Przeszłość i stan obecny najważniejszych teoryj geometrycznych.

GINO LORIA,

PROFESOR GEOMETRYI WYŻSZÉJ UNIWERSYTETU W GENUI.

PRZESZŁOŚĆ I STAN OBECNY NAJWAŻNIEJSZYCH TEORYJ GEOMETRYCZNYCH.

Przekład uzupełniony licznemi dodatkami, wydany za upoważnieniem autora

PRZEZ

S. DICKSTEINA.

WYDANIE Z ZAPOMOGI KASY POMOCY DLA OSÓB PRACUJĄCYCH NA POLU NAUKOWÉM IMIENIA D-RA JÓZEFA MIANOWSKIEGO.

WARSZAWA.

Skład Główny u Gebethnera i Wolffa.

1889.

Дозволено Цензурою.

Варшава, 31 Января 1889 г.

W drukarni J. Sikorskiego pod zarządem A. Saładyckiego, Warecka 14.

TREŚĆ.

OD TŁOMACZA.

Książka, którą dajemy w przekładzie czytelnikowi polskiemu, ogłoszoną została w r. 1887, jako rozprawa w Pamiętnikach Akademii turyńskiéj p. t.: *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche.* Przeczytawszy tę rozprawę, w któréj w formie zwięzłéj a pociągającéj przedstawione są najnowsze kierunki badań geometrycznych i wskazane starannie najważniejsze prace źródłowe, pomyślałem, że wydanie u nas przekładu téj monografii historycznéj nie będzie bezpożyteczném, oraz że przeczytanie jéj może zachęcić niejednego do pracy w dziedzinie pięknéj nauki geometryi. W téj myśli przełożyłem rozprawę i udałem się do autora z prośbą o upoważnienie do wydania przekładu. Profesor Loria nietylko z całą gotowością upoważnienia udzielił, ale prócz tego pragnąc, by wydanie polskie rozprawy było poprawniejszém od oryginału włoskiego i od świeżo wydanego przekładu niemieckiego, nadesłał mi liczne uzupełnienia i poprawki, podnoszące znacznie bogactwo jego pracy. Niezależnie od tego włączyłem jeszcze do przekładu najnowszą rozprawkę autora p. t.: *Notizie storiche sulla geometria numerativa* (Bibliotheca mathematica, 1888) i dodałem w odpowiednich miejscach notatki, odnoszące się do prac matematycznych polskich.

Tym sposobem przekład niniejszy uważać można za wydanie *trzecie*, znacznie powiększone i poprawione, monografii profesora Lorii.

Poczytuję sobie za miły obowiązek wyrazić w tém miejscu podziękowanie autorowi za życzliwe poparcie, jakiego nie szczędził mi podczas przygotowywania tego przekładu, oraz Komitetowi Kasy imienia Mianowskiego za udzielenie środków na wydanie książki.

Warszawa, w styczniu 1889 r.

OD AUTORA.

„Après six mille années d'observations l'esprit humain n'est pas épuisé, il cherche et il trouve encore afin qu'il connaisse qu'il peut trouver à l'infini et que la seule paresse peut donner des bornes à ses connaissances et à ses inventions."

Bossuet.

Postęp wiedzy ścisłéj w ogólności, a matematyki w szczególności [1]) był w ostatnich czasach tak wielki i rośnie wciąż tak szybko i nieustannie, że odczuwamy żywą potrzebę obejrzenia się na drogę już przebytą. Taki rzut oka ułatwi początkującym wniknięcie w tajemnice wiedzy, posuniętym zaś wytworzenie sobie sądu o tém, jakie zadania domagają się przedewszystkiém rozwiązania.

---

[1]) Trudno jest dać wyobrażenie o rozległości matematyki dzisiejszéj. Wyraz „rozległy" nie przedstawia rzeczy dostatecznie. Mam tu na myśli rozległe bogactwo pięknych szczegółów, nie zaś rozległość jednostajną pustéj, pozbawionéj przedmiotów płaszczyzny; — piękny krajobraz, który należy najprzód widzieć zdaleka, a następnie przebiedz i zbadać we wszystkich szczegółach: jego pagórki, doliny, rzeki, skały, drzewa i kwiaty". (Cayley. Mowa miana na zgromadzeniu British Association for the Advancement of Science, 1883 r.)

Przy téj sposobności podaję jeszcze zdanie E. Dubois-Reymonda o charakterze wiedzy nowoczesnéj: „Nigdy jeszcze wiedza nie była tak bogatą w najwspanialsze uogólnienia, nigdy w celach swych i wynikach nie przedstawiała większéj jedności. Nigdy nie kroczyła prędzéj, z większą świadomością, z potężniejszemi metodami; nigdy pomiędzy jej różnemi gałęziami nie panowało żywsze działanie wzajemne." (*Ueber die wissenschaftlichen Zustände der Gegenwart. Reden*, tom II, str. 452.)

Życzenie zadośćuczynienia téj potrzebie odnośnie do geometryi t. j. tego, co dotyczy najwznioślejszéj części naszego pozytywnego poznania,—bo, jak mówił Pascal, tout ce qui passe la géométrie nous surpasse— pobudziło mnie do napisania tej monografii. Oby zarys mój, jakkolwiek niezupełny, mógł wywołać inną pracę godną wysokiego celu i oby po téj skromnéj kronice przyszła kolej na historyą geometryi w wieku naszym!

I.

Geometrya w pierwszéj połowie XIX-go stulecia.

„Wszystkie stopnie rozwoju kultury są związane ze sobą tak ściśle, że napróżno usiłowałby kto zbadać jakąkolwiek gałąź dziejów, począwszy od pewnéj oznaczonéj epoki, bez zwrócenia uwagi na czasy i zdarzenia ją poprzedzające“ [1]). Jeżeli jest to prawdą w ogólności, to podwójnie jest prawdziwém w nauce „tak konserwatywnéj, jak matematyka, która nie burzy prac okresów poprzedzających, by w ich miejsce wznosić nowe budowle“ [2]). I dla tego przed zajęciem się główną treścią téj rozprawy t. j. geometryą nowoczesną, winienem opowiedzieć w krótkości, w jaki sposób geometrya doszła do stanu, od którego zamierzam przedstawić jéj rozwój.

Określić pierwszy początek badań geometrycznych jest zadaniem prawie niewykonalném. Doświadczenia codzienne każdéj myślącéj jednostki prowadzą w sposób tak naturalny do wyobrażenia najprostszych form geometrycznych i do badania ich związków wzajemnych, że nadaremnie szukalibyśmy nazwiska téj jednostki, którąby można nazwać pierwszą z uprawiających geometryą, oraz oznaczenia czasu powstania téj nauki. Stąd to wiadomości, jakie mamy o pierwszych badaniach geometrycznych, są dość nieokreślone; historyka otacza ciemność zupełna, lub co najwyżéj przyświeca mu słabe światło zmroku, zezwalające zaledwie rozróżnić zarysy godnych uwagi fragmentów, które ocalały od zagłady wieków. Historyk taki może uznać za rzecz pewną, że najstarożytniejsze badania geometryczne zawdzięczamy egipcyanom, może powtó-

---

[1]) *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, par G. Libri, tom I. 1838 str. 3.

[2]) Hankel. *Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten.*, (Tybinga, 2-ie wyd. 1885), str. 7.

rzyć opowiadanie Herodota, według którego najsilniejszym bodźcem do zajmowania się geometryą były peryodyczne wylewy Nilu, które zacierając granice małych obszarów, na jakie podzielony był Egipt pomiędzy mieszkańców, stwarzały konieczność corocznego przywracania tych granic [3]). Dopuszczalność téj hypotezy dla wyjaśnienia faktu, że w Egipcie studyowano poważnie naukę naszę, stwierdza praktyczna natura przedmiotów, jakiemi tam zajmowano się, a do których należą: konstrukcye specyalne, pomiary długości, powierzchni, objętości i t. d. [4])

Wiadomości egipcyan, przeszedły do Grecyi, przyjęły w niéj formę bardziéj naukową, dzięki Talesowi (640—540) [5]) i adeptom szkoły jońskiéj, którą on założył. Tales pierwszy zajął się ścisłém dowodzeniem prawd, tak zdobytych przez egipcyan, jako téż i innych, W rękach jego wszakże nie stała się jeszcze geometrya prawdziwą umiejętnością; godność tę pozyskała dopiero, dzięki badaniom Pytagorasa (569—470 według jednych, 580—500, według drugich). Niestety jednak pytagorejczycy trzymali się ściśle zwyczaju przechowywania w tajemnicy nauki mistrza, skutkiem czego część geometryczna téj nauki pozostała nieznaną wszystkim, nie należącym do jego szkoły. Lecz po śmierci Pytagorasa, uczniowie jego, pokonani w wojnach domowych, które szarpały wówczas rzeczypospolite Wielkiéj Grecyi, szukali schronienia w Atenach, i tu odsłonili, zmuszeni potrzebą, tajemnice, dotąd tak troskliwie strzeżone. Dobroczynny skutek większego rozpowszechnienia się wiadomości matematycznych pytagorejczyków ujawnił się w ważnych badaniach uczonych greckich w okresie od Pytagorasa do Platona. (429—348). Badania te podzielić można na na trzy kategorye, noszące nazwę od sławnych zagadnień: podziału kąta na trzy równe części, podwojenia sześcianu i kwadratury koła; doprowadziły one do uzupełnienia najelementarniejszéj części geometryi płaskiéj.

---

[3]) Fakt ten możnaby uważać jako nowy moment, wyrażający, według sławnego twierdzenia Humboldta, wpływ zjawisk tellurycznych na kierunek naszych badań naukowych.

[4]) Porów. Em. Weyr, *Ueber die Geometrie der alten Aegypter.* (Wiedeń, 1881).

[5]) Daty, dotyczące matematyków, którzy żyli przed rokiem 1200, wzięte są z dzieła: *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, M. Cantora. (Tom I. Lipsk 1880.) Pierwsza liczba w nawiasie oznacza datę urodzenia, druga datę śmierci.

Platonowi zawdzięczamy pierwszy bodziec do metodycznego traktowania stereometryi, co nie stanowi wszakże jedynego tytułu do wdzięczności, jaką u geometrów zjednał sobie filozof boski. Jemu to bowiem przypisujemy odkrycie metody analitycznéj, któréj ważne znaczenie zna każdy, a jego szkole (akademii) utworzenie nauki o stożkowych (przecięciach stożkowych) oraz drugiéj, niemniéj ważnéj o miejscach geometrycznych.

Z tych ogólnych wskazówek [6]) łatwo wywnioskować, że usiłowania wymienionych wyżéj geometrów doprowadziły do mnóstwa własności figur i do metod ich wyjaśnienia, przygotowały przeto elementy metodycznego traktowania geometryi. Wkrótce też pojawiły się zupełne wykłady wszystkiego, co zostało odkryte. O istnieniu wielu z nich doszła do nas wszakże tylko wiadomość; zachował się zaś całkowicie jeden wykład, a mianowicie Elementy Euklidesa, których świetność przypuszczać nam każe, że wszystkie inne wykłady zostały przezeń zaćmione.[7])

Z tą książką, od dwu tysięcy lat uważaną za jedyną w swoim rodzaju, „od któréj można było dla rozwoju młodzieży oczekiwać tych właśnie skutków, przez wzgląd na jakie wydzielono geometryi tak ważne stanowisko w systemie nauczania u wszystkich narodów ucywilizowanych“[8]), z tą książką, powiadamy, zaczyna się prawdziwie wiedza geometryczna. Jest ona piedestałem granitowym, na którym wznosi się cała wspaniała budowa matematyki greckiéj, na szczycie któréj znajdują się inne dzieła Euklidesa oraz nieśmiertelne prace Archimedesa (287—212), Erastotenesa (277—194) i Apolloniusa (około roku 200 przed Chr.) [9]).

---

[6]) Co do szczegółów patrz: Bretschneider, *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides.* (Lipsk, 1870.)

[7]) Przeciwne zdanie wygłosił Lacroix w dobrze znaném dziele: *Essais sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier.* (Wydanie czwarte, 1883, str. 296.)

[8]) Betti i Brioschi: Przedmowa do: *Gli Elementi di Euclide.* (Florencya, 1867).

[9]) Dla pokazania jak wspaniałą i godną podziwu jest spuścizna matematyki greckiéj, dość zacytować, że teorya stożkowych, przedmiot główny badań geometrów starożytnych, była doprowadzoną przez nich do takiego wykończenia, iż mało co pozostało do dodania, by ją doprowadzić do stanu, w jakim znajduje się obecnie. Podziw dla téj teoryi stał się jeszcze większym, dzięki poszukiwaniom historycznym uczonych matematyków: Zeuthena (*Die Lehre von den Kegelschnitten im Altherthume*, przekład (z duńskiego) Fischera-Benzona, Kopenhaga 1886), P. Tannery'ego (*Bulletin des sciences mathématiques*

Ci sławni uczeni oznaczają apogeum nauki heleńskiéj; po nich rozpoczyna się okres upadku, gdyż mimo ważnych badań Hipparcha (161 — 126), Ptolomeusza (125 do około 200-go) i mimo pracy takiego genialnego komentatora, jakim był Pappus (żyjący w trzecim wieku ery naszéj), dochodzimy powoli do okresu zupełnéj bezczynności w dziedzinie geometryi.

Rzymianie, zdobywcy i prawodawcy świata, byli pozbawieni ducha do badań umiejętnych, i jeżeli w epoce ich panowania geometrya nie zniknęła zupełnie, zawdzięczać to należy miernikom (agrimensores), chociaż ci starali się w operacyach swych jedynie o dokładność, wystarczającą na potrzeby życia codziennego [10]).

I wieki średnie nie dają nam sposobności do dłuższego opowiadania. Gęste ciemności, otaczające wówczas ludzkość całą, nie wydały ani jednego uczonego, któremuby zawdzięczano jaki taki postęp w geometryi; można tylko wspomnieć, że liczne świątynie wzniesione w téj epoce, które, według wyrzeczenia wielkiego poety,

---

et astronomiques, *Mémoires de la Société de Bordeaux*, także dzieło jego: *La Géométrie grecque. Première partie. Histoire générale de la géometrie élémentaire*, Paryż, 1887) i innych, którzy starają się rozproszyć przesąd, jakoby grecy nie posiadali metod badania, dających się porównać z temi, któremi szczyci się wiek nasz, i popierają pogląd, że starożytnym brakło tylko odpowiednich wzorów do przedstawienia tych metod.

[10]) Nie mogę się powstrzymać od przytoczenia w tém miejscu wymownych słów, które w tym przedmiocie wygłosił znakomity historyk matematyki włoskiéj: ...„mais bientôt le Romain arrive, il saisit la science personifiée dans Archimède, et l'étouffe. Partout où il domine la science disparaît: l'Étrurie l'Espagne, Carthage en font foi. Si plus tard Rome n'ayant plus d'ennemis à combattre se laisse envahir par les sciences de la Grèce, ce sont des livres seulement qu'elle recevra; elle les lira et les traduira sans y ajouter une seule découverte. Guerriers, poètes, historiens, elle les a, oui; mais quelle observation astronomique, quel théorème de géométrie devons-nous aux Romains?" (Libri l. c. str. 183).

Aby pokazać, w jakiém uważaniu była matematyka u naszych praojców, dość powiedzieć (porówn. Hankel. *Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter*, Lipsk 1874, str 103), że często mieszali ją oni z astrologią i pokrewnemi jéj sztukami. Nie wyda się przeto wcale dziwném, że w kodeksie Justyniana między ustawami pod ogólnym tytułem: „De maleficis et mathematicis et ceteris similibus" znajdujemy taki zakaz: „Ars autem mathematica damnabilis interdicta est omnino". Jeżeli w tym samym kodeksie znajdujemy nieco dalej zdanie: „Artem geometriae discere atque exercere publice interest", to należy się wystrzegać od uważania go za przekład wyrzeczenia Napoleona I-go: „L'avancement, le perfectionnement des Mathématiques sont liés à la prospérité de l'État", albowiem jest rzeczą prawie pewną, że prawodawca rzymski miał na myśli część praktyczną geometryi.

dlatego były takie liczne i śmiałe, że przedstawiały jedyne, dozwolone wówczas uzewnętrznienie inteligencyi ludzkiéj, świadczą o tém, iż część nauki, niezbędna dla każdego budowniczego, była podówczas ogólnie znaną.

Epoka ta, tak smutna dla naszéj wiedzy, skończyła się, rzec można, z wystąpieniem Leonarda Fibonacci'ego (około 1180—1250), gdyż dopiero kiedy ten znakomity uczony sprowadził do Europy algebrę, a prace jego zaczęły wpływ wywierać, ustał okres bezwładności naukowéj i rozpoczął się nowy, który my włosi winniśmy wspominać z dumą, ponieważ w ciągu niego ojczyzna nasza dzierżyła berło matematyki. Badania wszakże w tym okresie, będąc przeważnie analitycznemi, mało ciążyły ku geometryi. Cardano (1501—1576), Scippio Ferro (?—1525), Tartaglia (1500—1559), Ludovico Ferrari (1522—1565) i inni mniéj znakomici, należący do tego okresu, mają tę zasługę, że powołali do życia w kraju naszym najważniejsze części analizy, a mianowicie teoryą równań, i że udoskonalili niektóre trudniejsze jéj części, dzięki publicznym naukowym sporom, które są cechą charakterystyczną owego czasu. Geometryą jednak uczeni ci przekazali następcom swoim prawie w takim stanie, w jakim przejęli ją od greków i arabów [11]).

Po wygaśnięciu tych znakomitych rycerzy, hegemonia w matematyce przeszła na drugą stronę Alp, a mianowicie do Francyi, dzięki zasługom Viète'a (1540—1603) i Fermata (1596—1663). Ci uczeni wzbogacili geometryą rozwiązywaniami, których dotąd daremnie szukano, i pozyskali dla niéj niektóre dzieła Appoloniusa, których utratę opłakiwano.

Wkrótce potém Pascal (1623—1662) i Desargues (1593—1662) powiększyli dziedzictwo geometryi oryginalnemi poglądami, nowemi metodami i nowemi twierdzeniami.[12]) Lecz pomysły ich, przytłumione przez przeważający wówczas swym wpływem duch analityczny, pozostały przez długi czas bezpłodnemi.

---

[11]) Pomiędzy pytaniami, które uczeni włoscy w XVI wieku wzajem sobie zadawali, są niektóre ważne dlatego, że dały początek geometryi koła (Geometria del compasso). Jéj to w téj epoce poświęcił pracę Benedetti (?—1590); w nowszych czasach nad tym przedmiotem pracowali Mascheroni (1750—1808) i Steiner.

[12]) Pascal odkrył mnóstwo interesujących własności cyklojdy, wskazał na perspektywę jako na najdogodniejszą metodę badania stożkowych, dowiódł sławnego twierdzenia o tak nazwaném przez siebie „Hexagramma mysticum“ i t. d.

Przewaga analizy w wieku XVII-ym nie była wszakże tak wielką, by pozwoliła geometrom zupełnie zapomnieć o zadaniach, których rozwiązania od tak dawnego czasu z upragnieniem oczekiwano. Pomiędzy dążeniami epoki a życzeniami uczonych powstała tym sposobem walka *sui generis*, a przez starcie różnorodnych poglądów i dążeń zatliła się iskra, zdolna do wzniecenia płomienia, jaki miał oświecać przyszłe pokolenia [13]): powstała geometrya analityczna (1637).

Już w pewnych metodach geometrów greckich, w praktycznych prawidłach malarzy, astronomów egipskich i mierników rzymskich widzieć można ślady tego, co dziś nazywamy układem współrzędnych prostokątnych Descartes'a; już arabowie i algebraicy włoscy z czasów Odrodzenia stosowali pewne rozważania geometryczne do rozwiązywania równań [14]); już Viète używał odciętych w celu oznaczenia punktów prostéj za pomocą liczb; już wreszcie Mikołaj Oresme (około 1320—1382) i Fermat mniéj lub więcéj świadomie posługiwali się współrzędnemi; lecz bez zaprzeczenia dopiero Descartes (1596—1650) pierwszy powziął w całéj rozciągłości pomysł przedstawiania za pomocą znaków rachunku algebraicznego form przestrzeni, zbudowanych według pewnego prawa i przewidział wielki użytek, jaki analiza i geometrya mogą wycią-

---

Desargues wprowadził współczesne uważanie trzech stożkowych, ważne pojęcie punktu nieskończenie odległego prostéj, pojęcie inwolucyi sześciu punktów, rozwiązał wiele ważnych pytań, odnoszących się do stożkowych. i t. d. W dziełach Desargues'a (porówn. wydanie Poudry, 1869) znajdujemy metodę do badania pewnych rzutowych własności linij krzywych, polegającą na tém, że te krzywe zastępuje się układami linij prostych. Descartes i Poncelet byli zdania, że wnioski, wypływające z takiego podstawienia, nie są ścisłe. (porówn *Traité des propriétés projectives*, tom II, str. 128), mimo to sposób proponowany przez Desargues'a był użyty wielekrotnie w nowszych czasach przez samego Ponceleta (l. c. t. I, str. 374), de Jonquières'a (w różnych rozprawach w *Annali di Matem. Journ. f. Math.* i w *Math. Ann.*) Cremonę (patrz: *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*), i należy do dziś do najbardziej cennych metod badania, któréj zawdzięczamy „zasadę zachowania mnogości" (patrz niżej rozdział IV-y).

13) Porówn. Comte, *Cours de philosophie positive*, t. I, 1864, str. 38; E. Dubois-Reymond, *Kulturgeschichte und Naturwissenschaft*. Lipsk, 1878), (przekład polski J. J. Boguskiego, Warszawa, 1879).

14) Favaro. *Notizie storico-critiche sulla costruzione delle equazioni. Memorie di Modena*, 18, 1879.

Matthiessen, *Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen*. (Lipsk, 1878), Rozdział 7-y.

gnąć z tak nieoczekiwanego ich połączenia. Słusznie zatém nazwisko Descartes'a pozostanie na zawsze związane z odkryciem geometryi analitycznéj [15]).

Łatwość, z jaką to nowe narzędzie pozwoliło na rozwiązywanie zadań, przez starożytnych za nietykalne uważanych, sprawiła, że współcześni uczeni oraz bezpośredni następcy Descartes'a zapomnieli zupełnie o drogach, wskazanych przez Euklidesa, Archimedesa i Apolloniusa, do tego stopnia, że przez czas pewien nie znajdujemy nikogo, któryby temi drogami dochodził jakiéjś ważniejszéj prawdy.

Nowe rachunki, wynalezione niezadługo po Descartes'ie przez Leibnitza (1646—1716) i Newtona (1642—1727), wzmocniły ten kierunek, gdyż sprawiły, że nie troszczono się już wcale o te zadania, których rozwiązywanie nie nadawało się do okazania wszechmocy metod, jakie świat zawdzięcza tym umysłom nieśmiertelnym [16]). Można powiedzieć, iż z wyjątkiem dzieła *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1686) Newtona i niektórych prac Huygensa (1629—1695), [17]) La Hire'a (1640—1718), [18]) Halley'a (1656—1742),[19]) Maclaurina (1698—1746),[20]) Simpsona (1687—1768),[21]) Stewarta (1717—1785),[22]) żadna praca

---

[15]) O początku geometryi analitycznéj patrz Günthera: *Die Anfänge und Entwickelungs-Stadien des Coordinatenprincipes*, (*Abhandlungen der naturforsch. Gesellsch. zu Nürnberg*), i świeżą replikę Zeuthena: *Note sur l'usage des coordonées dans l'antiquité et sur l'invention de cet instrument.* (*Bull. de l'Academie danoise des sciences*, 1888), a o Descartes'ie mowę Jacobi'ego, przełożoną na język francuski i pomieszczoną w *Journ. Liouville'a*, 12, p. t.: *De la vie des Descartes et de sa méthode pour bien conduire la raison et chercher la verité dans les sciences.*

[16]) „La conception fondamentale de l'analyse transcendante telle que Leibnitz l'a formée constitue sans aucun doute la plus haute pensée à laquelle l'esprit humain se soit jamais elevé jusqu'à présent. Comte, *Cours de philosophie positive*, t. I, 1864 str. 175.

[17]) Patrz np. *Traité de la lumière.* (Leodyum 1691).

[18]) *Sectiones conicae in novem libros distributae* (Paryż 1685); *Mémoires sur les Epicycloides* (*Anciennes Mémoires de l'Académie des sciences* 9); *Traité des roulettes* (tamże 1704).

[19]) Porównaj jego wydania dzieł greckich oraz próby odtworzenia zaginionych ksiąg (np. ósméj księgi o stożkowych Apolloniusa).

[20]) Porówn. jego książkę: *A complete system of Fluxions* (Edynburg, 1742).

[21]) *Treatise on conic sections.* (1735)

[22]) *General theorems of considerable use in the higher parts of mathematics.* (Edynburg, 1746); *Proportiones geometricae more veterum demonstratae.* (Edynburg, 1761)

matematyczna ówczesna nie należy do dziedziny, którą dziś zwykle nazywamy geometryą syntetyczną.[23]) Mimo to wszakże, okres ten, bez wahania, zaliczyć można do najpomyślniejszych dla geometryi. W saméj rzeczy, większa część zadań, jakie postawili i rozwiązali wynalazcy rachunku nieskończonościowego i ich bezpośredni uczniowie, może być policzoną do najważniejszych w geometryi; dotyczą one najbardziéj interesujących i najbardziéj ukrytych geometrycznych oraz mechanicznych własności linij i powierzchni krzywych. Zobaczymy niżéj, że nietylko powiększono liczbę krzywych, godnych badania [24]) lecz, co ważniejsza jeszcze, wprowadzono rozważanie osobliwości linii krzywéj oraz nowych, związanych z niém elementów; a otwarło to w następstwie pola badania, istnienia których przedtém wcale nie przeczuwano.

Łatwość, z jaką metoda Descartes'a prowadziła do rozwiązania wielu zagadnień planimetrycznych, pobudziła naturalnie geometrów do podobnych studyów nad krzywemi skośnemi (w przestrzeni) i powierzchniami. Stąd powstało uogólnienie tej metody, które sam Descartes już wskazał, a następnie Schooten (16..—1761)[25]) rozwinął. Pod wpływem tych wskazówek powziął Parent (1666—1716) pomysł przedstawiania powierzchni za pomocą równania między trzema współrzędnemi jej punktów. [26]) Przygotowało to geometryą analityczną o trzech wymiarach, która począwszy od roku 1741, stanowi część integralną matematyki, dzięki rozprawie klasycznéj Clairaut'a (1715—1765) [27]) w któréj tenże, jako młodzieniec zaledwie szesnastoletni, rozwiązał z rzadką elegancyą ważne zagadnienia, odnoszące się do krzywych o podwójnéj krzywiznie, odpowiadające analogicznym zagadnieniom na płaszczyznie. Niezadługo po Clairaucie utworzył Euler (1707

---

[23]) O próbach Simpsona i Stewarta wskrzeszenia geometryi greckiéj porównaj: Buckle: *Historya cywilizacyi w Anglii* (tom I, rozdz. 54).

[24]) Głównemi krzywemi, badanemi przez greków były: okrąg koła, elipsa hyperbola, parabola, spiralna Archimedesa, cyklojda Dioklesa, konchoida Nikomedesa, kwadratyca Hippiasa i Dinostrata, hellisa, linie spiralne i inne. Do tych nowe rachunki dołączyły: liść i owalną Descartes'a, kwadratycę Thirnhausena, cyklojdę, hypo- i epicyklojdę, spiralną logarytmiczną, linią łańcuchową, sinusojdę, logarytmikę i wiele innych.

[25]) Patrz piątą księgę jego dzieła: *Exercitationes geometricae.*

[26]) Parent. *Essai et recherches de Mathématiques et de Physique*, (2-e wyd. 1713), t. 2.

[27]) *Traité de courbes à double courbure.*

—1783) teoryą analityczną krzywizny powierzchni (1760) [28]) i zastosował metodę analityczną do klasyfikacyi powierzchni 2-go rzędu, opartéj na kryteryach analogicznych do tych, jakie posłużyły starożytnym do podziału krzywych 2-go rzędu na elipsy, hyperbole i parabole. Nakoniec do drugiéj połowy ubiegłego stulecia należy olbrzymie dzieło Monge'a (1746—1818), który dał geometryi analitycznéj o dwóch współrzędnych formę, jaką ma dziś, a to przez metodyczne używanie rownania prostéj. Ustalił on tak ważne pojęcie „familij powierzchni", i zbadawszy niektóre z nich (prostoliniowe, rozwijalne, rurowate, „surfaces moulures") odsłonił ukryty dotąd związek pomiędzy teoryą powierzchni a całkowaniem równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, co przyczyniło się do oświetlenia jednéj i drugiéj teoryi i otwarło nowe widnokręgi geometrom.[29])

Ruch umysłowy, rozpoczęty z odrodzeniem nauk we Włoszech, rozwijał się, jak widzieliśmy, najprzód pod kierunkiem Francyi, następnie Anglii i Niemiec. Lecz w końcu wieku XVIII-go, gdy Euler przestał „rachować i żyć" [30]) Francya staje znów na czele świata matematycznego. Pracami Clairauta, d'Alemberta (1716—1783), Lagrange'a (1736—1813), Laplace'a (1749—1827), Legendre'a (1752—1833), Poissona (1781 — 1840) i innych nadaje ona ton studyom analizy czystéj i stosowanéj; pracami zaś Monge'a, Carnota (1753—1823), Ponceleta (1788—1867) zwraca znowu uczonych ku badaniu form geometrycznych w ten sposób, jak to rozumieli starożytni.

Monge, połączywszy w ciało jednéj nauki nieliczne prawidła, jakie utworzyli sobie budowniczowie i malarze dla potrzeb swojéj sztuki, i szczęśliwie je uzupełniwszy, utworzył nową gałęź geometryi, zwaną geometryą wykreślną (opisującą). Klasycznćm dziełem, które poświęcił téj nauce [31]), a jeszcze bardziej nieporównanemi wykładami w Szkole politechnicznéj, zdobył on uznanie dla badań geometrycznych, opartych na bezpośredniém uważaniu

---

[28]) *Recherches sur la courbure des surfaces* (*Berliner Abh.*)

[29]) Rozprawy akademii turyńskiéj (1770—1773) i paryskiéj (1784): *Feuilles d'analyse appliquée a la géométrie* (Paryż 1795), albo *Applications de l'analyse à la Géométrie* (Paryż 1801).

[30]) Słowa Condorceta (1743—1794).

[31]) *Leçons de géométrie descriptive* (Paryż 1794).

figury [32]), a ułatwiwszy przedstawienie figur geometrycznych o trzech wymiarach, umożliwił przewidziane już przez Pappusa systematyczne stosowanie uważań stereometrycznych do badania figur płaskich. [33])

Obok *Geometryi wykreślnéj* Monge'a należy postawić *Geometryą położenia* Carnota[34]), która mając z tamtą za cel wspólny zdobycie dla geometryi ogólności, uważanéj dotąd za wyłączność analizy, przyczyniła się niemniéj od tamtéj do podniesienia

---

[32]) O Monge'u patrz Dupin'a *Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge* (Paryż, 1819), Arago, *Notices biographiques.*

Co do historyi początku i rozwoju geometryi wykreślnéj radzić się można części I-ej dzieła Chr. Wienera: *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* (Lipsk, 1884, 1887) w któréj uczący się znajdzie sporo interesujących szczegółów już to o badaniach, które przygotowały tę naukę, już to o badaniach następców Monge'a.

Współpracownikami Monge'a w pracy reformatorskiéj byli niektórzy jego koledzy, między innemi: Lacroix (1764 — 1843), Hachette (1769—1834) jak i wielu jego uczniów ze Szkoły politechnicznéj. Dla krótkości ograniczam się na podaniu nazwiska tego, „który jak orzeł wznosi się nad innymi" a mianowicie Karola Dupina (1784—1873) z powodu jego klasycznéj pracy „*Développements de géométrie*" (1813), która powinna być czytaną przez każdego, pragnącego mieć choćby skromne wyobrażenie o dzisiejszym stanie geometryi. Wpływ Monge'a szybko też ujawnił się i w literaturze polskiéj, jak to stwierdza rozprawa Kajetana Garbińskiego (1796—1848): *Wykład syntetyczny własności powierzchni skośnych z ich przystosowaniem*, Warszawa 1822. Tenże jest autorem artykułów umieszczonych w *Nouv. Ann.* 16, 18. *Journ. f. Math.* 5, oraz w *Rocznikach Towarzystwa Przyjaciół Nauk w Warszawie.* Wyborny kurs *Geometryi wykreślnéj* napisał Franciszek Sapalski (1791—1838) uczeń Liveta. (Część I, Warszawa 1822). *Zastosowania* Kraków 1839. Tenże autor ogłosił w *Rocznikach Towarzystwa Naukowego Krakowskiego* tom 5 (1817) rozprawę: *O stereotomii czyli geometryi wykreślnéj*, w któréj podaje historyą powstania nowéj umiejętności.

[33]) Wpływ Monge'a daje się jeszcze zauważyć w pracach nowszych; na dowód przytoczyć można pomysł zniesienia baryery, którą starożytni oddzielili planimetryą od stereometryi i szczęśliwą próbę urzeczywistnienia tego pomysłu przez De Paolisa w świetnéj książce *Elementi di Geometria* (Turyn 1884).

[34]) „La Géométrie de position de Carnot n'aurait pas, sous le rapport de la métaphysique de la science, le haut mérité que je lui ai attribuée, qu'elle n'en serait pas l'origine et la base des progrès que la Géométrie, cultivée à la manière des anciens, a fait depuis trente ans en France et en Allemagne." (Arago. *Biographie de Carnot*).

geometryi czystéj. datującego od ukazania się dzieła: *Traité de propréités projectives des figures* (1822) [35]).

Dla okazania, jak pamiętną jest ta data, wystarczy przypomnieć, że w wielkiem dziele Ponceleta pierwszy raz wskazaną jest potęga rzutu środkowego (projekcyi centralnéj), jako metody dowodzenia, oraz zasady ciągłości, jako narzędzia badania [36]); że głębokie badanie homologii systemów płaskich i przestrzennych doprowadziło do pojęcia odpowiedniości między dwiema zmiennościami (rozmaitościami) o dwu i trzech wymiarach; że związane tu po raz pierwszy dawniejsze wiadomości o biegunowości względem stożkowych z temi, które szkoła Monge'a ustaliła o biegunowości względem powierzchni 2-go rzędu, przygotowały prawo dwoistości (znane już Snellius'owi (1581—1626) [37]) i Viète'owi [38]) w geometryi kuli), przedstawione później w całéj ogólności przez Gergonne'a (1771 — 1859) w roku 1826; [39]) że tu nakoniec znajdują się piękne badania nad wielokątami, wpisanemi w jednę stożkową i opisanemi na innéj stożkowéj, które później dały sposobność Jacobi'emu (1804 — 1851), Richelotowi (1808 — 1871) i innym do najpiękniejszych, jakie znamy, zastosowań teoryi funkcyj eliptycznych. [40])

Rozprawy, które Poncelet poświęcił teoryi środków harmonicznych, biegunowych wzajemnych oraz poprzecznych i niemniéj inne drobniejsze prace uczonych należących do szkoły Monge'a sięgają roku 1837, w którym Chasles (1796—1880) ogłosił dzieło: *L'Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes*

---

[35]) Drugie wydanie 1865, 1866.

[36]) Co do początku tej zasady patrz notę C. Taylora: *On the history of geometrical continuity* (*Cambridge Proc.* 1880 i 1881).

[37]) *Doctrina triangulorum canonicae* etc. (Leodyum 1627).

[38]) *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII* (*Opera Vietae*, 1646).

[39]) *Ann. Gergonne'a.*

[40]) Jacobi, *Journ. f. Math.* 3; Richelot, tamże 5, 38; Rosanes i Pasch, tamże 64; Léauté, *C. R.*, 79; Darboux, *Sur une classe remarquable des courbes et des surfaces algébriques*, Nota II; Clifford. *Proc. Math. Soc.* VII albo *Math. Papers*, str. 204 i 208; Chelini, *Bologna Mem* III, 5; Fergola, Padeletti i Trudi, *Napoli Rend.* 21; Simon, *Journ. f Math.*, 81; Gundelfinger, tamże 83; Halphen, *Journ. Liouv.* III, 5; *Bulletin de la Soc. phil.* VII, 3; Patrz także interesującą rozprawę Hurwitza: *Ueber unendlich - vieldeutige geometrische Aufgaben, insbesondere über die Schliessungsprobleme* (*Math. Ann.* 15) i notę Forsytha: *On in-and circumscribed polyhedra* (*Proc. Math. Soc.* 1883).

en géométrie [41]). W dziele tém nieporównaném autor, po przedstawieniu w pięknéj i zwięzłéj formie ówczesnego dziedzictwa geometryi czystéj, przywrócił téj umiejętności prawa do uznania ze strony uczonych, zaprzeczane przez ślepych wielbicieli analizy, a przez ważne oryginalne poszukiwania wykazał swą kompetencyą jako obrońca sprawy geometryi. [42])

Tymczasem, w okresie, przypadającym pomiędzy ukazaniem się dzieł Poncelet a i Chasles'a, zbudziły się Niemcy z odrętwienia, w jakiém utrzymywały je przez pół wieku usypiające prace szkoły kombinatorycznéj. To przebudzenie się oznaczało przejście berła matematyki z Francyi do Niemiec [43]). Najprzód prace

---

[41]) Istnieje niemiecki przekład Sohncke'go p. t.: *Geschichte der Geometrie, hauptsächtlich in Bezug auf die neueren Methoden* (Halla, 1839), ale bez rozprawy *Mémoire sur deux principes généraux de la science* (porówn. cytatę następną). Oryginał francuski wyszedł w r. 1875 w 2-ém wydaniu.

[42]) Pomiędzy pracami, które wchodzą w skład dzieła Chasles'a, zasługuje na szczególne wymienienie rozprawa, do któréj *Aperçu* ma wstęp stanowić: *Sur deux principes généraux de la science*, zawierająca ogólną teoryą homografii (kolineacyi) i dwoistości, badanie dwóch przypadków, w których ta jest inwolucyjną, zastosowanie tych transformacyj do badania powierzchni 2-go rzędu i powierzchni geometrycznych w ogólności, oraz do uogólnienia układu współrzędnych Descartes'a. Daléj należy wymienić noty, zawierające głębokie studya historyczne i badania geometryczne wielkiéj doniosłości. Pomiędzy temi ostatniemi wspomnę o notach zawierających teoryą stosunku anharmonicznego i inwolucyi; własności anharmoniczne stożkowych, własności ogniskowe powierzchni 2-go stopnia, liczne twierdzenia o krzywych skośnych trzeciego rzędu, szczęśliwe próby rozciągnięcia do powierzchni 2-go rzędu twierdzeń Pascala i Brianchona, uogólnienie rzutu stereograficznego i t. d.

[43]) Przejście to nie odbyło się spokojnie, lecz wśród szeregu ożywionych rozpraw, w których naprzeciw Ponceleta, Chasles'a, Bobiliera stanęli Plücker, Steiner i Magnus, a których placem boju był *Bulletin Férussaca*. W tém miejscu należałoby oznaczyć, co zdobył każdy z tych uczonych w dziedzinach, w których pracowali wspólnie, lecz do tego potrzebaby pióra uczeńszego i kompetentniejszego niż moje. Z drugiéj strony pewne produkcye umysłu ludzkiego, są zdaniem mojém, jakby naturalnym płodem swogo czasu; dlatego nie powinno nas dziwić, jeżeli wychodzą jednocześnie z różnych głów, i nie należy szukać wyjaśnienia tego faktu w złej wierze u jednych lub drugich. Że tak było z wynalazkiem rachunku różniczkowego, to już dziś nie ulega żadnéj wątpliwości. Toż samo było z geometryą nowoczesną, dowodem czego fakt, że powstała ona w skutek powszechnie odczuwanéj potrzeby metod ogólnych, mających służyć za nić Aryadny w labiryncie twierdzeń pomocniczych, podań, poryzmów i zagadnień, przekazanych nam przez poprzedników. (Porówn. w tym względzie wyrzeczenie Dupina: (*Développements de géométrie*), położone jako motto w dziele *Traité des propriétés projectives des figures* z przedmową do *Systematische Entwickelung* Steinera i z rozmaitemi miejscami w *Aperçu historique*.

uczonych takich, jak Möbius (1790—1868) [44]), Steiner (1796—1863) [45]), Plücker (1801—1868) [46]), i von Staudt (1798 — 1867) [47]) wzbogaciły geometryą analityczną metodami, w których niewiadomo co bardziéj podziwiać, elegancyą czy potęgę, jak: rachunkiem barycentrycznym i metodą oznaczania skróconego; geo-

[44]) Główną pracą Möbiusa w dziedzinie czystéj geometryi jest: *Der barycentrische Calcul* (Lipsk 1827); w niéj dotychczasowe wiadomości o środku ciężkości (barycentrum) układu punktów służą za podstawę nowego i ważnego rachunku, który prowadzi do nowego układu współrzędnych; autor pokazuje zastosowania tego układu do badania krzywych płaskich i skośnych, oraz powierzchni. Są tam również przedstawione i metodycznie rozwinięte ważne przekształcenia geometryczne, dziś jeszcze wciąż stosowane. Wszystkie późniejsze rozprawy Möbiusa uważać można jako dodatki do *Rachunku barycentrycznego*. Patrz dwa pierwsze tomy dzieł zbiorowych Möbiusa (*Gesammelte Werke*), wydanych w Lipsku 1886, 1887.

[45]) Mam na myśli dzieło: *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander* (Berlin 1832), w którem „odkryty jest organizm wiążący najróżnorodniejsze zjawiska w świecie przestrzeni". Późniejsze pisma Steinera i matematyków opierających się na tém dziele dowodzą, że autor jego miał prawo scharakteryzować treść swéj pracy za pomocą słów powyższych. Dzieła zbiorowe (*Gesammelte Werke*) Steinera, wydane zostały w 1881 i 1882 staraniem Akademii Nauk w Berlinie.

[46]) Przytoczę tu tylko trzy jego książki: *Analytisch-geometrische Entwickelungen* (Essen 1828 — 1831), *System der analytischen Geometrie* (Berlin 1835), *Theorie der algebraischen Kurven* (Bonn, 1839) oraz będące z niemi w związku rozprawy, ogłoszone w *Ann. Gergonne'a* i w *Journ. f. Math.*

[47]) Dzieło Staudta: *Geometrie der Lage*, w którém przedstawił swój system geometryi, wydane zostało w Norymberdze w r. 1847. Niezmierna zwięzłość stylu jest może przyczyną wielkiej trudności, z jaką dzieło to rozpowszechniało się; dziś dopiero, dzięki wydanym pod tym samym tytułem odczytom Reye'go (pierwsze wydanie 1866—1868), pomysły zawarte w dziele Staudta są znane uprawiającym geometryą. We Włoszech przygotowuje się obecnie pierwszy z przekładów tego dzieła na obcy język. Niemniej ważnemi są *Beiträge zur Geometrie der Lage* (w trzech zeszytach), które Staudt ogłosił w latach 1856—1860, po swojém dziele głównem. Podnosimy tu, że w tych przyczynkach wyłożona jest jedyna, ścisła, ogólna i zupełna teorya elementów urojonych w geometryi rzutowéj; teorya ta była wyjaśniana w różny sposób przez rozmaitych uczonych: jak Lüroth (*Math. Ann.* 8, 11), August (*Progr. der Friedriechs-Realschule in Berlin* 1872) i Stolz (*Math. Ann.* 4). O ściśle związanym z nią nowym rachunku rzutni *) (Rechnung mit den Würfen) porówn. oprócz wymienionych rozpraw Lürotha jeszcze prace Sturma (*Math. Ann.* 9), i Schrödera (tamże 10).

*) Rzutnią nazywamy ogół czterech elementów tego samego utworu elementarnego z uwzględnieniem porządku, w jakim je uważamy.

metrya syntetyczna pozyskała narzędzia do badania krzywych i powierzchni, dotąd dla niej niedostępnych i powstała geometrya czysta położenia, niezależna od pojęcia miary. Dzięki założonemu około tego czasu (1826) przez Crelle'go(1730—1855) dziennikowi, który wkrótce pozyskał zasłużoną sławę, głownie dla rozpraw Abel'a (1802 — 1829), Jacobi'ego i Steinera, wszystkie powyższe rezultaty szybko się rozpowszechniły. I tak, obok wymienionych uczonych, widzimy wielki i świetny zastęp ich uczniów, którzy zbierając plon na polach uprawionych przez mistrzów, wykazali płodność nasion, jakie ci rzucili.

Na tém kończę zarys ruchu umysłowego, który przygotował najnowsze badania geometryczne. Przy przejściu do nich, celem ułatwienia sobie zadania, podzielę wykład na różne części. Zajmę się najprzód teoryą krzywych płaskich i teoryą powierzchni, potém po zboczeniu do badań nad postacią linij krzywych i powierzchni, oraz nad geometryą liczącą (geometria numerativa), przejdę do badań nad krzywemi skośnemi, by następnie przedstawić powstanie i rozwój nauki o przekształceniach geometrycznych. Potém zajmę się geometryą prostéj i zakończę rozdziałami o geometryi nieeuklidesowéj i o teoryi rozmaitości wielowymiarowych. [48])

II.

Teorya krzywych płaskich.

Teorya ogólna krzywych płaskich powstała wraz z geometryą Descartes'a. Łatwo wyjaśnić sobie fakt tak późnego powstania téj ważnéj teoryi. W saméj rzeczy, określenie rzędu krzywéj, wynikający stąd podział krzywych na algebraiczne i przestępne, ścisłe pojęcie krzywéj ogólnéj w swym rzędzie— są to pojęcia w istocie analityczne. Ustanowienie tych pojęć drogą syntetyczną jest zadaniem bardzo trudném, które dziś dopiero zaczyna poddawać się powtarzanym usiłowaniom geometrów, gdy przeciwnie przy

[48]) Podział ten jest bezwątpienia nieco dowolny. Może ktoś znaleźć go niedogodnym, ze względu na to, że pewne teorye mogłyby z równém prawem należyć do kilku rozdziałów; pochlebiam sobie wszakże, że po dojrzałej rozwadze przyzna, że podział przezemnie wybrany nie jest pozbawiony znacznych korzyści.

stosowaniu układu współrzędnych jest rzeczą bardzo łatwą ścisłe określenie tych pojęć zasadniczych, kombinowanie ich i wyprowadzanie stąd wniosków interesujących.

Prawdę tego twierdzenia stwierdza fakt, że niezadługo po Descartes'ie odkryto najważniejsze własności, wspólne wszystkim krzywym algebraicznym. Takiemi np. są podane przez Newtona w trzech sławnych twierdzeniach, zawartych w jego *Enumeratio linearum tertii ordinis* (1706); daléj te, które uczniowie Newtona Côtes (1682—1716) i Maclaurin dali jako uogólnienie własności, odkrytych przez swego mistrza [1]); nakoniec te, które znalazł Waring (1734—1798.[2]) Prócz tego Maclaurin [3]) i Braikenridge (ur. około 1700, zm. po 1759) [4]) wskazali niektóre interesujące organiczne sposoby tworzenia krzywych, podobne do tych, jakie Newton wskazał dla stożkowych[5]). Wreszcie De Gua (1712—1786) [6]) podał metody do oznaczenia osobliwości linij krzywych płaskich, określonych za pomocą równań.

Zbyteczną jest rzeczą wspomnieć, że pierwsze metodyczne wykłady teoryi krzywych płaskich należą do dziedziny geometryi analitycznéj. Zawdzięczamy je Eulerowi [7]) i Cramerowi [8])

---

[1]) Côtes, *Harmonia mensuarum* (1722); Maclaurin, *De linearum geomericarum proprietatibus generalibus tractatus.* (W przekładzie francuskim de Jonquières'a w *Mélanges de Géométrie pure*, Paryż 1856.)

[2]) *Miscellanea analytica* etc. (1762); *Proprierates geometricarum curvarum* (1772); *Phil. Trans.* (1763—1791).

[3]) *Geometria organica*, 1720.

[4]) *Phil. Trans.* 1735; *Exercitationes Geometriae de descriptione linearum curvarum* (1733).

[5]) Zresztą, jak zauważył C. Taylor, (*Cambridge Proc.* 3) Newton sam rozciągnął na krzywe wyższego rzędu swój sposób organicznego tworzenia stożkowych, wskazany w *Enumeratio linearum tertii ordinis.*

[6]) *Usage de l'analyse de Descartes* (1740).

[7]) *Introductio in analysin infinitorum*, tom II.

[8]) *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques.* Należy tu wspomnieć o znakomitém dziele Jana Śniadeckiego (1756—1830) p. t.: *Rachunku algebraicznego teorya przystosowana do linij krzywych* (2 tomy, Kraków, 1783), którego tom drugi zawiera piękny i jasny wykład geometryi wyższéj, zgodny z ówczesnym stanem wiedzy. Jest to, rzec można, najpiękniejszy pomnik literatury matematycznéj polskiéj zeszłego stulecia. Przed Śniadeckim wydał Michał Hube (1737—1807) pracę o stożkowych w języku niemieckim (*Versuch einer analytischen Behandlung der Kegelschnitte*, Getynga, 1759 z przedmową Kästnera), Co do dziejów geometryi analitycznéj w Polsce patrz podręcznik profesora Wł. Zajączkowskiego: *Geometrya analityczna* (Warszawa, 1884) str. XXII—XXVIII. Tamże treściwy rys rozwoju geometryi analitycznéj str. XIV—XXI.

(1704—1752), którzy badali krzywe te z gruntu (jeden w roku 1748 drugi w 1750), zajmując się przeważnie osobliwościami, a zwłaszcza pytaniami, które dziś rozwiązujemy za pomocą środków geometryi nieskończonościowéj. W godném uwagi z wielu względów dziele Cramera znajdujemy już pierwsze badania nad przecięciami krzywych, a w nich wskazanie tego, co później nazwano „paradoksem Cramera“; jest to owa sprzeczność pozorna, zachodząca pomiędzy liczbą punktów, wystarczających do oznaczenia krzywéj danego rzędu, a liczbą przecięć dwu krzywych tego samego rzędu [9]. Sprzeczność tę w wiele lat późniéj (1818) usunął Lamé (1795—1870) za pomocą sławnéj zasady, noszącéj jego imię, a którą uważać można za kamień węgielny wspaniałéj budowy, wzniesionéj przy pomocy twierdzeń Gergonne'a [10]), Plückera [11]), Jacobi'ego [12]), Cayley'a [13]) i innych, na szczycie któréj wznosi się interpretacya geometryczna sławnego twierdzenia Abela.

Od Eulera, Cramera i od pracy: *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie*, w któréj Lamé wyłożył i zastosował z wielkiém powodzeniem wyżéj wymienioną zasadę, powinniśmy przejść do prac Plückera, które sprawiły wielki postęp w zajmującéj nas obecnie teoryi. W dziele tego znakomitego geometry: *System der analytischen Geometrie*, wydaném w roku 1835, zrobiony jest użytek z metody oznaczenia skróconego, zastosowanéj tu dla udoskonalenia klasyfikacyi krzywych płaskich 3-go rzędu, którą podejmowało było tylu znakomitych uczonych. W ogłoszonéj w cztery lata potém *Teoryi krzywych al-*

---

9) Na krótko przed wyjściem dzieła Cramera znalazł Euler (p. *Berliner Abhandlungen*, 1748), że z dziewięciu punktów zasadniczych pęka krzywych płaskich trzeciego rzędu jeden daje się oznaczyć z ośmiu pozostałych, że z szesnastu punktów zasadniczych pęka krzywych płaskich 4-go rzędu, trzy dają się oznaczyć z trzynastu pozostałych i t. d.

10) *Ann. Gergonne'a* 17, 19.

11) *Journ. f. Math.* 16; *Theorie der algebraischen Curven* (gdzie na str. 12—13 jest krótka historya tych twierdzeń).

12) *Journ. f. Math.* 15, albo *Gesammelte Werke*, Tom III.

13) *Cambridge Journ.* 3 i *Math. Ann.* 30; porówn. Bacharach, *Math. Ann.* 26; Zeuthen, tamże, 31.

14) Riemann, *Journ. f. Math.* 54; Clebsch, tamże 58; Roch, tamże 64; Clebsch i Gordan, *Theorie der Abelschen Functionen* (Lipsk 1866); Brill i Nöther *Ueber die algebraischen Functionen* i t. d. (*Math Ann.* 7); Cremona, *Bologna Mem.* 1870; Casorati, Cremona i Brioschi, *Lombardo Ren.* II, 2; Bobek, *Math. Ann.* 29, Küpper, tamże, 31 i t. d.

gebraicznych [15]), oprócz wyliczenia krzywych płaskich czwartego rzędu [16]), którego Bragelogne (1688—1744) [17]) i Euler [18]) zaledwie próbowali, jest postawioną i rozwiązaną kwestya wielkiéj ważności, a mianowicie znalezienie związku pomiędzy liczbami zwykłych osobliwości krzywéj płaskiéj. Już Poncelet odkrył (1818) związek pomiędzy rzędem a klasą krzywéj ogólnéj wswym rzędzie, a następnie oznaczył wpływ punktu podwójnego. Stosując do tych wyników zasadę dwoistości, napotkał inną sprzeczność pozorną, noszącą dziś nazwę „paradoksu Ponceleta“, nie potrafiwszy znaleźć zadawalniającego jéj wyjaśnienia. Uczynił to Plücker przy pomocy sławnych wzorów, noszących jego nazwisko, a pozwalających na znalezienie trzech z charakterystyk linij krzywéj, (rzędu, klasy, liczby punktów podwójnych, liczby stycznych podwójnych, liczby punktów przegięcia i punktów zwrotu), gdy się zna pozostałe charakterystyki.

Na pytanie w pewném znaczeniu odwrotne do pytania, rozwiązanego za pomocą wzorów Plückera, mianowicie, czy każdemu ich rozwiązaniu odpowiada krzywa faktyczna, należało odpowiedzieć przecząco, gdyż nowsze badania wykazały, że dla pewnych krzywych (wymiernych) liczba punktów zwrotu nie może przekraczać pewnéj granicy. [19])

Na inne pytanie, dotyczące rozciągnięcia wzorów Plückera na krzywe, posiadające osobliwości wyższego rzędu, odpowiadają badania Cayley'a i innych [20]), które doprowadziły do wniosku, że każda osobliwość linii krzywéj może być uważaną jako równo-

---

[15]) W pracy téj jest podaną i z widoczném wyróżnieniem stosowaną „zasada liczenia stałych“; wspominamy o tém, bo na niéj opartą jest metoda badania, któréj całego znaczenia znieść nie mogą przykłady błędów (por. najświeższą rozprawę Küppera w *Math. Ann.* 31), do któréj prowadzić może, przy niezachowaniu koniecznéj ostrożności.

Teoryą krzywych płaskich zajmują się i następujące książki, o istnieniu których wiem z cytaty Plückera, (*Theorie der algebraischen Curven*, str. 206). A. Peters, *Neue Curvenlehre* 1835; C. C. F. Krause, *Novae theoriae linearum curvarum originariae et vere scientificae specimina quinque prima. Edidit Schröder*, 1835.

[16]) Patrz też rozprawę Plückera, *Journ. Liouv.* 1.

[17]) *Mém. prés.* 1730—31—32.

[18]) *Introductio* (cyt. pod [7]). Zasady klasyfikacyi krzywych 3-go i 4-go rzędu według Eulera przedstawił Śniadecki w dziele wspomnianém (Tom II, str. 102 i następne).

[19]) Patrz Clebsch, *Vorlesungen über Geometrie* str. 352; Malet, *Hermathena*, 1880; Pellet, *Nouv. Ann.* II, 20, 1881.

[20]) Cayley, *Quart. Journ.* 7, i *Journ. f. Math.* 64; La Gournerie, *Journ. Liouv.* II, 14; Nöther, *Math. Ann.* 9; Zeuthen, tamże 10; Halphen, *C. R.*, 78.

ważna pewnéj liczbie punktów podwójnych, punktów zwrotu, punktów przegięcia i stycznych podwójnych.

Dodam jeszcze, że dzięki Jacobi'emu [21]), Hessemu (1811—1874) [22]), Salmonowi [23]), Cayley'owi [24]) i licznym ich komentatorom, [25]) jesteśmy dziś w posiadaniu eleganckich metod do oznaczania analitycznego punktów przegięcia krzywéj danéj przez równanie, jako też i punktów styczności ich stycznych podwójnych.

Te wszystkie i wiele innych pytań teoryi analitycznéj linij krzywych płaskich łatwo dziś poznać można dokładnie, dzięki znakomitemu podręcznikowi Salmona [26]), który tak potężnie przyczynił się do rozpowszechnienia najnowszych metod algebraicznych i geometrycznych.

Nie należy wszakże sądzić, aby w tych wszystkich badaniach niezbędném było ciągłe używanie analizy; przeciwnie obok wykładu teoryi krzywych płaskich Eulera, Cramera, Plückera, Salmona, powstała inna teorya również zupełna, lecz więcéj geometryczna.

W sławnym komunikacie, przedstawionym w roku 1848 Akademii berlińskiej, Steiner podejmując na nowo teoryą biegunowych punktu względem krzywéj, podaną dawniej przez Bobilliera (1797—1832) [27]), jako rozwinięcie krzywych średnicowych Newtona i Cramera, i badaną także przez Grassmanna (1809—1877), wykazał, że teorya ta może służyć za podstawę do badania krzywych płaskich, zupełnie niezależną od stosowania współrzę-

---

Journ. Liouv. II, 2; *Mém. prés.* 26; J. S. Smith, *Proc. Math. Soc.* 6; Brill, *Math. Ann.* 16; Raffy, tamże 23; Bertini, *Lombardo Rend.* 1888. Z tém pytaniem wiąże się badanie liczby przecięć dwu krzywych, pochłoniętych przez wspólny im punkt wielokrotny. Patrz do tego interesującą rozprawę Zeuthena, *Acta math.* 1.

[21]) *Journ. f. Math.* 40, por. Clebsch, tamże, 63.

[22]) *Journ. f. Math.* 36, 40, 41.

[23]) *Phil Mag.* październik 1858.

[24]) *Phil. Trans.* 1859.

[25]) N. p. Dersch, *Math. Ann.* 7.

[26]) *A treatise on higher plane curves* (1852); niemiecki przekład Fiedlera (Lipsk, 1873).

[27]) *Ann. Gergonne'a*

[28]) *Journ. f. Math.* 24 Teoryą biegunowych względem krzywych i powierzchni, uogólnili w ostatnim czasie w sposób godny uwagi: Clifford (1845—1879) *Proc. math. Soc.* 1868, albo *Mathem. Papers of Clifford* (1882, str. 115) Reye (*Journ. f. Math.* 72, 78). De Paolis poświęcił temu przedmiotowi interesującą pracę, ogłoszoną w *Lincei Mem.* 1885, 1886,

dnych, i wprowadził godne uwagi krzywe, współzmienne z daną, które dziś noszą nazwę jego, Hesse'go i Cayley'a. Te krótkie wskazówki wraz z badaniami samego Steinera, Chasles'a [29]) i de Jonquières'a[30]) nad powstawaniem krzywych algebraicznych przy pomocy pęków rzutowych krzywych niższego rzędu, posłużyły za podstawę do dzieła *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*[31]), w którém Cremona przy pomocy jednolitéj metody przedstawił i zawarł wszystkie najważniejsze zdobycze geometrów analitycznych. Ze względu na nadzwyczajny interes, na tym samym poziomie, co prace cytowane, znajduje się szereg rozpraw, w których Clebsch (1833 — 1872) pierwszy raz stosuje algebrę przekształceń liniowych do geometryi, a następnie rozjaśniwszy ważność pojęcia rodzaju krzywéj, wskazuje zastosowanie funkcyj eliptycznych [32]) i Abelowych do nauki rozciągłości i używa ich do badania krzywych wymiernych i eliptycznych [33]). Wprawdzie Brill i Nöther w rozprawie [34]), któréj znaczenie rośnie z dniem każdym, wykazali, że teorya funkcyj algebraicznych w wielu przypadkach zastąpić może powyższe funkcye przestępne, nie zmniejsza to atoli, owszem powiększa uznanie dla metod Clebscha, gdyż usiłowania znakomitych umysłów, skierowane ku uwolnieniu się od

---

[29]) *C. R.* 1853.

[30]) *Essai sur la génération des courbes géométriques*, 1858 (*Mém. prés.* 16). Por. Härtenberger, *Journ. f. Math.* 58; Olivier, tamże, 70, 71; Schoute, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 4, i najświeższe badania de Jonquières'a o liczbie maksymalnéj punktów wielokrotnych, które dowolnie przyjąć można dla krzywéj płaskiéj (*C. R.* 105).

[31]) Ogłoszone w 1862 w *Bologna Mem.* Niechaj mi tu będzie wolno wypowiedzieć życzenie, by szanowny prof. Cremona, którego dążenie do rozpowszechnienia studyów geometrycznych jest znaném, zechciał znakomite prace swoje nad teoryą krzywych i powierzchni uczynić dostępnemi dla wszystkich za pomocą nowych wydań. Po niemiecku wyszły one w przekładzie Curtze'go p. t. *Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Kurven* (Greifswald, 1865); *Grundlage einer allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung* (Berlin, 1870)

[32]) Jako przygotowawcze w tym przedmiocie należy uważać badania Aronholda (*Berliner Ber.* 1861), oraz badania Brioschi'ego (*C. R.* 1863, 1864) o przedstawieniu współrzędnych punktów pewnych krzywych przez funkcye eliptyczne parametru.

[33]) *Journ. f Math.* 58, 64. Rezultaty, otrzymane przez Clebscha, rozpowszechniło piękne dzieło Lindemanna p. t. *Vorlesungen über Geometrie von A. Clebsch* (I tom, Lipsk, 1876), którego tom II-gi z upragnieniem jest oczekiwany przez matematyków.

[34]) *Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie Math. Ann.* 7.

pewnego środka pomocniczego, są właśnie najlepszym dowodem jego potęgi.

Prace, dotąd omówione, traktowały o ogólnych własnościach krzywych algebraicznych płaskich [35]) Obok nich jest mnóstwo pięknych rozpraw specyalnych, przedmiotem których są oznaczone kategorye krzywych; o tych rozprawach pomówimy teraz w krótkości.

Pomiędzy pracami tego rodzaju należy wymienić najprzód rozprawy: Maclaurina [36]), Sylvestra [37]), Cayley'a [38]), Salmona [39]), Durège'a [40]), Cremony [41]), Sturma [42]), Küppera [43]), Grassmanna [44]), Milinowskiego [45]) i wielu innych o krzywych trzeciego rzędu [46]), rozdziały *Rachunku barycentrycznego*, rozmaite prace Em. Weyra [47]), Clebscha i wielu innych [48]) o krzywych wymiernych; ważne badania Steinera

---

[35]) Do prac, podanych w tekscie, należy dodać rozprawy: Brilla (*Math. Ann.* 13), Geisera (*Annali di Matem.* II, 9), Del Pezza (*Napoli Rend.* 22) o związku między osobliwościami linii krzywéj i jéj krzywą Hessego, daléj Laguerre'a (*C. R.* 70, *Bull. Soc. Math.* 3), Holsta (*Math. Ann.* 11 i *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab* 7), Clifforda (*Math.Papers* str. 147 —151, 163, 612) i Humberta (*Journ. Liouv.* IV, I) o własnościach metrycznych linij krzywych.

[36]) *De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus.*

[37]) Porówn. Salmon-Fiedler, *Höhere ebene Kurven*, rozdział 5.

[38]) *Phil. Trans.* 1857, *Journ. Liouv.* 9, 10.

[39]) *Journ. f. Math.* 42.

[40]) *Zeitschr. f. Math.* 17; *Prager Berichte*, 1871, także dzieło: *Die ebenen Kurven dritter Ordnung* (Lipsk, 1871) i rozprawę Genta (*Zeitschr. f. Math.* 17).

[41]) *Giorn. di Matem.* 2.

[42]) *Journ. f. Math.* 90.

[43]) *Prager Abh.* VI, 5.

[44]) *Göttinger Nachr.* 1871 i 1872.

[45]) *Journ. f. Math.* 78.

[46]) Harnack, *Math. Ann* 9; Caporali, *Lincei Atti* III, 1; Folie i La Paige, *Mém. de l'Acad. de Belgique* 43; Halphen, *Math. Ann.* 15; *Bullet. Soc. math.* 9; Schlesinger, *Math. Ann.* 30 i 31.

[47]) Patrz *Giorn. di Matem.* 10, *Wiener Ber.* 1874, 1878 i *Prager Ber.* 1872, 1873, 1874 i t. d.

[48]) Co do prac Clebscha patrz tomy *Journ. f. Math.* zacytowane pod [33]). O krzywych płaskich wymiernych 3-go rzędu traktują prace: Durège'a (*Math. Ann. 1*), Igela (tamże 6), Rosenowa (Dissertation, Wrocław 1873), Seuberta (*Math. Ann.* 12), Dingeldey'a (tamże: 27, 28); o krzywych czwartego rzędu: Brilla (*Math Ann.* 12), Nagela (tamże 19), Stahla (*Journ. f. Math.* 101) i F. Meyera (*Math. Ann.* 31); o krzywych 5-go rzędu—Rohna (tamże 25), a o krzywych wymiernych dowolnego rzędu pisma: Haase'go (*Math. Ann.* 2),

i Chasles'a nad krzywemi, mającemi środek[49]); rozprawa Steinera nad hypocykloidami trójostrzowemi[50]) oraz prace, mające na celu dowiedzenie lub uogólnienie własności wypowiedzianych w téj rozprawie[51]); interesujące badania Bertini'ego[52]) o krzywych wymiernych, dla których można dowolnie wyznaczyć punkty wielokrotne; ważne studya Brilla o krzywych rodzaju 2, nadzwyczaj piękne rozprawy Kleina i Lié'go[54]) o krzywych dozwalających na przekształcenie nieskończonościowe w same siebie; badania Foureta o krzywych, które są własnemi biegunowemi wzajemnemi ze względu na nieskończenie wiele stożkowych[55]); wreszcie Smitha (1826 — 1883)[56]) i Cayley'a [57]) o osobliwościach krzywych modularnych.

Obok rozpraw wymienionych, zasługuje na wybitne miejsce rozprawa Steinera o wielokątach wpisanych w krzywą płaską 3-go rzędu [58]), lub w krzywą czwartego rzędu z dwoma punktami podwójnemi, na którą zwróciły na nowo uwagę uczonych najświeższe prace Küppera [59]) i Schoute'go [60]). Z powodu szczupłości miejsca jesteśmy w stanie wspomnieć tylko pobieżnie o badaniach Cayley'a: *On polyzomal curves othervise the curves* $\sqrt{u}+\sqrt{v}+....=0$, [61]) Grassmanna, Clebscha, [62]) Schrö-

Lürotha (tamże, 9), Pascha (tamże, 18), Brilla (tamże, 20), Weltziena (tamże, 26), Garbieri'ego (*Giorn. di Mat.* 16). Badania syntetyczne nad krzywemi płaskiemi ogłasza M. Łazarski (patrz *Rozpr i Spr. Akademii Umiejętności w Krakowie*, 13).

49) *Journ. f. Math.* 47; *C. R.* 1871.

50) *Journ. f. Math.* 53.

51) Güssfeldt, *Math. Ann.* 2; Laguerre, *Bull. Soc. math.* 7; Cremona i Clebsch, *Jour. f. Math.* 64; Kiepert, *Zeitschr. f. Math.* 17; Frahm, tamże, 18; Milinowski, tamże, 19; Intrigila, *Giorn. di Mat.* 23; Kantor, *Wiener Ber.* 1878 i *Bull. des sciences math.* II, 3.

52) *Giorn. di Mat.* 15.

53) *Journ. f. Math.* 65.

54) *Math. Ann.* 4.

55) *Bull. de la Société philomatique* VII, 1.

56) Jeżeli p jest kwadratem modułu funkcyi eliptycznéj, q kwadratem modułu, przekształconego za pomocą przekształcenia pierwotnego rzędu nieparzystego, $F(p, q, 1)=0$ zaś odpowiedniém równaniem modularném, to równaniem krzywéj modularnéj jest $F(\alpha, \beta, \gamma)=0$. Patrz *Proc Math. Soc.* 9.

57) *Phil. Trans.* 164.

58) *Journ. f. Math.* 65; por. Ed. Weyr, tamże, 73; Hurwitz, *Math. Ann.*, 9

59) *Math. Ann.* 24.

60) *Journ. f. Math.* 95, 99; patrz także rozprawę Augusta, *Archiv Grunerta*, 59.

61) *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 25.

62) *Math. Ann.* 5.

tera[63]) i Durège'a[64]), odnoszących się do tworzenia krzywych płaskich 3-go rzędu; Lürotha[65]), Casey'a[66]), Darboux[67]), Siebecka[68]), Cronego[69]), Zeuthena[70]) i innych o niektórych specyalnych krzywych czwartego rzędu; Battaglini'ego o krzywych syzygetycznych trzeciego rzędu[71]), Rembielińskiego[72]) o krzywych iloczynowych, oraz o innych badaniach, które zasługiwały by na wzmiankę oddzielną. Nie mogę atoli zamilczeć o pracach Hessego nad punktami przegięcia krzywéj trzeciego rzędu i nad równaniem, które służy do ich oznaczenia[73]) daléj o pracach tegoż Hesse'go[74]), Steinera[75]), Aronholda[76]) (1819 — 1884) nad stycznemi podwójnemi krzywych czwartego rzędu, które to prace zasługują na miejsce wybitne, gdyż wyprowadziły na jaw wiele godnych uwagi własności powtórnie potém odkrytych przez Geisera[77]).

---

63) *Math. Ann.* 6; porów. rozprawę Harnacka, *Zeitschr. f. Math.* 22. Najważniejszych twierdzeń znalezionych na drodze syntetycznéj przez Durège'a i Schrötera dowiódł analitycznie Walter w rozprawie: *Ueber den Zusammenhang der Kurven dritter Ordnung mit den Kegelschnittschaaren* (Giessen 1878). Do pism Schrötera możemy dołączyć dopiero co wydany czysto geometryczny podręcznik: *Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung* (Lipsk, 188 8).

64) *Math. Ann.* 5.

65) *Math. Ann.* 1, 13; porówn. Clebsch, *Journ. f. Math.* 59.

66) *Irish Trans.* 1869.

67) Patrz pracę tegoż: *Sur une classe remarquable des courbes et de surfaces algébriques* (Paryż 1873).

68) *Journ. f. Math.* 57, 59, 66.

69) *Tidsskrift for Mathematik* IV, 3.

70) *Forhandlinger of Videnskabs Selskab af Kjobenhavn*, 1879.

71) Ogłoszone w *Collectanea mathematica in memoriam D. Chelini* (Medyolan, 1881).

72) *Teorya krzywych iloczynowych* (Warszawa, 1826). Jeżeli na prostéj weźmiemy n punktów stałych i jeżeli rzędna punktu ruchomego R równa się iloczynowi odległości tego punktu od n punktów stałych, to koniec rzędnéj opisuje krzywą *iloczynową*. Autor bada własności tych krzywych (styczne, punkta przegięcia), szczególne ich przypadki i podaje zastosowania do teoryi równań.

73) *Journ. f. Math.* 28, 34, 38.

74) *Journ. f. Math.* 49, 55; porów. Cayley (tamże, 58).

75) *Journ. f. Math.* 49.

76) *Berliner Ber.* 1864; *Nouv. Ann.* II, 11.

77) *Math. Ann.* 1; *Journ. f. Math.* 72.

za pomocą rozważań stereometrycznych, przez Clebscha zaś [78]) i Rocha [79]) badanych przy pomocy teoryi funkcyj Abelowych.

III.

Teorya powierzchni.

Duch uogólnienia, który kierował badaniami geometrycznemi od chwili, gdy analiza zaczęła wywierać wpływ swój, więcéj lub mniej wyraźny, pobudził uczonych do zajęcia się zjawiskami przestrzeni, przedstawiającemi analogią do zjawisk badanych na płaszczyznie. Stąd to badania nad powierzchniami nastąpiły szybko po badaniach nad krzywemi; teorya wszakże tych utworów jest pochodzenia nowoczesnego.

W saméj rzeczy, geometrowie greccy znali tylko niektóre powierzchnie szczególne (kulę, walec, stożek, konoidy i sferoidy, powierzchnie plektoidalne i niewiele innych). Dopiero Wren, Parent i Euler rozpoczęli badanie powierzchni drugiego rzędu, a szkoła Monge'a odkryła najważniejsze własności tych powierzchni, godnych w najwyższym stopniu uwagi. [1]) Liczny zastęp geometrów,

---

[78]) Porówn. cytatę 33).

[79]) *Jour. f. Math.* 66. O stycznych podwójnych linij krzywéj 4-go rzędu: Riemanna, *Zur Theorie der Abelschen Functionen für das Fall* $p = 3$; *Gesammelte Werke* (Lipsk 1876) str. 456—499; Nöthera, *Math. Ann.* 15; Cayleya, *Journ. f. Math.* 94; Frobeniusa (tamże, 99); Freyberga, *Math. Ann.* 15; H. Webera (tamże, 27).

[1]) Dla okazania, jak ważny udział mieli uczniowie Monge'a w utworzeniu teoryi powierzchni 2-go rzędu, wystarczy przypomnieć, że szkole téj zawdzięczamy podwójny sposób tworzenia hyperbolojdy jednopowłokowéj i parabolojdy hyperbolicznéj za pomocą ruchu prostéj (Monge, *Journ. Éc. polyt.* 1) oraz wszystkich powierzchni 2-go rzędu, z wyjątkiem parabolojdy hyperbolicznéj, za pomocą ruchu koła. (Hachette, *Eléments de géométrie a trois dimensions*); Monge'owi i Hachette'owi zawdzięczamy dowód istnienia trzech płaszczyzn głównych powierzchni 2-go rzędu; Monge'owi (*Correspondance sur l'École polytechnique*) odkrycie miejsca wierzchołków trójścianów trójprostokątnych, których krawędzie są stycznemi do powierzchni 2-go rzędu; Bobillier'ow *Ann. Gergonne'a*, 18)— miejsca wierzchołków trójścianów trójprostokątnych, których ściany są stycznemi do powierzchni 2-go rzędu. Monge wyznaczył linie krzywizny elipsojdy (*Journ. Éc. polyt.* 2), Livet (1783—1812; od 1809 był profesorem Szkoły artyleryi i inżynieryi w Warszawie) *Journ Éc. polyt.* 16 i Binet (tamże, 13) zastosowali znane twierdzenia Apolloniusa do przestrzeni.

w wieku naszym, którzy powierzchnie te uczynili przedmiotem swych badań, dodał do tych pierwszych własności wiele innych, i dzięki pracom takich uczonych, jak: Jacobi[2]), Mac-Cullagh (1809—1847)[3]), Chasles[4]), Hesse[5]), Seydewitz[6]), Schröter[7]), i t. d. teorya powierzchni drugiego rzędu mogła być wprowadzoną do wykładu elementarnego, oraz traktowaną metodycznie, zarówno na drodze analitycznéj jak i syntetycznéj. [8])

Lecz obok nauki o powierzchniach drugiego rzędu powstała i rozwinęła się teorya powierzchni rzędów wyższych.

Pierwszy z nich, według świadectwa Karola Hubego (1766—1845) [*Roczniki Tow. Nauk. krakowskiego*] (1824) ma zasługę wprowadzenia do Polski wykładów geometryi wykreślnéj. Tenże Karol Hube ogłosił w *Rocznikach Towarzystwa Nauk. krakowskiego* (9, 11, 17, 18) kilka rozpraw z geometryi analitycznéj, mających związek z pracami Monge'a i Chasles'a o powierzchniach *Correspondance sur l'École polyt.*) Dupin (*Journ. École. polyt.* 14) podał niektóre interesujące metody tworzenia takich powierzchni. Brianchon (tamże, 13) wykazał, że biegunowa wzajemna powierzchni drugiego stopnia jest również powierzchnią stopnia 2-go i t. d.

2) *Journ. f. Math.* 12.

3) *Irish Proc.* 3.

4) *Aperçu historique.* Noty 25, 28, 31, 32; *C. R.* 1855; *Journ. Liouv.* 1860 i t.d

5) *Journ. f. Math.* 18, 20, 24, 26, 60, 73, 85, 90.

6) *Archiv Grunerta*, 9.

7) *Journ. f. Math.* 62. O powierzchniach drugiego rzędu, patrz także rozprawy: Townsenda (*Cambridge Journ.* 3), Darboux (*Bull. Soc. Math.* 2), Meray'a i Cremony (*Annal. di matem.* I, 3) i P. Serreta, *Géométrie de direction* Paryż, 1869). Jedném z najważniejszych pytań, przedstawiających się w *teoryi* powierzchni 2-go stopnia, jest konstrukcya tychże przy pomocy danych dziewięciu ich punktów. Pytanie to rozwiązali: Seydewitz (*Archiv Grunerta* 9), Chasles (*C. R.* 1855), Steiner (*Gesammelte Werke.* Tom II, *Nachlass*), Schröter (*Journ. f. Math.* 62), Sturm (*Math Ann.* 1) i Dino (*Napoli Rend.* 1879). Z tém pytaniem wiąże się badanie ósmego punktu, wspólnego wszystkim powierzchniom rzędu 2-go, przechodzącym przez siedm punktów danych, które stanowiło przedmiot prac Hessego (*Journ. f. Math* 20, 26, 73, 75, 99), Picqueta (tamże, 73, 99), Caspary'ego, Schrötera, Sturma, Zeuthena (tamże, 99) i Reye'go (tamże, 100).

Inném interesującém zadaniem jest badanie powierzchni drugiego stopnia, ze względu na które dwie dane dane powierzchnie drugiego stopnia są biegunowemi wzajemnemi. Przedmiot ten badali: Battaglini (*Lincei Atti*, 1875), d'Ovidio (*Giorn. di Matem.*, 10) i syntetycznie Thieme (*Zeitsch. f. Math.* 22).

O niektórych powierzchniach drugiego stopnia, mających specyalne własności metryczne (hyperbolojdy prostokątne, równoboczne) pisali: Steiner, Chasles[9]) i Gergonne[10]) pierwsi odkryli zadziwiające własności tych utworów. Poncelet określił klasę powierzchni algebraicznéj ogólnéj w swym rzędzie[11]) i rozpoczął w ten sposób badania, mające doprowadzić do związków, przy pomocy których Salmon[12]) i Cayley[13]) próbowali rozwiązać kwestye analogiczne do tych, jakie Plücker przy pomocy swych sławnych wzorów rozwiązał dla linij krzywych.

Jacobi[14]), a późniéj Reye[15]), zajmowali się krzywemi i grupami punktów, powstającemi przy przecięciu powierzchni algebraicznych; Chasles[16]), Cremona[17]), Reye[15]), Escherich[18]), Schur[19]), — powstawaniem tychże za pomocą rzutowych i wzajemnych układów powierzchni rzędu niższego, Grassmann[20])—innemi sposobami powstawania. Salmon[21])

(*Journ. f. Math.* 2 i *Systematische Entwickelung*) Chasles (*Journ. Liouv.* 1 [1836]), Schröter (*Journ. f. Math.* 85), Schönfliess (*Zeitschr. f. Math.* 23, 24 i *Journ. f. Math.* 99); Vogt (*Journ. f. Math.* 86) i Ruth (*Wiener Ber.* 80).

Do studyów najnowszych o powierzchniach 2-go rzędu należą studya Zeuthena (*Math Ann.* 19, 26) nad teoryą figur rzutowych na takiéj powierzchni, daléj niektóre piękne badania Vossa (*Math Ann.* 25, 26), mające na celu rozwinięcie rezultatów, do jakich doszli Poncelet i Bruno (*Torino Atti.* 17). Godnemi też uwagi są zastosowania funkcyj hypereliptycznych, wskazane przez Staude'go (*Math. Ann.* 20, 21, 25, 27).

8) Świadczą o tém działy, jakie poświęcili tym powierzchniom w swych cennych dziełach: Hesse (*Vorlesungen über die Geometrie des Raumes*), Salmon (*Geometry of three dimensions*), Cremona (*Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*), Reye (*Die Geometrie der Lage*) i Schröter (*Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung.*)

9) *Mémoire de Géométrie sur deux principes généraux de la science.* (Dodatek do *Aperçu historique*).

10) *Ann. Gergonne'a*, 17.

11) *Mémoire sur la théorie générale des polaires reciproques* (*Journ. f. Math.* 4).

12) *Cambridge Journ.* 2, 4; *Irish Trans.* 23.

13) *Cambridge Journ.* 7, 8; *Phil. Trans.* 1869, 71, 72. Patrz téż rozprawy: Zeuthena (*Math. Ann.* 4, 9, 10), de Jonquières'a (*Nouv. Ann.* 13) i Halphena (*Annali di Matem.* II, 9.)

14) *Journ. f. Math.* 15.

15) *Math. Ann.* 1, 2. Porówn. rozprawy: Padovy w *Giorn. di Matem.* 9 i Valentinera w *Tidsskrift for Mathematik* IV, 3.

16) *C. R.* 45.

17) *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie* (*Bologna Mem.* II, 6, 7.)

18) *Wiener Ber.* 1877, 1882.

19) *Math. Ann.* 27.

20) *Journ. f. Math.* 49.

21) *Cambridge Journ.* 4; *Quart. Journ.* 1; *Phil. Trans.* 1860.

Clebsch[22]) Sturm[23]), Schubert[24]) i inni zajmowali się ważną klasą zadań odnoszących się do prostych, mających z powierzchnią daną styczność rzędu z góry oznaczonego; wiele innych pytań rozwiązał Voss[25]); wreszcie Schur odkrył niedawno konstrukcyą liniową[26]) dla powierzchni jakiegokolwiek rzędu. Reye'mu zawdzięczamy interesujące rozwinięcie teoryi biegunowych powierzchni rzędu dowolnego[27]).

Mimo tych i innych prac, które dla krótkości musimy pominąć, mimo pięknych wykładów Salmona[28]) i Cremony[29]), nie można powiedzieć, by teorya powierzchni postąpiła daleko. Pytania, jakie pozostają jeszcze do rozwiązania, są liczne i pierwszorzędnéj wagi, a i środki, jakiemy rozporządzamy dla przezwyciężenia trudności przy rozwiązaniu, nie są jeszcze dostatecznie wydoskonalonemi. Oto powód, dla którego tylu uczonych zwróciło się do badania powierzchni specyalnych, w nadziei zdobycia na tém polu nietylko bogatszego żniwa prawd, ale i dojścia do metod badania, dających się uogólnić. Że część tych oczekiwań nie została zawiedzioną, dowodem liczne rezultaty, otrzymane dla powierzchni 3-go stopnia i dla niektórych powierzchni 4-go rzędu, z czego właśnie teraz zdam sprawę.

Najważniejsze dwie własności powierzchni 3-go rzędu są, jak wiadomo, te: powierzchnia taka zawiera 27 prostych i posiada pięciościan, którego wierzchołkami są punkty podwójne, krawędziami zaś proste jéj powierzchni Hessego. Anglia i Niemcy dzielą zaszczyt tego odkrycia, gdyż w roku 1849 Cayley i Salmon[30]) oznaczyli proste powierzchni 3-go rzędu, w roku 1851 Sylvester[31]) odkrył pięciościan, w roku zaś 1853, niezależnie zupełnie od poprzednich badaczy, Steiner wykazał istnienie 27 prostych

---

[22]) *Journ. f. Math.* 58, 63.

[23]) *Journ. f. Math.* 72.

[24]) *Math. Ann.* 10, 11, 12; *Abzählende Geometrie*, rozdział 5. Patrz téż Krey, *Math. Ann.* 15.

[25]) *Math. Ann.* 16, 27, 30, *Abhandlungen der k. Bayr. Akad. der Wiss.* (II Cl. Bd. 16, II Abth.)

[26]) *Math. Ann.* 23.

[27]) *Journ. f. Math.* 72, 78, 79, 82.

[28]) *Geometry of three dimensions*; w niemieckim przekładzie Fiedlera: *Analytische Geometrie des Raumes* w 2-ch tomach, 3 wydanie 1879/80.

[29]) *Preliminari* i t. d. Porówn. cytatę 17-ą.

[30]) Porówn. prace, wymienione w cyt. 12 i 13.

[31]) *Cambridge Journ.* 6.

i pięciościanu w sławnym komunikacie, przedstawionym Akademii berlińskiéj [32]). Lecz gdy studya geometrów angielskich przez długi czas pozostały bez dalszego ciągu [33]), to przeciwnie praca geometry niemieckiego wyłołała cały szereg pism, dzięki którym teorya powierzchni trzeciego rzędu wzniosła się szybko do niespodziewanego stopnia doskonałości. Pomijając rozprawy Schrötera [34]), Augusta [35]) i innych, w których są dowiedzione niektóre twierdzenia, wypowiedziane przez Steinera, zwrócę uwagę czytelnika na cieszące się zasłużoną sławą rozprawy Cremony [36]) i Sturma [37]) o tych powierzchniach, uwieńczone w r. 1866 przez Akademią berlińską nagrodą imienia Steinera; rozprawy, do których zwrócić się musi każdy pragnący obznajmić się z temi ważnemi formami geometrycznemi. Nie mogę się tu zatrzymywać nad rozmaitemi sposobami tworzenia powierzchni 3-go rzędu, które Grassmann[38]), August[39]), Affolter[40]) i Picquet[41]) dołączyli do metod, podanych przez Steinera; nad konstrukcyą, podaną przez La Paige'a[42]); nad licznemi twierdzeniami o rozmieszczeniu prostych płaszczyzn potrójnie stycznych oraz o krzywych na powierzchni 3-go stopnia, odkrytemi niedawno przez Cremonę [43]), Affoltera [44]), Sturma [45]) i Bertiniego [46]); nad własnościami pewnych heksaedrów, związanych z powierzchnią 3-go rzędu,

---

32) Ogłoszona także w *Journ. f. Math.* 53.

33) Jedyną znaną mi pracą, będącą w związku z badaniami Cayley'a i Salmona, jest praca Schläfli'ego (*Quart Journ.* 2), ważna szczególnie dla tego, że zawiera pojęcie „dwuszóstki" (bisestupla).

34) *Journ. f. Math.* 62.

35) *Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis* (Berlin, 1862).

36) *Journ. f. Math.* 68; daléj *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen* (Berlin, 1870), w któréj to książce znajduje się przekład niemiecki Curtze'go pracy *Preliminari* i t. d. (cyt 17, 29) oraz rozprawy konkursowéj Cremony.

37) *Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung*, Lipsk 1867.

38) *Journ. f. Math.* 51; porówn. pracę Schrötera (tamże, 96).

39) Porów. prace, cyt. pod Nr 35 i także Schuberta *Math. Ann.* 17.

40) *Arch. Grunerta*, 56.

41) *Bull. soc. math.* 4.

42) *Acta mathem.* 3.

43) *Lombardo Rend.* marzec 1871.

44) *Arch. Grunerta* 56.

45) *Math. Ann.* 23.

46) *Lombardo Rend.* 1884; *Annali di Matem.* II, 12.

badanemi przez Cremonę[47]), Caporali'ego [48]), Reye'go [49]) i Beltrami'ego [50]), jako też nad 12-ma wpisanemi w nią pięciościanami zupełnemi, odkrytemi przez Zeuthena [51]). Powiem tylko, że klasyfikacya tych powierzchni, oparta na uważaniu prostych na nich leżących, była dokonaną przez Schläfli'ego[52]), a nowsza oparta na pięciościanie—przez Rodenberga[53]); że badanie dokładne i szczegółowe powierzchni prostoliniowych trzeciego stopnia (z których jedna odkrytą została przez Cayley'a), stanowi przedmiot cennych prac Cremony[54]), Em. Weyra[55]), Benno Kleina[56]) że tak nazwana powierzchnia przekątna stanowi część ważną w badaniahc Clebscha nad równaniami 5-go stopnia[57]); że inne przypadki szczególne były rozważane w niektórych wartościowych rozprawach Cayley'a [58]) i Eckardta [59]). Jeżeli jeszcze wspomnę, że badania Salmona [60]), Clebscha [61]), Gordana [62]), De Paolisa [63]) wykazały znaczenie geometryczne znikania zasadni-

---

[47]) *Math. Ann.* 13; *Lincei Mem.* 1876—1877.

[48]) *Napoli Rend.* 1881.

[49]) *Journ. f. Math.* 78.

[50]) *Lombardo Rend.* 1879.

[51]) *Acta math.* 5.

[52]) *Phil. Trans.* 1863; por. Cayley (tamże, 1869).

[53]) *Math. Ann.* 14.

[54]) *Lombardo Atti*, 1861.

[55]) *Theorie der mehrdeutigen Elementargebilde*, Lipsk 1869; *Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein- zweideutiger Gebilder*, Lipsk, 1870.

[56]) *Ueber die geradlinige Fläche dritter Ordnung und deren Abbildung auf eine Ebene* (*Dissertation*, Strasburg 1876).

[57]) *Math. Ann.* 4.

[58]) *Phil. Mag.* 1864.

[59]) *Math. Ann.* 10.

[60]) *Phil. Trans.* 150.

[61]) *Journ. f. Math.* 58.

[62]) *Math. Ann.* 5.

[63]) *Lincei Mem.* 1880 — 1881. Porów. też notę Brioschi'ego w *Lincei Atti*, II, 3, gdzie dowodzi się, że 45 płaszczyzn potrójnie stycznych powierzchni trzeciego stopnia są wspólnemi trzem powierzchniom dziesiątéj klasy. Niedawno znalazł Bauer (*Abh. der Bayr. Akad. der Wissen.* 14, 1883) na drodze analitycznéj to, co wypowiedział już był Sturm w r. 1867 w swoich „Badaniach syntetycznych nad powierzchniami 3-go rzędu“ (*Synthetische Untersuchungen über Flächen 3-er Ordnung*), że krzywa przecięcia powierzchni 3-go rzędu z jéj powierzchnią Hesse'go, jest dla obu powierzchni krzywą paraboliczną; jest to rezultat godny uwagi, gdyż stanowi analogon w przestrzeni do znanego twierdzenia o krzywéj płaskiéj 3-go rzędu.

czych form niezmiennikowych formy czwórkowéj trzeciego stopnia, która przyrównana do zera, przedstawia we współrzędnych jednorodnych powierzchnią trzeciego rzędu; że wreszcie Jordan [64]) gruntownie zbadał naturę równania, służącego do określenia takiéj powierzchni,—to sądzę, że dałem czytelnikowi momenta wystarczające do uzasadnienia wniosku (wyżéj już przezemnie przytoczonego), że teorya tych utworów geometrycznych, z jakiegokolwiek punktu uważana, dosięgła znakomitego stopnia doskonałości.

Nie można tego samego powiedzieć o teoryi powierzchni czwartego rzędu, których kilka tylko klas zostało dokładniéj zbadanych; o każdéj z nich krótko powiem.

Na pierwszém miejscu kładę powierzchnią rozwijalną czwartéj klasy, opisaną na dwóch powierzchniach drugiego stopnia, i powierzchnie prostoliniowe czwartego stopnia. Pierwsze były badane przez Ponceleta [65]) i Chasles'a [66]), drugie przez Chasles'a [67]), Cayley'a [68]) i dokładniéj przez Cremonę [69]). Daléj idą powierzchnie 4-go rzędu, na których istnieją szeregi stożkowych; te były z nadzwyczajną bystrością określone przez Kummera [70]); Z nich dwie zasługują na szczególną wzmiankę, ponieważ były przedmiotem licznych badań, a mianowicie: powierzchnia 4-go rzędu z podwójną stożkową i powierzchnia rzymska Steinera.

Godną uwagi własność pierwszéj, a mianowicie, że podwójna na niéj opisana rozwijalna, składa się z pięciu stożków 2-go rzędu, odkrył Kummer w roku 1864. Jednocześnie znalazł Moutard [71]) tę samę własność dla przypadku, gdy podwójna linia krzywa powierzchni jest kołem urojoném [72]), położoném w nieskończoności; a jednocześnie z Darboux [73]), zauważył on, że w tym przypadku, powierzchnia należyć może do układu potrójnego powierzchni ortogonalnych, utworzonych z powierzchni tego samego

---

[64]) *Journ. Liouv.* II, 14; *C. R.* 68, 70; *Traité des substitutions et des équations algébriques* (Paryż 1870.

[65]) *Traité des propriétés projectives de figures.*

[66]) *C. R.* 1862.

[67]) Tamże, 1864.

[68]) *Phil. Trans.* 1864.

[69]) *Bologna Mem.* 1868.

[70]) *Berliner Ber.* 1864; *Journ. f. Math.* 64.

[71]) *Nouv. Ann.* II, 5.

[72]) Cyklida Dupina należy do nich.

[73]) Porówn. *C. R.* 1864.

gatunku. Od téj chwili powierzchnie czwartego rzędu, mające za linią podwójną koło urojone położone w nieskończoności, były wielokrotnie badane przez Darboux [74]) Laguerre'a (1834—1886) [75]) i Casey'a [76]); mające za linią podwójną stożkową dowolną były badane przez Cremonę [77]), Geisera [78]), Sturma [79]), Zeuthena [80]), Clebscha [81]), Korndörfera [82]), Berzolari'ego [83]) i Domscha [84]), który stosował do nich funkcye eliptyczne; mające wreszcie stożkową kuspidalną, przez Tötössy'ego [85]). Co się tyczy klasyfikacyi tych powierzchni, to niechaj mi wolno będzie przytoczyć moje nazwisko [86]) obok nazwiska mojego drogiego przyjaciela Segre'go [87]).

Powierzchnia rzymska Steinera wielokrotnie ściągała na siebie uwagę geometrów, dzięki głównie dwóm własnościom, z których jedna—że każda z płaszczyzn stycznych przecina ją według dwóch stożkowych—była badaną przeważnie przez syntetyków, druga zaś—że współrzędne jednorodne jéj punktów mogą być wyrażone jako zupełnie ogólne formy kwadratowe trójkowe—była przedmiotem badań analityków [88]). Kto pragnie poznać wszystkie własności téj powierzchni [89]), znajdzie je wyłożone w rozprawach syn-

---

74) Badania Darboux zestawione są tu w cytowaném już dziele: *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (Paryż, 1873).

75) Patrz wyliczenie prac, znajdujące się na końcu dopiero co wymienionego dzieła, oraz *Notice sur la vie et les travaux de M. Laguerre* przez Poincaré'go w *C. R.* 104.

76) *Phil. Trans.* 1871.

77) *Lombardo Rend.* 1871.

78) *Journ. f. Math.* 70.

79) *Math. Ann.* 4.

80) *Om Flader af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnitt* (Kopenhaga, 1879). Téj rozprawy przekład włoski ogłosiłem w *Annali di Matem.* II, 14.

81) *Journ. f. Math.* 69.

82) *Math. Ann.* 1, 2, 3, 4.

83) *Annali di Matem.* II, 13.

84) *Leipziger Dissertation* (Greifswald, 1885).

85) *Math. Ann.* 19.

86) Loria, *Torino Mem.* II, 36. Patrz także *Torino Atti*, 1885.

87) *Math. Ann.* 24. O konstrukcyi powierzchni 4-go rzędu z podwójną stożkową patrz rozprawę Bobka (*Wiener Ber.* 11-go i 18-go grudnia 1884) i Veronese'go (*Atti del Istituto Veneto*, VI, 1); o konstrukcyi cyklidy rozprawę Saltela (*Bull. soc. math.* 3).

88) Weierstrass, *Berliner Ber.* 1863.

89) Między własnościami powierzchni rzymskiéj Steinera zasługuje na szczególną uwagę własność (dowiedziona różnemi metodami przez Cremonę

tetycznych Cremony[90]), Schrötera[91]), Sturma[92]), na stronnicach, które jéj poświęcił Reye w *Geometryi położenia* (tom 2-gi) oraz w rozprawach analitycznych Cayley'a [93]), Beltrami'ego [94]), Clebscha [95]), Eckardta [96]), Laguerre'a [97]) i Gerbaldi'ego [98]).

Kummerowi zawdzięczamy jeszcze znajomość innéj ważnéj klasy powierzchni 4-go rzędu, składającéj się z powierzchni, mających nie linie lecz punkty osobliwe [99]). Zobaczymy niżéj (Roz. VII), jakie badania doprowadziły Kummera do tych powierzchni; na teraz wystarczy, że najbardziéj interesująca pomiędzy niemi (nazwana dziś powierzchnią Kummera) ma szesnaście punktów podwójnych i szesnaście płaszczyzn stycznych osobliwych i że jéj przypadkami szczególnemi są: powierzchnia falowa Fresnela [100]) i tetraedroid [101]), zbadany w roku 1846 przez Cayley'a.

---

i Clebscha), polegająca na tém, że powierzchnia posiada linie asymptotyczne, któremi są krzywe wymierne czwartego rzędu. Inna własność, odkryta przez Darboux (*Bull. scienc. math.* II, 4), polega na tém, że, prócz powierzchni 2-go stopnia oraz powierzchni prostoliniowych 3-go stopnia, jest ona jedyną powierzchnią, na któréj przez każdy punkt przechodzi nieskończenie wiele stożkowych. Niedawno pokazał Picard (*Journ. f. Math.* 100), że jest ona jedyną powierzchnią prostoliniową, któréj wszystkie przecięcia płaskie są krzywemi wymiernemi. Patrz co do tego notę Gucci'i w *Rendinconti del Circolo matematico di Palermo*, 1. Lie (*Archiv for Math. of Naturvidenskab*, 3) zrobił ciekawe spostrzeżenie, że miejscem biegunów płaszczyzny względem stożkowych powierzchni Steinera jest takaż powierzchnia Steinera.

90) *Journ. f. Math.* 63; *Lombardo Rend.* 1837.

91) *Journ. f. Math.* 64.

92) *Math. Ann.* 3.

93) *Journ. f. Math.* 64; *Proc. math. Soc.* 5.

94) *Giorn. di Mat.* 1; *Bologna Mem.* 1879.

95) *Journ. f. Math.* 67.

96) *Math. Ann.* 5.

97) *Nouv. Ann.* II, 11, 12. *Bull. Soc. math.* 1.

98) *La superficie di Steiner studiata nella sua rappresentazione analitica mediante le forme ternarie quadratiche.* (Turyn, 1881).

99) *Berliner Abh.* 1866 i *Berl. Ber.* 1864.

100) Powierzchnia ta ma znaczenie zasadnicze w teoryi matematycznéj światła. W saméj rzeczy wiadomo, że oznaczenie płaszczyzn, które dotykają téj powierzchni według kół, doprowadziło Hamiltona do odkrycia załamania stożkowego, zjawiska, które dotąd uchodziło uwagi fizyków. Powierzchnia ta ma wiele interesujących własności i była przedmiotem ważnych badań wielu uczonych, a zwłaszcza Mannheima (*C. R.* 78, 81, 85, 88, 90; *Association franç. pour l'avanc. des sciences* 1874, 75, 76, 78); *Proc. Roy. Soc.* 1882; *Collectanea mathematica* i t. d.

101) *Journ. Liouv.* 11; *Journ. f Math.*, 87. Porówn. rozprawę Segre'go

Taka powierzchnia jest dwoistą (dualną) do saméj siebie [102]). Jéj krzywe asymptotyczne były zbadane przez Kleina i Lie'go [103]) Reye[104]) wykazał, że każda z nich jest krzywą zasadniczą pęku powierzchni 4-go rzędu; pomiędzy niemi a funkcyami *teta* istnieje związek ścisły, odkryty przez Cayley'a i Borchardta (1817—1880) [105]) i rozwinięty przez H. Webera [106]) wraz z innymi[107]). Pytania algebraiczne, które wiążą się z oznaczeniem osobliwości tych powierzchni rozwiązał Jordan [108]); wreszcie można powierzchnią tę, jak to uczynił Rohn[109]), badać przy pomocy funkcyj hypereliptycznych [110]).

Pomijając powierzchnie czwartego rzędu, mające jako linią podwójną stożkową, odkształconą na dwie proste (różne lub zlewające się), i inne powierzchnie, któremi zajmował się Cayley [111]), wspomnę jeszcze o monoidach [112]), badanych przez Rohna [113]) i o powierzchniach, które nie będąc prostoliniowemi, zawierają wszakże pewną ilość prostych. Są one miejscem punktów, w których przecinają się cztery płaszczyzny odpowiednie czterech prze-

---

w *Giorn. di Mat.* 21. Inne przypadki szczególne powierzchni Kummera były badane przez Rohna i Segre'go (*Leipziger Ber.* 1884).

102) Ta własność powierzchni Kummera dała pobudkę do badania powierzchni jakiegokolwiek rzędu, posiadających tęż samę własność. Badania te podjęli Kummer i Cayley. *Berliner Ber.* 1878.

103) *Berliner Ber.* 1870 albo *Math. Ann.* 23.

104) *Journ. f. Math.* 97; porówn. Segre, tamże, 98.

105) *Journ. f. Math.* 83, 94, albo *Gesammelte Werke* Borchardta (Berlin 1888, str. 341) porówn. Brioschi i Darboux *C. R.* 1881.

106) *Journ. f. Math.* 84.

107) Patrz rozprawę cytowaną pod Nr. 84; a co do historyi zastosowania funkcyj hypereliptycznych do powierzchni Kummera — wstęp w rozprawie Rohna, *Math. Ann.* 15.

108) *Journ. f. Math.* 70.

110) Inne powierzchnie 4-go rzędu z punktami osobliwemi były badane przez Cayley'a (*Proc. math. Soc.* 1870, 1871), a dokładniéj przez Rohna w bardzo pięknéj rozprawie, niedawno uwieńczonéj na konkursie Towarzystwa im. Jabłonowskiego (porów. *Math. Ann.* 29). Nakoniec powierzchnie czwartego rzędu, których obwiedniemi są powierzchnie 2-go rzędu, były badane przez Kummera, *Berlin, Ber.* 1872.

111) *On the quartic surfaces* $(+)(u, v, w)^2 = 0$ (*Quart. Journ.* 10, 11); *On the quartic surfaces represented by the equation symmetrical determinant* $= 0$. (*Quart. Journ.* 14).

112) Monoidą, według Cayley'a, nazywamy powierzchnią n-go rzędu z punktem $(n—1)$-krotnym.

113) *Math. Ann.* 24; por. rozprawę Lampego, Berlin 1864.

strzeni homograficznych (kolinearnych). Chasles oznaczył ich rząd, a Schur znalazł mnóstwo pięknych własności [114]).

Zakończę tę część przeglądu, nazywając niektóre powierzchnie rzędu wyższego nad czwarty, jakiemi zajmowali się już uczeni. Przedewszystkiém zasługują na uwagę powierzchnie prostoliniowe, badane ogólnie przez Chasles'a[115]), Salmona[116]), Cayley'a[117]), Plückera[118]), La Gournerie'go (1814—1883)[119]), Vossa[120]), w szczególnych zaś przypadkach przez Chasles'a [121]), Cremonę [121]), Schwartza [122]), La Gournerie'go [123]) (powierzchnie prostoliniowe symetryczne ze względu na pewien czworościan) Clebscha[124]), Armenante'go [125]) (powierzchnie prostoliniowe wymierne i eliptyczne), Em. Weyra [126]) (powierzchnie prostoliniowe, utworzone przez proste łączące punkty odpowiednie dwóch prostoliniowych szeregów punktów, pozostających w odpowiedniości [*m*, *n*]), Ed. Weyra [127]) (powierzchnie utworzone ruchem stożkowéj zmiennéj), Eckardta [128]) i Chizzoni'ego [129]) (powierzchnie

---

114) *Math. Ann.* 18, 20. Oprócz wymienionych w tekscie były badane inne jeszcze przypadki specyalne, które dla krótkości pomijam; większość ich została odkrytą lub zbadaną za pomocą teoryi odwzorowywania.

115) *Correspondance mathématique* 9; *Journ. Liouv.* 2.

116) *Cambridge Journ.* 8 i *Irish Trans.* 23.

117) *Phil. Trans.* 1863—1869. W przytoczonych pracach Cayley i Salmon badali powierzchnie prostoliniowe jako miejsce prostych, przecinających albo trzy dane krzywe po razu, albo jednę krzywą raz a jednę dwa razy, albo wreszcie jednę daną krzywą trzy razy. Rupp niedawno podjął na nowo to same badanie i otrzymał z pewną modyfikacyą rezultaty, do jakich doszli poprzedni badacze (*Math. Ann.* 18).

118) *Annali di Matem.* II, 1.

119) *Traité de géométrie descriptive*, Art. 629 i 635.

120) *Math. Ann*, 8, 12, 13.

121) *C. R.* 1862; pórówn. d'Ovidio i Dino, *Giorn. di Mat.* 3

122) Rozprawa wydrukowana w Berlinie w r. 1864 i *Journ. f. Math.* 67.

123) *Recherches sur les surfaces réglées tetraédrales symétriques* (Paryż, 1867). Dodaję, że pęk powierzchni symetrycznych względem czworościanu wraz z rzutowym pękiem płaszczyzn wytwarza godną uwagi powierzchnią, zbadaną przez Eckardta (*Zeitschr. f. Math.* 20), która zawiera w sobie ogólną powierzchnią 3-go rzędu.

124) *Math. Ann.* 5.

125) *Annali di Matem.* II, 8.

126) *Prager Abhandl.* VI, 5.

127) *Mémoires de Bordeaux* II, 3.

128) *Ueber die Flächen, deren Gleichungen aus denen ebener Kurven durch eine bestimmte Substitution hervorgehen. Math. Ann.* 7.

129) *Lincei Mem.* 1878—1879.

prostoliniowe, utworzone przez proste łączące odpowiednie punkty dwóch wzajemnie rzutowych krzywych płaskich). Daléj idą powierzchnie, które nie będąc prostoliniowemi, zawierają proste, a były badane przez Sturma [130]) i Affoltera [131]) oraz powierzchnie algebraiczne minimalne, których godne uwagi własności znaleźli Geiser [132]) i Lie [133]). Wymienię jeszcze niektóre powierzchnie, dające się wyprowadzić z powierzchni stopnia 2-go (miejsce środków krzywizny, powierzchnie spodkowe, powierzchnie apsydalne i t. d.), jako też miejsca wierzchołków stożków 2-go stopnia dotykających $m-1$ prostych i przechodzących przez $6-m$ punktów, które to powierzchnie były szczegółowo badane przez Chasles'a [134]) Lürotha [135]), Hierholzera [136]) i Cayley'a [137]) dla tego, że służą do rozwiązania pewnych zagadnień z teoryi charakterystyk pojedyńczo nieskończonych układów stożków 2-go rzędu; powierzchnie, dozwalające na nieskończenie wiele przekształceń, następujących po sobie w sposób ciągły [138]); powierzchnie będące własnemi biegunowemi wzajemnemi względem nieskończenie wielu powierzchni 2-go stopnia [139]); powierzchnie, które tworzą się za pomocą układów wzajemnych Cremony [140]); wreszcie powierzchnie, posiadające te same płaszczyzny symetryi, jakie ma wielościan foremny [141]).

Badania nad powierzchniami, które wyżéj podaliśmy, odnoszą się do własności, należących do geometryi rzutowéj lub też za pomocą znanego sposobu uważania do téj dziedziny sprowadzić się dających. Istnieją wszakże inne badania, odnoszące się do własności, nie dających się po większéj części wcale traktować jako rzutowe, ponieważ należąca do nich grupa przekształceń nie zawiera się

---

130) *Math. Ann.* 4.

131) *Math. Ann.* 27, 29. Patrz téż rozprawę Eckardta (tamże, 7).

132) *Math. Ann.* 3.

133) Tamże: 14, 15. Patrz też Dino, *Napoli Rend.* 19.

134) *C. R.* 52.

135) *Journ. f. Math.* 68.

136) *Math. Ann.* 2.

137) *Proc. math. Soc.* 4; *C. R.* 1861; porówn. Hunyady, *Journ. f. Math.* 92.

138) Klein i Lie *C. R.* 70.

139) Fouret, *Bulletin de la Société philomatique* VII, 1.

140) Jung, *Lincei Rend.* 1885 i 1886. Patrz téż dwie noty o tym przedmiocie, ogłoszone przez Vissali'ego (tamże, 1886) oraz Loria: *Sugli enti geometrici geenrati da forme fondamentali in corrispondenza algebrica.* (*Giornale della Società di lettere e conversazioni scientifiche di Genova*, 1884).

141) Goursat, *Ann. Éc. norm.* III, 4; Lecornu, *Acta math.* 10.

w geometryi rzutowéj [142]). Badania te, wraz z badaniami odnoszącemi się do nieskończonościowych własności krzywych skośnych, o których mówić będziemy następnie, stanowią ważną gałęź geometryi tak same przez się, jakotéż ze względu na zastosowania do geodezyi i fizyki matematycznéj. Gałęź ta znana jest pod nazwą geometryi różniczkowéj. Powiemy tu słów kilka o zasadniczych punktach téj nauki. Ponieważ początek jéj datuje od ukazania się dzieła Monge'a: *Application de l'Analyse à la Géométrie*[143]), a późniejszém dziełem o wpływie jeszcze donioślejszym było dzieło Gaussa (1777—1855) *Disquisitiones generales circa superficies curvas*[144]) przeto w krótkiém przedstawieniu naszém, przyjmując za podstawę podział materyi według Monge'a i Gaussa, powiemy najprzód co w tym przedmiocie zdziałali ci uczeni, a następnie co dodali ich następcy.

Pierwszy paragraf dzieła Monge'a nie przedstawia szczególnego interesu, ma bowiem za zadanie oznaczenie płaszczyzn stycznych i linij normalnych do powierzchni, i może być uważany jako wstęp. Cztery następne paragrafy traktują o powierzchniach walcowych, ostrokręgowych i obrotowych oraz o takich, które, że użyjemy tu wyrażenia nowoczesnego, zawarte są w kongruencyi liniowéj z kierownicą nieskończenie odległą. W najwyższym stopniu godnym uwagi jest paragraf następny, gdyż przy omawianiu obwiednich wprowadza Monge nadzwyczaj ważne pojęcie charakterystyki i krawędzi zwrotu (*arête de rebroussement*) obwiedniéj. Z tym paragrafem łączą się ściśle trzy następujące; traktują one o powierzchniach rurowych z kierownicą płaską (§ 7), o powierzchniach, których liniami największego nachylenia względem danéj płaszczyzny są proste o stałém nachyleniu (§ 8) i wreszcie o obwiednich powierzchni, poruszającéj się pod warunkiem, by punkt, niezmiennie z nią połączony, przebiegał krzywą daną (§ 9) [145]).

---

142) Porówn. godne podziwu dziełko F. Kleina: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (Erlangen, 1872).

143) Ogłoszone w roku 1795 p. t. *Feuilles d'Analyse appliquée à la Géométrie.* Ostatnie (piąte) wydanie z r. 1850 zostało przygotowane przez Liouville'a i wzbogacone dodatkiem z cennemi notami.

144) Przedstawione Towarzystwu Nauk w Getyndze 8 października 1827 i wydrukowane w 6-ym tomie wydawnictwa *Commentationes recentiores Societatis Gottingensis.* Obecnie znajduje się ono w 4-ym tomie Dzieł Gaussa, wydanych przez powyższe Towarzystwo, jakotéż w wydaniu Liouville'owskiem dzieła Monge'a.

Tu poczyna się wskazana przez Monge'a ważna rola równań różniczkowych cząstkowych w geometryi analitycznéj; okazuje się, że w wielu przypadkach dla zbadania natury powierzchni pożyteczniéj i dogodniéj mieć równanie różniczkowe powierzchni niż równanie w wyrazach skończonych. Przykład na to stanowią powierzchnie zawarte w specyalnym kompleksie liniowym z osią nieskończenie odległą lub skończoną (§§ 10, 11); dalsze przykłady stanowią powierzchnie rozwijalne (§ 12); powierzchnie opisane w § 8, wreszcie — miejsca krzywych ruchomych, których jeden punkt przebiega krzywą stałą (§ 14)[146]. Teorya krzywizny powierzchni w jednym punkcie[147], jako też badanie rozmieszczenia normalnych na téj saméj powierzchni[148] prowadzi do nowego gatunku powierzchni, godnych badania; tamte i te znajdują się w § 15, bezwątpienia najważniejszym w dziele Monge'a. Przypadek specyalny elipsojdy jest traktowany w § 16; zawiera się tu oznaczenie linij krzywiznowych téj powierzchni[149]. Liczne i bardzo ważne są pytania, do których pobudkę daje teorya krzywizny. Można naprzykład badać powierzchnie, w których jeden promień krzywizny dla każdego punktu ma wartość jednakową (§§ 18 i 21)[150]. Monge znalazł, że powierzchnie takie dają się obwieść powierzchnią formy stałéj, która się porusza w sposób, poprzednio przezeń (w §§ 13 i 14-ym) wskazany. Można też założyć, że w każdym punkcie oba promienie krzywizny są równe i równego znaku; powierzchnia jest wtedy

---

145) Jeżeli $x = e(t)$, $y = f(t)$, $z = g(t)$ wyrażają współrzędne punktu téj krzywéj jako funkcye parametru t i jeżeli $F(x, y, z) = 0$ jest równaniem danéj powierzchni, to w mowie będąca obwiednia jest obwiednią powierzchni

$$F\{x + e(t), y + f(t), z + g(t)\} = 0$$

146) O tych powierzchniach patrz nową pracę Lie'go (*Archiv for Mathematik og Naturvidenskab*, 7).

147) Przed Mongem zajmowali się tym przedmiotem Euler (*Histoire de l'Académie de Berlin*, 1766) i Meusnier (*Mémoires de l'Académie des sciences de Paris*, 10, 1776).

148) Pomiędzy najnowszemi pracami o liniach krzywiznowych zacytować należy prace Hamiltona, Frosta i Cayley'a, które mają za zadanie znalezienia, w jaki sposób linie te są rozmieszczone około punktu krzywizny kulistéj (*Quart. Journ* 12).

149) Por. rozprawę Cremony w *Bologna Mem.* III. 1. Należą tu jeszcze niektóre noty Darboux (*C. R.* 84, 92, 97), mające na celu oznaczenie linij krzywiznowych w niektórych specyalnych godnych uwagi powierzchniach.

kulą. Jeżeli zaś oba promienie są w każdym punkcie równe i przeciwnego znaku, powierzchnia jest powierzchnią minimalną [151]).

Z teoryą krzywizny łączą się studya nad powierzchniami rurowemi o dowolnéj kierownicy (§§ 22 i 26) i o takich powierzchniach, w których wszystkie normalne dotykają danéj kuli (§ 23), danego stożka (§ 24) albo danéj powierzchni rozwijalnéj (§ 25). Dla niektórych z tych familij powierzchni podał Monge konstrukcyą, dla wszystkich równania czy to różniczkowe czy skończone, a ponieważ postawił i rozwiązał zadanie przejścia od jednych równań do drugich, przeto wielkie jego dzieło godném jest starannego czytania przez każdego, kto zajmuje się analizą nieskończonościową.

Wkrótce po ukazaniu się dzieła Monge'a geometrya różniczkowa została wzbogacona pracą nadzwyczaj ważną Ch. Dupina: *Développements de la Géométrie* (1813). W pracy téj znajdujemy między innemi pojęcie stycznych sprzężonych w punkcie powierzchni oraz wskazującéj (*l'indicatrice*); w niej badane są linie asymptotyczna (krzywe styczne główne) [152]) i dowiedzione sławne twierdzenie, znane w nauce pod nazwą twierdzenia Dupina.

Za ciąg dalszy dzieła Monge'a uważać można liczne badania nad powierzchniami z liniami krzywiznowemi płaskiemi lub sferycznemi, prowadzone przez Dupina [153]), Alfreda Serreta (1819—1885) [154]), O. Bonneta [155]), Dini'ego [156]). Ennepera

---

[150]) Z badaniami §§ 18 i 21 dzieła Monge'a wiąże się rozprawa O. Rodrigues'a w *Correspondance sur l'École polytech.* 3.

[151]) Równanie różniczkowe powierzchni minimalnych zawdzięczamy Lagrange'owi (*Miscellanea Taurinensia* 1760—1761); geometryczne wyjaśnienie tego równania dał nieco późniéj Meusnier (porówn. cyt. 147).

[152]) Oprócz linij krzywiznowych i asymptotycznych na powierzchni jeszcze godnemi uwagi są te linie, których kula ściśle styczna w punkcie dowolnym dotyka i saméj powierzchni. Były one badane przez Darboux (*C. R* 81) i Ennepera (*Göttinger Nachr.* 1871).

[153]) Dupin znalazł (*Applications de Géométrie et de Mécanique*, 1822), że jedynemi powierzchniami, w których wszystkie linie krzywiznowe są kołami. są kula, stożek i walec obrotowy oraz cyklida, którą uważał zu obwiednią kuli poruszającéj się tak, że dotyka zawsze trzech kul danych.

[154]) *Journ. Liouv.* 13.

[155]) *Journ Éc. polyt.* 19, 35; *C. R.* 42.

[156]) *Atti dell' Academia dei Quaranta* 1868—1869; *Annali delle Università Toscane*, 1869; *Annali di Matem.* II, 1, 4.

(1830—1885)[157], Darboux[158], Picarda[159], Lecornu[160], Dobrinera[161], Voretscha[162] i innych.

Tego samego rodzaju lecz więcéj ogólnemi są ważne badania Weingartena o takich powierzchniach, w każdym punkcie których jeden promień krzywizny jest funkcyą drugiego[163]. Badania te doprowadziły Dini'ego (l. c.), Beltrami'ego[164] i Lie'go[165] do oznaczenia powierzchni skośnych, mających też same własności. Toż samo powiedzieć można o różnych badaniach Weingartena[166] odnoszących się do powierzchni, których normalne są stycznemi do innéj powierzchni danéj.

Z 20-ym §-em dzieła Monge'a wiążą się liczne rozprawy, odnoszące się do powierzchni minimalnych. Wspomnimy najprzód o rozprawach Steinera[167] i Weierstrassa[168], odnoszących się do teoryi ogólnéj, oraz o rozprawach Scherka[169] i Bonneta[170], rozpatrujących niektóre przypadki specyalne. Serret[171] zajmował się powierzchniami, przechodzącemi przez dane proste; Riemann[172] i Weierstrass[173]—powierzchniami o danym konturze; Geiser[174] —powierzchniami algebraicznemi; Noevius[175] —powierzchniami peryodycznemi, posiadającemi nieskończenie wiele prostych i nieskończenie wiele linij geodezyjnych płaskich; Cata-

---

157) *Göttinger Abh.* 13, 16, 23; *Journ f. Math.*, 94.

158) *C. R.*, 96.

159) Tamże, 46.

160) *Journ. Éc. polyt.* 53.

161) *Journ. f. Math.* 94

162) *Dissertation*, Getynga, 1883.

163) *Journ. f. Math.* 59.

164) *Annali di Matem.* I, 8.

165) *Archiv for. Math. og Naturvidenskab*, 4; *Bull Scienc. math.* II, 4.

166) *Journ. f. Math.* 62.

167) *Berliner Ber.* 1840; *Journ. f. Math.* 24.

168) *Berliner Ber.* 1866.

169) *Abhandlungen der Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig* 4; *Journ. f. Math.* 13.

170) *Journ Liouv.* II, 5.

171) Tamże I, 11

172) *Göttinger Abh.* 13 albo *Gesammelte Werke* str. 283 i 417. Niewęgłowski przedstawił elementarnie badania Riemannowskie w *Ann. Éc. norm.* II, 9. Patrz też: Schondorf, *Ueber die Minimalfläche die von einem doppelt-gleichschenkligen räumlichen Vierseit begrenzt wird* (Getynga, 1868).

173) *Berliner Ber.* 1867.

174) *Math. Ann.* 1.

175) *Akademiens Afhandlingar*, Helsingfors, 1883.

lan[176]) — mającemi parabolę za linią geodezyjną; Henneberg[177]) — takiemi, których linią geodezyjną jest parabola półsześcienna; Bonnet[178]) badał takie powierzchnie, na których się znajduje szereg linij krzywiznowych płaskich; Bour[179]) te zaś, które dają się rozwinąć na powierzchni obrotowéj. Schwarz badał powierzchnie, określone za pomocą czworoboku skośnego[181]), obwiedzione przez stożki oraz takie, które nie będąc algebraicznemi, zawierają jednak krzywe algebraiczne[182]). Enneper[183]) badał te powierzchnie minimalne, które zawierają nieskończenie wiele kół i t. d. Inne pytania badali Mathet[184]), Beltrami[185]), Lie[186]), Kiepert[187]), Henneberg[188]), Ribaucour[189]), Bianchi[190]) i Pincherle[191]). Wreszcie teorya powierzchni minimalnych może być znacznie uogólnioną, jak to okazał Lipschitz[192]).

Przechodzimy teraz do treściwego przedstawienia najważniejszych miejsc dzieła Gaussa: *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, któremu, jak to powiedziano, zawdzięczamy najważniejsze prawdy geometryi różniczkowéj.

Już na końcu pierwszego paragrafu téj rozprawy znajdujemy pojęcie nadzwyczaj ważne odwzorowywania kulistego powierzchni; płodność tego pojęcia wykazały liczne jego zastosowania. Następnie (w § IV) napotykamy dwie zmienne niezależne, za pomocą których

---

176) *Journ. Éc. polyt.* 37.

177) *Heidelberger Dissertation*, 1875.

178) *C. R.* 41, porów. Enneper, *Zeitschr. f. Math.* 7, 9.

179) *Journ. Éc. polyt.* 39.

180) *Bestimmung einer speciellen Minimalfläche* (Berlin, 1871); porów. Cayley *Quart. Journ.* 14.

181) *Journ. f. Math.* 80.

182) Tamże, 87. *C. R.* 96. Patrz też nową pracę Schwarza (*Göttinger Abh.* 34, 1887); daléj Lilienthala w *Journ. f. Math.* 99 i Gottinga rozprawę inauguralną (Getynga, 1887).

183) *Zeitschr. f. Math.* 14, *Göttinger Nachr.* 1866.

184) *Journ. Liouv.* II, 8.

185) *Bologna Mem.* II, 7. Nadzwyczaj piękny wstęp do téj rozprawy zawiera historyą teoryi powierzchni minimalnych.

186) *Archiv for Math. og Naturv.* 3, 4, 6; *Math. Ann.* 14, 15.

187) *Journ. f Math.* 81, 85.

188) *Annali di Matem.* II, 9.

189) *Étude des élassoides. Mémoires couronnés par l'Académie de Belgique*, 44

190) *Giorn. di Mat.* 22.

161) *Lombardo Rend.* 1876; *Giorn di Matem.* 14.

192) *Journ. f. Math.* 78.

wyrazić się dają współrzędne punktów powierzchni; są to współrzędne krzywokreślne na powierzchni (Porów. też §§ XVII i XIX). Paragraf VI-y zawiera rozciągnięcie do przestrzeni uważania, będącego podstawą teoryi krzywizny krzywych płaskich i niepłaskich; wynika z niego pojęcie miary krzywizny powierzchni w punkcie zwyczajnym [193]). Wiadomo, że miara ta równa się iloczynowi obu promieni głównych krzywizny powierzchni w tym punkcie [194]) (§ VIII). Krzywiznę powierzchni można wyrazić albo we współrzędnych (§ VII i IX) zwykłych Descartes'a albo też we współrzędnych krzywokreślnych danéj powierzchni (§§ X i XI) [195]).

W ostatniém wyrażeniu występują współczynniki E, F, G wyrażenia elementu linii krzywéj, których znaczenie w teoryi powierzchni dających się rozwinąć na innych powierzchniach [196]) (§ XII) wykazał pierwszy Gauss. Przytém podał on nowy sposób uważania powierzchni (§ XIII) jako ciał nieskończenie cienkich, giętkich i nierozciągalnych. Następne paragrafy rozprawy Gaussa, traktują o liniach geodezyjnych, podają ich równania różniczkowe (§§ XIV i XVIII), zajmują się rozciągnięciem do geometryi powierzchni: współrzędnych biegunowych, koła (§ XV) oraz linij równoleżnikowych, jakoteż obliczeniem całkowitéj krzywizny trójkąta geodezyjnego (§ XX). Paragrafy XXI i XXII traktują o przekształceniu wyrażenia elementu linij krzywéj, pozostałe zaś paragrafy, jako odnoszące się do geodezyi, możemy pominąć.

Już z tego pobieżnego przeglądu widać jak bogatą w pojęcia zasadnicze jest rozprawa Gaussa. Rozwój i liczne prace jakie wywołała, a o których zaraz mówić będziemy, jeszcze lepiéj wykażą jéj znaczenie. Pomiędzy temi pracami, należy się wybitne miejsce pięknym badaniom Beltrami'ego p. t.: *Ricerche di analisi applicata alla geometria*, ogłoszonym w 2-gim tomie *Giornale di Ma-*

---

[193]) Badanie krzywizny powierzchni w punkcie osobliwym przeprowadza Painvin w *Journ. f. Math.* 72.

[194]) Twierdzenie analogiczne zostało niedawno odkryte przez Sturma (*Math. Ann.* 21).

[195]) Niektóre udoskonalenia i dopełnienia do téj części rozprawy Gaussa dali: Liouville (*Journ. Éc. polyt.* 24), Baltzer (1818—1887) (*Leipziger Berichte* 1872) i Escherich (*Archiv Grunerta* 57).

[196]) Twierdzenie Gaussa brzmiące: „Aby powierzchnia dała się rozwinąć na innéj jest rzeczą konieczną, by krzywizna w odpowiednich punktach była jednakową", było dowiedzionem różnemi sposobami przez Liouville'a (*Journ. Liouv.* 12), Bertranda, Puiseux'go i Digueta (tamże, 13). Porówn. téż Minding, *Journ. f. Math.* 10.

tematiche, następnie innym rozprawom tegoż autora: *Dalle variabili complesse su una superficie qualunque* [197]), *Teoria generale dei parametri differenziali* [198]) i *Zur Theorie des Krümmungsmasses* [199]). Godnemi uwagi są daléj studya Bonneta [200]) i Darboux [201]) o odwzorowywaniu sferycznem powierzchni, związaném z odnośnemi miejscami w *Disquisitiones*. Pojęcie krzywizny powiodło do badania powierzchni o krzywiznie stałéj (dodatniej lub ujemnéj), któremu tylu znakomitych geometrów poświęciło siły swoje. Między temi studyami wymieniamy dwie prace Beltrami'ego: *Risoluzione del problema: Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le geodetiche vengano rappresentate da linee rette* [202]), *Saggio di una interpretazione della Geometria non-euclidea* [303]), następnie pisma Dini'ego[204]), Lie'go [205]), Bianchi'ego [206]), Bäklunda [207]), Darboux [208]) i Dobrinera [209]). Tego samego rodzaju, tylko ogólniejszemi są badania Christoffel'a[210]) nad oznaczeniem kształtu powierzchni za pomocą miary wziętéj na niéj saméj i Lipschitza [211]) o powierzchniach, mających oznaczone własności, odnoszące się do krzywizny, albo o powierzchniach, dla których z góry jest oznaczone wyrażenie elementu linijnego.

Z rozdziałem rozprawy Gaussa, traktującym o liniach geodezyjnych, wiążą się niektóre prace Joachimstahla (1818—

---

197) *Annali di Matem.* II, 1.

198) *Bologna Mem* II, 8.

199) *Math. Ann.* 1

200) *C. R.* 37.

201) Tamże: 44, 46, 57, 67.

202) *Annali di Matem.* I, 7. Ogólniejsze zadanie oznaczenia dwóch powierzchni, tak, by każdemu punktowi jednéj odpowiadał punkt lub grupa punktów drugiéj i aby liniom geodezyjnym jednéj odpowiadały linie geodezyjne drugiéj—zbadał późniéj Dini (*Annali di Matem.* II; 1).

203) *Giorn. di Matem.* 6.

204) *C. R.* 1865.

205) *Archiv for Math. og Nat.* 4, 5.

206) *Giorn. di Matem.* 16, 20, 21.

207) *Lund Årskrift*, 19.

208) *C. R.* 96, 97.

209) *Acta math.* 9.

210) *Journ. f. Math.* 64.

211) *Berliner Ber.* 1882—1883. Należy tu praca Lilienthala, *Untersuchungen zur allgemeinen Theorie der krummen Oberflächen und der geradlinigen Strahlensysteme* (Bonn, 1886) i rozprawy tegoż autora w *Math. Ann.* 30, 31.

1861)[212]), Scheringa[213]), Beltramie'go[214]); Lie'go [215]) podział powierzchni na podstawie grup przekształcenia ich linij geodezyjnych i tegoż autora badania nad krzywemi geodezyjnemi [216]). Z rozdziałem o rozwijalności powierzchni jest w ścisłym związku ważna praca Mindinga [217]), w któréj po raz pierwszy postawione jest pytanie, czy równość krzywizny w odpowiednich punktach jest warunkiem wystarczającym rozwijalności dwu powierzchni jednéj na drugiéj; dla przypadku ogólnego odpowiedź jest przecząca, dla przypadku krzywizny stałéj twierdząca. Toż samo stosuje się do, prac Boura (1832—1866) [218]), Codazzi'ego [219]) i Bonneta [220]) uwieńczonych na konkursie ogłoszonym przez Akademią paryską w roku 1861. Ten sam przedmiot lub przedmioty pokrewne były traktowane w rozprawach: Christoffel'a [221]), Mangoldta [222]). Weingartena [223]), Brilla[224]), Mindinga[225]), Jelleta [226]), Dini'ego [227]), Ennepera [228]), Razzaboni'ego [229]), Lecornu [230]), Beltrami'ego [231]) i wielu innych.

Piękna teorya Gaussa współrzędnych krzywokreślych powierzchni wywołała życzenie utworzenia analogicznéj teoryi dla przestrzeni. Już w r. 1837 utworzył Lamé teoryą taką dla przy-

---

212) *Journ. f. Math.* 26, 30. Odczyty Joachimstahla p. t. *Anwendung der Differential und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung* — wydane zostały po jego śmierci (Lipsk, 2-e wyd. 1881).

213) *Göttinger Nachr.* 1867.

214) *Lombardo Atti*, II, I.

215) Program uniwersytetu w Chrystianii, 1879.

216) *Math. Ann.* 20.

217) *Journ. f. Math.* 6, 18, 19.

218) *Journ Éc. polyt.* 39.

219) *Mém. prés.* 27 (1879). *Mémoire relatif à l'application des surfaces les unes sur les autres.*

220) *Journ Éc. polyt.* 41, 42.

221) *Berliner Abh.* 1869.

222) *Journ. f. Math.* 94.

223) *Berliner Ber.* 1882.

224) *Münchener Abh.* 14.

225) *Journ f. Math.* 6.

226) *Irish Trans.* 22, I część.

227) *Giorn. di Matem.* 2.

228) *Göttinger Nachr.* 1875.

229) *Giorn. di Matem.* 21.

230) *Journ. Éc. polyt.* 48.

231) *Bologna Mem.* IV, 3.

padku specyalnego, a mianowicie dla współrzędnych eliptycznych[232]), poźniej wprowadził współrzędne krzywokreślne [233]) i zbudował ich teoryą [234]), nie zaniedbując też zastosowania [235]) i rozwinięcia [236]). W sławném dziele L a m é'go: *Leçons sur la théorie des coordonnées curvilignes et leurs diverses applications* (Paryż, 1859) są zebrane i uzupełnione świetne rezultaty, osiągnięte w téj gałęzi geometryi. W następstwie zajmowało się wielu innych geometrów tym przedmiotem. Najprzód wymieniam A o u s t a, który poświęcił mu wiele ważnych prac [237]), następnie B r i o s c h i'ego[238]), C o d a z z i'ego[239]) C h e l i n i'ego (1802 — 1878) [240]), D a r b o u x [241]), C o m b e s c u r e'a [242]), L e v y'ego [243]), R o y e r a [244]) i innych. Należą tu prace, w których są traktowane układy potrójne powierzchni ortogonalnych, a mianowicie: B o u q u e t a [245]), A. S e r r e t a [246]), B o n n e t a [247]), C a t a l a n a [247]), M o u t a r d a [249]), D a r b o u x [250]), C a y l e y'a [251]), B e t t i'ego [252]), R i b a u c o u r a [253]), W e i n g a r t e-

---

[232]) *Mém. prés.* 5; *Journ. Liouv.* 2. Pomiędzy wieloma zastosowaniami współrzędnych eliptycznych wymienię zastosowanie, poczynione przez J a c o b i'ego przy oznaczeniu linij geodezyjnych (*Journ. f. Math.* 14; *C. R.* 8; *Journ. Liouv.* 6) i przy niektórych pytaniach dynamiki. Patrz *Vorlesungen über Dynamik* 1866 w wydaniu 1-ém, 1884 w 2-iém jako tom dodatkowy dzieł zbiorowych (*Gesammelte Werke*) J a c o b i'ego.

[233]) *Journ. Éc. polyt.* 23.

[234]) *Journ. Liouv.* 5.

[235]) Tamże, 4.

[236]) Tamże, 8.

[237]) *C. R.* 48, 54; *Journ. f. Math.* 58; *Annali di Matem.* I, 6 i II, 1, 3, 5.

[238]) *Annali di Matem.* II, I.

[239]) Tamże II, 1, 2, 4, 5.

[240]) *Bologna Mem.* 1868—1869.

[241]) *Ann. Éc. norm.* II, 7:

[242]) *Ann. Éc. norm.* I, 4.

[243]) *Journ. Éc. polyt.* 43.

[244]) *Annales des mines* VII, 5.

[245]) *Journ Liouv.* 11.

[246]) Tamże 12.

[247]) *C. R.* 54.

[248]) *Mémoires couronnés par l'Academie de Belgique*, 32.

[249]) *C. R.* 59.

[250]) Tamże, 59, 60, 67, 76; *Ann. Éc. norm.* I, 2; II, 3.

[251]) *C. R.* 74, 75; *Phil. Trans.* 163. Porów. W e i n g a r t e n, *Journ. f. Math.* 83.

[252]) *Annali di Matem.* II, 8.

[253]) *C. R.* 76.

na [254]), Schläfli'ego [255]), Hoppe'go [256]), Bianchi'ego [257]), Möbiusa [258]) i innych.

Z prac o powierzchniach specyalnych, nie należących do omówionych wyżéj kategoryj, należą jeszcze prace Lie'go [259]), odnoszące się do powierzchni, dozwalających na nieskończonościowe liniowe przekształcenia w same siebie; Ennepera [260]), odnoszące się do powierzchni ze specyalnemi krzywemi południkowemi, Cayley'a [261]), Weingartena [262]); Willgroda [263]) o powierzchniach, które przy pomocy linij krzywiznowych dzielą się na nieskończenie małe kwadraty, i wreszcie Bianchi'ego [264]) o powierzchniach śrubowych.

Znaczny postęp w geometryi nieskończonościowéj powierzchni sprawiły usiłowania de Salvertsa, który w kilku eleganckich pracach [265]), wywołanych prawdopodobnie piękném dziełem Hessego: *Vorlesungen über die analytische Geometrie des Raumes* pokazał, że używając równania powierzchni w formie ogólniejszéj $f(x, y, z) = 0$, dochodzi się przy rozwiązywaniu pewnych zagadnień do daleko dogodniejszego układu wzorów niż przy użyciu formy $z = \varphi(x, y)$.

Istnieją niektóre dobre wykłady geometryi różniczkowéj. Jednym z nich jest Hoppego *Elemente der Flächentheorie*; inny napisał Brisse [260]), najnowszemi zaś są: Bianchi'ego bardzo piękne dzieło *Lezioni di geometria differenziale* (Piza, 1886) i Darboux *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, którego wyszła dotąd część pierwsza (Paryż, 1887).

---

[254]) *Journ. f. Math.* 85.

[255]) Tamże, 76; por. Darboux, *C. R.* 84.

[256]) *Archiv Grunerta* 55, 56, 47, 68 i 63.

[257]) *Giorn. di Matem.* 21, 22; *Annali di Matem.* II, 13; *Lincei Rend.* 1886 *Lincei Mem.* IV, 4.

[258]) *Mémoires de l'Académie de Toulouse* VIII, 1.

[259]) *Archiv for Math. og Naturv.* 7.

[260]) *Göttinger Abh*, 19. Jeżeli u jest kąt, jaki normalna do powierzchni w pewnym punkcie tworzy z osią z, v — kąt, jaki rzut jéj na płaszczyznę xy tworzy z osią x, to według Ennepera krzywe, których równaniem jest $u =$ stałéj lub $v =$ stałéj, nazywamy krzywemi południkowemi.

[261]) *C. R.*, 74; *Proc. math. Soc.* 4.

[262]) *Berliner Ber.* 1883.

[263]) Rozprawa getyngska, 1883.

[264]) *Giorn. di Matem.* 17.

[265]) *Mémoires de la Société scientifique de Bruxelles*, 5, 7, 8.

[266]) *Ann. Éc. norm.* II, 3; *Journ. Éc. polyt.* 53.

Zakończymy ten rozdział uwagą, że pomoc analizy nie jest konieczną do studyów nad geometryą nieskończonościową. Bertrand [267]) i Bonnet [268]), pokazali pierwsi, jaką korzyść można w tych studyach odnieść z rozważań syntetycznych. Prócz tego, tom I dzieła *Traité de calcul différentiel et integral* Bertranda, dzieło *Traité de géométrie descriptive* de la Gournerie'go [269]), oraz wielka liczba bardzo pięknych rozpraw Mannheima [270]) zawierają interesujące badania należące do téj gałęzi nauki o przestrzeni, o któréj właśnie mówiliśmy wyżéj.

IV.

Badania nad postacią krzywych i powierzchni. Geometrya licząca.

Przy omawianiu wyżéj ważniejszych postępów, jakie uczyniła teorya krzywych i powierzchni, pominęliśmy z umysłu dwie ważne kategorye badania, by módz je szczegółowiéj wyłożyć w oddzielnym rozdziale naszéj pracy.

Pierwsza kategorya obejmuje szereg badań szczególnéj natury i ma na celu oznaczenie postaci, jaką mogą przyjmować krzywe i powierzchnie danego rzędu. Uważam za właściwe dłużéj nieco zatrzymać się nad tym przedmiotem.

Oznaczenie postaci krzywych drugiego rzędu sięga już starożytności. Zauważmy, że nie potrzeba téż było wybitnego umysłu do rozwiązania tego zadania, gdyż starożytni uważali te krzywe jako przecięcia stożka kołowego.

Przeciwnie, oznaczenie postaci, jaką przyjmować mogą krzywe trzeciego rzędu, nie jest bez trudności. Newton pokonał tę trudność, wykazując, że wszystkie krzywe trzeciego rzędu dają się

[267]) *Journ. Liouv.* 9. 12.

[268]) *Journ. Éc. polyt.* 30, 32; *Journ. Liouv.* 14; *C. R.* 54.

[269]) Patrz rozprawę (Thèse) Picarda: *Essai d'une théorie géométrique des surfaces* (Paryż, 1863).

[270]) *Journ. Liouv.* II, 17, i III, 4; *Bull. Soc. math.* 2, 5, 6; *C. R.* 74, 78, 79 80, 82, 83, 84, 85, 86, 88. *Proc Math. Soc.* 12; *The Messenger of Mathematics* II, 8.

otrzymać za pomocą rzutu pięciu z nich, które nazwał parabolami rozbieżnemi [1]). Do tego pierwszego podziału krzywych trzeciego rzędu dodał Chasles [2]) dalszy podział, polegający na innym zupełnie pomyśle, przedstawiający jednak wyraźną analogią z podziałem Newtonowskim. Według Chasles'a można znaleźć wszystkie formy krzywych 3-go rzędu za pomocą rzutu pięciu z nich, symetrycznych względem pewnego środka. Trzecia wreszcie metoda podziału opiera się na stałości stosunku podwójnego podziału stycznych, które można poprowadzić do ogólnéj krzywéj 3-go rzędu z jednego z jéj punktów; podział ten rozwinął Durège [3]).

Daleko większe trudności przedstawia badanie postaci krzywych czwartego rzędu; wymienione już wyżéj prace Bragelogne'a, Eulera i Plückera stanowią ważny przyczynek do tego przedmiotu: nie zdaje się wszakże — i to co powiemy, stosuje się do prac o krzywych trzeciego rzędu—aby poszukiwania te mogły służyć za podstawę do ogólnéj teoryi postaci linij krzywych; są one raczéj pierwszemi próbami tych rozważań, które

[1]) *Enumeratio linearum tertii ordinis* (1706). Korzystając z uwagi Bellavitisa (1803—1880) (patrz jego pracę: *Sulla classificazione delle curve di terzo ordine Memorie della Società italiana delle scienze residente in Modena*, Tom 25, Część II str. 34) możemy ten rezultat wyrazić, mówiąc, że każda krzywa 3-go rzędu daje się za pomocą odpowiedniego przekształcenia rzutowego sprowadzić do jednéj z form następujących: krzywa, składająca się z ciągu wężowego i z owalu (parabola campaniformis cum ovali); krzywa z punktem podwójnym (parabola nadata); krzywa, złożona z jednego ciągu wężowego (parabola pura); krzywa z punktem odosobnionym (parabola punctata); krzywa z ostrzem (parabola cuspidata). Z dowodów tego twierdzenia wymieniam dowód Möbiusa, oparty na zasadach sferyki analitycznéj (*Gesammelte Werke*, tom 2-gi str. 89—176) i dowód, wynikający z klasyfikacyi Bellavitisa (patrz wyżéj. Do Möbiusa przystaje M. Baur (*Synthetische Eintheilung der ebenen Kurven III Ordnung*, Stuttgart, 1888). Dodaję jeszcze, że podziały Möbiusa i Bellavitisa (prawie jednoczesne, bo pierwszy był ogłoszony w 1852, drugi napisany w 1851 i ogłoszony w 1855) mają to wspólnego, że kolineacya jest w nich podstawą podziału na gatunki, pokrewieństwo zaś służy do tworzenia odmian tych krzywych. Podział Plückera znajduje się w dziele: *System der analytischen Geometrie*. J. W. Newman przedstawił Towarzystwu brytańskiemu dla postępu nauk (porówn. Report 1869—1870) rozbiór form krzywych płaskich trzeciego rzędu i wynikającą stąd nomenklaturę, która odbiega od zwykle używanéj.

[2]) *Aperçu historique*, Nota 20-a.

[3]) *Journ. f. Math.* 75, 76, Możemy dodać, że Reye w dodatku do 3-go wydania *Geometryi położenia*, które niedawno ukazało się, podaje nową i piękną metodę oznaczenia form krzywych płaskich trzeciego rzędu, opartą na uważaniu ich jako krzywych Jacobi'ego siatek stożkowych.

dziś stanowią trwałą podstawę téj teoryi. Rozważania te należą do dziedziny geometryi syntetycznéj, po części zaś są wynikiem zastosowania funkcyj Abelowych do nauki rozciągłości. Niektóre z pierwszych były podane w *Geometryi położenia* [4]) Staudta i odnoszą się do postaci wielokątów płaskich oraz wielościanów, do parzystych i nieparzystych gałęzi krzywych, do elementów zwrotu figur; inne były podane przez Taita [5]) i rozwinięte przez F. Meyera [6]); inne wreszcie wskazane przez Harta [7]) i szczęśliwie uogólnione przez E. Köttera [8]). Prace drugiego rodzaju wyszły prawie wszystkie ze szkoły Kleina. Ponieważ nie mogę tu wchodzić w liczne szczegóły tego przedmiotu, ograniczę się przeto na wzmiance: o kilku twierdzeniach o krzywych 4-go rzędu, jakie zawdzięczamy Zeuthenowi [9]) i Crone'mu [10]); o bardzo ważnym związku pomiędzy liczbą osobliwości rzeczywistych i urojonych krzywéj płaskiéj, do którego doszedł Klein [11]), studyując klasyfikacye krzywych czwartego rzędu, podane przez Plückera [12]) i Zeuthena; wreszcie o bardzo pięknem twierdzeniu Harnacka (1851—1888) [13]), które odsłaniając niespodziewany związek pomiędzy formą krzywéj i jéj rodzajem, na nowo stwierdziło ważność powyższych klasyfikacyj.

Jeżeli teorya postaciowości krzywych płaskich jest jeszcze bardzo odległą od stanu dojrzałości, to o analogicznych badaniach odnoszących się do powierzchni powiedzieć można, że znajdują się jeszcze w dziecięctwie. Ogólnych badań na tém polu, o ile wiem, niema wcale, prócz tych, które podał Möbius w swojém dziele: *Theorie*

---

[4]) §§ 12, 13, 14, 15.

[5]) *The Messenger of Mathematics* II, 6.

[6]) *Anwendung der Topologie auf die Gestalten der algebraischen Kurven, speciell der rationellen Kurven vierter und fünfter Ordnung* (rozprawa monachijska, 1878).

[7]) *Irish. Trans.* 1875.

[8]) *Beiträge zur Theorie der Oskulationen bei ebenen Kurven 3-er Ordnung* (Rozprawa berlińska, 1884).

[9]) *Math. Ann.* 7, 10. Patrz rozprawę: *Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver*. Rozprawy Akad. Um. w Kopenhadze, V, 20.

[10]) *Math. Ann.* 12; *Tidsskrift for Mathematik* IV, 1.

[11]) *Math. Ann.* 10; Porówn. Perrin, *Bull. Soc. math.* 6.

[12]) *Theorie der algebraischen Kurven* str. 249 i następne. W związku z tém dziełem są Beera: *Tabulae curvarum quarti ordinis symmetricarum* (Bonn, 1862).

[13]) „Krzywa rodzaju p może, co najwyżéj, składać się z $p+1$ ciągów" (*Math. Ann.* 10). Przypadek specyalny $p=0$, znany oddawna, omówił Bellavitis w wymienionéj wyżéj rozprawie; objaśnia on nazwę *unicursal*, daną przez Cayley'a krzywym wymiernym i używaną jeszcze dziś przez wielu.

der elementaren Verwandschaften [14]); są one dowcipne i interesujące, ale oczekują jeszcze uzdolnionego następcy, któryby wyzyskał ich bogactwo. Toż samo stosuje się do wielu oryginalnych pomysłów, rozproszonych w licznych pracach Kleina. Rozwinięcie wspomnionych badań byłoby rzeczą najwyższéj wagi dla postępu geometryi; niestety jednak, teorya ta mało jest uprawianą i w ostatnich czasach Rohn może [15]) jest jedynym, który poczynił w niej pewien postęp, zasługujący na zaznaczenie.

Jeżeli teorya ogólna pozostaje jeszcze w dziedzinie niespełnionych potrzeb, to nie brak wszakże badań specyalnych. Pomijam oznaczenie postaci powierzchni 2-go rzędu, jako zadanie zbyt proste, i przechodzę do zadania, odnoszącego się do powierzchni 3-go rzędu, pomyślnie rozwiązanego przez Kleina[16]), Schläfli'ego[17]) i Zeuthena[18]) i niedawno uzupełnionego przez Bauera przy pomocy badania postaci krzywéj parabolicznéj[19]). Wspomnieć też należy o oznaczeniu postaci: cyklid Dupina, które zawdzięczamy Maxwell'owi [20]); powierzchni 4-go rzędu z podwójną stożkową, uskutecznioném przez Zeuthena [21]); powierzchni czwartego rzędu ze stożkową kuspidalną, uskutecznioném przez Crone'go[22]); powierzchni Kummera i powierzchni prostoliniowych czwartego rzędu, będących przedmiotem ważnych badań Rohna [23]). Bogaty zbiór modeli Ludwika Brilla, zwiększający się z rokiem każdym o nową i ciekawą seryą, wskazuje zainteresowanie, jakie uczeni niemieccy mają dla badań w mowie będących [24]).

Co się tyczy postaci krzywych o podwójnéj krzywiznie, to niema o tym przedmiocie jeszcze ogólnych badań, mających większe znaczenie; można powiedzieć, że to, co wiemy o nim, ogranicza

---

[14]) *Gesammelte Werke* 2, str. 433.

[15]) *Math. Ann.* 12, 13; *Leipziger Ber.* 1884.

[16]) *Math. Ann.* 6.

[17]) *Annali di Matem*, II, 5 i 7.

[18]) *Math. Ann.* 8.

[19]) *Münchener Ber.* 1883.

[20]) *Quart. Journ.* 9.

[21]) Patrz cytowaną już rozprawę: *Om Flader af fjerde Orden med Doppeltkeglesnit.*

[22]) *Om Flader af fjerde Orden med Tilbagegangskeglesnitt* (Kopenhaga, 1881).

[23]) Rozprawa monachijska, 1878; *Math. Ann.* 15, 18, 28, 29.

[24]) Dla chcącego zająć się konstrukcyą specyalnych powierzchni służyć mogą reguły praktyczne, które Hicks (*Messenger of Mathematics* II, 5) podał dla konstrukcyi powierzchni falowéj.

się na spostrzeżeniach Chr. Wienera[25]) i Björlinga[26]), którzy zbudowali modele zwykłych osobliwości krzywéj przestrzennéj, i na najnowszych badaniach Knesera[27]).

Nadzwyczaj wielka liczba ważnych badań ma na celu oznaczenie mnogości utworów geometrycznych, czyniących zadość warunkom, wystarczającym do ustanowienia skończonéj liczby tychże. Twierdzenie Bézout'a, podające liczbę rozwiązań układu oznaczonego równań algebraicznych, nie daje się prawie nigdy stosować do rozwiązywania takich pytań, gdyż twierdzenie to opiera się na równaniach ogólnych swego stopnia, gdy tymczasem równania, jakie otrzymujemy przy próbie analitycznego rozwiązania powyższych pytań, są formy specyalnéj. Z tego to powodu zadania te, należące do dziedziny tak zwanéj „geometryi liczącéj", pozostawały przez długi czas bez rozwiązania.

Pomiędzy licznemi podaniami, wygłoszonemi przez Steinera, znajdują się niektóre, dotyczące pytań z dziedziny geometryi liczącéj. Są to podania o liczbie stożkowych, przechodzących przez trzy punkty dane krzywéj płaskiej 3-go rzędu i będących do do niej ściśle stycznemi w innych punktach[28]); o liczbie stożkowych poczwórnie stycznych do krzywéj czwartego rzędu, lub mających z góry oznaczone związki styczności z krzywą daną[29]). Jeszcze wyraźniéj do dziedziny téj geometryi należy podanie o liczbie stożkowych stycznych do 5, 4 lub 3 stożkowych i przechodzących odpowiednio przez 0, 1 lub 2 punkty[30]); daléj o liczbie stożkowych, których znamy pewną liczbę p punktów, pewną liczbę t stycznych i pewną liczbę n normalnych, które to liczby są poddane warunkowi $p+t+n=5$[31]); lub nakoniec o liczbie krzywych płaskich trze-

---

[25]) *Zeitschr. f. Math.* 25.

[26]) *Modelle von Raumkurven und Developpabeln-Singularitäten* (Lund, Gleerup 1881).

[27]) *Math. Ann.* 31.

[28]) *Sätze über Curven zweiter und dritter Ordnung. Journ. f. Math.* 32; *Gesammelte Werke*, T. 2-gi str. 375.

[29]) *Aufgaben und Lehrsätze*; *Journ. f. Math*, 45, 49; *Gesammelte Werke* T. 2, str. 437 i 613.

[30]) *Elementare Lösung einer geometrischen Aufgabe* i t. d. *Journ. f. Math.* 37 i *Gesammelte Werke* tom 2-gi str. 389.

[31]) *Vermischte Sätze und Aufgaben*, *Journ. f. Math.* 55 i *Gesammelte Werke* T. 2, str. 661.

ciego rzędu, poddanych warunkom danym [32]). Mniéj wyraźnie lecz zawsze do téj dziedziny należy znaczna część rozprawy: *Ueber solche algebraische Curven, welche einen Mittelpunkt haben, und über darauf bezügliche Eigenschaften allgemeiner Curven, sowie über geradlinige Transversalen der letzteren* [33]) jako téż rozprawy: *Ueber algebraische Curven und Flächen* [34]).

Jakkolwiek nieznaną jest droga, która doprowadziła Steinera do odkrycia tych twierdzeń, można jednak powiedzieć, że jego badania przyczyniły się do postępu wiedzy, a to głównie dlatego, że pobudziły uczonych do szukania dowodów twierdzeń wielkiego geometry niemieckiego. Że te poszukiwania nie pozostały bezowocnemi, dowodzą liczne prace, jakie się w tym przedmiocie ukazały.

Pomiędzy niemi wspomnimy przedewszystkiém o pracy Bischoffa p. t.: *Einige Sätze über die Tangenten algebraischer Curven* [35]), w któréj przy pomocy środków nowoczesnéj algebry dowiedzione są niektóre twierdzenia Steinera i inne analogiczne. Bischoff jednak, jak zresztą i sam Steiner, wpadł w niektóre błędy, które wykrył Chasles [36]); dla poprawienia ich należało zwrócić uwagę na rozwiązania niewłaściwe, jak to pokazał Cremona [37]). Twierdzenia, ogłoszone przez Steinera w 55-ym tomie dziennika *Journal für Mathematik* [38]), były znowu dowiedzione przez de Jonquières'a [39]). O twierdzeniach, które są albo analogicznemi do niektórych twierdzeń Steinera albo rozwinięciem tychże, traktuje rozprawa tegoż de Jonquières'a: *Solutions de quelques questions générales concernant les courbes algébriques planes* [40]), w któréj badaném jest zadanie: „oznaczyć klasę obwiedniéj linii prostéj, która przecina daną krzywą algebraiczną w ten sposób, że pewna dana funkcya algebraiczna wymierna i całkowita wzajemnych odległości punktów przecięcia ma wartość daną“. Inne

---

[32]) *Aufgaben nnd Lehrsätze. Journ. f. Math.* 45; *Gesammelte Werke* T. 2-gi, str. 485.

[33]) *Journ. f. Math.* 47; *Gesammelte Werke*, T. 2, str. 501.

[34]) *Journ. f. Math.* 49; *Gesammelte Werke*, T. 2, str. 621,

[35]) *Journ. f. Math.* 56.

[36]) *C. R.* 58, str. 222—236,

[37]) *Einleitung in die Theorie der ebenen Curven.* (Gryfia, 1865)

[38]) Patrz wyżéj notę [31]).

[39]) *Journ. Liouv.* IV, 2.

[40]) *Journ. f. Math.* 59.

podania Steinera mogą być stwierdzone przy pomocy przekształcenia kwadratowego, jak to okazał Berner w swéj cennéj rozprawie: *De transformatione secundi ordinis ad figuras geometricas adhibita* (Berlin, 1864). Nakoniec podania o normalnych były dowiedzione i w rozmaity sposób uzupełnione przez kilku matematyków, jak: Darboux [41]), Marcks [42]) i Sturm [43]).

Do geometryi liczącéj należy także praca de Jonquières'a: *Théorèmes généraux concernant les courbes géométriques planes d'un ordre quelconque* [44]), która ważność swoję zawdzięcza głównie wprowadzeniu do niéj pojęcia skaźnika układu pojedyńczo nieskończonego krzywych płaskich. Nie można przemilczeć, że niektóre twierdzenia tu wygłoszone wymagają koniecznie modyfikacyi; przyczynę niedostatecznego wykładu de Jonquières'a [45]) należy szukać w metodzie przez niego użytéj, polegającéj na stosowaniu twierdzenia Bézouta, nie pozwalającego na oddzielenie rozwiązań obcych [46]). Zauważymy jeszcze, że de Jonquières błędnie przypuszczał możliwość wyrażenia we współrzędnych Descartes'a za pomocą równania postaci $\sum_{r=0}^{r=m} \lambda^{m-r} f_r(x,y)=0$ każdego szeregu krzywych o skaźniku m.

Prace Steinera i de Jonquières'a mogą być uważane jako przygotowawcze do geometryi liczącéj, datującéj właściwie od chwili, w któréj Chasles rozpoczął ogłaszać liczne rozprawy jakie świetnie zamknęły jego sławną karyerę naukową.

Pierwsza z tych rozpraw [47]) ma na celu oznaczenie liczby stożkowych, dotykających pięciu stożkowych danych, albo czyniących zadość innym określonym warunkom. Wkrótce nastąpiły dwie inne rozprawy, z których pierwsza [48]) ma na celu konstrukcyą stożkowych, czyniących zadość pięciu warunkom oraz określenie ich

---

[41]) *C. R.* 70 (str. 1328—1333).

[42]) *Math. Ann.* 5.

[43]) *Math. Ann.* 6, 7, 9,

[44]) *Journ. Liouv.* VI, 2.

[45]) Porów. inne artykuły de Jonquières'a w *Journ. Liouv.* X, 2; *Giorn. di matem.* 4, str. 45—63; 212—213.

[46]) Patrz rozprawę Study'ego: *Ueber die Geometrie der Kegelschnitte* (*Math. Ann.* 27.)

[47]) Patrz wyżéj cytatę [36]);

[48]) *C. R.* 58 (str. 297—308)

liczby w każdym przypadku, podczas gdy druga [49]) traktuje o układach stożkowych, przecinających stożkowe dane pod kątami, których dane są wielkości lub dwusieczne. Metodą służącą do ustalenia twierdzeń zawartych w tych pracach Chasles zajął się w sławnym komunikacie, ogłoszonym w *Comptes rendus* z dnia 27 czerwca 1864 [50]), gdzie wyraźnie wskazane są korzyści, jakie przynieść mogą w rozwiązaniu zagadnień geometryi liczącéj: charakterystyki układu stożkowych; uważanie stożkowych odkształconych układu i zasada odpowiedniości. Metoda ta w części, dotyczącéj pojęcia charakterystyki, jest udoskonaleniem, wskazaném przez praktykę metody de Jonquières'a, opartéj na pojęciu skaźnika układu; lecz udoskonalenie to jest tak wielkie, że słusznie Chasles'a uważać można za twórcę teoryi charakterystyk. De Jonquières wszakże nie podzielał tego poglądu, co dało powód do żywéj dyskusyi jego z Chasles'em, którą czytelnik znaleźć może w *Comptes rendus*, 1866 [51]) i w niektórych dziełkach cytowanych na str. 331 pracy Chasles'a p. t.: *Rapport sur le progrès de la Géométrie.* (Paryż, 1870).

Po wyłożeniu zasadniczych pojęć swojéj metody, dał Chasles nowe przykłady jéj zastosowań [52]) i użył jéj do rozwiązania skomplikowanych pytań, w których trzeba zwracać uwagę na punkty wielokrotne krzywych rzędu wyższego [53]); w których występują warunki wielokrotne [54]), uważają się pewne szeregi normalnych [55]); zachodzą warunki prostopadłości pomiędzy pewnemi szeregami prostych [56]), takie wreszcie, w których uważamy asymptoty, średnice i t. d. stożkowych pewnego układu [57]).

Świetne rezultaty, otrzymane przez Chasles'a, znalazły oddźwięk w całym świecie uczonym, tak, że powstało dużo prac, mających na celu już to udoskonalenie jego sposobów postępowania, już to dojście do jego twierdzeń inną drogą i uogólnienie tychże.

---

49) *C. R.* 58 (str. 425—431).
50) *C. R.* 58 (str. 1167—1176).
51) *C. R.* 63, str. 816—821, 874—878, 907—909.
52) *C. R.* 59, str. 7—15, 93—97.
53) *C. R.* 59, str. 209—218.
54) *C. R.* 59, str. 344—357.
55) *C. R.* 72, str. 419—43 .
56) *C. R.* 72, str. 487—494.
57) *C. R.* 72, str. 511—520.

Pomiędzy temi pracami wymieniamy niektóre noty Cremony [58]), Cayley'a [59]), Dina [60]), dużą rozprawę Zeuthena: *Nouvelle méthode pour déterminer les caractéristiques des systèmes de coniques*[61]) i ważną rozprawę Cayley'a: *On the curves which satisfy given conditions*[62]), w których pokazany jest użytek z równań funkcyonalnych przy rozwiązywaniu zagadnień geometryi liczącéj. Sam Chasles rozwinął znacznie swoje metody, uogólniając dla układów linij krzywych dowolnego rzędu badania, jakie poczynił początkowo dla stożkowych[63]). Analogiczne studya poczynił de Jonquières [64]) i rozciągnął na układy powierzchni[65]). Do tego przedmiotu odnoszą się *Recherches sur les séries de courbes et de surfaces algébriques* tego samego autora (Paryż, 1866) oraz inne jego artykuły, ogłoszone w rozmaitych czasopismach naukowych [66]), wreszcie rozwiązanie Zeuthena[67]) pytań odnoszących się do styczności rozmaitych gatunków krzywych i powierzchni.

Po pracach Chasles'a nad teoryą układów linij krzywych, nastąpiły prace Cayley'a[68]), Cremony[69]), Hirsta[70]); po pracach de Jonquièresa [71]), —jedna Cayley'a[72]) i kilka ważnych rozpraw Brilla [73]). O pokrewnych przedmiotach traktuje znana rozprawa Zeuthena: *Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver, med Anvendelse til Bestemmelse af Karakteristikerne i de elementaere Systemer af fjerde Orden*[74]), rozprawa Caporali'ego

---

[58]) *C. R.* 59 str. 776—779.

[59]) *C. R.* 63, str. 9—12.

[60]) *C. R.* 65, str. 499—501.

[61]) *Nouv. Ann.* V, 2; porówn. *C. R.* 62, str. 177—183.

[62]) *Phil. Trans.* 158, str. 45—172

[63]) *C. R.* 58, str. 537; 62, str. 325 — 334; 63, str. 670 —673; 64, str. 799 —805.

[64]) *C. R.* 58, str. 535—537; porówn. cytatę [71]).

[65]) *C. R.* 58, str. 567—571; 63, str. 793—797. *Nouv. Ann.* III, 2. patrz artykuł Zeuthena, tamże VII, 2..

[66]) *Journ. f. Math.* 63; *Math. Ann.* 1; *Annali di Matem.* VIII, 2.

[67]) *C. R.* 89; str. 899—902 i 946—948.

[68]) *C. R*, 64, str. 1079.

[69]) *C. R.* 64, str. 1079—1080.

[70]) *C. R.* 64, str. 1080—1081.

[71]) *C. R.* 63, str. 423—425; 486—488.

[72]) *C. R.* 63; str. 666—670.

[73]) *Math. Ann.* 3, 4. Porówn. Krey (*Math. Ann.* 10, 12); Fouret, *C. R* 84, str. 436—439.

[74]) *Danske Videnskabenes Selskabskrifter Naturv. og Matem.* Afd X, 5.

Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane [75]) i niektóre prace Krey'a [76]), Lindemanna [77]) i Spottiswoode'a [78]).

W tym czasie Chasles ogłosił wiele twierdzeń o pojedyńczo nieskończonych układach stożkowych w przestrzeni [79]) i o analogicznych układach powierzchni stopnia 2-go [80]). Twierdzeń tych dowiedli po większéj części drogą analityczną Hierholzer [81]), i Cayley [82]); do nich odnoszą się prace Darboux [83]), Halphena [84]) i piękne rozprawy Schuberta [85]). Salmon i Zeuthen zajęli się układami powierzchni stopnia 2-go; pierwszy dowiódł ich własności za pomocą uważania przestrzeni o większéj liczbie wymiarów [86]), drugi zaś badając powierzchnie stopnia 2-go biegunowe punktu względem powierzchni algebraicznéj [87]).

Powiedzmy jeszcze, że badanie charakterystyk układów elementarnych linij krzywych płaskich rzędu 3-go było podjęte przez Zeuthena [88]) i Maillarda [89]); analogiczne badania dla krzywych płaskich 3-go rzędu i 3-éj lub 4-éj klasy zawdzięczamy Schubertowi [90]); dla krzywych zaś 3-go rzędu skośnych—Sturmowi [91]) i Schubertowi [92]).

---

[75]) *Collectanea mathematica* str. 144—170.

[76]) *Acta math.* 5, 7.

[77]) *Bull. Soc. math.* 10.

[78]) *Phil. Trans.* 154; *C. R.* 83, str. 627. *Proc. math. Soc.* 8. Porówn. pracę tegoż autora: *On hyperjacobian surfaces and curves*, *Phil. Trans.* 167.

[79]) *C R.* 61, str. 389—396.

[80]) *C. R.* 62, str. 405—413.

[81]) *Math Ann.* 2.

[82]) *Proc. math. Soc.* 4. Porówn. rozprawy Lürotha w *Journ. f. Math.* 68 *Math. Ann.* 3.

[83]) *C. R.* 67; str. 1333—1334.

[84]) *C. R.* 76, str. 1074—1077; patrz tegoż *Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre* w *Bull. Soc. mat.* 2.

[85]) *Journ. f. Math.* 71, 73; *Math. Ann.* 10.

[86]) *Quart. Journ.* 7.

[87]) *Annali di Matem.* IV, 2.

[88]) *C. R.* 74, str. 521—525; 604—607; 726—730.

[89]) *Recherches des caractéristiques des systèmes élémentaires des courbes planes du troisième ordre* (Paryż, 1871).

[90]) *Math. Ann* 13.

[91]) *Journ. f. Math.* 79, 80.

[92]) § 25 dzieła *Kalkul der abzählenden Geometrie* (Lipsk, 1879) zawierający treść rozprawy, uwieńczonéj w r. 1875 przez Akademią duńską.

Wielkiéj wagi dla teoryi układów linij krzywych płaskich jest związek, jaki możemy ustanowić między nią a teoryą równań różniczkowych (pierwszego rzędu) postaci:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

przedstawiając całki jednego z tych równań przez szereg krzywych płaskich o charakterystykach (p, q). Równanie różniczkowe sprawi, że każdemu punktowi będzie odpowiadało p kierunków z niego wychodzących, a każdéj prostéj—q punktów na niéj leżących. Do takiéj odpowiedniości doszedł Clebsch w swoich badaniach nad koneksami[93]), niezależnie zaś od Clebscha badał ją Fouret w kilku pracach [94]) i rozciągnął ją do przestrzeni [95]).

Pomiędzy zastosowaniami tej odpowiedniości, poczynionemi przez Foureta, wymienimy: rozciągnięcie do układów krzywych przestępnych twierdzenia wskazującego, ile krzywych układu pojedyńczo nieskończonego dotyka danéj krzywéj algebraicznéj; oznaczenie rzędu miejsca punktów styczności [96]) powierzchni (algebraicznych lub przestępnych) układu pojedyńczo nieskończonego z powierzchnią układu analogicznego, podwójnie nieskończonego, oraz rzędu miejsca punktów styczności powierzchni (algebraicznych lub przestępnych) układu podwójnie nieskończonego z powierzchnią algebraiczną [97]).

Znaczny postęp uczyniła geometrya licząca przez wprowadzenie, obok krzywych i powierzchni, nowych utworów, do których stosować się daje metoda Chasles'a; można powiedzieć

---

[93]) *Math. Ann.* 6.

[94]) *C. R.* 78, str. 831—834; 1693—1697; 1837 — 1840; 86, str. 586 — 589; *Bull. Soc. math.* 2, str. 72—83; tamże 96—100; *C. R.* 83, str. 633—636; *Bull. Soc. math.* 5; str. 19—24; 130—134.

[95]) *C. R.* 79; str. 467—470; 689—693; 80, str. 167—170; 805—808; 82, str. 1497—1500; 83, str. 794—797; 86, str. 604—656. Zauważymy, że interpretacya geometryczna równania $L\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z\right)-M\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-N\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+R=0$, gdzie L, M, N, R są funkcyami liniowemi, dana przez Foureta w *C. R.* 83, doprowadziła go do pewnych powierzchni, badanych poprzednio przez Kleina i Lie'go (*C. R.* 70).

[96]) *C. R.* 82; str. 1328—1331.

[97]) Prace wydrukowane w *C. R.* 80 i cytowane wyżéj pod [95]).

że i do nich doszedł Chasles w swych licznych badaniach nad szeregami trójkątów [98]).

Pierwsze komunikaty o tym przedmiocie, przedstawione Akademii francuskiéj, dotyczyły szeregu trójkątów podobnych, poddanych trzem warunkom wspólnym [99]) i oznaczenia liczby trójkątów podobnych czyniących zadość czterem warunkom [100]); o innych pytaniach, odnoszących się do trójkątów podobnych, traktują dwa kolejne komunikaty Chasles'a [101]). W następnych pracach zajmował się on trójkątami równoobwodowemi w ogólności [102]), oraz trójkątami równoobwodowemi, których znany jest jeden bok lub wierzchołek [103]) i które są poddane trzem innym warunkom wspólnym.

Tego samego rodzaju badania doprowadziły Hirsta do rozciągnięcia teoryi charakterystyk na korelacye płaskie i przestrzenne [104]); badania te z powodzeniem prowadzone w dalszym ciągu przez Sturma [105]) i Vissali'ego [106]) dały początek rozprawie Schuberta [107]): *Ueber die ein- zweideutige Beziehung zwischen den Elementen einstufiger Grundgebilde.*

Do geometryi liczącéj należy wiele twierdzeń, podanych przez Chasles'a, jako zastosowanie odkrytéj przez niego zasady odpowiedniości.

Dla form elementarnych dał ją poznać Chasles w pewnych przypadkach szczególnych w 1855 [108]), w ogólności zaś we wspomnianym już komunikacie z dnia 27 czerwca 1864 [109]); następnie wyraził jéj cechy właściwe [110]), Późniéj on i Cayley [111]) rozciągnęli

---

98) Przeniesieniem tych badań na przestrzeń zajmował się, o ile wiem, tylko Hossfeld: *Ueber die einer algebraischen Fläche eingeschriebenen regulären Tetraeder mit Berücksichtigung der Flächen zweiter Ordnung. Zeitschr. f. Math. 29.*

99) *C. R.* 78, str. 1373—1381.

100) *C. R.* 78, str. 1599—1607.

101) *C. R.* 79, str. 877—885; 1427—1435.

102) *C. R* 84, str. 55—61.

103) *C. R.* 84, str. 471—477; 627—632; 1051—1055.

104) *Annali di Matem*, VI, 2; VIII, 2; *Proc. math. Soc.* 5, 6 8.

105) *Math. Ann.* 12; 19.

106) *Memorie della Accad. dei Lincei* III, 4.

107) *Journ. f. Math.* 88.

108) *C. R.* 41. str. 1097—1107.

109) Patrz cytatę [50]).

110) *C. R.* 78, str. 577—585.

111) Chasles, *C. R.* 62; str. 579—586; Cayley, *C. R.* 62; str. 586—590, Chasles, *C. R.* 62, str. 1354—1364.

ją na wszystkie formy wymierne pierwszego gatunku, Saltel zaś wskazał metodę do odróżniania koincydencyj zachodzących w odległości skończonéj [112]) i poczynił liczne a interesujące zastosowania[113]). Uogólnienie zasady odpowiedniości do układu punktów należących do krzywych rzędu dowolnego zawdzięczamy Cayley'owi [114]), któremu nie udał się wszakże dowód ogólny wyniku otrzymanego drogą indukcyi. Dał go dwoma różnemi sposobami Brill [115]); dalsze zaś rozwinięcie zasady odpowiedniości niedawno odkrył Hurwitz [116]). Uogólnienie zasady odpowiedniości Chasles'a dla płaszczyzny i przestrzeni podali Salmon [117]) i Zeuthen [118]), dla przestrzeni zaś liniowych jakichkolwiek — Pieri[119]).

Niezliczone są zastosowania zasady odpowiedniości ograniczonéj do form wymiernych pierwszego gatunku; im to poświęcił Chasles komunikaty, przedstawione Akademii francuskiéj w ostanich latach swego życia. Wymienimy pomiędzy niemi: oznaczenie przy pomocy téj zasady klasy rozwiniętéj i kaustyki przez odbicie krzywéj algebraicznéj płaskiéj [120]); dowód licznych twierdzeń różnego gatunku o krzywych rzędu jakiegokolwiek [121]); dowód własności średnic [122]), osi harmonicznych [123]), pochyłych poprowadzonych przez punkty krzywéj pod kątami równéj wielkości [124]), wielokątów wpisanych w krzywe i opisanych na krzywych rzędu lub klasy jakiéjkolwiek [125]). Za pomocą zasady odpowiedniości rozciągnął Chasles teoryą normalnych na krzywe algebraiczne [126]) i udo-

---

[112]) *C. R.* 80, str. 1064—1067; 1324—1326.

[113]) *C. R.* 81; str, 884—886; 1047—1050; 82, str. 63 — 66; 83, str. 529 — 532; 608—611; 894—896.

[114]) *C. R.* 62; str. 586—590. Porówn. rozprawę cytowaną pod [62]).

[115]) *Math Ann.* 6, 7. Patrz najnowszą pracę tegoż autora: *Ueber algebraische Correspondenzen. Math. Ann.* 31.

[116]) *Math. Ann.* 28.

[117]) *Analytical geometry of three dimensions* (2-e wyd. Dublin, 1865).

[118]) *C. R.* 78, str. 1553—1557.

[119]) *Rend. della Accad. dei Lincei* 3. Caporali, *Memorie di Geometria* (Neapol, 1888) str. 329—332.

[120]) *C. R.* 72, str. 394—399.

[121]) *C. R.* 72, str. 577—588.

[122]) *C. R.* 72, str. 794—800.

[123]) *C. R.* 73, str. 229—237; 1241—1247; 1289—1296; 1405—1413; 74, str. 21—23.

[124]) *C. R.* 74, str. 1146—1554; 1277—1279.

[125]) *C R.* 78, str. 922—928.

[126]) *C. R.* 80. str. 505—512.

wodnił wiele twierdzeń ogólnych, odnoszących się do ruchu figury płaskiéj w jéj własnéj płaszczyznie [127]. Wielki interes teoretyczny ma jego zastosowanie zasady odpowiedniości do oznaczenia liczby przecięć dwóch krzywych, należących do téj saméj płaszczyzny[128]; rozumowanie, które go doprowadziło do tego rezultatu może być uogólnione i prowadzi w wielu przypadkach do znalezienia liczby rozwiązań n równań algebraicznych z n niewiadomemi, oraz do rozwiązania pytań pokrewnych, jak to pokazali Fouret [129] i Saltel [130].

Nie są to jedyne zastosowania zasady odpowiedniości, Chasles bowiem podał jeszcze wiele twierdzeń, odnoszących się do par odcinków linij stycznych normalnych lub pochyłych do danych krzywych algebraicznych, pomiędzy któremi istnieje stosunek równości lub inny stosunek stały[131], lub które dają iloczyn stały[132] albo sumę stałą [133]. Inne jego twierdzenia dotyczą trzech takich odcinków, których znamy iloczyn [134] lub sumę [135]. Te poszukiwania doprowadziły Chasles'a do pewnych praw ogólnych, odnoszących się do geometryi płaskiéj, z których przytoczymy następujące:

1) Jeżeli między danemi pewnego zagadnienia, mającego na celu oznaczenie rzędu, miejsca lub klasy obwiedniéj, znajduje się punkt mający przesuwać się po krzywéj rzędu n-go, to rząd szukany, lub klasa szukana będą miały formę nf, gdzie f jest funkcyą innych danych wchodzących do zagadnienia. I wzajemnie [136].

2) Jeżeli w poszukiwaniu rzędu miejsca lub klasy obwiedniéj napotykamy punkty krzywéj rzędu n i klassy ν, oraz styczne w tych punktach, to rząd szukany lub klasa szukana będą postaci $nf + \nu\varphi$, gdzie f i φ są funkcyami innych danych zagadnienia[137].

---

127) *C. R.* 80, str. 346—352.

128) *C. R.* 75, str. 736—744; 76, str. 126—132.

129) *C. R.* 78, str. 183—186; *Bull. Soc. math.* 1; str. 122 i następne; 258 i następne; 2, str. 127—139.

130) *Mém. de l'Acad. de Belg.* 24; *C.* R. 81 str. 884—886, 82, str. 63—66: 324—326.

131) *C. R.* 81, str. 253—259; 355—360; 643—649; 757—762; 993—999; 1221—1227; 83, str. 97—101.

132) *C. R* 82, str. 1399—1405; 1463—1459.

133) *C. R.* 83, str. 467—472; 495—501, 519—524; 83, str. 1123—1119; 1195—1201.

134) *C. R.* 83, str. 589—594; 641—647.

135) *C. R.* 83, str. 757—762; 867—673.

136) *C. R.* 84, str. 971—974.

137) *C. R.* 85, str. 362—367.

3) Jeżeli w poszukiwaniu rzędu, miejsca lub klasy obwiedniéj napotykamy punkt krzywéj rzędu n i klasy ν oraz styczną w innym punkcie, to rząd lub klasa szukana zawierać będą w swém wyrażeniu czynnik $n\nu$; jeżeli zaś odwrotnie napotykamy punkt krzywéj oraz styczne, przeprowadzone z niego do téj saméj krzywéj, to rząd lub klasa będą postaci $nf + \nu\varphi + n\nu F$, gdzie f, φ, F są funkcyami innych danych [138]. Dowód i uogólnienie tych praw dla przestrzeni stanowi przedmiot kilku prac Foureta [139].

Niepodobna wyliczyć wszystkich zastosowań zasady odpowiedniości, rozproszonych w pracach różnego rodzaju. Ale nie można przemilczeć: o dowodach Bertiniego [140], Zeuthena [141] i Schuberta [142], twierdzeniu Riemanna, dotyczącego równości rodzaju dwóch krzywych punktowo rzutowych; o rozprawie Zeuthena o Plückerowskich charakterystykach obwiednich [143] i o tegoż pewnych wzorach i twierdzeniach z geometryi liczącéj [144].

Chasles, kierowany indukcyą, twierdził, że w pojedyńczo nieskończonym układzie stożkowych liczba stożkowych czyniących zadość nowemu pojedyńczemu warunkowi wyraża się jako funkcya liniowa jednorodna charakterystyk układu. Cremona przypuszczał, że twierdzenie analogiczne stosuje się do układów podwójnie nieskończonych [145].

Jedno i drugie nie jest prawdą bezwarunkową. Spostrzegli to Saltel [146] i Halphen [147]. Zmiany konieczne, jakie należy poczynić w podaniu Chasles'a (pochodzące od formy odkształconéj linii stożkowéj, a które uszły uwagi wielkiego geometry), i zbadanie przypadków, w których to twierdzenie jest prawdziwém, było przedmiotem kilku bardzo ważnych prac Halphena [148]. Wcześniejsze próby dowodów twierdzenia Chasles'a, poczynili

---

[138] *C. R.* 85, str. 460—466.

[139] *C. R.* 85. str. 134—136; 216—219; 85, str. 844—847; 944—947.

[140] *Giorn. di Matem.*, 7.

[141] *Math. Ann.* 3.

[142] *Math. Ann.* 16.

[143] *C. R.* 78, str. 274—278; 239—342. Znajdujemy tu rozszerzenie pojęcia rodzaju na układy krzywych płaskich.

[144] *Acta math.* 1.

[145] *C. R.* 59, str. 776—779.

[146] *Bull. de l'Acad. de Belgique*, 1876.

[147] *C. R.* 83, str. 537—538; 886—888.

[149] *Proc. math. Soc.* 9, 10; *Math. Ann.* 15; *Journ. Éc. polyt.* 45.

Clebsch[149]), Halphen[150]), Lindemann[151]), Schubert[152]), Hurwitz [153]) i inni. Najlepsze ze znanych prac, które ogłoszone były po pracach Halphena i obejmują rezultaty osiągnięte przez niego oraz nowe pomysły są: del Pezza[154]), Study'ego [155]) i nieukończone prace Burali-Forti'ego [156]).

Najnowsze postępy geometryi liczącéj zawdzięczamy Schubertowi. Pominę tu noty, jakie ten uczony ogłosił w *Göttinger Nachrichten*, gdyż rezultaty jakie w nich podał, przeszły wzbogacone do nowych prac jego. Wymieniam wszakże ważne prace ogłoszone w *Mathematische Annalen* [157]), które zawierają zasady metodycznego traktowania nauki i ich zastosowanie do badania stycznych osobliwych powierzchni algebraicznych ogólnych [158]) oraz do oznaczenia osobliwości kompleksów prostych. Treść tych rozpraw stanowi część późniéj wydanego niezmiernie ważnego dzieła: *Kalkül der abzählenden Geometrie*, od którego datuje powodzenie geometryi liczącéj jako nauki indywidualnéj [159]). W dziele tém zasady odpowiedniości są przedstawione pod właściwym punktem widzenia; w niém jasno jest pokazaném, co stanowi właściwie zagadnie-

---

[149]) *Math. Ann.* 6.

[150]) *Bull. Soc. math.* 1, str. 130—141; 226 — 240; 2, str. 11—33; *Bull de la Soc. philomatique* III, 7.

[151]) Clebsch, *Vorlesungen über Geometrie.*

[152]) patrz cytatę [153]).

[153]) Hurwitz und Schubert, *Göttinger Nachr.* 1876.

[154]) *Napoli Rend.* 23.

[155]) *Math. Ann.* 27.

[156]) *Giorn. di Matem.* 24, str. 309—333. Co do badań analitycznych patrz prace Halphena cyt. p.[148]) i rozprawę Burali-Fortie'go w *Giorn. di Matem* 24, str. 334—845.

[157]) *Beiträge zur abzählenden Geometrie. Erste Abhandlung: Moduln vielfacher Bedingung bei Flächen zweiter Ordnung. Tangentensingularitäten der allgemeinen Ordnungsfläche. Das Correspondenzprincip für Gruppen von* n *Punkten und von* n *Strahlen. Singularitäten des Complexes* n-*en Grades. Math. Ann.* 10, str. 1—116, 318—364; 11, str. 347—378; 12, str. 180—201; 202—221.

[158]) Krey rozciągnął później (*Math. Ann.* 15) twierdzenia Schuberta, do powierzchni obdarzonych osobliwościami.

[159]) Porówn. Cayley, *On Schubert's method of the contact of a line with a surface, Quart. Journ.* 17; Halphen. *Observations sur la théorie des caractéristiques Bull. Soc. math.* 8, str. 31—34 i artykuły Schuberta tamże *Réponse aux observations de M. Halphen sur la théorie des caractéristiques* (str. 60—61) i *Note sur l'évolution du nombre des coniques faisant partie d'un système et satisfaisant à une condition simple* (str. 61—62).

nie o charakterystykach figury oznaczonéj i podane są metody nadzwyczaj potężne do rozwiązania tego zagadnienia. Metody Schuberta mogą stać się z czasem dla matematyków takiém narzędziem pomocniczém, jakiém jest obecnie geometrya Descartes'a, i nikt nie posądzi mnie o przesadę, jeżeli powiem, że metody te w niezliczonén mnóstwie przypadków służą do rozwiązania ogólnego zagadnienia eliminacyi t. j. oznaczenia liczby rozwiązań układu równań algebraicznych. Dlatego wszyscy analitycy czy geometrowie winni oddać wielkie pochwały dziełu Schuberta, a co właściwsza, zamiast je podziwiać, winni się starać o wydoskonalenie płodnych metod w niém podanych, dopełnienie ich braków i uwolnienie od zarzutu, uczynionego przez niektórych metodom Schuberta jako nie dość ścisłym, oraz o zwiększenie zastosowań, do jakich one w wysokim nadają się stopniu.

Jako ciąg dalszy tego dzieła należy uważać badania samego Schuberta nad geometryą liczącą trójkąta [161]), nad odpowiedniością trójliniową [160]), nad odpowiedniością kwadratową [162]). Rozciągnięciem teoryi geometryi liczącéj na przestrzenie liniowe wielokrotne zajmują się dwie ważne najnowsze prace Schuberta [163]). Nakoniec *Rachunkiem geometryi liczącéj* posługiwał się Krey przy badaniu pewnéj szczególnéj odpowiedniości dwóch powierzchni [164]), Sturm zaś przy uproszczeniu poprzednio już danego przez [165]) siebie rozwiązania zagadnienia o rzutowości przestrzeni [166]).

---

160) *Math. Ann.* 17.

161) *Lösung des auf trilineare Verwandschaft ausgedehnten Projectivitätsproblem* Hamburg, 1882 (Programm).

162) *Einstufige Ausartungen der quadratischen Transformationen der Ebene Mitth. der Math. Gesellsch. zu Hamburg* I, 1882.

163) *Math. Ann.* 26; *Acta math.* 8.

164) *Math. Ann.* 18.

165) *Math. Ann.* 6.

166) *Math. Ann.* 12.

V.

Teorya krzywych o podwójnéj krzywiznie.

Teorya krzywych płaskich może być uogólnioną w dwóch różnych kierunkach. Biorąc na uwagę fakt, że taka krzywa wyraża się przy pomocy jednego równania pomiędzy współrzędnemi punktu na płaszczyznie, wnosimy, że analogon do teoryi krzywych na płaszczyznie stanowi teorya powierzchni w przestrzeni; o téj nauce traktowały stronnice poprzednie. Jeżeli zaś krzywą płaską będziemy uważali jako szereg pojedyńczo-nieskończony punktów, to można teoryą krzywych rozwinąć, znosząc ograniczenie, aby punkty te znajdowały się na jednéj płaszczyznie. Tym sposobem powstaje teorya krzywych skośnych czyli niepłaskich,

Badanie własności nieskończonościowych tych krzywych daje się przeprowadzić dość łatwo za pomocą metod, nie wiele różniących się od metod, które służyły dla krzywych płaskich, i dla tego było podjęte, jak już wspomniałem, więcéj niż przed wiekiem przez Clairaut'a, a następnie prowadzone w dalszym ciągu przez Lancreta (1774—1807)[1], Monge'a[2], Tinseau[3], de Saint Venanta (1797—1886)[4], Freneta[5], Alfreda Serreta[6], Pawła Serreta, Liouville'a[7] (1809—1882), Bertranda[8], Puiseux'go[9] (1820—1883), Lie'go[10] i wielu innych.

---

[1]) *Mém. prés.* 1, 1806.

[2]) Tamże (serya dawniejsza) 10, 1875 i cytowane już dzieło *L'Application.*

[3]) *Mém. prés.* 9, 1781.

[4]) *Journ. Éc. polyt.* 30.

[5]) *Journ. Liouv.* 17.

[6]) Tamże, 16.

[7]) Patrz noty do dzieła *L'Application de l'Analyse* etc. 5-e wyd. i *Journ. Liouv.* 17.

[8]) *Journ. Liouv.* 15, 16.

[9]) Tamże, 7.

[10]) *Forhandlinger e Videnskab-Selskabet i Christiania*, 1882.

[11]) Szczegóły co do tego w nocie 65-éj dzieła Salmona w opracowaniu Fiedlera: *Analytische Geometrie des Raumes* (3-e wyd. 1880, część II, str. 37). W kwestyi syntetycznego przedstawienia geometryi różniczkowéj krzywych skośnych patrz Schella: *Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung in*

Wyjąwszy tę kategoryą, badanie innych ogólnych własności krzywych skośnych przedstawia wielke trudności. Przypuszczano oddawna, że każda krzywa w przestrzeni może być uważaną za przecięcie zupełne dwóch powierzchni i przedstawianą za pomocą dwóch równań między współrzędnemi punktu w przestrzeni[12]), lecz następnie przekonano się o istnieniu takich krzywych, które nie są zupełnemi przecięciami powierzchni, i zarazem o konieczności przedstawiania ich za pomocą nie dwóch lecz trzech równań, odpowiadających tyluż przechodzącym przez nie powierzchniom. Przypuszczano, że znajomość rzędu będzie wystarczającą do klasyfikacyi krzywych skośnych, lecz już przy krzywych rzędu 4-go przekonano się, że ta znajomość jest niewystarczającą [13]). Zdawało się znowu że rząd i liczba punktów podwójnych pozornych wystarcza; lecz przy dziewiątym rzędzie poznano się, że to przypuszczenie było mylne [14]). I trzecia liczba, a mianowicie najniższy rząd stożków przechodzących przez cięciwy (sieczne podwójne) krzywéj, wychodzące z jednego punktu, mogła być przydatną tylko dla krzywych rzędu niższego od piętnastego. Te fakty doprowadziły do wniosku, że jest rzeczą niemożliwą scharakteryzowanie krzywéj danéj za pomocą oznaczonéj mnogości liczb, z góry podanych.

Przytoczyłem te dane, aby pokazać, że teorya ogólna krzywych skośnych nie przedstawia podobieństwa do żadnéj innéj części geometryi, a ukazując czytelnikowi straszną ciemność, jaką przedstawia, chciałem mu dać środek do znalezienia przyczyny, dla któréj wiadomości nasze o tych utworach geometrycznych są nieliczne i świeżego pochodzenia.

Pierwsze rezultaty ogólne o krzywych o podwójnéj krzywiznie zawdzięczamy Cayley'owi, który poświęcił im dwie ważne rozprawy. W jednéj z nich ustalił on wzory (analogiczne do wzorów Plückera), określające związek między liczbami osobliwości krzy-

---

rein geometrischer Darstellung, (Lipsk, 1859) i P. Serreta: *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des courbes à double courbure* (Paryż, 1860).

[12]) Porów. Magnus, *Aufgaben und Lehrstze aus d. analytischen Geometrie des Raumes*, 1837, str. 160.

[13]) Istnienie dwóch krzywych skośnych 4-go rzędu wykazał najprzód Salmon w r. 1850 (*Cambridge Journ.* 5), a potém Steiner (*Journ. f. Math.* 53).

[14]) Na powierzchni sześciennéj występują już, począwszy od rzędu 6-go krzywe jednego rzędu, zachowujące się rozmaicie względem prostych na powierzchni i mające tę samą liczbę punktów podwójnych pozornych. Porówn. Sturm, *Math. Ann.* 21.

wéj skośnéj [15]); w drugiéj dla badania krzywych skośnych rzędu n-go wprowadził godne uwagi powierzchnie, które nazwał monoidami [16]). Po tych pracach prawdziwy postęp w teoryi naszéj sprawiły rozprawy Halphena i Nöthera [17]), uwieńczone w roku 1882 przez Akademią berlińską; dają one rzeczywiście podstawę, do ogólnéj teoryi krzywych skośnych, ponieważ traktują o zadaniach takich, jak: „oznaczyć wszystkie krzywe danego rzędu różne pomiędzy sobą; oznaczyć, jakie krzywe mogą być na danéj powierzchni“ i wiele innych jeszcze pytań niemniejszéj wagi. Te dwie rozprawy łączą się tak ściśle i przenikają się wzajemnie do tego stopnia, że trudno z nich wydzielić to, co należy się każdemu autorowi z pomiędzy rezultatów wspólnych, jakie zawierają ich prace. Jeżeli z jednéj strony Nöther mógł korzystać z twierdzeń ogłoszonych w końcu roku 1870 przez Halphena w *Comptes Rendus* i gdzieindziéj [18]), to z drugiéj strony Halphen mógł spożytkować twierdzenia, zawarte w znakomitéj rozprawie Brilla i Nöthera *Ueber die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie* [19]) oraz w tych rozprawach Nöthera, w których wyłożone jest z całą ścisłością twierdzenie zasadnicze o funkcyach algebraicz-

---

[15]) *Journ. Liouv.* 10 albo *Cambridge Journ.* 5. Po téj rozprawie nastąpiła ogłoszona w tymże tomie *Cambridge Journ.* rozprawa Salmona, a jako dopełnienie téj ostatniéj może być uważana rozprawa Zeuthena, ogłoszona w *Annali di Matem.* II, 3. Do tego przedmiotu odnoszą się rozprawy: Cayley'a (*Phil. Trans.* 153) Piqueta (C. R. 77 i *Bull. Soc. math.* 1), Geisera (*Collectanea mathematica* i t. d. Medyolan, 1881) o prostych przecinających krzywą skośną pewną liczbę razy, jako téż artykuły Pieri'ego (*Lincei Rend.* 1886), w których podany jest sposób oznaczenia liczby normalnych podwójnych krzywej skośnéj lub powierzchni.

[16]) *C. R.* 54 i 58. Z tą pracą porówn. rozprawę Em. Weyra: *Ueber algebraische Raumkurven* (Getynga, 1873) i inne pisma tegoż autora (*C. R.* 76, oraz *Wiener Ber.* 69). Do cytowanych rozpraw Cayley'a można by dodać jeszcze trzecią (*Quart. Journ.* 3), w któréj autor stawia sobie zadanie uważania krzywéj za kompleks jéj siecznych (w znaczeniu takiém jak u Plückera) i przedstawiania jéj za pomocą jednego tylko równania pomiędzy współrzędnemi w przestrzeni; zauważę wszelako, że użyteczność takiego uważania nie jest dotychczas stwierdzoną.

[17]) Halphen, *Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques Journ. Éc. polyt.* 52. Porówn. tegoż autora: *Sur les singularités des courbes gauches algébriques* (*Bull. Soc. math*, 9), Nöthera, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven* (*Berliner Abh.* 1883, *Journ. f. Math.*, 93).

[18]) *C. R.* 70; *Bull. Soc. math.* 1 i 2.

[19]) *Math. Ann.* 7.

nych, konieczne Halphenowi w jego pracy [20]). Nie sądźmy jednak, że drogi użyte przez obu geometrów są w istocie rzeczy różnemi; przeciwnie, obaj idąc za Cayley'em, używają monoid, i jeżeli jeden z nich daje pierwszeństwo wzorom i twierdzeniom z nauki o całkach Abelowych, to drugi stosuje twierdzenia o funkcyach algebraicznych, prowadzące do tych samych własności. W każdym razie, nie ulega wątpliwości, że te dwie znakomite produkcye epoki naszéj uważać można za podstawę przyszłych badań geometrycznych; a jeżeli wpływ ich nie ujawnił się dotąd powszechnie, wynika to głównie z wielkich trudności, jakie przedstawia ich temat, a może i z pewnych braków w metodach, użytych do pokonania tych trudności [21]).

Lecz już przed ugruntowaniem teoryi ogólnéj, wiele krzywych specyalnych było przedmiotem dokładnych studyów. Pragnąc być bardziéj wiernym niż błyszczącym dziejopisem, muszę zająć się wyliczeniem prac, w których zawarte są najważniejsze z tych badań;

> Degli altri fia laudabile il tacerci
> Chè il tempo sarià corto a tanto suono.[22])

Na pierwszém miejscu należy tu umieścić prace, traktujące o krzywych skośnych rzędu 3-go. Rozmaite bardzo piękne własności tych linij odkryli Möbius [23]) i Chasles [24]), a liczba odkry-

---

[20]) *Math. Ann.* 6. Inny dowód tego twierdzenia dał Halphen. Patrz téż w tym przedmiocie artykuły Vossa (*Math. Ann.* 27) Stickelbergera i Nöthera (*Math. Ann.* 31.)

[21]) Sprawiedliwość nakazuje mi przytoczyć tu jeszcze piękną pracę Valentinera *Bidrag til Rumcurvener Theori* (Kopenhaga, 1881 porówn. téż *Tidskrift for Math.* IV, 5 i *Acta Math.* 2), która ukazała się prawie jednocześnie z pracami Halphena i Nöthera i ma z niemi wiele wspólnego w metodach i rezultatach. Wymieniam także, ponieważ nie mogłem tego uczynić w tekscie: twierdzenie Cremony (dowiedzione przez Dina w *Napoli Rend.* 1879) i niektóre Sturma (*Report of the Association*, 1881, *Math. Ann.*, 19), wyrażające godne uwagi własności krzywych skośnych, jako téż badania Cayley'a, Piqueta i Geisera o prostych przecinających wielokrotnie krzywą przestrzenną, o których była mowa w cytacie 15. Godzien wspomnienia jest także fakt (odkryty przez Hossfelda, *Zeitschr. f. Math.* 29), że krawędź zwrotu powierzchni rozwijalnéj, opisanéj na dwóch powierzchniach, nie jest przecięciem zupełném dwóch powierzchni.

[22]) O innych chwalebném będzie zamilczeć,
Bo na opowieść czas już jest zbyt krótki.
Dante. *Piekło*, Pieśń 15, wiersz 104—105.

[23]) *Der barycentrische Calcül.*

[24]) *Aperçu historique*, Nota 33; *Journ. Liouv.* 19 (1854).

wanych rosła z taką szybkością, że Staudt [25]) mógł w krótkim czasie ustalić zupełną analogią pomiędzy niemi a stożkowemi; analogia ta z dniem każdym doskonaliła się, dzięki studyom Seydewitza [26]), Joachimstahla [27]), Cremony [28]), Schrötera[29]), Reye'go[30]), Em. Weyra[31]), Sturma [32]), Hurwitza [33]), które nietylko pozwoliły na zupełnie syntetyczne badanie tych krzywych, lecz zarazem przygotowały teren do pięknego wykładu analitycznego, który dali najukochańszy mój nauczyciel E. d'Ovidio [34]) i Pitarelli [35]).

Wspominam z kolei o teoryi krzywych skośnych, nakreślonych na hyperbolojdzie jednopowłokowéj, któréj podstawy rzucił Chasles [36]), a ktorą tak zbogacił nasz Cremona [37]), oraz

---

[25]) *Beiträge zur Geometrie der Lage*, 3 zeszyt. (Norymberga, 1860).

[26]) *Archiv Grunerta* 10.

[27]) *Journ. f. Math.* 56.

[28]) *Journ. f. Math.* 58, 60, 63; *Nouv. Ann* II, 1; *Annali di Matem.* I, 1, 5, 2 *Lombardo Rend.* II, 12.

[29]) *Journ. f. Math.* 56; *Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung* (Lipsk, 1880); *Math. Ann.* 25. Porówn. także Loria, *Napoli Rend.* 1885.

[30]) *Zeitschr. f. Math.* 1868; *Geometrie der Lage.*

[31]) *Lombardo Rend.* 1871.

[32]) *Journ. f. Math.* 79, 80; *Annali di Matem.* II, 3.

[33]) *Math. Ann.* 20, 30.

[34]) *Torino Mem.* II, 32 i *Collectanea mathematica.* Do tych rozpraw przystaje rozprawa Gerbaldi'ego: *Sui sistemi di cubiche gobbe o di sviluppabili di III classe stabiliti col mezzo di due cubiche punteggiate projettivamente* (*Torino Mem.* II, 32).

[35]) *Giorn. di Mat.* 17 (1879). Co do form odkształconych krzywéj skośnéj 3-go rzędu, patrz notę Schuberta (*Math. Ann.* 15). O układzie krzywych skośnych 3-go rzędu, który przedstawia niejakie podobieństwo z układem stożkowych, pozostających w podwójném zetknięciu, traktuje rozprawa inauguralna E. Heinrichsa, *Ueber den Bündel derjenigen cubischen Raumkurven welche ein gegebenes Tetraeder in derselben Art zum gemeinsamen Schmiegungstetraeder haben* (Münster, 1887). Teorya krzywych skośnych 3-go rzędu prowadzi do interesującego przedstawienia geometrycznego teoryi form algebraicznych dwójkowych, opracowanéj przez Lagurre'a (*L'Institut* 40), Sturma *Journ. f. Math.* 86 i Appell'a. (*Ann. Éc. norm.* II, 5). Porówn. też notę J. Tannery'ego (*Bull. scienc. math.* 11) Daléj patrz notę W. R. W. Robertsa (*Proc. math. Soc.* 13) i książkę F. Meyera: *Apolarität und rationale Kurven* (Tybinga, 1881). Dobry wykład teoryi krzywych skośnych 3-go rzędu dał Drach w piśmie *Einleitung in die Theorie der kubischen Kegelschnitte* (Lipsk, 1867), z powodu której Beltrami napisał interesujące *Annotazioni* (*Lombardo Rend*, II, 1).

[36]) *C. R.* 53 (1861).

[37]) *Annali di Matem.* 4. Nota Story'go *On the number of intersections of cur-*

o wielu własnościach krzywych skośnych rzędu czwartego, odkrytych przez Ponceleta [38]), Chasles'a [39]), Cremonę[40]); Reye'go [41]), P. Serreta [42]), Laguerre'a [43]), Milinowskiego[44]), i wielu innych—wreszcie o pięknych zastosowaniach do teoryi funkcyj podwójnie peryodycznych, które poczynili Harnack[45]), Lange[46]), Westphal[47]), Leauté[48]) i t. d. Nie mogę też pominąć milczeniem pięknych prac Cremony[49]), Armanante'go[50]), Bertini'ego[51]) i Em. Weyra [52]) o krzywych 4-go rzędu 2-go gatunku; ani prac Kleina i Lie'go o krzywych przekształcających się same w siebie za pomocą nieskończenie wielu przekształceń liniowych[53]); ani też pracy Fiedlera [54]) nad oznaczeniem krzywych rzędu nie wyższego nad dziewiąty, których układ jest wzajemnym (dwoistym) względem samego siebie. I czyż mógłbym powstrzymać się od wzmianki: o badaniu całéj plejady krzywych przez Cremonę i Sturma[55]),

---

ves traced on a scroll of any order (*John Hopkins Baltimore University Circulars* 2, 1883) zawiera uogólnienie ważnego twierdzenia Chasles'a.

[38]) Poncelet w r. 1822 zrobił interesujące odkrycie, że przez każdą krzywą 4-go rzędu 1-go gatunku przechodzą trzy stożki 2-go stopnia. Patrz *Traité des propriétés projectives* I str. 385, 2-gie wyd.)

[39]) *C. R.* 54, 55,

[40]) *C. R.* 54; *Bologna Mem.* 1861; *Lombardo Rend.* II, 1.

[41]) *Annali di Matem.* II, 2.

[42]) *Géométrie de direction* (Paryż, 1869). *C. R.* 82.

[53]) *Journ. Liouv.* II, 15.

[44]) *Journ. f. Math.* 97. Interesującą specyalną krzywą skośną 4-go rzędu 1-go gatunku zbadał Schröter w *Journ. f. Math.* 93.

[45]) *Math. Ann.* 12, 13.

[46]) *Zeitschr. f. Math.* 28.

[47]) *Math. Ann.* 13; porówn. Cayley, tamże 25.

[48]) *C. R.* 82.

[49]) *Annali di Matem.* I, 4.

[50]) *Giorn. di Matem.* 11, 12.

[51]) *Lombardo Rend.* 1872.

[52]) *Wiener Ber*, 1871. O krzywych wymiernych 4-go rzędu patrz Study (*Leipziger Sitzungsber.* 1886); rozprawę habilitacyjną Jollesa (Akwizgran, 1886) i rozprawy: Robertsa (*Proc math. Soc.* 14), Stahla (*Journ. f. Math.* 101) i Meyera (*Math. Ann.* 29). Pomiędzy krzywemi wymiernemi 4-go rzędu zasługuje na uwagę ta, która ma dwie styczne stateczne (Cayley, *Quart. Journ.* 7). Jéj piękne własności były odkryte przez Cremonę (*Lombardo Rend.* 1878), Em. Weyra (tamże, 187) i Appella (*C. R.* 83).

[53]) *C. R.* 70.

[54]) *Vierteljahrsschrift der math. Gesellsch. in Zürich*, 20.

[55]) Oprócz cytowanego już dzieła: *Synthetische Untersuchungen* patrz *Journ. f. Math.* 88 i *Math. Ann.* 21.

którzy się zajmowali geometryą na powierzchni 3-go rzędu; o ważnych zagadnieniach, rozwiązanych przez Clebscha i jego uczniów, a dotyczących krzywych wymiernych [56]), eliptycznych i hypereliptycznych [57]); o pięknych własnościanh krzywych wymiernych 5-go rzędu, znalezionych przez Bertini'ego[58]); wreszcie o odkrytych przez Stahla [59]) własnościach takich krzywych, których punkty leżą na powierzchni stopnia drugiego, gdy ich płaszczyzny ściśle styczne dotykają powierzchni 2-ej klasy.

Czytając wyliczenie tylu i tak różnorodnych badań, czytelnik niedoświadczony czuć się będzie pognębionym i zapyta, czy jest rzeczą możliwą przyswojenie sobie w krótkim czasie, jeżeli nie wszystkiego, to przynajmniéj części tego, co wyżéj przedstawiliśmy. Niechaj jednak nie traci otuchy! Poznanie tego wszystkiego jest dla uczącego się o wiele łatwiejszém, niżby zdawać się mogło z mojego przeglądu. Zasady, postawione przez geometrów pierwszéj połowy naszego stulecia były tak płodne, że kto raz przyswoił je sobie gruntownie, nie tylko sam z łatwością wyprowadzi z nich wiele badań dalszych, ale jeszcze dążyć będzie do posunięcia wiedzy. I że to właśnie stanowi istotną wyższość dzisiejszéj nauki nad nauką ojców naszych, stwierdzają klasyczne słowa jednego z twórców nowéj umiejętności: *Peut donc qui voudra dans l'état actuel de la science généraliser et créer en géométrie; le génie n'est plus indispensable pour ajouter une pierre à l'édifice*[60]).—złote słowa, które wyryć sobie winien w pamięci każdy, kto pragnie zajmować się matematyką; dają mu bowiem nadzieję prawdopodobnego zwycięztwa i podniecają w walce umysłowéj, jaka go czeka.

---

[56]) Em, Weyr, *Journ f. Math.* 74; *Giorn. di Matem.* 9; *Annali di Matem.* II, 4; *Wiener Ber.* 63; *Prager Berichte*, 1883; *Lombardo Rend.* II, 15 i t. d.; Korndörfer i Brill, *Math Ann.* 3; Saltel, *C. R.* 80; Genty, *Bull. Soc. math.* 9 Brill, *Münchener Ber.* 1885.

[57]) Patrz między innemi notę Buchheima: *On the extension of certain theories relating to plane cubics to curves of any deficiency* (*Proc. math. Soc.* 13) i rozprawę Humberta *Sur les courbes de genre* un. (Paryż, 1883).

[58]) *Collectanea mathematica.*

[59]) *Journ. f. Math.* 99. Painvin *C. R.* 78.

[60]) Chasles, *Aperçu* 2-e wyd. str. 269.

VI.

Odwzorowywania, odpowiedniości, przekształcenia.

W tym pobieżnym rysie najnowszych odkryć geometrycznych dochodzimy do nauki o odwzorywaniach, odpowiedniościach i przekształceniach. Wiadomo, że pomiędzy dwoma polami punktowemi płaskiemi istnieje odpowiedniość (pokrewieństwo), jeżeli do każdego punktu jednego jest przyporządkowana grupa punktów drugiego, które nazywają się „odpowiedniemi" względem tamtego punktu. Jeżeli w przypadku szczególnym każdemu punktowi jednego pola odpowiada tylko jeden punkt drugiego, odpowiedniość nazywa się jednokreślną.

Najprostszemi przypadkami odpowiedniości jednokreślnéj są: homologia, badana przez Ponceleta, (1822) i kolineacya (homografia), badana przez Möbiusa (1827), Magnusa (1833) i Chasles'a (1837). W tych przypadkach nietylko każdemu punktowi odpowiada punkt, ale i każdéj prostéj — prosta. Przykład odpowiedniości bardziej złożonéj otrzymał Steiner (1832) za pomocą następującéj konstrukcyi[1]). Dane są dwie oddzielne płaszczyzny i dwie proste skośne; przez każdy punkt jednéj z płaszczyzn prowadzimy prostą, opierającą się na obu prostych danych i wyznaczającą ślad swój na drugiéj płaszczyznie. Uważając ten ślad jako odpowiedni punktowi, obranemu na pierwszéj płaszczyznie, otrzymamy odpowiedniość jednokreślną taką, że każdéj prostéj na jednéj płaszczyznie odpowiada stożkowa na drugiéj. Zlewając dwie dane płaszczyzny, otrzymujemy odpowiedniość, w zasadzie nie różną od znalezionéj przez Ponceleta[2]) między punktami sprzężonemi względem pęku stożkowych, a która na drodze analitycznéj była badana przez Plückera[3]), następnie przez Magnusa (1790—

[1]) Konstrukcya ta zwana przez niemców „rzutem Steinerowskim" odkrytą została w r. 1865 na nowo przez Transona (1805 — 1876), który dał jéj nazwę „projection gauche" (*Nouv. Ann.* II, 4 i 5).

[2]) *Traité des propriétés projectives* (1-e wyd. 1822, str. 198).

[3]) *Journ. f. Math.* 5.

1861)[4]) i przez naszego Schiaparelli'ego [5]), na drodze zaś syntetycznéj przez Seydewitza [6]) i późniéj przez Reye'go [7]). Do trzeciego przykładu prowadzi rozwiązanie niektórych zagadnień fizyki matematycznéj; dochodzimy do niego w sposób następujący: Dany jest punkt stały, przyporządkowujemy do niego dwa punkty, leżące z nim na prostéj i których odległości od niego są odwrotnie proporcyonalne; otrzymujemy odpowiedniość jednokreślną, która każdą prostą zmienia w koło. Odpowiedniość ta była badaną przez sir Williama Thomsona [8]) jako zasada „obrazów elektrycznych" i jest powszechnie znaną pod nazwą „przekształcenia za pomocą promieni odwrotnych" lub „inwersyi" [9]). Wszystkie te przekształcenia są liniowemi lub kwadratowemi, gdyż zmieniają prostą w krzywą 1-go lub 2-go rzędu. Magnus pokazał wszakże, że powtarzając przekształcenie kwadratowe, dochodzi się w ogólności do przekształcenia rzędu wyższego [10]). Ta ważna uwaga pozostała bezpłodną aż do roku 1863, w którym Cremona od kilku przykładów przed nim zbadanych przeszedł do ogólnéj teoryi przekształceń geometrycznych figur płaskich [11]).

---

[4]) *Journ. f. Math.* 8 i *Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie der Ebene*, 1833.

[5]) *Torino Mem.* 1862.

[6]) *Archiv Grunerta* 7.

[7]) *Zeitschr f. Math.* 11.

[8]) *Journ. Liouv.* 10, 12. Poprzednio już G. Bellavitis (*Nuovi Saggi dell'Accad. di Padova* 4 (1836) i Stubbs (*Phil. Mag.* 23, 1843) zajmowali się tą odpowiedniością. Patrz téż artykuł Steinera z r. 1826: *Einige geometrische Betrachtungen* (*Journ. f. Math.* 1, *Gesammelte Werke* T. I, str. 19. N. 20).

[9]) Na pojęciu inwersyi oparł Johnson (*Analyst.*, 4) nowy podział krzywych płaskich. W niéj *stopniem kołowym* krzywéj nazywa się stopień jéj równania (wyrażonego we współrzędnych prostokątnych Descartes'a) względem $x, y, r^2 = x^2 + y^2$; stopień kołowy krzywéj nie zmienia się przez inwersyą. Dwie krzywe mające równy stopień należą do téj saméj kategoryi. Ten podział wszakże niema, zdaje się, wielkiego znaczenia.

[10]) *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie der Ebene*, 1833.

[11]) W 1859 i 1860 De Jonquières zbadał przekształcenie rzędu n-go, które nosi jego nazwisko, a w którém każdéj prostéj odpowiada krzywa rzędu n-go z punktem $(n-1)$ krotnym; niektóre z jego rezultatów były ogłoszone w r. 1864 w *Nouvelles Annales*, lecz praca zupełna, którą poświęcił temu przekształceniu, ujrzała światło dzienne dopiero w roku 1884, dzięki staraniom Gucci'i (patrz *Giorn. di Mat.* 23). Zauważę jeszcze, że już w roku 1834 badał Möbius (*Journ. f. Math.* 12, *Gesammelte Werke*, 1) odpowiedniość jednokreślną mię-

Dla wykazania czytelnikowi ważności prac, poświęconych przez Cremonę téj teoryi [12]), musiałbym wyłożyć, w jaki sposób ten wielki geometra sprowadził badanie przekształceń jednokreślnych do badania sieci homalojdycznéj krzywych, oznaczenie zaś takiéj sieci do rozwiązania układu nieoznaczonego równań liniowych; lecz ponieważ zakres mojéj rozprawy nie pozwala mi na to, muszę przeto dla powyższego celu ograniczyć się na starym dowodzie zwanym „consensus omnium“. Wymienię jeszcze nazwiska geometrów takich, jak: Cayley[13]), Clebsch[14]), Nöther[15]), Rosanes[16]) i S. Roberts[17]), którzy starali się wypełnić braki (nieuniknione przy pierwszém traktowaniu przedmiotu), jakie znalazły się w rozprawach Cremony[18]); daléj Ruffini'ego[19]), de Jonquières'a[20]), Kantora[21]), Gucci'ę[22]), Autonne'a[23]), którzy zajmowali się pytaniami, ściśle związanemi z powyższym przedmiotem; wreszcie Hirsta[24]), F. Cotterilla[25]) (1808—1881), Sturma[26]), Schoute'go[27]) i bardzo wielu innych, którzy postawili sobie za zadanie

---

dzy dwiema płaszczyznami, w których powierzchnie dwóch figur odpowiednich są w stosunku stałym; ale badania te są zupełnie innego rodzaju niż rozważane w tekscie.

[12]) *Bologna Mem.* 2, 5 (1863 i 1865); *Giorn. di Matem.* 1 i 3; porów. opracowanie Dewulfa w *Bull. scienc. math.* 5.

[13]) *Proc. math. Soc.* 3.

[14]) *Math. Ann.* 4.

[15]) *Math. Ann.* 3, 5.

[16]) *Journ. f. math.* 73.

[17]) *Proc. math. Soc.* 4.

[18]) Dotknę tu ważnego twierdzenia, otrzymanego jednocześnie przez Clifforda (*Proc. math. Soc.* 3), Nöthera (*Göttinger Nachr.* 1870, *Math. Ann.* 3) i Rosanesa (*Journ. f. Math.* 73), które na chwilę zdawało się zmniejszać ważność przekształcenia Cremony, a mianowicie twierdzenia: „każde przekształcenie jednokreślne rzędu wyższego niż pierwszy można otrzymać przez powtórzenie przekształceń kwadratowych”. Twierdzenie to jest oczywiście odwróceniem twierdzenia Magnusa, podanego w tekscie.

[19]) *Bologna Mem.* 1877—1878.

[20]) *C. R.* 1885; *Giorn. di Matem.* 24.

[21]) *Annali di Matem.* II, 10.

[22]) *C. R.* 1885; *Rendino del Circolo Matematico di Palermo*, 1.

[23]) Patrz rozprawy ogłoszone w *C R.* 1883, 1884, 1885, 1886 i w *Journ. Liouv.* 1885, 1886, 1887.

[24]) *Annali di Matem.* 7; *Giorn. di Matem.* 4.

[25]) *Proc. math. Soc.* 2.

[26]) *Math. Ann.* 26.

[27]) *Bull. scienc. math.* II, 6 i 7.

rozpowszechnienie powyższych badań za pomocą odpowiednich przykładów i pięknéj formy [28]).

Pomiędzy pracami, ściśle wiążącemi się z pracami Cremony, jedno z pierwszych miejsc należy się pracom Bertini'ego[29]) o przekształceniach płaskich inwolucyjnych, które pozyskały jeszcze większą prostotę i elegancyą dzięki pojęciu klasy oraz innym pojęciom, wprowadzonym przez Caporali'ego[30]) (1855—1886) wybornego geometrę, którego zgon przedwczesny opłakują Włochy [31]).

Zupełnie innego charakteru są piękne badania Laguerre'a nad takiemi przekształceniami, które on nazywa „przekształceniami za pomocą kierunków odwrotnych"; przedstawić ich myśl zasa-

---

[28]) Przekształcenia geometryczne były stosowane przeważnie do badania krzywych algebraicznych; ale nie brak pism, zajmujących się przekształceniem krzywych przestępnych w inne lub w siebie same, porówn. Magnusa *Sammlung von Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie der Ebene*, 1883, str. 320 455, 459—497; Klein i Lie, *Math. Ann.* 4.

[29]) *Annali di Matem.* II, 8; *Lombardo Rend.* 1880, 1883. Porówn. też Geiser *Journ. f. Math.* 67.

[30]) *Napoli Rend.* 1879.

[31]) Nowa postać, jaką skutkiem tego przybrały badania Bertini'ego, pobudziła przyjaciela mego Martinetti'ego do pójścia daléj po téj drodze i do określenia przekształceń inwolucyjnych płaskich trzeciéj i czwartéj klasy (*Annali di Matem.* II, 12, 13). Teorya przekształceń płaskich wzbogaci się w krótkim czasie ważną pracą Kantora, uwieńczoną przez Akademią w Neapolu i drukującą się obecnie. Niektóre jéj rezultaty są ogłoszone w *Wiener Ber.* 1880 i w *Wiener Denkschr.* 46.

Saltelowi zawdzięczamy pomysł przekształcenia inwolucyjnego specyalnego, trzeciego stopnia, które już w r. 1872 nazwał *transformation arguesienne* (od Desargues'a) (patrz *Mém. de l'Acad. de Belgique* 12; *Bull. de l'Acad. de Belg.* II, 24). Powstaje ono w sposób następujący: Na płaszczyznie stałéj Π dane są dwie stożkowe Γ_1 i Γ_2 i punkt stały O; jako punkt odpowiedni punktowi P bierzemy sprzężony z nim w inwolucyi, określonéj na prostéj OP przez pęk stożkowych, który tworzą stożkowe Γ_1 i Γ_2. Jeżeli dwie stożkowe zlewają się, to przekształcenie sprowadza się oczywiście do inwersyi kwadratowéj Hirsta. W przestrzeni istnieje podobne przekształcenie. Inne znów przekształcenie (*transformation hyperarguesienne*) wprowadził tenże autor jako uogólnienie poprzedzającego (*Bulletin de l'Acad. de Belgique* II, 2) w ten sposób: Na płaszczyznie Π dane są trzy stożkowe Γ_1, Γ_2, Γ_3 i punkt stały O. Punktem homologicznym dla punktu P ma być tu punkt w rzutowości, określonéj na prostéj OP przez trzy pary punktów, w których tę prostą przecinają trzy stożkowe; oczywiście jednak odpowiedniość ta nie jest dwuwymierną. Pierwsze z przekształceń Saltel'owskich może służyć do rozwiązania zagadnień z teoryj charakterystyk dla krzywych rzędu wyższego niż drugi (*Bull. Soc. math.* 2).

dniczą w niewielu słowach i wskazać liczne zastosowania, jakie poczynił wynalazca, nie jest tu rzeczą możliwą, i dlatego odsyłamy czytelnika do samych prac wybitnego geometry francuskiego [32]).

Częścią teoryi, o któréj dotąd mówiliśmy, jest nauka o „przekształceniach izogonalnych (równokątnych)", oparta na przedstawieniu geometryczném liczb urojonych. Möbius [33]), Siebeck [34]) Durège [35]), Beltrami [36]), Von der Mühll [37]), F. Lucas [38]), Wedekind [39]), a w ostatnim czasie Holzmüller [40]) wykazali pożytek téj nauki, większy może dla fizyki matematycznéj niż dla czystéj matematyki [41]).

---

[32]) *Bull. Soc. math.* 8, *C. R.* 94; *Nouv. Ann.* III, 1, 2. Przekształcenie to, jak zauważył sam Laguerre, można rozciągnąć do przestrzeni (*C. R.* 92); rodzaj jednak odpowiedniości, jaka się przytém otrzymuje, nie jest nowy, i według uwagi Stephanosa (*C. R.* 92) jest to ta sama, za pomocą któréj Lie związał geometryą prostéj z geometryą kuli (*Math. Ann.* 5).

[33]) Rozmaite rozprawy Möbiusa o tym przedmiocie znajdują się w 2-gim tomie *Gesammelte Werke*, (Lipsk, 1886).

[34]) *Journ. f. Math.* 55, 57, 59; *Archiv Grunerta* 33.

[35]) *Archiv. Grnnerta* 42.

[36]) *Bologna Mem.* 1870.

[37]) *Journ. f. Math.* 69.

[38]) Patrz pracę: *Géométrie des polynomes* (*Journ. Éc. polyt.* 28).

[39]) *Beiträge zur geometrischer Interpretation binärer Formen* (Erlangen, 1875); porów. *Math. Ann.* 9. *Studien im linären Wertgebiete* (Karlsruhe, 1876); *Math. Ann.* 17; *Erlanger Berichte*, 1875.

[40]) Patrz dzieło: *Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandschaften* (Lipsk, 1883).

[41]) Pomiędzy trzema formami geometrycznemi można ustanowić odpowiedniość taką, że parze elementów, z których jeden wzięty w jednéj formie, drugi w drugiéj, odpowiada jednokreślnie element w trzeciéj formie. Jeżeli jeden z elementów utrwalimy, dwa zaś pozostałe opisują układy rzutowe, to odpowiedniość nazywa się trójliniową; dla utworów pierwszego gatunku była ona badana przez Rosanesa (*Journ. f Math.* 88) i Schuberta (*Math. Ann.* 17 i *Mittheiluugen der Math. Gesellschaft in Hamburg*, 1881), a w przypadku specyalnym przez Benno Kleina (*Theorie der trilinear-symmetrischen Elementar-Gebilde*, Marburg, 1881); dla utworów 2-go gatunku przez Haucka (*Journ. f. Math.* 90, 97, 98), który wskazał na niektóre jéj zastosowania do geometryi wykreślnéj, mające jak się zdaje, doniosłość praktyczną.

Jednocześnie z pracami Schuberta ukazały się prace La Paige'a, który badał odpowiedniość trójliniową za pomocą teoryi form algebraicznych i zastosował ją do geometryi; patrz tegoż *Essais de géométrie supérieure du troisième ordre* (*Mém. de la Soc. des sciences de Liège* II, 10 i noty w *Bull de l'Acad. de Belg.* III 5 i w *Wiener Ber.* 1883. Tenże geometra zajmował się również odpowiedniością czworoliniową (*Torino Atti* 17, 1882), którą zastosował do pewnych

Pojęcie odpowiedniości jednokreślnéj między dwiema płaszczyznami może być uogólnione w najrozmaitszy sposób; sposoby, nasuwające się z łatwością same przez się, są następujące:

Przedewszystkiém, nie opuszczając płaszczyzny, można ustanowić odpowiedniość między każdym jéj punktem a krzywą układu podwójnie nieskończonego na niéj lub na innéj płaszczyznie [42]. Ten rodzaj odpowiedniości jest rozszerzeniem korelacyi (wzajemności) dwóch pól; Plücker go wskazał, Clebsch [43]) zaś rozwinął oraz dał początek teoryi koneksów [44]).

Przechodząc do przestrzeni, można ustanowić odpowiedniość między punktami dwóch powierzchni (a w szczególności między punktami powierzchni krzywéj a punktami płaszczyzny), albo między punktami dwóch przestrzeni.

Przedstawienie powierzchni na płaszczyznie było znaném w starożytności, ponieważ już Hipparch i Ptolomeusz (i prawdopodobnie inni przed nimi) postawiwszy sobie zadanie konstrukcyi kart geograficznych, rozwiązali je sposobami polegającemi na rzucie, który dziś nazywamy stereograficznym. Rzut Mercatora (1512— 1594), badania Lamberta (1728—1777) i Lagrange'a, sławna odpowiedź Gaussa na pytanie, postawione

---

powierzchni 3-go rzędu oraz do pewnych powierzchni 4-go rzędu (*Bull. de l'Acad. de Belg.* III, 4; *Acta math.* 5). Wspominamy jeszcze, że związek dwurzutowy, za pomocą którego F. August już w 1862 utworzył powierzchnią 3-go rzędu (*Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis*, rozprawa berliń.), jest związkiem trójliniowym.

42) Jeżeli np. dany jest trójkąt ABC, to niechaj P będzie dowolnym punktem na jego płaszczyznie. Istnieje stożkowa K, dotykająca boków trójkąta w punktach (PA, BC), (PB, CA), (PC, AB). Jeżeli stożkowa K odpowiada punktowi P, to mamy odpowiedniość dwoistą. Obie badane były przez Montaga w rozprawie: *Ueber ein durch die Sätze von Pascal und Brianchon vermitteltes geometrisches Beziehungssystem* (Wrocław, 1871). Dalsze analogiczne odpowiedniości wynikają ze spostrzeżenia, że każdy punkt płaszczyzny ABC jest środkiem stożkowych: wpisanéj w trójkąt ABC, opisanéj około niego i takiej, dla któréj trójkąt ABC jest trójkątem biegunowym. Podobnież, jeżeli danym jest czworościan $ABCD$, to do każdego punktu P przestrzeni, można przyporządkować powierzchnią 2-go rzędu, dla któréj punkt P jest środkiem i względem którego czworościan $ABCD$ jest czworościanem biegunowym.

43) *Math. Ann.* 6,

44) Patrz prócz tego prace: Godta (Rozprawa getyngska, 1873), Armenantego (*Lincei Atti* 1875), Battaglini'ego (*Giorn. di Mat.* 19, 20), Peana (*Torino Atti*, 16) i Amodea (*Napoli Rend.* 1887). Figury analogiczne z koneksami były badane przez Krausego (*Math. Ann.* 14). Patrz także dwie noty Lazzeri'ego: *Sulle reciprocità birazionali nel piano e nello spazio* (*Lincei Rend.* 1886).

przez Akademią duńską [45]) — wykazują, że potrzeby codzienne geografii i nauki żeglarskiéj pobudzały bezustannie uczonych do zajmowania się zagadnieniami jednokreślnego przedstawienia powierzchni planety naszéj [46]) na płaszczyznie. Pierwsze odwzorowywanie jednéj powierzchni na drugiéj, zrobione zresztą w celu łatwiejszego zbadania jednéj z nich, zawdzięczamy Gaussowi, który w sławnéj swéj rozprawie *Disquisitiones generales circa superficies curvas* wskazał bardzo korzystną odpowiedniość, polegającą na tém, by punkty powierzchni danéj odpowiadały punktom powierzchni kulistéj w ten sposób, że normalne punktów odpowiednich są równoległemi [47]). Szczególną właściwość téj odpowiedniości stanowi to, że dla jednokreślności trzeba odwzorowywać tylko tę część powierzchni, którą mamy na oku. Nie chcieliśmy pominąć téj własności, ponieważ daje ona nam sposobność do zaznaczenia różnicy, istniejącéj między odwzorowywaniem sferyczném a odwzorowywaniami, stosowanemi przez Plückera[48]), Chasles'a[49]) i Cayley'a [50]) do badania powierzchni 2-go stopnia, przez Clebscha [51]) i Cremonę [52]) do badania powierzchni 3-go rzędu, oraz temi odwzorowywaniami, które przez późniejszych geometrów były stosowane do badania innych powierzchni.

Pierwszą pracę, traktującą o teoryi odwzorowywania *ex professo*, zawdzięczamy Clebschowi[53]). Liczne przykłady, za pomocą

---

[45]) Gauss, *Werke* 4-y tom. Przekład włoski Beltrami'ego w *Annali di Matem.* 4.

[46]) Metody konstrukcyi kart geograficznych należą do dziedziny zastosowań geometryi, a więc dzieje ich nie wchodzą w zakres téj pracy. Chcących je poznać odsyłamy do pism: Fiorinti'ego *Le projezioni delle carte geografiche* (Bolonia, 1881), Zöppritza, *Leitfaden der Kartenentwurfslehre* (Lipsk, 1884) i N. Hertza *Lehrbuch der Kartenprojektionen*, Lipsk 1885. Uczynię tylko wyjątek dla prac Tissota (*C. R.* 49, porówn. Dini: *Memoria sopra alcuni punti della teoria delle superficie*, Florencya, 1868; *Journ. Éc. polyt.* 37, *Nouv. Ann.* II, 17 i następne), ponieważ budzą one zajęcie i ze stanowiska czystéj nauki.

[47]) Odwzorowywanie to, nazwane „sferyczném", jeszcze przed Gauss'em podał O. Rodrigues w roku 1815, lecz nie wykazał całego jego użytku, jak to uczynił wielki geometra niemiecki.

[48]) *Journ. f. Math.* 34.

[49]) *C. R.* 53.

[50]) *Phil. Mag.* 1861.

[51]) *Journ. f. Math.* 68 albo *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen* (Berlin, 1870) część III.

[52]) *Journ. f. Math.* 65.

[53]) *Math. Ann.* I.

których w téj oraz w niektórych wcześniejszych i późniejszych [54]) pracach objaśniał on teoryą ogólną, doprowadziły do ustalenia w wielu szczegółach geometryi na znacznéj liczbie powierzchni. Jednoczesne prawie rozprawy Cremony [55]), Nöthera [56]), oraz późniejsze Armenantego [57]), Kleina [58]), Korndörfera [59]), Caporali'ego [60]) i innych [61]) w przeciągu niewielu lat znacznie zwiększyły tę liczbę [62]). Można powziąć dość dokładne wyobrażenie o bogactwie téj gałęzi geometryi, gdy się czyta piękną rozprawę Caporali'ego o potrójnie nieskończonych układach liniowych krzywych płaskich [63]), w któréj teorya odwzorowywania powierzchni na płaszczyznie z jednéj strony jest stosowaną do badania takich układów, z drugiéj zaś strony daje cenne narzędzia badania.

Przy studyowaniu odwzorowywania powierzchni nasuwa się samo przez się pytanie ważne: czy wszystkie powierzchnie dają się odwzorowywać na płaszczyznie, albo ogólniéj, czy dwie powierzchnie dają się uczynić odpowiedniemi w ten sposób, aby każdemu punktowi jednéj odpowiadał punkt drugiéj. Ponieważ poznano z łatwością, że odpowiedź na to pytanie wypada ujemną, postawiono sobie inne pytanie: „jakie powierzchnie dają się odwzorowywać jednokreślnie na płaszczyznie?“, albo ogólniéj: „jakie po-

---

[54]) Patrz *Journ. f. Math.* 67, 69; *Math. Ann.* 1, 2, 5 i *Göttinger Nachr.* 1869, 1870.

[55]) *Math. Ann.* 4; *Annali di Matem.* II, 1; *Göttinger Nachr.* 1871 i inne liczne rozprawy w *Lombardo Rend.* i *Bologna Mem.* W rozprawie, zamieszczonéj w *Annali di Matem.*, badał Cremona powierzchnie prostokreślne stopnia $(m+n)$-go, które mając m-krotną i n-krotną kierownicę, i znalazł, że ich krzywe asymptotyczne są w ogóle krzywemi algebraicznemi rzędu $2(m+n-1)$. Konstrukcyą tych krzywych podał późniéj Halphen (*Bull. soc. math.* 5).

[56]) *Math. Ann.* 3; porówn. *Math. Ann.* 21 i rozprawę Brilla tamże 5.

[57]) *Annali di Matem.* II, 1.

[58]) *Math. Ann.* 4.

[59]) *Math. Ann.* 1.

[60]) *Annali di Matem.* II, 7.

[61]) Np. Darboux (*Bull. Soc. math.* 2, 3), Frahm (*Math. Ann.* 7), Tognoli (*Giorn. di Matem.* 14) Lazzeri (*Annali della Scuola nuova sup. di Pisa*, 6.) Guccia, *Association francaise pour l'avancement des sciences. Congrès de Reims*, 1880.

[62]) Ważném pojęciem, wprowadzoném przez Clebscha w badaniach nad odwzorowywaniem powierzchni prostokreślnych (*Math. Ann.* 5), jest pojęcie *typu* powierzchni. Dwie powierzchnie są jednego typu, jeżeli przy odwzorowywaniu jednéj na drugiéj nie ma punktów zasadniczych tak np. powierzchnia rzymska Steinera jest jednego typu z płaszczyzną.

[63]) Patrz *Collectanea mathematica i. t. d.*

wierzchnie dają się odwzorowywać jednokreślnie na powierzchni danéj?". Pytanie analogiczne dla dwóch krzywych (płaskich lub skośnych) rozwiązał Clebsch za pomocą uważania rodzaju i modułów. Analogia pobudziła Clebscha do szukania rozwiązania poprzedniego pytania przy pomocy rozciągnięcia pojęcia rodzaju na powierzchnie [64]). Próba ta, mojém zdaniem, nie została uwieńczoną dobrym skutkiem, i dziś jeszcze, mimo następnych prób takich wybornych matematyków, jak Cayley [65]), Nöther [66]) i Zeuthen [67]), należy pytanie powyższe uważać za nierozstrzygnięte. Dla stwierdzenia tego zdania wystarczy powiedzieć, że lubo wszystkie powierzchnie drugiego i trzeciego rzędu (które nie są powierzchniami stożkowemi) dają się, jak wiadomo, odwzorowywać jednokreślnie na płaszczyznie, to jednak nie oznaczono dotąd wszystkich powierzchni czwartego rzędu, mających tęż własność [68]). Rezultaty ogólniejsze w tym przedmiocie osiągnął, jeżeli się nie mylę Nöther [69]), który za pomocą eleganckiej analizy doszedł do odwzorowywania na stożku każdéj powierzchni, zawierającéj szereg pojedyńczo nieskończony krzywych wymiernych.

Lecz trudności, napotykane przy odwzorowywaniu jednokreślném pewnych powierzchni na płaszczyznie, nasunęły Clebschowi myśl ustanowienia pomiędzy powierzchnią a płaszczyzną odpowiedniości wielokrotnéj, albo, jak się Clebsch wyraża (mając na myśli powierzchnią Riemannowską), odwzorowywania powierzchni na płaszczyznie wielokrotnéj z przeniesieniem go następnie na płaszczyznę pojedyńczą [70]). Pomysł ten, którego zarodek można

---

[64]) *C. R.* 1868.

[65]) *Math. Ann.* 3.

[66]) *Annali di Matem.* II, 5. *Göttinger Nachr.* 1871 i 1873.

[67]) *Math. Ann.* 4, 9, 10.

[68]) Powierzchniami czwartego rzędu, których znamy odwzorowywania na płaszczyznie, są: powierzchnie prostokreślne wymierne, powierzchnia rzymska, powierzchnia z podwójnemi prostemi lub podwójnemi stożkowemi, monoidy oraz powierzchnia mająca punkt podwójny uniplanarny. (Patrz rozprawę Nöthera w *Göttinger Nachr.* 1871 i Cremony w *Collectanea mathematica*). Kto chce badać odwzorowywanie jednéj powierzchni na drugiéj, nie powinien pominąć pięknych badań Zeuthena (patrz cytatę poprzedzającą i *C. R.* 1870) oraz późniejszych prac Kreya (*Math. Ann.* 8), i Vossa (*Math. Ann.* 27); niemałą korzyść odniesie téż z zasady odpowiedniości, podanéj przez Kantora (*Journ. f. Math.*, 95) i zachodzącéj między punktami pewnéj powierzchni 8-go rzędu, a pewnemi trójkami punktów na płaszczyznie.

[69]) *Math. Ann.* 3.

[70]) *Math. Ann.* 3.

już widzieć w uogólnieniu rzutu stereograficznego danem przez Chasles'a[71]), nie mógł być zupełnie rozwinięty przez Clebscha; lecz wskazówki jego nie pozostały bezpłodnemi, owszem dały początek teoryi przekształceń płaskich podwójnych, które wprowadził i wyjaśnił przy pomocy wielu zastosowań de Paolis[72]).

Drugie uogólnienie przekształcenia Cremony dało początek teoryi przekształceń wymiernych w przestrzeni. Dwa przykłady takiéj odpowiedniości dają: homografia między dwiema przestrzeniami (z ich przypadkami specyalnemi) oraz, jak to zauważyli Magnus[73]), Hesse[74]) i Cremona[75]), przekształcenie, które otrzymuje się z trzech przestrzeni wzajemnych z daną, jeżeli do każdego punktu téj ostatniéj przyporządkujemy przecięcie płaszczyzn odpowiadające mu w tych płaszczyznach. Ogólna teorya powstała jednak dopiero około roku 1870, dzięki pracom Cayley'a[76]), Nöthera[77]) i Cremony[78]), jakkolwiek już w r. 1837 Magnus[79]) dążył do niej i ważność jéj przewidział.

Z pomiędzy godnych uwagi prac, jakiemi ci uczeni uzasadnili naszę teoryą, najważniejszą bezwątpienia jest praca, którą zawdzięczamy naszemu sławnemu współziomkowi. Kierowany analogią tej nauki z nauką o odpowiedniości jednokreślnéj pomiędzy dwiema płaszczyznami, wykazał on, że pierwsza sprowadza się do badania potrójnie nieskończonych homaloidycznych układów powierzchni. Następnie wyłożył bardzo piękną metodę otrzymywania nieskończenie wielu takich układów, gdy się zna odwzorowywanie płaskie jednéj powierzchni; pokazał wreszcie na odpowiednich przykładach, jak teoryą przekształceń wymiernych sprowadzić można od odwzorowywania wielu powierzchni na innych, a wszczególności

---

[71]) *Aperçu*, Nota 28.

[72]) *Lincei Mem.* 1876, 1878. Porównaj notę Nöthera w *Erlanger Sitzungsberichte*, 1878 i uwagi Clifforda (*Mathem. Papers* str. 646—647).

[73]) *Aufgaben und Lehrsätze der analytischen Geometrie des Raumes* str. 403 i następne.

[74]) *Journ. f. Math.* 49.

[75]) Patrz cytatę [55]), porów. Sturm, *Math Ann.* 19.

[76]) *Proc. Math. Soc.* 3.

[77]) *Math. Ann.* 3.

[78]) *Lombardo Rend.* 1871; *Annali di Matem* II, 5; *Bologna Mem.* 1871—1873 Patrz też najnowsze prace tego geometry w *Transactions of Edinburgh* 32, II-a część, w *Irish Trans.* 28 i w *Proc. math. Soc.* 15.

[79]) *Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie des Raumes*) str. 417—418 Uwaga).

zaś do odwzorowywania płaskiego niektórych powierzchni. To zastosowanie, w połączeniu z powyższą metodą, wykazuje najlepiéj, że z odwzorowania płaskiego powierzchni otrzymać można nietylko nieskończoną ilość innych odwzorowań, ale i niezliczoną ilość przekształceń wymiernych przestrzeni.

Mimo pism, któremi Anglia, Niemcy i Włochy przyczyniły się tak potężnie do utworzenia i rozwinięcia téj teoryi, nie można powiedzieć, by osiągnęła ona taki stan doskonałości, jaki mają inne teorye. Pochodzi to może stąd, że najtrudniejsze jéj pytania są ściśle związane z oznaczeniem osobliwości powierzchni, a pod tym względem—wyznać to trzeba—wiadomości nasze są jeszcze bardzo ograniczone. W tém może należy szukać objaśnienia faktu, że geometrowie, późniejsi od wyżéj wymienionych, zajmowali się więcéj rozjaśnianiem niż doskonaleniem i dopełnianiem metod swych mistrzów [80]).

Lubo badanie bezpośrednie figur zasługuje bezwątpienia na pierwszeństwo przed badaniem figur przekształconych, mimo to w dzisiejszym stanie nauki mało jest teoryj, któreby tak zasługiwały na udoskonalenie w szczegółach, jak ta właśnie teorya. W saméj rzeczy zastosować tu można słowa wielkiego męża [81]), który powiedział: „Gdy się rozmyśla nad postępowaniem w algebrze i szuka wyjaśnienia wielkiego pożytku, jaki nauka ta przynosi geo-

---

[80]) Pomiędzy temi pracami wymieniam rozprawy: De Paolisa *Sopra un sistema omaloidico formato da superficie d'ordine* n *con un punto* (n—1)-*plo.* (*Giorn. di Matem.* 13); o specyalném inwolucyjném przekształceniu przestrzeni— Martinetti'ego (*Lombardo Rend.* 1880), De Paolisa (*Lincei Trans.* 1885) i Montesana (*Lincei Trans.* 1888). Zauważę tu, czego nie mogłem uczynić w tekscie, że pole punktowe można odwzorować na prostéj, a przestrzeń punktową na płaszczyznie. Dla pierwszego odwzorowania ustanawia się odpowiedniość między każdym punktem płaszczyzny a parą punktów prostéj (zasada przeniesienia Hesse'go *Journ. f. Math.* 66); dla uskutecznienia drugiego, ustanawiamy odpowiedniość między punktem przestrzeni a kołem, mającém środek w spodku prostopadłéj spuszczonéj z punktu uważanego na płaszczyznę odwzorowywania, promień zaś równy długości téj prostopadłéj; przyczém koło to ma być przebiegane w jednym kierunku, jeżeli punkt znajduje się na jednéj stronie płaszczyzny,— w odwrotnym zaś, jeżeli znajduje się na drugiéj. Prawa téj odpowiedniości zebrał Fiedler dla utworzenia cyklografii (patrz dzieło: *Cyclographie*, Lipsk, 1883 i trzecie wydanie *Geometryi wykreślnéj* tego autora) i zastosował do rozwiązania pewnych zagadnień (Patrz *Mittheilungen* Towarzystwa przyrodniczego w Zurychu i *Acta math.* 5). Przed nim wszelako traktował Crone pokrewne pytania w rozprawie, wydrukowanéj w *Tidsskrift for Mathematik* 6.

[81]) Chasles, *Aperçu* i t. d. 2-e wyd. str. 196.

metryi, czyż nie widzimy, że zawdzięczamy go łatwości, z jaką wyrażenia, początkowo wprowadzone do badania, podlegają przekształceniom, których tajemnica i mechanizm tworzą prawdziwą wiedzę i są stałym celem analityka? Czyż nie jest przeto rzeczą równie naturalną dążyć do wprowadzenia i do geometryi czystéj podobnych przekształceń, skierowanych wprost na figury i ich własności?".

Po ogólném badaniu przekształceń, następuje badanie takich przekształceń, przy których mamy na widoku cel pewien [82]) np. zamianę figur w same siebie, albo sprowadzenie ich do figury pierwotnéj, jeżeli stosujemy przekształcenia kilka razy z rzędu. Istnieją w saméj rzeczy dobre prace, traktujące o kolineacyach i korelacyach, które powierzchnią stopnia 2-go, kompleks liniowy[83]), krzywą skośną 3-go rzędu [84]) krzywą wymierną 4-go rzędu[85]) przekształcają w same siebie, oraz prace o rzutowościach kołowych (cyklicznych) [86]).

Zakończymy ten rozdział pracy naszéj kilku słowami o przekształceniach wielokrotnych między dwoma utworami trzeciego i czwartego gatunku, o których mogłem wyżéj wspomnieć tylko mimochodem, cytując parę rozpraw de Paolisa. Pierwszy zajmował się niemi Chr. Wiener [87]), który ustanowił odpowiedniość jednokreślną na płaszczyznie pomiędzy prostemi płaszczyzny a krzywemi układu liniowego; wtedy punktowi, uważanemu jako

---

[82]) Magnus, *Sammlung von Aufgaben u. Lehrs. aus d. anal, Geom. der Ebene* 1883, str. 188, 198.

[83]) Voss, *Math. Ann.* 13; Segre, *Torino Mem.* II, 37; Sturm, *Math. Ann.* 26. W tych rozprawach znajdzie czytelnik dalsze wskazówki bibliograficzne.

[84]) Sturm l. c.; Montesano, *Lincei Mem.* 1886.

[85]) Del Re, *Torino Atti*, 22, *Napoli Rend.*, 1887 i 1888; Brambilla *Lombardo Rend.* II, 20.

[86]) Lüroth, *Math. Ann.* 11, 13; Schröter tamże, 20; Veronese *Lincei Mem.* 1881: Patrz także niektóre rozprawy w 2-gim tomie dzieł Möbiusa. Należą tu prace: Rosanesa (*Journ. f. Math.* 88, 90, 95, 100), Sturma (*Math. Ann.* 1, 6, 10, 12, 15, 19, 22, 28; *Proc. math. Soc.* 7), Pascha (*Math Ann.* 23, 26), oraz rozprawy inauguralne Londona (Wrocław, 1886) i Krausa (Giessen, 1886), omawiające przedmioty pokrewne; daléj prace Stephanosa (*Math. Ann.* 23), H. Wienera (*Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf der Geraden*, Darmsztat, 1885), Segre'go *Torino Mem.* II, 12 (*Journ. f. Math.* 100), Sanni'i (*Lezioni di geometria projettiva*, obecnie drukujące się w Neapolu) o kolineacyach i korelacyach, nakoniec Lazzeri'ego o liniowych układach kolineacyj (*Atti del Istituto Veneto* VI, 3; *Lincei Mem.* IV, 4.

[87]) *Math. Ann.* 3.

przecięcie prostych, odpowiada grupa punktów zasadniczych pęku zbudowanego z krzywych odpowiadających. Ten rodzaj tworzenia przekształceń wielokrotnych rozciągnął Tognoli[88]) na przestrzeń, przyczém każdemu punktowi, uważanemu jako przecięcie trzech płaszczyzn, przydał jako odpowiednie punkty zasadnicze siatki, określonéj przez odpowiadające trzem płaszczyznom powierzchnie układu liniowego, potrójnie nieskończonego. Badania takie nie okazały się wszelako dotąd płodnemi. Przeciwnie ważnemi są badania de Paolisa o przekształceniach podwójnych. Pokazują to prace, w których Visalli[89]) i Jung[90]). badają przekształcenia wielokrotne, a które są dalszym ciagiem poprzednich.

Niektóremi specyalnemi przekształceniami wielokrotnemi zajmowali się Reye[91]) i Segre[92]), którzy podali piękne ich zastosowania. Aschieri[93]) przeniósł na przestrzeń niektóre specyalne podwójne przekształcenia płaskie, opracowane przez de Paolisa oraz rozciągnął zastosowania poczynione przez tego ostatniego do geometryi nieuklidesowéj. Ogólnych badań, oprócz zawartych w krótkiej pracy Reye'go[94]) oraz bardzo ważnych De Paolisa[95]) o podwójnych przekształceniach przestrzeni, w téj dziedzinie nie posiadamy. Nie wątpimy, że jedne i drugie mogą służyć za podstawę ogólnéj teoryi przekształceń, któréj jeszcze oczekujemy z niecierpliwością, będąc pewni, że przyniesie ona geometryi niemniejszy użytek niż ten, który przyniosły dobrze znane przekształcenia dwuwymierne, i jak to zauważył De Paolis, mogą przynieść przekształcenia podwójne.

Obok odpowiedniości wielokrotnych pomiędzy dwiema przestrzeniami (punktowemi lub płaszczyznowemi) można ustanowić odpowiedniość między przestrzenią punktową i płaszczyznową. Była

---

88) *Giorn. di Matem.* 10.

89) Patrz jego dwie rozprawy, ogłoszone w Messynie (1884) i *Lincei Rend.* 1886.

90) *Lombardo Rend.* 1886 i 1887; *Lincei Reud.* 1885. Z teoryą przekształceń wielokrotnych związane są nowsze badania o układach liniowych krzywych płaskich, któremi się zajmowali Bertini (*Lombardo Rend.* 1882), Jung (tamże 1887 i 1888; *Annali di Matem.* II, 15) Guccia (*Rend. del Circolo matem. di Palermo* 1). Segre (tamże) i Martinetti (tamże oraz *Lombardo Rend.* 1887).

91) *Die Geometrie der Lage.*

92) *Giorn. di Matem.* 21.

93) *Lombardo Rend.* II, 14 i 15.

94) *Journ. f. Math.* 94.

95) *Lincei Mem.* 1884—1885.

ona badana dla przypadku, gdy przez każdy punkt przechodzą płaszczyzny odpowiednie i w każdéj płaszczyznie leżą punkty odpowiednie. Razem uważane tworzą dwie przestrzenie układ wyższy zerowy albo punktowo-płaszczyznowy. Teorya tych układów stała się więcéj znaną skutkiem prac Amesedera[96]), Sturma[97]) i Vossa[98]), gdy znów Reye[99]) ma zasługę rozwinięcia pojęcia układu zerowego[100]) pospolitego, w ten mianowicie sposób, że elementami odpowiedniemi nie są punkty i płaszczyzny, lecz powierzchnie 2-go rzędu i 2-ej klasy.

VII.

Geometrya prostéj.

Geometrya grecka uważała punkt za element tworzący wszystkich figur; geometrya analityczna Descartes'a oznaczenie punktu przyjęła za podstawę wszystkich swoich rachunków. Zasada dwoistości wszakże doprowadziła uczonych do wniosku, że prosta na płaszczyznie i płaszczyzna w przestrzeni mogą z równém prawem i równém powodzeniem odgrywać tę samę rolę, jaką miał dotąd punkt w geometryi, a więc i do przyjęcia prostéj i płaszczyzny za elementy płaszczyzny i przestrzeni, oraz do zbudowania nowego systemu geometryi (syntetycznéj i analitycznéj). Zasługa tego znakomitego postępu należy się wznacznéj części Plückerowi[1]). Całkowicie zaś przypada Plückerowi sława wpro-

---

[96]) *Wiener Ber.* 1881: *Journ. f. Math.* 97.

[97]) *Math. Ann.* 19 i 28.

[98]) *Math. Ann.* 23.

[99]) *Journ. f. Math.* 82 w artykule o pokrewieństwie wzajemném układów F^2 i tkanek Φ^2.

[100]) O ogólnym układzie zerowym porównaj cytatę [3]) następującego rozdziału.

[1]) Do czasów najnowszych metoda analityczna, jak ją stworzył Descartes, stała, że tak powiemy, na *jednej* nodze. Plückerowi zachowany będzie zaszczyt ustawienia jéj na dwóch równych podporach, przez wprowadzenie układu współrzędnych dopełniającego. Zresztą odkrycie to stało się nieuniknionêm, skoro tylko głębokie widoki Steinera stały się udziałem matematyków (Sylvester *Phil. Mag.* III, 37, 1850, str. 363. Porówn. *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* 2, str. 453).

wadzenia trzeciego elementu tworzącego utworów przestrzennych, mianowicie prostéj, i oparcia na tém uważaniu nowéj geometryi przestrzeni. Znakomity ten uczony, który zaniechał był badań geotrycznych dla poświęcenia swych znakomitych zdolności studyom fizycznym, powrócił po latach dwudziestu do umiejętności, która początkowo dała mu sławę, i obdarzył ją nową ważną gałęzią, mianowicie „geometryą prostéj“.

Pierwsze komunikaty w tym przedmiocie, przedstawione przez wielkiego geometrę niemieckiego królewskiemu Towarzystwu w Londynie[2]), zawierają twierdzenia o niektórych ogólnych własnościach kompleksów, kongruencyj i powierzchni prostoliniowych i o niektórych specyalnych własnościach kompleksów liniowych i kongruencyj [3]); dowody tych twierdzeń są tylko zaznaczone i według wskazówek autora winny być prowadzone przy pomocy współrzędnych prostéj w przestrzeni. Współrzędne te wprowadził on jako pomysł własny; później poznano jednak, że są one przypadkiem specyalnym pomysłu Cayley'owskiego przedstawiania za pomocą jednego równania krzywéj dowolnéj w przestrzeni[4]).

Te komunikaty dały nagle początek całemu szeregowi prac ważnych, w których Battaglini dowiódł nie tylko twierdzeń Plückera, lecz i wielu twierdzeń odnoszących się do kompleksów stopnia 2-go i wyższego[5]). Tymczasem sam Plücker rozwinął zarysy pomysłów swoich i przedstawił je w dziele p. t.: *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*[6]).

---

[2]) Patrz *Phil. Trans.* 1865, str. 725 i 1866, str. 361.

[3]) Należy zauważyć, że kompleks liniowy pociąga za sobą system zerowy wzajemny, co znalazł najprzód Giorgini (*Memorie della Società italianà delle scienze* 20, 1827), potém Möbius (*Lehrbuch der Statik* I, porówn. *Journ. f. Math.* 19 1883) i Chasles (*Aperçu*, 1837) w badaniach statycznych i cynematycznych, a następnie tenże Chasles i Staudt przy oznaczeniu związków wzajemnych inwolucyjnych.

[4]) *Cambridge Trans.* 11, część 2; *Quart. Journ.* 3

[5]) *Giorn. di Matem.* 6, 7, 10, 18. Jakkolwiek Battaglini za podstawę badań swoich o kompleksach kwadratowych przyjął równanie, nie przedstawiające ogólniejszego kompleksu stopnia tego równania, mimo to wiele jego wniosków, a nawet wszystkie, z wyjątkiem odnoszących się do powierzchni osobliwéj i do osobliwych promieni kompleksu— stosują się do kompleksów ogólnych; ponieważ są niezależne od postaci tego równania. I wzory podane przez niego z niewielkiemi zmianami dają się stosować do przypadku ogólnego.

[6]) Lipsk, 1868—1869.

Powiedzieć, że ta książka we wszystkich swoich częściach jest zarówno ważną i interesującą, byłoby twierdzić rzecz przeciwną prawdzie. Plücker nie dbał bardzo o elegancyą rachunków, do jakiéj przyzwyczaili nas Lagrange, Jacobi, Hesse i Clebsch; nie podzielał on zapewne poglądu Lamé'go[7]), że „znakowanie jest tém dla analizy, czém porządek i wybór słów dla stylu"; dla niego rachunek miał tylko czynić zadość jednemu warunkowi: doprowadzić jak najszybcéj do rozwiązania postawionych zagadnień. Ta wada, wspólna wszystkim pracom Plückera, odczuwa się najżywiéj we wspomnianém wyżéj dziele, które miało do zwalczenia współzawodnictwo z takiemi wzorami elegancyi, jakiemi były wydane nieco wcześniéj: dzieło Hessego: *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes* (1861) i Jacobi'ego: *Vorlesungen über Dynamik* (1866). Oprócz téj niemałéj wady jest i inna jeszcze większa, pochodząca stąd, że Plücker przez dłuższy czas nie szedł był za postępem geometryi; skutkiem przeto niewielkiéj erudycyi znajdujemy w książce jego mnóstwo badań, które nas nie interesują, ponieważ weszły w skład zadań ogólniejszych już rozwiązanych; mnóstwo przypadków szczególnych, o których ważności nie możemy być przekonani; wreszcie mnóstwo wzorów nadzwyczaj złożonych, których użyteczności nie widzimy. Mimo tych braków, które musieliśmy zaznaczyć dla wyjaśnienia, dlaczego dzieło Plückera znajduje dziś tak mało czytelników, nie można nie uznać, że praca ta jest bogatą w poglądy oryginalne, i radzilibyśmy czytanie jéj każdemu, kto chce zająć się tą częścią geometryi, gdyby następcy Plückera nie byli wyłożyli badań jego w formie doskonalszéj, za pomocą innych metod, i nie byli rozwinęli w znacznéj części tych pomysłów, które on tylko naszkicował.

Plücker nie miał czasu wykończyć teoryi kompleksów drugiego stopnia, ponieważ śmierć zaskoczyła go w chwili, gdy zamierzał ogłosić drugą część swéj książki; badania, nieukończone przez mistrza, szczęśliwie podjął i uzupełnił uczeń jego F. Klein[8]), któremu

---

[7]) Patrz tegoż: *Examen des différentes méthodes* i t. d. str. 26.

[8]) *Math. Ann.* 2, 5, 7, 32, 23 (w ostatniéj przedruk rozprawy ogłoszonéj w r. 1868 w Bonn p. t.: *Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linienkoordinaten auf eine kanonische Form*, 28). Prócz tego liczne prace Kleina nad algebrą wyższą i nad analizą wyższą, ogłoszone w *Math. Ann.*, zawierają często spostrzeżenia należące do geometryi prostéj.

zawdzięczamy nietylko pojęcie ogólne współrzędnych prostéj i mnóstwo najpiękniejszych twierdzeń o kompleksach drugiego stopnia, lecz i różne ogólne i nadzwyczaj użyteczne pomysły o geometryi prostéj. W saméj rzeczy on to, udokładniając myśli mistrza swego, wykazał, że geometrya prostéj może być uważana jako badanie rozmaitości kwadratowéj o czterech wymiarach, zawartéj w przestrzeni liniowéj o pięciu wymiarach, i dowiódł, że każdy kompleks daje się przedstawić za pomocą jedynego równania między współrzędnemi prostéj. Że ta uwaga i to twierdzenie są największéj wagi dla postępu geometryi prostéj, najświetniéj wykazały badania mego najdroższego przyjaciela Konrada Segre[9]), ściśle związane z badaniami Kleina.

Współcześnie z Kleinem zajmowali się powielekroć Pasch[10]), Zeuthen[11]), Drach[12]), Chelini[13]) i później de Paolis[14]) geometryą prostéj, badając rozmaite pytania za pomocą współrzędnych jednorodnych. Clebsch[15]) zastosował do téj teoryi metodę oznaczenia skróconego; Weiler[16]) w r. 1873 uzupełnił klasyfikacyą kompleksów 2-go stopnia podług pomysłów, podanych w rozprawie Kleina. Voss[17]) w rozprawach bardzo ważnych badał osobliwości układu prostych; Halphen oznaczył liczbę prostych przestrzeni, czyniących zadość warunkom z góry ustanowionym[18]); Nöther[19]), Klein[20]) i Caporali[21]) zajmowali się odwzorowywaniem kompleksów pierwszego i drugiego stopnia w przestrzeni zwyczajnéj; Aschieri—odwzorowywaniem niektórych kompleksów specyalnych[22]); Lie wykrył związek ścisły, zachodzący między geometryą kuli a geometryą prostéj[23]); Reye wre-

---

[9]) *Torino Mem.* II, 36.

[10]) *Journ. f. Math.* 75, 76; Rozprawa habilitacyjna (Giessen, 1870).

[11]) *Math. Ann.* 1.

[12]) *Math. Ann.* 2.

[13]) Chelini, *Bologna Mem.* III, I.

[14]) *Lincei Mem.* 1884—1885.

[15]) *Math. Ann.* 2, 5.

[16]) *Math. Ann.* 7. Nie można nie ubolewać, że wyborna pod wielu względami rozprawa Weilera zawiera znaczną liczbę niedokładności.

[17]) *Math. Ann.* 8, 9, 10, 12, 13. Patrz także prace Schuberta (*Math. Ann.* 12) i jego dzieło: *Abzählende Geometrie.*

[18]) *C. R.* 74, 75; *Bull. Soc. math.* 1.

[19]) *Göttinger Nachr.* 1869.

[20]) *Göttinger Nachr.* 1869.

[21]) *Lincei Mem.* 1877—1878.

[22]) *Giorn. di Matem.* 8; *Lombardo Rend.* II, 12, 13, 14.

[23]) *Math. Ann.* 5. Porówn. rozprawę Cremony, przedstawioną Akademii dei Lincei (*Atti* II, 3.)

szcie badał formy kompleksów ogólnych drugiego stopnia[24]). Samemi środkami geometryi syntetycznej teorya ta była badaną przez Chasles'a[25]) już w roku 1839, przez Reye'go[26]), Silldorfa[27]) Schura[28]), Bertini'ego[29]), d'Ovidia[30]) i W. Stahla[31]); Buckheim[32]) posługiwał się kwaternionami dla okazania najważniejszych własności kongruencyj liniowych, gdy znowu wiele pytań z geometryi nieskończonościowéj z powodzeniem rozwiązano w niektórych rozprawach Mannheima[33]), Lie'go[34]), Kleina[35]), Picarda[36]), Königsa[37]). Nakoniec niektóre specyalne kompleksy badali Aschieri[38]), Painvin[39]), Reye[40]), Lie[41]), Weiler[42]), Roccella[43]), Hirst[44]), Voss[45]), Genty[46]). Montesano[47]), J. Hofman[48]), Segre i ja[49]).

---

24) *Journ. f. Math.* 98. Porówn. też 95, 97.

25) *Journ. Liouv.* 2.

26) *Die Geometrie der Lage*, 2 Abth. (2-gie wydanie), w któréj są zebrane prace syntetyczne Reye'go o geometryi prostéj, ogłoszone w *Journ. f. Math.*

27) *Zeitschr. f. Math.* 20.

28) *Dissertation* (Berlin, 1879) lub *Math. Ann.* 15.

29) *Giorn. di Matem.* 17; *Lincei Rend.* 1879.

30) *Torino Atti*, 1881.

31) *Journ. f. Math.* 91, 92, 93, 94, 95, 97,

32) *The Messenger of Mathematics* II, 13.

33) *Journ, Liouville'a* II, 17.

34) Patrz cytatę 23).

35) *Math. Ann.* 5.

36) *Ann. Éc. norm.* II, 6; *Archiv Grunerta*, 40.

37) *Ann. Éc. norm.* III, 1.

38) Patrz cytatę 22).

39) *Nouv. Ann.* II, 2; *Journ. Liouv.* II, 19.

40) *Die Geometrie der Lage.*

41) *Göttinger Nachr.* 1870.

42) *Journ. f. Math.* 95; *Zeitschr. f. Math.* 24, 27.

43) *Sugli enti geometrici dello spazio di rette generati delle intersezioni dei complessi corrispondenti in due o piu fasci projettivi di complessi lineari* (Piazza Armerina 1882).

44) *Proc. math. Soc.* 10; *Collectanea mathematica*, 1881.

45) *Math. Ann.* 13.

46) *Mémoire de Géométrie vectorielle sur les complexes du second ordre, qui ont un centre de figure* (*Journ. Liouv.* III, 8.)

47) *Sui complessi di rette di secondo grado generati da due fasci projettivi di complessi lineari* (Neapol, 1886) i *Napoli Rend.* 1886.

48) *Die synthetischen Grundlagen der Theorie des Tetraedroid-Complexes* (*Grunerts Archiv* II, 5.)

49) *Math. Ann.* 23; *Giorn di Mat.* 23; *Torino Atti* 1884.

Obok tego bogatego szeregu pism, do których pobudkę dały badania Plückera, należy wspomnieć tu o świetnych pracach całkiem innego charakteru. Są to prace Dupina[50]), Malusa[51]) (1775—1811) i Ch. Sturma[52]) (1802—1855), Bertranda[53]), Transona[54]) o normalnych do powierzchni i o matematycznéj teoryi światła, daléj praca Hamiltona (1805—1865) o układach promieni[55]). Prace te znalazły swoje uwieńczenie w dwóch sławnych rozprawach Kummera, ogłoszonych w r. 1857 i 1866.

W pierwszéj z nich, drukowanéj w dzienniku *Journal für die reine und angewandte Mathematik*[56]) Kummer zakłada sobie dojście za pomocą metody jednolitéj i prostszéj do rezultatów Hamiltona i dopełnienia ich w punktach, w których wydawały się niedostatecznemi[57]). W drugiéj[58]), daleko ważniejszej, po pięknych badaniach ogólnych nad liczbą osobliwości układów prostych i nad powierzchnią ogniskową, rozwiązuje pytanie o oznaczeniu wszystkich układów algebraicznych 1-go i 2-go rzędu promieni t. j. takich układów, w których przez każdy punkt przestrzeni przechodzi jeden lub przechodzą dwa promienie układu.

Życzyłbym tu sobie mieć dość miejsca dla przedstawienia czytelnikowi szczegółów, stwierdzających wielką wartość téj klasycznéj pracy, by mógł wraz ze mną podzielić głęboki podziw dla niéj; pragnąłbym mu okazać, z jaką nadzwyczajną biegłością autor dochodzi do oznaczenia wszystkich układów promieni 1-go i 2-go rzędu, do równań, które przedstawiają te układy i ich powierzchnie ogniskowe (są to te powierzchnie czwartego rzędu z punktami podwójnemi, o których mówiłem w rozdziale III-cim), do osobliwości układów, do konfiguracyj, jakie tworzą, do związku pomiędzy niemi a osobliwościami powierzchni ogniskowéj i t. d. Lecz po-

---

[50]) *Applications de Géométrie et de Mécanique*, 1822.

[51]) *Journ. Éc. polyt.* 14.

[52]) *C. R.* 20.

[53]) *Journ. Liouv.* 14

[54]) *Journ. Éc. polyt.* 38.

[55]) *Irish. Trans.* 16, 1831.

[56]) Tom 57.

[57]) Własności nieskończenie cienkich pęków promieni, któremi się zajmuje Kummer w téj rozprawie dały późniéj, (1862) przedmiot do pięknéj pracy Möbiusa (*Leipziger Ber.* 14; Dzieła, 4; z nią wiążą się badania Zecha (*Zeitschr. f. Math.* 17); porówn. też najnowszą rozprawę Hensela (*Journ. f. Math.* 102.

[58]) *Berliner Abh.* 1866.

nieważ szczupłość miejsca nie pozwala mi na to, ograniczam się przeto na wyrażeniu życzenia, aby moja krótka wzmianka mogła pobudzić czytelnika do bezpośredniego poznania badań Kummera i pójścia tą drogą, którą on tak szczęśliwie zainaugurował. Wyrażam to życzenie dlatego, iż z żalem spostrzegam, że w ciągu dwudziestu lat, jakie upłynęły od ogłoszenia pracy Kummera, nie udało się dotąd posunąć znacznie teoryi, która okazała się tak płodną w piękne rezultaty [59]).

VIII.

Geometrya nieeuklidesowa.

Ostatnia kategorya prac, jakiemi mam się zająć, zawiera szereg badań, które wywołały ożywione dyskusye —i co dziwna—podzieliły na czas pewien matematyków na dwa obozy, „uzbrojone jeden przeciwko drugiemu" [1]); dziś badania te stanowią część nauki

---

[59]) Pomiędzy pracami, które można uważać jako ciąg dalszy pracy Kummera, albo które dochodzą do takichże wyników na innéj drodze, wymieniam rozprawy: Reye'go (*Journ. f. Math.* 83 i 93), Hirsta (*Proc. Math. Soc.* 16), Stahla (patrz cytatę [31]), Caporali'ego (*Napoli Rend.* 1879), Lori'i (*Torino Atti*, 1884 i 1886); z tych zaś, które dodały nowe wzory lub nowy układ algebraiczny promieni: Kummera (*Berl. Ber.* 1878), Masoni'ego (*Napoli Rend.* 22) Rocceli (patrz notę 42), Hirsta (*Proc. math. Soc.* 16 17; *Rend. del. Circolo matem. di Palermo* 1), Sturma (*Math. Ann.* 6; *Journ. f. Math.* 101); Conti'ego (*Rend. del. Circolo matematico di Palermo* 1, 2).

[1]) Aby wykazać, że kwestye, któremi zajmują się wzmiankowane prace nie pozwoliły niektórym uczonym zachować spokoju i bezstronności, które towarzyszyć winny sporom naukowym, przytoczę tu dwa ustępy: jeden z pisarza, dobrze znanego uprawiającym filozofią, i drugi z dziennika, dość rozpowszechnionego w Niemczech.

„Jest to bezwątpienia zabawką logiczną nazwać układ czterech lub pięciu wymiarów, przestrzenią. Należy się wystrzegać podobnych prób; są one grymasami umiejętności, które temi zupełnie bezpożytecznemi paradoksami zachwiewają zwykłą samowiedzę i łudzą co do jéj słusznego prawa w ograniczaniu pojęć" (Lotze, *Logik*, str. 217). „Geometrya absolutna albo nieeuklidesowa, geometrya przestrzeni skończonéj i nauka o n wymiarach przestrzennych, są albo karykaturami, albo objawami chorobliwemi matematyki" (J. Gilles, *Blätter für das Bayerische Gymnasial- und Realschulwesen* 28, str. 423). Porównaj też gwałtowne wyrażenia Dühringa, przytoczone przez Erdmanna w jego o rozciągłości, którą nazywamy „geometryą nieeuklidesową“ i „teoryą rozmaitości wielokrotnie rozciągłych“ albo „geometryą n-wymiarową[2])“.

Każdy wie, że pomiędzy twierdzeniami, zawartemi w Elementach Euklidesa, jest jedno[3]), niezupełnie nadające się do tego, by je, jak to uczynił geometra grecki, postawić pomiędzy pewnikami (aksiomatami) lub wymogami (postulatami)[4]). Jest ono wielkiéj wagi w systemie Euklidesa, gdyż na niém opiera się, rzec można, cała teorya linij równoległych. Ponieważ nie jest ono tak bezpośrednio widocznëm, aby można było usprawiedliwić umieszczenie go w liczbie tych prawd, dla których szukanie dowodu jest rzeczą daremną, powstaje przeto pytanie, czy twierdzenie to w istocie nie daje się dowieść; a jeżeli tak jest, to czy nie daje się ono zastąpić innëm twierdzeniem, którego prawdziwość jest widoczniejszą?

Pytania takie są naturalną właściwością epoki naszéj, któréj cechę najbardziéj wybitną (jak to zauważył Humboldt) stanowi krytyka bezstronna całéj spuścizny przeszłości; można je uważać za pierwsze źródło geometryi nieeuklidesowéj.

Pierwsze ważne badania nad tym przedmiotem poczynił w końcu ubiegłego wieku Legendre[5]), który jasno wykazał związek między postulatem Euklidesa i twierdzeniem o sumie kątów w trójkącie, zastąpił go innym daleko ważniejszym i powziął pomysł geometryi, niezależnéj od tego postulatu[6]).

---

wybornéj rozprawie: *Die Axiome der Geometrie* (Lipsk, 1877. str. 85), dalej Kromana, *Unsere Naturerkenntniss*, przekład niemiecki Fischera-Benzona (Kopenhaga, 1883, str. 145 do 175) nakoniec rozdziały 13 i 14 dzieła Stalla: „La *matière et la physique moderne* (Paryż, 1884). Na zarzuty tego rodzaju odpowiadamy z d'Alembertem: „Allez en avant et la foi vous viendra!“

[2]) Do bibliografii tego przedmiotu patrz artykuł G. Bruce-Halsteda, ogłoszony w *American Journal* 1, 2.

[3]) Jest to twierdzenie: „Jeżeli prosta, przecinająca dwie inne, tworzy z niemi po jednéj stronie kąty wewnętrzne, których suma jest mniejszą od dwóch kątów prostych, to obie te proste, dostatecznie przedłużone, spotykają się właśnie z téj strony“. D'Alembert nazywał to twierdzenie: „l'écueil et le scandale des éléments de la géométrie“.

[4]) Przez czas pewien mniemano, że twierdzenie to umieścił Euklides pomiędzy pewnikami, lecz nowsze badania historyczne (patrz Hankel, *Vorlesungen über komplexe Zahlen und ihre Functionen*, str. 52) skłaniają do przypuszczenia, że przepisywacze błędnie umieścili je między pewnikami, gdy w oryginale znajdowało się między wymogami.

[5]) Porówn. Baltzer, *Die Elemente der Mathematik*, część 4-a. Planimetrya.

[6]) Opowiadają, że Lagrange zauważył, iż geometrya kulista jest niezależną od postulatu Euklidesa i że spodziewa się wyciągnąć z tego spo-

Prawie w tym samym czasie zajmował się i Gauss tém pytaniem. Nie ogłosił on wprawdzie żadnéj pracy o tym przedmiocie, korespondencya jego wszakże z Schumacherem [7]) i z Wolfgangiem Bolay'em (1775—1856)[8]) oraz artykuły bibliograficzne [9]) wykazują, że Gauss nietylko wielce interesował się tém pytaniem, lecz że i na tém polu, równie jak na innych przez siebie uprawianych, zebrał bogaty plon prawd.

Skoro Łobaczewskij (1893—1856)[10]) i Jan Bolayi (1802—1860) [11]) ogłosili badania swoje w tym przedmiocie, książe matematyków niemieckich sankcyonował swoją powagą rezultaty, do jakich doszli ci matematycy. Te rezultaty można streścić, mówiąc, że stanowią one podstawę nowéj geometryi, zupełnie niezależnéj od postulatu Euklidesa (geometrya nieeuklidesowa, urojona albo pangeometrya), która w wielu punktach zgadza się, w innych zaś nie zgadza się z geometryą zwykłą;—geometryi, którą niektórzy chcieli odrzucić jako niedorzeczną, bo sprzeciwiającą się zjawi-

---

strzeżenia sposób uniknięcia niedogodności metody Euklidesowéj przez uważanie geometryi płaskiej, jako geometryi kuli o promieniu nieskończenie wielkim.

[7]) *Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher* — korespondencya wydana w 6-u tomach przez Petersa (Altona 1860 — 1865); stosujące się do naszego przedmiotu miejsce téj korespondencyi przełożył Hoüel na język francuski i dołączył do francuskiego przekładu dzieła Łobaczewskiego: *Geometrische Untersuchungen* (patrz niżéj cytatę [10]).

[8]) Porówn. Wspomnienie o Gauss'ie przez Scheringa (*Göttinger Abh.* 22 (1877).

[9]) *Göttingische Gelehrte Anzeigen* 1816—1822 albo Dzieła Gaussa, 4, (1873) str: 364 i 368. Porówn. też Sartorius von Waltershausen'a *Gauss zum Gedächtniss* (Lipsk, 1856). str. 81. Niechaj mi będzie wolno przytoczyć tu wiadomość, że Gauss posunął stare zadanie o dzieleniu koła, które od dwóch tysięcy lat pozostawało bez udoskonalenia, za pomocą badań w dziedzinie, która zdawała się być zupełnie bez związku z tém zadaniem i nie obiecywała żadnych korzyści dla geometryi (*Disquisitiones arithmeticae*, Lipsk, 1801); okazał bowiem, że dzielenie okręgu na n części przy pomocy linijki i cyrkla jest możliwém i wtedy, gdy n jest liczba pierwszą postaci 2^m+1. Patrz Legendre, *Éléments de trigonométrie*, Dodatek; Richelot, Staudt, Schröter *Journ. f. Math.* 9, 24 75; Affolter *Math. Ann.* 6.

[10]) *Kazanskij Wiestnik* 1829 — 1830; *Zapiski kazanskaho uniwiersitieta* 1835, 1836, 1837, 1838. *Geometrische Untersuchungen über die Theorie der Parallellinien* (Berlin 1840); *Journ. f Math.* 17.

[11]) Praca Jana Bolayi'a wyszła jako dodatek do dzieła W. Bolayi'a p. t.: *Tentamen juventutem studiosam in elementa mateseos purae ..... introducendi*, 2 tomy (Maros-Vásárhely, 1833) była przetłomaczona na francuski przez Hoüela (*Memoires de Bordeaux*) i na włoski przez Battaglini'ego *Giorn. di Matem.* 5.

skom dostarczanym przez grube świadectwo zmysłów, dziś wszakże ogólnie przyjętéj, dla tego, że jej wartość logiczna nie ulega żadnéj wątpliwości[12]).

Do tego zwycięztwa logiki nad przesadzonym empiryzmem przyczyniły się w sposób skuteczny prace pierwszorzędnej wagi, które ogłosili Riemann (1827—1866), Helmholtz i Beltrami w latach 1867 i 1868.

Rozprawa Riemanna *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* [13])— napisana na lat 12 przed jéj ogłoszeniem — ogólnością pomysłów i zwięzłością formy przedstawiała i przedstawia trudności nawet dla posuniętego w matematyce. Mimo to, wielka część pomysłów, które zawiera, rozpowszechniła się szybko, ponieważ dzięki szczęśliwemu zbiegowi okoliczności, te same myśli wyszły jednocześnie od Helmholtza, który nietylko przedstawił je w formie ściśle naukowéj dla matematyków [14]), ale i w odczytach popularnych i artykułach w różnych pismach uprzystępnił dla czytelników z po za szczupłego koła geometrów[15]). Nie mniejszy wpływ od tych pism znakomitego autora *Optyki fizyologicznéj* wywarła klasyczna rozprawa Beltrami'ego, *Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidea* [16]). Ścisłość i ele-

---

[12]) Jest zasługą Hoüela (?—1886) i Battaglini'ego rozpowszechnienie dzieł Łobaczewskiego i Bolayi'a za pomocą przekładów z wybornemi komentarzami (patrz cytaty 7 i 11 i *Giorn. di Matem.* 5 i 8). Dziś łatwo jest studyować geometryą nieeuklidesową, gdyż Flye de S-te Marie (*Etudes analytiques sur le théorie des parallèles*, Paryż, 1871), Frischhauf (*Élemente der absoluten Geometrie*. Lipsk 1876 i de Tilly (*Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique*, Bordeaux, 1879) opracowali je metodycznie. W Anglii nowe idee opracował i wybornie przedstawil Clifford; czytaj pismo *Lectures and Essays* jako też wstęp Smitha do *Mathematical Papers by W. K. Clifford* (Londyn, 1882) i najnowsze opracowanie R. S. Balla *The non-euclideian geometry* (*Hermathena*, 6).

[13]) *Göttinger Abh.* 13 (1867) lub *Gesammelte Werke* (Lipsk 1876). Przekład francuski Hoüela (*Annali di Matem.* II, 3), angielski Clifforda (*Nature*, 8 i *Mathematical Papers* str. 55, polski Dicksteina z przypisami Gosiewskiego (*Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom 9).

[14]) *Ueber die Thatsachen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (*Göttinger Nachr.* 1868, albo *Wissenschaftliche Abhandlungen* Tom II, Lipsk, 1883, str. 619 i dalsze.

[15]) Patrz *Populäre wissenschaftliche Vorträge* (Brunświk, 1871—1876; 2-gie wydanie (1884.): *Revue des cours scientifiques* 9 czerwca 1870.

[16]) *Giorn. di Matem.* 6. Ten artykuł w przekładzie francuskim Hoüela został ogłoszony w *Ann. Éc. norm.* 6. 1869.

gancya analityczna, jaką wyróżnia się ta praca, zwróciły na nią uwagę geometrów; świetny zaś i zdumiewający rezultat, że twierdzenia geometryi nieeuklidesowéj znajdują swoje urzeczywistnienie na powierzchniach o krzywiznie stałéj ujemnéj, sprawił głębokie wrażenie i na tych, którzy zaprzeczali wszelkiej wartości prawdom, nie stwierdzonym doświadczeniem, i zapewnił tryumf nowym poglądom. Wreszcie obronione w téj pracy zdrowe poglądy filozofii umiejętnéj i świetna forma, w jakiej jest pisaną, obudziły i budzą żywy podziw dla naszego sławnego ziomka, dzięki któremu jeszcze raz:

Il vero condito in molli versi
I piu schivi alletando ha persuasi. [17]

Że prace tych trzech wielkich uczonych wywarły wpływ dobroczynny na całą geometryą, okazało się najoczywiściéj ze zmiany w sposobie uważania twierdzeń, służących dziś za podstawę geometryi [18]. Jeżeli dawniéj geometrowie pozostawiali filozofom troskę rozstrzygnięcia, czy prawdy, któremi się zajmują, są koniecznemi lub wolnemi, skłaniając się do uważania ich za konieczne,—to dziś po poznaniu, że podstawa geometryi jest empiryczną, dążą do ścisłego oznaczenia tych faktów, jakie należy przejąć ze spostrzeżenia zmysłowego dla ugruntowania wiedzy o rozciągłości [19]. Kto czyta piękne dzieło Pascha *Vorlesungen über*

---

[17]) Prawda złożona w pięknych wierszach
Najoporniejszych przekonała powabem.

[18]) Porównajmy tu słowa, jakie wygłosił d'Alembert dla odparcia poglądu, że prawdy mechaniki są doświadczalnemi (*Traité de Dynamique*, Paryż 1858; *Discours préliminaire* str. XII) z następującemi słowami Clifforda (*The common sense of the exact sciences*, Londyn, 1855. *International scientific series* 51): „Jak dla utworzenia teoryi pewnéj gałęzi fizyki, wychodzimy z doświadczenia i na naszych doświadczeniach budujemy pewną ilość pewników tworzących jéj podstawę, podobnież i pewniki, które przyjmujemy za podstawę geometryi, jakkolwiek mniej jawnie, są jednak w rzeczy saméj wynikiem doświadczenia". Patrz także pismo Hoüela: *Du rôle de l'experience dans les science exactes* (Praga, 1875) albo przekład jej w *Archiv Grunerta* 59.

[19]) Zauważę, że kto czyta *Ausdehnugslehre* wielkiego geometry i filozofa niemieckiego Grassmanna, spostrzega ze zdumieniem, że ten już w r. 1844 doszedł był do wniosków, nie wiele różniących się od podanych w tekscie. Ale któż nie wie, że znakomite to dzieło mogło być ocenione dopiero wtedy, gdy inni na innych drogach doszli do wysoce oryginalnych prawd, jakie ono zawiera? Tutaj winienem dać wyjaśnienie dla własnego usprawiedliwienia. W téj krótkiej historyi walk, jakie stoczyli geometrowie w ostatnich czasach, rzadko i pobieżnie tylko cytowałem prace Grassmanna, i nie będę już miał sposobności wymienienia jego

neuere Geometrie (Lipsk, 1882), studyuje nowe podręczniki i porównywa je ze starszemi książkami, ten znajdzie różnice zasadnicze dawnych i nowych poglądów. W dawnych dziełach nauczyciel podawał te założenia, których nie udowadniał, za prawdy konieczne, wieczne i niewzruszone; w nowszych zaś prowadzi on, że tak powiemy, ucznia do wykonania doświadczeń koniecznych dla ustanowienia przesłanek do późniejszych dedukcyj. W dawniejszych przedstawiał autor geometryą euklidesową za jedynie możliwą, w nowszych zaś za jednę z nieskończenie wielu, jakie zbudować się dadzą. Różnice te wykazują postęp istotny, ponieważ dowodzą, że uczeni uwolnili się od zakorzenionego i szkodliwego przesądu; a dla postępu umiejętności poznanie błędu niemniéj jest ważném od odkrycia prawdy.

Wkrótce po ogłoszeniu pracy Beltrami'ego, ukazała się praca F. Kleina [20]), mająca również wielką ważność; aby wykazać wszakże jéj stanowisko w historyi geometryi nieeuklidesowéj, muszę się cofnąć o kilka dziesiątków lat.

Wiadomo, że dzieło *Traité des propriétés projectives des figures* ustanowiło różnicę pomiędzy własnościami figur niezmieniającemi się i zmieniającemi się w skutek rzutu; wiadomo daléj, że do pierwszych należą wszystkie własności wykreślne (wynikające z położenia) i tylko niektóre metryczne. Otóż geometrowie zadali sobie pytanie, czy jest rzeczą możliwą wysłowić własności metryczne

nazwiska. Nie znaczy to wcale, aby geometra ten nie był godnym wzmianki, lub aby jego odkrycia i metody nie zasługiwały na poznanie *), tylko że formalizm, w jaki oblekł swoje pomysły, uczynił je niedostępnemi oraz pozbawił wszelkiego wpływu. Grassmann w ciągu większéj części swego życia był odosobnionym w matematyce; dopiero w ostatnich latach życia zajmował się przedstawieniem swych produkcyj w szacie bardziéj nowoczesnéj, dla pokazania pokrewieństwa ich z produkcyami współczesnych (patrz *Math. Ann.* 10, 2, *Göttinger Nachr.* 1872 *Journ. f. Math.* 84); stąd to jest rzeczą naturalną, że rzadko przychodzi wspominać go temu, kto opisuje zdobycze, jakie zawdzięczamy złączonym usiłowaniom nowoczesnych geometrów. Porówn. Peano *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva* (Turyn, 1888). O zasługach naukowych Grassmanna patrz artykuł Cremony w *Nouv. Ann.* I, 19, w 14 tomie *Math. Ann.* i w 11 tomie *Bulletino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche*. Porównanie między metodami Grassmana i innemi nowoczesnemi dał Schlegel w *Zeitschr. f. Math.* 24.

[20]) *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.* (*Math. Ann.* 4). Porów. Petersen, tamże 29.

*) I may..... be permitted to express my profound admiration of that extraordinary Work (*die Ausdehnungslehre*) and my conviction that its principles will exercise a vast influence upon the future of the mathematical science" (Clifford, *Amer. Journ.* T. I str. 350.)

figur w ten sposób. aby się one zachowały i po rzucie. Dla niektórych klas twierdzeń rozwiązali to zadanie Chasles i Poncelet przez wprowadzenie pojęcia nieskończenie odległych punktów kołowych płaszczyzny , oraz pojęcia koła urojonego, nieskończenie odległego; dla innych rozwiązanie dał Laguerre[21]), któremu udało się uczynić rzutowém pojęcie kąta. Całą ogólność temu zadaniu dał wszakże Cayley[22]) (1859) w szóstéj ze swych sławnych rozpraw *Memoirs upon Quantics*, w któréj wykazał, że każda własność metryczna figury płaskiéj zawiera się w związku rzutowym pomiędzy nią a pewną stożkową stałą. Otóż cel główny przytoczonéj pracy Kleina polega właśnie sa wykazaniu ścisłego związku między wnioskami Cayley'a a wnioskami, do jakich doszli Bolayi i Łobaczewskij; cel ten został osiągnięty w sposób jasny i zapewnił szybko wielką sławę rozprawie Kleina [23]).

Obok wymienionych prac należy postawić wiele innych; obok rozpraw Riemanna i Beltrami'ego niektóre interesujące prace de Tilly'ego [24]), Genocchi'ego [25]), Eschericha [26]) (Bianchi'ego[27]); obok prac Kleina rozmaite rozprawy Battaglini'ego [28]), d'Ovidia [29]), de Paolisa [30]), Aschieri'ego[31]),

---

[21]) *Nouv. Ann.* 12.

[22]) *Phil. Trans.* 149; porówn. Clifford, *Analytical Metrics* (*Quart. Journ.* 1865, 1866 albo *Mathematical Papers* str. 80).

[21]) Późniejsza praca Kleina pod tymże samym tytułem (*Math. Ann.* 6) jest dopełnieniem w niektórych punktach pierwszéj pracy. Wiążą się z nią ważne prace Lürotha i Zeuthena (*Math. Ann.* 7), Thomae'go (porówn. 2-gie wydanie *Geometryi położenia* Reye'go), Darboux (*Math. Ann.* 17) Schura tamże, 18), de Paolisa (*Lincei Mem.* 1880 i 1881) i Reye'go (3-e wydanie *Geometryi położenia*) o twierdzeniu zasadniczém geometryi rzutowéj.

[22]) *Études de mécanique abstraite* (*Mémoires couronnées par l'Académie de Belgique* 21, 1870).

[25]) *Bull. de l'Acad. de Belgique* II, 36; *Torino Mem.* II, 29. *Mem. della società ital. delle scienze* III, 2.

[26]) *Wiener Ber.* 1874. Patrz także piękną rozprawę Beltrami'ego: *Sulle equazioni generali dell'elasticità* w *Annali di Matem.* II, 10.

[27]) *Sull'applicabilità delle superficie degli spazii a curvatura constante* (*Lincei Atti* III, 2).

[28]) *Lincei Rend.* 1873 i 1976; *Giorn. di Matem.* 12.

[29]) *Annali di Matem*, II, 6, 7; *Giorn. di Matem.* 13; *Torino Atti* 1876; *Lincei Mem.* III, 3; *Lombardo Rend.* 1881.

[30]) *Lincei Mem.* 1877—1878.

[31]) *Lombardo Rend.* II, 14, 15.

Cayley'a [32]), Lindemanna [33]), Scheringa [34]), Story'ego [35]), H. Stahla [36]), Vossa [37]), H. Coxa [38]) i A. Buchheima [39]).

Literatura matematyczna ostatniéj doby nie jest tak bogatą w badania z téj dziedziny [40]); zdaje się, jakoby okres bohaterski, przez który przechodzi każda gałąź wiedzy, minął już dla geometryi nieeuklidesowéj. A może niezmordowani pracownicy ostatnich dwóch dziesiątków lat 1860 — 1880 tak przekopali wszystkie głębiny, że już żadna żyła złotodajna więcéj się w nich nie ukrywa?

IX.

Geometrya n-wymiarowa.

Teorya rozmaitości wielokrotnie rozciągłych albo geometrya n-wymiarowa [1]) winna swój początek pomocy, jaką algebra otrzymała od geometryi, od czasu gdy Descartes nauczył nas pierwszą stosować do drugiéj. W rzeczy saméj pomoc ta jest ograniczoną, gdyż tylko fakty analityczne, związane z teoryą funkcyj o jednéj, dwóch lub trzech zmiennych (lub z teoryą form dwójkowych, trójkowych i czwórkowych) nadają się do przedstawienia zmysłowego. Lecz duch uogólnienia, który, jak już wspomniałem, nie przestał być najpotężniejszym bodźcem w badaniach nowoczesnych, pobudził geometrów do zerwania pęt, jakie przyroda zdawała się nakładać na wyobraźnią, i do mówienia o przestrzeniach wielo-

---

[32]) *Math. Ann.* 5.

[33]) *Math. Ann.* 7.

[34]) *Göttinger Nachr.* 1873.

[35]) *Amer. Journ.* 2, 4, 5.

[36]) *Die Maasfunktionen in der analytischen Geometrie*, (Program, Berlin, 1870)

[37]) *Math. Ann.* 10.

[38]) *Quart. Journ.* 18,

[39]) *On the theory of screws in elliptic spaces* (*Proc. math. Soc.* 15 i 16).

[40]) Najbardziéj interesujące ze znanych mi są: Segre'go, *Sulle geometrie metriche dei complessi lineari e delle sfere*, ogłoszone w *Torino Atti*, 1883.

[1]) Krótki rys rozwoju geometryi wielowymiarowéj znaleźć może czytelnik w świeżo wydanym tomie I-ym *Prac matematyczno-fizycznych* (Warszawa, 1888, str. 129—136).

krotnie rozciągłych [2]). Mówili oni o takich przestrzeniach, zanim zdołali się zająć rozstrzygnięciem pytania bardziéj filozoficznego niż matematycznego, czy przestrzenie takie w rzeczy saméj istnieją; a czynili to słusznie, gdyż tylko nie podejmując wcale tego pytania, może nierozwiązalnego, mogli dojść do zamierzonego celu. Tym sposobem siłą śmiałéj wyobraźni pozyskali oni sposoby (zmysłowego lub nadzmysłowego) przedstawienia wielu rezultatów analitycznych [3]).

Dla okazania, że ta była właśnie droga dojścia do téj teoryi wystarczy przytoczyć fakt, że postawili ją tacy analiści, jak Cauchy[4]) (1789—1817) i Riemann[5]); że u wielu innych mniéj znakomitych matematyków występuje ona w sposób mniéj lub więcéj ukryty, przy dobitniejszém wysławianiu twierdzeń analizy; że wreszcie Lagrange w końcu zeszłego wieku uczynił uwagę „iż mechanikę uważać można jako geometryą o czterech wymiarach", w któréj czas gra rolę czwartéj współrzędnéj [6]).

To pojęcie przestrzeni wielokrotnie rozciągłéj jest ze względu na jego początek i znaczenie—pojęciem w istocie rzeczy analityczném. Plückerowi, któremu los wydzielił tak znaczny udział w rozwoju geometryi nowożytnéj daném było też stworzyć szatę geometryczną dla tego pojęcia; on to bowiem uczynił spostrzeżenie, że dla przestrzeni naszéj można wyznaczyć dowolną ilość wymiarów, gdy się odpowiednio obierze element tworzący przestrzeni. I tak, przestrzeń będzie miała trzy wymiary, jeżeli obierzemy punkt lub płaszczyznę; cztery, jeżeli prostą lub kulę; dziewięć, jeżeli powierzchnią drugiego stopnia i t. d. [7]).

---

[2]) Iloczyn dwóch odcinków jest powierzchnią, trzech—ciałem; czemże jest obraz geometryczny iloczynu czterech odcinków? Geometrowie analityczni epoki Descartes'a oznaczali go wyrazem „sursolide" (nadcielesny), który znajdujemy w ich pismach; można więc uważać ich niejako za inicyatorów kierunku, o jakim mówimy w tekscie. Zresztą już Viète w *Algebrze* swojéj dla wytłomaczenia swych równań rozważał przestrzeń dziewięciowymiarową!

[3]) Patrz Cayley, *A memoir on abstract geometry* (*Phil. Trans.* 1870; porów. też *Cambridge Journ.* 4, 1845.

[4]) *C. R.* 1847.

[5]) Oprócz tego zdaje się nie ulegać wątpliwości, że Gauss miał bardzo rozległe i określone pomysły, dotyczące geometryi wielowymiarowéj; porówn. Sartorius von Waltershausen l. c. str. 81 (patrz notę 9-ą poprzedniego rozdziału).

[6]) *Théorie des fonctions analytiques* (Paryż, rok V, str. 223).

[7]) Nie wolno mi zamilczeć o tém, że już w r. 1827 Möbius wiedział, iż zakładając istnienie przestrzeni czterowymiarowéj, można znieść niewyjaśnial-

Ten pomysł jest mniéj abstrakcyjny i łatwiejszy do pojęcia od poprzedzającego; mimo to rozpowszechnił się daleko wolniéj, prawdopodobnie dla tego, że jego tworca niedość się starał o wykazanie jego ważności. Pierwszy zaś pomysł, przeciwnie, dzięki sławnéj rozprawie Riemanna, daléj się rozwija w wielu kierunkach, tak że literatura matematyczna tego przedmiotu jest bardzo bogatą i rośnie z dniem każdym. Dla usprawiedliwienia tego twierdzenia, przypomnę wymienione już rozprawy Helmholtza, przytoczę prace Beltrami'ego[8], Schläfli'ego[9], Newcomba[10]) Stringhama[11], nowe dzieło Killinga[12], oraz badania Schura[13], związane ściśle z rozprawą Riemanna. Wymieniam daléj badania Betti'ego[14] o składności przestrzeni n-wymiarowéj Clifforda[15]; Beltrami'ego[16], Jordana[17], Lipschitza[18], Monro[19],

ną różnicę pomiędzy płaszczyzną a przestrzenią. Różnica ta polega na tém, że gdy dwie figury płaskie, symetryczne względem prostéj, można zawsze położyć na sobie tak, aby przystawały zupełnie, to nie można tego uczynić z figurami przestrzennemi, symetrycznemi względem płaszczyzny. Późniéj Zöllner zauważył mimochodem, że istnienie przestrzeni czterowymiarowéj pozwalałoby na przyjęcie pewnych ruchów, uważanych za niemożliwe. Następujące rezultaty mogą służyć jako wyjaśnienie tego spostrzeżenia: Newcomb pokazał (*Amer. Journ.* 1), że jeżeli istnieje przestrzeń o czterech wymiarach, to można przemienić obie strony powierzchni materyalnéj, zamkniętéj, bez przerywania téjże. Klein zauważył (*Math. Ann.* 9), że przy tém założeniu węzły nie mogą się utrzymać, Veronese zaś wspomniał (w *Prolusione* mianych w 1881 w uniwersytecie Padewskim), że z zamkniętego pokoju możnaby wyjąć ciało, nie łamiąc murów. Hoppe dał (*Archiv Grunerta* 64) wzory, które mogą służyć za ilustracyą spostrzeżeń Kleina. Wzory te wymagały pewnych zmian, które podał Durège (*Wiener Ber.* 1880). porówn. też *Archiv Grunerta* 65 i uważania syntetyczne Schlegela (*Zeitschr. f. Math.* 28).

8) *Annali di Matem.* II, 2 i 5.

9) *Journ. f. Math.* 65; *Annali di Matem.* II, 5.

10) *Journ. f. Math.* 83.

10) *Amer. Journ.* 2.

12) *Die Nicht-Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung*, Lipsk, 1885.

13) *Math. Ann* 27, 28.

14) *Annali di Matem.* II, 4.

15) *Proc. Math. Soc.* 7 albo *Mathematical Papers.* str. 236, 378, 402.

16) *Bull. Soc. math.* 11, 1876.

17) *C. R.* 79.

18) *Journ. f. Math.* 70 i następne; *Quart. Journ.* 12.

19) *Proc. math. Soc.* 9.

Scheeffera (1859—1885)[20]. Heatha[21]) i Killinga[22]) o cynematyce i mechanice takiéj przestrzeni[23]); daléj prace Jordana[24]) i Brunela [25]), dotyczące przestrzeni stycznych i ściśle stycznych, które ma krzywa w przestrzeni n-wymiarowéj; Craiga[26]) i Kretkowskiego[27]) o własnościach metrycznych powierzchni w takich przestrzeniach; Kroneckera[28]), Gosiewskiego [29]), Beeza[30]), Lipschitza[31]), Christoffela[32]), Brilla[33]), Suworowa [34]), Vossa[35]) o krzywiznie przestrzeni wielokrotnie rozciągłéj; Kroneckera i Tonelli'ego [36]) o potencyale; Lie'go[37]), Kleina[38]), Jordana[39]) i Lipschitza[40]) o uogólnieniu twierdzeń Dupina i Eulera. Odwzorowywaniem powierzchni przestrzeni czterowymiarowéj na przestrzeni zwyczajnéj zajmował się Craig [41]); uogólnienie sławnego zagadnienia trzech ciał podał Lipschitz [42]). Na zakończenie chcemy zwrócić

---

[20]) Rozprawa berlińska, 1880

[21]) *Phil Trans.* 175.

[22]) *Journ. f. Math.* 98.

[23]) Według Lipschitza, badał Lejeune-Dirichlet (1805—1819) ogólne prawo ciążenia w przestrzeni eliptycznéj. Te studya były opracowane przez Scheringa i ogłoszone w *Göttinger Nachrichten* 1870 i 1873.

[24]) *C. R.* 79.

[25]) *Math. Ann.* 19.

[26]) Hoppe ogłosił podobne badania, dotyczące krzywych przestrzeni czterowymiarowéj (*Archiv Grunerta* 64).

[27]) *Amer. Journ.* 4.

[28]) *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, 12.

[29]) *Berliner Berichte*, 1869.

[30]) *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu* 9. Przypisek do przekładu rozprawy Riemanna. Porówn. cytatę 13 poprzedniego rozdziału.

[31]) *Math. Ann.* 7; *Zeitschr. f. Math.* 20, 21, 24 i nowa monografia p. t, *Ueber Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie* (Plauen i V. 1888).

[32]) *Journ. f. Math.* 70 i 72.

[33]) *Journ. f. Math.* 70.

[34]) *Math. Ann* 24.

[35]) *Bull. Sciences math.* I, 4.

[36]) *Math. Ann.* 36.

[37]) *Collectanea mathem.*: *Annali di Matem.* II, 10.

[38]) *Göttinger Nachr.* 1871.

[39]) *Math. Ann.* 5.

[40]) *Journ f. Math.* 81; *C. R.* 82.

[41]) *Amer. Journ.* 4.

[42]) *Journ. f. Math.* 74 lub *Quart. Journ.* 12. Dodaję jeszcze, że Salmon i Cayley posługiwali się przestrzeniami wielowymiarowemi w swych badaniach nad teoryą charakterystyk (patrz rozdział IV), że Mehler (*Journ. f. Math.* 84)

uwagę czytelnika na rozwinięcie pewnych pojęć, niektórych twierdzeń i wzorów geometryi elementarnéj, zawarte w pracach Rudela [43]), Hoppe'go [44]), Schlegel'a [45]). Mehmke'go [46]), oraz na badania Stringhama [47]), Hoppe'go [48]) Schlegela [49]), Schefflera [50]), Rudela [51]), O. Biermanna [52]), Puchty [53]) i innych nad ciałami foremnemi w przestrzeni czterowymiarowéj, które to badania pozwoliły Schlegelowi wykonać konstrukcyą modeli rzutów tych ciał na przestrzeń naszę. [54]).

Prócz tego kierunku badań natury metrycznéj podjęto nowy kierunek nie mniéj płodny badań rzutowych rozmaitości o n wymiarach. Krótka wskazówka Cayley'a w roku 1846 [55]) o metodzie badania konfiguracyj punktów, prostych i płaszczyzn może być uważana za źródło tego kierunku. Tu zastosować można zdanie Bailly'ego [56]), że idee, tak jak ludzie, przechodzą wiek niemowlęctwa i pierwszy okres niemocy; nie będąc produkcyjnemi w chwili narodzin, dopiero z wiekiem i z czasem stają się płodnemi". Podobnie dla omawianych przez nas badań upłynęło z górą lat trzydzieści, zanim genialny pomysł geometry angielskiego rozwinął się

zastosował przestrzeń czterowymiarową do badań potrójnych układów powierzchni ortogonalnych, Lewis zaś do badań nad momentami bezwładności (*Quart. Journ.* 16). Wolstenholme znalazł, że liczba normalnych, jakie z punktu przestrzeni d-wymiarowéj można poprowadzić do powierzchni n-go rzędu wynosi

$$\frac{n}{n-2}\left\{(n-1)^d-1\right\}$$

(*Educational Times*, 10).

[43]) *Von den Elementen und Grundgebilden der synthetischen Geometrie* (Bamberg, 1887).

[44]) *Archiv Grunerta*, 64.

[45]) *Bull. Soc. math.* 10.

[46]) *Archiv Grunerta*, 70.

[47]) *Amer. Journ.* 3.

[48]) *Archiv Grunerta* 66, 67, 68, 69;

[49]) *Nova Acta der Leopold Carol. Academie* 44.

[50]) *Die polydimensionalen Grössen und die vollkommenen Primzahlen.*

[51]) *Von Körpern höherer Dimensionen* (Kaiserslautern, 1882).

[52]) *Wiener Ber.* 90.

[53]) *Wiener Ber.* 89 i 90.

[54]) Stanowią one jednę z najciekawszych seryj modeli wydawanych przez L. Brilla w Darmsztadzie.

[55]) *Journ. f. Math.* 31, str. 213. Czytając niewielką rozprawę Cayley'a, dochodzi się do przekonania, że on już w r. 1846 jasno widział korzyści, jakie osiągnie zwykła geometrya położenia przez uważanię przestrzeni wielowymiarowéj.

[56]) *Histoire de l'astronomie moderne* 2, str. 60.

w sposób należyty i wydał dzisiejszą geometryą syntetyczną przestrzeni n-wymiarowych.

Jako wstęp do niéj należy uważać ważną pracę Clifforda p. t. „*On the classification of loci*[57]), w któréj podjęte jest ogólne badanie krzywych w dowolnych przestrzeniach liniowych; zachodzą w niéj działania, które należy uważać za uogólnienie działań zwykłéj geometryi rzutowéj. Można wszelako powiedzieć, że ta nowa gałąź geometryi rozpoczyna się wraz z rozprawą Verone se'go: *Behandlung der projectiven Eigenschaften der Räume von* n *Dimensionen durch die Prinzipien des Schneidens und Projizierens* [58]). W pracy téj znakomity autor, idąc za Riemannem, tworzy przestrzeń n-wymiarową, rzucając z niej, z punktu zewnątrz niéj będącego, przestrzeń mającą o jeden wymiar mniéj, i przy pomocy tego sposobu tworzenia, dochodzi do uogólnienia większéj części twierdzeń zwykłéj geometryi położenia [59]). Płodność zasad, wyłożonych w téj ważnéj rozprawie, wykazują liczne prace, stanowiący ciąg jéj dalszy; wzbogacają one z dniem każdym dziedzinę, w któréj Włochy zajmują wybitne stanowisko. Z tych prac, ogłoszonych przez samego Verone se'go [60]), wspomnę o badaniach Segre'go nad teoryą utworów kwadratowych w przestrzeni n wymiarowéj i zastosowaniem téjże do geometryi prostéj [61]); nad odpo-

---

57) *Phil. Trans.* 1878 albo *Mathematical Papers* str. 305. Patrz téż *Mathematical Papers* str. 605—607.

58) *Math. Ann.* 19.

59) Pomiędzy badaniami, zawartemi w rozprawie Verone se'go zasługują na szczególną uwagę badania nad konfiguracyami; daléj wzory, które można uważać za uogólnienie wzorów Plückera i Cayley'a, wyrażających związek między osobliwościami zwyczajnemi krzywéj w przestrzeni n-wymiarowéj; tworzenie powierzchni, zawartych w takiéj przestrzeni, za pomocą układów rzutowych i zastosowanie tychże do badania niektórych powierzchni w przestrzeni naszéj. Nie mogę daléj przejść milczeniem badań nad przestrzeniami liniowemi, zawartemi w utworze kwadratowym o n wymiarach, przeprowadzonych przez Verone se'go dla uogólnienia pewnych twierdzeń Cayley'a (*Quart Journ.* 12) przy pomocy zastosowania uogólnionego rzutu stereograficznego Kleina (*Math. Ann.* 5), wreszcie pewnych ważnych rezultatów, odnoszących się do krzywych, a otrzymanych na innéj drodze przez Clifforda (*Phil. Trans.* 1878).

60) *Annali di Matem.* II, 11; *Lincei Mem.* 1883—1884; *Atti del' Istituto Veneto* V, 8. Ostatnia rozprawa jest poświęcona geometryi wielowymiarowéj i może być uważaną za rozwinięcie pomysłu Sylvestra wypowiedzianego w r. 1869 w mowie na stowarzyszeniu brytańskiém.

61) *Torino Mem.* II, 36.

wiedniościami kolinearnemi i wzajemnemi, [62]), nad pękami stożków 2-go stopnia [63]), nad powierzchniami prostoliniowemi [64]), nad powierzchniami 4-go rzędu ze stożkową podwójną[65]), nad teoryą układów stożkowych [66]), nad rozmaitościami, składającemi się z przestrzeni liniowych[67]), i rozmaitościami sześciennemi w przestrzeni czterowymiarowéj [68]); o badaniach Bertini'ego [69]) i Aschieri'ego [70]), traktujących o przedmiotach pokrewnych; daléj o pracach del Pezza [71]) i H. E. Moore'a [72]) nad powierzchniami w przestrzeni n-wymiarowéj, i Castelnuova nad układami promieni w przestrzeni czterowymiarowéj[73]). Wiele innych prac wypadałoby mi jeszcze wyliczyć, lecz

Io non posso ritrar di tutti appieno;
Perocchè si mi caccia il lungo tema
Cho molte volte al fatto il dir vien meno [74])

Wszakże żaden wzgląd nie mógłby mnie skłonić do przemilczenia o daleko wcześniejszych od prac Veronese'go badaniach Nöthera nad odpowiedniościami jednokreślnemi pomiędzy dwiema przestrzeniami n-wymiarowemi (1869, 1874 [75]); o wcześniejszych

---

[62]) *Lincei Mem.* 1883—1884; *Torino Mem.* II, 37; *Lincei Rend.* 1886.

[63]) *Torino Atti* 19.

[64]) *Torino Atti* 19, 20, 21, 22; *Math. Ann.* 27, 30; *Lincei Rend.* 1887; *Lombardo Rend.* 1888.

[65]) *Math. Ann.* 24.

[66]) *Torino Atti*, 20.

[67]) *Torino Atti* 21; *Lincei Rend.* 1887.

[68]) *Torino Atti* 22; *Torino Mem.* II, 39.

[69]) *Lombardo Rend.* 1886 i 1887; *Lincei Rend.* 1886; *Torino Atti* 22. Patrz tegoż autora ważny artykuł: *Sui sistemi lineari*, *Lombardo Rend.* 82.

[70]) *Lombardo Rend.* 1885, 1886; *Lincei Mem.* IV, 4.

[71]) *Napoli Rend.* 1885, 1886, 1887; *Annali di Matem.* II, 15; *Rend. del Circolo matem. di Palermo* 1 i 2; Porówn. téż Rodenberga *Math. Ann.* 26.

[72]) *Transc. of the Connecticut Academy*, 7; *Amer. Journ.* 10.

[73]) *Atti dell'Istituto Veneto* VI, 5, 6.

[74]) Nie mogę wszystkich wspomnieć, jak przystało,
Bo tak mnie nagli treść długa,
Że często dla niéj nie starczy mi słów.
(Dante, *Piekło.* Pieśń IV 145—147.

[75]) *Math. Ann.* 2, 8; patrz téż rozprawę S. Kantora, *Sur les transformations linéaires succesives dans le même espace à* n *dimensions* (*Bull. Soc. math.* 8).

również badaniach Halphena (1875) nad przecięciami rozmaitości, zawartych w dowolnéj przestrzeni liniowéj [76]); o badaniach d'Ovidia nad metryką takiéj przestrzeni (1876)[77]), wreszcie o najnowszych badaniach Schuberta nad geometryą liczącą w przestrzeni wielowymiarowéj [78]).

Zakończenie.

Wypada mi zakończyć przegląd, jaki zamierzyłem przedstawić. Musiałem w nim pominąć wiele badań interesujących, ponieważ nie podchodziły pod żadną z kategoryj, na które podzieliłem omawiane prace. Nie mogłem przeto mówić o teoryi współrzędnych rzutowych, otrzymanych przez Chasles'a[1]) zapomocą przekształceń rzutowych zwyczajnych współrzędnych Descartes'a, a następnie bezpośrednio wprowadzonych przez Staudta[2]) oraz przez Fiedlera[3]). Nie podałem historyi metody ozna-

[76]) *Bull. Soc. math.* Pomiędzy rezultatami, zawartemi w téj pracy, wymieniamy następujące: „Jeżeli w przestrzeni r—1 wymiarowéj zwrócimy uwagę na dwie rozmaitości algebraiczne stopnia μ i ν, odpowiednio o m i n wymiarach, to przecięcie ich jest rozmaitością $n+m-(r-1)$-wymiarową stopnia $\mu\,\nu$, jeżeli $m+n \geqq \nu - 1$, gdy obie rozmaitości nie mają rozmaitości wspólnéj o $m+n-r+2$ lub większéj liczbie wymiarów"; Porówn. artykuł Nöthera w 11-ym tomie *Math. Ann.*

[77]) *Lincei Mem.* 1876—1877; porówn. też Jordan (*Bull. soc. math.* 3). Uczynię tu uwagę, która nie mogła znaleźć miejsca w tekscie: Wielu twierdziło, że w przestrzeni o krzywiznie stałéj dodatniéj linie geodezyjne, jeżeli się spotykają, mają dwa punkty wspólne; to nie jest prawdą, co wykazał najprzód Klein (*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* 9, str. 313), następnie Newcomb (*Journ. f. Math.*) 81 i Frankland (*Proc. math. Soc.* 8). O tym samym przedmiocie patrz rozprawę Killinga (*Journ. f. Math.* 86 i 89).

[78]) *Math Ann.* 26; *Acta math.* 8. *Mittheilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg.* Rozprawę Veronese'go wyprzedziły jeszcze badania Spottiswoode'a (1825—1883) nad przedstawieniem figur geometryi wielowymiarowéj za pomocą figur wzajemnych geometryi zwykłéj (*C. R.* 8

[1]) *Mèmoire de Géométrie sur deux principes généraux de la science.*

[2]) *Beiträge zur Geometrie der Lage*, § 29.

[3]) *Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft zu Zürich.*, albo *Die darstellende Geometrie.*

czenia symbolicznego, ponieważ stanowi ona raczéj środek niż cel dla geometrów[4]). Pominąłem teoryą przekształceń Liego[5]) i niezmienników różniczkowych Halphena[6]), ponieważ stanowią one granicę pomiędzy geometryą a teoryą równań różniczkowych. Nie mówiłem o gałęzi wiedzy zwanéj *Analysis situs*, stworzonéj przez Riemanna[7]) i uprawianéj przez jego uczniów w celu rozwiązywawania zadań z teoryi funkcyj. Pominąłem piękne wykłady Battaglini'ego[8]), Clifforda[9]) i Balla[10]) o siłach i ruchach; Chasles'a[11]), Aronholda[12]), Mannheima[13]), Schönemanna[14]), Lindemanna[15]), Halphena[16]), Burmestra[17]), Schönfliessa[18]) o geometryi cynematycznéj, oraz Reye'go[19]) o momentach bezwładności, ponieważ należą one raczéj do mechaniki niż do geometryi. Toż samo powiedzieć można o inte-

---

[4]) Porówn. interesującą rozprawę Fiedlera *Geometrie und Geomechanik*, wydaną w przytoczoném piśmie *Vierteljahrsschrift* i w przekładzie francuskim (*Journ. Liouv.* III, 4).

[5]) *Math. Ann.* 8.

[6]) *Sur les invariants différentiels*, Paryż, 1878. *Journ. Éc. polyt.* Cahier 47; *Acta math.* III i t. d. Patrz téż Lie *Math. Ann.* 24.

[7]) *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen Grösse* (Getynga, 1851) *Theorie der Abelschen Functionen Journ. f. Math.* 54.

[8]) *Napoli Atti* 1869; *Napoli Rend.* 1869, 1870, 1871; *Giorn. di Matem.* 10, 11.

[9]) *Proc. math. Soc.* 4. lub *Mathematical Papers* 181, 385, 387.

[10]) *The theory of screws*, Dublin 1876; Porówn. *Math. Ann.* 9.

[11]) *Bull. de Férussac* 14; *C. R.* 16, 80, 82 (porówn. de Jonquières, *Mélanges de Géométrie pure* i Brisse'a *Journ. Liouv.* 15, 20); *Bull. Soc. math.* 6.

[12]) *Verhandlungen d. Vereins z. Beförderung des Gewerbefleisses in Pr.* 1872.

[13]) *Journ. Éc. polyt.* 43; *Mém. prés.* 25; *C. R.* 70, 72, 76, 84, 100; *Journ. Liouv.* III, 1; *Bull. Soc. math.* 6.

[14]) *Journ. f. Math.* 100.

[15]) *Math. Ann.* 7.

[16]) *Bull. Soc. math.* 1, 2, 8. *Nouv. Ann.* III, 1.

[17]) *Zeitschr. f. Math. Phys.* 19, 20; *Math. Ann.* 14, 16.

[18]) *Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung*, Lipsk, 1887. Wymienić tu należy prace: J. N. Frankego (*Pamiętnik Akad Umiejętności w Krakowie* 1, 3, 12), i E. Habicha (*Études cinematiques*, Paryż, 1879, *Études géométriques et cinématiques*, Lima, 1880.)

[19]) Korzyść, jaką może mieć geometrya, przyjmując pewne pojęcia, uważane dziś za należące do dziedziny mechaniki, wykazują: *Exposé géométrique du*

resujących doświadczeniach Plateau[20]) (1801 — 1883) nad powierzchniami minimalnemi, należących do fizyki; o pięknych badaniach Möbiusa[21]), Bravaisa[22]), Cayley'a[23]), Jordana[24]), Hessa[25]) nad wielościanami, stanowiących przejście od geometryi do mineralogii, i o najnowszych pracach o prawdopodobieństwie geometryczném Croftona[26]), Czubera[27]) i Cèsaro[28]), które policzyłbym do zastosowań geometryi. Nie mówiłem o metodzie ekwipolencyj Bellavitisa[29]), ani o teoryi kwaternionów Hamiltona[30])—ponieważ obie teorye te nie wykazały dotąd takiéj użyteczności, by je należało uważać za narzędzie badania konieczne dla geometrów.

Z żalem przemilczałem o teoryi układów kul, uprawianéj z wielkiem powodzeniem przez Lie'go i Reye'go; nie uczyniłem też wzmianki o teoryi konfiguracyj (Reye, Kantor, Jung,

---

calcul différentiell et intégral (Paryż 1861) Lamarle'a (1806—1875), partye poświęcone geometryi cynematycznéj w dziele Mannheima *Cours de géometrie descriptive* (Paryż, 1880) i najświeższa książka mojego przyjaciela Peano, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (Turyn, 1887).

[20]) *Statique experimentale et théorique des liquides soumis aux seules formes moleculaires*, Gand, 1873.

[21]) *Gesammelte Werke*, tom 2-gi. Porówn. Reinhardt, *Ber der k. sächs. Ges. d. Wissenschaften* 1885.

[22]) *Journ. Liouv.* 14.

[23]) *Mem. of Manchester* III, 1.

[24]) *Journ. f. Math.* 66. Porówn. téż Bertini, *Annali delle scuole normale d Pisa* 1868—1869.

[25]) *Einleitung in die Lehre von Kugeltheilung mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendung auf die Theorie der gleichflächigen und gleicheckigen Polyeder.* Lipsk, 1883.

[26]) *Phil. Trans.* 158; *Proc. math. Soc.* 8 i t. d. Porówn. Williamson *Treatise of the integral calculus.* Londyn, 1880.

[27]) *Geometrische Wahrscheinlichkeit und Mittelwerthe*, Lipsk, 1884; *Wiener Berichte*, 90.

[28]) *Mathesis* 2, 3, 4; *Giorn. di Matem.*, 22, 24; *Rend. del Circolo matem. di Palermo* 1 i t. d.

[29]) *Annali delle scienze dell Regno Lombardo - Veneto* 7, 8. *Mem. della Società italiana delle scienze* 25, część II; *Mem. dell'Ist. Veneto* 19. Patrz téż Laisant *Théorie et applications des équipollences*, Paryż, 1887.

[30]) *Lectures on quaternions*, Dublin 1853; *Elements of quaternions*, Londyn 1866. W polskim języku K. Hertza *Pierwsze zasady kwaternionów Hamiltona.* Warszawa, 1887. Co do stosunku teoryi kwaternionów do teoryi ekwipolencyj patrz Bellavitis *Atti dell'Ist. Veneto* 3 i *Mem. della soc. ital. delle scienze* II 13. Porówna-

Martinetti, Schönfliess)[31]) ponieważ teorya ta znajduje się dopiero w stadyum powstawania; ani o rozwoju nauki o trójkątach (należącéj raczéj do elementów geometryi), spowodowanym pracami Brocarda[32]). Krótko wspomnę jeszcze o dwóch szeregach badań nad figurami największemi i najmniejszemi, z których pierwsze (Painvin, P. Serret, Lebesgue, Borchardt, Kronecker, Mertens, traktują o zadaniu Lagrange'a znalezienia czworościanu o największéj objętości, gdy dane są wielkości powierzchni ścian jego oraz o rozwinięciu i modyfikacyach tego zadania[33]), drugie zaś (Lindelöf, Berner, Edler, Sturm, Schwarz, Lange, Certo) wiążą się ze sławném twierdzeniem Steinera[34]).

Nie wolno mi wszakże przemilczeć o tém, że naszemu wiekowi przypadło w udziale ostateczne rozwiązanie starego zagadnienia o kwadraturze koła. W zeszłym wieku dowiódł Lambert[35]) że liczba π jest niewymierną; pozostało jednak do okazania, że nie może być pierwiastkiem równania algebraicznego o współczynnikach wymiernych, gdyż dopiero wtedy jest rzeczą udowodnioną, że kwadratura koła nie daje się uskutecznić za pomocą skończonéj liczby konstrukcyj, do których używamy tylko linijki i cyrkla. Dowód ten dał Lindemann[36]) opierając się na przygotowawczych pracach Hermite'a, odnoszących się do funkcyi wykładniczéj.

Mimo wyliczonych i wielu innych jeszcze braków skreślonego przezemnie obrazu dzisiejszego stanu geometryi, sądzę, że czy-

---

nie między metodą kwaternionów a nauką Grassmannowską *Ausdehnungslehre* przeprowadził sam Grassmann w *Math. Ann.* 12. Inne szczegóły bibliograficzne w dziełku Laisanta *Introduction à la méthode des quaternions* (Paryż, 1881)

[31]) *Acta mathem* 1; *Wiener Ber.* 84; *Annali di Matem.* II, 12; *Lombardo Ren* II, 18; *Annali di Matem.* II, 14 i 15; *Math. Ann.* 31.

[32]) Patrz dodatki do *Proc. math. Soc.* począwszy od tomu 14-go.

[33]) *Nouv. Ann.* II, 1, 2; *Journ. Liouv.* II, 7; *Berliner Abh.* 1860, 1866; *Berliner Ber.* 1872 albo Borchardta *Gesammelte Werke* str. 179, 201, 203; *Journ. f. Math.* 84.

[34]) Patrz *Acta Societatis scientiarum Fennicae* 1866; *Bull. de l'Académie de St. Pétérsbourg* 14; *Math. Ann.* 2; *Nouv. Ann.* II, 10; *Zeitschr f. Math.* 11, *Göttinger Nachr.* 1882 lub *Bull. scienc. math.* II, 7; *Journ. f. Math.* 96, 97; *Göttinger Nachr.* 1884; *Archiv Grunerta* II, 2; *Giorn. di Mat.* 26.

[35]) *Mémoires de l'Acad. de Berlin* 1761; porówn. Legendre'a: *Élements de Géometrie*, Nota IV wydań dawniejszych.

[36]) *Berliner Ber*, 1882; *Math. Ann.* 20; dowód uproszczony Weierstrassa, *Berliner Ber.* 1885, porówn. též Rouché *Nouv. Ann.* III, 2.

telnik, rzuciwszy nań okiem, przejmie się głębokim podziwem nietylko dla potężnego rozwoju matematyki w ostatnich pięćdziesięciu latach, ale i dla nowéj, piękniejszéj i bardziéj pociągającéj postaci, jaką ona coraz bardziej przyjmuje.

Figury geometryczne, które przez długie czasy wydawały się stałemi, nieruchomemi i nieożywionemi, drgnęły życiem pod wpływém teoryi przekształceń geometrycznych, dzięki któréj poruszają się, zmieniają jedne w drugie, odsłaniają związki wzajemne i wchodzą w nieznane dotąd pokrewieństwa. Daléj, przed niedawnym czasem sądzono, że my jako istoty trójwymiarowe, jesteśmy skazani na to, by badać rozmaitości o liczbie wymiarów nie wyższéj nad trzy; obecnie zaś mamy prawo i nawet obowiązek uwolnienia się od tego niebezpiecznego przesądu, a bogactwo prac w téj dziedzinie, poucza każdego, kto nie odwraca wzroku od nowego słońca, o ważności tego postępu.

Nakoniec powiedzieć można, że walka pomiędzy geometryą a analizą, powstała z końcem zeszłego stulecia i trwająca w początkach bieżącego, jest ukończoną; ani jedna ani druga gałąź nie odniosła zwycięztwa, tylko każda z nich pokazała nawet najbardziéj nie wierzącym, że we wszelkiéj walce mogła by być zwycięską. Obok *Mechaniki analitycznéj* Lagrange'a, w któréj znakomity autor z zadowoleniem wyrzekł, że napisał traktat mechaniki, uniknąwszy zupełnie figur, postawić dziś można traktat mechaniki z napisem *Geometrica geometrice*, wykazujący, że stuletnim usługom, jakie świadczyła algebra geometryi, przeciwstawić można niezliczone i nieocenione pożytki, jakie algebra ciągnie z geometryi. Blizkim jest już czas, w którym w miejsce analitycznéj lub pseudosyntetycznéj teoryi krzywych i powierzchni postawić będzie można czysto syntetyczną teoryą tych utworów, która się buduje obecnie z materyałów przekazanych nam przez Staudta [37]).

I tego okresu pokoju albo raczej szlachetnego współzawodnictwa analizy i geometryi wszyscyśmy powinni sobie winszować, albowiem każdy postęp jednéj z nich powoduje odpowiedni postęp drugiéj. Zgadza się to z dzisiejszém stanowiskiem całéj wiedzy, gdy jak powiada Spencer, różne nauki są sztukami pomocniczemi jedne dla drugich.

To stanowisko dzisiejszéj matematyki wkłada na każdego, kto pragnie w niéj z powodzeniem pracować, poważny obowiązek nie zaniedbywania żadnéj z dwóch gałęzi matematyki dla drugiéj, lecz przeciwnie obowiązek dążenia do wyrobienia się w umiejętności liczb zarówno jak i w nauce rozciągłości [37]).

By módz ze spokojem stawić czoło zwiększonym obecnie trudnościom, należy mieć na pamięci; „że analiza i synteza są w gruncie rzeczy zawsze połączone w pracach naszych i stanowią razem najdoskonalsze narzędzie umysłu ludzkiego. Umysł nasz nie postępowałby bez pomocy znaków i obrazów; a gdy po raz pierwszy usiłuje wniknąć w trudne pytania, nie ma do zbytku tych dwóch środków i téj siły szczególnéj, która się wytwarza dopiero z ich współdziałania“ [38]).

Świadomi przeto ograniczoności sił naszych, obierzmy sobie niewielkie pole, na którem ćwiczyć będziemy działalność naszę, nie zapominając wszakże, że dla zdobycia owoców, jakie dać może, mamy prawo i obowiązek wypróbowania wszelkich narzędzi, które duch ludzki nagromadził w ciągu wieków nieustannéj pracy. Narzędzia te są do rozporządzenia każdego, kto ma mądrość, by je uchwycić, i zręczność, by je stosować.

---

[37]) Jedyne ze znanych mi czysto syntetycznych badań nad krzywemi i powierzchniami drugiego i wyższego rzędu są: Reye'go (*Geometrie der Lage*) o krzywych płaskich sześciennych, niektóre Thiemego (*Zeitschr. f. Math.* 21, 23; *Math. Ann.* 20, 28), Milinowskiego (*Zeitschr. f. Math.* 21, 23; *Journ. f. Math.* 89, 97) i Schura (*Zeitschr. f. Math.* 24). Można dodać do nich dwie następujące prace, nagrodzone w roku 1868 przez Akademią berlińską: H. J. S. Smitha *Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques* (*Annali di Mat.* II, 3) i Kortuma: *Ueber geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades* (Bonn, 1869). Przed kilkoma miesiącami wyszła rozprawa E. Köttera, również nagrodzona w r. 1887 przez Akademią berlińską p. t.: *Grundzüge einer rein-geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Kurven.*

[38]) Potrzebę jednoczesnego używania geometryi i analizy w pytaniach stosowanéj matematyki, wyraźnie wypowiada Lamé: „Quand on médite sur l'histoire des mathématiques appliqueés, on est effectivement conduit à attribuer leurs principales découvertes, leurs progrès les plus décisifs à l'association de l'analyse et de la géométrie. Et les travaux que produit l'emploi de chacun de ces instruments, apparaissent alors comme des préparations, des perfectionnements, en attendant l'époque qui sera fécondée par leur reunion“. *Leçons sur les coordonnées curvilignes* 1859. Str. XIII i XIV.

[99]) Poinsot, *C. R.* 6 (1838) str. 809.

Skrócenia nazw czasopism, najczęściéj cytowanych w téj książce.

Acta Math. Acta mathematica.

Amer. Journ. American Journal of Mathematics pure and applied.

Ann. Éc. norm. Annales scientifiques de l'École normale supérieure.

Annali di Matem. Annali di Matematica pura ed applicata.

Berliner Abh. Mathematisch - physikalische Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Berliner Ber. Monatsberichte, od 1862 Sitzungsberichte, albo téż Mathematisch-naturwissenschaftliche Mittheilungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Bologna Mem. Memorie
Bologna Rend. Rendiconti
} dell' Accademia di Scienze dell'Istituto di Bologna.

Bull Scienc. math. Bulletin des sciences mathématiques (do roku 1884: et astronomiques.)

Bull. Soc. math. Bulletin de la societé mathématique de France.

Cambridge Journ. Cambridge and Dublin mathematical Journal.

Cambridge Proc. Proceedings
Cambridge Trans. Transactions
} of the Philosophical Society of Cambridge.

C. R. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences (de Paris).

Ann. Gergonne'a. Annales de Mathématiques.

Giorn. di Matem. Giornale di Matematiche.

Göttinger Abh. Abhandlungen
Göttinger Nachr. Nachrichten von
} der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Archiv Grunerta. Archiv der Mathematik und Physik.

Journ. Éc. polyt. Journal de l'École polytechnique.

Journ. f Math. Journ. für reine und angewandte Mathematik,

Irish Proc. Proceedings
Irish Trans. Transactions
} of the Irish Academy.

Leipziger Ber. Berichte über die Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.

Lincei Atti Atti
Lincei Mem. Memorie
Lincei Rend. Rendinconti
Lincei Trans. Transunti
} dell' Accademia dei Lincei

Journ. Liouv. Journal de Mathématiques pures et appliquées.
Lombardo Rend. Rendinconti dell' Istituto Lombardo di scienze e lettere
Math. Ann. Mathematische Annalen.
Mém. prés. Mémoires présentés par divers savans á l'Académie des (de Paris).
Münchener Abh. Abhandlungen
Münchener Ber. Berichte
} der Akadamie der Wissenschaften z... chen.

Napoli Rend. Rendinconti dell'Accademia delle scienze fisiche e matem... Napoli.
Nouv. Ann. Nouveiles Annales de Mathématiques.
Phil. Mag. London, Edinburgh and Dublin Ppilosophical Magazine.
Phil. Trans Philosophical Transactions
Proc. Roy. Soc. Proceedings
} of the Royal Society of Londo...

Prager Abh. Abhandlungen
Prager Ber. Sitzungsberichte
} der böhmischen Gesellschaft der Wissen...

Proc. math. Soc. Proceedings of the London mathematical Society.
Quart. Journ. Quarterly Journal of pure and applied Mathematics.
Torino Atti. Atti
Torino Mém. Memorie
} dell' Accademia delle scienze di Torino.

Wiener Ber. Sitzungsberiehte der mathematisch-naturwissenschaftlich... se der Akademie der Wissenschaften zu Wien. Zweite Abt...
Zeitschr. f. Math. Zeitschrift für Mathematik und Physik.

Cyfry arabskie odnoszą się do tomu (części, rocznika) w *Journ.* ... do zeszytu, rzymskie do seryj cytowanych wydawnictw.
