werden, die für reelle Werte geltigen Formeln

$$\operatorname{arc} \cos x = i L_0 \{x \pm \sqrt{x^2 - 1}\} = i L_0 \{x \pm i \sqrt{1 - x^2}\}$$

$$\operatorname{arc} \sin y = i L_0 \{-iy \pm \sqrt{1 - y^2}\}$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} z = \frac{i}{2} L_0 \left\{ \frac{1 - iz}{1 + iz} \right\}.$$

Schreibt man am Anfange einer jeden Formel statt  $i$  den Wert  $-\frac{1}{i}$ , setzt man dann für die negativen Logarithmen, die Logarithmen der reciproken Zahlen und transformiert weiter durch Rationalmachen des Nenners, so folgen die Formeln

$$\operatorname{arc} \cos x = -\frac{1}{i} L_0 [x \pm i \sqrt{1 - x^2}] \quad x^2 < 1 \quad \text{I.}$$

$$\arcsin y = \frac{1}{i} L_0 [iy \pm \sqrt{1 - y^2}] \quad y^2 < 1 \quad \text{II.}$$

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} L_0 \frac{1 + iz}{1 - iz} \quad z^2 \geq 1. \quad \text{III.}$$

Dabei ist  $L_0$  gemäß § 9, VII. der einfachste Wert des allgemeinen Logarithmus  $L$  für  $k = 0$ . Formel I. ergibt zwei Hauptwerte  $\alpha$  und  $\alpha'$  für  $\arccos x$ . Es ist  $\alpha' = -\alpha$ . Aus Formel II. erhält man ebenfalls zwei Hauptwerte  $\alpha$  und  $\alpha'$  für  $\arcsin y$ .  $\alpha' = \pi - \alpha$ . Die Formeln I. bis III. erscheinen in complexer Form, indessen hebt sich bei der Ausführung das Imaginäre hinweg; es sind Identitäten, wie die Anwendung von § 9, VII. lehrt. (Vergleiche Stolz's Differential- und Integralrechnung II. Theil.)

Nimmt man anstatt der besonderen Logarithmen  $L_0$  ganz allgemeine  $L$ , so erhält man Formeln, welche den allgemeinen cyclometrischen Ausdrücken von Schlömilch entsprechen.  $\operatorname{Arc} \cos x$  stellt alle möglichen Bogen, welche den  $\cos x$  haben, dar.

$$\begin{aligned} \operatorname{Arc} \cos x &= 2k\pi \pm \arccos x && 0 < \arccos x < \pi \\ \operatorname{Arc} \sin y &= k\pi + (-1)^k \arcsin y && -\frac{\pi}{2} < \arcsin y < +\frac{\pi}{2} \\ \operatorname{Arctg} z &= k\pi + \operatorname{arctg} z && -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} z < +\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$k$  ist eine ganze, positive oder negative Zahl.

Ist  $z^2 < 1$  so lässt sich III. nach § 8, IX. entwickeln, wenn man statt  $x \dots iz$  setzt.

$$\operatorname{arctg} z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \dots \quad \text{IV.}$$

Für  $z = 1$  ist  $\operatorname{arctg} z = \frac{\pi}{4}$  und IV. ergibt

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \dots \quad \text{V.}$$

Dies ist die interessante Formel von Leibniz, welche aber wegen zu geringer Convergenz zur Berechnung von  $\pi$  nicht taugt.

Für  $z = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$  ist  $\operatorname{arctg} z = \frac{\pi}{6}$ , und Formel IV. liefert

$$\pi = 2\sqrt{3} \left\{ \frac{1}{1} - \frac{1}{3 \cdot 3^1} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} - \frac{1}{3 \cdot 7^3} \dots \right\}. \quad \text{VI.}$$

Diese Reihe ist schon ziemlich geeignet und in der That zur Berechnung benützt worden.

Setzt man in

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = 1$$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ , so findet man  $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}$ ; mithin ist

$$\frac{\pi}{4} = \alpha + \beta = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$$

$$\frac{\pi}{4} = \left\{ \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{1}{2} \right)^5 - \frac{1}{7} \left( \frac{1}{2} \right)^7 + \dots \right] + \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{1}{3} \right)^5 - \frac{1}{7} \left( \frac{1}{3} \right)^7 + \dots \right] \right\}. \quad \text{VII.}$$

Dies ist Eulers Formel.

Setzt man  $\beta = \gamma + \delta$ , so folgt aus

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \delta}{1 - \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \delta} = \frac{1}{3}$$

$$\text{für} \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{5} \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{1}{8}.$$

Also ist

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8}. \quad \text{VIII.}$$

$$\text{Aus } \operatorname{tg}(2\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = 1$$

folgt für  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$   $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{3}{4}$ , woraus man

$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{7}$  erhält.

$$\text{Demnach ist } \frac{\pi}{4} = 2\alpha + \beta = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7}. \quad \text{IX.}$$

Löst man  $\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$  und  $\operatorname{arctg} \frac{1}{7}$  nach IV. in Reihen auf, so ergibt sich Vegas Formel.

Analog folgt aus

$$\operatorname{tg}(4\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{tg} \beta} = 1$$

$$\text{für } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{5}{12}, \quad \operatorname{tg} 4\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha} = \frac{120}{119}$$

und  $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{239}$ . Also ist

$$\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}. \quad \text{X.}$$

Dies gibt ausgeführt die Formel von Clausen.

Setzt man im letzten Falle

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\gamma - \delta, \text{ also} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\operatorname{tg} 2\gamma - \operatorname{tg} \delta}{1 + \operatorname{tg} 2\gamma \operatorname{tg} \delta} = \frac{1}{5}, \end{aligned} \quad \text{XI.}$$

so folgt für  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{10}$

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{2 \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg}^2 \gamma} = \frac{20}{99}.$$

Mit Hilfe dieses Wertes berechnet man aus XI.

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{515}.$$

Mithin ist  $\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta = 4(2\gamma - \delta) - \beta = 8\gamma - 4\delta - \beta$

$$\frac{\pi}{4} = 8 \operatorname{arctg} \frac{1}{10} - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{515} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}. \quad \text{XII.}$$

Dies ist die Meisel'sche Formel.

Sollen zum Beispiel die Reihenentwickelungen  $\frac{\pi}{4}$  auf 6 Decimalstellen genau geben, dann muss die Summe der vernachlässigten Glieder kleiner sein als  $\frac{1}{2}10^{-6}$ . Um hierüber Gewissheit zu erlangen, müssten in jedem Falle besondere Untersuchungen gepflogen werden. Bei Ausrechnung einer dieser Reihen erhält man für  $\pi$  den Wert 3.1415926535 . . . .

## § 15. Die Functionen complexer Winkelflächen.

Dreht man in Fig. 14 das Achsenkreuz  $XOY$  um den Winkel  $\alpha$  nach rechts in die Lage  $\mathfrak{XO}\mathfrak{Y}$  (Fig. 15), so verwandeln sich die Coordinaten  $OP = x$  und  $PM = y$  des Ersatzpunktes  $M$  von  $M_i$  in nachstehender Art:

$$\begin{aligned} x' &= OP' = OQ - P'Q \\ &= OP \cos \alpha - RP \\ &= OP \cos \alpha - PM \sin \alpha \\ x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha & \text{I.} \\ y' &= P'M = P'R + RM \\ &= QP + PM \cos \alpha \\ &= OP \sin \alpha + PM \cos \alpha \\ y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha. & \text{II.} \end{aligned}$$

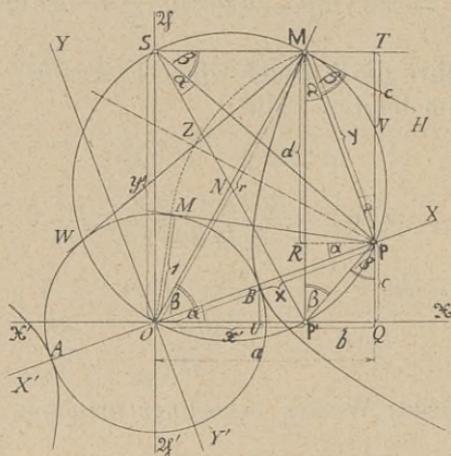


Fig. 15.

Der imaginäre Punkt  $M_i$  hatte die Coordinaten  $\mathbf{x} = \cos i\varphi$  und  $i\mathbf{y} = \sin i\varphi$ . Daher lauten seine neuen Coordinaten, wenn man I. und II. nach dem Permanenzprincipe auswertet, d. h. statt der Coordinaten des Ersatzpunktes die des imaginären Punktes setzt:

$$x_i = \mathbf{x} \cos \alpha - i \mathbf{y} \sin \alpha = \cos i\varphi \cos \alpha - \sin i\varphi \sin \alpha \quad \text{III.}$$

$$y_i = \mathbf{x} \sin \alpha + i \mathbf{y} \cos \alpha = \cos i\varphi \sin \alpha + \sin i\varphi \cos \alpha. \quad \text{IV.}$$

In Anbetracht der Formeln § 7, X. und XI. resp. § 12, VI. und VII., welche nach der Permanenz auch für complexe Werte zu gelten haben, da deren Functionen der allgemeinen Definition unterliegen, erhält man

$$\cos(\alpha + i\varphi) = \frac{e^{i\alpha - \varphi} + e^{-i\alpha + \varphi}}{2} = \cos \alpha \cos i\varphi - \sin \alpha \sin i\varphi = a - ib. \quad \text{V.}$$

$$\text{Und analog } \cos(\alpha - i\varphi) = a + ib. \quad \text{VI.}$$

Hiebei ist

$$a = \cos \alpha \cos i\varphi = \mathbf{x} \cos \alpha = OQ, \quad \text{VII.}$$

$$b = \sin \alpha \frac{\sin i\varphi}{i} = \mathbf{y} \sin \alpha = RP = P'Q.$$

$$\sin(\alpha + i\varphi) = \frac{e^{i\alpha - \varphi} - e^{-i\alpha + \varphi}}{2i} = \sin \alpha \cos i\varphi + \cos \alpha \sin i\varphi = c + id. \quad \text{VIII.}$$

$$\text{Und analog } \sin(\alpha - i\varphi) = c - id. \quad \text{IX.}$$

Hiebei ist  $c = \sin \alpha \cos i\varphi = \mathbf{x} \sin \alpha = \mathbf{QP} = \mathbf{P}'R;$

$$d = \cos \alpha \frac{\sin i\varphi}{i} = \mathbf{y} \cos \alpha = \mathbf{RM} . \quad \text{X.}$$

Mithin folgt aus III. und IV.

$$x_i = \cos (\alpha + i\varphi) \quad \text{XI.}$$

$$y_i = \sin (\alpha + i\varphi). \quad \text{XII.}$$

Überhaupt gelten für complexe Winkel alle Relationen, die aus § 7, X., XI. für reelle Winkel hervorgehen.

So fließt aus V. und VIII.

$$\cos^2 (\alpha + i\varphi) + \sin^2 (\alpha + i\varphi) = 1 \quad \text{XIII.}$$

oder mit Bezug auf XI. und XII.

$$x_i^2 + y_i^2 = 1 . \quad \text{XIV.}$$

Dies ist die durch die complexen Coordinaten  $x_i$  und  $y_i$  erfüllte Kreisgleichung  $x^2 + y^2 = 1$ .

Aus V. und VIII. folgt auch

$$\begin{aligned} e^{i\alpha - \varphi} &= \cos (\alpha + i\varphi) + i \sin (\alpha + i\varphi) \\ &= (\cos i\varphi + i \sin i\varphi) (\cos \alpha + i \sin \alpha) \end{aligned} \quad \text{XV.}$$

$$\begin{aligned} e^{-i\alpha + \varphi} &= \cos (\alpha + i\varphi) - i \sin (\alpha + i\varphi) \\ &= (\cos i\varphi - i \sin i\varphi) (\cos \alpha - i \sin \alpha) . \end{aligned} \quad \text{XV.}$$

Hierin liegt die Idee complexer Richtungszahlen. (Siehe Dr. H. Schefflers „Situationscalcül“.)

Die Behandlung von  $tg (\alpha + i\varphi)$  muss einem späteren Abschnitt vorbehalten werden.

Da in Fig. 15  $\mathbf{PM} = \mathbf{PM}$  ist, so befindet sich  $\mathbf{P}$  in der Chordale der Kreise  $O$  und  $\mathbf{M}$  (Nullkreis). Ist  $\mathbf{MW}$  eine Tangente an den Kreis  $O$ , und ist ferner  $\mathbf{MZ} = \mathbf{ZW}$ , so ist  $Z$  ein zweiter Chordalenpunkt; somit ist  $\mathbf{PZ}$  die Chordale der Kreise  $O$  und  $\mathbf{M}$ .

Nun möge noch untersucht werden, ob sich die Vertauschbarkeit von  $\alpha$  und  $i\varphi$  auch in der Fig. 15 bewährt. Diese Frage ist keineswegs müßig. Man hat

$$\cos (\beta + \alpha) = \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha ;$$

bei Benützung von § 13, VIII. und IX. erhält man

$$\cos (\beta + \alpha) = \frac{Ch \varphi}{r} \cos \alpha - \frac{Sh \varphi}{r} \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} r \cos(\beta + \alpha) &= Ch \varphi \cos \alpha - Sh \varphi \sin \alpha \\ &= \cos i\varphi \cos \alpha - \frac{\sin i\varphi}{i} \sin \alpha. \end{aligned}$$

Mithin gemäß VII.

$$r \cos(\beta + \alpha) = a - b.$$

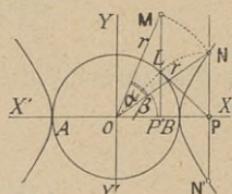


Fig. 16.

$OP' = a - b$  ist aber das reelle Maß von  $\cos(\alpha + i\varphi)$ , wie in Fig. 15. Fig. 16 zeigt die Vertauschung von  $\alpha$  mit  $i\varphi$  im Bilde. Die reellen Darstellungen der Functionen der complexen Winkelfläche  $(\alpha + i\varphi)$  sind demnach auch in diesem Falle die, mit dem zu  $\beta$  gehörigen Hyperbelradius multiplicierten Functionen des Ersatzwinkels  $(\alpha + \beta)$ . Analog zeigt man dies auch für

$$\sin(\alpha + i\varphi) = \sin(i\varphi + \alpha).$$

Aus VII. und X. ergeben sich auch die bemerkenswerten Relationen

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{d} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{XVI.}$$

$$\frac{d}{a} = \frac{b}{c} = \operatorname{tg} \beta, \text{ dies auf Grund § 13, X.} \quad \text{XVII.}$$

Letztere findet man durch Fig. 15 bestätigt, denn es ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{QP}{OQ} = \frac{c}{a}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{RP}{RM} = \frac{b}{d}.$$

Ist  $ON = NM$  (Fig. 15), so kann man von  $N$  aus einen Kreis durch  $O, P', P, M$  legen, welcher  $OQ$  in  $S$  und  $QP$  in  $V$  schneidet.  $SM$  ist  $\parallel OQ$  und liefert in  $QP$  auch den Punkt  $T$ . Demnach hat man  $ST = OQ = a$ ,  $PT = RM = d$  und aus Symmetriegründen  $QP = TV = c$ , ferner  $QV = d$ .

Als gleiche Peripheriewinkel auf demselben Bogen folgen, wenn  $MH$  den Kreis berührt,

$$\begin{aligned} \sphericalangle P'OP &= \sphericalangle P'SP = \sphericalangle P'MP = \alpha \\ \sphericalangle MPT &= \sphericalangle P'MP = \sphericalangle P'OP = \sphericalangle RPO = \alpha \\ \sphericalangle POM &= \sphericalangle PSM = \sphericalangle PP'M = \sphericalangle PMH = \beta. \end{aligned}$$

Ferner ist als Wechselwinkel  $\sphericalangle PP'M = \sphericalangle P'PQ = \beta$ .

Aus  $\triangle PTS$  folgt

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{PT}{TS} = \frac{d}{a} \text{ und aus } \triangle P'QP \operatorname{tg} \beta = \frac{P'Q}{QP} = \frac{b}{c}.$$

Weiter hat man, da  $PM = PM$  ist,

$\overline{OP}^2 - \overline{PM}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{PM}^2 = \overline{OM}^2 = 1$ ,  
was der Hyperbelgleichung  $x^2 - y^2 = 1$  entspricht.

$$\left. \begin{aligned} \text{Da nun } \overline{OP}^2 &= \overline{OQ}^2 + \overline{QP}^2 = a^2 + c^2 = x^2 \text{ und} \\ \overline{PM}^2 &= \overline{RP}^2 + \overline{RM}^2 = b^2 + d^2 = y^2 \end{aligned} \right\}, \quad \text{XVIII.}$$

so folgt aus XVIII. die Relation

$$(a^2 + c^2) - (b^2 + d^2) = 1. \quad \text{XIX.}$$

Schließlich ergibt die Figur 15

$$\begin{aligned} QO \cdot QP' &= QP \cdot QV \text{ oder} \\ a \cdot b &= c \cdot d. \end{aligned} \quad \text{XX.}$$

Durch Einführung von VI. und IX. in XIII. ergibt sich

$$(a - ib)^2 + (c + id)^2 = 1.$$

Trennt man das Reelle vom Imaginären, so erhält man XIX. und XX. Da endlich

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 \text{ oder } r^2 = x^2 + y^2 \text{ ist,}$$

so folgt mittels XVIII.  $r^2 = a^2 + c^2 + b^2 + d^2$ .

Nach früherem ist auch

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{1}{\cos 2\beta} = \frac{\cos^2 \beta}{\cos 2\beta} + \frac{\sin^2 \beta}{\cos 2\beta} = \cos^2 i\varphi + \sin^2 i\varphi \\ r^2 &= \cos i \cdot 2\varphi. \end{aligned} \quad \text{XXI.}$$

### § 16. Die Function arcus cosinus ( $a \mp ib$ ).

Ist  $\cos(\alpha + i\varphi) = a - ib$  gegeben, so findet man

$$\sin(\alpha + i\varphi) = c + id;$$

nach dem Gesetze § 15, XIII. folgt

$$\begin{aligned} c + id &= \sqrt{1 - (a - ib)^2} = \sqrt{(1 + a - ib)(1 - a + ib)} \\ c + id &= \sqrt{\{(1 + a) - ib\} \{(1 - a) + ib\}}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist nach Gauß leicht zu construieren. Die Moduli  $m_1$  und  $m_2$  der Factoren sind

$$m_1 = \sqrt{(1+a)^2 + b^2} \quad \text{und} \quad m_2 = \sqrt{(1-a)^2 + b^2}.$$

Der Modul des Productes ist  $m_1 m_2$  und der Modul der Wurzel  $m = \sqrt{m_1 \cdot m_2}$ . Die Durchführung der Construction zeigt Fig. 17.

$$m_1 = OM_1, \quad m_2 = OM_2,$$

$$m = ON = OM = \sqrt{OM_1 \cdot OM_2} = \sqrt{OM_1 \cdot OW}.$$

$$\begin{aligned} \sphericalangle AOM &= \frac{1}{2} \{ (2\pi - A_1 OM_1) + A_1 OM_2 \} \\ &= \frac{1}{2} \{ A_1 OM_1 + A_1 OM_2 + 2\pi - 2 A_1 OM_1 \} \\ &= \frac{1}{2} (AOM_1 + AOM_2) - A_1 OM_1 + \pi. \end{aligned}$$

Dies ist die Amplitude des ersten Wurzelwertes. Der zweite Wurzelwert hat eine um  $\pi$  kleinere Amplitude. Also ist

$$\sphericalangle AOM = \frac{1}{2} (AOM_1 + AOM_2) - A_1 OM_1.$$

Man halbiert demnach  $\sphericalangle M_1 OM_2$  mittels  $OM$ . Mittels der Größen  $OA = c$  und  $AM = d$  ist die Fig. 15 leicht zu ergänzen, und damit

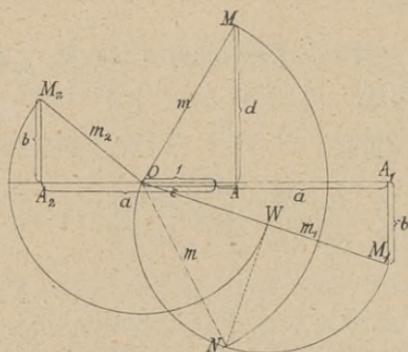


Fig. 17.

sind  $\alpha$  und  $\beta$  gefunden. Einen anderen Weg erschließt nachstehende Entwicklung. Dem Principe der Permanenz der Gesetze nach ist

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos i\varphi &= 2 \cos \frac{\alpha + i\varphi}{2} \cos \frac{\alpha - i\varphi}{2} \\ &= 2 \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha + i\varphi}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha - i\varphi}{2}} \\ &= 2 \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha + i\varphi)}{2} \cdot \frac{1 + \cos(\alpha - i\varphi)}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(1+a-ib)(1+a+ib)} \\ \cos i\varphi + \cos \alpha &= \sqrt{(1+a)^2 + b^2} = r_1. \end{aligned} \quad \text{I.}$$

Weil  $\cos i\varphi > 1$  und  $-1 < \cos \alpha < +1$ , so kann die Wurzel nur im absoluten Sinne gelten, denn die linke Seite ist unbedingt positiv.

Quadriert man I. und fügt entsprechend § 15, VII.

$$-4 \cos i\varphi \cdot \cos \alpha = -4a$$

hinzu, so erhält man nach erfolgtem Radicieren

$$\cos i\varphi - \cos \alpha = \sqrt{(1-a)^2 + b^2} = r_2. \quad \text{II.}$$

Übrigens kann man diesen Ausdruck auch so wie den vorigen entwickeln.

Auch hier kann nur der absolute Wert der Wurzel genommen werden, weil die linke Seite positiv ist.

Aus I. und II. erhält man

$$\cos i\varphi = \frac{1}{2} \{ \sqrt{(1+a)^2 + b^2} + \sqrt{(1-a)^2 + b^2} \} = \frac{1}{2} (r_1 + r_2) \quad \text{III.}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \{ \sqrt{(1+a)^2 + b^2} - \sqrt{(1-a)^2 + b^2} \} = \frac{1}{2} (r_1 - r_2) \quad \text{IV.}$$

Die Construction obiger Ausdrücke zeigt Fig. 18.

Ist  $OF = OG = 1$ ,  $ON = a$ ,  $NL = b$ , so ist  $FN = 1 + a$ ,  $NG = 1 - a$ , ferner  $LF = r_1$ ,  $LG = r_2$ .

$$\text{Bildet man } OA = OB = \frac{1}{2} (r_1 + r_2) = \cos i\varphi$$

$$\text{und } OA' = OB' = \frac{1}{2} (r_1 - r_2) = \cos \alpha,$$

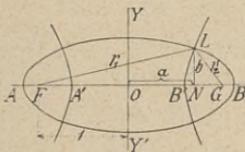


Fig. 18.

so erscheint  $L$  als Punkt der Ellipse von der Hauptachse  $AB$  und zugleich als Punkt der Hyperbel von der Hauptachse  $A'B'$ . Beide Curven sind confocal und durchschneiden sich rechtwinkelig. Man kann obige Eigenschaft auch mittels § 15, VII. erhalten. Es ergibt sich leicht

$$\frac{\alpha^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1,$$

als Gleichung der Ellipse von der linearen Excentricität

$$e_1 = \sqrt{x^2 - y^2} = 1.$$

Analog folgt

$$\frac{a^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{b^2}{\sin^2 \alpha} = x^2 - y^2 = 1$$

als Gleichung der Hyperbel von der linearen Excentricität

$$e_2 = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 1.$$

Hat man  $\cos \alpha = OU$  (Fig. 15), so ergibt sich  $B$ . Aus  $\cos i\varphi = OP$  erhält man  $P$ , dann  $PM$ , tangierend an den Kreis  $O$ , denn  $PM = PM$ . Nun ist  $\sphericalangle UOB = \alpha$ ,  $\sphericalangle POM = \beta$ ,

$$i\varphi = \frac{i}{2} \operatorname{ltg} \left( \frac{\pi}{4} + \beta \right) = \operatorname{arc} \cos \left( \frac{r_1 + r_2}{2} \right).$$

Gemäß § 15, V. ist

$$\operatorname{arc} \cos (a - ib) = \alpha + i\varphi = \operatorname{arc} \cos \frac{r_1 - r_2}{2} + \operatorname{arc} \cos \frac{r_1 + r_2}{2}. \quad \text{V.}$$

Man nimmt in beiden Fällen den positiven Winkel und erhält den ersten Hauptwert der allgemeinen Function

$$\operatorname{Arc} \cos (a - ib).$$

Die negativen Winkel ergeben den zweiten Hauptwert.

Formel V. hätte man auch aus § 14, I. durch eine ziemlich umständliche Rechnung erhalten können, wenn man statt  $x$  den Wert  $(a - ib)$  gesetzt hätte. Nro V. ist im Wesen die Schlömilch'sche Formel, deren Ableitungsweg im Grunde genommen nachstehender ist.

Gemäß § 15, VII. findet man leicht

$$\begin{aligned} a^2 + 1 + b^2 &= \cos^2 i\varphi + \cos^2 \alpha && \text{VI.} \\ 2a &= 2 \cos i\varphi \cdot \cos \alpha \\ \hline (a + 1)^2 + b^2 &= (\cos i\varphi + \cos \alpha)^2 \\ (a - 1)^2 + b^2 &= (\cos i\varphi - \cos \alpha)^2; \end{aligned}$$

woraus III. und IV. folgen.

Ferner findet sich nach § 15, X.

$$c^2 + d^2 = \cos^2 i\varphi - \cos^2 \alpha. \quad \text{VII.}$$

Aus VI. folgert man

$$\frac{1 + \cos i 2 \varphi}{2} + \frac{1 + \cos 2 \alpha}{2} = a^2 + b^2 + 1$$

$$\cos i 2 \varphi + \cos 2 \alpha = 2 (a^2 + b^2). \quad \text{VIII.}$$

Aus VII. ergibt sich analog

$$\cos i 2 \varphi - \cos 2 \alpha = 2 (c^2 + d^2). \quad \text{IX.}$$

Gemäß § 15, XIX., XX. ist

$$c^2 - d^2 = 1 - a^2 + b^2 = p \quad \text{X.}$$

$$cd = ab = \frac{q^2}{4}. \quad \text{XI.}$$

Hieraus entwickelt man

$$\begin{aligned} c^2 + d^2 &= \sqrt{(1 - a^2 + b^2)^2 + 4a^2b^2} \\ &= \sqrt{(1 + a)^2 + b^2} \cdot \sqrt{(1 - a)^2 + b^2}. \end{aligned} \quad \text{XII.}$$

Dies in IX. eingesetzt, folgen  $\cos 2i\varphi$  und  $\cos 2\alpha$  aus VIII. und IX.

Aus VIII. und IX. folgt mittels XII. auch

$$\cos i 2 \varphi \cdot \cos 2 \alpha = 2 (a^2 - b^2) - 1. \quad \text{XIII.}$$

Aus X. und XII. erhält man

$$\begin{aligned} 2c^2 &= 1 - a^2 + b^2 + \sqrt{(1 + a)^2 + b^2} \cdot \sqrt{(1 - a)^2 + b^2} \\ 2d^2 &= -1 + a^2 - b^2 + \sqrt{(1 + a)^2 + b^2} \cdot \sqrt{(1 - a)^2 + b^2}. \end{aligned} \quad \text{XIV.}$$

Damit ergibt sich nach § 15, XVI., XVII.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{c}{a} = \frac{b}{d} \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{b}{c} = \frac{d}{a}. \end{aligned} \quad \text{XV.}$$

Hat man die beiden Wurzelgrößen construiert, so findet man leicht ihr geometrisches Mittel  $z$ . Nun lassen sich die Ausdrücke in XIV. durch fortgesetzte Anwendung des Pythagoräischen Satzes construieren. Sind  $u$  und  $v$  die gefundenen Strecken, deren Quadrate rechter Hand zum Ausdrucke kommen, so sind  $c$  und  $d$  die zu  $u$  und  $v$  als Hypotenusen gehörigen Katheten rechtwinkliger gleichschenkliger Dreiecke.

Der Berechnung von  $c$  und  $d$  aus X. und XI. lässt sich ein geometrischer Hintergrund verleihen. X. ist die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel (Fig. 19) von der Hauptachse  $IT$ , während XI. die gleichseitige Hyperbel von den Scheiteln  $Q$  und  $R$  vorstellt.

Die Achsen der einen sind die Asymptoten der anderen.  $OI = p$   
 $s = OR = \frac{1}{2} OS \sqrt{2} = \frac{q}{2} \sqrt{2}$ . Sind  $K$  und  $K'$  die Schnittpunkte der  
 Hyperbeln, so genügen ihre Coordinaten  
 den beiden Gleichungen. Ist  $OK = r$  und  
 $\sphericalangle LOK = \delta$ , so hat man

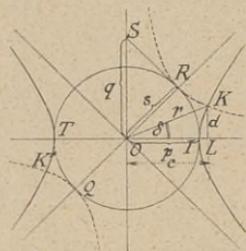


Fig. 19.

$$r^2 = \frac{p^2}{\cos 2\delta} = \frac{s^2}{\cos 2\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right)}$$

$$\text{somit } \frac{p^2}{\cos 2\delta} = \frac{s^2}{\sin 2\delta},$$

woraus  $tg 2\delta = \frac{s^2}{p^2} = y$  folgt. Man construiere zuerst  $z = \frac{s^2}{p}$  und  
 dann  $y = z \cdot \frac{1}{p}$ . Dieser Ausdruck ist leicht zu construieren, womit  
 $\delta$  und  $r$  bestimmt sind.

$$\cos 2\delta = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 2\delta}}, \quad r^2 = \frac{p^2}{\frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 2\delta}}} = p^2 \sqrt{1 + \frac{s^4}{p^4}}$$

$$= \sqrt{p^4 + s^4}.$$

$$OL = c = r \cos \delta, \quad LK = d = r \sin \delta$$

$$c^2 = r^2 \cdot \frac{1 + \cos 2\delta}{2}, \quad d^2 = r^2 \frac{1 - \cos 2\delta}{2}.$$

Um  $r$  aus  $\delta$  zu construieren, geht man nach Fig. 14 vor.  
 Mittels  $\beta = \delta$  findet man  $T$ , dann  $M$ , dann  $S$  und  $\mathbf{M} = K$ , oder  
 man zieht  $MP$  tangierend und macht dann  $\mathbf{PM} = \mathbf{PM}$ .

Eine andere Methode, das Problem zu lösen, ergibt sich aus  
 § 15, VII. und X.

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{\sin 2i\varphi}{i} = 4ab = 4cd.$$

$$\text{Nun ist } \frac{\sin 2i\varphi}{i} = \frac{2 \sin i\varphi}{i} \cdot \cos i\varphi = \frac{2 \sin \beta}{\sqrt{\cos 2\beta}} \cdot \frac{\cos \beta}{\sqrt{\cos 2\beta}}$$

$$= \frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta} = tg 2\beta. \quad \text{XVI.}$$

Da nach § 15, XXI.  $\cos i 2\varphi = \frac{1}{\cos 2\beta}$  ist, hat man auch

$$\frac{tg i 2\varphi}{i} = \sin 2\beta \quad \text{XVII.}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\beta = 4ab \text{ oder}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta} = ab. \text{ Andererseits ist nach § 16, XV.}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{1 + b^2 - a^2}{a^2}.$$

Aus den beiden Gleichungen also sind  $\alpha$  und  $\beta$  bestimmt.

Man könnte aber auch folgendes System nach  $\alpha$  und  $\beta$  auflösen.

$$\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos 2\beta} = a - b, \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}.$$

Am interessantesten ist indessen nachstehende rein geometrische Lösung.

Ist in Fig. 15  $OP' = \xi$ ,  $P'M = \eta$ ,  $OQ = a$ ,  $PM = PM = y$ , so erhält man

$$\eta = a \operatorname{tg} \alpha + y \cos \alpha$$

$$\xi = a - y \sin \alpha.$$

Aus obigen Gleichungen folgt leicht

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a - \xi}{\eta - a \operatorname{tg} \alpha} \quad \text{XVIII.}$$

$$y^2 = (a - \xi)^2 + (\eta - a \operatorname{tg} \alpha)^2.$$

Da aber  $y^2 = x^2 - 1 = a^2 \sec^2 \alpha - 1$  ist, so ergibt sich weiter

$$a^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - 1 = (a - \xi)^2 + (\eta - a \operatorname{tg} \alpha)^2;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\xi^2 - 2a\xi + 1 + \eta^2}{2a\eta} \quad \text{XIX.}$$

Setzt man diesen Wert in XV. ein, so resultiert

$$\eta^4 + 4a(\xi - a)\eta^2 = (\xi^2 - 2a\xi + 1)^2$$

als Gleichung des Ortes von **M**. Die Curve bildet im Punkte  $\xi = a$ ,  $\eta = \sqrt{a^2 - 1}$  ein nahezu geradliniges Kreuz. Hiemit ist

$$\eta^2 = -2a(\xi - a) \pm \sqrt{\{(\xi - a)^2 + (1 + a)^2\} \{(\xi - a)^2 + (1 - a)^2\}}.$$

Setzt man  $\xi = a - b$ , so ergibt sich

$$\eta^2 = -2ab \pm \sqrt{\{(1 + a)^2 + b^2\} \{(1 - a)^2 + b^2\}}. \quad \text{XX.}$$

Die Quadratwurzel wurde in Fig. 17 als Strecke

$$OM = ON = \sqrt{c^2 + d^2} \quad \text{construiert.}$$

Nun folgt aus XII. und XI.

$$(c + d)^2 = -2ab + \sqrt{(1+a)^2 + b^2} \sqrt{(1-a)^2 + b^2};$$

demnach ist  $\eta_1^2 = (c + d)^2$ , wie von vornherein zu erwarten war.

Die negative Wurzel in XX. würde dem Werte  $-\{c - d\}^2$  entsprechen und beide Werte  $\eta^2$  wären imaginär.

Analog V. erhält man

$$\text{arc cos } (a + ib) = \text{arc cos } \frac{r_1 - r_2}{2} - \text{arc cos } \frac{r_1 + r_2}{2}. \quad \text{XXI.}$$

### § 17. Die Function arcus sinus $(c \pm id)$ .

Analog den Vorgängen in § 16 ergeben sich

$$\begin{aligned} \cos i\varphi + \sin \alpha &= \sin \left( \frac{\pi}{2} - i\varphi \right) + \sin \alpha \\ &= 2 \sin \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} - i\varphi + \alpha \right\} \cos \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} - i\varphi - \alpha \right\} \\ &= 2 \sqrt{\sin^2 \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} - i\varphi + \alpha \right\} \cos^2 \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} - i\varphi - \alpha \right\}} \\ &= 2 \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \left( \frac{\pi}{2} - i\varphi + \alpha \right) \right\} \cdot \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \left( \frac{\pi}{2} - i\varphi - \alpha \right) \right\}} \\ &= \sqrt{\{1 - \sin(i\varphi - \alpha)\} \{1 + \sin(i\varphi + \alpha)\}} \\ &= \sqrt{\{1 + \sin(\alpha - i\varphi)\} \{1 + \sin(\alpha + i\varphi)\}} \\ &= \sqrt{(1 + c + id)(1 + c - id)} \end{aligned}$$

$$\cos i\varphi + \sin \alpha = \sqrt{(1 + c)^2 + d^2} = r_1. \quad \text{I.}$$

Quadriert man I. und subtrahiert nach § 15, X.

$$4 \cos i\varphi \sin \alpha = 4c, \text{ so folgt}$$

$$\cos i\varphi - \sin \alpha = \sqrt{(1 - c)^2 + d^2} = r_2. \quad \text{II.}$$

Diese Formel konnte man übrigens auch wie die vorige finden. Nach I. und II. ist

$$\cos i\varphi = \frac{1}{2} (r_1 + r_2) \quad \text{III.}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} (r_1 - r_2) \quad \text{IV.}$$

Die Construction ist jener in § 16 ganz analog und führt auf eine Ellipse und eine Hyperbel. Die analytischen Gleichungen folgen aus § 15, X.

$$\frac{c^2}{x^2} + \frac{d^2}{y^2} = 1, \quad \text{Excentricität } e_1 = \sqrt{x^2 - y^2} = 1$$

$$\frac{c^2}{\sin^2 \alpha} - \frac{d^2}{\cos^2 \alpha} = 1, \quad \text{Excentricität } e_2 = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = 1.$$

Die Schlömilch'sche Ableitung ist kurz folgende:

$$c^2 + 1 + d^2 = \cos^2 i\varphi + \sin^2 \alpha$$

$$2c = 2 \cos i\varphi \sin \alpha.$$

Hieraus entwickelt man I. und II.

Überhaupt lassen sich alle Ableitungen des § 16 hier finden. Man erhält

$$\arcsin (c \pm id) = \arcsin \frac{r_1 - r_2}{2} \pm \arccos \frac{r_1 + r_2}{2} \quad \text{V.}$$

Übrigens konnte man diese Formel auch aus § 16, V. und XXI. nach dem Gesetze finden

$$\arccos (c \pm id) + \arcsin (c \pm id) = \frac{\pi}{2} \quad \text{VI.}$$

$$\arcsin (c \pm id) = \frac{\pi}{2} - \arccos (c \pm id)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left\{ \arccos \frac{r_1 - r_2}{2} \mp \arccos \frac{r_1 + r_2}{2} \right\}$$

$$= \arcsin \frac{r_1 - r_2}{2} \pm \arccos \frac{r_1 + r_2}{2}.$$

Nun mögen die Formeln für  $\arccos (a \mp ib)$  einer kurzen Discussion unterzogen werden, dabei ist zu beachten, dass die Wurzelwerte für  $r_1$  und  $r_2$  § 16, III., IV. stets im absoluten Sinne zu nehmen sind.

Für  $a > 1$  und  $b = 0$  folgt

$$\arccos a = \arccos 1 + \arccos a = 0 + i\varphi. \quad (1. \text{ Hauptwert})$$

Für  $a^2 < 1$  und  $b = 0$  erhält man

$$\arccos a = \arccos a + \arccos 1 = \alpha + 0 = \alpha .$$

Für  $a < -1$  und  $b = 0$  ergibt sich

$$\arccos a = \arccos(-1) + \arccos(-a) = \pi + i\varphi .$$

Für  $a = 0$  ist

$$\begin{aligned} \arccos(-ib) &= \arccos 0 + \arccos \sqrt{1+b^2} = \frac{\pi}{2} + \arcsin ib \\ &= \frac{\pi}{2} + i\varphi . \end{aligned}$$

VII.

Hierin liegt das Gesetz

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + i\varphi\right) = -\sin i\varphi = -ib .$$

Aus  $\arccos(a + ib)$  folgt für  $a > 1$  und  $b = 0$

$$\arccos a = \arccos 1 + \arccos a = 0 - i\varphi = -i\varphi . \quad (2. \text{ Hauptwert}).$$

Für  $a^2 < -1$  und  $b = 0$  folgt

$$\arccos a = \arccos a - \arccos 1 = \alpha - 0 = \alpha .$$

Für  $a < -1$  und  $b = 0$  ist weiter

$$\arccos a = \arccos(-1) - \arccos(-a) = \pi - i\varphi . \quad \text{VIII.}$$

Ist  $a = 0$ , so erhält man

$$\begin{aligned} \arccos ib &= \arccos 0 - \arccos \sqrt{1+b^2} = \frac{\pi}{2} - \arcsin ib \\ &= \frac{\pi}{2} - i\varphi . \end{aligned}$$

Hierin liegt das Gesetz  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - i\varphi\right) = \sin i\varphi = ib$ .

Ganz analog discutiert man  $\arcsin(c \pm id)$ . Eventuell benützt man hiezu auch Formel VI.

### § 18. Der allgemeine Satz von Moivre.

Die complexen Winkel sind das Mittel für die Ausdehnung des Moivre'schen Satzes im weitesten Sinne.

Ist  $a^2 > b^2$ , so kann man den Ausdruck  $(a - b)$ , worin  $a$  und  $b$  positiv sind, folgendermaßen transformieren.

$$a - b = \sqrt{a^2 - b^2} \left\{ \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} + i \cdot \frac{ib}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right\} .$$

Setzt man  $\sqrt{a^2 - b^2} = r$ ,  $\frac{a}{r} = \cos i\varphi$ ,  $\frac{ib}{r} = \sin i\varphi$ , so folgt

$$a - b = r(\cos i\varphi + i \sin i\varphi). \quad \text{I.}$$

Da  $\cos(2\pi - i\varphi) = \cos(-i\varphi) = \cos i\varphi$  und  $\sin(2\pi - i\varphi) = -\sin i\varphi$  ist, so erhält man auch  $a + b = r\{\cos(2\pi - i\varphi) + i \sin(2\pi - i\varphi)\} = r\{\cos i\varphi + i \sin(-i\varphi)\}$ . II.

Wenn  $a^2 < b^2$  ist, so setzt man  $\sqrt{b^2 - a^2} = r$ ,

$$\frac{b}{r} = \cos i\varphi, \quad \frac{ia}{r} = \sin i\varphi \quad \text{und erhält}$$

$$\begin{aligned} a - b &= r \left\{ -i \cdot \frac{ia}{r} - \frac{b}{r} \right\} = r \{-i \sin i\varphi - \cos i\varphi\} \\ &= r \{-\cos i\varphi - i \sin i\varphi\}. \end{aligned}$$

Da  $\cos(\pi + i\varphi) = -\cos i\varphi$  und  $\sin(\pi + i\varphi) = -\sin i\varphi$  ist, so folgt

$$a - b = r\{\cos(\pi + i\varphi) + i \sin(\pi + i\varphi)\}. \quad \text{III.}$$

Analog erhält man

$$\begin{aligned} a + b &= r\{\cos(2\pi - i\varphi) + i \sin(2\pi - i\varphi)\} \\ &= r\{\cos(-i\varphi) + i \sin(-i\varphi)\}. \end{aligned} \quad \text{IV.}$$

Da die Functionen complexer Winkelflächen denselben Gesetzen folgen, wie jene der reellen Winkel, insbesondere XII. und XIII. in § 4, so kann man auf die normalförmigen Ausdrücke in I., II., III., IV., alle Gesetze anwenden, welche in § 4 für normalförmige, complexe Zahlen entwickelt wurden. Namentlich erweist sich der Moivre'sche Satz als vortheilhaft. Man erhält z. B. aus III.

$$\{r[\cos(\pi + i\varphi) + i \sin(\pi + i\varphi)]\}^n = r^n [\cos n(\pi + i\varphi) + i \sin n(\pi + i\varphi)]. \quad \text{V.}$$

Besonders wichtig ist Formel V. beim Radicieren;  $n = \frac{1}{m}$  wobei  $m$  eine ganze positive Zahl bedeutet. Da man die complexe Amplitude  $(\pi + i\varphi)$  um beliebige Vielfache von  $2\pi$  vermehren oder vermindern kann, so ergeben sich rechter Hand  $m$  verschiedene Wurzelwerte.

Durch Auflösung der Functionen

$$\cos \frac{\pi + i\varphi + 2k\pi}{m} \quad \text{und} \quad \sin \frac{\pi + i\varphi + 2k\pi}{m} \quad \text{nach § 4, XII., XIII.,}$$

kann man  $\cos \frac{i\varphi}{m}$  und  $\sin \frac{i\varphi}{m}$  ausscheiden und durch die hyperbolischen  $Ch \frac{\varphi}{m}$  und  $Sh \frac{\varphi}{m}$  ersetzen.

Ein hübsches Beispiel ergibt sich für  $a = A$  und  $b = \sqrt{B}$ ,  $A^2 > B$  und  $n = \frac{1}{2}$ . Es ist  $r = \sqrt{A^2 - B}$  und  $\cos i\varphi = \frac{A}{r}$ , ferner erhält man für  $k = 0$

$$\cos \frac{i\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos i\varphi}{2}}$$

$$\sin \frac{i\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos i\varphi}{2}}$$

und für  $k = 1$

$$\cos \frac{i\varphi + 2\pi}{2} = -\cos \frac{i\varphi}{2}$$

$$\sin \frac{i\varphi + 2\pi}{2} = -\sin \frac{i\varphi}{2}.$$

Mithin resultieren die Formeln

$$\begin{aligned} \sqrt{A - \sqrt{B}} &= \{r (\cos i\varphi + i \sin i\varphi)\}^{\frac{1}{2}} = \pm r^{\frac{1}{2}} \left\{ \cos \frac{i\varphi}{2} + i \sin \frac{i\varphi}{2} \right\} \\ &= \pm \left\{ \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} - \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} \right\}. \quad \text{VI.} \end{aligned}$$

### § 19. Die cubische Gleichung.

Setzt man in der Gleichung

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0 \quad \text{I.}$$

$$x = y - \frac{A}{3},$$

so nimmt sie nach geschעהer Reduction die Form an

$$y^3 + ay + b = 0. \quad \text{II.}$$

Substituiert man weiter

$$y = u + v,$$

so erscheint II. nach erfolgtem Ordnen in der Gestalt

$$u^3 + v^3 + (u + v) (3uv + a) + b = 0. \quad \text{III.}$$

Verfügt man über  $u$  und  $v$  derart, dass  $(3uv + a) = 0$ , mithin

$$uv = -\frac{a}{3} \quad \text{IV.}$$

wird, so folgt aus III.

$$u^3 + v^3 + b = 0, \quad v^3 = -b - u^3. \quad \text{V.}$$

Setzt man für  $v$  den Wert aus IV., so ergibt sich aus V.

$$u^6 + bu^3 = \frac{a^3}{27}.$$

Hieraus und mittels V. entwickelt man leicht

$$u^3 = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}$$

$$v^3 = -\frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}.$$

In diesen und den früheren Ausdrücken sind  $u$  und  $v$  vertauschbar. Wählt man die oberen Vorzeichen, so folgen die Werte

$$u = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}.$$

VI.

Jede dieser Wurzeln hat 3 Werte; diese seien  $u_1, u_2, u_3$ , ferner  $v_1, v_2$  und  $v_3$ . Diese müssten gemäß

$$y = u + v,$$

so combinirt werden, dass die Bedingung IV. erfüllt wird.

Sind  $u_1$  und  $v_1$  die Hauptwerte, ferner  $u_2, v_2$  conjugirt und  $u_3, v_3$  conjugirt, so ist

$$y_1 = u_1 + v_1; \quad y_2 = u_2 + v_2; \quad y_3 = u_3 + v_3. \quad \text{VII.}$$

Demnach erhält man

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}. \quad \text{VIII.}$$

Dies ist die von Nicolaus Tartalea gefundene Formel, die fälschlich nach Hieronymus Cardanus benannt wird. Dividirt man II. durch den Wurzelfactor  $(y - y_1)$ , so ergibt sich der Quotient

$$y^2 + y_1 y + y_1^2 + a.$$

Da gemäß II.

$$(y^2 + y_1 y + y_1^2 + a)(y - y_1) = 0$$

ist, so erhält man in

$$y^2 + y_1 y + y_1^2 + a = 0$$

eine neue Gleichung, welche die noch fehlenden Wurzeln  $y_2$  und  $y_3$  liefert.

$$y_{2,3} = -\frac{y_1}{2} \pm \sqrt{\frac{y_1^2}{4} - (y_1^2 + a)};$$

diese lauten mit Bezug auf VII.

$$y_{2,3} = -\frac{u_1 + v_1}{2} \pm i \frac{u_1 - v_1}{2} \sqrt{3}. \quad \text{IX.}$$

Bei der Berechnung der Formel VIII. sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem  $(\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27})$  negativ oder positiv ist. Es sei

$$\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} < 0, \quad \frac{a^3}{27} < 0.$$

Dann ist

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + i\sqrt{-\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - i\sqrt{-\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}}.$$

Dieser Fall heißt der *Casus irreducibilis*. Die Cardanische Formel versagt scheinbar. Macht man aber die complexen Radicanden normalförmig, so lassen sich die Cubikwurzeln nach dem Moivre'schen Satze entwickeln. Fasst man, da der Bedingung IV. zu genügen ist, je zwei conjugierte Wurzeln zusammen, so erhält man alle 3 Werte von  $y$  reell. Ist  $r$  der Modul und  $\alpha$  die Amplitude des ersten Radicanden, so ist

$$r^2 = -\frac{a^3}{27} \quad \text{und} \quad \cos \alpha = \frac{-b}{2r}, \quad \text{X.}$$

wornach man  $\alpha$  zu berechnen hat. Nimmt man im zweiten Radicanden zur leichten Übersicht anstatt  $(2\pi - \alpha)$  die negative Amplitude  $(-\alpha)$ , so bekommt man für die conjugierten Wurzel-paare folgende Amplitudengruppen

$$\frac{\alpha}{3}, \quad -\frac{\alpha}{3}, \\ \frac{\alpha + 2\pi}{3}, \quad -\frac{\alpha + 2\pi}{3}$$

$$\frac{\alpha + 4\pi}{3}, \quad -\frac{\alpha + 4\pi}{3}.$$

Da sich die Sinusse aufheben, so lauten die Wurzelwerte

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1 + v_1 = 2\sqrt[3]{r} \cdot \cos \frac{\alpha}{3} \\ y_2 &= u_2 + v_2 = 2\sqrt[3]{r} \cdot \cos \frac{\alpha + 2\pi}{3} \\ y_3 &= u_3 + v_3 = 2\sqrt[3]{r} \cdot \cos \frac{\alpha + 4\pi}{3}. \end{aligned} \quad \text{XI.}$$

Oder nach Auflösung der Functionen mit Bezug auf  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$  und  $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} y_1 &= 2\sqrt[3]{r} \cdot \cos \frac{\alpha}{3} \\ y_2 &= -\sqrt[3]{r} \left\{ \cos \frac{\alpha}{3} + \sin \frac{\alpha}{3} \sqrt{3} \right\} \\ y_3 &= -\sqrt[3]{r} \left\{ \cos \frac{\alpha}{3} - \sin \frac{\alpha}{3} \sqrt{3} \right\}. \end{aligned} \quad \text{XII.}$$

Diese Wurzeln stehen mit den Coefficienten der cubischen Gleichung

$$y^3 + 0 \cdot y^2 + ay + b = 0$$

in nachstehender Relation:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= 0 \\ y_1 \cdot y_2 + y_2 \cdot y_3 + y_3 \cdot y_1 &= a \\ y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 &= -b. \end{aligned} \quad \text{XIII.}$$

Bei der Entwicklung dieser Ausdrücke beachte man X., ferner § 6 III. für  $n = 3$ . Man ersieht aus XIII., dass mindestens eine Wurzel reell sein muss. Complexe Wurzeln müssen paarweise und conjugiert auftreten, denn die Coefficienten  $a$  und  $b$  sind als reell vorausgesetzt. Die Beziehungen unter XIII. folgen auch leicht aus der Identität.

$$\begin{aligned} (y - y_1)(y - y_2)(y - y_3) &= y^3 - (y_1 + y_2 + y_3)y^2 + \\ &+ (y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1)y - y_1y_2y_3 = 0 \\ &= y^3 - 0 \cdot y^2 + ay + b = 0. \end{aligned}$$

Es sei zweitens

$$\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} > 0.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$-\frac{b}{2} = a_1, \quad \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} = b_1,$$

so ergibt sich analog VIII.

$$y = u + v = \sqrt[3]{a_1 + b_1} + \sqrt[3]{a_1 - b_1}.$$

Die Radicanden dieser Wurzeln lassen sich nach § 18, I., II., III. und IV. normalförmig gestalten. Hernach sind die drei Werte jeder Wurzel mittels des Moivre'schen Satzes leicht zu entwickeln. Da wieder der Bedingung IV. Genüge zu leisten ist, so dürfen nur je zwei conjugierte Wurzelwerte combinirt werden. Man erhält z. B. für  $a < 0$  und  $b < 0$ , da diesfalls  $a_1 > b_1$  ist,

$$r = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} = \sqrt{\frac{-a^3}{27}}, \quad r^{\frac{1}{3}} = \sqrt{-\frac{a}{3}},$$

$$\text{Ch } \varphi = \cos i\varphi = \frac{a_1}{r} = \frac{-b}{2r}. \quad \text{XIV.}$$

Hieraus ist  $\varphi$  mittels der Tafeln von Ligowski leicht zu entnehmen. Dann ergeben sich mit Hilfe von § 18, II. und I.

$$y_1 = 2\sqrt[3]{r} \cdot \cos \frac{i\varphi}{3} = 2\sqrt{-\frac{a}{3}} \cdot \cos \frac{i\varphi}{3}$$

$$y_2 = 2\sqrt[3]{r} \cos \frac{i\varphi + 2\pi}{3} = 2\sqrt{-\frac{a}{3}} \left\{ \cos \frac{i\varphi}{3} \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{i\varphi}{3} \sin \frac{2\pi}{3} \right\}$$

$$y_3 = 2\sqrt[3]{r} \cos \frac{i\varphi + 4\pi}{3} = 2\sqrt{-\frac{a}{3}} \left\{ \cos \frac{i\varphi}{3} \cos \frac{4\pi}{3} - \sin \frac{i\varphi}{3} \sin \frac{4\pi}{3} \right\}.$$

Durch Einsetzung der Functionen von  $\frac{2\pi}{3}$  und  $\frac{4\pi}{3}$  und durch Substitution hyperbolischer Functionen erhält man schließlich

$$y_1 = 2\sqrt{-\frac{a}{3}} \text{Ch } \frac{\varphi}{3}$$

$$y_2 = -\sqrt{-\frac{a}{3}} \left\{ \text{Ch } \frac{\varphi}{3} + i \text{Sh } \frac{\varphi}{3} \sqrt{3} \right\} = -\frac{y_1}{2} - i\sqrt{-a} \cdot \text{Sh } \frac{\varphi}{3}$$

$$y_3 = -\sqrt{-\frac{a}{3}} \left\{ \text{Ch } \frac{\varphi}{3} - i \text{Sh } \frac{\varphi}{3} \sqrt{3} \right\} = -\frac{y_1}{2} + i\sqrt{-a} \cdot \text{Sh } \frac{\varphi}{3}.$$

### § 20. Die biquadratische Gleichung.

Setzt man in der Gleichung

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \quad \text{I.}$$

$$x = y - \frac{A}{4},$$

so erscheint sie nach erfolgtem Reducieren in der Form

$$y^4 + ay^2 + by + c = 0. \quad \text{II.}$$

Entwickelt man das Product der Wurzelfactoren, deren jeder den Wert Null annehmen kann, gemäß

$$(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)(y - y_4) = 0, \quad \text{III.}$$

und setzt man die Coefficienten des nach den Potenzen von  $y$  geordneten Productes den entsprechenden Coefficienten in II. gleich, so folgen die Relationen:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0 \quad \text{IV.}$$

$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_1y_4 + y_2y_3 + y_2y_4 + y_3y_4 = a \quad \text{V.}$$

$$y_1y_2y_3 + y_1y_2y_4 + y_1y_3y_4 + y_2y_3y_4 = -b \quad \text{VI.}$$

$$y_1y_2y_3y_4 = c. \quad \text{VII.}$$

Es seien  $y_1$  und  $y_2$  ferner  $y_3$  und  $y_4$  conjugierte Werte. Dann verwandelt man obige Relationen wie folgt

$$(y_1 + y_2) + (y_3 + y_4) = 0 \quad \text{VIII.}$$

$$y_1y_2 + y_3y_4 + (y_1 + y_2)(y_3 + y_4) = a \quad \text{IX.}$$

$$y_1y_2(y_3 + y_4) + y_3y_4(y_1 + y_2) = -b \quad \text{X.}$$

$$(y_1y_2 + y_3y_4)^2 - (y_1y_2 - y_3y_4)^2 = 4c. \quad \text{XI.}$$

Setzt man gemäß VIII.

$$y_1 + y_2 = -(y_3 + y_4) = \sqrt{z}, \quad \text{XII.}$$

dann gehen die Beziehungen IX. bis XI. über in

$$y_1y_2 + y_3y_4 = z + a \quad \text{XIII.}$$

$$y_1y_2 - y_3y_4 = \frac{b}{\sqrt{z}} \quad \text{XIV.}$$

$$(z + a)^2 - \left(\frac{b}{\sqrt{z}}\right)^2 = 4c. \quad \text{XV.}$$

Aus XV. ergibt sich dann zur Aufsuchung der Hilfsunbekannten  $z$  die sogenannte cubische Resolvente

$$z^3 + 2az^2 + (a^2 - 4c)z - b^2 = 0. \quad \text{XVI.}$$

Da von den drei Wurzeln  $z_1, z_2, z_3$  dieser Gleichung wegen

$$z_1 z_2 z_3 = b^2$$

unbedingt eine, z. B.  $z_1$  positiv sein muss, so ist die absolut genommene  $\sqrt{z_1}$  ebenfalls positiv. Mittels  $\sqrt{z_1}$  sind nun die Wurzeln der Gleichung II. leicht zu berechnen.

Aus XIII. und XIV. erhält man

$$y_1 y_2 = \frac{1}{2} \left\{ z_1 + a + \frac{b}{\sqrt{z_1}} \right\}$$

und gemäß XII.

$$y_1 \{ \sqrt{z_1} - y_1 \} = \frac{1}{2} \left\{ z_1 + a + \frac{b}{\sqrt{z_1}} \right\}.$$

Dies ergibt die quadratische Gleichung

$$y_1^2 - \sqrt{z_1} \cdot y_1 = -\frac{1}{2} \left\{ z_1 + a + \frac{b}{\sqrt{z_1}} \right\}. \quad \text{XVII.}$$

Analog findet man aus XIII. und XIV. mit Rücksicht auf XII.

$$y_3 y_4 = \frac{1}{2} \left\{ z_1 + a - \frac{b}{\sqrt{z_1}} \right\}$$

$$y_3 \{ -\sqrt{z_1} - y_3 \} = \frac{1}{2} \left\{ z_1 + a - \frac{b}{\sqrt{z_1}} \right\}.$$

Hieraus folgt die Gleichung

$$y_3^2 + \sqrt{z_1} \cdot y_3 = -\frac{1}{2} \left\{ z_1 + a - \frac{b}{\sqrt{z_1}} \right\}. \quad \text{XVIII.}$$

Aus XVII. und XVIII. resultieren durch Auflösung die sehr brauchbaren Formeln von Ampère

$$y_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{z_1} \pm \sqrt{-z_1 - 2 \left( a + \frac{b}{\sqrt{z_1}} \right)} \right\} \quad \text{XIX.}$$

$$y_{3,4} = \frac{1}{2} \left\{ -\sqrt{z_1} \pm \sqrt{-z_1 - 2 \left( a - \frac{b}{\sqrt{z_1}} \right)} \right\}.$$

Obige Ableitung wurde dem Mathiessen'schen Schlüssel zur Beispiel- und Aufgabensammlung von Heis entnommen.

Ist eine Gleichung von höherem Grade als vom vierten, so lassen sich ihre Wurzeln im Allgemeinen nicht auf algebraischem

Wege ermitteln. Hiefür haben *Rufini* und *Abel* strenge Beweise erbracht.

### § 21. Der Kreis mit imaginärem Radius.

Denkt man sich vom Centrum *O* (Fig. 20) mit dem Halbmesser  $i\varrho$  den Kreis beschrieben, so hat dieser die Gleichung

$$x^2 + y^2 = -\varrho^2. \quad \text{I.}$$

Für die Abscisse  $OQ = x$  entwickelt man hieraus

$$y = i\sqrt{x^2 + \varrho^2}. \quad \text{II.}$$

Setzt man

$$\eta = \sqrt{x^2 + \varrho^2}, \quad \text{III.}$$

so folgt aus II.

$$y = i\eta. \quad \text{IV.}$$

Mittels des letzten Wertes folgt aus I.

$$\eta^2 - x^2 = \varrho^2. \quad \text{V.}$$

Dies ist die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel von den Scheiteln *C* und *D*, wobei

$$OC = OD = \varrho \text{ ist.}$$

Die imaginär genommene Hyperbel gibt einen Zweig des imaginären Kreises, während die reelle Hyperbel einen solchen imaginären Kreisbogen vertritt.

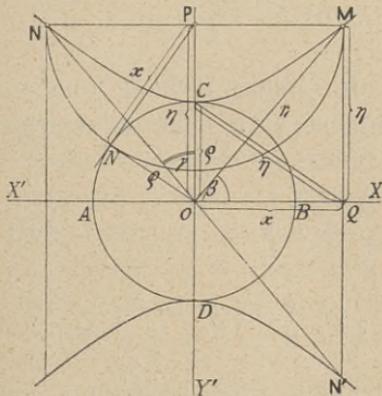


Fig. 20.

Zieht man  $CQ$ , so ist  $CQ = \eta = \sqrt{x^2 + \varrho^2}$ . Macht man dann  $OP = CQ$  und zieht  $PM \parallel OX$ , so findet man den Punkt *M*, welcher den imaginären Kreisbogen vertritt. Legt man an den Hauptkreis der Hyperbel von *P* aus die Tangente *PN*, so ist  $PN = x = \sqrt{\eta^2 - \varrho^2}$ . Der imaginäre Kreisbogen  $M_i$  hat die Coordinaten  $x$  und  $i\eta$ . Sein Abstand  $OM_i$  vom Centrum *O* ist gegeben durch  $OM_i = i\varrho$ . Dieser imaginäre Radius  $OM_i$  liefert auf *OX* die

Projection  $OQ = x$ . Setzt man  $\sphericalangle XOM_i$  allgemein gleich  $\alpha + i\varphi$ , so hat man

$$\cos(\alpha + i\varphi) = \frac{x}{i\varrho} = -i \frac{x}{\varrho}.$$

Für  $\varrho = 1$  liefert § 17, VII.

$$\text{arc cos}(-ix) = \frac{\pi}{2} + i\varphi.$$

Demnach ist

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{und}$$

$$\sphericalangle XOM_i = \frac{\pi}{2} + i\varphi. \quad \text{VI.}$$

Ist  $\mathbf{PN} = x$ , so ist  $\sphericalangle XON$  der Vertreter des complexen Winkels  $XOM_i$ . Eigentlich hätte man erwarten sollen, dass  $\sphericalangle XOM$  das Bild von  $\sphericalangle XOM_i$  sei. Man bedenke aber, dass  $OM_i$  den imaginären Wert  $i$  besitzt und damit ist der Unterschied zwischen Fig. 14 und 20 klar gelegt. In Fig. 14 ist nämlich  $OM_i = 1$ . Damit ist das Paradoxon aufgeklärt.

An dieser Stelle lässt sich auch das Verhalten der Formel XI. in § 12 für den doppelten Hyperbelsector näher beleuchten. Sie lautet

$$2 \cdot BOM = \varphi = \frac{1}{2} \text{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \beta \right), \quad -\frac{\pi}{4} < \beta < +\frac{\pi}{4}. \quad \text{VII.}$$

Diese Formel versagt für

$$\frac{3\pi}{4} > \beta > \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad -\frac{\pi}{4} > \beta > -\frac{3\pi}{4},$$

denn  $\text{tg}(\frac{\pi}{4} + \beta)$  ist diesfalls negativ. In obiger Formel kommen Übergänge aus dem Reellen ins Complexe vor. Der allgemeine Winkelausdruck XII. in § 13 lautet

$$\alpha + i\varphi = \frac{i}{2} L_0 \text{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \beta \right). \quad \text{VIII.}$$

$$\text{Für } \frac{3\pi}{4} > \beta > \frac{\pi}{4}, \text{ sei } \gamma = \frac{\pi}{2} - \beta.$$

Durch Einführung von  $\gamma$  liefert VIII. unter Rücksichtnahme auf § 9, XII.

$$\alpha + i\varphi = \frac{i}{2} L_0 \text{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \gamma \right) = \frac{i}{2} L_0 \text{tg} \left[ \pi - \left( \frac{\pi}{4} + \gamma \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{i}{2} L_0 \left\{ -\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \gamma \right) \right\} = \frac{i}{2} L_0 (-1) + \frac{i}{2} L_0 \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \gamma \right) \\
 &= \frac{i}{2} \cdot (\pm i\pi) + \frac{i}{2} l \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \gamma \right)
 \end{aligned}$$

$$\alpha + i\varphi = \pm \frac{\pi}{2} + \frac{i}{2} l \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \gamma \right). \quad \text{IX.}$$

Demnach wäre

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{2} \text{ und } \varphi = \frac{1}{2} l \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \gamma \right);$$

dies ist aber der Ausdruck für die Fläche des doppelten Hyperbelsectors  $CON$ .

Ist  $\sphericalangle XOM = \beta$ , dann ist  $YOM = YON = \gamma$ , und  $(\frac{\pi}{2} + i\varphi)$  hätte den reellen Vertreter

$$\sphericalangle XON = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + \gamma \\ \pi - \beta \end{cases}.$$

Der zweite Wert  $(\frac{\pi}{2} + i\varphi)$  hat den Vertreter  $XON'$ , wenn  $ON'$  in die Rückverlängerung von  $ON$  fällt.

Ist  $x^2 + y^2 = 1$  die Gleichung des reellen Kreises in Fig. 14 und  $OM = r$  der Radius der Hyperbel, die den imaginären Kreis-  
zweig vertritt, so ist

$$r^2 = \frac{1}{\cos 2\beta} = \frac{1}{\cos 2(\frac{\pi}{2} - \gamma)} = \frac{1}{\cos \{\pi - 2\gamma\}} = \frac{-1}{\cos 2\gamma} = \frac{i^2}{\cos 2\gamma}.$$

Für  $\frac{3\pi}{4} > \beta > \frac{\pi}{4}$  wird demnach  $r$  imaginär und würde für den vorliegenden Fall mit  $ir_1$  identisch, wenn  $OM = r_1$  gesetzt würde. Nennt man den Endpunkt des unter dem Winkel  $\beta > \frac{\pi}{4}$  gegen  $OX$  gezogen gedachten Radius der Hyperbel  $M'_i$ , so ist  $M$  in Fig. 20 der Vertreter dieses Hyperbelpunktes. Es ist dann  $OM'_i = ir_1$  und  $\sphericalangle XOM'_i = \beta$ ; für den Kreispunkt  $M_i$  dagegen ist  $OM_i = i$ , während  $\sphericalangle XOM_i$  den Wert  $(\frac{\pi}{2} + i\varphi)$  und den reellen Vertreter  $XON = \frac{\pi}{2} + \gamma = \pi - \beta$  besitzt.

Man ersieht aus dem Obigen folgendes: Wenn man den imaginären Kreis durch einen reellen, von absolut gleichem Halbmesser ersetzt, und ebenso den imaginären Kreis-  
zweig durch eine reelle Hyperbel, so muss man der letzteren bei der Winkeldarstellung noch eine halbe Umdrehung im Raume um die Achse  $CD$  ertheilen.

Die Definitionen VIII. bis IX. in § 13 erscheinen für die Fläche des Winkels  $XOM_i$  in § 21 unter Voraussetzung  $\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{3\pi}{4}$  in folgender Gestalt:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} + i\varphi\right) &= \frac{\cos \beta}{\sqrt{\cos 2\beta}} = \frac{\sin \gamma}{\sqrt{\cos 2\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)}} = \frac{\sin \gamma}{\sqrt{-\cos 2\gamma}} \\ &= -i \frac{\sin \gamma}{\sqrt{\cos 2\gamma}} = -i \sin i\varphi. \end{aligned} \quad \text{X.}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + i\varphi\right) = \frac{i \sin \beta}{\sqrt{\cos 2\beta}} = \frac{i \cos \gamma}{i \sqrt{\cos 2\gamma}} = \frac{\cos \gamma}{\sqrt{\cos 2\gamma}} = \cos i\varphi. \quad \text{XI.}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + i\varphi\right) = i \operatorname{tg} \beta = i \operatorname{cotg} \gamma = -\operatorname{cotg} i\varphi. \quad \text{XII.}$$

Wenn  $\beta > \frac{\pi}{2}$  wird, dann fällt in Fig. 20 **N** in den ersten Quadranten (resp. 2. Octanten).

Für ein reelles  $y$  erhält man aus I.  $x = \pm i \sqrt{\varrho^2 + y^2}$  der Punkt  $M_i$  ist imaginär.

$$\cos XOM_i = \frac{x}{i\varrho} = \pm \frac{\sqrt{\varrho^2 + y^2}}{\varrho}; \quad \sin XOM_i = \frac{y}{i\varrho} = -i \frac{y}{\varrho}.$$

Mithin ist  $\sphericalangle XOM_i = -i\varphi$  oder  $= -(\pi - i\varphi)$ . Ist  $x = i\xi$  imaginär, so ist auch  $y = i\eta$  imaginär, wenn zugleich  $\xi^2 < \varrho^2$  ist. Dann ist  $\cos XOM_i = \frac{\xi}{\varrho}$  und  $\sin XOM_i = \frac{\eta}{\varrho}$  u. demnach  $\sphericalangle XOM_i = \alpha$  reell. Wenn  $x$  einen complexen Wert besitzt, so sind  $y$  und  $\sphericalangle XOM_i$  im allgemeinen auch complex. Man überzeuge sich hievon durch Drehung der Fig. 20 um einen Winkel  $\alpha$ , wobei die ursprüngliche Lage der Achsen  $OX$  und  $OY$  mit  $O\mathfrak{X}$  und  $O\mathfrak{Y}$  bezeichnet werden möge, damit bezüglich der nachfolgenden Untersuchungen über den Kreis mit complexem Radius Übereinstimmung herrsche.

## § 22. Hyperbolische Winkelfunctionen.

Misst man den Winkel  $XOM$  in Fig. 14 nicht mit der Fläche  $\varphi$  des doppelten Hyperbelsectors  $BOM$ , sondern mit dem Bogen  $\beta$ , der dann keiner Beschränkung unterliegt, so gelangt man zu den hyperbolischen Winkelfunctionen. Um Irrthümern bezüglich der Leseart zu begegnen, wird das Symbol  $\beta$  mit einem vorgesetzten Winkelzeichen versehen. Man hat demnach

$$\operatorname{Ch} \sphericalangle \beta = \frac{\cos \beta}{\sqrt{\cos 2\beta}}, \quad \operatorname{Sh} \sphericalangle \beta = \frac{\sin \beta}{\sqrt{\cos 2\beta}}, \quad \operatorname{Th} \sphericalangle \beta = \operatorname{tg} \beta. \quad \text{I.}$$

Die Fig. 21—23 zeigen den Verlauf obiger Function für verschiedene  $\angle \beta$ ; die Ordinaten sind auf ein Viertel verjüngt. Punktirte Curvenzweige deuten an, dass in dem betreffenden Falle die Function imaginär ist. Nimmt man den Bogen  $BM$  der Hyperbel (Fig. 14) als Variable, so ergeben sich die Linienfunctionen. Drückt man den Bogen  $BM$  durch  $OM = r$  aus, so erhält man nachstehenden Ausdruck, welchen eine so complicierte Abhängigkeit kennzeichnet, dass er zur Benützung ungeeignet erscheint.

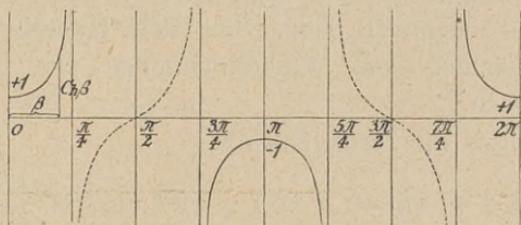


Fig. 21.

$$BM = \{r - 1\} + \frac{1}{2 \cdot 3} \left\{1 - \frac{1}{r^3}\right\} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 7} \left\{1 - \frac{1}{r^7}\right\} + \dots \quad \text{II.}$$

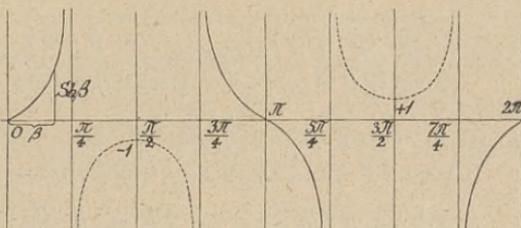


Fig. 22.

Bezüglich der Ableitung vergleiche man die Fußnote. \*)

$$\begin{aligned}
 &*) \\
 BM &= \int_1^r (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = \int_1^r \{dr^2 + r^2 d\beta\}^{\frac{1}{2}} & x = r \cos \beta, \quad y = r \sin \beta, \quad r^2 = \frac{1}{\cos 2\beta} \\
 & & \beta = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{r^2} \\
 BM &= \int_1^r \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{1}{r^4}}} = \int_1^r \left\{1 - \frac{1}{r^4}\right\}^{-\frac{1}{2}} dr & d\beta = \frac{dr}{r^3 \sqrt{1 - \frac{1}{r^4}}}.
 \end{aligned}$$

Merkwürdig ist auch die Beziehung  $BM = \int_1^r r^3 d\beta$ . Da  $r d\beta$  das Element der Normale durch  $M$  zu  $OM$  ist, und  $r^2 = \frac{1}{\cos 2\beta} = \sec 2\beta$ , so folgt hieraus, die an der Figur leicht zu beweisende Eigenschaft, dass die Normale zu  $OM$

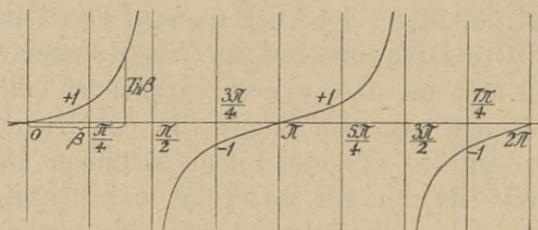


Fig. 23.

Es ist bedeutsam, dass beim Kreise Winkel-, Flächen- und Linienfunktionen identisch sind. Bei der Hyperbel sind gemäß Fig. 22 die Flächen- und Winkelfunktionen nur im 1. und 8. Octanten identisch.

Aus I. folgen die Grundformeln

$$\text{Ch}^2 \sphericalangle \beta - \text{Sh}^2 \sphericalangle \beta = 1 \quad \text{Th} \sphericalangle \beta = \frac{\text{Sh} \sphericalangle \beta}{\text{Ch} \sphericalangle \beta}. \quad \text{III.}$$

Die analogen Formeln nach § 13 wären

$$\text{Ch}^2 \varphi - \text{Sh}^2 \varphi = 1 \quad \text{Th} \varphi = \frac{\text{Sh} \varphi}{\text{Ch} \varphi}.$$

Ferner ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{Ch} \sphericalangle (\beta + \gamma) &= \frac{\cos (\beta + \gamma)}{\sqrt{\cos (2\beta + 2\gamma)}} = \frac{\cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma}{\sqrt{\cos 2\beta \cos 2\gamma - \sin 2\beta \sin 2\gamma}} \\ &= \frac{\cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma}{\sqrt{\cos 2\beta} \sqrt{\cos 2\gamma} \sqrt{1 - \text{tg} 2\beta \text{tg} 2\gamma}} \\ &= \frac{\text{Ch} \sphericalangle \beta \text{Ch} \sphericalangle \gamma - \text{Sh} \sphericalangle \beta \text{Sh} \sphericalangle \gamma}{\sqrt{1 - \text{Th} \sphericalangle 2\beta \text{Th} \sphericalangle 2\gamma}}. \quad \text{IV.} \end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\text{Sh} \sphericalangle (\beta + \gamma) = \frac{\text{Sh} \sphericalangle \beta \text{Ch} \sphericalangle \gamma + \text{Ch} \sphericalangle \beta \text{Sh} \sphericalangle \gamma}{\sqrt{1 - \text{Th} \sphericalangle 2\beta \text{Th} \sphericalangle 2\gamma}} \quad \text{V.}$$

$$\text{Th} \sphericalangle (\beta + \gamma) = \text{tg} (\beta + \gamma) = \frac{\text{tg} \beta + \text{tg} \gamma}{1 - \text{tg} \beta \text{tg} \gamma} = \frac{\text{Th} \sphericalangle \beta + \text{Th} \sphericalangle \gamma}{1 - \text{Th} \sphericalangle \beta \text{Th} \sphericalangle \gamma}. \quad \text{VI.}$$

Die entsprechenden Formeln für die Flächenfunktionen werden lauten:

mit der Tangente **MP** den Winkel  $2\beta$  bildet. Das Bogenelement  $ds = r^3 d\beta$  bildet mit dem Normalelement den Winkel  $2\beta$ . Man vergleiche § 37, worin diese Eigenschaften an dem zu **M** symmetrischen Punkte **N** nachgewiesen werden.

$$\text{Ch}(\varphi + \psi) = \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi$$

$$\text{Sh}(\varphi + \psi) = \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi$$

$$\text{Th}(\varphi + \psi) = \frac{\text{Th} \varphi + \text{Th} \psi}{1 - \text{Th} \varphi \text{Th} \psi}.$$

Aus IV. bis VI. folgt für  $\beta = \gamma$

$$\text{Ch} \sphericalangle 2\beta = \frac{\text{Ch}^2 \sphericalangle \beta - \text{Sh}^2 \sphericalangle \beta}{\sqrt{1 - \text{Th}^2 \sphericalangle 2\beta}} \quad \text{VII.}$$

$$\text{Sh} \sphericalangle 2\beta = \frac{2 \text{Sh} \sphericalangle \beta \text{Ch} \sphericalangle \beta}{\sqrt{1 - \text{Th}^2 \sphericalangle 2\beta}} \quad \text{VIII.}$$

$$\text{Th} \sphericalangle 2\beta = \frac{2 \text{Th} \sphericalangle \beta}{1 - \text{Th}^2 \sphericalangle \beta}. \quad \text{IX.}$$

Versteht man unter

$$\alpha + i\varphi = \frac{i}{2} L_0 \text{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \beta \right), \quad \text{X.}$$

so kann man die Functionen imaginärer und gewisser complexer Winkel durch hyperbolische Functionen ausdrücken.

$$\cos(\alpha + i\varphi) = \text{Ch} \sphericalangle \beta \quad \text{XI.}$$

$$\sin(\alpha + i\varphi) = i \text{Sh} \sphericalangle \beta \quad \text{XII.}$$

$$\text{tg}(\alpha + i\varphi) = i \text{Th} \sphericalangle \beta; \quad \text{XIII.}$$

$\alpha$  ist für  $-\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{4}$  ferner für  $\frac{3\pi}{4} < \beta < \frac{5\pi}{4}$  gleich Null; sonst hatte  $\alpha$  den Wert  $\pm \frac{\pi}{2}$ ;  $\varphi$  verläuft so, wie Fig. 24 anzeigt. Für  $\alpha$  wurde stets nur ein Wert verzeichnet.

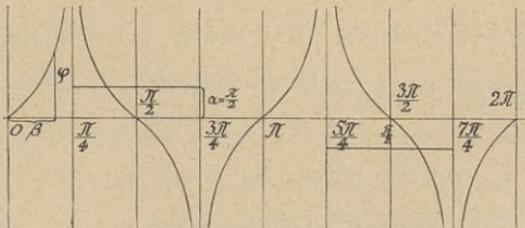


Fig. 24.

Ist  $-\frac{\pi}{4} < \beta < +\frac{\pi}{4}$ , so könnte man imaginäre Winkel auch durch den Bogen  $\sphericalangle \beta$  messen. Es wäre dann

$$\cos i \sphericalangle \beta = \text{Ch} \sphericalangle \beta, \sin i \sphericalangle \beta = i \text{Sh} \sphericalangle \beta, \text{tgi} \sphericalangle \beta = \text{Th} \sphericalangle \beta = i \text{tg} \beta. \quad \text{XIV.}$$

Vorausgesetzt, dass  $-\frac{\pi}{4} < (\beta + \gamma) < +\frac{\pi}{4}$  ist, gelten dann auch alle Formeln von III. bis X. Man erhielte

$$\cos i \sphericalangle (\beta + \gamma) = \frac{\cos i \sphericalangle \beta \cos i \sphericalangle \gamma + \sin i \sphericalangle \beta \sin i \sphericalangle \gamma}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} i \sphericalangle 2\beta \operatorname{tg} i \sphericalangle 2\gamma}} \quad \text{XV.}$$

$$\sin i \sphericalangle (\beta + \gamma) = \frac{\sin i \sphericalangle \beta \cos i \sphericalangle \gamma + \cos i \sphericalangle \beta \sin i \sphericalangle \gamma}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} i \sphericalangle 2\beta \operatorname{tg} i \sphericalangle 2\gamma}} \quad \text{XVI.}$$

$$\operatorname{tg} i \sphericalangle (\beta + \gamma) = \frac{\operatorname{tg} i \sphericalangle \beta + \operatorname{tg} i \sphericalangle \gamma}{1 + \operatorname{tg} i \sphericalangle \beta \operatorname{tg} i \sphericalangle \gamma}. \quad \text{XVII.}$$

Die zu  $\sphericalangle (\beta + \gamma)$  gehörige imaginäre Winkelfläche ( $\alpha = 0$ ) muss nach X. berechnet werden, indem man  $\beta$  durch  $(\beta + \gamma)$  ersetzt.

Speziell würde sich ergeben

$$\cos i \sphericalangle 2\beta = \frac{\cos^2 i \sphericalangle \beta + \sin^2 i \sphericalangle \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 i \sphericalangle \beta}} = \frac{1}{\sec i \sphericalangle \beta} \quad \text{XVIII.}$$

$$\sin i \sphericalangle 2\beta = \frac{2 \sin i \sphericalangle \beta \cos i \sphericalangle \beta}{\sec i \sphericalangle \beta} \quad \text{XIX.}$$

$$\operatorname{tg} i \sphericalangle 2\beta = 2 \sin i \sphericalangle \beta \cos i \sphericalangle \beta. \quad \text{XX.}$$

Obige Formeln sind bemerkenswerte Seitenstücke zu

$$\cos 2i\varphi = \frac{1}{\cos 2\beta}, \quad \sin 2i\varphi = i \operatorname{tg} 2\beta, \quad \operatorname{tg} 2i\varphi = i \sin 2\beta$$

aus § 15 XXI. und § 16 XVI. und XVII.

Man vergleiche mit XV. bis XX.

$$\cos i (\varphi + \psi) = \cos i\varphi \cos i\psi - \sin i\varphi \sin i\psi$$

$$\sin i (\varphi + \psi) = \sin i\varphi \cos i\psi + \cos i\varphi \sin i\psi$$

$$\operatorname{tg} i (\varphi + \psi) = \frac{\operatorname{tg} i\varphi + \operatorname{tg} i\psi}{1 - \operatorname{tg} i\varphi \operatorname{tg} i\psi}$$

$$\cos i 2\varphi = \cos^2 i\varphi - \sin^2 i\varphi$$

$$\sin i 2\varphi = 2 \sin i\varphi \cos i\varphi$$

$$\operatorname{tg} i 2\varphi = \frac{2 \operatorname{tg} i\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 i\varphi}.$$

Die den Functionen imaginärer Winkel entsprechenden cyclo-metrischen Functionen könnte man durch das Symbol „ang“ (von *an g u l u s*, der Winkel) kennzeichnen und angulometrische Functionen nennen.

So folgt z. B. aus

$$\cos i \sphericalangle \beta = \frac{\cos \beta}{\sqrt{\cos 2\beta}} = x$$

$$\text{ang } \cos x = i \text{ arc } \cos \frac{x}{\sqrt{2x^2 - 1}}, \quad x^2 > 1. \quad \text{XXI.}$$

Analog ergibt sich aus

$$\sin i \sphericalangle \beta = \frac{i \sin \beta}{\sqrt{\cos 2\beta}} = iy$$

$$\text{ang } \sin iy = i \text{ arc } \sin \frac{y}{\sqrt{2y^2 + 1}}. \quad \text{XXII.}$$

Schließlich ist gemäß

$$\begin{aligned} \text{tg } i \sphericalangle \beta &= i \text{tg } \beta = iz \\ \text{ang } \text{tg } iz &= i \text{ arctg } z \quad z^2 < 1. \quad \text{XXIII.} \end{aligned}$$

Es ist klar, dass die Formeln von XIV. bis XX. für den Geometer wichtig sind, denn dieser muss die Winkel mittels des Bogens messen. Um die Fläche der jeweiligen Hyperbelsectoren zu ermitteln, müsste er sich eines Polarplanimeters bedienen. Tatsächlich haben mir diese Formeln gute Dienste geleistet und sind die Anregung zur ganzen Arbeit gewesen. (Vergleiche die „Goniometrischen Functionen complexer Winkel 1892“, in welcher Abhandlung übrigens einige Irrthümer dadurch unterlaufen sind, dass bei Anwendung der Formeln das Intervall  $(-\frac{\pi}{4} \text{ bis } +\frac{\pi}{4})$  für  $\beta$  überschritten wurde.)

### § 23. Der Kreis mit complexem Radius.

Bei den nachstehenden Entwicklungen werden folgende Schriftarten unterschieden:

Cursivschrift:  $x, y$ ,      Mediaevalschreibschrift:  $x, y$ ,  
 Steinschrift:  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ,      Antiquaschrift:  $x, y$ ,  
 Rundschrift:  $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$  und griechische Schrift:  $\xi, \eta$ .

In Fig. 25 sei  $ON = r$ ,  $NM = \rho$ ,  $OQ = x$ ,  $QN = y$ ,  $NS = x$  und  $SM = y$ .  $\mathbf{M}$  sei der Vertreter des imaginären Punktes  $M_i$  in dem Strahle  $ON$ , so dass  $XOM_i = i\varphi$  ist. Zieht man  $NS \parallel OX$ , und bezieht man den Punkt  $M_i$  auf das neue Achsensystem  $NS, NQ$ , so hat  $M_i$  die Coordinaten  $NS_i = ix$ , und  $SM_i = iy$ . In Bezug auf das Coordinatensystem  $XOY$  hat  $M_i$  diese Coordinaten:

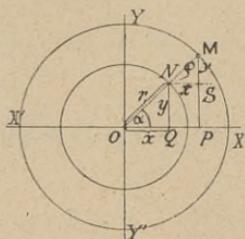


Fig. 25.

$$M_i \begin{cases} x + ix \\ y + iy \end{cases} \quad \text{I.}$$

Ist  $\sphericalangle XOM_i = \alpha$ , so herrschen in I. folgende Beziehungen

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha \quad \text{II.}$$

$$x = \rho \cos \alpha, \quad y = \rho \sin \alpha$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{III.}$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \quad \text{IV.}$$

Aus II. erhält man durch Division

$$\frac{x}{x} = \frac{y}{y} = \frac{r}{\rho} \quad \text{V.}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{VI.}$$

$$xy = yx. \quad \text{VII.}$$

Ferner ergibt sich aus III. und IV. für den Modul  $m$  des complexen Radius  $OM_i = r + i\rho$

$$x^2 + y^2 + x^2 + y^2 = r^2 + \rho^2 = m^2. \quad \text{VIII.}$$

Durch Addition der aus VII. entnommenen Identität

$$- 2xy + 2yx = 0$$

entwickelt man aus VIII.

$$(x - y)^2 + (x + y)^2 = r^2 + \rho^2 = m^2. \quad \text{IX.}$$

Analog ist

$$(x + y)^2 + (y - x)^2 = r^2 + \rho^2 = m^2.$$

Aus II. resultieren ferner

$$x + ix = (r + i\rho) \cos \alpha \quad \text{X.}$$

$$y + iy = (r + i\rho) \sin \alpha.$$

Hieraus folgt die Gleichung des mit  $OM_i = r + i\rho$  beschriebenen Kreises:

$$(x + ix)^2 + (y + iy)^2 = (r + i\rho)^2 \quad \text{XI.}$$

Durch Trennung des Reellen vom Imaginären ergibt sich aus dieser Kreisgleichung:



### § 24. Imaginäre Zweige des complexen Kreises.

Solange  $\sphericalangle XOM_i = \alpha$  reell ist, bestehen gemäß II. die Grenzbedingungen

$$\begin{aligned} x^2 &\leq r^2 & x^2 &\leq \varrho^2 \\ y^2 &\leq r^2 & y^2 &\leq \varrho^2. \end{aligned}$$

Überschreitet man diese Grenzen, so gelangt man zu Radien, welche mit  $OX$  einen imaginären Winkel bilden.

Es sei  $x > r$ , und gemäß V. in § 23 auch  $x > \varrho$ , wobei  $\frac{x}{r} = \frac{r}{\varrho}$  und  $\frac{x}{r} = \frac{x}{\varrho} = \cos i\varphi$  ist. Denn die Relationen II. in § 23 liefern jetzt wegen  $\frac{x}{r} > 1$  einen imaginären Winkel, wenn man unter  $r$  und  $\varrho$  positive Größen versteht. Man erhält

$$\begin{aligned} x &= r \cos i\varphi, & y &= r \sin i\varphi \\ x &= \varrho \cos i\varphi, & y &= \varrho \sin i\varphi. \end{aligned} \quad \text{I.}$$

Hierin sind  $x$  und  $x$  reell, während  $y$  und  $y$  imaginäre Werte bedeuten; setzt man

$$\begin{aligned} y &= iy = ir \frac{\sin i\varphi}{i} \\ y &= iy = i\varrho \frac{\sin i\varphi}{i}, \end{aligned} \quad \text{II.}$$

so gehen die Relationen III. und IV. in § 23 über in

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= r^2 \\ x^2 - y^2 &= \varrho^2. \end{aligned} \quad \text{III.}$$

Die Kreisgleichung § 23, XI. lautet nun:

$$(x + ix)^2 + (-y + iy)^2 = (r + i\varrho)^2. \quad \text{IV.}$$

Trennt man das Reelle vom Imaginären, so folgt

$$x^2 - y^2 - (x^2 - y^2) = r^2 - \varrho^2 \quad \text{V.}$$

$$xx - yy = r\varrho. \quad \text{VI.}$$

Die Relationen unter III. sind die Gleichungen zweier gleichseitiger Hyperbeln, von den Hauptachsen  $r$ , beziehungsweise  $\varrho$ ; der bezügliche Kreispunkt  $M_i$  ist nun bestimmt durch

$$M_i \begin{cases} x + ix \\ -y + iy. \end{cases} \quad \text{VII.}$$





$$OK = m \cos i\varphi, \quad KL = m \frac{\sin i\varphi}{i}, \quad \frac{KL}{OK} = \frac{tg i\varphi}{i} = tg \beta.$$

Ferner ist

$$OM_1 = OK - KM_1 = m (\cos i\varphi + i \sin i\varphi) = m_1$$

$$OM_2 = OK + KM_2 = m (\cos i\varphi - i \sin i\varphi) = m_2.$$

Da  $\sphericalangle QOK = \gamma$  die Amplitude von  $m = OM$  ist, so zieht man  $MA \perp OQ$  und findet  $r = OA$  und  $\varrho = AM$ .

### § 25. Drehung des imaginären Kreisweiges.

Dreht man die Fig. 28 um den  $\sphericalangle \alpha$  nach aufwärts und bezieht dann **M** auf die Achsen  $O\mathfrak{X}$  und  $O\mathfrak{Y}$ , welche mit den ursprünglichen Lagen von  $OX$  und  $OY$  zusammenfallen, so erhält der Punkt  $M_i$  mit den alten Coordinaten  $(\mathbf{x} + i\mathbf{x})$  und  $(-\mathbf{y} + i\mathbf{y})$  die neuen Coordinaten

$$\begin{aligned} x + i\xi &= (\mathbf{x} + i\mathbf{x}) \cos \alpha - (-\mathbf{y} + i\mathbf{y}) \sin \alpha \\ y + i\eta &= (\mathbf{x} + i\mathbf{x}) \sin \alpha + (-\mathbf{y} + i\mathbf{y}) \cos \alpha. \end{aligned} \quad \text{I.}$$

Ordnet man hierin und trennt dann das Reelle vom Imaginären, so ergibt sich

$$\begin{aligned} x &= \mathbf{x} \cos \alpha + \mathbf{y} \sin \alpha, & y &= \mathbf{x} \sin \alpha - \mathbf{y} \cos \alpha \\ \xi &= -\mathbf{y} \sin \alpha + \mathbf{x} \cos \alpha, & \eta &= \mathbf{y} \cos \alpha + \mathbf{x} \sin \alpha. \end{aligned} \quad \text{II.}$$

Ersetzt man  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $x$  und  $y$  aus I. und II. in § 24, so folgt aus I.

$$\begin{aligned} x + i\xi &= (r + i\varrho) \cos (\alpha + i\varphi) \\ y + i\eta &= (r + i\varrho) \sin (\alpha + i\varphi). \end{aligned} \quad \text{III.}$$

Dies sind die analogen Formeln zu § 23, X., wenn man  $\alpha$  durch  $(\alpha + i\varphi)$  substituiert.

Der Ersatzpunkt **M** von  $M_i$  ist dann gegeben durch

$$\mathbf{M} \begin{cases} x + \xi \\ y + \eta \end{cases} \quad \text{IV.}$$

Löst man die Transformationsgleichungen unter II., nach  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $x$  und  $y$  auf, so resultieren

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x \cos \alpha + \mathbf{y} \sin \alpha, & \mathbf{y} &= -\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha \\ x &= \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha, & y &= x \sin \alpha - \mathbf{y} \cos \alpha. \end{aligned} \quad \text{V.}$$

Hieraus erhält man

$$\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 = x^2 + y^2 \quad \text{VI.}$$

$$\mathbf{y}^2 + \mathbf{x}^2 = \xi^2 + \eta^2 \quad \text{VII.}$$

$$\mathbf{x}\mathbf{x} - \mathbf{y}\mathbf{y} = x\xi + y\eta \quad \text{VIII.}$$

$$\mathbf{x}\mathbf{y} + \mathbf{y}\mathbf{x} = x\eta - y\xi. \quad \text{IX.}$$

Aus den Gleichungen VI. und VII. combinirt man

$$x^2 + y^2 - (\xi^2 + \eta^2) = \mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2 - (x^2 - y^2). \quad \text{X.}$$

Aus X. und VIII. folgen dann unter Bezug auf § 24, V. und VI.

$$x^2 + y^2 - (\xi^2 + \eta^2) = r^2 - \rho^2 \quad \text{XI.}$$

$$x\xi + y\eta = r\rho. \quad \text{XII.}$$

Dies sind aber wieder die analogen Formeln zu § 23, XII. und XIII.

Der imaginäre Punkt  $M_i \begin{cases} x + i\xi \\ y + i\eta \end{cases}$  erfüllt die Kreisgleichung mit seinen Coordinaten folgendermaßen

$$(x + i\xi)^2 + (y + i\eta)^2 = (r + i\rho)^2. \quad \text{XIII.}$$

Durch Trennung des Reellen vom Imaginären folgen gleichfalls die Relationen XI. und XII.

Die obigen Formeln lassen sich auch auf rein analytischem Wege erhalten, indem man in § 23, II. den Winkel  $\alpha$  durch  $(\alpha + i\varphi)$  substituirt. Es ergibt sich

$$x' = r \cos(\alpha + i\varphi), \quad y' = r \sin(\alpha + i\varphi)$$

$$x' = \rho \cos(\alpha + i\varphi), \quad y' = \rho \sin(\alpha + i\varphi);$$

$x'$  und  $x''$  sowie  $y'$  und  $y''$  sind diesfalls complexe Zahlen. Combinirt man sie gemäß § 23, I., so folgen

$$x' + ix'' = r \cos \alpha \cos i\varphi + \rho \sin \alpha \frac{\sin i\varphi}{i} + i \left\{ -r \sin \alpha \frac{\sin i\varphi}{i} + \rho \cos \alpha \cos \varphi i \right\}$$

$$y' + iy'' = r \sin \alpha \cos i\varphi - \rho \cos \alpha \frac{\sin i\varphi}{i} + i \left\{ r \cos \alpha \frac{\sin i\varphi}{i} + \rho \sin \alpha \frac{\cos i\varphi}{i} \right\}.$$

Führt man hierin mittels § 24, I., II. die Größen  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $x$ ,  $y$  ein, so ergeben sich die Formeln



$$\begin{aligned} OR_1 &= OQ_1 + Q_1R_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ R_1M_1 &= R_1Z_1 - M_1Z_1 = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ OR_2 &= OQ_2 - R_2Q_2 = x \sin \alpha - y \cos \alpha \\ R_2M_2 &= R_2Z_2 + Z_2M_2 = x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{aligned}$$

Vergleicht man hiemit § 25 II., so ergeben sich die Beziehungen

$$OR_1 = x, \quad R_1M_1 = \xi, \quad OR_2 = y \quad \text{und} \quad R_2M_2 = \eta.$$

Aus den rechtwinkligen Dreiecken  $OQR$  und  $OR_2R$  folgen

$$\overline{OQ}^2 + \overline{QR}^2 = \overline{OR}^2 \quad \text{und} \quad \overline{R_2R}^2 + \overline{R_2O}^2 = \overline{OR}^2 \quad \text{I.}$$

und man hat daher

$$\begin{aligned} \overline{OQ}^2 + \overline{QR}^2 &= \overline{R_2R}^2 + \overline{R_2O}^2 \quad \text{oder} \\ x^2 + y^2 &= x^2 + y^2. \end{aligned} \quad \text{II.}$$

Dies ist aber die Formel VI. aus § 25.

Zieht man  $RH \parallel OX$  bis zum Durchschnitte  $H$  mit  $MM_1$ , so ergeben die rechtwinkligen Dreiecke  $RZM$  und  $RHM$

$$\overline{RZ}^2 + \overline{ZM}^2 = \overline{RM}^2 \quad \text{und} \quad \overline{RH}^2 + \overline{HM}^2 = \overline{RM}^2. \quad \text{III.}$$

Mithin ist

$$\begin{aligned} \overline{RZ}^2 + \overline{ZM}^2 &= \overline{RH}^2 + \overline{HM}^2 \quad \text{oder} \\ x^2 + y^2 &= \xi^2 + \eta^2. \end{aligned} \quad \text{IV.}$$

Damit ist Formel VII. in § 25 erhärtet.

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke  $OPM$  folgt

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = (x + x)^2 + (y - y)^2.$$

Das Dreieck  $OM_1M$  dagegen liefert

$$\overline{OM}^2 = \overline{OM_1}^2 + \overline{M_1M}^2 = (x + \xi)^2 + (y + \eta)^2.$$

Man bedenke aber hierbei, dass  $y$  negativ ist.

Die beiden letzten Gleichungen liefern mit Rücksicht auf II. und IV. nach geschehenem Kürzen

$$xx - yy = x\xi + y\eta. \quad \text{V.}$$

Dies stimmt mit Formel VIII. in § 25 überein.

Nach I. und III. ist

$$\begin{aligned} \overline{OR}^2 &= \overline{OQ}^2 + \overline{QR}^2 = x^2 + y^2 \\ \overline{RM}^2 &= \overline{RZ}^2 + \overline{ZM}^2 = x^2 + y^2. \end{aligned} \quad \text{VI.}$$

Durch Subtraction erhält man aus diesen Relationen

$$\overline{OR}^2 - \overline{RM}^2 = x^2 - y^2 - (x^2 - y^2).$$

Mittels III. in § 24 folgt weiter

$$\overline{OR}^2 - \overline{RM}^2 = r^2 - \varrho^2. \quad \text{VII.}$$

Hiernach ist  $\sqrt{r^2 - \varrho^2}$  als zweite Kathete zur Hypothenuse von der Länge  $OR$  und zur Kathete von der Länge  $RM$  leicht zu construieren.

Gleichung VII. ist die auf conjugierte Durchmesser bezogene Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel vom Centrum  $O$ .  $OR$  ist der eine Durchmesser, dem reelle Endpunkte  $S$  und  $S'$  entsprechen, wenn  $r^2 > \varrho^2$  ist.  $OS = \sqrt{r^2 - \varrho^2}$ . Der andere Diameter geht durch  $O$  und parallel zu  $RM$ . Ist  $r^2 < \varrho^2$ , dann hat  $OR$  imaginäre Endpunkte, während der andere Durchmesser reelle Enden liefert. Für  $r = \varrho$  degeneriert die Hyperbel in ihre Asymptoten.

Die Asymptoten der genannten Hyperbel in Fig. 30 stehen zu einander normal.  $RM$  ist eine Halbsehne. Setzt man in  $R$  ein und schlägt mit  $RO$  den Kreis, so schneidet dieser in der Verlängerung von  $RM$  zwei Punkte heraus, durch welche die fraglichen Asymptoten gehen.

Addiert man die Gleichungen VI., so resultiert

$$\overline{OR}^2 + \overline{RM}^2 = x^2 + y^2 + x^2 + y^2.$$

Mit Bezug auf I. und II. in § 24 erhält man

$$\begin{aligned} \overline{OR}^2 + \overline{RM}^2 &= r^2 (\cos^2 i\varphi - \sin^2 i\varphi) + \varrho^2 (\cos^2 i\varphi - \sin^2 i\varphi) \\ \overline{OR}^2 + \overline{RM}^2 &= (r^2 + \varrho^2) \cos i 2\varphi \\ &= \frac{r^2 + \varrho^2}{\cos 2\beta} = \frac{r^2}{\cos 2\beta} + \frac{\varrho^2}{\cos 2\beta}. \end{aligned} \quad \text{VIII.}$$

Nun ist  $\overline{ON}^2 = \frac{r^2}{\cos 2\beta}$ ,  $\overline{NM}^2 = \frac{\varrho^2}{\cos 2\beta}$ .

Mithin ist

$$\overline{OR}^2 + \overline{RM}^2 = \overline{ON}^2 + \overline{NM}^2. \quad \text{IX.}$$

Nach dem Carnot'schen Satze folgt aus den Dreiecken  $ORM$  und  $ONM$

$$\overline{OM}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{RM}^2 - 2 OR \cdot RM \cos ORM$$

$$\overline{OM}^2 = \overline{ON}^2 + \overline{NM}^2 - 2 ON \cdot NM \cos ONM.$$

Hieraus erhält man durch Gleichstellung mittels IX.

$$OR \cdot RM \cos ORM = ON \cdot NM \cos ONM. \quad X.$$

Ferner ist mit Berücksichtigung von § 25, XII.

$$\overline{OM}^2 = (x + \xi)^2 + (y + \eta)^2 = x^2 + \xi^2 + y^2 + \eta^2 + 2(x\xi + y\eta)$$

$$\overline{OM}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{RM}^2 + 2r\varrho$$

Mithin gemäß VIII.

$$\overline{OM}^2 = (r^2 + \varrho^2) \cos i 2\varphi + 2r\varrho. \quad XI.$$

Dasselbe Resultat konnte man in § 24 aus  $\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = (x + x)^2 + (y - y)^2$  mittels I., II., V. und VI. ebendasselbst erhalten.

### § 27. Discussionen.

Die Hauptformeln I. und II. in § 25 lauten

$$x + i\xi = x \cos \alpha + y \sin \alpha + i(-y \sin \alpha + x \cos \alpha) \quad I.$$

$$y + i\eta = x \sin \alpha - y \cos \alpha + i(y \cos \alpha + x \sin \alpha). \quad II.$$

Hiezu kommen die Relationen I. und II. aus § 24

$$x = r \cos i\varphi \quad y = r \frac{\sin i\varphi}{i} \quad III.$$

$$x = \varrho \cos i\varphi \quad y = \varrho \frac{\sin i\varphi}{i}.$$

Ferner hat man nach XI. und XII. in § 25

$$x^2 + y^2 - (\xi^2 + \eta^2) = r^2 - \varrho^2 \quad IV.$$

$$x\xi + y\eta = r\varrho. \quad V.$$

Für  $r = 1$  und  $\varrho = 0$  folgen aus den obigen Beziehungen

$$x + i\xi = \cos(\alpha + i\varphi) = x \cos \alpha - i y \sin \alpha$$

$$y + i\eta = \sin(\alpha + i\varphi) = x \sin \alpha + i y \cos \alpha$$

$$x^2 + y^2 - (\xi^2 + \eta^2) = 1$$

$$x\xi + y\eta = 0.$$

Das sind dieselben Formeln, die in § 16 und § 17 bei der

Betrachtung von  $\arccos(a - ib)$  und  $\arcsin(c + id)$  zur Behandlung kamen, wenn man die Identität von  $x = a$ ,  $\xi = -b$ ,  $y = c$ ,  $\eta = d$  vermerkt.

Für  $\xi = 0$  erhält man aus I.

$$\xi = -y \sin \alpha + x \cos \alpha = 0$$

und unter Beachtung von III.

$$tg \alpha \, tg i\varphi = i \frac{\varrho}{r}. \quad \text{VI.}$$

Setzt man  $tg i\varphi = i \, tg \beta$ , so folgt weiter

$$tg \alpha \cdot tg \beta = \frac{\varrho}{r}. \quad \text{VII.}$$

Wenn außerdem  $x = 1$  ist, so ergibt sich gemäß III. in § 25

$$\frac{y + i\eta}{x + i\xi} = y + i\eta = tg(\alpha + i\varphi). \quad \text{VIII.}$$

Für das Verschwinden von  $\eta$  folgt aus II. gemäß

$$\eta = y \cos \alpha + x \sin \alpha = 0$$

unter Beachtung von III.

$$cotg \alpha \cdot tg i\varphi = -\frac{i\varrho}{r} \quad \text{IX.}$$

$$cotg \alpha \cdot tg \beta = -\frac{\varrho}{r}. \quad \text{X.}$$

$x$  erhält wegen

$$x = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

den Wert Null, wenn

$$cotg \alpha \, cotg i\varphi = \frac{i\varrho}{r} \quad \text{XI.}$$

$$cotg \alpha \, cotg \beta = -\frac{\varrho}{r}. \quad \text{XII.}$$

Soll  $y$  verschwinden, dann ergibt II.

$$y = x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0$$

$$tg \alpha \, cotg i\varphi = -i \frac{\varrho}{r} \quad \text{XIII.}$$

$$tg \alpha \, cotg \beta = + \frac{\varrho}{r}. \quad \text{XIV.}$$

Sollen  $\xi$  und  $\eta$  gleichzeitig verschwinden, dann folgt, solange  $\alpha$  nicht Null oder  $\frac{\pi}{2}$  ist, aus VII. und XIV. beim complexen Kreise

$$tg \beta = cotg \beta \text{ oder } tg^2 \beta = 1 .$$

Mithin muss  $tg \beta = \pm 1$  d. h.  $\beta = \pm \frac{\pi}{4}$  oder  $\varphi = \pm \infty$  sein ;  
 $tg \alpha = \pm \frac{\varrho}{r}$ .

Für  $\varrho = 0$  ist  $\alpha = 0$ ,  $\beta$  beliebig, und es ergibt sich der Fall in Fig. 14  $x = x$ ,  $\eta = y$ .

Ist aber  $r = 0$ , so ist  $tg \alpha = \infty$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\beta$  ist beliebig, so hat man  $x = y$ ,  $\eta = x$ ; dies entspricht der Fig. 20.

### § 28. Berechnung von $r$ , $\varrho$ , $\alpha$ und $\varphi$ .

Setzt man gemäß IV. und V. in § 27

$$r^2 - \varrho^2 = x^2 + y^2 - (\xi^2 + \eta^2) = p^2 \quad \text{I.}$$

$$r \varrho = x \xi + y \eta = \frac{q^2}{4} , \quad \text{II.}$$

so erscheinen  $r$  und  $\varrho$  als die rechtwinkeligen Coordinaten zweier Hyperbeln, wie  $c$  und  $d$  in Fig. 19; und  $r$  und  $\varrho$  lassen sich ganz analog ermitteln, wie  $c$  und  $d$ .

Ohne diese Rückbeziehung erhält man aus I. und II.

$$r^2 + \varrho^2 = \sqrt{\{(x^2 + y^2) - (\xi^2 + \eta^2)\}^2 + 4 \{x \xi + y \eta\}^2} . \quad \text{III.}$$

Aus I. und III. ergeben sich unmittelbar  $r^2$  und  $\varrho^2$ , wobei man immer die absoluten Werte in Betracht zu ziehen hat.

Übrigens lassen sich  $r$  und  $\varrho$  auch aus der Kreisgleichung XIII. in § 25 entwickeln

$$\begin{aligned} r + i \varrho &= \sqrt{(x + i \xi)^2 + (y + i \eta)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 - (\xi^2 + \eta^2) + i 2(x \xi + y \eta)} . \end{aligned}$$

Wendet man hierauf die Formel X. in § 5 an, so ergeben sich  $r$  und  $\varrho$  nach erfolgter Trennung des Reellen vom Imaginären. Hat man  $r$  und  $\varrho$  ermittelt, so ergibt sich aus III. in § 25

$$\cos(\alpha + i \varphi) = \frac{x + i \xi}{r + i \varrho} = \frac{x r + \xi \varrho}{r^2 + \varrho^2} - i \frac{x \varrho - \xi r}{r^2 + \varrho^2} . \quad \text{IV.}$$

Hieraus erhält man  $\cos \alpha$  und  $\cos i \varphi$  nach den Formeln in

§ 16, III. und IV. Übrigens lassen sich auch die dort entwickelten Constructionen anwenden, wenn man zuvor die Ausdrücke

$$a = \frac{xr + \xi\varrho}{r^2 + \varrho^2} \quad \text{oder} \quad b = \frac{x\varrho - \xi r}{r^2 + \varrho^2}$$

construiert hat. Diese Construction lässt sich elegant nach § 4, XVI. durchführen, indem man

$$\frac{x + i\xi}{r + i\varrho} = a - ib$$

normalförmig entwickelt. Aus  $a$  und  $b$  ergibt sich  $\alpha$  und  $\beta$ .

Wesentlich einfacher gestalten sich die Rechnungen und Constructionen für  $\xi = 0$ , woraus nach § 27, VI. und VII.

$$tg\alpha\,tg\beta = tg\alpha\,\frac{tg\,i\varphi}{i} = \frac{\varrho}{r} \quad \text{V.}$$

folgt. Man erhält so aus I. bis IV.

$$r^2 - \varrho^2 = x^2 + y^2 - \eta^2 \quad \text{VI.}$$

$$r\varrho = y\eta \quad \text{VII.}$$

$$r^2 + \varrho^2 = \sqrt{(x^2 + y^2 - \eta^2)^2 + 4y^2\eta^2} \quad \text{VIII.}$$

$$\cos(\alpha + i\varphi) = \cos\alpha\cos i\varphi - \sin\alpha\sin i\varphi = \frac{xr}{r^2 + \varrho^2} - i\frac{x\varrho}{r^2 + \varrho^2} \quad \text{IX.}$$

Aus IX. ergibt sich durch Spaltung

$$\cos\alpha\cos i\varphi = \frac{xr}{r^2 + \varrho^2} \quad \text{X.}$$

$$\sin\alpha\frac{\sin i\varphi}{i} = \frac{x\varrho}{r^2 + \varrho^2} \quad \text{XI.}$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke lassen sich  $y$  und  $\eta$  elegant ausdrücken. Es ist nach § 27 II. und III.

$$y = x\sin\alpha - y\cos\alpha = r\cos i\varphi\sin\alpha - \varrho\frac{\sin i\varphi}{i}\cos\alpha.$$

Ersetzt man die Functionen von  $\alpha$  aus X. und XI., so folgt

$$y = \frac{xr\varrho}{r^2 + \varrho^2} i \left\{ \frac{1}{tg\,i\varphi} + tg\,i\varphi \right\} = \frac{2xr\varrho}{r^2 + \varrho^2} \cdot \frac{i}{\sin 2i\varphi} = \frac{2xr\varrho}{(r^2 + \varrho^2)tg\,2\beta} \quad \text{XII.}$$

Analog ergibt sich durch Ersetzung der Functionen von  $i\varphi$  aus X. und XI.

$$\eta = y \cos \alpha + x \sin \alpha = r \frac{\sin i\varphi}{i} \cos \alpha + \rho \cos i\varphi \sin \alpha$$

$$\eta = \frac{2x\rho}{(r^2 + \rho^2) \sin 2\alpha}. \quad \text{XIII.}$$

Aus XII. und XIII. folgt

$$\frac{\eta}{y} = \frac{\operatorname{tg} 2\beta}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin 2i\varphi}{i \sin 2\alpha}. \quad \text{XIV.}$$

Nimmt man X. reciprok und quadriert dann, so erhält man

$$\sec^2 \alpha \sec^2 i\varphi = (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) (1 + \operatorname{tg}^2 i\varphi) = \frac{(r^2 + \rho^2)^2}{x^2 r^2}. \quad \text{XV.}$$

Dividirt man hiedurch die nach V. erhaltene Relation

$$2 \operatorname{tg} \alpha \frac{\operatorname{tg} i\varphi}{i} = \frac{4\rho}{r}, \quad \text{so folgt}$$

$$\sin 2\alpha \frac{\sin 2i\varphi}{i} = \sin 2\alpha \operatorname{tg} 2\beta = \frac{4x^2 r \rho}{(r^2 + \rho^2)^2}. \quad \text{XVI.}$$

Aus XV. erhält man durch Ausmultiplicieren unter Beachtung von V.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 i\varphi = \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta &= \frac{(r^2 + \rho^2)^2}{x^2 r^2} + \frac{\rho^2}{r^2} - 1 \\ &= \frac{(r^2 + \rho^2)^2 - x^2 (r^2 - \rho^2)}{x^2 r^2} \end{aligned} \quad \text{XVII.}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \frac{\operatorname{tg} i\varphi}{i} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\rho}{r}.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen sind  $\alpha$ ,  $\varphi$ ,  $\beta$  berechenbar, wenn  $r$  und  $\rho$  bekannt sind.

## § 29. Construction von $r$ , $\rho$ , $\alpha$ und $\beta$ für $\xi = o$ .

Aus der Kreisgleichung XIII. in § 25 ist für  $\xi = o$  absolut

$$\begin{aligned} r + i\rho &= \sqrt{x^2 - i^2(y + i\eta)^2} \\ &= \sqrt{[x + i(y + i\eta)] [x - i(y + i\eta)]} \\ &= \sqrt{[x - \eta + iy] [x + \eta - iy]}. \end{aligned}$$

Die Moduli der Factoren sind, wenn in Fig. 31  $OA_1 = x - \eta$ ,  
 $OA_2 = x + \eta$ ,  $A_1M_1 = A_2M_2 = \psi$  gemacht wird:

$$OM_1 = m_1 = \sqrt{(x - \eta)^2 + \psi^2}$$

$$OM_2 = m_2 = \sqrt{(x + \eta)^2 + \psi^2}.$$

Construiert man  $OW = OM_2$ ,  $M_1S \perp OM_1$  und schlägt dann über  $OW$  den Halbkreis, so ist  $m = OS = OM' = OM = \sqrt{OM_1 \cdot OW} = \sqrt{OM_1 \cdot OM_2}$ .  $OM$  halbiert den Winkel  $M_1OM_2$ . (Vergleiche § 16.

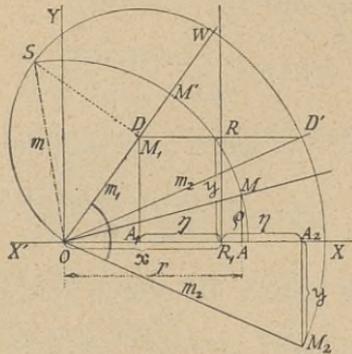


Fig. 31.

Fig. 17.)  $OA = r$ ,  $AM = \rho$ . ( $M_1$  und  $M'$  stimmen mit den Punkten  $D$  und  $M$  der Fig. 34 überein.) Nun wäre noch zu zeigen, dass  $\sphericalangle AOM = \frac{1}{2} \sphericalangle D'OD$  ist. Es ist

$$\begin{aligned} \sphericalangle AOM &= \frac{1}{2} \{A_1OM_1 + 2\pi - A_2OM_2\} \\ &= \frac{1}{2} \{A_1OM_1 - A_2OD' + 2\pi\} = \frac{1}{2} D'OD + \pi. \end{aligned}$$

Dies ist die Amplitude der einen Wurzel. Die andere Wurzel hat die Amplitude  $\frac{1}{2} D'OD$ .

In Fig. 32 ist  $OR_1 = x$ ,  $R_1R = \psi$ ,  $RM = \eta$  ferner ist  $\sphericalangle \infty OV = \alpha$ ,  $OV' \perp OV$ .

$$R_1V = x \operatorname{tg} \alpha, \quad R_1V' = x \operatorname{co}'g \alpha$$

$$RV = R_1V - R_1R = x \operatorname{tg} \alpha - \psi \quad \text{I.}$$

$$RV' = R_1V' + R_1R = x \operatorname{cotg} \alpha + \psi. \quad \text{II.}$$

Ersetzt man hierin  $\psi$  aus § 28, XII. und  $\operatorname{tg} \alpha$  aus § 28, V. durch die Werte

$$\psi = \frac{2xr\rho}{(r^2 + \rho^2)\operatorname{tg} 2\beta}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\rho}{r \operatorname{tg} \beta}, \quad \text{III.}$$

so folgt aus I.

$$RV = x \varrho \left\{ \frac{1}{r \operatorname{tg} \beta} - \frac{2r}{(r^2 + \varrho^2) \operatorname{tg} 2\beta} \right\}.$$

Drückt man  $\operatorname{tg} 2\beta$  durch  $\operatorname{tg} \beta$  aus, so ergibt sich weiter

$$RV = x \varrho \left\{ \frac{1}{r \operatorname{tg} \beta} - \frac{r(1 - \operatorname{tg}^2 \beta)}{(r^2 + \varrho^2) \operatorname{tg} \beta} \right\}.$$

$$RV = \frac{x \varrho (\varrho^2 + r^2 \operatorname{tg}^2 \beta)}{r (r^2 + \varrho^2) \operatorname{tg} \beta}.$$

V.

Ganz analog folgt aus II.

$$RV' = \frac{x r (\varrho^2 + r^2 \operatorname{tg}^2 \beta)}{\varrho (r^2 + \varrho^2) \operatorname{tg} \beta}.$$

Multipliziert man IV. mit V., so resultiert

$$RV \cdot RV' = \frac{x^2 (\varrho^2 + r^2 \operatorname{tg}^2 \beta)^2}{(r^2 + \varrho^2)^2 \operatorname{tg}^2 \beta}.$$

Drückt man  $\operatorname{tg} \beta$  mittels III. durch  $\operatorname{tg} \alpha$  aus, so folgt

$$RV \cdot RV' = \frac{x^2 r^2 \varrho^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^2}{(r^2 + \varrho^2)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Da aber  $\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sin 2\alpha$  ist, so ist weiter

$$RV \cdot RV' = \left\{ \frac{2 x r \varrho}{(r^2 + \varrho^2) \sin 2\alpha} \right\}^2.$$

Vergleicht man hiemit § 28, XIII., so folgt schließlich

$$RV \cdot RV' = \eta^2.$$

Und wenn man den Richtungsunterschied von  $RV$  und  $RV'$  in Rechnung zieht

$$RV \cdot RV' = -\eta^2. \quad \text{VI.}$$

Diese Beziehung eignet sich vorzüglich zur Construction von  $\alpha$ . Macht man  $RD \perp R_1R$  und  $RD = RM = \eta$ , so ist

$$RV \cdot RV' = -\overline{RD}^2.$$

Mithin lässt sich durch  $V$ ,  $D$ ,  $O$  und  $V'$  ein Halbkreis legen. Nimmt man  $D'$  in der Verlängerung und  $DR$  so an, dass  $RD' = RD$  ist, dann ist  $\operatorname{arcus} VD = \operatorname{arcus} VD'$  und daher  $\sphericalangle VOD = \sphericalangle VOD'$ .

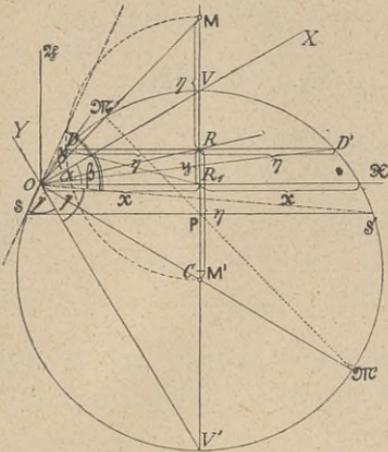


Fig. 32.

Wenn  $R_1D > R_1O$ , so ist

$$\eta^2 + \eta^2 > x^2.$$

Mithin hat man für

$$\eta^2 + \eta^2 \leq x^2 \quad \alpha \leq \frac{\pi}{4}.$$

VII.

Fällt  $V$  unterhalb, in oder oberhalb  $M$ , so ist  $r$  größer, gleich oder kleiner als  $\rho$ .

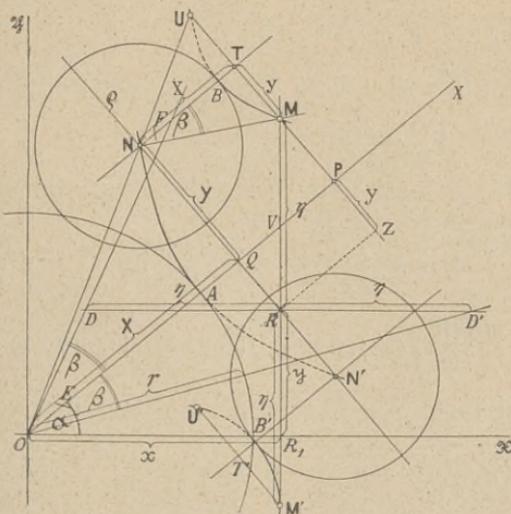


Fig. 33.

Auf Grund dieser Eigenschaft kann man  $V$  durch Halbierung des Winkels  $DOD'$  direct finden und sich das Legen des Kreises ersparen.

$$\sphericalangle \infty OV = \alpha.$$

Ist  $C$  das Centrum des Halbkreises, so ist  $CV = CV' = CD = CO$ . Dieser Punkt  $C$  fällt nach  $R_1$ , wenn zufällig  $R_1D = R_1O = -x$  ist.

In Coordinaten lautet dies

$$\begin{aligned} \overline{R_1D}^2 &= \overline{R_1R}^2 + \overline{RD}^2 = \overline{R_1O}^2 \\ \eta^2 + \eta^2 &= x^2. \end{aligned}$$

In diesem Falle ist  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

Hat man (Fig. 33)  $OV = OX$  als Halbierende des Winkels  $DOD$  gefunden, dann ist das Weitere nach Fig. 30 zu ermitteln. Man zieht  $MP \perp OX$  und  $RZ \parallel OX$ , dadurch findet man  $Z$ .  $PZ = y$ . Macht man ferner  $MT = ZP$  und zieht  $TN \parallel XO$ , so ergibt sich  $N$  und  $Q$ ;  $QN = y$ . Setzt man mit  $OQ = x$  in  $N$  ein, und durchschneidet damit  $OQ$  in  $E$ , so ist  $EQ = \sqrt{x^2 - y^2} = r$ .

Nimmt man  $NT = x$  in den Zirkel, setzt in  $M$  ein und durchschneidet  $NT$

in  $F$ , so ist

$$FT = \sqrt{x^2 - y^2} = \varrho \quad \sphericalangle QON = \sphericalangle TNM = \beta.$$

Damit sind alle gesuchten Stücke gefunden.

Für  $x = 1$  und  $\xi = 0$  ist gemäß § 27, VIII.

$$tg(\alpha + i\varphi) = \eta + i\eta. \quad \text{VIII.}$$

Hieraus folgt

$$\arctg(\eta + i\eta) = \alpha + i\varphi. \quad \text{IX.}$$

Demnach ist in der obigen Fig. 32 zugleich das Problem gelöst worden, zu einer complexen Tangente die Winkel  $\alpha$  und  $i\varphi$  (gemessen durch  $\beta$ ) zu finden.

Es ist aber auch

$$\sec(\alpha + i\varphi) = r + i\varrho \quad \text{X.}$$

mit gefunden worden; denn es ist nach § 28, IV.

$$\sec(\alpha + i\varphi) = \frac{1}{\cos(\alpha + i\varphi)} = \frac{r + i\varrho}{x + i\xi} = r + i\varrho. \quad \text{XI.}$$

Eine andere elegante Construction ergibt sich aus Fig. 33, wenn man  $OD$  und  $OD'$  berechnet. Es ist

$$\overline{OD}^2 = (x - \eta)^2 + \eta^2 = x^2 + \eta^2 + \eta^2 - 2x\eta.$$

Da  $\xi$  den Wert Null hat, so erhält man mittels § 25 VI. und VII.

$$\overline{OD}^2 = x^2 + y^2 + y^2 + x^2 - 2x\eta.$$

Unter Bezug auf IX. in § 25 ist  $x\eta = \mathbf{x}y + xy$ , und daher

$$\overline{OD}^2 = (\mathbf{x} - y)^2 + (x - y)^2.$$

Setzt man aus I. und II. in § 24 die Werte, so folgt weiter

$$\overline{OD}^2 = r^2 \left( \cos i\varphi - \frac{\sin i\varphi}{i} \right)^2 + \varrho^2 \left( \cos i\varphi - \frac{\sin i\varphi}{i} \right)^2$$

$$\overline{OD}^2 = (r^2 + \varrho^2) \left( \cos i\varphi - \frac{\sin i\varphi}{i} \right)^2 = (r^2 + \varrho^2)(\cos 2i\varphi + i \sin 2i\varphi).$$

Mittels des allgemeinen Satzes von Moivre resultiert hieraus

$$OD = \sqrt{r^2 + \varrho^2} (\cos i\varphi + i \sin i\varphi). \quad \text{XII.}$$

Analog erhält man

$$OD' = \sqrt{r^2 + \varrho^2} (\cos i\varphi - i \sin i\varphi). \quad \text{XIII.}$$

Aus diesen Relationen folgt, wenn  $m$  den Modul von  $(r + i\varrho)$  bedeutet

$$OD \cdot OD' = r^2 + \varrho^2 = m^2.$$

Macht man (Fig. 34)  $OM_2 = OD'$ ,  $DK = KM_2$ , schlägt über  $DM_2$  den Halbkreis und zieht die Tangente  $OT$  an diesen, so ist  $OT = m$ . Oder man errichtet  $DS \perp OD$  und bringt diese Gerade mit dem Halbkreise über  $OM_2$  zum Schnitte. Es ist dann  $OS = m$ .

Aus XII. und XIII. folgt ferner

$$m \cos i\varphi = \frac{1}{2}(OD' + OD) = \frac{1}{2}(OM_2 + OD) = OK \quad \text{XIV.}$$

$$m \sin i\varphi = \frac{i}{2}(OD' - OD) = \frac{i}{2}(OM_2 - OD) = iKM_2 = iKL. \quad \text{XV.}$$

Mithin ist

$$\operatorname{tg} i\varphi = i \cdot \frac{KL}{OK} = i \operatorname{tg} \beta.$$

Daher ist  $\sphericalangle KOL$  das Maß von  $i\varphi$ .

Macht man  $OM = OT$ , so ist  $L$  ein Punkt der gleichseitigen Hyperbel vom Centrum  $O$  und dem Scheitel  $M$ .

Nach XIV. und XV. ist mit Bezug auf I. und II. in § 24

$$\overline{OK}^2 = m^2 \cos^2 i\varphi = (r^2 + \varrho^2) \cos^2 i\varphi = x^2 + x^2 \quad \text{XVI.}$$

$$\overline{KD}^2 = \overline{KM_2}^2 = \overline{KL}^2 = -m^2 \sin^2 i\varphi = -(r^2 + \varrho^2) \sin^2 i\varphi = y^2 + y^2. \quad \text{XVI}$$

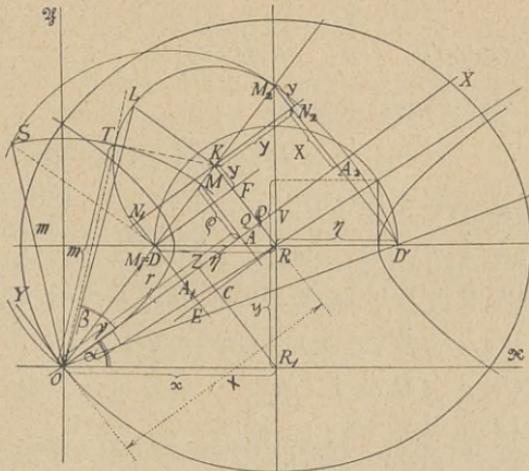


Fig. 34.

Wegen  $RD = RD'$  und  $KD = KM_2$  ist  $RK \parallel D'M_2$ , und da  $OX$  den Winkel  $M_2OD'$  halbiert,  $M_2D' \perp OX$ . Ist  $Q$  der Schnitt-

punkt von  $KR$  mit  $OX$  und  $DA_1 \perp OX$ , so ist  $QA_1 = RD \cos \alpha = \eta \cos \alpha$  und ebenso  $QA_2 = RD' \cos \alpha = \eta \cos \alpha$ . Ist  $R_1Z \perp OX$ , so ist weiter

$$OZ = OR_1 \cos \alpha = x \cos \alpha \quad \text{und} \quad ZQ = R_1R \sin \alpha = y \sin \alpha.$$

Demnach ist  $OQ = OZ + ZQ = x \cos \alpha + y \sin \alpha$ .

Mit Rücksicht auf V. in § 25 ist wegen  $\xi = 0$

$$OQ = \mathbf{x} \quad \text{und} \quad QA_1 = QA_2 = \mathbf{y}.$$

Ist  $RC \parallel QA_1$ ,  $DF \parallel A_1Q$ , so ist

$$R_1Z = OR_1 \sin \alpha = x \sin \alpha$$

$$R_1C = RR_1 \cos \alpha = y \cos \alpha,$$

$$\text{demnach} \quad CZ = R_1Z - R_1C = x \sin \alpha - y \cos \alpha.$$

Ferner ist

$$ED = RD \sin \alpha = \eta \sin \alpha.$$

Mithin ist nach V. in § 25

$$CZ = RQ = y \quad \text{und} \quad ED = RF = x.$$

Nach IX. in § 24 ist

$$\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}} = \frac{y}{x} \quad \text{oder}$$

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y}) : (x - y) = \mathbf{x} : x;$$

$$\text{demnach} \quad OA_1 : A_1D = OQ : x.$$

Da aber der Figur gemäß

$$OA_1 : A_1D = OQ : QK \quad \text{ist,}$$

so hat man  $QK = x$  und  $FK = y$ .

Zieht man  $N_1N_2 \parallel OX$  durch  $K$ , so ist  $N_1D = N_2M_2 = y$ .

Fällt man  $MA \perp OX$ , so folgt mit Bezug auf VIII. in § 24

$$OA : AM = OQ : QK = \mathbf{x} : x = r : \varrho$$

$$OA : AM = r : \varrho$$

$$\overline{OA^2} : \overline{AM^2} = r^2 : \varrho^2.$$

$$(\overline{OA^2} + \overline{AM^2}) : \overline{OA^2} = (r^2 + \varrho^2) : r^2$$

$$\overline{OM^2} : \overline{OA^2} = m^2 : r^2$$

$$m^2 : \overline{OA^2} = m^2 : r^2,$$

$$\text{daraus} \quad OA = r.$$

Analog findet man  $AM = \rho$ .

Weitere interessante Beziehungen ergeben sich aus

$$\overline{OD}^2 = (x - \eta)^2 + \eta^2, \quad \overline{OD'}^2 = (x + \eta)^2 + \eta^2 \quad \text{und} \quad OD \cdot OD' = r^2 + \rho^2.$$

Durch Verbindung dieser Gleichungen erhält man leicht

$$(OD' + OD)^2 = 2x^2 + 2\eta^2 + 2\eta^2 + 2(r^2 + \rho^2).$$

Nun ist nach § 28 VI.  $x^2 + \eta^2 - \eta^2 = r^2 - \rho^2$  und daher

$$(OD' + OD)^2 = 4(r^2 + \eta^2).$$

Fig. 34 zeigt interessante Anklänge an die in § 3 erwähnte Modul- und Amplitudengeometrie von Laguerre, resp. Ch. Nehls, weiland Wasserbaudirector in Hamburg, welche beide mit Coefficienten der Lage arbeiteten. Der Punkt  $M_i$  mit den auf  $XOY$  bezogenen Coordinaten  $(x + ix)$ ,  $(-y + iy)$  wird durch  $D$  reell dargestellt. Die Coordinaten des Ersatzpunktes  $D$  sind gemäß der Drobisch'schen Richtungszahlentheorie gebrochen.  $OQ = x$ ,  $QK = x$ ,  $KF = -y$  und  $FD = y$ .  $OK$  ist der Modul der complexen Abscisse,  $KR$  dagegen der Modul der complexen Ordinate. In Bezug auf  $\infty O \infty$  zeigt  $D$  die Abscisse  $OR_1 = x$  und die gebrochene Ordinate  $R_1RD$ , welche sich aus  $R_1R = y$  und  $RD = \eta$  zusammensetzt. Mit Bezug auf XII. und die Figur 34 findet man

$$OD = OK - KL = OM(\cos iq + i \sin iq) = me^{-\varphi}.$$

Hiedurch erscheint  $D$  nach dem Situationscalcul als Endpunkt des Moduls  $OM = m$  des complexen Halbmessers  $(r + i\rho)$  bei imaginären Amplituden  $i\varphi$  dargestellt.

Es ist zweifellos, dass auch diese Darstellung streng-wissenschaftlichen Wert hat; doch geht bei ihr die Projectivität verloren, welche bei meiner Methode gewahrt bleibt, wodurch die Wechselbeziehung zur neueren Geometrie beständig hervortritt.

Man hat daher unter Bezug auf XIV.

$$OK = \frac{1}{2}(OD' + OD) = \sqrt{r^2 + \eta^2}. \quad \text{XVIII.}$$

Die erste dieser Gleichungen drückt aus, dass  $r$  die kleine Halbachse einer Ellipse von den Brennpunkten  $D$  und  $D'$  ist, die durch  $O$  geht und deren große Halbachse gleich  $OK$  ist. Aus XVIII. folgt  $r^2 = \overline{OK}^2 - \eta^2$ , welcher Ausdruck leicht zu construieren ist.

Analog findet sich mit Rücksicht auf XV.

$$KD = KM_2 = \frac{1}{2} (OD' - OD) = \sqrt{\eta^2 - \varrho^2} . \quad \text{XIX.}$$

Hieraus erkennt man, dass  $\varrho$  die imaginäre Halbachse einer Hyperbel mit den Brennpunkten  $D$  und  $D'$  ist, welche durch  $O$  geht und deren reelle Halbachse gleich  $KD$  ist. Aus XIX. ergibt sich als leicht construabel

$$\varrho^2 = \eta^2 - \overline{KD}^2 .$$

Der Punkt  $O$  hat von den imaginären Punkten  $M_i$  und  $M'_i$  in  $R_1R$  die Abstände  $(r + i\varrho)$  und  $(r - i\varrho)$ . Die Summe dieser Abstände ist  $2r$  und der Unterschied  $i2\varrho$ . Wie später noch eingehender entwickelt werden soll, sind demnach  $M_i$  und  $M'_i$  imaginäre Brennpunkte der vorerwähnten Ellipse und Hyperbel.

### § 30. Berechnung und Construction von $\psi$ , $\eta$ , $\alpha$ und $\beta$ aus $r$ , $\varrho$ und $x = 1$ .

Aus der Gleichung

$$x^2 + (\psi + i\eta)^2 = (r + i\varrho)^2 \quad \text{I.}$$

des complexen Kreises findet man gemäß X. in § 5

$$\begin{aligned} \psi + i\eta &= \sqrt{(r + i\varrho)^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - \varrho^2 - x^2 + i2r\varrho} \\ &= \sqrt{\frac{\sqrt{(r^2 - \varrho^2 - x^2)^2 + 4r^2\varrho^2} + (r^2 - \varrho^2 - x^2)}{2}} + \\ &+ i \sqrt{\frac{\sqrt{(r^2 - \varrho^2 - x^2)^2 + 4r^2\varrho^2} - (r^2 - \varrho^2 - x^2)}{2}} . \end{aligned}$$

Demnach ist, wenn man die Wurzeln trennt, quadriert und etwas umformt

$$2\psi^2 = r^2 - \varrho^2 - x^2 + \sqrt{[(r+x)^2 + \varrho^2][(r-x)^2 + \varrho^2]} \quad \text{II.}$$

$$2\eta^2 = -r^2 + \varrho^2 + x^2 + \sqrt{[(r+x)^2 + \varrho^2][(r-x)^2 + \varrho^2]} . \quad \text{III.}$$

Für die Construction eignen sich diese Formeln allerdings; besser ist es jedoch, unter Bezug auf § 29, XI., nachstehend vorzugehen

$$\begin{aligned} tg(\alpha + i\varphi) &= \sqrt{\sec^2(\alpha + i\varphi) - 1} \\ &= \sqrt{\{\sec(\alpha + i\varphi) + 1\} \{\sec(\alpha + i\varphi) - 1\}} \\ \psi + i\eta &= \sqrt{(r + i\varrho + 1)(r + i\varrho - 1)} \\ \psi + i\eta &= \sqrt{(r + 1 + i\varrho)(r - 1 + i\varrho)} . \end{aligned}$$

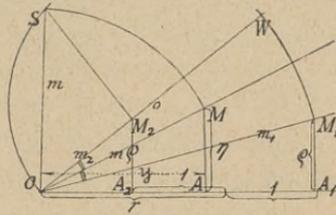


Fig. 35.

Der erste Factor unter der Wurzel wird nach Gauß durch  $M_1$  (Fig. 35), der zweite durch  $M_2$  dargestellt. Der Modul

$$m = \sqrt{m_1 \cdot m_2}, \quad m = \sqrt{OM_1 \cdot OM_2} = \sqrt{OM_2 \cdot OW} = OS, \\ OM = OS = m.$$

Die Amplitude des Productes ist  $(\sphericalangle A_1OM_1 + \sphericalangle A_2OM_2)$  und die Amplitude der Wurzel ist

$$\frac{1}{2} (A_1OM_1 + A_2OM_2) = \frac{1}{2} (A_1OM_1 + A_1OM_1 + M_1OM_2) \\ = \frac{1}{2} (2 A_1OM_1 + M_1OM_2) = AOM_1 + \frac{1}{2} M_1OM_2 = AOM.$$

Mithin halbiert  $OM$  den Winkel  $M_1OM_2$ .

Dieselben Formeln wie II. und III. ergeben sich aus § 27, IV. und V. für  $\xi = 0$  durch Auflösung nach  $\eta$  und  $\gamma$ .

Construirt man den geometrischen Ort der Punkte  $R, M$  und  $M'$  in Fig. 32, so findet man Fig. 36.

Die Curve I. für  $R$  besteht aus zwei zu  $O\infty$  und  $O\mathcal{J}$  symmetrischen Theilen und hat die Doppelasymptote  $O\infty$ . Der geometrische Ort II. von  $M$  liegt ebenfalls symmetrisch zum Achsenkreuze, entfernt sich aber von der Abscissenachse umsomehr, je größer  $x^2$  wird. Der Ort von  $M'$  ist die Curve III.

Zu jedem  $x$  gehören zwei symmetrisch complexe Ordinaten  $+(y + i\eta)$  und  $-(y + i\eta)$ , ferner  $+(y - i\eta)$  und  $-(y - i\eta)$ . Der Ort von  $M'$  schneidet  $OX$  im Abstände  $\sqrt{r^2 - \rho^2}$  von  $O$ , wenn  $r^2 > \rho^2$  ist. Von allen Curven wurde nur je ein Viertel gezeichnet.

Anstatt die Curven nach II. und III. zu construieren, kann man zweckmäßiger verfahren, wie folgt.

Nach XI. in § 29 ist für  $\xi = 0$  und  $x \geq 1$

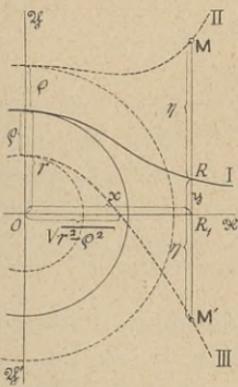


Fig. 36.

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + i\varphi) &= \frac{x}{r + i\varrho} = \frac{xr}{r^2 + \varrho^2} - i \frac{x\varrho}{r^2 + \varrho^2} \\ &= a - ib. \end{aligned} \quad \text{IV.}$$

Construiert man  $a$  und  $b$  gemäß § 4 XVI. durch Division der vorher normalförmig gedachten Zahlen  $x$  und  $(r + i\varrho)$  wie Fig. 37 zeigt, so ist  $m = \sqrt{r^2 + \varrho^2}$  der Modul und  $\alpha_1$  die Amplitude von  $(r + i\varrho)$ , ferner  $x$  und  $0$  das Analoge zur Zahl  $(x + i0)$ . Der Modul  $\mu$  des Quotienten folgt aus  $\mu = x : m$  oder  $\mu : 1 = x : m$  und der Amplitude  $\alpha = 0 - \alpha_1 = -\alpha_1$ .

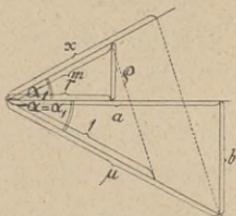


Fig. 37.

Aus IV. folgt mit Hilfe von § 16 III. IV.  $\cos i\varphi$  und  $\cos \alpha$ , welche Strecken leicht construiert werden können. Damit findet man  $\beta$  und  $\alpha$ . Sobald man aber diese Winkel kennt, ist Fig. 33 sofort completierbar. Denn man erhält sogleich  $A$ , dann  $N$ ,  $B$ ,  $T$  und  $M$ .  $MR_1 \perp OX$  und  $NQ \perp OX$  liefern  $R$ . Nun ist  $R_1R = \eta$  und  $RM = \eta$ .

Oder man entnimmt der Figur  $\sin(\alpha + i\varphi) = c + id$  und construiert sodann nach Gauß

$$\eta + i\eta = \operatorname{tg}(\alpha + i\varphi) = \frac{\sin(\alpha + i\varphi)}{\cos(\alpha + i\varphi)} = \frac{c + id}{a - ib}.$$

Setzt man bei den obigen Constructionen  $x = 1$ , so hat man  $\operatorname{tg}(\alpha + i\varphi) = \eta + i\eta$  aus  $\sec(r + i\varrho)$  gefunden. Man hat aber auch zu  $\sec(\alpha + i\varphi) = r + i\varrho$  die Winkel  $\alpha$  und  $i\varphi$  (gemessen durch  $\beta$ ) gefunden; denn es ist

$$\operatorname{arc} \sec(r + i\varrho) = \alpha + i\varphi. \quad \text{V.}$$

Die Figuren 25, 26, 28, 30 und 33 liefern dieselben Formeln, wenn man  $r$  und  $\varrho$  vertauscht, d. h. wenn man z. B. in Fig. 33 zuerst um  $O$  den Kreis vom Radius  $\varrho$  beschreibt, dann den Kreisbogen  $BM$  verzeichnet, um  $M$  den Kreis vom Radius  $r$  beschreibt und an diesen den Zweig  $AN$  ansetzt.  $N$  liegt dann an derselben Stelle wie früher  $M$ .

Nimmt man in Fig. 34, § 29  $r$  und  $\varrho$  als gegeben an, wie es bei dem Problem  $\operatorname{arc} \sec(r + i\varrho) = \alpha + i\varphi$  vorkommt, und wobei  $OR_1 = x = 1$  ist, so hat man den  $\sphericalangle AOM = \gamma$  gegeben.  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\varrho}{r}$ . Da  $OD \cdot OD' = r^2 + \varrho^2 = m^2$  ist, so umhüllt  $DD'$  eine Hyperbel von den Asymptoten  $OD$  und  $OD'$  und den Halbachsen  $r$  und  $\varrho$ .  $R$  ist der Berührungspunkt.  $RR_1$  ist die zugehörige Normale, welche

die Evolute der Hyperbel berührt. Die Brennpunkte der letzteren liegen in  $OX$  und haben von  $O$  den Abstand  $m$ . Es handelt sich nun um jene Normale, welche von  $O$  den Abstand 1 hat. Sie ist eine gemeinsame Tangente an den von  $O$  aus mit der Einheit beschriebenen Kreis und die Evolute.

Bezieht man die Hyperbel auf  $OX$  und  $OY$ , so hat sie die Gleichung

$$\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{\varrho^2} = 1.$$

Die Tangente im Punkte  $M_1(x_1, y_1)$  ist gegeben durch

$$y - y_1 = \frac{\varrho^2 x_1}{r^2 y_1} (x - x_1).$$

Die Normale in  $M_1$  wird dargestellt durch

$$y - y_1 = -\frac{r^2 y_1}{\varrho^2 x_1} (x - x_1). \quad \text{VI.}$$

Ihr Abstand vom Ursprunge  $O$  hat den Wert  $x_0 = 1$  und demnach besteht die Bezeichnung

$$\frac{x_1 y_1 (r^2 + \varrho^2)}{\sqrt{r^4 y_1^2 + \varrho^4 x_1^2}} = 1 \quad \text{oder}$$

$$\frac{r^4}{x_1^2} + \frac{\varrho^4}{y_1^2} = (r^2 + \varrho^2)^2.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der durch  $M_1$  erfüllten Hyperbelgleichung

$$\frac{x_1^2}{r^2} - \frac{y_1^2}{\varrho^2} = 1,$$

so sind  $x_1^2$  und  $y_1^2$  leicht zu berechnen, resp. zu construieren. Man erhält

$$x_1^2 = \frac{r^2}{2(r^2 + \varrho^2)} \left\{ r^2 + \varrho^2 + 1 \pm \sqrt{[(r+1)^2 + \varrho^2][(r-1)^2 + \varrho^2]} \right\}$$

$$y_1^2 = \frac{\varrho^2}{2(r^2 + \varrho^2)} \left\{ -r^2 - \varrho^2 + 1 \pm \sqrt{[(r+1)^2 + \varrho^2][(r-1)^2 + \varrho^2]} \right\}.$$

Da  $x_1$  und  $y_1$  reell sein müssen, gilt nur das positive Vorzeichen der Wurzel.

### § 31. Die Functionen $\arctg(y \pm i\eta)$ und $\operatorname{arcsec}(r \pm i\varrho)$ .

Da für  $x = 1$  und  $\xi = 0$  gemäß § 28, VII. und VIII.

$$r\varrho = y\eta$$

$$\text{und } (r^2 + \varrho^2)^2 = (1 + y^2 - \eta^2)^2 + 4\eta^2 y^2 \text{ ist,}$$

so folgt aus XIV. und XVI. ebendasselbst

$$\frac{\operatorname{tg} 2\beta}{\sin 2\alpha} = \frac{\eta}{y} \quad \text{I.}$$

$$\sin 2\alpha \operatorname{tg} 2\beta = \frac{4y\eta}{(1 + y^2 - \eta^2)^2 + 4y^2\eta^2} \quad \text{II.}$$

Aus I. und II. erhält man

$$\sin^2 2\alpha = \frac{4y^2}{(1 + y^2 - \eta^2)^2 + 4y^2\eta^2}.$$

Daraus folgt

$$\cos^2 2\alpha = 1 - \sin^2 2\alpha = \frac{(1 - y^2 - \eta^2)^2}{(1 + y^2 - \eta^2)^2 + 4y^2\eta^2}.$$

Durch Division und Radicierung ergibt sich

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2y}{1 - y^2 - \eta^2} \quad \text{III.}$$

Ferner folgt aus I. und II.

$$\operatorname{tg}^2 2\beta = \frac{4\eta^2}{(1 + y^2 - \eta^2)^2 + 4y^2\eta^2}.$$

Daraus folgt gemäß

$$\begin{aligned} \sin^2 2\beta &= \frac{\operatorname{tg}^2 2\beta}{1 + \operatorname{tg}^2 2\beta} = \frac{4\eta^2}{(1 + y^2 + \eta^2)^2} \\ \sin 2\beta &= \frac{\operatorname{tgi} \cdot 2\varphi}{i} = \frac{2\eta}{1 + y^2 + \eta^2} \quad \text{IV.} \end{aligned}$$

Aus III. ermittelt man für  $y^2 + \eta^2 < 1$

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2y}{1 - y^2 - \eta^2} \quad \text{V.}$$

Ist  $y^2 + \eta^2 > 1$ , so ist  $2\alpha > \frac{\pi}{2}$ , und man schreibt

$$\operatorname{tg}(\pi - 2\alpha) = -\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\eta}{\eta^2 + \eta^2 - 1}.$$

Man vergleiche § 29, VII. für  $x = 1$ .

Aus obigem entwickelt man

$$\begin{aligned} \pi - 2\alpha &= \operatorname{arctg} \frac{2\eta}{\eta^2 + \eta^2 - 1} \\ \alpha &= \frac{1}{2} \left\{ \pi - \operatorname{arctg} \frac{2\eta}{\eta^2 + \eta^2 - 1} \right\}. \end{aligned} \quad \text{VI.}$$

Gemäß IV. ist

$$\beta = \frac{1}{2} \operatorname{arcsin} \frac{2\eta}{1 + \eta^2 + \eta^2}. \quad \text{VII.}$$

$$i\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{i2\eta}{1 + \eta^2 + \eta^2}. \quad \text{VIII.}$$

Kürzer gelangt man zu den obigen Resultaten durch

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + i\varphi) = \eta + i\eta &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} i\varphi}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} i\varphi} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + i \operatorname{tg} \beta}{1 - i \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \\ (\eta + i\eta)(1 - i \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta) &= \operatorname{tg} \alpha + i \operatorname{tg} \beta. \end{aligned}$$

Dies liefert durch Trennung des Reellen vom Imaginären:

$$\begin{aligned} \eta + \eta \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta &= \operatorname{tg} \alpha \\ \eta - \eta \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta &= \operatorname{tg} \beta. \end{aligned}$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen einmal  $\operatorname{tg} \beta$ , das anderemal  $\operatorname{tg} \alpha$ , so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2\eta}{1 - \eta^2 - \eta^2} \\ \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = \operatorname{sin} 2\beta &= \frac{2\eta}{1 + \eta^2 + \eta^2}. \end{aligned}$$

Analog konnte man mit  $\operatorname{tg} i\varphi$  arbeiten. Eine andere hübsche Ableitung ist

$$\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2i\varphi = \frac{\operatorname{sin} 2(\alpha + i\varphi)}{\operatorname{cos} 2\alpha \operatorname{cos} 2i\varphi} = \frac{2 \operatorname{sin} 2(\alpha + i\varphi)}{\operatorname{cos} 2(\alpha + i\varphi) + \operatorname{cos} 2(\alpha - i\varphi)}.$$

Drückt man die Sinusse und Cosinusse durch die Tangenten aus, so folgt

$$\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2i\varphi = \frac{2 \operatorname{tg}(\alpha + i\varphi) \{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha - i\varphi)\}}{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha + i\varphi) \operatorname{tg}^2(\alpha - i\varphi)}.$$

Nun ist  $\operatorname{tg}(\alpha \pm i\varphi) = \eta \pm i\eta$ , denn nach IV. haben  $\eta$  und  $\varphi$  gleiche Vorzeichen. Setzt man diese Werte ein und ordnet dann entsprechend, so resultiert

$$\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2i\varphi = \frac{2\eta}{1 - \eta^2 - \eta^2} + i \frac{2\eta}{1 + \eta^2 + \eta^2}.$$

Durch Spaltung ergeben sich wieder III. und IV.

Den vorstehenden Entwicklungen gemäß, erhält man unter Bezug auf V. und VIII.

$$\operatorname{arctg}(\eta \pm i\eta) = \alpha \pm i\varphi$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\eta}{1 - \eta^2 - \eta^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{i2\eta}{1 + \eta^2 + \eta^2} \quad \text{IX.}$$

für  $\eta^2 + \eta^2 < 1$  und

$$\operatorname{arctg}(\eta \pm i\eta) = \frac{1}{2} \left\{ \pi - \operatorname{arctg} \frac{2\eta}{\eta^2 + \eta^2 - 1} \right\} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{i2\eta}{1 + \eta^2 + \eta^2} \quad \text{X.}$$

für  $\eta^2 + \eta^2 > 1$ .

Diese Formeln sind auch in der Definition § 14, III. enthalten, wenn man  $z$  durch  $(\eta \pm i\eta)$  ersetzt.

Der Punkt  $\mathbf{M}'$  in Fig. 33 stellt den imaginären Punkt  $M'_i$  mit der Ordinate  $(\eta - i\eta)$  dar. Es ist dabei

$$QN' = QN, N'B' = \varrho, N'T' = x, T'M' = T'U' = y.$$

$M'_i$  gehört dem Kreise vom Centrum  $O$  und vom Radius  $(r - i\varrho)$  an.

Analog IV. in § 28 ist für  $\xi = 0$

$$\cos(\alpha - i\varphi) = \frac{x}{r - i\varrho} = \frac{xr}{r^2 + \varrho^2} + i \frac{x\varrho}{r^2 + \varrho^2} = a + ib. \quad \text{XI.}$$

Für  $x = 1$  ist

$$\operatorname{tg}(\alpha + i\varphi) = R_1R + iRM$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - i\varphi) = R_1R + iRM' = R_1R - i \cdot RM.$$

Gemäß XI. ist

$$\sec(\alpha - i\varphi) = \frac{1}{\cos(\alpha - i\varphi)} = r - i\varrho. \quad \text{XII.}$$

Lässt man in Fig. 33  $x$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  variieren, so beschreibt  $M'$  eine Curve III. in Fig. 36, welche für  $r > \varrho$  die Achse  $O\mathcal{X}$  in zwei Punkten von den Abscissen  $\pm \sqrt{r^2 - \varrho^2}$  durchschneidet. Außer dem Punkte  $M'_i$  von der Ordinate  $(y - i\eta)$  gehört dem Kreise vom Radius  $(r - i\varrho)$  noch ein zu  $O\mathcal{X}$  symmetrischer Punkt an von der Ordinate  $-(y - i\eta)$ , dessen Ort ebenfalls eine Curve ergäbe.

Aus XII. ergibt sich

$$\operatorname{arc sec}(r - i\varrho) = \alpha - i\varphi. \quad \text{XIII.}$$

Mithin ist für  $x = 1$  unter Bezug auf XI. und § 30, IV., V.

$$\begin{aligned} \operatorname{arc sec}(r \pm i\varrho) &= \operatorname{arc cos} \frac{1}{r \pm i\varrho} = \operatorname{arc cos} \left\{ \frac{r}{r^2 + \varrho^2} \mp \frac{i\varrho}{r^2 + \varrho^2} \right\} \\ &= \operatorname{arc cos}(a \mp ib) = \alpha \pm i\varphi. \quad \text{XIV.} \end{aligned}$$

Diese Werte sind nach § 16, III. und IV. leicht zu finden.

### § 32. Berechnung und Construction von $(y \pm \eta)$ aus $\alpha$ und $\beta$ für $x = 1$ und $\xi = 0$ .

Nach § 28, XII. und XIII. ist

$$y = \frac{2x r \varrho}{(r^2 + \varrho^2) \operatorname{tg} 2\beta}, \quad \eta = \frac{2x r \varrho}{(r^2 + \varrho^2) \sin 2\alpha}. \quad \text{I.}$$

Daraus erhält man

$$\frac{y}{\eta} = \frac{\sin 2\alpha}{\operatorname{tg} 2\beta}. \quad \text{II.}$$

Ferner ist nach § 31, III. und IV.

$$\begin{aligned} \frac{2y}{1 - y^2 - \eta^2} &= \operatorname{tg} 2\alpha \\ \frac{2\eta}{1 + y^2 + \eta^2} &= \sin 2\beta. \end{aligned} \quad \text{III.}$$

Hieraus folgt durch Division und Benützung von II.

$$\frac{1 - (y^2 + \eta^2)}{1 + (y^2 + \eta^2)} = \cos 2\alpha \cos 2\beta. \quad \text{IV.}$$

Hieraus berechnet man leicht  $(y^2 + \eta^2)$  und aus diesem Werte folgt mittels II.  $y$  und  $\eta$ .

Eine elegante Construction ergibt sich aus nachstehender Betrachtung. Es sei in Fig. 38  $OR_1 = x$ ,  $R_1R = \eta$ ,  $\sphericalangle R_1OV = \alpha$ ,  $\sphericalangle VOH = \beta = \sphericalangle VOH'$ . Dann ist

$$R_1H = x \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \quad \text{und} \quad R_1H' = x \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$$

$$RH = R_1H - R_1R = x \operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \eta$$

$$RH' = \eta - x \operatorname{tg}(\alpha - \beta).$$

Nun ist gemäß § 28, XII.

$$\eta = \frac{2xr\varrho}{(r^2 + \varrho^2) \operatorname{tg} 2\beta}, \quad \text{wobei} \quad \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\varrho}{r}.$$

$$\begin{aligned} RH &= x \operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \frac{2xr\varrho}{(r^2 + \varrho^2) \operatorname{tg} 2\beta} \\ &= x \left\{ \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} - \frac{r\varrho(1 - \operatorname{tg}^2 \beta)}{(r^2 + \varrho^2) \operatorname{tg} \beta} \right\} \end{aligned}$$

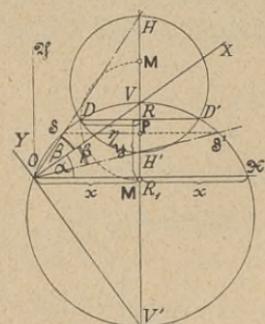


Fig. 38.

Drückt man  $\operatorname{tg} \beta$  durch  $\frac{\varrho}{r \operatorname{tg} \alpha}$  aus, so folgt nach gehöriger Reduction

$$RH = \frac{xr\varrho(r + \varrho)(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{(r - \varrho)(r^2 + \varrho^2) \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2xr\varrho(r + \varrho)}{(r - \varrho)(r^2 + \varrho^2) \sin 2\alpha}. \quad \text{V.}$$

In analoger Weise berechnet man

$$RH' = \frac{2xr\varrho(r - \varrho)}{(r + \varrho)(r^2 + \varrho^2) \sin 2\alpha}. \quad \text{VI.}$$

Aus V. und VI. folgt

$$RH \cdot RH' = \left\{ \frac{2xr\varrho}{(r^2 + \varrho^2) \sin 2\alpha} \right\}^2$$

oder mit Rücksicht auf § 28, XIII., wenn man dem Umstande gerecht wird, dass  $RH$  und  $RH'$  entgegengesetzte Richtungen haben

$$RH \cdot RH' = -\eta^2. \quad \text{VII.}$$

Dieses Resultat besagt, dass der über  $HH'$  als Durchmesser beschriebene Kreis durch die aus Fig. 33 bekannten Punkte  $D$  und  $D'$  geht.

$$RD \perp R_1R, \quad RD = \eta.$$

Da aber andererseits  $D$  und  $D'$  in dem über  $VV'$  beschriebenen Kreise liegen, so ist  $DD'$  die Chordale der beiden Kreise und liefert den Punkt  $R$ . Demnach ist  $R_1R = \eta$  gefunden und man

braucht nur  $RD = \eta$  in den Zirkel zu fassen und  $RM = RM'$  abzutragen. Damit sind die Bilder  $R_1RM$  und  $R_1RM'$  von  $tg(\alpha + i\varphi)$  und  $tg(\alpha - i\varphi)$  gefunden, vorausgesetzt, dass  $x = 1$  ist. Sind  $S$  und  $S'$  die Schnittpunkte von  $OH$  und  $OH'$  mit dem Kreise über  $VV'$ , so ist  $arc VS = arc VS'$ ; daraus folgt, dass  $SS' \perp R_1H$  ist und dass der Schnittpunkt  $P$  dieser Geraden mit  $RR_1$  die Sehne  $SS'$  halbiert.

**§ 33. Die Functionen  $cotg(\alpha \pm i\varphi)$ ,  $cosec(\alpha \pm i\varphi)$ ,  
 $arc\ cotg(x \pm i\xi)$ ,  $arc\ cosec(r \pm iq)$ .**

Diese Functionen lassen sich figurell und analytisch ganz analog den vorigen entwickeln. Man setzt  $\eta = 1$ ,  $\eta = 0$  und erhält nach § 27, IX., X.

$$cotg\ \alpha\ tg\ i\varphi = -i\frac{q}{r} \quad \text{oder} \quad cotg\ \alpha\ tg\ \beta = -\frac{q}{r}. \quad \text{I.}$$

Ist  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  und  $\beta > 0$ , so muss  $q < 0$ , also negativ sein. Die Durchführung der Construction zeigt Fig. 39.  $R_2R = x$ ,  $RM' = -\xi$ ,  $RM = \xi$ .  $M$  stellt  $cotg(\alpha + i\varphi)$  und  $M'$   $cotg(\alpha - i\varphi)$  dar.

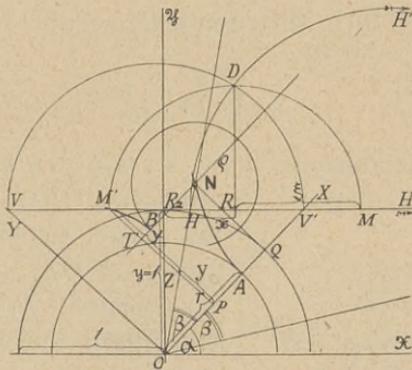


Fig. 39.

Bei der Formelentwicklung hat man nach dem Permanenz-principe

$$cotg(\alpha \pm i\varphi) = \frac{\cos(\alpha \pm i\varphi)}{\sin(\alpha \pm i\varphi)} = \frac{1}{tg(\alpha \pm i\varphi)} = x \pm i\xi \quad \text{II.}$$

$$cosec(\alpha \pm i\varphi) = \frac{1}{\sin(\alpha \pm i\varphi)} = \frac{1}{c \pm id} = r \pm iq. \quad \text{III.}$$

Da  $cotg(\alpha \pm i\varphi) = tg\{\frac{\pi}{2} - (\alpha \pm i\varphi)\}$  ist, so folgt für den Fall, dass beide Functionen den gleichen Wert  $x \pm i\xi$  annehmen

$$\operatorname{arccotg}(x + i\xi) = \alpha + i\varphi$$

$$\operatorname{arctg}(x + i\xi) = \frac{\pi}{2} - (\alpha + i\varphi);$$

mithin ist  $\operatorname{arccotg}(x + i\xi) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x + i\xi)$ . IV.

Dieser Wert ist nach IX. oder X. in § 31 leicht zu entwickeln.

Aus III. erhält man

$$\operatorname{arc cosec}(r + i\varrho) = \alpha + i\varphi.$$

Da nach III.  $\sin(\alpha + i\varphi) = \frac{1}{r + i\varrho}$  ist, folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{arc cosec}(r + i\varrho) &= \operatorname{arc sin} \frac{1}{r + i\varrho} = \operatorname{arc sin} \left\{ \frac{r}{r^2 + \varrho^2} + i \frac{\varrho}{r^2 + \varrho^2} \right\} \\ &= \operatorname{arc sin}(c + id). \end{aligned} \quad \text{V.}$$

Hier braucht man nur § 17, VI. anzuwenden.

### § 34. Conjugierte Durchmesser der Kegelschnitte.

Die Ellipse in Fig. 40 habe die Halbachsen  $OA = OB = a$  und  $OC = OD = b$ . Ihre Mittelpunktsleichung lautet daher

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad \text{I.}$$

Bezieht man den laufenden Punkt  $M$  mit den rechtwinkligen Coordinaten  $OP = x$  und  $PM = y$  auf das neue schiefwinkelige Achsen-system  $X_1OY_1$ , so sind die neuen Coordinaten  $OP_1 = x_1$  und  $P_1M = y_1$ . Um diese durch  $x$  und  $y$  auszudrücken, muss man die Winkel  $XOX_1 = \alpha$  und  $X'OY_1 = \gamma$  in Rechnung ziehen. Macht man  $P_1S \perp OX$  und  $P_1R \perp PM$ , so ist wegen  $P_1M \parallel OY_1 \angle RP_1M = \gamma$ . Hiemit

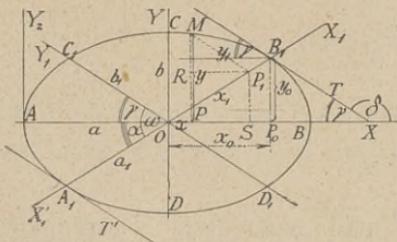


Fig. 40.

lauten die Transformationsgleichungen

$$x = OP = OS - PS = x_1 \cos \alpha - y_1 \cos \gamma \quad \text{II.}$$

$$y = PM = PR + RM = SP_1 + RM = x_1 \sin \alpha + y_1 \sin \gamma.$$

Wenn die Achse  $OY_1$  zur Tangente  $B_1T$  jenes Ellipsen-

punktes  $B_1$  parallel ist, der in  $OX_1$  liegt, so besteht ein Zusammenhang zwischen  $\alpha$  und  $\gamma$ . Die Tangentengleichung für  $B_1$  ( $x_0, y_0$ ) lautet in der derivierten Form

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \quad \text{oder wegen} \quad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0). \quad \text{III.}$$

Schließt die Tangente in  $B_1$  mit  $OX$  den Winkel  $\delta$  ein, so ist

$$\text{tg } \delta = -\text{tg } \gamma = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$

Da aber  $\frac{y_0}{x_0} = \text{tg } \alpha$  ist, so folgt

$$\text{tg } \alpha \text{ tg } \gamma = \frac{b^2}{a^2} \quad \text{IV.}$$

$$\text{oder} \quad a^2 \sin \alpha \sin \gamma = b^2 \cos \alpha \cos \gamma. \quad \text{V.}$$

Setzt man in der Ellipsengleichung I. für  $x$  und  $y$  die Werte aus II., so folgt unter Bezug auf V.

$$\frac{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}{a^2 b^2} \cdot x_1^2 + \frac{a^2 \sin^2 \gamma + b^2 \cos^2 \gamma}{a^2 b^2} \cdot y_1^2 = 1. \quad \text{VI.}$$

Führt man nun die Abkürzungen

$$a_1^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} \quad \text{VII.}$$

$$b_1^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \gamma + b^2 \cos^2 \gamma} \quad \text{VIII.}$$

ein, so lautet VI. folgendermaßen:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{y_1^2}{b_1^2} = 1. \quad \text{IX.}$$

Formel VIII. gestattet mittels IV. nachstehende Transformation:

$$b_1^2 = \frac{a^2 b^2}{\cos^2 \gamma (a^2 \text{tg}^2 \gamma + b^2)} = \frac{a^2 b^2 (1 + \text{tg}^2 \gamma)}{a^2 \text{tg}^2 \gamma + b^2} = \frac{a^2 b^2 \left(1 + \frac{b^4}{a^4} \cot^2 \alpha\right)}{\frac{b^4}{a^2} \cot^2 \alpha + b^2}$$

$$b_1^2 = \frac{a^4 + b^4 \cot^2 \alpha}{b^2 \cot^2 \alpha + a^2} = \frac{a^4 \sin^2 \alpha + b^4 \cos^2 \alpha}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}. \quad \text{X.}$$

Aus VII. und X. entwickelt man

$$a_1^2 + b_1^2 = \frac{a^4 \sin^2 \alpha + a^2 b^2 + b^4 \cos^2 \alpha}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}.$$

Benützt man die Identität  $a^2 b^2 = a^2 b^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$  so folgt schließlich

$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2. \quad \text{XI.}$$

Ferner entwickelt man aus VII. und X.

$$a_1^2 b_1^2 = \frac{a^2 b^2 (a^4 \sin^2 \alpha + b^4 \cos^2 \alpha)}{(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^2} = \frac{a^2 b^2 \left( \sin^2 \alpha + \frac{b^4}{a^4} \cos^2 \alpha \right)}{\left( \sin^2 \alpha + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \alpha \right)^2}.$$

Nun ist nach V.  $\frac{b^2}{a^2} = \frac{\sin \alpha \sin \gamma}{\cos \alpha \cos \gamma}$ , und es folgt weiter

$$a_1^2 b_1^2 = \frac{a^2 b^2 (\sin^2 \alpha \cos^2 \gamma + \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma)}{\sin^2 \alpha (\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma)^2} = \frac{a^2 b^2 (\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma)}{\sin^2 (\alpha + \gamma)}.$$

Ist  $\sphericalangle X_1' O Y_1 = \alpha + \gamma = \omega$ , so erhält man schließlich

$$a_1 b_1 \sin \omega = a b. \quad \text{XII.}$$

Aus der Gleichung IX. folgt für  $y_1' = 0$ ,  $x_1' = a_1$  und für  $x_1'' = 0$ ,  $y_1'' = b_1$ . Demnach ist  $OA_1 = OB_1 = a_1$  und  $OC_1 = OD_1 = b_1$ .  $A_1 B_1$  und  $C_1 D_1$  heißen conjugierte Diameter.

Auf ganz analoge Art kann man eine Hyperbel von der Mittelpunktsgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{XIII.}$$

auf conjugierte Durchmesser als schiefwinkeliges Achsensystem beziehen und erhält die Gleichung

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{y_1^2}{b_1^2} = 1. \quad \text{XIV.}$$

Dabei ergeben sich die Relationen

$$a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2 \quad \text{XV.}$$

$$a_1 b_1 \sin \omega = a b. \quad \text{XVI.}$$

Für  $a = b$  ist die Hyperbel gleichseitig. Aus XV. ergibt sich dann  $a_1 = b_1$ , d. h. alle conjugierten Radien der gleichseitigen Hyperbel sind paarweise gleich.

Bei der Ellipse gibt es bloß ein Paar gleichlanger conjugierter Durchmesser. Es folgt aus XI. und XII. für  $a_1 = b_1$   $tg \frac{\omega}{2} = \frac{b}{a}$ . Mithin liegen die gleichen Durchmesser in den Diagonalen des über den Achsen als Symmetralen construirten Rechteckes.

Bezieht man die Ellipse auf den Scheitel  $A$  als Ursprung, dann ist die neue Abscisse  $x_2$  von  $M$  gegeben durch  $x_2 = a + x$ ; damit verwandelt sich die Gleichung I. in

$$y^2 = \frac{2b^2}{a} x_2 - \frac{b^2}{a^2} x_2^2.$$

Da  $\frac{b^2}{a} = p$  den Halbparameter ausdrückt, welcher das Maß der halben zu  $OX$  normalen Brennpunktssehne ist, so erhält man

$$y^2 = 2px_2 - \frac{p}{a} x_2^2.$$

Lässt man  $a$  ins Unendliche wachsen, so rückt  $B$  ins Unendliche und es ergibt sich für jedes endliche  $x_2$  die Scheitelgleichung

$$y^2 = 2px_2. \quad \text{XVII.}$$

Demgemäß nähert sich die halbe Ellipse  $CAD$  einer Parabel als Grenze. Analog kann man die Parabel auch als Grenze einer halben Hyperbel erhalten.

Aus IX. erhält man

$$y_1 = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a_1^2 - x_1^2}.$$

Damit ist die schiefe Symmetrie der Ellipse gegen  $A_1B_1$  gekennzeichnet. Diese bleibt für  $a = \infty$  erhalten und hiemit gilt diese Symmetrie auch für  $A_1B_{1\infty}$  resp.  $A_1O_\infty$ , denn  $B_1$  und  $O$  rücken ins Unendliche. Demnach ist bei der Parabel  $A_1O_\infty \parallel OX$ , d. h. alle Durchmesser sind zur Achse parallel. Die zur Tangente  $A_1T'$  parallelen Sehnen werden vom Durchmesser  $A_1O_\infty$  halbiert.

### § 35. Pol und Polare.

Lässt man in der Gleichung IX. § 34 die Unterscheidungszeiger der Coordinaten weg, so erhält man als Gleichung der Ellipse in Fig. 41

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1. \quad \text{I.}$$

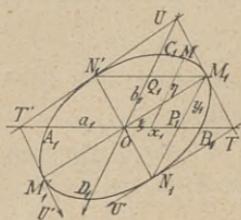


Fig. 41.

Als Gleichung der Tangente im Curvenpunkte  $M_1 (x_1 y_1)$  ergibt sich analog III. in § 34, wenn man dem laufenden Punkte die Coordinaten  $\xi \eta$  zutheilt,

$$\frac{x_1 \xi}{a_1^2} + \frac{y_1 \eta}{b_1^2} = 1; \quad \text{II.}$$

für  $\eta' = 0$  folgt  $OT = \xi' = \frac{a_1^2}{x_1}$  oder

$$OP_1 \cdot OT = a_1^2.$$

Das gibt die Proportion  $a_1 : OP_1 = OT : a_1$ , aus der man erhält

$$(a_1 + OP_1) : (a_1 - OP_1) = (OT + a_1) : (OT - a_1)$$

oder in absolutem Sinne

$$A_1 P_1 : B_1 P_1 = A_1 T : B_1 T. \quad \text{III.}$$

Dieses Resultat sagt aus, dass der Durchmesser  $A_1 B_1$  durch  $P_1$  und  $T$  harmonisch getheilt wird. Die beiden Tangenten  $TM_1$  und  $TN_1$  des Pols  $T$  liefern die Berührungssehne oder Polare  $M_1 N_1$ .

Analog erhält man für  $\xi'' = 0$ ,  $OU = \eta'' = \frac{b_1^2}{y_1}$

oder  $OQ_1 \cdot OU = b_1^2$  und

$$D_1 Q_1 : C_1 Q_1 = D_1 U : C_1 U. \quad \text{IV.}$$

Hier ist  $U$  der Pol und  $M_1 N_1'$  die Polare. Vermöge der schiefen Symmetrie der Fig. 41 in Bezug auf  $A_1 B_1$  und  $C_1 D_1$  findet man zu  $T$  und  $U$  die symmetrischen Punkte  $T'$  und  $U'$ .  $TUT'U'$  ist ein der Ellipse umschriebenes Parallelogramm. Die Sehnen  $M_1 M_1'$  sowie  $N_1 N_1'$  gehen durch  $O$  und sind Durchmesser. Die Ellipse besitzt daher centrale Symmetrie.

In Fig. 42 seien  $M_1 T$  und  $M_2 T$  zwei Tangenten mit den Berührungspunkten  $M_1$  und  $M_2$ . Dann haben diese nach II. die Gleichungen

$$\frac{x_1 \xi}{a_1^2} + \frac{y_1 \eta}{b_1^2} = 1$$

$$\frac{x_2 \xi}{a_1^2} + \frac{y_2 \eta}{b_1^2} = 1.$$

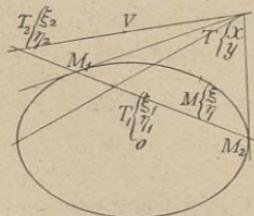


Fig. 42.

Diesen müssten die Coordinaten  $x$  und  $y$  von  $T$  genügen: demnach bestehen die Relationen

$$\frac{x x_1}{a_1^2} + \frac{y y_1}{b_1^2} = 1$$

$$\frac{x x_2}{a_1^2} + \frac{y y_2}{b_1^2} = 1 .$$

Diese gehen aus folgender Gleichung hervor

$$\frac{x \xi}{a_1^2} + \frac{y \eta}{b_1^2} = 1 , \quad \text{V.}$$

wenn man deren laufende Coordinaten  $\xi$  und  $\eta$  durch  $x_1$  und  $y_1$ , resp.  $x_2$  und  $y_2$  ersetzt. Mithin geht diese Gerade durch  $M_1$  und  $M_2$  und ist die Polare von  $T$ . Ist  $T$  ein Curvenpunkt, so wird die Polare mit der Tangente in  $T$  identisch. Liegt  $T$  innerhalb der Curve, dann ändert sich die Sache insoferne, als das Coexistieren der Gleichungen V. und I. imaginäre Schnittpunkte  $M_{1i}$  und  $M_{2i}$  liefert.

In Fig. 42 ist  $M_1M_2$  die Polare von  $T$ ; da  $T_1$  in dieser Geraden liegt, so müssen seine Coordinaten  $(\xi_1, \eta_1)$  der Gleichung V. genügen.

$$\frac{x \xi_1}{a_1^2} + \frac{y \eta_1}{b_1^2} = 1 . \quad \text{VI.}$$

Schreibt man dies in der Form

$$\frac{\xi_1 x}{a_1^2} + \frac{\eta_1 y}{b_1^2} = 1 , \quad \text{VII.}$$

so geht die letztere Relation aus der Gleichung der Polare von  $T_1$  hervor, nämlich aus

$$\frac{\xi_1 \xi}{a_1^2} + \frac{\eta_1 \eta}{b_1^2} = 1 , \quad \text{VIII.}$$

wenn man an Stelle der laufenden Coordinaten  $\xi$  und  $\eta$ , jene des Punktes  $T$  setzt. Da die Coordinaten  $x$  und  $y$  gemäß VII. die Gleichung VIII. erfüllen, so liegt  $T$  in der Polare  $TV$  von  $T_1$ .

Bewegt sich also  $T$  in  $TV$ , so dreht sich seine Polare um den Pol  $T_1$  von  $TV$ .  $T$  und  $T_2$  heißen conjugierte Pole;  $M_1M_2$  und  $TV$  conjugierte Polaren.

Dabei ist  $T_2$  der Schnittpunkt. Kommt  $T$  nach  $T_2$  in  $M_1M_2$  zu liegen, so geht die Polare von  $T_2$  durch  $T_1$ . Da aber  $T_2$  auch in  $M_1M_2$  liegt, so muss die Polare auch durch den Pol  $T$  von  $M_1M_2$  gehen. Mithin ist  $TT_1$  die Polare von  $T_2$ . Die Punkte  $TT_1T_2$  bilden ein Tripel conjugierter Pole oder ein Polarendreieck. Die Geraden

$TT_1$ ,  $T_1T_2$ ,  $T_2T$  andererseits geben ein Tripel conjugierter Polaren oder ein Polarendreieck. Fällt  $T$  ins Centrum  $O$ , so ist  $x=y=0$  und die Gleichung der Polare  $T_1T_2$  lautet gemäß V:

$$0 \cdot \xi + 0 \cdot \eta = 1.$$

Das ist die Gleichung einer unendlich fernen Geraden.  $TT_1$  und  $TT_2$  sind conjugierte Durchmesser.

Ordnet man den Punkten einer Figur deren Polaren in Bezug auf einen festen Kegelschnitt zu, so erhält man eine Linienfigur. Aus den Eigenschaften der Punkte der ursprünglichen Figur ergeben sich Beziehungen zwischen den Geraden der durch Polarisation erzeugten Figur und umgekehrt. Die beiden Figuren stehen in Reciprocität und ihre Eigenschaften entsprechen einander dualistisch. Obiges Princip dient zur Auffindung von Lehrsätzen über Kegelschnitte.

### § 36. Imaginäre Kegelschnittszweige.

Die Ellipse in Fig. 43 hat die Gleichung

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1; \quad \text{I.}$$

die zu  $x$  gehörige Ordinate  $y$  ist dann

$$y = \frac{b_1}{a_1} \sqrt{a_1^2 - x^2}. \quad \text{II.}$$

Die Gleichung der Polare des Punktes  $P(x, 0)$  lautet, wenn man ihren laufenden Punkten die Coordinaten  $\xi, \eta$  zuordnet

$$\frac{\xi x}{a_1^2} = 1. \quad \text{III.}$$

Daraus folgt  $\mathbf{x} = \frac{a_1^2}{x}$  oder  $\mathbf{x}x = a_1^2$ . IV.

Sucht man zu  $x = \mathbf{x}$  die Ordinate der Ellipse, so folgt aus I.

$$y = i \frac{b_1}{a_1} \sqrt{\mathbf{x}^2 - a_1^2}. \quad \text{V.}$$

Ersetzt man den entsprechenden imaginären Ellipsenpunkt  $M$ , durch  $\mathbf{M}(\mathbf{x} \mathbf{y})$ , so ist

$$y = i \mathbf{y} \quad \text{und} \quad \text{VI.}$$

$$\mathbf{y} = \frac{b_1}{a_1} \sqrt{\mathbf{x}^2 - a_1^2} \quad \text{VII.}$$

oder 
$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1. \quad \text{VIII.}$$

Demnach liegt **M** in einer Hyperbel mit den conjugierten Durchmesser *AB* und *CD*. Aus II. und VII. folgt mit Bezug auf IV.

$$\begin{aligned} \frac{y}{y} &= \sqrt{\frac{a_1^2 - x^2}{x^2 - a_1^2}} = \sqrt{\frac{x x - x^2}{x^2 - x x}} = \sqrt{\frac{(x-x)x}{(x-x)x}} = \\ &= \sqrt{\frac{x}{x}} = \sqrt{\frac{x^2}{a_1^2}} = \sqrt{\frac{a_1^2}{x^2}}. \end{aligned}$$

Mithin

$$\frac{y}{y} = \frac{x}{a_1} \quad \frac{y}{y} = \frac{a_1}{x}. \quad \text{IX.}$$

Nach IV. erhält man aber

$$x : a_1 = a_1 : x \quad \text{oder} \quad \frac{x + a_1}{a_1 + x} = \frac{a_1 - x}{x - a_1} = \frac{x}{a_1} = \frac{a_1}{x}.$$

Daraus ergibt sich mittels IX.

$$\frac{y}{y} = \frac{a_1 + x}{a_1 + x} = \frac{a_1 - x}{x - a_1} \quad \text{X.}$$

oder

$$\frac{PM}{PM} = \frac{AP}{AP}. \quad \text{XI.}$$

Und wenn man statt *y* die Strecke *PN* setzt

$$\frac{PN}{PM} = \frac{BP}{BP}. \quad \text{XII.}$$

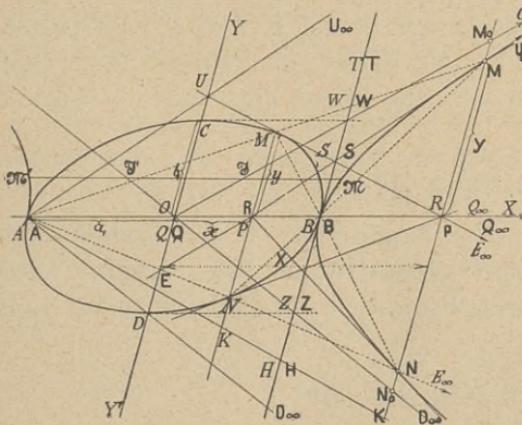


Fig. 43.

Die Relationen XI. und XII. sagen aus, dass *AMM* einerseits und *NBM* andererseits in gerader Linie liegen. Ist **N** der symmetrische Punkt zu **M**, so findet man analog, dass auch *ANN* sowie *MBN* gerade Linien sind.

Fasst man einen Ellipsenpunkt *B* als Pol auf, so ist die Tangente

$BT$  in diesem Punkte seine Polare. Die Tangenten in  $M$  und  $N$  gehen durch den Pol  $\mathbf{P}$ .  $\mathbf{BS}$  und  $\mathbf{MS}$  liefern den Pol  $\mathbf{S}$  von  $\mathbf{BM}$ . Da  $M, B$  und  $\mathbf{N}$  in einer Geraden liegen, so gehen ihre Polaren  $\mathbf{MP}$ ,  $\mathbf{BT}$  und  $\mathbf{PS}$  durch den Pol  $\mathbf{S}$  dieser Geraden; denn  $\mathbf{PM}$  ist die Polare von  $\mathbf{N}$ , weil  $\mathbf{N}$  in der Polaren von  $P$  liegt. Nun lässt sich noch beweisen, dass  $\mathbf{PS}$  durch  $\mathbf{M}$  geht. Da  $\mathbf{N}$  die Coordinaten  $\mathbf{x}$  und  $-\mathbf{y}$  besitzt, so lautet die Gleichung seiner Polaren, wenn die Coordinaten des laufenden Punktes  $\xi$  und  $\eta$  genannt werden,

$$\frac{\mathbf{x}\xi}{a_1^2} - \frac{\mathbf{y}\eta}{b_1^2} = 1.$$

Diese Gleichung ist aber identisch mit der Gleichung der Hyperbeltangente in  $\mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Mithin sind  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{N}$  und  $P$  ein Tripel conjugierter Pole bezüglich der Ellipse. Sie erscheinen als Diagonalepunkte des vollständigen Viereckes  $\mathbf{AMB}\mathbf{N}$ , wenn man  $\mathbf{AB}$  und  $\mathbf{MN}$  als 5. und 6. Seite desselben erklärt.

### § 37. Die harmonische Collineation.

Die Ellipse und die Hyperbel (Fig. 43) stehen in einer geometrischen Verwandtschaft, welche man centrale Collineation nennt.  $A$  heißt das Centrum der Collineation und entspricht sich selbst.  $BT$  führt den Namen Collineationsachse und deckt sich mit der entsprechenden Linie. Je zwei collineare Punkte, wie  $M$  und  $\mathbf{M}$  liegen in einem Strahle durchs Collineationscentrum  $A = \mathbf{A}$ . Je zwei collineare Gerade, wie  $\mathbf{MR}$  und  $\mathbf{MR}$  begegnen sich in der Collineationsachse  $\mathbf{BT} = \mathbf{BT}$ . Dabei deckt sich  $R$  mit  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{R}$  mit  $P$ . Es besteht demnach eine Vertauschbarkeit der Paare, und diese Eigenschaft bezeichnet man als involutorisch. Es hängt dies mit der harmonischen Proportion

$$AP : BP = AP : BP$$

zusammen, bei welcher man  $P = \mathbf{R}$  und  $\mathbf{P} = R$  vertauschen kann, wodurch sich wieder dasselbe symmetrische Paar ergibt. Diese Harmonie überträgt sich durch Projection auf die Punktreihe  $A, M, W = \mathbf{W}$  und  $\mathbf{M}$ . Denn es ist

$$AM : WM = AM : WM.$$

Aus diesem Grunde nennt man die Collineation auch harmonisch. Obige Eigenschaften erstrecken sich aber nicht nur auf

Punkte und Tangenten der Curven, sondern auch auf alle Punkte und Geraden der Ebene, die somit als involutorisches Doppelsystem erscheint. Man schließt z. B. durch Projection von  $ABRP$  auf  $AKHK$  leicht, dass  $K$  und  $K'$  in Bezug auf  $A$  und  $H$  harmonisch liegen. Lässt man die Sehnen  $MN$  und  $M'N'$  variieren, so kommt man analog zu einer anderen harmonischen Reihe  $AK'H'K'$ . Da nun diese Reihe mit  $AKHK$  den Punkt  $A$  gemein hat, so liegen beide Reihen perspectivisch und die Strahlen  $KK'$ ,  $HH'$  und  $KK'$  müssen sich in demselben Punkte schneiden. Dieser befindet sich aber, weil sich  $H$  und  $H'$  mit der Collineationsachse deckt, in der letzteren.

Da der Punkt  $Q = Q$  dem unendlich fernen Punkte  $Q_\infty = Q_\infty$  entspricht, so liegt die zu  $CD$  homologe Strecke im Unendlichen. Die zugehörigen Tangenten sind die Asymptoten der Hyperbel, gehen durch  $O$  und begegnen sich mit den zu  $AB$  parallelen Ellipsentangenten in  $C$  und  $D$  in  $BT$ .  $OZ$  ist die eine Asymptote. Einer Parallelen zu  $AB$  in einem System entspricht eine Gerade durch  $O$  im anderen System. Dem Punkte  $U$  in  $RM$  entspricht ein unendlich ferner Punkt  $U_\infty$  in  $RM$ . Deshalb ist  $AU \parallel RM$ . Dem Punkt  $E$  der Tangente in  $R$  entspricht der unendlich ferne Punkt  $E_\infty$  in  $MR$ . Demnach ist  $AE \parallel MR$ .  $CD$  heißt die Gegenachse beider Systeme. In anderen Collineationen gibt es nämlich zwei Gegenachsen.

Der Asymptotenconstruction gemäß ist  $BZ = b_1$ ,  $RM_0 = RN_0$ . Da ferner  $RM = RN$  ist, so hat man  $MM_0 = NN_0$ . Analog findet man für jede zu  $OX$  parallele Secante  $\mathcal{M}\mathcal{N} = \mathcal{M}'\mathcal{N}'$ . Diese Eigenschaften enthalten ein sehr einfaches Constructionsverfahren der Hyperbel aus einem Punkte  $M$  und den beiden Asymptoten.

Es ist bedeutsam, dass man die Sache auch umkehren kann. Fasst man die Hyperbel als reell auf und schneidet sie durch  $MN$ , dann sind  $MN$  die Vertreter der imaginären Hyperbelpunkte  $M_i$  und  $N_i$ .

Rückt  $A$  in  $BO$  nach links ins Unendliche, dann gehen Ellipse und Hyperbel in congruente Parabeln über, die sich in  $B = B$  berühren.  $B$  ist das Centrum der dabei entstehenden centralen Symmetrie.

Es ist dann nach Fig. 44

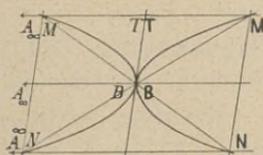


Fig. 44.

$$MB = BN$$

$$NB = BM$$

$$MN \# MN, MM \# NN.$$

Die gefundenen Eigenschaften lassen sich sofort auf Fig. 14 übertragen, doch kann man

daselbst auch einiges trigonometrisch finden. Es ist:

$$AP = AO + OP = 1 + \cos \gamma = \cos \gamma + 1$$

$$AP = AO + OP = 1 + \sec \gamma = \frac{\cos \gamma + 1}{\cos \gamma}.$$

Aus diesen Relationen folgt

$$AP : AP = \cos \gamma : 1. \quad \text{I.}$$

Ferner ist

$$PM = \sin \gamma \quad \text{und} \quad \mathbf{PM} = BS = \operatorname{tg} \gamma,$$

woraus man erhält

$$PM : \mathbf{PM} = \sin \gamma : \operatorname{tg} \gamma = 1 : \frac{1}{\cos \gamma} = \cos \gamma : 1. \quad \text{II.}$$

Aus I. und II. fließt die Proportion

$$AP : AP = PM : \mathbf{PM}. \quad \text{III.}$$

Mithin liegen  $A$ ,  $M$  und  $\mathbf{M}$  in einer geraden Linie. Analog folgt aus Fig. 14

$$BP = BO - PO = 1 - \cos \gamma$$

$$BP = OP - OB = \sec \gamma - 1 = \frac{1}{\cos \gamma} - 1 = \frac{1 - \cos \gamma}{\cos \gamma}.$$

Demnach ist

$$BP : BP = \cos \gamma : 1. \quad \text{IV.}$$

Der Symmetrie wegen ist weiter

$$PN = PM = \sin \gamma \quad \text{und} \quad \mathbf{PM} = \mathbf{PN} = \operatorname{tg} \gamma$$

und daher

$$PN : \mathbf{PM} = \sin \gamma : \operatorname{tg} \gamma = 1 : \frac{1}{\cos \gamma} = \cos \gamma : 1. \quad \text{V.}$$

IV. und V. liefern

$$BP : BP = PN : \mathbf{PM}. \quad \text{VI.}$$

Folglich liegen  $N$ ,  $B$  und  $\mathbf{M}$  in einer geraden Linie.

Stellt  $\mathbf{A}$  in Fig. 45 den Krümmungsmittelpunkt des Hohlspiegels  $\mathbf{BH}$  vor, dann ist  $O$  der katoptrische Brennpunkt, in welchem die zur Spiegelachse  $AP$  parallelen Lichtstrahlen reflectiert werden.

Der Reflexionspunkt  $K$  des Strahles durch  $M$  liegt nahe bei  $T$ . Der Hauptstrahl  $AM$  wird in sich selbst zurückgeworfen,

und demnach liefert der Spiegel das virtuelle Bild **M** von **M**. Diese Construction stimmt nahezu mit jener in Fig. 43 überein. Für Spiegel mit kleiner Öffnung kann man **K** mit **T** zusammenfallend auffassen, und

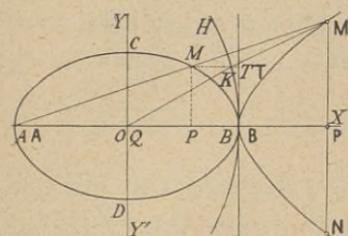


Fig. 45.

dann ist das Bild mit dem Originale collinear bezüglich **A = A** als Centrum und **BT** als Achse. Die Ellipse **ABCD** erscheint im Bilde als Hyperbel und zwar der rechte Ast als virtuelles Bild und der linke Ast als Luftbild. Hat der Krümmungsspiegel eine größere Ausdehnung, dann wird das Phänomen durch die sphärische Abweichung beeinträchtigt. Setzt man die Brennweite  $OB = f$ , die Gegenstandsweite  $BP = a$  und die hier negative Bildweite  $BP = -b$ , so erhält man, da **P** und **P'** conjugierte Pole sind, gemäß

man, da **P** und **P'** conjugierte Pole sind, gemäß

$$\begin{aligned} OP \cdot OP' &= \overline{OB}^2 \\ (f - a) \cdot (f - b) &= f^2 \\ \text{oder } \frac{1}{b} &= \frac{1}{f} - \frac{1}{a}. \end{aligned} \quad \text{VII.}$$

Dies ist die einer sehr kleinen Spiegelcalotte entsprechende optische Formel. Rückt **A** nach links ins Unendliche, so wird der Hohlspiegel zum Planspiegel und Ellipse und Hyperbel gehen in Parabeln vom Scheitel **B** über.

Fig. 14 in § 12 liefert noch eine interessante Tangenteneigenschaft. Zieht man **PN**, so berührt diese Gerade die Hyperbel in **N**; denn **P** und **P'** sind conjugierte Pole der Hyperbel.

$$\begin{aligned} OP \cdot OP' &= \overline{OB}^2 \quad \text{oder} \\ x \cdot x' &= 1. \end{aligned}$$

Nun ist absolut

$$\begin{aligned} PP' : PN &= (x - x') : y = \left( x - \frac{1}{x} \right) : y = \frac{x^2 - 1}{x} : y \\ &= \frac{y^2}{x} : y = y : x. \end{aligned}$$

Da aber auch

$$\begin{aligned} PM : OP &= y : x, \quad \text{so erhält man} \\ \frac{PP'}{PN} &= \frac{PM}{OP} = \text{tg } \beta. \end{aligned} \quad \text{VIII.}$$

Demnach ist  $\sphericalangle \mathbf{PNP} = \beta$  und  $\mathbf{PN} \perp \mathbf{OM}$ . Dies erinnert an die Eigenschaft einer Kreistangente. Die Hyperbeltangente in  $N$  ist normal zum Halbmesser  $\mathbf{OM}$  des symmetrischen Curvenpunktes.

Macht man  $\mathbf{NU} \parallel \mathbf{PO}$ , so ist wegen  $\sphericalangle \mathbf{PON} = \beta$  auch  $\sphericalangle \mathbf{UNO} = \beta$ . Zieht man ferner  $\mathbf{NR} \perp \mathbf{ON}$ , so ist auch  $\sphericalangle \mathbf{LNR} = \beta$ . Da aber auch  $\sphericalangle \mathbf{LNW}$  als Scheitelwinkel dem  $\sphericalangle \mathbf{PNP}$  gleich  $\beta$  ist, so resultiert

$$\sphericalangle \mathbf{RNW} = 2\beta.$$

Mithin bildet die Normale  $\mathbf{NR}$  zum Leitstrahl  $\mathbf{ON}$  mit der Tangente  $\mathbf{PN}$  den Winkel  $2\beta$ . Ist  $\mathbf{NQ}$  die Projection von  $\mathbf{NW}$  auf  $\mathbf{NR}$ , so ist

$$\mathbf{NW} = \frac{\mathbf{NQ}}{\cos 2\beta}.$$

Kommt  $W$  unendlich nahe an  $\mathbf{N}$ , nach  $W'$ , so ist  $W'\mathbf{N}$  ein Curvelement.  $W'Q'$  geht dann durch  $O$ . Ist  $\sphericalangle \mathbf{NOQ}' = \delta$  und  $\mathbf{ON} = r$ , so ist  $\mathbf{NQ}' = r\delta$ . Da nach § 12, IX.

$$r^2 = \frac{1}{\cos 2\beta}$$

ist, so folgt

$$\mathbf{NW}' = \frac{r\delta}{\cos 2\beta} = r^3\delta.$$

Auf diese Eigenschaft wurde schon in der Fußnote zu § 22 hingewiesen.  $\mathbf{NW}' = ds$ ,  $\delta = d\beta$ .

Die Tangente in einem Punkte des Kreises Fig. 30, § 23, von der Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

kann in der derivierten Form geschrieben werden

$$x x + y y = r^2.$$

Mithin lautet die Gleichung der Tangente im Punkte

$$M_i(x + i\xi, y + i\eta)$$

$$\text{des Kreises} \quad x^2 + y^2 = (r + i\rho)^2$$

folgendermaßen:

$$(x + i\xi)x + (y + i\eta)y = (r + i\rho)^2.$$

Für den Schnittpunkt  $E_i$  (Fig. 30) mit  $O\infty$  ist  $y = 0$  und

$$x' = \frac{(r + i\xi)^2}{x + i\xi} = \frac{r + i\rho}{x + i\xi} \cdot \frac{r + i\rho}{r + i\rho}$$

Mit Bezug auf III. in § 25 folgt hieraus

$$\begin{aligned} x' &= \frac{r + i\rho}{\cos(\alpha + i\varphi)} = \frac{x + i\xi}{\cos^2(\alpha + i\varphi)} = (x + i\xi) \{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha + i\varphi)\} \\ &= (x + i\xi) + (x + i\xi) \operatorname{tg}^2(\alpha + i\varphi) \\ &= (x + i\xi) + (y + i\eta) \operatorname{tg}(\alpha + i\varphi). \end{aligned} \quad \text{IX.}$$

Ist in Fig. 30 **KM** die Tangente an den Hyperbelzweig **MB**, so ist nach VIII.

$$\sphericalangle \mathbf{TMK} = \sphericalangle \mathbf{ZME} = \beta, \text{ mithin } \sphericalangle \mathbf{M_1ME} = \alpha + \beta.$$

Demnach ist

$$\begin{aligned} M_1\mathbf{E} &= M_1\mathbf{M} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \quad \text{und} \\ O\mathbf{E} &= OM_1 + M_1\mathbf{E} = x + \xi + (y + \eta) \operatorname{tg}(\alpha + \beta), \end{aligned} \quad \text{X.}$$

Aus IX. und X. erhellt, dass **MK** die Tangente des complexen Kreises vorstellt.

Analoge Beziehungen ergeben sich bezüglich des Tangentenschnittes **F** mit  $O\mathfrak{Q}$ ; für  $x'' = 0$  ist

$$y'' = \frac{r + i\rho}{\sin(\alpha + i\varphi)} = \frac{y + i\eta}{\sin^2(\alpha + i\varphi)} \quad \text{u. s. f.}$$

### § 38. Die Polcurve und die Polarencurve.

Nun möge noch der Verlauf der Ersatzpunkte **M** und **N** der imaginären Punkte  $M_i$  und  $N_i$  (Fig. 46) in einer Geraden untersucht werden, wenn sich diese um den festen Punkt  $O_1$  dreht. Als Kegelschnitt diene der Einfachheit wegen der Kreis vom Centrum  $O$  und dem Halbmesser  $r$ . Die Centrale  $OO_1 = c$  ist dann der Durchmesser eines Hilfskreises, welcher den Ort des Centrum  $Q$  der Involution vorstellt. Legt man die Tangente  $QT$  an den Kreis  $O$ , so ist diese der Radius des Orthogonalkreises vom Centrum  $Q$ , welcher aus  $O_1Q$  die symmetrischen Punkte **M** und **N** der Involution herauschneidet.  $N_1$  fällt nach  $O_1$ , wenn  $M_1$  in der Polare **AB** von  $O_1$  liegt. Da  $Q$  in der Mitte von **MN** sich befindet, so erhält man den besonderen Punkt  $Q_2$  in der durch das Centrum  $H$  des Perpen-

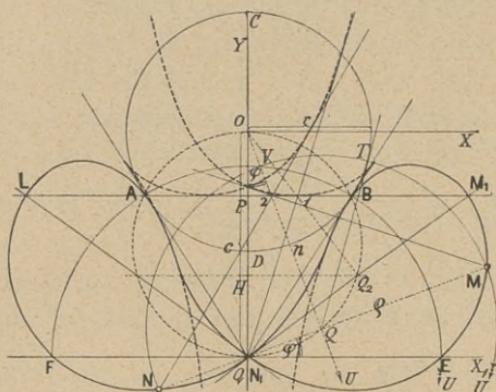


Fig. 46.

dikels  $O_1P$  zu **AB** gezogenen Parallelen. Bezeichnet man  $OQ$  mit  $n$ , so ergibt sich absolut

$$QM = QN = QT = \sqrt{n^2 - r^2}.$$

Wählt man  $O_1X_1$  zur Achse eines Polarcordinatensystems, dann ist  $\sphericalangle X_1O_1M = \varphi$  die Amplitude und  $O_1M = \rho$  der Vector des laufenden Punktes **M**. Weil  $\sphericalangle O_1OQ = \varphi$  ist, so hat man

$$n = c \cos \varphi \quad \text{und} \quad O_1Q = c \sin \varphi.$$

Ferner ist

$$O_1M = O_1Q + QM \quad \text{und} \quad O_1N = O_1Q - QM;$$

hieraus ergibt sich die Polargleichung des geometrischen Ortes von **M**, nämlich

$$\rho = c \sin \varphi \pm \sqrt{c^2 \cos^2 \varphi - r^2}. \quad \text{I.}$$

Dieses Resultat geht auch unmittelbar aus der auf den Ursprung  $O_1$  bezogenen Polargleichung des Kreises  $O$  hervor, welche lautet:

$$\rho = c \sin \varphi \pm \sqrt{r^2 - c^2 \cos^2 \varphi} = c \sin \varphi \pm i \sqrt{c^2 \cos^2 \varphi - r^2}.$$

Hierin braucht man bloß das Imaginäre reell zu nehmen. Für den Modul  $\mu$  des complexen Radiusvectors ergibt sich

$$\mu^2 = c^2 - r^2 = \overline{O_1B^2} = \text{constans.}$$

Da  $O_1Q = c \sin \varphi$  und  $\overline{QT^2} = \overline{QM^2} = \overline{QN^2} = c^2 \cos^2 \varphi - r^2$  ist, so macht man  $QU \perp O_1Q$  und  $QU = QM$ ; dann ist  $O_1U = \mu$ .

Dieselben Resultate lassen sich auch planimetrisch entwickeln. Beschreibt man von  $O_1$  mit  $O_1\mathbf{B}$  den Kreis und zieht durch  $Q$  die Sehne  $UV \perp O_1Q$ , so ist die Potenz von  $Q$  bezüglich des Kreises  $O_1$  ausgedrückt durch

$$-\overline{QU}^2 = QU \cdot QV = \overline{O_1Q}^2 - \overline{O_1\mathbf{B}}^2.$$

Nun ist  $\overline{O_1Q}^2 = \overline{O_1O}^2 - \overline{QO}^2$  und daher

$$-\overline{QU}^2 = \overline{O_1O}^2 - \overline{QO}^2 - \overline{O_1\mathbf{B}}^2 = \overline{O\mathbf{B}}^2 - \overline{QO}^2 = -\overline{QT}^2.$$

Da also  $QU = QT$  ist, so kann man sich die Construction der Tangente  $QT$  ersparen und dafür mit  $QU$  arbeiten.  $Q$  hat bezüglich der Kreise  $O$  und  $O_1$  absolut gleiche Potenzen.

Auf das rechtwinklige Achsensystem  $O_1X_1Y$  bezogen, lautet die Gleichung I. der Curve

$$(x^2 + y^2)^2 + (r^2 - 2cy)(x^2 + y^2) - c^2(x^2 - y^2) = 0. \quad \text{II.}$$

Die Curve ist also vom vierten Grade und könnte passend Polcurve genannt werden. Sie besitzt den Pol  $O_1$  als Doppelpunkt und zwei Inflexionspunkte auf den Theilen  $O_1\mathbf{A}$  und  $O_1\mathbf{B}$ ; ferner treten entsprechend den vier Culminationen zwei Doppeltangenten auf, welche zu  $O_1X_1$  parallel laufen.\* Die beiden Schleifen berühren den Kreis  $O$  in  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$ . An sonstigen Merkwürdigkeiten ist hervorzuheben, dass der ganze aber imaginär genommene Kreis der Curve angehört. Außer diesem imaginären Kreise gibt es jedoch noch unzählig viele imaginäre Curven, welche die reelle umhüllen. Jeder Punkt der Ebene liefert als Träger eines Büschels von Secanten eine solche imaginäre Curve. Ersetzt man diese durch die entsprechende reelle Curve, so gewinnt man eine ganze Familie von krummen Linien. Somit kann die Lehre vom Imaginären dazu dienen, das Gebiet des Reellen äußerst mannigfach zu erweitern.

Bezieht man die Curve auf das Achsenkreuz  $XOY$ , so hat man in II. die Substitution

$$y = y_1 + c \text{ und } x = x_1$$

zu vollführen und erhält nach gehörigem Heben

$$(x_1^2 + y_1^2 + 2cy_1)(x_1^2 + y_1^2 + r^2) - c^2(x_1^2 - y_1^2 - r^2) = 0. \quad \text{III.}$$

Rückt der Pol  $O_1$  ins Unendliche, dann ist  $c = \infty$ , und man erhält aus der letzten Gleichung

$$x_1^2 - y_1^2 - r^2 = 0. \quad \text{IV.}$$

Die Curve spaltet sich also in diesem Falle in die gleichseitige Hyperbel und in die beiden Scheiteltangenten in **A** und **B**. Denn die Polare **AB** wird beim Grenzübergange zum Durchmesser.

In analoger Weise lassen sich die Polcurven für die übrigen Kegelschnitte ermitteln. Die Polcurven der Hyperbel besitzen keinen Doppelpunkt, wenn die Tangenten durch  $O_1$  an verschiedenen Zweigen berühren.

Sucht man zu den Polen zwischen **A** und **B** die symmetrischen Strahlen z. B.  $2M$  und  $2N$ , so umhüllen diese die punktiert verzeichnete Polarencurve. Sie hat zwei Asymptoten, zwei Rückkehrpunkte, zwei Doppelpunkte und eine Doppeltangente. Von den Doppelpunkten ist der untere außerhalb der Figur zu ermitteln. Die analytische Behandlung dieser Curve würde hier zu weit führen; und deshalb behalte ich mir dieselbe für eine spätere Gelegenheit vor. Auch die Polarencurve lässt sich für die übrigen Kegelschnitte verallgemeinern.

### § 39. Harmonische Eigenschaften der Kegelschnitte.

Die Ellipse in Fig. 47 hat die auf die conjugierten Durchmesser  $AB$  und  $CD$  bezogene Gleichung

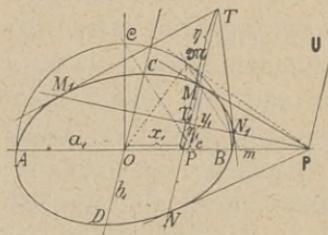


Fig. 47.

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1. \quad \text{I.}$$

Nimmt man in der Ordinate von  $M(x_1 y_1)$  den Pol  $T(x_1 \eta)$  an, so hat die Polare  $M_1 N_1$  von  $T$  die Gleichung

$$\frac{x_1 x}{a_1^2} + \frac{\eta y}{b_1^2} = 1. \quad \text{II.}$$

Setzt man hierin  $x = x_1$ , so entspricht dies dem Punkte  $T_1(x_1 \eta_1)$  der Polare  $M_1 N_1$ ; die Ordinate  $\eta_1$  ist der entsprechende Wert von  $y$  in II.

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{\eta \eta_1}{b_1^2} = 1.$$

Hieraus folgt

$$\eta \eta_1 = \frac{b_1^2}{a_1^2} (a_1^2 - x_1^2) = y_1^2, \quad \text{III.}$$

denn  $M$  liegt in der Ellipse und  $x_1, y_1$  genügen daher der Gleichung I.

Aus  $\eta \eta_1 = y_1^2$  folgt wegen IV.

$$\eta_1 : y_1 = y_1 : \eta$$

$$(y_1 + \eta_1) : (y_1 - \eta_1) = (\eta + y_1) : (\eta - y_1).$$

Da  $PM = PN = y_1$ , so ist

$$NT_1 : MT_1 = NT : MT.$$

Demnach wird jede Sehne, deren Verlängerung durch  $T$  geht, durch den Pol  $T$  und seine Polare  $M_1N_1$  harmonisch geteilt.  $T$  und  $T_1$  sind conjugierte Pole.

Wird absolut  $x_1 > a_1$  (Fig. 48), so wird nach III.

$$y_1 = i \frac{b_1}{a_1} \sqrt{x_1^2 - a_1^2}$$

Setzt man  $x_1 = x$  und  $y_1 = iy$ , so ist

$$y = \frac{b_1}{a_1} \sqrt{x^2 - a_1^2},$$

und die Ersatzpunkte  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{N}$  von  $M_i$  und  $N_i$  liegen in einer Hyperbel von der Gleichung

$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1.$$

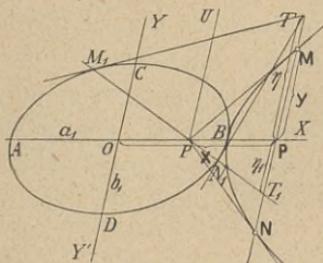


Fig. 48.

$PN$  und  $PM$  vertreten nur dann die imaginären Tangenten, wenn  $P$  in einer Achse liegt.

Die Relation IV. verwandelt sich in

$$\eta \eta_1 = -y^2$$

$$\text{oder } PT \cdot PT_1 = -\overline{PM}^2.$$

Die Strecke  $\mathbf{MN}$  wird durch  $T_1$  und  $T$  nicht harmonisch geteilt, da  $T_1$  und  $T$  zu verschiedenen Seiten des Centrums  $\mathbf{P}$  liegen.

Die Beziehungen

$$PT \cdot PT_1 = +\overline{PM}^2 \quad \text{Fig. 47.}$$

$$PT \cdot PT_1 = -\overline{PM}^2 \quad \text{Fig. 48.}$$

enthalten die Wechselbeziehung der Punkte  $T_1$  und  $T$ . Im ersteren Falle trennen sie  $MN$  harmonisch, im letzteren Falle trennen sie die imaginär genommenen Punkte  $\mathbf{MN}$  harmonisch.  $T_1$  und  $T$  sind vertauschbar. Denn sucht man den entsprechenden Punkt zu  $T$ , so findet man  $T_1$ . Umgekehrt findet man zu  $T_1$  den zugeordneten Punkt  $T$ . Man sagt  $T$  und  $T_1$  gehören einer Involution an, die

aus unzählig vielen Punktepaaren besteht.  $MN$  ist der Träger der einen Involution,  $\mathbf{MN}$  der Träger der andern. Fällt  $T$  nach  $M$ , so fällt auch  $T_1$  nach  $M$ . Dasselbe gilt bezüglich  $N$ .  $M$  und  $N$  heißen daher Deckpunkte oder Doppelpunkte. Die Involution heißt hyperbolisch.

In der andern Involution können sich  $T$  und  $T_1$  nie decken. Denn kommt  $T$  nach  $\mathbf{M}$ , so gelangt  $T_1$  nach  $\mathbf{N}$ .  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{N}$  sind die symmetrischen Elemente der Involution. Sie heißt elliptisch. Ihre Doppelpunkte sind imaginär. Die hyperbolische Involution hat imaginäre symmetrische Punkte.

Die Producte

$$PT \cdot PT_1 = + \overline{PM}^2 \quad \text{Fig. 47.}$$

$$PT \cdot PT_1 = - \overline{PM}^2 \quad \text{Fig. 48.}$$

heißen Potenzen der Involutionen. Die Involution ist hyperbolisch oder elliptisch, je nachdem ihre Potenz positiv oder negativ ist.  $P$  ist das Centrum der hyperbolischen Involution. Der entsprechende Punkt  $P_1$  fällt ins Unendliche. Denn wird  $PT = 0$ , so muss  $PT_1 = \infty$  werden. Andererseits ist  $\mathbf{P}$  das Centrum der elliptischen Involution und ihm entspricht der unendlich ferne Punkt  $\mathbf{P}_1$ . Denn wird  $PT = 0$ , so muss  $PT_1 = \infty$  werden.

#### § 40. Conjugierte Kreisbüschel.

In Fig. 49 sind  $M$  und  $N$  die Träger eines Kreisbüschels von der Centrale  $OD \perp MN$ .  $O$  ist das Centrum des kleinsten Kreises. Der Kreis vom Centrum  $D$  liefert in der Centrale die Schnittpunkte  $E$  und  $E'$ . Nun ist nach einem planimetrischen Satze unter Rücksichtnahme auf die verschiedenen Richtungen von  $OE$  und  $OE'$

$$OE \cdot OE' = - \overline{OM}^2 = - \overline{OS}^2 = - \overline{OS'}^2. \quad \text{I.}$$

Mithin bilden  $E$  und  $E'$  ein Punktepaar einer elliptischen Involution vom Mittelpunkte  $O$ . Der Kreis  $O$  ergibt die symmetrischen Punkte  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{S}'$  als Paar. Diese sind zugleich die reellen Ersatzpunkte für die imaginären Doppelpunkte  $S_i$  und  $S'_i$ . Der Abstand  $\mathbf{SS}'$  ist im Verhältnisse zu den analogen Abständen ein Minimum. Halbiert man  $\sphericalangle EME'$  und seinen Nebenwinkel, so erhält man  $MF'$  und  $MF$ . Da  $MF \perp MF'$  ist, so lässt sich über  $FF'$  als Durchmesser ein Kreis  $D_1$  beschreiben, welcher durch  $M$  und  $N$  geht. Nun theilen aber nach der Planimetrie  $F'$  und  $F$  die Basis  $EE'$  des Dreieckes  $EE'M$  harmonisch. Mithin gehört zu jedem

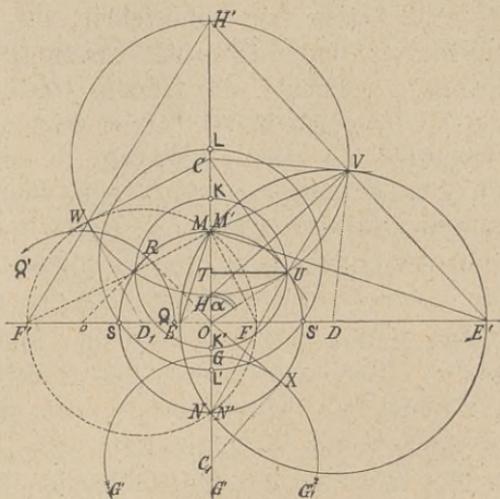


Fig. 49.

Paare der elliptischen Involution ein harmonisches Paar derselben Involution.

Legt man von einem beliebigen Punkte  $C$  der Chordale  $MN$  die Tangenten  $CU, CV, CW$  an die Kreise  $O, D, D_1$ , so ist nach einem elementaren Satze

$$\overline{CU}^2 = CM \cdot CN, \overline{CV}^2 = CM \cdot CN, \overline{CW}^2 = CM \cdot CN.$$

Demnach ist

$$CU = CV = CW,$$

und es lässt sich von  $C$  aus ein Kreis durch  $U, V$  und  $W$  legen, welcher alle Kreise des Büschels  $MN$  orthogonal schneidet. Dieser liefert in  $MN$  die Schnittpunkte  $H$  und  $H'$ . Da  $OU$  eine Tangente an den Kreis  $C$  ist, erhält man

$$OH \cdot OH' = \overline{OU}^2 = \overline{OM}^2 = \overline{ON}^2. \quad \text{II.}$$

Diese Beziehung drückt aus, dass  $H$  und  $H'$  ein Paar der hyperbolischen Involution mit den Doppelpunkten  $M$  und  $N$  bilden.  $MN$  wird durch  $H$  und  $H'$  harmonisch geteilt. Ist  $C_1$  das Centrum eines zweiten Orthogonalkreises an den Büschel  $MN$ , welchen der Kreis  $O$  in  $X$  schneidet, so ist  $OX = OU$ , d. h.  $O$  befindet sich in der Chordale der Kreise  $C$  und  $C_1$ . Da aber diese normal zu  $CC_1$  liegen muss, so ist  $OD$  die gemeinsame Chordale der Orthogonalkreise, welche durch die imaginären Punkte  $S_i$  und  $S_i'$  gehen.

Die Kreisbüschel  $MN$  und  $S_i S_i'$  sind conjugiert. Die Ent-

wicklungen des § 39 lassen sich unmittelbar auf den Kreis übertragen, denn dieser ist eine Ellipse mit zusammenfallenden Brennpunkten. Der Kreis  $C$  schneidet die Gerade  $OD$  in den imaginären Punkten  $S_i$  und  $S'_i$ . Die imaginären Kreisarme werden durch die gleichseitige Hyperbel von den Scheiteln  $H$  und  $H'$  vertreten, deren Äste durch  $S$  und  $S'$  gehen.  $E$  und  $E'$  sind conjugierte Pole des Kreises  $C$ . Analoges gilt vom Kreise  $C_1$ , dessen imaginären Armen die Hyperbel von den Scheiteln  $G$  und  $G'$  entspricht.

Demgemäß erscheint die Chordale  $OD$  der Kreise  $C$  und  $C_1$  als die gemeinsame Sehne beider Hyperbeln. Beide Kreise liefern in der Chordale  $OD$  dieselbe Involution harmonischer Pole.

Für den Büschel  $MN$ , dessen Kreise sich in  $M$  und  $N$  reell durchschneiden, sind  $H$  und  $H'$  conjugierte Pole.

Dieselben sind ein Paar der hyperbolischen Involution harmonischer Pole, welche allen Kreisen des Büschels  $MN$  gemeinsam ist.

Zwei Kreise schneiden sich demnach in zwei reellen oder imaginären Punkten, die auch zusammenfallen können, falls eine Berührung eintritt. Außerdem haben sie aber auch zwei unendlich ferne imaginäre Punkte gemein. Denn die beiden gleichseitigen Hyperbeln, deren Hauptachsen in der Centrale liegen, und welche den Kreisen tangierend angeschrieben sind, haben parallele Asymptoten und deshalb zwei gemeinsame Punkte im Unendlichen, denen imaginäre Punkte der Kreise entsprechen.

Der Büschel  $S_i S'_i$  besitzt zwei Nullkreise  $M$  und  $N$ . Einem Centrum zwischen  $M$  und  $N$  entspricht ein imaginärer Orthogonalkreis, denn er hat eine negative Potenz, welche durch das Quadrat der halben kürzesten Sehne ausgedrückt ist, die bezüglich aller Kreise des Büschels  $MN$  gleich bleibt. Der mit dieser halben Sehne beschriebene Kreis heißt Diametralkreis; er vertritt den imaginären Orthogonalkreis, schneidet aber den Büschel  $MN$  nicht mehr rechtwinklig. Man vergleiche § 1 und § 2.

Lässt man  $V$  auf dem Kreise  $D$  wandern und projiziert ihn aus  $E$  und  $E'$ , so erhält man beliebig viele Paare der Involution auf  $OC$  wie  $H$  und  $H'$ . Denn da  $\text{arc } EM = \text{arc } EN$  ist, so ist  $\sphericalangle EVM = \sphericalangle EVN$ . Ferner ist  $\sphericalangle E'VE$  als Peripheriewinkel im Halbkreise ein rechter. Mithin wird  $MN$  durch  $H$  und  $H'$  harmonisch getheilt. Hält man  $H$  und  $H'$  fest und lässt  $E$  variieren, so findet man mittels des Kreises  $EMN$  den zugehörigen Punkt  $E'$ .  $V$  liegt in  $EH$ , resp.  $E'H'$ . Da  $HVH'$  immer ein rechter Winkel ist, so bewegt sich  $V$  im Kreise vom Durchmesser  $HH'$ .

Es ist leicht nachzuweisen, dass ein Kreisbüschel von jeder

beliebigen Geraden nach einer Involution geschnitten wird. Die Centren der Involutionen liegen in der Chordale des Büschels.

Zu diesem Behufe schneidet man den Büschel  $MN$  mit einer Geraden, die zwischen  $M$  und  $N$  hindurch geht und  $MN$  in  $Y$  trifft. Sind  $Z$  und  $Z'$  die Schnittpunkte mit einem dieser Kreise und ist  $r$  der Radius des Diametralkreises aus  $Y$  an den Büschel  $MN$ , so ist  $YZ \cdot YZ' = -r^2$ . Liegt  $Y$  außerhalb der Strecke  $MN$ , dann kann man von  $Y$  aus einen Orthogonalkreis vom Radius  $t$  an den Büschel legen, und es ist  $YZ \cdot YZ' = t^2$ .

Wird der Büschel  $S_i S_i'$  durch eine Gerade geschnitten, welche in  $SS'$  den Punkt  $A$  liefert, und sind  $Z$  und  $Z'$  die Schnittpunkte eines dieser Kreise und  $t$  die Länge der von  $A$  an ihn gelegten Tangente, so lässt sich mit  $t$  von  $A$  aus ein Kreis des Büschels  $MN$  beschreiben, der alle Kreise des Büschels  $S_i S_i'$  orthogonal schneidet. Demnach ist

$$AZ \cdot AZ' = t^2.$$

Die conjugierten Kreisbüschel finden in der stereographischen Projection der Erdkugel (bezw. Himmelskugel) Anwendung. Der Büschel mit den Trägern  $M$  und  $N$  stellt die Meridiane und der andere die Parallelkreise dar. (Vergl. meine Schrift: „Mathematische Vorschule der Astronomie“.)

Die hyperbolische Involution kann in einer besonderen Abart auftreten, die man gleichseitig oder symmetrisch nennt. Befindet sich nämlich der eine Doppelpunkt im Unendlichen, so liegen die Paare symmetrisch zum anderen. Der Grund liegt in der Harmonie der Doppelpunkte zu jedem Paare.

Sowohl die hyperbolische als auch die elliptische Involution können in eine parabolische degenerieren, wenn die Doppelpunkte zusammenfallen. Das Centrum der Involution ist dann allen Punkten des Trägers zugeordnet, d. h. alle Paare haben einen gemeinsamen Punkt. Rückt das Centrum einer elliptischen Involution ins Unendliche, so verwandelt sie sich ebenfalls in eine parabolische Involution.

In Fig. 14, § 12 ist  $\mathbf{PH} = \mathbf{PH}' = \mathbf{PM}$ . Da  $OM$  den Kreis  $\mathbf{P}$  tangiert, so ist  $OH \cdot OH' = OM^2$ . Mithin sind  $H$  und  $H'$  ein Paar der hyperbolischen Involution mit den Doppelpunkten  $A$  und  $B$ . Nun ist

$$OH = OP - HP = OP - PM = OM \cos i\varphi - OM \frac{\sin i\varphi}{i}$$

$$OH' = OP + PH' = OP + PM = OM \cos i\varphi + OM \frac{\sin i\varphi}{i}.$$

Mit Rücksicht auf  $i^2 = -1$  erhält man

$$OH = OM(\cos i\varphi + i \sin i\varphi)$$

$$OH' = OM(\cos i\varphi - i \sin i\varphi).$$

$$\begin{aligned} \text{Daher } OH \cdot OH' &= \overline{OM}^2 (\cos i\varphi + i \sin i\varphi) (\cos i\varphi - i \sin i\varphi) \\ &= \overline{OM}^2 (\cos^2 i\varphi + \sin^2 i\varphi) = \overline{OM}^2. \quad \text{III.} \end{aligned}$$

Ein Analogon hiezu liefert Fig. 49. Liegt  $T$  innerhalb des Kreises  $MSNS'$ , so ist der Orthogonalkreis von  $T$  an den letzteren imaginär. Sein Radius ist  $i$ .  $TU$ , wenn  $TO \perp UT$  ist. Der mit  $TU$  als Radius beschriebene Diametralkreis liefert in  $MN$  die Punkte  $K$  und  $K'$ , welche als Ersatz für die imaginären Punkte  $K_i$  und  $K'_i$  dienen. Ist  $\sphericalangle TOU = \alpha$ , so hat man

$$OK_i = OT + TK_i = OT + i \cdot TU = OU \cos \alpha + i \cdot OU \sin \alpha$$

$$OK'_i = OT - TK'_i = OT - i TU = OU \cos \alpha - i \cdot OU \sin \alpha.$$

$$\begin{aligned} \text{Daraus folgt } OK_i \cdot OK'_i &= \overline{OU}^2 (\cos \alpha + i \sin \alpha) (\cos \alpha - i \sin \alpha) \\ &= \overline{OU}^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \overline{OU}^2. \quad \text{IV.} \end{aligned}$$

Mithin sind  $K_i$  und  $K'_i$  Punkte der hyperbolischen Involution. Für  $\alpha = 90^\circ$  gehen sie in die imaginären symmetrischen Punkte  $M_i$  und  $M'_i$  über. Nimmt man die Kreise des Büschels  $SS'$  sämtlich imaginär, so liefern sie in  $MN$  imaginäre Punkte der hyperbolischen Involution. Diese Kreise haben imaginäre Centren und Radien.

Sind  $L$  und  $L'$  die Vertreter der Schnittpunkte  $L_i$  und  $L'_i$  eines solchen Kreises, so ist

$$OL_i = i \cdot OL$$

$$OL'_i = i \cdot OL'.$$

$$\text{Mithin } OL_i \cdot OL'_i = -OL \cdot OL' = -(-\overline{OS}^2) = \overline{OS}^2 = \overline{OM}^2.$$

Analog lässt sich die elliptische Involution auf  $SS'$  durch imaginäre Punktepaare ergänzen.

Man legt die Orthogonalkreise durch  $M_i$  und  $N_i$  an den Kreis  $MSNS'$  und nimmt dann ihre in  $SS'$  gelegenen Centren und Schnittpunkte imaginär.

Sind  $Q$  und  $Q'$  die Vertreter der imaginären Schnittpunkte  $Q$  und  $Q'_i$ , so ist

$$OQ_i = i \cdot OQ$$

$$OQ'_i = i \cdot OQ'.$$

Mithin  $OQ_i \cdot OQ'_i = -OQ \cdot OQ' = -\overline{OK}^2 = -\overline{OS}^2$ .

Man kann auch noch Punkte mit complexen Coordinaten in  $SS'$  auffinden, die den Punkten  $K_i$  und  $K'_i$  in  $MN$  entsprechen; nimmt man ihre Coordinaten imaginär, so erscheinen sie wieder complex und liefern deshalb abermals imaginäre Punkte.

### § 41. Strahleninvolutionen.

Projiziert man eine Punktinvolution (Fig. 50 u. 51) aus einem Centrum  $C$ , welches in der im Mittelpunkte  $O$  der Involution zum Träger  $OV$  errichteten Normalen liegt, so erhält man eine Strahleninvolution, welche mit der Punktinvolution zugleich hyperbolisch oder elliptisch ist.

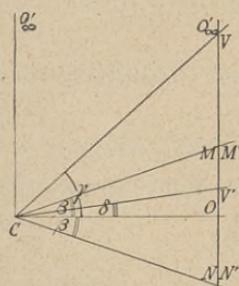


Fig. 50.

$CO$  und  $CO' \parallel OV$  sind die Achsen der Strahleninvolution vom Träger  $C$ . In der hyperbolischen Involution Fig. 50 sind  $CM = CM'$  und  $CN = CN'$  die Doppelstrahlen (Deckstrahlen), während die elliptische Involution in Fig. 51 die symmetrischen Strahlen  $CS$  und  $CS'$  aufweist. Es sei  $\sphericalangle OCM = \sphericalangle OCN = \beta$  und ebenso  $\sphericalangle OCS = \sphericalangle OCS' = \beta$ . Desgleichen sei in beiden Figuren  $\sphericalangle OCV = \gamma$  und  $\sphericalangle OC'V' = \delta$ .  $V$  und  $V'$  seien ein Paar der Involution.

Dann ist

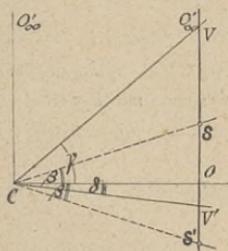


Fig. 51.

$$OV \cdot OV' = \overline{OM}^2, \text{ resp. } OV \cdot OV' = -\overline{OS}^2.$$

Dementsprechend erhält man durch Einführung der trigonometrischen Functionen

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma \cdot \operatorname{tg} \delta &= \operatorname{tg}^2 \beta \\ \text{und } \operatorname{tg} \gamma \cdot \operatorname{tg} (-\delta) &= -\operatorname{tg}^2 \beta. \end{aligned} \quad \text{I.}$$

Dabei sind die Winkel im absoluten Sinne gezählt worden.

Da ein harmonisches Strahlenbüschel von jeder beliebigen Geraden nach einer harmonischen Punkteihe geschnitten wird, so erkennt man sofort, dass eine hyperbolische Strahleninvolution auf jeder Geraden eine hyperbolische Punktinvolution als Spur gibt. Die Doppelstrahlen liefern die Doppelpunkte. Jener Strahl  $CR'$ , welcher zur Schnittgeraden parallel ist, besitzt einen zugeordneten

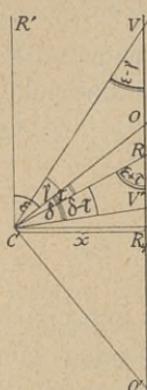


Fig. 52.

Strahl  $CR$ ; der letztere liefert das Centrum der Punktinvolution.

Es entsteht nun die Frage, ob auch eine elliptische Strahleninvolution von jeder Geraden nach einer Punktinvolution geschnitten wird. Ist wieder  $CR'$  (Fig. 52) der zur Schnittgeraden  $VV'$  parallele Strahl und  $CR$  der zugeordnete, dann ist zu vermuthen, dass dieser das Centrum  $R$  der zu erwartenden Punktinvolution gibt. Sind  $V$  und  $V'$  die Schnittpunkte zweier zugeordneter Strahlen, so wird es sich um die Frage handeln, ob das Product

$$RV \cdot RV'$$

constant ist oder nicht. Im ersteren Falle ist das Schnittresultat eine elliptische Punktinvolution.

Ist  $CO$  die Achse,  $\sphericalangle OCV = \gamma$ ,  $\sphericalangle OCV' = \delta$ ,  $\sphericalangle OCR' = \varepsilon$ ,  $\sphericalangle OCR = \tau$ , so folgt aus dem Dreiecke  $RCV$  nach dem Sinussatze

$$RV : RC = \sin(\gamma + \tau) : \sin(\varepsilon - \gamma).$$

Ferner erhält man aus dem Dreieck  $RV'C$ , da  $\sphericalangle RV'C = \pi - (\varepsilon + \delta)$  ist,

$$RV' : RC = \sin(\delta - \tau) : \sin(\varepsilon + \delta).$$

Durch Multiplication der beiden Proportionen folgt

$$RV \cdot RV' = \overline{RC}^2 \cdot \frac{\sin(\gamma + \tau) \sin(\delta - \tau)}{\sin(\varepsilon - \gamma) \sin(\varepsilon + \delta)}$$

oder

$$RV \cdot RV' = \overline{RC}^2 \cdot \frac{(\sin \gamma \cos \tau + \cos \gamma \sin \tau) (\sin \delta \cos \tau - \cos \delta \sin \tau)}{(\sin \varepsilon \cos \gamma - \cos \varepsilon \sin \gamma) (\sin \varepsilon \cos \delta + \cos \varepsilon \sin \delta)}.$$

Dividirt man Zähler und Nenner durch  $\cos \gamma \cos \delta \cos^2 \varepsilon \cos^2 \tau$ , so ergibt sich

$$RV \cdot RV' = \overline{RC}^2 \cdot \frac{(tg \gamma + tg \tau) (tg \delta - tg \tau) \cos^2 \tau}{(tg \varepsilon - tg \gamma) (tg \varepsilon + tg \delta) \cos^2 \varepsilon}.$$

Nun ist nach I. absolut  $tg \gamma tg \delta = tg \varepsilon tg \tau = tg^2 \beta$ .

Drückt man hieraus  $tg \delta$  und  $tg \tau$  durch die Functionen von  $\gamma$ ,  $\varepsilon$  und  $\beta$  aus, so folgt:

$$RV \cdot RV' = \overline{RC}^2 \cdot \frac{tg^2 \beta (tg \gamma + tg^2 \beta \cotg \varepsilon) (\cotg \gamma - \cotg \varepsilon) \cos^2 \tau}{(tg \varepsilon - tg \gamma) (tg \varepsilon + tg^2 \beta \cotg \gamma) \cos^2 \varepsilon}.$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich auf

$$RV \cdot RV' = \overline{RC}^2 \cdot \frac{tg^2 \beta \cdot \cos^2 \tau}{tg^2 \varepsilon \cdot \cos^2 \varepsilon} = \overline{RC}^2 \cdot \frac{tg^2 \beta \cos^2 \tau}{\sin^2 \varepsilon} \quad \text{II.}$$

Schließlich hätte man auch zu beachten, dass diesem Ausdrucke, relativ genommen, das Vorzeichen „minus“ zukommt. Da  $RC$ ,  $\varepsilon$  und  $\tau$  constante Größen sind, die mit der Lage der Schnittgeraden  $VV'$  gegen  $C$  und  $CO$  zusammenhängen, während  $\beta$  an und für sich unveränderlich ist, so sieht man aus II., dass  $V$  und  $V'$  ein Paar der elliptischen Involution vom Centrum  $R$  vorstellen.

Ist  $CR_1 \perp VV'$  und  $CR_1 = x$ , so lässt sich  $RC$  aus dem rechtwinkeligem Dreiecke  $CR_1R$  ausdrücken.

$$RC = \frac{CR_1}{\sin(\varepsilon + \tau)} = \frac{x}{\sin(\varepsilon + \tau)}$$

Damit erhält man

$$RV \cdot RV' = - \frac{x^2 tg^2 \beta \cos^2 \tau}{\sin^2(\varepsilon + \tau) \sin^2 \varepsilon} = \frac{-x^2 tg^2 \beta \cos^2 \tau}{[\sin \varepsilon \cos \tau + \cos \varepsilon \sin \tau]^2 \sin^2 \varepsilon}$$

$$RV \cdot RV' = - \frac{x^2 tg^2 \beta}{(tg \varepsilon + tg \tau)^2 \sin^2 \varepsilon \cos^2 \varepsilon}$$

Drückt man  $tg \tau$  durch  $tg^2 \beta \cdot cotg \varepsilon$  aus, so resultiert

$$RV \cdot RV' = - \frac{x^2 tg^2 \beta}{(tg^2 \varepsilon + tg^2 \beta)^2 \cos^4 \varepsilon} \quad \text{III.}$$

Wie schon erwähnt wurden die Winkel hiebei absolut gezählt. Ganz analog konnte man die hyperbolische Strahleninvolution behandeln und hätte dann die Lehre von den harmonischen Büscheln direct gewonnen.

## § 42. Strahleninvolutionen am Kegelschnitte.

Den obigen Entwicklungen gemäß wird jede Strahleninvolution von einer den Träger nicht enthaltenden Geraden nach einer gleichartigen Punktinvolution geschnitten. Umgekehrt wird jede Punktinvolution aus einem nicht im Träger enthaltenen Punkte durch eine gleichartige Strahleninvolution projiciert. Demnach kann man eine symmetrische Punktinvolution aus einem Punkte ihrer Symmetralen auch durch eine symmetrische Strahleninvolution projicieren. Die Symmetrale ist der eine Doppelstrahl und der andere ist normal zu ihr.

Unter den elliptischen Strahleninvoluntionen ist jene besonders interessant, wo  $\beta$  den Wert  $\frac{\pi}{4}$  besitzt. Es ist dann nach § 41, I.

$$\operatorname{tg} \gamma \cdot \operatorname{tg} (-\delta) = -1$$

und daher absolut  $\gamma + \delta = \frac{\pi}{2}$ .

Die Strahlen jedes Paares sind normal zu einander. Diese Involution rechter Winkel heißt circular. Nimmt man das Centrum eines Kreises als Pol, so ist die Polare unendlich fern.

Die conjugierte Polare eines Durchmessers ist der dazu normale Durchmesser.

In Fig. 49 ist  $M$  der Träger einer circularen Strahleninvolution. Denn es ist  $ME \perp ME'$ . Dasselbe gilt von  $N$ . Solche Punkte nennt man Kreispunkte (Nullkreise).

Bekanntlich erscheint jede Kegelschnittstangente  $MT$  (vom Berührungspunkte  $M$  bis zur Directrix gerechnet) vom zugehörigen Brennpunkte  $F$  aus unter rechtem Winkel. (Vergl. meine „Constructive Geometrie der Kegelschnitte.“) Zieht man daher in den beiden Endpunkten  $M$  und  $N$  einer Brennpunktsehne die Tangenten, so begegnen sie sich in einem Punkte  $T$  der Directrix. Diese ist die Polare des zugehörigen Brennpunktes. Da  $FM$  und  $FT$  conjugierte Polaren sind und aufeinander senkrecht stehen, so ist die Involution harmonischer Polaren im Brennpunkte circular. Der Beweis gestaltet sich folgendermaßen:

Ist z. B.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die auf die Achsen bezogene Ellipsengleichung, so lautet die Gleichung der Polare für  $M_1(x_1, y_1)$

$$\frac{x_1 \xi}{a^2} + \frac{y_1 \eta}{b^2} = 1;$$

für  $F$  ist  $x = -c$  und  $y_1 = 0$ .

Mithin ist  $-\frac{c}{a^2} \xi = 1$  oder  $\xi = -\frac{a^2}{c} = -k = OR$

die Gleichung der Directrix. Der Leitstrahl des Punktes  $M(x, y)$  ist gegeben durch

$$MF = \varrho_1 = a + \frac{c}{a} x = \frac{c}{a} \left( \frac{a^2}{c} + x \right) = \frac{c}{a} (k + x), \quad \text{I.}$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Aus I. und II. ergibt sich weiter

$$\varrho_1 \varrho_2 = a^2 - \frac{c^2}{a^2} x^2.$$

Vermeehrt man dies um

$$a_1^2 = x^2 + y^2,$$

so folgt mittels der Ellipsengleichung

$$a_1^2 + \varrho_1 \varrho_2 = a^2 + b^2.$$

Nun ist aber nach früherem, wenn  $ON = b_1$  der zu  $a_1$  conjugierte Halbmesser ist,

$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2.$$

Aus den beiden letzten Beziehungen folgt die interessante Relation

$$\varrho_1 \varrho_2 = b_1^2, \quad \text{V.}$$

die später noch synthetisch erwiesen werden soll.

Ist  $T$  ein Directrixpunkt ( $x = -k, y$ ), so lautet die Gleichung seiner Polaren

$$\frac{x \xi}{a^2} + \frac{y \eta}{b^2} = 1.$$

Diese Polare  $FT_1$  liefert in der Directrix den Schnittpunkt  $T_1$  ( $\xi_1 = x = -k, \eta_1$ ).

$$y \eta_1 = -\frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2) = -\frac{b^2}{a^2} \left( \frac{a^4}{c^2} - a^2 \right)$$

$$y \eta_1 = -\frac{b^2}{c^2} (a^2 - c^2) = -\frac{b^4}{c^2}.$$

Nun ist der Abstand  $FR = q$  des Brennpunktes  $F$  von der Directrix

$$q = \frac{a^2}{c} - c = \frac{a^2 - c^2}{c} = \frac{b^2}{c}.$$

Mithin ist

$$y \eta_1 = -q^2 \text{ d. h. } RT \cdot RT_1 = -\overline{FR}^2,$$

d. h. Polare  $T_1F$  steht zu  $TF$  normal.

Die in § 41 gewonnenen Resultate lassen sich unmittelbar auf die Fig. 47 anwenden. **P** ist der Pol von  $MN$ . Die Involution conjugierter Pole auf  $MN$ , von welchen  $TT_1$  ein Paar vorstellt, wird aus **P** durch eine Strahleninvolution projiciert. Die Tangenten **PM** und **PN** sind die Doppelstrahlen. **PP** und **PU**  $\parallel$   $PT$  sind ein Strahlenpaar. Die Achsen der Strahleninvolution sind das im allgemeinen einzige Rechtwinkelpaar der Involution. Wenn  $AB$  und  $CD$  Kegelschnittsachsen sind, dann sind **PP** und **PU** zugleich Achsen der Involution.

In Fig. 48 ist  $P$  der Pol der Ellipsenpolare  $TT_1$ . Die elliptische Involution conjugierter Pole (wie  $T$  und  $T_1$ ) wird aus  $P$  durch eine Strahleninvolution projiciert. **PM** und **PN** sind ein Paar, ebenso **PP** und **PU**  $\parallel$   $PT$ . Die Strahlen **PM** und **PN** sind aber nur dann zugleich die symmetrischen Strahlen der Involution, wenn  $AB$  und  $CD$  Kegelschnittsachsen sind. In diesem Falle stellen **PP** und **PU** die Achsen der Involution vor. Sonst sind letztere das im allgemeinen einzige Rechtwinkelpaar der Involution.

Der Rückblick auf § 12 und Fig. 14 zeigt folgendes: **M** und **N** sind conjugierte Pole in der Polare des Kreispols  $P$ . Sie gehören einer elliptischen Involution vom Centrum **P** an. Projiciert man diese Involution aus dem Mittelpunkte  $O$ , so erhält man eine Strahleninvolution mit den Achsen  $OP$  und  $OY$  und den symmetrischen Strahlen **OM** und **ON**. Die imaginären Doppelstrahlen  $OM_i$  und  $ON_i$  schließen den Winkel  $i \cdot 2\varphi$  ein.  $\sphericalangle POM_i = i\varphi$ .

Die Polare von  $O$  liegt unendlich fern. Die Involution conjugierter Polaren um  $O$  ist circular. Jedes Paar kann als Achsenzwilling angesehen werden. Das halbierende Paar gibt dann die symmetrischen Strahlen, welche Asymptoten an die zugehörigen gleichseitigen Hyperbeln sind, welche die imaginären Kreisweige vertreten. Die Asymptoten sind ein Ersatz für die imaginären Kreistangenten.

Vom Centrum einer Ellipse aus gibt es nur zwei imaginäre Tangenten. Diese werden durch die symmetrischen Strahlen der Involution conjugierter Durchmesser dargestellt und sind Diagonalen des über den Achsen als Symmetralen construierten Rechteckes.

Die Involution conjugierter Durchmesser im Centrum einer Hyperbel ist hyperbolisch und liefert die Asymptoten als Doppelstrahlen. Dies ist der Grund, warum man allgemein die Doppelstrahlen auch Asymptoten nennt. Die Involution conjugierter Pole in einer Tangente ist parabolisch mit dem Berührungspunkte als Centrum.

§ 43. Der Ortskreis der Kegelschnitte.

Es seien  $PM$  und  $PN$  in Fig. 54 zwei aufeinander senkrechte Tangenten einer Ellipse vom Centrum  $O$ . Die Polare  $MN$  läuft dann parallel zu dem Durchmesser  $C_1D_1$ , welcher zu  $OP$ , resp. zu  $A_1B_1$  conjugiert ist. Da  $P_1M = P_1N$  ist und man von  $P_1$  über  $MN$  einen Halbkreis durch  $P$  schlagen kann, so ist  $P_1P = P_1N = y$ . Nun sind  $P_1$  und  $P$  conjugierte Pole, und es besteht die Beziehung  $OP_1 \cdot OP = OA_1^2$  oder

$$x(x + y) = a_1^2. \tag{I}$$

Zieht man  $MM' \parallel A_1B_1$ , so ist  $MT_1 = T_1M'$ . Die Tangenten in  $M$  und  $M'$  müssen sich in dem zu  $MM'$  conjugierten Durchmesser  $OT_1$  schneiden. Da  $\triangle P_1PM \sim \triangle T_1MT$  und  $P_1P = P_1M$  ist, so muss  $T_1M = T_1T = x$  sein. Mithin lässt sich wegen  $MT_1 = T_1M'$  von  $T_1$  aus über  $MM'$  ein Kreis durch  $T$  beschreiben und deshalb ist  $TM \perp TM'$ . Dasselbe Resultat bekommt man auch mittels der leicht nachzuweisenden Beziehung, dass  $N, O$  und  $M'$  in gerader Linie liegen. Nun sind aber der centralen

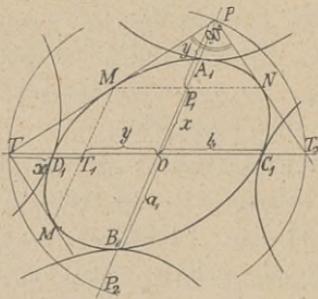


Fig. 54.

Symmetrie gemäß die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers parallel. Also  $NP \parallel M'T$ . Da aber  $PT \perp NP$  ist, so ist auch  $PT \perp M'T$ .

Nun sind  $T_1$  und  $T$  conjugierte Pole und daher hat man

$$OT_1 \cdot OT = \overline{OD_1}^2 \quad \text{oder} \\ y(x + y) = b_1^2. \tag{II}$$

Addiert man I. und II., so folgt

$$(x + y)^2 = a_1^2 + b_1^2$$

und gemäß XI. in § 34

$$(x + y)^2 = a^2 + b^2.$$

Dabei sind  $a$  und  $b$  Halbachsen der Ellipse und man erhält schließlich

$$\overline{OP}^2 = \overline{OT}^2 = a^2 + b^2. \tag{III}$$

Demnach ist der geometrische Ort aller Punkte, für welche

die Ellipse gezogenen Tangenten auf einander senkrecht stehen, derselbe Kreis, welcher sich um das über den Achsen als Symmetralen construierte Rechteck beschreiben lässt.

Der Ortskreis degeneriert bei der Parabel in die Directrix.

Bei der Hyperbel ergibt sich durch eine der vorigen analoge Entwicklung

$$\overline{OP}^2 = \overline{OT}^2 = a^2 - b^2. \quad \text{IV.}$$

Der Ortskreis ist reell, solange  $a > b$  ist.

Bei der gleichseitigen Hyperbel schrumpft der Ortskreis in einen Punkt (Centrum) zusammen. Für  $a > b$  ist er imaginär.

Die Hyperbel von den conjugierten Durchmessern  $A_1B_1$  und  $C_1D_1$  besitzt die conjugierten Pole  $P$  und  $P_1$ . Die Involution conjugierter Polaren um  $P$  ist elliptisch. Sie projiciert die Punktinvolution vom Centrum  $P$  um das symmetrische Paar  $MN$ .  $PM$  und  $PN$  sind demnach die Achsen dieser Involution. Analoges gilt für  $P_2$ .

Da es noch eine zweite Hyperbel gibt, welche die conjugierten Durchmesser  $D_1C_1$  und  $A_1B_1$  hat, so erhält man noch die elliptische Strahleninvolution bei  $T$  mit den Achsen  $TM$  und  $TM'$ . Analog verhält es sich mit  $T_2$ .

Die beiden Hyperbeln haben dieselben Asymptoten. Man vergleiche Fig. 43.

Wenn  $A_1B_1$  und  $C_1D_1$  in die Achsen der Ellipse übergehen, so werden  $P$  und  $P_2$  einerseits, und  $T$  und  $T_2$  andererseits zu Brennpunktpaaren der Hyperbeln, denn die Involutionen sind dann circular.

Analoge Schlüsse kann man am Ortskreise einer Hyperbel machen; man gelangt dabei schließlich zu den Brennpunkten einer Ellipse, welche mit der Hyperbel gleiche Halbachsen hat.

Sind in Fig. 55  $OA_1 = a_1$  und  $OB_1 = b_1$  conjugierte Halbmesser einer Ellipse und  $RR'$  einerseits und  $SS'$  andererseits conjugierte Pole, so ist

$$OR \cdot OR' = a_1^2 \text{ und } OS \cdot OS' = b_1^2. \quad \text{V.}$$

Die Polare  $R'P$  von  $R$  geht parallel zu  $OS$ , ebenso ist die Polare  $S'Q$  von  $S$  parallel zu  $OR$ . Liegen  $S$ ,  $R$  und  $P$  in gerader Linie, so geht die Polare von  $P$  durch den Schnittpunkt  $Q$  der Polaren  $S'Q$  und  $R'P$ . Mithin ist  $RQ$  die Polare von  $P$ .  $P$ ,  $Q$  und  $R$  bilden ein Poldreieck. Legt man durch  $P$ ,  $Q$  und  $R$  einen Kreis (Faure'scher Kreis) und schneidet dieser  $OR'$  in  $V$ , so ist



Mithin bilden die Tangenten von einem Punkte  $P$  mit dessen Leitstrahlen gleiche Winkel. (I. Brennpunktsgesetz.)

Der Gegenpunkt  $F''$  liegt in dem Directionskreise vom Centrum  $G$  und der Gegenpunkt  $G'$  liegt in dem Directionskreise vom Centrum  $F$ . Bei der Parabel geht der eine Directionskreis in die Directrix über.

$$\text{Da } OT = \frac{1}{2} GF'' = \frac{1}{2} AB = OA \text{ und ebenso}$$

$$OU = \frac{1}{2} FG' = \frac{1}{2} AB = OA \text{ ist,}$$

so liegen die Fußpunkte  $T$  und  $U$  in dem Hauptkreise über  $AB$  als Durchmesser. Dieser degeneriert bei der Parabel in die Scheiteltangente.

Sind  $F''$  und  $G'$  die Gegenpunkte bezüglich der Tangente  $PN$ , so ist  $F''G = FG' = AB$ .  $\triangle F''G'N \cong \triangle FGN$  und daher

$F''G' = FG$ . Hierauf beruht der Ellipsograph von Jost.  $FG'$  und  $GF''$  sind geschlitzte Lineale, innerhalb deren sich der Zeichenstift  $N$  bewegt. Dasselbe Princip lässt sich auch auf die Hyperbel anwenden. (Man vergleiche meine Abhandlung „Über Conographie“.)

$PM$  und  $PN$  sind die Doppelstrahlen der Involution conjugierter Polaren um  $P$ , deren Winkel durch das Rechtwinkelpaar  $PS$  und  $PS'$  halbiert werden.

Wegen  $\alpha = \beta$  halbiert die Involutionssachse  $PS$  auch den Winkel  $FPG$ . Mithin wird  $FG$  durch  $S$  und  $S'$  harmonisch getheilt und es ist  $OS \cdot OS' = \overline{OF}^2 = c^2$ ;  $S$  und  $S'$  sind ein Paar der Involution mit den Doppelpunkten  $F$  und  $G$ .

Befindet sich  $P$  in der Curve, dann wird die Involution der Polaren parabolisch. Die eine Achse fällt in die Tangente und die andere Achse in die Normale.

Liegt  $P$  innerhalb der Curve, so wird die Strahleninvolution elliptisch. Die Eigenschaft der Doppelstrahlen geht auf die sym-

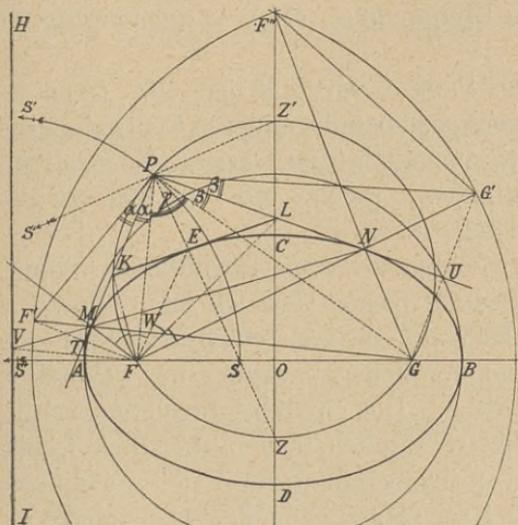


Fig. 56.

metrischen Strahlen über. Da bei der Parabel  $G$  im Unendlichen liegt, so ist die Involution  $SS'$  symmetrisch zu  $F$ ;  $FS = FS' = FM$ .

Nach den vorstehenden Entwicklungen sind die Brennpunkte  $F$  und  $G$  die Doppelpunkte jener Involution, welche durch die Rechtwinkelstrahlen  $PS$  und  $PS'$  aller Involutionen conjugierter Polaren in der Hauptachse  $AB$  erzeugt werden.

Die Rechtwinkelstrahlen liefern in der Nebenachse  $CD$  eine elliptische Involution, in welcher  $Z$  und  $Z'$  ein Paar bilden. Denn legt man den Kreis  $FPG$ , welcher  $CD$  in  $Z$  schneidet, so ist wegen  $\text{arc } FZ = \text{arc } GZ$ ,  $\sphericalangle FPZ = \sphericalangle GPZ$ . Deshalb fällt  $PS$  mit  $PZ$  zusammen. Da ferner  $\sphericalangle ZPZ' = 90^\circ$  ist, geht der Kreis  $FPG$  auch durch  $Z'$ . Demgemäß aber ist  $OZ \cdot OZ' = -\overline{OF}^2 = -c^2$ . Die Doppelpunkte  $F_i$  und  $G_i$  dieser Involution sind imaginär und haben von  $O$  die Abstände  $OF_i = ic$  und  $OG_i = -ic$ . Der Kreis  $SPS'$  ist orthogonal zu den Kreisen des Büschels  $FG$  und geht deshalb durch die imaginären Brennpunkte. (Man vergleiche Fig. 34 und §. 29 Schlussabsatz.)

Da die unendlich fernen Punkte von  $AB$  und  $CD$ , (resp.  $C_i$  und  $D_i$  bei der Hyperbel) gewissermaßen die äußeren Centren dieser Achsen sind, so kann man die unendlich ferne Gerade als eine dritte Achse des Kegelschnittes auffassen, welche mit  $OA$  und  $OC$  ein Tripel conjugierter Polaren liefert.

Nun liefern die Rechtwinkelpaare aller Involutionen conjugierter Polaren in dieser unendlich fernen Geraden eine elliptische Involution, deren imaginäre Doppelpunkte als ein drittes Paar von Brennpunkten gelten. Sie sind mit den von früher her bekannten imaginären Kreispunkten identisch. Die circulare Involution conjugierter Radien des Kreises liefert nämlich in der unendlich fernen Polare des Centrum's jene Involution conjugierter Pole, welche die imaginären Schnittpunkte des Kreises als Doppelpunkte liefern.

Da man nun jedem Rechtwinkelpaare einer Involution harmonischer Polaren des Kegelschnittes ein Radienpaar des Kreises parallel stellen kann, so liefern beide Paare in der unendlich fernen Geraden nur ein Paar der Punktinvolution. Mithin sind beide Involutionen und daher auch ihre Doppelpunkte identisch.

Die Einführung des dritten Brennpunktpaares ermöglicht es, gewisse Analogien zwischen den ebenen und den sphärischen Kegelschnitten aufzustellen, bei welchen die Kegelspitze im Centrum der schneidenden Kugelfläche liegt.

Ist  $FV \perp FP$ , so ist der Directrixpunkt  $V$  der Pol von  $FP$ . Da  $FP$  durch  $P$  geht, so liegt der Pol  $V$  auch in der Polare  $MN$

von  $P$ . Nun sind  $M, N, W, V$  harmonische Punkte und  $FW \perp FV$ . Daraus folgt, dass  $\sphericalangle NFP = \sphericalangle MFP$  ist. Der Leitstrahl des Schnittpunktes zweier Tangenten halbiert demnach den Winkel zwischen den Vektoren der Berührungspunkte. (II. Brennpunktgesetz.)

Hält man die zwei Tangenten fest, so lässt sich auf Grund dieses Satzes leicht zeigen, dass ein zwischen den festen Tangenten enthaltenes Stück  $KL$  einer beweglichen Tangente vom Brennpunkte aus unter constantem Winkel erscheint. Dieser Winkel (eventuell sein Nebenwinkel) ist die Hälfte des Winkels, den die Vektoren der festen Berührungspunkte einschließen. (III. Brennpunktgesetz).

Ist nämlich  $E$  der Berührungspunkt von  $KL$ , so ist

$$\begin{aligned} \sphericalangle KFE &= \sphericalangle KFM \quad \text{und} \\ \sphericalangle LFE &= \sphericalangle LFN. \end{aligned}$$

Durch Addition erhält man hieraus

$$\sphericalangle KFL = \sphericalangle KFM + \sphericalangle LFN.$$

Fügt man beiderseits den Winkel  $KFL$  hinzu, so resultiert als Ausdruck das dritte Brennpunktgesetz:

$$\sphericalangle KFL = \frac{1}{2} \sphericalangle MFN.$$

### § 45. Anwendungen des III. Brennpunktgesetzes.

Wählt man die Hauptscheiteltangenten einer Ellipse (Fig. 57) als fest, und ist  $SS'$  eine bewegliche Tangente, so hat man

$$\sphericalangle SFS' = \frac{1}{2} \sphericalangle AFB = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

Mithin lässt sich durch  $S, F$  und  $S'$  ein Kreis legen, dessen Centrum  $U$  der Schnitt von  $SS'$  und  $CD$  ist. Ist  $F_1$  der Gegenpunkt von  $F$ , so liegt der Berührungspunkt  $M$  in  $F_1G$ . Da sich  $F_1$  und  $G$  aus Symmetriegründen im Kreise  $U$  befinden, so ist mit Rücksicht auf V. in § 42

$$MS \cdot MS' = MF_1 \cdot MG = MF \cdot MG = \varrho_1 \varrho_2 = b_1^2. \quad \text{I.}$$

Ist  $MR$  die halbe kürzeste Sehne des Kreises  $U$ , so ist

$$MS \cdot MS' = \overline{MR}^2. \quad \text{II.}$$

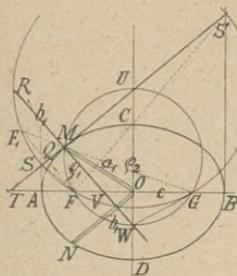


Fig. 57.

$b_1 = ON \parallel S'S$  stellt dabei den zu  $OM = a_1$  conjugierten Halbmesser vor. Aus I. und II. erhält man

$$MR = b_1. \quad \text{III.}$$

In innigem Zusammenhange mit obigem steht folgende Beziehung: Sind in Fig. 58  $NS$  und  $N'S'$  zwei parallele Tangenten, welche auf der festen Tangente vom Berührungspunkte  $M$  die Stücke  $MS$  und  $MS'$  abschneiden, so gilt das Gesetz

$$MS \cdot MS' = \rho_1 \rho_2, \quad \text{IV.}$$

denn es ist nach dem II. Brennpunktsgesetze

$$\begin{aligned} \sphericalangle MFS &= \sphericalangle NFS = \alpha \\ \sphericalangle MFS' &= \sphericalangle N'FS' = \beta \\ \sphericalangle MGS' &= \sphericalangle N'GS' = \varepsilon; \end{aligned}$$

ferner ist  $\sphericalangle SMF = \sphericalangle S'MG = \gamma$

$$\sphericalangle S'NF = \sphericalangle Z'N'G = \tau.$$

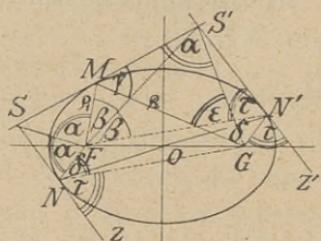


Fig. 58.

Ist  $N$  ein derartiger Punkt, dass  $NF \parallel N'G$ , sowie  $NG \parallel N'F$  ist, so ist  $N'F + N'G = NF + NG = 2a$ , somit  $N$  ein Punkt der Curve. Nun ist  $\sphericalangle FNG = \sphericalangle GN'F = \delta$ . Da  $\sphericalangle FNS = \frac{1}{2}(\pi - \delta)$  und  $\sphericalangle GN'Z' = \frac{1}{2}(\pi - \delta)$ , so ist  $NS \parallel N'Z'$ .  $NN'$  wird in  $O$  halbiert. Infolge dieser centralen Symmetrie hat man

$$\sphericalangle SNF = \sphericalangle ZNG = \sphericalangle S'N'F = \sphericalangle Z'N'G = \tau.$$

Aus dem Viereck  $MFNS$  folgt

$$\sphericalangle MSN = 360^\circ - (2\alpha + \gamma + \tau),$$

und aus dem Vierecke  $MGN'S'$

$$\sphericalangle MS'N' = 360^\circ - (2\varepsilon + \gamma + \delta + \tau).$$

Wegen  $NS \parallel N'S'$  ergänzen sich diese Winkel zu  $180^\circ$  und man hat

$$180^\circ = 720^\circ - (2\alpha + 2\gamma + 2\varepsilon + 2\tau + \delta).$$

Da jedoch  $2\tau + \delta = 180^\circ$  ist, folgt weiter

$$\begin{aligned} \alpha &= 180^\circ - (\gamma + \varepsilon) \quad \text{oder} \\ \sphericalangle MES &= \sphericalangle MS'G. \end{aligned}$$

Mithin ist  $\triangle MFS \sim \triangle MS'G$  und demgemäß hat man

$$MS : MG = MF : MS',$$

was dem Satze IV. entspricht.

Ist  $NN' \parallel SS'$ , dann ist  $MS = MS' = NO = ON' = b_1$ , und man hat

$$MS \cdot MS' = b_1^2. \quad \text{V.}$$

Aus IV. und V. folgt

$$\varrho_1 \varrho_2 = b_1^2. \quad \text{VI.}$$

Analoge Constructionen und Sätze gelten für die Hyperbel. Bei dieser Curve stellt jede Asymptote ein Paar zusammenfallender Tangenten dar. Die Punkte  $S$  und  $S'$  liegen stets auf derselben Seite von  $M$  und können in einer Asymptote zusammenfallen. Dann ist  $\overline{MS}^2 = b_1^2 = \varrho_1 \varrho_2$ , und  $MS = b_1 = \sqrt{\varrho_1 \varrho_2}$ . Da für die andere Asymptote dasselbe gilt, so wird das zwischen den Asymptoten enthaltene Stück der festen Tangente halbiert.

Bei der Parabel ist  $S'$  unendlich fern und deshalb  $\sphericalangle FSS' = 90^\circ$ . Der im Hauptkreise gelegene Punkt  $Q$  deckt sich mit  $S$ .

Fällt  $U$  in Fig. 57 innerhalb  $CD$ , dann werden die Tangenten durch ihn imaginär. Ersetzt man die Schnittpunkte des Kreises  $U$  mit den Hauptscheiteltangenten reell durch  $S$  und  $S'$ , so sind  $US$  und  $US'$  Tangenten der Nebenhyperbel von der Hauptachse  $CD$ .

Da durch die Achsenpunkte  $T$  und  $U$  der festen Tangente in  $M$  gemäß der zweiachsigen Symmetrie parallele Tangenten an die Curve gehen, so ist

$$MT \cdot MU = b_1^2 = \varrho_1 \varrho_2. \quad \text{VII.}$$

Fig. 57 liefert noch einige wichtige Sätze.

Legt man den Kreis  $MFG$ , so geht dieser durch den Punkt  $W$  in  $CD$ . Weil nun  $\text{arc } FW = \text{arc } GW$  ist, so ist  $\sphericalangle FMW = \sphericalangle GMW$ , und demnach ist  $MW$  die Normale zu  $SS'$ . Die Tangente in  $M$  geht durch den andern Schnittpunkt  $U$  des Kreises  $FMG$  mit  $CD$ . Aus diesen Beziehungen folgt sofort

$$OU \cdot OW = \overline{OG}^2 = c^2. \quad \text{VIII.}$$

Ferner erhält man aus  $\triangle OTU \sim \triangle OWV$  mittels VIII.

$$OT : OW = OU : OV$$

und

$$OT \cdot OV = OU \cdot OW = c^2. \quad \text{IX.}$$

Da  $\sphericalangle MFV$  und  $\sphericalangle MWG$  als Peripheriewinkel auf  $\text{arc } MUG$  gleich sind, so ist  $\triangle MFV \sim \triangle MWG$ , und daher hat man

$$MF : MW = MV : MG$$

oder

$$MV \cdot MW = MF \cdot MG = \varrho_1 \varrho_2 = b_1^2. \quad \text{X.}$$

Dasselbe Resultat konnte man mittels VII. aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $MTV$  und  $MWU$  erhalten.

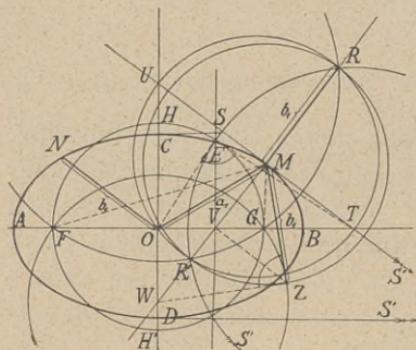


Fig. 59.

Die Construction in Fig. 57 lässt sich auch für die imaginären Brennpunkte modificieren. Der Kreis  $T$  (Fig. 59) schneidet aus den Tangenten in den Nebenseiteln  $C$  und  $D$  die Punkte  $S$  und  $S'$  heraus, deren Verbindungslinie die Ellipse in  $M$  berührt. Nach dem Satze V. ist  $MS \cdot MS' = \rho_1 \rho_2 = b_1^2$ . Ist  $MR = b_1$  die Normale, so geht der von  $T$  aus über  $SS'$  als Durchmesser beschriebene Kreis durch  $R$  und den zugehörigen Gegenpunkt  $R'$ . Nach Fig. 57

liegen  $R$  und  $R'$  auch in dem aus  $U$  durch  $F$  und  $G$  beschriebenen Kreise. Die Kreise  $SRS'$  und  $RFG$  haben die Chordale  $RR'$ . Der über  $FG$  als Durchmesser beschriebene Kreis  $FHG$  und der Kreis  $RFG$  haben die Chordale  $FG$ . Mithin ist der Schnittpunkt  $V$  von  $RR'$  und  $FG$  das Potenzcentrum der drei Kreise.  $VE \perp OT$  ist die Chordale von  $FHG$  und  $SRS'$ . Da gemäß IX.  $OV \cdot OT = c^2 = OE^2$ , ist  $ET$  Tangente an den Kreis  $FHG$  und der Kreis  $SRS'$  ist zum letztern orthogonal. Legt man daher von  $T$  an den über  $FG$  als Durchmesser beschriebenen Kreis den Orthogonalkreis, so geht dieser durch die imaginären Brennpunkte  $F_i$  und  $G_i$ . Sie haben von  $B$  oder  $A$  den Abstand  $a = AO$ .

Schlägt man um  $W$  den Kreis durch  $F$  und  $G$ , so ist  $V$  das Potenzcentrum zwischen diesem Kreise, dem Kreise  $RFG$  und dem von  $M$  aus über  $RR'$  beschriebenen Kreise. Demnach ist  $VZ \perp MW$  die Chordale der Kreise  $FGZ$  und  $RR'Z$ . Nun ist nach X.  $MV \cdot MW = b_1^2 = MZ^2$ . Dementsprechend ist  $MZ \perp ZW$  und  $MZ$  berührt den Kreis  $W$ . Aus dem obigen ergibt sich eine einfache Construction des zu  $OM = a_1$  conjugierten Halbmessers  $MZ = MR = ON = b_1$ .

Da nach VII.  $MT \cdot MU = b_1^2 = MR^2$  ist, so geht der Kreis  $TOU$  ebenfalls durch  $RR'$ . Demgemäß kann man mittels des Kreises  $ORR'$  die Achsenrichtungen  $OT$  und  $OU$  finden, wenn die conjugierten Halbmesser  $OM$  und  $ON$  gegeben sind. Wegen  $arc RT = arc R'T$ , ferner  $arc RU = arc R'U$  halbieren die Achsen  $OT$  und  $OU$  den Winkel  $ROR'$  und seinen Nebenwinkel.

Fällt  $T$  innerhalb  $BG$ , so ist der Kreis  $T$  wohl reell, schneidet

aber die Nebenscheiteltangenten in imaginären Punkten. Ersetzt man diese reell, so ergeben sich Tangenten der Hyperbel von der Hauptachse  $AB$ . Kommt  $T$  innerhalb  $FG$  zu liegen, dann ist der Kreis  $T$  imaginär. Ersetzt man ihn durch den Diametralkreis, so liefert dieser in den Scheiteltangenten imaginäre Punkte, die reell ersetzt werden können, wodurch sich abermals Hyperbeltangenten ergeben.

### § 46. Relationen.

Da die Tangente  $MT$  in Fig. 60 den Nebenwinkel der Leitstrahlen  $MF$  und  $MG$  halbiert, so gilt die Proportion

$$FT : GT = MF : MG = \varrho_1 : \varrho_2$$

oder

$$(c + OT) : (OT - c) = \varrho_1 : \varrho_2$$

$$2 OT : 2 c = (\varrho_1 + \varrho_2) : (\varrho_1 - \varrho_2).$$

Nun ist  $\varrho_1 + \varrho_2 = 2a$  und nach IV. in §. 42  $\varrho_1 - \varrho_2 = \frac{2cx}{a}$ , also

$$OT : a = a : x, \text{ oder } OT : a = a : OP.$$

Dies besagt, dass  $AB$  durch  $P$  und  $T$  harmonisch geteilt wird. Die Proportion ergibt

$$OT = \frac{a^2}{x}, \quad OT \cdot OP = a^2. \quad \text{I.}$$

Analog oder mit Hilfe von § 45, IX. erhält man

$$OV = \frac{c^2}{a^2} x. \quad \text{II.}$$

Bei der Hyperbel ist das zu  $OP = x$  gehörige Stück der Asymptote gleich  $\frac{c}{a} x$ . Errichtet man in dem Punkte der Asymptote die Normale zur letzteren, so ist  $OV$  gleich  $\frac{c^2}{a^2} x$ . Mithin begegnen sich die Hyperbelnormale und die Asymptotennormale in  $OX$ . (Construction von Haluschka.)

Aus der Figur folgt unmittelbar

$$OU : PM = OT : PT \text{ oder } OU : y = \frac{a^2}{x} : \left( \frac{a^2}{x} - x \right).$$

Hieraus ergibt sich mittels der Ellipsengleichung

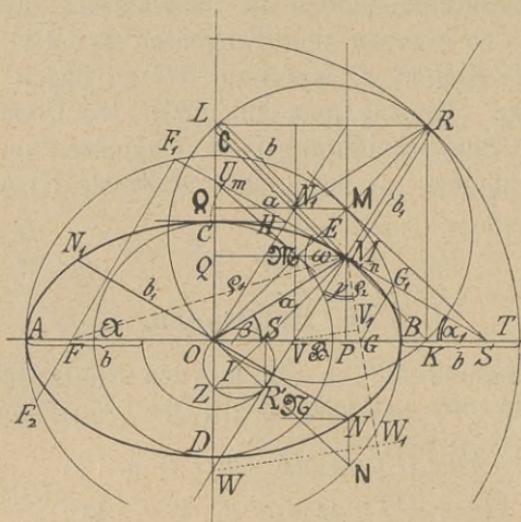


Fig. 60.

$$OU = \frac{b^2}{y}, \quad OU \cdot OQ = b^2. \quad \text{III.}$$

Analog oder mittels VIII. in § 45 folgt

$$OW = \frac{c^2}{b^2} \cdot y. \quad \text{IV.}$$

Setzt man  $OT = X$  und  $OU = Y$  und nennt man diese Strecken die Liniencoordinaten der variablen Tangente, so erhält man durch Einsetzung von  $x$  und  $y$  aus I. und III. in die Ellipsengleichung

$$\frac{a^2}{X^2} + \frac{b^2}{Y^2} = 1. \quad \text{V.}$$

Durch diese Beziehung ist die Ellipse als Einhüllende ihrer Tangenten dargestellt. Um den Grad der Gleichung nicht zu erhöhen, wendet man die Coordinaten  $u = -\frac{1}{X}$  und  $v = -\frac{1}{Y}$  an, und damit geht V. über in

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 = 1. \quad \text{VI.}$$

Mittels dieser Gleichung lassen sich bezüglich der Tangenten Lehrsätze gewinnen, welche jenen über die Punkte der Curve dualistisch gegenüberstehen. (Princip der Dualität.)

Für den Winkel  $XTU = \alpha = 180^\circ - \alpha_1$  ergibt sich aus I. und III.

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \alpha_1 = -OU : OT = -\frac{b^2 x}{a^2 y}. \quad \text{VII.}$$

Ist  $\sphericalangle POM = \beta$ , so ist  $tg \beta = \frac{y}{x}$ , und man hat

$$tg \alpha \cdot tg \beta = -\frac{b^2}{a^2}. \quad \text{VIII.}$$

Ferner liefert die Figur

$$MT : MU = PT : PO = (OT - OP) : PO = \left( \frac{a^2}{x} - x \right) : x$$

$$MT : MU = (a^2 - x^2) : x^2. \quad \text{IX.}$$

Ebenso folgt

$$MV : MW = QO : QW = QO : (QO + OW) = y : \left( y + \frac{c^2}{b^2} y \right)$$

$$MV : MW = b^2 : a^2. \quad \text{X.}$$

Nach X. in § 45 ist

$$MW \cdot MV = b_1^2 = \varrho_1 \varrho_2.$$

Hieraus erhält man mittels X.

$$MV = \frac{b}{a} \cdot b_1 \quad \text{und} \quad MW = \frac{a}{b} \cdot b_1. \quad \text{XI.}$$

Die Subtraction beider Ausdrücke liefert

$$VW = \frac{a^2 - b^2}{ab} \cdot b_1 = \frac{c^2}{ab} \cdot b_1 = \frac{c^2}{ab} \sqrt{\varrho_1 \varrho_2}. \quad \text{XII.}$$

Analog erhält man aus I. und II. mit Rücksicht auf

$$\varrho_1 \varrho_2 = b_1^2 = \left( a + \frac{c}{a} x \right) \left( a - \frac{c}{a} x \right),$$

$$VT = \frac{b_1^2}{x} = \frac{\varrho_1 \varrho_2}{x}. \quad \text{XIII.}$$

Ferner aus III. und IV.

$$UW = \frac{b_1^2}{y} = \frac{\varrho_1 \varrho_2}{y}. \quad \text{XIV.}$$

Ist  $\sphericalangle FMG = 2\gamma$ , so ergibt sich aus  $\triangle FMG$  nach dem Satze von Carnot

$$4c^2 = \varrho_1^2 + \varrho_2^2 - 2\varrho_1\varrho_2 \cos 2\gamma = (\varrho_1 + \varrho_2)^2 - 2\varrho_1\varrho_2(1 + \cos 2\gamma)$$

$$4c^2 = 4a^2 - 4\varrho_1\varrho_2 \cos^2 \gamma,$$

$$\cos \gamma = \frac{b}{\sqrt{\varrho_1\varrho_2}} = \frac{b}{b_1}. \quad \text{XV.}$$

Projiciert man  $MV$  und  $MW$  auf einen Vector z. B.  $\underline{MG}$ , so erhält man mit Bezug auf XI.

$$M_1 V_1 = MV \cdot \cos \gamma = \frac{b^2}{a} = p, \quad \text{XVI.}$$

$$M_1 W_1 = MW \cdot \cos \gamma = a. \quad \text{XVII.}$$

Sind  $F_i$  und  $G_i$  die imaginären Brennpunkte, so erhält man mittels der Ellipsengleichung als Abscisse des Ellipsenpunktes von der Ordinate  $ic$

$$x = \frac{a^2}{b} = p'. \quad \text{XVIII.}$$

Sucht man den halben Winkel  $i\varphi$  der imaginären Leitstrahlen, so folgt durch eine analoge Rechnung wie vorher

$$\cos i\varphi = \frac{a}{b_1}. \quad \text{XIX.}$$

Projiciert man  $MV$  und  $MW$  auf einen imaginären Fahrstrahl, so ist

$$MV'_i = MV \cdot \cos i\varphi = b, \quad \text{XX.}$$

$$MW'_i = MW \cdot \cos i\varphi = \frac{a^2}{b} = p'. \quad \text{XXI.}$$

Die Ausdrücke XVI. und XXI. ergeben die Normalenlänge in den Scheiteln  $A$  und  $C$ , da sich diesfalls die Normalen mit den Vektoren decken.

$$AV = AV'_i = p = \frac{b^2}{a}, \quad \text{XXII.}$$

$$CW = CW'_i = CW' = p' = \frac{a^2}{b}. \quad \text{XXIII.}$$

Die entsprechenden Punkte  $V_i$  und  $W'_i = W'$  sind die Krümmungscentren für die Scheitel. Denn der Kreis von Centrum  $V$  durch  $M$  berührt die Ellipse zweimal, nämlich an der oberen und unteren Hälfte. Fällt  $M$  nach  $A$ , dann ist die Berührung von der 3. Ordnung (eine Anschmiegung oder Osculation). Analog berührt jeder Kreis vom Centrum  $W$  durch  $M$  die Ellipse zweimal, nämlich an der rechten und linken Hälfte. Kommt  $M$  nach  $C$  zu liegen, so hat der Kreis daselbst vier unendlich nahe Punkte mit der Curve gemein.

Fig. 61 zeigt die gleichzeitige Construction von  $V$  und  $W'$ . Aus XXII. und XXIII. folgt:

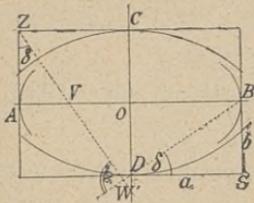


Fig. 61.

$$\frac{AV}{b} = \frac{b}{a} \quad \text{oder} \quad \frac{AV}{AZ} = \frac{SB}{SD} = \operatorname{tg} \delta .$$

$$\frac{a}{CW'} = \frac{b}{a} \quad \text{oder} \quad \frac{CZ}{CW'} = \frac{SB}{SD} = \operatorname{tg} \delta .$$

Aus diesen Proportionen folgt, dass  $Z$ ,  $V$  und  $W'$  in einer Geraden liegen, die zu  $DB$  normal ist.

Imaginäre Punkte des Kegelschnittes haben im allgemeinen complexe Leitstrahlen. So hat z. B. ein imaginärer Ellipsenpunkt  $M_i$  die Vectoren

$$\varrho_1 = a + \frac{c}{a} (x + i\xi) \quad \text{und} \quad \varrho_2 = a - \frac{c}{a} (x + i\xi) .$$

Das Product  $\varrho_1 \varrho_2$  gibt das Quadrat des zu  $OM_i = a_1$  conjugierten Halbmessers  $b_1$ , welcher sowie  $a_1$  complex ist.

Sind  $OF_i = ic$  und  $OG_i = -ic$  die Coordinaten der Brennpunkte, dann ist

$$OF_i = \varrho'_i = b - \frac{ic}{b} y . \quad \varrho'_i + \varrho''_i = 2b .$$

$$OG_i = \varrho''_i = b + \frac{ic}{b} y . \quad \varrho'_i - \varrho''_i = -i \cdot 2 \frac{c}{b} y .$$

$$\varrho'_i \varrho''_i = b^2 + \frac{c^2}{b^2} y^2 = b_1^2 = \varrho_1 \varrho_2 .$$

Dem Brennpunkte  $F$  entspricht eine Polare als imaginäre Directrix. Sie hat von  $O$  den Abstand

$$k_i = -i \frac{b^2}{c} .$$

$$F_i \text{ hat von ihr den Abstand } -i \frac{a^2}{c} .$$

Die Distanz des Punktes  $M$  von dieser Directrix ist

$$d_i = k_i - y = -i \frac{b^2}{c} - y .$$

$$\frac{\varrho'_i}{d_i} = \left( b - i \frac{c}{b} y \right) : \left( -i \frac{b^2}{c} - y \right) = i \frac{c}{b} = \varepsilon_1 .$$

Dies ist die numerische Excentricität bezüglich der imaginären Directrix. Da  $\varepsilon = \frac{c}{a}$  ist, erhält man

$$\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon_1^2} = \frac{a^2}{c^2} - \frac{b^2}{c^2} = 1. \quad \text{XXIV.}$$

Man vergleiche meine Schrift: „Die Normalform der allgemeinen Kegelschnittsgleichung“.

Bei der Parabel haben die imaginären Brennpunkte Directrices im Unendlichen.

Fällt man (Fig. 60)  $OH \perp UT$ , so ist  $\triangle MUQ \sim \triangle THO$  d. h.  $MU : OT = MQ : TH$  oder  $MU \cdot TH = OT \cdot MQ = OT \cdot OP = a^2$ .

$$MU \cdot TH = a^2. \quad \text{XXV.}$$

Ebenso folgt aus  $\triangle MTP \sim \triangle UOH$ :

$MT : UO = MP : UH$  oder  $MT \cdot UH = UO \cdot MP = OU \cdot OQ = b^2$ .

$$MT \cdot UH = b^2. \quad \text{XXVI.}$$

Ist  $\omega$  der Winkel zwischen den conjugierten Halbmessern  $OM$  und  $ON$ , so ist  $\overline{OH}^2 = \overline{OM}^2 \cdot \sin^2 \omega = a_1^2 \sin^2 \omega$ ,

ferner ist  $\overline{OH}^2 = UH \cdot TH$ , also

$$UH \cdot TH = a_1^2 \sin^2 \omega.$$

Multipliziert man dies mit

$$MT \cdot MU = b_1^2,$$

so ergibt sich mit Bezug auf XXV. und XXVI.

$$MU \cdot TH \cdot MT \cdot UH = a_1^2 b_1^2 \sin^2 \omega,$$

$$a^2 b^2 = a_1^2 b_1^2 \sin^2 \omega$$

$$ab = a_1 b_1 \sin \omega.$$

XXVII.

Ferner ergibt sich

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= MT \cdot UH + MU \cdot HT \\ &= MT(MU - HM) + MU \cdot HT \\ &= MT \cdot MU - MT \cdot HM + MU \cdot HT \\ &= b_1^2 - (HT - HM) \cdot HM + (HM + HU) \cdot HT \\ &= b_1^2 + \overline{HM}^2 + HU \cdot HT \\ &= b_1^2 + \overline{HM}^2 + \overline{OH}^2 \\ &= b_1^2 + \overline{OM}^2 \\ &= a_1^2 + b_1^2. \end{aligned}$$

XXVIII.

Ferner ist

$$MU \cdot TH - MT \cdot HU = a^2 - b^2 = c^2$$

$$MU(TM + HM) - MT(UM - HM) = c^2$$

$$MU \cdot HM + MT \cdot HM = c^2$$

$$TU \cdot HM = c^2.$$

XXIX.

Für  $tg \omega = \frac{b}{a}$  werden  $a_1$  und  $b_1$  einander gleich.

Bei der gleichseitigen Hyperbel sind  $a_1$  und  $b_1$  immer gleich.

### § 47. Affinitäten der Ellipse mit dem Kreise.

In Fig. 47 in § 39 treffen sich die Tangenten in  $M$  und  $N$  in dem Pole  $P$  auf  $AB$ . Es ist  $OP \cdot OP = a_1^2$ .

Beschreibt man über  $AB$  als Durchmesser den Kreis, so sind  $P$  und  $P$  auch in Bezug auf diesen conjugierte Pole. Die Kreispolare  $P\mathcal{N}$  ist normal zu  $AB$ .  $\mathcal{N}P$  tangiert den Kreis in  $\mathcal{N}$ .

Nach der Gleichung des letzteren ist

$$x_1^2 + y^2 = a_1^2.$$

Hieraus und mittels I. in § 39 ergibt sich

$$y_1^2 = \frac{b_1^2}{a_1^2} (a_1^2 - x_1^2) \text{ und } y^2 = a_1^2 - x_1^2.$$

Mithin verhält sich  $y^2 : y_1^2 = a_1^2 : b_1^2$  oder  $y : y_1 = a_1 : b_1$ .

Demgemäß ist weiter  $P\mathcal{N} : PM = OC : OC$  und wegen  $PM \parallel OC$  ist  $\triangle P\mathcal{N}M \sim \triangle OCC$ , und deshalb  $\mathcal{N}M \parallel CC$ .  $\triangle P\mathcal{N}M$  behält seine Gestalt bei, dient zur Verzeichnung der Ellipse mittels des Kreises und heißt ein Ableitungsdreieck oder ein klinographisches Dreieck. Der Kreis und die Ellipse sind affine Figuren.  $AB$  ist die Achse der Affinität, und  $CC$  gibt die Affinitätsrichtung an. Da diese zur Achse schief liegt, heißt die Affinität eine schiefe.

Ferner folgt aus der Figur leicht:

$$\mathcal{N}M : CC = MP : CO$$

$$Mm : Cc = MP : CO \text{ oder}$$

$$\mathcal{N}M : CC = Mm : Cc;$$

$$\mathcal{N}M : Mm = CC : Cc; (\mathcal{N}M + Mm) : Mm = (CC + Cc) : Cc;$$

$$\mathcal{N}m : Mm = Cc : Cc = \text{constant.}$$

Dieses constante Affinitätsverhältnis zeigt sich auch bei den normalen Affinitäten in Fig. 60, § 46.

Es sind daselbst über  $AB$  und  $CD$  Kreise beschrieben worden

und deshalb ist  $\mathbf{MO} : \mathfrak{N}O = a : b$ . Ferner ist  $\mathbf{MP} \perp AB$  und  $\mathfrak{N}M \parallel AP$ . Demnach besteht die Proportion

$$\mathbf{MP} : MP = \mathbf{MO} : \mathfrak{N}O = a : b.$$

Die Tangenten in  $\mathbf{M}$  und  $M$  an den Hauptkreis und die Ellipse treffen sich im Punkte  $T$  der Affinitätsachse  $AB$ . Eine zweite Affinität besteht zwischen dem Nebenkreis und der Ellipse. Man erhält analog wie vorhin

$$\mathfrak{N}Q : MQ = N_1Q : \mathbf{MQ} = \mathfrak{N}O : \mathbf{MO} = a : b.$$

Die Tangenten in  $\mathfrak{N}$  und  $\mathbf{M}$  an den Nebenkreis und die Ellipse treffen sich im Punkte  $U$  der Affinitätsachse  $CD$ .

In der Folge ist nur von der Affinität bezüglich des Hauptkreises die Rede. Ist  $\mathbf{NO} \perp \mathbf{MO}$ , so sind sie conjugierte Radien des Kreises. Ihnen entsprechen die conjugierten Halbmesser  $NO = b_1$  und  $MO = a_1$  der Ellipse.  $MT \parallel ON$ . Die Ellipsennormale  $MV$  ist daher senkrecht zu  $ON$ .

Wegen  $\mathfrak{N}N = \mathbf{M}\mathfrak{N} = a - b$ ,  $\mathfrak{N}N \perp \mathbf{MM}$  und  $\mathbf{N}N \perp \mathfrak{N}M$  ist  $\triangle \mathfrak{N}NN \cong \triangle \mathbf{M}\mathfrak{N}M$ . Dreht man das erstere Dreieck um  $O$  in die Lage  $\mathfrak{N}MN_1$ , so ist  $\mathfrak{N}MMN_1$  ein Rechteck.  $ON_1 = b_1$ ,  $OM = a_1$ . Ergänzt man das Dreieck  $OMN_1$  zum Parallelogramm  $OMRN_1$ , so ist  $MR = b_1$  und  $N_1R = a_1$ .  $E$  ist das Centrum des Parallelogrammes und des Rechteckes.  $\mathfrak{N}E = \frac{1}{2} \mathfrak{N}M = \frac{1}{2}(a - b)$ .  $OE = O\mathfrak{N} + \mathfrak{N}E = b + \frac{1}{2}(a - b) = \frac{1}{2}(a + b)$ ,  $OR = 2 \cdot OE = a + b$ . Verlängert man  $MN_1$  beiderseits bis zum Schnitte mit den Achsen, so bilden  $OKRL$  ebenfalls ein Rechteck.

$$LE = OE = \frac{1}{2}(a + b). \quad LN_1 = O\mathfrak{N} = b.$$

$$LM = LN_1 + N_1M = b + (a - b) = a. \quad KN_1 = LM = a.$$

In diesen Beziehungen ist die elegante Construction von Rytz begründet, nach welcher man aus den conjugierten Halbmessern  $OM$  und  $ON$  die Achsen finden kann. Man macht  $ON_1 \perp ON$ ,  $ON_1 = ON$ ,  $N_1E = EM$ . Dann beschreibt man mit  $EO$  den Kreis, welcher in den Verlängerungen von  $N_1M$  die Achsenpunkte  $L$  und  $K$  liefert.  $LN_1 = b$ ,  $N_1K = a$ .

Ferner ergibt sich eine einfache Normalenconstruction für  $M$ . Man sucht  $\mathfrak{N}$  oder  $\mathbf{M}$ , zieht  $O\mathfrak{N}$  bez.  $OM$ , macht  $\mathfrak{N}R = a$  oder  $MR = b$  und verbindet  $M$  mit  $R$ .

Da die Strecke  $LK$  stets die Länge  $(a + b)$  behält, so kann man mittels dieser Eigenschaft die Ellipse beschreiben. Man lässt ein Lineal  $LK$ , das den Schreibstift bei  $M$  trägt, mit den End-

stiften  $L$  und  $K$  in Schlitzen gleiten, welche in dem aus Linealen gebildeten Achsenkreuze angebracht sind. Da  $OE = \frac{1}{2}(a + b)$ , also constant ist, so kann man eine Schlitzbewegung durch eine Kurbelbewegung in  $O$  ersetzen.

Zieht man  $MZ \parallel MO$ , so ist  $MZ = MO = a$ . Ferner ist  $MS = \varnothing O = b$ . Mithin ist  $SZ = a - b$ . Hierauf beruht das Ovalwerk von Leonardo da Vinci.  $Z$  und  $S$  gleiten in Schlitzen und die Verlängerung von  $ZS$  trägt den Schreibstift. General von Arbter hat die Gleitbewegung von  $S$  durch eine Curbelbewegung des Centrums  $I$  von  $ZS$  ersetzt, denn es ist  $OI = ZI = \frac{1}{2}(a - b)$ . Professor Schromme hat auch die Schlitzbewegung von  $Z$  beseitigt, indem er eine Eigenthümlichkeit der Pleuelcurve benützt.

Da  $OS = \varnothing M$  und  $OZ = MM$  ist, so sind die Rechtecke  $OZR'S$  und  $N_1\varnothing MM$  congruent.  $OR' \parallel N_1M$ . Daher ist  $MR' \parallel N_1O$ .  $R'$  liegt deshalb in der Normalen. Dies gibt abermals eine Normalenconstruction. Man zieht  $MZ \parallel MO$ , sucht  $I$  und dann  $R'$ .

Ferner liegt in der Figur eine zweite Construction der Achsen aus conjugierten Diametern. Man macht  $MR' \perp ON$ ,  $MR' = b_1$ , halbiert  $OR'$  in  $I$ , beschreibt von  $I$  aus den Kreis durch  $O$  und findet in  $MI$  die Achsenpunkte  $S$  und  $Z$ .  $MZ = a$ ,  $MS = b$ . Die Kreise  $E$  und  $I$  haben die Chordale  $ON$ .

Interessant ist noch die Frage nach dem geometrischen Orte der Projectionen, welche die imaginären Brennpunkte auf die Tangenten liefern. Der Analogie wegen untersuchen wir zunächst nochmals die Projectionen der reellen Brennpunkte. Da  $M$  in der Polaren  $MP$  des Hauptkreises in Bezug auf  $T$  liegt, sind  $M$  und  $T$  conjugierte Pole und theilen  $F_1G_1$  harmonisch. Weil  $F_1H = HG_1$  ist, so hat man

$$HM \cdot HT = \overline{HG_1}^2. \quad \text{I.}$$

Nun ist nach XXIX. in §. 46

$$TU \cdot HM = c^2$$

und damit geht I. über in

$$c^2 \cdot \frac{HT}{TU} = \overline{HG_1}^2.$$

Ferner ist aus der Figur  $HT = OT \cos \alpha_1$ ,

somit

$$c^2 \cdot \frac{OT}{TU} \cos \alpha_1 = \overline{HG_1}^2.$$

Da aber  $OT : TU = \cos \alpha_1$ , so folgt

$$c^2 \cdot \cos^2 \alpha_1 = \overline{HG_1}^2 \text{ oder } HG_1 = c \cos \alpha_1 = OG \cos \alpha_1. \text{ Also } GG_1 \perp TU.$$

Damit ist bewiesen, dass sich die Brennpunktsinvolution auf den Tangenten wieder als Involution projiziert.

$M$  liegt ferner in der Polare von  $U$  bezüglich des Nebenkreises. Deshalb sind  $M$  und  $U$  conjugierte Pole in  $TU$ , welche Gerade den Pol  $T$  besitzt. Ist  $Hn$  eine Kreistangente und  $Hm = Hn$ , dann ist  $m$  ein Punkt der gleichseitigen Hyperbel von der Hauptachse  $OH$  und nach der Polarentheorie

$$HM \cdot HU = \overline{Hm}^2$$

oder 
$$c^2 \cdot \frac{HU}{TU} = c^2 \frac{OU}{TU} \sin \alpha_1 = c^2 \sin^2 \alpha_1 = \overline{Hm}^2.$$

Daraus folgt  $Hm = c \sin \alpha_1$ .

Sind  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{G}$  die Vertreter der imaginären Brennpunkte, so ist  $OF = OG = c$ , mithin

$$Hm = OF \cdot \sin \alpha_1, \text{ d. h. } \mathbf{F}m = TU.$$

Die Punkte  $m$  und  $n$  sind deshalb Projectionen von  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{G}$ , und es projiziert sich demnach die elliptische Brennpunktsinvolution wieder als Involution.

$$\text{Da } \overline{Hm}^2 = \overline{Hn}^2 = \overline{OH}^2 - b^2 \text{ ist,}$$

sind  $m$  und  $n$  die Vertreter von imaginären Punkten des Nebenkreises. Mithin liegen die Projectionen von  $F_i$  und  $G_i$  auf  $TU$  im Nebenkreise.

Verlängert man  $FF_1$  nach  $FF_2$ , so folgt aus dem Hauptkreise:

$$FF_1 \cdot FF_2 = FA \cdot FB = (a - c)(a + c) = a^2 - c^2 = b^2.$$

Jeder reelle Brennpunkt hat bezüglich des Hauptkreises die Potenz  $-b^2$ . Durch Rechnung findet man als Potenz eines imaginären Brennpunktes bezüglich des Nebenkreises

$$(ic)^2 - b^2 = -(c^2 + b^2) = -a^2.$$

Nun könnte man auch noch von den imaginären Directions-kreisen reden. Sie haben je einen imaginären Brennpunkt als Centrum und den Radius  $2b$ .

### § 48. Die Asymptoten der Hyperbel.

Nimmt man die beiden Asymptoten der Hyperbel (Fig. 62) als feste Tangenten an, dann erscheint das Stück  $KL$  einer variablen Tangente von einem Brennpunkte  $F$  unter dem halben Asymptotenwinkel. Da dasselbe Stück vom anderen Brennpunkte unter dem Nebenwinkel von  $\omega$  erscheint, so lässt sich über dem Tangentenstück als Sehne ein Kreis durch beide Brennpunkte legen, dessen Centrum  $W$  in der imaginären Achse liegt. Er schneidet die Asymptoten noch in  $K'$  und  $L'$ , wobei  $OK = OK'$  und  $OL = OL'$  ist.

Nun besteht im Kreise die Beziehung

$$OK \cdot OL' = OL \cdot OK' = OG \cdot OF$$

oder

$$OK \cdot OL = \overline{OF}^2 = c^2. \quad \text{I.}$$

Nun ist  $\frac{1}{2} OK \cdot OL \sin 2\omega$  die Fläche des Dreieckes  $OKL$  und ist nach I. constant.

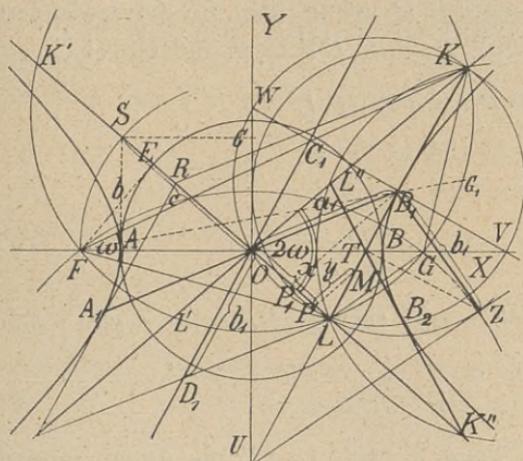


Fig. 62.

Ist  $B_1$  der Berührungspunkt von  $KL$  und  $OC_1 \parallel B_1K$ , so sind  $OB_1$  und  $OC_1$  conjugierte Halbmesser und als solche ein Paar der Involution von den Doppelstrahlen  $OK$  und  $OL$ . Demnach sind  $OB_1$  und  $OC_1$  harmonisch zu  $OK$  und  $OL$ , und deshalb muss der Strahlenbüschel durch  $KL$  nach einer harmonischen Punktreihe geschnitten werden. Wegen  $OC_1 \parallel B_1K$  ist ein Schnittpunkt im Unendlichen und daher  $B_1K = B_1L$ . Demnach ist  $WB_1$

die Normale zu  $KL$ .

Bezieht man  $B_1$  auf die Asymptoten als schiefwinklige Coordinatenachsen, macht also  $B_1P_1 \parallel KO$ , so sind  $OP_1 = \xi$  und  $P_1B_1 = \eta$  die Coordinaten. Da  $OP_1 = P_1L$  ist, ergibt sich  $OL = 2\xi$  und  $OK = 2\eta$ .

Demnach geht I. über in

$$\xi \eta = \frac{c^2}{4}; \quad \text{II.}$$

$\frac{c^2}{4}$  heißt die Potenz der Hyperbel.

Macht man  $KC_1 \parallel B_1O$ , so sind  $OB_1 = a_1$  und  $OC_1 = b_1$ . Geht  $OB_1$  in die reelle Achse  $OB$  über, dann ist  $OB = a$  und  $OC = b$ . Ist  $FE \perp OK'$ , so liegt bekanntlich  $E$  im Hauptkreise  $OE = a$ . Macht man  $AS \perp AB$ , so ist  $SC \parallel AB$ . Nun ist  $\triangle OAS \cong \triangle OEF$  und daher  $OS = OF = c$  und  $AS = EF = b$ , woraus  $\overline{OF^2} = \overline{OE^2} + \overline{EF^2}$  oder  $c^2 = a^2 + b^2$  resultiert. Auch ist

$$tg \omega = \frac{b}{a}.$$

Mithin lautet II.

$$\xi \eta = \frac{a^2 + b^2}{4}. \quad \text{III.}$$

Man vergleiche § 10, worin  $a = b$  und daher  $c^2 = 2a^2$  ist.

Als Gleichung der Tangente  $B_1M$  erhält man für den laufenden Punkt  $M$  mit den Coordinaten  $OP = x$ ,  $PM = y$ , mittels II.

$$\begin{aligned} MP : P_1B_1 &= PL : P_1L \\ y : \eta &= (2\xi - x) : \xi \\ \xi y &= 2\xi\eta - \eta x \\ \eta x + \xi y &= \frac{c^2}{2}. \end{aligned} \quad \text{IV.}$$

Macht man  $OK'' = OK$  und  $OL'' = OL$ , so ergibt sich gemäß I.

$$OK \cdot OL'' = OK'' \cdot OL = c^2. \quad \text{V.}$$

Damit ist ausgedrückt, dass  $K, K'', L, L''$  in einem Kreise liegen, an den sich von  $O$  aus mit  $OG = c$  als Radius ein Orthogonalkreis legen lässt. Wegen der Symmetrie der Hyperbel gegen  $AB$  ist  $K''L''$  auch eine Tangente.

Verlängert man  $B_1F$  bis zum Durchschnitte  $G_1$  mit dem Kreise  $W$  so ist  $B_1G_1 = B_1G$ ; denn die Normale  $B_1V$  halbiert den Winkel  $GB_1G_1$ . Da  $B_1K = b_1$  die kürzeste Halbsehne durch  $B_1$  im Kreise  $W$  ist, so hat man

$$\begin{aligned} B_1F \cdot B_1G_1 &= \overline{B_1K^2} \quad \text{oder} \\ B_1F \cdot B_1G &= b_1^2. \end{aligned}$$

Bezeichnet man  $B_1F$  und  $B_1G$  mit  $\varrho_1$ , resp.  $\varrho_2$ , so ergibt sich das Vektorengesetz

$$\varrho_1 \cdot \varrho_2 = b_1^2. \quad \text{VI.}$$

Nun lassen sich mittels VI. wie bei der Ellipse leicht folgende Gesetze ableiten:

$$B_1V \cdot B_1W = B_1F \cdot B_1G = \varrho_1 \cdot \varrho_2 = b_1^2 \quad \text{VII.}$$

$$B_1U \cdot B_1T = B_1F \cdot B_1G = \varrho_1 \cdot \varrho_2 = b_1^2. \quad \text{VIII.}$$

Macht man  $TZ \perp TU$  und  $B_1Z = B_1K = b_1$ , so folgt aus VIII., dass  $B_1Z \perp ZU$  ist. Mithin geht der Kreis vom Centrum  $U$  und dem Radius  $UZ$  orthogonal zum Kreise  $B_1$  vom Halbmesser  $b_1$ .

Die Kreise  $B_1$ ,  $U$  und  $W$  haben das Potenzcentrum  $T$ . Mithin ist  $OT$  die Chordale der Kreise  $W$  und  $U$ , und deshalb geht der Kreis  $U$  durch die Brennpunkte  $F$  und  $G$ .

Gemäß VII. liegen  $W$ ,  $K$  und  $V$  in einem Kreise vom Durchmesser  $WV$ , der auch durch  $O$  geht.

Im Übrigen vergleiche man § 45.

Bezieht man (Fig. 63) die Hyperbel auf zwei conjugierte Halbmesser  $OB_1$  und  $OC_1$  als schiefwinkeliges Coordinatensystem, so besitzen die Asymptoten folgende Gleichungen:

$$\eta = \pm \frac{b_1}{a_1} \cdot x.$$

Diese sind in der Gleichung

$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{\eta^2}{b_1^2} = 0 \quad \text{IX.}$$

enthalten. Verbindet man die letztere mit der Hyperbelgleichung

$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \quad \text{X.}$$

so erhält man

$$\eta^2 - y^2 = b_1^2 \text{ oder } (\eta + y)(\eta - y) = b_1^2. \quad \text{XI.}$$

Nun ist gemäß IX. und X. sowohl das Asymptotenpaar, als auch die Curve symmetrisch zu  $OX$  und daher absolut  $PN = PN' = \eta$  und  $PM = PM' = y$ . Durch Subtraction folgt hieraus leicht:

$$MN = M'N'. \quad \text{XII.}$$

Auf Grund dieser Eigenschaft folgt eine schon erwähnte einfache Hyperbelconstruction. Ferner geht damit XI. über in

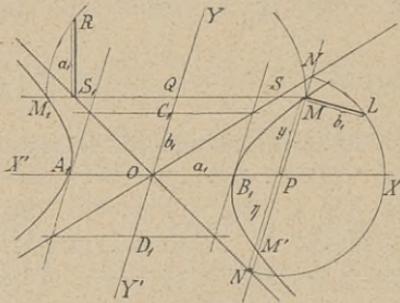


Fig. 63.

$$N'M \cdot MN = b_1^2. \quad \text{XIII.}$$

Macht man  $ML \perp MP$  und beschreibt über  $NN'$  als Durchmesser den Kreis, so liefert dieser den Punkt  $L$  derart, dass  $ML = b_1$  ist.

Ganz analog beweist man, dass  $MS = M_1S_1$  ist. Construiert man über  $MM_1$  den Halbkreis und zieht  $S_1R \perp MM_1$ , so erhält man  $S_1R = a_1$ .

Denn die Asymptotengleichungen lassen sich auch in der Form

$$y = \pm \frac{b_1}{a_1} \xi \quad \text{oder} \quad \frac{\xi^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 0 \quad \text{XIV.}$$

schreiben. Dies gibt mit X. combinirt

$$(x + \xi)(x - \xi) = a_1^2,$$

oder wegen der Symmetrie gemäß  $SM = S_1M_1$

$$S_1M_1 \cdot S_1M = a_1^2. \quad \text{XV.}$$

Die Asymptoten erscheinen als Hyperbeln mit unendlich kleinen Achsen.

### § 49. Der Krümmungskreis in analytischer Behandlung.

Von dem Schnittpunkte  $K$  zweier Normalen  $MV$  und  $M_1V_1$  (Fig. 64) lassen sich zwei Kreise beschreiben, welche die Ellipse in  $M$  bzw.  $M_1$  berühren. Außerdem hat jeder Kreis noch zwei Punkte gemein, von denen bloß ein benachbartes Paar  $NN_1$  verzeichnet wurde. Das andere liegt in der Nähe von  $M$  und  $M_1$ . Rückt  $M_1$  gegen  $M$ , so nähern sich die beiden Kreise und fallen für  $M = M_1$  in einen zusammen. Letzterer heißt der Krümmungskreis und hat die Grenzlage von  $K$  als Centrum. Er

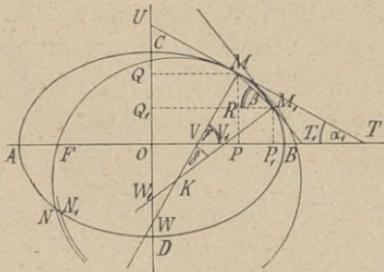


Fig. 64.

hat mit der Curve drei zusammenfallende Punkte an der Schmiegun-  
gsstelle  $M$  und den Punkt  $N$  gemein.

Sind  $\xi$  und  $\eta$  die laufenden Coordinaten der Normalen in  
 $M(x, y)$  und  $M_1(x_1, y_1)$ , so lauten die Gleichungen der letzteren

$$\eta - y = \frac{a^2 y}{b^2 x} (\xi - x) \quad \text{und} \quad \eta - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (\xi - x_1);$$

für den Schnittpunkt erhält man hieraus

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{c^2 (y - y_1) x x_1}{a^2 (x_1 y - x y_1)} = \frac{c^2 (y - y_1) x x_1}{a^2 \{x_1 y - x y_1 + x_1 y_1 - x_1 y_1\}} = \\ &= \frac{c^2 (y - y_1) x x_1}{a^2 \{x_1 (y - y_1) - y_1 (x - x_1)\}} \\ \xi &= \frac{c^2 x x_1 \frac{y - y_1}{x - x_1}}{a^2 \left\{ x_1 \frac{y - y_1}{x - x_1} - y_1 \right\}}. \end{aligned}$$

Der Ellipsengleichung nach ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

Subtrahiert man diese Gleichungen und zerlegt in Factoren, so  
ergibt sich

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{-b^2 (x + x_1)}{a^2 (y + y_1)}.$$

Damit findet man

$$\xi = \frac{-b^2 c^2 x x_1 \frac{x + x_1}{a^2 (y + y_1)}}{a^2 \left\{ -b^2 x_1 \frac{x + x_1}{a^2 (y + y_1)} - y_1 \right\}}.$$

Für  $x = x_1$  und  $y = y_1$  ergibt sich hiemit als Grenzwert

$$\lim \xi = \frac{c^2 x^3}{a^4}. \quad \text{I.}$$

Analog entwickelt man

$$\lim \eta = -\frac{c^2 y^3}{b^4}. \quad \text{II.}$$

Drückt man  $x$  und  $y$  aus I. und II. durch  $\xi$  und  $\eta$  aus und setzt  
diese Werte in die Ellipsengleichung, so resultiert

$$\frac{1}{a^2} \left( \frac{a^4 \xi}{c^2} \right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{b^2} \left( \frac{b^4 \eta}{c^2} \right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Setzt man zur Abkürzung  $\frac{c^2}{a} = \alpha$  und  $\frac{c^2}{b} = \beta$ , so lautet die Gleichung der Evolute, d. h. des geometrischen Ortes der Krümmungscentren

$$\left( \frac{\xi}{\alpha} \right)^{\frac{2}{3}} + \left( \frac{\eta}{\beta} \right)^{\frac{2}{3}} = 1 \quad \text{III.}$$

$$\text{oder } \{ \beta^2 \xi^2 + \alpha^2 \eta^2 - \alpha^2 \beta^2 \}^3 + 27 \alpha^4 \beta^4 \xi^2 \eta^2 = 0. \quad \text{IV.}$$

Die Curve ist von sechster Ordnung, denn zu jedem  $\xi$  gehören sechs Werte von  $\eta$  und umgekehrt, von denen in den reellen Zweigen in der Regel vier imaginär sind.  $\left( \frac{\xi}{\alpha} \right)^{\frac{2}{3}}$  ist bekanntlich dreiwertig und  $\eta$  als Quadratwurzel aus III. zweiwertig.

In Fig. 65 wird ein Quadrant der zweiachsig symmetrischen Evolute, welche vier Rückkehrpunkte besitzt, verzeichnet.

Es ist interessant, dass die Evolute mit der Ellipse vier imaginäre Punkte gemein hat. Für  $x = \xi$  und  $y = \eta$  erhält man aus I. und II.

$$x = \pm \frac{a^2}{c} \quad \text{und} \quad y = \pm i \frac{b^2}{c}.$$

Diese Punkte liegen in der Directrix und haben den Krümmungsradius Null. Durch dieselben Punkte gehen imaginäre Zweige des Ortskreises und des fremden Directionskreises, denn der eine Leitstrahl ist  $2a$  und der andere Null. In diesem Punkt berühren die vom zugehörigen Brennpunkt gezogenen Tangenten, welche wegen  $OT \cdot OV = \pm c^2$  mit den Normalen zusammenfallen.

Bezieht man die Ellipse auf den Scheitel  $A$  als Ursprung, dann geht  $\xi$  über in  $a + \xi$  und  $x$  in  $a + x$ , während  $y$  und  $\eta$  ungeändert bleiben.

Mithin folgt aus I.

$$\xi - a = \frac{c^2 (x - a)^3}{a^4}.$$

Mit Rücksicht auf  $\frac{c}{a} = \varepsilon$  und  $\frac{b^2}{a} = p$  ergibt sich hieraus

$$\xi = \varepsilon^2 \frac{x^3}{a^2} - 3 \varepsilon^2 \frac{x^2}{a} + 3 \varepsilon^2 x + p.$$

Für  $a = c = \infty$  und  $\varepsilon = 1$  geht die Ellipse in eine Parabel über, und es folgt für endliche  $x$

$$\xi = 3x + p \quad \text{V.}$$

$$\eta = -\frac{a^2 y^3}{b^4} = -\frac{y^3}{p^2}. \quad \text{VI.}$$

Als Gleichung der Parabelevolute findet man aus V. und VI. unter Benützung der Parabelgleichung

$$y^2 = 2px, \\ \eta^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} p^{-\frac{1}{3}} (\xi - p). \quad \text{VII.}$$

Verschiebt man den Ursprung um  $p$  nach rechts, so ist die neue Abscisse  $\xi_1 = \xi - p$  und damit geht VII. über in

$$\eta^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} p^{-\frac{1}{3}} \xi_1, \quad \text{oder} \quad \eta^2 = \frac{8}{27 p} \xi_1^3. \quad \text{VIII.}$$

Diese Curve wird semicubische Parabel genannt.

### § 50. Der Krümmungskreis in synthetischer Behandlung.

Willkommen dürfte den Collegen meine elementare Entwicklung des Krümmungskreises, sowie eine daraus abgeleitete Construction desselben sein, welche allen anderen an Einfachheit und Kürze überlegen ist.

Ich stelle mir die Aufgabe, das Verhältnis  $VK : WK$  zu ermitteln, nach welchem die Normale  $VW$  (Fig. 64) von der Nachbarnormale  $V_1W_1$  geschnitten wird. Es seien  $\sphericalangle MVT = \gamma$  und  $\sphericalangle VKV_1 = \delta$ ; dann ist  $\sphericalangle M_1V_1T_1 = \gamma - \delta$  und  $\sphericalangle WW_1K = 90^\circ + \gamma - \delta$ . Nach dem Sinussatze folgen aus den Dreiecken  $VKV_1$  und  $WKW_1$  die Proportionen:

$$VK : VV_1 = \sin(\gamma - \delta) : \sin \delta, \\ WK : WW_1 = \sin(90 + \gamma - \delta) : \sin \delta \\ \text{oder} \quad \frac{VK}{WK} : \frac{VV_1}{WW_1} = \frac{\sin(\gamma - \delta)}{\cos(\gamma - \delta)} : 1, \\ \frac{VK}{WK} = \frac{VV_1}{WW_1} \cdot \text{tg}(\gamma - \delta). \quad \text{I.}$$

Nun ist nach den Sätzen § 46, I. und III. ferner § 45, VIII., IX.

$$OP \cdot OT = a^2 \qquad OQ \cdot OU = b^2 \\ OV \cdot OT = c^2 \qquad OW \cdot OU = c^2.$$

Aus diesen erhält man durch vorherige Division

$$OV = \frac{c^2}{a^2} \cdot OP \qquad OW = \frac{c^2}{b^2} \cdot OQ$$

$$OV_1 = \frac{c^2}{a^2} \cdot OP_1 \qquad OW_1 = \frac{c^2}{b^2} \cdot OQ_1.$$

Durch Subtraction folgt weiter

$$OV_1 - OV = \frac{c^2}{a^2} (OP_1 - OP), \quad OW - OW_1 = \frac{c^2}{b^2} (OQ - OQ_1).$$

$$VV_1 = \frac{c^2}{a^2} \cdot PP_1, \qquad WW_1 = \frac{c^2}{b^2} \cdot QQ_1.$$

Die beiden letzten Relationen liefern:

$$\frac{VV_1}{WW_1} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{PP_1}{QQ_1} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{RM_1}{MR} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \cotg \beta.$$

Setzt man dies in I. ein, so folgt

$$\frac{VK}{WK} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\tg(\gamma - \delta)}{\tg \beta}. \qquad \text{II.}$$

Wird  $\delta = 0$ , so fällt  $M_1$  in die Tangente  $MT$  und es ist  $\beta = \alpha_1 = 90^\circ - \gamma$ .

Mithin hat man

$$\lim \frac{VK}{WK} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\tg \gamma}{\tg \alpha_1} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\cotg \alpha_1}{\tg \alpha_1} = \frac{b^2}{a^2} \cotg^2 \alpha_1. \qquad \text{III.}$$

Nun ist  $\overline{MT}^2 = \overline{MV}^2 \cotg^2 \alpha_1$  und nach § 45, X.

$$MT \cdot MU = MV \cdot MW.$$

Daraus folgt durch Division

$$\frac{MT}{MU} = \frac{MV}{MW} \cdot \cotg^2 \alpha_1,$$

und nach § 46, X.

$$\frac{MT}{MU} = \frac{b^2}{a^2} \cotg^2 \alpha_1. \qquad \text{IV.}$$

Aus III. und IV. resultiert

$$\lim \frac{VK}{WK} = \frac{TM}{MU}. \qquad \text{V.}$$

Dieser Satz ist in einer von Karl Emmerling mittels der

darstellenden Geometrie gefundenen Construction des Krümmungscentrums enthalten, die aber oft wegen Platzmangels versagt.

Da  $VOW$  und  $TOU$  ähnliche Dreiecke in normaler Lage sind, so findet man den zu  $M$  analogen Punkt  $S$ , indem man  $OS \perp OM$  zieht. (Fig. 65.) Dann verhält sich

$$WS : VS = TM : MU .$$

Dies gibt in Verbindung mit V.

$$VK : WK = WS : VS$$

$$WK : (VK + WK) = VS : (WS + VS)$$

$$WK : VW = VS : VW ,$$

$$\text{somit } WK = VS .$$

VI.

Dies ist die Grundlage meiner Construction des Krümmungscentrums in Fig. 65, die zugleich für die confocale Hyperbel durchgeführt ist, wobei  $TK' = US'$  gemacht wurde.

Aus  $VK : WK = TM : MU$  folgt noch in Fig. 64:

$$(VK + WK) : WK = (TM + MU) : MU$$

$$VW : WK = TU : MU = OT : OP ,$$

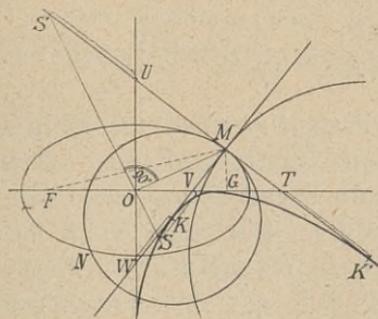


Fig. 65.

$$VW : WK = \frac{a^2}{x} : x = a^2 : x^2$$

$$WK = VW \cdot \frac{x^2}{a^2}$$

Nun ist nach § 46, XII.

$$VW = \frac{c^2}{ab} \cdot b_1 = \frac{c^2}{ab} \sqrt{\varrho_1 \varrho_2} ,$$

$$\text{somit } WK = \frac{c^2 b_1 x^2}{a^3 b} .$$

Bezeichnen wir mit  $\varrho$  den Krümmungshalbmesser so ist :

$$\varrho = MK = MW - WK$$

$$\varrho = \frac{a}{b} \cdot b_1 - \frac{c^2 b_1 x^2}{a^3 b}$$

$$\varrho = \frac{b_1}{ab} \left\{ a^2 - \frac{c^2 x^2}{a^2} \right\} = \frac{b_1 \cdot b_1^2}{ab} = \frac{b_1^3}{ab} .$$

VII.

Da  $ab = a_1 b_1 \sin \omega$ , so ist

$$\varrho = \frac{b_1^2}{a_1 \sin \omega}. \quad \text{VIII.}$$

In Fig. 66 ist  $ML \perp ON$  und  $LM = OM \sin \omega = a_1 \sin \omega$ . Macht man  $MZ = LM$ ,  $NS \parallel OM$  und  $SK \perp SZ$ , so ist  $MK = \varrho$ .

Da nach § 46 XI.  $MV = n = \frac{b_1 b}{a}$  ist, so ist  $b_1^3 = \frac{n^3 a^3}{b^3}$

$$\text{und } \varrho = \frac{n^3 a^3}{ab \cdot b^3} = \frac{n^3}{\frac{b^4}{a^2}} = \frac{n^3}{p^2}. \quad \text{IX.}$$

Ist  $VV_1 \perp MF$ , so ist  $MV_1 = p$ ,  $\cos \gamma = MV_1 : MV = p : n$ , also  $\varrho = \frac{p}{\cos^3 \gamma}$ . Macht man  $VK_1 \perp MV$ ,  $K_1K \perp MK_1$ , so ist

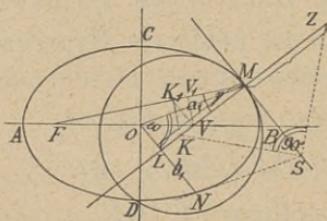


Fig. 66.

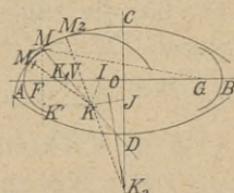


Fig. 67.

$$\varrho = MK = \frac{MK_1}{\cos \gamma} = \frac{MV}{\cos \gamma} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} = \frac{MV_1}{\cos \gamma} \cdot \frac{1}{\cos^2 \gamma} = \frac{p}{\cos^3 \gamma}. \quad \text{X.}$$

Construiert man (Fig. 67) in den vier Parameterenden einer Ellipse die Krümmungskreise und legt an diese die Tangential-Kreise durch die Scheitel, so erhält man eine sehr gute Pseudoellipse. Die Tangentialkreise können genau construiert werden. Man macht  $AI = MK$  und  $CJ = MK$  und sucht die Mittellothe zu  $KI$  und  $KJ$ ; in diesen liegen  $K_1$  und  $K_2$ . Der Quadrant setzt sich aus den Kreisbögen  $AM_1$ ,  $M_1M_2$  und  $M_2C$  zusammen. Leichter findet man allerdings  $K_1$  und  $K_2$  durch Versuche.

Bei der Hyperbel (Fig. 68) findet man für  $x = a + 2p = a + 2 \frac{b^2}{a}$  gemäß

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{leicht}$$

$$y = 2p \cdot \frac{c}{a} = BP \cdot \frac{OS}{OB} = SR = PN.$$

Ist  $RV \perp OR$ , so ist bekanntlich  $NV$  die Hyperbelnormale.

Macht man  $SL \perp OS$ , so ist  $BL = p$ . Ferner ist  $GM = p$  und  $BP = 2BL$ .

Nun hat man in  $M$  den Krümmungskreis vom Centrum  $K$  zu construieren und an diesen einen Tangentialkreis durch  $B$  zu legen, dessen Mittelpunkt in  $OB$  liegt. Ferner einen zweiten Berührungskreis durch  $N$ , dessen Centrum sich in  $NV$  befindet. Statt des letzteren genügt bei minderer Genauigkeit auch eine Tangente durch  $N$ . Das Verfahren ist jenem in Fig. 67 analog und liefert eine gute Pseudohyperbel.

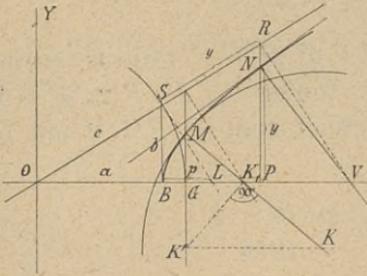


Fig. 68.

In gleicher Weise lassen sich Parabeln aus Kreisbögen zusammensetzen. Man benützt wieder den Krümmungskreis in einem Parameterendpunkte und legt an diesen durch den Scheitel einen Tangentialkreis, dessen Centrum sich in der Achse befindet. Statt des Punktes  $N$  in Fig. 68 dient hier am besten ein Punkt von der Abscisse  $x = 2p$ , dessen Ordinate  $y$  ebenfalls gleich  $2p$  ist. Die Subnormale  $PV = p$ .

Zum Schlusse möge noch eine synthetische Ableitung für die Coordinaten des Krümmungskreises in einem Parabelpunkte Platz finden. Sind  $M$  und  $M_1$  in Fig. 69 zwei Parabelpunkte mit den Coordinaten  $AP = x$  und  $PM = y$ , resp.  $AP_1 = x_1$  und  $P_1M_1 = y_1$ , sind ferner  $MV$  und  $M_1V_1$  die entsprechenden Normalen, so ist bekanntlich  $PV = P_1V_1 = p = 2 \cdot AF$ . Die Subtangente  $PT$  für  $M$  erfüllt die Bedingung  $PT = 2 \cdot AP = 2x$ .

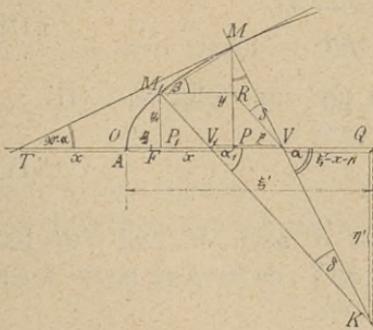


Fig. 69.

Die Normalen  $MV$  und  $M_1V_1$  bilden mit der Parabelachse  $AQ$  die Winkel  $\alpha$  und  $\alpha_1$ , und sie schneiden sich im Punkte  $K$ , woselbst sie den Winkel  $\delta = \alpha - \alpha_1$  bilden.  $K$  hat die Coordinaten  $\xi' = AK$  und  $\eta' = QK$ .

Die Tangente  $MT$  schließt mit der Achse den Winkel  $90^\circ - \alpha$  ein. Ist  $M_1R \parallel AQ$ , so ist  $M_1R = x - x_1$ . Nun ist weiter

$$OV = OP + PV = x + p$$

und  $OV_1 = OP_1 + P_1V_1 = x_1 + p.$

Daraus erhält man

$$OV - OV_1 = V_1V = x - x_1.$$

Mithin ist  $M_1R = V_1V$  und deshalb  $RV \parallel M_1V_1$ . Daraus ergibt sich aber  $\sphericalangle RVM = \delta$ . Dann folgt weiter  $\sphericalangle PVR = \alpha - \delta$ . Ferner ist  $\sphericalangle PMV = 90^\circ - \alpha$ . Bezeichnet man  $\sphericalangle RM_1M$  mit  $\beta$ , so liefert  $\triangle VV_1K$ :

$$VK = \frac{V_1V \sin \alpha_1}{\sin \delta} = M_1R \frac{\sin(\alpha - \delta)}{\sin \delta}. \quad \text{XI.}$$

Ferner folgt aus  $\triangle VQK$  und XI.

$$VQ = VK \cdot \cos \alpha = M_1R \sin(\alpha - \delta) \frac{\cos \alpha}{\sin \delta}. \quad \text{XII.}$$

Dreieck  $MRV$  ergibt

$$\frac{RV}{RM} = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\sin \delta} = \frac{\cos \alpha}{\sin \delta},$$

und damit geht XII. über in

$$VQ = \frac{M_1R}{RM} \cdot RV \cdot \sin(\alpha - \delta).$$

Nun ist in  $\triangle MM_1R$   $RM : M_1R = \operatorname{tg} \beta$

und daher  $VQ = RV \cdot \frac{\sin(\alpha - \delta)}{\operatorname{tg} \beta}$ . XIII.

In  $\triangle PVR$  ist  $PR = RV \cdot \sin(\alpha - \delta)$  und nun folgt aus XIII.

$$VQ = \frac{PR}{\operatorname{tg} \beta}. \quad \text{XIV.}$$

Fällt  $M_1$  mit  $M$  zusammen, dann rückt  $R$  nach  $M$  und  $PR$  hat den Grenzwert  $PM = y$ . Demnach liefert XIV., da  $\lim \beta = 90^\circ - \alpha$  ist,

$$\lim VQ = \lim (\xi' - x - p) = \frac{y}{\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)} = y \operatorname{tg} \alpha = PT = 2x.$$

Sind  $\xi$  und  $\eta$  die Grenzwerte von  $\xi'$  und  $\eta'$ , so folgt

$$\xi - x - p = 2x \quad \text{oder}$$

$$\xi = 3x + p,$$

wie in § 49, V.

$\eta$  ist aus der Gleichung der Normale  $MV$  oder aus der Figur leicht zu berechnen.

### § 51. Das vollständige Viereck und Vierseit.

In Fig. 70 ist  $ED$  eine Transversale des Dreieckes  $ABC$ , welche  $AB$  in  $G$  schneidet. Zieht man  $BH \parallel DE$ , so ist

$$\frac{AG}{BG} = \frac{AE}{HE}$$

$$\frac{BD}{CD} = \frac{HE}{CE}$$

Durch Multiplication folgt hieraus

$$\frac{AG}{BG} \cdot \frac{BD}{CD} = \frac{AE}{CE} \text{ oder}$$

$$\frac{AG}{BG} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} = 1.$$

I.

Ist umgekehrt das Product der Theilungsverhältnisse der Seiten eines Dreieckes gleich Eins, so liegen die Theilungspunkte  $D$ ,  $E$  und  $G$  in einer Geraden. (Satz von Menelaos.) Sind  $AD$ ,  $BE$  und  $CF$  drei Ecktransversalen, die sich in  $O$  durchschneiden, so folgt aus dem Dreiecke  $AFC$  mittels der Transversalen  $EB$ :

$$\frac{AB}{FB} \cdot \frac{FO}{CO} \cdot \frac{CE}{AE} = 1,$$

und aus dem Dreiecke  $FBC$  mittels der Transversalen  $AD$

$$\frac{FA}{BA} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CO}{FO} = 1.$$

Durch Multiplication der beiden letzten Relationen folgt, wenn man die Strecken absolut nimmt:

$$\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} = 1.$$

II.

Nimmt man auf die Vorzeichen der Strecken Rücksicht, so erhält man rechter Hand  $-1$ .

Ist umgekehrt das Product der Theilungsverhältnisse der Seiten eines Dreieckes gleich „minus Eins“, so schneiden sich die Ecktransversalen  $AD$ ,  $BE$  und  $CF$  in einem Punkte  $O$ . (Satz von Ceva.)

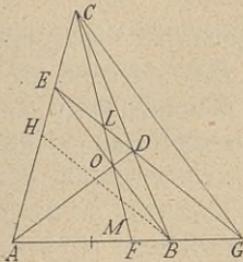


Fig. 70.

Dividiert man II. durch I., so folgt:

$$\frac{AF}{BF} = \frac{AG}{BG} \quad \text{III.}$$

oder

$$\frac{GB}{FB} = \frac{GA}{FA} \quad \text{IV.}$$

Mithin wird  $AB$  durch  $F$  und  $G$  harmonisch getheilt und umgekehrt  $GF$  durch  $B$  und  $A$  harmonisch zerlegt.

Sind  $A, B, D$  und  $E$  die Ecken eines vollständigen Viereckes, so hat dieses die sechs Seiten  $AB, BD, DE, EA, AD$  und  $BE$ .  $C$  und  $G$  sind die Diagonalpunkte. Wendet man die obige Entwicklung auf das Dreieck  $EDC$  mit  $AB$  als Transversale und  $O$  als Ceva'schem Punkte an, so ergibt sich

$$EL : DL = EG : DG . \quad \text{V.}$$

Dies gibt den für zwei Seiten bewiesenen Satz.

Jede Seite des vollständigen Viereckes wird durch den darin befindlichen Diagonalpunkt und durch die Verbindungslinie der beiden anderen Diagonalpunkte harmonisch getheilt.

Aus der Eigenschaft des vollständigen Vierecks erhellt, dass je zwei harmonische Punktreihen  $AB, FG$  und  $ED, LG$ , die einen Punkt  $G$  gemein haben, perspectivisch liegen, d. h., dass die drei Strahlen durch die homologen Punkte sich in einem Projectionscentrum  $C$  begegnen. Da zwei harmonische Theilpunkte vertauscht werden können, so erhält man zwei Centren. So haben die Reihen  $AB, FG$  und  $ED, LG$  die Centren  $C$  und  $O$ .

Durch Projection der einen Reihe  $ABFG$  aus  $C$  auf eine parallele Gerade entsteht eine ebenfalls harmonische Reihe  $A'B'F'G'$ , die mit  $EDLG$  perspectivisch liegt. Schneiden sich drei durch homologe Punkte zweier harmonischen Reihen gezogene Strahlen in einem Punkte  $C$ , so geht auch der Strahl durch die vierten Punkte durch  $C$ .

Die Strahlen  $CA, CB, CF, CG$  geben einen harmonischen Büschel, welcher von jeder Transversalen nach einer harmonischen Reihe geschnitten wird.

Ist die Transversale zu einem Strahl parallel, so wird sie vom conjugierten Strahle halbiert und umgekehrt. Dies geht aus der schon oft erörterten Eigenschaft

$$MF \cdot MG = \frac{1}{4} \overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 \quad \text{hervor.}$$

Ist daher  $MF = 0$ , so ist  $MG = \infty$ .

Halbiert man einen Winkel und seinen Nebenwinkel, so sind die Halbierenden zu einander normal. Ist eine Transversale zu einer Halbierenden parallel, so wird das zwischen den Schenkeln enthaltene Stück von der anderen Halbierenden gehälftet. Mithin bilden die Schenkel mit den Halbierenden einen harmonischen Büschel. Der auf ein Dreieck umgewandelte Satz wurde bereits eingangs benützt.

Wenn zwei Strahlenbüschel dieselbe harmonische Reihe projicieren, so sind sie in perspectivischer Lage.

Haben zwei harmonische Büschel einen Strahl gemein, so schneiden sich die entsprechenden Strahlen in Punkten einer Geraden. Treffen sich überhaupt je drei entsprechende Strahlen in drei Punkten einer Geraden, so liegt der Schnittpunkt der vierten Strahlen ebenfalls in der letzteren. Denn jedes Büschel liefert in der Geraden eine harmonische Reihe. Beide Reihen stimmen in drei Punkten überein und müssen deshalb den vierten Punkt identisch erhalten.

In der harmonischen Eigenschaft des vollständigen Viereckes sind die Mittel enthalten, zu drei Punkten oder zu drei Strahlen das harmonische Element durch geradlinige Construction zu erhalten.

Die neuere Geometrie gibt noch eine dualistische Auffassung der Fig. 70.

Sind  $AB, BD, DE, EA$  die Seiten eines vollständigen Viereckes, so sind  $A, B, D, E, G$  und  $C$  die sechs Ecken,  $AD, BE$  und  $GC$  sind die Diagonalen. Der Satz III. lautet diesfalls:

In jedem Eckpunkte ( $C$ ) bilden die Seiten ( $CA, CB$ ) mit der durch ihn gehenden Diagonale ( $CG$ ) und der Verbindungslinie ( $CO$ ) mit dem Schnittpunkte der beiden anderen Diagonalen einen harmonischen Büschel.

## § 52. Die peripherische Punkt-Involution.

Ist  $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{B}'\mathcal{A}'$  (Fig. 71) ein Sehnenviereck im Kegelschnitte und sind  $P, D$  und  $D'$  seine Diagonalpunkte, so ist  $DD'$  die Polare von  $P$ , denn  $DD'$  und  $P$  theilen  $\mathcal{A}\mathcal{A}'$  sowohl als auch  $\mathcal{B}\mathcal{B}'$  in  $A'$  resp.  $B'$  harmonisch. Analog findet man, dass  $PD'$  die Polare von  $D$  und  $PD$  die Polare von  $D'$  ist.  $P, D$  und  $D'$  sind also ein Tripel conjugierter Pole. Die hyperbolische Involution conjugierter Pole auf  $DD'$  hat die Doppelpunkte  $M = M'$  und  $N = N'$  und das Centrum  $O$ . Sind  $A$  und  $B$  die Pole von  $\mathcal{A}\mathcal{A}'$  und  $\mathcal{B}\mathcal{B}'$ , so bilden

$AA'$  und  $BB'$  nebst den analogen Punkten  $DD'$ ,  $EE'$ ,  $FF'$  und  $OO'_{\infty}$  Paare der Involution.

In der obigen Involution liegt ein einfaches Verfahren, wie man zum Pol  $P$  die Polare  $DD'$  geradlinig construieren kann.

Projiziert man die Paare  $AA'$ ,  $DD'$ ,  $FF'$  aus dem Peripheriepunkte  $\alpha$  auf die Curve, so geben die Projektionsstrahlen eine Involution, und man erhält die peripherische Involution mit den Paaren  $\alpha\alpha'$ ,  $\beta\beta'$  und  $\gamma\gamma'$ . Der Strahl  $aA$  tangiert den Kegelschnitt. Diese krummlinige Involution besitzt die Doppelpunkte  $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}'$  und  $\mathfrak{N}'' = \mathfrak{N}'''$ , die sich mit  $M$ , beziehungsweise  $N$  decken. Die Verbindungslinien aller Paare der Umfangsinvolution gehen durch den Pol  $P$ , welcher als Vervollständigungscentrum erscheint. Seine Polare liefert die Doppelpunkte. Zieht man von einem Punkt  $B$  der Polaren  $DD'$  die Tangenten, so geben die Berührungspunkte ein Paar  $\beta\beta'$  der peripherischen Involution. Ist die Involution elliptisch, dann liegt  $P$  innerhalb und die Polare schneidet den Kegelschnitt imaginär. (Fig. 72.)

In den obigen Beziehungen ist ein einfaches Mittel enthalten jede Punktinvolution mittels einer Strahleninvolution zu ergänzen. Man entwirft aus einem Punkte einer Kreislinie die zugehörige Strahleninvolution, behandelt diese und bringt die Strahlen mit dem Träger der Punktinvolution zum Schnitte.

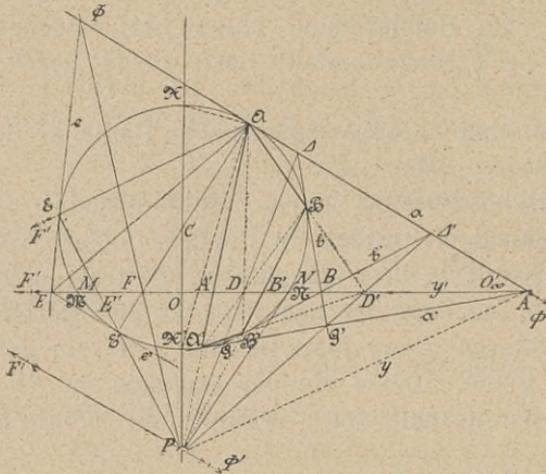


Fig. 71.

Fig. 72 shows a similar construction but with a different configuration of points and lines, illustrating the case where the pole P is inside the circle and the polar line does not intersect it.

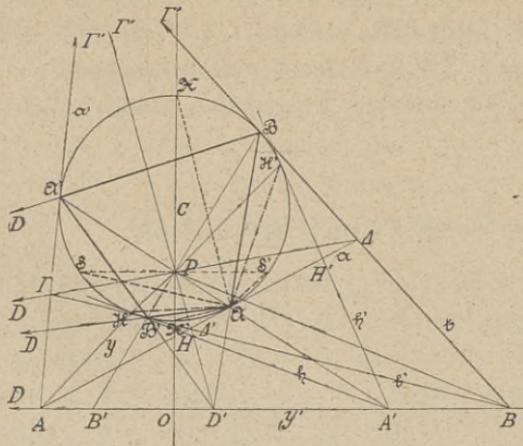


Fig. 72.

dem Träger der Punktinvolution zum Schnitte.

Viel wichtiger jedoch sind die Anwendungen aus Fig. 71 bezüglich einer gegebenen Strahleninvolution.

Man legt durch den Träger  $\mathcal{C}$  des Büschels eine beliebige Kreislinie, sucht den Pol  $P$  der krummlinigen Involution. Die Polare hierzu liefern die eventuell vorhandenen Doppelpunkte, zu denen die Doppelstrahlen zu ziehen sind.

Besonders einfach findet man die Achsen der Involution. Man verbindet  $P$  mit dem Centrum  $C$  des Kreises, findet  $\mathfrak{X}$  und  $\mathfrak{X}'$  und zieht  $\mathcal{A}\mathfrak{X}$  und  $\mathcal{A}\mathfrak{X}'$ .

Wäre die Involution elliptisch (Fig. 72), so sind die symmetrischen Strahlen von Bedeutung. Man zieht durch  $P$  die Normale zu  $PC$  und erhält  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{S}'$  in der Peripherie.  $\mathcal{A}\mathfrak{S}$  und  $\mathcal{A}\mathfrak{S}'$  sind dann die symmetrischen Strahlen.

Die letzteren kann man umständlicher dadurch finden, dass man die Strahleninvolution senkrecht zu einer Achse schneidet, die symmetrischen Punkte der entstandenen Involution sucht und mit den Trägern des Büschels verbindet.

Nun lässt sich ein Rückblick auf Fig. 32 in § 29 werfen, woselbst  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{M}'$  die symmetrischen Punkte einer Involution sind.  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{M}'$  vertreten die imaginären Punkte  $M_i$  und  $M'_i$ .

$$\begin{aligned} R_1 M_i &= R_1 R + R M_i = \gamma + i\eta \\ R_1 M'_i &= R_1 R + R M'_i = \gamma - i\eta. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\gamma \pm i\eta = tg(\alpha \pm i\varphi) \text{ gegeben.}$$

Man projiziert die elliptische Involution vom Centrum  $R$  mit dem Paare  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{M}'$  aus dem Scheitel  $O$ . Die Strahleninvolution hat die Paare  $OR$  und  $O\mathfrak{J}$  ferner  $OM$  und  $OM'$ . Die Achsen sind  $OV$  und  $OV'$ .  $V$  und  $V'$  sind ein Paar der Punktinvolution.

Projiziert man diese Involution auf den Kreis  $OVV'$ , so sind  $V$  und  $V'$ , ferner  $\mathfrak{N}$  und  $\mathfrak{N}'$  je ein Paar der peripherischen Involution.

Der Pol  $\mathbf{P}$  liegt in  $\mathfrak{N}\mathfrak{N}'$  und in  $VV'$ . Zieht man durch  $\mathbf{P}$  die Normale zu  $PC$ , so findet man  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{S}'$ .  $O\mathfrak{S}$  und  $O\mathfrak{S}'$  sind die symmetrischen Strahlen,  $\sphericalangle V'O\mathfrak{S} = \sphericalangle V'O\mathfrak{S}' = \gamma = 90^\circ - \beta$ . (Man vergleiche auch § 31, Fig. 38.)

Aus den obigen Entwicklungen geht folgende wichtige Tatsache hervor:

*Der imaginäre Winkel  $2 \cdot i\varphi$  zwischen zwei imaginären Geraden wird durch den spitzen Winkel  $2\beta$  zwischen den symmetrischen Strahlen der betreffenden elliptischen Strahleninvolution gemessen.*

Aus dem Sehnenvierecke  $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{B}'\mathcal{A}'$  geht ohne weiteres der Satz hervor, dass die Schnittpunkte  $D'$  und  $P$  je zweier Gegenseiten  $\mathcal{A}\mathcal{B}$  und  $\mathcal{A}'\mathcal{B}'$ , ferner  $\mathcal{B}\mathcal{B}'$  und  $\mathcal{A}\mathcal{A}'$  mit den Schnittpunkten  $\mathcal{A}'$  und  $\mathcal{B}'$  der Tangenten in je zwei Gegenpunkten  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}'$ , ferner  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{A}'$  in einer Geraden liegen.

Ferner ergibt sich aus dem Tangentenvierecke  $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{B}'\mathcal{A}'$  der Satz, dass sich die Diagonalen  $\mathcal{A}\mathcal{B}'$  und  $\mathcal{A}\mathcal{B}$  mit den Verbindungslinien je zweier gegenüberliegender Berührungspunkte  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}'$ , ferner  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{A}'$  in demselben Punkte  $D$  treffen.

### § 53. Die peripherische Tangenteninvolution.

Figur 72 gestattet noch eine dualistische Auffassung. Ersetzt man jede Gerade durch ihren Pol und jeden Punkt durch seine Polare, so erhält man die entsprechende Polarfigur. Die Lehrsätze über die ursprüngliche Figur verwandeln sich in die analogen für die Polarfigur. Der Übergang heißt das Princip der Polarisation.

Zieht man in den Punkten  $\mathcal{A}\mathcal{A}'$ ,  $\mathcal{B}\mathcal{B}'$ ,  $\mathcal{C}\mathcal{C}'$  die Tangenten  $\alpha\alpha'$ ,  $\beta\beta'$ ,  $\gamma\gamma'$ , so bilden diese die Paare einer peripherischen Tangenteninvolution.  $\alpha\alpha'$ ,  $\beta\beta'$  sind die Seiten eines vollständigen Tangentenvierseites mit den Ecken  $A$ ,  $B$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\Gamma$ ,  $\mathcal{A}'$  und  $\Gamma'$ .  $AB$ ,  $\mathcal{A}\Gamma$ ,  $\mathcal{A}'$  und  $\Gamma'$  sind die Diagonalen. Letztere schneiden sich in  $P$ . Diese Eigenschaft kann zur Construction des Pols  $P$  verwendet werden.

In dem Eckpunkte  $A$  bilden die Seiten  $\alpha$ ,  $\alpha'$  mit der Diagonale  $\gamma' = AB$  und dem Strahle  $\gamma = AP$  nach dem Schnittpunkte  $P$  der beiden anderen Diagonalen einen harmonischen Büschel.

Diese schon bekannte Eigenschaft bestätigt sich neuerdings in der Fig. 71, da  $\mathcal{A}\mathcal{A}'$ ,  $\mathcal{A}'$  und  $P$  eine harmonische Reihe bilden. Da  $\mathcal{A}'\mathcal{B}$  und  $\mathcal{A}\mathcal{B}'$  sich in  $D$  schneiden, und die Pole  $\Gamma'$ , resp.  $\mathcal{A}'$  besitzen, so liegen diese in der Polare  $PD'$  von  $D$ , welche durch den Pol von  $D'D$ , also durch  $P$  gehen muss. Analog zeigt man, dass  $\mathcal{A}\Gamma$  durch  $P$  geht.

Die Involution in  $DD'$  wird von  $P$  aus auf die Tangente  $\alpha$  in  $\mathcal{A}$  projiziert.  $\mathcal{A}A$ ,  $\mathcal{A}\mathcal{A}'$ ,  $\Phi\Phi'$  sind Paare der neuen Involution in der Tangente. Zieht man aus den Punkten  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{A}'$  eines Paares die Tangenten an den Kegelschnitt, so treffen sich diese in einem Punkte  $B$  der Polaren  $DD'$ . Letztere heißt die Vervollständigungsachse der Involution auf  $\alpha$ .

Diese Eigenschaft kann dazu benützt werden, um die Punktinvolution zu ergänzen. Man legt in einem Punkte  $\mathcal{A}$  einen Tangentialkreis an den Träger  $\mathcal{A}A$  und zieht vom entsprechenden Punkte  $A$

die Tangente  $AA'$ . Desgleichen zieht man von den Punkten  $A, A'$  eines anderen Paares die Tangenten  $AB$  und  $A'B'$ , welche mit den ersteren ein vollständiges Vierseit bilden, dessen eine Diagonale  $AB$  die Polare ist, während die anderen Diagonalen  $A\Gamma$  und  $A'\Gamma'$  den Pol  $P$  liefern. Die Diagonalen liefern ein Tripel conjugierter Polaren.

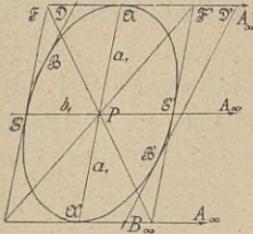


Fig. 73.

Besonders interessant ist die Sache, wenn man eine Ellipse (Fig. 73) im Centrum  $\mathcal{O}$  einer Punktinvolution tangierend an den Träger legt.

Da hier  $A_\infty$  im Unendlichen liegt, so ist  $P$  der Mittelpunkt der Ellipse und die Polare  $DD'$  im Unendlichen. Der Schnittpunkt  $B_\infty$  der Tangenten  $\mathcal{O}B$  und  $\mathcal{O}B'$  ist analog fern und daher die letzteren parallel.

Ist  $\mathcal{O}S' \parallel \mathcal{O}A$ , so ist  $PS = b_1$  der zu  $P\mathcal{O} = a_1$  conjugierte Halbmesser. Da  $\mathcal{O}S = \mathcal{O}S' = PS = b_1$  ist, so sind  $S$  und  $S'$  die symmetrischen Punkte der Involution. Mithin ist  $\mathcal{O}S \cdot \mathcal{O}S' = \mathcal{O}S \cdot \mathcal{O}S' = -b_1^2$ .

Sind  $q_1$  und  $q_2$  die Leitstrahlen von  $\mathcal{O}$ , so ist nach § 42, V.

$$q_1 q_2 = b_1^2 \text{ und daher absolut}$$

$$\mathcal{O}S \cdot \mathcal{O}S' = q_1 q_2.$$

Hierin liegt der Schlüssel zur Brennpunktsgometrie der Ellipse.

Da  $S, S', \mathcal{O}$  und  $A_\infty$  harmonische Punkte sind, so sind die Strahlen  $PS, PS', P\mathcal{O}$  und  $PA_\infty$  ebenfalls harmonisch. Zu jedem Durchmesserpaar gehört ein harmonisch zugeordnetes. Die Durchmesser der letzteren sind Diagonalen jenes Parallelogrammes, das man über den Durchmessern des ersteren als schiefe Symmetralen construieren kann. (Man vergleiche § 42.)

Je zwei conjugierte Durchmesser bilden mit den unendlich fernen Geraden ein Polarendreieit.

Bei der Hyperbel ist jede Asymptote als Doppelstrahl zu sich selbst conjugiert. Die Behandlung dieser Curve ist analog wie bei der Ellipse.

Bekanntlich gehört zu jedem Paare einer elliptischen Punktinvolution ein harmonisch zugeordnetes, welches nach § 40 mittels eines Kreisbüschels gefunden werden kann. Mittels dieses Verfahrens kann man indirect zu einem Strahlenpaar  $\alpha\alpha'$  das harmonisch zugeordnete ermitteln, indem man die Strahleninvolution schneidet,

die zu den Schnittpunkten  $AA'$  harmonisch zugeordneten Punkte  $HH'$  sucht und dann mit dem Schnitt verbindet. Fig. 72 gibt indessen ein weit kürzeres Verfahren. Man legt im Scheitel  $\mathcal{A}$  einen Tangentialkreis an  $\alpha$ , bestimmt den Pol  $A$  von  $\mathcal{A}\mathcal{A}'$ , welcher in der Polare  $DD'$  von  $P$  liegt, zieht  $AP$ , findet  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{K}'$  in der Peripherie und zieht  $\mathcal{A}\mathcal{K}$  und  $\mathcal{A}\mathcal{K}'$ . Denn  $\mathcal{K}\mathcal{K}'$ ,  $P$  und  $A$  sind harmonische Punkte.

Sollten in der Punktinvolution auf  $\alpha$  die zum Paare  $\mathcal{A}A$  harmonisierenden Punkte gesucht werden, so zieht man in  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{K}'$  die Tangenten, welche durch  $A'$  gehen und die harmonisch zugeordneten Punkte  $H$  und  $H'$  liefern.

### § 54. Verbindungslinie imaginärer Punkte und Schnittpunkt imaginärer Strahlen.

Sind  $A$  und  $A'$  (Fig. 74) die symmetrischen Punkte einer Involution vom Centrum  $O$ , ferner  $B$  und  $B'$  die symmetrischen Punkte der Involution vom Centrum  $O_1$ , so sind damit vier imaginäre Punkte  $A_i, A'_i, B_i, B'_i$  versinnlicht. Es gibt nun vier Strahlen  $A_iB_i, A_iB'_i, A'_iB_i, A'_iB'_i$ ; da die Punkte dieser Paare nicht conjugiert sind, so sind die Strahlen imaginär.

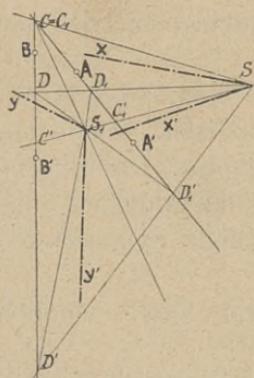


Fig. 74.

Staudt hat einen gewissen Sinn der Aufeinanderfolge in die Involution eingeführt, und konnte dadurch ohne Zeichnung aus den obigen vier Geraden eine bestimmte herausgreifen.

Zu dem Schnittpunkt  $C = C_1$  der Involutionsträger (Fig. 74) gehören in der Involution der Punkt  $C'$  resp.  $C'_1$ ; zu dem Paare  $CC'$  gibt es ein harmonisches Paar  $DD'$ . Ebenso gibt es zu  $C_1C'_1$  das harmonische Paar  $D_1D'_1$ . Die beiden harmonischen Punktreihen haben den Punkt  $C = C_1$  gemeinsam und liegen demnach perspectivisch.  $C'C'_1, DD_1$  und  $D'D_1$  müssen sich in einem Punkte  $S$  schneiden.

Ebenso  $C'C'_1, DD'_1$  und  $D'D_1$  in  $S_1$ . Die Strahleninvolution aus  $S$  liefert die gegebene Involution in den Trägern. Ihre Doppelstrahlen sind imaginär und werden durch die symmetrischen Strahlen  $x$  und  $x'$  vertreten. Das zweite Projectionscentrum gibt die beiden andern symmetrischen Strahlen  $y$  und  $y'$ . Die Punktinvolutionen mit den imaginären

Doppelpunkten  $B_i$  und  $B'_i$  können auch durch irgend zwei Paare gegeben sein.

Soll man den Schnittpunkt zweier imaginärer Strahlen aufsuchen, so müssen selbe als Doppelstrahlen zweier elliptischer Involutionen gegeben sein. In Fig. 75 seien  $a$  und  $a'$ , ferner  $b$  und  $b'$  die symmetrischen Strahlen, während den Involutionen die Achsenpaare  $o, o'$  resp.  $o_1$  und  $o_1'$  entsprechen. Zur Verbindungslinie  $c = c_1$  der Spitzen gehört in jeder Involution ein Strahl  $c'$  resp.  $c_1'$ . Jedem dieser Paare ist in der betreffenden Involution ein harmonisches Strahlenpaar  $dd'$ , resp.  $d_1d_1'$  zugeordnet. Die beiden harmonischen Büschel haben einen Strahl gemein und schneiden sich daher in einer Geraden  $s$  (Projectionsachse). In dieser geben beide Strahleninvolutionen eine gemeinsame Punktinvolution, deren Doppelpunkte die gesuchten Punkte sind; man ersetzt letztere durch die symmetrischen Punkte  $X$  und  $X'$ . Da es auch eine zweite perspektivische Achse  $s_1$  der Büschel gibt, wenn man sie anders zuordnet, so erhält man noch zwei symmetrischen Punkte

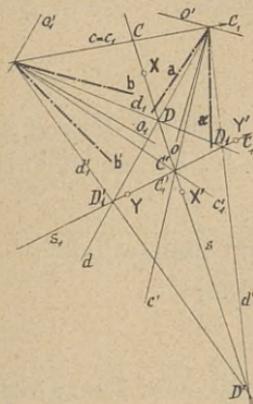


Fig. 75.

$Y$  und  $Y'$ , im Ganzen also vier Lösungen.

Die Strahleninvolutionen mit den imaginären Doppelstrahlen  $a_i$  und  $a'_i$ , resp.  $b_i$  und  $b'_i$  können auch durch irgend zwei Paare der Involution gegeben sein.

Die obige übersichtliche Bezeichnung der Vertreter imaginärer Punkte und Strahlen durch Blockbuchstaben ist bei complicierten Aufgaben sehr zu empfehlen. Desgleichen empfiehlt sich das Einringeln der symmetrischen Punkte, sowie die gestrichelt-punktierte Manier für die symmetrischen Strahlen.

### § 55. Theorie der Ähnlichkeitscentren zweier Kreise.

Zieht man in den Kreisen  $O$  und  $O_1$  (Fig. 76) die Radien  $OM'' \parallel O_1M_1$  und  $ON \parallel O_1N_1'$ , so liefern  $M''M_1$  und  $NN_1'$  den in der Centrale  $OO_1$  gelegenen äußeren Ähnlichkeitspunkt  $A$ ; durch diesen gehen die gemeinsamen äußeren Tangenten wie  $\alpha\alpha$  und  $\beta\beta$ . Durch verkehrt parallel gezogene Radien erhält man in analoger Weise das innere Ähnlichkeitszentrum  $J$ . Der Strahl  $M''A$  liefert in der Kreislinie  $O$  den Punkt  $M$  und der Strahl  $NA$  im Kreise  $O_1$  den

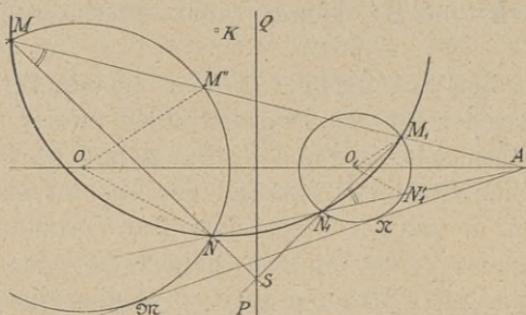


Fig. 76.

Punkt  $N_1$ . Nun ist  $\sphericalangle NMA = \frac{1}{2} \sphericalangle NOM''$  und  $\sphericalangle M_1N_1A = \frac{1}{2} \sphericalangle M_1O_1N_1'$ . Da nun  $\sphericalangle NOM'' = \sphericalangle N_1'O_1M_1$  ist, so ist auch  $\sphericalangle NMA = \sphericalangle M_1N_1A$ . Demzufolge ist

$$\begin{aligned} \triangle NMA &\sim \triangle M_1N_1A \text{ und man erh\u00e4lt} \\ AM : AN_1 &= AN : AM_1 \text{ oder} \\ AM \cdot AM_1 &= AN \cdot AN_1 . \end{aligned}$$

Diese Beziehung dr\u00fcckt aus, dass sich durch zwei Paare verkehrt zugeordneter Punkte, wie  $MM_1$  und  $NN_1$ , ein Kreis  $K$  legen l\u00e4sst.

Die Chordalen  $MN$  und  $M_1N_1$  treffen einander in einem Punkte  $S$  der Chordale  $PQ$  der gegebenen Kreise, welcher das Potenzenzentrum von  $O$ ,  $O_1$  und  $K$  ist.

Mithin stehen die Kreise  $O$  und  $O_1$  auf zweifache Weise in centraler Collineation in Bezug auf einen \u00c4hnlichkeitspunkt als Centrum und die Gerade  $PQ$  als Achse. Au\u00dferdem bestehen noch zehn

andere Collineationen, unter ihnen besitzen zwei davon unendlich ferne Collineationsachsen. Ordnet man n\u00e4mlich in Fig. 76  $M''$  und  $M_1$ , andererseits  $N$  und  $N_1'$  einander zu, so sind alle homologen Linien einander parallel. Die \u00fcbri- gen Collineationen sind imagin\u00e4r, denn bei ihnen ist jeder Kreis einer

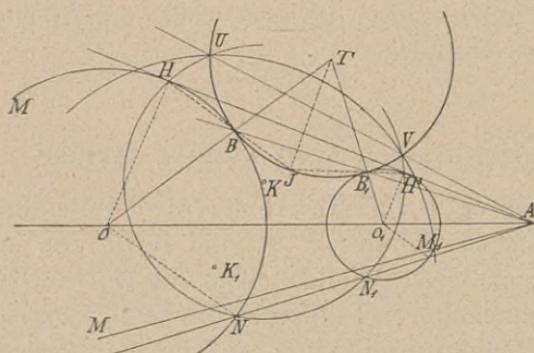


Fig. 77.

imaginären Polcurve zugeordnet, welche dem anderen Kreise angehört. Man vergleiche § 38.

Geht der dritte Kreis  $K$  in einen berührenden über, so liegen die Tangentialpunkte  $B$  und  $B_1$  (Fig. 77) in demselben Strahle durch das Ähnlichkeitscentrum, und der Kreismittelpunkt  $T$  befindet sich in den beiden Centralen  $OB$  und  $O_1B_1$ . Zieht man zwei parallele Radien  $OH$  und  $O_1H'$  und ferner die Verbindungslinien  $BH$  und  $B_1H'$ , so schneiden sich diese in einem Punkte  $J$  des Kreises  $T$ ; der Beweis hiefür ergibt sich sofort daraus, dass  $B$  ein Ähnlichkeitspunkt zwischen  $O$  und  $T$ ,  $B_1$  dagegen dasselbe bezüglich  $O_1$  und  $T$  ist.

Ist der dritte Kreis orthogonal zu den gegebenen, so liegt sein Centrum  $K$  in der Chordale  $PQ$  (Fig. 78). Dies ist mit Hilfe des zugehörigen Tangentialkreises  $T$  und des bei  $M$  und  $M_1$  rechtwinkligen Deltoids leicht zu beweisen.

Schneidet man aus dem Tangentialkreise (Fig. 77) mittels eines Strahles durch das Collineationscentrum zwei Punkte  $U$  und  $V$  heraus, so lässt sich durch  $U$  und  $V$  je zwei collineare Punkte, wie  $N$  und  $N_1$ , je ein Kreis legen. Denn es ist

$$\begin{aligned} AU \cdot AV &= AB \cdot AB_1 \\ AN \cdot AN_1 &= AB \cdot AB_1 \quad \text{und demzufolge} \\ AU \cdot AV &= AN \cdot AN_1. \end{aligned}$$

Dabei ist jedoch zu bemerken, dass  $U$  und  $V$  keine collinearen Punkte des Doppelsystems sind. Diese Eigenschaft wird im Vereine mit Parallelverschiebungen bei der elementar-geometrischen Lösung des Apollonischen Problemes benützt.

Unter diesen Kreisen durch  $U$  und  $V$  ist jener bemerkenswert, dessen Centrum  $K$  sich in der Collineationsachse  $PQ$  befindet, und welcher deshalb die gegebenen Kreise rechtwinklig schneidet. Hat man zwei gleichartige Tangentialkreise  $T$  und  $T_1$  (Fig. 79), so geht ihre Chordale  $UV$  durch das Collineationscentrum. Jeder Kreis durch  $UV$  liefert in den gegebenen Kreisen collineare Punkte. Insbesondere gibt der Orthogonalkreis durch  $UV$ , dessen Centrum  $K$  im Mittellothe von  $UV$  und in der Collineationsachse  $PQ$  liegt, die Punktepaare  $MM_1$  und  $NN_1$ . Die Chordalen  $MN$  und  $M_1N_1$

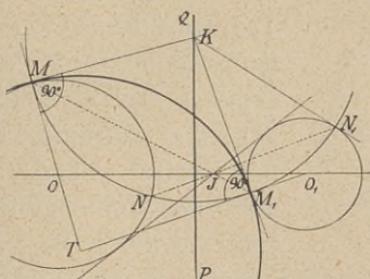


Fig. 78.

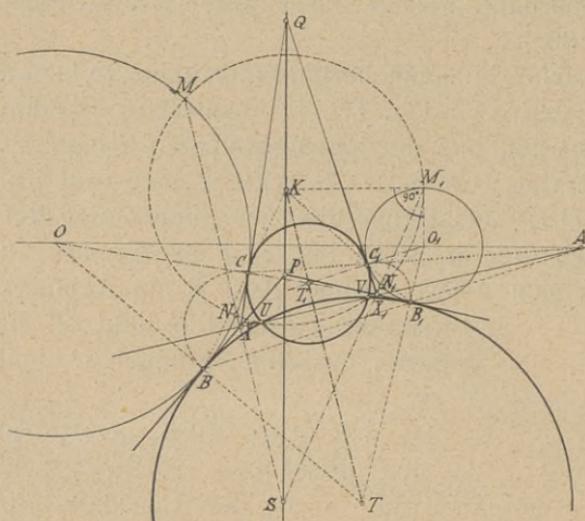


Fig. 79.

liefern in  $UV$  die Punkte  $X$  und  $X_1$  als Potenzcentren zwischen  $O, K, T$  und  $T_1$ , resp.  $O_1, K, T$  und  $T_1$ . Durch  $X$  und  $X_1$  gehen daher die gemeinsamen Tangenten  $XB, XC$ , ferner  $X_1B_1, X_1C_1$  der gegebenen Kreise und der Tangentialkreise. Fasst man die letzteren als gegeben auf, so folgt, dass die Chordale  $PQ$  der Kreise  $O$  und  $O_1$  durch das Ähnlichkeitscentrum der Kreise  $T$

und  $T_1$  gehen muss, welches demnach mit  $K$  identisch ist. Demgemäß gehen die Polaren  $BC$  und  $B_1C_1$  durch  $K$ .

Die entwickelten Beziehungen gelten selbstredend auch für den Fall, als die Tangentialkreise  $T$  und  $T_1$  imaginäre Schnittpunkte aufweisen, denn die Chordale zwischen  $T$  und  $T_1$  bleibt reell und lässt sich selbständig construieren.

### § 56. Das Apollonische Tactionsproblem.

Aus den vorstehenden Entwicklungen ergibt sich folgende allgemeine Lösung der Apollonischen Berührungsaufgabe:

Sind drei Kreise  $O, O_1$  und  $O_2$  gegeben, und die tangierenden Kreise an sie zu bestimmen, so ermittelt man die sechs Ähnlichkeitscentren entweder mittels der gemeinsamen Tangenten oder der Verbindungslinien der Endpunkte paralleler Radien. Diese Punkte liegen zu je dreien in einer Geraden, so dass im Ganzen vier Ähnlichkeitsachsen bestehen. Denn aus der Construction der Ähnlichkeitspunkte mittels paralleler Radien  $r, r_1$  und  $r_2$  gehen die Proportionen hervor:

$$\frac{OJ}{O_1J} = \frac{OA}{O_1A} = \frac{r}{r_1}$$

$$\frac{O_1J_1}{O_2J_1} = \frac{O_1A_1}{O_2A_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\frac{O_2 J_2}{O J_2} = \frac{O_2 A_2}{O A_2} = \frac{r_2}{r}.$$

Daraus folgt z. B.

$$\frac{OA}{O_1 A} \cdot \frac{O_1 A_1}{O_2 A_1} \cdot \frac{O_2 A_2}{O A_2} = 1.$$

Mithin liegen  $A$ ,  $A_1$  und  $A_2$  nach dem Satz von Menelaos in gerader Linie.

Analog beweist man, dass  $J J_1 A_2$ ,  $J_1 J_2 A$  und  $J_2 J A_1$  gerade Linien sind. Dieser Beweis kann auch auf den Umstand gegründet werden, dass die harmonischen Punktreihen paarweise perspectivisch liegen, weil sie je einen homologen Punkt gemein haben. Deshalb schneiden sich die Strahlen durch die drei übrigen Punktepaare in dem Scheitel des zugehörigen harmonischen Büschels.

Ist  $AA_1 A_2$  (Fig. 80) z. B. die äußere Ähnlichkeitsachse, so enthält diese zugleich die reellen oder imaginären Punkte  $U$  und  $V$  der gesuchten Kreise  $T$  und  $T_1$ , denn sie ist die Chordale der letzteren. Die Chordalen  $PQ$ ,  $P_1 Q_1$  und  $P_2 Q_2$  treffen sich im Potenzcentrum  $K$  der gegebenen Kreise. Dieses ist der Mittelpunkt des gemeinsamen Orthogonalkreises an die gegebenen Kreise und zugleich das Ähnlichkeitscentrum der gesuchten Tangentialkreise. Deshalb liegen die Centren  $T$  und  $T_1$  in der Normalen  $KW$  zur Ähnlichkeitsachse  $AA_1 A_2$ . Der Orthogonalkreis liefert in der letzteren die vorgenannten Punkte  $U$  und  $V$ , welche in Fig. 80 imaginär sind.

Ferner gibt der Orthogonalkreis mit den gegebenen Kreisen Punkte, nämlich  $MN$ ,  $M_1 N_1$  und  $M_2 N_2$ , welche in der Ähnlichkeitsachse die Potenzcentren  $X$ ,  $X_1$  und  $X_2$  bestimmen. Durch  $X$  gehen die Tangenten an  $O$ , durch  $X_1$  jene an  $O_1$  und durch  $X_2$  jene an  $O_2$ . Die entstandenen Tangendendreiecke  $PP_1 P_2$  und  $QQ_1 Q_2$  haben ihre Eckpunkte in den Chordalen der gegebenen Kreise. Die Normalen  $OT$ ,  $O_1 T$  und  $O_2 T$ , ferner  $OT_1$ ,  $O_1 T_1$  und  $O_2 T_2$  zu den Tangenten liefern in  $KW$  die gesuchten Centren  $T$  und  $T_1$  und zugleich die Berührungspunkte  $B$ ,  $B_1$  und  $B_2$  ferner  $C$ ,  $C_1$  und  $C_2$ . Die Berührungssehnen  $BC$ ,  $B_1 C_1$  und  $B_2 C_2$  gehen durch  $K$ .  $BB_1$  und  $CC_1$  treffen sich in  $A$ ,  $B_1 B_2$  und  $C_1 C_2$  in  $A_1$ , schließlich  $B_2 B$  und  $C_2 C$  in  $A_2$ . Durch diese Wechselseitigkeit ist die constructive Ausführung der Lösung auch dann gesichert, wenn von den Punkten  $X$ ,  $X_1$  und  $X_2$  einer oder zwei außerhalb der Zeichenfläche fallen.

Die Chordalen  $MN$ ,  $M_1 N_1$  und  $M_2 N_2$  sind die Polaren des Potenzcentrums  $K$  bezüglich der gegebenen Kreise und daher auch dann bestimmbar, wenn der Orthogonalkreis imaginär wird. In

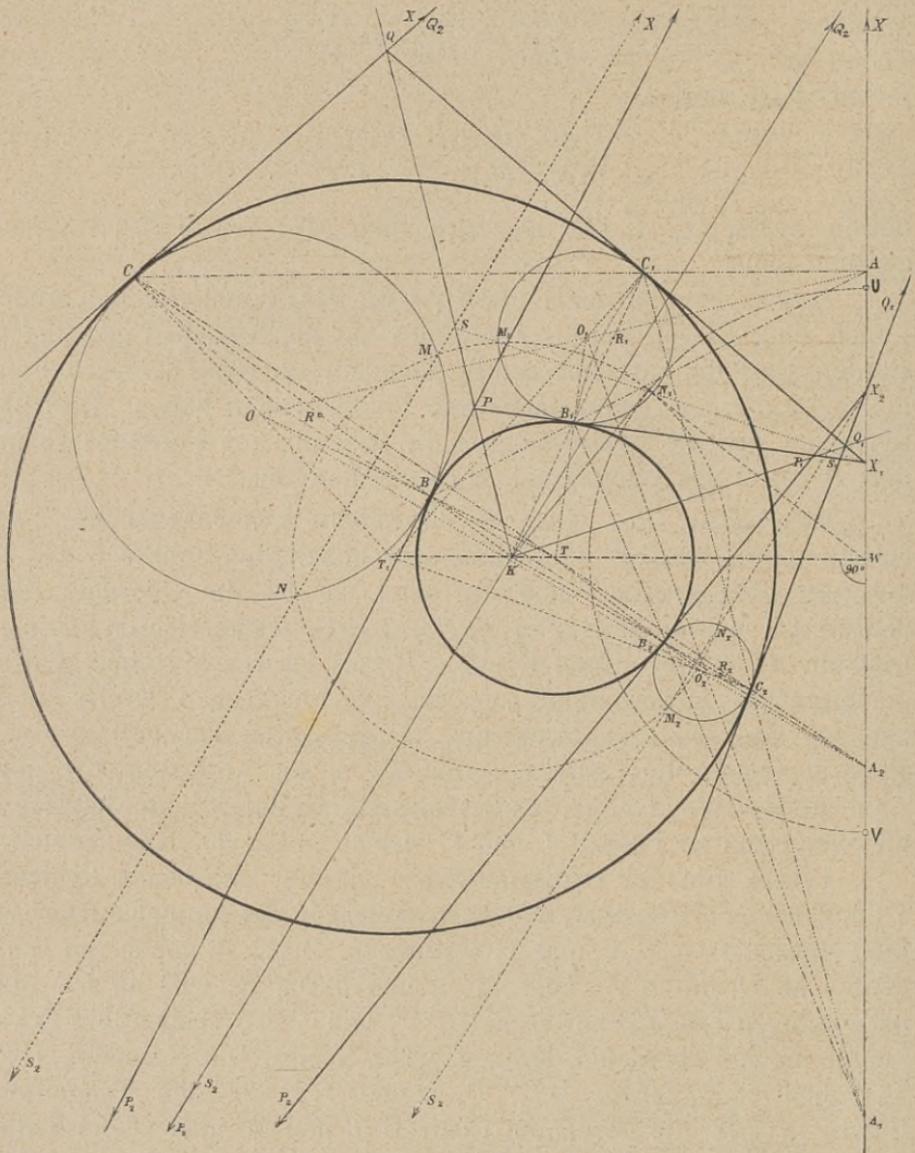


Fig. 80.

diesem Falle arbeitet man mit dem Diametalkreis und findet die Vertreter der Punkte  $U_i$  und  $V_i$  nach Fig. 20 in § 21.

Da jeder Ähnlichkeitsachse zwei Lösungen entsprechen, gibt es im ganzen acht Tangentialkreise, von denen jedoch nach Umständen einzelne Paare imaginär oder zusammenfallend auftreten können.

Die obige Methode unterscheidet sich von der Gergonne'schen dadurch, dass sie die Berührungstangenten liefert, während die

letztere die Berührungspunkte ergibt. Die Gergonne'sche Lösung geht aus der vorstehenden durch folgende Betrachtung hervor:

Da die Pole  $X$ ,  $X_1$  und  $X_2$  von  $BC$ ,  $B_1C_1$  und  $B_2C_2$  auf der Ähnlichkeitsachse  $AA_1A_2$  liegen, so gehen diese Geraden auch durch die Pole  $R$ ,  $R_1$  und  $R_2$  von  $A$ ,  $A_1$  und  $A_2$  in Bezug auf die gegebenen Kreise.

Umgekehrt lässt sich aus der Gergonne'schen Lösung leicht die meine ableiten; denn da z. B. die Punkte  $B$ ,  $C$ ,  $K$  und  $R$  in einer Geraden liegen, so schneiden sich die Polaren  $BP$ ,  $CQ$ ,  $MN$  und  $AA_1$  derselben in Bezug auf den Kreis  $O$  in einem Punkte, nämlich in  $X$ .

Jeder Kreis besitzt unzählig viele imaginäre Zweige, welche durch ihn berührende gleichseitige Hyperbeln veranschaulicht werden können.

Fasst man zwei Kreise ins Auge, so kommen jene Hyperbeln in Betracht, welche ihre Berührungspunkte in der Centralen haben. Die Asymptoten laufen paarweise parallel und haben also die unendlich fernen Punkte gemein. Durch diese Vorstellung versinnlicht man leicht den Satz:

Jeder Kreis geht durch dieselben zwei unendlich fernen, aber imaginären Punkte der Ebene, welche die Kreispunkte der letzteren genannt werden.

Mithin liefert die Apollonische Aufgabe eigentlich zehn Lösungen.

Sind die drei gegebenen Kreise concentrisch, dann degenerieren alle Berührungskreise in die unendlich fernen imaginären Kreispunkte.

### § 57. Der kritische Fall der Apollonischen Aufgabe.

Liegen die drei Centren in einer Geraden, dann ist die Centrale die einzige Ähnlichkeitsachse, und man erhält in dieser nur zwei Punkte, mithin nur zwei Tangentialkreise im Endlichen; da sich der Orthogonalkreis diesfalls mit der Ähnlichkeitsachse deckt, so ist zur Aufsuchung der Punkte  $U$  und  $V$  eine besondere Untersuchung nöthig.

Die Orthogonalkreise an  $O$  und  $O_1$  liefern einen Büschel, welcher in der Ähnlichkeitsachse eine Punktinvolution vom Centrum  $A$  gibt, denn die Centrale  $OO_1$  ist der unendlich große Orthogonalkreis und schneidet die Achse außer in  $A$  noch in dem unendlich fernen Punkte  $A'$ . Mithin braucht man von einem Punkt der Chor-

dalen  $PQ$  aus nur einen Orthogonalkreis zu legen, um ein anderes Paar  $LL'$  zu erhalten. Am besten eignet sich derjenige Orthogonalkreis, dessen Centrum in der Normalen liegt, die man in  $A$  zur Ähnlichkeitsachse errichtet. Er gibt die symmetrischen Punkte der Involution. Sind diese imaginär, dann sind ihre Vertreter die Doppelpunkte der Involution. In gleicher Weise ergeben die Kreise  $O_1O_2$  eine Involution in der Achse, welche die Paare  $A_1A_1'\infty$  und  $L_1L_1'\infty$  besitzt. Schließlich liefern  $O_2O$  noch die Involution  $A_2A_2'\infty$  und  $L_2L_2'$ .

Der Orthogonalkreis  $K$  gehört allen drei Büscheln an, und das Paar  $UV$  ist allein der conlocalen Involutionen gemeinsam.

Um das gemeinsame Paar zweier conlocaler Punktinvolutionen zu erhalten, bezieht man beide auf einen Tangentialkreis an die Ähnlichkeitsachse und bestimmt die Vervollständigungsachsen der beiden peripherischen Tangenteninvolutionen. Der Schnittpunkt  $S$  dieser Polaren liefert mittels der von ihm aus gezogenen Tangenten das gemeinsame Punktepaar, welches reell, zusammenfallend oder imaginär ist, je nachdem der Punkt  $S$  außerhalb, in oder innerhalb der Kreislinie liegt. Wenn das letztere der Fall ist, dann muss man die Involution conjugierter Polaren in  $S$  mit der Ähnlichkeitsachse zum Schnitte bringen und die symmetrischen Punkte  $UV$  der Involution suchen, welche die imaginären Punkte  $U_i$  und  $V_i$  repräsentieren.

Man kann aber auch beide Punktinvolutionen in der Ähnlichkeitsachse aus einem Punkte in der Peripherie eines Hilfskreises projicieren und die Vervollständigungscentren der beiden entstandenen peripherischen Punktinvolutionen bestimmen. Ihre Verbindungslinie  $s$  schneidet den Kreis in den gemeinsamen Paaren bei der peripherischen Involution, welche reell, zusammenfallend oder imaginär ist, je nachdem die Gerade  $s$  den Kreis schneidet, ihn berührt, oder an ihm vorbeigeht. Im letzteren Falle muss man die Involution conjugierter Pole in  $s$  von dem Scheitel der beiden conlocalen Involutionen aus projicieren, die entstandene Strahleninvolution mit der Ähnlichkeitsachse zum Schnitte bringen und die symmetrischen Punkte  $U$  und  $V$  der entstandenen Punktinvolution ermitteln.

Wenn die drei Kreise  $O$ ,  $O_1$  und  $O_2$  eine gemeinsame Centrale haben, so sind die drei Punkte  $A$ ,  $A_1$  und  $A_2$ , entsprechend den Punkten  $A'$ ,  $A_1'$  und  $A_2'$ , im allgemeinen nicht unendlich fern und daher die ersteren nicht die Centren der Involution. Dann arbeitet man mit irgend einem anderen Paar  $TT'$  (resp.  $T_1T_1'$ ,  $T_2T_2'$ ), welches

den Orthogonalkreis an  $O$  und  $O_1$  (resp.  $O_1$  und  $O_2$  oder  $O_2$  und  $O$ ) liefert.

Die Aufgabe zu zwei conlocalen Punktinvolutionen das gemeinsame Paar zu bestimmen, lässt sich auch mittels Kreisbüscheln lösen. Sind  $A$  und  $A_1$  die Centren und  $p^2$  und  $p_1^2$  die positiven oder negativen Potenzen, so verfährt man folgendermaßen:

Sind beide Involutionen elliptisch, so entspricht jeder davon ein Kreisbüschel mit reellen Trägern. Der Kreis durch alle vier Träger  $MN$  und  $M_1N_1$  liefert das gemeinsame Paar.  $AM = AN = p$ .  $A_1M_1 = A_1N_1 = p_1$ .  $AM \perp AA_1$ .  $A_1M_1 \perp AA_1$ .

Wenn beide Involutionen hyperbolisch sind, dann sind die Kreise des Büschels orthogonal zu den von  $A$  und  $A_1$  mit  $p$  und  $p_1$  beschriebenen Kreisen und das Centrum des gesuchten gemeinsamen Kreises liegt in der Chordale dieser Kreise. Schneiden sie sich reell, dann ist der fragliche Kreis imaginär.

Ist schließlich die Involution vom Centrum  $A$  elliptisch, jene vom Centrum  $A_1$  dagegen hyperbolisch, dann geht der gesuchte Kreis durch  $M$  und  $N$  und muss den von  $A_1$  aus mit  $p_1$  beschriebenen Kreis orthogonal schneiden. Deshalb liegt sein Centrum in der Chordalen zwischen diesem Kreise und je einem der Punkte  $M$  oder  $N$ . Die Chordale von  $M$  halbiert den Abstand des Punktes  $M$  von der zugehörigen Polaren bezüglich des Kreises  $A_1$  und steht normal zu  $MA_1$ .

### § 58. Specielle Fälle der Apollonischen Aufgabe.

Das Apollonische Problem spaltet sich in zehn Specialaufgaben, je nachdem einzelne der drei gegebenen Kreise in Gerade oder Punkte degenerieren. Die Euklidische Geometrie muss jeden dieser Fälle gesondert behandeln, während die Geometrie der Lage auch mit unendlich großen und unendlich kleinen Kreisen operiert.

Geht ein Kreis in eine Gerade über, so hat man sein Centrum  $O^\infty$  in der zur Geraden normalen Richtung zu suchen. Doch bleibt einem hierbei die Wahl zwischen den beiden Seiten der Geraden, da diese bezüglich jeder Seite als unendlich wenig convex oder concav angesehen werden kann.

Schrumpft ein Kreis in einen Punkt zusammen, so wird er durch sein Centrum  $O^0$  repräsentiert.

Die Specialfälle des Problems lauten:

1. Gegeben sind drei Kreise  $O$ ,  $O_1$  und  $O_2$ .

Obiger Fall wurde bereits allgemein erledigt. Es erübrigt

daher bloß noch eine kurz gefasste Discussion. Die verschiedenen Lagen, welche drei Kreise gegeneinander einnehmen können, sind so mannigfach, dass ihre Aufzählung und Besprechung sehr weitläufig würde. Für die Lage in Fig. 80 sei bemerkt, dass die äußere Ähnlichkeitsachse gleichstimmige Berührungskreise liefert. Jede innere Ähnlichkeitsachse ergibt dagegen ungleichstimmige Tangierungen.

Von besonderer Wichtigkeit sind folgende Fälle: Gehen die drei Kreise durch denselben Punkt, so stellt dieser den Orthogonalkreis und zugleich vier der Tangentialkreise vor. Außerdem gibt es noch vier Tangentialkreise.

Haben die drei Kreise eine gemeinsame Tangente, so repräsentiert diese zugleich einen, u. z. unendlich großen Tangentialkreis. Neben diesem existieren noch sieben andere Tactionskreise.

Trennt ein Kreis die beiden anderen, so sind alle acht Tangentialkreise imaginär. Die Construction zeigt dies dadurch an, dass die Strahlen  $KR$ ,  $KR_1$  und  $KR_2$  an den betreffenden Kreisen vorbeigehen, während die Pole  $X$ ,  $X_1$  und  $X_2$  derselben innerhalb der Kreise liegen.

Berühren sich zwei von den Kreisen, und liegt der dritte in einem der beiden ersten, so sind zwei reelle Tangentialkreise möglich. Sind dagegen die Kreise nicht von einander getrennt, so gibt es sechs reelle Lösungen. Berührt ein Kreis die beiden anderen, so verbleiben bloß vier Lösungen, denn der erstere Kreis vertritt zwei. Tangieren sich die drei Kreise gegenseitig, so gibt es nur zwei Berührungskreise. Geschieht die Berührung der drei Kreise in demselben Punkte, so existiert nur ein unendlich kleiner Tangentialkreis, nämlich jener Punkt.

Schneiden sich zwei der gegebenen Kreise, so erhält man vier reelle Kreise. Wenn sich jedoch die Kreise in sechs Punkten durchschneiden, so ergeben sich wieder acht reelle Lösungen.

Bilden die drei Kreise einen Büschel, so degenerieren die Tangentialkreise in die beiden Träger des letzteren. Gehören die Kreise aber zu derselben Schar, so sind die beiden gemeinsamen Tangenten zwei von den acht Berührungskreisen.

2. Gegeben sind zwei Kreise  $O$ ,  $O_1$  und eine Gerade  $O_2^\infty$ .

Die Gerade  $O_2^\infty$  ist ebensowohl die Chordale zwischen  $O$  und  $O_2^\infty$ , als auch zwischen  $O_1$  und  $O_2^\infty$ . Die Ähnlichkeitscentren zwischen  $O$  und  $O_2^\infty$ , ferner zwischen  $O_1$  und  $O_2^\infty$  sind die Endpunkte der durch  $O$  und  $O_1$  normal zu  $O_2^\infty$  gezogenen Diameter. Doch ist es hiebei nach Früherem unentschieden, welcher der End-

punkte eines Durchmessers den äußeren und welcher den inneren Ähnlichkeitspunkt vorstellt. Welche Wahl man auch treffen mag, es ergeben sich immer vier Ähnlichkeitsachsen. Der Pol einer jeden in Bezug auf die Gerade  $O_2^\infty$  liegt im unendlich fernen Punkte der letzteren selbst, denn die Gerade  $O_2^\infty$  stellt zugleich eine Kreistangente vor, und der Pol ist der Schnittpunkt jener Kreistangenten, die durch die gemeinsamen Punkte zwischen Kreis und Polare gehen. Die Aufgabe gibt also acht Lösungen, wovon die Lehrbücher der Planimetrie vier unbewusst verschweigen.

3. Gegeben sind zwei Kreise  $O$ ,  $O_1$  und ein Punkt  $O_2^0$ .

Der Punkt ist zugleich das innere und äußere Ähnlichkeitszentrum zwischen  $O$  und  $O_2^0$ , ferner zwischen  $O_1$  und  $O_2^0$ . Demnach gibt es hier bloß zwei Ähnlichkeitsachsen und daher bloß vier Lösungen. Das sieht man schon daraus leicht ein, dass die Berührung des Nullkreises durch einen anderen ebensowohl als äußere als auch als innere aufgefasst werden kann. Die Chordale zwischen  $O$  und  $O_2^0$  ist diejenige Parallele zur Polare von  $O_2^0$  in Bezug auf den Kreis  $O$ , welche den Abstand vom Pole  $O_2^0$  halbiert. Analoges gilt von der Chordale zwischen  $O_1$  und  $O_2^0$ .

4. Gegeben sind ein Kreis  $O$  und zwei Gerade  $O_1^\infty$  und  $O_2^\infty$ .

Wie man aus der Betrachtung zweier gleich großer Kreise leicht schließt, halbiert die Chordale jenen biconcav oder biconvex begrenzten Winkel, unter welchem sich die Kreise schneiden. In der Chordale liegt auch der innere Ähnlichkeitspunkt, während der äußere in der Halbierenden des concav-convex begrenzten Winkels und in der Centrale, d. h. im Unendlichen liegt. Wendet man diese Resultate auf den obigen Fall an, so erkennt man die eine Winkelhalbierende zwischen  $O_1^\infty$  und  $O_2^\infty$  als Chordale und die andere als Richtung des unendlich fernen, äußeren Ähnlichkeitspunktes. Da die Geraden  $O_1^\infty$  und  $O_2^\infty$  zugleich die Chordalen zwischen  $O$  und  $O_1^\infty$ , ferner zwischen  $O$  und  $O_2^\infty$  sind, so ist ihr Schnittpunkt zugleich das Potenzzentrum  $K$ .

Die Ähnlichkeitsachsen bilden ein Rechteck, dessen Seiten zu den Winkelhalbierenden normal sind. Die Pole der Ähnlichkeitsachsen geben deshalb einen Tangentialrhombus an den Kreis  $O$ . Von den Strahlen durch  $K$  und die Ecken des Rhombus gehen im allgemeinen zwei an dem Kreise vorbei, und die entsprechenden Berührungspunkte sowie die vier Tangentialkreise sind imaginär. Berührt der Kreis  $O$  eine der beiden Geraden  $O_1^\infty$  und  $O_2^\infty$ , so decken sich zwei Eckstrahlen, und einer geht an  $O$  vorbei. Von den vier reellen Kreisen liegen drei in einem der von  $O_1^\infty$  und  $O_2^\infty$

gebildeten Winkel, der vierte aber im Nebenwinkel. Der letztere stellt die zwei imaginären, in einen reellen zusammenfallenden Kreise vor. Der ihn berührende mit  $O$  in demselben Winkel liegende Tangentialkreis repräsentiert zwei zusammenfallende reelle Kreise.

Sind die Geraden  $O_1^\infty$  und  $O_2^\infty$  parallel, so liegt das Potenzcentrum  $K$  im Unendlichen.

5. Gegeben sind ein Kreis  $O$ , eine Gerade  $O_1^\infty$  und ein Punkt  $O_2^0$ .

Da hier nur zwei Ähnlichkeitsachsen vorkommen, so existieren bloß vier Lösungen. Die Chordale zwischen  $O_1^\infty$  und  $O_2^0$  ist die Gerade  $O_1^\infty$  selbst, denn die Polare von  $O_2^0$  liegt symmetrisch zu  $O_1^\infty$  in Bezug auf die Gerade  $O_1^\infty$  als Achse und läuft zu dieser parallel. Sollen die Lösungen reell sein, so müssen Punkt und Kreis auf derselben Seite der Geraden liegen.

6. Gegeben sind ein Kreis  $O$  und zwei Punkte  $O_1^0$  und  $O_2^0$ .

Wie man aus gleich großen Kreisen leicht schließt, liegt von den beiden Ähnlichkeitspunkten zwischen  $O_1^0$  und  $O_2^0$  einer in der Mitte und der andere im Unendlichen.  $O_1^0$  und  $O_2^0$  vereinigen je zwei Ähnlichkeitspunkte in Bezug auf  $O$  und  $O_1^0$ , respective  $O$  und  $O_2^0$ .  $O_1^0 O_2^0$  ist demnach die einzige Ähnlichkeitsachse und es gibt also bloß zwei Lösungen. Die Chordale zwischen  $O_1^0$  und  $O_2^0$  ist das Mittelloth der Centrale  $O_1^0 O_2^0$ . Die Punkte  $O_1^0$  und  $O_2^0$  müssen beide innerhalb oder beide außerhalb des Kreises  $O$  liegen, wenn die Tangentialkreise reell ausfallen sollen.

Bekanntlich lassen sich von jedem Punkte eines Kegelschnittes aus Kreise durch einen Brennpunkt legen, welche den aus dem anderen Brennpunkte mit der Hauptachse beschriebenen Directions-kreis berühren. Sollen die Schnittpunkte des Kegelschnittes mit einer Geraden gefunden werden, so braucht man bloß jene Tangentialkreise zu suchen, die durch einen Brennpunkt und dessen Gegenpunkte bezüglich der Secante gehen.

7. Gegeben sind drei Gerade  $O^\infty$ ,  $O_1^\infty$  und  $O_2^\infty$ .

Die Chordalen sind die sechs Winkelhalbierenden, welche zu je dreien durch denselben Punkt gehen, so dass man vier Potenzcentren erhält. Die Ähnlichkeitspunkte liegen immer in jenen Winkelhalbierenden, welche nicht durch das jeweilig in Betracht gezogene Potenzcentrum gehen und außerdem im Unendlichen. Die Ähnlichkeitsachse ist also unendlich fern. Da der Pol einer unendlich fernen Geraden in das Centrum des bezüglichen Kreises fällt, so liegen die Pole  $R$ ,  $R_1$  und  $R_2$  in den unendlich fernen Centren  $O^\infty$ ,  $O_1^\infty$  und  $O_2^\infty$ . Diese Centren liegen in den zu den

zugehörigen Kreisgeraden normalen Richtungen. Man hat also bloß von jedem Potenzcentrum die Senkrechten zu den Geraden  $O^\infty$ ,  $O_1^\infty$  und  $O_2^\infty$  zu fällen, um die Berührungspunkte zu erhalten. Jedes Potenzcentrum ist zugleich der Mittelpunkt eines Tangentialkreises, so dass deren im ganzen vier bestehen, wenn man von den vier unendlich fernen absieht.

8. Gegeben sind drei Punkte  $O^0$ ,  $O_1^0$  und  $O_2^0$ .

Die Mittellothe der Strecken  $O^0O_1^0$ ,  $O_1^0O_2^0$  und  $O_2^0O^0$  sind die Chordalen, welche sich im Centrum des Orthogonalkreises schneiden, der zugleich den einzig möglichen Tangentialkreis vorstellt. Die äußere Ähnlichkeitsachse liegt im Unendlichen und jede innere geht durch die Halbierungspunkte je zweier Seiten des Dreieckes  $O^0O_1^0O_2^0$ .

9. Gegeben sind zwei Gerade  $O^\infty$ ,  $O_1^\infty$  und ein Punkt  $O_2^0$ .

Jede der beiden Geraden ist eine Chordale in Bezug auf sich selbst und den Punkt  $O_2^0$ . Die dritte Chordale ist eine der beiden Winkelhalbierenden zwischen den Geraden  $O^\infty$  und  $O_1^\infty$ . Der Schnittpunkt von  $O^\infty$  und  $O_1^\infty$  ist also das Potenzcentrum. Die andere Winkelhalbierende führt zum unendlich fernen Ähnlichkeitscentrum.

Die Ähnlichkeitsachse geht demnach durch  $O_2^0$  parallel zur letztgenannten Halbierungslinie. Mithin erhält man zwei Ähnlichkeitsachsen und daher vier Lösungen, von denen jedoch zwei imaginär sind und nur dann in einen reellen Kreis zusammenfallen, wenn  $O_2^0$  in einer der Kreisgeraden liegt. Dann decken sich aber auch die beiden sonst reellen Kreise, und beide Doppelkreise berühren sich gegenseitig in  $O_2^0$ .

Wegen der Symmetrie der Figur in Bezug auf jede der Winkelhalbierenden erhält man zu  $O_2^0$  die symmetrischen Punkte  $'O_2^0$  und  $''O_2^0$ , und zwei Kreise gehen durch  $O_2^0$  und  $'O_2^0$ , während die beiden übrigen durch  $O_2^0$  und  $''O_2^0$  bestimmt sind. Daraus erkennt man das Imaginärsein eines der Kreispaare auch planimetrisch.

Hiemit sind die Tangentialkreise aber noch immer nicht gefunden, denn die Gergonne'sche Lösung versagt diesmal, da die Pole  $R$  und  $R_1$  zugleich die unendlich fernen Punkte der Kreisgeraden  $O^\infty$  und  $O_1^\infty$  sind, während  $R_2$  in  $O_2^0$  fällt. Doch ist die obige Aufgabe mit Hilfe eines beliebigen Tangentialkreises vom Centrum  $\mathfrak{T}$  an  $O^\infty$  und  $O_1^\infty$  lösbar, welcher mit den gesuchten Kreisen das Potenzcentrum  $K$  als Ähnlichkeitspunkt besitzt und mit  $O_2^0$  in demselben Winkel oder in dessen Nebenwinkel liegt.

Durch Zuordnung des Punktes  $O_2^0$  zu den beiden Punkten  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{D}'$  des Hilfskreises, die in dem Strahle  $KO_2^0$  liegen, sind die beiden Ähnlichkeiten bestimmt. Sind  $T$  und  $T_1$  die gesuchten Centren, so hat man nach der Ähnlichkeitslehre  $\mathfrak{D}\mathfrak{T} \parallel O_2^0 T$  und  $\mathfrak{D}'\mathfrak{T} \parallel O_2^0 T_1$ .  $T$  und  $T_1$  befinden sich in einer der Winkelhalbierenden.

10. Gegeben sind eine Gerade  $O^\infty$  und zwei Punkte  $O_1^0$  und  $O_2^0$ .

Das Mittelloth von  $O_1^0 O_2^0$  ist die eine Chordale, und die Kreisgerade  $O^\infty$  enthält die beiden anderen Chordalen. Der Schnittpunkt  $K$  von  $O^\infty$  und dem Mittellothe ist das Potenzcentrum.  $O_1^0 O_2^0$  ist zugleich die einzige Ähnlichkeitsachse und es existieren also nur zwei Lösungen. Doch liefert auch hier Gergonne's Methode kein Resultat, weil der Pol  $R$  der unendlich ferne Punkt der Geraden  $O^\infty$  ist.

Man führt jedoch diese Aufgabe leicht auf die vorige zurück, denn es gibt außer  $O^\infty$  noch eine zweite Tangente, welche zur ersteren in Bezug auf das Mittelloth von  $O_1^0 O_2^0$  symmetrisch ist.

Selbständig löst man die obige Aufgabe in folgender Weise: Man legt durch  $O_1^0$  und  $O_2^0$  einen beliebigen Hilfskreis, zieht vom Schnittpunkte  $X$  der Sehne  $O_1^0 O_2^0$  mit  $O^\infty$  die Tangente  $XY$  an den Hilfskreis und beschreibt mit  $XY$  den Orthogonalkreis an den letzteren. Dieser liefert in  $O^\infty$  die Berührungspunkte  $B$  und  $C$  der Tangentialkreise, deren Centren  $T$  und  $T_1$  in dem Mittellothe vom  $O_1^0 O_2^0$  sich befinden. Denn der Kreis  $X$  schneidet alle Kreise des Büschels mit den Trägern  $O_1^0$  und  $O_2^0$  rechtwinklig, also auch die gesuchten Tangentialkreise, die durch  $B$ , resp.  $C$  gehen.

Dass man diese Methode auch zur Lösung der Aufgabe 9 benützen kann, ist wohl einleuchtend.

Ein Rückblick auf die vorstehenden Entwicklungen lehrt, dass Gergonne's Lösung die Berührungspunkte der gesuchten Kreise nicht unmittelbar ergibt, wenn ein oder zwei Kreise in gerade Linien degenerieren, und dass sie in den Aufgaben 9 und 10 geradezu versagt. Dieser Umstand bewog mich, eine allgemeinere Lösung aufzusuchen. Diese ist durch eine Vervollständigung der Fig. 80 leicht gefunden. Da  $XB$  und  $XC$ , ferner  $X_1 B_1$  und  $X_1 C_1$  Tangenten derselben Kreise  $O$  und  $O_1$  sind, so lassen sich aus  $X$  und  $X_1$  Orthogonalkreise an  $O$  und  $O_1$  beschreiben, welche durch die Berührungspunkte gehen. Verfolgt man diese Kreise, welche in der Folge passend Polarkreise genannt werden sollen, in Fig. 80, so hat man einen neuen Gesichtspunkt für die Lösung

des Problems gewonnen. Auf Grund dessen mögen die 10 Specialfälle nochmals kurz betrachtet werden.

Aufgabe 1. Bedenkt man, dass die Chordalen  $MN$ ,  $M_1N_1$  und  $M_2N_2$  der gegebenen Kreise  $O$ ,  $O_1$  und  $O_2$  mit dem gemeinsamen Orthogonalkreis  $K$  durch die Centren  $X$ ,  $X_1$  und  $X_2$  der Polarkreise gehen, so erkennt man sofort, dass die letzteren auch den Orthogonalkreis rechtwinklig schneiden.

Aufgabe 2. Geht der Kreis  $O_2$  in eine Gerade über, so deckt er sich mit der Chordale  $M_2N_2$ ; diese liefert in der Ähnlichkeitsachse den Punkt  $X_2$ , von welchem aus man den Polarkreis senkrecht an den Orthogonalkreis  $K$  zu legen hat, um die Berührungspunkte  $B_2$  und  $C_2$  in der Kreisgeraden zu erhalten.

Aufgabe 3. Das Centrum  $X_2$  des Polarkreises an  $O_2^0$  deckt sich mit diesem Punkte.

Aufgabe 4. Hier kommen die beiden Polarkreise  $X_1$  und  $X_2$  zur Anwendung. Für zwei der Ähnlichkeitsachsen liegen diese Punkte außerhalb des Orthogonalkreises, für die beiden anderen innerhalb. Im letzteren Falle sind die Polarkreise imaginär.

Aufgabe 5. Diese erfordert den Polarkreis  $X_1$ .

Aufgabe 6. Hier kann man sich die etwas mühsame Aufsuchung des Orthogonalkreises  $K$  ersparen, wenn man überlegt, dass jeder Hilfskreis durch  $O_1^0$  und  $O_2^0$  mit dem Kreise  $O$  eine Chordale liefert, welche durch den Punkt  $X$  geht; denn  $X$  ist das Potenzcentrum des ganzen Büschels mit  $O$ , in welchem auch der Kreis  $K$  vorkommen muss.

Aufgabe 7. Da die Ähnlichkeitsachsen im Unendlichen liegen und der Orthogonalkreis unendlich gross ist, so befinden sich  $X$ ,  $X_1$  und  $X_2$  in den unendlich fernen Punkten von  $O^\infty$ ,  $O_1^\infty$  und  $O_2^\infty$ . Die Polarkreise decken sich mit den Polen  $BC$ ,  $B_1C_1$  und  $B_2C_2$ , und diese gehen durch das Centrum  $K$  und zwar normal zu den Kreisgeraden.

Aufgabe 8 liefert keine neuen Gesichtspunkte.

Aufgabe 9. Der Orthogonalkreis  $K$  geht durch  $O_2^0$  und liefert die symmetrischen Punkte  $'O_2^0$  und  $''O_2^0$  in den Ähnlichkeitsachsen. Jeder Hilfskreis durch  $O_2^0$  und  $'O_2^0$  oder  $O_2^0$  und  $''O_2^0$  versieht denselben Dienst.  $X$  und  $X_1$  liegen das einmal außerhalb, das anderemal innerhalb des Orthogonalkreises. Deshalb sind im allgemeinen zwei Lösungen imaginär.

Aufgabe 10. Der Orthogonalkreis hat sein Centrum  $K$  im Mittellothe von  $O_1^0$  und  $O_2^0$  und außerdem in  $O^\infty$ . Jeder Kreis durch  $O_1^0$  und  $O_2^0$  leistet denselben Dienst.

Man vergleiche auch meine Abhandlung: „Die einfachste Lösung des Apollonischen Tactionsproblemcs“.

### § 59. Imaginäre Lösungen der Apollonischen Aufgabe.

Der reelle oder imaginäre Orthogonalkreis liefert in jeder der vier Ähnlichkeitsachsen zwei Punkte  $U$  und  $V$ , bez.  $U_i$  und  $V_i$ , durch welche die gesuchten Tangentialkreise gehen. Mithin ist das Problem auf die Aufgabe zurückgeführt, durch zwei Punkte einen Kreis zu legen, welcher einen der gegebenen Kreise, z. B. jenen vom Centrum  $O$ , berührt.

Diese Aufgabe lässt sich, außer auf die schon besprochene Art, noch in folgender Weise lösen.

Angenommen die Punkte in der Ähnlichkeitsachse seien imaginär und  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{V}$  seien ihre Vertreter. Man sucht zu diesen Punkten zwei andere  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$ , die mit den ersteren ein rechtwinkliges Kreuz bilden. Sucht man nun aus dem Kreisbüschel  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$  jenen Kreis  $P$  heraus, welcher den Kreis  $O$  rechtwinklig schneidet, so sind die Schnittpunkte  $B$  und  $B'$  zugleich die Berührungspunkte der gesuchten Tangentialkreise durch  $U_i$  und  $V_i$ . Die Centren liegen im Mittellothe von  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{V}$ . Das Centrum  $P$  ist das Potenzenzentrum der Punkte  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$  bezüglich des Kreises  $O$ . Die Chordale zwischen  $\mathfrak{M}$  und dem Kreise  $O$  halbiert bekanntlich den Abstand zwischen  $\mathfrak{M}$  und seiner Polaren und liegt immer außerhalb des Kreises. Mithin ist Kreis  $P$  immer reell.

Wenn die Punkte  $U$  und  $V$  reell sind, dann lässt sich obiger Vorgang nicht benützen, weil dann die zugeordneten Punkte  $\mathfrak{M}_i$  und  $\mathfrak{N}_i$  imaginär sind. Man legt hier durch  $U$  und  $V$  einen Hilfskreis, welcher mit dem Kreise  $O$  die Chordale  $HL$  liefert. Letztere schneidet  $UV$  im Potenzenzentrum  $P$  der gesuchten Tangentialkreise bezüglich der beiden vorigen Kreise. Die Tangenten von  $P$  an den Kreis  $O$  geben die Berührungspunkte  $B$  und  $B'$ .

Wenn von den Punkten  $U$  und  $V$  einer, z. B.  $U$  (Fig. 81) innerhalb des Kreises  $O$  liegt, so ist auch  $P$  innerhalb und die Tangenten sind imaginär. Die Berührungspunkte  $B_i$  und  $B'_i$  liegen in der Polare  $QQ'$  von  $P$  und werden durch  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{B}'$  vertreten, welche Punkte der gleichseitigen Hyperbel von der Hauptachse  $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'$  angehören.  $B_i$  und  $B'_i$  sind die imaginären Doppelpunkte der Involution mit den symmetrischen Punkten  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{B}'$ . Projiciert man diese Involution aus dem Peripheriepunkte  $\mathfrak{Q}'$ , so ergibt sich die peripherische Involution mit den symmetrischen Punkten  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$ ,

welche gewissermaßen die imaginären Punkte  $B_i$  und  $B'_i$  zum zweitenmale vertreten.

Projiziert man die Involution  $BB'QQ'$  aus dem Centrum  $O$  auf das in  $D$  errichtete Mittelloth von  $UV$ , so erhält man die Involution  $bb'qq'$ ,

deren imaginäre Deckpunkte  $M_iM'_i$  die Centren der gesuchten Tangentialkreise sind. Die Halbkreise über  $bb'$  und  $qq'$  liefern in ihrer Chordale  $RS$  das Centrum  $R$  der Involution. Macht man  $RM = RM' = RS$ , so sind  $M$  und  $M'$  die symmetrischen Punkte. Sucht man die Abstände  $OM_i$  und  $OM'_i$  entweder durch Rechnung oder durch Construction wie beim Secansproblem (§ 31), so hat man hievon bloß den Radius des Kreises  $O$  abzuziehen,

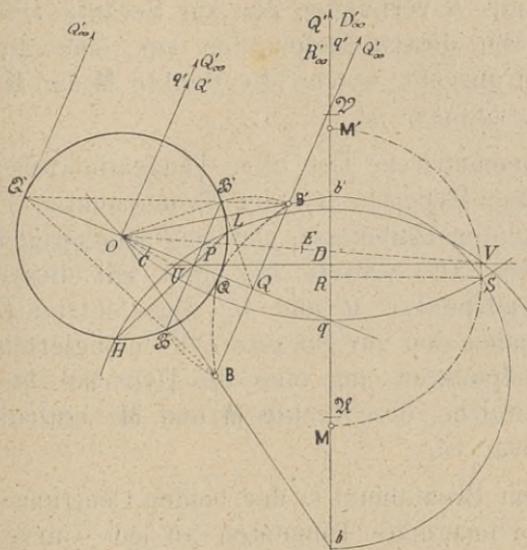


Fig. 81.

um die complexen Halbmesser der Tangentialkreise zu finden.

Der Orthogonalkreis vom Centrum  $P$  ist imaginär; sein Radius wird durch  $P\mathfrak{B}$  gemessen. Die gleichseitige Hyperbel von der Hauptachse  $\mathcal{Q}\mathcal{Q}'$  geht durch die Punkte  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$ . Dieser Kreis gehört gemäß  $P\mathfrak{B} \cdot P\mathfrak{B}' = PH \cdot PL = PU \cdot PV$  zu den Orthogonalkreisen des Büschels  $UV$ . Diese gehen durch die imaginären Punkte  $\mathcal{Q}_i$  und  $\mathcal{Q}'_i$  auf dem Mittellothe. Ihre Vertreter  $\mathcal{Q}$  und  $\mathcal{Q}'$  erfüllen die Beziehung  $D\mathcal{Q} = D\mathcal{Q}' = DU = DV$ .

$P$  ist das Potenzcentrum der imaginären Punkte  $\mathcal{Q}_i$  und  $\mathcal{Q}'_i$  bezüglich des Kreises  $O$ . Die Chordalen zwischen diesen Punkten und dem Kreise  $O$  sind senkrecht zu den Centralen  $O\mathcal{Q}_i$  und  $O\mathcal{Q}'_i$ . Letztere sind die Doppelstrahlen der Involution mit den Strahlenpaaren  $O\mathcal{Q}$  und  $O\mathcal{Q}'$ , ferner  $OD$ ,  $OD'$ . Construiert man von  $P$  aus ein Normalenbüschel zu dieser Strahleninvolution, so enthält die neue Involution die gesuchten Chordalen als imaginäre Deckstrahlen.

Von besonderem Interesse ist auch folgende Deutung der Lösung.

Der geometrische Ort der Centren aller Berührungskreise durch  $U$  an den Kreis  $O$  ist bekanntlich eine Ellipse von den Brennpunkten  $U$  und  $O$ , deren Hauptachse gleich dem Halbmesser  $Os'$  des zugehörigen Directionskreises  $O$  ist. Diese Ellipse schneidet das Mittelloth  $D\mathcal{M}$  in den imaginären Punkten  $M_i$  und  $M'_i$ . Das Centrum  $C$  von  $UO$  liefert mit  $R$  verbunden den zur Secante  $D\mathcal{M}$  conjugierten Durchmesser, von dessen Endpunkten aus eine die Ellipse berührende Hyperbel ausgeht, welche die Punkte  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{M}'$  enthält und mit der Ellipse collinear ist.

Desgleichen ist der geometrische Ort aller Tangentialkreise durch  $V$  an den Kreis  $O$  eine Hyperbel mit den Brennpunkten  $V$  und  $O$ , deren Hauptachse mit dem Halbmesser  $Os'$  des zugehörigen Directionskreises  $O$  gleich ist. Die Secante  $D\mathcal{M}$  gibt mit dieser Hyperbel die imaginären Schnittpunkte  $M_i$  und  $M'_i$ . Das Centrum  $E$  von  $VO$  liefert mit  $R$  verbunden den zur Secante  $D\mathcal{M}$  conjugierten Durchmesser, von dessen Endpunkten aus eine die Hyperbel berührende Ellipse ausgeht, welche die Punkte  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{M}'$  enthält und mit der Hyperbel collinear ist.

Durch den gemeinsamen Brennpunkt  $O$  der beiden Centrumsörter gehen bekanntlich zwei imaginäre Tangenten an jede Curve. Es sind dies die imaginären Doppelstrahlen der circularen Involution harmonischer Polaren durch  $O$ . Diese besitzt unzählig viele Achsen und daher auch unzählig viele Paare symmetrischer Strahlen. Die Ellipse von den Brennpunkten  $OU$  ist mit der Hyperbel von den Brennpunkten  $O$  und  $V$  collinear. Vom Collineationscentrum  $O$  aus gehen zwei gemeinsame imaginäre Tangenten der Curven.  $\mathbf{MM}'$  ist die eine der zugehörigen Collineationsachsen. An die schon beschriebenen Vertreter der imaginären Zweige beider Curven gehen durch  $O$  je zwei reelle Tangenten, die zu einander normal sind.

Wenn der Kreis  $O$  in eine Gerade entartet, so degenerieren die beiden Örter in Parabeln, deren imaginäre Zweige ebenfalls durch Parabeln vertreten werden.

Man ersieht, dass man mittels des Apollonischen Problemes von zwei einfach confocalen Kegelschnitten ein Paar von den Schnittpunkten aufsuchen kann, deren es im Ganzen vier gibt, worunter jedoch auch die imaginären Schnittpunkte mitgezählt sind.

### § 60. Der Kreis mit imaginärem Centrum und complexem Radius.

Bezüglich der im Nachstehenden zur Verwendung kommenden Schriftarten beachte man die Eingangszeilen zu § 23.

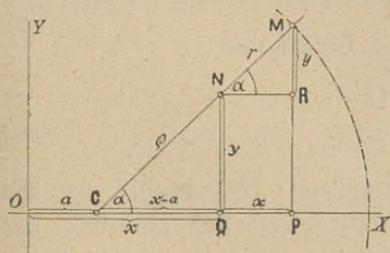


Fig. 82.

Bei der Lösung des Apollonischen Problems traten unter Umständen Kreise auf, welche dem obigen Titel entsprechen. Um über die figurale Bedeutung eines so räthselhaften Gebildes ins Klare zu kommen, denke man sich sein Centrum  $C_i$  in der Abscissenachse  $OX$  (Fig. 82) im Abstände  $OC_i = ia$  vom Ursprunge  $O$ . Besitzt nun der

Kreis den Halbmesser  $(r + i\rho)$  und hat ein Curvenpunkt  $M_i$  die Coordinaten  $(x + ix)$  und  $(y + iy)$ , so lautet die Kreisgleichung:

$$\begin{aligned} (x + ix - ia)^2 + (y + iy)^2 &= (r + i\rho)^2 \quad \text{oder} \\ (x + i\{x - a\})^2 + (y + iy)^2 &= (r + i\rho)^2. \end{aligned} \quad \text{I.}$$

Durch Ausführung der Quadrierungen ergibt sich nach Sonderung des Reellen vom Imaginären

$$x^2 + y^2 - [(x - a)^2 + y^2] = r^2 - \rho^2 \quad \text{II.}$$

$$x(x - a) + yy = r\rho, \quad \text{III.}$$

dabei wird der Winkel  $XC_iM_i = \alpha$  als reell vorausgesetzt, so dass folgende Beziehungen bestehen:

$$x + i(x - a) = (r + i\rho) \cos \alpha \quad \text{IV.}$$

$$y + iy = (r + i\rho) \sin \alpha. \quad \text{V.}$$

Diese spalten sich wieder in nachstehende:

$$x = r \cos \alpha \quad y = r \sin \alpha \quad \text{VI.}$$

$$x - a = \rho \cos \alpha \quad y = \rho \sin \alpha \quad \text{VII.}$$

oder

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{VIII.}$$

$$(x - a)^2 + y^2 = \rho^2. \quad \text{IX.}$$

Geht der Winkel  $XC_iM_i$  ins Imaginäre über, so verwandeln sich die Beziehungen VI. und VII. in:

$$x = \mathbf{x} = r \cos i \varphi \qquad y = i \mathbf{y} = r \sin i \varphi \qquad \text{X.}$$

$$x - a = \mathbf{x} - a = \varrho \cos i \varphi \qquad y = i \mathbf{y} = \varrho \sin i \varphi. \qquad \text{XI.}$$

Die Gleichungen I. bis III. gehen in folgende über:

$$\{\mathbf{x} + i(x - a)\}^2 + (i\mathbf{y} - y)^2 = (r + i\varrho)^2 \qquad \text{XII.}$$

$$\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2 - \{(x - a)^2 - y^2\} = r^2 - \varrho^2 \qquad \text{XIII.}$$

$$\mathbf{x}(x - a) - \mathbf{y}y = r\varrho. \qquad \text{XIV.}$$

Ferner ergeben VIII. und IX. die Relationen

$$\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2 = r^2 \qquad \text{XV.}$$

$$(x - a)^2 - y^2 = \varrho^2. \qquad \text{XVI.}$$

Die letzteren veranschaulichen gleichseitige Hyperbeln von den Hauptachsen  $r$  und  $\varrho$ . Da  $y$  in XII. das Vorzeichen „minus“ hat, so entspricht dem obigen Falle die Fig. 83.

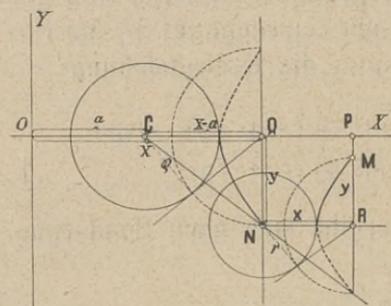


Fig. 83.

Nun bleibt noch der dritte und letzte Fall zu erledigen, bei welchem  $\angle XC_iM_i$  den complexen Wert  $(\alpha + i\varphi)$  annimmt. Ersetzt man  $\alpha$  in IV. bis VII. durch  $(\alpha + i\varphi)$ , so nehmen  $x, y, x'$  und  $y'$  complexe Werte an, die mit  $x', y', x'$  und  $y'$  bezeichnet werden mögen. Um aber den Zusammenhang der einzelnen Bestandtheile dieser Coordinaten besser übersehen zu können, führt man die

neuen Coordinaten  $x, y, \xi, \eta$  ein, die sich aus den Bestandtheilen von  $x', y', x'$  und  $y'$  zusammensetzen. Ihre Bedeutung geht sofort aus den umgestalteten Gleichungen IV. bis V. hervor, welche lauten:

$$x + i(\xi - a) = (r + i\varrho) \cos(\alpha + i\varphi) \qquad \text{XVII.}$$

$$y + i\eta = (r + i\varrho) \sin(\alpha + i\varphi). \qquad \text{XVIII.}$$

Löst man die Winkelfunctionen auf, multipliciert sodann aus und trennt hiernach das Reelle vom Imaginären, so folgt:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \alpha \cos i \varphi + \varrho \sin \alpha \frac{\sin i \varphi}{i} \\ \xi - a &= -r \sin \alpha \frac{\sin i \varphi}{i} + \varrho \cos \alpha \cos i \varphi \\ y &= r \sin \alpha \cos i \varphi - \varrho \cos \alpha \frac{\sin i \varphi}{i} \\ \eta &= r \cos \alpha \frac{\sin i \varphi}{i} + \varrho \sin \alpha \cos i \varphi \end{aligned} \right\} \text{XIX.}$$

Durch Einführung von  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $x$  und  $y$  verwandeln sich diese Beziehungen gemäß X. und XI. in nachstehende:

$$\left. \begin{aligned} x &= \mathbf{x} \cos \alpha + \mathbf{y} \sin \alpha \\ \xi - a &= -\mathbf{y} \sin \alpha + (x - a) \cos \alpha \\ y &= \mathbf{x} \sin \alpha - \mathbf{y} \cos \alpha \\ \eta &= \mathbf{y} \cos \alpha + (x - a) \sin \alpha \end{aligned} \right\} \text{XX.}$$

Hieraus ergeben sich die Beziehungen:

$$x^2 + y^2 = \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 \quad \text{XXI.}$$

$$(\xi - a)^2 + \eta^2 = \mathbf{y}^2 + (x - a)^2. \quad \text{XXII.}$$

Durch Subtraction ergibt sich hieraus mit Bezug auf XIII.

$$x^2 + y^2 - [(\xi - a)^2 + \eta^2] = \mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2 - [(x - a)^2 - \mathbf{y}^2] = r^2 - \rho^2. \quad \text{XXIII.}$$

Dies ist die durch  $x$ ,  $y$ ,  $\xi$  und  $\eta$  erfüllte Gleichung II.

Ferner erhält man aus dem Systeme XX. mit Bezug auf XIV.

$$x(\xi - a) + y\eta = \mathbf{x}(x - a) - \mathbf{y}y = r\rho \quad \text{XXIV.}$$

$$x\eta - y(\xi - a) = \mathbf{x}y + (x - a)y. \quad \text{XXV.}$$

Darin erkennt man die durch  $x$ ,  $y$ ,  $\xi$  und  $\eta$  erfüllte Beziehung III.

Dreht man Fig. 83 um den Punkt  $\mathbf{C}$  um den Winkel  $\alpha$  nach aufwärts, und nennt man die alten Lagen der Achsen  $\odot\mathcal{X}$  und  $\odot\mathcal{Y}$ .

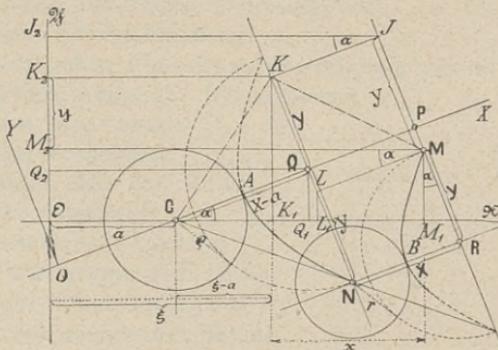


Fig. 84.

so erhält man die Zeichnung 84 für den dritten Fall, deren genauere Besprechung dem Leser unter Hinweis auf § 23 überlassen wird. Zu bemerken ist noch, dass die Figur auch in verkehrter Anordnung bezüglich der Kreise von den Radien  $\rho$  und  $r$  gezeichnet werden kann.

Analog wie der complexe Kreis kann auch die complexe Ellipse behandelt werden. Die imaginäre Ellipse mit reellem Centrum tritt als Schnitt eines Ellipsoides auf, wenn die schneidende Ebene an der Fläche vorbeigeht.

Sie hat die Gleichung

$$\frac{x^2}{-a^2} + \frac{y^2}{-b^2} = 1.$$

---

# Inhalts-Übersicht.

	Seite
§ 1. Die geometrische Darstellung surdischer Zahlen . . . . .	1
§ 2. Die geometrische Darstellung complexer Zahlen . . . . .	3
§ 3. Die Gauß'sche Darstellung complexer Zahlen . . . . .	6
§ 4. Die vier Species mit complexen Zahlen . . . . .	9
§ 5. Der Satz von Moivre . . . . .	13
§ 6. Die Reihen für Cosinus und Sinus . . . . .	18
§ 7. Exponentialgrößen . . . . .	20
§ 8. Natürliche (Napiersche) Logarithmen . . . . .	24
§ 9. Die natürlichen Logarithmen complexer Zahlen . . . . .	29
§ 10. Berechnung der Hyperbelfläche . . . . .	32
§ 11. Mercator's Erdkartenprojection . . . . .	36
§ 12. Die Functionen imaginärer Winkelflächen . . . . .	39
§ 13. Hyperbolische Flächenfunctionen . . . . .	44
§ 14. Die cyclometrischen Functionen (Berechnung von $\pi$ ) . . . . .	46
§ 15. Die Functionen complexer Winkelflächen . . . . .	49
§ 16. Die Function <i>arcus cosinus</i> ( $a \mp ib$ ) . . . . .	53
§ 17. Die Function <i>arcus sinus</i> ( $c \pm id$ ) . . . . .	60
§ 18. Der allgemeine Satz von Moivre . . . . .	62
§ 19. Die cubische Gleichung . . . . .	64
§ 20. Die biquadratische Gleichung . . . . .	69
§ 21. Der Kreis mit imaginärem Radius . . . . .	71
§ 22. Hyperbolische Winkelfunctionen . . . . .	74
§ 23. Der Kreis mit complexem Radius . . . . .	79
§ 24. Imaginäre Zweige des complexen Kreises . . . . .	82
§ 25. Drehung des imaginären Kreisweiges . . . . .	85
§ 26. Figurale Beziehungen . . . . .	87
§ 27. Discussionen . . . . .	90
§ 28. Berechnung von $r$ , $\varrho$ , $\alpha$ und $\varphi$ . . . . .	92
§ 29. Construction von $r$ , $\varrho$ , $\alpha$ und $\beta$ für $\xi = 0$ . . . . .	94
§ 30. Berechnung und Construction von $\eta$ , $\eta$ , $\alpha$ und $\beta$ aus $r$ , $\varrho$ und $x = 1$ . . . . .	102
§ 31. Die Functionen <i>arc tg</i> ( $\eta \pm i\eta$ ) und <i>arc sec</i> ( $r \pm i\varrho$ ) . . . . .	106
§ 32. Berechnung und Construction von ( $\eta \pm \eta$ ) aus $\alpha$ und $\beta$ für $x = 1$ und $\xi = 0$ . . . . .	109

§ 33. Die Functionen $\cotg(\alpha \pm i\varphi)$ , $\operatorname{cosec}(\alpha \pm i\varphi)$ , $\operatorname{arc} \cotg(\infty \mp i\xi)$ , $\operatorname{arc} \operatorname{cosec}(r \mp i\rho)$ . . . . .	111
§ 34. Conjugierte Durchmesser der Kegelschnitte . . . . .	112
§ 35. Pol und Polare . . . . .	115
§ 36. Imaginäre Kegelschnittszweige . . . . .	118
§ 37. Die harmonische Collineation . . . . .	120
§ 38. Die Polcurve und die Polarencurve . . . . .	125
§ 39. Harmonische Eigenschaften der Kegelschnitte . . . . .	128
§ 40. Conjugierte Kreisbüschel . . . . .	130
§ 41. Strahleninvolutionen . . . . .	137
§ 42. Strahleninvolutionen am Kegelschnitte . . . . .	137
§ 43. Der Ortskreis der Kegelschnitte . . . . .	142
§ 44. Die Brennpunkte . . . . .	144
§ 45. Anwendung des III. Brennpunktsgesetzes . . . . .	147
§ 46. Relationen . . . . .	151
§ 47. Affinitäten der Ellipse mit dem Kreise . . . . .	157
§ 48. Die Asymptoten der Hyperbel . . . . .	161
§ 49. Der Krümmungskreis in analytischer Behandlung . . . . .	164
§ 50. Der Krümmungskreis in synthetischer Behandlung . . . . .	167
§ 51. Das vollständige Viereck und Vierseit . . . . .	173
§ 52. Die peripherische Punkt-Involution . . . . .	175
§ 53. Die peripherische Tangenten-Involution . . . . .	178
§ 54. Verbindungslinie imaginärer Punkte und Schnittpunkte imaginärer Strahlen . . . . .	180
§ 55. Theorie der Ähnlichkeitscentren zweier Kreise . . . . .	181
§ 56. Das Apollonische Tactionsproblem . . . . .	184
§ 57. Der kritische Fall der Apollonischen Aufgabe . . . . .	187
§ 58. Specielle Fälle der Apollonischen Aufgabe . . . . .	189
§ 59. Imaginäre Lösungen der Apollonischen Aufgabe . . . . .	196
§ 60. Der Kreis mit imaginärem Centrum und complexem Radius . . . . .	199

## Figurenverzeichnis.

Figur	Seite	Figur	Seite
1 . . . . .	1	13 . . . . .	38
2 . . . . .	3	14 . . . . .	39
3 . . . . .	10	15 . . . . .	50
4 . . . . .	11	16 . . . . .	52
5 . . . . .	13	17 . . . . .	54
6 . . . . .	13	18 . . . . .	55
7 . . . . .	14	19 . . . . .	58
8 . . . . .	14	20 . . . . .	71
9 . . . . .	16	21 . . . . .	75
10 . . . . .	31	22 . . . . .	75
11 . . . . .	33	23 . . . . .	76
12 . . . . .	36	24 . . . . .	77

Figur	Seite	Figur	Seite
25 . . . . .	80	55 . . . . .	144
26 . . . . .	80	56 . . . . .	145
27 . . . . .	81	57 . . . . .	147
28 . . . . .	83	58 . . . . .	148
29 . . . . .	84	59 . . . . .	150
30 . . . . .	87	60 . . . . .	152
31 . . . . .	95	61 . . . . .	155
32 . . . . .	97	62 . . . . .	161
33 . . . . .	97	63 . . . . .	164
34 . . . . .	99	64 . . . . .	164
35 . . . . .	103	65 . . . . .	169
36 . . . . .	103	66 . . . . .	170
37 . . . . .	104	67 . . . . .	170
38 . . . . .	110	68 . . . . .	171
39 . . . . .	111	69 . . . . .	171
40 . . . . .	112	70 . . . . .	173
41 . . . . .	116	71 . . . . .	176
42 . . . . .	116	72 . . . . .	176
43 . . . . .	119	73 . . . . .	179
44 . . . . .	121	74 . . . . .	180
45 . . . . .	123	75 . . . . .	181
46 . . . . .	126	76 . . . . .	182
47 . . . . .	128	77 . . . . .	182
48 . . . . .	129	78 . . . . .	183
49 . . . . .	131	79 . . . . .	184
50 . . . . .	135	80 . . . . .	186
51 . . . . .	135	81 . . . . .	197
52 . . . . .	136	82 . . . . .	199
53 . . . . .	139	83 . . . . .	200
54 . . . . .	142	84 . . . . .	201

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA  
KRAKÓW









8-96



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000294340