HER FÜR DEN REALISTISCHEN
N HÖHEREN SCHULEN
N A. HÖFLER UND F. POSKE
BAND I

DIDAKTIK
DES
MATHEMATISCHEN UNTERRICHTS

VON

ALOIS HÖFLER

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

DIDAKTISCHE HANDBÜCHER
FÜR DEN REALISTISCHEN UNTERRICHT AN HÖHEREN SCHULEN

Herausgegeben von

DR. A. HÖFLER
o. ö. Profe[illegible]

DR. F. POSKE
[illegible]kanischen Gymnasium
[illegible] Berlin

Für [illegible]chulen hat bisher keine feste[illegible]anden, aber doch sind die pr[illegible]3 es möglich sein wird, konk[illegible], die als Grundlage weite[illegible]daktischen Handbücher" sc[illegible]sen des Lehrers entgegenkc[illegible]ße der Aufgaben, die durch [illegible]rch ihn zu lösen sind, der s[illegible]st, die mit diesen Aufgaben [illegible]laktischen Handbücher" d[illegible] der wachsenden Zahl realis[illegible]und vielmehr die Einheit di[illegible] und innige Verknüpfunge[illegible]

I. Band [illegible]

VII. „ [illegible]g i. Pr.

II. Band. **Himmelskunde und astronomische Geographie** von A. Höfler.
III. „ **Physische Geographie.**
IV. „ **Physik** von F. Poske in Berlin.
V. „ **Chemie** von O. Ohmann in Pankow.
VI. „ **Mineralogie und Geologie** von R. Watzel in Prag.
VIII. „ **Zoologie und menschliche Somatologie** von C. Matzdorff in Pankow.
IX. „ **Philosophische Propädeutik** von A. Höfler in Wien.
X. „ **Das Verhältnis der realistischen Unterrichtsfächer zu den sogenannten humanistischen** von A. Höfler in Wien.

Ausführlicher Prospekt umsonst und postfrei vom Verlag

Höfler, Didaktik.

DIDAKTISCHE HANDBÜCHER
FÜR DEN
REALISTISCHEN UNTERRICHT
AN HÖHEREN SCHULEN

IN ZEHN BÄNDEN

UNTER MITWIRKUNG VON PROF. B. LANDSBERG-KÖNIGSBERG I. PR.,
PROF. DR. C. MATZDORFF-BERLIN, PROF. O. OHMANN-BERLIN,
PROF. R. WATZEL-PRAG

HERAUSGEGEBEN VON

DR. ALOIS HÖFLER UND DR. FRIEDR. POSKE
O. Ö. PROF. A. D. UNIVERSITÄT WIEN — PROF. AM ASKAN. GYMNASIUM IN BERLIN

Ein einzelner hilft nicht, sondern wer sich
mit vielen zur rechten Stunde vereinigt.
Goethe, Das Märchen.

ERSTER BAND: MATHEMATIK

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910

DIDAKTIK
DES
MATHEMATISCHEN UNTERRICHTS

VON

DR. ALOIS HÖFLER
O. Ö. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT WIEN

MIT ZWEI TAFELN UND 147 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910

Zur Einführung der Didaktischen Handbücher für den realistischen Unterricht an höheren Schulen.

Unser gesamtes höheres Schulwesen empfängt seine Gliederung von der Unterscheidung realistischer und humanistischer Unterrichtsfächer. Schon die Schultypen selbst leiten ihre Namen — Humanistisches Gymnasium, Realgymnasium, Realschule bzw. Oberrealschule — von jener Unterscheidung her. Und innerhalb jeder dieser Schulen setzt sich diese Gliederung ins einzelne fort, indem immer und überall den sprachlich-geschichtlichen Fächern die mathematisch-naturwissenschaftlichen als das jüngere moderne Gegenstück bald untergeordnet, bald an die Seite gestellt zu werden pflegen. Wenn aber auch diese beiden Seiten unseres Bildungswesens erst zusammengenommen das harmonische Ganze ausmachen, für das uns der Blick nie verloren gehen darf, so bilden doch auch schon die realistischen Fächer für sich, ebenso durch die innere Verwandtschaft ihres Stoffes wie durch das Gemeinsame ihrer spezifischen Bildungswerte, eine natürliche didaktische Einheit. Diese innere Zusammengehörigkeit der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer nach Gegenstand und Methode rechtfertigt von selbst die Zusammenfassung von

Zehn Bänden Didaktischer Handbücher
für den realistischen Unterricht an höheren Schulen

zu einem Gesamtunternehmen. Ein solches wird zum Bedürfnis im gegenwärtigen Zeitpunkt, da die Gestaltung des Unterrichtsbetriebes in jedem einzelnen dieser Fächer, und mehr noch das Erringen der dem realistischen Unterricht im Ganzen des Schulorganismus gebührenden Stellung, den Gegenstand fortgesetzter Erörterungen und Bemühungen bildet.

Während die jetzt richtungweisenden Anregungen solcher Art niedergelegt worden sind in dem „Gesamtbericht der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte“, wollen unsere „Didaktischen Handbücher“ möglichst unmittelbar zur Verwirklichung der Reformgedanken in der Praxis des Unterrichtes selbst beitragen, und zwar nach folgenden Grundsätzen:

1. Die Aufgabe des Unternehmens soll in erster Linie nicht noch einmal die Formulierung von allgemein gehaltenen Reformforderungen u. dgl. sein, sondern die möglichst konkrete, anschauliche Darstellung von beispielgebenden Lehrgängen und Unterrichtsweisen in den einzelnen realistischen Fächern.

2. Daher sollen auch die allgemein methodischen Erörterungen auf das Knappste beschränkt bleiben und vielmehr Lehrgang und Methode stets unmittelbar am einzelnen und konkreten Stoff zur Darlegung kommen. Der Lehrer wird bei seinem Unterricht das Handbuch als eine Art Nachschlagebuch benutzen können; doch werden die Handbücher nicht etwa zu sämtlichen Einzelheiten des Lehrstoffs einen fortlaufenden Kommentar mit methodischen Anweisungen enthalten, sondern überall nur recht typische Fälle nach Stoff und Lehrform hervorheben. Es werden ferner in solchen Gebieten, die besondere Schwierigkeiten enthalten, oder deren Aufnahme in den Lehrplan noch strittig ist, wie z. B. die Differentialrechnung, Proben eines jedenfalls nicht zu schwierigen Vorgehens entworfen werden.

3. Aus den so vorgezeichneten und beschrittenen Lehrgängen sollen sich erst nachmals die durch den Stoff einerseits, durch die jeweilige Altersstufe des Schülers andererseits gebotenen Lehrziele in allgemeiner Formulierung ergeben. Dabei wird unser Unternehmen nicht irgendeinen der gegenwärtig bestehenden Lehrpläne, ohne Rücksicht darauf, ob er in sich didaktisch gerechtfertigt ist oder nicht, wie etwas für immer Feststehendes hinnehmen und nach ihm schlecht und recht das didaktische Vorgehen einrichten; denn jedes Lehrfach sieht sich gerade jetzt vor die besonders dankbare Aufgabe gestellt, für das Ringen nach neuen Lehrplänen deutlich erkennbare Richtungslinien aus einer gesunden didaktischen Praxis selbst sich entwickeln zu lassen. In diesen Tagen, da einige realistische Gegenstände an einzelnen (die Biologie sogar an allen) Schulgattungen überhaupt erst noch um die ihnen gebührende Vertretung kämpfen müssen, können natürlich unsere Didaktischen Handbücher noch nicht mit idealen äußeren Existenzbedingungen rechnen. Viel bleibt noch zu wünschen und zu tun für die einzelnen Zweige des realistischen Unterrichtes und ihr gegenseitiges Verhältnis, mehr noch für ihr Verhältnis zu den sogenannten humanistischen Lehrfächern und hiermit zum Ganzen unserer Lehrpläne. Daß den realistischen Lehrfächern auch humanistische Bildungswerte zukommen, ist die wiederholt bekundete Überzeugung der Herausgeber und Mitarbeiter dieser Sammlung, und sie findet in der Angliederung des IX. und X. Bandes noch ihren besonderen Ausdruck. — Vor allem aber wird uns keine Unvollkommenheit des Hergebrachten und keine in der Vielheit und Verschiedenartigkeit der Einzelfächer gelegene sachliche Schwierigkeit das von dem Verfasser ebenfalls wiederholt verkündete Ziel

aus den Augen verlieren lassen, daß aller realistische Unterricht für sich eine große didaktische Einheit bilden kann und soll.

Hiermit verträgt sich ganz wohl die Überzeugung, daß ein gedeihlicher Unterricht nur bei weitgehender Bewegungsfreiheit jedes einzelnen Lehrers denkbar sei; und so haben die Herausgeber der Sammlung auch den Verfassern der einzelnen Teile volle Bewegungsfreiheit gewährt, ja sie zu entschiedener Hervorkehrung ihrer ganz individuellen Lehrerpersönlichkeit auch in der Darstellung der Lehrgänge ausdrücklich aufgefordert. Es wird daher zwar jeder Band Lehrproben und Lehrgänge bringen, die aber keineswegs dazu bestimmt sind, kurzweg nachgeahmt zu werden, sondern jeden Fachgenossen nur zu Erwägungen darüber anregen mögen, was von dem Dargebotenen sich seinem eigenen Lehrverfahren zwanglos einfügen läßt, und was ihn dagegen zum Aufsuchen neuer Wege anreizt.

Wenn auch in diesen Tagen allgemeiner Reformlust das Beschreiten der möglichst rasch nach vorwärts führenden Wege nicht nur ein Recht, sondern selbstverständliche Pflicht jeder didaktischen Arbeit im einzelnen wie im großen und größten ist, so werden es unsere Handbücher doch nicht minder für ihre Pflicht halten, da, wo eine Neuerung auch noch so weit vom Hergebrachten sich entfernt, die Kontinuität der Entwicklung des Unterrichtsbetriebes möglichst zu wahren, indem die Mängel des Alten und die Vorzüge des Neuen sachlich, wenn auch möglichst kurz gegeneinander abgewogen werden.

Die Didaktischen Handbücher umfassen folgende zehn Bände:

I. Mathematik (A. Höfler),
II. Himmelskunde und astronomische Geographie (A. Höfler),
III. Physische Geographie,
IV. Physik (F. Poske),
V. Chemie (O. Ohmann, Berlin),
VI. Mineralogie und Geologie (R. Watzel, Prag),
VII. Botanik (B. Landsberg, Königsberg i. Pr.),
VIII. Zoologie und menschliche Somatologie (C. Matzdorff, Berlin),
IX. Philosophische Propädeutik (A. Höfler),
X. Das Verhältnis der realistischen Unterrichtsfächer zu den sog. humanistischen (A. Höfler).

Die Verlagsbuchhandlung
B. G. Teubner.

Die Herausgeber
A. Höfler. F. Poske.

Oktober 1909.

DIDAKTIK
DES
MATHEMATISCHEN UNTERRICHTS

VON

A. HÖFLER

A. GUTZMER

PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT HALLE
VORSITZENDEM DER UNTERRICHTSKOMMISSION DER GESELLSCHAFT
DEUTSCHER NATURFORSCHER UND ÄRZTE
VORSITZENDEM DES DEUTSCHEN AUSSCHUSSES FÜR DEN
MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHT

GEWIDMET VOM VERFASSER

Vorwort.

Der Verlag B. G. Teubner hat mich zu einer „Didaktik des mathematischen Unterrichts an höheren Schulen“ im Frühjahre 1905 eingeladen – wenige Monate, nachdem meine „Physik“ (Vieweg 1904) erschienen war, deren „Zusätze aus der angewandten Mathematik“ (S. 697 bis 773) und „230 Leitaufgaben“ eine Art Glaubensbekenntnis darstellen, wie ich mir auf Grund einer siebenundzwanzigjährigen Erfahrung im Gymnasiallehramte die Ziele und Wege einer wünschenswerten Verbindung zwischen mathematischem und naturwissenschaftlichem Unterricht dachte und denke.

Ein halbes Jahr früher (Spätsommer 1904) hatte mir Felix Klein während seiner Vorbereitungen für die Breslauer Naturforscherversammlung Einblick in das Heft „Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an höheren Schulen“ gegeben. Dort (S. 26) sagt er zu den Lehrern an höheren Schulen: „Die nächste Aufgabe wird nun sein, für die verschiedenen Schularten, die humanistischen Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen, Lehrgänge, die unsere Ideen verwirklichen, im einzelnen auszuarbeiten. Hier wende ich mich an Sie mit der Bitte um Hilfe. Denn hier kann der Universitätslehrer von sich aus keinen Schritt mehr tun, er ist durchaus auf die Unterstützung von seiten praktischer Schulmänner angewiesen.“ Der hierin ausgesprochenen vorsichtigen Zurückhaltung konnte ich sogleich erwidern, daß ich das von Klein Verlangte nicht nur für durchaus möglich halte, sondern daß ich es während jener langen Lehrtätigkeit an meinen Schülern und mir vielfach verwirklicht hatte.

So war mir denn die Einladung des Verlegers (wiewohl sie mich über der Neubearbeitung meiner „Psychologie“ und meiner „Logik“, letztere um einen Band „Erkenntnistheorie“ zu erweitern, überrascht hatte) ein willkommener Anlaß, einiges von dem, was die Erfahrung jener langen Jahre gezeitigt hatte, und was jetzt „zeitgemäß“ geworden war, an jüngere Fachgenossen weiterzugeben.

Es sei sogleich in diesem Vorwort (die ja das Persönliche enthalten darf und soll), gestattet, die reichsdeutschen Leser des Buches darüber zu beruhigen, ob ihnen ein Österreicher überhaupt Brauchbares für den Betrieb des realistischen Unterrichts werde bieten können. Es ist aber gerade von reichsdeutscher Seite so oft und warm anerkannt worden, daß das in Österreich vor mehr als einem Halbjahrhundert (1849) verkündete „harmonische Verhältnis zwischen humanistischem und realistischem Unterricht“ von allen Ländern Europas am frühesten in meinem Vaterlande, namentlich den Naturwissenschaften in den Gymnasien, würdige äußere Lebensbedingungen geschaffen hat. Vielleicht sind deshalb wir jetzt berufen, nun auch die von KLEIN gestreuten Samenkörner so früh als möglich zu wirklichem Keimen, Blühen und Früchtetragen zu bringen. Oder sollte vielmehr umgekehrt ein kräftiges Wachsen der reichsdeutschen Schulreform, die seit einem Vierteljahrhundert nicht mehr zur Ruhe gekommen ist, auch die Erstarrung[1]) brechen helfen, die trotz jenen hoffnungsvollen Anfängen vor mehr als einem Halbjahrhundert nun doch wieder seit einem Vierteljahrhundert das österreichische Schulwesen für den Tieferblickenden gefangen hielt? . . Doch zu solchen Wünschen und Hoffnungen mag es an der Spitze des ersten Bandes dieser Sammlung noch zu früh sein. Es wäre viel, wenn der künftige X. (Schluß-)Band über „das Verhältnis des realistischen Unterrichtes zum humanistischen“ nicht nur Zukunftsmusik zu singen hätte.

So mag denn vor allem der vorliegende I. Band als Stückchen einer umfassenden Lebensarbeit freundlich aufgenommen sein. Darf doch am ehesten eine „Didaktik“, die selbst immer nur als Stück einer allgemeinen „Bildungslehre“ entscheidenden Wert hat, es sich und ihren Lesern von vornherein vorhalten, daß selbst die strengste aller Wissenschaften, die Mathematik, wenigstens wo sie als Fackel an die wachsende Jugend weiter gegeben werden soll, die Beziehung des Wahren zum Schönen und Guten nicht zu verleugnen braucht. Die Stimmung des Augenblickes, in dem ich mich zur Annahme jener Einladung entschloß, und aus ihr die Erklärung unserer Titelvignette, mag ein Brief an den Mitherausgeber dieser Sammlung festhalten:

Lieber Freund! In derselben Stunde – Rom, Ostermontag 1905 –, da Dein brieflicher Zuspruch mich fest bestimmt hat, die „Lehrkunst der Mathematik“ nicht auszuschlagen, trete ich zum erstenmal vor Rafaels „Schule von Athen“, deren Kupferstich unser beider Studierstuben schmückt. Nun, im Original, sehe ich erst recht die entzückende Szene, wie Euklid[2]) sich tief, bis an den Fußboden, zu den „Elementen“, herunterbeugt und die vier Jünglinge voll Freude und Spannung ihm zuhören und – zuschauen! . . „Schauen“ – denn der Meister entnimmt mit dem Zirkel aus der Figur unmittelbar, was manche unserer Lehrer noch immer aus leeren Buchstabenschemen mittelbar erschließen zu müssen glauben. So haben wir vom Künstler beides zur

1) Das war geschrieben 1905, als noch nichts auf die seither fast gewaltsame Bewegung in Sachen einer Mittelschulreform in Österreich hinwies, deren nur allzu dringend gewordenes Bedürfnis jetzt sozusagen offiziell eingestanden ist in dem „Stenographischen Protokoll der Mittelschulenquete Wien 21. bis 25. Jänner 1908.“ Wien, Hölder 1908 (760 Seiten).

2) VASARI deutet den Mathematiker als Archimedes, die beiden Männer mit Himmels- und Erdkugel als Ptolemaeus und Zoroaster.

Schon SCHELLBACH hat der Rafaelschen Gruppe im Sinne des mathematischen Unterrichts gedacht (Programm Berlin 1866); worauf ich erst infolge obiger Briefstelle aufmerksam wurde.

Herzstärkung: der meisterliche Schulmeister verschmäht es nicht, *„more empirico“* zu lehren, und die Schüler lohnen es ihm durch echt jugendliches Interesse, das sich in den Handhaltungen, den leuchtenden Gesichtern ausspricht . . . Indem ich dies auf dem Steinsitz in der Fensternische zunächst der (von der Mittelgruppe aus gesehen) linken unteren Ecke des Bildes niederschreibe, muß ich auflachen über die Fülle der Beziehungen, die das erhabene Kunstwerk zu unserer bescheidenen Lehrkunst erlaubt: Warum muß die Tafel mit unserer Schulgeometrie gerade im vordersten Vordergrund, warum muß sie auf dem Fußboden liegen? Dieser empirische Mathematiker steht auf der äußersten Linken; aber den Rücken decken ihm sogleich Astronomie und Geographie – und beide schauen freundlich dem Künstler, Rafael selbst, ins Antlitz – ihm, der die Mathematiker und die Schriftgelehrten auf die beiden entgegengesetzten Seiten des Vordergrundes, in die äußerste Linke und Rechte, die Philosophie aber hoch oben in die Mitte des Hintergrundes gestellt hat. . . .

Genug – kommt's zur Didaktik, so sollen diese übermütigen Beziehungen den Schluß des Vorwortes bilden! – Was mir sonst die Stanza mit „Schule von Athen“ und „Disputa“ gesagt hat, davon mündlich zu Pfingsten 1905 in Jena (dann schon im Nachklang des bevorstehenden Schillertages)!

Dein A. Höfler.

In Jena, Pfingsten 1905, hat dann (anläßlich meines Vortrages über Philosophische Propädeutik in der Jahresversammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts) der Verleger Herr Ackermann-Teubner seine Einladung zu einer Didaktik des mathematischen Unterrichts ausgedehnt auf die Mitwirkung an der Herausgabe „Didaktischer Handbücher für den realistischen Unterricht an höheren Schulen“, deren Gedanke zwischen dem Verlag B. G. Teubner und Friedrich Poske seit längerem erwogen worden war. Der genaue Plan für ein solches weitausschauendes, zehn Bände umfassendes Unternehmen wurde daraufhin zwischen Poske und mir sogleich noch in Jena festgestellt und vom Verleger genehmigt.

Es folgten dann im Herbst 1905 die „Meraner Vorschläge“ der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte; mit ihnen sah sich unser Programm der „Didaktischen Handbücher“ im schönsten Einklang.

Im Frühjahr 1906 arbeitete der Verein „Deutsche Mittelschule“ in Prag auf Grund der Meraner Vorschläge speziell für Mathematik die „Prager Vorschläge“ aus, von denen unten, Einl., S. 5, des näheren die Rede ist. Hier, im Vorwort, sei die persönliche Mitteilung gestattet, daß dem in den „Prager Vorschlägen“ veröffentlichten Lehrplanentwurf wesentlich das Manuskript zugrunde lag, das ich unmittelbar vor und nach Jena (Juni 1905, also noch vor Meran, September 1905) für die vorliegende Didaktik in allen Hauptteilen ausgearbeitet hatte.

Diese „Prager Vorschläge“ wieder wurden nicht nur von dem Deutschösterreichischen Mittelschultag, Wien, Ostern 1906, einstimmig angenommen, sondern sie bilden seit 1908 auch die Grundlage für den Abschnitt „Mathematik" der neuesten österreichischen Lehrpläne, durch die das Unterrichtsministerium einen Teil jener Wünsche, welche auf der vom Minister Marchet einberufenen Mittelschulenquete, Wien, 21.—25. Jänner 1908, stürmisch laut geworden waren, zu erfüllen angefangen hat. Hiermit werden auf dem Gebiete der mathematischen Didaktik die Anregungen, welche ich schon 1887 in einem Vortrag (Zeitschrift Österreichische Mittelschule, II. Jahrgang 1888, S. 1—19) gegeben hatte, nun endlich der Erprobung durch das Schulwesen eines großen Staates zugeführt werden. In vorliegendem Bande sind die in jener alten Anregung und auch noch in den neuesten Lehrplänen nur knapp angedeuteten Neuerungen so weit ins konkret Anschauliche ausgeführt, daß sie gleichgesinnte Fachlehrer der Mathematik zum allseitigen Handanlegen ermutigen, und daß sie, durch sie erprobt, dann sicherlich auch weiteren Verbesserungen zugeführt werden können.

Es sei an der Spitze dieses I. Bandes der Didaktischen Handbücher gestattet, nur mit einem Wort darauf hinzudeuten, daß in ähnlichem Anregen die Aufgabe auch der weiteren Bände bestehen wird; wogegen im übrigen auf das in der „Einführung" dargelegte, ihnen allen gemeinsame Programm hingewiesen sei.

Verbindlichsten Dank habe ich zu sagen für die wertvolle Unterstützung bei der Korrektur durch die Herren Gutzmer (Halle), Lechner (Baden bei Wien), Lorey (Minden i. W.), Nath (Pankow), Poske (Berlin), Schilling (Wien), Wetternik (Wien).

Endlich gedenke ich hier mit Freude des verständnisvollen Entgegenkommens, das der Verlag B. G. Teubner auch dem vorliegenden Beitrage zur Reform des realistischen Unterrichts in jeder Weise bewiesen hat.

Wien-Bayreuth, Sommer 1909.

Alois Höfler.

Inhaltsverzeichnis.

Anhang zur Didaktik der zwei obersten Jahrgänge.

Dritter Teil.

Rest- und Grenzfragen der mathematischen Didaktik an die Psychologie, die Erkenntnislehre und an die allgemeine Didaktik als Bildungslehre.

Einleitung. — Zur Literatur.

Die Didaktik des mathematischen Unterrichtes an „höheren Schulen“ (so heißen sie in preußischer Bezeichnung, in bayrischer und österreichischer: „Mittelschulen“) empfing ihre erste systematische Darstellung vor jetzt rund zwei Jahrzehnten durch Reidt und ihre zweite vor rund einem Jahrzehnt durch Simon.

„Dr. Fr. Reidt, Professor am Gymnasium zu Hamm, Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen, Berlin, Grote 1886. – Zweite Auflage, revidiert und mit Anmerkungen versehen von Dr. Heinr. Schotten, Direktor der städtischen Oberrealschule zu Halle a. S., 1906.“ (Im folgenden kurz zitiert als **Reidt 1906.**)

Das „Vorwort des Herausgebers zur zweiten Auflage“ sagt: „Gerade 20 Jahre sind verflossen, seit die Anleitung zum mathematischen Unterricht von Reidt dem mathematischen Publikum dargeboten wurde: die erste spezielle Pädagogik der Mathematik. Der Herausgeber hat es für richtig gehalten, die neue Auflage im Text ganz unverändert zu lassen ...“ und nur „Fußnoten hinzugefügt, die teils den inzwischen veränderten Lehrplänen Rechnung tragen, teils anderen Ansichten als denen des Verfassers Ausdruck geben; sei es, daß sie überhaupt den jetzigen Auffassungen entsprechen, sei es, daß sie das persönliche Urteil des Herausgebers wiedergeben. – Die Arbeit auf dem Gebiete der Methodik des mathematischen Unterrichts seit dem Erscheinen der ersten Auflage von Reidts Anleitung ist sehr groß und vielseitig gewesen: vielleicht hat doch gerade Reidts Anleitung dazu die Anregung gegeben . . . Der junge Lehrer der Mathematik ist also jetzt nicht mehr wie früher allein auf seine eigene Tätigkeit und Erfahrung angewiesen; aber es scheint, als wenn gerade auf unserem Gebiete ein gewisser Widerwillen gegen methodische Anleitung vorhanden sei: der Gedanke, sich auf sich selbst verlassen zu müssen, aus sich allein heraus den Unterricht gestalten zu müssen, noch immer weiteste Kreise der Fachgenossen beherrschte.“

„Prof. Dr. Max Simon, Oberlehrer am Lyzeum in Straßburg, Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik.“ In Sonderausgabe aus Baumeisters „Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre für höhere Schulen, München, Beck 1895.“ – Soeben gab Simon selbst (der inzwischen Honorarprofessor der Kaiser Wilhelms - Universität

Straßburg geworden ist) eine „Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage“, München 1908, heraus (im folgenden zitiert als **Simon 1908**); er sagt im Vorwort: „In dieser zweiten Auflage habe ich jedes Wort der ersten geprüft und fand nur selten Grund, meine Ansicht zu ändern, die umfangreichen Erweiterungen sind also im wesentlichen Ergänzungen und historisch-literarische Notizen. Vielfach verweise ich auf meine früheren methodischen Arbeiten ... Diese Arbeiten sind, soweit sie nicht in zahlreichen Kritiken verstreut oder in den Akten begraben sind: 1. Referat, betreffend das Rechnen und die Mathematik an den Gymnasien, vom 30. September 1877, zitiert als Straßburger Referat; 2. Die Elemente der Arithmetik als Vorbereitung auf die Funktionentheorie, Straßburg 1884 (Elemente der Arithmetik); 3. Die Elemente der Geometrie mit Rücksicht auf die absolute Geometrie, Straßburg 1890 (Elem.); 4. Zu den Grundlagen der Nichteuklidischen Geometrie, Festschrift für E. E. Kummer und Straßburger Programm 1891 (Festschrift); 5. Methodik und Didaktik des Rechnens und der Mathematik, München 1895; 6. Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis, Teubner 1906 (Meth. der Arith.) [im folgenden zitiert als **Simon 1906**]; 7. Über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jahrhundert, Leipzig 1906 (Referat).“

Zur vorläufigen Charakteristik beider wertvollen Bücher, deren Kenntnisnahme wir auch unserem Leser vor allem dringend empfehlen, hier nur so viel, daß Simon durchgehends weitaus höhere Ziele steckt als der im Vergleich zu ihm auf das sicher Erreichbare sich beschränkende Reidt. – Angesichts dieser beiden systematischen Darstellungen einer Didaktik des mathematischen Unterrichtes bedarf es nicht eines dritten Buches, das hier von Grund aus neu baut; insbesondere kann z. B. hinsichtlich der „allgemeinen pädagogischen Einführung“ auf Reidt (I. Teil, Der mathematische Unterricht der höheren Schulen im allgemeinen, S. 10–107), hinsichtlich der „historischen Entwicklung des mathematischen Unterrichts“ auf Simon (S. 5–20) hingewiesen werden. – Während aber beide Darstellungen diejenige Gestaltung des mathematischen Unterrichtes, wie sie alles in allem seit langem speziell in den preußischen Lehrplänen traditionell ist, zur stillschweigenden oder ausdrücklichen Voraussetzung haben, konnte sich nun die vorliegende Didaktik die allgemeinere Aufgabe stellen, für eine „zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichtes an höheren Schulen“ gerade an denjenigen Punkten mit allem Nachdruck einzutreten, wo es dem Neuen Bahn zu brechen und zu eben diesem Zwecke auch manches

Veraltete aus dem Wege zu räumen gilt. So konnte namentlich für die „Pflege der räumlichen Anschauung" beträchtlich besser, als es bei der in Preußen überlieferten Behandlung der Stereometrie fast am Ende des Mathematikunterrichtes (erst unmittelbar vor der analytischen Geometrie!) möglich ist, vorgesorgt werden durch die seit einem halben Jahrhundert unzählige Male verlangte Verbindung von Stereometrischem und Planimetrischem schon in allen drei Jahrgängen der Unterstufe. Ferner die „Pflege des funktionalen Denkens" z. B. durch Ansetzung der Goniometrie und Trigonometrie, die ja von jeher von „Funktionen" geredet hatten, meist ohne auch nur dieses Wort zu erklären, zu Beginn der Oberstufe, nach der Stereometrie der Mittelstufe u. dgl. m.; was alles in den jüngsten Tagen offizielle Anerkennung in den neuesten österreichischen Lehrplänen gefunden hat. Diese verlangen insbesondere auch „nähere Verbindung innerlich zusammengehöriger Lehren, namentlich auf allen Stufen zwischen Arithmetik und Geometrie". Übereinstimmend hiermit hat die vorliegende Didaktik den ganzen Lehrstoff nicht wie REIDT und SIMON so gegliedert, daß zuerst die ganze Arithmetik, dann die ganze Geometrie durchgesprochen wird, was bei vorwiegend gegenständlicher Anordnung freilich das Einfachste ist; sondern daß (wie im § 6 noch näher zu begründen sein wird) das Lebensalter des Schülers und die mit ihm fortschreitende Aufnahmsfähigkeit, also ein rein didaktischer Gesichtspunkt, den obersten Einteilungsgrund bildet. Innerhalb der einzelnen Jahre wird dann gezeigt, wie und wo Arithmetisches und Geometrisches (und beides wieder mit anderen Unterrichtsfächern, namentlich dem gleichzeitigen physikalischen Unterricht) zum Ineinandergreifen gebracht werden kann.

Obige Worte, „Zeitgemäße Umgestaltung" usf., sind der Titel der schon in der Vorrede erwähnten Schrift von FELIX KLEIN (Teubner 1904, 82 Seiten), die man wohl als den geschichtlichen Ausgangspunkt[1]) der

1) Dies gilt unbeschadet der Tatsache, daß auch schon seit langem von weitausblickenden Männern solche Reformen verlangt worden waren – aber eben nur in sozusagen vorzeitigen und damals noch nicht zu positiven Taten führenden Äußerungen. So hatte MACH schon in der ersten Auflage der Schrift: „Über den relativen Bildungswert der philolog. und der math.-naturwissensch. Unterrichtsfächer" (1886, neueste Auflage 1908, Wien, Manz) solche Anregungen gegeben: „Ohne Zweifel wird sich durch den math.-naturwissensch. Unterricht noch viel mehr erreichen lassen, als jetzt schon erreicht wird, wenn noch eine etwas natürlichere Methode in Gebrauch kommt. Hierzu gehört, daß die Jugend

gegenwärtig so lebhaft gewordenen Reform des Mathematikunterrichtes bezeichnen darf. Deshalb folge hier ihr Inhaltsverzeichnis: **Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichtes an höheren Schulen.** 1. Allgemeine Vorbemerkungen. Themastellung. — 2. Definition der Elementarmathematik. Differential- und Integralrechnung in der heutigen Schulpraxis. — 3. Von dem notwendigen Ziel des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen. Vergleich mit den zurzeit an den Universitäten hervortretenden Resultaten. — 4. Erörterung des französischen Lehrplanes. Bezugnahme mit Herrn HOLZMÜLLER. — 5. Einfügung der neuen Ideen in den Schulbetrieb. — **Wiederabdruck früherer Aufsätze von E. Götting und F. Klein.** 1. F. KLEIN: Bemerkungen im Anschluß an die Schulkonferenz von 1900. — 2. E. GÖTTING: Über das Lehrziel im mathematischen Unterricht der höheren Lehranstalten (mit einem neuen Zusatz des Verfassers). — 3. F. KLEIN: Hundert Jahre mathematischer Unterricht an den höheren preußischen Schulen. 4. F. KLEIN: Bemerkungen zu den sogenannten Hamburger Thesen der Biologen (mit Angaben über die für Breslau geplante Schuldebatte)." — Die Schrift enthält auch die bis zu jenem Zeitpunkt gesammelte Literatur (so TANNERY, BOREL, s. u., NERNST u. SCHÖNFLIES, PERRY [deutsch von FRICKE u. SÜCHTING] usw.).

Mit einem weiteren Vortrage „Bemerkungen zum physikalischen und mathematischen Unterricht" (zuerst abgedruckt in der „Physikalischen Zeitschrift" V. Jahrg. 1904, 710—717, dann im sogleich anzuführenden Gesamtbericht S. 44—57) gab FELIX KLEIN die Veranlassung, daß die Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zu Breslau 1904 eine Unterrichtskommission einsetzte. Ihre Arbeiten liegen abgeschlossen vor in dem Bande „Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesell-

nicht durch verfrühte Abstraktion verdorben wird, sondern den Stoff durch Anschauung kennen lernt, bevor sie mit ihm denkend zu arbeiten hat. Eine zweckentsprechende Ansammlung von geometr. Erfahrung würde z. B. durch das geometr. Zeichnen und durch das Herstellen von Modellen gewonnen. An die Stelle der unfruchtbaren, nur für einen beschränkten Zweck passenden Euklidischen Methode muß eine freiere und mehr bewußte treten, wie dies schon HANKEL betont hat (Geschichte der Mathem. Leipzig 1874). Werden nun etwa bei Wiederholung des geometr. Stoffes, wenn dieser selbst keine Schwierigkeiten mehr bereitet, die allgemeineren Gesichtspunkte, die Grundsätze des wissenschaftlichen Verfahrens hervorgehoben und zum Bewußtsein gebracht, wie dies v. NAGEL (Geom. Analysis, Ulm 1886), I. K. BECKER (in seinen mathem. Elementarbüchern), MANN (Abhandlungen aus dem Gebiet der Mathem. Würzburg 1884) u. a., in vorzüglicher Weise getan haben, so kann eine fruchtbringende Wirkung nicht ausbleiben". — Hinsichtlich des Lehrstoffausmaßes wird verwiesen auf: BECKER, Die Mathem. als Lehrgegenstand des Gymnasiums, Berlin 1883.

schaft deutscher Naturforscher und Ärzte. Gesamtbericht, enthaltend die Vorverhandlungen auf den Versammlungen in Kassel und Breslau, sowie die seitens der Kommission den Versammlungen in Meran, Stuttgart und Dresden unterbreiteten Reformvorschläge". Im Auftrage der Kommission herausgegeben von A. GUTZMER in Halle a. S. – B. G. Teubner 1908 (322 Seiten).

Aus dem Inhalt dieses Bandes kommen für die Didaktik des mathematischen Unterrichtes insbesondere die „**Meraner Vorschläge**" in Betracht. (Da die Sonderabdrücke davon vergriffen sind, beziehen sich die nachfolgend angeführten Seitenzahlen auf den „Gesamtbericht".)

Der Veröffentlichung dieser Vorschläge war sogleich eine lebhafte literarische Erörterung und zum Teil Durchbildung ins einzelne gefolgt. Es seien namentlich genannt:

MAX NATH, „Die preußischen Lehrpläne für den mathematischen Unterricht am Gymnasium und die Vorschläge der Breslauer Unterrichtskommission". (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1906). – Ferner:

„Vorschläge zu einer zeitgemäßen Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den österreichischen Gymnasien und Realschulen." Im Auftrage der Deutschen Mittelschule in Prag[1]) erstattet von ALOIS HÖFLER (Sonderabdruck aus der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, 37. Jahrg. 1906. – B. G. Teubner, 15 Seiten); im folgenden zitiert als „**Prager Vorschläge**".

Der bayrische Lehrplan (Ministerialblatt Nr. 21, München, 27. Juni 1907) für die „realistischen Mittelschulen" weist im Abschnitt „Mathematik" (S. 360–367) zahlreiche Anerkennungen der neuen Forderungen (z. B. „eine Einführung in die Elemente der Infinitesimalrechnung", „eine anschauliche Einführung des Funktionsbegriffes") auf.

Wie sehr sich das Bedürfnis nach Reform des Mathematik-

---

1) Daß diese Vorschläge wirklich die Wünsche von Professoren und Direktoren der Mittelschulen selbst zum Ausdruck bringen – was man von den durch die Ministerien verordneten Lehrplänen nicht immer sagen konnte –, bezeugt der Sitzungsbericht des Prager Vereins (Zeitschr. Österr. Mittelschule, 19. Jahrg. 1906, S. 342–344). – Hierüber, sowie über die um jene Zeit erstatteten „Wiener Vorschläge" findet man Näheres in Zusatz 1–5 zum ersten meiner „Drei Vorträge zur Mittelschulreform" (Wien, Braumüller 1908, 167 Seiten 8°): „Die Reformbewegungen des realistischen Unterrichtes in Deutschland und Österreich".

unterrichtes weit über Deutschland und Österreich hinaus erstreckt, zeigt z. B. die Abhandlung von J. W. A. YOUNG in Chicago, „Die Reformbewegungen im mathematischen Unterricht in den Vereinigten Staaten von Nordamerika“ (a. a. O. Jahresber. 1906; die Meraner und Prager Vorschläge, wiewohl natürlich ganz unabhängig von der amerikanischen Bewegung entstanden, decken sich mit jener Abhandlung bis in Einzelheiten).

Als die bisher letzte Phase der von KLEIN eingeleiteten Bewegung sei verzeichnet, daß auf dem Mathematikerkongreß zu Rom 1908[1]) die Sache der mathematischen Unterrichtsreform zu einer internationalen Angelegenheit erhoben worden ist; es wurde nämlich eine Resolution angenommen, daß eine Unterrichtskommission eingesetzt werde mit dem Auftrage, dem nächsten Internationalen Mathematikerkongreß in Cambridge (1912) einen Bericht über die Lage des mathematischen Unterrichts in den einzelnen Ländern vorzulegen. Es wurde zunächst ein Komitee, bestehend aus KLEIN, GREENHILL und FEHR eingesetzt, das die große internationale Kommission zusammen mit den nationalen Gesellschaften bilden und die Herstellung jenes Berichts in die Wege leiten soll.

Als eine kleinere zusammenhängende Didaktik des mathematischen Unterrichtes sei noch genannt der vortreffliche Artikel von KEFERSTEIN in Reins Enzyklopädie.

FELIX KLEIN, „Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen, bearbeitet von RUD. SCHIMMACK, Teil 1, Von der Organisation des mathematischen Unterrichts“, B. G. Teubner 1907[2]), faßt den größten Teil dessen zusammen, was bisher an Literatur zur Reform vorliegt.

---

1) Daß dort MAX SIMON die Meraner Vorschläge durch die Lessingsche Formel „Das Gute nicht neu, das Neue nicht gut“ bewertete, sei hier angeführt, weil es das Erscheinen einer dritten Didaktik des mathematischen Unterrichtes so bald nach der zweiten von SIMON als minder überflüssig erkennen lassen mag.

2) Während des Druckes erscheint das autographierte Heft (590 Seiten): „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“. Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis. Vorlesung, gehalten im Wintersemester 1907/8 von F. KLEIN. Ausgearbeitet von E. HELLINGER. — Aus dem Vorwort: „Die neue Autographie, welche ich hiermit dem mathematischen Publikum und ganz besonders den Lehrern der Mathematik an unseren höheren Schulen unterbreite, ist als eine erste Fortsetzung jener Vorträge „über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen“, speziell über „die Organisation des mathematischen Unterrichts“ gedacht, die ich im vorigen Jahre mit Herrn SCHIMMACK zusammen im Teubnerschen Verlag habe erscheinen lassen. An die damals gegebene Übersicht über die verschiedenen Formen der Unterrichtsaufgabe, die dem Mathematiker gestellt sein kann, sollen sich jetzt, all-

Nach den bisher angeführten mittelbaren und unmittelbaren Hinweisen dürfte ein neuerliches Literaturverzeichnis an dieser Stelle entbehrlich sein; insoweit Einzelnes zustimmende oder abweichende Stellungnahme zu fordern scheint, wird es zweckmäßiger an den einschlägigen Stellen eingehende Erörterung finden.

Doch seien als die eigentlichen Fundgruben didaktischer Anregungen aller Art die Fachzeitschriften genannt, insbesondere

die Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (HOFFMANNS, jetzt SCHOTTENS Zeitschrift, 1869 bis 1909, 40 Bände);

Unterrichtsblätter für die Mathematik und Naturwissenschaften (PIETZKERS Zeitschrift, Verlag Salle, Berlin 1895 bis 1909, 15 Jahrgänge).

Überdies zahlreiche wertvolle Einzelbeiträge auch in allen übrigen (nicht nur realistischen) pädagogischen Zeitschriften; ferner in den Programmen der einzelnen Anstalten.

Ist es schon nicht möglich, den zahllosen mehr oder minder wertvollen Anregungen, die nicht nur die jeweilig neuesten Hefte jener Zeitschriften enthalten (und aus denen sich wohl für jeden

---

gemein zu reden, Entwicklungen über den Unterrichtsstoff selbst schließen, in denen ich bemüht bin, dem Lehrer – oder auch dem reiferen Studenten – Inhalt und Grundlegung der im Unterricht zu behandelnden Gebiete, unter Bezugnahme auf den tatsächlichen Unterrichtsbetrieb, vom Standpunkte der heutigen Wissenschaft in möglichst einfacher und anregender Weise überzeugend darzulegen. Und dieses nicht, wie etwa WEBER-WELLSTEIN tun, in Form einer systematisch geordneten Darstellung, sondern in freien Exkursen, wie sie sich unter den wechselnden Anregungen der Umgebung in der wirklich gehaltenen Vorlesung tatsächlich gestaltet haben. – Auf das so bezeichnete Programm – das nachstehend nur erst für die Gebiete der Arithmetik, Algebra und Analysis durchgeführt wird – wurde schon in der Vorrede zu KLEIN-SCHIMMACK (April 1907) hingewiesen. ... Ich will mit dem Wunsche schließen, daß sich die vorliegende Autographie als nützlich erweisen möge, indem sie manchen Lehrer an unseren höheren Schulen veranlaßt, über die zweckmäßige Darbietung des von ihm zu behandelnden Lehrstoffes in neuer Weise selbstständig nachzudenken. Nur eine solche Anregung will meine Schrift geben, keinen ausgeführten Lehrgang, dessen Festlegung ich vielmehr den an der Schule wirkenden Herren durchaus überlasse. Es ist ein Mißverständnis, wenn man an einzelnen Stellen vorauszusetzen scheint, ich habe mich je in einem anderen Sinne betätigt. Insbesondere der Lehrplan der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte (der sog. „Meraner" Lehrplan) ist nicht etwa von mir, sondern unter bloßer Mitwirkung meinerseits von hervorragenden Vertretern der Schulmathematik ausgearbeitet worden."

Diesem Teil I (Arithmetik usw.) folgte der Teil II, Geometrie, erst während des Reindruckes dieses Bogens, so daß auf ihn nur mehr an einzelnen Stellen dieser Didaktik Bezug genommen werden konnte.

beharrlichen Leser erst im Laufe von Jahren je nach persönlicher Neigung ein Kreis von Überzeugungen festigt), in einer zusammenfassenden Darstellung gerecht zu werden, so noch weniger den in der Lehrbuchliteratur aufgespeicherten. Schon die Aufzählung, geschweige die relative Bewertung der einzelnen Lehrbücher würde nur viel unvollkommener denselben Zweck erreichen wie die fortlaufenden Berichterstattungen über sie in den Fachzeitschriften. Wo also einzelne Lehrbücher im folgenden genannt sind[1]), bedeutet dies keine Zurücksetzung der übrigen, sondern es gilt nur, aus konkreten Beispielen Wahrscheinlichkeitsschlüsse auf den Zustand des ganzen Unterrichtes oder einzelner Abschnitte zu ziehen. Auch wo im folgenden (z. B. §§ 8 und 12) eine grundsätzliche Neugestaltung der Lehrbücher und viel mehr noch ihres Gebrauches in der Hand des Lehrers und Schülers empfohlen wurde, soll damit nicht daran gezweifelt werden, daß gleichsinnige Bestrebungen in vielen Lehrern lebendig, zum Teil auch schon in manchen Lehrbüchern verwirklicht sind.

Von außerdeutschen Lehrbüchern und Reformschriften seien hier insbesondere genannt die vier Bändchen Schulbücher[2]) von ÉMILE BOREL:

1) Während des Druckes erscheint ein „Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen von O. BEHRENDSEN und DR. E. GÖTTING, Professoren am Kgl. Gymnasium zu Göttingen. A. Unterstufe. Mit 280 Figuren im Text.“ Teubner 1909. Es sei hier erwähnt, weil es im Vorwort mit Beziehung auf die KLEINsche Reform sagt: „Ein Hindernis für diese moderne Gestaltung des Unterrichtes bot das Fehlen eines geeigneten Lehrbuches, d. h. eines Lehrbuches, welches die neuen Ideen nicht einfach äußerlich der alten Methode addiert, sondern (mit Beseitigung alles veralteten, den Schüler belastenden Ballastes) den Funktionsbegriff und alles, was damit zusammenhängt, also graphische Darstellung, geometrische Methoden, Differenzial- und Integralrechnung mit dem übrigen Lehrstoff von Anfang an verquickt und verschmilzt.“ – Übrigens sei bemerkt, daß hier die Bezeichnung „A. Unterstufe“ nicht verwechselt werden darf mit dem, was in vorliegender Didaktik als „Unterstufe“ gemeint ist (nämlich die vier oder drei Schuljahre bis zum 13. Lebensjahr); denn da die Darstellung bis zu den Potenzen mit gebrochenen Exponenten geht, reicht der Stoff in das 1. Jahr unserer „Oberstufe“ hinein und behandelt vieles aus der „Mittelstufe“. Originell ist an dem Lehrbuch u. a. auch die Voranstellung der Geometrie vor die Arithmetik, was gewiß mehr als nur äußerlich gemeint ist.

2) Während des Druckes erscheint: ÉMILE BOREL, Professor an der Sorbonne zu Paris, „Die Elemente der Mathematik, vom Verfasser genehmigte deutsche Ausgabe, besorgt von PAUL STÄCKEL, Professor zu Karlsruhe i. B. I. Band: Arithmetik und Algebra. Mit 57 Textfiguren und 3 Tafeln.“ Teubner 1908, 431 S. – Im Vorworte (vom 3. August 1908) sagt BOREL: „. . . Ich habe mich daher bemüht, immer in Berührung mit der Wirklichkeit zu bleiben, und zum Beispiel bei den elementaren Rechnungen mit ganzen Zahlen nicht versucht, einem Schüler das Rechnen beizubringen, der noch gar nicht rechnen

Arithmétique, Premier cycle; Algèbre, Second cycle; Géométrie, Premier et second cycles; Trigonométrie, Second cycle. – Viel mehr verbreitet als die BORELschen Bücher, die der deutschen und österreichischen Reform überall die stärksten Impulse gegeben haben, scheinen übrigens in Frankreich (soweit ich nach mündlichen Mitteilungen urteilen kann) die von CARLO BOURLET: *Éléments d'algèbre; Précis d'algèbre* und *Cours abrégé d'arithmétique* zu sein, wiewohl sie der Qualität nach nicht hinanreichen an die von BOREL. Es sei dies erwähnt als ein tröstliches *Tout comme chez nous*, da auch bei „uns" (das Wort wahrscheinlich in weitestem Sinne zu nehmen) das Beste für die Schule manchmal nicht gut genug, sondern zu gut scheint. (Vgl. z. B. KLEINS Mitteilung über die Nichtverbreitung von SCHÜLKES Buch, S. 35 Anm.).

Als Belege dafür, wie unbeschadet sonstiger Verschiedenheiten in Inhalt und Umfang die literarische Produktion von Lehrbehelfen auch in

---

kann, sondern einem Schüler, der bereits rechnen kann, zu erklären, wie ein Mechanismus funktioniert, dessen er sich schon lange bedient hat." (Also dieselbe Umkehrung der bisherigen deduktiven Methode, wie wir sie verlangen und begründen; vgl. S. 161, S. 458 u. a.) Das Vorwort des Herausgebers sagt: „... Wenn aber dieser Lehrgang der Arithmetik und Algebra den deutschen Lehrern der Mathematik zugänglich gemacht werden sollte, so genügte nicht eine einfache Übersetzung. Es konnte sich vielmehr nur um eine Bearbeitung und Verschmelzung der drei Bändchen zu einem Ganzen handeln." Unter den Gründen wird angeführt, daß „die beiden Teile der Algebra beginnen mit einer ausführlichen Wiederholung (Révision), durch die der Anschluß an das Vorhergehende hergestellt wird, was aber nicht hindert, daß auch manche ergänzende Bemerkung eingeflochten wird. So wichtig nun solche Wiederholungen für den Unterricht sind, so schienen sie mir doch nicht in einen zusammenhängenden Lehrgang zu gehören, der für Lehrer bestimmt ist."

Ferner erschien unmittelbar vor Abschluß des Druckes: JULES TANNERY, Elemente der Mathematik. Mit einem geschichtlichen Anhang von PAUL TANNERY, deutsch von KLAESS. Mit einem Einführungswort von F. KLEIN, Teubner 1909. – Es sagt: „Schlag auf Schlag folgen sich jetzt ... zusammenhängende Darstellungen, welche die Grundgedanken der von den Reformfreunden angestrebten Umgestaltung des mathematischen Unterrichts nach ihren verschiedenen Richtungen zur Geltung bringen. ..." Nach Hinweis auf die oben erwähnten Bücher von BEHRENDSEN-GÖTTING, BOREL-STÄCKEL und die „Elementarmathematik" von KLEIN sagt dieser weiter: „Wieder an ein anderes Publikum wendet sich die nunmehr vorliegende deutsche Übersetzung des Werkes, mit welchem der führende Pädagoge der französischen Mathematiker, JULES TANNERY, vor einigen Jahren die französische Reformbewegung eröffnete." – Ganz besonders nützlich auch für den Lehrer ist der geschichtliche Anhang mit folgenden Abschnitten: I. Ursprung der Algebra. II. Über die Bedeutung der Wörter Analysis und Synthese bei den Griechen und ihre geometrische Algebra. III. Positive und negative Größen. IV. Über die von den Alten studierten Kurven. V. Über den Ursprung des Gebrauches der Koordinaten zur graphischen Darstellung der Variation von Erscheinungen. VI. Über den Ursprung der Differential- und Integralrechnung.

Frankreich sich in den Dienst der neuen gleichgerichteten Bestrebungen gestellt haben, seien noch angeführt:

Laisant, *Initiation mathématique*, Genève-Paris 1906, 167 S. – Hierüber aus einer Anzeige der „Pädagogischen Zeit" (4. Juli 1906) von dem Nichtmathematiker Himmelbaur: „Laisant (Examinator für die *École Polytechnique*, auch [zusammen mit H. Fehr] Herausgeber von *L'enseignement mathématique*, s. u.) versucht es in diesem ausgezeichneten Büchlein, den Kindern von 4 bis 11 Jahren zwanzigmal mehr Mathematik beizubringen als bisher, indem man sie unterhält und nicht mit Auswendiglernen quält. Was der Verfasser bietet, ist nicht ein geregelter Lehrgang, es ist für die Hand des Lehrenden bestimmt." – (Während des Druckes erscheint eine deutsche Übersetzung des Büchleins, Wien, Deuticke.)

Ferner seien als Fachzeitschriften genannt:

L'enseignement mathématique, méthodologie et organisation de l'enseignement, philosophie et histoire des mathématiques, revue internationale dirigée par C.-A. Laisant et H. Fehr; sodann:

L'enseignement des sciences mathématiques et des sciences physiques, par Mm. H. Poincaré, G. Lippmann, L. Poincaré, P. Langevin, E. Borel, F. Marotte. Avec une introduction de M. L. Liard. – Hier z. B. im Heft von 1904 eine unseren Kampf gegen verfrühte Definitionen wirksam unterstützende Abhandlung *„Les définitions générales en mathématiques", par M. H. Poincaré* (S. 1–28). –

Weitere außerdeutsche Literatur bei Goldziher (s. u. S. 63 Anm.); so die didaktischen Schriften von Perry.

Zuletzt muß in einer Didaktik was immer für eines Faches natürlich auch noch das erwähnt werden, was für das Fach selbst das Erste ist, seine wissenschaftliche Literatur. Ebenso natürlich aber ist es ganz ausgeschlossen, hier irgendwie eine Auswahl aus der mathematischen Literatur für den Lehrer an höheren Schulen treffen zu wollen. Dennoch ist wenigstens ein Hinweis nach der Richtung nicht überflüssig, daß auch das Verhältnis des Hochschulunterrichtes der Mathematik als solcher zu den besonderen Bedürfnissen der Mittelschullehrer seit einiger Zeit Gegenstand ernstesten Nachdenkens geworden ist.

So beginnt z. B. das Vorwort der von F. Klein und E. Riecke herausgegebenen Vorträge „Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen" (1900) mit den Fragen: „Was sind angewandte Mathematik und Physik im Sinne der neuen Prüfungsordnung, und was bedeuten sie für die höheren Schulen? Wie kann der Lehrer sich nötigenfalls durch Selbstunterricht die erforderlichen Kenntnisse erwerben? Wie andererseits sind mit Rücksicht auf das Bedürfnis der Schulen wie der Wissenschaft überhaupt unsere bezüglichen Universitätseinrichtungen zu ergänzen?" – Vgl. hier z. B. S. 59: „Die Geodäsie wird ihren Zweck völlig erfüllen, wenn ihrer bei dem Unterricht in der Mathematik, der Physik und der Geographie, sowie auf Schulausflügen gedacht wird, wenn ihr, wo es angeht, Beispiele und Aufgaben entlehnt werden, und wenn gelegentlich eine und die andere Unterrichtsstunde der Mathematik statt im Schulzimmer theoretisch im Freien praktisch verwendet wird." –

Eine Art wissenschaftliches Mittelglied zwischen der an Hochschulen gepflegten und der an Mittelschulen benötigten Mathematik bilden die nicht häufigen Darstellungen der sogenannten Elementar-Mathematik, die nicht für Mittelschüler, sondern als selbständige wissenschaftliche Darstellungen verfaßt sind.

EUKLIDS „Elemente" sind in dieser Hinsicht noch heute als das Grundbuch zu nennen, das jedem Mittelschullehrer, wenn nicht seinem ganzen Inhalte, so doch seiner Anlage nach bekannt sein sollte. (Vgl. S. 188 ff.)

Ferner sei hier die „Vollständige Anleitung zur Algebra" von LEONHARD EULER (Ausgabe Reclam, 527 Seiten) genannt, da sie zahlreiche Dinge in einer Unbefangenheit[1]) darstellt, die, rein wissenschaftlich zum überwundenen Standpunkt geworden, der Didaktik heute und für immer eine wohltätige Mahnung bleibt. Auch gescheiten Schülern könnte darum das Büchlein zu wahlfreiem Studium an Stelle der auf Zwangsarbeit berechneten Lehr- und Lernbücher in die Hand gegeben werden[2]).

Die „Elemente der Mathematik" von BALTZER dürften das Buch gewesen sein, das lange Zeit am liebsten von Mittelschullehrern benützt wurde, um den in den Schulbüchern abgesteckten Gesichtskreis nach Bedarf zu erweitern. An den Umstand, daß das Buch jetzt vollständig vergriffen ist, knüpft die Vorrede zur „Enzyklopädie der Elementar-Mathematik, ein Handbuch für Lehrer und Studierende" (I. Bd. „Elementare Algebra und Analysis", II. Bd. „Elemente der Geometrie", III. Bd. „Angewandte Elementar-Mathematik") von WEBER und WELLSTEIN an[3]).

---

1) Auch geradezu Unrichtiges findet sich; z. B. S. 71, „daß 0^0 sicher 1 ausmacht" (wogegen es bekanntlich so „unbestimmt" ist, wie $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$ u. dgl. m.).

2) Als ein Beispiel dafür, wie man, sobald auch Nichtmathematiker, was ja unsere Schüler sind, die Leistungen eines der Großen zu verstehen angefangen haben, sie dann auch für seine Person interessieren kann und soll, sei hier der Vortrag von W. LOREY, „Leonhard Euler" (zum 200. Geburtstag), Teubner, 1907, angeführt. – Ferner die Rede „Archimedes und unsere Zeit" von LOREY (Görlitz 1908).

Es sei in diesem Zusammenhang auch auf das Programm „Das Geschichtliche im mathematischen Unterricht" von GEBHARD (Dresden 1908) hingewiesen.

3) Das Verhältnis zu dieser Enzyklopädie wird (ebenso wie seitens der Elementarmathematik von KLEIN, vgl. o. S. 7) charakterisiert durch THIEME im Vorwort zu „Die Elemente der Geometrie" (als „Zweiter Teil, erster Band" von „Grundlehren der Mathematik für Studierende und Lehrer",

Schließlich sei, als wieder nach ganz anderer Richtung ein Bindeglied zwischen mathematischer Wissenschaft und mathematischer Didaktik bildend, das (schon wegen seiner unerwarteten Rückkehr zu Galls Schädellehre nur mit Kritik aufzunehmende) Buch von P. J. MÖBIUS, „Über die Anlage zur Mathematik“ (1900), namentlich auch wegen seiner 51 Porträts berühmter Mathematiker, hier erwähnt.

Dürfen nebenbei in unserer ernsten Wissenschaft auch „Mathematische Unterhaltungen und Spiele“ („Aus Natur und Geisteswelt“) von AHRENS, dem Verfasser von „Scherz und Ernst in der Mathematik“, hier genannt werden?

Was nun die Gliederung der vorliegenden Didaktik betrifft, so ist von ihren drei Teilen der zweite, betitelt „Lehrproben, Lehrgänge, Lehrpläne“, schon seinem Umfang nach der Hauptteil. Er will, auch unabhängig von den grundsätzlichen Erörterungen des ersten und dritten Teiles, dem jüngeren Fachgenossen, sobald ihm z. B. Schüler des 10. oder 11. oder 18. Lebensjahres zugewiesen wurden, sogleich allerlei Einzelheiten an die Hand geben, die sich in der Lehrerfahrung des älteren während vieler Jahre sehr allmählich ausgestaltet und dann noch lange genug bewährt haben. Diese Lehrproben werden durch den ganzen Lehrton am unmittelbarsten zu erkennen geben, daß und wodurch

---

I. Arithmetik und Algebra von NETTO und FÄRBER, II. Geometrie von W. FR. MEYER und THIEME). „Zur Einführung“ heißt es an der Spitze: „Die ‚Grundlehren der Mathematik‘ sind als eine, dem heutigen Stande der Wissenschaft entsprechende Erneuerung und Weiterführung von R. BALTZERs ‚Elemente der Mathematik‘ gedacht ... Eine Darstellung der Geometrie, die sich ähnliche Ziele stellt wie die berühmten Elemente BALTZERs und dabei dem jetzigen Stande der Wissenschaft gerecht wird, fehlt uns in Deutschland bis heute.“

Endlich ist laut Voranzeige im Erscheinen begriffen KILLING und HOVESTADT, Handbuch des mathematischen Unterrichts. 2 Bände. „Das Werk will einem doppelten Zweck dienen: der Vermittlung zwischen Wissenschaft und Unterricht, sowie der Auswahl passender methodischer Lehrgänge. Die Verfasser sind der Ansicht, daß der Unterricht leide, wenn seine Beziehungen zur Wissenschaft sich lockern. Dagegen liefert eine genaue Kenntnis der Grundlagen der elementaren Mathematik wesentliche Gesichtspunkte für den Unterricht. Außerdem will das Buch zum Nachdenken über den Unterricht anregen. Es wägt die Vorteile und Mängel verschiedener Methoden gegeneinander ab, damit der Lehrer mit klarer Erkenntnis auswähle, was seiner Persönlichkeit und dem Standpunkt der Schüler am besten entspricht“. Aus den mir vorliegenden Aushängebogen 1—17 (ganz zuletzt noch bis 24) zu schließen, versucht das Werk, HILBERTs „Grundlagen der Geometrie“ für den Mittelschulunterricht nutzbar zu machen. Es wird deshalb gelegentlich später (S. 193, 290 Anm.) auf dieses eigenartige Werk noch vor seinem Abschlusse hinzuweisen sein.

ebenso unmittelbar schon der einzelne Lehrer es den vielleicht manchmal noch mangelhaften offiziellen Lehrplänen gegenüber in der Hand hat, dem ganzen Mathematikunterricht von Anfang die richtige pädagogische Stimmung zu geben.

Es wird auffallen – und möge ja nicht irreführen –, daß die Vor- und Ratschläge dieses Buches, speziell seines zweiten Teiles, fast überall bei weitem ausführlicher von der ersten Einführung in die verschiedenen Abschnitte handeln als von ihrer späteren Fortführung bis zu den schwierigsten und höchsten zugehörigen Theorien, Aufgaben und Anwendungen, auf die im Mittelschulunterricht günstigstenfalls überhaupt noch eingegangen werden kann. Man wolle dies nicht dahin auslegen, als solle zu einem Breittreten der Anfangsgründe geraten und von einem Emporführen, namentlich der begabtesten Schüler, auch zu schwierigeren und schwierigsten Aufgaben abgeraten werden. Vielmehr bedarf eben ein Lehrer, der seine Schüler auf die verständlichste und auch im übrigen didaktisch angemessene Art in die Anfangsgründe jedes Kapitels eingeführt hat, zum Weiterführen seiner Schüler überhaupt keiner ebenso ausführlichen Ratschläge mehr; bedarf doch der Schüler selbst, wenn er durch einen vorsichtigen Lehrer zuerst in kleinsten und später in größeren Schritten wirklich gehen gelehrt wurde, am Ende selbst kaum mehr eines Führers. Und so ist es ja auch die Probe auf die Güte einer Didaktik, daß, wenn sie im Anfang ihren Zweck erfüllt hat, sie weiterhin in ihrem Amte als Wegweiserin durch die reine Wissenschaft selbst abgelöst wird. Vielleicht geht aber doch am besten aus jenen speziellen Vorschlägen zur jeweilig ersten Einführung in ein neues Vorstellungs- und Arbeitsgebiet hervor, was dem Verfasser selbst Leitgedanke und Leitmotiv bei allen Abweichungen seiner einstigen Gymnasiallehrtätigkeit vom Althergebrachten gewesen ist: es war dasselbe auf dem Gebiete der mathematischen Didaktik, was in der Vorrede zu des Verfassers Physik (Vieweg 1904) als die nur zu oft außer acht gelassene Aufgabe des physikalischen Unterrichtes bezeichnet ist: „Das natürliche, noch nicht physikalische Denken auf die Pfade des physikalischen erst allmählich hinüberzuleiten“. Wer so das Herabsteigen von der hohen Warte mathematischer Wissenschaftlichkeit zum kindlichen Sinne nicht verschmäht, darf hoffen, das langsam reifende Denken der Knaben und Jünglinge zu höheren Höhen einer freien mathematischen Auffassung von der Welt des Wirklichen und des reinen Gedankens emporzuführen, als wer sich selber von den Zwangsvorstellungen einer bloß vermeintlichen Wissenschaftlichkeit, die auf Stelzen stolziert, statt auf natürlichen Beinen anfangs kindlich zu springen, später männlich ruhig fortzuschreiten, sein Leben lang nicht loszumachen gewußt hat (oder sie gar als den augenblicklichen Modeton bloß äußerlich nachahmen zu sollen glaubt). Volle Freiheit im Überblicken dessen, worauf es mit aller Mathematik überhaupt hinaus will, kann freilich nur derjenige haben, der selbst auf das mathematische Denken noch herabzublicken vermag von der höheren Warte philosophischer, d. h. in diesem Falle vorwiegend erkenntnistheoretischer (psychologischer und gegenstandstheoretischer) Betrachtung. Und selbst solche Philosophie muß es sich gefallen lassen, als ein nach sozialpädagogischem Maße relativ kleiner Teil des allumfassenden Kulturgedankens in den Dienst der „allgemeinen Didaktik als Bildungslehre“ gestellt zu werden.

Sehr unklug aber wäre es, schon nach vorgängigen Erwägungen wie nach trüben Erfahrungen, gedächte man den Leser einer Didaktik von vornherein wie im Fluge auf solche höchste Warten zu versetzen. Es sind daher alle diese Betrachtungen in den dritten (letzten) Teil unter dem Titel bloßer „Rest- und Grenzfragen“ gestellt, wo sie von Dem, der Philosophisches oder allgemein Kulturelles nun einmal nicht liebt, ruhig ungelesen bleiben mögen, ohne daß sie für ihn die Brauchbarkeit des vorausgegangenen zweiten Teiles schmälern oder verderben. Jener dritte Teil will insbesondere nachmals grundsätzlich rechtfertigen, warum es eine mathematische Didaktik wagt, sich von dem Schlagworte der „formalen Bildung“, insoweit dieser ursprünglich wertvolle Begriff eben zu einem bloßen Schlagwort, ja einer bloßen Ausrede für allerlei hohlen Formalismus herabgesunken ist, wenigstens für den Anfang unabhängig zu machen. Während aber das Ausführlichere über diese Haupt-, Zeit- und Streitfragen aller gegenwärtigen Bemühungen um gründliche Mittelschulreform dem X. Bande vorbehalten bleibt, wird sogleich der erste Teil des vorliegenden I. Bandes passend die ganz speziellen inhaltlichen Neuerungen des Mathematikunterrichtes, an die sich dann auch die neuen didaktischen Formgebungen anschließen, zum Ausgangspunkte wählen.

Erster Teil.
Ziele und Wege des mathematischen Unterrichts.

§ 1. Inhaltliche und formale Bildung durch die Mathematik.

Wer Mathematik lernt und lehrt, tut es teils, um den Inhalt dieser Wissenschaft sich und andern anzueignen und dann das mathematische Wissen und Können in anderen Wissenschaften oder im praktischen Leben anzuwenden; teils, um durch die Schulung im mathematischen Denken als solchem noch bestimmte „formale“ Nebenerfolge, namentlich „Schärfung des Verstandes überhaupt“ zu bewirken. Dieser „Wirkungswert“, der „Erziehungswert“[1]) des Mathematiklernens, hat ersterem „Eigenwert“, dem unmittelbaren „Unterrichtswert“ der Mathematik, zeitweilig in den Schulen sogar den Rang streitig gemacht: tatsächlich ist es nämlich im abgelaufenen Jahrhundert beinahe ausschließlich die „formal bildende“ Kraft des mathematischen Denkens gewesen, um deren willen man der Mathematik einen Platz im Gymnasium schon zu einer Zeit einräumte, da man z. B. die Naturwissenschaften als neben dem Sprachunterrichte inhaltlich wie formal noch vollkommen entbehrlich ansah. Seitdem sich nun in diesen Bewertungen der verschiedenen Lehrfächer ein scharfer Wandel zu vollziehen begann, tauchten speziell auch für den mathematischen Unterricht zwei grundsätzliche Fragen auf:

Erstens die allgemeine Frage nach dem relativen Bildungswert der mathematisch-naturwissenschaftlichen und der sprachlich-historischen Lehrfächer (oder wie man kurz, aber in mehrfach schiefer Gegenüberstellung meistens sagt: der „realistischen“ und „humanistischen“ Fächer);

zweitens die speziellere Frage nach dem relativen Bildungswert der Mathematik in inhaltlicher (gegenständlicher, sachlicher, realer) und in „formaler“ Hinsicht.

---

1) Über die pädagogischen Begriffe „Erziehungswert“ und „Unterrichtswert“ vgl. III. Teil, S. 482. Die Begriffe „Eigenwert“ und „Wirkungswert“ gehören der allgemeinen Werttheorie an; vgl. meine Psychologie 1897 (große Ausgabe, S. 424).

Die erste Frage würde zu einer unparteiischen Beantwortung billigerweise voraussetzen, daß man nicht nur die realistischen, sondern auch die humanistischen Bildungswerte für sich umfassend und vorurteilslos eingeschätzt habe, bevor man an die Vergleichung beider geht. – Da dies offenbar über die Aufgabe der vorliegenden, speziell mathematischen Didaktik bei weitem hinausginge, so soll ein kurz vergleichender Blick für den dritten (letzten) Teil dieses Bandes und dann die umfassendere Prüfung für den X. (Schluß-) Band dieser ganzen Sammlung von Handbüchern für den realistischen Unterricht aufgespart bleiben.

Die zweite speziellere Frage aber ist nicht nur schon eine Grundfrage für alle Didaktik des mathematischen Unterrichtes überhaupt, sondern die Herstellung des richtigen Verhältnisses zwischen Inhalt und „Form" ist geradezu der springende Punkt der gegenwärtigen Reformbestrebungen zu einer „zeitgemäßen Umgestaltung des mathematischen Unterrichts". Indem der Meraner Bericht (s. o. S. 5) zwei inhaltliche „Sonderaufgaben: die Stärkung des **räumlichen Anschauungsvermögens** und die Erziehung zur Gewohnheit des **funktionalen Denkens**", an die Spitze des Reformprogramms stellt, fügt er allerdings sogleich hinzu: „Die von je dem mathematischen Unterricht zugewiesene Aufgabe der logischen Schulung bleibt dabei unbeeinträchtigt, ja, man kann sagen, daß diese Aufgabe durch die stärkere Pflege der genannten Richtung des mathematischen Unterrichtes nur gewinnt, insofern dadurch die Mathematik mit dem sonstigen Interessenbereich des Schülers, in dem sich doch seine logische Fähigkeit betätigen soll, in engere Fühlung gebracht wird" (S. 104 des „Gesamtberichtes").

Auch die vorliegende Didaktik stellt sich aus voller Überzeugung in den Dienst gerade eines solchen Programms für die Herstellung des natürlichen Verhältnisses zwischen Inhalt und „Form". Damit es aber hierbei von allem Anfang reinlich zugehe, hütet sie sich schon beim Formulieren der Aufgabe, die der Mathematikunterricht zu lösen hat, vor allem davor, daß die Aufgabe nicht überbestimmt[1]) sei, worauf ja jeder Unterricht gefaßt sein müßte,

1) Also obiges mathematische Gleichnis ins Konkrete ausgeführt: Ein Dreieck von den Seiten 5, 7, 8 hat ja auch drei bestimmte Winkel. Aber nicht nur lehnt der Mathematiker *a limine* die Zumutung ab, ein Dreieck von den Seiten 5, 7, 8 und den Winkeln 30°, 60°, 90° zu konstruieren, da von diesen drei Winkeln eben nur der von 60° zu den gegebenen Seiten paßt; sondern

der sich von allem Anfange zweierlei Ziele, das inhaltliche und das formale, gleichzeitig und nebeneinander stecken wollte; — denn: „Wer zugleich zwei Hasen hetzt, fängt nicht einen ein zuletzt". — Muß aber zwischen den zwei Zielen gewählt werden, so ist es keine Frage, daß das inhaltliche das primäre sein müsse: denn so viel sollte ja jedem Schulmanne von vornherein feststehen, daß eine wertvolle „formale Bildung" an einem in sich wertlosen Inhalt schon darum nicht erworben werden kann, weil das Interesse des Lernenden für inhaltlich Wertloses nun einmal nicht zu erzielen oder gar zu erzwingen ist.

Es sei hier für die Erinnerung festgehalten, daß schon die österreichischen Instruktionen von 1884[1]) die folgende unbefangene

---

auch die Aufgabe von den drei Seiten und dem richtigen Winkel 60° lehnt er ab, weil dieses 60° nicht schon in die Aufgabe, sondern erst in die Lösung gehört. — Ebenso darf ein Unterricht, der seinen Blick von Anfang auf das eine Ziel geheftet hält, daß er einen bestimmten mathematischen Inhalt dem Schüler wirklich von innen heraus zu eigen mache, es ruhig abwarten, daß und welche formal bildenden Nebenerfolge sich aus ihm ergeben werden. Hätte man ihm aber diese Nebenerfolge von Anfang aufgezwungen, so wäre 1 gegen ∞ zu wetten, daß der Inhalt irgendwo brüchig und wertlos gewesen sein wird, und daß eben deshalb auch jener versprochene Nebenerfolg sich schließlich doch nicht verwirklicht. Und vollends, wenn z. B. SCHRADER orakelt, es komme gar nicht darauf an, was Mathematisches gelernt wird, sondern nur darauf, daß durch Mathematik formal gebildet werde, so ist das ebenso innerlich unmöglich, wie wenn man ein Dreieck bloß durch die drei Winkel eindeutig bestimmen wollte. — Vielleicht bringt aber gerade das einen scharfsinnigen Formalisten auf den Einwand, man könne ja ein Dreieck doch auch durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel bestimmen — und man könne ebenso auch zwischen ein größeres oder kleineres bißchen mathematischen Inhalts von vornherein ein vorgeschriebenes Quantum „formalbildender Kraft" gewissermaßen einklemmen. Darauf könnte dann der Mathematiker antworten, daß, wenn bei gegebenen Dreieckseiten der eingeschlossene Winkel allzugroß (freilich auch wenn er allzuklein) genommen wird, zum mindesten der Flächeninhalt des Dreieckes (etwa mit dem Gesamterträgnisse des Unterrichtes zu vergleichen) sich wieder bedenklich der Null nähert. Doch überlassen wir es dem Leser, ob er das Gleichnis tothetzen oder ihm das Recht aller Gleichnisse zugestehen will, von einem bestimmten Punkt an eben zu — hinken. Aber dabei bleibt es auf alle Fälle, daß sich zwar aus den Seiten die Winkel, nicht aber aus den bloßen Winkeln (aus bloß „formalen" Lehrzielen) die Seiten (die Lehrinhalte) ergeben.

1) Dagegen sagte dann 1886 wieder die „Anleitung" von REIDT: „Fassen wir die Aufgaben unseres Unterrichtes noch einmal kurz zusammen, so gehen dieselben dahin, daß die Beschäftigung mit der Mathematik an den höheren Schulen in erster Reihe der logischen Verstandesbildung zu dienen hat. Daneben soll sie den Zöglingen die für eine allgemeine Bildung und als Grundlage späterer Berufsstudien notwendigen positiven Kenntnisse in der Elementarmathematik mitteilen, ihren Raumsinn entwickeln und sie im richtigen sprachlichen Ausdruck des richtig Gedachten üben. Geschieht dies alles

Würdigung aller Bildungswerte der Mathematik gegeben hatten und dabei mit Recht die inhaltlichen an die Spitze stellten:

„Der Studienplan, welcher die gleichmäßige Entwicklung der geistigen Fähigkeiten des Schülers bezweckt, gibt dem mathematischen Unterrichte eine vollständige Gleichberechtigung mit dem sprachlichen und geschichtlichen Unterrichte. Drei Faktoren sind es, welche der Mathematik diese Stellung in jedem Unterrichtssysteme sichern, das eine höhere allgemeine Geistesbildung anstrebt: erstens der Inhalt dieser Wissenschaft und die eigentümliche Form, in welcher er zur Entfaltung kommt, zweitens der Einfluß ihres Studiums auf die Entwicklung der höheren Geisteskräfte und drittens ihre engen Beziehungen zu weiten Gebieten der Erkenntnis, zur Industrie und zum sozialen Leben.“

Gerät aber die Didaktik des mathematischen Unterrichtes durch ein solches Voranstellen des Inhaltes nicht sogleich zu Beginn in eine Verlegenheit? Früher hatte sie an der Formel von der „formalen Bildung“ ein bequemes Werkzeug, um alle Fragen, was und wieviel man denn nun an Mathematik lehren solle, von vornherein als untergeordnet abzuschneiden, und sie ließ sich hierin blindlings von den hergebrachten Stoffausmaßen leiten. Gibt es nun dagegen auch im mathematischen Inhalt eine natürliche obere Grenze, bis zu der der Unterricht fortgeführt werden kann und soll, damit der Schüler selbst inne werde, warum man ihn gerade nur so weit führt, und daß er an dem Erlernten wirklich ein natürliches Ganze besitze? Früher hörte man mit dem Mathematikunterricht eben dann auf, wenn der hergebrachte „Lehrstoff absolviert“ war. Ob der binomische Satz oder die Asymptoten der Hyperbel oder eine bestimmte Formel der sphärischen Trigonometrie oder die für das Kugelsegment das letzte war, war ja vom „formalen“ Standpunkte gleichgültig.

Indem wir im folgenden Paragraphen den Funktionsbegriff als eine solche natürliche Krönung des mathematischen Unterrichtes an höheren Schulen zu erweisen suchen, ergibt sich auch für die Didaktik als solche der Vorteil, daß wir gleichsam nach dem Gewicht eines solchen Daches erst die Stärke der nötigen

---

in rechter Weise, so ergibt sich die Lösung der übrigen Aufgaben, die Übung des Gedächtnisses und der Befähigung zu richtigem Arbeiten, die Weckung wissenschaftlichen Geistes und der Empfänglichkeit für das Schöne, die Pflege der Liebe zum Wahren und Rechten, die Erziehung zu geistiger Selbständigkeit und Freiheit, fast von selbst.“

Tragepfeiler und die Breite und Tiefe der Fundamente bemessen können. – Wie eine Didaktik auf alle Fälle über dem Lehrstoff stehen muß, so ist es ihr auch angemessen, alle ihre Maßregeln unter fortwährendem Hinblick auf die Krönung des Gebäudes der Mittelschulmathematik (seinen „First") einzurichten, und schon deshalb sei das erste ein Vorblick auf den Funktionsbegriff im Mittelschulunterricht.

§ 2. Funktionales Anschauen und Denken. – Der Funktions-Begriff als natürliche Grenze zwischen niederer und höherer Mathematik.

Von den beiden inhaltlichen Zielpunkten der Meraner Vorschläge (s. o. S. 16) hat der zweite, das „funktionale Denken", so allgemeine und rückhaltlose Zustimmung gefunden, daß nicht mehr Beweise für diese allgemeine These nötig, sondern nur noch Ratschläge für ihre didaktisch wirksame Durchführung erwünscht sind. Da versteht es sich nun vor allem, daß auch hier der allgemeine[1]) Begriff der Funktion nicht das erste, sondern das letzte in einem planmäßigen Unterricht sein muß, und daß auch diesem allgemeinen Begriff die vorbereitenden Anschauungen an konkreten Beispielen nicht fehlen dürfen.

Ein solches deutliches Auseinanderhalten von „funktionalem Anschauen" (ein bisher allerdings nicht eingebürgerter Ausdruck) und „funktionalem Denken" dürfte dann neben seiner didaktischen Wichtigkeit auch eine ungezwungene Antwort liefern auf eine jüngst aktuell gewordene Streitfrage: Gibt es eine natürliche Grenze zwischen niederer und höherer Mathematik? Die von Felix Klein[2]) im Zusammenhange mit seiner Forderung der Pflege infinitesimalen Denkens an höheren Schulen erörterte Frage ist von ihm mit unwiderleglichen Gründen dahin beantwortet worden, daß weder der Unterschied von Diskretem und Kontinuierlichem noch der zwischen Endlichem und Unendlichem u. dgl. eine scharfe Abgrenzung begründen könnte. Obwohl die ganze Frage, wie alle Fragen bloßer Einteilungen und

1) Es sei hier ein für allemal daran erinnert, daß dieses „allgemein" nur relativ gemeint ist, im Gegensatz zu speziellen Funktionen wie x^2, $\log x$, $\sin x$; nicht aber davon die Rede sein kann, den Schüler in die letzten Verallgemeinerungen, die der allgemeine Begriff des $f(x)$ innerhalb der mathematischen Wissenschaft weiterhin erfahren hat, einweihen zu wollen. (Vgl. S. 311.)

2) Vgl. das zweite Kapitel seiner „Zeitgemäßen Umgestaltung usw." (s S. 4).

Terminologien, an sich von geringem Belang ist, sei sie doch hier, weil sie im gegenwärtigen Kampfe um „höhere Rechnungen an höheren Schulen" (vgl. den Anhang §§ 42–46) zu einer Streitfrage der mathematischen Didaktik als solcher geworden ist, mit dem Hinweis auf eine didaktische Beobachtung beantwortet, die jeder Lehrer während seiner eigenen Lernzeit gemacht zu haben sich erinnern wird:

Zweimal während des Emporsteigens aus den Niederungen in die höchsten Höhen der Mathematik hat man den Eindruck, einen ganz besonders nachdrücklichen Schritt vom Besonderen ins Allgemeine getan zu haben: das erstemal beim Übergang vom Ziffernrechnen zum Buchstabenrechnen, von besonderen Zahlen (2, 3, $^2/_3$, . .) zu den allgemeinen (a, b, . . x); und das zweitemal beim Übergang von den gelegentlich behandelten besonderen Funktionen x^2, $\sqrt{x}$, x^m, $\log x$, $\sin x$ usw. zum allgemeinen Funktionsbegriff [$y = f(x)$, $F(x, y, z, u, ..) = 0$]. Den ersten Schritt pflegt der Schüler beim Übergang von der Unter- auf die Mittelstufe des Gymnasiums oder der Realschule zu tun, den zweiten beim Übergang von der höheren Schule auf die Hochschule. – Wir brauchen also nur dieses Hergebrachte in bewußter Weise festzuhalten, indem wir ausdrücklich den Übergang zum Buchstabenrechnen als zusammenfassenden Abschluß der Unterstufe und analog das streng wissenschaftliche Denken gemäß dem Funktionsbegriffe als zusammenfassenden Abschluß der Oberstufe aufstellen. Und da zu dieser Handhabung des Funktionsbegriffes die Frage: „Wie geschwind steigt oder fällt eine gegebene Funktion für einen gegebenen Wert der unabhängig Veränderlichen?" sicherlich keine erst künstlich hineingetragene, sondern auch dem Schüler ganz natürlich sich aufdrängende Frage ist, auf die die einzige korrekte Antwort eben der Differentialquotient gibt, so bildet ein weise beschränktes Maß von Differentiieren (und Integrieren) den ebenso natürlichen Abschluß der Oberstufe, wie ein weise beschränktes Maß von Buchstabenrechnen den der Unterstufe.

Doch zurück zum Funktionsbegriff selbst und seiner didaktischen Vorbereitung im Unterricht. Der Verfasser darf wohl seiner Freude Ausdruck geben, daß er schon vor mehr als zwanzig Jahren (1887) in Hoffmanns Zeitschrift auf die nunmehr zeitgemäß gewordene Bedeutung des Funktionsbegriffes für den

Mittelschulunterricht hingewiesen und diese Hinweise 1891[1]) erneuert hat:

„Der mathematische Unterricht – und nicht minder der physikalische, wenn er in seinem mathematischen Teile wirklich zum geistigen Eigentum des Schülers werden soll – verlangt, daß längstens in der VII. Klasse[2]) der Schüler mit derjenigen Vorstellungsweise vertraut werde, welche in den Begriffen der mathematischen Funktion und der unabhängig und abhängig veränderlichen Größen ihre exakte wissenschaftliche Fassung findet. Ich habe schon in einem Aufsatze in Hoffmanns Zeitschrift für den mathem. und naturw. Unterricht (Netz, Oberfläche und Kubikinhalt des Zylinderstutzes und der Kugel, Jahrg. 1887, S. 1–26) die Forderung aufgestellt, »daß das Vertrautwerden mit dem Funktionsbegriff, d. h. die Gewöhnung, die Gebilde der Elementararithmetik und die goniometrischen Funktionen ganz ausdrücklich *sub specie* des „Funktions-" begriffes zu betrachten und zu beherrschen, das natürliche Ziel des ganzen mathematischen Mittelschulunterrichtes bilden sollte.« Ich habe dort (S. 24, Anm.) auch die Hauptstelle aus den österreichischen Instruktionen von 1884 angeführt, welche zeigt, daß diese meine Forderung an dem Geiste unseres gegenwärtigen Gesetzes gewiß kein Hindernis findet. Insbesondere aber wird in der genannten Stelle darauf hingewiesen, daß der Schüler mit der Methode der Darstellung von Funktionen durch Kurven auch deshalb „vertraut" zu machen sei, da sie „selbst auf nicht streng mathematischem Gebiete ihre Anwendung hat, wenn es sich darum handelt, den allgemeinen Charakter eines Gesetzes deutlich aufzufassen, welches in einer Reihe genauer Beobachtungsresultate irgend einer Art herrscht." Wer dieser Anregung der Instruktionen voll gerecht werden will, wird den Wunsch haben, vor allem physikalische Gesetze, wie das in der Galileischen Fallgleichung $s = at^2$ ausgedrückte, „*sub specie* des Funktionsbegriffes" auffassen zu lehren, d. h. er wird dem Schüler die Formel nicht bloß als ein Mittel darbieten, sich zu Spezialwerten des t die Spezialwerte des s zu berechnen, sondern sich t als stetig (und zwar unabhängig) veränderlich, s als ebenfalls stetig (abhängig) veränderlich vorzustellen und so gleichsam in der Formel zu sehen, wie der Körper mit der Zeit tiefer und tiefer sinkt. So wenig dergleichen *materialiter* über die Aufgabe des herkömmlichen Physikunterrichtes hinausgeht, so muß doch zugestanden, ja betont werden, daß der Schüler mit dem Erwerb gerade dieser Vorstellungsweise in eine neue Welt eingeführt wird; und daß

1) Zeitschr. Österreichische Mittelschule, V. Jahrg. 1891 (S. 105–133), im Anhange der „Bemerkungen zu den Berliner Verhandlungen über Fragen des höheren Unterrichtes. Mit besonderer Beziehung auf Mathematik und Naturwissenschaften." (In Sonderausgabe erschienen bei Hölder, Wien 1891).

2) Es ist die VII. Klasse nach österreichischer Bezeichnung (U I nach preußischer) gemeint. Vgl. über diese Bezeichnungen und Beziehungen S. 50 und 430.

derlei somit nicht durch einen einmaligen „Vortrag“ in einer bestimmten Mathematikstunde, wenn man gerade „zur analytischen Geometrie gekommen“ ist, erreicht wird, sondern nur durch ein beharrliches Benützen aller sich darbietenden Gelegenheiten, bis sich eben zeigt, daß nun wirklich jene Vorstellungsweise zum Eigentum des Schülers geworden sei, welches ihm bei allen weiteren Gelegenheiten zu freier Verfügung steht.“

Zur Erläuterung der natürlich auch für die zweckmäßigste Einführung des Funktionsbegriffes in den Unterricht geltenden didaktischen Regel: Erst nach vielseitiger Vorbereitung durch charakteristische Spezialfälle den letzten Schritt der Verallgemeinerung! – steigen wir rasch einmal die Vorstufen hinab, die nachmals den Schüler allmählich zu der Höhe des $y = f(x)$ emporführen sollen.

Da der mathematische Unterricht in der Hauptsache zum inhaltlichen Abschluß schon im vorletzten Jahrgang gelangen soll (der letzte dient der zusammenfassenden Wiederholung des gesamten Lehrstoffes), so bilde den Anfang dieses vorletzten Jahrganges ein Vorkursus aus der analytischen Geometrie (S. 314 ff.), indem zu einzelnen Gleichungen die Kurven, zu einzelnen Kurven die Gleichungen aufgestellt werden. Dies also die letzten Vorübungen, aus denen dann der große Gedanke erwächst: Zu jeder Gleichung eine Kurve, zu jeder Kurve eine Gleichung[1]).

Im vorausgehenden Jahrgang, dem untersten der Oberstufe, können und sollen Vorübungen in der graphischen Darstellung mannigfacher charakteristischer Beispiele von Gleichungen zweier Variablen vorausgegangen sein, namentlich die graphischen Darstellungen der Funktionen log und sin, cos, tg, ctg u. dgl. Es kann dies geschehen, auch ohne daß schon die Ausdrücke „Koordinatensystem und Koordinaten“ und auch nur die Zeichen x und y für die beiden Variablen benutzt werden. Vielmehr ganz *ad hoc* der Funktion log: Wir tragen z. B. an der Zahlenlinie die Punkte für die Zahlen 0, 1, 2, 3 . . . 10 . . . 100 auf, errichten bei 10 eine Normale von 1 cm, bei 100 eine Normale von 2 cm usw. Ähnlich bei den Kurven für die goniometrischen Funktionen – worüber näheres im § 24 und §§ 28, 29.

1) Dem mathematischen Fachmann ist es bekannt, welche nähere Bestimmungen und Einschränkungen obiger Satz verlangen würde; nur weniges davon wird auch im Schulunterrichte überhaupt zur Sprache zu bringen sein; z. B. daß man von seiner eigenen Silhouette schwerlich wird die „Gleichung“ aufstellen und diese einem mathematisch gebildeten Freunde anstatt einer Photographie mitgeben können.

Auf der *Mittelstufe* dürften den wirksamsten Anlaß zu einem Denken nach dem Funktionsbegriff die *Verhältnisse* geben, nämlich die, bei denen *nicht* mehr die *einfach* direkte oder verkehrte Proportionalität gilt. Also z. B.: Nach einem Beispiel von HEIS (§ 33a, Nr. 32) soll der Preis der Diamanten nicht einfach nach dem Gewicht, sondern nach dem quadratischen Verhältnis wachsen[1]). Dieses beim Kauf von Stoffmengen ungewohnte Verhältnis reizt eben hierdurch zum Nachdenken, und der Lehrer mag sich dies zunutze machen und ohne jedes Präambulum („Wir werden jetzt eine graphische Darstellung geben" oder gar „Wir werden das in einem Koordinatensystem darstellen") ganz unbefangen mit dem Finger in die Luft eine Gerade / und eine Kurve so  und eine so  zeichnen und fragen: Nach welcher dieser Kurven wächst also der Preis des Diamanten mit seinem Gewicht? Die Antworten werden in den allermeisten Fällen ganz richtig für die zweite Darstellung stimmen. Erst hieran mag sich die Reflexion[2]) knüpfen: Was haben wir jetzt

1) In den IV. Jahrg. fallen nach dem österreichischen Lehrplan auch die Fallgesetze der Mechanik, die ein typisches Beispiel für das *Wachsen nach dem Quadrat* abgeben. Dazu (schon in III) das *Abnehmen nach dem Quadrat* bei magnetischen, elektrischen Kräften, bei Schall- und Lichtstärken.

2) Zum Belege dafür, wie früh und ungesucht sich ein „Denken in Kurven" einstellen kann, wenn man dabei nur den natürlichen mathematischen Instinkt zu Worte kommen läßt und nicht etwa das Bedürfnis nach *Veranschaulichung* durch ein vorzeitiges Einpanzern in den gelehrten Funktionsbegriff erstickt, führe ich hier folgende Beobachtung an einem „Knaben Karl" an. Als er in seinem neunten Jahre einmal Fieber hatte, trug ihm der Arzt auf, sich selber das Thermometer einzulegen und die beobachteten Wärmegrade aufzuschreiben. Zwei Tage darnach sagte K.: „Herr Doktor, ich habe hier die Kurve des Fiebers aufgezeichnet." Auf die Frage des Arztes, wer ihm das gezeigt habe, antwortete K.: „Vor einem Jahre hat Papa die Gewichtskurve des kleinen Otto aufgezeichnet; da dachte ich mir, man kann auch die Kurve des Fiebers aufzeichnen." Als der zwölfeinhalbjährige K. wieder ein Brüderchen bekam, wurde er beauftragt, nun selber die Gewichtskurve auf Millimeterpapier zu zeichnen. Er sann sich richtig aus, die Kurve der ersten Wochen am *unteren* Teil des Millimeterpapieres anzulegen, so daß die Kurventeile der späteren Wochen sich am linken Rande immer in derselben Höhe fortsetzten, wo die der früheren Wochen am rechten Rande geendet hatten. Dabei sagte er: „Papa, das sind aber keine solchen Kurven, wie sie in der Mathematik vorkommen"; und auf die Frage „Wieso?": „Die in der Mathematik haben immer ein bestimmtes *Gesetz*, diese hier aber nicht." Auf den Einwand, das Gesetz sei hier nur ein sehr verwickeltes, erwiderte K.: „Man kann doch nicht sagen, daß das *dasselbe* Gesetz ist, wenn die Kurve, seitdem eine andere Amme gekommen ist, auf einmal viel schneller ansteigt." Nachdem solche Proben vorlagen, daß hier das Denken in Kurven schon in Fleisch und Blut übergegangen sei, durfte es auch auf weitere Proben gestellt werden ohne Befürchtung, eine mathematische Frühreife künstlich her-

eigentlich gemacht? Und der Schüler selbst mag die Antwort finden: Wir haben nach wagrechter Richtung das wachsende Gewicht, nach lotrechter die zugehörigen Preise aufgetragen. Damit das ein exaktes Denken und Zeichnen gäbe, müßten dann freilich bestimmte Strecken für die Einheiten des Gewichtes und des Preises festgesetzt worden sein usw.; doch kann es auf dieser Stufe noch nicht darauf ankommen, das Aperçu (denn wie ein solches hat es ja der Lehrer vorgebracht) schon in feste mathematische Formen zu fassen; Hauptsache bleibt vielmehr, daß der Schüler inne wird: es gibt auch noch andere Arten des Wachsens als das „nach der geraden Linie", wie es der einfachen Proportion entspricht. – Ist diese besondere Rolle der geraden Linie zur Darstellung einfacher direkter Proportionalität einmal erfaßt, so wird auch die Geometrie der Strahlenbüschel, der perspektivischen Zuordnung und die sonstige geometrische Ähnlichkeitslehre vom Schüler sogleich in dem neuen Lichte gesehen werden (vgl. S. 87). – Im übrigen warte der Lehrer geduldig ab, ob nun nicht immer häufiger dem Schüler selbst sich die Frage aufdrängt: „Nach welchem Gesetz nimmt dies und jenes mit diesem und jenem zu oder ab?" Von „Gesetzen" werde von da ab fleißig gesprochen (und wird ja auf der Unterstufe des physikalischen Unterrichtes beständig gesprochen). Von „Gesetzen" – noch lange nicht von „Funktionen", sondern dies eben erst im ersten Jahrgang der Oberstufe bei den „goniometrischen Funktionen", wie man sie längst genannt, den Schüler aber dabei in künstlicher Gedankenlosigkeit gehalten hatte. – Öfters wird da die Frage noch nicht zur Antwort, aber dafür zu umso heilsamerer Neugier führen. Z. B. Die Sehne nimmt mit dem Zentriwinkel zu, aber offenbar ebenfalls nicht einfach proportional; nach welchem Gesetz es wirklich geschieht, bleibe dem Schüler eine Sache der einstweilen nicht zu befriedigenden Neugier bis zum nächsten Jahr, wo er die Funktion

vorzulocken. Z. B.: An einem Auerbrenner wurde beobachtet, daß, wenn der Gashahn ganz geöffnet wird, der Strumpf nicht die größte Lichtstärke gibt (da der allzureichliche Gasstrom abkühlend wirkt). Bei langsamem Zudrehen des Hahnes steigt die Lichtstärke, wird aber von einem bestimmten Punkte ab plötzlich viel schwächer. K. wurde aufgefordert, die entsprechende Kurve mit dem Finger in die Luft zu zeichnen, und er gab richtig an: . Erst hinterher gab er sich darüber Rechenschaft, daß hier nach wagrechter Richtung die Drehungswinkel des Hahnes (wie die Stunden bei der Fieberkurve, die Tage bei der Gewichtskurve), nach lotrechter Richtung die Lichtstärken (wie die Wärmegrade bzw. Gewichte) aufgetragen worden seien.

sin und als eine ihrer Anwendungen die Beziehung $\frac{s}{2} = r \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$ kennen lernt. – Ein noch näher liegendes Beispiel ähnlicher Art ist der Satz: Im ebenen Dreieck liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber; auch hier wird der vage und sonst verpönte Ausdruck des bloßen „Größer“ erst später durch die Sinusbeziehung zwischen Seite und Winkel präzisiert.

Oder ist es überhaupt eine didaktische Ketzerei, wenn wir im Schüler eine Neugierde erwecken, die erst ein ganzes Jahr später ihre Befriedigung findet? Wollten wir doch an den Wert von Anregungen, selbst wenn ihre Befriedigung viel später, ja wenn sie nie erfolgen kann (wie es mit so manchen späteren Lebensfragen geht), fröhlich glauben; wie häufig sind Anregungen wohltätiger als die Befriedigungen, vollends die vorzeitigen! –

Aber auch schon auf der Unterstufe bei den Umfangs- und Flächenbeziehungen bieten sich ganz von selbst die Gelegenheiten, z. B. an dem $u = r \cdot 2\pi$ und $f = r^2\pi$ (und überdies $r = \sqrt{\frac{f}{\pi}}$ u. dgl. m.) das Wachsen einfach mit einer Länge (r) oder das Wachsen im quadratischen Verhältnis (oder auch nach der Quadratwurzel) in den Blickpunkt der Aufmerksamkeit zu rücken. Will man dies tun, so lasse man z. B. die Formeln für Höhe und Fläche des gleichseitigen Dreieckes nicht nur in den Formen $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ und $f = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, sondern auch in der Form $h = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $f = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$ oder $h = 0{,}866\ldots a$ und $F = 0{,}433\ldots a^2$ schreiben (hierüber näheres in § 15). – Auch diese Dinge brauchen keineswegs in einem Tone hervorgebracht zu werden, der die Dreizehnjährigen als gelehrt[1]) befremden müßte und sie in diesem

---

1) Z. B. Den Satz, daß das Volumen der Kugel mit der dritten Potenz des Radius wächst, mag ein Lehrer, der sich den nötigen Humor zutraut, in folgender Form vorbringen (die freilich noch immer nicht so appetitlich ist wie BASEDOWS Fibelbuchstaben aus Lebkuchen): Welchen Durchmesser haben die Knödel, die du zu verspeisen pflegst? Der Schüler gibt ihn durch den Abstand zweier Fingerspitzen an. L.: „Gesetzt, die Köchin machte einmal die Knödel nur von diesem Durchmesser (er zeigt mit den Fingerspitzen den halben Abstand); was meinst du wohl, wieviel solcher kleiner Knödel müßtest du verspeisen statt je eines von den großen?“ Schwerlich werden die Schüler sogleich auf die Antwort „acht“ raten. Die weiteren Mitteilungen, daß es bei $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ des Durchmessers 27, bzw. gar 64 Knödel bedürfte, werden ungläubig angehört werden; umso lebhafter wirkt aber dann dieses Gesetz der dritten Potenz – und aus dem ganzen Verhalten der Kinder wird sich zeigen,

Falle nur abstoßen, nicht aber zum Interesse für ein beständiges Denken in (noch nicht an!) Funktionen heranziehen könnte.

Sogar in den beiden untersten Jahrgängen würde es nicht ganz an Anlässen zu funktionalem Denken fehlen: denn solches sind die zahlreichen Beispiele über direkte und verkehrte Proportionalität (die jedenfalls mittels Schlußrechnung schon auf der Unterstufe auch dann zu pflegen sind, wenn man die formelle Proportionslehre für die Mittelstufe aufspart, vgl. S. 87). Sie bilden dann sogleich auch wieder auf der Mittelstufe für den etwas weiter Denkenden das grundlegende, typische Beispiel einer „Abhängigkeit" zweier Größenreihen voneinander. Aus dem zehn- und elfjährigen Kinde wird man aber auf der Unterstufe hier noch schwer und auf keinen Fall pädagogisch zweckmäßig ein vorzeitiges theoretisches Erfassen auch nur dieses speziellen Abhängigkeitsgedankens hervorlocken, da es ihm anfänglich ja ganz selbstverständlich erscheint, daß, wenn z. B. 1 Apfel 3 Pfennig kostet, 2, 3, 4 Äpfel 6, 9, 12 Pfennig kosten müssen. Erst der Hinweis auf Fälle, daß und warum sich ein solches Wachsen einfachster Art doch nicht immer und überall bewährt, geschweige von selbst versteht (wie in dem oben angeführten Beispiele von Edelsteinen, ebenso bei Glastafeln, Bauhölzern u. dgl.), mag ein sozusagen negativer Anlaß zu einem ersten bewußten Aufmerken auf den Abhängigkeitsgedanken als solchen bilden. — Nur wer sich mit solchen Übungen zuerst nur im anschaulichen Erfassen ganz konkreter einfachster Abhängigkeiten, also kurz im „funktionalen Anschauen", zu bescheiden weiß, mag sagen, er habe schon von der untersten Klasse das „funktionale Denken" zu pflegen begonnen. — Hoffen wir, daß diese gar nicht genug zu begrüßende erste inhaltliche Reformforderung nicht etwa durch ungeschickte Ver-

---

daß es noch lange nicht fest genug gesessen war, wenn sie auch noch so gut „wissen", daß z. B. 1 dm^3 aus $10 \times 10 \times 10$ cm^3 besteht.

Wie später (S. 144) zu begründen sein wird, mag es sich auf der in Rede stehenden Stufe empfehlen, die vollständige Formel für das Volumen der Kugel, d. h. den Proportionalfaktor $\frac{4}{3}\pi$ zum r^3, höchstens mitzuteilen, jedenfalls noch nicht zu „beweisen". Aber gerade weil es sich neben und vor dem funktionalen Denken hier einstweilen um „funktionales Anschauen" handelt, ist schon die dritte Potenz als solche (die ja durch den Würfel *per analogiam* genügend vorbereitet und gestützt ist) an der Kugel sogar drastischer zu veranschaulichen als selbst am Würfel: nämlich allenfalls durch das stetige Aufblähen einer Seifenblase, durch das Zusammenlaufen von zwei und mehreren Quecksilbertropfen zu einem nur sehr wenig dickeren Tropfen u. dgl.

frühungen und sonstige Übertreibungen zu Tode gehetzt werde. Indem wir unsererseits den allgemeinen Funktionsbegriff erst für den vorletzten Jahrgang aufzusparen empfehlen und alles Frühere nur in der Weise ganz ungekünstelter Übungen zu behandeln raten, hoffen wir, das Unsrige gegen solche Verfrühungen getan zu haben. Möchte sich doch auch im übrigen der leider bei manchen Lehrern selbst gelegentlich dieser an sich so ausdrücklich antiformalistischen Neuerung zu beobachtende Hang zum Formalismus nicht des Schlagwortes „Pflege des funktionalen Denkens" (und speziell auch nicht seiner Fortführung „bis an die Schwelle der Infinitesimalrechnung") bemächtigen! Dem guten Willen jedes nicht von vornherein formalistisch gesinnten Lehrers, dieses funktionale Denken dem Schüler nicht aufzuzwingen, sondern dessen allmähliches Reifen bis zum wissenschaftlichen Funktionsbegriff nur bei jeder aus dem Inhalte selbst sich darbietenden Gelegenheit sorgsam und wirksam zu fördern, wird der beste Bundesgenosse ein lebensvoller naturwissenschaftlicher Unterricht bleiben; worüber nähere Ratschläge an mehreren Stellen des vorliegenden Buches.

§ 3. Der Unterbau im mathematischen Unterricht.

Zugegeben also, daß der Funktionsbegriff für alle übrige Stoffwahl den Maßstab (gelegentlich auch ein Sieb dafür) abgibt, wo es mit der „Elementarmathematik" an höheren Schulen in deren obersten Klassen überhaupt hinaus will – wie hat sich dann der Unterricht in den mittleren und untersten Klassen[1]) zu verhalten, damit er jener Kuppel die tragfähigen Pfeiler abgebe? Denn beileibe nicht soll fortab der Schüler etwa nur mit Kurven ein

1) Es sollte sich von selbst verstehen, daß die Lehrer der Mathematik auch schon in den untersten Klassen ein deutliches Bild davon haben müssen, wo es mit dem ganzen Unterricht auch in den obersten Klassen hinaus will. Der Lehrer späterer Jahrgänge darf sich mit Recht über einen Fehler in der Organisation des ganzen Unterrichts beklagen, wenn in den untersten Klassen gewisse späterhin immer wieder benötigte Fertigkeiten nicht zu voller Sicherheit eingeübt worden sind, wogegen auf anderes viel Zeit verwendet worden war, von dem dann oben doch kein Gebrauch mehr gemacht wird. Die Ausrede, daß dieses atrophisch werdende Stück des Anfangsunterrichtes seinerzeit „formal bildend" gewirkt habe, wenn es sich auch nachmals als inhaltlich wertlos herausstellt, werden wir ebensowenig für eine Rechtfertigung der verlorenen Zeit gelten lassen, wie wenn sich ein verödeter Sprachunterricht angesichts des nur zu häufig stolpernden Übersetzens (geschweige „Klassikerlesens") bei der Maturitätsprüfung sogar noch rühmt: „Ja, das Übersetzen haben sie freilich nicht gelernt, aber formal gebildet sind sie!"

bißchen flunkern, aber schon im Falle des Auswertens einer Funktion für numerische Werte der Variabeln sich als Stümper im Rechnen zeigen. Nichts darf den Mittelschüler auch künftighin von einer soliden Fertigkeit im Rechnen und Zeichnen lossprechen; worüber Näheres im § 52.

Vorerst aber soll uns eine weitertragende Erwägung über das Verhältnis zwischen dem Unter- und Oberbau des mathematischen Unterrichts beschäftigen, die wir am besten durch Worte des Astronomen Wilhelm Förster[1]) einleiten:

„Bekanntlich sind alle großen mathematischen Denker und Lehrer darin einig gewesen, ein möglichst schnelles Durchlaufen der unteren Stufen mathematischen Lernens selbst auf Kosten der Gründlichkeit zu verlangen, weil die höheren Stufen immer mehr Licht und Freude auch für das Verständnis der unteren Stufen bringen, sobald man auch nur notdürftig zum Verständnis dieser höheren Stufen reif geworden ist; wobei jedenfalls anschaulichste Anwendungen die entscheidende Hilfe gegen die etwa noch verbliebenen Reste der Unklarheit bringen. Energisch gefördertes Zurückgreifen ganzer Schülergruppen auf die unteren Stufen des mathematischen Lernens, verbunden mit geeigneter Anwendung derselben auf praktische Probleme, ist dann völlig geeignet, sogar weit vorausgreifende Sprünge des Fortschreitens in der solidesten Weise auszugleichen."

Vielleicht können sich die Erfindungsgabe und der Takt des Lehrers nach keiner anderen Richtung so fruchtbar betätigen als

---

1) Aus dem Vortrag „Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht". (Wieder abgedruckt in „Lebensfragen und Lebensbilder". Berlin 1902.)

In ganz ähnlichem Sinne hatte schon Dühring (Gesch. der Mechanik, II. Aufl. 1877, S. 492ff.) gesagt: „Die niederen Stufen sind nur als Mittel zu schätzen, um zu den höheren und höchsten zu gelangen. Eine Behandlung der Studien, welche sich nach diesem Grundsatz richtet, wird die heutigen Niederungen der Mathematik, die in der Form nichts Anziehendes bieten, so rasch als möglich hinter sich bringen und weder in Arithmetik und Algebra noch in den geometrischen Gebieten länger als irgend nötig verweilen." — Auch im übrigen bewegt sich die dieser zweiten Auflage beigegebene „Anleitung zum Studium der Mathematik" (wobei freilich von manchen Übertreibungen abgesehen werden muß) in derselben Richtung wie die gegenwärtige Reform; z. B.: „Bei dieser Betrachtungsart der mathematischen Studien bleibt schließlich nicht einmal die Mathematik an sich selbst in ihrer Absonderung der maßgebende Gesichtspunkt, sondern Mechanik und Physik sind die ersten Naturwirklichkeiten, um deren Bedürfnisse man sich vornehmlich zu kümmern hat. Für die praktische Behandlung der Dinge unterliegt dies nicht dem mindesten Zweifel; aber auch das reine Bildungsinteresse, welches in einer strengen Weltanschauung gipfelt, muß in der Benutzung der Mathematik zur Ergründung der Naturverfassung die beste Frucht jener rein abgezogenen und sich sonst spekulativ verlierenden Erkenntnis sehen."

in der besonnenen Befolgung dieses Rates – und vielleicht erschrickt ein anderer Teil der Lehrer über keinen anderen Reformvorschlag so heftig als über die Zumutung, einen flotten Mathematikunterricht „selbst auf Kosten der Gründlichkeit" zu erteilen! Ja mit einigem Mangel an gutem Willen, den wahren Sinn jenes Rates zu verstehen, wird der *laudator temporis acti* mit diesem Schlagwort überhaupt die ganze gegenwärtige Reformbewegung gerichtet zu haben meinen. – Solchen gegenüber würde es nichts helfen, wenn wir zur Verteidigung dieses Rates vorübergehender Ungründlichkeit auf die Analogie des Turnlehrers verwiesen, der, wenn es anfangs mit dem Bockspringen nicht recht vorwärts will, durch einen etwas gewaltsamen Griff den Anfänger über das Hindernis hinwegbugsiert, was bekanntlich nicht hindert, daß alsbald Lehrer und Schüler die Freude erleben, daß es dann auch ohne solchen „Schwindel" geht. Sehen wir vielmehr der Sache direkt ins Antlitz – was kann mit jenem Rat ohne alles Gleichnis gemeint sein?

Die Kenner der neuesten strengsten Durchbildung, die ebenso die Grundlagen der Geometrie wie der Arithmetik erfahren haben und noch erfahren, wissen nur allzuviele Beispiele dafür, was zu einer vollen Strenge und Gründlichkeit mathematischer Deduktion gehören würde und was doch ganz gewiß keine richtige Kost für den Anfänger ist, einfach deshalb, weil er sie überhaupt nicht schluckt, oder wenn er trotz passiven Widerstandes „mit mathematischer Strenge" (im doppelten Sinne) gehudelt und genudelt worden wäre, die aufgezwungene Kost doch ganz gewiß nicht verdaut. – Oder will man wirklich von $\sqrt{2}$ nicht reden, ohne sich in alle Schwierigkeiten des Irrationalen und ihre Lösung durch den Begriff des DEDEKINDschen „Schnittes" oder der CANTORschen „Reihenzahlen" gestürzt zu haben? Oder will man HILBERTS „Grundlagen der Geometrie" vortragen, ehe man die Geometrie selber vorträgt? – Doch wir brauchen nicht durch offenbar übertreibende Zumutungen den Gegner der angeratenen Ungründlichkeit mehr scheinbar als wirklich ins Unrecht zu setzen. Gehen wir aber auch nur das primitivste der Lehrbücher, wie sie durchschnittlich heute im Gebrauch sind, nach Inhalt und Form durch, so treffen wir z. B. in der Geometrie auf Ketten von Lehrsätzen und Beweisen, deren Verkettung bei dem jeweilig gewählten Lehrgang (gleichviel, ob es der Euklidsche oder ein modern projektiver ist) sicher nicht in seine Elemente zerrissen und einzelner

Glieder beraubt werden könnte, ohne daß die übrigen Glieder ihren logischen Halt verlieren. Und dennoch: Vergleichen wir Sätze wie den Pythagoreischen oder den vom Winkel im Halbkreis oder die Formel für Umfang und Inhalt des Kreises usw. mit Sätzen wie den, daß zum größeren Zentriwinkel der größere Bogen und die größere Sehne gehört, sowie die zugehörigen Beweismittel, daß im Dreieck der größeren Seite der größere Winkel gegenüberliegt, so dürfte es nicht bloß Geschmacksache sein, wenn man diese schal findet im Vergleiche zu jenen.

„Einen erklecklichen Satz will ich und der auch was setzt" sagt der Philosophenlehrling bei SCHILLER; und so denkt und fühlt auch der Geometrielehrling, falls er nicht durch jahrelange Dressur jeden persönlichen Geschmack an den mathematischen Lehrstoffen, mit denen er gewaltsam gefüttert worden ist, verloren hat. Demnach vertreten wir denn für die Vorschule der Geometrie auf der Unterstufe den ketzerischen Rat, den Schüler vor allem einmal mit den „erklecklichen Sätzen" bekannt und vertraut zu machen. Und da es, wie zugestanden, ohne jene minder erklecklichen Sätze eine streng logische Verkettung nun einmal nicht gibt, so lassen wir unter bewußtem Verzicht auf eine auch nur halbwegs streng logische Begründung für den Anfang fast ausschließlich die empirische Gewinnung und Erprobung der Sätze durch Nachmessen u. dgl. treten. Dies das eine Beispiel von systematisch-pädagogischer Ungründlichkeit. – Das andere Beispiel sei jene berüchtigte „streng wissenschaftliche Begründung der Arithmetik", mit der wir[1]) aus rein doktrinären Gründen unsere Jungen gerade während ihrer dümmsten Jahre, nämlich denen der Pubertät, maßregeln zu sollen glaubten; worüber Näheres und Positives in § 16, S. 178 ff.

Oder sollen wir nun gar noch gründliche Ratschläge, wie die Ungründlichkeit im einzelnen und einzelsten zu betreiben sei, zusammenstellen? Lieber mag es ein Lehrer, dem unser Appell an seine Erfindungsgabe und seinen Takt nicht behagt, mit

1) Erst nach mehr als zwanzigjährigem Kampfe ist die Beseitigung dieser pädagogischen Ungeheuerlichkeit (einer Folge der mißverstandenen „Zweistufigkeit") den jüngsten österreichischen Lehrplänen gelungen. – Noch vor kurzem schilderte mir W. LOREY, der den Betrieb in einigen österreichischen Schulen mitanzusehen Gelegenheit hatte, „mit Entsetzen" die Früchte jenes Zeittotschlagens in unserer V. Klasse – der einzigen, die eine vierte Wochenstunde hatte und gerade diese dazu benutzte, den Schülern das Mathematiklernen – mindestens für dieses eine Schuljahr – „gründlich" auszutreiben!

der ihm altgewohnten Gründlichkeit auch weiterhin halten. Vielleicht aber werden die durch das ganze Buch sich hinziehenden Vorschläge im einzelnen am besten zeigen, wie der anfänglich nur scheinbaren Ungründlichkeit, die eben nur das Voranstellen didaktischer Rücksichten vor verfrühte „Wissenschaftlichkeit" ist, die strengste dem Schüler überhaupt noch zugängliche Wissenschaftlichkeit immer noch rechtzeitig folgen kann. Vorstehendes wollte nur den Leser darüber beruhigen, daß WILHELM FÖRSTERS allgemeiner Rat in den speziellen Ratschlägen unserer Didaktik allenthalben befolgt wird – hoffentlich weder zum Schaden des Unterrichtes noch der Erziehung.

Daß aber vollends diejenige Gründlichkeit, die näher besehen überhaupt nichts ist als leerer Formalismus[1]), fürder keinerlei Duldung seitens einer aufgeklärten Didaktik zu beanspruchen habe, braucht nicht erst noch allgemein bewiesen zu werden; Streitfrage könnte hier ja höchstens sein, von welchem Punkte ab die Form den Inhalt nicht mehr deckt. Statt solcher Allgemeinheiten aber wird am schnellsten aufklärend das an solche Streitfragen anklingende Verhältnis von „reiner" und „angewandter" Mathematik sein.

§ 4. Reine und angewandte Mathematik.

Wenn in der gegenwärtigen Reformbewegung zwar das nach außen hin Auffälligste der Ruf nach „höherer Mathematik an höheren Schulen" ist, so ist doch diese Forderung selbst schon wieder nur eine Folge des umfassenderen Gedankens, daß die Schulmathematik fürder nicht mehr sich verträumen dürfe in der abstrakten Höhe des „reinen Denkens", sondern herabsteigen müsse auf den festen Boden der „Anwendungen". Oder vielmehr: Erst von dem festen Boden der in der mannigfaltigen Wirklichkeit sich darbietenden Größenbeziehungen aus ist der Schüler emporzuführen zu den freien Gedankenschöpfungen der „reinen" Mathematik.

„Reine" und „angewandte" Mathematik sind zwei seit langem in der Wissenschaft überlieferte Schlagwörter, die ihr Analogon in der Gegenüberstellung von „reiner und angewandter Mechanik", „reiner und angewandter Logik" usw. haben. Beim Begriff des „Rein" denkt heute noch, wie beim Begriffe der „Form", jeder

1) Was für didaktischen Auswüchsen wir jene Anklage nicht ersparen können, wird das Beispiel des § 50, S. 468–470 zeigen.

sogleich an KANTische Philosophie, und wer sich mit diesen Begriffen und ihren wirklichen oder vermeintlichen Gegensätzen gründlich auseinandersetzen will, kann es nur auf dem Boden einer mit KANT vertrauten, aber sich ihm nicht kritiklos unterwerfenden Erkenntnistheorie; weshalb auch wir auf diese Grenzfragen erst im III. Teile (§ 49) noch werden zurückkommen müssen.

Zum Glück für eine praktische Didaktik des mathematischen Unterrichtes läßt sich aber zur Frage, ob der Unterricht mehr der „reinen“ oder mehr der „angewandten“ Mathematik sich widmen soll, auch ohne Zurückgehen auf jene philosophischen Prinzipienfragen eine feste Stellung gewinnen. Das Grundlegende hierüber hat auf dem dritten internationalen Mathematiker-Kongresse in Heidelberg 1904 FELIX KLEIN gesagt in der Mitteilung „Über die Aufgabe der angewandten Mathematik, besonders über die pädagogische Seite“[1]),

„indem er darauf hinweist, daß die angewandte Mathematik als solche keine geschlossene Disziplin darstellt. Vergleicht man die Gesamtwissenschaft der Mathematik mit einer Festung, so repräsentieren die verschiedenen Teile der angewandten Mathematik die Außenforts, welche die Innenwerke nach allen Richtungen umgeben, und über welche die Verbindung mit dem Vorgelände hinüberführt. Gemeinsam allen Teilen der angewandten Mathematik ist dementsprechend nur dies, daß der mathematische Gedanke bei ihnen in notwendige und untrennbare Verbindung zu einem Gebiete anderweiter wissenschaftlicher Fragestellungen tritt. Die angewandte Mathematik steht dadurch in ausgesprochenem Gegensatz zu demjenigen Zweige unserer Wissenschaft, den man als Zitadelle der Festung ansehen mag, zur formalen Mathematik (im LEIBNIZschen Sinne), d. h. zu derjenigen Behandlung mathematischer Fragen, welche nach Möglichkeit von jeder konkreten Bedeutung der vorkommenden Größen oder Symbole absieht und nur nach den äußerlichen Gesetzen fragt, nach denen dieselben kombiniert werden sollen.

Zum Gedeihen der Wissenschaft ist ohne Zweifel die freie Entwicklung aller ihrer Teile erforderlich. Die angewandte Mathematik übernimmt dabei die doppelte Aufgabe, den zentralen Teilen immer wieder von außen neue Anregungen zuzuführen und umgekehrt die Erträgnisse der zentralen Forschung nach außen zur Wirkung zu bringen. Die Geltung der Mathematik innerhalb des weiten Bereiches sonstiger wesentlicher Interessen erscheint daher in erster Linie an die erfolgreiche Betätigung der Vertreter der angewandten Mathematik gebunden. Daher sollen wir insbesondere an derjenigen Stelle einsetzen, wo die

1) Verhandlungen des III. internat. Mathematikerkongresses in Heidelberg 1904 (Teubner 1905), S. 396, 397.

ausgiebigste Gelegenheit zu einer Einwirkung der Mathematik auf weitere Kreise gegeben ist: beim Jugendunterricht.

Von diesem Gesichtspunkte aus legt Vortragender eine von ihm neuerdings verfaßte Schrift vor: Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen (Leipzig 1904). Der Zielpunkt ist: Funktionentheorie in geometrischer Form und damit die elementaren Ansätze der Differential- und Integralrechnung, als denjenigen Teil der reinen Mathematik, von dem alle heutigen Anwendungsgebiete gleichmäßig beherrscht werden, an den oberen Klassen unserer höheren Schulen unter Beiseiteschiebung minder wichtiger Kapitel in den Mittelpunkt des arithmetischen Unterrichts zu rücken. Ein derartiges Vorgehen scheint vielleicht revolutionär, ist aber in Wirklichkeit, wie der Vortragende an charakteristischen Beispielen zeigt, an unseren Schulen in weitem Umfange längst vorbereitet. Insonderheit tragen hierzu die mathematischen Überlegungen aus dem Gebiete der Mechanik und der Physik[1]) bei, denen sich die Schule nicht entziehen kann."

Wenn hier der Mann der mathematischen Wissenschaft vor allem im Namen und im Interesse einer nicht bloß abstrakten, sondern der Anschauung nahe bleibenden Weiterbildung seiner Wissenschaft um die Mithilfe des Jugendunterrichts wirbt, so hat um so mehr dieser Jugendunterricht selbst dem Manne der Wissenschaft dankbar zu sein für den Kraftzuschuß, den durch ihn der in seiner Allgemeinheit längst nicht mehr bestrittene pädagogische Grundsatz: Das Konkrete vor dem Abstrakten, auch innerhalb derjenigen Schulwissenschaft empfangen hat, die sich mehr als jede andere (vielleicht nur die Grammatik ausgenommen), über jenen Grundsatz hinwegsetzen zu dürfen und zu müssen geglaubt hat.

Wagen wir es also einmal, es nicht schon von vornherein für ausgemacht zu halten, daß in der Mathematik das Formelle wichtiger sei als das Inhaltliche, das rein Apriorische wichtiger als das angewandte Empirische, das Abstrakte wichtiger als das Konkrete, das Allgemeine wichtiger als das Besondere und Indi-

1) In meiner Physik (Vieweg 1904) passen sich der Anhang „Aus der angewandten Mathematik" und die „230 Leitaufgaben" (von denen 80 der einfachsten in dem „Hilfsbuch zur Naturlehre" besonders ausgewählt wurden) einem solchen engen Anschluß zwischen Mathematik- und Physikunterricht unmittelbar an; wobei freilich für beide Fächer die „zeitgemäße Umgestaltung" vorausgesetzt und vorweggenommen ist.

Der III. Band von Weber-Wellstein enthält unter dem Gesamttitel „Angewandte Mathematik" große Abschnitte der mathematischen Physik – natürlich nicht gerade in dem Zuschnitte für Mittelschulen.

viduelle. Sondern wagen wir es, wenigstens versuchsweise uns in die Auffassung hineinzudenken, daß vielleicht auch für Raum und Zahl, wenn nicht schlechthin philosophisch, so doch praktisch-pädagogisch dasselbe gelten möchte, was wir in der Naturwissenschaft endlich doch nicht nur einsehen, sondern auch für die unverbrüchliche Regel unseres Lehrens gelten lassen: daß zuerst die Einzeltatsache gegeben und erkannt sein müsse, ehe man zu den Beziehungen zwischen den Einzeltatsachen gelangt; daß es an empirischen Grundlagen nicht fehlen dürfe, wie hoch über sie sich auch nachmals das Gebäude der Deduktionen emportürmen möge. Lasse man sich nicht erschrecken durch die Schlagwörter „empirisch“ und „induktiv“, die, wenn ohne weiteres auf Mathematik angewandt, den erkenntnistheoretisch grundlegenden Gegensatz zwischen dem empirischen Charakter der Naturwissenschaft und dem apriorischen der Mathematik zu verwischen drohen. Tröste man sich, wenn man nicht etwa selbst Erkenntnistheoretiker von Fach ist, mit dem freilich leidigen Troste, daß selbst in der hohen und höchsten Philosophie noch viel zuviel Zwist über diese Dinge herrscht, als daß nicht wenigstens an diesem Punkte der Schulmeister seinem gesunden Hausverstand folgen und die bewährten pädagogischen Hausmittel: zuerst etwas zeigen und dann erst darüber reden usw., auch im Mathematikunterrichte anwenden dürfte.

Wem ein solcher Rat würdelos klingt, der erinnere sich, daß ja auch im physikalischen, im geographischen Unterricht und wo nicht sonst noch, einstmals ebenfalls nur das Ausgehen z. B. von den obersten Prinzipien der Mechanik statt von der physikalisch-experimentellen Behandlung auch der mechanischen Vorgänge und Gesetze — daß nur das Ausgehen vom Kopernikanischen Systeme statt von den „scheinbaren Bewegungen“ der Sonne und Sterne für das einzig Würdige gegolten hatte. Erst spät (und noch nicht ausnahmslos) hat man dann eingesehen, daß dieses hyperlogische Vorgehen in Wahrheit ein antilogisches gewesen war, weil es ebenso der wissenschaftlichen wie der didaktischen Methode jeder Naturwissenschaft widersprochen hatte. Und was hier pädagogisch gerichtet ist, sollte trotz alledem gerade für den Mathematikunterricht gerettet werden können? Was den anderen Unterrichtszweigen längst pädagogisch recht ist, muß auch dem mathematischen billig sein. Für das Durchdringen dieser Einsicht zeugen denn auch die immer zahlreicheren

Bemühungen zugunsten einer angewandten, anschaulichen, konkreten, induktiven, empirischen Schulmathematik.

Es wird ebenfalls erst im III. Teile (§ 49) an der Zeit sein, über das hier absichtlich einigermaßen aufreizend Gesagte philosophische Beruhigung eintreten zu lassen, nachdem wir im II. Hauptteile gezeigt haben werden, daß und warum sich mit noch so konkreten Anfangsgründen auf der Unter- und Mittelstufe des mathematischen Unterrichts ein abstrakter Abschluß auf der obersten Stufe sehr wohl verträgt; so daß der mathematische Unterricht unbeschadet aller Anwendungen, ja dank ihnen, als letztes gedankliches Erträgnis im reif gewordenen Schüler einen gewiß nicht weniger tiefen Eindruck von „mathematischer Strenge" hinterläßt, als dies der frühere formalistische Unterricht in doktrinärer Verfrühung angestrebt hatte.

Daß auch auf der Mittel- und Oberstufe die Pflege vielseitigster Anwendung sich mit sparsamer, aber ausreichend „reiner" (korrekter: abstrakter) Mathematik sehr wohl verträgt, zeigt z. B. SCHÜLKEs „Aufgaben-Sammlung"[1]). – Vergleichen wir mit den hier zusammengestellten lebensvollen Aufgaben jene abstrakten und abstrusen, an denen es z. B. auch noch in dem so verdienstvollen Übungsbuch von HEIS keineswegs gefehlt hatte, so werden wir uns gerade an den formalistischen Übungsbeispielen bewußt, wie lange wir doch auch in der Mathematik den Schulzopf nachgeschleppt hatten. Wir Realisten machen uns gern lustig über die geistvollen Sätze mancher griechischen Schularbeiten.[2]) Aber sind Beispiele, wie die folgenden aus HEIS (§ 47, § 57)

$$\sqrt[-9]{\frac{a^{-6}b^{12}c^{-3}}{d^5 e^{-13}}} \qquad\qquad log\, \frac{\sqrt[x]{a+b}\;\sqrt[x]{ab}}{\sqrt[x+n]{a-b}\;\sqrt[xn]{a:b}}$$

1) Aufgabensammlung aus der Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie und Stereometrie nebst Anwendungen auf Astronomie, Feldmessung, Nautik, Technik, Volkswirtschaftslehre (Teubner 1902). Daß F. KLEIN noch 1907 (Vorträge über den mathematischen Unterricht S. 27) dem Lob dieses Buches beifügen muß: „Freilich wird diese Sammlung zurzeit noch nirgendwo im Schulunterricht Preußens gebraucht", läßt tief blicken und zeigt, daß die Meraner Vorschläge auch in dieser Hinsicht nichts weniger als offene Türen einrennen. (Privatim wird mir mitgeteilt, daß viele junge Lehrer das Buch schon benutzen; nur „offiziell" darf es noch nicht sein. – Wieder: *„Tout comme chez nous"*; vgl. oben S. 9.)

2) Z. B. der Satz: „Die Seelen der Wucherer werden durch die Kraft der Passatwinde erschüttert" ist an einem Wiener Gymnasium gegeben worden. Der blühende Blödsinn erklärt sich daraus, daß die Wucherer und die Passatwinde auf Griechisch im Genetiv Pluralis nicht wie alle anderen Substantiva der A-Deklination den Zirkumflex auf der letzten (χρηστῶν, ἐτεσιῶν), sondern den Akut auf der vorletzten Silbe haben (χρήστων, ἐτεσίων).

sehr viel vernünftiger als jene Ausgeburten „griechischer Heiterkeit“? „Formalbildend“ werden sie ja wohl beide sein. – Stimmen also die Mathematiklehrer so gern ein in den Ruf nach „Schnitten in den griechischen Schulzopf“, so müssen sie erst selber ein gutes Beispiel geben durch einen (dann sicherlich „goldenen“!) „Schnitt in den mathematischen Schulzopf“; und dieser ist am längsten und dicksten bei den „Übungen“ und „Anwendungen“, die eben alles andere eher als wirkliche „Anwendungen“ sind. – Unsere Didaktik wird an verschiedenen Stellen darauf hinweisen, daß zu solchem leeren Zeug einfach keine Zeit mehr ist, wenn man nicht blind an jenen Anwendungen vorübergehen will, die wirklich welche sind und auf das Interesse des Schülers ebenso sicher belebend einwirken wie jene Sterilitäten lähmend. –

Was die äußeren Maßregeln betrifft, durch die hier ein Wandel angebahnt werden kann und soll, so bringt darüber Vorschläge HOLZMÜLLER in seinen „Bemerkungen über den Unterricht und die Lehramtsprüfung in der angewandten Mathematik“[1]):

„Bei der angewandten Mathematik handelt es sich entweder nur um einen näher zu bestimmenden Grad von Kenntnissen, der der allgemeinen höheren Bildung zukommt, oder um wirkliche Fachkenntnisse. Den einen Teil muß jeder Lehrer der Mathematik vollkommen beherrschen. Der zweite Teil kommt zunächst dem besonderen technischen Fachlehrer zu.

Zum ersten Teile gehört z. B. ein gewisses Maß von mathematischer Geographie, von Kristallkunde, von kosmischer und geologischer Dynamik und selbstverständlich von mathematischer Physik nach jeder Richtung hin, einiger Einblick in die politische Arithmetik, in die Statistik und das Versicherungswesen und ähnliches, vor allem aber auch in die darstellende Geometrie. Der Lehrer, der Stereometrie vorzutragen hat, muß doch zum mindesten korrekt stereometrisch zeichnen können. Das stereometrische Konstruieren ist genau von derselben Wichtigkeit wie das planimetrische. Die sog. schematischen, aber grundsätzlich falschen Zeichnungen müssen ausgerottet werden. Sie erziehen den Schüler nicht zur mathematischen Wahrheit, sondern zur Unwahrheit, zu falschen Vorstellungen, zu falschem Sehen. Ich habe

1) Sonderabdruck a. d. Jahresbericht der Deutschen Mathem.-Vereinigung, Bd. XIV, 1905, Heft 5. Daselbst speziell die Forderung: 1. Der niedere Teil der darstellenden Geometrie ist von jedem Kandidaten des mathematischen Lehrfachs zu fordern. Ein Studium von einem Semester ist ausreichend. 2. Der höhere Teil der darstellenden Geometrie ist nur von dem Kandidaten des Lehrfachs der angewandten Mathematik zu fordern. Ein zweites Semester dürfte ausreichend sein.

Lehrer gehört, die ihre Unfähigkeit im Zeichnen als einen Vorzug rühmten; gerade das wäre richtige Unterrichtskunst, an einer falschen Zeichnung das Richtige zu beweisen, der Schüler könnte nicht früh genug zum Abstrahieren gezwungen werden.“ Usw. –

Ist’s auch heute noch so? — Oder wo schon nicht mehr?

In der Tat dürfte das endlich sich durchringende Gefühl, daß unsere Mittelschule, namentlich im Gymnasialunterricht, schwere Unterlassungssünden auf sich geladen hat, indem er die Pflege der Raumanschauung, dieses erste der beiden inhaltlichen Postulate der Meraner Vorschläge, über dem Wust von geometrischer Definiererei und Beweiserei schnöde vernachlässigt habe, das beste typische Beispiel sein, wieviel unsere mathematische Didaktik noch zu lernen und wieviel sie – zu vergessen habe. Positive Vorschläge nach dieser Richtung wird § 20 bringen.

Typisch aber ist dieser Ruf nach Anschauung auch deshalb, weil er zeitlich zusammentrifft mit derjenigen Entwicklung der Geometrie zu höchster Strenge, die, wie in HILBERTS Grundlagen der Geometrie z. B. unter „Punkt“, „Gerade“ und „Ebene“ überhaupt nichts Räumliches mehr verstanden, sondern in der Geometrie nur raumlos abstrakte Beziehungen untersucht wissen will. Wenn es nun solche Antinomien in der hohen Wissenschaft gibt – sollte sich da die Didaktik des Elementarunterrichtes dieser Wissenschaft schämen, wenn auch sie neue Wege erst suchen muß? Sie wird sie aber finden, so gewiß auch jene Antinomien nicht auf immer ungelöst bleiben können (vgl. hierzu die auf S. 431, Anm. angekündigten Abhandlungen über „Räumliche und raumlose Geometrie“).

Wenden wir uns also von diesen weitausschauenden Prinzipienfragen der hohen Wissenschaft zurück zu den allerschlichtesten Wirklichkeiten des täglichen Schullebens.

§ 5. Die pädagogisch-didaktische Darbietung mathematischer Lehrstoffe.

War im bisherigen aus den im § 1 vorläufig angegebenen Gründen viel mehr vom Inhalte als von der Form des mathematischen Unterrichts die Rede, so dürfen in einer Didaktik einige grundsätzliche Worte darüber nicht fehlen, ob sich nicht etwa doch trotz allem sonst in der Pädagogik Anerkannten der Lehrer der Mathematik ein besonderes Vorgehen in der Darbietung gerade seines Stoffes, vielleicht aber auch in seinem sonstigen ganzen

Gehaben gegenüber seinen Schülern, zurechtzulegen habe, wenn er neben den Unterrichtswerten auch die Erziehungswerte[1]) seines Gegenstandes voll zur Geltung bringen will.

Eine dunkle Sage, daß von der „mathematischen Strenge" im abstrakt wissenschaftlichen Sinne sich auch etwas übertrage auf die Strenge des Mathematiklehrers bis hinunter ins Zensurschreiben, hat auf der Berliner Schulkonferenz 1890 (Verhandlungen S. 194) der Geheime Regierungs- und Provinzialschulrat Dr. KRUSE zugespitzt in die These: „Auch darin liegt eine wesentliche Erleichterung, daß heutzutage mancher verständige Fachmann sagt: Mathematik kann er nicht; aber ich sehe, er ist ein tüchtiger Grieche und stimme für seine Reife. Das ist schon eine große Konzession, denn bekanntlich waren bis vor zehn, zwanzig Jahren die Mathematiker unter den Fachlehrern die wildesten." Da jeder Versuch, die Wildheitsgrade verschiedener Fachlehrergruppen abzumessen, auch den bescheidensten Forderungen an mathematische Exaktheit schwerlich würde gerecht werden können, so bleibe es ganz dahingestellt, wieviel wohlwollende, das volle Vertrauen ihrer Schüler gewinnende Mathematiklehrer es schon gegeben hat. Jener Pauschalschilderung stehen aber gewiß sehr viele Einzelerinnerungen dankbarer einzelner Schüler[2]) gegenüber, denen sich ein wohltuendes Charakterbild ihrer Mathematiklehrer um so tiefer eingeprägt hat, als ja immerhin der unpersönliche Lehrstoff von vornherein dem menschlich Ehrwürdigen der Lehrerpersönlichkeit nicht wie von selbst Gelegenheit gibt, sich in ihrer lehrenden Erziehungsarbeit dem Schüler kundzugeben.

Oder sollte sich, wenn gerade der strenge Mathematiker der Jugend ein wohlwollender Freund ist, hier nicht doch etwas von den geheimnisvollen Beziehungen gerade zwischen abstraktestem Erkennen und letzter Lebensweisheit ungesucht kundgeben? Sinnen wir auch diesem Geheimnis erst im letzten (III.) Teile und im X. Bande nach.

Sogleich an der Schwelle einer mathematischen Didaktik aber auch dem Lehrer vor allem der eine Rat: an eine Sonderstellung der Mathematik innerhalb aller anderen Wissenschaft am besten

1) Über diese schon in § 1 berührte Unterscheidung Näheres im III. Teil § 51

2) Z. B.: Unter den Schilderungen einzelner Lehrer im Schriftchen „Das Kasseler Gymnasium der siebziger Jahre" (Berlin 1891, H. Walther) kommt dem Mathematiker „Der alte Schorre" sicherlich die Glanzrolle zu. (Der dort ungenannte Verfasser des Schriftchens ist der Physiker DESCOUDRES).

überhaupt nicht zu glauben! Insbesondere nicht zu glauben, als gewinne der mathematische Unterricht, wenn er trockener, formelhafter, pedantischer als irgendein anderer erteilt wird. Wo der Stoff zu einer geschmacklosen Form zu verleiten scheint, möge man sich doch vorher erst noch einmal diesen Stoff selbst daraufhin ansehen, ob er nicht eben in sich wertlos gewesen und gegen einen lebensvolleren einzutauschen sei. Mag man sich im letzten Teil, wo wir dem Formalismus mit letzten Gründen zu Leibe gehen, angesichts der mitgeteilten abschreckenden Beispiele die Frage vorlegen, ob ein solcher entgeisteter Stoff in anderen als geistlosen Lehrformen dargeboten werden kann – und ob er dann überhaupt dargeboten werden darf. –

Noch manches Einzelne und Einzelnste wäre zu berühren, z. B. das Beurteilen der Schülerleistungen. Von dem vor einigen Jahrzehnten verstorbenen Wiener Mathematiklehrer GERNERTH, den man im übrigen als einen der ausgezeichnetsten von seinen Fachgenossen und seinen dankbaren Schülern immer noch preisen hört, wird erzählt, er habe behauptet, eine mathematische Leistung könne nur entweder Vorzüglich oder Nichtgenügend sein; denn in der Mathematik gäbe es zwischen Richtig und Unrichtig kein Mittelding. Daher mache schon ein einziger Rechenfehler jede sonst richtig angesetzte und durchgeführte Rechnung zu einer nichtgenügenden. Ist eine solche Beurteilung ganz richtig oder ganz unrichtig – oder ein zu sichtendes Gemisch aus Wahrem und Falschem? Wollen wir denn nur objektive Leistungen beurteilen und nicht vielmehr psychische Dispositionen?

Diese wie eine große Zahl ähnlicher abstrakter Fragen möge in diesem konkreten Buch lieber unbeantwortet bleiben, als daß durch pädagogische Gemeinplätze dem einzelnen Lehrer das Selberaufwerfen und Selberbeantworten solcher Fragen, wie jede Schulstunde sie neu erzeugen soll, erspart werde. Geht aus der Gesamthaltung unserer Einzelratschläge für den konkreten Unterrichtsbetrieb hervor, daß und wie man den Mathematikunterricht dem Schüler licht, leicht und lieb machen kann, so will der Verfasser gerne den Vorwurf ertragen, den er einst zu hören bekam: „Wie soll man bei Ihrer Methode die vorgeschriebene Zahl von Nichtgenügend zustande bringen?“ Klingt das wie ein schlechter Scherz, so wollen wir uns um so weniger dem tiefen Ernst der Mahnung verschließen: „Eine leichte Schule ist ein soziales

Verbrechen."[1]) – Gewiß, der weichherzige Lehrer und laxe Beurteiler seiner Schüler macht sich zum Mitschuldigen an den sozialen Gefahren, in die ein Proletariat von Halbgebildeten sich selber und die Gesellschaft stürzt; strenge Auslese der Tüchtigsten ist die soziale Pflicht der ganzen Schulorganisation und des einzelnen Lehrers. Aber so wenig alle Brutalitäten der Natur, die nicht nur die Schwachen, sondern auch die Besten dahinraffen, wirklich schon adäquate Werkzeuge einer strengen, aber wohltätigen „natürlichen Auslese" sind, ebensowenig ist jede nächstbeste Art von Schwermachen der Schule schon pädagogische und soziale Weisheit. Vielmehr ist, um beim Nächsten zu bleiben, jener durch Jahrzehnte und Jahrhunderte praktizierte mathematische Unterricht, der auch den gescheitesten Schülern unverständlich bleiben mußte, weil sie eben – zu gescheit waren, ihn zu verstehen[2]), wahrlich kein Ruhmestitel der Pädagogik gewesen; so wenig wie STURMS Demosthenes für die Neunjährigen[3]).

Indes alle Einzelratschläge, die eine allgemeine Didaktik natürlich auch dem Mathematikunterricht zu erteilen hätte, mögen schon deshalb an dieser Stelle unausgesprochen bleiben, weil man sie ja im Zusammenhange nun einmal doch nur in einem Lehrbuche der allgemeinen Didaktik suchen soll und finden wird. Was wir gleichwohl davon zu bieten haben, wird besser wirken, wenn wir es auf einzelne Anlässe verteilen. – Das eine pädagogische Axiom aber, aus dem sich ein guter (wohl der beste) Teil aller speziellen Didaktik unschwer als Korrollar ableiten ließe, spricht FELIX KLEIN[4]) launig so aus:

„Wenn man sich nun ganz auf den Standpunkt der Pädagogik stellen will (dem wir mit dieser Diskussion von selbst immer näher kommen), dann dürfte es noch aus einem besonderen Grunde angezeigt sein, bei mathematischer Beschäftigung die Verbindung mit der Anschauung

1) So ZIELINSKI in seinem Buch „Die Antike und Wir" (1905, S. 118).

2) Ob z. B. darin nicht die Lösung des Rätsels liegt, warum GOETHE der Mathematik fremd geblieben ist? Wie aber er, der Unmusikalische, sich in seiner Lyrik und wieder in den letzten Szenen des zweiten Teiles „Faust" vom innersten Geiste der Musik getragen zeigt, so ahnt er auch das Wesen einer wirklich sinnvollen und sinnigen Mathematik in den geheimnisvollen Mitteilungen über Makariens Verhältnis zum Planetensystem (vgl. die letzten Worte dieses I. Bandes. Vielleicht gibt uns der X. Band Gelegenheit, an solche Geheimnisse der Begabung zu rühren).

3) PAULSEN, Gesch. d. gelehrten Unterr. I[2] S. 285.

4) In den autographierten Vorlesungen über Nicht-euklidische Geometrie, S. 362–365.

durchaus aufrechtzuerhalten. Der Philosoph HERBART (in den dreißiger Jahren in Göttingen) hat es in seinen Vorlesungen immer wieder ausgesprochen, was ich jetzt meine. Man vergleiche die zahlreichen Stellen in HERBARTS Schriften, wo er über die pädagogische Behandlung der Mathematik spricht: Er hat ausgesprochen, daß für $^5/_6$ aller Schüler die Mathematik absolut langweilig ist, wenn man sie nicht in direkte Verbindung mit den Anwendungen bringt, während sie hinwiederum für $^5/_6$ derselben sofort auf das äußerste interessant ist, wenn man sie mit der Anschauung verknüpft.

HERBART betrachtet es nun überhaupt als das erste Erfordernis, den Unterricht interessant zu machen (was natürlich nicht im Sinne bloß oberflächlicher Auffassung gemeint ist). Darum soll man in der Schule in der Behandlung der Mathematik zunächst an die Anschauung sich halten und dann allmählich zu größeren und immer größeren Abstraktionen sich erheben. Die Anschauung ist das Mittel, die Abstraktion ist das Ziel.

Wenn man nun einmal zusieht, wie der mathematische Unterricht auf den Schulen getrieben wird, so findet man, daß die Methoden, die ich im Sinne HERBARTS empfehle, leider nicht eingehalten werden. Die beiden Extreme des Unterrichts, deren Verbindung erst das Wesen der Sache ausmacht, finden sich im allgemeinen einseitig kultiviert. Das eine Extrem findet man vorzüglich in den humanistischen, das andere in den Realgymnasien gehandhabt. In den ersteren werden vielfach die Untersuchungen mit größter Schärfe durchgeführt, doch ohne das Bedürfnis zu zeigen, welches zu dieser Schärfe oder zu den Untersuchungen überhaupt hinführt, in den letzteren Schulen pflegt man sich zu ausschließlich an die praktische Anwendbarkeit zu halten. In dem Ersterwähnten liegt es denn auch begründet, wenn im späteren Alter mancher Philologe und Historiker von sich sagt, er habe die Mathematik nie verstanden. In betreff des anderen Extrems sei einmal auf ausländische Verhältnisse verwiesen. Wir denken z. B. an die Verhältnisse auf norwegischen Mittelschulen. Dort werden die Logarithmen erklärt und behandelt, wie man etwa lesen lernt. Es wird gezeigt, wie man mit den Logarithmen praktisch rechnet, — wer aber die Logarithmen berechnet hat, und wie dies geschehen ist und dgl., dessen wird keine Erwähnung getan. Ganz so schlimm ist es ja in Deutschland wohl nirgendwo. Aber namentlich bei denjenigen, die sich ausschließlich mit darstellender Geometrie beschäftigen, mit der Ausführung von Zeichnungen — besonders in Österreich ist der Unterricht in der darstellenden Geometrie sehr entwickelt — bei diesen wird das logische Denkvermögen leicht unentwickelt bleiben. Dies ist ebensowenig, was wir wollen, wie das, was auf humanistischen Gymnasien erzielt wird. Es muß vielmehr beides im Unterricht berücksichtigt werden, die wirkliche

Anschauung und die Fähigkeit, sie zu beherrschen, wie die rein begriffliche Betrachtungsweise mit aller mathematischen Strenge. Nur muß man stets sich vor Augen halten, was man in letzterer Hinsicht seinen Zuhörern zumuten darf. Ich empfehle keineswegs, daß man in der Schule die nicht-euklidische Geometrie erwähnt oder die Definition der Axiome, wie wir sie jetzt hier besprochen haben; letzteres vielleicht höchstens in den oberen Klassen.

Eins aber möchte ich meinen Zuhörern, denen einst als Lehrer tätig zu sein beschieden ist, ans Herz legen, den HERBARTschen Grundsatz alles Unterrichtes: „Seien Sie niemals absolut langweilig!"

§ 6. Der äußere Rahmen des Unterrichts: Jahresabgrenzungen und Stundenausmaße. – Grundsätze der Lehrplangestaltung. Ein Einheitslehrplan für den mathematischen Unterricht.

Wo immer über Unterrichtsreform verhandelt wird, pflegt versichert zu werden, daß eine das Wesen der Sache treffende Reform sich nicht in die Kleinlichkeiten des Wegnehmens und Zugebens einzelner Stunden zu einzelnen Fächern, der Verschiebung einzelner Lehrstoffe in andere Jahrgänge u. dgl. verlieren dürfe. Kommt es dagegen nach noch so langen Vorverhandlungen über noch so hohe Prinzipien der Schulreform — bis hinauf zu den Beziehungen der Schule zur gesamten Kultur — nun einmal zu wirklichem Handanlegen, zur Ausarbeitung von (in der Regel staatlichen) neuen Verordnungen für den künftigen Schulbetrieb, so sieht man in offiziellen wie nichtoffiziellen Beratungen alle Schärfe des Nachdenkens über das Einzelne zur Besserung des Ganzen sich doch immer wieder zuspitzen auf jenen Kampf um das Zulegen einzelner Lehrstunden für das einzelne Fach und um die Verlegung der einzelnen Lehrstoffe in etwas andere Jahrgänge. — Nur wer nicht selber mitten im Schulleben gestanden hat, wird gering denken über solche Einzelarbeit; wer dagegen jahrelang als Lehrer nach festen Lehrplänen vorgeschriebene Lehrziele auf ebenso vorgeschriebenen Marschrouten zu erreichen gezwungen war, der hat die täglich sich erneuernde Pein zu kosten bekommen, wenn er Lehrstoffe in einer ungenügenden Unterrichtszeit durchhetzen, wenn er einzelne Lehren auf einer zu frühen oder auch auf einer zu späten Altersstufe mit seinen Schülern durcharbeiten mußte. Und so wird die Lehrplangestaltung immer wieder das stärkste Stimulans bleiben, das unsere Schuleinrichtungen nicht eher zu relativer Ruhe kommen läßt, als bis die nach zwangsläufigen Lehrplänen eingeleitete

Bewegung hinübergeführt haben wird zu natürlichen Gleichgewichtslagen, wie sie nicht von außen her künstlich vorgeschrieben, sondern natürlich vorgezeichnet sind durch die Natur der zu lernenden Gegenstände und der zu belehrenden Schülerintellekte. — Wenn auch manche Unterrichtsverwaltungen noch immer eingreifen zu müssen meinen in des Lehrers wöchentliche und stündliche Tätigkeit, so glauben sie ja doch nicht, das Tempo der natürlichen Entwicklung des Durchschnittsschülers irgendwie nennenswert beschleunigen oder verzögern zu können. Und so ist das tatsächliche Tempo dieser Entwicklung, die mit jedem weiteren Schuljahr erlangte relative Reife, diejenige *vis maior* oder *maxima,* der sich alles beugen muß: Lehrstoffe, Lehrpläne, Lehrer und Schulbehörden. Nicht diese Reife zu machen, sondern die jeweilig erreichte zu erkennen und sich ihr anzupassen, bleibt hier das allein mögliche Menschenwerk; und wer wäre unmittelbarer berufen, den Grad der Reife nicht doktrinär vorausbestimmen zu wollen, sondern ihn als eine erst aus den tausend Anzeichen des ganzen wirklichen Schullebens erschließbare Größe zu erkennen als eben der einzelne Lehrer?

Freilich ist unser Unterrichtssystem nach seiner ganzen jahrhundertelangen Vorgeschichte darnach angetan, immer wieder aufs gröbste zu verkennen, was ein Knabe oder Jüngling in einem bestimmten Lebensjahr spontan zu leisten vermag, so daß es ihm nicht erst in unnatürlichem Zwange „beigebracht" zu werden braucht. Wir entrüsten uns heute über JOHANNES STURMS Lehrplan, der mit neun(!)jährigen Knaben den Demosthenes (!) zu lesen forderte (vgl. oben S. 40). Aber wir haben nicht durchweg schon ein Gefühl dafür, daß doch auch das Auswendiglernen fein zugeschärfter Definitionen von arithmetischen und geometrischen Elementarbegriffen für Zehn- und Zwölfjährige eine kaum minder unverdauliche Kost ist[1]).

Hier, im **Qualitativen**, nicht immer erst im Quantitativen, suche man die schlimmsten Ursachen der **„Überbürdung"**; man hoffe dann aber auch ihre Behebung nicht von der Verminderung (oder Vermehrung!) irgendwelcher Stundenzahlen,

1) SCHOTTEN (Vergleichende Planimetrie, II. Bd. S. 206) teilt z. B. folgende Stelle aus H. Z. XVI p. 407 mit: „Schwierige geometrische Beweise sind kaum an einer anderen Stelle des Unterrichts so unangenehm wie in der Lehre von den Parallelen, einmal, weil sie Knaben von zwölf [!] Jahren beigebracht werden müssen [? !], und zweitens, weil die zu beweisenden Sätze so sehr einfach und jedem Schüler von vornherein [!] anschaulich gewiß sind."

sondern von der qualitativen Sichtung der Lehrstoffe und ihrer genauen **Anpassung an die psychologischen Gegebenheiten der Schülerseelen.** Dies ein erster Grundsatz aller Lehrplangestaltung.

Ein zweiter Grundsatz, der als Rat an alle die gerichtet sei, die sich der mühevollen Aufgabe unterziehen, vorhandene Lehrpläne geänderten Forderungen der Wissenschaft und der Didaktik anzupassen, ergibt sich aus folgender Überlegung:

Die Freiheit des Lehrers nirgends ohne Not einzuschränken[1]), ist langsam, aber unwiderstehlich als ein oberster Grundsatz jeder gesunden Unterrichtsorganisation durchgedrungen und zu einer vorläufig wenigstens theoretischen Anerkennung gelangt. Nun wird aber diese Freiheit des Lehrers durch was immer für Lehrpläne sofort wieder eingeschränkt; denn diese schreiben ja nun doch Jahr für Jahr das Durchzunehmende vor und schließen durch Nichterwähnung das Nichtdurchzunehmende aus[2]). Die nachträgliche Versicherung, es solle durch die Lehrpläne die Freiheit des Lehrers nicht eingeschränkt werden, kann hier nicht helfen, denn ein Plan, der nicht eingehalten wird, wäre eben kein Plan. Wirklich können die Unterrichtsverwaltungen auch schon aus einem triftigen äußerlichen Grunde, dem der Freizügigkeit der Schüler (wenigstens innerhalb eines und desselben Staates), auf die Abgrenzung von Lehrstoffen nach Jahrgängen nicht verzichten; denn überall, wo nicht etwa durch äußere Zufälligkeiten dafür gesorgt wäre, daß Übersiedelungen der Schüler aus einem Schulorte in einen anderen oder aus einer Schule in eine andere desselben Ortes höchstens als Ausnahmen vorkommen, wird es vom einzelnen Schüler wie von der einzelnen Schule peinlich empfunden, wenn einzelne Lehren zweimal, andere dafür gar nicht von dem Übersiedelnden gelernt werden sollen. – Kein gerecht denkender Lehrer wird also von seiner Behörde verlangen, daß sie ihm gar keine oder nur ganz unbestimmt gehaltene Lehrpläne

---

1) Meraner Vorschläge (S. 2 [15]): „Eine weitgehende Freiheit des Lehrers in bezug auf die Auswahl im einzelnen, auf die methodische Darbietung, die Verteilung der Arbeiten usw. – selbstverständlich im Rahmen des allgemeinen Lehrplans – wollen wir überhaupt nachdrücklichst empfehlen."

2) Wie ich privatim vernehme, werden in Preußen solche Ausschließungen nicht so streng verstanden. In Österreich verwendet man sie am auffallendsten seit bald 30 Jahren in den physikalischen Lehrplänen, die die „Überbürdung" zu verhindern glauben, wenn sie alle zu erlernenden Begriffe und Apparate wie Paragraphentitel der Reihe nach im einzelnen anführen!

vorschreibe. Wie aber dann zwischen den Extremen der Planlosigkeit und des Eingeengtseins durch den Lehrplan die rechte Mitte finden?

Das Mittel darf kein bloß künstliches sein, es muß sich als ein ganz natürliches aus der sachlichen Gliederung der Lehrstoffe selbst ergeben. Lehrpläne, die nur Einzelmaterien in loser Aneinanderreihung, ohne klare logische Disposition des Stoffes, aufzuzählen wissen, erreichen, je mehr sie ins Detail eingehen, um so weniger das, was sie eigentlich anstreben: dem Lehrer eine handliche Anleitung für seinen Unterrichtsbetrieb zu geben; denn wie, wenn der Lehrer während der erzwungenen Exekution dieser einzelnen Lehren sich nun alle Augenblicke sagen muß: Das nähme ich ja viel gescheiter an einer früheren, an einer späteren Stelle, in einem anderen, innigeren Zusammenhange mit dem übrigen Lehrstoff?

Halten wir also als zweiten Grundsatz der Lehrplangestaltung fest: sie muß **eine plastische Gliederung der Lehrstoffe** zeigen. Die Lehrstoffe der einzelnen Jahrgänge müssen deutlich gegliederte didaktische Einheiten, sozusagen im großen Stile, darstellen. Erst dann wird vor allem der Lehrer, nicht nur weil es Verordnung ist, sondern weil das Verordnete selbst hierzu einladet, dem Lehrstoffe jedes Jahrganges auch aus Eigenem je nach seiner persönlichen wissenschaftlichen Überzeugung eine zwar mannigfaltige, immer aber einheitliche Ausgestaltung und Durchbildung zu geben sich angeregt finden. Und auch der Schüler selbst wird, wenn auch instinktiv oder erst halb unbewußt, die Vielheit des in je einem Jahrgang Dargebotenen als etwas Einheitliches verspüren und sich so von Jahr zu Jahr um sichere Schritte vorwärts geführt sehen, nicht bloß Stunde für Stunde von einer Einzelheit zur anderen mehr geworfen als geführt fühlen.

Unter diese beiden Grundsätze: den zweiten, logischen, einer plastischen Gliederung des zu Erlernenden und den ersten, psychologischen, einer Anpassung an die Fähigkeiten des Lernenden, fällt auch eine sehr naheliegende Rücksicht auf die sozusagen „Schulmoral“: die Zahl der Schüler, die Semester für Semester ihren Lehrstoff mit rückstandsloser Vollständigkeit in sich aufnehmen und verdauen, ist ja leider doch nur immer eine kleine. Der Schreiber dieser Zeilen hatte sich – in nur zu lebhafter Erinnerung an die eigenen Schülerjahre mit ihren guten Vorsätzen, die man beim Empfang eines mahnenden Schulzeugnisses für das Anziehen eines neuen Adam mit Beginn des neuen Semesters faßte – für seine ganzen späteren

Lehrerjahre zum Grundsatz gemacht, ja nicht aus einem Semester (geschweige einem Schuljahr) in das andere Restanten an Lehrstoff hinüberzuschleppen, die ja solche gute Vorsätze von der ersten Stunde an in den Knaben doch wieder zunichte machen müßten. Schon damit die sehr verzeihliche „böse Tat“ des Durchschnittsschülers, nicht alles begriffen und gelernt zu haben, was vor jenem Tag der Zeugnisverteilung liegt, nicht „fortzeugend Böses muß gebären“ vom ersten Tag der guten Vorsätze, lasse man also den verfahrenen Karren ruhig an seinem Platz vorläufig stecken und beginne mit jedem Jahr oder Halbjahr (womöglich sogar mit jedem Zensurabschnitt) einen neuen Stoff, der auf neues Interesse, neuen Lernmut und alles andere Gute, was damit zusammenhängt, zu zählen hat. – Wolle man denn auch beim Überblicken der als Anhang des II. Teiles (S. 430) mitgeteilten Lehrplanskizzen sich vor allem in die Gefühle jener Zukunftsschüler hineindenken, die nach jenen Plänen vielleicht einmal unterrichtet werden sollen, und sich also fragen: Wird der Schüler – diesmal natürlich wieder einer vorausgesetzt, an dem alles Geplante zur Wirklichkeit geworden ist – mit Schluß jedes Jahrganges einen deutlichen Zuwachs von Wissen und Können eines relativ abgeschlossenen Stoffkreises verspüren? Wird ihm mit Beginn des nächsten Jahrganges ein Lehrstoff entgegentreten, der ihn als hinreichend neu anmutet, damit er ihm von vornherein auch neue Lust zum Lernen entgegenbringen kann?

Diese Fragen lieferten beim Abgrenzen der Jahrespensen die didaktischen Maßstäbe, die dazu ermutigt haben, alte Erfahrungen und Wünsche in die bisher geltenden Lehrpläne, namentlich Preußens und Österreichs, dann aber auch in die Meraner und Prager Vorschläge hineinzuarbeiten. Daß solche freie Pläne diesem didaktischen Handbuche zugrundegelegt werden, mag damit gerechtfertigt sein, daß dieses Buch ja überhaupt nicht die Aufgabe hat, das hier oder dort Gebräuchliche einfach zu perpetuieren, sondern gegenüber den für jedes einzelne Land durch die Zufälligkeiten historischer Entwicklung und die Kompromisse mit Althergebrachtem mannigfach mitbedingten Unterrichtsbetrieben auch einmal die unverkümmert sachlichen, nämlich die wissenschaftlichen und didaktischen Rücksichten einer Lehrplangestaltung übersichtlich darzustellen. Da nun aber jene historischen Bedingtheiten für jeden einzelnen Staat auch künftighin weiter bestehen werden, so dürfen die nachfolgenden Vorschläge einschließlich des aus ihnen resultierenden Gesamtlehrplanes günstigenfalls nichts Besseres erhoffen, als daß sie feste Richtungslinien bilden, an denen künftige Abweichungen von irgendeinem solchen idealen Lehrplan und alle nötig scheinenden Konzessionen an das Althergebrachte wenigstens nach festen geschichtlichen und sachlichen Maßstäben gemessen werden können.

Wie aber diesem unserm Lehrplanvorschlag die ausgleichende Anpassung an die preußischen und die österreichischen[1]) Bedürfnisse am nächsten lag, so galt es ein Mittleres auch noch nach einer anderen Dimension zu finden: ein Mittleres zwischen den sogenannten realistischen und den sogenannten humanistischen Anstalten.

Es läge ja nahe, bei einem Lehrplan für Mathematik, da diese ein „realistisches" Fach ist, auch von vornherein ausschließlich oder doch vorwiegend an die Realanstalten zu denken. Nicht nur aber wäre dann der Verfasser, der seine Erfahrungen am Gymnasium, nicht an der Realschule[2]) gesammelt hat, für eine solche einseitige Didaktik nicht kompetent gewesen; sondern es scheint ja auch die schwierigere und einer baldigen Lösung dringender bedürftige Aufgabe, für das Gymnasium[3]), als eine nicht schon von vornherein realistische Anstalt, das ihm an realistischer Bildung Nötige abzugrenzen und durchzubilden, als für andere Anstalten, die schon, dank ihrer für Mathematik reichlicher bemessenen Stundenzahl, es mit der zweckmäßigen Gestaltung ihres mathematischen Unterrichtes leichter haben.

Gerade weil nun die einzelnen Staaten für ihre einzelnen Schulen jederzeit Lehrpläne vorschreiben mußten, die vom jeweilig historisch Gewordenen sich überall nur möglichst wenig entfernen und auch an den für die einzelnen Schulen hergebrachten Stundenausmaßen möglichst wenig rütteln, haben sie immer noch auffallend verschiedene Lehrpläne für Gymnasien, Realgymnasien und Realschulen (und überdies für die verschiedenen Reformschulen gegenwärtiger und zukünftiger Gestaltung). Unabhängig von solchen stark zufälligen und zum Teil unsachlichen Nebenrücksichten konnte sich die nachfolgende, überall auf das Prinzipielle gehende Darstellung den Versuch eines Einheitslehrplanes[4]) erlauben. Ein solcher hat die Grundlinien so zu zeichnen, daß sie einerseits für Gymnasien, Realgymnasien und

1) Die „Methodenkonkordanz" der preußischen und österreichischen Schulen betont und begrüßt MATTHIAS wiederholt, so insbesondere auch an mehreren Stellen seiner „Praktischen Pädagogik" (in Baumeisters Handbuch).

2) Meine Hochachtung für die Realschule als solche glaube ich, wie bei vielen anderen Anlässen, bekundet zu haben in der Erklärung: „Es ist meine schöne Hoffnung, daß in Zukunft gerade die achtklassige Realschule berufen sein wird, einen hochsinnigen realistischen Unterricht zu pflegen". [„Die Reformbewegungen des realistischen Unterrichtes in Deutschland und Österreich", S. 42 (s. o. S. 5 Anm.)]. – Vgl. auch III. Teil, S. 476.

3) Auch die Meraner Vorschläge sagen: „Wir haben unsere Hauptaufgabe darin erblickt, durch einen geeigneten Lehrplanentwurf, der an die Verhältnisse der humanistischen Gymnasien anknüpft, dieses Prinzip von vornherein konsequenter auszugestalten als bisher geschehen war."

4) Daß und warum wir bei einem solchen „Einheitslehrplan" speziell für Mathematik keineswegs an die vielberufene „Einheitsschule" denken, wird im X. Bd. im Zusammenhang mit dem Begriffe der „spezifischen Allgemeinbildung" noch näher zu beleuchten sein (vgl. auch unten S. 428.).

Realschulen ebenso allgemein gelten wie andererseits für Preußen oder Österreich oder Amerika. Denn weder gibt es für hier und dort eine andere Mathematik, noch gibt es für das Bildungsbedürfnis der Schüler dieser oder jener Anstalt ein verschiedenes mathematisches Denken. – Wenn gleichwohl die Stundenzahlen an realistischen und nichtrealistischen Anstalten stark voneinander abweichen, so rechtfertigt sich dies aus den zu dem gleichen Maße von Einsicht noch hinzukommenden verschiedenen Maßen der Fertigkeit[1]), die sich nachmals auf die klare Erfassung der Grundgedanken aufzubauen hat. Namentlich für das Maß von Fertigkeit, wie sie dem künftigen Techniker fortwährendes Bedürfnis ist, und die er sich in den Kinder- und Knabenjahren erwerben muß, damit er nicht in den Jünglings- und Mannesjahren ihren Mangel immer und immer zu verwünschen braucht – für solche Fertigkeit hätte der spätere Jurist oder Philolog, ja auch der „reine“ Mathematiker als solcher keine Verwendung. Die vorliegende Didaktik kann zwar den Wert solcher Fertigkeit gebührend hervorheben, braucht aber für ihre Erwerbung nicht noch besondere Ratschläge zu geben; denn daß z. B. die Buben „addieren wie die Maikäfer“[2]), erzielt ja ohnedies nur ein Lehrer, der es selber kann, und der dann auch weiß, wie es gemacht wird. Was dagegen eine Didaktik kann und soll, beschränkt sich (aus schon in der Einleitung, S. 13, dargelegten Gründen) auf die erste Einführung in die verschiedenen Kapitel, wogegen dem Lehrer wie dem Schüler, wenn nun einmal die natürlichen Zugänge richtig erschlossen sind, alsbald die mathematische Wissenschaft selber die beste Führerin wird.

Eben deshalb wurde auch das denkbar niedrigste Stundenausmaß[3]), mit dem man in Mathematik überhaupt noch etwas

---

1) Auf ein sonderbares Mißverständnis, das im Hervorheben der „Fertigkeit“ eine Minderbewertung sehen zu sollen meinte, kommen wir im vorletzten Paragraphen (S. 498–503) zurück.

2) Diesen überraschenden Ausdruck gebraucht GOTTFRIED KELLER in Martin Salander. – Wie ich nachträglich höre, sagt man in Berlin: „Zählen wie die Maikäfer“.

3) Dies ist das Ausmaß, mit dem die österreichischen Gymnasien seit 60 Jahren haben und auch künftig werden auslangen müssen (vorher hatte es dort einen eigentlichen Mathematikunterricht überhaupt nicht gegeben). Dagegen betonen die Meraner Vorschläge (S. 3 [14]): „Vier Stunden Mathematik (bzw. Rechnen) gleichförmig durch alle Klassen des Gymnasiums hindurch sollte die allgemeine Norm sein.“

Ohne Zweifel sind die Meraner Vorschläge in vollem Recht, auf dem bisherigen Besitz der vier Stunden zu bestehen und ihn für die wenigen dreistündigen Klassen zurückzuerobern; denn wiewohl die verlangte Reform eine durchaus qualitative ist und eher eine Verminderung als Vermehrung des Lehrstoffes anstrebt, so ist es doch immer das Unpraktischste, womit die erreichen kann, vorausgesetzt: Es sind drei wöchentliche Stunden. Alle Anstalten, die eine größere Unterrichtszeit, wohl bis sechs Stunden, zur Verfügung haben, werden dieses über das Existenzminimum hinausreichende Kapital an Zeit und Kraft am besten nicht durch Angliedern neuer Lehrgebiete, sondern in dem intensiveren Durcharbeiten der bisherigen verwerten. Dieser Unterschied der Intensität zwar kann nicht die Grundlagen des Unterrichtes betreffen, um so mehr aber das nach oben ohnedies geradezu unbeschränkte und unbegrenzbare Ausmaß an zahlreicheren und schwierigeren Übungen. — Überhaupt sei hier daran erinnert, daß auch bei den vermeintlich striktesten Lehrplänen und Instruktionen, durch die man den Lehrer vor Übergriffen zu bewahren gesucht hat, die Übungsbeispiele diejenige Leiter gewesen sind, auf deren untersten Sprossen ein allzu genügsamer Lehrer stehenbleiben, auf deren allzu hohe ein anderer sich versteigen konnte, wenn ihn nicht sicherer als alle „Instruktionen"

Reform eines Unterrichtsgegenstandes beginnen kann, wenn sie ihm das gewohnte bisherige Stundenausmaß schmälern will, denn das lähmt nur den Mut der Lehrer zu qualitativen Verbesserungen. — Dagegen haben wir augenblicklich in Österreich ein Interesse daran, daß man nicht aus der quantitativen Beschränkung auf nur drei Wochenstunden, der sich die österreichischen Gymnasien seit 60 Jahren haben anpassen müssen (und auf eine Stundenvermehrung hat die Mathematik hier solange nicht zu hoffen, als z. B. die modernen Sprachen ein Plätzchen in unseren Gymnasien erst erkämpfen müssen), den gelegentlich verlautenden Schluß ziehe, mit den nunmehr verlangten qualitativen Verbesserungen sei es für Österreich, wenigstens für seine Gymnasien, von vornherein nichts. Vielmehr wollen wir uns im allgemeinen damit trösten, daß Geheimrat CZERNY (Heidelberg) die österreichischen Gymnasien zu der durchweg viel geringeren Gesamtstundenzahl im Vergleich zu den reichsdeutschen grundsätzlich und im Namen künftiger Entbürdungen der höheren Schulen überhaupt beglückwünscht hat.

Ganz ausdrücklich aber verwahre ich mich dagegen, daß man aus der vorstehenden einfachen Konstatierung unserer nur drei österreichischen Mathematikstunden nun etwa schließe, es liege hierin für Preußen die einfachste Lösung der schon lange strittigen Biologie-Frage: „Wenn schon Biologie sein muß, so nehmen wir die Zeit dafür der Mathematik, damit sie nicht den alten Sprachen genommen werde!" Da im ganzen die Biologie weniger hohe Ansprüche an die psychische Arbeit der Schüler stellt als die Mathematik, so brächte jene Lösung dem auf ebenso hohe psychische Arbeit stolzen altklassischen Unterricht mittelbar sogar noch einen relativen Energiezuwachs. Weil es sich also hier um Gleichgewichtsverschiebungen (si licet parva componere magnis: zu vergleichen den so sehr gefürchteten Verschiebungen des „europäischen Gleichgewichtes") innerhalb der gegenwärtigen Stärkeverhältnisse zwischen den sogenannten humanistischen und realistischen Lehrfächern handeln würde, sei die nähere Begründung jener Verwahrung auf den X. Bd. verschoben. Jedenfalls darf aber das soeben angeführte Argument einer künftigen „Entbürdung der höheren Schulen überhaupt" nicht einseitig auf die Gegenwart des mathematischen Unterrichtes angewendet werden, solange man von solcher Entbürdung in allen einzelnen Fächern des humanistischen Unterrichtes nichts wissen will.

die Rücksicht auf die tatsächliche und individuelle Leistungsfähigkeit seiner jeweiligen Schüler leitete.

Als einziges für alle Länder und Durchschnittsschüler wirklich gemeinsames und eben deshalb unvorgreifliches Einteilungsprinzip für die im folgenden zu empfehlende Gliederung und Verteilung der Lehrstoffe ist also das **Lebensjahr** des Schülers zugrunde gelegt (wobei nur ab und zu behufs übersichtlicher Zählung und kurzer Zitierung das 11. Lebensjahr als „erster Jahrgang", das 18. als „achter Jahrgang" bezeichnet wurde). Zu diesem Schema verhalten sich die höheren Schulen der meisten Staaten so, daß in der Tat der oberste Jahrgang (in Preußen Oberprima, in Österreich VIII. Klasse genannt[1]) mit vollendetem 18. Lebensjahr vom Durchschnittsschüler absolviert sein kann. Die Abweichungen dagegen, die sich aus der Neunklassigkeit der drei Hauptarten reichsdeutscher höherer Schulen und der Achtklassigkeit der österreichischen Gymnasien ergaben (von der bedauerlichen Siebenklassigkeit der österreichischen Realschulen hier nicht zu sprechen), machen sich äußerlich nur in den untersten Jahrgängen geltend, indem in die preußische Sexta die Kinder mit 9, in die österreichische I. Klasse mit 10 (bzw. in die siebenklassige Realschule meist erst mit 11) Jahren eintreten. Für eine Didaktik des mathematischen Unterrichts verwischt sich aber dieser Unterschied dadurch, daß sowieso der Unterricht in diesen untersten Klassen der Mittelschulen nach Inhalt und Methode möglichst stetig aus dem der Volksschulen hervorwächst.

Daß die nachfolgenden „Lehrproben, Lehrgänge und Lehrpläne" nicht nur bis zum Auseinanderhalten einer Unter-, Mittel- und Oberstufe, sondern bis in die einzelnen Jahrgänge gegliedert wurden, war namentlich auch gefordert durch die folgenden Programmpunkte, welche mit Recht die Unterrichtskommission an die Spitze ihrer Meraner Vorschläge gestellt hat: „den Lehrgang mehr als bisher dem natürlichen Gange der geistigen Entwicklung anzupassen, überall an den vorhandenen Vorstellungskreis anzuknüpfen, die neuen Kenntnisse mit dem vorhandenen Wissen in organische Verbindung zu setzen, endlich den Zusammenhang des Wissens in sich und mit dem übrigen Bildungsstoff der Schule von

---

1) Wie sich zu obigem Schema die Jahrgänge und ihre Bezeichnungen in den andern deutschen und außerdeutschen Staaten verhalten, ist zu ersehen aus dem wertvollen Buche von Prof. Dr. Horn, „Das höhere Schulwesen der Staaten Europas". Zweite Auflage 1907.

Speziell der oben erwähnte Unterschied zwischen der Neunklassigkeit der reichsdeutschen Schulen und der Achtklassigkeit der österreichischen Gymnasien fiele auch äußerlich weg, wenn die in Österreich seit den fünfziger Jahren in Aussicht genommenen „Vorbereitungsklassen", die aus sehr vielen Gründen höchst wünschenswert wären, allgemeiner ins Leben träten; s. u. S. 55. – Dazu S. 430.

Stufe zu Stufe mehr und mehr zu einem bewußten zu machen." Soll nämlich der hiermit betonte Gedanke der „**Konzentration**" (in der einen von den mehreren Bedeutungen dieses leider schon allzu beliebten pädagogischen Ausdruckes) nicht nur in abstracto wiederholt, sondern an konkreten Beispielen der Verwirklichung im mathematischen Unterricht nahe gebracht werden, so durften eben die Ausblicke auf gleichzeitige Jahrespensen der anderen Unterrichtsfächer nicht fehlen, und es mußte also auch für diese schon ein idealer Lehrplan ins Auge gefaßt werden (der aber erst im X. Bd. ausführlicher entwickelt werden soll). Auf solche Art ist die Übersichtstafel am Schlusse des zweiten Teiles zustande gekommen. –

Daß in dem nun folgenden zweiten Teil zuerst die „Lehrproben", zuletzt die „Lehrpläne" angeführt sind, bedarf nach dem allgemeinen Plan dieser didaktischen Handbücher kaum mehr einer Rechtfertigung: Freilich scheint der Plan jeder planmäßigen Tätigkeit vorgehen, nicht erst nachfolgen zu müssen. Unsere Lehrpläne aber wünschen wir nur als natürliche Niederschläge derjenigen Lehrerfahrungen und Lehrüberzeugungen aufgefaßt zu sehen, von denen die mitgeteilten Lehrproben eben „Proben", d. h. anschauliche Beispiele sein wollen, und denen wir nichts Besseres wünschen, als das „exempla trahunt". Erst wenn die Einzelvorschläge das Vertrauen des einzelnen Lesers und Lehrers errungen und zur Nachfolge und Weiterbildung in gleichem Geiste angeregt haben, wird sich der zusammenfassende „Lehrplan" (§ 47, S. 428 ff.) das Vertrauen in den Geist des Ganzen verdient haben.

Zweiter Teil.

Lehrproben, Lehrgänge, Lehrpläne.

Unterstufe: Zehntes bis dreizehntes Lebensjahr.

§ 7. Zur Charakteristik der Unterstufe.

Worin wir den charakteristischen Unterschied der Unterstufe des mathematischen Unterrichtes von seiner Mittel- und Oberstufe ersehen, soll nach dem zum Schluß des vorigen Abschnittes Gesagten hier nicht noch einmal allgemein gesagt werden, sondern aus den nachfolgenden einzelnen Vorschlägen (§§ 8—15) in einer zu unmittelbarer Anwendung geeigneten Weise hervorgehen. Nur um das vielfach Ungewohnte dieser Vorschläge nicht als willkürliche Neuerungssucht erscheinen zu lassen, seien sogleich hier als Leitgedanken die folgenden ausgesprochen:

Für zehn- bis dreizehnjährige Kinder gibt es noch keine mathematische „Wissenschaft", weder in Definitionen noch in Beweisen[1]). Anschauen und Tätigsein — Betätigung zuerst mit der Hand, dann mit dem Hirn, muß vor allem die Materialien herbeischaffen, die der späteren logischen Bearbeitung überhaupt erst Stoff und Angriffspunkte bieten. Wer ohne Anschauung und ohne manuelle Tätigkeit sogleich logische Formulierungen „beibringen" will, bringt keineswegs diese oder überhaupt irgendwelche Gedanken, sondern er bringt nichts bei als leere Wörter.

In der Arithmetik, die wir für die Unterstufe lieber Zahlenlehre[2]) nennen, heißt „Anschauung" soviel wie sozusagen persönliche Bekanntschaft mit den einzelnen Zahlenindividuen innerhalb nur sehr allmählich sich erweiternder Zahlenkreise,

1) Angesichts des Wahnes, daß „schwierige geometrische Beweise ... Knaben von 12 Jahren beigebracht werden müssen" (vgl. oben S. 43 Anm.), möchte man wahrlich nach „Kinderschutz" rufen! – Und ist es denn nicht einem gefürchteten Kinderlaster verzweifelt ähnlich, wenn man vorzeitige intellektuelle Leistungen gewaltsam hervorlockt, wiewohl der seelische Organismus eines Zehn- bis Dreizehnjährigen für sie noch nicht reif ist?!...

2) In Preußen sagt man „Rechnen". – Sobald man das Wort „Arithmetik" gebraucht, dulde man nicht die gewöhnliche Konfusion mit „Mathematik".

von denen aus nur die feste Einprägung der „Stufenzahlen“ des dekadischen Systems gleichsam weiter hinaus sich erstreckende Richtungslinien für die allmähliche Erweiterung einer solchen Zahlanschauung bildet. „Tätigkeit“ aber heißt in der Zahlenlehre: Rechnen, rechnen und wieder rechnen! und nicht bloß über Zahlen und Zahlenbeziehungen reden.

In der Geometrie, die wir auf der Unterstufe lieber Raumlehre nennen, heißt „Anschauung“ – –, doch wozu hier eine Definition, da wir ja längst vom geometrischen „Anschauungsunterricht“ reden?! Aber Reden ist eben auch hier etwas anderes als tun. Wir fürchten und — hoffen, daß eine Anleitung zu wirklichem „Anschauen“ räumlicher Dinge im vollen psychologischen Sinne (vgl. S. 94), d. h. zum Nicht-nur-„anschauen“, sondern In-die-Hand-nehmen, sie nach allen Seiten wenden und drehen, sie mit eigenen Händen machen, und zwar nicht nur Zeichnungen (behufs der hergebrachten Beweise und Konstruktionsaufgaben), sondern Zeichnungen, die sich „können sehen lassen“, und an denen man auch das Behauptete und Bewiesene nachmessen kann (wie es der Lehrer auf unserer Titelvignette tut), ferner ganz besonders auch Modelle machen – – wir hoffen, daß sich all das von dem hergebrachten *soi-disant* „Anschauungs“-unterricht bis auf weiteres so kräftig unterscheidet wie der neustens für die Physik verlangte Schülerversuch vom Schulversuch, überhaupt wie die eigene Handfertigkeit von dem bloßen Zusehen bei physikalischen oder anderen Experimenten und sonstigen menschlichen Betätigungen.

Zwar hat man den Ruf nach einer „empirischen“, „induktiven“ Behandlung der Arithmetik und Geometrie auf den untersten Stufen des Unterrichts schon oft vernommen. Daß sich dennoch diese Forderung so schwer durchsetzt, hat zum Teil seine Gründe in der Überzeugung der meisten (oder dem dunklen Gefühl mancher) Lehrer, daß die Mathematik eben nun einmal keine empirische, induktive Wissenschaft sei, welche Überzeugung im III. Teil (§§ 49–50) erörtert und erst unter gewissen Vorbehalten auch als richtig befunden werden wird. Nur sollte als längst zugestanden gelten, daß die apriorische, rein deduktive Mathematik für Kinder von 10–13 Jahren überhaupt noch gar nicht existiert – ja daß auch die mittlere Stufe erst ganz allmählich ein Bedürfnis nach solcher Behandlungsweise erwecken kann und muß.

Da aber leider diese Dinge auch heute noch wie Parteiansichten vertreten und bekämpft werden, so dürfte sich ein anschaulicher Eindruck davon, was am bisher Üblichen schlecht ist, und nach welchen Richtungen hin die Besserung zu streben hätte, am schnellsten durch Lehrtextproben geben lassen, an deren einzelne Punkte sich dann auch die einzelnen Erörterungen knüpfen. Natürlich genügen sowohl für den negativen, warnenden wie für den positiven Zweck einige wenige Proben; denn nur die Richtung des zu verändernden Kurses, nicht schon sein ganzes Ausmaß kann hier vorgezeichnet werden. Bahnbrechend kann hier nicht eine Didaktik, auch nicht ein behördlicher Lehrplan, sondern nur ein den neuen Bedürfnissen sich anpassendes Lehrbuch wirken.

Es sei aber hier der freilich auch etwas radikal klingende Rat ausgesprochen (der sich natürlich am wenigsten des Beifalles erbgesessener Lehrbuchverfasser erfreuen wird), es möchten den Kindern auf der Unterstufe des Mathematikunterrichtes überhaupt nicht Lehrbücher, sondern ein Übungsbuch in die Hand gegeben werden; am besten eine **„Vorschule der Raum- und Zahlenlehre“**[1]) in einem Bändchen für den Arithmetik- und Geometrieunterricht der ganzen (bei uns jetzt dreijährigen) Unterstufe. Dieses Büchlein brauchte keineswegs übermäßig dick auszufallen; sondern alles, was nur der Lehrer an weiteren Übungen und daran sich schließenden Erläuterungen mündlich einflechten kann und soll, ließe sich in ein Buch für die Hand des Lehrers[2]) verweisen, von dem das Übungsbuch des Schülers eben nur jenes Minimum enthält, das er nicht nur im Ohr und im Kopfe, sondern auch vor Augen haben muß. Erst ein Buch, das nicht oder nur ausnahmsweise in Indikativen (wie in den sparsamen Definitionen und Lehrsätzen), sondern in Heische- (tue das! zeige das!) und in Fragesätzen zum Schüler spricht, gibt die hinreichende Gewähr, daß nicht der Unterricht in das hirndörrende Auswendiglernenlassen des Lehrtextes ausartet, das nach trübseligen Erfahrungen noch viel, viel verbreiteter ist, als man es für menschenmöglich halten sollte.[3])

---

1) Dem Mißverständnisse, als dächte ich etwa selbst an die Abfassung eines solchen Büchleins, kommt die Anm. 1, S. 89 zuvor.

2) Vgl. etwa die Fußnoten bei den Skizzen zur Raumlehre S. 94—112.

3) SCHOTTEN fügt der Warnung von REIDT (1906 S. 32) vor der „Auswendiglern- und Abhörmethode“ die Anmerkung bei: „Daß in der Tat mathematischer Unterricht in dieser Weise gegeben wurde, ist dem Herausgeber auch bekannt: es war in diesem Falle sogar noch etwas schlimmer, da der Schüler auch noch die Seitenzahl des Lehrbuches mit lernen mußte.

Im übrigen greifen wir aus der Zahlen- und Raumlehre der untersten drei bzw. vier[1]) Jahrgänge zunächst einige didaktische Einzelfragen ohne scharfe Trennung der Jahrgänge heraus und geben erst für den letzten Jahrgang der Unterstufe (S. 132 ff.) ein zusammenhängendes Bild, wie auch schon dem Dreizehnjährigen der Eindruck eines Ganzen, das sein bis dahin erworbenes Wissen und Können aus Zahlen- und Raumlehre bildet, vermittelt werden kann.

§ 8. Zur Vorschule der Zahlenlehre.

Der Rechenunterricht der ersten Mittelschuljahre ist in der angenehmen Lage, unmittelbar anzuknüpfen an den Rechenunterricht der Volksschule[2]), der die Mittelschule willig das

---

So ging z. B. die Stunde an: „X., gib mir an, was steht auf S. 71!“ War das hergesagt (resp. abgelesen), so pflegte der Lehrer jedesmal hinzuzufügen: „Solches alles steht auf S. 71. – Was steht auf S. 72?“ Mit diesen Worten wurde der nächste Schüler aufgerufen....

1) In Preußen beginnen die drei neunklassigen Schularten mit dem neunten, in Österreich das achtklassige Gymnasium mit dem zehnten (die einstweilen – leider noch! – siebenklassige Realschule meist mit dem elften) Lebensjahre. Nach HORN, „Das höhere Schulwesen der Staaten Europas“ (S. 3), sind in Preußen mit manchen höheren Lehranstalten „Vorschulen“ verbunden; und auch in Österreich ist schon seit den fünfziger Jahren eine „Vorbereitungsklasse der Gymnasien“ in Aussicht genommen, leider aber bis heute nur in Ausnahmsfällen verwirklicht (z. B. am Theresianischen Gymnasium in Wien, wo ich durch 22 Jahre die Vorteile dieser Einrichtung zu beobachten Gelegenheit hatte). Angenommen nun, die preußische Sexta verzichtete darauf, schon ihre Neunjährigen mit wöchentlich 8 Stunden Latein zu plagen, und Österreich verwirklichte seine Vorbereitungsklasse, so würde sich diese von dem vierten Volksschuljahre wirklich nur dadurch unterscheiden, daß sie sich ganz der Vorbereitung auf die nach der Volksschule dem Kinde so fremde Mittelschule widmete (z. B. dadurch, daß sie in der deutschen Sprachlehre neben der deutschen auch die lateinische und französische Terminologie anwendet). Im Rechnen könnte sich dann diese Vorbereitungsklasse alle Übergriffe (z. B. Proportionen) ersparen und um so ruhiger eine verständige Rechenfertigkeit pflegen; statt Geometrie wäre das Zeichnen zu üben, und zwar so, daß der Anfang des geometrischen Zeichnens sich aus dem Freihandzeichnen (und zwar wieder mehr „Naturzeichnen“ als Vorlagenzeichnen) entwickelte; hierüber einige Worte S. 496 ff.

2) SIMON (1906, S. 3, 4) bewertet die Leistungen der Volksschullehrer in Sachen des Rechenunterrichtes genau entgegengesetzt: „Da haben Sie noch einen und nicht den geringsten Schädling des mathematischen Unterrichts, den Elementarlehrer, der infolge Geldmangels der Verwaltung den mathematischen Unterricht bis in die Quarta hinein gibt, und der im Lehrerseminar nicht diejenige Vorbildung erhält, die ihn dazu befähigt. Namentlich sobald die Bruchrechnung angreift, versagt der Elementarlehrer. ... Bis in die Prima hinein kämpfen wir mit diesem mechanischen Unterricht der Unterstufe und seiner Konsequenz, der Gedankenlosigkeit. Frage ich einen Primaner, weshalb ist

Verdienst zuerkennt, den einstigen mechanischen Schulbetrieb echt pädagogisch von Grund aus reformiert zu haben. An die Stelle öden Regelrechnens hat die Volksschule das Durcharbeiten zuerst kleinerer, dann größerer Zahlenkreise (1–20, dann 1–100 usw.) treten lassen; und es ist eine Freude, manche der gegenwärtig schon weit verbreiteten Volksschulbücher daraufhin anzusehen, wie überall an konkreten Anschauungsbildern die einzelnen Zahlen sozusagen als Individuen dem Schüler entgegentreten, und wie aus solcher individuellen Bekanntschaft heraus allmählich auch die Beziehungen zwischen diesen einzelnen Zahlen von selbst erwachsen, sich befestigen und erweitern. Daß auch so pädagogisch Vorzügliches nachmals wieder schablonisiert werden kann, und daß es während hunderttausend Schulstunden eines elementarsten Rechenunterrichtes nicht an Mißgriffen fehlen wird, braucht nicht erst besonders ausgesprochen zu werden, könnte aber, wie oft es auch in einzelnen Volksschulen geschehen mag, den berechtigten Neid, mit dem wenigstens im Rechenunterricht die Unterstufe der Mittelschulen hinüberblickt auf die Volksschule, nicht grundsätzlich verringern.

Ebenso nun kann, was im einzelnen Vorzügliches von einzelnen Lehrern und einzelnen Lehrbüchern für die Zahlen- und Raumlehre der Unterstufe an Mittelschulen schon geleistet wurde, im ganzen nicht dem Urteile Einhalt tun, daß gerade in diesem Anfangsunterrichte der Mittelschulmathematik noch sehr, sehr viel zu bessern ist. Da ein solches Urteil nicht ausgesprochen werden darf, ehe die Anklage auf ganz konkrete Tatsachen gegründet ist, so sei als eine solche Tatsache die nachstehende Lehrtextprobe aus demjenigen Arithmetik-Lehrbuche angeführt, das seit rund fünfzig Jahren wie Mehltau auf dem mathematischen Anfangsunterricht in Österreich lastet und die einstige glückliche

---

$^4/_6 = ^2/_3$, so erhalte ich unter 100 Fällen 99mal die Antwort: „Der Wert eines Bruches . . .“ und frage ich, ja weshalb, so wird derselbe Satz noch einmal und noch schneller heruntergeschnurrt. Sage ich dann, ich möchte aber gerade den Grund für diesen Satz wissen, so erfolgt tiefes, aber beredtes Schweigen.“ Inwieweit diese Anklagen in den Tatsachen begründet sind, vermag ich nicht zu beurteilen, da es bei uns in Österreich ein solches Herübergreifen der „Elementarlehrer“ in den Mittelschulunterricht nicht gibt. (Eine Art Analogon wäre höchstens, daß der Mathematikunterricht in den untersten Jahren der Mittelschulen gewöhnlich nicht von Mathematikern, sondern von Naturhistorikern erteilt wird, was sich diese selbst dahin abgeändert wünschen, daß man ihnen statt für die Unterklassen der Mathematik die Lehrbefähigung für Geographie gibt – das freilich wollen aber wieder die Historiker nicht.)

Organisation dieses Unterrichtes in ihren Wirkungen völlig lahmlegt — zum mindesten dem Lehrer, der nach diesem Buche zu unterrichten gezwungen ist, die stärksten *sacrificia intellectus* gegen sein pädagogisches Besserwissen und Besserkönnen auferlegt. Nicht um des Tadels eines einzelnen Buches willen, der ebensowenig wie das Lob eines einzelnen Buches sich mit dem auf das Grundsätzliche gehenden Inhalt einer Didaktik des mathematischen Unterrichts überhaupt vertrüge, knüpfen wir die nächstfolgenden Reformvorschläge an eine solche Textprobe an. Vielmehr ist es wieder selbst nur der Grundsatz des Ausgehens vom Gegebenen und Individuellen sowie die Vorsicht, Anklagen gegen das Bestehende ja nicht über greifbare Grenzen hinaus zu erweitern, die es lehrreich und rätlich machen, sogleich durch Hinweise auf ganz bestimmte offene Wunden am augenblicklichen Unterrichtsorganismus sich auf ebenso spezielle Mittel zur Heilung hinweisen zu lassen. Die eingefügten kleinen Nummern markieren anfänglich die Stellen, die uns inhaltlich (was natürlich bei einem so simplen Stoffe der seltenere Fall ist) oder didaktisch bedenklich erscheinen; die Bedenken sind wiederum für einige dieser Stellen ausdrücklich formuliert – bei den übrigen wird der Leser den Grund des Anstoßes erraten.

Ein arithmetischer Lehrtext, wie er *nicht* sein soll.

I. Das Rechnen mit unbenannten und einnamigen ganzen und Dezimalzahlen.

§ 1.

Um von mehreren Dingen derselben Art anzugeben, wie viele (1) *es sind, nimmt man ein solches Ding als Einheit an und untersucht, wie oft* (2) *diese Einheit in der gegebenen Menge von Dingen derselben Art vorkommt. Der Ausdruck* (3)*, welcher dies angibt, heißt Zahl.* (4)

Eine Zahl, welche nur die Menge der Einheiten, nicht aber die Art derselben ausdrückt, heißt eine unbenannte (5) *Zahl; eine Zahl dagegen, welche sowohl die Menge als auch die Art der Einheiten angibt, eine benannte* (6) *Zahl. Drei ist eine unbenannte, drei Kronen eine benannte Zahl.* (7)

Eine benannte Zahl, welche Einheiten einer einzigen Benennung enthält, heißt einnamig (8)*, z. B. vier Kronen. Eine benannte Zahl, in welcher Einheiten verschiedener Benennungen, die jedoch zu derselben Art gehören, vorkommen, heißt mehrnamig* (9)*, z. B. vier Kronen und drei Heller.*

Aus gegebenen Zahlen auf vorgeschriebene Weise andere neue Zahlen bestimmen, heißt rechnen. [10]

Die gesuchte Zahl, zu der man durch die Rechnung gelangt, wird das Ergebnis oder Resultat [11] *der Rechnung genannt.*

Die Lehre vom Rechnen heißt Arithmetik. [12]

1. Bildung und Darstellung der Zahlen.

§ 2.

1. Bildung der Zahlen. Die natürliche Zahlenreihe.

Jede Zahlenbildung beginnt mit dem Setzen [13] *der Einheit. Fügt man zu der gesetzten Einheit noch eine Einheit hinzu, so erhält man die Zahl „zwei"; fügt man zu der Zahl zwei noch eine Einheit hinzu, so erhält man die Zahl „drei" usw.*

Die Zahlen so bilden, wie sie der Reihe nach durch fortgesetztes Hinzufügen der Einheit hervorgehen, heißt zählen. [14] *Die dadurch entstehende Aufeinanderfolge der Zahlen: eins, zwei, drei, vier, fünf usw. heißt die Reihe der natürlichen ganzen Zahlen* [15] *und ein jedes Glied derselben eine natürliche ganze Zahl.* [16] *Die Reihe der natürlichen Zahlen ist unendlich* [17]*, weil das Zählen ohne Ende* [18] *fortgesetzt werden kann.*

2. Sprachliche Darstellung der Zahlen. Das dekadische Zahlensystem.

Alle ganzen Zahlen, wie groß sie auch sein mögen, lassen sich mit einigen wenigen Zahlwörtern benennen. Das Mittel zur sprachlichen [19] *Darstellung der Zahlen bietet das dekadische Zahlensystem.*

In demselben zählt man, von der Einheit ausgehend, mit den bekannten Zahlwörtern: eins, zwei usw. bis zehn. Um nun mit Hilfe dieser und noch einiger weniger Wörter die folgenden Zahlen bequem benennen zu können, betrachtet man zehn ursprüngliche Einheiten, welche [20] *auch Einer genannt werden, als eine neue, höhere Einheit und nennt sie einen Zehner (Einheit des 1. höheren Ranges). Zehn Zehner bilden ebenso eine Einheit des 2. höheren Ranges, einen Hunderter, zehn Hunderter einen Tausender (Einheit des 3. höheren Ranges), zehn Tausender einen Zehntausender (Einheit des 4. höheren Ranges), zehn Zehntausender einen Hunderttausender (Einheit des 5. höheren Ranges), zehn Hunderttausender eine Million (Einheit des 6. höheren Ranges) usw. Allgemein: Zehn Einheiten irgendeines Ranges bilden eine Einheit des nächsthöheren Ranges.*

Mit Hilfe der Namen dieser Einheiten und der Namen der ersten neun Zahlen der natürlichen Zahlenreihe geschieht die Benennung der auf zehn folgenden Zahlen dadurch, daß man sie als Summe von Einern, Zehnern, Hundertern, Tausendern usw. darstellt und als solche benennt. [21]

Die Einer[22]*, Zehner, Hunderter, Tausender usw. heißen* d e k a d i s c h e E i n h e i t e n[23] *und jede Zahl, welche sich aus dekadischen Einheiten zusammensetzt, eine* d e k a d i s c h e Z a h l. *Im Nachfolgenden werden der Kürze wegen die dekadischen Einheiten mit den großen lateinischen Anfangsbuchstaben ihrer Namen bezeichnet, nämlich: Die Einer mit E., die Zehner mit Z., die Hunderter mit H., die Tausender mit T., die Zehntausender mit Zt., die Hunderttausender mit Ht., die Millionen mit M. usw.*

3. Schriftliche Darstellung der Zahlen. Das Positionssystem.

Da im dekadischen Zahlensystem 10 Einheiten eines Ranges bereits eine Einheit des nächsthöheren Ranges bilden, so braucht man für die schriftliche Darstellung der dekadischen Zahlen nur Zeichen für die ersten neun Zahlen, nämlich die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sowie das Zeichen 0 (Null), welches anzeigt, daß von einem bestimmten Range keine Einheit vorhanden ist. Diese Zeichen, welche von den Indern[24] *erfunden wurden, sind durch Vermittlung der Araber in Europa bekannt geworden und heißen deshalb* a r a b i s c h e *Ziffern.*

Um mit Hilfe dieser zehn Zeichen eine Zahl, z. B. Achttausend siebenhundert fünfzig und sechs oder 8 T. 7 H. 5 Z. 6 E. schriftlich darzustellen, hat man festgesetzt, daß die Ziffer der Einer an der 1. Stelle rechts, die Ziffer der Zehner an der 2. Stelle, also links von den Einern, die Ziffer der Hunderter an der 3. Stelle, also links von den Zehnern usw. geschrieben wird. Demgemäß wird die Zahl 8 T. 7 H. 5 Z. 6 E. geschrieben: 8756.

D e m n a c h h a t e i n e Z i f f e r a n i r g e n d e i n e r S t e l l e e i n e n z e h n m a l s o g r o ß e n W e r t a l s a n d e r n ä c h s t e n S t e l l e g e g e n d i e R e c h t e.

Auf diesem Grundgesetze beruht die schriftliche Darstellung der dekadischen Zahlen, das i n d i s c h e P o s i t i o n s s y s t e m.

Jede Ziffer einer dekadischen Zahl hat daher einen doppelten Wert, den Z i f f e r n w e r t, *welcher die Zahl der Einheiten angibt, und den* S t e l l e n w e r t, *welcher ihr vermöge der Stelle zukommt und den Rang der Einheiten anzeigt. So bedeutet z. B. in der Zahl 6666 jede Ziffer 6 Einheiten (Wert der Ziffer); sie gilt jedoch an der 1. Stelle rechts 6 Einer, an der 2. Stelle 6 Zehner, an der 3. Stelle 6 Hunderter, an der 4. Stelle 6 Tausender.*

§ 3.

Die Kenntnis, Zahlen richtig anzuschreiben und die geschriebenen richtig zu lesen, heißt die N u m e r a t i o n.

Statt jede Ziffer mit ihrem Stellenwerte auszusprechen, wie dies bei den Indern[24] *geschieht, faßt man je drei dekadische Einheiten von den Einern angefangen in eine* O r d n u n g *und je zwei Ordnungen in eine* K l a s s e *zusammen, wie dies aus der folgenden Tabelle ersichtlich ist.*

Klasse der Billionen						*Klasse der Millionen*						*Klasse der Einer*					
Ordn. der Tausender			*Ordn. der Einer*			*Ordn. der Tausender*			*Ordn. der Einer*			*Ordn. der Tausender*			*Ordn. der Einer*		
Hunderter	*Zehner*	*Einer*	*Hunderter*	*Zehner*	*Einer*	*Hunderter*	*Zehner*	*Einer*	*Hunderter*	*Zehner*	*Einer*	*Hunderter*	*Zehner*	*Einer*	*Hunderter*	*Zehner*	*Einer*
18.	*17.*	*16.*	*15.*	*14.*	*13.*	*12.*	*11.*	*10.*	*9.*	*8.*	*7.*	*6.*	*5.*	*4.*	*3.*	*2.*	*1.*

Es folgen noch fünf Zeilen im Text und dann fünfzehn Aufgaben im Anschreiben und Aussprechen von Zahlen und im Bestimmen der Stellenwerte. – Sodann *§ 4. Dezimalzahlen* usw.

Pädagogische Einwendungen gegen einen solchen Lehrtext.

Das erste umfassende Bedenken ist das, daß man nicht weiß, ob dieser Lehrtext zum Auswendiglernen oder wozu sonst bestimmt ist. Zum mindesten macht er einem Lehrer, der nicht von vornherein das gesunde Gefühl hat, daß es im ersten Rechenunterrichte nicht auf W ö r t e r, sondern auf das Ausüben der R e c h e n t ä t i g k e i t ankomme, einen weitgehenden Mißbrauch von Kraft und Zeit seiner Schüler durch das Auswendiglernenlassen gehäufter, wortreicher (und dazu nicht einmal sachlich unanfechtbarer) Definitionsketten nicht von vornherein unmöglich. Aber nehmen wir einmal an, es soll der erste Absatz des § 1 nicht mechanisch auswendig gelernt, sondern es sollen die darin ausgesprochenen Gedanken mit den zehnjährigen Kindern durchgesprochen werden, und die Kinder sollen sich nun zu diesen Gedanken selber wieder die sprachliche Einkleidung suchen und finden, so daß sie nichts als die in jenem Absatz definierten Kunstwörter: Einheit, Menge, Zahl usw. aus dem Text selbst „wörtlich" zu übernehmen haben. Nun frage man sich aber, ob solche äußerste Allgemeinheiten, wie sie an der Spitze des § 1 stehen, eine geeignete Kost für zehnjährige Gehirne sind, und man wird, wenn man nicht von allen pädagogischen und sonstigen Göttern verlassen ist, mit einem erschrockenen „Nein" antworten. Inwieweit die gleiche Frage und die gleiche Antwort auch auf einiges oder vieles in der umständlich schwerfälligen Darstellung der nächsten Absätze und Abschnitte paßt, mag der Leser nach seinem persönlichen Gefühle entscheiden.

Und wenn nun jene allerhöchsten Allgemeinheiten gar noch inhaltlich halb oder ganz wertlos sind! Wer es wagt, allgemeinste, abstrakteste Begriffe zu definieren, läuft immer Gefahr, Undefinierbares[1] definieren zu wollen. Das Verkehrte eines solchen Unternehmens rächt sich meistens in versteckten Zirkeldefinitionen und anderen Definitionsfehlern. Nun will unser Lehrtext vor allem definieren, was Zahl (4) ist. Als *genus proximum* weiß er sich kein anderes *genus* als „Ausdruck“ (3) – ein möglichst farbloses Wort; und trotzdem schützt es seine Vagheit nicht davor, die Definition zu einer handgreiflich falschen zu machen. Denn ich kann zwar für die Zahl selbst (für das, was das Wort „Zahl“ überhaupt oder was ein bestimmtes Zahlwort bedeutet) allerlei Arten des „Ausdruckes“ finden; ich kann, daß ich jetzt gerade an „Drei“ denke, in Wort oder Schrift ausdrücken: sowohl drei wie *tres,* sowohl 3 wie III ist ein solcher Ausdruck für die Zahl drei; aber die Zahl selber ist kein „Ausdruck“. – Soviel über das *genus proximum* (auf das wir im III. Teil, § 48, S. 432 noch zurückkommen). Und nun die *differentia specifica,* die der vorausgehende Satz allerdings schon halbwegs vorzubereiten suchte. Steckt denn aber in dem „wie viele“ (1) und in dem „wie oft“ (2) nicht deutlich genug schon das zu Definierende, so daß man den Zirkel nicht einmal mehr einen „versteckten“ nennen kann?! Und solches völlig wertloses Zeug müssen die armen Kinder lernen – „wörtlich“ oder „nicht wörtlich“!

Sodann werden unbenannte (5) und benannte (6) Zahlen definiert. Wozu das schon hier? Warum nicht erst dort, wo von den benannten Zahlen wirklich gehandelt wird, und wo es noch immer Zeit wäre, den Schülern zu sagen, daß alle bis dahin behandelten Zahlen „unbenannte“ gewesen waren (wo man, wenn es sich nicht um Zehnjährige handelte, eigentlich noch verraten müßte, daß die unbenannte Zahl ohnedies schon eine Abstraktion ist). Muß es aber schon sein, so täten die beiden Beispiele (7) denselben Dienst wie die vorausgegangenen Definitionen. Gleiches gilt von den Definitionen des „Einnamigen“ (8) und „Mehrnamigen“ (9).

Dann aber: Muß wirklich sogar noch definiert werden, was „Rechnen“ (10), was „Ergebnis oder Resultat“ (11) und was „Arithmetik“ (12) ist? — Aber das Bedürfnis zu definieren und namentlich vor einer ganzen Wissenschaft oder Kunst zu definieren, wo-

1) Vergleiche meine Logik: § 31. Undefinierbare Begriffe und Namen.

von sie handelt, muß der Menschheit ein tief eingewurzeltes Bedürfnis sein. Daher zum Ausschnaufen von jenen Definitionsketten hier eine kurze tragikomische Geschichte, die mir unvergeßlich und in meiner späteren Lehrtätigkeit oft warnend lehrreich geworden ist: Als angehender Hochschüler hatte ich das Vergnügen, in einer kleinen Landstadt mit einem steinalten Fräulein, das sich kümmerlich durch Erteilen von Klavierstunden nährte, öfters klassische Musik zu machen. Da klagte sie mir einmal: „Ach, Herr H., Sie glauben gar nicht, wie hart es ist, in dieser Stadt den Kindern Musik beizubringen; denn wenn ich sie frage, was Musik ist, so wissen sie es regelmäßig nicht und merken es sich auch nicht“. Ich fragte teilnehmend: „Nun, was ist denn Musik?“, worauf sie gerührt antwortete: „Musik ist die Kunst, durch geordnete Folge von Tönen allerlei angenehme Empfindungen auszudrücken“. Und daß nun das die Kinder nicht wußten und sich auch nicht merkten, war ihr schmerzlicher als der Hunger, den sie um ihrer Kunst willen zu leiden hatte. – Die Gute ruht längst im kühlen Grunde. Wann werden die Einleitungen unserer Schulbücher auch bei ihr ruhen? – – –

Was aber von mathematischen Grundbegriffen und Kunstausdrücken tut nun den Kindern während der drei ersten Mittelschuljahre wirklich not? Die Antwort ist, wenn auch etwas radikal, so doch sehr einfach: daß die Kinder zwar diejenigen Wörter, deren sich der Unterricht bei größter Sparsamkeit und sonstiger Schlichtheit in Terminologiesachen zu bedienen nicht umhin kann, im arithmetischen und geometrischen Sprechen zwar wirklich gebrauchen lernen, ohne daß aber darum Lehrer und Lehrbuch schon von jedem solchen Worte eine Definition geben, geschweige daß vom Schüler die Definition verlangt werden müßte. Wir kommen auf dieses Definieren wie auf die sonstige sprachliche Formgebung für mathematische Begriffe im III. Teile (§ 52, S. 490—493) zurück.

Bei einem solchen Maße von Sparsamkeit an allem bloßen „Lehrtext“ würde sich der Anfang einer Zahlenlehre für die unterste Stufe etwa so ausnehmen wie in dem folgenden Anfang einer Lehrtextprobe. Auf alle didaktischen Einzelheiten, die dem mündlichen Unterricht Pflicht sind – z. B. überhaupt nicht sogleich von „unbenannten“ Zahlen und ihren mündlichen und schriftlichen Bezeichnungen zu sprechen, sondern Übungen an „benannten“ Zahlen vorausgehen zu lassen — ist hier verzichtet.

Denn das dem Schüler gedruckt in die Hand Gegebene soll sich von der zwanglosen Sprache des Lehrers, eigentlich dem fortlaufenden Gespräche zwischen Lehrer und Schüler, auch schon im äußeren Umfange gründlichst unterscheiden, wenn je ein gesunderes Verhältnis zwischen dem „mündlichen Verfahren" des Schulunterrichtes und den gedruckten Lehrbehelfen eintreten soll, als es heute, gerade nach den wortreichen Lehrbüchern zu schließen, noch sehr allgemein herrschend zu sein scheint. Für den mündlichen Unterricht gilt die schon von ROUSSEAU dem Pädagogen empfohlene „Kunst, Zeit zu verlieren". In einer gedruckten Vorschule der Zahlenlehre[1]) dagegen ist jedes Körnchen Druckerschwärze verloren, das etwa über Folgendes hinausgeht:

1) Während des Druckes erscheint in der Zeitschrift für mathem. u. naturw. Unterr. XXXIX, Heft 5/6, die an Anregungen reiche Abhandlung von GOLDZIHER „Der Rechenunterricht auf der Unterstufe der höheren Schulen". Sie sagt mit Recht: „Nicht isolierte, aus dem praktischen Leben stammende einzelne Anwendungsaufgaben, sondern für die nationale Kulturarbeit wertvolle Sachgebiete sollen zum Ausgangspunkt des Rechenunterrichtes dienen". Als solche werden u. a. die auf die Heimatstadt, das Vaterland usw. bezüglichen offiziellen statistischen Tabellen empfohlen. Man sieht schon aus dieser einen Anregung, wie wenig das gedruckte Lehrbuch alles enthalten kann, was ein lebendiger Rechenunterricht verarbeiten soll. — (A. a. O. S. 291 und sonst eine reichliche Literatur: z. B. verschiedene didaktische Schriften von PERRY.) Im Abschnitt „III. Die beiden Prozesse (Abzählen, Abmessen) des Rechenunterrichtes" gibt der „Prozeß des Abmessens" Gelegenheit, auch auf Beziehungen zwischen Zahlen- und Raumlehre hinzuweisen. „Im geometrischen Unterricht wurde ja in früheren Zeiten — besonders im XVIII. Jahrhundert — mehr auf die Praxis Gewicht gelegt, und es entstanden interessante Lehrbücher, die diese Richtung verfolgen. Schon CLAIRAUT wies in der Vorrede zu seinem klassischen Werke: „Éléments de Géométrie" (1741) auf die Bedeutung der geodätischen Meßarbeiten hin." — Auch unser oben (S. 19) vorgeschlagener Ausdruck „funktionales Anschauen" (als Vorstufe des „funktionalen Denkens") klingt mehrmals an in GOLDZIHERs Forderung einer „empirischen, intuitiven Funktionentheorie" (A. a. O. S. 297 u. a.). —

Jedenfalls möge der obige Anfang einer gedruckten Zahlenlehre nicht dahin mißdeutet werden, als wünschten wir, daß die unbenannten Zahlen vor den benannten kommen. Offenbar mit Absicht ist z. B. die umgekehrte Reihenfolge im Text der neuesten österreichischen Lehrpläne eingehalten. Aber was an Übungen im Erfassen benannter Zahlen der mündliche Unterricht einschließlich des gar nicht nach Unterricht aussehenden Verkehrs zwischen Lehrer und Schüler, der bei manchen Spielen (z. B. Zählen der möglichen Platzwechsel zwischen 2, 3, 4, 5 Knaben u. dgl. m.) ohne Schädigung des Spielcharakters möglich und erwünscht ist, sich alles erfinden läßt, soll und darf eben gar nicht die Form eines gedruckten Buchtextes annehmen können. Und auch was an theoretischen Zwischenerklärungen erwünscht ist, braucht sich noch lange nicht alles im Buche zu finden. — Aber freilich: das „mündliche Verfahren" ist zwar in unser Straf- und Zivilrecht eingedrungen; in unserem Unterricht aber scheint, nach der ganzen Anlage so vieler Lehrbücher

Ganze Zahlen, Zahlzeichen. Zehnersystem.

Der natürlichen Reihe von **ganzen Zahlen** entsprechen die **Zahlwörter:** Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun ... und die **Zahlzeichen**[1]) (Ziffern) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...

Das Rückwärtszählen: ... 6, 5, 4, 3, 2, 1 führt zu 0 **(Null)**.

Das Zehnersystem (dekadisches System) braucht für alle Zahlen, die größer sind als neun, keine neuen Ziffern, sondern man schreibt und spricht:

10, 11 ... 20, 21 ... 99, 100, 101 usw.

Präge dir folgende **Stufenzahlen** und die Anzahl ihrer Nullen ein:

...	10 000 000	1 000 000	100 000	10 000	1000	100	10	1
	(7)	(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)	(0)
	Zehn-millionen	Millionen	Hundert-tausender	Zehn-tausender	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer

Nun folgen natürlich Übungen im Anschreiben und Aussprechen von Zahlen, wobei aber die Volksschule ja wohl alles Wesentliche schon getan hat. Doch werden auch in der Mittelschule nicht sogleich alle Kifflichkeiten recht vielstelliger Zahlen mit allerlei unregelmäßig eingeschobenen Nullen u. dgl. m. im ersten Anlauf zu absolvieren sein. Vielmehr verlangt das Prinzip der Befreiung vom Formalismus, d. h. der nirgends die Fühlung zwischen Mathematik und Wirklichkeit aufgebenden oder

---

(nicht nur mathematischer) zu schließen, die volle Heterogeneïtät zwischen einem lebensvollen mündlichen (und Zeigefinger-)Verfahren und dem der auswendig zu lernenden Lehrtexte im mathematischen wie in jedem anderen Sachunterrichte noch lange nicht eingesehen und betätigt zu werden.

1) Streng genommen sind auch die geschriebenen und gesprochenen Zahlwörter einerseits, die Ziffern und Ziffernreihen andererseits Arten der übergeordneten Gattung „Zahlzeichen“, d. h. Zeichen für Zahlen; wobei dieses Bezeichnete, die Zahl selbst, nicht wieder ein „Zeichen“ ist (wie z. B. PRINGSHEIM definieren zu müssen meint; vgl. S. 433). Näheres darüber, wie sich der Mittelschulunterricht zur Frage: „Was ist die Zahl?“ zu verhalten habe, und ob er überhaupt eine Antwort auf diese von Mathematikern und Philosophen kaum einhellig beantwortete, große Frage zu wagen, geschweige eine Definition im allgemeinen zu geben in der Lage sei, vergleiche einiges im III. Teile, S. 432 ff. – Im Obigen ist das Wort „Zahlzeichen“ in nicht strengem, aber nun einmal herkömmlichem Sinne verwendet.

Ausdrücklich mag der Schüler aber dazu angehalten werden (auch nur mündlich, nicht seitens des gedruckten Buches), das Wort „Ziffer“ wirklich nur für das einziffrige schriftliche Gebilde zu verwenden. Es ist eine überflüssige Sprachverwirrung, z. B. von den hohen Ziffern eines Budgets u. dgl. zu reden, wo eben die Zahlen gemeint sind.

verlierenden Methode, daß wir nicht ins Blaue hinein Zahlen anschreiben und aussprechen lassen, bei denen dem Schüler alle Gedanken an ein Gezähltes vergehen müßten. Immerhin geriete auch dieses Prinzip, wenn wir es auf die Spitze treiben wollten, in einen Widerspruch damit, daß der Bereich von Zahlen, mit denen sogar wir Erwachsenen, geschweige denn der Zehnjährige, noch halbwegs konkrete Vorstellungen zu verbinden vermögen, bei weitem nicht so weit reicht, als daß sich an ihm auch nur das dekadische Prinzip vollständig entwickeln ließe. Denn zu diesem gehört außer der Verzehnfachung der Stellenwerte gegen links auch noch die Zäsur vor 1000 und die sozusagen Doppelzäsur vor 1000000, und diese beiden Eigentümlichkeiten müssen doch wohl schon im Anfang des Mittelschulunterrichtes vom Schüler nicht nur verstanden, sondern zu aller Sicherheit geübt werden. Dazu aber gehört, daß die eine oder andere Übung auch noch über die Millionen bis zu den Zehnmillionen und Tausendmillionen (Milliarden) geführt wird. Aber all das mit Vorsicht, unter der beständigen Mahnung (die der Lehrer nur an sich selber, nicht an die Schüler richtet), daß jedes Überschreiten des hier unbedingt Notwendigen schon wieder in den Formalismus führt, d. h. hier zum Mißbrauch, weil zur Entgeistung der wunderbaren Kunst des Zahlenschreibens.

Daß es nicht nötig ist, schon im ersten Schuljahre die Schüler mit dem erschöpfenden Einlernen zuerst der Stellenwerte, später des Stelleneinmaleins u. dgl. in ebenso aufregenden wie abstumpfenden Übungen zu plagen, für welche erst zwei Jahre später die Anfänge des Rechnens mit Potenzen (der Grundzahl 10) den festen sichtbaren Ausdruck gewähren, wird beim Lehrgang für das 13. Lebensjahr (S. 173 ff.) noch zur Sprache zu bringen sein. — Für jetzt nur noch zwei spezielle Anregungen zu diesen allerersten Anfangsgründen der Zahlenlehre.

Unser erster Vorschlag ist, über dem Reden und Schreiben von Zahlen nicht das wirkliche Zählen, d. h. das Zählen des Wirklichen, zu vernachlässigen. Vielleicht brächte der folgende Versuch manche Überraschung: Neben dem Tische des Lehrers steht eine Schachtel mit, sagen wir, 187 Erbsen. Der Lehrer ruft nacheinander je einen Schüler heraus, der nun nichts zu tun hat, als diese Erbsen zu zählen[1]) und auf einem Zettel die von

1) Bekanntlich kommen beim wirklichen Ausführen einer Zählung von auch nur einem oder einigen Hundert wirklichen Dingen noch ganz andere psycho-

ihm gefundene Zahl samt seinem Namen (und etwa der zum Zählen gebrauchten Zeit) aufzuschreiben – und natürlich auch nicht sein Resultat den nachkommenden Kameraden zu verraten. Stimmen dann die Resultate der verschiedenen Zählungen nicht, so haben wir sogleich Gelegenheit, die Schwierigkeit von Volkszählungen u. dgl. begreiflich zu machen; wohl auch, warum es schwer ist, Zahlen von mehr als 5–6 verläßlichen Stellen zu erlangen, warum also schon bei Millionenzahlen mit Nullen abgerundet zu werden pflegt u. dgl. m. Eine höhere Erkenntnis ist es dann schon, daß diese Sicherheit von 5–6 Stellen unabhängig ist von der absoluten Lage in der Reihe der Stufenzahlen, d. h. ob es sich um Einer oder Zehner oder Hunderter handelt; womit einer der obersten Grundsätze für alles Rechnen mit unvollständigen Zahlen angebahnt ist. Werden jene Übungen im Zählen statt an Erbsen u. dgl. (was ja immer nur ein Ausnahmebeispiel bleiben soll, da auch der Schüler bald den Eindruck erhält, es sei hier „schade um die Zeit") durchgeführt an den dm und cm der Länge des Schulzimmers, des Schulhofes u. dgl. m., so verstärkt und vertieft sich nicht nur dieser Eindruck von den Schwierigkeiten alles Zählens und Messens wirklicher Dinge, sondern es ist auch hier der natürliche Übergang zu den Dezimalzahlen, d. h. der Übertragung des dekadischen Prinzips von den Vielfachen auf die Teile ganz von selbst gegeben; zugleich auch ein natürliches erstes Band zwischen Zahlen- und Raumlehre, worüber Näheres auf S. 149 ff.

Ein zweiter Vorschlag, nicht von dem Verfasser, sondern von Wilhelm Foerster[1]), finde hier Platz, da, wenn er die verdiente Verwirklichung finden soll, er füglich von der Schule aus- und in die allgemeinen Sprachgewohnheiten übergehen muß:

„Auf Grund von Erörterungen, wie sie durch die Jahrhundertfrage in

---

logische Qualitäten als die rein mathematischen in Betracht. Vor allem die Ermüdbarkeit, die sich u. a. aus der Gleichförmigkeit einer solchen Tätigkeit erklärt. Ihr müssen dann geradezu moralische Kräfte entgegenwirken: dieses Zählen so gut wie irgendeine andere Tätigkeit überhaupt nicht schleuderisch ausführen zu wollen u. dgl. m. Vielleicht ist in solcher (und noch mancher anderen) Hinsicht auch dem Schüler die bekannte Geschichte aus den Fliegenden Blättern ebenso nützlich wie angenehm: Der Bauer zählt die 100 einzelnen Markstücke einer Münzrolle nach und sagt nach dem 75. Stück: „Bis daher war's richtig – wird das andere auch richtig sein."

1) Das neue Jahrhundert und die Reform unseres Zählungswesens. – SA. aus „Mitteilungen der Vereinigung von Freunden der Astronomie und kosmischen Physik". XI. Jahrg. Heft 1.

Sachverständigenkreisen angeregt worden sind, ist man auch in der Lehrerwelt wiederum aufmerksamer geworden auf die großen Übelstände im Zählungs- und Rechnungswesen, welche durch gewisse Verkehrtheiten beim Aussprechen und beim wörtlichen Hinschreiben der Zahlenausdrücke in der deutschen Sprache und in einigen anderen Sprachen verursacht werden. Bei dem Zahlenausdruck 13, bei welchem man in der Richtung unseres Hinschreibens der Ziffern zuerst die Eins (die Zehnerstelle 1), sodann die Drei (die Einerstelle 3) hinsetzt – gemäß den in der ganzen Folgeordnung der dekadischen Stellen beim Ziffernschreiben eingeführten Grundsätzen – wird sowohl beim Aussprechen als bei dem in vielen Fällen zur größeren Sicherung ausgeführten buchstäblichen Hinschreiben der bezüglichen Zahlwörter die Reihenfolge der Wörter gegen die in Schrift und Druck eingehaltene Ziffernfolge umgekehrt, indem man „Dreizehn" sagt und ebenso in Buchstaben „Dreizehn" schreibt. Dieselbe Verkehrtheit findet bei allen Ziffernausdrücken zwischen 13 und 99 mit Ausnahme der vollen Zehner statt. Bei 11 und 12 kommt diese Verkehrtheit nicht deutlich zum Vorschein. Es ist dagegen außer allem Zweifel, daß es in hohem Grade unzweckmäßig ist, ja sogar eine große Schädigung des ganzen Rechnungswesens enthält, daß man zwischen 13 und 99 die Folgeordnung des ziffernmäßigen Hinschreibens der Zahlenausdrücke ohne weiteres beim Aussprechen und wörtlichen Hinschreiben derselben nach Zehnern und Einern umkehrt. Man müßte sich durchaus gewöhnen zu sagen, „zehn drei" usf. bis „zehn neun" statt dreizehn bis neunzehn, sowie „zwanzig eins" usf. bis „neunzig neun" statt einundzwanzig bis neunundneunzig. Fast noch schlimmer wird die Sache in den Hunderten; denn von 101 bis 109 (eigentlich bis 112) gilt beim Aussprechen und wörtlichen Hinschreiben die Reihenfolge des Ziffernschreibens; man sagt nicht, ebenso wie bei neunundneunzig, auch neunundhundert, sondern vollkommen korrekt „hundert neun". Von 113 ab bis 199 und entsprechend in den folgenden Hunderten mischt sich aber die korrekte Aussprache mit der bei Zahlen 13 bis 99 zugelassenen Verkehrtheit.

Ein Zahlenausdruck wie 31 729 bietet z. B. schon ein wahres Monstrum von Verkehrtheit der Reihenfolge des Aussprechens: zuerst die zweite Ziffer, darauf folgt die erste Ziffer, hiernach die dritte, sodann die fünfte und zuletzt die vierte. Man male sich aus, welchen Eindruck diese Verkehrtheiten auf die Kinder machen müssen, denen man diese Absurditäten mühsam beibringt. Es ist auch nur eine Stimme unter allen nachdenklichen und sorglichen Lehrern, daß in dieser Lehrweise des Zählungswesens ein pädagogischer Übelstand von weittragender Bedeutung liegt. Unter anderm wird von mehreren Stellen die Beobachtung berichtet, daß die Kinder im Anfange bei dem Hinschreiben der Ziffern die Reihenfolge, in welcher ihnen vom Lehrer die Zahlenausdrücke diktiert werden, einzuhalten suchen, zugleich aber, um dem davon abweichenden Gesetze der Ziffernfolge in den Zahlenausdrücken gerecht zu werden, die räumliche Anordnung in der folgenden komplizierten Weise ausführen: Bei einem Zahlenausdruck wie 31 729 wird die Ziffer 1 zuerst hingeschrieben, jedoch so, daß links neben ihr Platz gelassen wird für die Ziffer 3, welche nach der 1 links von derselben hingeschrieben wird; hierauf folgt rechts neben der 1 die Ziffer 7, und auf diese folgt dann die Ziffer 9, aber so weit nach rechts hinausgerückt, daß nun noch zuletzt die Ziffer 2 (für Zwanzig) zwischen die 7 und 9 hineingeschrieben werden kann. Man kann sich kaum etwas denken, was so schwerfällig und unbequem wäre wie eine solche Art des Hinschreibens, die doch an sich mitten in dem Unsinn der ganzen Sache durchaus sinnvoll ist.

Auch sind schon nicht bloß die Lehrer, sondern neuerdings auch viele Beamte des Rechnungs-, Kassen- und Bankwesens auf diesen für Allewelt schädigenden Sachverhalt aufmerksam geworden. Beim Hinschreiben der Zahlwörter wird z. B. unseres Wissens in Süddeutschland bereits die vollständige Anpassung der Reihenfolge der Zahlwörter an die Reihenfolge der Ziffern amtlich vorgeschrieben, ebenso an manchen Stellen im Rechnungswesen im Verkehr. Von dem Bankbuchhalter Gustav v. Erlach in Zürich ist auch bereits eine recht sinnreiche Untersuchung in betreff der vielen Rechnungsfehler ausgeführt worden, welche durch die Verschiedenheiten der Reihenfolge des Aussprechens und des Hinschreibens der Ziffern, und zwar gerade bei den geübten Rechnern, verursacht werden. G. v. Erlach hat unter anderem darauf hingewiesen, daß es in der deutschen Sprache 36 verschiedene Fälle gibt, in denen auf dem Wege der durch jene Verkehrtheiten entstehenden Verwechslungen der Folge zweier Ziffern bestimmte Rechenfehler hervorgebracht werden, und er hat sogar, angesichts der großen Bedeutung der Sache für die Aufsuchung von Rechenfehlern, ein Verfahren angegeben, durch welches man bei einem bestimmten vorkommenden Fehlerbetrage denjenigen Verwechslungen der Ziffernfolge, die man durch lautloses Aussprechen oder durch die bloße Erinnerung an das Aussprechen begangen hat, leichter auf die Spur kommen kann. Er hat darüber ein kleines Buch geschrieben mit dem Titel „Wie man als Buchhalter Differenzen sucht“, welches im Verlage von E. Speidel in Zürich erschienen ist.

Man hat eigentlich den Eindruck, daß es nur erforderlich sein wird, die Aufmerksamkeit der Schulbehörden[1]) einmal mit allem Ernst auf

1) Auf briefliche Erkundigung schreibt W. FOERSTER: „Mein kleiner Exkurs über „Zählungsreform“ hat leider bis jetzt gar keine Wirkung getan. Das Ministerium war abweisend; die Reform sei gegen das „Sprachgefühl“, gerade so wie die Engländer sagen, das Dezimalsystem widerstrebe der Volksseele.

diese Dinge zu leiten, um die Abhilfe, die natürlich im allerersten Schulunterricht geschehen muß und von dort aus sehr schnell ins Leben eindringen wird, in Gang zu setzen. Aus eigener Erfahrung werden viele mitteilen können, wie schnell man sich an das richtige Aussprechen gewöhnt, und wie schnell man es dann auch erreicht, einen verständnisvollen Kreis von jüngeren und älteren Menschen dafür zu gewinnen. Ein nicht geringer Nebenvorteil wird übrigens in der deutschen Sprache durch das richtige Aussprechen der Zahlen von 13 bis 19 noch erreicht werden. Man weiß aus vielen Erfahrungen, daß Zahlenausdrücke wie vierzehn und vierzig, sechszehn und sechszig usw. sehr leicht beim Hören verwechselt werden. Sobald man aber nicht vierzehn, sondern zehn vier sagt usw., ist diese Gefahr, die z. B. im Telephonverkehr erfahrungsgemäß sehr häufig eintritt, sofort verschwunden.

Es könnte auf den ersten Blick scheinen, als ob die obigen Vorschläge in ihrer Bedeutung etwas überschätzt wären, sozusagen „einen Sturm im Glase Wasser" darstellten. Hierauf wäre zu entgegnen, daß auch die kleinste an sich logisch gerechtfertigte und sachlich einwandfreie Verbesserung – und nun gar der Grundlage einer so wichtigen pädagogischen Angelegenheit – einen sehr hohen formalen Wert beanspruchen darf und für tiefere und schwierigere Reformen geradezu vorbildlich werden kann."

§ 9. Das mechanische Rechnen in den untersten Klassen.

Schon das bloße Wort „mechanisches Rechnen"[1]) erregt den Widerspruch mancher Lehrer, die „mechanisches Rechnen" und „mit Verständnis rechnen" für unversöhnlich halten. So ist es Brauch geworden, daß, während der Schüler z. B. die Multiplikation einer vierziffrigen mit einer dreiziffrigen Zahl ausführen

---

Und die Schulkinder müssen bei uns in den Unsinn dieses Zahlenaussprechens hineingezwängt werden. Aber es gibt sogar Lehrer, die darin eine besondere Gymnastik erblicken".

1) Zwar sagt auch SIMON (1906, S. 4) bedingungslos: „Nie darf der Rechner mechanisch rechnen." Daß aber hier etwas anderes gemeint (und dann mit Recht abgelehnt) ist, als oben empfohlen wird, zeigt die Fortsetzung des Satzes: „. . jede Zahl hat ihre Eigenart, die es zu benutzen gilt; vergleichen Sie einmal das von F. KLEIN kürzlich in den Annalen veröffentlichte Gaußsche Tagebuch und Kleins Bemerkung über die Eigenart des Gaußschen Genius, an der Hand von Zahlenrechnungen intuitiv die Resultate zu finden, um hinterher langsam in härtester Arbeit die Beweise zu erzwingen." Gewiß, nicht erst ein GAUSS, sondern schon der kleinste Schüler verkehre mit den Zahlen wie mit persönlich befreundeten Individuen. Aber auch wer es soweit gebracht hat, schalte nie und nimmer die Wohltaten des mechanisierten Rechnens aus seinem Verkehre mit den Zahlen aus. Von obigem Verbot gilt also: *Qui nimium vetat, nihil vetat.*

will, der Lehrer (auch von manchem Schulinspektor wird es erzählt) es sich zur Pflicht macht, nach jeder zweiten oder dritten hingeschriebenen Ziffer dem Schüler zuzurufen: „Halt, was für einen Stellenwert hat diese Ziffer?!" Es dürfte hierin die wohlgemeinte Pflege des Verständnisses aber doch, in schlimmer Verkennung psychologischer, vielleicht sogar physiologischer Gesetze, einseitig auf die Spitze getrieben sein. Gewiß, wir haben die Zeiten für immer hinter uns, da man den Schülern unverstandene Regeln für das Bruchrechnen, für Teilungs-, Mischungsrechnung usw. einprägte und sie dann nach immer wiederholtem Hersagen der Regeln so rechnen ließ, wie man nach Rezepten kocht. Gewiß wird man in jenem Beispiel vom Multiplizieren den Schüler nicht „rein mechanisch" Teilprodukte bilden und in bestimmter Weise untereinanderschreiben lassen, ohne ihn an Beispielen von wenigziffrigen Zahlen über jeden Stellenwert aufgeklärt und das Untereinanderschreiben usw. von allem Anfang gerechtfertigt zu haben. Aber neben und nach diesem verständnisvollen Rechnen gibt es eben doch noch auch ein „mechanisches Rechnen"[1]). Dieses muß seinen ruhigen, sicheren Trott gehen; es dürfen sich gar nicht „unökonomische" Reflexionen über die Berechtigung jedes Schrittes immer wieder von neuem einmischen, wenn es in was immer für späteren Verwendungen in Schule und Leben die von ihm verlangten Dienste einer wohlgeübten Fertigkeit leisten, aber auch wenn es schon im Anfangsunterricht die neben dem ersten arithmetischen Verständnis keineswegs gleichgültigen sonstigen pädagogischen Nebenerfolge haben soll. Was dem Turner, neben der Muskelstärkung, die schließlich ohne alles Eingreifen eines Willens zur mühelosen Gewohnheit gewordene zweckmäßigste Koordination aller Bewegungen ist, das ist dem kleinen wie dem großen Rechner der mechanisch sichere Ablauf der Operationen. Wer diese immer wieder durch jenes „Halt, was für ein Stellenwert?!" unterbrechen zu sollen meint, würde von dieser Meinung wohl bald zurückkommen, wenn er einen Blick in die Mechanik eines rechnenden Gehirns tun könnte; das künftig zu erfindende „Enkephaloskop" würde uns gewiß ein tausendmal erstaunlicheres Bild einer sausenden Gedanken- (oder

---

1) Wir können es und werden es manchmal mit einem theoretisch-psychologischen Terminus „mechanisiertes Rechnen" nennen; vgl. III. Teil, § 501. Doch belasse man es für die Rechenpraxis natürlich ruhig beim eingewohnten alten Wort „mechanisches Rechnen."

sagen wir immerhin nur Ziffer-)Fabrik zeigen als ein Blick in einen Webstuhl oder eine Spinnmaschine. Wem fällt es ein, bei einer solchen alle paar Sekunden zu stoppen und über den Bau der Maschine und die Gesetze ihrer Funktion tiefsinnige Betrachtungen anzustellen? Also auch hier: *Suum cuique,* dem verständigen Arbeiten und dem mechanisierten Arbeiten.

Möchte auch der erste Rechenunterricht ja nicht glauben, daß das Maß mechanischer Fertigkeit, das für die höheren Stufen dem Schüler Bedürfnis ist, im Durchrechnen je einiger weniger Musterexempel gewonnen werde. Wer in den untersten Mittelschulklassen nicht hinreichend viel addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren läßt, wird bald ein Zurückgehen der in der Volksschule erworbenen Fertigkeiten merken können. Wer dagegen auch schon hier einen deutlichen Fortschritt an mechanischer Sicherheit und Raschheit sich zur Aufgabe machen will, findet ein Ziel hiefür darin, daß dem Schüler das Weglassen aller entbehrlichen (und ebenso das Nichtweglassen aller unentbehrlichen) Begleitwörter zur festen, vielfach wohltätigen Gewohnheit wird. So z. B. beim Multiplizieren[1]):

328105 × 49		
1312420	mit 4!	20, 2; 0, 2; 4; 32, 3; 8, 11, 1; 12, 13.
2952945	mit 9!	45, 4; 0, 4; 9; 72, 7; 18, 25, 2; 27, 29.
16077145	Addieren!	5; 4; 11, 1; 3, 7; 7; 10, 1; 3, 6; 1.

Das Ankünden des jeweiligen Multiplikators (mit 4! mit 9!) ersetzt zwar nicht ganz, aber zum entscheidenden Teil das fortwährende Wiederholen $4 \times 5 = 20$, bleibt 2; $4 \times 0 = 0$ und 2 ist 2; $4 \times 1 = 4$; $4 \times 8 = 32$, bleibt 3; $4 \times 2 = 8$ und 3 ist 11, bleibt 1; $4 \times 3 = 12$ und 1 ist 13; usw.

Eine Umfrage bei vielen Lehrern hat gezeigt, daß manche (und zwar ein nicht geringer Teil) den Verzicht auf diese Füllwörter

1) Nicht das Sprechen, sondern das Anschreiben betrifft folgende Stelle aus SIMON (1908, S. 73): „Für die Multiplikation empfiehlt sich durchaus das Verfahren von E. SCHROEDER, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, 1873. Er rechnet:

235	Die Methode hat den großen Vorzug, daß der Rechner sofort den Platz übersieht, den er braucht, und sie nähert sich der bei Buchstabenrechnung gebräuchlichen. Von hier aus ist es ein kleiner Schritt, mittels übergeschriebener Punkte und Striche die numerische Multiplikation nach absteigenden Potenzen durchzuführen.“
345	
705	
940	
1175	
81075	

„mal“, „ist“, „und“, „bleibt“ usf. für eine zu schwere Forderung halten. Es wäre darauf zu erwidern, daß man eine Erleichterung ganz nach Belieben und Bedarf auch darin eintreten lassen kann, daß man dem Schüler erlaubt, ganz nach seinem Bedürfnis langsam zu sprechen und zu schreiben. Also nötigenfalls auch so langsam, daß er zwar alle jene Füllwörter leise für sich sagt, laut aber eben nur die entscheidenden Zahlen und Ziffern, dabei die zum Anschreiben gelangenden etwas lauter. – Übrigens soll hiermit nur solchen Lehrern, die das eben nicht zu schwer finden, eine Anregung gegeben und eine solche weitestgehende Ersparung an laut oder leise mitgesprochenen Wörtern auch nicht gerade jedem Unterricht der Mittelschule zur Pflicht gemacht werden; denn warum sollte die Individualität der Schüler und der Lehrer nicht auch in dieser Äußerlichkeit ein Recht haben, Konzessionen zu verlangen – wenn freilich die Gleichmäßigkeit der Rechengewohnheit aller Schüler gleichartiger Schulen auch ihre nicht zu verachtenden Vorteile hätte.

Was aber von jedem ordentlichen und auch äußerlich geordnet ablaufenden Unterricht verlangt werden muß, das ist, daß sich irgendein fester Mechanismus für jede Rechnungsart nach einiger Zeit herausbilde und von da an fürs Sprechen wie fürs Schreiben ebenso mechanisch festgehalten werde wie die turnerischen Bewegungen bei Freiübungen, wie die Tempi beim Schwimmen, wie die Griffe beim Exerzieren. – Es ist doch nicht zu entschuldigen, wenn bloß aus Mangel an solcher äußeren Ordnung die Schüler es niemals zum ruhigen Mitschreiben während der an der Schultafel durchgeführten Rechnung bringen können. Hierfür aber ist erstes Erfordernis, daß der an der Tafel schreibende Schüler deutlich und in gleichmäßigem Tempo spricht, je nach Begabung langsamer oder schneller, aber höchstens so schnell, daß eben noch sicher Ziffer für Ziffer ordentlich mitgeschrieben werden kann. Zu jenem Erfordernis gehört dann aber auch ganz wesentlich, daß sich jede Rechnungsart nicht nur für den Zusehenden, sondern auch für den Zuhörenden durch die festgesetzten Begleitworte als das kundgibt, was sie ist: als ein Addieren, Subtrahieren usw. Und hiefür ist eben die einfachste Festsetzung die, daß z. B. beim Addieren nicht mehr, und daß beim Subtrahieren nicht weniger gesprochen wird, als was in den folgenden Beispielen angedeutet ist:

794832	Sprich:	2, 10, 17, 25, **27**; 2
847968		5, 14, 20, 26, **29**; 2
675267		7, 14, 16, 25, **33**; 3
845798		9, 14, 19, 26, **30**; 3
796532		12, 16, 23, 27, **36**; 3
3960397		10, 18, 24, 32, **39**.

69274	Sprich:	8 und **6** ist 14, 1; 3 und **4** ist 7;
36628		6 und **6** ist 12, 1; 7 und **2** ist 9;
32646		3 und **3** ist 6.

Durch dieses „und – ist" kündigt sich für das Ohr des in der Schulbank in sein Schulheft blickenden und mitschreibenden Schülers ganz automatisch an, daß an der Tafel subtrahiert wird; dagegen durch das Fehlen jenes „und – ist" das Addieren.

Erst wenn die ganze Klasse große Sicherheit darin erlangt hat, das an die Tafel Geschriebene und vom Tafelrechner Gesprochene mitzuschreiben, ohne einen Blick an die Tafel werfen zu müssen, mag es der Lehrer wagen, auch ohne einen Tafelrechner die ganze Klasse eine Rechnung durchführen zu lassen, indem er bald diesen, bald jenen Schüler zur Fortsetzung aufruft.

Wenn also ohne Frage die Übungen im mechanischen Rechnen nicht nur zulässig, sondern notwendig sind, so ist es doch noch eine Frage für sich, *wie lange sie jeweilig zu pflegen seien*; denn wieder ohne Frage gibt es auch ein Zuviel solcher Übungen. Hiefür nun vermag einen streng wissenschaftlich-pädagogischen Maßstab die Methode zu geben, die LEO BURGERSTEIN[1]) vor mehr als zehn Jahren für eine der ersten exakten Messungen über psychische Arbeit und ihre Begleiterscheinungen erfunden und durchgeführt hat. Nach dieser Methode nun könnte ein Lehrer, der sicher gehen will, daß er nicht zuviel und nicht zuwenig speziell an mechanischem Rechnen von seinen Schülern verlangt, Versuche darüber anstellen, wann für jede einzelne Rechnungsart das *Optimum*[2]) der Leistung erreicht ist; denn offenbar soll man nicht länger (in die Ermüdungszeit hinein), aber auch nicht viel kürzer die Übungen fortsetzen lassen. Der Schüler

1) BURGERSTEIN, Die Arbeitskurve einer Schulstunde. Zeitschr. für Schulgesundheitspflege, Bd. IV, Hamburg u. Leipzig, Voß 1891. (Auch als Broschüre). Vgl. dazu auch LASER, Über geistige Ermüdung im Schulunterrichte, ebd. Bd. VII, 1894.

2) Bei BURGERSTEINS Versuchen wuchsen Quantum und Qualität bis in die vierte Viertelstunde (am langsamsten in der zweiten).

selbst würde, wenn er auf seine Zustände reflektieren und sie aussprechen könnte, in solchen Fällen sagen: „Ach, jetzt wär' ich gerade so schön hinein gekommen, und gerade jetzt muß ich aufhören!“ In der Regel wird der Schüler dies freilich nicht „sagen“. Aber „unbewußt“ (d. h. ohne alle psychologische Mystik: ohne über das eigene psychische Erlebnis zu urteilen, aber nicht ohne es zu „spüren“, nämlich es zu erleben) fühlt der Schüler eben sehr wohl, ob ihm das Zeitausmaß dieser elementarsten Übungen gerade angemessen und eben hiemit am förderlichsten ist; und die Kunst des psychologisch scharf blickenden Lehrers besteht und bestätigt sich darin, daß er die Zeitmaße des „mechanischen Übens“, d. h. genauer: des Übens bis zum Mechanisieren, nach den mancherlei Anzeichen jener psychischen Erlebnisse seiner Schüler weder zu kurz noch zu lang bemißt. – Ganz das Gleiche gilt, wenn auch minder bestimmt und jedenfalls nicht so leicht objektiv nachzumessen, angesichts aller höheren mathematischen oder anderweitigen Leistungen. Es sei deshalb auf die Möglichkeit solcher exakt psychischer Maßmethoden der Didaktik[1]) bei diesem ersten und einfachsten Anlaß ein für allemal hingewiesen und von ihrem allmählichen Eindringen in die Praxis unserer niederen wie höheren Schulen das Zurückweichen mancher allzu mechanischen Tradition unseres Schulbetriebes – nicht nur des mathematischen – erhofft.

§ 10. Dezimalzahlen, gemeine Brüche, Dezimalbrüche.

Eine Frage, die sich immer wieder neu erhebt[2]), ist die, ob man die gemeinen Brüche vor dem Dezimalrechnen oder nach ihm behandeln soll; denn für beides sprechen Gründe, die aber, wenn man die Dinge etwas schärfer faßt, zum Glück nicht etwa beiderseits von gleichem Gewicht sind. Die im obigen Titel

1) Eine sehr reichhaltige Übersicht über das bisher nach dieser Richtung einstweilen Geleistete gibt MEUMANN, „Vorlesungen zur Einführung in die experimentelle Pädagogik und ihre psychologischen Grundlagen“ (2 Bände 1907); (insbesondere im II. Band „Die Geisteshygiene der Schularbeit“. (Ferner 16. Vorlesung: „Das Rechnen“ und 17. Vorlesung: „Die Analyse des Zeichnens und die Methodik des Zeichenunterrichtes“).

2) So war in Österreich von 1884 an verordnet, die gemeinen Brüche vor den Dezimalbrüchen zu nehmen. Die Mehrzahl der Schulmänner lehnte sich damals dagegen auf, und 1892 wurde die Reihenfolge umgekehrt. Nun (1905) empfehlen die Wiener Vorschläge (s. o. S. 5 Anm.) wieder, daß die Ordnung von 1884 gestattet werde. Die Prager Vorschläge empfehlen die Ordnung wie im Titel des § 10. Die neuesten österreichischen Lehrpläne von 1908 und 1909 schließen sich auch hierin den Prager Vorschlägen an.

eingehaltene Reihenfolge deutet auch schon unsere[1]) Lösungsvorschläge an. Vor allem lasse man sich durch die Tatsache, daß rein wissenschaftlich alle Dezimalzahlen freilich auch zugleich Dezimalbrüche sind, nicht zu dem voreiligen Schluß verleiten, daß die Dezimalzahlen auch didaktisch sogleich in ihrer Brucheigenschaft dem Schüler vorgeführt werden müssen. Und gäbe es auch nicht neben der Auffassung der Dezimalen als Brüche noch die nach dem Positionssystem, so wäre das Argument: „Die Dezimalzahlen sind ja nichts als spezielle Fälle von gemeinen Brüchen", so unanfechtbar es rein wissenschaftlich ist, didaktisch wieder nicht bindend; denn darüber sind wir ja doch einig, daß der didaktische Weg nicht vom Allgemeinen zum Speziellen, sondern umgekehrt führt.

Wenn aber alles in allem diejenigen die besseren Pädagogen sind, die eine Zeitlang die Kinder einfach mit dem Gedanken vertraut werden lassen, daß ebenso wie aus den Hundertern Zehner, aus den Zehnern Einer werden, sobald die Ziffer „um eine Stelle von links nach rechts rückt", nachmals bei weiterem solchen Rücken aus den Einern etwas zehnmal so Kleines,

---

1) Ganz ebenso waren schon in SCHRAMS Arithmetik (1877) von Abschnitt I an die Dezimalzahlen behandelt, erst in XIII kamen die gemeinen Brüche, in XV die Dezimalbrüche zur Sprache. – So auch der preußische Lehrplan und ebenso wieder die Meraner Vorschläge. SIMON (1906, S. 36 – ähnlich 1908, S. 74, 75) macht folgende gegensätzliche methodische Bemerkung: „Eine unangenehme Begleiterscheinung der Dezimalteilung unserer Maße ist die Durchnahme der Dezimalbrüche in Sexta vor den gemeinen Brüchen (numeri rupti, Leonardo Pisano); allerdings unter dem Pseudonym von Dezimalzahlen. Selten lassen sich die Elementarlehrer diese Bekundung ihres Wissens entgehen. Es haben sich so ziemlich alle Mathematiker dagegen ausgesprochen, aber vergeblich. In meiner Methodik von 1895 habe ich noch einmal die Gründe zusammengestellt...." Es mögen von den Gründen a) bis g) nur drei folgen: „b) Die Regeln der Addition und Subtraktion können nur mit Mühe, die Regeln über die Multiplikation und Division gar nicht zum Verständnis gebracht werden. f) Die Schüler begreifen die große Bedeutung der Dezimalbrüche nicht, ehe sie wissen, wie zeitraubend das Rechnen mit ungleichnamigen Brüchen ist. g) Die Schüler begreifen absolut nicht, weshalb sie in Quinta mit der gemeinen Bruchrechnung gequält werden. Die Konsequenz würde doch verlangen, daß die ganze Bruchrechnung auf den einen Satz eingeschränkt werde: einen gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch zu verwandeln." Hierauf könnte „der Elementarlehrer" erwidern, daß wenigstens die Gründe f) („zeitraubend") und g) („gequält") eher für als gegen ihn zu sprechen scheinen – wenigstens vom „methodischen Standpunkte"; vom wissenschaftlichen gilt unter den Gründen b) nur der für die Multiplikation; s. o. im Text S. 82. – HEINRICH MÜLLER (Artikel „Rechnen und Mathematik" im Handbuch für Lehrer höherer Schulen, Teubner 1906, S. 444, Anm.) konstatiert gegen SIMON: „daß der größte Teil der Fachgenossen seiner Auffassung nicht zustimmt."

die „Zehntel“, aus diesen die „Hundertel“ werden – so bleibt neben dieser Benutzung des bloßen Positionssystems für das erste Dezimalrechnen doch noch folgende Erwägung in Kraft, die kürzlich ein angesehener hochtheoretischer Mathematiker auf Grund unliebsamer Erfahrungen an seinen eigenen Kindern zum Verfasser geäußert hat, und die, wie man sogleich sehen wird, psychologisch, also pädagogisch vollberechtigt ist: „Wie soll sich ein Kind unter Zehntel oder gar unter Hundertel was Deutliches denken, wenn es den Zweiteln, Dritteln, Fünfteln gegenüber sich hilflos zeigt?“ Ferner: „Wir vermögen ganze Zahlen nur bis etwa Fünf [nach HAMILTON bis etwa Acht] unmittelbar aufzufassen und schon nicht mehr bis Zehn. Warum verlangt man da vom Kind, sich früher die Zehntel vorzustellen als die Achtel, Fünftel, Zweitel?“ Der einseitige Anhänger der Positionsmethode wird darauf antworten, daß sich ja die Zehntel und Hundertel, ja sogar noch die Tausendel unmittelbar an dem Meterstab mit seinen Dezimetern, Zentimetern und Millimetern erläutern lassen. Der Anhänger der Bruchmethode wird darauf antworten, daß sogar, wer die 10 mm eines vor ihm liegenden Zentimeters überblickt (was noch in einer simultanen Gesichtswahrnehmung ohne Augenbewegungen gelingt, im Gegensatze zum „Sehen“ der 10 dm oder gar der 1000 mm eines Meterstabes), sich diese 10 mm vorher mindestens als 2×5 mm zurechtmache. Und auch diese Bemerkung ist psychologisch zutreffend.

So wäre also doch das Vorausstellen der (all)gemeinen Brüche vor die Dezimalrechnung das Pädagogischere, weil Psychologische? – Daß auch das noch ein voreiliger Schluß wäre, zeigt die unmittelbare Erfahrung über das schmerzlose, wenn auch mehr oder minder äußerliche Rechnen mit Dezimalzahlen durch bloßes Hin- und Herschieben der Dezimalpunkte[1]) – und dagegen die leicht

1) Ausdrücklich sei hier das Mißverständnis abgelehnt, als wollten wir das „Verschieben der Dezimalpunkte“ als eine Methode, vielmehr Manier beim Durchführen der Rechnungen allgemein empfehlen. Vielmehr widerraten wir es noch ganz besonders für das D i v i d i e r e n d u r c h e i n e D e z i m a l z a h l. Hier dürfte der einzig berechtigte, weil ebenso das innerliche Wesen der Sache treffende wie äußerlich einfachste Vorgang der sein, daß man z. B. bei 829 : 0,07, bzw. bei 229 : 0,07 zuerst genau so sprechen läßt, wie wenn es sich um das Dividieren einer ganzen Zahl durch eine ganze handelte; also 7 in 8 geht 1 mal, bzw. 7 in 22 geht 3 mal. Sodann als zweiten Schritt: 22 sind Zehner, 7 sind Hundertel, Hundertel gehen in [Einern 100 mal, in] Zehnern 1000 mal, somit 3 . . ., . . . Darauf mag die Überlegung folgen, bis auf wie viele Stellen der Quotient überhaupt zu entwickeln ist; worauf aber, weil es in den

bis zur grausamen Marter für Lehrer und Schüler zu steigernde (heute zum Glück meistens schon überwundene) Manier der gehäuften Bruchregeln, nach denen zuerst mit beliebigen gemeinen Brüchen und wieder nachher durch Spezialisierung dieser Bruchregeln auch mit Dezimalbrüchen gerechnet wird. Wie also dieses Dilemma lösen?

Beginnen wir die positiven Vorschläge (nach denen auch wir, wie gesagt und wie noch näher zu begründen, trotz allem und allem das Voranstellen der Dezimalzahlen gemäß dem bloßen Positionssystem empfehlen) für den Augenblick, d. h. nicht für den Schüler, sondern für den Lehrer und Lehrbuch- und Lehrplanverfasser, bei den gemeinen Brüchen. Für diese ist der wichtigste Fortschritt von jener einstigen Martermethode zum didaktisch Vernünftigen der, daß man dem Bruchrechnen nach „Regeln“ einen **Vorkursus des Bruchrechnens** auf Grund anschaulich gegebener zerlegbarer und zerlegter Einheiten vorausschickt. Es seien hier die Worte aus SCHRAMS Arithmetik (1877) angeführt, die zum Glück auch in die österreichischen Lehrpläne von 1892 ihren Weg gefunden haben:

„Der erste Kursus über das Rechnen mit gemeinen Brüchen beschränkt sich auf das Kopfrechnen und stützt sich nur auf die Anschauung. Die Bildung von „Regeln“ oder die Berufung auf solche ist hier ganz auszuschließen. Der Schüler muß für jedes einzelne Beispiel das Resultat aus der Natur der Aufgabe und durch stete Beziehung auf die konkrete Einheit ableiten. Um ihn nicht zur Abweichung von diesem Vorgange einzuladen, ist im ersten Kursus die Terminologie der Bruchlehre mit Absicht nicht aufgenommen. Die räumliche Anschauung der Beziehungen ist für deren richtige Auffassung die geeignetste; die Tafeln am Ende des Buches können dabei gute Dienste leisten. In den meisten

Zusammenhang mit dem sogenannten „abgekürzten Rechnen“ gehört, nicht hier eingegangen werde (vgl. S. 156 ff.). Hauptsache ist für jetzt die sichere Einsicht des Schülers, daß durch das angegebene Verfahren aus den Stellenwerten der obersten sich die der übrigen wie beim Dividieren ganzer Zahlen dank dem Positionssysteme ergeben. – Nicht verschwiegen soll werden, daß man mit Schülern selbst der obersten Klasse, wenn diese Dinge nicht schon in den untersten ordentlich verstanden und geübt wurden, immer wieder üble Erfahrungen macht. – Sonderbar gedankenlos ist namentlich die Vorliebe der Schüler, sogleich den Stellenwert der ersten Quotientenziffer bestimmen zu wollen, ehe sie ihren Ziffernwert bestimmt haben, und doch hatte ja der Schüler anders rechnen müssen bei 7 in 22 als etwa bei 7 in 8. Dieser immer sich wiederholenden Gedankenlosigkeit kann man entgegenhalten: Die Nürnberger hängen keinen, sie hätten ihn denn. Sie köpfen aber auch keinen, bevor er den Kopf auf den Block gelegt hat. Man kann nicht Stellen abschneiden und Stellenwerte bestimmen, wenn man die Ziffernwerte noch nicht hat.

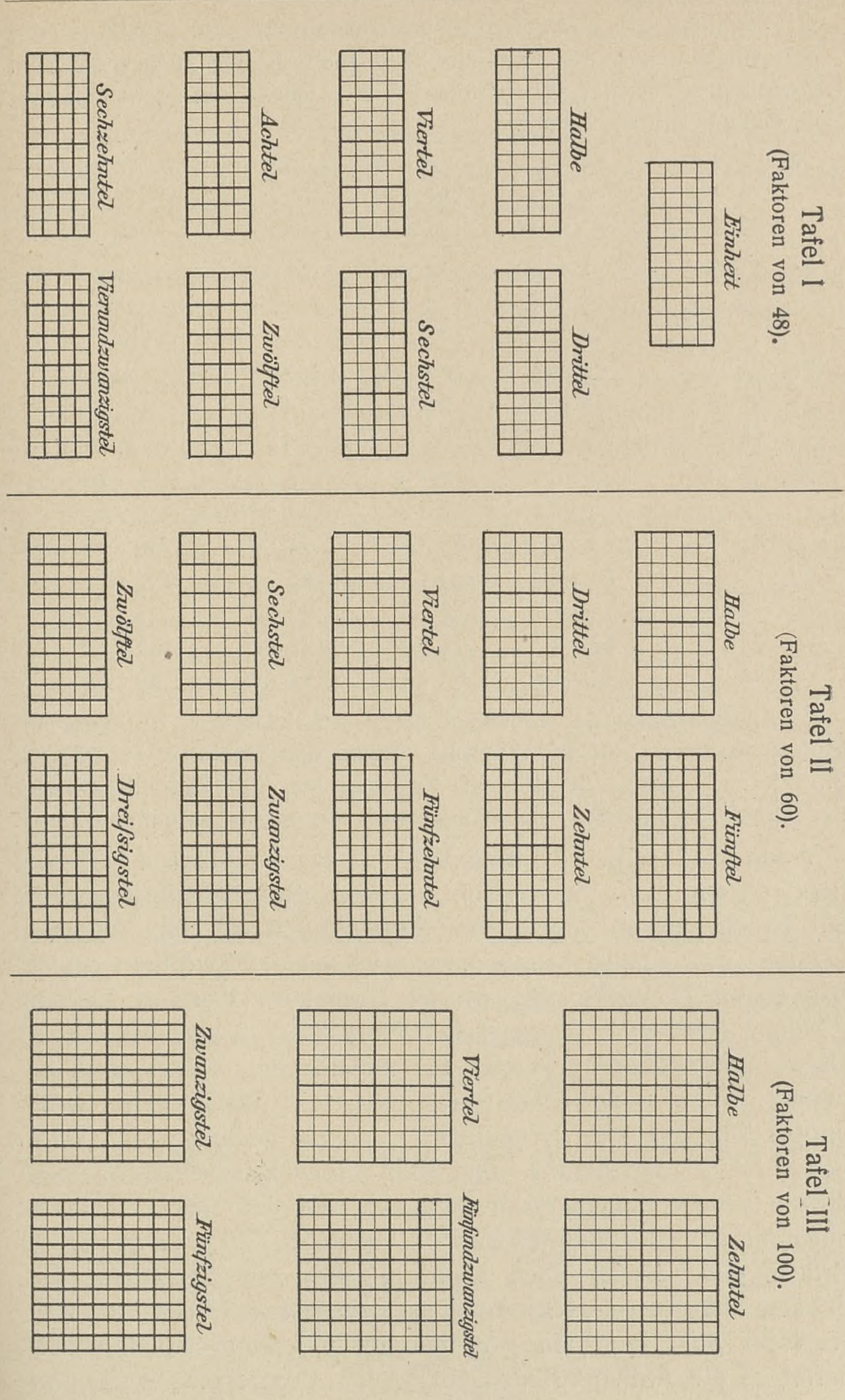
Fällen wird ein aufmerksames und eingehendes Betrachten der verschiedenen Teile der als Einheit angenommenen Fläche und deren Vergleichung die erforderlichen Aufschlüsse geben. Als Übung für den Schüler eignet sich vorzüglich die Darlegung der Beziehungen an Strecken.

Die Lehre von den Brüchen kann in ihrer ganzen Allgemeinheit auf diese Art nicht zum Abschluß gebracht werden; dazu ist die Aufstellung neuer Definitionen notwendig, durch welche im zweiten Kursus die Lücken ausgefüllt werden. So ist die Multiplikation mit einem Bruche hier ganz ausgeschlossen; die Division durch eine ganze Zahl ist auf dieser Stufe immer nur als Teilung, die Division durch einen Bruch nur als Messung aufzufassen; im letzteren Falle sind nur solche Divisionen aufgenommen, die zum Quotienten eine ganze Zahl geben."

Die hier erwähnten „Tafeln" sind nebenstehend in verkleinertem Maßstabe wiedergegeben; für den Unterricht würden wir empfehlen, den Schüler selbst solche Tafeln anfertigen zu lassen (indem er auf Millimeterpapier die dünneren und dickeren Linien mit der Reißfeder auszieht, so daß jedes der Quadrate 1 cm^2 beträgt, und dann die drei Tafeln auf Pappendeckel aufzieht, damit sie für die Dauer der Übungen ordentlich aushalten). Die Eindringlichkeit dieser Vorübung im Bruchrechnen ließe sich noch steigern, wenn der Schüler auf die einzelnen Quadratzentimeter seine Kubikzentimeter-Würfelchen, die wir auch zu anderen Zwecken empfehlen (S. 94 und S. 102), aufstellte und dann bei allen Teilungen, von denen in den einzelnen Beispielen die Rede ist, die betreffenden Würfelgruppen mit der Klinge seines Federmessers wirklich auseinanderrückte. Natürlich käme es auf Erfahrungen, also Versuche, an, wie sich die Schüler bei solchen Übungen anstellen, ob der Gebrauch der Würfelchen nicht zur Tändelei führt, ob der Lehrer die Manipulationen der Schüler hinreichend zu überwachen vermag u. dgl. m. – Um im übrigen eine konkrete Probe davon zu geben, wie SCHRAM sich den Gebrauch seiner Tafeln gedacht hat, sei noch bemerkt, daß sich die Übungen so gliedern:

A. Teiler der Einheit: Faktoren von 48 (Tafel I). – Dem „Teiler der Einheit 2" sind gewidmet die Übungen 1–8, dem „Teiler der Einheit 3" die Übungen 9–15. Die Übungen zum „Teiler der Einheit 6" mögen als Beispiel des ganzen Vorgehens hier folgen:

16. Was hat man unter $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$ zu verstehen?
17. Gib die Hälfte von $\frac{1}{3}$ und den dritten Teil von $\frac{1}{2}$ an.
18. Wieviel Drittel oder Halbe geben $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$?
20. Drücke die Zahlen $1\frac{1}{3}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$, $4\frac{2}{3}$, $7\frac{1}{6}$, $8\frac{5}{6}$ in Sechsteln aus.


Tafel I
(Faktoren von 48).
Einheit
Halbe
Drittel
Viertel
Sechstel
Achtel
Zwölftel
Sechzehntel
Vierundzwanzigstel
Tafel II
(Faktoren von 60).
Halbe
Fünftel
Drittel
Zehntel
Viertel
Fünfzehntel
Sechstel
Zwanzigstel
Zwölftel
Dreißigstel
Tafel III
(Faktoren von 100).
Halbe
Zehntel
Viertel
Fünfundzwanzigstel
Zwanzigstel
Fünfzigstel

21. Sondere von $\frac{13}{6}$, $\frac{15}{6}$, $\frac{14}{6}$, $\frac{16}{6}$, $\frac{30}{6}$ die Ganzen aus.

22. Gib $\frac{1}{6}$ und $\frac{5}{6}$ der folgenden Einheiten in der nächst niederen Benennung an: Klafter, Grad, Stunde, Taler, Jahr, Dutzend, Schuh, Tag, Zoll, Minute, Schock, Monat.

23.	$\frac{5}{6}+\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}+\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{3}+\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$	$7\frac{1}{2}+3\frac{1}{6}$
	$9\frac{1}{2}+4\frac{5}{6}$	$4\frac{1}{2}+2\frac{1}{3}$	$2\frac{2}{3}+1\frac{1}{6}$	$3\frac{1}{3}+4\frac{2}{3}$	$4\frac{1}{2}+3\frac{2}{3}$.
24.	$1-\frac{1}{6}$	$1-\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}-\frac{2}{3}$
	$\frac{5}{6}-\frac{4}{3}$	$4\frac{5}{6}-\frac{1}{6}$	$3\frac{5}{6}-1\frac{1}{6}$	$7\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$	$9\frac{2}{3}-\frac{1}{6}$.
25.	$8\frac{1}{3}-\frac{5}{6}$	$4\frac{2}{3}-\frac{5}{6}$	$5\frac{1}{6}-\frac{5}{6}$	$3\frac{1}{6}-\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{6}-\frac{1}{3}$
	$8\frac{5}{6}-\frac{1}{3}$	$7\frac{5}{6}-\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$	$8\frac{5}{6}-\frac{2}{3}$
	$4\frac{2}{3}-\frac{5}{6}$	$3\frac{1}{2}-2\frac{1}{6}$	$5\frac{1}{2}-3\frac{5}{6}$	$4\frac{2}{3}-1\frac{5}{6}$	$7\frac{1}{2}-6\frac{2}{3}$.
26.	$\frac{1}{6}\cdot 2$	$\frac{1}{6}\cdot 3$	$\frac{1}{6}\cdot 4$	$\frac{1}{6}\cdot 6$	$\frac{1}{6}\cdot 15$
	$\frac{5}{6}\cdot 2$	$\frac{5}{6}\cdot 3$	$\frac{5}{6}\cdot 6$	$\frac{5}{6}\cdot 18$	$\frac{5}{6}\cdot 3$
	$2\frac{1}{6}\cdot 2$	$3\frac{1}{6}\cdot 3$	$5\frac{1}{6}\cdot 6$	$4\frac{5}{6}\cdot 3$	$4\frac{5}{6}\cdot 12$.
27.	$1\frac{1}{6}:7$	$4\frac{1}{6}:5$	$9\frac{1}{6}:11$	$5\frac{5}{6}:5$	$\frac{5}{6}:\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{3}:\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}:\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}:\frac{1}{6}$	$2\frac{1}{6}:\frac{1}{6}$	$2\frac{1}{3}:\frac{1}{6}$
	$4\frac{1}{2}:\frac{1}{6}$	$5\frac{5}{6}:\frac{5}{6}$	$7\frac{1}{2}:\frac{5}{6}$	$2\frac{1}{3}:\frac{1}{6}$	$6\frac{2}{3}:\frac{5}{6}$
	$13:2\frac{1}{6}$	$4\frac{2}{3}:1\frac{1}{6}$	$6\frac{1}{2}:2\frac{1}{6}$	$7\frac{2}{3}:1\frac{5}{6}$	$8\frac{1}{2}:2\frac{5}{6}$.

Es folgen: Teiler der Einheit 4, 8, 16; 12, 24, 48. – B. Teiler der Einheit: Faktoren von 60 (Tafel II). Teiler der Einheit 5, 10, 15; 20, 30, 60. – C. Teiler der Einheit: Faktoren von 100 (Tafel III). Teiler der Einheit 25, 50, 100. – D. Übungsstoff. Gemischte Aufgaben 82–99.

Wenn also z. B. vor dem Schüler das Rechteck $4 \times 3 = 12$ liegt, so darf man ihm füglich zutrauen, daß er ohne irgendeine auf Brüche bezügliche Terminologie Fragen wie die folgenden versteht und richtig beantwortet: Aus wieviel Zwölfteln besteht das Ganze (Einheit); aus wieviel Sechsteln, Vierteln, Dritteln, Zweiteln (Hälften)? Zeige, daß 6 Zwölftel = 2 Viertel u. dgl. m. Dabei natürlich immer neben den unbenannten Zahlen auch benannte, wie ja auch schon diese Rechteckseinheit mit ihren aliquoten Teilen etwas „Benanntes", richtiger gesagt: etwas Wirkliches ist. – Ein Lehrer, dem eine solche Methode nicht ohnedies aus dem Herzen gesprochen ist, und der sich erst in sie hineinfinden will, mag es einmal versuchen, zu was immer für Bruchregeln (die er dann eben nur für sich ausspricht, dem Schüler aber verschweigt) konkrete Beispiele zu bilden und, während das Auge des Kindes an dem greifbaren Anschauungsbehelf haftet, es die Antwort finden zu lassen. Unsererseits wüßten wir keine Regel anzugeben (die für das Multiplizieren mit einem Bruche ausgenommen, S. 82), ohne die es auf diese Art nicht gehen müßte, falls nur die Zahlen übersichtlich genug gewählt sind; und worauf es dabei ankommt, das sind ja die übersichtlichen[1]) Teiler (wie sie im Lehrplane bei S. 430 vorgeschlagen sind, also vorwiegend aus den Primfaktoren 2, 3, 5).

Auch sei sogleich bemerkt, daß mit Absicht diese Vorübungen von einem eigentlichen Bruchrechnen schon äußerlich durch die Zäsur zwischen dem ersten und zweiten Jahrgange getrennt sind, damit es ja nicht im ersten auch wieder etwa bloß bei einigen Paradestückchen solcher Vorübungen sein Bewenden habe (wie bisher mit den „Raumanschauungen" an Würfel und Kugel, nach denen man bald das „alte Liedchen" des geometrischen Definierens zu singen pflegte s. u. S. 93). –

Was dann die Anwendung dieser Vorübungen auf die Vertiefung des Dezimalrechnens zum Dezimalbruchrechnen betrifft, so besteht unser Vermittlungsvorschlag einfach in folgendem: Die Vorübungen im Dezimalbruchrechnen beginne man – nicht etwa erst (wie es SIMON zu wünschen scheint) nach dem ganzen systematischen Bruchrechnen, sondern schon zu einer Zeit, da wenigstens die Zweitel, Drittel, Viertel, Fünftel, Sechstel, Achtel, Neuntel durch eben jene anschaulichen Vorübungen mit gemeinen Brüchen hinreichend festsitzen. An diese schließe man nun die „Zehntel", von jetzt ab nicht mehr als „zehnmal so Kleines", sondern wirklich als „zehn gleiche Teile"; und dann wohl auch alsbald die Hundertstel als Zehntel der Zehntel, ja auch die Tausendstel nach der gleichen Methode (im Falle der Verwendung der Zentimeterwürfelchen unter häufigen Hinweisen auf das aus 1000 cm^3 bestehende dm^3). Jetzt erst mag dieses bißchen wirkliches Dezimalbruchrechnen sein Licht zurückfallen lassen auf das bisherige Positionsrechnen mit Dezimalzahlen. Dies mag aber dabei ruhig nebenher weiter gepflegt werden und auch die Ganzen der

1) Über geradezu entgegengesetzte Ideale des ersten Rechenunterrichtes berichtet MAX NATH (Jahresberichte der D. Math. Vereinigung XV, 1906, „Die preuß. Lehrpläne und die Vorschläge der Breslauer Unterrichtskommission," S. 101): „Vor anderthalb Jahrzehnten schwelgte der Rechenunterricht in mancherlei Luxus. Es schien als Ruhm, konnten die Klassen mit Sicherheit die Primzahlen bis 400 oder noch weiter angeben, Additionsaufgaben mit ungleichnamigen Brüchen ausführen, deren Nenner vier- oder fünfstellige Zahlen waren, die Aufgaben für Haus und Klasse brachten die Notwendigkeit, Brüche zu kürzen, die fünf- und sechsstellige Zähler oder Nenner hatten, in denen Primzahlen zwischen 400 und 500 und noch höher hinauf enthalten waren."

Hunderter, Tausender mögen dabei allmählich beliebig weit überschritten werden, wenn es sich (zwischen anderen Übungen) immer wieder auch darum handelt, einfach den Trott des Multiplizierens eben um des festen Rhythmus willen einzuüben.

Doch genug aller solcher Ratschläge. Nur um auch das wissenschaftliche Gewissen solcher Zweifler zu beruhigen, die – mit Recht – sagen, über aller veranschaulichenden Didaktik stehe schließlich doch, wenn auch fürs erste nur stillschweigend im Lehrer, die korrekte Definition, stellen wir die These auf: Im ganzen Bruchrechnen gibt es nur einen einzigen Punkt, an dem auch die Auffassung des Bruches als benannter Zahl „erweitert" werden muß durch eine neue Definition; und das ist beim „Multiplizieren mit einem Bruch" (wogegen z. B. schon wieder das Dividieren durch einen Bruch als Messungsaufgabe ohneweiters wie das Dividieren durch benannte ganze Zahlen zu behandeln ist). Hier nämlich muß im zweiten, zusammenhängenden Kursus darauf aufmerksam gemacht werden, daß es Unsinn wäre, etwas „ein viertelmal als Summanden setzen" zu wollen; und daß daher ausdrücklich festgesetzt werden muß (– von „Definieren", „Erweitern" u. dgl. wird man mit Elfjährigen überhaupt noch nicht reden): Eine Größe mal ein Viertel heiße soviel wie: die Größe dividiert durch Vier. Und nun ebenso: Eine Größe $\times$ 0,1 = die Größe : 10. – Was aber für das allgemeine Bruchrechnen einer besonderen Definition bedarf, hatte sich schmerzlos im Positionsrechnen vollzogen (so daß dieses die wirksamste Rechtfertigung gerade jener Erweiterung des Multiplikationsbegriffes abzugeben berufen ist). Denn wie spitzfindig müßte ein Zehn- oder Elfjähriger sein, wenn er es dem Lehrer nicht gern glaubte, daß, wenn beim Multiplizieren mit 40 so und so viel, mit 4 selbst 10 mal so wenig herauskommt, mit 0,4 wieder 10 mal so wenig als vorher herauskommen werde?

Also alles in allem: Im ersten Jahrgang zuerst Dezimalrechnen, nebenher allmählich die Vorübungen im Bruchrechnen, dann ebensolche Vorübungen im Dezimalbruchrechnen; letztere etwa bis zu den $\frac{1}{1000}$, darüber hinaus aber immer wieder nach dem Positionssystem auch gelegentlich mit 0,0001, 0,00001.

Im zweiten Jahrgang sodann als erste Zurüstung auf ein Rechnen nach Bruchregeln (oder wie man lieber sagen sollte: Bruchgesetzen) nun erst die Lehre von den **Maßen und**

Vielfachen (die sonst im ersten Jahrgang entweder doch wieder zum Bruchregelrechnen verleitet oder bis zum nächsten Jahr ohne Anwendung bliebe). Voraussetzung eines sinnvollen, nicht auf mechanischen Krücken träg dahinhumpelnden Rechnens ist ja die volle Vertrautheit mit den Primfaktoren eines allmählich sich erweiternden Zahlenkreises. Immer wieder, bis in die letzten Jahrgänge, müssen den Schüler die Primzahlen und deren Kombinationen beschäftigen. Erst dann werden die Anzahlen bis 100 und eine Auswahl auch bis 1000 wie alte Jugendbekannte nach allen ihren Charakterzügen, das sind eben bei Zahlen vor allem ihre Primfaktoren, vertraut sein.

Insbesondere sollte z. B. die nebenstehende („Galgen“-) Methode geradezu verboten werden.

2,	4,	5,	8,	10,	15,	36	
			4	5	15	18	2
			2		15	9	2
			2		5	3	3

Vielmehr sollte auch schon ein Schüler des zweiten Jahrganges auf einen Blick überschauen, daß hier überhaupt nur die Primfaktoren 2, 3 und 5 vorkommen, daß $8 = 2^3$, $36 = 2^2 \cdot 3^2$ usw. (wobei der frühzeitige Gebrauch der Exponenten dem $2 \times 2 \times 2$, $2 \times 2 \times 3 \times 3$ schon der Übersichtlichkeit wegen vorzuziehen wäre). Sogleich führen dann die einleuchtenden Sätze, daß υ jeden Primfaktor in der größten, M in der kleinsten Anzahl enthalten muß, ohne alle weitere Schreiberei zu

$$\upsilon\,(2, 4, 5, 8, 10, 15, 36) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360,$$
$$M\,(2, 4, 5, 8, 10, 15, 36) = 1.$$

(Wir wählen die Buchstaben υ und M, um – unbeschadet des Paradoxons $\upsilon > M$ – an das kleinste gem. Vielfache und an das größte gem. Maß zu erinnern. Warum man nicht ebenso neugierig auf größere Vielfache und kleinere Maße ist, bildet eine naheliegende Schülerfrage.)

§ 11. Weiteres zum Arithmetikunterricht der untersten zwei Jahrgänge.

Es mag im ganzen scheinen, als sei durch unsere Abgrenzung der ersten zwei Jahrgänge der erste zuungunsten des zweiten zu sehr entlastet. Dem Hergebrachten gegenüber soll aber dies vor allem der Raumlehre des ersten Jahrgangs zugute kommen, die nun nicht etwa nur ein Viertel, sondern mindestens die Hälfte[1])

1) SCHOTTEN (vgl. Plan. I, S. 33) macht es sogar zu seinem ersten Leitsatz: „Der geometrische Unterricht muß vor dem arithmetischen entschieden bevorzugt werden, weil er die Grundlage bildet, weil er in den unteren Klassen verständlicher ist.“

der Unterrichtszeit verdient. Andererseits läßt sich im zweiten Jahre ausgiebige Zeit gewinnen, die bisher totgeschlagen wurde von einem der zähesten Wesen, den Proportionen. Daß sie bei uns[1]) aus dem Rechenunterricht gerade der untersten Stufen erst jüngst verschwunden sind, wiewohl es heute schon eine Majorität von Lehrern sein dürfte, die in den sog. „Schlußrechnungen" einen vollwertigen Ersatz für den Mechanismus des Proportionsrechnens erkannt hat, erklärt sich (den Verteidigern der Proportionen wohl kaum mehr bewußt) aus der alles beherrschenden Rolle, die das $a:b=c:d$ noch z. B. in den Schriften Galileis und Newtons gespielt hat. Vielleicht tragen die folgenden historischen und sachlichen Bemerkungen Oettingens dazu bei, den Proportionen, sowie sie heute in wissenschaftlichen physikalischen Forschungs- und Lehrbüchern schon so gut wie gar nicht mehr vorkommen, noch ein weiteres Streifchen Bodens auch im mathematischen Anfangsunterricht abzugraben.

A. v. Oettingen erörtert als Herausgeber von Galileis „Discorsi" (Ostwalds Klassiker Nr. 11, Anm. 6 zu S. 50), „wodurch allein bei Galilei schwerfällige Beweise bedingt sind, während unser Autor sonst sich stets einer gefälligen, klaren Sprache bedient. Diese Schwerfälligkeit tritt überall sofort ein und nur da, wo Proportionen angesetzt werden. Auf diese überaus wichtige Frage sei es gestattet, näher einzugehen. Die ältere Zeit gestattete nur gleiche Qualitäten miteinander zu vergleichen, während es eine Errungenschaft späterer Zeit ist, heterogene Größen, also verschiedene Qualitäten aufeinander zu beziehen, sie mit mathematischen Operationen zu verknüpfen und bei Wahrung des „Dimensionsbegriffes"[2]) in Gleichung zu setzen.

1) In Preußen wurde schon seit längerem nur Schlußrechnung verlangt.

2) Über „physikalische Dimensionen" gibt es eine reiche Literatur, auf die natürlich hier nicht einzugehen ist. In älteren Jahrgängen der Zeitschrift für physikalischen und chemischen Unterricht (Herausgegeb. von Poske) habe ich darauf aufmerksam gemacht, daß beim Hervorgehen z. B. der Geschwindigkeit aus Weg und Zeit schon jener eigentümliche psychologische Vorgang eine Rolle spielt, auf den zuerst Ehrenfels unter dem Kunstausdruck „Gestaltqualitäten" aufmerksam gemacht hat. (Vgl. hierüber u. a. meine Psychologie, § 30.) Wie nach Ehrenfels das Auffassen zweier Töne als einer einfachsten Melodie schon ein drittes qualitativ Neues im Vergleich zu den zwei Tönen selbst ist, so habe ich gezeigt, daß auch die Geschwindigkeit ein Drittes im Vergleich zu s und t, die Dichte ein Drittes zu m und v usw. ist. Der Abstand zwischen den Interessenkreisen der Mathematik und Physik einerseits, der Psychologie (und Gegenstandstheorie) andererseits ist aber bisher ein noch viel zu großer, als daß diese philosophische Analyse schon z. B. für eine Analyse der physikalischen abgeleiteten Begriffe nutzbar geworden wäre. (Vgl. in meiner „Physik", Mathematischer Anhang Nr. 7, über

Auf beiden Seiten einer Gleichung durften damals nur reine Zahlen stehen; wir fordern nur, daß die physischen Qualitäten oder Dimensionen sich aufheben [?]. Nach angesetzter „Gleichung“ finden wir durch Rechnung ein Resultat, welches dort eine lange Reihe einzelner Schlußfolgerungen beansprucht; einem jeden Gliede solch einer Reihe, also einer jeden Proportion, entspricht eine bestimmte Vorstellung physischer Verhältnisse. Man wird es lehrreich finden, daß Beweise, die im Texte eine ganze Seite einnehmen, heutzutage mit zwei Zeilen abgetan sind, wobei zu bemerken wäre, daß durch jene alte Beweismethode der innere Zusammenhang des Resultates mit den Prämissen keineswegs klarer wird, sondern oft derart verworren erscheint, daß GALILEI selbst das Empfinden dieses Umstandes mehrmals Herrn SAGREDA in den Mund legt. SIMPLICIO wird nie solch ein Bekenntnis äußern, er beschränkt sich im Bewußtsein seiner philosophischen Bildung auf eine hartnäckige Skepsis, die schließlich in Befriedigung sich auflöst, bisweilen mit merklicher Zurückhaltung.

Übrigens sind wir noch heutzutage durchaus Erben unserer Vorzeit. Es herrscht im Gymnasialunterricht der Ansatz nach Proportionen vor. Ein allgemeines Beispiel mag dieses erläutern. Man lehrt, y verhalte sich zu y' wie x zu x' und vielleicht auch noch y zu x wie y' zu x'. — Statt beider Behauptungen und mindestens neben beiden sollte der Schüler angewiesen werden, jede erkannte Proportion mit $y = a \cdot x$, sowie die umgekehrte Proportion mit $x = \frac{a}{y}$ anzusetzen. Hier repräsentiert a einen aus den Qualitäten von y und x gebildeten neuen Begriff $a = \frac{y}{x}$, resp. $a = y \cdot x$. So geringfügig die Frage erscheinen mag, so folgenreich ist sie für den Unterricht.“

Daß nun aber mit dem Verzicht auf den Proportionsrechenmechanismus keineswegs der Gedanke der Proportionalität, weder überhaupt (was ohnedies niemandem einfällt), noch auch schon auf der untersten Stufe des Rechenunterrichtes geopfert werden muß oder soll, schon weil die hier üblichen Aufgaben

---

den multiplikativen Typus [z. B. Arbeit = Kraft $\times$ Weg] und den divisiven Typus [z. B. Geschwindigkeit = Weg : Zeit] physikalischer Dimensionen.) Immerhin rührt OETTINGEN einigemal an diesen Sachverhalt in den Worten „Verschiedene Qualitäten aufeinander zu beziehen“, „einen aus den Qualitäten von y und x gebildeten neuen Begriff“. Wäre die Frage wirklich „geringfügig“, so wäre sie nicht so folgenreich für den Unterricht. Jedenfalls heißt es, dem Schüler von Anfang z. B. des Mechanikunterrichtes sein natürliches Denken austreiben, wenn man einfach „per definitionem“ dekretiert: „Die Geschwindigkeit ist ein Weg, nämlich der Weg in der Zeit Eins“ — wogegen der Schüler zwar dunkel, aber doch entschieden spürt, daß die Geschwindigkeit ebensowenig ein Weg wie eine Zeit, sondern ein von beiden abhängiges Drittes, Neues ist. (Vgl. auch S. 150, S. 183 Anm. und S. 379 Anm.)

sich als die ersten ausgiebigen Anlässe zu funktionalem Denken pflegen lassen, belege die folgende Textprobe aus SCHRAM, Lehrb. d. Arithm. 1877 [vergriffen]; S. 46, 47:

„VI. Anwendungen der Multiplikation und Division.

A. Proportionalität der Größen.

1. a) Wenn von einer Ware 5 Meter 8 Gulden kosten, wie hoch kommen 10, 15, 20 Meter derselben Ware zu stehen?
   b) Wenn ein Kapital von 100 Gulden jährlich 4 Gulden Zinsen trägt, wie groß wird das jährliche Erträgnis von 200, 300, 400 Gulden sein?
   c) Ein Arbeiter verdient wöchentlich 20 Gulden, wieviel verdient er in 2, 3, 4 Wochen?

Eine Größe heißt abhängig von einer zweiten, wenn eine Änderung der zweiten Größe auch eine Änderung der ersten zur Folge hat.

Eine Größe heißt einer anderen gerade oder direkt proportional, wenn sie so von ihr abhängt, daß dem 2-, 3-, 4- ...-fachen der zweiten Größe auch immer das 2-, 3-, 4- ...-fache der ersten entspricht. Daraus folgt, daß auch der Hälfte, dem 3., 4. ... Teile der zweiten Größe die Hälfte, der 3., 4. ... Teil der ersten entspricht.

2. Der Schüler gebe selbst einfache Beispiele an, aus denen gefolgert werden kann, daß die unten angegebenen Größen direkt proportional sind.

Ware und Preis; Arbeit und Anzahl der Arbeiter; Arbeitszeit und Arbeit; Arbeitszeit und Lohn; Lohn und Anzahl der Arbeiter; Zinsen und Kapital; Zinsen und Zeit; Zinsen und Prozent; Weg und Geschwindigkeit; Weg und Zeit bei einer gleichförmigen Bewegung.

Eine Größe hängt häufig von mehreren anderen Größen zugleich ab; so sind z. B. die Zinsen abhängig vom Kapital, von den Prozenten und von der Zeit. Kommt in einer Aufgabe nur eine der Größen vor, von denen eine andere abhängig ist, so wird immer stillschweigend vorausgesetzt, daß die übrigen unverändert bleiben.

Manche Größen sind nur in vielen Fällen, aber nicht immer proportional. So ist der Preis einer Ware sehr häufig mit deren Menge proportional, aber es kommen auch Ausnahmen vor, z. B. bei Edelsteinen, Glastafeln, Bauhölzern usf.

3. a) 5 Arbeiter brauchen zur Vollendung einer Arbeit 12 Tage; wieviel Tage werden 10, 15, 20 Arbeiter brauchen?
   b) 36 Mann reichen mit einem gewissen Vorrate Brot 3 Tage aus; wieviel Mann werden mit demselben Vorrate 6, 9, 12 Tage auskommen?
   c) 1200 Gulden tragen in 2 Monaten gewisse Zinsen; welche Summe wird dieselben Zinsen in 4, 6, 8 Monaten tragen?

Eine Größe heißt einer andern umgekehrt oder invers proportional, wenn sie so von ihr abhängt, daß dem Zwei-, Drei-, Vierfachen usw. der zweiten Größe immer die Hälfte, der dritte, vierte Teil usw. der ersten entspricht. Daraus folgt, daß auch der Hälfte, dem dritten, vierten Teile usw. der zweiten Größe das Zwei-, Drei-, Vierfache usw. der ersten entspricht.

4. Der Schüler gebe selbst einfache Beispiele an, aus denen gefolgert werden kann, daß die unten angegebenen Größen invers proportional sind.

Anzahl der Arbeiter und die Zeit, die zur Vollendung einer bestimmten Arbeit erforderlich ist; die Anzahl der Personen und die Zeit, für welche ein bestimmter Vorrat ausreicht; Kapital und die Zeit, die zu einem bestimmten Zinsenerträgnis notwendig ist; Kapital und Prozent bei bestimmten Zinsen; Zeit und Prozent; die Anzahl der Teile und die Größe eines Teiles bei einer bestimmten Teilungssumme; Zeit und Geschwindigkeit bei einer gleichförmigen Bewegung.

In den folgenden Beispielen ist das Resultat immer durch eine Multiplikation oder eine Division zu ermitteln. Kommt die Division zur Anwendung, so hat der Schüler immer zu entscheiden, ob sie als Teilung oder als Messung aufzufassen ist."

Da die Beseitigung der Verhältnisse und Proportionen aus der Unterstufe ohne Zweifel heftigen Widerspruch seitens vieler Lehrer finden wird, die ja Jahr für Jahr viele Monate gerade mit diesem Lehrstoffe auszufüllen gewohnt waren, so sei nochmals versichert: Keineswegs sollen „die Verhältnisse und Proportionen abgeschafft" werden; denn schon weil man ja die Termini „Proportionalität", „mittlere Proportionale", „Doppelverhältnis" u. dgl. m. auf absehbare Zeit hinaus nicht wird missen wollen, wird man auch irgendwo sagen müssen, was „Proportion" heißt oder geheißen hat. Für die Mittelstufe, im Anschluß an die geometrische Lehre von den Strahlenbüscheln, Ähnlichkeitslehre und zahlreiche andere geometrische Anwendungen, behalten sie denn auch ihren Platz. Nur für die simplen Regeldetriaufgaben bedarf es nicht des schweren Apparates einer Proportion, da die Schlußrechnung alles viel einfacher, kürzer und durchsichtiger leistet. – Und auch eine Berufung auf die Ähnlichkeitslehre der Unterstufe gilt hier nicht, da ja die Anschauung von Ähnlichkeit aller Kreise, aller gleichseitigen Dreiecke, auch aller Kugeln usf., auf die wir schon für die Unterstufe keineswegs verzichten, doch nicht auf dem Umweg über die Proportionalität in ähnlichen Dreiecken erlangt werden soll (vgl. S. 146 ff.).

Wenn für den Ausdruck „Proportion“ gelegentlich der Vorbereitung der Prager Vorschläge 1906 von Prof. MÜLLER der Terminus „Verhältnisgleichungen“[1]) vorgeschlagen wurde, so zeigt dieser gerade, eben weil er das Wesen der Sache trifft, daß solche Verhältnisgleichungen erst im Zusammenhang mit der Gleichungslehre als solcher, also im ersten Jahrgang der Mittelstufe, ihren richtigen Platz finden.

Es sei bei diesem Anlaß auch neuerdings daran erinnert, daß ein großer Teil der Aufgaben aus dem sogenannten praktischen Leben, z. B. Rechnen mit Prozenten in und auf hundert, Diskontrechnungen u. dgl. m., mit denen bisher die Zwölfjährigen im Anschluß an die Proportionen geplagt wurden, sich mit Leichtigkeit zwei Jahre später erledigt, sobald die Knaben Gleichungen ansetzen und nach allen in ihnen vorkommenden Unbekannten auflösen gelernt haben; also ein natürliches Anwendungsgebiet der Gleichungen überhaupt, nicht aber just der Proportionen bildet.

§ 12. Zur Vorschule der Raumlehre.

Viel tiefer gehend als im Rechenunterricht der ersten Schuljahre, der sich ja an die Volksschule anlehnen kann, sind die wünschenswerten Neuerungen im Geometrieunterricht. Denn was seit langem als „geometrische Anschauungslehre“, als „propädeutischer Geometrieunterricht“ an den Mittelschulen üblich ist, unterscheidet sich von einer wissenschaftlich systematischen Geometrie bei weitem noch nicht so gründlich, als es erwünscht und möglich wäre, wenn man sich einmal rein nur die didaktischen Erfordernisse vor Augen hielte und mit allem, was nur die Tradition eines mehr oder weniger ausdrücklichen oder versteckten Vorwegnehmens der systematischen Geometrie für sich hat, zu brechen getraute.

Am kürzesten und anschaulichsten wird sich der Abstand zwischen dem Hergebrachten und dem Erstrebenswerten wieder darstellen in der Gegenüberstellung einer Lehrtextprobe aus einem (u. zw. dem in Österreich gegenwärtig noch verbreitetsten[2])

1) Dieser Terminus hat auch Aufnahme gefunden in die 1907 herausgegebenen bayrischen Lehrpläne, s. o. S. 5.

2) Nach Abschluß obiger Skizzen erschien von ADLER, Realschuldirektor und Dozent an der Technischen Hochschule in Wien, eine wesentlich neue Bahnen beschreitende „Einführung in die Geometrie“, bisher (1908) zwei Bändchen. Das erste enthält schon für die unterste Klasse reichliche Beschäftigungen mit Körpermodellen (doppelt verdienstlich, weil noch vor dem

Geometriebuch und einiger Skizzen, wie eine wirkliche Vorschule der Raumlehre[1]) bei zehn- bis zwölfjährigen Kindern an Stelle des Definitionen- und Beweise-„Beibringens" (vgl. S. 43 und S. 52 Anm.) eine wirkliche „Beschäftigung" mit dem Räumlichen ins Werk setzen könnte.

Ein geometrischer Lehrtext, wie er *nicht* sein soll.

1. Betrachtung des Würfels.)*

§ 1. Der Würfel (Fig. 1) nimmt einen Raum ein, der von allen Seiten begrenzt ist. Ein von allen Seiten begrenzter Raum heißt ein Körper. Der Würfel ist ein Körper (2).

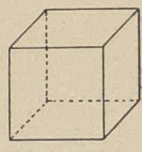


Fig. 1.

Der Würfel ist nach drei Hauptrichtungen ausgedehnt, von rechts nach links, von vorne nach hinten, von unten nach oben. Die Ausdehnung von rechts nach links heißt gewöhnlich Länge (3), *die von vorne nach hinten Breite* (3) *und die von unten nach oben Höhe* (3).

Jeder Körper hat drei (4) *Hauptausdehnungen: Länge, Breite und Höhe (Tiefe, Dicke).*

*) *Der betrachtete Würfel (aus Holz, Pappe oder Blech) ruht auf einem Tische oder Gestelle so, daß eine* (1) *Fläche des Würfels dem Auge des Schülers zugewendet ist.*

Erscheinen der neuesten österreichischen Lehrpläne, die diese zum erstenmal für alle drei Jahrgänge der Unterstufe vorschreiben); das zweite Bändchen Planimetrie (z. B. ebenfalls Symmetrie vor der Kongruenz).

1) Um Mißverständnissen zuvorzukommen, bemerke ich nochmals (vgl. S. 54, Anm. 1), daß ich keineswegs vorhabe, eine solche „Vorschule der Raumlehre" (oder der „Zahlen- und Raumlehre") selber abzufassen. Vielleicht enthalten aber obige Skizzen einige brauchbare Anregungen für jüngere Fachgenossen bei der Schaffung solcher neuartiger Lehrmittel.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß die in Zeitschriften, Programmen und auch schon in einzelnen Ansätzen zu neuartigen Lehrbüchern verstreute Literatur zahlreiche Materialien für solche von Grund aus erneuerte Schulbücher der Mathematik enthält. Sie an dieser Stelle zu sammeln, kann aus inneren und äußeren Gründen nicht versucht werden. Gleich mir würde aber gewiß mancher Fachgenosse es begrüßen, wenn durch eine solche Literatursammlung die bisherigen Keime zu einem neuartigen Unterricht im Sinne obiger Skizzen vor dem Verstreut- und Vergessenbleiben bewahrt würden, und wenn auch künftighin für eine Art Zentralisierung aller hierher gehörigen Vorschläge und glücklichen Einfälle, wie sie am reichlichsten eben das wirkliche Erteilen von Unterricht nach den neuen Prinzipien zutage fördert, irgendwie gesorgt würde (— vielleicht durch eine eigene ständige Abteilung in der Ztschr. f. d. math. u. naturw. Unterr.). — Ein reichliches Material hierfür enthält z. B. die Abhandlung von Max Nath, „Zur Methodik des geometrischen Anfangsunterrichtes" (Ztschr. f. d. math. u. naturw. Unterr. XXXVI [1905] S. 1–8).

Nenne verschiedene Körper und weise an ihnen die drei [4] Ausdehnungen nach! (Das Buch, das Lineal, der Kasten, das Schulzimmer usw.)

§ 2. Der Würfel wird von sechs Flächen begrenzt. Diese sind: die untere, obere, vordere, hintere, rechte und linke Fläche. Die Grenzflächen des Würfels sind ebene Flächen.

Gib die Grenzflächen des Schulzimmers, eines Buches [5], eines Kastens, der Schultafel an!

Jede Fläche des Würfels ist nach zwei Hauptrichtungen ausgedehnt, z. B. die vordere Fläche von rechts nach links und von unten nach oben.

Eine Fläche hat nur zwei Hauptausdehnungen: Länge und Breite (Höhe).

Alle Grenzflächen eines Körpers zusammen nennt man die Oberfläche desselben.

§ 3. Jede Fläche des Würfels wird von vier Kanten oder Kantenlinien begrenzt. Eine Kantenlinie entsteht da, wo zwei Flächen zusammentreffen. Am Würfel kommen im ganzen 12 Kanten vor. Die Kanten des Würfels sind gerade Linien.

Jede Kantenlinie des Würfels ist nur nach einer Richtung ausgedehnt, in die Länge.

Eine Linie hat nur eine Ausdehnung, die Länge.

Alle Grenzlinien einer Fläche zusammen nennt man den Umfang derselben.

§ 4. Jede Kantenlinie des Würfels wird von zwei Eckpunkten begrenzt. Ein Eckpunkt entsteht da, wo drei Flächen zusammentreffen.

Der Würfel hat im ganzen 8 Eckpunkte.

Die Eckpunkte des Würfels sind nach keiner Richtung ausgedehnt; sie sind weder lang noch breit noch dick.

Ein Punkt hat keine Ausdehnung.

In ähnlicher [6] Weise kann auch die Betrachtung
a) des geraden, dreiseitigen [7] Prismas;
b) des Tetraeders [8]
vorgenommen werden.

2. Betrachtung des Zylinders.

§ 5. Der Zylinder (Fig. 2) nimmt einen allseitig begrenzten Raum ein, er ist ein Körper. Er ist nach drei Richtungen ausgedehnt, in die Länge, Breite und Höhe; die Länge und die Breite sind gleich groß.

Der Zylinder wird von drei Flächen begrenzt. Zwei derselben sind ebene Flächen, die dritte ist eine krumme Fläche. In jeder der beiden ebenen Flächen gibt es einen Punkt, welcher von allen Punkten des Umfanges gleich weit entfernt ist. Eine solche Fläche heißt Kreisfläche.

Der Zylinder hat nur zwei Kanten. Diese sind die krummen Linien, welche die beiden Kreisflächen begrenzen; sie heißen Kreislinien.

Eckpunkte kommen am Zylinder nicht vor.
In gleicher Weise kann noch die Betrachtung
a) des geraden Kegels,
b) der Kugel
vorgenommen werden.

3. *Zusammenhang der Körper, Flächen, Linien und Punkte usw.*
4. *Einteilung der Linien, Flächen und Körper usw.*
5. *Geometrie.*

Pädagogische Einwendungen gegen einen solchen Lehrtext.

Schon daß hier der Würfel einfach vor den Schüler hingestellt wird, ohne daß dieser Gelegenheit hat, etwas mit ihm zu machen, ist ein Beispiel dafür, daß der Begriff des „Anschauungsunterrichtes" viel zu eng genommen wird. Hier heißt „anschauen" wirklich nur so viel wie „anstarren". Doch darüber ein mehreres später (S. 93, 94 u. a.). Wenn es nun aber heißt, daß eine (1) Fläche des Würfels dem Auge des Schülers zugewendet ist und dann doch zugleich die Fig. 1 im Schrägbilde drei Flächen zeigt, wobei weder diese Schrägdarstellung noch die drei punktierten Linien irgendwie für das Verständnis des Schülers vorbereitet sind („der betrachtete Würfel aus Holz, Pappe oder Blech" zeigt ja natürlich nichts jenen punktierten Linien Entsprechendes), so macht all das sogleich den Eindruck des Konventionellen, Leblosen.

Im § 1 steuert alles vor allem auf den Begriff des Körpers (2) zu. Daß mit diesem Worte der Schüler wahrscheinlich von vornherein die Vorstellung seines eigenen Körpers, seines Leibes, verbindet, wird nicht bedacht.

So spricht vom ersten Augenblick an das Buch eine andere Sprache als die des lebendigen Schülers und ladet schon hierdurch diesen zum tödlichen Auswendiglernen ein. Wäre hierdurch dem Schüler das Denken nicht schon beim zweiten Absatz ausgetrieben, so müßte ihn dieser zweite Satz „Die Ausdehnung von rechts nach links heißt gewöhnlich Länge (3), die von unten nach oben Höhe" zum Einwand reizen: aber bei mir selber, der ich 150 cm lang bin, erstreckt sich doch gewöhnlich (nämlich wenn ich stehe und nicht liege) diese Länge von unten nach oben. Und da im dritten Absatz auch der Begriff der Dicke eingeführt wird, so müßte der vorwitzige Jüngling wieder sagen, daß sich bei ihm gerade diese Dicke „von hinten nach vorn erstreckt“. Aber nein – diese „Hauptrichtung“ heißt in der Geometrie just wieder „Breite“. Dagegen die Schulterbreite, die von rechs nach links, heißt in der Geometrie „gewöhnlich Länge“. Doch wir vergessen ja bei diesen heiteren Diskrepanzen, daß sich der Schüler das Denken an etwas Wirkliches schon beim ersten Aufschlagen des Geometriebuches abgewöhnt hat, und wir haben also gar nicht zu fürchten, daß er sich durch einen solchen Lehrtext irgendwie belustigt fühle.

Vielmehr hat ihm der e i n e Würfel schon die große Induktion erschlossen, daß j e d e r Körper d r e i Hauptausdehnungen hat. Daß es ihrer gerade drei (4) sind, soll der Schüler „nachweisen“. Bekanntlich verstehen nun aber sehr zahlreiche Erwachsene überhaupt nicht, warum man just nur „drei Dimensionen“ gelten läßt; läßt sich doch von einem Punkte des Raumes aus nach unzähligen Richtungen wegschreiten. Zur Berichtigung dieses Einwandes gehört bekanntlich der Satz von den drei aufeinander normalen Geraden, für die allerdings die drei von einer Würfelecke ausgehenden Kanten das Vorbild wären. Aber was ladet den Schüler ein, jeden Punkt z. B. seines eigenen Leibes gerade als eine solche Würfelecke zu denken? Und auch diese Kanten könnte man ja wieder auf unendlich viele Arten am und im Leibe orientieren, also warum nur drei Hauptausdehnungen?

Dann „die Grenzflächen eines Buches“ (5) angeben. Bei einem etwas dicken Buche sind der Rücken und der diesem gegenüberliegende Schnitt ganz deutlich Zylinderflächen. Wie soll diese der Schüler benennen, da die Betrachtung des Zylinders mit § 5 einsetzt?

Nach jener Betrachtung des Würfels wird sogleich behauptet, es könne in ähnlicher (6) Weise auch die Betrachtung des dreiseitigen (7) Prismas, des Tetraeders (8) vorgenommen werden. Wie weit erstrecken sich hier die Ähnlichkeiten, wie weit die Unterschiede?

Doch verweilen wir nicht mehr bei solchen Bedenken im einzelnen und auch nicht bei den allgemeineren, was der Schüler mit den angehäuften Definitionen nach 2) Betrachtung des Zylinders, 3) Zusammenhang der Körper, Flächen, Linien und Punkte, 4) Einteilung der Linien, Flächen und Körper und 5) Geometrie anfangen soll. Genug, daß schon auf Seite 4 die „P l a n i m e t r i e“ einsetzt und von da ihren ungestörten Fortgang durch weitere Definitionen und Lehrsätze nimmt. Soll jenes Beginnen mit dreidimensionalen Gebilden, nämlich dem Würfel und dem Zylinder, eine Einlösung der alten pädagogischen Forderung bedeuten, daß man behufs Pflege der Raumanschauung nicht mit der Planimetrie wie mit der Tür ins Haus fallen dürfe, sondern den Schüler in der Anschauung körperlicher[1]) Gebilde sozusagen müsse erst warm werden lassen, so paßt auf einen solchen Vorkursus im Körperlichanschauen, bei dem nach ganzen drei Lehrbuchseiten das Kind dann drei Jahre lang von Körpern nicht einmal mehr zu hören bekommt, durchaus Mephistos:

> „Er scheint mir, mit Verlaub von Euer Gnaden
> wie eine der langbeinigen Zikaden,
> die immer fliegt und fliegend springt
> und gleich im Gras ihr altes Liedchen singt.“

Mögen's ihm die gegenwärtigen Ansätze zu einer „zeitgemäßen Umgestaltung des mathematischen Unterrichtes“ nur nie und nirgends mehr nachmachen!

Worin das Unterscheidende zwischen einem geometrischen Anschauungsunterricht im Sinn der obigen und der nachfolgenden Lehrtextprobe besteht, läßt sich an der ersten Anmerkung zur oben durchgeführten „Betrachtung des Würfels“ zeigen: „Diese setzt von vornherein „Anschauen = Betrachten“. Dagegen unsere allererste „Vorübung im Anschauen des Würfels“ gibt dem Kind den Würfel in die Hand und veranlaßt es, den Würfel in der Hand und mit der Hand planmäßig zu bewegen (– wogegen es in obiger Anmerkung ausdrücklich heißt: *„Der betrachtete Würfel ... ruht ...“*), dabei unter planmäßigem Umwenden die einander gegenüberliegenden Flächen paarweise in Gedanken festzuhalten, was eben nicht im gleichzeitigen Wahrnehmen der zwei einander abgekehrten Flächen, sondern nur durch Kombinieren von je einer Wahrnehmungs- und einer Erinnerungs-Vorstellung möglich ist usf. Erst ein solches „Anschauen“ erfüllt die psychologischen Voraussetzungen und die pädagogischen Hoffnungen, die einem PESTALOZZI bei seinem „Prinzip der Anschauung“[2]) vorschwebten. (Vgl. auch unten, S. 130, 131 Anm.)

---

1) Während des Druckes erscheint G. C. YOUNG und W. H. YOUNG, Der kleine Geometer, Deutsche Ausgabe, besorgt von S. und F. Bernstein. Teubner 1908. Größten Wert legen die Verfasser auf die Methode des Faltens, durch das sowohl planimetrisch wie auch stereometrisch Modelle in großer Mannigfaltigkeit hergestellt werden.

2) Obiges wünscht den Leser aufmerksam zu machen auf die Abhandlung

§ 13. Skizzen zu einer „Vorschule der Raumlehre“.

1. Vorübungen im Anschauen und Anfertigen des Würfels.

1. Lege einen Spielwürfel so auf den Tisch, daß der Reihe nach 1, 2, 3, 4, 5, 6 Augen oben liegen! Wie viele Augen liegen dann unten (an der Tischfläche)? — Beachte: 1 + 6 = ?, 2 + ? = 7, ? + 4 = 7.

2. Woher hat der **Würfel** seinen Namen? – Welche deiner Spielsachen hatten die Gestalt eines Würfels? (Bausteine[1]), Zusammenlegspiele . . .). –

3. Buchblätter (Spielkarten, Visitkarten . . .) haben die Gestalt eines **Rechtecks** (Abb. 1). Lege zwei gleiche Rechtecke nach Abb. 2 aufeinander und schneide die vorstehenden Teile weg: es bleiben zwei gleichseitige rechtwinklige Vierecke übrig.

Abb. 1.

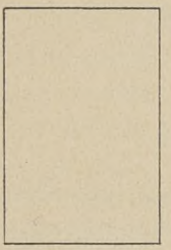


Fig. 1.

Abb. 2.

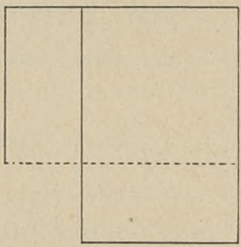


Fig. 2.

Das gleichseitig rechtwinklige Viereck heißt **Quadrat**.
Stelle (klebe) sechs gleiche Quadrate zu einem Würfel zusammen![2])

„Pestalozzis Prinzip der Anschauung“ in Natorps „Sozialpädagogik“ I. Bd. 1907. Natorp geht allerdings doch wohl etwas zu weit, wenn er Pestalozzi dahin interpretiert (S. 137), „daß unter Anschauung nichts (!) anderes als die Betätigung eben jener Elementarkräfte des Erkennens, eben jener ursprünglich den Gegenstand gestaltenden Funktionen verstanden wird, die in den ‚Hauptsätzen der menschlichen Erkenntnis‘, von denen Pestalozzi spricht, ihren reinen Ausdruck finden“. Nach diesem Wortlaut wäre ja jedwede intellektuelle Betätigung schon und nur „Anschauung“. Die eigentliche Intention Natorps aber liegt doch wohl darin, nur umgekehrt innerhalb jeder echten „Anschauung“ neben dem Passiven, Rezeptiven der bloßen Vorgänge des Wahrnehmens und Reproduzierens vorwiegend die psychischen Komponenten der Aktivität, Spontaneität, Produktivität aufzuzeigen; und hierfür muß auch eine Psychologie dankbar sein, die sich von der Natorpschen im übrigen häufig stark unterscheidet.

Doch wollen wir hier den Leser nicht weiter mit diesen internen Streitfragen der gegenwärtigen Psychologie (oder vielmehr Psychologien) behelligen; sondern, insoweit den Leser derartig Psychologisches als solches überhaupt interessiert, mögen ihn ganz *ad hoc* die nachfolgenden Fragen und Forderungen an den Schüler beim „Anschauen des Würfels, der Kugel usw.“ selber zu einer psychologischen Analyse einladen, um wieviel mehr an psychischer Aktivität (die des Wollens bei den manuellen Betätigungen mit eingerechnet) durch jene Anschauungen und Handfertigkeiten angeregt wird als durch eine bloße „Betrachtung“ des Würfels, Zylinders und durch das nachfolgende – Auswendiglernen.

1) Über die schon S. 78 erwähnten Kubikzentimeter-Würfelchen siehe Näheres S. 102.

2) Die Anfertigung eines zusammenhängenden Würfelnetzes versparen wir uns bis zum Gebrauch des Winkelhakens (S. 107). – Im Anschluß an die im

Der Würfel hat **6 Flächen, 12 Kanten, 8 Ecken.** — Am Würfel sind die **Flächen** eben (ebene Flächen, **Ebenen**, u. zw. Quadrate[1]); die **Kanten** gerade (gerade Linien, **Gerade**, u. zw. Strecken[1]); die **Ecken** des Würfels sind **Punkte.**

Beachte an den $4 \times 6 = 24$ Quadratseiten des Würfels, daß
$24 : 2 = 12$ $24 : 3 = 8$
(je **2** Flächen haben **1** Kante, je **3** Flächen haben **1** Ecke gemeinsam).

obigen Lehrtext gezeigte Herstellung eines Quadrates aus zwei rechteckigen Karten kann der Lehrer den Schülern bei erweiternden Wiederholungen allenfalls auch die folgende Herstellung eines Würfels vormachen und sie dadurch zu freiwilliger Nachahmung anregen: Die zwei rechteckigen Kartenblätter werden nach Fig. 3 übereinander gelegt, an den Rändern geritzt und geknickt. Aus sechs solchen Blättern läßt sich dann ein Würfel, Fig. 4, zusammenstecken (wozu einige manuelle Geschicklichkeit, „Handfertigkeit“, gehört) und hält überraschend gut auch ohne alles Kleben. – An ein solches Modell läßt sich viel später (im Vorkursus der systematischen Stereometrie, V. Jahrgang) die Beziehung des kristallographischen (nicht regulären) Pentagonaldodekaeders zum Würfel (Hexaeder) anknüpfen; vgl. unten S. 215.

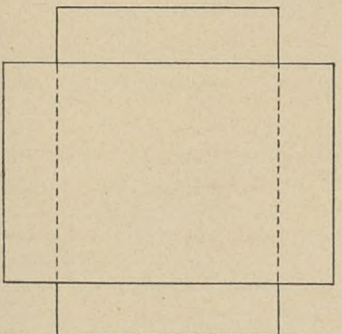


Fig. 3.

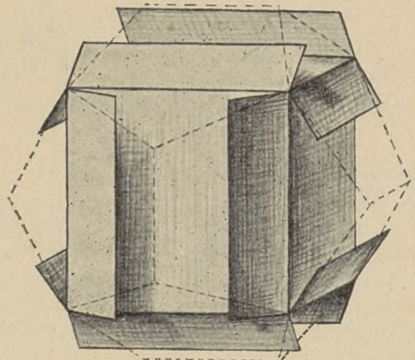


Fig. 4.

1) Sollte der Lehrer Anzeichen dafür bemerken, daß sich der Schüler durch die beiden gleich richtigen Sätze:

Die Flächen des Würfels sind Ebenen –
Die Flächen des Würfels sind Quadrate –

etwa zu der Meinung verleiten läßt, die Wörter „Ebene“ und „Quadrat“ seien gleichbedeutend, so wäre das Kind von solchem Fehlschluß nicht etwa zurückzubringen durch Definitionen der Ebene und des Quadrates, sondern durch Gegenbeispiele wie

Das Pferd ist ein Säugetier,
Das Pferd ist ein Einhufer;

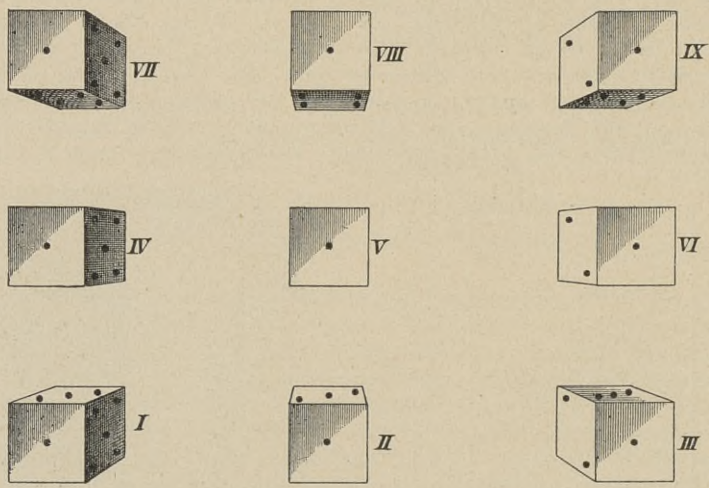
woraus ja, wie jedes Kind begreift, auch nicht etwa folgt, daß „Säugetier“ und „Einhufer“ gleichbedeutend sind. Sondern: Jeder Einhufer ist ein Säugetier, aber nicht jedes Säugetier ist ein Einhufer.

Sollte man nicht durch solche gelegentliche Übungen im Über- und Unterordnen der auftauchenden Begriffe u. dgl. einen praktischen Ertrag an logischer Schulung auf lange hinaus wirksamer erzielen als durch formenstrenge Definitionen und Schlußketten? Näheres hierüber im III. Teil, § 475 ff.

An einem beinernen (hölzernen) Spielwürfel[1]) sieht man öfters noch die Spuren der Säge, der Feile; dann sind die Flächen *nicht* völlig *eben* und die Kanten *nicht* völlig *gerade*; die manchmal abgestumpften Ecken sind *nicht* genau *Punkte* (auch nicht die Augen des Würfels; warum?).

4. Fertige dir *Modelle* des Würfels in verschiedenen Größen an [— aus Papier, Karton, Brettchen (mittels Laubsäge), aus Kreide, Speckstein, Ton, feuchtem Sand, aus Gips (durch Ausgießen eines Würfels von Karton oder Brettchen)]![2]) — Schneide einen Würfel aus einer Kartoffel; ferner den *möglichst großen Würfel* aus einem *kugelförmigen* Apfel[3]) (aus einer unregelmäßig gestalteten Kartoffel)!

Abb. 3—11 (I—IX).



Figg. 5—13.

5. Halte einen Spielwürfel so vor dich hin, daß er dir (wenn du ihn mit einem Auge betrachtest) je *eine*, *zwei*, *drei* seiner Flächen nach Abb. von 3 bis 11 zeigt! — Kannst du auch vier, fünf, sechs Flächen eines Würfels auf einmal übersehen?

6. Lege (stelle) einen Ziegel (ein Buch) nach Abb. 12 bis 14 auf den Tisch! — Fertige eine Pappschachtel an, deren Flächen sich an die des Ziegels anlegen!

---

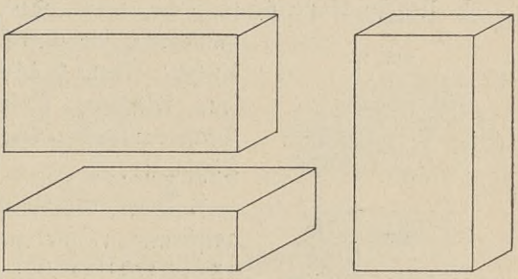
1) Dieses Beispiel, in dem vom *Stoff* und von den *Unvollkommenheiten der Gestalt* die Rede ist, gibt hier ausreichenden Ersatz für jene nur zu häufig mysteriösen (weil auf einer unzureichenden Kenntnis der Psychologie und Logik der Abstraktion beruhenden) Dogmen, daß die mathematischen Körper im Gegensatz zu den physischen „keinen Stoff haben" u. dgl. m.; und zumal auch für alle kuriosen Theorien über die „beinahe" dickelosen Linien und Flächen, über den Grenzbegriff des Punktes u. dgl. m. (worüber einiges im III. Teil, S. 477, 479).

2) Das gibt schon mehrere Wochen „*Handfertigkeit*" (vgl. S. 131).

3) Dies eine Überleitung zu den Übungen im Anschauen der *Kugel* (folg. Nr. 2).

Wie der Würfel durch Quadrate, ist der **Quader** (das rechteckige Prisma)[1]) durch Rechtecke begrenzt.

Abb. 12—14.



Figg. 14—16.

Zähle die Flächen, Kanten und Ecken des Quaders und vergleiche sie mit denen des Würfels!

7. Sehr viele Körper haben die Gestalt des Quaders, z. B. Bücher [?], die meisten Zimmer; weitere Beispiele! — Auch ein vierkantiges Lineal, dessen Querschnitte Quadrate sind (das sog. „Walzel“, reichsdeutsch: der „Kantel“), ist ein Quader, und zwar ein quadratisches Prisma.

Von Naturkörpern haben z. B. die Kochsalzkristalle[2]) in der Regel die Gestalt von Quadern, in besonderen Fällen die von Würfeln.

2. Vorübungen im Anschauen der Kugel.

1. Wähle unter mehreren Äpfeln den aus, dessen Gestalt sich am meisten der einer **Kugel** nähert! — Welche Abweichungen mußt du wegdenken?

---

1) Wir verbinden mit den Vorübungen im Anschauen des Würfels auch sogleich die im Anschauen des rechteckigen Prismas, da sich die Gleichheit der Flächen und Kanten am Würfel erst durch den Kontrast zu deren teilweisen Ungleichheit am Prisma aufdrängt und einprägt (vgl. über das psychologische und logische Verhältnis von Ungleichheit und Gleichheit III. Teil, S. 478 Anm.). Überdies findet der Schüler in seiner Umgebung viel mehr Beispiele von Quadern als von Würfeln. Nichtsdestoweniger würden wir nicht empfehlen, etwa den Quader dem Würfel voranzustellen, da eben der Würfel das Konkretere, Speziellere (eigentlich ein Grenzfall), der Quader schon eine Art Verallgemeinerung ist und wir didaktisch immer vom Besonderen zum Allgemeineren aufsteigen wollen.

Was die Terminologie betrifft, so verzichtet man mehr und mehr auf das zungenbrecherische „rechtwinklige Parallelepiped“ (man höre nicht nur die krampfhaften „Para-rello-piped“, sondern auch die kunstgerechten „Par-allel-epi-ped“ [oder nach neuester Philologie doch wieder: Parallelo-piped] mit einigem Mitleid und – Humor an!). Der Ausdruck **Quader** ist schon sehr allgemein auch als geometrischer Kunstausdruck gebräuchlich. – Das Bedürfnis nach dem ganz deutschen „Rechtecker“ dürfte nicht sehr stark sein, zumal „Quader“ in der Baukunst längst Lehnwort war und es bisher nicht einmal für das noch weniger deutsche „Quadrat“ eine gebräuchliche Verdeutschung gibt.

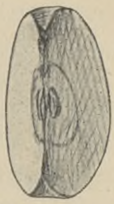
2) Auch diese Kristalle (allenfalls auch solche von Pyrit u. a.) wird der Lehrer der Geometrie nicht nur aus der Mineraliensammlung sogleich vorzeigen, sondern auch den Schüler anleiten, daß er selber Kochsalz kristallisieren lasse. – Daß die offizielle Mineralogie und Kristallographie erst ein paar Jahre später darankommt, verschlägt gar nicht gegen solche Vorwegnahme des in den Geometrieunterricht direkt Einschlägigen aus ihnen.

2. Welche deiner Spielsachen hatten die Gestalt einer Kugel? (Spielkugel [Marbel, Marmel, Murmel], Kegelkugel, Spielball ...).

3. Welche Naturkörper zeigen mehr oder minder annähernd die Gestalt einer Kugel? (Viele Früchte: Erbsen, Kirschen, Weinbeeren, Orangen; Wasser-, Quecksilbertröpfchen ...).

Abb. 15.

Abb. 16.



4. Zerschneide einen kugelförmigen Apfel nach Abb. 15 und 16![1]) Der Rand jedes solchen ebenen Schnittes durch eine Kugel ist ein **Kreis**. – Zeige an Abb. 16 Halbkreise!

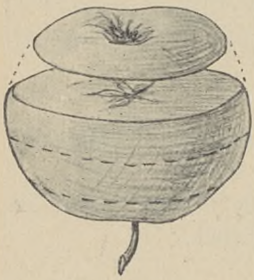


Fig. 17.

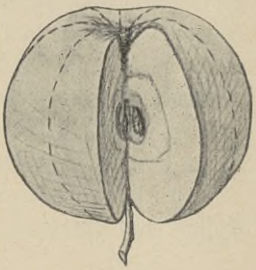


Fig. 18.

5. Welcher von allen Kreisen in Abb. 15 ist der größte Kreis? Dieser heißt auch ein **Hauptkreis** der Kugel, alle kleineren heißen **Nebenkreise**. Ein Hauptkreis teilt die Kugel in zwei Halbkugeln.

1) Die Abb. 15, 16 bereiten die Begriffe von Meridianen und Parallelkreisen an der Erdkugel vor. Zwar kommt es in einem didaktisch richtigen Lehrgang der Geographie zu diesen Begriffen wohl erst etwa im zweiten Jahrgang, wo dann obige Vorübungen an der Kugel schon aus dem ersten Jahrgang Wiederholung und Erwähnung finden. Bisher oder doch bis in jüngstvergangene Zeit mußte der Geographielehrer die Kinder schon am Anfang seines Unterrichtes mit allen erdenklichen Vorstellungen von Kugel und Kreis plagen, wogegen der Geometrieunterricht erst vier (in Preußen gar erst fünf) Jahre später es wagte, von der Kugel zu reden!

Figg. 19.

An das Teilen eines Apfels nach Figg. 17–19 (was wegen des An- und Ineinanderhaftens der zwei gleichen Teile ein hübsches Kunststück ist) knüpfen sich wieder lehrreiche Anschauungen von der gegenseitig normalen Lage der drei Schnittebenen ähnlich wie bei Würfelflächen. – Näheres über dieses Normalsein von Geraden und Ebenen aber erst in Nr. 6 (S. 103ff.).

6. Wende eine Halbkugel so (z. B. ritze die Schale eines kugelförmigen Apfels längs eines größten Kreises, schäle die eine Hälfte[1]) und bringe dann den Apfel in solche Lagen zum Auge), daß der Kreis nach und nach sich als immer länglichere Eilinie (**Ellipse**)[2]) und zuletzt als Gerade darstellt.

7. Die Fläche einer kleinen Kugel (einer Erbse) ist stark **gekrümmt**[3]), die Fläche einer größeren Kugel ist schwächer gekrümmt. — Eine Eischale ist an der „Spitze“ stärker gekrümmt als gegen die Mitte. Eine Kugel ist an allen Stellen gleich stark gekrümmt; desgleichen ein Kreis. Eine Ellipse ist an den „Scheiteln der großen Achse“ am stärksten gekrümmt.

3. Übungen im Gebrauch des Zirkels. Abstand, Kreis.

1. Nenne die[4]) Bestandteile deines Reißzeugs und gib ihren Zweck an!

2. Beschreibe mit dem Zirkel eine Kreislinie (Abb. 17) um den Punkt O als **Mittelpunkt** (Zentrum) mit OM als **Halbmesser** (Radius)! — Alle Halbmesser desselben Kreises sind einander gleich.

Abb. 17.

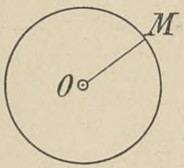


Fig. 20.

Abb. 18.

$A \odot \quad \odot B \qquad AB < OM$

$C \odot \quad \odot D \qquad CD = OM$

$E \odot \quad \odot F \qquad EF > OM$

Fig. 21.

Abb. 19.

Fig. 22.

3. Zeichne mittels des Zirkels drei Paare von Punkten, deren **Abstand** gleich (=) dem Abstand der Punkte O und M, bzw. kleiner (<), größer (>) als dieser Abstand ist! (Abb. 18.)

---

1) Diese Aufgabe bereitet die Anschauungen von der Beschattung der Erde und des Mondes vor. Auch ohne diese späteren Anwendungen im ersten Geometrieunterricht jetzt schon zu erwähnen, können schon mannigfache Versuche über die Beleuchtung und Beschattung von Kugeln an die Übungen der Nr. 2 angeschlossen werden.

2) Im botanischen Unterricht der Unterstufe (an den österreichischen Gymnasien schon im Sommersemester der 1. Klasse) wird von „elliptischen“ Blattformen gesprochen. — In der Geometrie aber kam bisher auch die Ellipse erst in der 3. oder 4. oder seit einiger Zeit gar erst in der 7. Klasse (in Preußen in U I oder gar erst in O I) zum erstenmal zur Sprache!

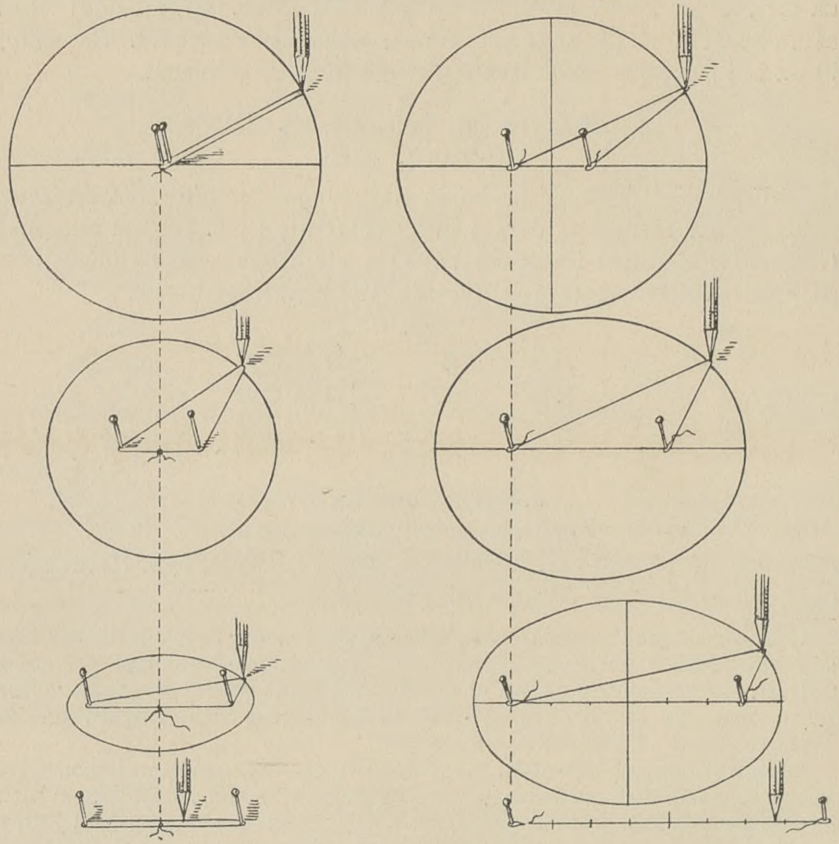
3) Von Krümmung bei Kugeln und Kreisen zu reden, ehe man auch nur von Durch- und Halbmessern geredet hat, mag manchem wie eine arge mathematisch-didaktische Ketzerei klingen. Nur ist es psychologische Tatsache (vgl. III. Teil S. 440), daß das mehr oder weniger gleichmäßig oder ungleichmäßig Gekrümmtsein an einer Fläche oder Kurve viel unmittelbarer auffällt, als gerade dem allerersten Anfänger das Hineindenken von Halbmessern und Mittelpunkten (und dann auch natürlich Krümmungshalbmessern und Krümmungsmittelpunkten) einfällt.

4) Natürlich braucht es nicht für alle Teile auf einmal zu geschehen, sondern je nach Bedarf. — Vollends wird man nicht etwa alle Namen „Reißbrett, Reißschiene“ usf. der Reihe nach memorieren, sondern während des Gebrauchs allmählich sich einprägen lassen. 7*

4. Zeichne mehrere konzentrische Kreise, d. h. Kreise mit demselben Mittelpunkt und verschiedenen Halbmessern (wie an einer Schießscheibe)!

5. Zeichne die Abb. 19 im vergrößerten Maßstabe (so groß es das Zeichenblatt erlaubt) und im verkleinerten Maßstabe (so klein es die Feinheit des Zirkels erlaubt)!

Abb. 20—23. Abb. 24—27.



$2a + 2e = 4 cm$ $2a = 4 cm$

Figg. 23—30.

6. Bediene dich zum Zeichnen eines Kreises statt des Zirkels eines zu einer Schlinge zusammengeknüpften Fadens, der um eine in den Kreismittelpunkt gesteckte Nadel gelegt ist (Abb. 20)! Lege dieselbe Schlinge um zwei Nadeln; lasse diese immer weiter auseinanderrücken (Abb. 21—27): du erhältst so **Ellipsen**, die zuletzt in eine gerade Linie übergehen.

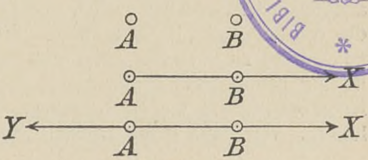
Es wird nicht leicht ein Knabe zum erstenmal einen Zirkel in die Hand bekommen, ohne alsbald, mit ihm spielend, auf die Figur 22 zu verfallen. Dies schließt die Entdeckung ein, daß sich der Halbmesser als Sehne genau sechsmal längs des Umfangs auftragen läßt. (Je nachdem die Zeichnung mehr oder weniger genau stimmt, macht sie den Knaben auf seine kleineren oder größeren Ungeschicklichkeiten im Gebrauch des Zirkels aufmerksam.) – Weder heben wir aber einstweilen schon diese geometrische Tatsache als einen besonderen Lehrsatz hervor, noch suchen wir ihn gar jetzt schon zu beweisen. Wohl aber mag obige Sternfigur, eben weil sie vom Schüler spontan erfunden worden ist (oder erfunden worden wäre, wenn sie sich nicht eben im Buch vorgezeichnet fände), späterhin als eine Art Fundgrube dienen, aus der die verschiedenen Lehrsätze über das Sechseck, das gleichseitige Dreieck geschöpft werden (vgl. S. 109). Und erst wieder später (S. 111) erklären wir jene Beziehungen aus dem Satz, daß im gleichseitigen Dreieck die Winkelsumme 180° ist (noch später erweitern wir dies für alle ebenen Dreiecke S. 112). Sodann die Übungen über die sechs um eine Münze herumzulegenden gleichen Münzen; Nr. 9, Aufgabe 7, worauf der Schüler sicher solche Kreise zeichnet; usf. –

Auch die Aufgabe vom Ellipsenzeichnen pflegte man immer erst viel später zu nehmen. Aber einerseits wünschen wir den Schüler instandzusetzen, daß er die Ellipsen, die er in den Vorübungen von Nr. 2 nur gesehen hat, alsbald auch machen lerne (so wie es in Nr. 2 und Nr. 3 mit dem Kreis geschah). Andererseits lockt die bekannte Praxis der Gärtner beim Anlegen elliptischer Beete den Schüler in den Schulgarten oder wenigstens in den Schulhof, um hier eine geometrische Figur in großem Maßstabe zu entwerfen. Das aber wird spontaner geschehen, als wenn man sich begnügen wollte, etwa immer nur die Längen des Hofes auszumessen, was, wenn es auch eine Übung im „Gelände“ ist, doch immerhin bald zu einem Gegenstande der Langeweile wird, sobald der Schüler nicht weiß, was er mit den ermessenen Größen nun weiter anfangen soll. Und auch das ist ja zu vermeiden, daß wir wochen- und monatelang, bis wir etwa zur Berechnung der Fläche von Rechtecken aus den Seiten kommen, Geometrie nur im Schulzimmer treiben, zu denen die späteren Übungen im Gelände als bloße Draufgabe erscheinen, ohne die es auch weiterhin gehen wird, wenn es so lange gegangen war.

4. Übungen im Gebrauch des Lineals[1]). Richtung, Gerade.

1. Zeichne auf das Papier zwei Punkte A und B (Abb. 28) und ziehe mittels des Lineals die Strecke von A bis nach B (kurz: die Strecke AB). — Zeichne dann durch beliebige Verlängerung über B hinaus den Halbstrahl AX, endlich durch beliebige Verlängerung auch über A hinaus den Strahl YX!

Abb. 28. Abb. 29. Abb. 30.



Figg. 31—33.

Strahlen, Halbstrahlen und Strecken sind **gerade Linien** oder **Geraden**.

1) Es läge freilich nahe, das Lineal früher handhaben zu lassen als den Zirkel. Aber eben weil es nahe liegt, d. h. weil das Lineal dem Schüler längst eine gewohnte Sache ist, und weil ihn die Gerade überhaupt weniger interessiert als der Kreis, haben wir Zirkel und Kreis vorangehen lassen. Auch einige andere Gründe (z. B. daß die Relation „Abstand“ sich im ganzen stärker aufzudrängen scheint als die Relation „Richtung“ u. dgl. m.)

2. Bewege die Spitze des Bleistiftes längs einer geraden Linie in der **Richtung** von A nach B und dann in der entgegengesetzten Richtung von B nach A!

3. Prüfe dein Lineal, ob seine Kante wirklich gerade, oder ob sie mehr oder weniger krumm ist! (Visieren längs der Kante; Umlegen um die Kante).[1])

Durch zwei gegebene Punkte lassen sich vielerlei krumme Linien ziehen. Durch zwei gegebene Punkte läßt sich nur **eine** gerade Linie ziehen.

Abb. 31.

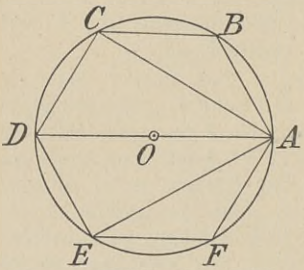


Fig. 34.

4. Zeichne von Abb. 19 nur den Mittelpunkt, die Kreislinie und ihre sechs Teilungspunkte und verbinde den Punkt A durch je eine Gerade (Sehne) mit B, mit C, D, E, F! (Abb. 31.)

Die größte Sehne AD heißt **Durchmesser** des Kreises. Der Durchmesser ist das Doppelte des Radius ($d = 2r$); warum?

5. Zeichne auch von jedem der Punkte B, C, D, E, F aus alle Sehnen! Wie viele sind es dann im ganzen?

6. Prüfe mittels des Lineals, ob die Fläche des Tisches (eines Kastens) eine ebene Fläche (Ebene) ist!

5. Übungen im Gebrauche des Maßstabes. Längen-, Flächen-, Raummaße.

Hierher die gebräuchlichen Übungen vornehmlich des metrischen Systems durch Messen und Zeichnen, die sich natürlich von da ab nicht nur durch das ganze erste, sondern auch durch die folgenden Schuljahre erstrecken.

Ich empfehle in diesem Zusammenhang die (schon oben, S. 78, bei den Vorübungen des Bruchrechnens und dann wieder S. 94 Anm. 1) erwähnten Kubikzentimeter-Würfelchen, von denen dem Schüler eine größere Zahl, etwa 64, in die Hand zu geben wären, damit er während der verschiedensten arithmetischen und namentlich geometrischen Übungen mit ihnen hantiere, z. B. die Würfel von 2^3, 3^3, 4^3 aufbaue. Wie wenig überflüssig es ist, sich hier nicht nur darauf zu verlassen, daß sich der Schüler nach einer Abbildung im Buche künftig schon hinreichend genau die absolute Größe eines solchen wirklichen Kubikzentimeters werde vorstellen können, kann nur ein wirklicher Versuch lehren. Ich habe einen solchen mit mehreren Kindern und Erwachsenen an-

---

wollen wir, als nur für den Theoretiker der Raumvorstellung überzeugend, hier nicht näher ausführen (einiges hierüber in den Abhandlungen über „Räumliche und raumlose Geometrie", vgl. S. 431, Anm. 3).

1) Allenfalls später weitere Übungen: Einem Kartonstreifen gibt man einen geraden und einen ungeraden Rand, schiebt diese Ränder längs zweier festen Punkte A und B fort und fährt die Ränder entlang mit dem Bleistift nach. Welche dieser Linien decken sich, welche nicht? U. dgl. m.

gestellt, und sie wunderten sich alle, um wieviel kleiner das wirkliche Kubikzentimeterchen, das ich ihnen in die Hand gab, aussah und sich anfühlte im Vergleich zu dem nebenstehenden in Fig. 35 reproduzierten. Wenn auch hier als das irreführende Moment leicht die Wanddicke erkannt wird, so würde sich eben doch aus dem bloßen wiederholten Anblick der Figur ohne berichtigendes wirkliches Würfelchen für das künftige Augenmaß ein viel zu großes Volumen einprägen. Auf meine Veranlassung bringt die Fabrik der bekannten Richterschen Steinbaukasten solche Würfelchen aus Steinmasse das Stück zu 2 h, 64 Stück um 1 K in Handel; ferner der Erfinder des Spielzeuges „Matador“ (Ingenieur Korboly, Wien, Am Peter — vgl. auch unten S. 116 Anm.) solche Würfelchen aus Holz 125 Stück um K 0,50.

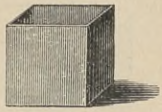


Fig. 35.

6. Übungen im Gebrauch des Winkelhakens[1]) und Winkeldreiecks. Rechter Winkel, gestreckter Winkel, voller Winkel.

1. Zeichne mittels des Winkelhakens (Abb. 32) einen **rechten Winkel** (abgekürzt: einen Rechten R, Abb. 33). Der Punkt A ist der Scheitel des rechten Winkels, die Halbstrahlen AB und AC sind die Schenkel des Winkels. Man sagt auch: AB und AC sind zueinander winkelrecht oder **normal**[2]).

Lies: $\sphericalangle BAC = R$ oder $\sphericalangle CAB = R$;

lies nicht: $\sphericalangle ABC = R$ oder $\sphericalangle ACB = R$!

Abb. 32.

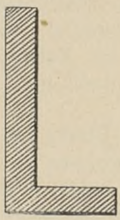


Fig. 36a.

Abb. 33.

Fig. 36b.

2. Zeichne eine Strecke AB und errichte in

---

1) Von einem Lehrer der darstellenden Geometrie wird mir gesagt, es sei der Ausdruck „Winkelhaken“ nicht allgemein gebräuchlich. Gleichwohl wurde er oben gebraucht, um nicht durch das dem Zeichner geläufigere Wort „Dreieck“ im Sinne von „Winkeldreieck“ für den allerersten Anfang eine Verwechslung mit dem allgemeinen geometrischen Begriff „Dreieck“ (auf den wir erst später, Nr. 8, 9 usf., kommen) zu verschulden.

Da wir den Winkelhaken sehr oft zum Schneiden oder Ritzen von Karton brauchen, so ist ein eiserner Haken erwünscht. Jedenfalls ist der Schüler aufmerksam zu machen, daß er seine Zeichendreiecke leicht für immer verdirbt, wenn er sie auch als Führung seines Federmessers (oder des Buchbindermessers, das für Kartonarbeiten ebenfalls wünschenswert ist) verwendet.

2) Wiewohl es sonst anzustreben ist, daß wir soviel als möglich deutsche Kunstausdrücke auch schon in die erste Raumlehre bekommen, dürfte aus leidigen Gründen bei diesem „**normal**“ eine Ausnahme gemacht werden müssen. Das für diesen Begriff gebräuchlichste Wort „senkrecht“ schielt nämlich nach zwei Seiten, in die Geometrie und Physik, wie denn auch der ihm zugrundeliegende Begriff des „Senkens“ ein durchaus physikalischer, gar nicht geometrischer ist. Daher wird man, ehe man sich in der Schule für diesen oder jenen Kunstausdruck entscheidet, nicht nur das Nötige an geometrischen, sondern auch an physikalischen Begriffen klar gemacht haben müssen; und zu letzteren gibt schon im untersten Jahrgang der Geographieunterricht Gelegenheit (s. u. S. 106, 118, Anm.).

den Endpunkten A und B und in mehreren zwischenliegenden Punkten M, N ... die auf AB normalen Geraden[1])!

Abb. 34.

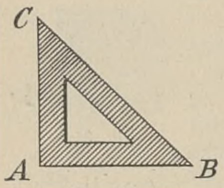


Fig. 37.

Abb. 35.

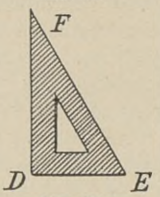


Fig. 38.

3. Man gibt den Winkelhaken häufig die Gestalt der Dreiecke in Abb. 34 und Abb. 35. Zeige mittels des Zirkels, daß in Abb. 34 AB = AC (gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck) und daß in Abb. 35 DE = $\frac{1}{2}$ EF (Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks)!

4. Prüfe die Winkeldreiecke, ob sie wirklich rechte Winkel (oder ob sie schiefe Winkel, nämlich spitze oder stumpfe[2]) Winkel) haben, indem du 1) deren zwei an einem (schon als gerade geprüften) Lineal mit den Scheiteln der rechten Winkel aneinander rückst; 2) deren vier auf einer ebenen[3]) Fläche (Abb. 36, 37) aneinander legst. Wie erkennst du durch

---

Soeben, unmittelbar vor Schluß des Druckes, lese ich in der Zeitschrift „Österreichische Mittelschule" XXIII (1909) S. 102 in einer Anzeige die leider völlig zutreffende Konstatierung: „Leider ist die Verwirrung im Gebrauche von „senkrecht" und „lotrecht", die ja sprachlich wirklich dasselbe bedeuten, die aber im Verlaufe der Entwicklung der mathematischen Lehren immer entschiedener zu „normal" und „vertikal" geworden sind, in Deutschland aufs höchste gestiegen".

1) Zweck dieser Übung ist, den Schüler aufmerksam zu machen, daß und wie er den Winkelhaken anders handhaben muß, wenn er die Normalen in den Endpunkten einer Strecke, als wenn er sie in deren Verlauf errichtet. Es ist ein Jammer und Ärger, manchmal auch noch den Schülern späterer Jahrgänge zusehen zu müssen, wie sie den Winkelhaken innerhalb der Tafelebene (oder wohl auch nicht innerhalb) wenden und drehen, bevor sie für ihn das richtige Anlegen finden. Auch daß, wenn z. B. ein Koordinatenkreuz zu ziehen ist, zum Errichten der Normalen die Hypotenuse des Winkeldreiecks verwendet wird, wiewohl es mit den Katheten gar nicht zeitraubender wäre und dann den wirklich rechten Winkel gäbe, und was derlei Ungeschicklichkeiten mehr sind, beobachtet man immer und immer wieder. Das wären Gelegenheiten, auch schon beim kleinsten Knaben so lange auf Vermeidung aller solcher Ungeschicklichkeiten und Gedankenlosigkeiten zu dringen, bis es ihm ebensowenig einfällt, den Winkelhaken verkehrt anzulegen, wie seine Hose verkehrt anzuziehen.

Die analogen Bemerkungen wären natürlich ebenso für den Gebrauch des Transporteurs zu machen, wie auch schon für den des Lineals und wieder des Schulzirkels; doch braucht natürlich hier nicht versucht zu werden, die Mannigfaltigkeit von Ungeschick, das sich bei solchen ersten Gelegenheiten zur „Handfertigkeit" enthüllt, Glied für Glied aufzuzählen. Jeden jungen Lehrer, der einmal darauf aufmerksam geworden ist, wieviel es in diesen Dingen ein für allemal nicht zu dulden gilt, wird das Schulleben mit dieser Mannigfaltigkeit am eindringlichsten bekannt machen.

2) Diese vorläufigen Anwendungen der Terminologie der nicht rechten (schiefen) Winkel mögen den Lehrer nicht verleiten, sogleich hier die Definitionen zu häufen, worüber einiges noch gelegentlich in Nr. 7, 12.

3) An die Beobachtung des Schülers, daß er z. B. auf einem buckeligen Brette die Probe mit dem Prüfen der vier Winkelhaken nicht machen kann,

Umlegen der einzelnen Haken oder Dreiecke, welche von ihnen statt eines rechten Winkels allenfalls einen etwas größeren oder kleineren Winkel enthalten?

2 rechte Winkel geben 1 gestreckten Winkel (in Zeichen 2 R = 1 G)
4 „ „ „ 1 vollen „ („ „ 4 R = 1 V)

5. Falte ein Papierblatt so, daß es eine gerade Bruchkante annimmt, und dann durch Knicken dieses Randes und Aufeinanderlegen seiner beiden Hälften so, daß sie vier rechte Winkel bilden.

6. Prüfe mittels des Lineals, daß der Rand AB eines Kartons gerade ist ritze den Karton mittels des Winkelhakens längs einer zu AB normalen Geraden CX und knicke ihn längs CX. Stellst du dann den Karton mit den Rändern AC und CB auf die ebene Tischfläche (Abb. 38), so steht die Gerade CX auf der Ebene **normal**.

Abb. 36.

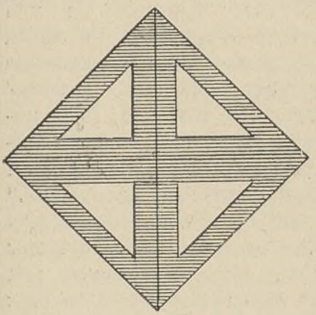


Fig. 39.

Abb. 37.

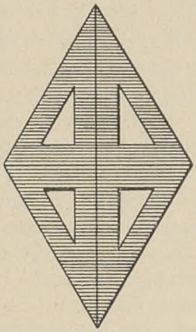


Fig. 40.

Abb. 38.

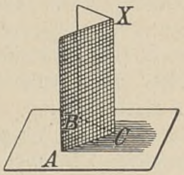


Fig. 41.

7. Stecke in ein ebenes Brett einen geraden Draht (eine Stricknadel) und prüfe, ob der Draht zum Brett normal ist[1]), indem du den Winkelhaken mindestens zweimal (wie? warum?) anlegst!

---

könnten sich allerlei weiter- und tiefergehende Beobachtungen anschließen, die uns – was wir natürlich für den ersten Jahrgang nichts weniger als empfehlen – unversehens bis an die Grundvoraussetzungen der Nichteuklidischen Geometrie heranführen könnten; einiges hierüber § 18, S. 193. Recht wohl aber mag man auch sogleich den kleinen Anfänger die folgenreiche Beziehung des vollen Winkels zur Ebene dadurch fühlen lassen, daß man z. B. auf Veranlassung der obigen Übung 5 mit dem Falten des Papierblattes aus einem Blatte kleinere und größere „Zwickel“ herausschneiden läßt; um ihre Ränder nun zur Berührung zu bringen, muß man das Papier zu Kegel- oder Pyramidenmänteln falten (wobei es wieder nicht auf die Namen und Definitionen dieser Gebilde, sondern auf deren Anblick ankommt). Erst wenn jene Zwickel wieder eingesetzt werden, d. h. wenn der Winkel wieder ein voller ist, ist auch die Papierfläche wieder eine Ebene (von der Möglichkeit einer Zylinder- [oder einer sonstigen abwickelbaren] Fläche hier natürlich zu schweigen). – Umgekehrt gibt das Einkleben eines Zwickels in einen Schlitz der Ebene (also bei einem Winkel $> 360^0$) eine halskrausenartige „Überebene“. – Diese Dinge kommen natürlich erst bei den „körperlichen Ecken“ (im V. Jhg. S. 203 ff.) ungesucht zur Sprache.

1) Das Brettchen mit dem normalen Draht bildet ein „Gnomon“, wenn es auf ein wagrechtes Fensterbrett gestellt ist und die Längen und Richtungen

Abb. 39.

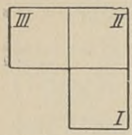


Fig. 42.

Abb. 40.

Fig. 43.

8. Konstruiere mittels des Lineals, Winkelhakens und Zirkels ein Quadrat[1])! Zeichne und miß zur Probe seine beiden **Diagonalen!**

9. Desgleichen das Netz einer dreiseitigen Ecke nach Abb. 39 und 40[2]). Füge deren zwei zu einem Würfel zusammen!

---

der Schatten des Drahtes verzeichnet und verglichen werden. Besser noch hiezu dient der geknickte Karton, wenn in den lotrechten Rand eine Öffnung geschnitten ist, durch die sich ein Sonnenbildchen auf der wagrechten Grundebene entwirft; denn diese Sonnenbildchen sind besser zu beobachten als die Schattenenden. Diese Übungen denken wir uns sehr bald nach Beginn des Geographieunterrichtes im ersten Schuljahre vom Lehrer eingeleitet und von den Schülern zu Hause nach Möglichkeit regelmäßig fortgesetzt. Es liefert dann dieser Geographieunterricht den konkreten Unterrichtsstoff, an dem die Begriffe „wagrecht" und „lotrecht" und namentlich auch der Unterschied von „lotrecht" und „senkrecht" (in Österreich senkrecht = **normal,** im Deutschen Reich meist auch senkrecht = lotrecht, was ja allerdings der Wortbildung von „senkrecht" entspricht; vgl. S. 103, Anm. 2). – Näheres über all dies im II. Bd., „Didaktik der Himmelskunde und astronomischen Geographie."

1) Hier also Anknüpfung an das Verfahren mit den zwei rechteckigen Karten nach Abb. 2, durch das wir uns in Nr. 1 zunächst durch ein nur mechanisches Verfahren Quadrate verschafft hatten. Daher jetzt auch erst nachträgliche Prüfung der damals benutzten Karten mittels des Winkelhakens; Erinnerung daran, daß auch diese Karten mittels des Winkelhakens geschnitten wurden u. dgl. mehr. Mit der eigentlichen, rein geometrischen Konstruktion des rechten Winkels aber warten wir noch bis zum nächsten Jahrgang (S. u. S. 122), da diese schon eine der Anwendungen der Symmetrie sein soll, mit der wir jenen Jahrgang beginnen lassen. Vollends die eigentliche Konstruktion eines Quadrates im streng geometrischen Sinne setzt schon den Begriff ausreichender Bestimmungsstücke, den Satz von der Winkelsumme des Vierecks u. dgl. voraus (als „Definition" wäre ja die an sich richtige Behauptung, das Quadrat habe vier gleiche Seiten und vier rechte Winkel, schon mehrfach abundant; vgl. S. 191 über die Erfordernisse eines eigentlichen „Beweises" des Pythagoreischen Satzes). – Das oben gebrauchte Wort „Diagonalen" müßte im Lehrtext natürlich irgendwie erklärt werden. Für den mündlichen Unterricht gibt es ein gutes Beispiel, wie man den Gebrauch eines Kunstausdruckes durch bloßes Hinweisen lehren kann, ohne Eingehen auf eine formgerechte Definition. Denn zu dieser würde hier gehören, daß man nicht nur die „Diagonalen" des Quadrates oder sonst eines Viereckes, sondern sogleich die der n-Ecke für $n \gtreqless 4$ definiert. (In meiner Logik, § 31 „Das Definieren von Begriffen mit gegebenem Umfange", habe ich an dem Beispiel des Begriffes „Diagonale" die bekannten Vorkommnisse geschildert, wie gut ein Schüler über den Umfang eines Begriffes im klaren sein kann, ohne dessen Inhalt so bald in eine unanfechtbare Definition fassen zu können.)

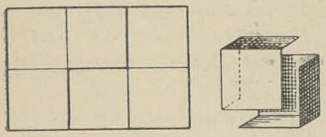


Fig. 44.

2) Während des Zeichnens der Würfelnetze, wo wegen einzelner seitlich anzusetzenden Quadrate von dem zur Verfügung stehenden Karton immer etwas unverwendet bleibt (zum Bedauern des sparsamen Schülers), mag sich die Frage

10. Desgleichen das **Netz** eines **Würfels**; klebe diesen zusammen[1])! — Desgleichen das **Netz** eines **Quaders**.

7. Schiefe Winkel. Winkelmaß und Bogenmaß. Gebrauch des Winkelmessers (Transporteurs).

Erst jetzt mag auf die Winkelteilung und im Zusammenhange mit ihr auch auf die Bogenteilung eingegangen werden, jedenfalls ohne daß man auf der Unterstufe die Schüler schon mit allgemeinen Definitionen des Winkels plagt, dessen Begriff ja, wie SCHOTTENS „Vergleichende Planimetrie“ enthüllt hat[2]), sogar in der geometrischen Wissenschaft ein ganz umstrittener ist. Natürlich wird man es an herkömmlichen Veranschaulichungen durch die Drehung der Zirkelschenkel, des Uhrzeigers usw. nicht fehlen lassen, wenn auch die Definition, der Winkel sei eine „Drehung“ oder sei „die Größe der Drehung“ und dgl. mehr, schwerlich die zutreffendste ist.

---

einstellen, wie sich ein Würfel mit möglichster Ersparung von Kartonfläche, aber auch von Klebrändern herstellen läßt. Die Antwort liegt in Fig. 44, aus der sich zwei dreiseitige Ecken ergeben. Wie deren Ränder sich aneinanderlegen, damit es wieder einen ganzen Würfel gibt, führt zu weiteren Übungen im räumlichen Auffassen der drei Dimensionen.

1) Vielfach lehrreich ist es, unter den vielen möglichen Konstruktionen von sechs zusammenhängenden Quadraten diejenigen heraussuchen zu lassen, die ein Würfelnetz geben bzw. nicht geben. Beispiele für beides in Fig. 45 durch + und — angedeutet.

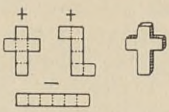


Fig. 45.

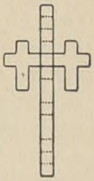


Fig. 46.

An den Anblick des gewöhnlich vorgezogenen ersten Würfelnetzes mag sich dann die weitere Aufgabe schließen, auch das Netz eines solchen plastischen Kreuzes, Fig. 46, zu entwerfen; hiebei gibt wieder Stoff zu der der Handarbeit vorauszuschickenden räumlichen Vorstellung die Entscheidung, ob für die Seitenflächen die Ränder auf der Vorder- oder auf der Hinterfläche des Kartons zu ritzen sind, damit die konkaven und konvexen Flächenwinkel herauskommen. Und dgl. mehr an Stoff zu „räumlichen Anschauungen und Handfertigkeiten.“

Ich erinnere mich, daß das Zeichnen jenes plastischen Kreuzes für mich in meinem sechsten Lebensjahr einen starken Anreiz bildete, solche Seitenansichten und Draufsichten an diesem und an anderen körperlichen Gebilden mir klar vorzustellen und auch wirklich zu zeichnen. Sollten nicht derartige Anregungen auch jetzt noch, wo wir schon in der Volksschule das „Naturzeichnen“ pflegen (vgl. III. Teil, S. 496), eine zweckmäßige Vermittlung abgeben zwischen einer solchen primitiven Betätigung künstlerischer und geometrisch wissenschaftlicher Vermögen? – Es ist doch ein Jammer, wenn man noch halberwachsene Gymnasiasten auf die Forderung, zu jenem plastischen Kreuz oder auch noch einfacheren Gebilden die seitlichen Flächen zu skizzieren, ratlos sieht, was davon rechts und nicht auch zugleich etwa links anzubringen sei. – Eine Fortsetzung solcher Klagen vgl. zu § 20, S. 206.

2) Vgl. hierzu in meiner Abhandlung „Räumliche und raumlose Geometrie“ (s. u. S. 431) die Definition „Verschiedenheit zweier Richtungen“ (nicht zu verwechseln mit dem sinnlosen „Unterschied zweier Richtungen“).

Auf alle Fälle sollten aber mit den Rechnungen über Winkel- und Bogengrößen möglichst reichliche auch über Zeitgrößen in Verbindung gesetzt werden. Daß man dabei auf die Verschiedenheit der Bedeutungen, „Winkelminute“, „Zeitminute“ usw. hinweisen wird, versteht sich von selbst, da schon am Zifferblatt einer Zeitminute sechs Winkelgrade entsprechen. Dagegen dürfte es über das Herkömmliche wohl stark hinausgehen, ist aber darum nicht minder anzustreben, daß man möglichst früh die Winkel- (scheinbaren Bogen-)Verschiebungen der Gestirne am Himmel den Schüler auf das Zeit- und Winkelmaß beziehen lehrt: anfangs in wie immer rohen Schätzungen und ganz vorläufigen Messungen, die sich dann ganz allmählich soweit verfeinern mögen, als es eben die Mittel der Schüler (z. B. ein selbstgefertigter Spiegelsextant) erlauben. Nähere Vorschläge darüber wird wieder der II. Band dieser Didaktik zu bringen haben. Es sei nur darum schon auch jetzt auf jenen unerschöpflichen Übungsstoff gerade zur Winkellehre hingewiesen, weil die manchmal beliebten Rechenaufgaben nach Winkelangaben in Minuten und Sekunden sofort als leer formalistisch empfunden werden würden, wenn man sie an den nur bis zu sehr bescheidenen Genauigkeitsgraden zu treibenden Rechnungen, die sich auf Grund der Winkelmessungen des Schülers ergeben, gemäß unserem Grundsatze der „angewandten Mathematik“ bewerten wollte.

Als ein die Jugend höchlich belustigendes Beispiel von verblüffend geringer Genauigkeit gewisser Winkelschätzungen sei hier das „Topfschlagen“ in Erinnerung gebracht (zugleich als Vorschlag, etwa einmal die einer Geometriestunde folgende Erholungspause geometrisch und dennoch vergnüglich auszufüllen). Es wird ein Stock in die Erde gesteckt, darüber ein alter Tontopf gestülpt, ein Schüler neben ihn gestellt, dann von ihm weg mit verbundenen Augen etwa zehn Schritt weit geradeaus geführt und ihm nun aufgetragen, nachdem er sich zweieinhalbmal um seine Längsachse gedreht hat, mit verbundenen Augen wieder auf den Topf loszumarschieren und durch einen tüchtigen Streich den Topf zu zerschlagen. Wenn es dann beim Zurückgehen um 90 und mehr Grad fehlt, so mögen sich an diese lustige Täuschung zwanglos Gespräche über das Irregehen in einem Wald, ja unerwartetes Zurückkehren zur Ausgangsstelle und nun erst über „die vier Hauptrichtungen des Horizontes“, die Windrose u. dgl. anschließen. Und erst hieraus wieder mag dann überhaupt die auffällige Winkelteilung (auf höheren Stufen auch ihre Geschichte, das babylonische, aus Sechser- und Zehnersystem gemischte Zählen überhaupt und sein Heraufreichen in unsere Tage u. dgl. m.) eine nun wirklich willkommene Belehrung bilden.

Im übrigen sei in Anregung gebracht, ob nicht schon vor der allgemeinen Einteilung des vollen Winkels und des Kreisumfanges in 360° die Übungen über das gleichschenklig-rechtwinklige und das gleichseitige Dreieck und im Zusammenhang damit die Begriffe des Quadranten, Sextanten und ihrer nächsten Aliquotteile anzusetzen wären, damit der Lehrgang ja nicht zu früh aus dem Konkreten ins Abstrakte und bloß Zahlenmäßige gerät.

8. Das gleichschenklig rechtwinklige Dreieck.

Daß es sich lohnt, diesem besonderen Dreiecke auch eine besondere Bearbeitung zu widmen, wird später (S. 154ff.) mit Beziehung auf die $\sqrt{2}$ (und die zahlenreichen Übungen mit dem „Kopfzerbrecher“) besprochen werden. Vorläufig genüge die Erinnerung an die verbreiteten Zusammenlegspiele, mit denen viele Kinder sich unterhalten (und an denen sie nebenbei auch auf Farben achten gelernt) hatten, um aus den dort spielend entdeckten, natürlich aber damals nicht beachteten Beziehungen schon ein recht ergiebiges Feld von Raumbeziehungen für den ersten Unterricht nutzbar zu machen.

9. Das gleichseitige Dreieck und das regelmäßige Sechseck.

1. Konstruiere je ein gleichseitiges Dreieck von der Seitenlänge 1 cm, 2 cm, 3 cm; ferner ein möglichst großes und ein möglichst kleines (wie es dein Zeichenheft und die Feinheit deines Zirkels zuläßt)!

2. Verbindet man in Abb. 19 S. 99 die Durchschnittspunkte je zweier Kreisbogen, so ergeben sich **sechs** gleichseitige Dreiecke, die zusammen ein regelmäßiges Sechseck bilden. — Überzeuge dich hiervon nochmals, indem du den Halbmesser eines beliebig großen oder kleinen Kreises an dessen Umfang wiederholt als Sehne aufträgst; du wirst finden (warum wohl?):

Der Endpunkt der **sechsten** Sehne fällt genau zusammen mit dem Anfangspunkt der ersten[1]).

1) Gesetzt, daß sich ein Schulbuch zu einer solchen empirischen Methode bequemen könnte, so würde ich doch nicht empfehlen, daß auf jenes „Warum wohl?“ im Lehrbuch auch schon die gedruckte Antwort zu finden wäre; denn diese Antwort kann ja hier, wo der Satz von der Winkelsumme des Dreiecks und der Satz, daß gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüberliegen, noch nicht allgemein entwickelt sind, auch noch nicht in endgültiger Form gegeben werden. In der mündlichen Unterweisung aber mag der Lehrer den Schülern, die durch das „Warum wohl?“ aufmerksam und neugierig gemacht worden sind, daß und was alles hier erst noch zu entdecken sei, etwa folgendes zur Erklärung an die Hand geben und aus ihnen herausfragen:

Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite gleich ist dem Halbmesser des Kreises. Schneide dieses Dreieck und noch zwei ihm völlig gleiche aus (etwa, indem du drei Papierblätter übereinanderlegst). Bezeichne an allen diesen Dreiecken die Seiten mit a, b, c, die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel mit A, B, C. Dann sind nicht nur die Seiten $a = a = a = b = b = b = c = c = c$ (wie wir es ja vorausgesetzt haben), sondern es sind auch alle Winkel $A = B = C$; in diesen Dreiecken liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber. Legen wir nun die drei Dreiecke wie in Fig. 53, 54 aneinander, so zeigt sich (derzeit nur empirisch), daß die Winkel $A + B + C = 180^0$, somit Winkel $A = B = C = 60^0$. Deshalb müssen wir sechs gleichseitige Dreiecke um den Kreismittelpunkt herumlegen, damit sie hier einen vollen Winkel bilden. Die ihnen gegenüberliegenden Dreieckseiten sind dann die Sehnen des Kreises und bilden zusammen das dem Kreis eingeschriebene regelmäßige Sechseck. In diesem sind alle Winkel einander gleich, nämlich $60^0 + 60^0 = 120^0$, alle sechs zusammen 720^0. Usw.

Abb. 41.

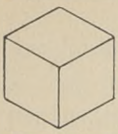


Fig. 47.

Abb. 42.

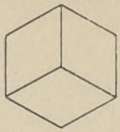


Fig. 48.

Abb. 43.

Fig. 49.

Abb. 44.

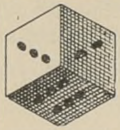


Fig. 50.

3. Zeichne in je einem regelmäßigen Sechseck drei Eckenhalbmesser nach Abb. 41 und 42!

4. Halte einen Würfel[1]) so vor dein eines Auge (während das andere verschlossen ist), daß er den Anblick von Abb. 43 zeigt! Ebenso den nach Abb. 44! — Vergleiche hiermit Abb. 3—11, S. 96!

5. Stecke mehrere gleiche Würfelchen so in die wagrechte Oberfläche feuchten Sandes, daß sie das Muster der Abb. 45 darstellen!

6. Zeichne dieses Muster auf der Papierebene nach, indem du zuerst mit Zirkel und Lineal mehrere regelmäßige Sechsecke konstruierst und nach Art der Bienenwaben (Abb. 46) aneinanderfügst und dann die nötigen Eckenhalbmesser einzeichnest[2])!

Abb. 45.

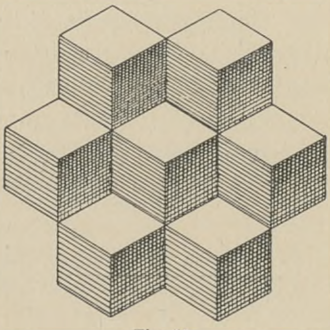


Fig. 51.

Abb. 46.

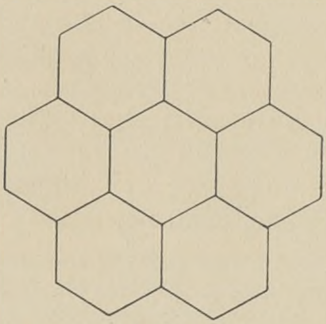


Fig. 52.

1) Als die Absicht der letzten Übungen erkennt der Leser die im buchstäblichen Sinne vielseitige „Anschauung" des Würfels, mit der wir in Nr. 1 begonnen hatten. – Es braucht nicht neuerdings versichert zu werden, daß die Absicht des oben skizzierten Lehrganges keineswegs ist, ihn gerade in dieser Auswahl einzelner Übungen gehen zu lassen; unzählige andere Lehrgänge mögen zum selben Ziele führen. Wohl aber darf betont werden, daß solche Übungen, wie die zuletzt vorgeschlagenen, wohl selten schon in einem ersten Jahrgang versucht wurden; ob darum, weil sie als zu schwierig für Anfänger im geometrischen Anschauen schon erkannt sind, oder weil man an sie eben noch nicht gedacht hat, muß dahingestellt bleiben. Möchte man aber wenigstens in grundsätzliche Erwägung ziehen, ob die Langweiligkeit vieler in der propädeutischen Geometrie hergebrachter Übungen sich deren Verwirklichung nicht mindestens ebenso erschwerend in den Weg stellt wie die manuellen und visuellen Schwierigkeiten, die wir dem Schüler auch schon im Anfange der Weiterbildung seiner Raumanschauung nicht ersparen können und wollen.

2) In Übung 6 folgt die planimetrische Wiedergabe dem räumlichen Auffassen und Betätigen, das die Übung 5 gefordert hatte. – In Übung 4 war umgekehrt die räumliche Ausdeutung dem planimetrischen Bild der Übung 3 gefolgt. – Die Übungen 3–6 halten den Schüler bei der anfänglich höchst überraschenden Tatsache fest, daß ein so vermeintlich nur „viereckiges" Ding,

7. Warum lassen sich um eine Münze sechs gleiche Münzen (unter Berührung von je drei) herumlegen? — Vgl. S. 192, Anm.

10. Die Winkelsumme des Dreiecks.

a) Im rechtwinkligen Dreieck.

1. Zeichne je ein Quadrat und mehrere Rechtecke (mit annähernd gleichen, mit stark verschiedenen Seiten) und zerlege sie durch je eine **Diagonale** in je zwei Dreiecke! Da[1]) jedes dieser Vierecke vier rechte Winkel enthält, also die Winkelsumme 4 R hat, so ist in jedem rechtwinkligen Dreieck die Winkelsumme gleich $1\,G = 2R = 180^0$.

2. Zeige, daß im gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck jeder der beiden spitzen Winkel $\frac{1}{2}R = 45^0$ beträgt!

3. Zeichne rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten

$$a = 1 \text{ cm}, \quad b = 1 \text{ cm}, 2 \text{ cm}, 3 \text{ cm}, 4 \text{ cm} \cdots$$

$$a = 2 \text{ cm}, \quad b = 3 \text{ cm}, 5 \text{ cm}, 7 \text{ cm usw.},$$

miß bei jedem mittels des Transporteurs die beiden spitzen Winkel und rechne ihre Summe aus! – In jedem rechtwinkligen Dreieck ist ein spitzer Winkel **komplementär** zu dem andern, d. h. er ergänzt ihn zu einem Rechten.

4. Zeige, daß, wenn der eine spitze Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks zunimmt, der andere um ebensoviel abnimmt!

Weitere derartige Übungen!

b) Im gleichseitigen Dreieck.

5. Zeichne ein regelmäßiges Sechseck und zerlege es durch drei Eckendurchmesser in sechs gleichseitige Dreiecke! Da in diesen auch alle Winkel einander gleich sind und deren sechs um den Mittelpunkt herum einen vollen Winkel ausmachen, so ist in jedem gleichseitigen Dreieck die Winkelsumme gleich $1\,G = 2R = 180^0$.

---

wie der Würfel, doch gar viel mit regelmäßigen Drei- und Sechsecken zu tun habe. (Vgl. in „Hundert psychologische Schulversuche“ von HÖFLER und WITASEK, III. Aufl. Johann Ambrosius BARTH 1909, Nr. 42 die psychologische Analyse des Unanschaulichen und der Veranschaulichung bei der Aufgabe: In einen Würfel einen Schnitt von der Gestalt eines regelmäßigen Sechseckes zu legen“. – Ferner HÖFLER, Psychologie, § 45, die räumliche Inversion des Musters nach Abb. 45.)

1) Das will natürlich kein strenger Beweis sein, denn dazu gehörte vorher u. a. der Beweis, daß die zwei Dreiecke einander kongruent seien. – Der Lehrer mag aber irgendwie sondieren, ob dem Schüler an der Tatsache der völligen Gleichheit, also auch der Winkelgleichheit der beiden Dreiecke, irgendwelche Zweifel ankommen; wenn gar nicht, so ist es selber ein Beweis dafür, daß das eigentliche Beweisen auf dieser Stufe noch verfrüht wäre. – Ähnliches gilt von mehreren der im folgenden verbleibenden Beweislücken.

6. Zeige, daß je ein Winkel im gleichseitigen Dreieck 60^0 ist!

7. Zeige, daß an einem Winkeldreieck wie in Abb. 35 der eine Winkel 60^0, der andere Winkel 30^0 ist! — Weitere derartige Übungen.

c) In beliebigen Dreiecken.

8. Zeichne auf einem Bogen Papier sehr verschiedene Dreiecke (kleine, große; solche mit annähernd gleichen, solche mit sehr verschiedenen Seiten; solche mit sehr spitzen und solche mit sehr stumpfen Winkeln)! Lege diesen Papierbogen auf zwei andere[1]) und schneide die Dreiecke aus, so daß du von jeder Art Dreiecke drei Stück gleiche erhältst! Bezeichne an jedem die übereinstimmenden Winkel mit A, B und C und lege sie dann so aneinander, daß diese drei Winkel den Scheitel gemeinsam haben und je zwei Schenkel aneinander liegen (Abb. 47, 48)! Zeige mittels Lineals, daß überall der erste und letzte Schenkel in eine Gerade zu liegen kommt! Also nicht nur im rechtwinkligen und im gleichseitigen, sondern **in jedem Dreieck ist die Winkelsumme gleich 1 G = 2 R = 180⁰.**

Abb. 47.

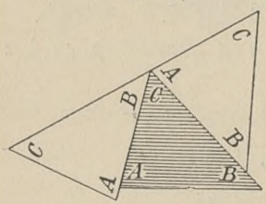


Fig. 53.

Abb. 48.

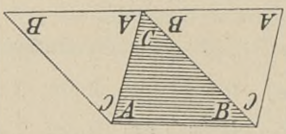


Fig. 54.

11. Einteilungen der Dreiecke.

Erst jetzt, nach dem Satz von der Winkelsumme, läßt sich die Einteilung der Dreiecke in spitz-, recht- und stumpfwinklige begründen. Die andere in gleichseitige, gleichschenklige und ungleichseitige faßt zusammen, was uns in seinen einzelnen Gliedern, ausgehend vom gleichseitigen Dreieck, schon wiederholt entgegengetreten war. Dann auch die Kombination beider Einteilungen und die Begründung, warum von den neun Einteilungsgliedern zwei (die gleichseitig rechtwinkligen und stumpfwinkligen) unmöglich sind. – Keineswegs wird der Unterricht auf den untersten Stufen in solchen Übungen vorwiegend formallogischen Charakters, wie es diese Einteilungen sind, seine Hauptstärke suchen; nur sind Konfusionen gegen die Logik, z. B. ein Sprung aus der Einteilung nach dem Seiten- in die nach dem Winkelverhältnis, doch auch schon auf der untersten Stufe natürlich nicht zu dulden. Aber diese Pflege des Logischen ist eben noch immer eine andere als die des vorzeitigen Definierens und Beweisens, von der wir überall abraten.

1) Neben oder nach dieser Übung mit je drei Dreiecken auch Abreißen der drei Eckzipfel eines Dreieckes und Nebeneinanderlegen längs der Linealkante u. dgl. m.

12. Parallele Gerade.

Es wird nach dem bisherigen Lehrgang nicht mehr befremden, daß wir den Begriff der Parallelen erst nach dem Satze von der Winkelsumme des Dreiecks vorgebracht wissen wollen; wenn auch sonst fast immer dieser Satz aus der Gleichheit der Wechsel- oder Gegenwinkel bewiesen wird, nachdem diese Begriffe und Termini (zusammen mit dem „Anwinkel“) aufs breiteste eingeübt worden sind. Gerade vom Standpunkt der wirklich wissenschaftlichen Geometrie aber, in diese dann auch die Nichteuklidische mit einbezogen, muß ja jedem Lehrer und Lehrbuchverfasser klar sein, daß der eine Satz ein logisches Äquivalent des andern ist. Dabei bleibt immer noch richtig, daß das sogenannte 11. Euklidische Axiom (oder richtiger das 5. Postulat) eine abstraktere und allgemeinere Formulierung aufweist als der Dreieckssatz. Eben das aber spricht dafür, diesen Dreieckssatz als den konkreteren wenigstens im ersten Vorunterricht voranzustellen und erst aus ihm die Verallgemeinerung für die zwei von einer Transversalen geschnittenen Parallelen für den Anfänger abzuleiten. So kann z. B. der Umstand, daß in der behufs Findens der Winkelsumme angelegten Figur, Abb. 48, sich eine zur Grundlinie parallele Gerade einstellt, eine Überleitung zur Lehre von den Parallelen überhaupt abgeben.

Da wir hiermit an die Gebiete gerührt haben, die, eben weil sie die Prinzipien betreffen, dem Unterricht nicht ein Erstes, sondern ein Letztes sein müssen, so kommen wir auf sie erst in der Besprechung der Mittelstufe (S. 193) und des obersten Jahrganges (S. 369) wieder zurück. Hier, wo es sich um die Zubereitung der für die Zehnjährigen schmackhaftesten und nahrhaftesten Kost handelt, beschränken wir uns insbesondere noch auf den dringenden Rat, den Kindern nicht die ganze Geometrie zu verekeln durch das gedankenlose Häufen von Terminis[1]) für den „Anwinkel“, „Gegenwinkel“, „Wechselwinkel“ (wobei dann der vierte Winkel den Namen „Winkel ohne Namen“ bekommen müßte, wenn nicht künstliche Unvollständigkeit und Systemlosigkeit das Kind noch vollends konfus machen soll). Es ist ja richtig, man kann mit einem sehr geringen Aufwand von pädagogischer Erfindungskraft angeben: Winkel $\alpha = 73^0\ 19'\ 54{,}2''$ und dann die Größen der sieben anderen Winkel hinmalen lassen; und auch dem Schüler macht das bei weitem weniger Kopfzerbrechen als Schreiberei, da er ja doch außer diesem Winkel nur noch sein Supplement auszurechnen und dann viermal, die gegebene Winkelgröße noch dreimal hinzuzuschreiben hat. Will man nichts anderes, als die Schüler zu Hause für soundsoviel Minuten oder Stunden an den Schreibtisch fesseln, so mag ja solcher Zeitverderb seinen Zweck voll-

1) Zur Beruhigung zaghafter Gemüter verrate ich hier, daß Geheimrat Felix Klein einmal erklärte, er kenne diese Termini nicht!

ständig erfüllen; nur den, die Jugend in den Bannkreis geometrischen Anschauens und künftigen geometrischen Denkens zu zwingen, erreicht man auf solche Weise nicht nur nicht, sondern lähmt jede natürliche Lust zur Sache. — Nicht als ob die Anwinkel, Gegenwinkel, Wechselwinkel zusammen mit den Nebenwinkeln, Scheitelwinkeln und wie sie sonst noch alle heißen, das einzige Mittel wären, den geometrischen Sinn zu ertöten, aber sie sind eines der frühest wirksamen und meistkultivierten, weshalb dieses Wort des Unmutes gerade hier am Platze sein mag.

13. Parallele und nichtparallele Ebenen.

Eine solche Ausdehnung der Anschauung des Parallelseins von den Geraden auf die Ebene tritt wieder über die herkömmliche Beschränkung auf Planimetrisches stark heraus. Offenbar liegt es aber dem Kinde nicht ferner, dem Parallelsein zweier gegenüberliegender Zimmerwände seine Aufmerksamkeit zuzuwenden, als dem Parallelsein z. B. zweier Zimmerkanten. Es mündet dann die Betrachtung wieder ein in die Anschauungen an Würfel und Quader, mit denen der Unterricht des Jahrganges begonnen hat.

Aber wir schlagen vor, auch von nichtparallelen Ebenen und damit vom Flächenwinkel (Keil) zu reden; und dies mag manchem doch schon viel zu schwierig für Zehn- und Elfjährige scheinen. Wenn man nur nicht im Geographieunterricht eben dieses und noch viel Schwierigeres voraussetzte; denn die Meridianebenen[1]) der Erdkugel bilden ja ein solches Fächerwerk von nichtparallelen Ebenen. Gleichviel dann, ob man nach dem Kopernikanischen System (das uns für diese Stufe verfrüht scheint) oder nach der naiven Vorstellung vom Auf- und Untergehen der Sonne, vom Eintritt der Sonne in die Meridianebene reden will: dem Schüler müssen die von der Erdachse aus wie die Blätter eines halbaufgeschlagenen Buches sich auseinanderfaltenden Ebenen eine geläufige Anschauung sein.

Auch wie der Flächenwinkel durch einen ebenen Winkel gemessen wird, ist dem Schüler schon auf dieser Stufe nicht zu schwierig. Das Aufblättern eines Buches und die Winkel, die dabei die Ränder je zweier Blätter bilden, und ähnliche Anschauungsbehelfe machen es entbehrlich, etwa gleich mit der strengen Definition der „zwei in einem Punkte der Kante auf diese errichteten und in die Schenkelebenen fallenden Normalen“ zu beginnen. Das wäre freilich für die Zehnjährigen noch unverdaulich. Gleichwohl läßt sich, wenn die Anschauung von Flächenwinkeln, die kleiner und größer als ein Rechter sind,

1) Freilich glaubt sich der Geographieunterricht mit den bloßen Meridianlinien begnügen zu können; warum dies aber unzureichend ist und zu allerlei sachlichen und didaktischen Unzukömmlichkeiten führt, wird im II. Band dieser didaktischen Handbücher zu erörtern sein.

schon anderweitig (z. B. am geraden drei- und sechsseitigen Prisma) erworben ist und festsitzt, immerhin jene begriffliche Zuschärfung anbahnen durch Paradoxa wie die folgenden: „Ich klappe das Buch zu einem rechten Winkel auf. Kann mir jemand den spitzen Winkel seines Winkeldreieckes (oder Zirkels) so in den Flächenwinkel hineinpassen, daß beide Schenkel, trotzdem sie einen spitzen Winkel einschließen, doch in die aufeinander senkrecht stehenden Ebenen zu liegen kommen?“ Und in der Art, wie der Schüler geschickt oder ungeschickt das Dreieck hineinzupassen versucht, erkennt der Lehrer, wie weit es mit der Beweglichkeit der Raumphantasie schon gediehen ist, und wird danach die Forderungen inner- wie außerhalb des geometrischen Anschauungsunterrichtes abstufen. — Dann die analoge Übung mit einem stumpfen Winkel, der in den rechten Keil

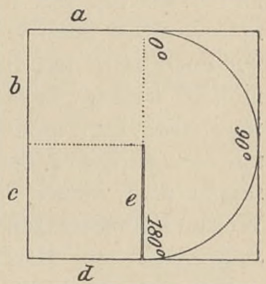


Fig. 55.

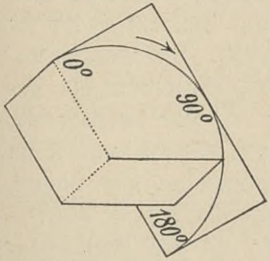


Fig. 56.

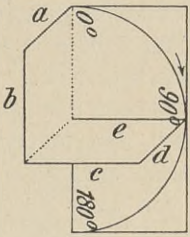


Fig. 57.

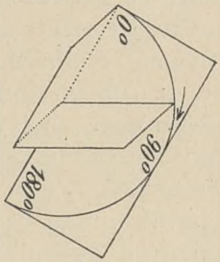


Fig. 58.

hineinzupassen ist; ebenso mit dem rechten Winkel, der in einen stumpfen und in einen spitzen Flächenwinkel paßt. Will man sich aber auf einfachere Übungen beschränken, so lasse man an dem Modell (Abb. 42, 43, S. 106) des halben Würfelnetzes zwei der Quadrate zusammen- und auseinanderklappen und verfolge, was für Winkel auf dem dritten Quadrate sich dabei abzeichnen; oder man lasse statt dieses dritten Quadrates das ganze Doppelquadrat stehen, zeichne darin den Halbkreis und lasse an ihm den Rand des losen Quadrates schleifen (Fig. 55—58). Solches kommt dann freilich schon der Grundrißebene und der Aufrißebene der „darstellenden Geometrie“ nahe. Aber sollte darum diese Anschauung, wenn sie den Kindern unter den Händen hervorwächst, fernliegen, weil sich künftig einmal viel schwierige Aufgaben über jenen Anschauungen aufbauen? Es sei daher gestattet, zu einer Besinnung über das in dieser Hinsicht pädagogisch Mögliche und Wünschenswerte anzuregen in Form einer bloßen

Frage: Könnte und sollte man nicht schon vom ersten Jahrgange an die Kinder einfachste Körperformen (Würfel, Kugel, gleichseitigen Zylinder) in einfachste Stellungen zur Zeichenebene bringen und auf diese projizieren lehren?

Die erste Antwort wird natürlich ein erschrockenes Nein sein; denn haben wir bis jetzt jede Spur von darstellender Geometrie den Gymnasien selbst noch im obersten Jahr fernzuhalten gewußt, so werden wir doch nicht jetzt plötzlich schon im ersten Jahr „darstellende Geometrie" treiben wollen! Von Projizieren war im Geometrieunterricht frühestens bei Vierzehnjährigen die Rede, und jetzt soll man darüber mit Zehnjährigen reden?! — Aber gemach: schon in diesen Einwänden zeigen sich wieder die Mißverständnisse. Statt sie und ähnliche in Worten zu widerlegen, sei lieber die Anregung noch etwas ins Konkrete ausgestaltet und der Erwägung unterbreitet:

Wir geben dem Schüler drei Brettchen[1]) in die Hand (oder in Ermangelung solcher kann er sich selbst drei Pappendeckel anfertigen und an ihnen das ausführen, was im folgenden der Einfachheit halber unter Voraussetzung der Brettchen geschildert wird). Sie werden zusammengesteckt zu der (dem Schüler schon vom Würfelnetz her geläufigen) dreiseitig rechtwinkligen Ecke. Ferner hat der Schüler die drei genannten Körper in der Hand, nämlich: 1. einen Würfel von 2 cm Kantenlänge und drei durch den Mittelpunkt gehenden Bohrungen, parallel zu den Kanten (allenfalls auch einer Bohrung längs iener Würfeldiagonale); 2. eine Kugel von 2 cm Durchmesser mit drei zueinander normalen, durch den Mittelpunkt gehenden Bohrungen; 3. einen gleichseitigen Zylinder von 2 cm Durchmesser mit einer axialen und zwei zu ihr normal durch den Mittelpunkt gehenden Bohrungen (allenfalls auch einer Bohrung längs der Diagonale eines Achsenschnittes). Der Lehrer hat drei ebensolche Körper in fünf- oder zehnfacher Größe und die entsprechend großen drei zur körperlichen Ecke zusammenzustellenden Bretter oder Pappendeckel auf seinem Tisch. Nun stellt er zuerst die Kugel so, daß ihr Mittelpunkt von der Ebene I z. B. 8 dm, von II 4 dm, von III 6 dm Abstand hat, und zeichnet auf die drei Ebenen die die Projektion darstellenden Kreise. Ebensolche Kreise zeichnet dann der Schüler auf seine Brettchen und stellt nun (mittels Holzdraht, an dem allenfalls noch Zentimetermarken angebracht sind)

---

1) Auf meine Anregung bringt der Erfinder des sehr weitverbreiteten Spieles „Matador" (vgl. S. 103, das reichliche Gelegenheit zur räumlichen Anschauungs- und Handfertigkeitsübung an beweglichen Gebilden gibt) je drei solche Brettchen von je 1 dm $\times$ 1 dm (zwei mit Scharnieren verbunden, das dritte zum Dranstecken) samt den drei Körpern Kugel, Würfel, Zylinder und dem nötigen mit Zentimetermarken versehenen Holzdraht zum Einstecken in die Bohrungen der Brettchen in Handel. (Samt den drei Körpern nebst Holzdraht Preis 1 K.)

die Kugel so wie die des Lehrers. Sodann die gleiche Übung mit dem Würfel, wo sich drei Quadrate ergeben. Sodann jetzt die Übungen mit dem Zylinder, wo je ein Kreis und zwei Quadrate auftreten; je nachdem die Zylinderachse lotrecht oder wagrecht (normal zu II oder zu III) gerichtet ist, entsteht der Kreis auf I bzw. II oder III (Figg. 59–61). Man sieht ohne weiteres, was alles sich mit diesen einfachen Lehrmitteln an Übungen von leichtesten (mit der Kugel) bis zu schwierigeren (z. B. Würfel und Zylinder in Diagonalstellungen) durchführen ließe. Grundsätzlich gliedern sich die Übungen in zwei Reihen: a) Gegeben die Stellung des Körpers, zu zeichnen die drei Projektionen. b) Umgekehrt. Worin sich aber diese Übungen während des ersten Jahrgangs – und bei passenden Gelegenheiten fortzusetzen auch während der übrigen Jahrgänge bis zur offiziellen darstellenden Geometrie neben der Stereometrie des fünften Jahrgangs – von dieser wesentlich zu unterscheiden

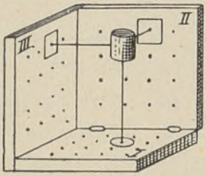


Fig. 59.

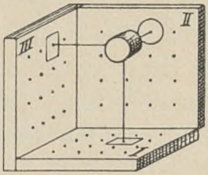


Fig. 60.

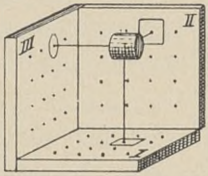


Fig. 61.

hätten, ist dies: Der Lehrer hätte zu beachten, inwieweit die Kinder mit den ihnen in die *Hand* gegebenen drei wirklichen Körpern auch wirklich umzugehen, d. h. ob sie, wenn z. B. bei den Übungen b) zuerst die drei Kreise, dann die drei Quadrate vom Lehrer auf den drei Ebenen vorgezeichnet sind, wirklich die Kugel bzw. den Würfel in die verlangte Lage zu bringen und mit dem Holzdraht festzustecken wissen. Es wird zum mindesten nicht geleugnet werden, daß für den Lehrer kaum ein besseres diagnostisches Hilfsmittel zur Beurteilung, wie geschickt oder ungeschickt seine Zöglinge mit dem räumlichen Ausdeuten gegebener Ebenenzeichnungen sind, auszudenken sein möchte, als eben diese manuellen Übungen im Aufstellen gegebener einfachster Körper gemäß gegebenen Zeichnungen.

Und wer sich im ersten Augenblick skandalisiert über die Zumutung an einen künftigen geometrischen Anschauungsunterricht, schon zehnjährige Knaben geometrisch „*projizieren*“, bzw. gegebene „*Projektionen*“ räumlich ausdeuten zu lassen, der denke doch gefälligst über die Scheuklappen des traditionellen Planimetrieunterrichts hinaus an den gleichzeitigen Geographieunterricht, wo von jeher mit größter Kaltblütigkeit beim Kartenlesen die Ausdeutung der Schichtenlinien, Schraffen usw. ins Räumliche verlangt worden ist – also das Schließen von der Projektion auf das dreidimensionale Gebilde, z. B. einen Berg.

Aber freilich, die volle Sorglosigkeit, mit der sich der hergebrachte Geometrieunterricht um diesen Geographieunterricht beinahe grundsätzlich nicht gekümmert hatte, war ja von diesem schmerzlich gefühlt worden[1]), wogegen wir uns auf ein ebenso lebhaft entgegenkommendes Bedürfnis von seiten des Geometrieunterrichts keineswegs schon wie auf eine gegebene Größe stützen, sondern es eben bei jener ganz bescheidenen – Frage bewenden lassen wollen. Fällt die Antwort auf diese Anfrage sogar bei sonst reformlustigen Fachgenossen der Mehrzahl nach verneinend aus, so wolle man für die hiermit gewagte Anregung nicht auch die übrigen Anregungen zu einer Reform unserer allerersten „Vorschule der Raumlehre" entgelten lassen.

§ 14. Weiteres zum Geometrieunterricht der untersten zwei Jahrgänge.

Durch die vorstehend skizzierten geometrischen Anschauungs- und Handfertigkeitsübungen dürfte das erste Schuljahr mit geometrisch-propädeutischem Stoff ausreichend versehen sein. Denn so klein dieser Stoff scheinen mag, füllt er die zur Verfügung stehende Zeit sicher mehr als hinreichend aus, wenn nur die verlangten Übungen auch wirklich und so vielseitig, als es eben die Zeit erlaubt, durchgeführt werden. Als die wünschenswerte Unterrichtszeit für diese ersten Übungen der Raumlehre denken wir uns etwa die Hälfte der Mathematikstunden durch das ganze erste Schuljahr (ausgenommen die ersten paar Wochen, damit man den Schüler rasch und unzerstreut in die Rechenübungen hineinkommen lasse). Erst im zweiten Halbjahr oder gar erst im zweiten oder dritten Schuljahr zu beginnen, wäre ein unnötiges Verzögern dieses echten „Anschauungsunterrichtes", in welchem ja eben nicht mehr „die Geometrie" infolge unkindlicher Gelehrsamkeit ein Gegenstand neuen Schreckens ist, wie es ja früher, in den Zeiten der fünfstelligen Bruchnenner u. dgl. auch die Arithmetik gewesen war. – Dabei wollen wir uns nicht verhehlen, daß es mit den „Messungen im Gelände", die ja

1) So klagten bei uns längst die Lehrer der Geographie darüber, daß sie in der ersten Klasse einen nicht geringen Teil ihrer Zeit darauf verwenden mußten, den Schülern zum erstenmal beizubringen, was ein Bogen- und ein Winkelgrad, ein rechter Winkel, was wagrecht, was lotrecht sei usw. Natürlich, all das kommt (oder kam) ja in der Geographie schon in den ersten Wochen des ersten Schuljahres vor, im Geometrieunterricht aber erst im Sommersemester. Das wird nun durch die neuen Lehrpläne bei uns in Österreich endlich anders. Ob es anderswo besser war, ist und wird, wage ich allgemein nicht zu beurteilen.

an sich allein schon nicht nur so manche Unterrichtsstunde, sondern auch einen Teil des Unterrichtes im Freien (und das heißt manche Freistunde) in Anspruch nehmen werden, einstweilen noch alle Schwierigkeiten hat, an denen der vielgerühmte „Unterricht im Freien" für die meisten Schulen bisher noch immer gescheitert ist. Dennoch kann auf die Forderung nicht verzichtet, es kann vielmehr nur gehofft werden, daß von der endlichen Verwirklichung des „Unterrichtes im Freien" ebenso die „Geometrie" wie die „Geographie" eine Rechtfertigung ihres uralten Namens auch in den Augen des Schülers erfahre. So wenig heute der wissenschaftliche Begriff der Geometrie noch mit einer „Erdmeßkunst" zu tun hat, so sehr bleiben Anfänge der historischen Entwicklung[1]), an die der Name Geometrie heute noch erinnert, für die Schule hier ebenso vorbildlich, wie es für den Anfangsunterricht der Physik usw. gegenwärtig schon allgemein zugegeben ist; freilich leider auch hier einstweilen noch mehr in der Theorie als schon in der Praxis. –

Der Lehrstoff des zweiten Jahrganges mag sich von dem des ersten immerhin schon dadurch abheben und ein wenig über ihn erheben, daß nicht wie hier der manuelle Gebrauch von Zirkel, Lineal, Transporteur usw. im Vordergrunde steht, sondern sozusagen die Handhabung umfassender geometrischer Anschauungen und Begriffe, wie Symmetrie, Kongruenz u. dgl.

Absichtlich stellen wir die Symmetrie vor die Kongruenz; denn erstere hat die starke Anschaulichkeit für sich, während wir die „Kongruenz" überhaupt mehr als Schlagwort für den Lehrer anführen, wogegen dem Schüler vor allem der Begriff des **Eindeutigbestimmten** durch wirkliches Konstruieren nahezubringen ist; worüber unten (S. 124 ff.) mehr.

Zum Lob der Symmetrie[2]) im ersten Unterricht braucht nichts

---

1) Vgl. u. a. WEBER-WELLSTEIN II, S. 5 ff. (2. Aufl.).

2) Wie früh sich eine Anschauung von Symmetrie einstellen kann, habe ich zu meinem Erstaunen an meinem jüngsten Söhnchen erlebt. Der kleine Kerl war eben erst zwei Jahre alt, als er auf eine Warze zeigte, die ich auf der rechten Wange habe, und er sagte: „Da Wehweh." Dann zeigte und berührte er mit dem Finger die genau symmetrisch zugeordnete Stelle der linken Wange und sagte: „Da nicht Wehweh." Die „Anschauung" von Symmetrie also hatte der Knirps, aber sicher keinen „Begriff" von dem, was er sagte und zeigte. Die gute alte Schulgeometrie aber würde es natürlich ablehnen, diese Anschauung (und die mit ihr richtig verbundene Bewegung des Fingerleins – also auch schon eine richtige „Handfertigkeit") irgendwie als Anknüpfung für einen künftigen Unterricht auszunutzen, denn hier müßte

mehr gesagt zu werden, seitdem dieser die Scheu abgelegt hat, sich dieses Begriffes sozusagen aus freier Hand zu bedienen, d. h. wirklich ihn unmittelbar aus der Anschauung z. B. eines gleichschenkligen Dreieckes zum Schüler sprechen zu lassen, ohne ihn vorher ausdrücklich oder versteckt doch wieder erst auf das Folterbrett der Kongruenz zu spannen und zu anatomisieren. – Nur um zu zeigen, daß wir aber mit dem Rat, die Symmetrie sozusagen als eine lebendige und belebende Anschauungstatsache wirken zu lassen, keineswegs das schrittweise Analysieren dieser Tatsache und das Fortschreiten von der Anschauung symmetrischer Gebilde zu dem Begriff symmetrisch zugeordneter Punkte opfern, skizzieren wir hier kurz einen Lehrgang dieses ersten geometrischen Kapitels des zweiten Jahrganges:

Der Schüler wird vor allem aufmerksam gemacht, wie viele Möbelstücke, Verzierungen des Schulzimmers u. dgl. „symmetrisch" sind, und wie verhältnismäßig wenige es nicht sind. Vor allem wir selber, unsere Leiber sind es, und der erste geometrische Begriff, den wir in diese Anschauungen hineintragen müssen, damit er sie uns gedanklich faßbar macht, nämlich der der **Symmetrieebene**, mag drastisch eingeprägt werden durch die vom Schwertstreich des schwäbischen Ritters konstruierte Schnittebene:

„Zur Rechten sieht man wie zur Linken
Einen halben Türken heruntersinken."

Die hierdurch erzielte heitere Stimmung erlaubt es, auch den Schüler-

---

dieser ja zuerst eine Definition geben: Unter symmetrisch zugeordneten Punkten versteht man..., unter Symmetrieebene versteht man usw. Daß aber das Kind, indem es den zu einem Punkte der rechten Wange symmetrisch zugeordneten Punkt der linken Wange wie auf einen angeborenen Impuls hin mit voller visueller und manueller Sicherheit erfaßte, dabei nicht an die Medianebene seines Papas gedacht habe und also auch nicht an Symmetrieebene und symmetrische Zuordnung, dürfte sich bei einiger psychologischer Divination wohl sicher behaupten lassen. Nicht nur den Raum-Psychologen, sondern auch den Geometrielehrer mag also die kleine Beobachtung aufmerksam machen, daß die Anschauung von Symmetrie das Primäre, der in diese Anschauung hineingetragene logisch-geometrische Apparat von Symmetralen, Symmetrieebenen, symmetrisch zugeordneten Punkten usw. das durchaus Sekundäre ist. – Das im obigen Texte – der den Lehrgang natürlich nur in der Sprache für den Lehrer, nicht in der des Lehrers für den Schüler skizziert – etwas ausführlicher über Symmetrie Gesagte mag zugleich als eine Aufforderung gelten, auch den übrigen Leitbegriffen der Geometrie, so nahe als möglich der psychologischen Abfolge, in der die Raumvorstellungen des Schülers aufkeimen und sich festigen, mit Aufmerksamkeit und liebevoller Mühe nachzugehen; worüber einiges Theoretische im III. Teil, § 48, S. 439 ff.

ausspruch nach den „Fliegenden Blättern" zu würdigen: „Alle Säugetiere sind symmetrisch, nur nicht das Schwein, denn dieses hat einen spiraligen (genauer: schraubenförmigen) Schwanz." Übrigens pflegen bekanntlich auch die Hunde ihre Schweife selten in Symmetrieebene zu halten. Auch Vögel, Insekten usw. sind symmetrisch, ferner die meisten Fische, nicht aber z. B. die Schollen. – Nun sehen wir uns noch einmal Lebloses an und lassen an den vorhererwähnten Gebrauchsgegenständen durch eine dem Schwertstreich ähnliche Armbewegung die Symmetrieebene angeben (treffen es alle Schüler, so kostet's nicht viel Zeit – und träfen es auch nur einige nicht, wie hätte man dann bei ihnen für das gelehrte Zeug von „Symmetrieachse" u. dgl. auf verständnisvolles Entgegenkommen rechnen sollen?).

Erst nach dieser Anschauung von Symmetrie im Räumlichen nun auch die in der Ebene. Das drastische Ausgangsbeispiel ist bekanntlich das tintenbeklexte Papier, das zusammengefaltet aus der Unform eine jederzeit gefällige Form macht. Instinktiv halten wir beim Anschauen dieses Blattes die Knickkante, die wir jetzt **Symmetrieachse** taufen, in die Symmetrieebene unseres Kopfes, weil uns nur so die zu dieser Ebene symmetrisch gelegenen Augen[1]) den ungeschmälerten und unmittelbaren Eindruck jener Symmetrie geben.

1) Mach, „Analyse der Empfindungen" (I. Aufl. 1886, S. 48) hebt hervor, „daß der ganze Augenapparat, und insbesondere der motorische Apparat, in bezug auf die Medianebene des Kopfes symmetrisch ist. Dementsprechend werden auch die symmetrischen Blickbewegungen gleiche oder doch fast gleiche Raumempfindungen bedingen. Kinder verwechseln fortwährend die Buchstaben b und d, ebenso p und q. Auch Erwachsene merken eine Umkehrung von rechts nach links nicht leicht, wenn nicht besondere sinnliche oder intellektuelle Anhaltspunkle dieselbe verhindern. Der motorische Apparat der Augen ist von sehr vollkommener Symmetrie. Für sich allein würde die gleiche Erregung seiner symmetrischen Organe die Unterscheidung von rechts und links kaum ermöglichen. Allein der ganze Menschenleib, und insbesondere das Hirn, ist mit einer geringen Asymmetrie behaftet, welche z. B. dazu führt, die eine (gewöhnlich die rechte) Hand bei motorischen Funktionen zu bevorzugen. Dies führt wieder zu einer weiteren und besseren Entwicklung der rechtsseitigen motorischen Funktionen und zu einer Modifikation der zugehörigen Empfindungen. Haben sich einmal beim Schreiben die Raumempfindungen des Auges mit den motorischen Empfindungen der rechten Hand verknüpft, so tritt eine Verwechslung jener vertikal-symmetrischen Gestalten, auf welche sich die Schreibfertigkeit und Schreibgewohnheit erstreckt, nicht mehr ein. Diese Verknüpfung kann sogar so stark werden, daß die Erinnerungen nur in den gewohnten Bahnen ablaufen, und daß man z. B. Spiegelschrift nur mit der größten Schwierigkeit liest. Die Verwechslung von rechts und links kommt aber immer noch vor in bezug auf Gestalten, die ein rein optisches (z. B. ornamentales), kein motorisches Interesse haben." Es sei auf diese physiologischen Erklärungen der psychologischen Unmittelbarkeit im Auffassen von Symmetrie-Verhältnissen sogleich hier hingewiesen, weil sie sehr geeignet sind, auch den Lehrer der Geometrie nachdrücklich aufmerksam zu machen, wieviel hier für die pädagogische Beobachtung zu holen

Zum Begriffe zweier in bezug auf eine Symmetrieachse symmetrisch zugeordneter Punkte gelangen wir (nicht etwa durch bloße „Definition", sondern) etwa durch folgendes Verfahren: Wir knicken nun zuerst das Papierblatt und spritzen dann die Feder so dagegen aus, daß viele möglichst kleine Tintenklexe entstehen; sofort „sehen" wir, welches der jedem Tintenpunkte der einen Hälfte symmetrisch zugeordnete der anderen Hälfte ist. Darauf verbinden wir mit dem Lineal je zwei dieser Punkte (und zwar recht viele Paare) und überzeugen uns mittels des Winkelhakens, daß alle Winkel zwischen jenen Verbindungsstrecken und der Knickkante oder Symmetrieachse rechte Winkel sind. Und auch jetzt „geben" wir noch immer keine Definition von symmetrischer Zuordnung zweier Punkte, sondern lassen die Schüler sich daran versuchen, das, was sie hier gesehen und gemacht haben, in Worte zu fassen, wobei schließlich mehr oder weniger glatt herauskommt: Zwei Punkte einer Ebene heißen in bezug auf eine Gerade dieser Ebene, die Symmetrieachse, symmetrisch zugeordnet, wenn die Verbindungsstrecke der zwei Punkte auf jener Achse normal ist und durch sie halbiert wird.

So — aber auch erst jetzt — stehen wir unmittelbar vor dem Begriffe der **Streckensymmetrale.** Um von hier zu den elementaren Konstruktionen: Halbieren einer Strecke, eines Winkels, Errichten einer Normale usw. zu gelangen, sollte nun freilich logischerweise zuerst der Satz vom gleichschenkligen Dreiecke entwickelt sein, und es bleibe dem Geschmack des Lehrers überlassen, ob er dies sogleich in mehr theoretischer Weise als im Bisherigen tun will. Nach unserem Geschmack setzen wir uns hier vorläufig über die Logik hinweg und zeigen dem Schüler ohne weiteres die einzelnen Griffe; z. B. für die Streckensymmetrale: Einsetzen des Zirkels in den beiden Endpunkten, Bogenschlagen zu beiden Seiten der Strecke oder, falls diese nahe dem einen Papierrand ist, nur auf einer und derselben Seite. Viel nützlicher als alle theoretische Motivierung dieser Begriffe — denn auch für sie spricht ja die Symmetrie unmittelbar zu demjenigen, der überhaupt für sie einen Blick hat — ist es, schon hier den Schüler aufmerksam zu machen, wovon die Genauigkeit seiner Konstruktionen abhängt: die Durch-

---

und zu verwerten ist. Im einzelnen werden freilich jene psychologischen Theorien namentlich in ihrer physiologischen Einkleidung nicht überall einwurfsfrei sein. So schon darin, daß MACH überall noch von Empfindungen spricht, wo EHRENFELS (vgl. oben S. 84) von „Gestaltqualitäten" zu sprechen für nötig gefunden hat. Zur Entdeckung dieses seither als überaus wichtig und fruchtbar erwiesenen neuen psychologischen (und „gegenstandstheoretischen") Begriffes wurde EHRENFELS allerdings selbst wieder angeregt gerade durch MACHs Betonung der an Unmittelbarkeit mit dem direkten Empfinden zu vergleichenden anschaulichen Gestaltauffassung im Gegensatz zu einem bloß verstandesmäßigen Erfassen geometrischer Gebilde und Beziehungen.

schnittspunkte der Bogen in nicht zu flacher Kreuzung, aber auch nicht zu nahe aneinander zu nehmen; denn (wie wir schon im vorigen Jahre beim Gebrauch des Lineals gelernt haben) durch zwei nahe Punkte ist eine Gerade weniger genau bestimmt als durch zwei voneinander möglichst weit abstehende. Ferner Warnung vor allerlei Ungeschicklichkeiten, natürlich erst im Augenblick, da sie begangen werden sollen (und leider fehlt's daran bekanntlich nie, am wenigsten, wenn der Schüler mit dem großen Schulzirkel an der Tafel hantieren soll). Also z. B. nicht den Zirkel von dem einen Endpunkte abheben, ehe man nicht Bogen mit gleichem Halbmesser (zu beiden Seiten der Geraden – wenn auf einer Seite, ist's nicht zu vermeiden) konstruiert hat. Ferner: Sobald diese Elementarkonstruktionen halbwegs sitzen, mögen sie nicht mehr sozusagen um ihrer selbst willen (d. h. an einzelnen Strecken, Winkeln u. dgl.) ausgeführt werden, sondern sofort an Dreiecken und Kreisen, um hiermit den Schüler ohne viele Worte, aber um so mehr durch seine eigenen Taten, von der umfassenden, nun schon wirklich geometrischen Fruchtbarkeit der Symmetrie zu überzeugen. Also etwa so: Es wird den Schülern der Klasse aufgetragen, es solle bis zur nächsten Schulstunde jeder ein beliebiges Dreieck zeichnen, und zwar recht mannigfaltige, so daß der eine ein fast gleichseitiges, einer ein spitz-, ein anderer ein sehr stumpfwinkliges Dreieck zeichnet; übrigens alles hübsch groß, wie es das Zeichenheft eben erlaubt. Jeder hat dabei die drei Seitensymmetralen zu zeichnen. Werden die Aufgaben in der nächsten Schulstunde mitgebracht, so gibt es schon eine Entdeckung, noch ehe der Lehrer das Zimmer betreten hat: denn bei allen, die genau gezeichnet haben, schneiden sich „zufällig“ die drei Seitensymmetralen in einem Punkte! Der Lehrer mag dann nach seinem Geschmack ein bischen schauspielern, und gerade dadurch, daß er selber an den „Zufall“ zu glauben scheint, die Kinder an ihm zweifeln machen und sie vielmehr hier eine schöne Gesetzmäßigkeit vermuten lassen. Ob wir sie auch schon „beweisen“ können? Wer die Sätze vom gleichschenkligen Dreieck schon hat vorhergehen lassen, hat den formgerechten Beweis in der Hand (wir brauchen ihn nicht zu wiederholen). Vielleicht versucht es aber der Lehrer einmal umgekehrt und läßt die Schüler jene Sätze vom gleichschenkligen Dreieck nicht wie um ihrer selbst willen, sondern schon im Dienste der spannenden Frage, ob immer und warum sich die drei Symmetralen in einem Punkte schneiden, selber finden. – Für eine nächste Schulstunde dann die gleiche Entdeckung bezüglich der drei Winkelsymmetralen des Dreieckes. Wieder in einer späteren Stunde dann die ebenfalls spannende Aufgabe, den Mittelpunkt eines Kreises zu finden, wenn man dafür gesorgt hat, daß beim Zeichnen des Kreises der Zirkel keine Spur des Mittelpunktes hinterlassen hat (was beim Tafelzeichnen bekanntlich nur zu oft passiert, wenn es der Schüler unterlassen hat, vor dem Einsetzen des Zirkels den Mittelpunkt zu markieren). Auch hier wiederum Anleitungen, wie die zwei Sehnen, deren Streckensymmetrale man zieht, zu wählen sind, damit der Schnittpunkt möglichst genau herauskommt. Die Ratschläge finden offenes Gehör, wenn sie nicht vorzeitig erteilt waren und trotz vermeintlich genauer Konstruktion sich ein solcher Schnittpunkt der Symmetralen ergibt, daß, wenn man aus ihm als Mittelpunkt einen Kreis konstruiert, dieser schmerzliche Abweichungen vom gegebenen Kreis zeigt.

Wieder eine nächste Stunde dann die Beziehungen der zwei behandelten „merkwürdigen Punkte des Dreiecks“ zum um- und eingeschriebenen Kreis. Worauf allenfalls auch schon die zwei anderen „merkwürdigen Punkte“ folgen können.

So haben wir bloß mittels der Symmetrie ein tüchtiges Stück Planimetrie hinter uns. Unterlassen wir nun aber nicht, auch die Ausgangsanschauungen, die wir ja einzig naturgemäß an den symmetrischen Körpern gewonnen hatten, nun auch wieder auf diese anzuwenden; also symmetrische Zuordnung zweier Punkte in bezug auf eine Ebene, wofür das klassische Beispiel die Planspiegelbilder sind, wenn auch die Optik des Planspiegels noch ein bis vier Jahre warten muß. Dann die rechte und linke Hand und ihre Handschuhe; Umstülpen des einen, damit er sich mit dem andern „deckt“. Doch nicht zu viel solcher Theoretika. Wohl aber suchen wir nun an den bisher bekannt gewordenen geometrischen Körpern, namentlich dem Würfel, der Kugel, die (alle!) Symmetrieebenen u. dgl. m. auf. So schlagen wir die Brücke zu einem analysierenden Erfassen derjenigen Anschauungstatsachen auch an geometrisch undefinierbaren Körpern, vor allem unserem eigenen Leib, die uns anfangs schon unanalysiert so kräftig und fruchtbar entgegengetreten waren: Z. B. Zu einer Arm- und Fingerhaltung, die der Lehrer einem Schüler erteilt hat, Arm und Finger der anderen Seite zu jenen symmetrisch halten, dabei jetzt ausdrücklich an seine „Medianebene“ denken, an die er ursprünglich nicht gedacht hatte. Im übrigen bringen unsere Lehr- und Übungsbücher gegenwärtig schon so viel über Symmetrie, daß nähere Anleitungen hier entbehrlich sind.

Sogenannte Kongruenz.

Es wurde oben S. 119 angedeutet, daß wir den Begriff der Kongruenz als solcher[1]) auf der Unterstufe überhaupt nicht hervor-

1) Vielleicht ist folgendes Geschichtchen geeignet, den Verehrern der Kongruenz heilsame Bedenken zu erregen: Ein angesehener Philologe erzählte mir, daß er als Knabe die Lehre von der Kongruenz schlechterdings nicht habe verstehen können. Da habe ihm einmal sein Hauslehrer gesagt: Dummer Junge, wie könnt' ich denn beweisen, daß diese zwei Dreiecke kongruent sind, wenn sie nicht wirklich kongruent wären? Und von da an habe er die Kongruenz völlig verstanden. — Was mochte er als Knabe und mag er

kehren möchten, sondern daß der des Eindeutig-bestimmten für den Anfänger (und schließlich auch für die strengste wissenschaftliche, ja erkenntnistheoretische Auffassung) der bei weitem wertvollere ist. Hier also vor allem behufs Verständigung über die Sache selbst (die mit den Schülern ja erst gelegentlich der trigonometrischen Auflösung von Dreiecken in dieser oder ähnlicher Form besprochen werden kann): Eine und dieselbe Tatsache, daß z. B. ein Dreieck schon durch drei Seiten eindeutig bestimmt ist, läßt sich in Form von vier Lehrsätzen bzw. Aufgaben beschreiben und erklären:

1. Ein Dreieck ist durch die drei Seiten eindeutig bestimmt **(Identitätssatz).**
2. Zwei Dreiecke, die in den drei Seiten[1]) übereinstimmen, sind einander kongruent **(Kongruenzsatz).**
3. Aus den drei gegebenen Seiten das Dreieck planimetrisch zu konstruieren **(Konstruktionsaufgabe).**
4. Aus den drei gegebenen Seiten das Dreieck trigonometrisch aufzulösen **(Auflösungsfall).**

Wie also führen wir Kinder von zwölf Jahren am besten in derartige Wahrheiten und Tätigkeiten ein? Vielleicht so:

Wir lassen wieder je ein beliebiges Dreieck zeichnen (jeden Schüler ein anderes, u. zw. recht verschiedene, wie es oben S. 112 vorgeschlagen wurde – aber noch nicht aus „gegebenen" Seiten und Winkeln, sondern indem er drei Gerade zieht, deren jede die beiden anderen in recht weit voneinander abstehenden Punkten schneidet); wir lassen ihn dann die Seiten mit dem Maßstab, die Winkel mit dem Transporteur messen und die Maßzahlen notieren. Nun werden die von dem einen Schüler gefundenen Daten dem anderen als Aufgabe in der Weise gegeben, daß auch er mit diesen sechs Stücken ein Dreieck zu konstruieren habe. Dabei wäre es beinahe erwünscht, wenn der Erste nicht allzu genau gemessen hätte, denn dann merkt der Zweite, daß sich ein Dreieck mit gerade diesen sechs Stücken überhaupt nicht konstruieren läßt, daß durch sechs Stück ein Dreieck „überbestimmt" sei. Auf diese oder eine ähnliche Art mag dem Schüler zum Bewußtsein kommen, daß sich von der Zahl sechs der „Bestimmungsstücke" (– wir denken

---

jetzt als philologische Kapazität wohl unter „Verstehen" verstehen – wenigstens in und von mathematischen Dingen?

1) Daß der Fall von den drei Seiten bei Euklid den letzten Kongruenzsatz bildet, hängt bekanntlich mit seinem besonderen Lehrgange zusammen. – Ich erinnere mich, als Schüler mich immer gewundert zu haben, warum gerade diese „drei Seiten" statt am Anfang erst am Ende zur Sprache kamen.

einstweilen immer nur an die „Umfangsstücke") einiges „herunterhandeln" läßt; und zwar dürften dabei die drei Winkel dasjenige sein, was sich als durch die drei Seiten schon eindeutig mitbestimmt am überzeugendsten, ja fast wie selbstverständlich darstellt. Jedenfalls aber halten wir diese Erkenntnis sobald als möglich dadurch fest, daß wir aus den drei Seiten, noch ehe wir über die Winkel geredet, ja auch nur an sie gedacht haben, ein Dreieck konstruieren lassen. Fällt dabei dem Schüler auf, daß, nachdem er die eine Seite aufgetragen hat, und behufs Gegeneinanderspannens der beiden anderen mit zwei Zirkelöffnungen einander schneidende Kreisbogen zieht, es eigentlich nicht ein Dreieck, sondern zwei zu jener ersten Seite symmetrisch liegende gibt — um so besser; hineinreden aber werden wir diese Verallgemeinerung der Lösung unserer Konstruktionsaufgabe in den Anfänger lieber nicht; werden auch nicht viel über die Kreisbogen als „geometrische Örter" u. dgl. reden, da ja auch ohne Kenntnis solcher der Knabe wohl von selbst darauf kommt, daß man auch hier Kreisbogen zum Schnitte bringen müsse, wie er es bei den Grundkonstruktionen mit den Strecken- und Winkelsymmetralen u. dgl. schon gemacht hat.

Ist so der Gedanke, daß man von den sechs Bestimmungsstücken drei „herunterhandeln" könne, in jenem ersten Falle begriffen, so liegt es nahe, zu kombinieren, welche anderen Gruppen von drei Stücken den gleichen Dienst leisten, und ob nicht auch manchmal schon zwei oder manchmal erst vier. Nach einem solchen Überschlage dann sofort wieder aus den viererlei Gruppen von je drei gegebenen Stücken wirklich Fall für Fall konstruieren! Dabei sparen wir den Fall $a > b, \alpha$ für zuletzt; denn dadurch, daß beim Übersehen der Nebenbedingung, es müsse der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel gegeben sein, statt eines Dreiecks zwei möglich sind, falls wir den zur Konstruktion benutzten Kreisbogen hinreichend groß machen, fällt Licht auch auf die anderen Konstruktionsaufgaben zurück, die wir nun noch einmal kritisch durchgehen, ob nicht auch hier solche Zweideutigkeiten möglich gewesen wären, womit wir das Nein endgültig zur Evidenz bringen. Hierbei haben wir in der Phantasie allseitig an den Seiten zu rücken und zu drehen versuchen müssen, um jedesmal sozusagen zu spüren, wie z. B. drei Stäbe von gegebener Länge trotz beweglicher Gelenke an den Enden doch unbeweglich sind, wenn sie eben alle drei an den Enden zusammenstoßen sollen u. dgl. m.

Ist aber alles das weniger theoretisch als das Aufeinanderlegen zweier Dreiecke? Z. B. Im Falle a, b, γ mußten wir ja auch zuerst Seite a auftragen, dann den Winkel γ mit dem vorläufig unbegrenzten zweiten Schenkel, dann die Strecke b auf diesen Schenkel usw. — also eigentlich doch lauter „Kongruenzen"! Wir erwidern: Gewiß, auch jene Nebenbetrachtungen während des Konstruierens sind theoretisch Deckungen, und von diesen vorgestellten Deckungen sind das praktische

Ergebnis konstruierte Dreiecke. Nur dürfte der Schüler beim bloßen stückweisen Aufeinanderlegen nicht recht spüren, was dabei „herauskommt", da ja die nicht als gleich vorausgesetzten Stücke am zweiten, fertigen Dreieck doch auch schon gleich waren; wogegen beim Konstruieren immer buchstäblich etwas „herauskommt", indem das verlangte Dreieck ohne die Tätigkeit des Konstruierens gar nicht da wäre. Auch vermeiden wir ja die Gedanken der Deckung nicht ängstlich, sondern wenn, wie gleich anfangs verlangt wurde, aus den von dem Schüler durch Messungen seines Dreiecks gefundenen sechs Stücken ein anderer ebenfalls ein Dreieck konstruiert hat, so werden die beiden Zeichner ja wohl von selbst darauf verfallen, ihre Zeichenblätter aufeinander zu legen und gegen das Licht zu schauen, ob sie sich „decken". Sehr wahrscheinlich hat irgendein bequemer Junge schon einmal eine Landkarte an der Fensterscheibe gepaust u. dgl. m. – Was alles müßte man dagegen in den Anfänger hineinreden, um ihm beizubringen, warum man bei zwei fertigen Dreiecken sich im Anfang so stellt, als kennte man nicht alle sechs, sondern nur drei Stücke? Und wenn etwa dem Schüler Sinn und Zweck dieser Fiktion während der ganzen Kongruenzlehre unverständlich geblieben ist, was bleibt dann von dieser ganzen fingierten Tätigkeit, die Dreiecke erst Stück für Stück sich decken zu lassen, noch als Erträgnis geometrischer Anschauung und Tätigkeit übrig? Wie ganz anders, wenn die Schüler unter seinen Händen aus den drei Stücken die drei anderen mit Notwendigkeit erstehen sehen.

Von dieser Tätigkeit in der Stube ist nur ein Schritt hinaus ins Freie. Und wenn nicht gleich „im Freien", so kann doch im Schulhofe während der wenigen Minuten einer Unterrichtspause (z. B. die Länge einer Seite des rechteckigen Hofes und der Höhenwinkel[1]) etwa zu einem gegenüberliegenden Fensterkreuz) gemessen werden. Zu Hause wird dann das Dreieck in verjüngtem

1) Vorbedingung für fast alle solche „Messungen im Gelände" ist der Besitz und Gebrauch eines, wenn auch noch so primitiv gearbeiteten Theodoliten oder Spiegelsextanten oder ähnliches leistender Apparate; z. B. der in SCHÜLKES Aufgabensammlung, Teubner 1902, S. 129, geschilderten und empfohlenen Winkelspiegel und Winkelprismen, ferner OHMANNS Feldwinkelmesser, Zeitschr. f. d. physikal. u. chem. Unterr., Jahrgg. V, S. 166, VI, S. 269, X, S. 167.) Solche sind ja allerdings zu mäßigen Preisen im Handel zu haben (z. B. Ohmanns Apparat für Schüler um Mk. 3.– bei Muenke, Berlin NW). Aber eine noch ausgiebigere Verwertung in der wirklichen Tätigkeit des einzelnen Schülers würde eintreten, wenn sich der Schüler diese seine Winkelmeßinstrumente mit eigener Hand angefertigt hat. Da diese Forderung noch dringender bei jedem Beobachten der Vorgänge am Himmel wird (z. B. gestern war der Abstand des Mondes von diesem glänzenden Stern so viel Grad, heute beträgt der Abstand so viel Grad), so verschieben wir Vorschläge für diese dankbare Aufgabe eines Handfertigkeitsunterrichtes auf den II. Band (Himmelskunde und astronomische Geographie).

Maßstabe konstruiert, es werden die zwei anderen Seiten und etwa noch die Höhe des Dreiecks gemessen und nun nach der nächsten Schulstunde durch Nachmessen dieser Strecken im wirklichen Schulhof das Ergebnis dieser Konstruktion bestätigt. Bald wird es auch nicht an einem Graben (oder sonst einem natürlichen oder künstlichen Hindernis) fehlen, über das man hinausmißt – kurz alle Grundaufgaben der rechnenden Trigonometrie lassen sich als in Konstruktionen verwandelte „Übungen im Gelände" recht wohl während des zweiten Jahrgangs behandeln. Wie viele Zeit so ausgefüllt werden kann und soll, versuchen wir hier weder vorauszubestimmen noch dem einzelnen Lehrer hierüber Ratschläge zu geben. Denn ist damit nur einmal ernstlich angefangen, so läßt die Sache sicher weder den Lehrer noch den Schüler los – in einer hoffentlich nicht zu fernen Zukunft. Mitteilungen, wie weit wir heute tatsächlich mit diesen Dingen schon sind, wären als ermutigende Beispiele oder auch als Warnung vor überschwänglichen Hoffnungen dringendst erwünscht. –

Es soll nicht versucht werden, hier auch noch die übrigen einzelnen Lehrstoffe und Lehrformen des zweiten Jahrganges näher zu schildern. Wieviel sonst noch von den Dreiecken, von den Vierecken, insbesondere Parallelogrammen und den symmetrischen Vierecken: symmetrischem Trapez und symmetrischem Trapezoid (Deltoid), wieviel von den Vielecken, vom Kreis durchgenommen werden kann und soll, wird sich ja nach dem Lehr- und Übungsbuch richten. Und alles käme darauf an, den Ton der Lehrbücher darauf zu stimmen, daß ihnen nicht ein vorausbestimmtes Quantum von Sätzen als entscheidendes Ziel gilt, sondern das Quale der intellektuellen und manuellen Tätigkeit der Schüler, zu deren Pflege vielleicht auch schon eine sehr beschränkte Zahl solcher Sätze, falls man sie nur den in der wirklichen „Umgebung" zugänglichen und aus anderen Unterrichtsstoffen sich darbietenden „Anwendungen" anzupassen versteht, völlig ausreicht. Hierüber nur noch drei Bemerkungen konkreter Art.

Erstens: Wer sich einmal auf jene Messungen im Gelände, in die wir nunmehr ja auch indirekte Messungen einbezogen haben, eingelassen hat, wird eben dadurch die Lust verloren haben, gar schon die Zwölfjährigen viel mit gekünstelten Konstruktionen aus mittelbaren Bestimmungsstücken von Drei-und Vierecken zu plagen — einfach weil er hierzu keine Zeit mehr hat.

Zweitens: Es war zwar bei der Symmetrie, aber nicht mehr von den Dreieckskonstruktionen an, die Rede auch von räumlichen Gebilden. Sollen nun diese wirklich einem exklusiv planimetrischen Lehrgang zulieb wieder diesen ganzen zweiten Jahrgang hindurch dem Gesichtskreis des Schülers entrückt bleiben? Sogar wer nun endlich „zur Planimetrie kommen" und bei ihr bleiben wollte, sollte aus diesem künstlich abgesteckten Gebiet auf die wirklichen Bedürfnisse des Unterrichtes zum allermindesten so weit hinausblicken, daß er neben dem Kreis immer wieder die Kugel im Auge behält. Denn auch wenn er es nicht tut, plagt sich spätestens im zweiten Jahrgang der Geographielehrer fast ununterbrochen mit der „Erdkugel" und dem „Globus" herum, redet von Schattengrenzen, die immer größte Kreise seien — redet von Sonnenstrahlen, die am 21. März den Polarkreis tangieren u. dgl. m. Ob das in den geometrischen Lehrstoff paßt, kümmert den Geographielehrer gar nicht, weil den Planimetrielehrer eben die Sonnenstrahlen und die Erdkugel auch nicht kümmern. Doch hiervon des mehreren im II. Band dieser didaktischen Handbücher, der von astronomischer Geographie handelt.

Drittens: Die Meraner Vorschläge erwarten eine Neubelebung des propädeutischen Geometrieunterrichtes von der ausdrücklichen Betonung der „Beweglichkeit der Figuren" — im offenbaren Gegensatz zur Euklidischen Starrheit. Natürlich wird man längst gelegentlich darauf hingewiesen haben, daß, wenn z. B. die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck allmählich wachsen, auch die Höhe wächst u. dgl. m. Aber solche gelegentliche Bemerkungen bedeuten noch lange kein neues Leben für den ganzen Unterricht. Deshalb haben wir in unserem Lehrplane noch ausdrücklich (neben den Gestalt- und Größenänderungen bei Änderungen der Bestimmungsstücke) hingewiesen auf die Grenzgebilde, z. B. daß das Trapez in ein Dreieck übergeht, wenn die eine Seite Null wird, u. dgl. m. — Sobald ferner der planimetrische Unterricht den Mut gefunden haben wird, sich auch um das in der Geographie Benötigte in betreff der Kugel zu kümmern, wird man den Kreis (z. B. Beleuchtungsgrenze) in die Ellipse, diese in die Gerade übergehen lassen. Neu wäre dann nur ein nicht bloß gelegentliches, sondern wirklich jede Gelegenheit ausnutzendes Eingehen auf diese Vorstellungsweisen.

Hiefür aber wieder würde auch der wortreichste Unterricht nicht soviel leisten als die manuelle Beschäftigung des Schülers mit seinen Modellen. Vier zu einem Rechteck zusammengefügte Stäbchen, die sich dann zu einem Rhomboid und endlich einer Geraden zusammenklappen lassen, leisten hier unvergleichlich mehr als bloße Zeichnungen. Noch mehr aber leisten wieder Anschauungen von solchen Verschiebungen z. B. an einer Brettschaukel mit Parallelogrammführung (nach Fig. 62, was zugleich eine Vorübung für das WATTsche Parallelogramm ist), die Parallelgitter an Bahnschranken nach Fig. 63 u. dgl. m. Es bleibt natür-

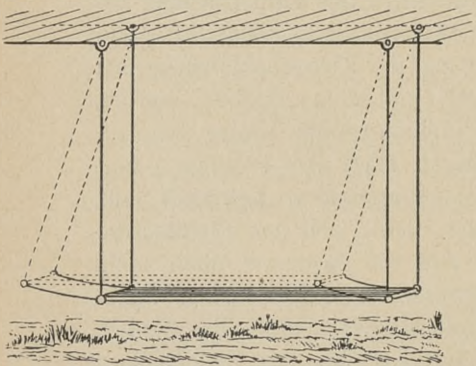


Fig. 62.

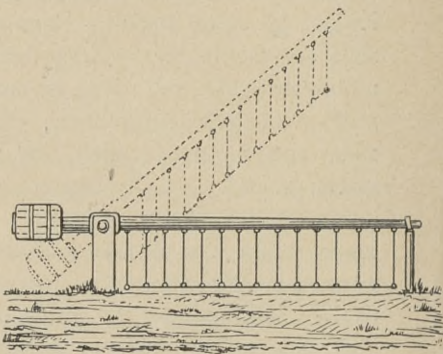


Fig. 63.

lich der Erfindungsgabe der Lehrer und nicht zum geringsten auch der Schüler selbst vorbehalten, inwieweit sich an solche Übungen im Anschauen und Selbermachen wirklich jeweilig neue geometrische Denkgewohnheiten anschließen. –

Versucht man sich nun schließlich, einen Überschlag zu machen, wie bald und wie allgemein es wohl zu einem Eindringen dieser neuen Art wirklich geometrischen Anschauungsunterrichtes statt des diesen Namen nur mißbrauchenden bisherigen in unseren Schulen wirklich kommen mag, so ist eine historische Tatsache vielmehr ent- als ermutigend: die Tatsache, daß namentlich die Verbindung der „Handfertigkeit" mit dem bloßen Zeichnen (geschweige dem bloßen Anstarren geometrischer Figuren im Lehrbuch) längst dringend von den Pädagogen gefordert war und doch in die Schulpraxis so gut wie noch nicht eingedrungen ist. Es sei da nur wieder erinnert an PESTALOZZIS Forderung, „Kopf, Herz und Hand" gleichmäßig und eins das andere unterstützend zu üben, wobei hinzuzufügen ist, daß PESTALOZZI mit seiner eigenen, wesentlich synthetischen Lehrmanier diesem theoretisch so wichtigen und dankenswerten Prinzip eher entgegengewirkt als es praktisch gefördert habe. Was aber hier fehlte, hat dann FRÖBEL ergänzt – aber auch wieder nur für die Jahre vor, höchstens in der Volksschule; für die Mittelschule, namentlich in ihren untersten Klassen, liegt hier ein erst noch urbar zu machendes, neues Arbeitsfeld vor[1]). Als Beleg, daß theoretische Pädagogik dem ersten Geometrieunterrichte längst solche auch „die Hand“ in die Bildungsarbeit mit einbeziehende Rolle zugewiesen habe, folge hier noch eine Stelle aus WILLMANNS „Didaktik als Bildungslehre“ (3. Auflage, II. Band S. 332):

„Wie die Sprachlehre, so findet auch die Mathematik unbewußte Kenntnis und Fertigkeit vor, und zwar hier auf Größenverhältnisse bezogen. Das heuristische Verfahren hat das Unbewußte schrittweise ins Bewußtsein einzuführen; auch hier bietet sich ein einfacher Weg dar, das Verständnis der Größenverhältnisse lediglich durch Operieren mit denselben, insbesondere das der Raumformen mittels deren Herstellung durch Zeichnen oder sonstige Technik vorzubereiten. Da-

1) Wie neu die Sache für die wirkliche Schulpraxis im großen – also von bisherigen löblichen Ausnahmen abgesehen – noch ist, belegt der Wortlaut der neuesten österreichischen Lehrpläne, der im Vergleich zu den Prager Vorschlägen die Worte „Anschauungen und Handfertigkeiten“ abgeschwächt hat zu „Anschauungen und Betätigungen“. Dies ist offenbar geschehen, weil man sich unter „Handfertigkeitsunterricht“ bisher allzu einseitig immer nur das Anfertigen von Pappschachteln, Schnitzen von Bilderrahmen und andere mehr oder minder mangelhafte Nachahmung bloßer Handwerkstätigkeit denkt. Ich verkenne nicht, daß der vorsichtige Ausdruck „Betätigungen“ eine leise Warnung vor einer solchen zu engen und einseitigen Auffassung des sonstigen Wortes „Handfertigkeit“ enthält. Immerhin bleibt es aber nun eine Aufgabe für den Mittelschulunterricht als solchen, innerhalb möglichst vieler von seinen einzelnen Fächern darauf bedacht zu sein, daß er Gelegenheiten zu solcher manueller Betätigung aussinne, damit dem so gehobenen Handfertigkeitsunterricht der Mittelschüler Anlässe zu seiner Betätigung in möglichst engem Anschluß an den sonstigen Schulunterricht gegeben werden. So ließ ich schon vor rund 20 Jahren am Theresianum nicht nur allerlei planimetrische und stereometrische Modelle, sondern auch Theodoliten, Spiegelsextanten, meinen transparenten Himmelsglobus, vgl. S. 293 Anm., samt Gestell zu Zwecken der astronomischen Geographie anfertigen, worauf im II. Band dieser didaktischen Handbücher zurückzukommen sein wird.

In GUTZMERS „Gesamtbericht“ usw. (vgl. oben S. 5) heißt es S. 158: „. . . die Kommission regt an, durch Pflege . . . [der praktischen Schülerübungen] die vielfach vorhandenen Bestrebungen auf Erzielung einer gewissen Handfertigkeit zu dem wissenschaftlichen Unterrichte in Beziehung zu setzen.“

Während des Druckes erschien WETEKAMP, Die Selbstbetätigung in der Erziehung (Teubner 1908, 44 S.), wo der Verfasser (Direktor des Werner Siemens-Realgymnasiums) über die Vorschule (wenn auch mit besonderer Berücksichtigung des ersten Schuljahres) hinausblickt auf die Mittelschule.

durch kann dem geometrischen Unterrichte ganz wohl vorgearbeitet werden, allein es läßt sich mehr tun, indem an das Herstellen der Form planmäßige Belehrungen angeschlossen werden können, und in diese Verbindung des Technischen mit dem Theoretischen setzen wir das Eigentümliche des Formenunterrichtes. Dieser ist heuristischer Natur und will in diesem Stile durchgeführt werden; er hat sich vor der Abschwächung zu einem elementarischen, aber zugleich thetischen Verfahren zu hüten, welcher Art der übliche geometrische Anschauungsunterricht ist. Der Formenunterricht hat die Schüler zur Herstellung und Beobachtung von Raumgebilden sowie zur Einkleidung des Beobachteten in Worte zu veranlassen. Seine Fundstätten sind teils solche Formen, welche durch Regelmäßigkeit zur Betrachtung einladen, wie Quadrat, Kreis, symmetrische Gebilde verschiedener Art, teils solche, welche durch ihre Veränderlichkeit die Aufmerksamkeit beschäftigen, so Winkel mit drehbaren Schenkeln, Figuren mit verschiebbaren Seiten u. a. Auf ein anderes Suchen und Finden führt die Betrachtung von Gegenständen der Natur und der Kunst mit Rücksicht auf die an ihnen vorkommenden Figuren."

§ 15. Abschluß der Unterstufe (Dreizehntes Lebensjahr).

Den natürlichsten Abschluß der Unterstufe bildet ein umfassendes und inniges Zusammengehen von Arithmetik und Geometrie, zu dem die beiden vorausgegangenen Jahre erst einzelnes, wenn auch noch so reichliches und an sich schätzbares Material (namentlich in der Verbindung des dekadischen mit dem metrischen System) gebracht hatten. Aufs wirksamste ermöglicht wird ein solches Zusammengehen von Zahlen- und Raumlehre auf dieser Stufe dadurch, daß für die Geometrie Flächen- und Rauminhaltsbestimmungen mit ihren „Formeln" und dem Auflösen dieser allereinfachsten Gleichungen nach den verschiedenen Bestimmungsstücken, für die Arithmetik das „Buchstabenrechnen" in den Mittelpunkt des Interesses treten. Beginnen wir sogleich die Skizzierung dieses

a) arithmetischen Lehrstoffes

mit einer Probe der Kindlichkeit, die wir auch noch dem Unterrichte Dreizehnjähriger vergönnt wissen möchten, nämlich mit einer Lehrprobe:

Die erste Stunde Buchstabenrechnung.

Lehrer (L): Ihr werdet gehört haben, daß wir heuer etwas ganz Neues lernen, „Buchstabenrechnen". Habt ihr euch schon darüber

Gedanken gemacht, was das wohl sein mag, mit Buchstaben rechnen?

Erster Schüler (S_1): In der Buchstabenrechnung schreibt man statt 1 immer a, statt 2 immer b usw.

L: Ich glaube nicht, daß das zweckmäßig wäre. Warum sollte man nicht auch weiter mit den Ziffern rechnen, die uns doch bisher so gute Dienste getan haben? Und dann: kommen in der Buchstabenrechnung nur Buchstaben, nicht auch Ziffern vor? Tut einmal einen Blick in euer Lehrbuch!

S_2: Es kommen in den Rechnungen Buchstaben und Ziffern vor.

L: Nun also, so wie der S_1 gemeint hat, ist's in der Buchstabenrechnung wohl nicht. Ich will euch an einem Beispiel zeigen, was für merkwürdige Dinge man in der Buchstabenrechnung kann. Ich zeige euch ein Kunststück, das einige von euch vielleicht schon kennen. (Zu S_3 gewendet): Denke dir irgendeine Zahl, nicht zu groß, damit du leicht rechnen kannst. (Zur Klasse gewendet): Es darf auch, wer will, dasselbe ausführen, was ich dem S_3 auftragen werde. Hast du dir, S_3, die Zahl gedacht?

S_3: Ja!

L: Nimm sie doppelt (S_3 nickt). Gib 10 dazu — nimm die Hälfte der Zahl, die du jetzt herausgebracht hast (S_3 nickt). Nimm die Zahl weg, die du dir zuerst gedacht hattest (S_3 nickt). Jetzt hast du fünf.

S_3 (höchst erstaunt): „Ja!"

Die ganze Klasse, um die sich der Lehrer die Zeit über scheinbar gar nicht gekümmert hatte, in großer Aufregung: „Ich habe auch fünf, ich habe auch fünf!"

L (ebenfalls erstaunt): Ihr alle habt auch fünf? Wie ist das möglich? Das wäre ja ein ganz unglaublicher Zufall! Ihr habt jedenfalls im Anfang alle dieselbe Zahl gedacht? Oder nicht? (Zu S_3:) Glaubst du, daß ich weiß, was für eine Zahl du selbst dir zuerst gedacht hattest?

S_3 zuckt die Achsel. Mehrere Schüler wollen ihre Zahlen nennen ...

L: Halt! Nehmen wir einmal an, ich hätte nicht gewußt, was für eine besondere Zahl sich ein jeder gedacht hat. Nur so viel weiß ich: irgendeine Zahl. Nennen wir sie a. Was hat S_3 dann tun müssen?

S_4: Doppelt nehmen.

L: Wie mag also diese neue Zahl heißen?

Einen Augenblick lang unschlüssiges Schweigen. Möglicher- oder wahrscheinlicherweise auch der Vorschlag: Die doppelte Zahl heißt b, was dann am besten schweigend zu übergehen ist; denn schon kommt der eine oder andere darauf zu sagen: $2a$.

L: Ganz richtig. Die anfängliche Zahl hieß a, das Doppelte heißt $2a$. Wir schreiben also untereinander:

$$a$$
$$2a.$$

Und während verschiedene Schüler die weiteren Schritte in Worten wiederholen, schreibt der Lehrer an die Tafel:

$$2a + 10$$
$$\frac{2a + 10}{2} = a + 5$$
$$(a + 5) - a = 5.$$

L: Habe ich also wissen müssen, was für eine Zahl a sich jeder von euch im besonderen gedacht hat? Du, S_3, was für eine Zahl hattest du dir gedacht?

S_3: 35.

L: Gut! Bei dir war $a = 35$; also $2a$?

S_3: 70 (die Rechnung wird fortgesetzt und ergibt 80, 40, 5).

L: Und du, S_5, was hattest du dir gedacht?

S_5: $a = 100$.

L: Gut! Setze du fort (während der Antwort des Schülers auf die an der Tafel stehenden a, $2a$, $2a + 10$ usw. deutend).

$$a = 100$$
$$2a = 200$$
$$2a + 10 = 210$$
$$\frac{2a + 10}{2} = 105$$
$$a + 5 - a = 5.$$

L: Nun, ist euch schon ein Licht aufgegangen, wozu wohl diese Buchstabenrechnung gut sein mag? Der Buchstabe a hatte was immer für eine Zahl bedeuten können. Das Doppelte dieser Zahl ist dann immer $2a$. Jenes Doppelte um Zehn vermehrt, gibt immer $2a + 10$. Die Hälfte davon immer $\frac{2a + 10}{2}$. Diese angezeigte Division aber können wir ausführen, indem wir zuerst den Summanden $2a$ dividieren durch 2, was wieder a gibt, und dann den Summanden 10 dividieren durch 2, was 5 gibt. Wenn ich nun von $a + 5$ schließlich wieder a abziehe, so muß ja immer 5 herauskommen, was immer auch a bedeutet haben mag.

Ihr seht, diese Rechnung gilt allgemein, was für einen besonderen Wert auch die Zahl a haben mag. Die Zahlen 10, 2, 5 nennen wir **besondere** Zahlen. Die Zahl a nennen wir eine **allgemeine** Zahl.

Die Buchstabenrechnung dient dazu, Rechnungen und Rechnungsregeln, richtiger Rechnungsgesetze, die für alle Zahlen gelten, auch allgemein darzustellen.

Ich werde euch hiefür noch ein anderes Beispiel zeigen. Wie wird ein Bruch mit einer Zahl multipliziert? Weißt du es noch, S_6?

S_6: Ein Bruch wird mit einer Zahl multipliziert, indem man den Zähler mit der Zahl multipliziert und den Nenner unverändert läßt.

L: Gut! Der Bruch kann was immer für einen Zähler haben, nennen wir ihn a, und was immer für einen Nenner, nennen wir ihn b. Also $\frac{a}{b}$ multipliziert mit was immer für einer Zahl; nennen wir sie z; das gibt

$$\frac{a}{b} \times z = \frac{a \times z}{b}$$

L: Erinnert ihr euch noch an andere Regeln aus der Lehre vom Bruchrechnen? – Die Schüler führen verschiedene Beispiele in Worten an, und es ergeben sich die Ausdrücke:

$$\frac{a}{b} : z = \frac{a : z}{b} \text{ oder } \frac{a}{b \times z}$$

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a + b}{n},$$

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a - b}{n},$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{m}{n} = \frac{a \times m}{b \times n} \text{ u. dgl. m.}$$

L: Ferner, wer weiß noch die Regeln für die einfache Zinsrechnung? Ein Schüler spricht sie in Worten aus, und es ergibt sich die Schreibung:

$Z = \frac{KP}{100}$. – Hieraus $K = \frac{100\,Z}{P}$, $P = \frac{100\,Z}{K}$; in Worten!

Das Bisherige hat genügt, die Schüler den Gebrauch der Buchstaben nicht mehr unverständlich finden zu lassen. Es kann nun auch sogleich darauf aufmerksam gemacht werden, daß man beim Multiplizieren mit Buchstaben statt $\times$ den Punkt $\cdot$, ja selbst gar kein Zeichen, sondern bloßes Nebeneinanderschreiben anwenden kann, was man beim Multiplizieren zweier durch Ziffern ausgedrückter besonderer Zahlen nicht durfte; „warum"? – Auch mag sogleich hier mitgeteilt werden, daß man in der Verdoppelung des a zu $2a$ dieses 2 den Koeffizienten nennt, und darauf aufmerksam gemacht werden, daß $2a$ dasselbe besagt wie $a + a = a \times 2$, daß ebenso $3a = a + a + a = a \times 3$, daß also ein Koeffizient einen Multiplikator darstellt und die Hauptgröße a einen Multiplikand. All das nicht in Form von Definitionen, sondern nur so, daß der Gebrauch dieser Symbole ein vollkommen sicherer wird – natürlich nicht nur äußerlich, sondern so, daß die Bedeutung jeden Augenblick ohne Gefahr von Verwechslungen, z. B. mit dem alsbald auftretenden a^2, a^3, sich festlegt.

Wird das Kunststück der ersten Stunde in der zweiten wiederholend durchgemacht, so kann nun der Lehrer einen Schritt weitergehen und fragen: Mußte man jedesmal gerade nur Zehn hinzugeben? Was wäre geschehen, wenn ich 6, wenn ich 1000 hätte hinzugeben lassen? Die Antworten: „Es wäre zum Schluß 3, es wäre 500 herausgekommen" leiten zu einem zweiten Schritt der Verallgemeinerung:

Allgemeiner:	Ganz allgemein:
a	a
$2a$	na (z. B. $3a$, $4a$ usw.)
$2a+b$	$na+b$
$\frac{2a+b}{2}=a+\frac{b}{2}$	$\frac{na+b}{n}=a+\frac{b}{n}$
$a+\frac{b}{2}-a=\frac{b}{2}\cdot$	$a+\frac{b}{n}-a=\frac{b}{n}\cdot$

Letzteres kann allenfalls in einer dritten Stunde als nochmals erweiternde Wiederholung (während daneben im systematischen Lehrgang „nach dem Buche" fortgeschritten worden ist), u. zw. als der dritte und letzte Schritt der Verallgemeinerung versucht werden (wobei sich aber wahrscheinlich zeigen wird, daß dieser Verallgemeinerung schon nicht mehr alle Schüler leicht folgen, weshalb auf sie auch weiter kein Gewicht zu legen ist).

Das Lehrziel der Buchstabenrechnung in diesem abschließenden Jahrgange der Unterstufe sei aber nicht schon ein Beginn der systematischen allgemeinen Arithmetik, sondern das davon wesentlich verschiedene, dem Rechenunterrichte der vorausgegangenen Jahrgänge einen zusammenfassenden Abschluß zu geben[1]). Wollte man sich dieses gegen die bisherige Unterrichtspraxis wohl ziemlich neue Lehrziel aneignen,

---

1) Ebenso unterscheiden die Meraner Vorschläge (S. 112): „In den mittleren Klassen tritt an Stelle des Rechenunterrichtes der Unterricht in der Arithmetik, der im letzten Abschnitt des Quartaunterrichtes durch systematische Behandlung des ganzen vorausgehenden Rechenunterrichtes und durch Ausbildung einer gewissen praktischen Vertrautheit mit der Buchstabensprache vorbereitet worden ist." Hiermit erscheint allerdings der Anfang des Buchstabenrechnens noch ins etwa zwölfte Lebensjahr verlegt; doch dürfte dieser für den Schüler so sehr neue Gegenstand lieber an den Beginn des nächsten Schuljahres gesetzt werden – schon aus den in § 6 S. 45 erörterten Gründen der „Schulmoral".

so könnte und müßte ein Grund zu der gegenwärtig mit Recht verbreiteten Klage wegfallen, daß in diesem Schuljahr[1]) die Schwierigkeiten sich häufen; denn es trete gleichzeitig mit dem ganz neuen Griechisch auch die ebenso neue Buchstabenrechnung an den Schüler heran. Statt dessen ließe sich der arithmetische Lehrstoff dieses Jahrgangs, wenn man nur den in der Theorie längst feststehenden didaktischen Axiomen auch an diesem besonderen Punkt endlich gerecht werden wollte, ganz ungezwungen so gestalten, daß dieser Unterricht zwar nach Inhalt und Form und durch den Lehrton, der jetzt bei den Dreizehnjährigen möglich geworden ist, ihnen immerhin soviel des Neuen böte, als zu diesem Wecken und Wachhalten eines tieferen Interesses an arithmetischen Dingen erforderlich ist; dennoch aber sollte der Schüler bis auf weniges, wie Quadrieren, Kubieren, Ziehen der zweiten und der dritten Wurzel und abgekürztes Rechnen (worüber alsbald noch Näheres) doch nur den Gesamteindruck bekommen, daß er alles das, was er schon zu vorwiegend mechanischer Fertigkeit gebracht hatte, nun erst recht von Grund aus verstehen lerne. Sollte der Rat (vgl. oben S. 69 ff.), nicht schon bei den Elf- und Zwölfjährigen das „Verständnis“ für die Rechnung über die „mechanische“ Sicherheit in ihrer Durchführung hinaus steigern zu wollen, noch dem Mißverständnis oder der Mißdeutung ausgesetzt gewesen sein, unsere Didaktik predige einen Rückfall in das einstige dumpfe Regelrechnen? Wir hoffen, uns von diesem Verdachte zu reinigen, wenn wir verlangen, daß nunmehr im Abschlußjahrgang der Unterstufe des mathematischen Unterrichtes alles, was in der Volksschule bzw. der Vorbereitungsklasse und in den ersten zwei Jahrgängen an dem dekadischen System und den aus ihm sich ergebenden Regeln der vier Grundoperationen mit ganzen und Dezimalzahlen etwa willkürlich und eben nur mechanisch zu erlernen hatte scheinen können, jetzt auch für den Dreizehnjährigen völlig durchsichtig werden müsse.

Knüpfen wir an dasselbe Beispiel vom Multiplizieren zweier dekadischer Zahlen an, an dem (S. 70) davor gewarnt worden war, die gleichmäßigen Tempi des mechanischen Multiplizierens nicht fortwährend durch störende „Verständnisfragen“: „Was für einen Stellenwert hat diese Ziffer?!“ zu beunruhigen. Gesetzt, wir seien

1) Es ist in Österreich die III. Klasse.

beim Multiplizieren der Polynome so weit gekommen, daß die Schüler Aufgaben wie die linksstehende sicher ausführen:

$$\begin{array}{rrrrrr}
\multicolumn{6}{l}{\underline{(6z^3 + 2z^2 + 7z + 8) \cdot (3z^2 + 5z + 6)}} \\
18z^5 + & 6z^4 + & 21z^3 + & 24z^2 & & \\
 & +30z^4 + & 10z^3 + & 35z^2 + & 40z & \\
 & & +36z^3 + & 12z^2 + & 42z + & 48 \\
\hline
18z^5 + & 36z^4 + & 67z^3 + & 71z^2 + & 82z + & 48
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
\underline{6278 \times 356} \\
18834 \\
31390 \\
37668 \\
\hline
2234968
\end{array}$$

Lassen wir nun hier in den Angaben und Resultaten substituieren $z = 10$, so geht dem Schüler in dem Augenblick, wo wir statt $\underline{(6 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 8)\ (3 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6)}$

kürzer schreiben lassen $(6000 + 200 + 70 + 8) \cdot (300 + 50 + 6)$

und dann plötzlich noch viel kürzer 6278×356,

wohl mit blitzartiger Schnelligkeit und Helligkeit ein Licht darüber auf, was es denn mit den *dekadischen Zahlen* und dem ganzen *dekadischen System* eigentlich auf sich habe. Der Mathematiker sagt: Es sind ganze Potenzfunktionen – dem Schüler mag, wenn er sich in seiner *Sprache* zuerst noch irgendwie unvollkommen über das nunmehr erst völlig Begriffene ausdrücken sollte, der Lehrer ganz allmählich und je nach Bedarf nachhelfen, worüber hier nähere Vorschläge nicht nötig sind. In der *Sache* ist es nun einmal nicht anders: Das dekadische System versteht und beherrscht nur der, der die besonderen „Stufenzahlen" 10000, 1000 als *Potenzen* der Grundzahl Zehn nicht nur kennt, sondern auch bis zu völliger Sicherheit *mit diesen Potenzen zu rechnen* sich gewöhnt hat. Eben das aber ist in der Volksschule und den untersten Klassen weder schon möglich, noch auch eilt es damit dort, da wir es eben jetzt, im innigsten Zusammenhang mit dem im letzten Jahrgang der Unterstufe abschließenden Arithmetikunterricht in Form von Anfangsgründen der Buchstabenrechnung, ganz von selbst haben können. In diesem Sinne durften wir in der Frage vom „mechanischen Rechnen" und „Verstehen" für die früheren Schuljahre dem „Wir können warten" das Wort reden. Alle schwerfällige Terminologie „Klasse der Billionen", „Ordnung der Tausender" usw. (vgl. oben, S. 60, die übliche Tafel dieser „Klassen" und „Ordnungen") wird überflüssig, wenn nur der Schüler beachtet, wie die Exponenten nach je 3, bzw. 6 Einheiten gegliedert sind. Jetzt beherrscht er mit Leichtigkeit auch die „Stufenzahlen" der Millionen $= 10^6$, Billionen $= 10^{12}$ usf., was für den I. Jhg. in Ermanglung der festen Anschauungsbilder von den Exponenten eine Marter des bloßen Wortgedächtnisses gewesen wäre – oder war und ist.

Was nun nochmals obiges Multiplikationsbeispiel betrifft, so hat der Lehrer Gelegenheit, durch Gegenüberstellung jener Multiplikationen in allgemeinen und besonderen Zahlen den Schüler erst recht in Respekt zu setzen vor seiner bisherigen Multiplizierkunst; denn was ist hier im Vergleich zur ausführlichen Rechnung mit den Potenzen von 10 und den einzelnen Koeffizienten nicht alles sinnreich ineinander geschoben: z. B. das Untereinanderschreiben, das Einzählen der beim Addieren verbliebenen Zehner in die nächste Stelle usf.! So läßt sich mit jeder beliebigen, dem Lehrer nötig scheinenden Gründlichkeit und Ausführlichkeit auf alle Einzelheiten jenes Rechenmechanismus die Aufmerksamkeit lenken; jetzt erst wird auch der Schüler aus freien Stücken sein Interesse bei jedem der vielen einzelnen Schritte vergleichend weilen lassen, die Sache nach allen Seiten wenden und drehen, und der Lehrer hinwieder mag der Erinnerung daran nachhelfen, was von mechanischen Rechnungen – wie hier beim Multiplizieren ganzer Zahlen, so bei allen Rechnungen mit ganzen und Dezimalzahlen – dem Verständnis noch verschlossen geblieben oder nur halb erschlossen sein mochte; wie er eben an recht vielen und mannigfaltigen Beispielen von Fall zu Fall beurteilen und entscheiden muß. – So hatten u. a. diese Hinweise auf das dekadische System nicht erst beim Multiplizieren, sondern auch schon beim Addieren und Subtrahieren angebahnt werden können; nur wird das Multiplizieren auch insofern den stärksten Anlaß zu ausführlichem Verweilen geben, weil eben hier erst das Multiplizieren der Potenzen, z. B. $z^3 \times z^2 = z^5$ u. dgl. m. zur zusammenhängenden Behandlung und Einübung kommt.

Was insbesondere die Stufenzahlen der Dezimalen betrifft, so sei hier ein Vorschlag ausgesprochen, der leicht wie ein arger Übergriff aus der Unter- in die Oberstufe klingen müßte, wenn er eben – halb mißverstanden würde. Sowie nämlich die Stufenzahlen der ganzen Zahlen positive Potenzexponenten, so sind die der Dezimalstellen negative Potenzexponenten, und unser Vorschlag geht dahin, dem Schüler dieses Abschlusses der Unterstufe unauslöschlich einzuprägen, daß folgende Stellenwerte und Stufenzahlen zueinander gehören:

…	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer	Zehntel	Hundertel	Tausendel	…
…	$+3$,	$+2$,	$+1$,	0,	-1,	-2,	-3	…

Was wir hiermit *nicht* empfohlen haben wollen, ist, die Schüler mit dem „Begriff negativer Potenzexponenten“ schon auf dieser Stufe zu behelligen; wird ja doch erst im VI. Jhg. (S. 227) darüber zu reden sein, daß vielleicht die Einführung dieser negativen Exponenten auch für reifere Schüler nicht gar so leicht logisch zu rechtfertigen ist. Jetzt auf der Unterstufe aber kommt es ja beim Rechnen mit negativen Zahlen auch überhaupt noch gar nicht darauf an, diese Begriffsschöpfung anders darzustellen, als wie sie sich aus der jeweiligen konkreten Anwendung heraus aufdrängt; daß es z. B. am Thermometer Grade *unter* Null wie *über* Null gibt, ist nicht schwerer zu begreifen, als daß vom Hausflur aus Stufen in das erste Stockwerk aufwärts, auf der Kellertreppe abwärts führen. Dabei braucht nicht einmal ein Wort von „negativen Zahlen“ vorausgeschickt zu sein; vielmehr sollen Begriff, Wort und Zeichen für das Negative erst dann ausgesprochen werden, wenn jene Anschauungen zur Schaffung dieses Begriffes auch dem Kinde sich aufgedrängt haben, mit dem man noch nichts von Begriffserweiterungen, willkürlichen Definitionen u. dgl. m. zu reden sich einfallen lassen wird. Und nicht minder kräftig, als die Anschauung der Wärme- und Kältegrade am Thermometer, geht sozusagen die Anschauung von Tausend als 10^3, Hundert als 10^2, Zehn als 10^1 weiter durch den natürlichen Nullpunkt der Einer (wo man aber schon nicht mehr schreiben wird $1 = 10^0$) zu den darauf folgenden Dezimalstellen. So viel weiß ja der Schüler, daß z. B. $0{,}001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$, $0{,}0001 = \frac{1}{10^4}$ usw. ist. Und so werden sich auch obige negative Stufenzahlen nicht als Potenzexponenten, sondern sozusagen als *Schrittzahlen* leicht und fest einprägen. Der Gewinn aber ist dann wieder ein umfassender: bei $1000 \times 0{,}01$ muß jetzt dem Schüler das $3 + (-2) = +1$ vor Augen stehen, bei $1000 : 0{,}01$ das $3 - (-2) = 3 + 2 = 5$; somit dort als Produkt Zehner, hier als Quotient Hunderttausender. – Wieviel mühseliges, weil verfrühtes Lernen ließe sich durch ein solches „Wir können warten“ ersparen! –

Wir haben hier vom Negativen sogleich in einigen seiner Anwendungen gesprochen; inwieweit ist aber der allgemeine Begriff der „relativen Zahlen" auf dieser Stufe zu entwickeln? Wir antworten: gar nicht weit. Aufgaben wie die, daß Augustus von 30 v. Chr. bis 14 n. Chr. regiert habe, so anschreiben lassen $+14-(-30)=14+30=44$, muß dem Knaben lächerlich vorkommen, wenn ihm sein gesunder Menschenverstand sagt, daß wer zuerst 14 und dann noch 30 Jahre regiert, eben 44 Jahre regiert hat. –

Wäre es nicht sogar einer Erwägung wert, ob wir auf dieser Stufe überhaupt schon so weit gehen müssen, daß es zu der viel verhandelten Frage kommt, warum $(-a)(-b)=+ab$? Unmöglich wäre ein solcher Verzicht keineswegs. Denn wenn in der Aufgabe $(m-x)(p-y)=mp-xp-my+xy$ die beiden Differenzen so gewählt waren, daß $m>x$, $p>y$, so ergibt sich das Auftreten des $+xy$ ganz unabhängig von allen negativen Zahlen durch eine einfache Zurückführung auf das $a-(b-c)$ $=a-b+c$, was man in der bekannten Weise erläutert (etwa: Habe ich a Mark und soll davon b Mark bezahlen, erhalte aber einen Nachlaß von c Mark, so ist das so, wie wenn man mir hinterher c Mark dazu „geschenkt" hätte). Da man sich übrigens eine solche Einschränkung in den Übungsbeispielen nicht gern auferlegen wird, wenn man doch einmal mit negativen Zahlen zu rechnen angefangen hat, so sei schon hier diejenige Betrachtung mitgeteilt, die wir den Schülern allerdings lieber erst am Anfang der Mittelstufe (im IV. Jhg.) bei der systematischen Einführung in die allgemeine Arithmetik (und noch Gründlicheres, z. B. über die Erhaltung der Rechengesetze, erst am Anfang der Oberstufe, etwa gelegentlich der negativen Potenzexponenten) mitteilen würden: Setzen wir in obiger Multiplikation $m=0$, $p=0$, so wird

$$(0-x)\cdot(0-y)=0-0-0+xy;$$

also

$$(-x)\cdot(-y)=+xy.$$ [1]

---

1) Nebenbei knüpfe ich an dieses Beispiel auch den Vorschlag, die Operationszeichen (z. B. der ersten Zeile) als Mehr und Weniger von den Qualitätszeichen (z. B. der zweiten Zeile) als Positiv und Negativ schon sprachlich so lange scharf auseinander halten zu lassen, als man eben noch in der Theorie des Negativen, allgemein der „relativen Größen" steht. Später, wenn es nur mehr auf das schnelle und sichere praktische Rechnen ankommt, mag für beides unterschiedslos wieder etwa Plus und Minus eintreten.

Damit aber das nicht nur formell gerechnet sei und damit überhaupt das ganze Rechnen mit dem Negativen nichts bloß Formelles bleibe, wird der Schüler aufmerksam zu machen sein, daß keineswegs alles das Negativwerden verträgt. Ich kann nämlich zwar am Thermometer vom Eispunkt oder aber wie Fahrenheit von einem tieferen Punkt an rechnen; muß auch die Treppenstufen nicht gerade vom Hausflur aus zählen; kurz: das Negative ist dort am Platz, wo es willkürliche Nullpunkte gibt. Es gibt aber auch natürliche Nullpunkte: Ich kann z. B. aus einer Klasse von 20 Schülern einen oder zwei oder alle zwanzig, aber ich kann unmöglich einundzwanzig und zweiundzwanzig Schüler aus ihr entlassen. Ich kann den Nullpunkt am Pegel eines Flusses willkürlich annehmen, aber nicht tiefer als an der Sohle des Bettes[1]). — Versagt man es sich nun, gedankenlos und gegenstandslos mit Negativem darauflosmultiplizieren zu lassen, sondern verlangt man ein Multiplizieren überhaupt nur in Fällen, wo das Negative in den Angaben einen Sinn hat, so wird sich auch dieser Sinn letztlich in einer solchen Verschiebbarkeit des Nullpunktes finden lassen. Hiermit aber ist es dann gerechtfertigt, wenn wir ausgegangen sind von dem Produkt zweier Differenzen von der Form $(\omega - x)\ (\omega - y)$ und nachmals den Nullpunkt um ω Einheiten zurück verlegten, wodurch wir nun vor dem $(0 - x)\ (0 - y)$ stehen[2]). — Auf diesen Gesichtspunkt werden sich auch die sonst beliebten Veranschaulichungen mit entgegengesetzten Geschwindigkeiten oder die Verlegung des Anfangszeitpunktes zurückführen lassen. Wollte man sich nur auf eines dieser konkreten Beispiele beschränken, so dürfte der Rechtsgrund, das Verfahren auf wirklich oder scheinbar heterogene Fälle anzuwenden, dem Schüler schwerlich einleuchten. Also lieber einige solche konkrete Anwendungen zuerst und dann die abstrakte Erwägung. Leicht könnte es freilich geschehen, daß es auch noch im IV. oder V. Jhg. nicht ohne weiteres allen eingeht; dann verschiebe man es eben ruhig auf einen späteren Jahrgang, etwa auf den VI., bei Gelegenheit der negativen Exponenten, oder auf den VII., gelegentlich der analy-

1) Ausnahmen bilden manche Gebirgsbäche, die im Sommer bis auf den scheinbaren absoluten Nullpunkt, nämlich den Kiesboden versiegt sind, aber unter der Kiesschicht noch weiter fließen.

2) Etwas näher und allgemeiner habe ich obigen Gedanken ausgeführt in meinen „Studien zur gegenwärtigen Philosophie der Mechanik“ (Joh. Ambros. Barth, 1900, S. 151).

tischen Geometrie, oder auf den VIII., bis zur Wiederholung und philosophischen Vertiefung des ganzen mathematischen Stoffes. —

Doch nach diesem Exkurs in das spezielle Gebiet des Negativen und damit vielleicht in schon viel höhere Jahrgänge zurück zu den sehr primitiven Bedürfnissen unseres Abschlusses der Unterstufe; natürlich mit Beschränkung auf Einzelnes:

Das Substituieren. Wie wir schon oben speziell für den Rechnungsmechanismus des Multiplizierens dekadischer Zahlen die Berufung auf das Multiplizieren von Polynomen mit fallenden Potenzen derselben Grundzahl z (für $z = 10$) empfohlen hatten, so sei auf die grundsätzliche Wichtigkeit des Substituierens besonderer Zahlen in Angabe und Resultat der allgemeinen Rechnungen noch einmal allgemein und ausdrücklich hingewiesen. Denn eben dieses Substituieren ist ja das natürlichste Bindeglied zwischen dem gegenwärtigen Vorkursus der allgemeinen Arithmetik und den besonderen Rechnungen der früheren Schuljahre. Dem Schüler ist als nächster Zweck solcher Substitutionen der einer Rechenprobe nahezulegen; denn er versteht ohne weiteres, daß, wenn man eine allgemeine Rechnung gemacht hat, sich allfällige Rechenfehler durch das Einsetzen besonderer Zahlen meistens (warum nicht immer?) verraten werden. Hierzu gehört also, daß wir für die allgemeinen Zahlen die besonderen einsetzen sowohl in der Angabe wie im Resultat, woraus sich dann die folgende schriftliche Darstellung ergibt. Z. B.

$$\begin{array}{rrrrrr}
\text{Angabe:} & a - & 2b + & 3x - & 4y + & 5z \\
& -\ 6a + & 7b - & 8x + & 9y - & 10z \\
& +\ 11a - & 12b + & 13x - & 14y + & 15z \\
& -\ 16a + & 17b - & 18x + & 19y - & 20z \\
\hline
\text{Ergebnis:} & -\ 10a + & 10b - & 10x + & 10y - & 10z
\end{array}$$

Probe durch Substitution für: $a = 1,\ b = 2,\quad x = 23,\ y = 24,\ z = 25.$

$$\begin{array}{rl}
\text{Angabe:} & 1 - 4 + 69 - 96 + 125 = +195 - 100 = +\ 95 \\
& -\ 6 + 14 - 184 + 216 - 250 = +230 - 440 = -\ 210 \\
& +\ 11 - 24 + 299 - 336 + 375 = +685 - 360 = +\ 325 \\
& -\ 16 + 34 - 414 + 456 - 500 = +490 - 930 = -\ 440 \\
\hline
\text{Ergebnis:} & -\ 10 + 20 - 230 + 240 - 250 = +1600 - 1830 = -\ \mathbf{230.} \\
\text{Auch:} & -\ 10 + 20 \qquad + 240 - 250 = \quad 260 - 260 = \quad 0.
\end{array}$$

Vor sozusagen halben Rechnungsproben, bei denen nicht in die erste Angabe und in das letzte Ergebnis substituiert wird, mag der Schüler aus leicht zu entwickelnden Gründen bei dieser Gelegenheit besonders wiederum gewarnt werden. –

Es werden weiter unten noch Bemerkungen über mehrere Einzelgegenstände des Arithmetikunterrichtes zu machen sein, so über das abgekürzte Rechnen, das Wurzelziehen, die ersten irrationalen Zahlen $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ u. dgl. Da wir aber Wert darauf legen, daß auch diese an sich freilich rein arithmetischen Dinge dem Knaben gleich von Anfang im innigsten Zusammenhang mit ihren geometrischen Anwendungen entgegentreten, so bringen wir sie erst unter c) (S. 149ff.) zur Sprache und schicken den dort besprochenen Beziehungen zwischen Arithmetik und Geometrie nur wenige Bemerkungen voraus über den besonderen

b) geometrischen Lehrstoff.

Einen passenden Abschluß findet die Vorschule der Raumlehre durch eine Zusammenfassung und Erweiterung der bisher schon gelegentlich im Geometrie- und Arithmetikunterricht vorgenommenen Längen-, Flächen- und Raummessungen. Namentlich den Flächen-Rechnungen werden jetzt naturgemäß auch z. B. bloß konstruktive Flächen-Vergleichungen und -Verwandlungen vorhergehen und nachfolgen können (jedenfalls sollten diese nicht so weit von den zugehörigen Rechnungen weggerückt werden, daß der Schüler den wesentlich gleichen Zweck von Konstruieren und Rechnen aus dem Auge verliert, wie es dann geschähe, wenn man zuerst monatelang nur Aufgaben über Flächenverwandlungen durch Konstruktionen wollte lösen lassen und während der folgenden Monate der Flächenberechnung gar nicht mehr auf das konstruktive Verfahren zurückkäme).

Was im besonderen die Raumrechnungen betrifft, so sollen diese keineswegs eine Vorwegnahme des ganzen späteren stereometrischen Kursus oder auch nur seines größeren Teiles sein[1]). Es ergibt sich aber eine ganz ungezwungene Entlastung, wenn wir uns auf die prismatischen Körper beschränken, dagegen die Volumsberechnung von Pyramiden, Pyramidenstutz und Kugel[2]) für

1) Sie dürfen z. B. auch keineswegs so viel umfassen, als was bisher in österreichischen Gymnasien noch für die IV. Klasse, die in Geometrie ganz durch die Stereometrie ausgefüllt wurde, verlangt war.

2) Was insbesondere das Volumen der Kugel betrifft, so wäre es weder ein mathematisches noch ein pädagogisches Verbrechen, bis auf weiteres, d. h. bis zum systematischen Stereometrieunterricht der Mittelstufe (vgl. S. 215), die Formel $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ einstweilen einfach mitzuteilen und dann sogleich

den zusammenhängenden Stereometrieunterricht der Mittelstufe versparen. Denn der Schritt vom Prisma zur Pyramide bedarf einer beträchtlichen Erweiterung des stereometrischen Blickes nach mehreren neuen Richtungen (der Satz, daß das dreiseitige Prisma aus drei volumsgleichen Pyramiden besteht, setzt nämlich schon eine ziemlich allgemeine Auffassung des Cavalierischen Satzes voraus usf.). Bescheiden wir uns also mit Volumberechnungen von prismatischen Körpern, einschließlich der Zylinder, so schließen sich diese an die Flächenberechnungen der Drei-, Vier-, Vielecke und des Kreises so unmittelbar an wie im metrischen System an das cm^2 das cm^3. Es erhalten aber durch das Hereinnehmen der Prismenberechnungen die Flächenberechnungen

---

mit ihr gelegentlich rechnen zu lassen. Keineswegs müßte das grob empirisch und rein dogmatisch gemacht werden. Sondern wenn der Schüler so weit ist, vom Wachsen des Volumens mit der dritten Potenz des Durchmessers oder Halbmessers überzeugt zu sein (vgl. S. 25, 26 das humoristische Beispiel von den Knödeln), so könnten immerhin an mehreren Kugeln aus gleichen und verschiedenen Stoffen die Durchmesser vom Schüler gemessen, die Gewichte auf der Wage bestimmt, die dritten Potenzen der Durch- oder Halbmesser ausgerechnet und dann durch Division gezeigt werden, daß dieses d^3 oder r^3 jedesmal mit denselben Konstanten behaftet sei. Wieder durch Division wäre aus ihr das spezifische Gewicht abzusondern und nun nur mitzuteilen, daß der verbleibende Koeffizient $\frac{\pi}{6}$ bzw. $\frac{4}{3}\pi$ sei. Hiervon die Schüler nachmals durch Berechnen von $\pi : 6$ und $\pi \cdot \frac{4}{3}$ sich überzeugen oder π selbst sogar erst wieder durch die ausgeführten Operationen aus jenen Konstanten aussondern zu lassen, gäbe gewiß eine didaktisch anregende Lehrstunde.

Aber freilich: solche Ketzereien stoßen bei ernsten, allzu ernsten „Pädagogen" auf harte Bedenken. Als ich in meiner Naturlehre für die Unterstufe die Lehre vom spezifischen Gewicht (für den Anfang des III. Jhgs., also für 13jährige) zu beleben suchte durch das Beispiel von der Korkkugel mit einem Meter Radius, wäre bald die Approbation des Buches daran gescheitert, daß ja „das Volumen der Kugel erst in der 4. Klasse drankommt". – Nun versuche man aber einmal in einer großen Gesellschaft, also auch z. B. in einer Schulklasse kleiner Tertianer, die Aufgabe: „Was mag eine Korkkugel von einem Meter Halbmesser wiegen? – Bitte nur schnell schätzen, ja nicht rechnen!" (und dabei kann man noch mit der hohlen Hand einige suggestive Bewegungen machen, die das schätzende Abwägen eines leichten Körpers nachahmen). Die Urteile pflegen zu lauten: „$\frac{1}{2}$ kg, 1 kg," wenn's hoch kommt „5 kg." Daher riesige Verblüffung, wenn man mitteilt: „über 1000 kg". Natürlich brennt nun alles drauf, sich von der Wahrheit dieser unglaublichen Behauptung durch exakte Rechnung zu überzeugen. Diese hat noch im besonderen für sich, daß, wenn das spezifische Gewicht des Korkes mit $\frac{1}{4}$ genommen wird, sich dies genau hebt mit dem 4 in $\frac{4}{3}\pi$; ferner ist $\frac{\pi}{3}$ rund gleich 1; also $r^3 = 1000\ dm^3 = 1000\ l$ usw. – Aber für solche dramatische Spannungen und Lösungen hatte jener nicht approbieren wollende Oberpädagoge (1893) nun einmal keinen Sinn.

selbst vielfach erst ein überzeugendes Anwendungsgebiet und namentlich die Möglichkeit, durch Nachmessen und Nachwägen empirisch bestätigt zu werden. Ich kann nicht leicht die für die Fläche eines Kreises gefundene Zahl durch Nachmessen bestätigen (es wäre denn durch Ausschneiden des Kreises aus Karton oder Blech, was ja dann doch auch wieder eigentlich eine Zylinderberechnung und -wägung ist), wohl aber, wenn ich den Rauminhalt eines zylindrischen Maßgefäßes von bestimmtem Durchmesser und bestimmter Höhe mittels eines kubizierten Gefäßes oder durch die Gewichtszunahme beim Füllen mit Wasser bestimme.

Wiewohl das Hereinnehmen dieses Stückes Stereometrie in den bisherigen Lehrplan der dritten Klasse eine aus den angegebenen Gründen nur ganz unbedeutende Vermehrung des theoretischen Lehrstoffes verlangt, so fordert dagegen der hiermit mannigfaltig und lebendig gewordene Übungsstoff doch eine kleine Entlastung innerhalb des Gesamtstoffes. Es bietet sich hiefür ganz von selbst dar das Stückchen **Ähnlichkeitslehre**, das aus der früheren Tradition, einfach vom Lehrstoff der oberen Klassen einen durchgängigen Auszug in den unteren Klassen zu geben, noch verblieben ist. Es mag ja ganz schön sein, den Schülern zu sagen, daß, während zur Kongruenz zweier Dreiecke immer drei Stücke gehören, zur Ähnlichkeit zweier Dreiecke u. a. schon bloß zwei Winkel ausreichen. Aber sowenig sich für den II. Jhg. die herkömmliche Kongruenzlehre pädagogisch eignet, ebensowenig für den III. Jhg. eine solche theoretische Ähnlichkeitslehre. Nicht als ob man nicht auch schon auf der unteren Stufe den Schüler auf die Ähnlichkeit von Gebilden aufmerksam zu machen hätte. Lernt er ja doch in der Geographie schon des I. Jhgs., daß die Landkarte dem wirklichen Lande „ähnlich" (u. zw. nicht nur wie der Sohn dem Vater, sondern „geometrisch ähnlich") sei, und er ist daher auch gewöhnt, dasselbe Land in verschiedenen Maßstäben dargestellt zu sehen, so daß ihm eigentlich der Begriff des Ähnlichkeitsmoduls, wenn auch nicht unter diesem gelehrten Namen, aber um so mehr der Sache nach, geläufig geworden ist. Für den Mathematikunterricht fragt es sich also, wie er denjenigen Eindruck von Ähnlichkeit, den das Kind schon mitbringt, sozusagen mathematisch ausdeuten und ausbeuten will (ähnlich wie wir statt der Kongruenz das Konstruieren als mathematisch gleichwertig, pädagogisch höherwertig fanden.) Hierauf ist nun zu antworten: Vor allem sieht der Schüler auf den ersten Blick, daß alle Quadrate, alle gleichseitigen Dreiecke, alle Kreise einander ähnlich sind, nicht aber alle Rechtecke, nicht alle gleichschenkligen Dreiecke, nicht alle Ellipsen. Hierbei reden wir weder von proportionalen Seiten noch von gleichen Winkeln, sondern halten uns an jene unmittelbaren, summarischen Eindrücke, auf die hin wir z. B. Vater und Sohn ähnlich und die meisten Gesichter einander unähnlich nennen. Hat doch auch der Schüler bei den einander ähnlichen Landkarten noch nichts von Seitenverhältnissen und Winkelgleichheiten gewußt. Es ist also wie bei der Symmetrie, deren Eindruck wir auf den Schüler haben zuerst unmittelbar wirken lassen, wiewohl der theoretische Geometer sogleich mit der symmetrischen Zuordnung zweier Punkte und dgl. beginnen zu müssen meint. Wie man nun von jenem summarischen Eindruck der Ähnlichkeit zu einer mathematisch nichts weniger als unfruchtbaren Ausnutzung jenes ersten Eindruckes kommen kann, ist schon im § 2 vorläufig angedeutet worden. Hat man z. B. den Schüler bald daran gewöhnt, als Formel für die Fläche des gleichseitigen Dreieckes nicht nur $f = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, sondern auch $f = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}433\ldots a^2$ zu handhaben, so empfindet er das vor allem als einen praktischen Rechenvorteil, indem er nämlich hinfort immer nur die Dreieckseite zu quadrieren und dann mit dem ein für allemal berechneten Koeffizienten 0,433... zu multiplizieren hat. (Wenn manche Lehrbücher es nicht so machen, sondern etwa gar durch eine Formel wie: $F = \frac{a}{2}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}$ den Schüler dazu verleiten, solche Rechnungen immer wieder von neuem anzufangen und durchzuführen, so sündigen sie gegen mehr als bloß das Prinzip der „Ökonomie des Denkens" und Schreibens.) Während und indem der Schüler die Wohltat jener Sonderung der von Dreieck zu Dreieck wechselnden Größe a bzw. a^2 und der immer konstanten 0,433.. verspürt, ist ihm auch schon ein Licht darüber aufgegangen, warum das hier so einfach geht; weil eben alle gleichseitigen Dreiecke einander „**ähnlich**" sind; und daß sie es sind, weil sie, in allen Winkeln übereinstimmend, nur von **einer** Strecke, z. B. der Seite, abhängen. Derselbe Gedanke mag auch schon beim Quadrat angebahnt worden sein; nur ist die Sache hier wieder zu simpel, als daß sie schon rechten Eindruck machen würde. Wohl aber mag beim Rechteck darauf aufmerksam gemacht worden sein, daß nicht alle Rechtecke einander ähnlich sind, weil hier eben die Fläche von zwei Strecken abhängt. Dazu dann die Analogie der ähnlichen Kreise mit ihrem einen Radius und der Ellipsen mit ihren zwei Achsen (was man ja zeigen kann, ohne auf die Theorie der Ellipsen weiter eingegangen zu sein oder einzugehen, als in den Vorübungen des I. Jhgs., vgl. S. 100). Wieder erweitert und vertieft sich dann dieses Beachten der Ähnlichkeit, wenn wir die Fläche des Quadrates statt aus der Seite aus der Diagonale oder dem Umfang rechnen lassen; ebenso die des gleichseitigen Dreieckes statt aus der Seite jetzt aus der Höhe u. dgl. m. – Natürlich wird man nicht etwa nur auf das Wachsen der Flächen mit der zweiten, sondern auch auf das der Längen mit der ersten Potenz homologer Strecken aufmerksam machen; vielleicht aber wieder mit größerem Nachdruck erst dann, wenn das nicht mehr selbstverständlich scheinende Wachsen der Flächen mit den Linien recht aufgefaßt worden ist. Die typischen Beispiele vom Quadrat $f = a^2$, $u = 4a$, vom Kreis $f = r^2\pi$, $u = 2\pi r$ lassen sich auch in verwickelteren Fällen (wie die Berechnung von f und u aus der Diagonale des Quadrates u. dgl.) immer in Erinnerung bringen und zur Durchleuchtung des jeweiligen Rechenergebnisses ausnutzen.

Wie wir uns nun alsbald nach dem Inhalt des Quadrates und Rechteckes den des Würfels und des Quaders behandelt denken, so bietet sich ganz ungezwungen auch die Gelegenheit, die Ähnlichkeit der **Körper** nicht über der der Flächen aus dem Auge zu lassen (ähnlich wie wir auf die Symmetrie der Körper mindestens ebensoviel achten lernten wie auf die planimetrischer Gebilde).

Worauf es uns mit der Empfehlung einer solchen Behandlung der Ähnlichkeitslehre im Gegensatz zur traditionellen ankommt, ist also vor allem, daß die Sache so doch hundertmal lebendiger ist, als wenn man eines Tages „zur Ähnlichkeit kommt" und jetzt sogleich von proportionalen Strecken, gleichen Winkeln und den Kombinationen der zur Ähnlichkeit ausreichenden Stücke à la Kongruenzsätze spricht. Gelegentlich mag ja immerhin zur Sprache kommen, daß zur Ähnlichkeit zweier Dreiecke im Unterschied zur Kongruenz schon die Gleichheit der drei und daher auch schon die zweier Winkel ausreicht. Aber auch wenn man daran die bekannte Folgerung des Wachsens der Fläche eines beliebigen Dreiecks mit dem Quadrate der Seite nach Fig. 129, S. 336 anknüpft, so geht eine solche abstrakte und isolierte Ähnlichkeitslehre gewiß viel leichter und jedenfalls mit weniger belebendem

Eindruck an dem Schüler vorbei, als wenn das Hervorheben der Ähnlichkeit in populärem Sinn an allen den Flächen und Raumgebilden, wo sie sich dem Unbefangenen von selbst aufdrängt, zeichnerisch und rechnerisch herausgearbeitet wird. Und gerade im letzteren Falle, wo die Ähnlichkeit kein besonderes Kapitel[1]) mehr ist und also auch nicht ganze Wochen des Unterrichts verschlingt, bildet sie eine ständige Übung im funktionalen Denken, indem sie, noch immer ganz ohne „Proportionen", die Beziehungen der direkten Proportionalität von Linien, Flächen und Körpern zu der ersten, zweiten, dritten Potenz von Linienmaßzahlen in den mannigfaltigsten Übungsbeispielen nebenher immer wiederum in den Gedankenkreis des Schülers rückt.

So haben uns die wenigen Bemerkungen über gewisse naheliegende Erleichterungen und dennoch Vertiefungen des für den III. Jhg. hergebrachten geometrischen Unterrichtsstoffes von selbst schon herangeführt an die

c) Beziehungen zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Unterricht als Abschluß der Unterstufe.

Wie schon gesagt, bieten sich solche Beziehungen zwanglos in großer Zahl dar, und es steht gerade einem Abschluß der Unterstufe aus sachlichen und didaktischen Gründen sehr wohl an, wenn er auch schon auf dieser früheren Stufe den Anfängern die Zusammengehörigkeit von Raum- und Zahlenlehre[2]) zu lebhaftem Bewußtsein bringt.

---

1) Speziell auch die Sätze $a^2 = c \cdot m$ und $h^2 = m \cdot n$ für das rechtwinklige Dreieck sind aus dieser Unterstufe ausgeschaltet und auf die Mittelstufe verschoben, weil sie wesentlich eine Anwendung einer allgemeinen Ähnlichkeitslehre bilden. (So waren sie aus ihrer traditionellen Verbindung mit dem Pythagoreischen Satz durch die österreichischen Lehrpläne von 1892 glücklich gelöst, durch die von 1900 gerieten sie dann unversehens wieder in die Unterstufe und sind erst seit 1908 wieder nicht mehr Lehrstoff der Unterstufe.

2) Wie wenig diese in der Theorie längst anerkannte Forderung bisher in die Praxis unserer Schulen eingedrungen ist, zeigt drastisch die Verfügung gewisser Schulbehörden, der Lehrer habe am Anfange des Jahres für sämtliche Schulstunden des ganzen (oder wenigstens eines halben Jahres) im vorhinein festzustellen und der Behörde mitzuteilen, an welchen Tagen er Arithmetik, an welchen Geometrie zu nehmen gedenke! Zweck dieser Verfügung ist, dafür zu sorgen, daß ja nicht mehr Arithmetik als Geometrie oder umgekehrt genommen werde. Das ist aber, wie wenn jemand, der aus der Lebensmittelchemie oberflächlich gehört hat, daß die Fette Kohlenstoff und Wasserstoff enthalten, nun verordnen würde, der Mensch habe, statt Butterbrot zu essen, abwechselnd so viel Dekagramm Holzkohle und so viel Kubikzentimeter Wasserstoff zu sich zu nehmen.

Einen ersten Anlaß, Geometrie in den arithmetischen Unterricht einzubeziehen und umgekehrt, gibt das Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren von Strecken. Wird dieses schon im I. Jhg. fast noch vor jedem Geometrieunterricht betrieben, so verpufft es, weil es dort noch ohne eigentliche Anwendung bleibt; wogegen es im III. Jhg., im nächsten Zusammenhang mit den vier Grundoperationen in allgemeinen Zahlen durchgenommen, als ein erstes einfachstes Beispiel „graphischer Darstellung" arithmetischer Operationen zur Geltung kommt und zugleich die Grundlage für die bald darauffolgenden Längenmessungen (Umfänge von Polygonen und Kreis) bildet.

Dabei war speziell beim Multiplizieren zunächst nur das einer Strecke mit einer Zahl gemeint, entsprechend dem arithmetischen Satze, daß nur der Multiplikand „benannt" sein könne, der Muliplikator aber notwendig „unbenannt" sein müsse. Ein ganz neues Gebiet täte sich nun auf mit der sog. Multiplikation zweier Strecken, wie sie der Flächenformel für das Rechteck $f = gh$ zu entsprechen scheint. Gegenüber den langwierigen Diskussionen, die in älteren Jahrgängen von Hoffmanns Zeitschrift für den mathematischen Unterricht der Frage, ob es eine Multiplikation zweier Strecken wirklich gebe oder nicht, gewidmet worden sind, kann ich an dieser Stelle nur kurz das Credo[1]) aussprechen, daß um den Satz von den unbenannten Multiplikatoren nun einmal nicht herumzukommen ist, und daß es somit eine Multiplikation zweier Strecken in anderem als symbolischem Sinne nicht gibt und nicht geben kann; bloße Symbolik aber ist nichts für eine Unterstufe: auf dieser soll das Kind sehen, wie die Sache ist, nicht, wie sich „bloße Zeichen" verknüpfen lassen.* Dies zugegeben ist für die Unterstufe folgendes die

---

Daß vollends die Aufteilung von Arithmetik und Geometrie an verschiedene Lehrer in den unteren Klassen der österreichischen Realschulen ein unhaltbarer Zustand sei, ist ausgeführt in den „Prager Vorschlägen", S. 4.

1) Zu einer Revision der Gründe und Gegengründe in Sachen der Streckenmultiplikation ist hier nicht der Ort (über die Grundsätze der „Streckenrechnung" in der rein formalen Geometrie vgl. z. B. HILBERT, Grundlagen der Geometrie, II. Aufl. § 15ff.). – Andeutungen zum psychologischen Verständnis der namentlich in der Physik so zahlreichen Fälle, wo man scheinbar zwei benannte Größen (z. B. Arbeit = Kraft $\times$ Weg) zu multiplizieren, zwei ungleich benannte (z. B. Weg und Zeit, Masse und Volumen) zu dividieren hat, habe ich wiederholt gegeben in der Zeitschr. f. d. physik. u. chem. Unterr. und in meiner Physik (Vieweg 1904), math. Anhang Nr. 7 „Physikalische Dimensionen". (Vgl. oben S. 84, Anm. und S. 183, Anm. 2.)

einzige in Betracht kommende Weise, die Formel $f = g \cdot h$ einzuführen:

Aufgabe: In einem Rechteck sei die Grundlinie 5 cm, die Höhe 3 cm lang (dieses Reckteck wird vom Schüler möglichst genau und sauber gezeichnet). Wieviel cm^2 enthält es? Wir teilen es durch zwei zur Grundlinie Parallele in drei rechteckige Streifen von 5 cm Länge und 1 cm Höhe. Dann hat jeder solche Streifen ebensoviel (also fünf) Quadratzentimeter Flächeninhalt, wie die Grundlinie Längenzentimeter maß. Und es gibt ebensoviel (also drei) Streifen, wie die Höhe Längenzentimeter maß. Die Anzahl der Quadratzentimeter des Rechteckes ist somit $5\ cm^2 + 5\ cm^2 + 5\ cm^2$. Diese Summe von drei gleichen Summanden wird $5\ cm^2 \times 3$ geschrieben. Und so wie 5 Äpfel $\times 3 = (5 \times 3)$ Äpfel, so ist $5\ cm^2 \times 3 = (5 \times 3)\ cm^2$.

Es sei sogleich hier eingeschaltet, daß die Erweiterung der Regel $f = g \cdot h$ für andere als ganzzahlige g und h sich auf der Unterstufe am besten begnügt mit einem Beispiel, etwa $g = 5{,}4$ cm, $h = 3{,}2$ cm. Liest man das als 54 und 32 Millimeter, so ist sofort wieder die Regel für die ganzzahligen Größen anwendbar, und nachmals schreibt man die $1728\ mm^2 = 17{,}28\ cm^2$. Die Sache muß dem Schüler unter den Händen klar werden, wenn er alles auf Millimeterpapier zeichnet, dabei die mm^2 sozusagen abkürzend zählt und nachmals in die cm^2 umrechnet. Erst nach solchen Übungen mag etwa auch ein Beispiel $g = 5\frac{1}{2}$ cm und $h = 3\frac{1}{3}$ cm folgen, wobei wieder die cm^2 in Sechstel zerlegt und diese abgezählt werden. – Hiernach verbleiben für die Mittel- und Oberstufe immer noch die inkommensurablen Strecken, deren Behandlung sich danach richten wird, inwieweit man auch sonst auf die begriffliche Kritik des Irrationalen eingehen zu können meint (unser Lehrplan rät vor einem Allzuviel hierin selbst noch für die Oberstufe ab). – Für die Unterstufe seien also im folgenden immer oder doch vorwiegend rationale und letztlich ganzzahlige Maßzahlen vorausgesetzt.

Nirgends hat hier der Schüler gesehen, daß 5 cm mit 3 cm multipliziert worden wären; und wenn nötig werde ihm noch nachträglich recht eingeschärft, daß und warum das sinnlose $5\ cm \times 3\ cm$ kein vernünftiger Ersatz ist für das harmlose $5\ cm^2 + 5\ cm^2 + 5\ cm^2$. – Es bedarf also keiner tiefsinnigen Erklärungen, warum in der Geometrie jener Satz vom unbenannten Multiplikator nicht gelten soll, der in der Arithmetik doch so sehr eingeschärft worden war. – Natürlich entfallen dann auch alle Betrachtungen, ob und wieso $1\ cm \times 1\ cm = 1\ cm^2$, vielmehr ist der Schüler eindringlich aufmerksam zu machen, daß im Zeichen cm^2 auch das „hoch 2“ kein wirklicher Potenzexponent (sondern nur als Anzahl der Längsdimensionen gemeint) ist. – Ganz

Analoges gilt für die im baldigen Anschluß zu entwickelnde Formel $V = G \cdot h$ für das gerade (und weiterhin für das schiefe) Prisma. Werden hier fleißig die Würfelchen benutzt, deren wir uns schon im I. Jhg. bedienten (vgl. S. 78, 94 u. a.), so kommt es von vornherein zu keinen Dunkelheiten, wieso man „eine Fläche mit einer Strecke multiplizieren" könne; vielmehr zerstreuen sich dann auch die letzten Nebel des $f = gh$ buchstäblich „unter den Händen" des Schülers.

Ein schon gegenwärtig nach Gebühr gepflegter Übungsstoff ist die graphische Darstellung für $(a+b)^2$, $(a+b)(a-b)$ und $(a-b)^2$. Nur könnte man sich vielleicht der kindlichen Auffassung noch mehr anpassen, wenn man das Gesetz $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ sozusagen entdecken läßt durch folgende konkrete

Aufgabe: Zeichne ein Quadrat von 10 cm Seitenlänge, laß dann die eine Seite um je 1 cm länger, die andere um 1 cm kürzer werden und zähle die auf jedes dieser Rechtecke entfallenden Quadratzentimeter. Es ergeben sich $10 \times 10 = 100$, $11 \times 9 = 99$, $12 \times 8 = 96$, $13 \times 7 = 91$, $14 \times 6 = 84$ usw. Quadratzentimeter. Es fehlen also der Reihe nach auf das anfängliche 100 zuerst ein 1 cm^2, dann 4 cm^2, dann 9 cm^2 usw.; also die Quadratreihe. – Jetzt erst die Verallgemeinerungen a für 10 cm, b für 1, 2, 3, 4 cm usw. Und jetzt erst schließlich die „Erklärung" für das entdeckte geometrische Gesetz durch das Ausmultiplizieren von $(a+b) \cdot (a-b)$, wo sich die $+ab$ und die $-ab$ heben.

Bei unserem Anschluß von einfachsten stereometrischen an die planimetrischen Rechnungen sollte neben der räumlichen Darstellung des $(a+b)^2$ auch die des $(a+b)^3$ nicht fehlen. Auch diese „zwei Würfel (a^3, b^3), drei Platten ($3a^2b$), drei Stangen ($3ab^3$)" kann sich der Schüler z. B. für $a = 2$ cm, $b = 1$ cm mittels 27 cm^3 mit eigenen Händen aufbauen. –

Daß das wenige, was über negative Zahlen auf dem Abschluß der Unterstufe zu sagen ist, am besten – trotz allfälliger Einwendungen seitens der höheren Wissenschaft – an die „Zahlenlinie" angeknüpft wird, daß aber auch der immer noch abstrakte Gedanke der „Zahlenlinie" überall ins Konkrete zurückübertragen werden muß, indem man auf die Skalenteile oberhalb und unterhalb des Eispunktes, auf die Dezimeter im Flußpegel oberhalb und unterhalb des normalen Wasserstandes usw. gebührende Rücksicht nimmt, ist schon oben (S. 142) in anderem Zusammenhange berührt worden.

Ferner sei es angesichts der Wichtigkeit der Sache gestattet, nochmals darauf zurückzukommen, daß wohl die erste, natürlichste und zugleich eindringlichste Veranlassung, den Gedanken eines funktionalen Zusammenhangs aus dem Schüler hervorzulocken, die Umfangs- und Flächenberechnungen sind. Daß das Quadrat von 2, 3, 4...-facher Seite nicht den 2, 3, 4...fachen Flächeninhalt hat, sondern daß dieser „nach einem anderen Gesetz“, „in einem stärkeren Maße“, nämlich „quadratisch“ mit der Seite wächst, ist zwar ein so einfacher Gedanke, daß er sich angesichts der Formel $f = a^2$ von selbst verstehen mag. Wer aber wirklich Schulmeisterblut in den Adern hat, weiß, daß die Formel für sich den Schüler von selbst kaum schon zu diesem Denken in Funktionen führt (wiewohl sich zeigen mag, daß der Gedanke in einzelnen Schülern schon wie latent vorhanden ist); und er wird auch nicht in Verlegenheit sein, der Sache immer wieder neue sachliche und sprachliche Wendungen abzugewinnen, damit die Formel wirklich dieses neue Leben annehme. Ein nur zu oft sich darbietender Anlaß dazu ist z. B. im Pythagoreischen Satz gegeben, wo es eben nicht mit dem Addieren der Katheten und auch nicht mit dem ihrer Quadrate getan ist, wenn man die Hypotenuse haben will, worauf schon vor dem zusammenhängenden Durchnehmen des Satzes (allenfalls als graphisches Gegenstück zu der so oft nötigen Warnung, daß $a^2 + b^2$ nicht $[a + b]^2$ und $\sqrt{a^2 + b^2}$ nicht $a + b$ ist), immer wieder aufmerksam gemacht werden kann und leider muß. Noch eindringlicher mag alles an minder einfachen Formen, z. B. beim Kreis und bei der Addition zweier Kreise, werden.

Statt noch weiterer Einzelbeispiele über die Wahl spezieller Aufgaben und ihrer vollen Ausbeutung für das sehr allmähliche Anbahnen einer freieren, schon eigentlich mathematischen Auffassung geben wir Skizzen dreier umfassenderer Lehrproben, über die irrationalen Zahlen (einschließlich Anfängen des abgekürzten Rechnens), über den „Kopfzerbrecher“ und über den Pythagoreischen Lehrsatz.

Irrationale Zahlen und abgekürztes Rechnen. Wurzelausziehen.

In der Abfolge der vorstehenden Titel wird sogleich befremden, daß des Irrationalen vor dem Wurzelausziehen Erwähnung geschieht. Aber es ist ja keineswegs auf dieser frühen Stufe individualisierender Behandlung der Zahlen- und Raumlehre irgendwie ein allgemeines Eingehen auf irrationale Zahlen beabsichtigt; vielmehr ist es völlig ausreichend, wenn wir den Schüler vor allen Allgemeinheiten mit den Eigenschaften von $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und π einigermaßen vertraut machen, wie man im ersten Schuljahre den Zahlenkreis von 1—20 bearbeitet. Zu eben jenen individuellen Zahlen aber liefert uns die auch schon für den kleinen Anfänger überzeugendsten und eindrucksvollsten Anlässe und Anwendungen das gleichschenklig-rechtwinklige, das gleichseitige Dreieck und der Kreis. — Jener Unglaube einzelner (einstiger) Schulmachthaber aber, daß man z. B. von $\sqrt{2}$ reden und mit ihr arbeiten könne, ehe man den Mechanismus des Wurzelausziehens eingedrillt hat, wird hoffentlich weichen, wenn man sich in folgenden ganz konkreten Fall hineindenkt.

Lehrprobe: Sogleich beim Aufstellen der Formel $f = a^2$ für die Fläche des Quadrates hat sich gewiß mehr als einmal die Gelegenheit ergeben, dem Glauben entgegenzutreten, daß das Quadrat von 2, 3, 4facher Seite auch den 2, 3, 4fachen Flächeninhalt hat. (Auch wo Platon aus seinem Sklaven das Wunder der Irrationalität zwischen der Diagonale und Seite des Quadrates herausfragt, knüpft er an diesen voraussichtlichen Schnitzer an). Natürlich besinnt sich der Schüler sofort wieder darauf, daß das Quadrat vom $a = 2$ cm nicht $f = 2$ cm^2, sondern 4 cm^2 hat (lieber auf das gezeichnete konkrete Quadrat hin als auf die bloße Formel). Nun packen wir aber den Schüler bei dem Schnitzer und fragen ihn: Wie lang müßte wohl die Seite sein, damit die Fläche wirklich 2 cm^2 wäre? Und da nun sonst die Fläche des Quadrates gefunden wird, indem man die Maßzahl der Seite, gleichviel ob es eine ganze Zahl oder eine mit noch so vielen Dezimalstellen ist, mit sich selbst multipliziert, so gilt es nun, eine Zahl zu finden, die mit sich selbst multipliziert 2 gibt. Von einer Definition einer „Quadratwurzel" ist hier noch keine Rede, geschweige vom Mechanismus des Wurzelausziehens. Da aber der Schüler selbst an eine andere Methode als an unmittelbares Probieren füglich nicht denken kann, so geht auch hier „Probieren über Studieren". Eigentlich hatte er es ja schon bei seinem Fehler mit 2 selbst probiert; aber $2 \times 2 = 4$, und nicht das verlangte 2. Also weniger als 2, etwa 1,5; aber $1{,}5 \times 1{,}5 = 2{,}25$, also noch immer zuviel. Daher 1,4; aber $1{,}4 \times 1{,}4 = 1{,}96$, zuwenig. Die gesuchte Zahl liegt also zwischen 1,4 und 1,5. Versuchen wir es mit 1,41; es gibt 1,9881, schon eine recht befriedigende Annäherung an 2 (um nur 0,0119 zuwenig). Versuchen wir es aber mit 1,42, so ergibt sich die etwas minder befriedigende Annäherung 2,0164; wollen wir also einen noch genaueren Wert, so fügen wir zu den 1,41 noch eine Ziffer hinzu und erkennen, wenn wir 1, 2, 3, 4, 5 versucht haben, daß 4 die beste ist: also $a = 1{,}414\,.\,.$ – So sieht sich der Schüler vor zwei Möglichkeiten: vielleicht muß er immer wieder eine Ziffer zusetzen und kann durch einfaches, freilich immer umständlicher werdendes Multiplizieren die Ziffernreihe beliebig weit fortsetzen; oder aber es zeigt sich nach dem Hinzufügen der soundsovielten Ziffer, daß nun die Zahl mit sich selbst multipliziert genau 2 gibt. Es bleibt einigermaßen dem Geschmacke des Lehrers überlassen, ob er sogleich hier diese letztere vermeintliche Möglichkeit ausschließen will; wenn ja, so geschehe aber auch das nicht sogleich durch die bekannte allgemeine Überlegung $\left(\text{wäre } \sqrt{2} = \frac{a}{b},\right.$ wo a und b als relativ prim anzusehen sind, so müßte $\left.\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = 2 \text{ sein usf.}\right)$, sondern wieder ganz konkret: das erste Ergebnis $1{,}4 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$ konnte nicht genau die gesuchte Zahl sein, denn $\frac{7}{5} \cdot \frac{7}{5} = \frac{49}{25}$ kann ja nicht genau 2 sein, weil 7 und 5 relativ prim sind (statt $\frac{49}{25}$ wäre erst $\frac{50}{25} = 2$ usf.). Alles in allem wirksamer dürfte diese doch schon auf ein allgemeines Theorem abzielende Betrachtung erst hinter dem Mechanismus des Wurzelausziehens (vgl. S. 162) zur Sprache kommen, falls der Schüler hofft, durch dieses im Vergleich zu dem plumpen Mitsichselbstmultiplizieren immerhin schon abgekürzte Verfahren es doch schließlich zu einer letzten, abschließenden Dezimale zu bringen. – Nach dem Muster dieses Herausprobierens der Annäherungen 1,414 und 1,4142 mag man sogleich als Hausaufgabe ebenso die Zahl herausprobieren lassen, die mit sich selbst multipliziert die Zahl 3 gibt; und dabei bleibt es dem geringeren oder größeren Fleiß der Knaben anheimgestellt, bis auf wieviel Stellen sie es probieren wollen.

Nachdem durch diese zwei Beispiele die arithmetische Möglichkeit *ad oculos* demonstriert ist, zu jeder beliebigen ganzen oder gebrochenen Zahl das zu finden, was wir später ihre „Quadratwurzel“ nennen werden, mag sich nun das Interesse wieder in seine zwei Richtungen spalten; das arithmetische und das geometrische; wobei wir empfehlen, dem geometrischen auch hier den Vortritt zu gewähren, d. h. nicht früher und nicht mehr an solchen primitiven Wurzelausziehungen vorzunehmen, als die jeweiligen geometrischen Interessen erfordern. So läßt sich z. B. noch vor der Kenntnis des Pythagoreischen Satzes, der ja den weitaus größten Teil aller Anlässe zum Wurzelrechnen gibt, die oben immerhin noch allzu abstrakt-arithmetisch formulierte Aufgabe von der Verdoppelung des Quadrates ganz *ad hoc* auch geometrisch-anschaulich stellen und lösen mit den als Spielzeug verbreiteten farbigen Dreiecksplättchen nach Fig. 64. Da wir solchen geometrischen Handgreiflichkeiten eigens die beiden folgenden Lehrproben widmen wollen (indem wir der über den Pythagoreischen Satz selbst noch die mit dem Kopfzerbrecher vorausschicken), so besehen wir uns aber zunächst noch etwas näher, was sich an jene sozusagen brutale Methode des Wurzelausziehens durch bloßes Probieren und Ausmultiplizieren an arithmetischen Fortschritten zu den neuen Einsichten und Künsten am ungezwungensten anschließt. – Indem wir mit der Wahrscheinlichkeit rechnen, daß schon jenes empirische Quadratwurzelausziehen manchem Leser eine mathematische Gänsehaut gekostet hat, fügen wir als einen weiteren Gegenstand des Schreckens sogleich noch den Vorschlag hinzu:

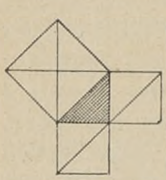


Fig. 64.

Gerade an diese durch Probieren gefundenen Quadratwurzeln mit den darauffolgenden Multiplikationen je zweier gleicher Dezimalzahlen, läßt sich mit pädagogischem Vorteil das **abgekürzte Multiplizieren unvollständiger Zahlen** anknüpfen. – Wer freilich sich daran gewöhnt hat, daß das „abgekürzte Multiplizieren und Dividieren" als eine Sache für sich, lange vor[1]) jeder konkreten Anwendung (und vielleicht überhaupt auch im späteren Lehrgang ohne solche) vorwiegend nur als „formalbildende" Marter und als gute Gelegenheit, reichliche „Nicht genügend" einzusammeln, behandelt wird, könnte diesem gelegentlichen Einflechten des abgekürzten Rechnens gewiß keinen Geschmack abgewinnen. Da es aber der Lehrer, welche jener verunglückten Ansetzung des abgekürzten Rechnens wirklich Geschmack abgewonnen haben, hoffentlich ohnedies nicht viele gibt, so wollen wir eingestehen, daß sich in unserer eigenen Unterrichtspraxis das folgende Vorgehen bestens bewährt hat.

Lehrprobe: Nachdem die Schüler einige Stellen von $\sqrt{2}$ und – nach genügend anhaltender anderweitiger Beschäftigung mit gerade dieser $\sqrt{2}$ (vgl. die unten folgende Lehrprobe mit dem Kopfzerbrecher) – auch einige Stellen der $\sqrt{3}$, also etwa $\sqrt{3} = 1{,}732$ durch Probieren gefunden haben, teilt der Lehrer nun eine größere Zahl von Stellen mit, etwa das leicht zu merkende 1,7320508, und er läßt die Probe auch hierüber zu Hause durch gewöhnliches Ausmultiplizieren machen. Dies ist nun

1) Daß solche pädagogische Mißgriffe möglich sind, zeigten die bisherigen österreichischen Lehrpläne, die abgekürztes Rechnen schon für die zweite Klasse, wo es an ungekünstelten Aufgaben in der Hauptsache ganz fehlt, verlangt hatten.

aber bei den vielen Stellen schon recht lästig; und daher wird er dankbare, wenn auch verwunderte Zuschauer finden, wenn er in der folgenden Stunde die linksstehende abgekürzte Rechnung zeigt:

1,7320508	
8 0502371	
1 7320508	1,7320508?? $\times$ 1,7320508??
1 2124356	1 21243556??
519615	51961524??
34641	34641016??
866	86602540??
14	138564064??
3,0000000	2,9999998????????

Dieses Schreiben der Ziffern in umgekehrter Reihenfolge sieht sich für den Anfänger höchst kurios an, aber eben dadurch reizt es seine Neugierde, und das ist uns ja ganz recht. Und da das erwartete 3,00 . . . glatt herauskommt, so spricht das *Wie* der Sache immerhin bis zu gewissem Grade für sich selbst. *Warum* aber haben wir das so gemacht? Und nun lasse der Lehrer neben jene kurze Rechnung die lange nochmals an die Tafel schreiben und an alle Stellen, die unbekannt gewesen waren, weil eben die auf 8 folgenden Dezimalen unbekannt gewesen waren, *Fragezeichen* ganz so wie *Ziffern* schreiben. Sollte hier nicht das dem Schüler vor Augen Stehende so sehr für sich sprechen, daß sich die Erläuterungen unter mäßiger Nachhilfe des Lehrers dem Schüler von selbst ergeben? So z. B. vor allem das anfänglich befremdende Schreiben des Multiplikators in verkehrter Reihenfolge: es ist durch die Vergleichung mit der nebenstehenden nicht abgekürzten Multiplikation und was in ihr an gültigen Ziffern *untereinander* steht, sofort gerechtfertigt. *Hier* erst ist nun auch ein reichliches Fragen nach Stellenwerten, das wir für den ersten Jahrgang als verfrüht bezeichneten (S. 70), durchaus am Platze. Ferner das „*Korrektur*“-nehmen: wieder sieht der Schüler in der Hauptsache darin nichts anderes, als das Einzählen der von der vorausgegangenen Multiplikation, deren Einer wir unterdrückt hatten, verbleibenden Zehner. Und erst wenn diese natürliche Auffassung sich eingelebt hat, mögen nähere Erläuterungen über die halbe Einheit der nächst höheren Stelle usw. folgen.

Muß darum, weil wir das *Produkt* zweier *gleicher* unvollständiger Zahlen abgekürzt haben bilden lernen, nun auch schon die *ganze* Lehre vom *abgekürzten Rechnen* in einem Zug vorgenommen werden? Nichts weniger als das; die ersten konkreten Anlässe, auch *ungleiche* unvollständige Zahlen zu multiplizieren, werden wahrscheinlich die Umfangsberechnungen des

Kreises geben; und es wird einiges von den Vorschlägen auch verwendbar bleiben, wenn man den Kreis vor dem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck durchnimmt. Es bedarf natürlich keiner zusammenhängenden Darstellung der Lehre vom abgekürzten Rechnen (gegen gewisse Schwerfälligkeiten beim abgekürzten Dividieren vgl. das S. 76 über die Bestimmung des Stellenwertes der ersten Quotientenziffern Gesagte), wohl aber einer speziellen und einer allgemeinen Bemerkung:

Die eine betrifft das „abgekürzte Wurzelziehen" oder vielmehr den Umstand, daß in einem Lehrplan[1]) dieses für die Unterstufe geradezu verboten wurde. Nicht dieser Vorgang an sich gäbe hier Anlaß zur Besprechung, sondern weil er dafür typisch ist, daß eine bestimmte Manier des abgekürzten Rechnens dem Lehrer und Schüler als eine Erschwerung erscheinen kann, wo es doch unter allen Umständen eine Erleichterung sein und vom Schüler auch als solche empfunden werden soll. Nun ist doch gerade das Ausziehen von (nichtrationalen) Wurzeln eine Operation, bei der der Schüler, je mehr Stellen er schon gerechnet hat, die Rechnung nicht sich einem Ende nähern, sondern

---

1) Nachdem nämlich durch den österreichischen Lehrplan von 1892 unter anderem auch das abgekürzte Wurzelziehen für die dritte Klasse empfohlen war, ist es 1900 sogar in dem Erlasse des Ministers selbst ausdrücklich aus dem Lehrplan der dritten Klasse ausgeschlossen worden, als ob es eine Sache von besonderer pädagogischer Gefährlichkeit wäre. –

In diesem Zusammenhange sei auch des folgenden Vorfalles gedacht. Der von den Wiener Vereinen „Realschule" und „Mittelschule" zur Reform des Mathematikunterrichtes eingesetzte Sonderausschuß empfahl für die zweite Klasse der Realschule bzw. dritte Klasse des Gymnasiums: „Das Rechnen mit unvollständigen Zahlen, die abgekürzte Multiplikation und Division werden erst im Anschluß an die Lehre von den Potenzen in der dritten Klasse, dann aber mit Hilfe derselben behandelt (Rechnen mit dekadischen Zahlen in allgemeiner Form)". In der zur Beschlußfassung über jene Vorschläge einberufenen Vollversammlung der genannten Vereine fand einer der einflußreichsten Fachmänner „das Rechnen mit dekadischen Zahlen in allgemeiner Form" eine für die Unterstufe „geradezu haarsträubende" Forderung. Es sei dies als Probe dafür angeführt, wie sehr das durchaus Vernünftige sogar auf einem so primitiven und durchsichtigen Gebiete, wie es das einer Didaktik für den Rechenunterricht der Unterstufe sein sollte, mißverstanden werden kann. Oder ist auch das oben (S. 138ff.) empfohlene Erläutern des Positionssystems durch Einsetzen von $z = 10$ in Polynome, die nach fallenden Potenzen von z geordnet sind und einziffrige Koeffizienten haben, überhaupt „haarsträubend"? Wenn nicht, so mag immerhin auch z. B. das abgekürzte Multiplizieren, wie es oben ganz ohne Präambulum an $1{,}732\ldots \times 1{,}732\ldots$ zuerst vorzuzeigen empfohlen wurde, nachmals recht wohl zurückgehen auf ein solches „Rechnen mit dekadischen Zahlen in allgemeiner Form" und es selbst wieder vertiefend erläutern und begründen.

immer mehr anschwellen sieht; denn die Teilreste bekommen um so mehr Ziffern, je mehr Wurzelziffern man schon entwickelt hat. Gerade hier also wird der Schüler für ein Verfahren besonders dankbar sein, das ihm ganz dasselbe Resultat mit Ersparung jener immer mehr anschwellenden, ärgerlichen Ziffernreihe liefert. Der Lehrplanverfasser, der dem Schüler diese Wohltat nicht vergönnt, mag sich den didaktischen Weg, wie dem Schüler das abgekürzte Radizieren beizubringen sei, wohl recht verzwickt vorgestellt haben. Dagegen wird ein Lehrer, der es den Schülern so leicht als möglich machen will, auch hier wieder, nachdem die schwerfällige Rechnung an die Tafel geschrieben ist, ohne Präambulum den Knaben sagen: Jetzt will ich euch zeigen, wie man dieselben Resultate viel wohlfeiler haben kann. Und statt z. B. nach der dritten entwickelten Stelle noch einmal zwei Nullen anhängen und eine abschneiden zu lassen, schneidet er eine Stelle im letzten Teildivisor ab und gewinnt nach dem bereits eingeübten Verfahren der abgekürzten Division noch drei weitere Stellen. Als gültig sind sie legitimiert, weil sie eben mit dem vollständig gerechneten Ergebnisse übereinstimmen (– freilich kein strenger Schluß, denn es könnte in diesem Beispiel Zufall sein; aber einige analoge, zuerst vollständig, dann abgekürzt gerechnete Aufgaben beruhigen den Schüler mit derselben induktiven Sicherheit, bei der man ihn auch sonst auf der Unterstufe so häufig sich beruhigen ließ). Aber auch die Einsicht in den Grund der Übereinstimmung zwischen den so und so gerechneten Wurzelziffern läßt sich hinterher lückenlos herstellen: sind es ja doch auch beim nicht abgekürzten Radizieren immer die ersten Ziffern des Teildividends und des Divisors, die die neuen Wurzelziffern liefern, und es muß daher gestattet sein, die jeweilig letzten Ziffern dieses Divisors nach und nach aus der Rechnung auszuschalten. – Eben dieses Beispiel dürfte geeignet sein, die folgende

Allgemeine Bemerkung über den Gebrauch des abgekürzten Rechnens wenigstens auf der Unterstufe zu erläutern und zu begründen: Das „abgekürzte Rechnen“ ist freilich nichts weniger als eine Erleichterung, sondern eine der gefürchtetsten Fußangeln für den Schüler, wenn man erzwingen zu müssen glaubt, daß vor Beginn des Rechnens schon eine bindende Überlegung darüber angestellt wird, ob man schon nach der dritten oder erst nach der vierten Divisorziffer „abschneiden“ müsse, um die gewünschte Zahl von Stellen zu bekommen. Ist es leichtfertig, wenn wir empfehlen, im Falle eines solchen Zweifels doch auf alle Fälle lieber erst nach der vierten Stelle und, wenn auch dabei noch ein Rest von Zweifel sich rühren sollte, gar erst nach der fünften Ziffer abschneiden zu lassen, selbst wenn es für den Kenner auch schon nach der dritten ausreichend gewesen wäre? Es ist doch reine Donquichoterie, unter dem Titel „abgekürztes Rechnen" Vorüberlegungen anstellen zu lassen, die zehnmal so zeitraubend und zwanzigmal so schwierig sind, als wenn man alle Ziffern hätte schreiben lassen und erst hinterher die allenfalls nach obigem Fragezeichen-Verfahren als unsicher zu erkennenden wieder verworfen hätte. – Nicht als ob wir den wissenschaftlichen Wert der schon oft[1]) mit Genauigkeit und Eleganz durchgeführten Prinzipien zur Beurteilung der Verläßlichkeit errechneter Ziffern irgendwie geringschätzten. Aber schon der Umstand, daß solche Untersuchungen für reife Mathematiker ein dankbares Überlegungs- und Darstellungsgebiet bilden, sollte davor warnen, solche Beurteilungen auch bei Kindern erzwingen zu wollen. Abgesehen von der hierin liegenden pädagogischen Grausamkeit erzielt man auch wissenschaftlich das Gegenteil, nämlich daß soundso viele, die in der Schule nie zu einem wirklichen Verständnis des ihnen so erschwerten abgekürzten Rechnens sich haben durcharbeiten können, später als Chemiker, Physiker usw. jenen Schwanz von erschwindelten Ziffernreihen nachschleppen, über die hundertmal gespottet worden ist, und die doch immer wieder auf Mineralwasserflaschen als sieben Dezimalen des Lithiumgehaltes prangen.

Den richtigen Zeitpunkt und den eindringlichsten Anlaß, die Schüler das Vernünftige eines wirklich (nicht nur dem Namen nach) abgekürzten Rechnens und das Unvernünftige der willkürlich, z. B. durch gedankenloses Weiterdividieren oder Reduzieren verlängerten Ziffernschwänze unmittelbar fühlen zu lassen, bietet eben ganz von selbst der Abschluß der Unterstufe mit seinen Längen-, Flächen-, Raumrechnungen. Wollte der Lehrer es sich zu einer Regel machen, die nur in wohlerwogenen Fällen Ausnahmen verträgt, daß z. B. Umfänge und Flächen von Kreisen nur dort und insoweit berechnet werden, als der Schüler den Halbmesser (oder Durchmesser, bzw. den Umfang) selber

1) Z. B. Hočevar, „Über einige elementare Aufgaben der Approximationsrechnung" (Ztschr. „Mittelschule", Wien 1890).

gemessen hat oder sich eine vorausgegangene Messung (z. B. an der Erdkugel) mit allen ihren materiellen Schwierigkeiten lebhaft vergegenwärtigt, so würde ihm bald die Lust vergehen, nun π mit 10 oder auch nur mit 5 Stellen in Rechnung zu ziehen, wenn er doch beim Nachmessen der errechneten Größe merkt, daß er sie eben auch nicht auf mehr Stellen – bei den dicken Kreide- und Bleistiftstrichen etwa 2 bis 3, schon nur in sehr günstigen Fällen auf 4 – mit seinem Maßstabe kontrollieren kann, als er die Ausgangsgröße hatte messen können. – Und wie ließe sich bei solchem Sparen törichter Dezimalen die Anzahl und Mannigfaltigkeit der Übungsaufgaben erhöhen (– es ist ganz dieselbe Erwägung schon auf der Unterstufe, die auf der Oberstufe für die vierstelligen Logarithmen spricht – vgl. S. 239). – Hiermit haben wir aber auch schon an die tiefer liegende Wurzel gerührt, aus der die Besserung auch in dieser sehr speziellen (in ihrer Art freilich doch wieder sehr allgemeinen) Angelegenheit hervorwachsen muß: Rückkehr vom rechnerischen Formalismus zu den lebendigen Anwendungen – die auf dieser Stufe eben vorwiegend die geometrischen (auf der Oberstufe die physikalischen) sein sollten. –

Es erübrigen nur noch einige Worte über einen auf der Unterstufe unentbehrlichen Rechenmechanismus, den des Wurzelziehens (nachdem oben vorübergehend schon vom abgekürzten Wurzelziehen die Rede war). – Natürlich wird man zuerst die Quadratwurzel aus den reinen Quadraten zweiziffriger Zahlen, also aus 3- und 4-ziffrigen Zahlen ausziehen lehren. Sollte es sich rechtfertigen lassen, wenn der Lehrer sofort den Mechanismus hiefür, ohne vorausgeschicktes Deduzieren der Methode, direkt an einem oder an zwei Beispielen zeigt und es dann an einem dritten oder vierten Beispiel fürs erste einmal rein mechanisch nachahmen läßt? Man mag, wenigstens versuchshalber, diese didaktische Ketzerei immerhin wagen, weil gerade das etwas Geheimnisvolle des Mechanismus (Teilung in Klassen von je zwei Stellen, von den Einern angefangen, später „nächste Klasse herunter, eine Stelle abgeschnitten, dividiert durch das Doppelte des Gefundenen“ usw.) die Neugier des Knaben reizt, und er daher, was ihm als vorherige Deduktion der Methode schwierig erschienen wäre, als nachträgliche Erklärung des Vorganges nun dankbar annimmt. Diese „Erklärung“ besteht einfach darin, daß man vor allem die durch den Lehrer gefundenen Zahlen in Form einer Probe zuerst einfach mit sich selbst multiplizieren läßt — was ja fast immer kürzer und bequemer ist als das formgerechte Quadrieren; dann aber doch dieses zeigt, eben wegen der Erklärung des Wurzelziehens. Dabei mache sich der Schüler zuerst am numerischen Beispiel klar, daß und warum man z. B.

$$\begin{array}{rr|rr|l}
\text{statt} \quad 43^2 = & 16 & \text{kürzer } 43^2 = & 16 & \sqrt{18|49} = 43 \\
+ 2 \times 40 \times 3 = & 24 & 83 \cdot 3 = & \underline{249} & \quad 249 : 83 \\
+ 3^2 = & \underline{9} & & 1849 & \quad 000 \\
& 1849 & & &
\end{array}$$

schreiben kann. Und hinterher sieht er es in Buchstaben bestätigt durch $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + (2a + b)\,b$. Hiermit aber hat sich ihm jener Mechanismus des Wurzelziehens sozusagen unter den Händen von selbst erklärt. — Wenn hierauf einige dreiziffrige Zahlen quadriert sind, so setzt sich auch das Wurzelziehen leicht fort, und es wird zum Algorithmus für beliebig vielziffrige Zahlen, dessen Begründung die Gleichung ist (die eben in dieser Allgemeinheit wohl besser für die Mittelstufe verspart wird):

$$\begin{array}{r|r}
(a + b + c + d \cdots)^2 = a^2 & = \qquad a^2 \\
+ 2ab & \\
+ b^2 & + (2a + b)\,b \\
+ 2\,(a + b)\,c & \\
+ c^2 & + [2\,(a + b) + c]\,c \\
+ 2\,(a + b + c)\,d & \\
+ d^2 & + [2\,(a + b + c) + d]\,d \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Hierbei gibt man natürlich zuerst Aufgaben, die ohne Rest aufgehen, dann solche mit Resten, die bei der Rechnungsprobe eingezählt werden müssen. — Von den bisherigen ganzzahligen Radikanden ist der Übergang zu Dezimalzahlen leicht, wenn eingesehen ist, daß je einer Dezimale im Quadrate deren zwei entsprechen. Daher dann auch das unbegrenzte Anhängen von Nullen und die Entwicklung immer weiterer Dezimalen, womit endlich die feste Methode für das frühere bloße Probieren bei $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und nunmehr auch für beliebige andere Quadratwurzeln gefunden ist. —

Das Kubikwurzelziehen ist nur schwerfälliger, aber sein Mechanismus sogar etwas durchsichtiger und daher vom Anfang leichter zu begreifen als der des Quadratwurzelausziehens; denn während man bei diesem die Glieder $2ab + b^2$ zusammenzieht in $(2a + b)\,b$, wird beim Kubikwurzelausziehen immer nach den offenen Gliedern $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ gerechnet. – Es sollte sich eigentlich von selbst verstehen, daß, wenn einmal der Forderung zugestimmt ist, neben den Flächenberechnungen der Unterstufe auch die einfachsten Volumsberechnungen zu pflegen und die als „Formeln" dienenden einfachen Gleichungen 1., 2. und 3. Grades nach den in ihnen vorkommenden Größen auflösen zu lassen, man dem Schüler nicht die Aufgabe, aus dem Volumen des Würfels die Seite zu bestimmen, eigensinnig wird vorenthalten wollen. Da aber jüngst solches Vorenthalten (bei einer nicht näher zu bezeichnenden Gelegenheit) seitens eines einflußreichen Schulmannes empfohlen worden ist, so sei hier noch einmal der Versuch gemacht, eine Grenze zu ziehen zwischen dem, was an einer Pflege des Kubikwurzelausziehens vernünftig und was unvernünftig ist. Zum letzteren zähle ich ohne weiteres, daß einst ein Inspektor die Hälfte aller Realschulabiturienten reprobierte, weil sie den Mechanismus des Kubikwurzelausziehens vergessen hatten; denn diese Schüler hatten ja längst das Logarithmenrechnen als den bei weitem vollkommeneren Ersatz kennen und anwenden gelernt. Aber wer diesen Vorteil auf die Spitze treiben will, dürfte ja im Grunde die Schüler der 1. Klasse auch nicht multiplizieren lehren, da sie 6 Jahre später doch die Logarithmen bloß zu addieren brauchen. Da also das Argument vom späteren logarithmischen Radizieren offenbar nicht verfängt (man könnte es ja auch schon auf das Quadratwurzelziehen anwenden), so verbleibt nur die Frage, ob nicht für das Kubikwurzelausziehen schon auf der Unterstufe noch direkte pädagogische Gründe sprechen; und deren gibt es sogar mehr, als hier aufgeführt zu werden brauchen: Der eine ist die Analogie zwischen $(a+b)^2$ und $(a+b)^3$, der dann auch die Analogie zwischen den Algorithmen des $\sqrt{z}$ und $\sqrt[3]{z}$ nicht fehlen sollte, weil eben solche Analogien immer Licht nach beiden Seiten geben. Ein 2. und 3. Grund sind schon oben angeführt worden: arithmetisch der der größeren Durchsichtigkeit des Algorithmus für $\sqrt[3]{z}$ und geometrisch das unabweisliche Bedürfnis bei der inversen Würfelaufgabe. Hier bietet das Delische Problem von der Würfelverdoppelung $(\sqrt[3]{2})$ das willkommene Analogon zur Verdoppelung des Quadrats $(\sqrt{2})$; beide Probleme einstweilen nur arithmetisch gelöst. Natürlich genügen auch hier ganz wenige Stellen, und auch hier werde alsbald das abgekürzte Kubikwurzelausziehen gezeigt. – Hoffentlich lassen diese Ratschläge und Begründungen keine

Möglichkeit des Mißverständnisses übrig, als wollten auch wir dem Stumpfsinn[1]) das Wort reden, Kubikwurzeln aus 9- und 12ziffrigen Zahlen ohne jeden ersichtlichen Bedarf ausziehen zu lassen; und ausdrücklich sei die Zumutung abgelehnt, als empfählen wir, den Algorithmus des Kubikwurzelausziehens ähnlich bis zu mechanischer Fertigkeit zu steigern wie den des gewöhnlichen Multiplizierens und Dividierens. Verzichtet man aber auf solche hier in der Tat überflüssige Fertigkeit und behandelt, nach wirklich bis zur Gewandtheit eingeübtem Quadratwurzelausziehen, das Kubikwurzelausziehen als eine Sache, von der der Schüler einsieht, daß, wie und warum auch diese Aufgabe für ihn grundsätzlich lösbar ist, so läßt sich behaupten, daß dieses Maß von Kennen und Können nicht mehr als 1 bis 2 Schulstunden beanspruche. Daß jener begeisterte Bekämpfer statt dessen mehrere Wochen für erforderlich hielt, beweist allein schon, daß er etwas bekämpfte, was auch wir nicht wollen. – Es ist aber bedauerlich (ganz allgemein gesagt), wenn im Interesse der Bekämpfung des Formalismus selbst wieder formalistisch, das Kind mit dem Bade ausgießend, argumentiert wird, nämlich so, daß die feineren didaktischen Unterschiede, die z. B. zwischen der Behandlung des Quadrat- und des Kubikwurzelausziehens bestehen können und sollen, überhaupt nicht gesehen werden[2]).

1) Nach dem stenographischen Protokoll der Wiener Mittelschulenquete 1908 (S. 397): „Man könnte aus der Mathematik und Physik eine Menge ausmerzen. (Lebhafter Beifall.) Wozu plagt man denn die Studenten in der Mittelschule mit diesem Ausziehen der dritten Wurzel (lebhafter Beifall) aus einer komplizierten ellenlangen algebraischen Zahl. Das ist ja zum Verzweifeln! (Lebhafter Beifall und Händeklatschen.) Ich bin, meine Herren, Mathematiker und spreche als Mathematiker. Aber, meine Herren, die dritte Wurzel aus einer soundso viel Tausend Millionenzahl, kein Mensch macht das so, weil man ja doch Logarithmen hat, das ist selbstverständlich, aber der Schüler muß sich damit plagen und muß die dritte Wurzel aus 76887263 ausziehen. Solcher Sachen gibt es in Hülle und Fülle. Man könnte die Mathematik in der Schule sehr knapp und angenehm vortragen, aber leider geschieht das nicht.“ [Hofrat STROUHAL aus Prag.]

2) Mehrere der obigen Vorschläge scheinen oder sind unvereinbar mit den folgenden von SIMON (1908, S. 94):

„Man gibt dann für jede beliebige positive Zahl a den Beweis, daß die $\sqrt[n]{a}$ entweder eine ganze oder Reihenzahl ist und geht dann [!] auf die numerische Berechnung der Quadratwurzel näher ein, gestützt auf die Formel für $(a+z)^2$. Unser Verfahren ist von dem geometrischen des Theon von Alexandria (Heron?) nicht verschieden (NESSELMANN, Alg. d. Griech., S. 145); und das letztere ist unmittelbar anschaulich; man führe es den Schülern daher an passenden Beispielen vor, bis sie sich an der Hand der Geometrie des Algorithmus bemächtigt haben, was sehr rasch geht. Die beigegebene, gegen

Lehrprobe: Der „Kopfzerbrecher“ als geometrisch-arithmetisches Lehrmittel.

Als wir vor Jahren in einer dritten Klasse das Kapitel von den Flächenverwandlungen behandelten und uns hierfür allerlei Modelle angefertigt hatten, bemerkte ich in der Hand eines Schülers während des Unterrichts den in Fig. 65 angedeuteten „Kopfzerbrecher“[1]. Einen Augenblick lang glaubte ich das Mitbringen eines solchen Spielzeuges tadeln zu müssen; aber schon im nächsten Augenblick war mir klar, daß der Knabe recht gehabt und meine Absichten beim Unterricht wohl verstanden oder nachgefühlt hatte: denn das unter dem Namen „Kopfzerbrecher“ in Händen von hunderttausend Kindern verbreitete Zusammenlegspiel ist ja nichts als eine Einladung zu sehr vielseitigen Flächenverwandlungen. Daß sich dieses Spieles der Schulmeister bemächtigt, wird hoffentlich nicht nur als Pedanterie oder aber

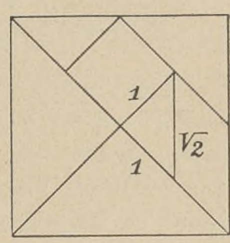


Fig. 65.

Theon etwas geänderte Fig. 1 lehrt alles, was zu zeigen ist, sofort, nämlich, daß man für die zwei Rechtecke mit den Seiten a und z eins mit den Seiten $2a$ und z setzen kann; und statt $2az + z^2$ auch das eine Rechteck mit den Seiten $2a + z$ und z etc. Geometrisch vorgetragen macht das Quadratwurzelausziehen, das arithmetisch dem Schüler verständlich zu machen, ein schweres Stück Arbeit für beide Teile ist, den Jungen geradezu Vergnügen. Das, worauf es ankommt, nämlich daß man unter provisorischer Vernachlässigung von z^2 gegen $2az$ die Wurzel unschwer so genau, wie man will, berechnen kann, begreifen die Schüler fast sofort. Man quäle sie mit dem Algorithmus tunlichst wenig, da er doch wenige Wochen darauf [?] gegen die bequeme logarithmische Berechnung aufgegeben wird.... Man bespricht dann kurz die Kubikwurzel etc. und zeigt, daß sie analog die Formel $(a + b)^3$ etc. verlangt, d. h. also den [sic] Binom; die Zeit, die auf Einübung des Kubikwurzelalgorithmus verwandt wird, kann besser verwandt werden. Gelegentlich eine passend gewählte dritte Wurzel etwa auf zwei Dezimalen berechnen.“

Da der eingangs erwähnte Beweis, der von Reihenzahlen spricht, jedenfalls erst auf der Oberstufe zur Sprache kommen kann, so müßte es scheinen, als solle auf der Unterstufe überhaupt noch nicht vom Wurzelziehen, nicht einmal der Quadratwurzel, die Rede sein. Damit entfiele aber ein großer und für diese Stufe geradezu unentbehrlicher Teil, namentlich des geometrischen Lehrstoffes. Man kann doch nicht mit dem Pythagoreischen Satz und seinen Anwendungen bis „wenige Wochen vor dem Logarithmenrechnen“ warten! –

1) In Steinmasse (wie „Richters Steinbaukasten“) überall erhältlich. – Die Seite des „Grundquadrates“, wie wir es fernerhin nennen wollen, ist dort 1 cm. – Behufs Rechnens und Nachmessens lassen wir das Grundquadrat zweckmäßig in den Seitenlängen 1 cm auf Millimeterpapier zeichnen. Für das Vorzeichnen an der Schultafel fertigen die Schüler das Grundquadrat in der Länge von 1 dm (das Ganze also mit 2,828 dm) aus Pappendeckel (oder noch besser aus Laubsäge-Fournierbrettchen) an.

als Leichtfertigkeit empfunden werden (wobei die kompetenten Richter nicht so sehr die Lehrer oder Schulinspektoren als vielmehr die Knaben selber sind).

Betrachten wir das Lehrmittel mit den Augen des Geometers – und, wie wir sogleich uns veranlaßt sehen werden, auch des Arithmetikers –, so erkennen wir in seinen sieben Flächenteilen nicht nur die Formeln für das Dreieck und Viereck auf das mannigfaltigste angewendet, sondern wir haben in ihm auch Gelegenheit zu weiterer reichlicher Beschäftigung mit $\sqrt{2}$ und allerlei, was mit diesem unseren schon oben (S. 156) angeführten ersten Beispiel einer irrationalen Zahl zusammenhängt.

Vor allem wollen wir wissen: Wie lang sind sämtliche Seiten und wie groß die Flächen der sieben einzelnen Teile unseres Modelles? Dabei sei im folgenden die kürzeste Seite, d. i. die des Grundquadrates und die Kathete des kleinsten der gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke, gleich 1 cm gesetzt. – Auf die Antworten führt uns folgende Betrachtung:

Noch vor den Flächenverwandlungen stellen wir uns die ganze Reihe gleichschenklig-rechtwinkliger Dreiecke her; es sind die in Figg. 66–70 dargestellten. Hier wird sich jener unmittelbare Eindruck von **Ähnlichkeit**, auf den wir für die Unterstufe die Behandlung jener Figuren zu gründen empfahlen (S. 146 ff.), wohl ganz besonders lebhaft aufdrängen. Es dürfte auch, ohne daß ausdrücklich von Verhältniszahl, Ähnlichkeitsmodul usw. geredet wird, dem Schüler sofort überzeugend sein, daß, wenn in dem Dreieck mit der Kathete 1 die Hypotenuse gleich ist $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ (wie wir oben, anläßlich der Fig. 64, S. 156, auch 154 ermittelt haben), auch in jedem der größeren Dreiecke die Hypotenuse 1,4142..mal so lang sein wird als dessen Kathete.

Aus dieser Erkenntnis wollen wir nun mittels des Kopfzerbrechers für die Hand in Hand gehende Geometrie und Arithmetik etwa in folgender Weise weiteres Kapital schlagen:

Legen wir die zwei kleinsten Dreiecke mit den Katheten nach Fig. 67 aneinander, so entsteht ein neues gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck, in dem nun die Kathete $\sqrt{2}$, „also" die Hypotenuse $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ ist; denn unter $\sqrt{2}$ haben wir ja eben die Zahl verstanden, die mit sich multipliziert 2 gibt. Auch diese Definition will eben nicht nur gegeben und gelernt, sondern sozusagen erlebt sein, und das Erlebnis liegt hier in der geometrischen Verifikation: richtig setzt sich ja auch die Hypotenuse dieses nächsten größeren Dreiecks aus den zwei früheren Katheten von je 1 cm zusammen.

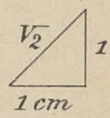
Wieder geben zwei dieser nächstgrößeren Dreiecke ein drittes mit der Kathete 2, also der Hypotenuse $2\sqrt{2}$. Es sind dies die zwei großen

Dreiecke des Spieles, und wir wissen von jetzt an, daß die Quadratseite des ganzen Kopfzerbrechers $2\sqrt{2}$ ist. Daher ist seine Fläche $(2 \cdot \sqrt{2})^2 = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \text{ cm}^2$.

Dieses ganze Quadrat läßt sich nochmals in ein größtes gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck verwandeln, dessen Katheten nun 4 cm sind. Daher z. B. seine Fläche wieder $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8 \text{ cm}^2$; seine Hypotenuse ist $4 \cdot \sqrt{2}$ cm – ausmultiplizieren, nachmessen (auf wieviel Stellen genau?)!

So gab die ganze Reihe von fünf immer größer werdenden Dreiecken Gelegenheit zu mannigfaltigen Übungen im Multiplizieren von immer mehr Faktoren $\sqrt{2}$, was ein ganzes Stück Arithmetik der Potenzen und Wurzeln, wenn auch alles einstweilen nur eben an dieser individuellen $\sqrt{2}$, durchzuüben erlaubt.

Fig. 66.



Zum ursprünglichen Zweck des Kopfzerbrechers, den Flächenverwandlungen, sei nur noch an wenigen Beispielen darauf hingewiesen, wie sich an der intensiven arithmetischen Erfassung der in ihm herrschenden Maßverhältnisse die bisher bloß auf Probieren gegründeten Verwandlungen dem Knaben als eine lustige Bestätigung der früher langweiligen Flächenformeln darstellen. Also z. B.: Als eine der ersten Figuren, in die er das ursprüngliche Quadrat verwandeln soll, findet der Knabe in dem beigegebenen Heftchen ein Rechteck, dessen Seiten nicht anzusehen ist, wieviel Längeneinheiten sie enthalten mögen. Da wir aber schon wissen, daß die Fläche des Quadrates $(2\sqrt{2})^2 = 8$ sei, so liegt die Vermutung nahe, es werde nun dieses Rechteck nach der Zerlegung $8 = 4 \cdot 2$ zu behandeln sein, und sofort nach diesem Einfall gibt das Augenmaß die Bestätigung, daß in der Tat die Grundlinie doppelt so lang ist wie die Höhe. Daraufhin ist die Wahl der geeigneten Teilstücke (Fig. 71), um jenes $4 \cdot 2$ herauszubringen, keineswegs mehr Sache bloßen Probierens, wenn auch der Kombinationsgabe immer noch ein Spielraum bleibt. – Ein anderes Beispiel gibt dann das Trapez, das wir uns umgekehrt selber laut Flächenformel ausdenken.

Fig. 67.

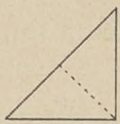


Fig. 68.

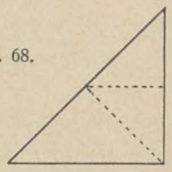


Fig. 69.

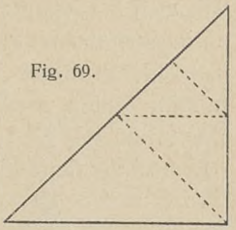
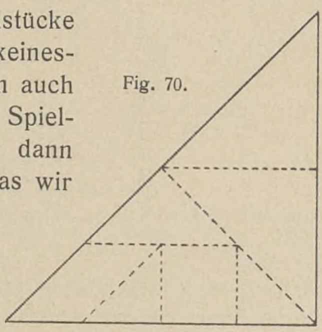


Fig. 70.



Figg. 66 – 70.

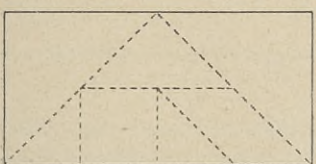


Fig. 71.

Sollte schließlich ein Schüler mit Beharrlichkeit *usque ad finem* in sämtliche flächengleiche Figuren des beigegebenen Büchleins die Lösungen durch Bleistiftstriche eingetragen haben, so findet er überreichlich Stoff, auch minder einfache Flächenformeln und Kombinationen solcher (durch Additionen und Subtraktionen) zur Anwendung zu bringen. Die meisten dieser Rechnungen wären jedenfalls schon verwickelter, als daß man sie wieder zu einer Pflichtaufgabe für alle würde machen wollen, sondern man wird den einzelnen der Klasse ruhig überlassen dürfen, wie lange sie das Spiel, aus dem wir Ernst gemacht haben, wirklich freut. — Nur weil es uns in dieser Didaktik überall zu zeigen gilt, daß auch Mathematisches schon den Knaben wirklich freuen könne, haben wir ja aus dem Kopfzerbrecher diese Lehrprobe gemacht.

Lehrprobe: Der Pythagoreische Lehrsatz und seine Anwendungen als Abschluß der arithmetischen und geometrischen Unterstufe.

Der Lehrer kündet an, daß es in der nächsten Stunde was ganz Besonderes geben werde, einen Satz, der die „Eselsbrücke" heißt. Gute Dienste wird uns dazu eine Schnur tun, an der 12 dm durch Knoten oder besser durch Farbenbändchen abgegrenzt sind, also z. B. am Anfang ein rotes Bändchen, 1 dm weiter ein blaues, 1 dm weiter wieder ein blaues und nach dem dritten dann wieder ein rotes, dann ebenso 4 dm und am Ende wieder ein rotes und dann noch ebensolche 5 dm. — In der nächsten Stunde sagt der Lehrer: „Ich werde euch heute zeigen, wie sich die Ägypter die rechten Winkel konstruiert haben (— wozu bedurften sie dieser? S_1: Beim Bau der Pyramiden ...). Sie bedienten sich hierzu einer solchen Schnur (wie einige Schüler sie mehr oder minder genau vorbereitet haben). Nun faßt ein Schüler die zwei roten Bändchen der Enden zusammen, und der Lehrer läßt zwei Schüler die dazwischen liegenden beiden roten Bändchen so fassen und an ihnen ziehen, daß die drei Schnurteile gespannt sind; dann hat der Schüler, der das die Strecken 3 dm und 4 dm gegeneinander abgrenzende Bändchen hält, den Scheitel eines rechten[1]) Winkels in der Hand

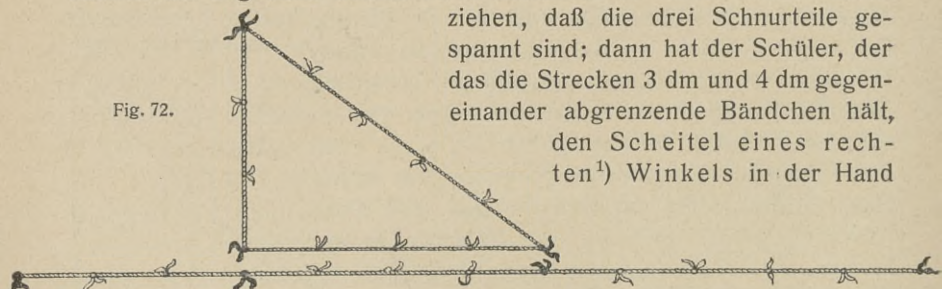


Fig. 72.

1) Natürlich fehlt auch hier alles zu einem wirklichen Beweis, daß dieser Winkel wirklich ein rechter sei. Zwar sind wir ja auf den bloßen Anblick (die sog. „Anschauung") hin geneigt, eher an einen Rechten als an Winkel

(Fig. 72). – Die Zahlen 3, 4, 5 haben untereinander allerlei Beziehungen, z. B. 3, $3+1=4$, $4+1=5$; oder $4=\frac{3+5}{2}$ (arithmetisches Mittel). Besonders merkwürdig ist uns die folgende: $3\times 3=9$, $4\times 4=16$, $5\times 5=25$; $\mathbf{9+16=25}$! – Absichtlich haben wir bisher das Wort „Quadrat" in seiner Doppeldeutigkeit (arithmetisch = zweite Potenz[1]), geometrisch = gleichseitiges gleichwinkliges Viereck) vermieden; wie man aber sieht, haben wir uns bisher ganz auf eine arithmetische Eigenschaft der berühmten pythagoreischen Zahlen 3, 4, 5 beschränkt (wenn die Auffassung richtig ist, die wir bei der letzten logischen Analyse des Pythagoreischen Satzes auf der obersten Stufe zu vertreten

---

von 89° 59′ oder 90° 1′ zu glauben. Aber es ist vielleicht gerade hier, wo wir zum allerersten Male vom Pythagoreischen Satz sprechen, um dann zu ihm immer wieder auf verschiedenen Stufen des Unterrichts unter verschiedenen Gesichtspunkten zurückzukommen (in diesem Buch S. 189, 198, 293, 364), nicht unangebracht, den Schüler selbst auf diesen Mangel an wirklichem Beweis für die Rechtwinkligkeit des Dreiecks 3 4 5 aufmerksam zu machen; natürlich nicht schon beim ersten Vorzeigen des Schnurversuchs, wohl aber gelegentlich, wenn wir diesen wiederholend und variierend mit dem Schüler verarbeiten.

Ein solches Variieren besteht z. B. in folgendem: Wir machen den Schüler aufmerksam, daß, wenn mit jener zwölfgeteilten Schnur wirklich ein rechter Winkel zum Zweck des Bauens einer Pyramide oder auch nur des rechtwinklichen Schulhofs konstruiert werden sollte, wir nicht 12 dm, sondern lieber 12 m oder womöglich noch größere Einheiten als das Meter verwenden müßten. Versucht das aber ein Schüler wirklich, so wird er alsbald inne werden, daß es nun wieder nicht so leicht ist, so große Einheiten an einer Schnur auch nur so genau hintereinander aufzutragen, daß nicht bei Wiederholung dieser Operation sich recht merkliche Messungsfehler einstellen. Und auch hiervon abgesehen zeigt sich beim Zusammenlegen dieser Schnur zu einem riesigen Dreieck, daß es sehr von der größeren oder geringeren Spannung (also der Dehnbarkeit oder Elastizität) der Schnur abhängt, ob wir bei Wiederholung dieses Spannens immer auch nur annähernd gleiche Dreiecke bekommen. – So und ähnlich läßt sich, mit je mehr Eifer wir uns anfänglich dieser empirischen Methode bedienen, im Schüler nebenher doch auch die Einsicht anbahnen, daß eben diese empirischen Methoden noch nicht wirklich Geometrie sind (worauf wir didaktisch schon in § 18 und, insoweit es eine sogar erkenntnistheoretisch noch umstrittene These ist, im III. Teil, S. 460 ff. zurückkommen). – Eine Art Umkehrung jenes Grundversuches ist es, wenn der Schüler im rechtwinkligen Schulhof von einer Ecke aus Katheten 3 und 4 in möglichst großen Einheiten aufträgt und sich durch Spannen einer Schnur zwischen deren Endpunkte überzeugt, daß sie fünf solche Einheiten lang ist (– also schon ein Vorspiel zur Etymologie der „Hypotenuse" als einer Gespannten, vgl. S. 201).

1) Was soll man von einer Stoffanordnung halten, die heute den geometrischen Beweis für den Pythagoreischen Satz befiehlt und erst einige Monate später den Gebrauch des Wortes „a zum Quadrat" gestattet, „weil man eben nicht früher zu den Potenzen kommt"! Als ob man nicht den Ausdruck $a^2=a\times a$ viel wirksamer schon als Kontrast zum $2a=a+a$ erklären könnte – lange vor dem allgemeinen Worte und Begriffe „Potenz"!

gedenken, S. 365, so ist ja die arithmetische Seite des Satzes die fundamentalere im Vergleich zur geometrischen). – Erst jetzt lassen wir auch an der Tafel ein Dreieck von den Seiten 3, 4, 5 dm, die Quadrate über den drei Seiten und die einzelnen 9, 16, 25 Einheitsquadrate zeichnen. Eine neue Einsicht ist durch diese Zeichnung im Vergleich zum früheren Multiplizieren und Addieren natürlich nicht zugewachsen.

Welche Schlüsse soll und darf nun der Lehrer den Schüler aus diesem $3^2 + 4^2 = 5^2$ ziehen lassen? Auf keinen Fall schon den, daß „in jedem rechtwinkligen Dreiecke das Quadrat der Hypotenuse usw.“ – denn das wäre eine „Induktion aus einem einzigen Fall“, die schon der

Fig. 73.

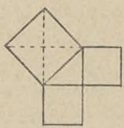


Fig. 74.

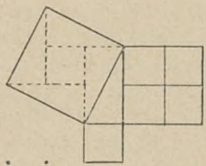
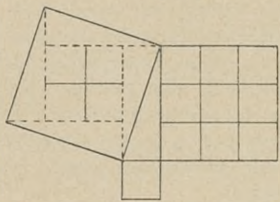


Fig. 75.



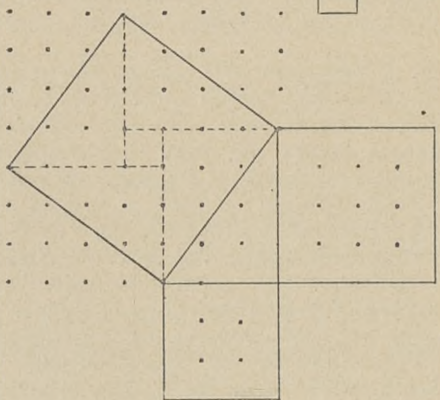


Fig. 77.

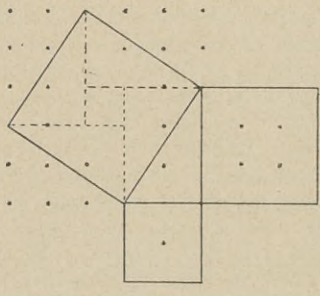


Fig. 76.

kleine Knabe als eine logische Vergewaltigung empfände, wie wenig hoch wir auch sonst schon seine Ansprüche an „Strenge“ in Beweisen, zumal in Verallgemeinerungen bisher sich haben steigern lassen. – Aber die Formulierung: „In diesem rechtwinkligen Dreieck usw.“ wäre doch auch wieder gar zuwenig; denn nicht nur lassen, wie gesagt, die Zahlen 3, 4, 5 außer jenen $3^2 + 4^2 = 5^2$ noch beliebig viele andere Beziehungen zu, sondern – was uns sofort zu weiteren Entdeckungen anreizt: auch schon für das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck hatten wir ja schon bei ganz anderem Anlaß (S. 156) entdeckt, daß sein Hypotenusenquadrat gleich ist der Summe seiner Kathetenquadrate, was wir jetzt schon schreiben dürfen $1^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2$, da wir uns bei eben jenem Anlaß mit $\sqrt{2}$ bekannt gemacht haben. Damals hatten sich uns diese Beziehungen nur als zeichnerisches und rechnerisches Mittel zum Zweck der Verdoppelung eines Quadrates dargeboten; und so sehen wir jetzt ein, daß umgekehrt, wenn die für die Dreiecke 3, 4, 5 und $1, 1, \sqrt{2}$ unabhängig voneinander gefundenen und bewährten Beziehungen sich für alle rechtwinkligen Dreiecke bewähren sollten, wir ein überaus nützliches Mittel hätten, je zwei beliebige Quadrate zu einem flächengleichen zu vereinigen. – Also machen wir uns auf zu weiteren Entdeckungen: Der nächstliegende Schritt sei es, nach dem Dreieck mit den Katheten 1, 1 zu versuchen 1, 2, dann 1, 3, dann 2, 3 (nicht auch 2, 2 oder 2, 4, weil, wie wohl jeder Schüler am besten ohne alles Reden über Verhältnisse, Ähnlichkeit u. dgl. sofort einsieht, es auf die Wahl der Längeneinheiten nicht ankommt; was sich auch schon beim Gebrauch von verschieden weit punktiertem Papier oder von Millimeterpapier, auf das wir je nach ganzen oder halben Zentimetern zeichnen lassen, ebenfalls ohne alle Worte aufdrängt). Und siehe da, überall verfängt dasselbe Mittel: Das Hypotenusenquadrat zerfällt in vier Dreiecke, deren jedes die Fläche $\frac{a \cdot b}{2}$ hat, und die sich herumlegen um ein Quadrat von der Seite $a - b$ (Figg. 73–77).

Wieder treibt diese Entdeckung vorwärts. Es waren ja immerhin doch ganze Zahlen gewesen, die uns in den Figg. 73–77 auf Millimeterpapier die Katheten gemessen hatten. Gilt die Beziehung auch für beliebige andere Seitenverhältnisse (nicht nur „rationale" – welches Wort wir aber vor dem kleinen Schüler noch keineswegs aussprechen)? Und die Antwort hierauf gibt uns die Fig. 78, die man in den Lehrbüchern für die Unterstufe am häufigsten findet; sie sollte nur nicht wie aus der Pistole geschossen an der Tafel erscheinen, sondern jene einzelnen Figuren haben auf sie als auf ihre Verallgemeinerung hingeführt (wie die in der Figur punktierten, beim „Beweis" nicht benötigten Linien aufmerksam machen). – Vielleicht zieht es aber der Lehrer vor, statt mit dieser Figur sogleich wieder mit einem Modell arbeiten zu lassen. Er hätte dann ein Pappendeckelmodell des unregelmäßigen Fünfeckes und zwei (nicht alle vier) Dreiecke mitzubringen; das unregelmäßige Fünfeck heftet der Schüler an die Tafel und bringt die Dreiecke zuerst in die Lage I, II (Quadrat der Hypotenuse) und dann in die Lage III, IV (Summe der Quadrate der beiden Katheten). (Dabei können wir dem Schüler erzählen, daß die Inder die letztere Summe den „Stuhl der Braut" genannt haben, und wir können an diese kuriose Vorstellung die Mitteilung knüpfen, daß nicht nur die Ägypter und Griechen, sondern auch andere Völker diesen Satz gekannt und sich mit ihm vielseitig beschäftigt haben. Doch

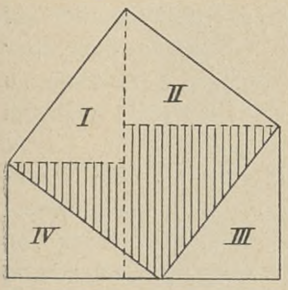


Fig. 78.

versparen wir uns nähere historische Mitteilungen[1]) wohl besser auf den nächsten Jahrgang, wo wegen des gefestigteren Griechisch die Erklärung der Bezeichnung „Hypotenuse" [S. 201 und Anm.] u. dgl. mehr Eindruck machen wird).

Wieder mag der Lehrer bei diesem Anlaß sondieren, ob die Schüler schon ein Gefühl dafür haben, daß dieses Hin- und Herschieben von Dreiecken noch lange kein geometrischer „Beweis" ist; fühlen sie es nicht, so sind sie auch noch nicht reif für ein eigentliches Beweisen. Vielmehr gibt es gerade einen passenden Anfang für die Geometrie der Mittelstufe (des nächsten Jahrganges, vgl. S. 198 ff.), wenn wir an eben diesem auch anderweitig so fruchtbaren Beispiel zeigen, daß und inwiefern nun über ein solches Probieren doch wirklich das Studieren, nämlich das Zurückgehen auf die in der Figur gemachten Annahmen gehe. Doch braucht man auch nicht in ein Extrem gegen das strenge Beweisen zu verfallen, wenn man unser Arbeiten mit Modellen statt mit toten Figuren nur sonst richtig in den Dienst des Verfolgens von Beziehungen zwischen verschiedenen Raumgebilden stellt, die auf den ersten Blick nur den Luxus verschiedener Beweise für denselben Satz darstellen. Allmählich aber soll auch schon auf der Unterstufe der Schüler aus sich heraus die Wesensverwandtschaft verschiedener Figuren verspüren und unter vorsichtiger Unterstützung durch den Lehrer sich klar machen. Also setzen wir unseren Weg, der auf den ersten Blick als ein bloßer Zickzackweg erscheinen mag, dann aber Schritt für Schritt sich als eine planmäßig angelegte Serpentine zu höherer Auffassung auch den Schülern selbst enthüllen muß, noch um einige Schritte fort.

Es war nicht schwierig, den Schülern die Fig. 78 als eine Verallgemeinerung aus den Figg. 73—77 erkennen zu lassen. Von diesem stetigen Weg springen wir jetzt scheinbar ab, indem wir wieder von den Schülern selbst verlangen, daß sie bis zur nächsten Schulstunde die folgenden Modelle vorbereiten: Einen Pappendeckelrahmen mit der inneren Seitenlänge von etwa 5 dm; ferner mag ein Schüler vier rechtwinklige Dreiecke von den Katheten 1, 4, ein anderer solche von 2, 3, ein dritter solche von $2^1/_4$, $2^3/_4$ und ein vierter rechtwinklige Dreiecke von $2\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ dm mitbringen. In der Schulstunde wird dann der Rahmen an die Tafel geheftet, eines der vier Dreiecke in einer Ecke befestigt, die anderen drei vom Lehrer und einem Schüler mit den Händen so in die Ecken gehalten, daß innerhalb des Rahmens die schwarze Tafel zuerst erscheint als „das Quadrat der Hypotenuse" (Fig. 79); und

1) Mehrere Veranschaulichungen und Literaturnachweise (PROKLUS, SCHOPENHAUER, BRETSCHNEIDER, SIMON, SCHUSTER, CANTOR) bringt der Aufsatz von G. JUNGE „Zur Einführung in den Satz von Pythagoras" (Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaft, Jahrg. XII, 1906, S. 30—32).

in demselben Tempo (nämlich auf drei Tempi), wie der Lehrer oder ein Schüler weiterspricht: „ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten“, hat durch die Verschiebung dieser drei anderen Dreiecke das schwarze Quadrat wirklich die Gestalt der zwei Quadrate in Fig. 80 angenommen. Nach allem Hübschen, was die früheren Modelle den Schülern schon geboten haben, wird doch diese Form der Zauberei noch immer als eine Steigerung, als das Allerhübscheste empfunden. Und nachdem sie diesen ihren Effekt getan hat, stimmen wir wieder einen ernsteren

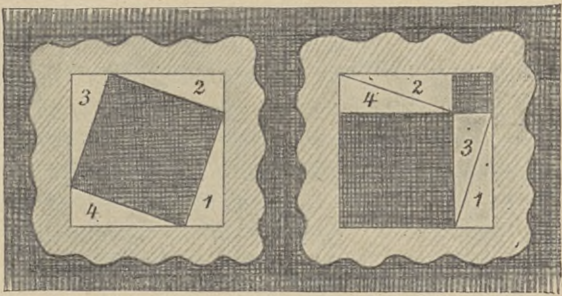


Fig. 79. Fig. 80.

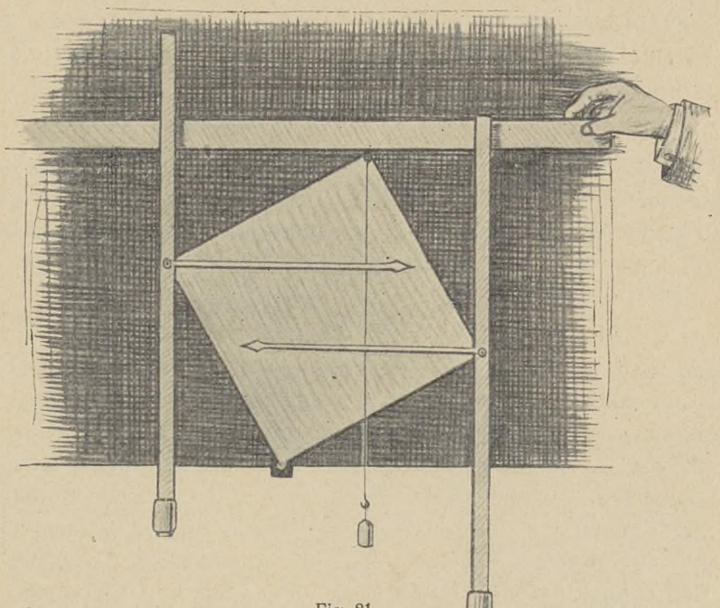


Fig. 81.

Ton an und lassen darüber nachdenken, ob denn dieser Beweis wirklich etwas von Grund aus anderes gewesen sei als der nach dem Modelle Fig. 78. Allenfalls lassen wir jetzt die Schüler selbst zu den jeweiligen vier rechtwinkligen Dreiecken das zugehörige unregelmäßige Fünfeck so anfertigen, daß es sich in das Hypotenusenquadrat des neuen Rahmens genau einfügt, womit der gefragte Zusammenhang handgreiflich hergestellt ist. Ja wir können noch diese Handgreiflichkeit um einen Grad steigern, wenn wir die Schüler auffordern, es möge jeder aus Karton (nun nicht mehr in der Größe wie für die Schultafel, sondern für die Brieftasche zum Vorzeigen in heiterer Gesellschaft und zu dauernder Erinnerung) den Rahmen und die vier Dreiecke in den Ecken und das Fünfeck (Fig. 78) unter Vermeidung aller unverwertbaren Abschnitzel ausschneiden. Überdies mag man, wie ja schon die Kathetenlängen 4, 1; 3, 2; $2\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ die schrittweise Rückkehr zum SCHOPENHAUERschen Spezialfall des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieckes vorgezeichnet haben, durch ein Modell in wirklichem Bewegen (Fig. 81, ein Quadrat mit Bleiloten an zwei Ecken, das sich um den untersten Eckpunkt dreht) die stetigen Übergänge vor Augen führen.

Jener effektvolle Rahmenbeweis aber, der ja ebenfalls geometrisch genommen wieder kein wirklicher Beweis war (weil dieser erst zu zeigen hätte, daß nirgends Überbestimmtheiten u. dgl. vorkommen, was wir uns wieder für den kommenden Jahrgang sparen), legt einem halbwegs findigen Schüler von selber einen wirklich strengen arithmetischen Beweis nahe. Denn da ihn der Anblick der zwei Quadrate und der zwei Rechtecke an die graphische Darstellung des $(a+b)^2$ erinnert, so ist nur ein Schritt zur Darstellung des Hypotenusenquadrates in der Form

$$c^2 = (a+b)^2 - \frac{4ab}{2} = a^2 + b^2.$$

Wirklich brachte dann dieser Beweis einen 13jährigen Knaben von selber auf die Frage, ob sich nun auch das bloße Abzählen der Quadrate in den Figg. 73–77 zu einer solchen Rechnung umgestalten lasse, und er kam von selbst auf die Analogie

$$(a-b)^2 + \frac{4ab}{2} = a^2 + b^2. -$$

Man wird zugeben, daß ein Lehrgang, sei es der hiermit skizzierte, sei es ein anderer gleichwertiger, der den Schüler sozusagen fortwährend in Entdeckerstimmung hält, didaktisch mehr wert ist, als wenn der Lehrer die strengsten Beweise, und wären sie neben der Strenge auch noch so anschaulich, nur selber den Schülern der Reihe nach vormacht. Es ist nicht nötig, im übrigen noch die Mittel aufzuzählen (wie die Erklärung des Wortes „Eselsbrücke", die Legende von den 100 Ochsen, die Pythagoras bei der Entdeckung des nach ihm genannten Satzes geschlachtet haben soll[1]) u. dgl.), durch die man von altersher schon den Kindern die Tragweite des Satzes fühlbar zu machen pflegt. Und es sollte auch nicht nötig sein, noch eigens auszusprechen, daß es nichts

1) Die poetische Einkleidung der Legende durch „einen Dichter, der auch Naturforscher war" (CHAMISSO), mit der BOLTZMANN (Populäre Schriften, S. 75) seinen Nachruf auf KIRCHHOFF schloß, wird ihre volle Wirkung erst auf der Oberstufe (vgl. S. 364 ff.) tun. – Vgl. übrigens zur Geschichte der Entdeckung VOGT, Bibliotheca mathematica, 1908, Sept.

taugt, wenn der planimetrische Satz mit seinen Beweisen als eine Sache für sich vorgetragen wird und dann sechs Monate lang ohne alle Anwendungen bleibt. Vielmehr ist ja das oben angedeutete Einflechten einer ersten Bekanntschaft mit $\sqrt{2}$ nun der Ausgangspunkt von beliebig vielen didaktischen Wegen, auf denen sich mit den planimetrischen Beziehungen die rechnerischen Anwendungen und Auswertungen zu einem überall dichten Netz verweben lassen. Vielleicht ist es aber doch nicht überflüssig, noch einmal darauf hinzuweisen, daß keineswegs nur solche Anwendungen (wie die: Eine Leiter ist c Meter lang und steht a Meter von einer Mauer weg; wie hoch reicht sie hinauf?) die besten sein werden, bei denen sich der Schüler sagt, das kann man ja durch bloßes Probieren viel besser haben[1]). Die verschiedensten Lehrbücher bieten mehr oder weniger guten, jedenfalls unerschöpflichen Stoff für die Anwendungen des Pythagoras. Etwas ferner ab von den hergebrachten dürften Aufgaben wie die folgende

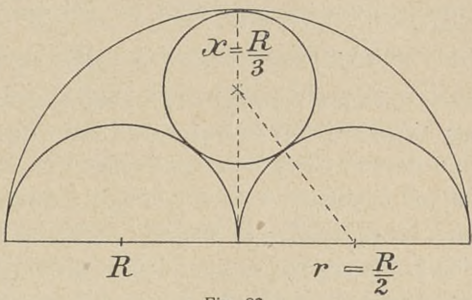


Fig. 82.

liegen: Es habe an den oft vorkommenden Bogenfenstern Fig. 82 der große Halbkreis den Halbmesser R, daher die beiden kleineren Halbkreise $\frac{R}{2}$; wie groß ist der Halbmesser x des kleinsten Kreises? Die Antwort $x = \frac{R}{3}$ ergibt sich leicht und lehrreich auch schon vor der zusammenhängenden Lehre von den Gleichungen aus

$$\left(\frac{R}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + (R - x)^2.$$

Werden nach unserem Vorschlage schon auf der Unterstufe auch die geraden Prismen überall in die Rechnung mit einbezogen, so gibt schon der Quader mit seiner Diagonale, $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$ (Nachmessen der Diagonale!), eine wichtige Analogie zum $d^2 = a^2 + b^2$ des Rechteckes (wie überhaupt der Pythagoreische Satz nicht immer nur für das rechtwinklige Dreieck, sondern auch für das Rechteck formuliert und eingeübt werden sollte). Ebenso als eine Analogie zur Diagonale des Quadrates $a\sqrt{2}$ die des Würfels $a\sqrt{3}$. Wenn ferner ein regelmäßiges sechsseitiges Prisma unter den Körpern vorrätig ist, an denen wir unsere

1) So in der Geschichte der „Fliegenden Blätter“ vom Professor, der, weil seine $L\,m$ Länge nicht ohne weiteres Platz hat im Bette von $l\,m$ Länge, die Breite b mißt, hierauf ausrechnet, daß $L < \sqrt{l^2 + b^2}$, und sich erst daraufhin in der — Diagonale des Bettes zur Ruhe begibt.

Messungen, Rechnungen und Wägungen vorzunehmen pflegen, so lassen sich nicht nur die verschiedenen Strecken (Diagonalen in der Grundfläche u. dgl.), sondern auch verschiedene räumliche Diagonalen berechnen und immer wieder nachmessen. Hierbei war schon die Grundaufgabe: Höhe des gleichseitigen Dreieckes mit ihrer Transformation

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{4} \cdot 3} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

ein Anlaß zur ersten Handhabung wichtiger Gesetze des Wurzelrechnens, das wir hier wie überall nur *ad hoc* zeigen. Glaube man doch nicht, daß die Evidenz bei der Beschränkung auf den konkreten Fall notwendig geringer sein muß als bei einer mehr oder weniger weit getriebenen Verallgemeinerung! — Der Ausdruck $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ veranlaßt uns auch auf eine unmittelbare Deutung der $a\sqrt{3}$ zu sinnen; sie ergibt sich als längere Diagonale des Rhombus, dessen kürzere Diagonale und dessen Seite a sind. Fertigt sich also der Schüler aus vier gleich langen Stäbchen von der Länge 1 dm einen beweglichen Rahmen an, und formt er ihn zu jenem Rhombus, so hat er ebenso $\sqrt{3}$ zwischen den Fingerspitzen wie bei der Quadratform $\sqrt{2}$. An dem Rahmen (einem Taschenzentimeterstab) läßt sich also auch leicht in stetigem Wachsen die Reihe $\sqrt{0}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ demonstrieren. Schneiden wir dann jenen Rhombus aus Karton aus, so muß seine längere Diagonale sich als Würfeldiagonale in ein aufklappbares Würfelnetz von gleicher Seitenlänge 1 dm legen lassen usf. Also es fehle auch bis zur letzten Stunde der Unterstufe nicht an manuellen Bestätigungen des Gelernten!

Mittelstufe: Vierzehntes und fünfzehntes Lebensjahr.

§ 16. Zur Charakteristik der Mittelstufe.

Zwischen die herkömmliche Unter- und Oberstufe eine „Mittelstufe des mathematischen Unterrichtes“ einzuschalten, ist ebenso durch die natürliche Abgrenzung der für diese Stufe vorgesehenen Lehrstoffe wie durch das Lebensalter, nämlich die Pubertätszeit des vierzehnten und fünfzehnten Lebensjahres vorgezeichnet. Da wir überall die Art der Empfänglichkeit des Schülers als die pädagogische *vis maior* anerkennen, der sich schließlich auch die rein wissenschaftlichen Anforderungen unterordnen müssen, so sei vor allem auch hier daran erinnert, daß diesem Lebensalter noch immer nicht zuviel an „mathematischer Strenge“ zugemutet werden kann. Auch ohne ein solches Übermaß soll und wird aber der Schüler gegen Ende dieser Jahre verspüren, daß er schon ein tüchtiges Bruchstück „strenger

Mathematik" dazu gelernt habe. Denn inhaltlich ist es jetzt nicht mehr zu früh, den auf der Unterstufe gesammelten Stoff von sozusagen Einzelerfahrungen aus der Zahlen- und Raumlehre in ein zusammenhängendes Ganzes weiterzubilden, so daß der Schüler in Arithmetik die erste und zweite Operationsstufe, in Geometrie die Planimetrie und Stereometrie als (natürlich immer noch sehr relativ) vollständige Ganze vor seinen Augen sich aufbauen sieht. Sind aber auch in diesen ersten Stockwerken des wissenschaftlichen Gebäudes nur keine allzu auffälligen Lücken mehr verblieben, so werden wir doch an die rein deduktive logische Form (oder um im Bilde vom Bau zu bleiben: wir werden an die Chemie des Mörtels, der jene Bausteine aneinanderbindet) noch bei weitem nicht jene Ansprüche von voller „Strenge" stellen dürfen, die ja gerade in unseren Tagen zu bei weitem höheren logischen Ansprüchen gesteigert worden ist als je zuvor in der Mathematik. Wenn also auch z. B. alle Spekulationen über die letzten Grundlagen der Geometrie, die dann auch sofort die nichteuklidische (und die nichtarchimedische usw.) Geometrie mit einbegreift, für die halbwüchsigen Vierzehn- und Fünfzehnjährigen von vornherein ausgeschlossen sind[1]), so fordert doch die alte Frage, ob und in welchem Maße die Euklidische Geometrie als definierende und beweisende Darstellungsform auf dieser Stufe am Platze sei, eine grundsätzliche Stellungnahme. Noch immer stehen die beiden Parteien der Bejaher und Verneiner einander schroff gegenüber, so daß sich irgend Neues nur sagen läßt, wenn es etwa einen Mittelweg zu empfehlen gibt. Und dieser scheint uns darin gegeben, daß man immerhin dem Schüler die Eigenart dieser Darstellungsform an einer Anzahl ausgewählter Beispiele vorführt, in denen man alle die herkömmlichen Anschreibungen: Voraussetzung, Behauptung, Beweis usw. so umständlich, als Zeit und Geschmack es eben erlauben, zuerst selber vormacht und sie dann vom Schüler ebenso gründlich und sauber nachschreiben läßt. All dies aber wirklich nur in einer „Anzahl" von Beispielen u. zw. der möglichst kleinsten, die eben ausreicht, um den Schüler Sinn und Geschmack – und auch die Grenzen, an denen dann das Übermaß von Formalismus begänne, wirklich verspüren und verstehen zu lassen. Sowie aber die Schüler einmal wissen,

1) Vgl. unten S. 193 Anm. die nähere Stellungnahme zur Frage, ob und inwieweit solches etwa doch möglich und wünschenswert sei.

wie es sich mit diesen Krücken und Stelzen geht, mögen sie dann wieder auf ihren lebendigen Beinen so schnell und weit als möglich weiterlaufen; ja ab und zu sogar einmal barfuß, d. h. mit bewußter Beiseitesetzung der gewöhnlichen logischen Ausrüstung: also bloßes Vermuten und Erraten von Beziehungen, was ja dann mehr Verlangen nach dem wirklichen Beweis erregt, als immer in vorgegebene Beweisformen eingezwängt langsam forthumpeln zu müssen.

Noch Näheres über Inhalt und Form bei Euklid und ihre Unterschiede von denen der „neueren Geometrie" speziell in didaktischer Hinsicht vgl. § 18; allgemein haben wir auf die logische Form der Mathematik überhaupt im III. Teil (§ 50) zurückzukommen. Schon jetzt aber sei hinsichtlich alles Formellen eindringlichst empfohlen, auch noch auf der Mittelstufe den künstlichen logischen Apparat nicht als etwas Starres, fertig Gegebenes von vornherein dem Schüler und dem Gegenstand aufzunötigen; sondern den Schüler erst allmählich zum Verständnis vordringen zu lassen, daß und wie der jeweilige Stoff von selber nach einer strengen Form verlangt.

Da indes ein solcher Rat, solange er selber *in abstracto* gegeben wird, allzu leicht ungehört und unbefolgt verhallt, so folge ein näher durchgeführtes Beispiel (wieder der Pythagoreische Satz) im § 18. – Zuvor aber sei hier dem bisher vorwiegend im Hinblick auf den Geometrieunterricht Bemerkten noch ein grundsätzliches Wort über den Arithmetikunterricht, namentlich die sog. wissenschaftlich durchgeführte Lehre von den ersten vier Rechnungsoperationen (wie sie der erst allerjüngstens durch Pädagogischeres[1]) ersetzte österreichische Lehrplan für das fünfzehnte Lebensjahr vorgeschrieben hatte) beigefügt. Bekanntlich ist das Bedürfnis, auch der Arithmetik „Axiome" analog denen der Euklidischen Geometrie voranzustellen, erst spät aufgetreten und durch das „assoziative, kommutative und distributive Prinzip"[2]) befriedigt worden. Wie viele Fünfzehnjährige werden aber der Feinheit des Gedankens, daß sich das $(a + b) + c = a + (b + c)$ nicht „von selbst verstehe" und auch nicht beweisen, d. h. auf noch Selbstverständlicheres zurückführen lasse, sondern als Axiom gefaßt werden müsse, wirklich Dank wissen und nicht viel mehr,

1) Vgl. oben S. 30.

2) Bei FELIX KLEIN, „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus" (1908 vgl. oben S. 6, 7) sind S. 21, 22 im ganzen elf solche Grundgesetze,

wenn man sie wochen-, ja monate- oder semesterlang mit solchem Kaviar fürs Volk füttert, auf noch viel länger hinaus allen Ge-

---

fünf für Addition, sechs für Multiplikation, angeführt. Da ja die fünf ersten für Addition und Multiplikation ganz analog lauten, kann man sie so gruppieren:

		Gesetz (Axiom) der		
1)	$a+b$ ist stets wieder eine Zahl	**Unbeschränktheit**	$a \cdot b$ ist stets wieder eine Zahl	6)
2)	$a+b$ ist eindeutig bestimmt	**Eindeutigkeit**	$a \cdot b$ ist eindeutig bestimmt	7)
3)	$(a+b)+c = a+(b+c)$	**Assoziation**	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	8)
4)	$a+b=b+a$	**Kommutation**	$a \cdot b = b \cdot a$	9)
5)	aus $b>c$ folgt $a+b>a+c$	**Monotonie**	aus $b>c$ folgt $a \cdot b > a \cdot c$	10)
		Distribution	$a \cdot (b+c) = ab+ac$	11)

Hier stellt 11) einen Zusammenhang der Multiplikation mit der Addition her. Dagegen ist, wie man sieht, darauf verzichtet, die Multiplikation als eine zweite Operationsstufe auf die Addition als erste per definitionem zu bauen.

Damit man mich nicht etwa mißverstehe, als sei ich gegen die logischen Feinheiten einer Grundlagentheorie irgendwie unempfindlich, so füge ich obigem Rat zum Maßhalten den folgenden entgegengesetzt klingenden bei (nach der Regel „Wenn schon – denn schon"). Auf 3) gründet sich bekanntlich die praktische Anweisung, daß man bei Additionen „Klammern überhaupt fortlassen" dürfe. Neben (und nach, aber nicht etwa schlechthin vor) dieser praktischen Anweisung muß nun aber in voller theoretischer Schärfe klar gemacht werden, daß und warum der Ausdruck $a+b+c$ strenge genommen selbst erst noch eine aus dieser Schreibung nicht ohne weiters ersichtliche Deutung verlangt, da man zu a in einem ersten Schritt b addieren muß, damit man dann zur Summe $(a+b)$ in einem zweiten Schritt c addieren kann. Also: da wir Europäer von links nach rechts lesen, so heißt $a+b+c$ eigentlich $(a+b)+c$; wogegen $a+(b+c)$ heißt, man solle zuerst die Addition von b und c fertig machen und ihr Ergebnis dann zu a addieren. Erst wenn diese erschöpfenden begrifflichen Sicherstellungen der „nur durch Klammern" sich unterscheidenden Symbole wirklich von Grund aus verstanden und gewürdigt sind, sieht der Schüler in ihnen das, was der Logiker und Erkenntnistheoretiker ein synthetisches Urteil a priori nennt: nämlich mehr als eine bloße Tautologie, die aber gleichwohl einleuchtet als Gleichheits-Beziehung zwischen zwei in sich nicht identischen Begriffsinhalten. – Der Gipfel des nicht erst didaktischen, sondern auch logischen Elends dagegen wäre dort erreicht, wo man es an diesem eindeutigen Festlegen der Begriffsinhalte hat fehlen lassen und eine Gallerte von Vorstellungsmassen (oder „Verknüpfungen von bloßen Zeichen") mit dem Grabstichel einer „reinen Logik" oder „Logistik" in urteilsungeübte Kinderköpfe zu verladen sucht.

Felix Klein selbst (a. a. O. S. 24) warnt: „Was die wirkliche Verwendung dieser Dinge im Schulunterricht angeht, so kann dort von einer systematischen Darlegung aller dieser Grundgesetze der Addition und Multiplikation wohl nicht die Rede sein; nur die Gesetze der Assoziativität, Kommutativität und Distributivität wird der Lehrer bei Gelegenheit des Überganges zum Buchstabenrechnen explizit hervorheben können, indem er sie aus zahlreichen evidenten Zahlenbeispielen herauspräpariert."

schmack an Arithmetik überhaupt verloren haben? – Indem unser Lehrplan empfiehlt, die zusammenhängende Darstellung der Arithmetik statt erst im fünften schon im vierten Jahrgang zu beginnen, verfolgt er, wie hier eingestanden sei, nebenbei die Unterrichtspolitik, daß man sich auf einen solchen Anstoß hin am ehesten angewöhnen wird, das, was jetzt bei den Fünfzehnjährigen so schlecht verfangen hatte, wenigstens von Vierzehnjährigen überhaupt gar nicht mehr zu verlangen.

Als Ersatzmittel für diese formalistische Behandlung der ersten Rechengesetze schlägt unser Lehrplan das reichliche Lösen von Gleichungen vor. – Und sind denn nicht die Gleichungen der natürliche Ausdruck für den natürlichen Zusammenhang der direkten und inversen Operationen? Welcher grundlegende Satz ließe sich nicht in diesem Zusammenhang statt in langweiliger Loslösung aus allem Zusammenhang zur Sprache bringen? Wir widmen den Gleichungen noch einige besondere Bemerkungen im folgenden § 17. – Ferner hier nur ein Wort über das ebenfalls empfohlene Substituieren der Resultate in die Anfangsgleichung behufs Rechnungsprobe: Hat z. B. das Resultat einer Buchstabengleichung gelautet $x = \frac{a+b}{ab}$, und wird es in die Anfangsgleichung eingesetzt, so mögen sich schon die seltsamsten Ungetüme von Doppelbrüchen ergeben, an denen Lehrer und Schüler erkennen können, ob es mit dem Transformieren von Buchstabenausdrücken hinreichend sicher und flott geht. Dem Schüler aber bleibt durch das schließliche Klappen (oder auch Nichtklappen) der Probe jenes Gefühl der Unsicherheit über das Rechnungsziel erspart, das allen jenen Transformationsaufgaben anhaftet, wo zwar der Findige merkt, nach welcher Richtung hin es etwa einen Ausweg aus dem Formelgestrüpp gibt, wogegen der Unbeholfene und wohl überhaupt der Durchschnittsschüler eigentlich nie recht weiß, wann er die verlangten Transformationen als zur Zufriedenheit des Lehrers beendigt betrachten dürfe.

Diese Beschneidung des Formalismus im bisherigen Lehrstoff der Mittelstufe wird dann von selbst den möglichst reichlichen Anwendungen auf mannigfaltigste Gebiete zugute kommen. Denn sobald der Schüler spürt, daß er den Mechanismus der ersten vier Operationen und der einschlägigen Gleichungen als solchen fest im Griffe habe, so mag fortab das sachliche Interesse an den mannigfaltigsten Beispielen seine ganze Aufmerksamkeit in Anspruch nehmen; worüber einiges ebenfalls im folgenden § 17.

Alle nähere Ausführung dieser Leitgedanken muß wieder der Reformlust und Erfindungsgabe der Übungsbuchverfasser anheimgegeben werden. Es sei hier bemerkt, daß wir auch auf dieser Stufe neben dem Übungsbuch ein eigentliches Lehrbuch noch immer gern missen. Knappste theoretische Andeutungen, den wohlgegliederten Aufgaben vorangestellt (wie in HEIS), dürften den berechtigten Bedürfnissen der Lehrer und Schüler voll genügen [1]).

§ 17. Noch einige Bemerkungen zur Arithmetik der Mittelstufe.

Wenn also, wie gesagt, die Gleichungen und von diesen wiederum – gemäß unserem Prinzip der Bevorzugung „angewandter" gegenüber der „reinen" Mathematik – namentlich die „Textgleichungen" das Hauptstück des ganzen Arithmetikunterrichts der Mittelstufe bilden, so scheint gerade über diese wenig oder nichts Neues mehr zu sagen; denn diese „Text"- oder „Ansatzgleichungen" sind eines der traditionellsten und auch vom Standpunkt gewöhnlicher Schul- und Lehrbuchpraxis meist durchgeübten Stoffgebiete. Dennoch mag folgendes nicht überflüssig sein:

1. Wiewohl es vorwiegend die Gleichungen des ersten [2]) Grades

1) Ich spreche aus meiner eigenen vieljährigen Erfahrung: Als einmal dem Drängen einzelner Schüler (und ihrer Hauslehrer), die eben aus allen übrigen Lehrfächern her gewöhnt waren, alles Lernen sich nur als Memorieren eines gedruckten Lehrtextes zu denken, zeitweilig durch Einführung eines Arithmetikbuches neben der Beispielsammlung nachgegeben wurde, blieb dieses in den meisten Fällen dann doch unbenutzt in der Schublade liegen.

2) Hinsichtlich der „Gleichungen ersten Grades" müßten wir zum großen Teil einfach wiederholen, was SIMON neuerdings wieder in seiner „Methodik der elementaren Arithmetik" (S. 41–44) gesagt hat, und wo u. a. namentlich wieder eine Reihe historischer Mitteilungen auch für den Schüler interessant sind, wenn zwar nicht alle sogleich im vierten Jahrgang, sondern z. B. die über Funktionszeichen erst im siebenten. Insbesondere wertvoll sind die drei „methodischen Bemerkungen zu dem Ansatz der Textgleichungen"; wir heben hervor aus a): daß der Schüler angehalten werden muß, „sich die Dinge, von denen die Rede ist, anschaulich vorzustellen"; hiermit im Zusammenhang aus b): daß er z. B. bei der Aufgabe über das Bassin seinen Raum „mit a hl und nicht etwa gleich 1 zu setzen", den Umfang des Zirkus mit a m usw. einzuführen habe (mein 1900 verstorbener Freund MAISS hat jederzeit die Forderung vertreten, daß man den Maßzahlen immer die Maßeinheiten beifüge; was wir dann in unserer „Physik" und „Naturlehre" konsequent durchgeführt haben); aus c): „Es muß dem Schüler immer wieder eingeschärft werden: Je mehr Unbekannte, desto zahlreicher die Beziehungen, desto leichter der Ansatz, z. B. bei der Aufgabe: Jemand will sich 12 hl Wein à 80 M. mischen aus zwei Sorten à 60 und à 108 M.; wieviel muß er von

(mit einer und mehreren Unbekannten) sind, die hier als Anwendung der Operationsgesetze erster und zweiter Stufe in Betracht kommen, so verlangen doch schon der gleichzeitige Planimetrie- und Stereometrieunterricht, daß man auch den Gleichungen 2. und 3. Grades nicht ängstlich aus dem Wege gehe. Von diesen sind es wieder größtenteils die rein quadratischen und kubischen Gleichungen, mit denen sich schon ein gut Teil jenes geometrischen Lehrstoffes bewältigen läßt. Wenn aber ab und zu eine der geometrischen Aufgaben eine gemischtquadratische Gleichung von der Form $x^2 + ax = b$ erfordert, so braucht man nur *ad hoc* dem Schüler den Kunstgriff des beiderseitigen Hinzufügens von $\frac{a^2}{4}$ zu zeigen, ohne darum in den mathematischen Stoff des ersten Jahrgangs der Oberstufe vorgreifen zu müssen. Bei kubischen Gleichungen mag nur das Ordnen verlangt und hiermit der 3. Grad nachgewiesen, die Lösung aber auf spätere Jahrgänge oder *ad kalendas graecas* verschoben werden, wenn und wo die Lösung der Gleichung des 3. Grades überhaupt nicht Lehrstoff ist.

2. Was speziell die Textgleichungen und von diesen wieder das beliebte und einigermaßen gefürchtete Gebiet der „Bewegungsgleichungen“ betrifft, so mögen die folgenden Bemerkungen aus WILLMANNS Didaktik zeigen, daß und wie der Lehrer dem Schüler die Sache noch wesentlich erleichtern kann u. zw. keineswegs auf Kosten der Gründlichkeit, wenn er nicht (wie

jeder Sorte nehmen? ist es viel natürlicher, daß der Schüler sagt: von der ersten nimmt er x, von der zweiten y. Bei weitem die meisten der Aufgaben, welche BARDEY als Gleichungen 3. Stufe bezeichnet, sind nur deshalb schwierig, weil der Schüler sich mit einer Unbekannten abquält; z. B. die Aufgabe: Gib du mir 1 M. ab, so habe ich dreimal soviel wie du; und der andere: Gib du mir 1 M., so haben wir beide gleich viel: $(x + 1) = 3(y - 1)$ und $(x - 1) = y$.“ – Es dürfte hier beizufügen sein, daß wohl kaum der Schüler freiwillig sich selber quält, sondern daß er und mit ihm der Lehrer durch die Aufgabensammlung gequält wird, wenn diese eben jene Aufgaben, die mit mehreren Unbekannten so leicht zu lösen wären, schon unter denen mit einer Unbekannten bringt. Nun wollen wir aber andererseits den Schüler auch nicht durch das mechanische Hinschreiben und ebenso mechanische Auflösen mehrerer Gleichungen verwöhnen. Darum dürfte der richtige Mittel- und Ausweg der sein, immerhin solche Aufgaben so lange aufzusparen, bis der Schüler das Lösen mehrerer Gleichungen mit mehreren Unbekannten kennt, ihn aber dann aufzumuntern, daß er öfter und öfter das, was die Substitutionsmethode als Rechenmechanismus vorschreibt, zur Sache freier Überlegung macht und also im zuletzt angeführten Beispiele sofort mit den beiden Größen x und $(x - 1)$ anstatt eines y arbeitet.

z. B. HEIS § 63, Aufgabe 120) sogleich den einen Boten 5 Meilen täglich, den andern in derselben Richtung von einem um 12 Meilen rückwärts gelegenen Ort 7 Meilen zurücklegen läßt, sondern wenn man mit gleichen Geschwindigkeiten in entgegengesetzter Richtung beginnt wie WILLMANN[1]):

„Als Lehrprobe der Mathematik wählen wir eine Gruppe von algebraischen Aufgaben, welche in den Sammlungen zwar Aufnahme, aber nicht die Verarbeitung gefunden hat, die sie besonders darum verdient, weil sie mehrfache Gelegenheit zur Verknüpfung der Mathematik mit anderen Disziplinen darbietet. Es sind dies die Aufgaben über das Zusammentreffen von bewegten Körpern, also den Rudimenten der Mechanik angehörig und darum nur auf den Begriffen der Größe, des Raumes und der Bewegung beruhend und von erschwerenden Nebenvorstellungen frei.

Zuvörderst ist darauf Bedacht zu nehmen, diese Aufgaben möglichst auseinander hervorgehen zu lassen, indem man den einfachsten Fall zum Ausgangspunkte nimmt und verfolgt, wie sich derselbe variieren und komplizieren läßt. Diesen Fall aber bezeichnet die Frage: Wo treffen zwei Körper, welche von den Punkten A und B einer Strecke gleichzeitig ausgehen und sich mit gleicher Geschwindigkeit aufeinander zu bewegen, zusammen? Es leuchtet ein, daß die Mitte der Bahn der Punkt des Zusammentreffens ist; zu zeigen ist aber gleich hier, daß mit der Frage wo? auch die Frage wann? beantwortet ist durch die Bestimmungen: Die Körper treffen in dem Zeitpunkte zusammen, in welchem sie die Mitte der Bahn erreichen, oder anders: In der Hälfte der Zeit, welche sie zum Durchmessen der ganzen Bahn brauchen würden. Die nächstliegende Modifikation ist die, den einen Körper früher als den andern aufbrechen zu lassen; alsdann ist die von demselben durchlaufene Strecke abzurechnen, ehe die Bahn halbiert wird. Eine zweite Modifikation tritt ein, wenn die Geschwindigkeit der Körper eine ungleiche ist, der eine m, der andere n Raumeinheiten in der Zeiteinheit zurücklegt. Da sowohl AB als m und n Strecken[2]) sind, so liegt die konstruktive Lösung am nächsten; die Strecken werden dadurch in Verbindung gebracht, daß sie auf Schenkeln eines Winkels aufgetragen werden, auf dem einen Schenkel AB, auf dem andern m in AC, und n in CD; sodann wird die Linie DB gezogen und zu ihr eine Parallele in C, welche AB in E schneide. Dann ist nach den Lehrsätzen von den proportionierten Strecken E der Punkt des Zusammentreffens der beiden Körper.

---

1) WILLMANN, Did. 3. Aufl. II. Bd., S. 447.

2) Streng genommen geben „c Meter in 1 Sekunde“ schon eine Geschwindigkeit, nicht eine „Strecke“ an. (Vgl. S. 84 und S. 150, Anm.)

Die algebraische Lösung ist ebenfalls vorzunehmen; sie gestaltet sich am einfachsten, wenn der Punkt der Begegnung gegeben ist und die Geschwindigkeiten bestimmt werden sollen. Diese sind gleich, wenn jener Punkt in der Mitte der Strecke liegt, diese also in die Hälften teilt; wenn er sie in $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ teilt, so ist das Verhältnis der Geschwindigkeit offenbar $1:2$, wenn er sie in $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{5}$ teilt $2:3$, wenn in $\frac{3}{10}$ und $\frac{7}{10}$, $3:7$, und allgemein, wenn in $\frac{n}{m+n}$ und $\frac{m}{m+n}$, $n:m$. Diese Lösung ist analytisch-induktiv: wird nach dem Begegnungspunkte gefragt, so muß synthetisch-deduktiv vorgegangen werden. Es ist zu erwägen, daß über die beiden Strecken, welche die Körper bis zu ihrem Zusammentreffen zurücklegen, zweierlei bekannt ist: Ihre Summe AB und ihr Verhältnis $m:n$. Die beiden Strecken lassen sich daraus bestimmen, ohne eine Gleichung anzusetzen, durch folgende Betrachtung: Wäre m und n gleich, so wäre sowohl AE als EB die Hälfte von AB, also $\frac{1}{2}AB$; nun aber muß AB einen anderen Faktor erhalten, um AE zu ergeben und wieder einen andern, um EB zu ergeben; diese Faktoren sollen sich nun wie $m:n$ verhalten, müssen aber so gut wie die beiden Hälften 1 ausmachen; das trifft aber nur bei zwei Größen zu, welche selbst m und n als Faktoren und $m+n$ als Divisor haben, also bei $\frac{m}{m+n}$ und $\frac{n}{m+n}$; mithin sind die beiden Strecken $\frac{m}{m+n}AB$ und $\frac{n}{m+n}AB$.

An dritter Stelle ist nun auch die technische, algebraische Auflösung vorzunehmen, bei welcher eine der Teilstrecken oder beide als Unbekannte angesetzt und die sie enthaltenden Gleichungen gebildet werden. Eine weitere Variation der Aufgabe ergibt die Veränderung der Fragestellung, indem nicht bloß wie bisher die Teilstrecken, sondern auch die Gesamtstrecke oder eine der Verhältniszahlen als die gesuchte Größe betrachtet werden können. Nunmehr ist auch die Anwendung der gefundenen Relation auf spezielle Fälle vorzunehmen; an Stelle der bewegten Körper mögen zwei Wanderer, Eisenbahnzüge, Armeen usw. auftreten, wobei die wirkliche Geschwindigkeit der betreffenden Bewegungen wohl zu beachten und selbst einzuprägen ist; denn solche Beispiele sind geeignet, nicht bloß abstrakte Größenverhältnisse zu illustrieren, sondern auch den sinnlichen Gesichtskreis durchzuarbeiten, indem sie Natur- und Lebenskenntnisse gewähren.

Nun erst hat die eingreifendere Modifikation einzutreten, welche darin besteht, daß die beiden Körper die Bewegung nach derselben Richtung erhalten. Dabei kommt nur der Fall der ungleichen Geschwindigkeit und des Aufbruches zu verschiedener Zeit in Betracht, also die Frage nach dem Orte, wo der langsamere vorausgehende Körper von dem schnelleren nachfolgenden eingeholt wird. Auch hier bietet sich die konstruktive Lösung als die nächstliegende dar; mit ihr ist aber außer der algebraischen eine dritte zu verbinden, welche die Bewegung eines der beiden Körper verfolgt und sich zu ihrer Bestimmung der geometrischen Reihen bedient. Der nacheilende Körper muß erst die Strecke AB, d. i. den Vorsprung des langsameren Körpers, durchlaufen, dann die Strecke, welche letzterer während dieses Durchlaufens zurückgelegt hat, also $\frac{m}{n}AB$, dann die Strecke, welche der langsamere Körper wieder in dieser Zeit zurücklegt, also $\left(\frac{m}{n}\right)^2 AB$ usw. bis $\left(\frac{m}{n}\right)^p AB$, wobei p als jede gegebene Größe überschreitend gedacht werden kann. Die Summierung dieser Reihe ergibt die Strecke, welche der schnellere Körper bis zum Zusammentreffen beider zurücklegt. Es ist nicht schwer, hier das Bedenken nahe zu legen, wie es denn vereinbar sei, daß dieselbe Strecke früher als in bestimmte Grenzen eingeschlossen, zuletzt aber auch als aus unendlich vielen Teilstrecken bestehend gedacht wurde, und ob nicht die unendlich vielen Summanden eine unendliche Größe ergeben müßten, also gar kein Zusammentreffen der Körper stattfinden könne. Es ist bekannt, daß solche Betrachtungen den Eleaten ZENO beschäftigten, dessen zweites Argument gegen die Raumvorstellungen von dem Wettlaufe des Achilleus mit der Schildkröte hergenommen ist. Die sich daranschließenden Kontroversen gehören nicht in den Unterricht[1]), der die ganze Tragweite der Frage nicht zu würdigen vermag, aber die historische Angabe über ZENO und sein Argument ist belehrend und anregend."

Es wäre noch hinzuzufügen, daß man bei der Behandlung der Bewegungsgleichungen auf graphische Darstellungen, wie sie beim Entwerfen der Fahrpläne längst ein unentbehrliches Hilfsmittel geworden sind, auch schon auf der Mittelstufe nicht verzichten wird[2]). Immerhin klingt an sie einigermaßen an, was WILLMANN oben über die Beziehung zu „proportionierten Strecken" sagt. – Daß, wenn man das noch anpaßt an die moderne Darstellungsweise des praktischen Lebens, es keineswegs nötig und wohl auch kaum rätlich ist, sogleich ein ganzes Stück analytischer Geometrie der geraden Linie in den Unterricht für

1) Daß und warum ich in diesem Punkte etwas anderer Ansicht bin als WILLMANN, vgl. § 35, S. 342 ff; die ganze Betrachtung über geometrische Reihen gehört natürlich noch nicht in die IV. Klasse.

2) Ausführliche dem wirklichen Leben entnommene Beispiele findet man u. a. bei KLEIN-SCHIMMACK, Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen (1907) S. 35 (Graphischer Eisenbahnfahrplan für die Strecke Northeim-Göttingen-Dransfeld-Münden, Winter 1906/7, sehr detailliert, in drei Farben ausgeführt). Desgleichen schematisch in BOREL-STÄCKEL S. 300–303, hier auch mit den Fahrplänen in Ziffern für Frankfurt a. O.–Kottbus und zurück.

Vierzehnjährige einzuschieben, wird später (S. 358) noch näher zu begründen sein.

3. Bei aller Betonung der Gleichungsaufgaben geht doch in ihnen der Lehrstoff der Mittelstufe nicht restlos auf. So sind z. B. die Lehren von Maßen und Vielfachen, von der Teilbarkeit, von den Zahlensystemen auf der Mittelstufe näher zu begründen, als es in den beiden untersten Jahrgängen geschehen konnte. Wenn man dabei jetzt schon überall von den allgemeinen Zahlenbezeichnungen Gebrauch machen (also z. B. den Zusammenhang zwischen Dividend, Divisor, Quotient und Rest $a = bq + r$ schreiben) läßt, so braucht man darum dem Schüler diese Darstellungen in Buchstaben doch nicht dadurch überflüssig zu erschweren, daß man sogleich mit diesen allgemeinen Bezeichnungen beginnt. Vielmehr bringe man dem Schüler den Nerv jedes solchen arithmetischen Satzes und Beweises immer noch an numerischen Beispielen zum Bewußtsein und habe einen achtsamen Blick dafür, ob und inwieweit er, jetzt an das Denken in allgemeinen Zahlen und Zahlenzeichen schon mehr und mehr gewöhnt, die verallgemeinerte Darstellung schließlich selber findet, statt daß er nur nach „Vortrag" und „Buch" auswendig lernt.

Also z. B. bei der Teilbarkeitsregel für 9 nicht sogleich beginnen mit der Zerlegung

$$\begin{aligned} &\ldots 1000d + 100c + 10b + a \\ = \;&\ldots .999d + 99c + 9b \\ &\qquad\;\; + d + c + b + a \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Sondern um vor allem das Interesse zu spannen, beginne man lieber mit einem der schönen Kunststücke: Z. B. ein Schüler schreibe an die Tafel (ohne daß der Lehrer hinsieht) eine Zahl von beliebig vielen Ziffern, dann darunter dieselben Ziffern in beliebig geänderter Reihenfolge, subtrahiert die kleinere von der größeren Zahl, streicht aus der Restzahl eine beliebige Ziffer weg und gibt von den übrigen nur die Summe an; in nebenstehendem Beispiel 28. Darauf sagt der Lehrer: „Sie haben 8 weggestrichen." Da dem Schüler die Neunerregel von der Unterstufe her bekannt ist, sollte er die Erklärung des Wunders (es war von 28 auf 9×4 zu ergänzen) füglich selber finden und von da ab vor den Quersummen, Neunerresten usf. doppelten Respekt haben.

$$\begin{array}{r} 1\,687\,432 \\ 8\,176\,234 \\ \hline 6\,48\cancel{8}\,802 \\ 28 \end{array}$$

Ferner ein Wort zu den Zahlensystemen als solchen. Während wir im vorausgegangenen Jahrgang der Unterstufe das dekadische System als eine Anwendung der Potenzen von 10 von Grund aus verstehen lernten, sollte man jetzt, auf der Mittelstufe, den Schülern doch nicht ganz die Einsicht vorenthalten, daß das Schöne dieser Zahlensysteme keineswegs an der Grundzahl 10 als solcher haftet. Vielmehr wäre es wohl einer der nützlichsten, aber auch radikalsten Fortschritte, wenn man sich dereinst noch zu einem dodekadischen an Stelle des dekadischen Systems, nun aber natürlich auch in konsequenter Durchführung, aufschwänge (nicht wie in dem z. B. von England noch eigensinnig festgehaltenen Reste der Dodekadik in unsystematischer Verquickung mit der dekadischen Schreib- und Rechenweise). Es würde dann nicht nur das Symbol 1000 dasselbe bedeuten, was wir heute $12^3 = 1728$ schreiben, sondern jeder würde sich dann in diesem fast doppelt so weiten Zahlenkreise ebenso heimisch fühlen, wie wir uns heute in dem bis Tausend. Ferner etwas über das dyadische System, wo 1000 nur unser acht bedeutet und wo alle Zahlen nur aus Einsern und Nullen bestehen. – Freilich: Tothetzen wird man solche gelegentliche Betrachtungen nicht. Indem die neuesten österreichischen Lehrpläne aus den Prager Vorschlägen die Erwähnung des Wortes „Zahlensysteme“ offenbar absichtlich ausgemerzt haben, dürften sie wohl aus dem einstigen Zuviel in das Zuwenig verfallen sein.

Alles in allem verfolgen wir mit unserem Lehrplan, der aus der Mittelstufe viel von dem hergebrachten arithmetischen Stoff des IV. und V. Jhgs. beseitigt hat, nur wieder die Absicht, 1. dem Lehrer möglichste Bewegungsfreiheit zu geben, freilich mit dem Wunsch, daß diese durch Wegfall vieles Formalen 2. den Anwendungen, einem gesunden Sachunterricht in Form lebensvoller arithmetischer Aufgaben, zugute kommen möge. Insbesondere soll der Umstand, daß 3. für den zweiten der beiden Jahrgänge der Mittelstufe nur eine Art Nachlese zum vorausgegangenen Jahr in Aussicht genommen ist, der gleichzeitige, reformierte Stereometrieunterricht (vgl. § 19) mit seinem nunmehr eingefügten geometrischen Zeichnen einen weiteren Kraftzuschuß erhalten, u. a. auch dadurch, daß manche der stereometrischen Rechnungen in der Geometriestunde nur angesetzt und erst in der Arithmetikstunde durchgeführt werden (also eine ähnliche Arbeitsteilung wie in den obersten beiden Jahrgängen zwischen Physik und Mathematik). Aus ebendiesem Grunde raten wir auch davon ab, den Lehrstoff des V. Jhgs. noch mit den „Potenzen und Wurzeln“ zu belasten, wie dies der neueste österreichische Lehrplan, abweichend von den Prager Vorschlägen vorgeschrieben hat, worauf unter einem anderen Gesichtspunkt noch S. 222 zurückzukommen ist.

§ 18. Noch einige Bemerkungen zur Planimetrie der Mittelstufe.

Es ist vielleicht einer der Gründe, warum es zu einer Verständigung zwischen den Anpreisern und Schmähern des EUKLID für die Schule nicht kommen will, daß man die Vorzüge und Mängel seiner logischen Form von den Mängeln und Vorzügen seines Inhaltes nicht bestimmt genug auseinanderhält. Rein inhaltlich ist es doch unbestreitbar ein Fortschritt der sog. neueren Geometrie, der weder wissenschaftlich rückgängig gemacht noch auch dem Schulunterricht vorenthalten werden kann, daß an Stelle der starren Euklidischen Gebilde für jeden modern Denkenden der Gedanke an ihre Beweglichkeit, an das stetige Übergehen des einen Gebildes in andere getreten ist. Es bleibt aber die Frage erlaubt, ob, wenn z. B. STAUDTS „Geometrie der Lage" so ganz anders beginnt und fortfährt als der alte Euklid, sei es im Original[1]), sei es in Schulbuchform, nun auch dem ersten Unterricht einer systematischen Planimetrie ein möglichst radikales Aufgeben alles dessen, was in Inhalt und Form an EUKLID erinnert, gezieme? Aber diese Frage darf ohne Anschein eines Rückfalles wenigstens für einen größeren oder kleineren Teil der in EUKLID gesammelten geometrischen Begriffe und Sätze verneint werden; denn wenn z. B. den Kenner die Planimetrie freilich erst bei der harmonischen Teilung oder den Doppelverhältnissen zu interessieren anfängt, so setzt er ja die Gesetze über gleichschenklige Dreiecke und dergleichen, ja wohl auch den Pythagoreischen Satz als Dinge voraus, über die eben schlechterdings nichts Neues zu sagen ist. Nur dem Anfänger aber ist eben auch das Älteste neu: und wie weit sollen wir uns also doch wieder einlassen auf die Dreieckskongruenz, die Sätze über Wechsel- und Gegenwinkel bis zurück zu den ersten Euklidischen Axiomen und Definitionen?

1) Bekanntlich wird in England auch heute (ich weiß allerdings nicht, wie häufig) wirklich noch nach dem Original-Euklid unterrichtet. Auch ein Schlaglicht auf die so häufig kritiklos empfohlenen Schulzustände Englands! — Mein verehrter Freund HOUSTON STEWART CHAMBERLAIN schreibt mir (und verspricht zugleich für künftig einen ausführlicheren Bericht), daß er selbst ebendiesen Unterricht genossen habe, daß man etwa drei Jahre zur Bewältigung des ersten Buches brauchte, und daß z. B. eine Klasse ein ganzes Semester lang mit Proposition I, 4 und I, 5 (d. i der Kongruenzsatz *SWS* und der Satz, daß im gleichschenkligen Dreieck die Winkel an der Grundlinie gleich sind) beschäftigt war, „und verstanden hatten die wenigsten sie auch am Schluß. Wer dagegen, wie ich, mathematische Beanlagung besaß, hatte seinen Euklid gleich durchgelesen und saß nun die Jahre da, ohne irgend das Geringste dazu zu lernen".

Ferner sozusagen umgekehrt: Wenn z. B. eine Grundlegung der Geometrie, die auf höchste Strenge der Definition und Deduktion abzielt, in den Dreieckssätzen von PASCAL und DESARGUES kritische Stellen im Ausbau des Systems[1]) erkannt hat, so scheinen dem Anfänger gerade diese Sätze wieder zu einfach, als daß er ihnen ein besonderes Interesse abgewinnen könnte; sie laufen für ihn nebenher, mitten zwischen den sonstigen Sätzen über ähnliche Dreiecke in perspektiver Lage — dem Anfänger wäre sogar schwer begreiflich zu machen, warum man auch nur die Namen ihrer Urheber aufbewahrt hat.

Welche Ausgangspunkte also soll der zusammenhängende Planimetrie-Unterricht wählen angesichts solcher widerstreitenden Rücksichten auf ein zuwenig und zuviel an Einfachheit? Unterscheiden wir hier zwischen dem systematischen Lehrgang, den das Lehrbuch festhält, und dem eindruckvollsten mündlichen Unterricht. Dem letzteren würden wir den — vom Herkömmlichen wohl stark abweichenden — Rat geben, auch auf der Mittelstufe die ersten Schulstunden des Planimetrieunterrichts noch nicht mit einem plötzlichen Sprung zu den systematischen Ausgangspunkten, die das jeweilige Lehrbuch für nötig hält, zu eröffnen, sondern zu beginnen mit irgendeinem von der Unterstufe her schon bekannten, inhaltlich recht interessanten Satz, dessen Beweis nicht allzuviel, aber doch auch nicht gar zuwenig Lehrsätze und in ihnen implizite die Grundsätze und Grundbegriffe enthält. Es diene hierfür als

Lehrprobe: Der Pythagoreische Satz beim Übergang von der Unter- auf die Mittelstufe.

Wir hatten als Abschluß der Unterstufe (also nach dem hier vorausgesetzten Plan wenige Monate vor der jetzigen Einführung in eine zusammenhängende Planimetrie) die pythagoreische Beziehung wie eine empirische Tatsache gefunden, haben sie durch gehäufte Induktionsfälle, gleichsam durch variierte Experimente, bestätigt und dann möglichst reichlich zeichnerisch und rechnerisch angewandt — bei

1) Als Satz 21 (Pascalscher Satz) formuliert HILBERT, „Grundlagen der Geometrie", II. Aufl. 1903, S. 27 den folgenden: „Es seien A, B, C bzw. A', B', C' je drei Punkte auf zwei sich schneidenden Geraden, die vom Schnittpunkte der Geraden verschieden sind; ist dann CB' parallel BC' und CA' parallel AC', so ist auch BA' parallel AB'."

Als Satz 33 (Desarguesscher Satz) ib. S. 48: „Wenn zwei Dreiecke in einer Ebene so gelegen sind, daß je zwei entsprechende Seiten einander parallel sind, so laufen die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken durch ein und denselben Punkt oder sind einander parallel, und umgekehrt."

alledem aber doch noch recht stiefmütterlich alles das behandelt, was das auch nur halbwegs strenge Beweisen seiner genauen und allgemeinen Gültigkeit betrifft. Machen wir deshalb die noch verbliebene Lücke jetzt zum Ausgangspunkt in das neue, dem Schüler einstweilen noch so gut wie unbekannte Land dieses gepriesenen, aber auch gefürchteten „strengen Beweisens“. Ein bloßes Eingestehen des Lehrers, daß bei jenen Arbeiten mit Pappendeckelmodellen u. dgl. „die eigentliche Geometrie“ zu kurz gekommen sei, würde natürlich auf den Schüler gar keinen Eindruck machen; er weiß ja gar nicht, warum das nicht schon „eigentliche“ Geometrie gewesen sei, und es wird jedenfalls einige Lehrkunst dazu gehören, auch hinterher dem Schüler nicht wieder sozusagen nur zu „beweisen“, sondern ihm es anschaulich und fühlbar zu machen, daß und warum nicht unter allen Umständen jener fruchtbare Satz selber viel mehr wert sei als der scharfsinnigste Beweis für den Satz.

Vielleicht aber haben dem Lehrer, der seine Schüler bei dem empirischen Lehrgange der Unterstufe hinreichend scharf beobachtet hat, diese selbst schon den Fingerzeig gegeben, an welchen Punkten sich damals ihr logisches Gewissen zu regen begonnen hatte[1]. Gelegenheiten hierzu hatten wir ja genug gelassen. Schon daß die Schnur, mit den abgegrenzten Strecken 3, 4, 5 dm zusammengelegt, ein rechtwinkliges Dreieck bildet[2], war ja doch nur dem Augenmaß entnommen (vgl. S. 168 Anm.) — es konnte dieses zwar auch mit dem Winkelhaken oder Transporteur nachgeprüft werden, aber dann hatten wir uns auf die Genauigkeit dieser Instrumente und auf die Gewissenhaftigkeit ihres Verfertigers verlassen u. dgl. m. Wählen wir also unter diesen zahlreichen Anlässen zur genauen logischen Nachprüfung unseres damaligen empirischen Verfahrens etwa unser Arbeiten mit dem Modell Fig. 78, S. 171. Wir hatten das Fünfeck und zwei Dreiecke fertig mitgebracht, aber wieder war es dann eigentlich nur das Augenmaß, das uns bei der Lage I, II das Hypotenusenquadrat, bei III, IV die Summe der

1) Ich erzähle hier aus meinem pädagogischen Seminar die Beobachtung, daß, als der vortragende Kandidat in den Figg. 73—77, S. 170 die Quadrate der Hypotenuse zeichnete, indem er z. B. bei der Figur mit den Katheten 1, 2 die beiden neuen Eckpunkte des Hypotenusenquadrates durch das Fortschreiten in Rösselsprüngen gewann, ein Schüler dieser Sache offenbar nicht recht traute, d. h. nicht ohne weiters überzeugt war, daß man so Quadrate erhalte. Dies hat ein die Schüler während des Lehrauftrittes scharf beobachtendes Mitglied des Seminarlehrkörpers daraus entnommen, daß der Schüler (ohne übrigens etwas von seinem Bedenken zu äußern) mit dem Zirkel die Gleichheit der Seiten und mit dem Winkelhaken die Rechtwinkligkeit nachmaß.

2) Wollten wir dies streng beweisen, so wäre es schon nicht der Pythagoreische Satz selbst (nicht einmal für jenes spezielle Dreieck 3, 4, 5), sondern der für seine Umkehrung; vgl. hierzu S. 168, Anm. sowie über Umkehrungsbeweise überhaupt S. 474.

Kathetenquadrate erkennen ließ. Vor allem aber hatte sich der Schüler beim Anblick des etwas seltsam geformten Fünfecks sofort gefragt: Wie hat denn der Lehrer das konstruiert? Und als der Lehrer dann solche Modelle von den Schülern selbst anfertigen ließ, muß er ihnen eine Anweisung gegeben haben, ob sie vom Hypotenusenquadrat, oder ob sie von der Summe der Kathetenquadrate ausgehen sollen. Keineswegs aber versteht es sich von selbst, daß die eine und die andere Art des Ausgehens beim Zeichnen der Beweisfigur zu genau demselben Fünfeck führen müsse. Kurz, hier klappt auch schon für den Verstand des Schülers etwas nicht mehr ganz[1]). Und erst in dem Augenblick, wo nun der Schüler dieser seiner Unklarheit so recht von innen heraus inne wird, wo er „weiß, daß er nichts (oder doch etwas nicht) weiß", zerstreue der Lehrer den noch verbliebenen logischen Nebel, indem er nun zum erstenmal in scharfer Sonderung die logischen Glieder „Voraussetzung, Behauptung und Beweis" gleichsam vor den Schüler hinlegt und ihn Schritt für Schritt von einem zum andern führt. Also in unserem Beispiele: Von dem (ebenen, geradlinigen) Dreieck ABC (Fig. 83) wird schlechterdings nichts anderes vorausgesetzt, als daß es bei C einen rechten Winkel hat.

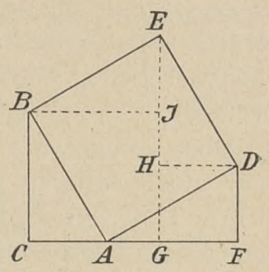


Fig. 83.

Dann errichten wir über AB ein Quadrat, wobei wir uns vorbehalten, später allgemein zu fragen, wieviel Bestimmungsstücke für ein Viereck oder speziell auch ein Quadrat notwendig und ausreichend sind. Diesmal geschieht es nur aus den weiteren Voraussetzungen, daß $AD = AB$, ferner daß $BE = AB$, endlich daß die Winkel bei A und B

1) Ich habe wieder aus dem Seminar zu berichten, daß, als eine ähnliche Lehrprobe in einem früheren Jahre veranstaltet worden war, der Kandidat selbst, wiewohl er sich als ein in höheren Dingen schon ziemlich gut unterrichteter Mathematiker erwies, kein Verständnis dafür hatte, daß und warum die Kongruenz der vier Dreiecke erst bewiesen werden müsse, und daß sie nicht aus einem beliebigen Kongruenzsatz bewiesen werden könne. Sollten wir daraus nicht den Schluß ziehen dürfen, daß beim herkömmlichen Vorgehen, wo der Lehrer eben den richtigen Beweis vormacht oder ihn zwar aus dem Schüler herausfragt, aber doch schon mit von vornherein gebundener Marschroute, den Kindern der eigentliche Nerv eines solchen Beweises mindestens ebenso fremd bleibt, wie er es jenem Kandidaten gewesen war?

Alles in allem schließe ich aus solchen Erlebnissen in meinem Prager pädagogischen Seminar, daß, wie die angehenden Lehrer, natürlich vor allem auf Grund ihrer Erinnerungen an die eigene Schulzeit, alles Elementarmathematische fast ausnahmslos nur in einer gewissen Starrheit und Steifheit vorzubringen pflegen, wohl auch später in allen diesen Dingen, namentlich des Beweisens, noch immer viel, viel bloße Konvention und nur allzuwenig lebendiges Gefühl für das innere Leben des mathematischen Inhalts und der mathematischen Form auf dem ganzen Unterrichte lasten mag.

rechte sind. Nicht aber haben wir vorausgesetzt, daß $DE = AB$, und daß die Winkel bei D und E ebenfalls rechte seien; sondern die Verbindungsstrecke DE war ja schon „eindeutig bestimmt“, als durch das Zeichnen der Normalen AD und BE die Eckpunkte bestimmt waren; und deshalb müßten wir uns es auch gefallen lassen, wenn nun $DE \gtrless AB$, oder wenn die Winkel bei D und E schiefe wären. Nun erst werden DF, EG, DH und BI ausdrücklich als Normalen (worauf? – in welcher Reihenfolge?) gefällt und dann der Beweis in der bekannten Weise durchgeführt, hauptsächlich mittels der „Kongruenz“ nach SWW. Von dieser hat freilich bisher der Schüler wenig unter diesem Namen gehört, da wir für die Unterstufe an Stelle der Kongruenzsätze durchwegs Konstruktionsaufgaben gesetzt hatten (vgl. S. 124 ff.). Nun aber mag der Anfänger der Mittelstufe nicht nur den theoretischen Nutzen dieses Kongruenzbegriffes einsehen, sondern auch sogleich zu einer Wiederholung angeregt werden, die darin besteht, daß er eben jene Konstruktionsfälle in die Sprache der Kongruenzsätze übertragen lernt.

Doch genug einer solchen näheren Skizzierung, wie dieser oder ein anderer Beweis für diesen oder einen anderen, dem Schüler inhaltlich von der Unterstufe her schon bekannten Satz logisch auseinanderzulegen wäre, damit im Schüler das Bedürfnis nach logischer Strenge sich überhaupt zu entwickeln anfange. – Ein anderer Satz und Beweis wäre etwa der von den sechs[1]) gleichen Kreisen, die sich um einen Kreis herumlegen lassen (vgl. S. 111, Aufg. 7). Alsbald treffen wir auf den Satz von der Winkelsumme des Dreieckes, und, indem wir diesen wieder auf seine Voraussetzungen zurückführen, auf das Parallelenaxiom in irgendeiner seiner vielen geometrisch äquivalenten Fassungen.

1) Wie wir schon beim Prüfen der Winkeldreiecke (S. 104, Aufg. 4) hervorgehoben haben, daß das Aneinanderpassen der vier Winkel nur dann etwas beweist, wenn es auf einem ebenen Tisch geschehen war, so läßt sich nun auch durch die um eine Münze (oder einen Faschingskrapfen – angesichts dieses Phänomens fragte mich einmal eine der Geometrie sonst sehr fremde Frau um das Warum?) herumzulegenden 6 gleichen die entscheidende Rolle der Ebene besonders drastisch etwa so demonstrieren: Gesetzt, wir hätten den Versuch mit den Münzen auf einer buckligen Tischplatte (oder den mit den Krapfen in einer Schüssel von der Form eines Kugelabschnittes) gemacht, dann würde die 6. Münze sich nicht mehr zwischen die 5. und 1. der um die mittlere herumgelegten bis zur Berührung mit letzterer hineinpassen lassen. Auf die zugeschärfte Frage, wie stark die Krümmung der Tischplatte sein müßte, daß sich statt der 6 nur 5 oder 4 oder gar nur 3 Münzen herumlegen lassen, ergibt sich die Antwort aus der Lehre von den regelmäßigen Polyedern: Man berechne zu einer Kugel vom gegebenen Halbmesser R die Halbmesser r_5, r_4, r_3 der Kugelkappen; und umgekehrt aus diesen r die Halbmesser der Kugeln R_3, R_4, R_5. Als entsprechende Kugel vom Halbmesser $R_6 = \infty$ muß dann wieder die Ebene zum Vorschein kommen.

Zwar wird der Lehrer jeder Versuchung, hier schon die Schüler mit der „Möglichkeit" oder „Wirklichkeit" einer nichteuklidischen Geometrie bekannt zu machen, infolge handgreiflicher didaktischer Rücksichten aus dem Wege gehen, mag er auch für seine wissenschaftliche Person[1]) noch so sehr ein Verehrer

1) Vgl. die maßvollen Worte FELIX KLEINS: „Ich empfehle keineswegs, daß man in der Schule die nichteuklidische Geometrie erwähnt" (s. o. S. 42). Desgleichen wieder KLEIN, Elementarmathematik II. S. 387.

Als eine Stimme aus Lehrerkreisen in dieser Sache seien hier aus der soeben während des Druckes erscheinenden lesenswerten Anzeige von SIMONS Didaktik 1908 (vgl. diese S. 115, 116 u. a.) durch W. GERCKEN (Deutsche Literaturzeitung, 27. März 1909, Nr. 13) folgende Schlußworte wiedergegeben:

„Am entschiedensten widersprechen muß ich S.s Absicht, die nichteuklidische Geometrie als großartige Errungenschaft der Wissenschaft schon in die Schule zu bringen. Ich erzähle den Primanern auch von ihr, aber nur kurz und warnend. Noch steht die Sache nicht so, daß diese Geometrie auf allen Punkten gesiegt hätte, wenngleich die Nur-Mathematiker ihr wohl ziemlich ausnahmslos huldigen. Hier hat auch die Philosophie ein entscheidendes Wort mitzusprechen. Man braucht nicht mit Lotze die n-dimensionale Geometrie eine Grimasse der Wissenschaft zu nennen; man muß vielmehr auch den Primanern sagen, daß hier eine überaus scharfsinnige, für die Würdigung der mathematischen Grundbegriffe unentbehrliche Disziplin geschaffen sei; man muß sie aber andererseits darauf hinweisen, daß diese modernen Raumtheorien die mathematischen Urteile ihres apodiktischen Charakters entkleiden und sie zu den bloß problematischen Urteilen herabziehen. Die Primaner verstehen sehr wohl die gewaltigen Konsequenzen des Unterschiedes in diesen fundamentalen Auffassungen. Solange die Kantsche Lehre, daß die mathematischen Urteile synthetisch a priori seien, nicht widerlegt ist – und sie ist es nicht, trotz immer wiederholter Versuche –, sollen die mathematischen Urteile für den Schüler ein stolzer rocher de bronce bleiben gegenüber den empirischen Urteilen der übrigen Wissenschaften."

Da nun z. B. COUTURAT in seinen „Philosophischen Prinzipien der Mathematik" kürzlich wieder aufs heftigste gerade gegen die synthetische Natur der mathematischen Urteile zu Felde gezogen ist, so dürfte ersichtlich sein, daß sich ein für den Schulunterricht entscheidendes Wort in allen diesen Fragen nur ein Lehrer zutrauen darf, der nicht nur über diesen Zeit- und Streitfragen der Mathematik selbst, sondern auch noch über den Parteiungen der gegenwärtigen Erkenntnistheoretiker steht. Da das immerhin sehr viel verlangt ist, so wollen wir wenigstens den Schüler nicht in diese selbst in der höchsten Wissenschaft nicht ausgereiften Dinge voreilig hineinziehen. Dieser Rat zur Vorsicht wird auch das – manchem vielleicht allzu negativ dünkende – Erträgnis des III. Teiles dieser Didaktik des math. Unterr. sein. –

Nachdem aber einmal diese Sache schon für die Schulmathematik das werden zu wollen scheint, was für das große Publikum der „Sezessions"streit in der bildenden Kunst ist oder war, so mögen auch noch die neuesten positiven Vorschläge, wie sich die Schule zur neuesten Geometrie stellen kann, wenn nicht soll, als eine Art Lehrprobe nach den in der Einleitung (S. 12, Anm.) erwähnten Aushängebogen von KILLING-HOVESTADT hier angeführt sein:

S. 232: „2. Die natürliche Geometrie als Grundlage des Unterrichtes. – Der Versuch, eine Einführung in die Geometrie mit der Angabe der Axiome zu beginnen, um darauf sogleich eine allgemeine Geometrie in dem früher einer nichteuklidischen oder Pangeometrie sein. Immerhin aber kann es nicht schaden, wenn den Schülern zu Gemüt geführt

---

(§ 3, 3. S. 47) erläuterten Sinne aufzubauen, würde unter allen Umständen völlig aussichtslos sein. Jede Unterweisung wird notwendig von der besonderen Form, die man als natürliche Geometrie bezeichnet, ausgehen müssen. Die Rücksicht auf das noch jugendliche Alter der Schüler, die den ersten geometrischen Unterricht erhalten, fordert überdies, daß der Lehrer sich die ersten Jahre hindurch ganz und gar auf natürliche Geometrie beschränke; erst später kann er versuchen, den Gesichtskreis der Schüler nach und nach zu erweitern.“ [Auf die in „3. Die natürlichen Grundgebilde“ folgenden radikalen Thesen „Jeder Versuch, den Flächen eine, den Linien zwei und den Punkten alle drei Dimensionen zu nehmen, ist durchaus abzulehnen“ (S. 233) kommen wir im III. Teil S. 479 zurück]. – Als Probe des meritorischen Inhaltes sei hier wiedergegeben der folgende „neue Vorschlag für die Behandlung der Parallelentheorie“ (S. 259), der darin besteht,

„auf der unteren Stufe der Erfahrung das Axiom zu entnehmen:

A. *In jedem Dreieck beträgt die Winkelsumme zwei Rechte,*

und dann auf der oberen Stufe die Parallelentheorie auf das Axiom zu gründen:

B. *In einem einzigen Dreieck beträgt die Winkelsumme zwei Rechte.*

Wir können uns denken, daß unser Vorschlag beim ersten Lesen geradezu Verwunderung hervorrufen wird.“

Des näheren gliedert sich dieser Vorschlag so:

„6. Die Parallelentheorie auf der Unterstufe. – Das Axiom A stellen wir an die Spitze der Dreieckslehre. Daraus folgen sofort die Eigenschaften des Außenwinkels und der Satz, daß sich von jedem Punkte aus nur *eine* Senkrechte auf eine gegebene Gerade fällen läßt. Des weiteren wird der Schüler bei der Behandlung, die wir im vorigen Paragraphen besprochen haben, mit einer Reihe von Sätzen bekannt gemacht, die sein Interesse erwecken, und deren Verständnis ihm leicht werden muß. – Vom Dreieck gehen wir zum Viereck über, und zwar zu dem Satze: In jedem einfachen Viereck beträgt die Winkelsumme vier Rechte. Während dieser Satz im allgemeinen ohne jeden inneren Zusammenhang mit dem weiteren Inhalt der Planimetrie steht, dient er uns zur Begründung der Parallelentheorie...

7. Die Parallelentheorie auf der Mittelstufe. – Auf der mittleren Stufe wird es notwendig, näher auf die Parallelentheorie einzugehen. Der Schüler muß erfahren, daß durch jeden Punkt nur eine einzige Gerade gelegt werden kann, welche mit einer gegebenen Geraden in einer Ebene liegt und sie nicht schneidet, und daß diese Gerade die einzige Grenzlinie aller Schneidenden ist...

8. Die Parallelentheorie auf der Oberstufe. – Auf der oberen Stufe, nachdem erkannt worden ist, daß in jedem Kugeldreieck die Winkelsumme zwei Rechte übersteigt, ist Veranlassung gegeben, die Frage nach der Winkelsumme eines ebenen Dreiecks von neuem aufzunehmen. Vielleicht kann man die Schüler darauf hinweisen, daß die bekannte Lösung der Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu legen, die mit einer gegebenen Geraden in einer Ebene liegt und sie nicht schneidet, die Frage nicht entscheiden kann, ob die bei Benutzung verschiedener Hilfsgeraden gefundenen Nichtschneidenden in eine einzige Gerade zusammenfallen oder nicht. – Die neue Untersuchung braucht nicht dem eigentlichen Unterrichtsstoffe zugewiesen zu werden; es ist auch gar nicht nötig, daß der Schüler die Herleitung im Gedächtnis behält. Wenn er sie nur verstanden hat, so liegt darin für ihn schon ein großer geistiger Gewinn. Die Parallelentheorie selbst aber erlangt

wird, daß unmöglich aus „bloßer Anschauung“ (vgl. III. Teil, S. 472) zu entscheiden ist, ob, wenn zu einer Geraden I durch einen Punkt P Geraden II, III gelegt werden, deren Schnittpunkte mit I immer weiter nach beiden Seiten hinausrücken, die so aus II und III hervorgehenden „Parallelen“ schließlich einen Winkel von 0^0 oder aber von $\frac{1^0}{1000}$ oder gar $\frac{1''}{1,000.000}$ einschließen[1]). Erlauben doch die besten astronomischen Instrumente kaum noch $\frac{1}{100}$ Sekunde zu messen, beziehungsweise die Messung durch Schätzung der Bruchteile noch zu steigern. Kurz, es ist und bleibt eine Annahme (vgl. III. Teil, S. 466, Anm. 3), daß sich zu einer Geraden durch einen Punkt nur eine Parallele ziehen läßt; und auf dieser Annahme als Axiom würden sich von da ab die allermeisten unserer Sätze (nicht alle! – welche? – welche nicht?) entweder unmittelbar oder mittelbar aufbauen.

Noch gründlicher, als wenn man, von diesem oder jenem einzelnen von der Unterstufe schon bekannten Satz ausgehend, auf die ihn begründenden Axiome und Definitionen zurückgeht, wäre es, von wenigstens zwei solchen Sätzen aus regressiv zu den logischen Anfängen der Geometrie vorzudringen. Denn keineswegs versteht es sich ja von selbst, daß, wenn wir — um bei den zwei oben angeführten Beispielen zu bleiben — einmal zum Pythagoreischen Satz, ein andermal zum Satz von den sechs Kreisen die für jeden der beiden notwendigen und ausreichenden Axiome und Definitionen ausspüren, es auch nur zum Teil, geschweige sämtlich, die nämlichen für beide Sätze sein werden. Eigentlich rühren wir auch hiermit schon an die modernste Grundlagentheorie der Geometrie: Diese hat ja in der Tat gezeigt

---

hierdurch ihren natürlichen Abschluß, da sie schwerlich auf eine einfachere Voraussetzung gegründet werden kann als auf das Axiom B. Zugleich bewahrt die ganze Behandlung einen einheitlichen Charakter; dieselbe Eigenschaft, die auf der Unterstufe für jedes Dreieck vorausgesetzt wurde, wird auf der Oberstufe nur einem einzigen Dreieck beigelegt...“

Ein abschließendes Urteil, inwieweit KILLING-HOVESTADTS „Mathematischer Unterricht“ in mehr scheinbarem als wirklichem Gegensatz steht zu der oben (S. 177) ausgesprochenen Ansicht, man werde in der Mittelschule nicht statt Geometrie Grundlagentheorie treiben wollen, vermag ich mir auf Grund der mir vorliegenden Aushängebogen noch nicht zu bilden.

1) Vgl. dieses von FELIX KLEIN gewählte Beispiel in der Wissenschaftl. Beilage zum 19. Jahresbericht (1906) der Philosophischen Gesellschaft a. d. Universität zu Wien (Leipzig, Joh. Amb. Barth), „Grenzfragen der Mathematik und Philosophie“ (F. KLEIN, A. HOEFLER), S. 5.

(oder wenigstens zeigen wollen), daß nicht alle Axiome für jeden Satz notwendig sind, daß vielmehr jede einzelne oder eine bestimmte Kombination von Axiomengruppen ihre besonderen Satzgruppen liefert. Weil es nun kaum ein Gebiet der neuesten Geometrie geben wird, das auch jeden streng wissenschaftlich denkenden Mittelschullehrer in gleichem Maße wie diese schönen Untersuchungen HILBERTS und seiner Vorgänger über die Abhängigkeiten und Unabhängigkeiten der einzelnen Axiome und Sätze voneinander interessieren kann und muß, wird der Rat nicht ganz überflüssig sein, nicht etwa zu früh schon diese feinste Logik der Geometrie den noch unreifen Vierzehnjährigen bieten zu wollen.

Noch eine andere Möglichkeit, den geometrischen Unterricht der Mittelstufe wesentlich anders zu eröffnen als mit den tödlich langweiligen Häufungen der logischen Terminologie in abstrakto, auf Vorrat: Annahme, Behauptung, Beweis usw., nämlich mit dem einen oder anderen lustigen geometrischen Sophisma, das unversehens den Schüler selber zum Anwalt der Logik innerhalb der Geometrie macht, vgl. im III. Teil, S. 472. —

Soviel also über den Beginn der Mittelstufe, über deren logischen Apparat einiges freilich gleich zu Beginn gesagt werden muß, ohne daß aber, wie in so vielen Lehrbüchern, alles sogleich auf den ersten Seiten gesagt werden müßte; denn in diesem Falle wird eine große, umfangreiche logische Terminologie (zu „Voraussetzung", „Behauptung", „Beweis" kommt ja auch noch die „Folgerung", bei Konstruktionen die „Determination" u. dgl.) vom Schüler notwendig zum größten Teil einstweilen noch unverstanden „auf Vorrat" auswendig gelernt, um sich dann beim ersten geometrischen Anwenden als natürlich schon wieder vergessen herauszustellen. — Über einzelne hier einschlägige logisch-didaktische Fragen wäre noch manches zu sagen, so über die sogenannten „Umkehrungs-Sätze und -Beweise". Natürlich raten wir auch hierin zum Maßhalten; es ist gewiß Pedanterie, von jedem Satz die Umkehrung eigens umständlich zu beweisen. Daß und warum aber in einzelnen Fällen das Eingehen auf die Umkehrung nicht nur wissenschaftlich geboten, sondern unter welchen didaktischen Vorsichten es dann geometrisch nötig und auch allgemein logisch nützlich ist, wird im III. Teil (S. 474 ff.) etwas näher überlegt werden. —

Nehmen wir es im folgenden als zugestanden an, daß man sich wenigstens von der Euklidischen Starrheit in Inhalt und Form ein für allemal frei gemacht habe und die logischen Formen zwangslos aus der lebendigen Erfassung des geometrischen Inhalts von Fall zu Fall hervorgehen lassen wolle. Wie sieht aber dann dieser neugeformte geometrische Inhalt aus? Und wie ist er didaktisch darzubieten? Die Beantwortung dieser allgemeinen Fragen müssen wir aber in der Hauptsache billigerweise dem jeweilig erwählten Lehrbuch überlassen, denn ein Blick z. B. in SCHOTTENS Vergleichende Planimetrie[1]) zeigt, daß nur durch eine schier unabsehbare Auseinandersetzung mit Prinzipiellem und Speziellstem von 1000 schon beschrittenen Wegen gerade einer oder ein 1001ster als der beste Weg zu erweisen wäre. Gegen die von SCHOTTEN empfohlene kombinierende Systematik[2]) dürfte wohl einiges, wenn nicht alles von dem gelten, was wir gegen die herkömmliche Eröffnung der Stereometrie zu sagen haben (S. 203 ff.). Aber das dort als Ersatz dieser stereometrischen *membra disiecta* sich darbietende räumliche Zeichnen findet in der Planimetrie, die notwendig irgendwie nunmehr auf die geometrischen Elemente (Punkt, Abstand, Richtung)[3]) und weiterhin auf die verhältnismäßig einfachsten, durch jene Elemente zu definierenden Elementargebilde (Gerade, Ebene, Winkel) usw. zurückgehen muß, keine für sich anregenden Angriffspunkte mehr. – Es sei daher – nur als ein Beispiel, hinter dem ja auch andere Lehrbücher nicht zurückstehen – die Darstellung von HENRICI und TREUTLEIN[4]) genannt, weil hier der Lehrer einen

---

1) I. Bd. 1892, II. Bd. 1900 (zusammen 780 Seiten), der III. Bd. ist leider noch immer ausständig.

2) Sollte jemand daran denken, anstatt der einzelnen Gebilde die einzelnen Axiomengruppen, etwa nach HILBERT, zum Leitfaden einer systematischen Darstellung im Unterricht zu wählen, so sei er auf die Mahnung zur Vorsicht bei KILLING und HOVESTADT (vgl. oben S. 12 u. S. 194, Anm.) namentlich S. 237 ff. hingewiesen.

3) Vgl. die S. 431 Anm. 3 angeführten Abhandlungen über „Räumliche und raumlose Geometrie“.

4) Das Vorwort zum ersten Teil sagt gleich an der Spitze, „daß die Verfasser jener Richtung in der Behandlung der Geometrie entsprechen wollen, die die Euklidische Anordnung und deren Abarten nach französischen Mustern aufgegeben hat. Mit Recht gelten Euklids Elemente als ein Muster systematischer Anordnung der Schlüsse, insofern jeder Lehrsatz da steht, wo die Prämissen zu seinem Beweis vollständig gegeben sind; ein Muster von logischer Anordnung der Begriffe aber sind jene Elemente nicht, da ihnen eine logische Einteilung des Stoffes fehlt. Neuere Bearbeitungen der Geometrie haben daher vor Euklid den Vorzug, daß sie gleichartige Gegenstände zusammenstellen und ungleichartige in logischer Folge aneinander reihen.“

gewiß ausreichenden (und für die österreichischen bloß drei Wochenstunden Arithmetik und Geometrieunterricht gewiß mehr als ausreichenden) Lehrstoff und Übungsstoff beisammen findet. Insbesondere sind auch hier die Lehren und Methoden der neueren Geometrie so dargestellt, daß die Frage, was an Stelle der Euklidischen Geometrie (also als Nichteuklidische in ganz anderem als dem nun gewöhnlich gewordenen Sinne) zu treten hätte, hier ganz konkret beantwortet erscheint.

Da nun aber von dem Streit um EUKLIDS Inhalt und Form, wenn nicht die einleitenden und die spätesten, so doch die mittleren Teile der Elementargeometrie wesentlich unberührt bleiben und also gerade in diesen Kapiteln Ausblicke nach allfälligen Fortschritten, die wenigstens die didaktische Darbietung als solche auch an dem ältesten Stoffe noch finden könnte, immer noch dankbar sind, so wählen wir hiefür als Lehrprobe noch einmal den Pythagoreischen Satz seinem eigentlichen Inhalte nach, wogegen das oben (S. 189 ff.) hierüber Bemerkte nur eine Anregung gibt, wie an dem von der Unterstufe her inhaltlich bekannten Satz das Bedürfnis nach den logischen Formen der Geometrie zuerst bekannt werden könnte.

Lehrprobe: Einen sachlichen Anlaß, nunmehr während des Kapitels Flächenvergleichung auf den sog. Euklidischen Beweis[1]) des Pytha-

1) SCHOPENHAUER nannte ihn den „Euklidischen Mausefallenbeweis", wogegen ihn schon PROKLUS als sehr augenfällig und SIMON sogar als den anschaulichsten rühmt (vgl. den oben S. 172 Anm. angeführten Aufsatz von JUNGE). — Über einen doch wohl noch einfacheren Beweis vgl. unten S. 365. —

Daß übrigens auch die an die populärste Fig. 83, S. 191 anknüpfenden Beweise für den Pythagoreischen Satz noch zu neuartigen Untersuchungen Stoff geben, beweisen die beiden Inauguraldissertationen der Universität Halle 1908, die mir während des Druckes zukommen: 1. BRANDES, „Über die axiomatische Einfachheit mit besonderer Berücksichtigung der auf Addition beruhenden Zerlegungsbeweise des Pythagoreischen Lehrsatzes" und 2. MAHLO, „Topologische Untersuchungen über Zerlegung in ebene und sphärische Polygone". — Aus 1 seien die Sätze angeführt: „Eine wichtige Forderung, die an jede mathematische Untersuchung gestellt werden kann, ist die Forderung der möglichsten Einfachheit. Zwar hat man sich von jeher bemüht, alle Umwege bei mathematischen Beweisführungen zu vermeiden und sie dadurch möglichst einfach zu gestalten; jedoch eine Grundlage für eine objektive Behandlung der Einfachheit, nämlich eine Norm für die verschiedenen Grade der Einfachheit, war nicht vorhanden. Erst JACOB STEINER macht auf den Mangel in dieser Richtung aufmerksam und sagt im Anschluß an seine geometrischen Untersuchungen, daß es wünschenswert wäre, die geometrischen Konstruktionen in bezug auf ihre Einfachheit und Genauigkeit zu untersuchen" (S. 7). — S. 12 wird die These aufgestellt, daß „der einfachste Beweis [des Pythagoreischen Satzes durch die Addition von Dreiecken] eine [mindestens] siebenmalige Anwendung des ebenen Kongruenzaxioms verlangt."

goreischen Satzes einzugehen, wiewohl wir ja zu Beginn der Mittelstufe schon andere ebenfalls „streng“ gewordene Beweise zu dem auf der Unterstufe nur an Modellen erkannten Satz nachgetragen hatten, bietet die sehr berechtigte Frage des Schülers an den Lehrer: „Wir lernten, die Summe der Kathetenquadrate sei gleich dem Hypotenusenquadrate; aber was für ein Teil des Hypotenusenquadrates entfällt dann auf das eine und auf das andere Kathetenquadrat?“ Und erst auf diese Frage hin wiederum (mit einiger Feierlichkeit!) das Ziehen der vornehmsten von allen den zahlreichen Hilfslinien, deren der Euklidische Beweis bedarf, nämlich die Normale auf die Hypotenuse. Sie gibt uns nicht nur die willkommene Antwort, sondern sie führt uns auch auf den Satz $a^2 = c \cdot m$ in seiner arithmetischen wie planimetrischen Bedeutung. Es würde allenfalls auch gar nicht schaden, wenn man hier die Neugier etwas spannt, indem man sie warten läßt, d. h. man verweilt längere Zeit ganz bei dieser Gleichheit des Quadrates der einen Kathete mit dem Rechteck aus der Projektion dieser Kathete auf die Hypotenuse usw. Ja, es wäre sogar denkbar, daß es dem Lehrer zweckmäßig scheint, dem Schüler sogleich hier die Wege zu den Erweiterungen des Pythagoreischen Satzes zu zeigen, indem er vom rechtwinkligen Dreieck abspringt auf das schiefwinklige und auch hier die Gleichheit der je zwei Rechtecke entwickelt, die dann den Grundgedanken des Kosinussatzes (S. 291 ff) ausmacht. Doch bleiben wir jetzt bei unserem nächsten Ziel, dem Beweis für den Pythagoreischen Satz mittels der Gleichheit der in Fig. 84 schraffierten Dreiecke (die zweckmäßig wieder durch ein in Pappendeckel ausgeschnittenes als wirklich bewegt vor Augen geführt werden). Die Aufforderung an die Schüler, es möchten einige von ihnen sich je ein rechtwinkliges Dreieck mit beliebigen Katheten a, b in einer für die Schultafel passenden Größe in Aussicht nehmen und hiefür die beiden drehbaren stumpfwinkligen Dreiecke zu Hause anfertigen und für den in der nächsten Stunde zu liefernden Beweis in die Schule mitbringen, wird vielleicht den Schülern — und am meisten dem Lehrer — die enttäuschende Überraschung bereiten, daß die Schüler dem Dreieck zwar die richtige Schenkellänge des stumpfen Winkels, nämlich Kathete und Hypotenuse erteilt haben, sich aber bei der Bestimmung des stumpfen Winkels nicht zu helfen wußten. — Bei der wirklichen Durchführung des so eingeleiteten und vorbereiteten Beweises wird der Lehrer nicht nur einzugestehen, sondern es bewundernd und rühmend hervorzuheben haben, daß das Heranziehen dieser Hilfslinien und Dreiecke einen immerhin nicht gerade

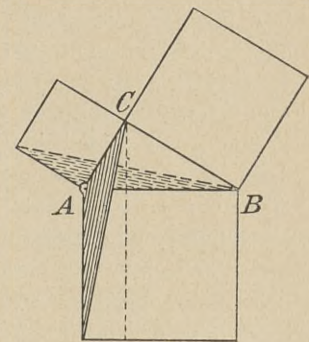


Fig. 84.

ganz naheliegenden Witz des Beweisverfahrens darstelle, auf das der Schüler selber wohl schwerlich gekommen wäre[1]). Bekanntlich vermögen ja immer wieder einige Schüler, wenn sie sogar endlich die fertige Figur aus dem Buche memoriert haben, nicht einmal die sämtlichen Hilfslinien fehlerlos aus dem Gedächtnisse nachzuzeichnen. — Nebenbei bemerkt dürften gerade solche Erfahrungen eindringlicher als allgemeine pädagogische Theorien und Grundverhaltungsmaßregeln fühlbar machen, wie hunderterlei Gelegenheiten zu didaktischen Verstößen es wohl geben mag, an denen der geometrische Unterricht auch noch auf der Mittelstufe scheitern kann und dann ein widerwärtiges Dahinstolpern von bloßem Vormachen und „Beweisen" zu halb unverstandener Reproduktion bleibt. In unserem Falle also hat der Lehrer ein Mittel, es zu einem solchen mechanischen Memorieren und Nachmalen der Hilfslinien gar nicht kommen zu lassen, ganz einfach darin in der Hand, daß er zwar für das eine Kathetenquadrat die Hilfslinie (falls nicht etwa wirklich ein besonders begabter Schüler auf sie verfällt und dadurch Nacherfinder des Euklidischen Beweises geworden wäre) noch selber in die Figur zieht und dann auch bei dem einen Quadrat sogleich den Beweis für seine Gleichheit mit dem genannten Teil des Hypotenusenquadrates durchführt — auf alle Fälle aber dann Hilfslinie und Beweis für den anderen Teil durch den Schüler selbst finden, bzw. zu Ende führen läßt. — Dieses wieder als allgemeines didaktisches Beispiel dafür, daß, wo geometrische Findigkeit nicht schon als Gottesgabe von vornherein sich zeigt, der Lehrer noch lange nicht zur Resignation berechtigt ist, sondern den Mut des Findens sehr allmählich wecken und beleben kann, wenn er die Aufgaben nur begrenzt genug stellt.

Jedenfalls wird auch auf dieser Stufe der Satz nun nicht als eine Sache für sich stehen oder liegen bleiben dürfen, sondern es sollen ihm wieder Anwendungen folgen; nur dürfen diese, da wir ja schon auf der Unterstufe einen recht reichlichen Übungsstoff der nächstliegenden Anwendungen verarbeitet haben, sogleich wieder in den Dienst mehr theoretischer Aufgaben treten; wofür als ein Beispiel die Berechnung der Seiten des regelmäßigen $2n$-Eckes aus jenen des n-Eckes mit ihrer weiteren Anwendung auf die Berechnung von π[2]) erwähnt

1) In meinem pädagogischen Seminar begann ein Kandidat, nachdem er die Quadrate über den Katheten und der Hypotenuse (recht zeitraubend mit Zirkel und Lineal) hatte zeichnen lassen, mit der Frage: „Nun, was glauben Sie wohl, welche Hilfslinien werden Sie jetzt zeichnen?" Da darauf natürlich tiefes Schweigen folgte, so zeichnete er — ohne jede weitere Zwischen- oder Hilfsfrage — sämtliche Hilfslinien der Reihe nach selber.

2) Da wir auf der Unterstufe den Zahlenwert von π ganz empirisch, u. a. durch Aufwickeln eines feinen Drahtes auf den Mantel des Kreiszylinders, ermittelt hatten, so gibt auch dies jetzt wieder eine eigenartige Anwendung

sei (die wir aber zum größten Teil zwei Jahre später, als immanente Wiederholung von Planimetrischem innerhalb des Trigonometriejahres fortzusetzen empfehlen; S. 290 ff.). Während und weil so die Anwendungen des Pythagoreischen Satzes jetzt eine schon nicht mehr neue und überraschende Sache sind, mögen um so mehr seine Erweiterungen in den Vordergrund treten. Die Beziehungen zwischen den Quadraten über den Seiten des spitz- und stumpfwinkligen Dreieckes lassen den Satz für das rechtwinklige Dreieck als einen Grenzfall erkennen. Der Hinweis auf die Beweglichkeit der Gebilde findet hier mannigfachen Stoff. Nach anderer Richtung wieder und noch weiter gehen die Erweiterungen, wenn wir uns von der bisher untersuchten Quadratform freimachen und auch diese nur als einen Grenzfall für die Parallelogramme im Lehrsatz des Pappus behandeln usw.

Es sei schließlich, nachdem wir den Pythagoreischen Satz in fachwissenschaftlicher, logischer und didaktischer Hinsicht behandelt haben, wozu Ergänzungen auch noch auf höheren Stufen folgen werden (vgl. S. 293 und 364), nun eben dieser Satz auch als ein Beispiel für das Hereinziehen von Historisch-Sprachlichem herausgegriffen; was wir kaum hübscher tun können als durch den folgenden Bericht (nach F. Poske, Ztschr. f. d. physikal. Unterr., XVIII, 236), betreffend „Die Herkunft des Wortes Hypotenuse". Nach Max C. P. Schmidt[1])

---

des Pythagoreischen Satzes. Wenn nämlich der Schüler Bedenken hat, daß wir ja den Draht nicht nach dem Kreise, sondern nach einer Schraubenlinie aufwickeln, so gehen wir ein auf den geringen Unterschied zwischen der Hypotenuse eines gleichsam selbst aufgewickelten rechtwinkligen Dreieckes und seiner längeren Kathete. Die weitere (spätere) Verfolgung dieser Aufgabe gibt sogar Anlaß zu einer recht anschaulichen Rechtfertigung, warum wir gewisse Glieder zweiter Ordnung hier und auch sonst so oft mit Bewußtsein vernachlässigen (gemäß $\sqrt{a^2+b^2} = a\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$ für $b < a$ usf. — Vgl. die Entwicklung nach dem Binomischen Satz, S. 352 ff.).

1) Naturwiss. Wochenschrift IV, Nr. 14 (1905). — Ferner diese und zahlreiche ähnliche den Mathematiker und andere Realisten angehende Beiträge für ein Zusammenarbeiten von Sach- und Sprachunterricht von Max C. P. Schmidt in seinen „Altphilologischen Beiträgen" II. Terminologische Studien (Dürr 1905); ferner „Kulturhistorische Beiträge" I. „Zur Entstehung und Terminologie der elementaren Mathematik" (ib. 1906), ferner „Kritik der Kritiken" (Zur realistischen Chrestomathie, ib. 1906). — Leider lassen diese Büchertitel kaum den Philologen, geschweige den Realisten erraten, daß und wie Hübsches für letztere in diesen Büchlein zu holen ist. Daher hier noch folgende weitere Probe aus „Terminologische Studien" S. 29: „Sehen nicht die Figuren 1 und 2 geradezu wie akustische Instrumente aus, die einem physikalischen Kabinett entlehnt sind? Fordert nicht ein solches Instrument einen für Maßverhältnisse offenen Blick, wie ihn Pythagoras haben muß, förmlich zum Messen heraus? Lassen sich an ihm nicht noch ganz andere mathematische Vorstellungen und Gesetze beinahe kunstlos ablesen? Den Begriff z. B. der parallelen Linien und die Gleichheit der Gegenwinkel an parallelen Linien führt uns eine solche

bedeutet das Wort Hypotenuse eine „aufgespannte“ Harfensaite. Hierfür spricht, daß die Präposition ὑπό die Bedeutung „hervor“, „von unten herauf“ hat. Das Verbum für das Aufspannen einer Saite ist zwar nicht überliefert, doch sind Anspannen und Anziehen durch Komposita von τείνειν (ἐπι-, ἐντείνειν) ausgedrückt, und bei Homer wird von den Streben, die die aufs Land gezogenen Schiffskörper stützen, das Wort ὑποτανύειν gebraucht. In sachlicher Hinsicht spricht für jene Erklärung, daß uns in ägyptischen Gräbern Abbildungen von Harfen überliefert sind, die damit gut zusammenstimmen. Sie zeigen zum Teil, wie Figg. 85, 86 zwei aufeinander senkrechte Schenkel, zwischen denen mehrere Saiten von zunehmender Länge parallel zueinander gespannt sind. Auch

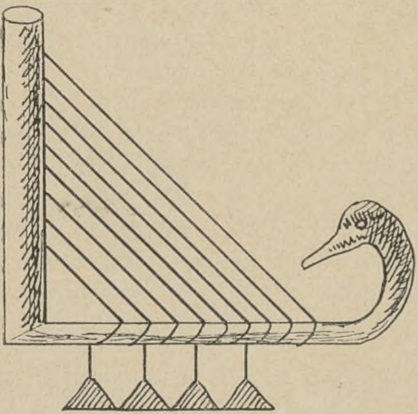


Fig. 85.

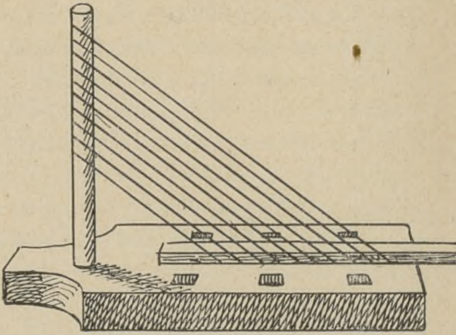


Fig. 86.

Aus Schmidt, Altphilologische Beiträge, Heft II. (Fig. 1 und Fig. 2.)

stimmen alle Überlieferungen darin überein, daß die Saiten unten befestigt und dann „nach oben“ gespannt wurden. Freilich stehen die Arme der Harfen nicht immer aufeinander senkrecht. Aber auch das Wort Hypotenuse heißt bei den Griechen zunächst nur Gegenseite und wird von jeder Dreiecksseite gebraucht, was für einem Winkel sie auch gegenüberliegen möge. So nennt Euklid im Pythagoreischen Lehrsatz

Harfe unmittelbar vor die Augen. Den Satz aber, daß Parallelen zwischen den Schenkeln eines Winkels zueinander wie zu den Abschnitten der Schenkel ein konstantes Verhältnis haben, könnte man auf induktivem Wege aus solchen Instrumenten sehr leicht gewinnen. An demselben Instrument (Fig. 1 oder 2) konnte aber, wenn dessen Arme senkrecht aufeinander standen, Pythagoras induktiv auch die Beobachtung machen, daß die Länge der Hypotenuse 5 oder 13 oder 17 sei, wenn die Arme die Maßzahlen 3 und 4 oder 5 und 12 oder 8 und 15 hätten, woraus sich dann durch Rechnung die Sätze ergaben: $3^2 + 4^2 = 5^2$ und $5^2 + 12^2 = 13^2$ und $8^2 + 15^2 = 17^2$ (vgl. Vitruv. IX init. 6f.). Induktion aber ist echt griechische Methode. Induktion steckt dem Griechen im Blute. Aus Einzelfällen gewinnt er das Gesetz, aus Einzelvorstellungen den Begriff.“ — Also alles historisch-logisch ganz so, wie wir es mathematisch-didaktisch empfehlen!

die Hypotenuse ausdrücklich die „unter den rechten Winkel Gespannte“. Auch kennen die Griechen keine Katheten im modernen Sinne, das Wort bedeutet soviel wie Lot.

Ein Blick auf die Figur lehrt, daß sie mehrere einfache mathematische Beziehungen darbietet, und daß man an solchen Harfen eine ganze Reihe von Sätzen sozusagen induktiv ablesen konnte. Daß Pythagoras auch seinen Satz an einem bestimmten Beispiel und an einer Art von Gestell (Norma) gefunden habe, haben schon die Alten behauptet; und es scheint völlig einleuchtend, daß der „Samier“ seinen Satz an solchen Harfen, deren Arme zufällig rechtwinklig standen, wo nicht entdeckt, so doch geprüft hat, oder aber daß er sich nach dem Muster solcher Harfen Gestelle konstruierte, um an ihnen die Maßverhältnisse festzustellen. Daß ferner die aus Ägypten stammenden Harfen den Griechen seit alten Zeiten bekannt waren, ist durch zahlreiche Bilder und Literaturstellen belegt. Auch daß Pythagoras selbst die Harfe gekannt hat, ist unzweifelhaft.

In physikalischer Hinsicht ist der hier aufgedeckte Zusammenhang dadurch besonders interessant, daß auch die pythagoreische Entdeckung der Zahlenverhältnisse, in denen die Längen harmonisch klingender Saiten stehen, mit der Harfe verknüpft ist. Da es sich hier um Länge, nicht Spannung der Saiten handelt, so muß Pythagoras Harfen, nicht Leiern vor sich gehabt haben. Und dasselbe Wort für Saite (χόρδη), das bei „Hypotenuse“ zu ergänzen ist, steckt auch in dem Namen des Monochords, an dem Pythagoras seine musikalischen Resultate experimentell prüfte. „So hat Pythagoras die ägyptische Harfe zur Mutter eines interessanten Geschwisterpaares gemacht, des Monochords und der Hypotenuse.“ Auch die Legende, die den Mann nach Ägypten auf Reisen schickt, hat hiernach einen gewissen tatsächlichen Kern, insofern seine beiden bekanntesten Entdeckungen an das aus Ägypten stammende Musikinstrument angeknüpft sind.“

Nur soviel also als Ergänzung zu dem didaktisch schon so vielseitig durchgearbeiteten Kapitel Planimetrie; für zahlreiche Einzelheiten sei ausdrücklich auf Reidt und Simon verwiesen, insbesondere auch, was die Konstruktionsaufgaben anbetrifft. Natürlich gilt auch für diese die Warnung vor bloßer Formalistik wörtlich so, wie sie angesichts der traditionellen Trigonometrieaufgaben nötig erscheint (vgl. u. S. 288).

§ 19. Zur Reform der Stereometrie auf der Mittelstufe.

Im stereometrischen Unterrichte hielt man es bisher für unentbehrlich, mit den völlig abstrakten Sätzen über die Lage zweier Geraden zueinander, der Geraden und Ebenen zueinander, zweier und mehrerer Ebenen zueinander, über Ecken und Polarecken usw. zu beginnen[1]). Nun dürfte es wenig Lehrer geben, die nicht unter der Abstraktheit und Trockenheit dieses Lehrstoffes gelitten haben, eben weil sie ihre Schüler darunter leiden sahen. Und da es sich um lauter abstrakte Gerade und abstrakte Ebenen handelt, die nun einmal aus jedem natürlichen Zusammenhange in irgendwelchen Körpern von allem Anfange künstlich herausgerissen waren, so vermochten auch die zur „Veranschaulichung" herangezogenen Fäden, Stäbchen, Brettchen u. dgl. das ausgetriebene Leben dieser *membra disiecta* nicht wieder zurückzuholen. — Nun hatte ja freilich diese Zerreißung des körperlich voll Anschaulichen in letzte, trotz aller Veranschaulichung jedenfalls höchst uninteressante stereometrische Elemente einen guten Grund gehabt; nämlich den rein wissenschaftlichen, daß ein streng systematisches Vorgehen hier so gut wie in jeder Wissenschaft von möglichst abstrakten Elementen ausgehen und aus diesen dann jedes reichere stereometrische Gebilde erst wieder zusammengesetzt werden muß.

Streng wissenschaftlich darf man ja auch z. B. nicht einmal ohne weiteres von einem Würfel reden und z. B. behaupten, daß seine Kanten auf seinen Flächen normal stehen, solange man nicht definiert hat, was das heißt: „eine Gerade steht auf einer Ebene normal"; ja, wenn man noch strenger sein will: ob denn solche Lagenbeziehungen aller Geraden und Ebenen an demselben Körper auch nur möglich seien. — Sollte aber dieses Beispiel vom Würfel, bei dem man wohl selten daran denkt, daß

1) Schon in der Einleitung (S. 3) wurde dem Befremden Ausdruck gegeben, daß in den preußischen Lehrplänen für humanistische Schulen die Stereometrie erst nahe dem oberen Ende zu stehen kommt, wo es für eine „Pflege der Raumanschauung" füglich zu spät ist. — Daß gleichwohl auch die Meraner Vorschläge gerade hieran noch nichts änderten, mag sich daraus erklären, daß sich überall die ungesundesten Traditionen am wenigsten auf einen ersten Ansturm hin beseitigen lassen.

An den österreichischen Gymnasien nahm bisher die Unterstufe des stereometrischen Unterrichtes die ganze IV. Klasse, die Oberstufe das erste Semester der VI. Klasse, und weil man hiermit nie ein rechtes Auslangen findet, auch noch einen Teil des zweiten Semesters der VI. Klasse ein. Indem sie durch den jüngsten Lehrplan — nachdem schon in den drei untersten Jahrgängen der Mittelschule reichliche Übungen im Anschauen des Dreidimensionalen vorausgegangen waren — in die zwischenliegende V. Klasse gelegt wurde (wie ich seit 21 Jahren empfohlen hatte), wird sie, unbeschadet der äußerlich etwas verringerten Unterrichtszeit, bei weitem mehr als bisher ausrichten, wenn nur die Beziehungen zur gleichzeitigen darstellenden Geometrie einerseits, zur Kristallographie andererseits, wirklich sinnvoll gepflegt werden.

für ihn[1]) ein eigener „Existenzbeweis" eigentlich geradeso nötig wäre wie für irgendein anderes geometrisches oder arithmetisches Gebilde, nicht vielmehr wieder daran erinnern, daß es der Jugend gesunder ist, wenn man ihr den schweren wissenschaftlichen Wein mit etwas pädagogischem Wasser verdünnt kredenzt?

Eine solche rechte Mischung von wissenschaftlicher Strenge und pädagogischer Nachgiebigkeit dürfte sich im stereometrischen Unterrichte unschwer herstellen lassen, wenn man (wie wir es auch für die Goniometrie und Trigonometrie § 28 und für die analytische Geometrie § 32 vorschlagen) der systematischen Darstellung einen Vorkursus der Stereometrie (auch noch auf der Mittelstufe) vorausschickte, der wieder (wie es bei den allerersten Übungen im geometrischen Anschauen auf der Unterstufe, § 13, geschehen war) mit einem Würfel, nun aber, entsprechend einer „Mittelstufe", daneben sogleich auch mit einigen anderen ebenflächigen Körpern, etwa dem Oktaeder, Tetraeder und der rhombischen Doppelpyramide der Kristallographie, beginnt. Dieser Beschäftigung mit konkret anschaulichen stereometrischen Gebilden mag erst einige Wochen später, an der Spitze des systematischen Teiles, die Besprechung jener grundlegenden Lagenbeziehungen von Geraden und Ebene, von räumlichen Winkeln usw. folgen. Solche systematische Stereometrien besitzen wir in zahlreichen, so exakt durchgearbeiteten Darstellungen, daß hierüber im folgenden höchstens noch der didaktische Rat künftiger möglichster Sparsamkeit am Platze sein mag. Denn da die Zahl der Kombinationen zwischen Gerade und Gerade, sodann Gerade und Ebene, sodann Ebene und Ebene hier von selbst auf eine nur allzu große Zahl von Lehrsätzen führt, die dann einen wissenschaftlich zwar erfreulich einheitlichen, pädagogisch aber bedenklich monotonen Charakter annehmen, so ist für den Lehrbuchverfasser Sparsamkeit hier eine viel schwerere Tugend als Freigebigkeit.

Oft ist darüber geklagt worden, daß sogleich nach jenen reizlosen Elementen die Stereometrie allzugerne ausarte in ein ebenso reizloses bloßes Berechnen der Oberflächen- und Rauminhalte. Dort wie hier kommt es zu keiner wirklichen **„Pflege**

---

1) Vgl. S. 192 über die Gefahr der Überbestimmtheit sogar angesichts des noch einfacheren Quadrates (Vgl. etwa auch bei dieser Gelegenheit die auf Quadrat und Rechteck zurückgehenden Anfänge nichteuklidischer Bedenken hübsch dargestellt in MACH, Erkenntnis und Irrtum, S. 397).

der Raumanschauung"[1]). Da uns an dieser aber alles liegt, so wird sich die Reform des Stereometrieunterrichts nach beiden Richtungen zu erstrecken haben. Rechnen und Zeichnen müssen auch hier in ein viel innigeres Verhältnis gesetzt werden, als man es in allzugenügsamer Tradition gewöhnt war.

§ 20. Einige Bemerkungen zur zeichnenden Stereometrie[2]).

Den ersten Zugang zum räumlichen Anschauen eröffnet das räumliche Darstellen: und so ist denn die Forderung „darstellende Geometrie auch für Gymnasiasten!" nachgerade

1) Es war mir ein erlösendes Wort, als ich 1900 in einer Sitzung des Wiener Vereins „Mittelschule" anläßlich der damals soeben erschienenen neuen Lehrpläne und Instruktionen Hofrat von ESCHERICH mehr als alles andere die „Pflege der Raumanschauung" fordern hörte. Denn längst hatte ich es beklagt, wie ganz unglaublich ungeschickt sich die Mehrzahl unserer Gymnasiasten z. B. bei der Maturitätsprüfung anzustellen pflegt, wenn auch nur die einfachste stereometrische Figur, ein Würfel, geschweige ein Oktaeder oder eine nicht nur angeblich, sondern wirklich gerade quadratische Pyramide u. dgl. an die Schultafel gezeichnet werden soll. Oft entrang sich mir der unmutige Zuruf: „Nun ja, Sie sind eben auch ein Gymnasiast"; was dann mancher Vorsitzende sehr unliebsam vermerkte. Wollen wir hier nicht verschleiern, sondern durch Wahrhaftigkeit einer besseren Zukunft vorarbeiten, so muß eingestanden werden, daß die Pflege des räumlichen Anschauens, und gar die des räumlichen Darstellens, bei den österreichischen Gymnasiasten bisher über den absoluten Nullpunkt um fast nichts hinausgegangen war – trotz der auf das 14. Lebensjahr angesetzt gewesenen einjährigen Unterstufe des stereometrischen Unterrichtes und seiner schon wieder im 16. nachfolgenden $^3/_4$ jährigen Oberstufe.

Während des Druckes erzählt mir in meinem pädagogischen Seminar ein schon im tätigen Lehramt stehender Supplent der Mathematik, daß kürzlich in der sechsten Klasse eines Wiener Gymnasiums (also während des Stereometriejahres) sich die Schüler darüber verwunderten, wieso in der Zeichnung eines Würfels, der doch nur lauter rechte Winkel zeige, teils spitze, teils stumpfe Winkel vorkämen...!

Vgl. auch GUTZMER („Über die auf die Anwendungen gerichteten Bestrebungen im mathematischen Unterricht der deutschen Universitäten, Verhandlungen des III. internat. Mathematikerkongresses, Leipzig 1905, S. 586 –593; namentlich S. 589, 590): „Nach allen meinen Beobachtungen und Erfahrungen liegt kaum irgendein Gebiet so darnieder wie die Stereometrie."

2) Es sei ausdrücklich bemerkt, daß im Nächstfolgenden wie auch in der ganzen vorliegenden Didaktik keine Anweisungen für den Lehrer der darstellenden Geometrie als solcher beabsichtigt sind. Vor allem hielte ich mich dazu für gar nicht kompetent, da ich niemals Gelegenheit hatte, aus darstellender Geometrie selbst zu unterrichten. – Gleichwohl erlaube ich mir, hier die unmaßgebliche Meinung zu äußern, daß die an sich gar nicht genug zu begrüßende Neuerung eines Einführens der darstellenden Geometrie in den Lehrplan des soeben (Sommer 1908) nach reichsdeutschem Vorbilde geschaffenen österreichischen Realgymnasiums sich hätte pädagogisch-didaktisch noch etwas glücklicher gestalten lassen, wenn sie nicht auf den V. und VI.,

als unabweislich erkannt worden. Ihr gegenüber verfängt auch nicht mehr das Argument „Keine Zeit!“. Daher werden grundsätzliche Gegner einer solchen Neuerung vielleicht sich flüchten hinter die minder äußerlich aussehenden Argumente, daß bloßes Hereintragen eines Stückchens Lehre von Grund- und Aufriß aus den Realschulen in die Gymnasien diesen doch nichts nütze und namentlich, daß hier die Lehrer der Mathematik selber nicht über die nötigen Kenntnisse aus darstellender Geometrie verfügen.

Allen solchen Einwendungen gegenüber ist vor allem daran zu erinnern, daß ja unter einen weiter und toleranter gefaßten Begriff einer „darstellenden Geometrie“ nicht erst das Anfertigen von Grund- und Aufrissen auf den in die Zeichenebene ausgebreiteten Ebenen eines dreiachsigen Koordinatensystems, also kurz „senkrechte Parallelprojektionen“ fallen, sondern auch schon die Schrägbilder (Schrägrisse), d. h. die jedem Nichtfachmann geläufigen Darstellungen von Würfeln, Oktaedern, ferner die Zeichnungen zur astronomischen Geographie, in denen aus den Kreisen Ellipsen geworden sind; nur eben all das nicht aufs Geratewohl, sondern nach festen einfachen Regeln gezeichnet, wie sie eben

---

sondern auf den VI. und VII. Jhg. gelegt worden wäre. Es hätte nämlich dann die Stereometrie des V. Jhgs. noch nachdrücklicher als gegenwärtig das geometrische Zeichnen von Raumformen in der unmittelbar anschaulichen, sozusagen populären Form des Schrägbildes (Schrägrisses) pflegen können; und erst im VI. Jhg., wo Goniometrie und Trigonometrie wenig Gelegenheit zur Fortsetzung dieser Übungen geben, wäre nun die sozusagen offizielle darstellende Geometrie eingetreten und hätte sich in die 7. Klasse fortgesetzt, wo sie wieder an der Koordinatengeometrie einen Rückhalt gefunden und umgekehrt auch ihr einen Kraftzuschuß gegeben hätte. (Nach diesem meinem Vorschlage wäre dafür die Chemie statt wie jetzt für die 6. und 7. Klasse schon für die 5. und 6. anzusetzen gewesen; sie hätte so die Chemie der 4. Klasse fortgesetzt, und zwar in der Regel in den Händen des Naturhistorikers, der sich also das Nötige aus Chemie für seine Mineralogie, Botanik und Zoologie hätte herausarbeiten können. In der 7. Klasse hätte dann der Physiker jenen $2^1/_2$ Jahren Chemie durch das Herausarbeiten der nunmehr physikalisch-wissenschaftlich fundierten chemischen Grundvoraussetzungen dem ganzen auf diese Art durch 4 Schuljahre sich fortsetzenden chemischen Unterricht seinen theoretischen Abschluß geben können. — Man entschuldige diesen Exkurs aus der Mathematik in die Chemie als ein Beispiel, daß bei einem Formen der Lehrpläne aus einem Guß eben wirklich das eine Fach von scheinbar abliegenden anderen nur zu sehr abhängig ist. Ein solches Arbeiten von Lehrplänen aus einem Guß wird so lange ein frommer Wunsch bleiben, als schon beim Abfassen der Lehrpläne einerseits in der Arbeitsteilung zu spezialistisch, andererseits beim nachträglichen Zusammenfügen der Einzelpläne zu parlamentarisch vorgegangen wird. Wir kommen auf diese Dinge im X. Band zurück, wo es dem großen Problem allseitig einheitlicher Lehrpläne ins Antlitz zu sehen gilt.)

auch dem Gymnasiasten nicht fernerhin fremd bleiben sollen. – Vielleicht behebt sich das Vorurteil aus einem allzueinseitig gefaßten Begriff der darstellenden Geometrie am wirksamsten, wenn wir hinweisen auf ein bestimmtes Lehrbuch, das von C. H. MÜLLER und PRESLER[1]), und aus ihm eine Auswahl von Figuren auf beifolgender Tafel wiedergeben. Wenigstens von diesen Figuren dürfte zugegeben werden, daß auch der Gymnasiast sie nicht nur „anschauend" verstehen, sondern daß er sie auch soll ordentlich nachzeichnen können. Und um ja Rücksicht zu nehmen auf verschiedene Grade zeichnerischer Begabung, mag (übrigens unvorgreiflich) unterschieden werden zwischen einer „ersten, zweiten, dritten Dosis" solcher Zeichnungen (wie wir später bei der anderen, ebenfalls für manchen noch erschreckender klingenden Forderung: Höhere Rechnungen an höheren Schulen! eine „erste, zweite und dritte Dosis Infinitesimalrechnung" § 42–46 unterscheiden).

Als eine Textlehrprobe aus MÜLLER-PRESLER: „Man soll einen Würfel in schräger Parallelprojektion zeichnen für das Verzerrungsverhältnis $q = \frac{1}{3}$ und den Verzerrungswinkel $w = 30^0$. ... Aus der Kante a (= 3 cm) ist die Vorderfläche $ABCD$ ohne weiteres konstruierbar. Dann zieht man durch D den Strahl unter 30^0 Neigung zu DC und schneidet auf ihm $\frac{1}{3}a$ ab bis E. Hierauf legt man durch E und C die Parallelen zu DC bzw. DE bis zum gegenseitigen Schnitte in F. Ferner zieht man durch F und B die Parallelen zu BC bzw. CF bis zum Schnitte H. Wenn man endlich durch A, E und H die Parallelen zu DE bzw. DA und BA zieht, so erhält man noch die Bilder der verdeckten Hinterkanten des Würfels. Das Zusammentreffen dieser drei Kanten in G dient als Probe auf die Schärfe der Konstruktion." Ähnlich gibt das Lehrbuch ganz bis ins einzelne gehende Anweisungen auch für die weiteren Aufgaben, so daß selbst ein Lehrer, der sich bisher

1) B. G. Teubner 1903, Ausgabe A (320 Seiten): vorzugsweise für Realgymnasien und Oberrealschulen, mit 233 Figuren im Text; und Ausgabe B (138 Seiten): für Gymnasien und sechsstufige Realanstalten, mit 122 Figuren im Texte. – In der Tafel sind die Figurnummern nach der kleineren Ausgabe zitiert, da diese, wo die Figurnummern in beiden Ausgaben voneinander abweichen, beiderlei Nummern nebeneinander enthält. –

Dem gleichen Zweck, wie jene kleinere Ausgabe, nur innerhalb noch engerer Grenzen, dient das Heftchen: Leitfaden der konstruierenden Stereometrie, Darstellung der Raumformen im Schrägbilde, nebst einigen Anwendungen von Schrägbildern auf dem Gebiete der theoretischen und rechnenden Stereometrie, darstellenden Geometrie, Mineralogie, mathematischen Geographie und Physik mit 55 Figuren von Prof. Th. HARTWIG, Wien und Leipzig 1906, Carl Fromme (39 S.).

Einige Schrägbilder aus C. H. Müller und O. Presler, Leitfaden der Projektionslehre, Ausgabe B.

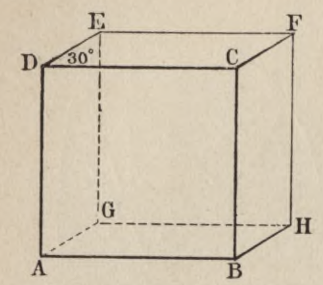


Fig. 4a

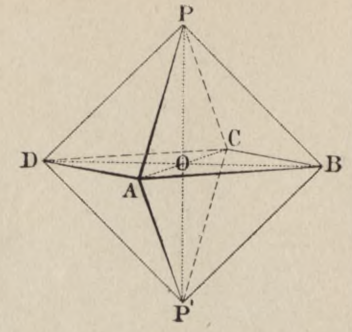


Fig. 22b

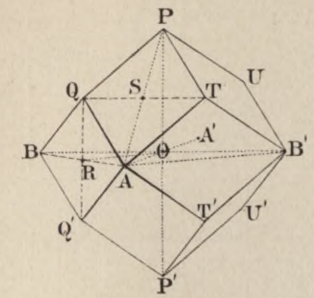


Fig. 59 (68)

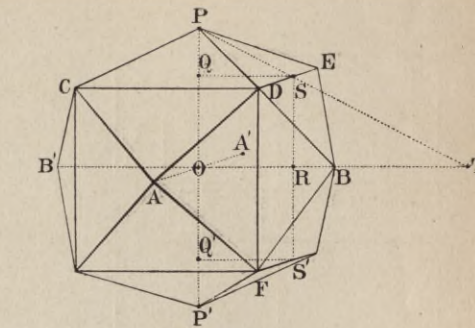


Fig. 60 (69)

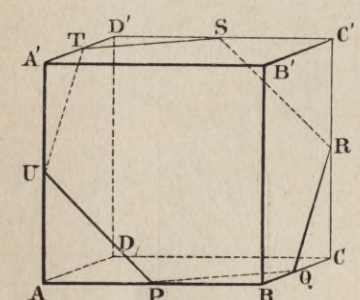


Fig. 46

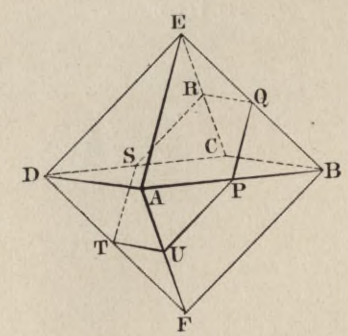


Fig. 47

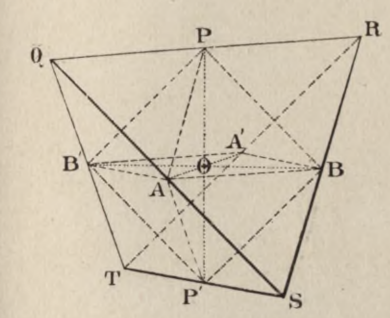


Fig. 61a (73a)

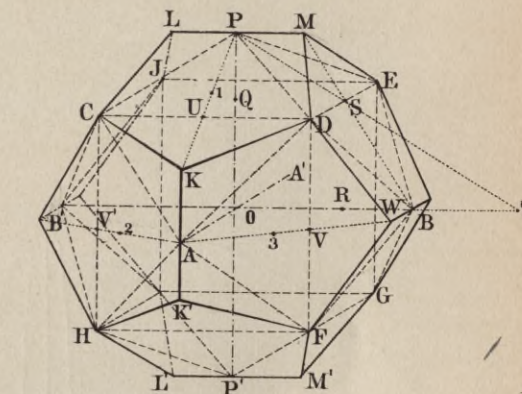


Fig. 62 (74)

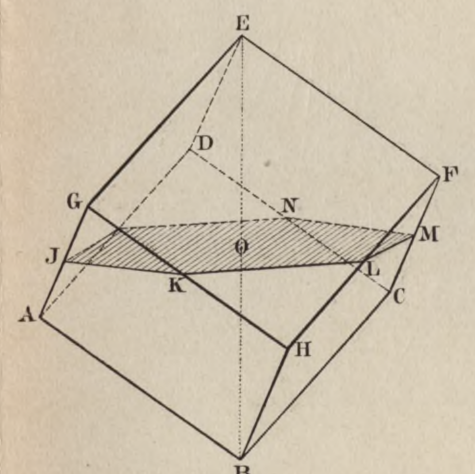


Fig. 45

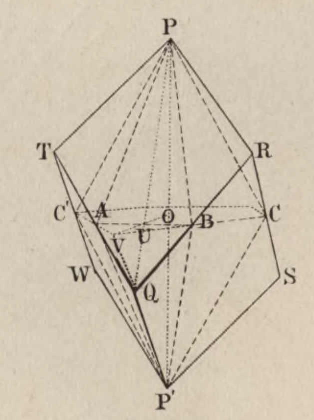


Fig. 67 (87)

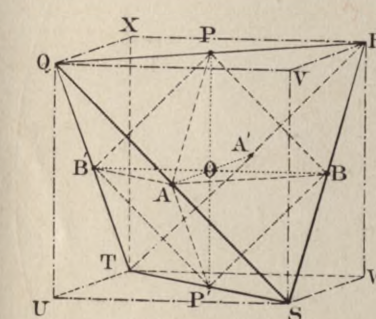


Fig. 61b (73b)

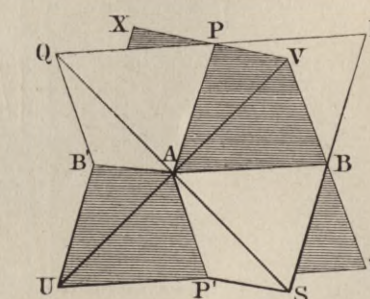


Fig. 61c (73c)

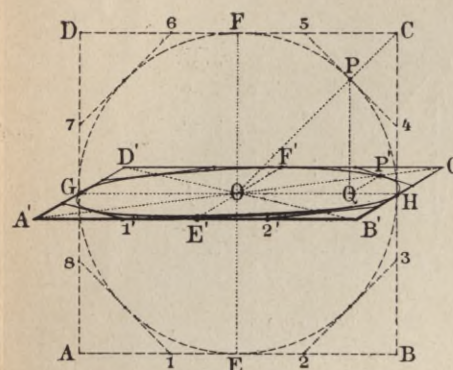


Fig. 15

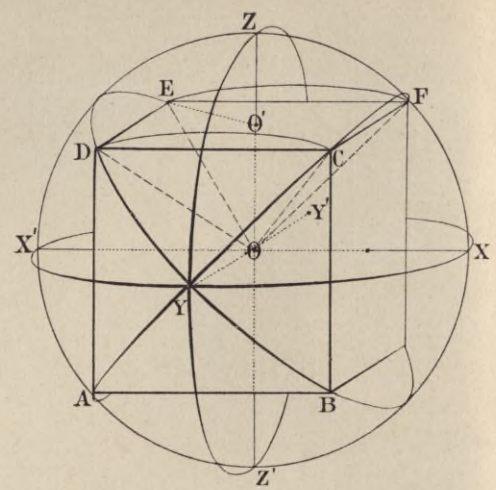


Fig. 33

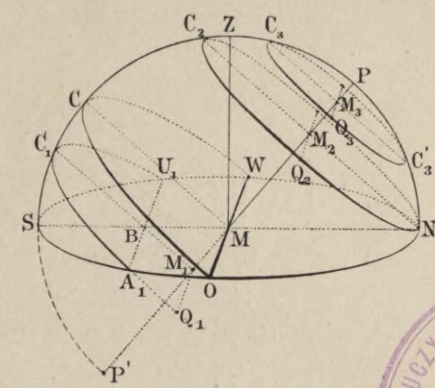


Fig. 74 (98)

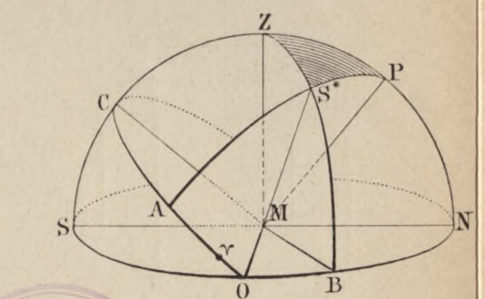


Fig. 75 (99)

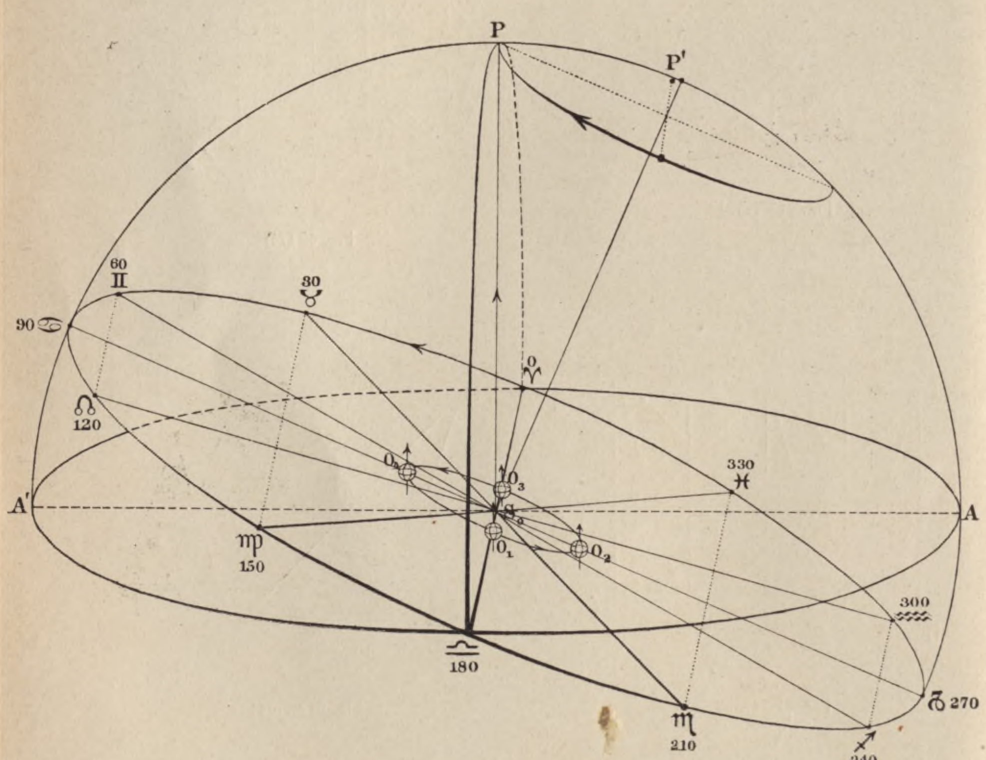


Fig. 76 (101): „Hauptfigur der theoretischen Astronomie“.

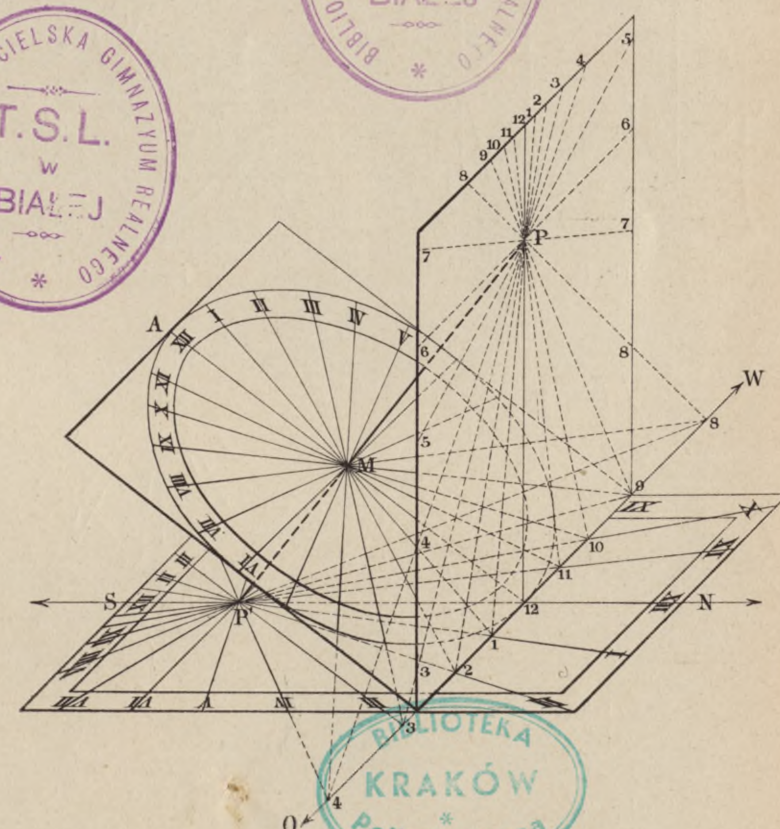


Fig. 77b (102b): Horizontal-, Aquatorial-, Vertikal-Sonnenuhren.

selber nicht in zeichnender Stereometrie versucht hat, mehr als ausreichend Anweisungen findet. Natürlich aber kommt beim Lehrer wie beim Schüler alles an auf das: Nicht nur lesen, sondern selber sogleich zeichnen! Keineswegs muß das ja dann immer mit Lineal, Zirkel und Winkeldreieck, sondern es soll sogar recht fleißig geschehen aus freier Hand, mag diese anfänglich auch noch so ungeschickt sein. (Einiges hierüber noch im III. Teil S. 495–498).

Hinsichtlich der Auswahl des in mehr oder weniger exakten Zeichnungen zu Pflegenden denken wir uns angesichts der unmittelbaren zeitlichen Nähe, in die nach meinem Vorschlag dieser zeichnende Vorkursus der Stereometrie zum Beginn der systematischen Mineralogie gesetzt ist, einige der grundlegenden Kristallformen und ihre gegenseitigen Beziehungen als das weitaus dankbarste Übungsmaterial.

Wenn der Schüler in den Stereometriestunden auch nur sogleich angeleitet würde, die Achsenkreuze für das reguläre Oktaeder, für das quadratische und das rhombische usw. System mit Bewußtsein korrekt zu zeichnen, so setzte sich das dann für den Kristallographieunterricht natürlich tausendmal fester als von ihm aus allein durch die schönsten Modelle, die der Schüler eben wieder „anschaut“ = anstarrt. Und wenn man überdies den Schülern zusieht, wie sie irgendwelche Modelle von kristallographischen Kombinationen zwar „bewegen“ (was wir ja S. 93 als ein psychologisch entscheidend wichtiges Stück „Anschauen“ im gründlichen Sinn erkannten), aber jetzt plan- und ratlos bewegen, d. h. zwischen den Händen herumkugeln, und erst nach allerlei Anrufen und Eingreifen von seiten des Lehrers dazu gelangen, z. B. die drei Achsen eines Rhombendodekaeders allmählich in die richtige Lage (d. h. eine lotrecht, die zweite wagrecht zum Beschauer frontal, die dritte gegen ihn hin, d. h. in seiner Medianebene) zu halten, wird man sich gestehen müssen, daß die unendlichen Klagen über die „Schwierigkeit und Öde des Kristallographieunterrichts“ zum guten Teil einfach Folgen von Unterlassungssünden eines für all diese Bedürfnisse von Nachbarfächern wieder fühllosen Stereometrieunterrichts sind.

Und wie reizvoll und vielseitig lehrreich wäre das Zeichnen einiger der an sich schon reizvollen Kristallgestalten und der in sie hineingedachten Achsen und Hilfsebenen gerade auch schon vom Standpunkt der zeichnenden Stereometrie als solcher!

Es sei z. B. einfach das Achsenkreuz des regelmäßigen Oktaeders im Schrägbild mit für $q = \frac{1}{3}$ und $\omega = 30^0$ gezeichnet (vielleicht überzeugt sich der Lehrer zu seinem Schrecken, daß, wenn er selber diese Achsen noch so korrekt an die Tafel vorgezeichnet hat, der eine oder andere Schüler sich die schiefe Gerade nicht einmal als aus der

Tafelebene heraustretend vorzustellen vermag!). Verlangt man nun vom Schüler, er solle in diese Zeichnung alle Oktaederkanten eintragen, so werden immer nicht alle Schüler mit allen Kanten zu Rande kommen, sondern einige Achsenenden unverbunden lassen — und was dergleichen Elend mehr ist. Aber gesetzt, die Sache sei glücklich abgelaufen, und es solle nun zu diesem Oktaeder z. B. der umgeschriebene und der eingeschriebene Würfel gezeichnet werden; eine Vorstellung, in der der Schüler heimisch sein müßte, wenn ihm später die dualen Zuordnungen von Oktaeder und Hexaeder, die auf sie sich gründenden Kristallkombinationen (Würfel, Oktaeder mit abgestutzten Ecken), die Aufgaben zu den geometrischen Reihen mit solchen Folgen von einander abwechselnd eingeschriebenen beiderlei Körpern u. dgl. m. anschaulich werden sollen. Wieviel Unbeholfenheit zeigt sich schon bei solch einfachen Zeichnungen — welch hübsche Beziehungen aber ergeben sich aus ihnen, wenn sie gelungen sind! — Dann die nahe anschließenden Übungen: Über die sechs Flächen eines Würfels gerade quadratische Pyramiden von solcher Höhe zu errichten, daß je zwei an einer Würfelkante aneinanderstoßende Seitenflächen in eine Ebene fallen, was dann das korrekt gezeichnete Rhombendodekaeder ergibt, mit dessen bloßem Nachmalen sich schon manche fleißige Kristallographieschüler vergeblich geplagt haben mögen. Jene Pyramiden nach einwärts gestülpt erweisen sich als dieselben, die man zu sehen bekommt, wenn man in einem Würfel einfach alle Diagonalen zieht (— ob sich wohl alle Schüler vorstellen können, daß es solcher Diagonalen nicht mehr und nicht weniger als vier gibt?). Doch genug; wir kommen auf solche Übungen noch einmal an der Spitze des folgenden Paragraphen über rechnende Stereometrie zu sprechen.

Für jetzt aber kehren wir wiederum zur allerersten Einführung des Schülers in ein wirkliches Verstehen (diesmal sogar abgesehen vom Nachzeichnen) der schematischen Schrägbilder seiner Lehrbücher zurück, angefangen von jener Abbildung des Würfels, die S. 89 wiedergegeben ist.

Spätestens jetzt dürfte es an der Zeit sein, mit den fünfzehnjährigen Schülern sich doch endlich in eine Erörterung einzulassen, inwieweit eine solche schematische Darstellung des Würfels berechtigt und was dagegen an ihr zwar konventionell, in Wahrheit aber geometrisch, weil vor allem optisch, streng genommen unmöglich ist: Bei der Lehre vom Sehen im vorausgegangenen physikalischen Unterricht der Unterstufe (an österreichischen Mittelschulen schon im 13. und 14. Lebensjahre) hat ja der Schüler schon genug vom Sehwinkel, vom perspektivischen Verengertscheinen einer Allee, eines langen Ganges gehört, um es wohl zu verstehen, wenn ihm gesagt wird, daß die in der Würfelzeichnung vorkommenden drei schiefen Strecken eigentlich nicht parallel sein dürfen; daß dann aber auch die vordere Seitenfläche nicht mehr ein reines Quadrat sei, denn damit sie sich als solches zeige, müßte sich das Auge irgendwo an der auf den Mittelpunkt dieser Vorderfläche errichteten Normalen befinden, könnte aber dann von den zu dieser Normalen parallelen Seitenkanten, die sich vom Auge weg erstrecken, überhaupt nichts mehr sehen. Wie aber ist dann die Darstellung der Abweichung vom Parallelismus richtig zu gewinnen? Wir stehen mit dieser Frage unmittelbar vor der Theorie der Zentralprojektion. Es bedarf aber wohl kaum einer in Allgemeinheiten sich ergehenden theoretischen Erörterung über Fluchtpunkte u. dgl., wenn der Unterricht vielmehr wieder anknüpft an jene Forderung aus den ersten Stunden des geometrischen Unterrichtes des ersten Jahrganges, wo wir dem Schüler ein Würfelchen in die Hand geben und es ihn so vor sein eigenes Auge halten lassen, daß es nacheinander die neun in Abb. 3—11 (S. 96) dargestellten Anblicke gewährt. Denkt sich der Schüler jetzt wirklich neun Würfel, etwa auf einem und demselben ebenen Brett so angeheftet, wie sie die Abbildung darstellt, so lassen sich alle zum Brett normalen und untereinander parallelen Würfelkanten vergleichen mit den wagerechten Kanten des langen Ganges[1]). Von diesen Kanten war ja nun dem Schüler schon bei früherer Gelegenheit einleuchtend geworden, daß, wenn sie ins Unendliche fortgesetzt würden, sie in einem Punkte zusammentreffen müßten, den wir einen Fluchtpunkt nennen. Und so wird sogleich eingesehen, daß, wenn unser Auge genau gegenüber dem mittleren von den neun Würfeln liegt, der uns nichts als seine quadratische Vorderseite zeigt, gegen den Mittelpunkt dieses Quadrates ähnlich jene parallelen (zur Quadratebene normalen) Würfelränder zusammenzulaufen scheinen müssen, wenn sie so dargestellt werden sollen, daß sie gegen einen ins Unendliche abstehenden, hinter jenem Quadratmittelpunkte liegenden Fluchtpunkt zielen.

Denken wir uns nun einmal ein solches Brett mit neun kleinen Würfeln nahe beim Auge, ein andermal ein solches Brett mit neun sehr großen Würfeln sehr weit vom Auge entfernt, u. zw. so, daß Größe und Abstand einander proportional sind (die Brettebenen und die ihm anliegenden Würfelebenen also in perspektivischer Zuordnung in bezug auf das Auge), so wird leicht eingesehen, daß bei den kleinen nahen Würfeln die Abweichung vom Parallelismus stärker, bei den

1) Ein solcher langer Gang war meinen Schülern im Theresianum als ihr täglicher Schulweg geläufig, und ich habe mich überzeugt, daß das Zusammenlaufen der vier wagerechten Ränder gegen einen unendlich fern zu denkenden Punkt gegenüber dem Augenpunkt immer sofort begriffen wurde, sobald die Vierzehnjährigen im Physik- und Stereometrieunterricht darauf aufmerksam gemacht wurden. Ein solcher Gang oder ein vollwertiger Ersatz dafür findet sich aber gewiß in jeder Schule und an jedem Schulorte.

großen, fernen Würfeln schwächer ausfällt. Die Fiktion der Parallelperspektive entspricht somit dem unendlich großen und unendlich fernen Würfel.

Ebenfalls an die Übungen der allerersten Geometriestunden in der ersten Klasse anknüpfend mag dann festgelegt werden, daß und was am Verzerrungsverhältnisse q und am Verzerrungswinkel ω (Müller-Presler S. 5) Sache der Übereinkunft ist; so daß z. B. für $\omega = 45^0$ das Auge ebensoweit oberhalb wie rechts vom Würfel zu denken ist, wogegen es bei der gefälligeren Zeichnung $\omega = 30^0$ mehr rechts liegt.

§ 21. Einige Bemerkungen zur rechnenden Stereometrie.

Schon oben wurde der Klage über die Dürftigkeit unserer herkömmlichen stereometrischen Rechenaufgaben gedacht. Blättert man die Mittelschulprogramme auf ihre Maturitätsprüfungsaufgaben hin durch (und ebenso die nach ihnen angefertigten Sammlungen solcher Aufgaben), so begegnet man immer wieder den „Kreiskegeln, an deren Grundfläche eine Halbkugel angesetzt ist“, den „Zylindern, die in Pyramiden“ und den „Pyramiden, die wieder in Halbkugeln zu verwandeln sind“ usf. *in inf.* Also wieder ein Raupennest des selbstgenügsamsten Formalismus. Um sich von ihm zu befreien, bedenke man vor allem, daß das Rechnen in der Stereometrie ja nicht erst dort anzufangen braucht, wo es Rauminhalte und Oberflächen zu berechnen gilt; drängt sich ja die Frage nach den mannigfaltigsten Längenbeziehungen lange schon vor Aufstellung der ersten Oberflächen- oder Volumformeln ganz von selber aus der anschaulichen Vorstellung von Körperformen, vor allem wieder der Kristallgestalten, von selbst auf.

Knüpfen wir z. B. an die oben (S. 210) zuletzt erwähnte zeichnerische Aufgabe an, den Würfel mit aufgesetzten Pyramiden: wie hoch muß hier diese Pyramide sein, damit es das Rhombendodekaeder gibt? Offenbar (?) die Hälfte der Würfelseite a. Als Länge der Kanten stellt sich dann $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ heraus; so daß einmal die umgekehrte Aufgabe gegeben werden kann: Diese Pyramidenkanten seien so lang wie die Höhe des gleichseitigen Dreiecks, das die Würfelkante zur Seite hat; man berechne alle übrigen Stücke dieses Körpers. Bis in den Trigonometrieunterricht hinein ergeben sich hier hübsche Beziehungen, z. B. daß die Flächenwinkel an den Würfelkanten 180^0 werden (wovon wir bei der ersten Stellung der Aufgabe [S. 210] ausgegangen waren). All das noch vor den Volumberechnungen, also mit den Mitteln der Planimetrie des vorausgegangenen Schuljahrs. Es sei aber sogleich hier bemerkt, daß, wenn wir später als Volumen des Rhombendodekaeders $2a^3$ finden und das dem Schüler, der *post tot discrimina rerum* zu diesem Ergebnis gekommen ist, nicht unmittelbar einleuchtet, dieses Einleuchten nachmals plötzlich eintritt, wenn wir ihn an das Umkehren der Pyramiden und das Zusammenfallen ihrer Kanten mit den Würfeldiagonalen (S. 210) erinnern. – Doch dieses Beispiel nur als eines für Hunderte (wie deren sich auch z. B. in der trefflichen stereometrischen Sammlung von Reidt finden), an dem eben nur gezeigt werden sollte, wieviel sich an den Körpern planimetrisch (und später trigonometrisch) rechnen läßt, ohne daß es gerade nur jene Oberflächen und Volumina sein müssen. Grundsätzlich wichtig dagegen ist es uns, daß eben solche Rechnungen in innigster Durchdringung mit dem stereometrischen Zeichnen erst jenen Vorkursus der Stereometrie ausmachen, der nun gut etwa zwei Monate umfassen mag, ehe man dann jenen hochtheoretischen Beweisen der herkömmlichen Stereometrieeinleitungen sagen wir drei Monate, endlich den Oberflächen- und Volumsbestimmungen die restlichen fünf Monate des Schuljahres widmet.

Zu den Oberflächen- und Volumbestimmungen in Kürze nur so viel, daß man sie erstens nicht aus dem Zusammenhang reiße (also nicht etwa zuerst alle Oberflächen-, dann erst alle Volumsformeln entwickle), und daß es zweitens nicht nötig ist, auch noch auf fernliegende Dinge wie Obelisk und Prismatoid einzugehen (es wäre denn in Form gelegentlicher Bemerkungen und Zusätze). Um so eindringlicher möge aber das so verbleibende, freilich sehr bescheidene Material von Prismen (einschließlich Zylinder), Pyramiden (einschließlich Kegel), Kugel und deren einfachsten Teilkörpern (Pyramidenstumpf, Kugelausschnitt, Kugelabschnitt u. dgl.) in wirklich übersichtlicher Abfolge vorgeführt werden; denn das vermeidet von selbst das Häufen von „Formeln“ und deren sinnloses Memorieren.

Also zuerst die Prismen mit ihrem $V = Gh$ (wo wieder der schon auf der Unterstufe, S. 151, für das Rechteck eingehend entwickelte Gedankengang zugrunde liegt und nur etwa durch das nun schon im Planimetrieunterricht des vorausgegangenen Jahres zum Bedürfnis gewordene Eingehen auf inkommensurable und irrationale Größen ergänzt wird). Schon das $V = r^2\pi h$ des Zylinders, sollte nicht wie eine neue „Formel“ eingeprägt werden, sondern muß sich im Augenblick des Bedarfs wie von selbst ableiten, natürlich nach öfterer Wiederkehr doch als eine Wahrheit, die sich nun von selbst eingeprägt hat. Dieses eigentlich Selbstverständliche sei hier nur erwähnt, weil es ja vorbildlich ist für alles gesunde Verhältnis zwischen judiziösem und mechanischem Gedächtnis[1]) in Sache der „Formeln“ überhaupt.

1) Als Beispiel des Ineinandergreifens dieser beiden Arten von Gedächtnis

Dann die Pyramiden: hier führt der grundlegende Satz über die Dreiteilung des dreiseitigen Prismas und die Vergleichung je zweier der drei Pyramiden notwendig schon durch das Cavalierische Prinzip hindurch; wir widmen diesem unten (S. 217–220) noch einige besondere Bemerkungen. Wieder schließt sich sofort der Kegel an. Während sein $V = \frac{1}{3} r^2 \pi h$ wieder nichts Neues bietet, sei dagegen zur verbreiteten Ableitung für die Fläche des Mantels bemerkt, daß es nicht erst nötig ist, ihn in eine Ebene abzurollen: denn die Rechnung

$$M = \tfrac{1}{2}\beta_1 s + \tfrac{1}{2}\beta_2 s + \cdots + \tfrac{1}{2}\beta_n s = \tfrac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n) s$$
$$= \tfrac{1}{2} 2\pi r \cdot s = r s \pi$$

gilt nicht minder schon für den gekrümmten wie für den ausgebreiteten Mantel. Wohl aber sollten hier vertiefende Wiederholungen darüber eingefügt werden, mit welchem Recht wir hier die Formeln für das geradlinige gleichschenklige Dreieck anwenden auf die schmalen Dreiecke mit gekrümmter Grundlinie (und allenfalls auch gekrümmter Fläche). Bemerkungen über „Größen, die klein erster und zweiter Ordnung" sind, werden hier schon am Platz sein, wogegen sie beim gleichen Anlaß gelegentlich des Kreisausschnitts im vorausgegangenen Jahr wohl noch verfrüht gewesen wären.

Bei den Pyramiden- und Kegelstutzen die herkömmliche Ableitung der Volumina, innerhalb deren aber als weitaus das wichtigste der Satz vom quadratischen Wachsen der Schnitte mit dem Abstand von der Spitze gebührend hervorzuheben ist.

Und nun sogleich als Überleitung zur Kugel die Oberflächen der Körper aus der Drehung regelmäßiger Vielecke um einen Eckendurchmesser. Als Vorbereitung hierzu die Vereinheitlichung der drei Mantelformeln für

Zylinder $m = 2\pi r \cdot h$, Kegel $m = r\pi \cdot s$, Kegelstutz $m = (R + r)\pi \cdot s$

zu $m = 2\pi\rho \cdot h$, wo ρ die Länge der im Halbierungspunkt einer Seitenlinie des Mantels errichteten und bis zur Achse gezogenen Normalen ist. Hierbei Zwischenbetrachtungen, warum das Vieleck hat ein regelmäßiges sein müssen: weil sich eben sonst ρ nicht als gemeinschaftlicher Faktor hätte herausheben lassen. Für den Lehrer, der weiter und tiefer blickt, ist freilich das immer noch ein verhältnismäßig zufällig äußerlicher Grund: in Wahrheit liegt ja in diesem Ersetzen der drei Mantelformeln durch die eine mit gemeinsamem ρ bei beliebigen $h_1, h_2 \ldots h_n$ nicht mehr und nicht weniger vor als ein typischer Fall für alles Integrieren durch Einführung einer neuen Variabeln (wie in § 45, S. 419 noch in Erinnerung zu bringen sein wird). Aber

---

habe ich die beiden Formeln $O = a^2 \cdot 2\sqrt{3}$, $V = a^3 \frac{\sqrt{2}}{3}$ für Oberfläche und Volumen des Oktaeders in meiner Psychologie § 35 näher analysiert.

auch ein Lehrer, der jeder Erwähnung des Integrierens in der Mittelschule ängstlich ausweichen zu müssen meint, darf seinen Schülern nicht vorenthalten, daß genau an diesem Punkt der Nerv sich berge innerhalb der ganzen wundervollen archimedischen Entdeckung: die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem Mantel des gleich weiten und gleich hohen Zylinders[1]).

Allerdings läßt sich ja die Kugeloberfläche auch auf dem Umweg über deren Volumen gewinnen, nachdem mittels des Cavalierischen Satzes sein Zusammenhang mit Zylinder und Kegel gefunden ist. Doch sollte (wenn nicht hier, so spätestens in der zusammenfassenden vertiefenden Wiederholung des letzten Jahrgangs) nicht darauf verzichtet werden, zuerst die Oberfläche $4r^2\pi$ und durch Multiplizieren mit $\frac{1}{3}$ der quasi-Pyramiden-Höhe r das Volumen direkt zu finden; worauf dann erst jene Beziehung zwischen Kugel, Zylinder und Kegel eine hübsche Bestätigung bleibt. Auf alle Fälle bietet sich hier eine gute Gelegenheit, auf das Ineinandergreifen stereometrischer Beziehungen hinzuweisen; im obersten Jahrgang wieder unter Hervorkehrung der historischen Abfolge, in der sich diese gar nicht genug zu bewundernden Dinge ihren Entdeckern erschlossen haben.

Auch die platonischen Körper mögen, wie sie im Altertum die *pièce de résistance* der ganzen Mathematik bildeten (wobei den Schülern immerhin die starke Wandlung des Geschmacks etwa bei Gelegenheit der künftigen „höheren Mathematik" nicht zu verschweigen ist), an passenden Stellen der Stereometrie ihre Würdigung finden; nämlich während der rechnenden Stereometrie nicht nur in Volumberechnungen, sondern auch planimetrische Beziehungen (z. B. zu den ein- und umgeschriebenen Kugeln), vorher aber schon namentlich beim Eulerschen Satz u. dgl. m. Kann und will man dabei auch auf Dodekaeder und Ikosaeder eingehen, so fehlt es nicht auch an schwierigeren Aufgaben (von denen ein Teil vielleicht besser für die immanente Wiederholung während des folgenden Trigonometriejahres aufgespart wird). Beim regulären Dodekaeder ermangle man nicht, darauf hinzuweisen, daß und warum die Pentagondodekaeder der Kristallographie keine regulären, die Fünfecke keine regelmäßigen gewesen waren (auf die Beziehung der bevorzugten Fünfecksseiten zum Würfel leitete uns schon Fig. 4, S. 95 hin).

Diese Proben vom theoretischen und Übungsstoff seien mehr als genug, um zu zeigen, daß weder die zeichnende noch die rechnende Stereometrie auf irgendwelche traditionelle Armseligkeiten angewiesen ist.

---

1) Vgl. hierzu, speziell unter Hinweis auf HEIBERGS Fund einer neuen Archimedes-Handschrift, LOREYS Festrede „Archimedes und unsere Zeit", Görlitz 1908.

Gehen wir aber schließlich auf das Cavalierische Prinzip noch etwas näher ein, namentlich insofern es ein typisches Beispiel dafür ist, wie man dieselben mathematischen Wahrheiten dem Schüler in weitgehender Unbefangenheit[1]), d. h. wie (oder geradezu als) ein Axiom vorführen, oder aber selbst erst wieder zum Gegenstande von verhältnismäßig schon recht subtilen Beweismethoden machen kann.

Die unbefangene Behandlung besteht hier darin, daß man als selbstverständlich hinstellt: Zwei Körper, die in jeweils gleicher Höhe „gleich dick" sind (womit genauer gesprochen eben die Flächengleichheit je zweier derselben Ebene angehörender Schnitte gemeint ist), sind auch im Volumen gleich; denn hierfür kann es auf seitliche Verschiebung jener Schnitte nicht ankommen. Von den Scheiben, in die die Körper durch je zwei aufeinanderfolgende solcher Schnitte zerfällt werden, wird bei dieser Vorstellungsweise gar nicht die Rede sein, denn sowie man sich hierauf einläßt — und das wird und muß man etwas später füglich tun — drängen die Fragen weiter:

Von prismatischen (zylindrischen) Körpern unterscheiden sich immerhin die zwischen zwei aufeinander folgende Ebenen eingeschlossenen Scheiben durch die Seitenflächen, die weder als eben noch als überhaupt auf eine bestimmte Flächenart eingeschränkt vorausgesetzt sind. Deshalb muß jede einzelne Scheibe (wenn sie auch für den besonderen Fall, daß die zerfällten Körper Pyramiden waren, Pyramidenstumpfe sind, deren Formel aber hier noch nicht vorausgesetzt werden kann, weil ja eben erst die Pyramidenformel abgeleitet werden soll) für sich im allgemeinen überhaupt unberechenbar sein. Es verschlägt dies aber nichts, weil wir ja nicht die einzelnen Scheiben, sondern nur ihre voll-

---

1) Ein Gegenbeispiel dafür, was ich unter einer didaktisch berechtigten „Unbefangenheit" nicht verstanden wissen möchte, diene die folgende väterliche Ermahnung und Belehrung, die ein Landesschulinspektor a. D. mir zur Zeit meiner ersten Unterrichtstätigkeit zuteil werden ließ: „Wenn die Mathematiklehrer nur nicht so umständliche Beweise für die Volumformeln gäben! Um z. B. $V = Gh$ zu beweisen, nehme ich von einem Stoß Aufgabenblätter das unterste Blatt; das ist die Grundfläche G. Weil aber so viele aufeinander liegen, so wird es ein Prisma von der Höhe h. Ich muß also G mit h multiplizieren, dann gibt es das Volumen . . ." An dieser heiteren Verwechslung von „Zusammenläppern" und „Multiplizieren" ist für das Cavalierische Prinzip lehrreich, daß man ja nicht den Schüler überreden möge, aus den Schnittflächen allein schon sei irgendwie das Volumen „zusammengesetzt" – wenn auch ähnliche Naivetäten oder Gewaltsamkeiten in der Vorgeschichte der Integralrechnung gang und gäbe waren.

ständigen Summen, d. h. die zwei in Scheiben zerfällten Körper, miteinander vergleichen wollen. Es ist, wie der Lehrer weiß, und wie er, sobald er sich eben nicht mit der axiomatischen Einführung des Cavalierischen Prinzips begnügen will, dem Schüler sozusagen tropfenweise einzugeben hat, keine andere Schwierigkeit als der Grundgedanke aller Integralrechnung: das Bilden von Summen unendlich vieler unendlich kleiner, nach einem bestimmten Gesetz fortschreitender Größen. Eben darum kommen wir auf das Cavalierische Prinzip als ein Hauptargument dafür, daß man dem Mittelschüler auch diesen Grundgedanken höherer Rechnungen nicht länger vorenthalte, noch einmal in § 45 (S. 417) zurück. Jetzt aber, wo wir den Schüler auf alle Fälle nur die ersten Schritte zu jener künftigen weiten Verallgemeinerung zu führen haben, bleiben wir ganz bei der konkreten, spezifisch stereometrischen Aufgabe und suchen für die Sonderaufgabe, die in der Abweichung zwischen den Scheiben und streng prismatischen Körpern liegt, auch nur eine ganz spezifisch räumliche Lösung. Zwar ist die nachfolgende einigermaßen verwickelt; eine künstliche Vereinfachung des vollen Gedankenganges dürfte aber, wenn man sich einmal mit der bloßen axiomatischen Behandlung nicht mehr begnügen will, jedenfalls nur eine Halbheit – nicht Vereinfachung, sondern Verstümmelung des Gedankenganges und Verkümmerung der ihm zugrunde liegenden Anschauung sein. Der strenge und vollständige Nachweis nämlich, daß trotz jener Abweichungen der seitlichen Begrenzungen der Scheiben aus der vorausgesetzten Flächengleichheit der Schnitte die Volumgleichheit der ganzen Körper folge, ist so zu erbringen (wobei wir die Beschreibung des Vorganges zuerst dem besonderen Beispiel der zwei Pyramiden in Figg. 84, 85 – über die Befreiung von der Einschränkung auf konvexe Polygone als Basen und dergl. vgl. Weber-Wellstein II., S. 542 [1. Aufl.] – anpassen und den Wortlaut für zwei beliebige Cavalierische Körper erst hinterher durch den Schüler selbst erweitern lassen):

Wir führen eine Gerade parallel zu sich selbst um den Umfang jeder der Schnittebenen, so daß sie je eine bis zu den dies- und jenseits parallelen Schnittebenen reichende Prismenfläche erzeugt. So wird die Seitenfläche jeder Scheibe von zwei Prismenflächen, einer äußeren und einer inneren, eingeschlossen. Jede dem Körper angehörige Scheibe ist dann kleiner als das äußere, größer als das innere Prisma, und die

Abweichung der Körperscheibe von dem einen wie dem anderen Prisma ist jedenfalls kleiner als der „prismatische Ring“, um den das äußere Prisma größer ist als das innere. Der Fehler also, den wir begehen würden, wenn wir statt der wirklichen Körperscheiben alle äußeren oder alle inneren Prismen setzten, wäre gleich der Summe aller prismatischen Ringe. Die Größe dieser Summe aber erhalten wir, wenn wir uns alle diese Ringe (ähnlich wie die Teilröhren eines Tubus oder Perspektivs) ineinander geschoben denken – nämlich gleich dem untersten Prisma. Da nun für beide Körper aus der Voraussetzung der flächengleichen Schnitte folgt, daß sowohl alle äußeren wie alle inneren

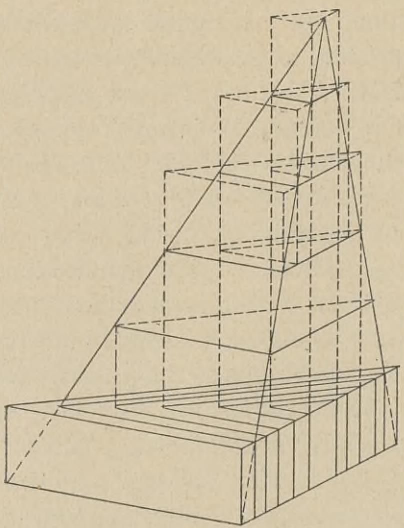


Fig. 87.

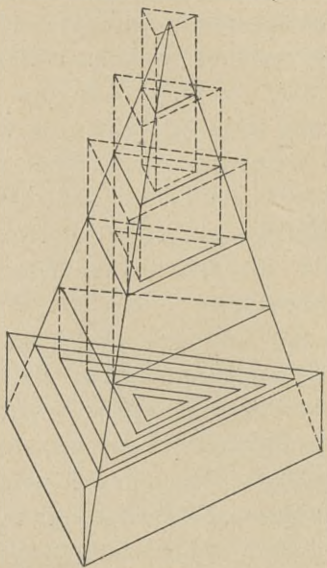


Fig. 88.

Prismen paarweise einander gleich sind (und zwar genau, was wir dagegen von den Körperscheiben selbst noch nicht wissen), so folgt, daß die Gesamtvolumina beider Körper sich höchstens um die Summe aller prismatischen Ringe, also um das Volumen der untersten Scheiben voneinander unterscheiden können. – Diese Volumina aber erreichen die Grenze Null, wenn wir die Höhen der Prismen immer kleiner wählen, d. h. die Schnittebenen stetig aufeinanderfolgend denken; was wir dürfen, da nach der Voraussetzung eben die Schnitte in was immer für einer Höhe gleich sein sollen.

Wird der Schüler diesem Gedankengang Schritt für Schritt mit vollem Verständnis folgen? Wird ihn die Anschauung nirgends im Stich lassen? (Der eigentliche Witz des Beweises, das Ineinanderschieben der prismatischen Ringe, muß vom Schüler mit

Heiterkeit begrüßt werden, sonst ist es ein Zeichen, daß er eben diesen Witz nicht verstanden hat und mit ihm auch den ganzen Beweis nicht.) Nun, wenn es bei dem einen oder dem anderen Schüler nicht so weit kommt, so lassen wir's ruhig bei der – Selbstverständlichkeit bewenden. Nennt man doch unseren Satz von altersher ein „Prinzip" (mit welchem Namen man freilich früher allzu freigebig war, z. B. „Archimedisches Prinzip", das doch längst aus prinzipielleren hydromechanischen Gesetzen abgeleitet ist und war).

Die Stellung des Cavalierischen Satzes im System der Stereometrie wäre aber nicht voll verstanden, wenn man ihn etwa nur auf die Pyramiden anwenden wollte, gelegentlich deren man seiner nur eben zum erstenmal ausdrücklich bedarf. Es sei hier eingeschaltet, daß man ja allerdings auch den Satz von der Volumgleichheit des geraden und schiefen Prismas schon mittels des Cavalierischen Prinzips glaubhaft machen kann. Nur müßte in diesem Falle der Cavalierische Satz wirklich als Prinzip, ohne obigen Beweis, hingenommen werden, da ja jener Beweis selbst die Volumgleichheit der Prismen unabhängig von der Neigung der Seitenlinien gegen die Grundebenen vorausgesetzt hat. Denn es wäre unnatürlich, weil für jenen Beweis wieder unwesentlich, wenn man sich auf die normale Lage zwischen Prismenseiten und Grundebenen beschränken wollte.

Eine besonders drastische Veranschaulichung dieses Prinzips liefert die Aufgabe, das Volumen einer jener Barocksäulen zu berechnen, wie sie z. B. den Mittelaltar der Peterskirche in Rom verunzieren: nämlich ein gerader Kreiszylinder, dessen Achse aber zu einer Schraubenlinie verbogen ist, so daß dann die Seitenflächen schraubenförmige Wülste aufweisen. Das Volumen ist nichtsdestoweniger einfach $r^2\pi h$. Zur Veranschaulichung eine Säule aus gleichen Münzen, die man nach dieser Schraubenform und auch sonstwie gegeneinander aus der zylindrischen Anordnung verschoben hat.

Dagegen ist die (nächst der Anwendung auf die Pyramide) für den systematischen Lehrgang selbst wichtigste Anwendung des Cavalierischen Satzes die bekannte Berechnung der Halbkugel aus Zylinder minus Kegel. Man sollte aber diese schöne Beziehung nicht nur „beweisen", nachdem man sie fertig mitgeteilt, „behauptet" hat, sondern das Cavalierische Prinzip mag sich gerade bei dieser Aufgabe als ein heuristisches bewähren: Gegeben ist zuerst nur die Halbkugel, und im Sinne des Cavalierischen Prinzips wird in der (variabel zu denkenden) Höhe die Schnittebene vom Halbmesser $\rho = \sqrt{r^2 - x^2}$ geführt. Weil also diese Schnittfläche $\rho^2\pi = r^2\pi - x^2\pi$ ist, leitet uns das auf einen Hilfskörper, dessen Schnittfläche ein Kreisring mit konstantem äußeren und variablem inneren Halbmesser sein muß. Dies aber leistet ein Zylinder, aus dem der Kegel herausgenommen ist. Und da wir von diesen beiden Körpern die Volumina schon kennen, so ist nun auch das Volumen der Halbkugel $r^3\pi - \frac{1}{3}r^3\pi$ usw.

An diese Aufgabe wieder mag sich die etwas exotische vom Durchdringungskörper der zwei gleichen Zylinder mit sich (recht- oder schiefwinklig) schneidenden Achsen schließen (vgl. die Durchführung dieser Aufgabe in einem größeren Zusammenhang mit der Trigonometrie des nächsten Jahrgangs, S. 300). Aber auch diese Aufgabe werde als eine von selbst sich darbietende Variante des Gedankengangs in der Handhabung des Cavalierischen Satzes etwa so eingeführt: Nachdem sich dem Zylinder minus Kegel die Halbkugel als volumgleich erwiesen hat, mögen wir fragen, welcher Körper an Stelle der Halbkugel herauskäme, wenn man an Stelle von Zylinder und Kegel Prisma und Pyramide von quadratischer Grundfläche treten ließe. Es wird dann ein nach den Dimensionen dieser Quadratebenen ebenfalls quadratischer, in den dazu normalen Ebenen aber runder Körper sein. Mag sich die Phantasie des Schülers aus diesen anfänglich verwickelten Daten nur selber hindurcharbeiten bis zur Anschauung des Durchdringungskörpers. Von seinem überraschenden (weil von π freien) Volumen $V = \frac{16}{3}r^3$ werde dann weitergeschritten zum Zylinderstutz $\frac{2}{3}r^3$ oder allgemeiner $\frac{2}{3}r^2h$. Dieses Ergebnis erregt wieder ein über ein spezielles Übungsbeispiel hinausgehendes Interesse, da der Schüler leicht auf die Frage nach dem Volumen eines schief abgeschnittenen Kreiszylinders und seiner Teile kommt. Die Oberfläche dieses Zylinderstutzes, die zur Sinuslinie in mehrfach lehrreicher Beziehung steht, behandelt u. a. die zusammenhängende Lehrprobe S. 293–310 (speziell S. 298).

Oberstufe: Sechzehntes bis achtzehntes Lebensjahr.

§ 22. Zur Charakteristik der Oberstufe.

Mehreres wirkt zusammen, den um das sechzehnte Lebensjahr beginnenden Unterricht gegen den früheren in einer namentlich auch für den Schüler merklichen Weise sich abheben zu lassen – vor allem, wenn und weil der Gegenstand auch rein wissenschaftlich sich zu einem einheitlichen Ganzen für die drei obersten Schuljahre zusammenschließt.

Zuerst vom Standpunkt des Schülers aus betrachtet: nie war ihm bisher etwas so völlig Neues vorgekommen, als wenn er von goniometrischer Funktion, vom Logarithmus hört und für beides fertig gerechnete Tafeln in die Hand bekommt. Dies allein rückt ihm, wenn auch zunächst noch von außen her, den **Funktionsbegriff** als solchen nahe: wie denn auch von jeher, lange ehe die Forderung des „funktionalen Denkens“ modern geworden war, von „goniometrischer Funktion“ gesprochen wurde — freilich ohne daß dieses Wort „Funktion“ grundsätzlich erläutert worden wäre, wiewohl es dem Schüler hier zum erstenmal zu Ohren kam.

Aber auch rein wissenschaftlich ist die Zäsur zwischen den zwei ersten und der nun in systematischem Zusammenhang in Angriff zu nehmenden dritten Operationsstufe der Arithmetik eine einschneidende. Die (nicht mehr nur rein) quadratischen Gleichungen, die bei ihnen unvermeidlichen komplexen Zahlen, die von jetzt an immer wiederkehrenden irrationalen Zahlen, welche ebenso wie die (im nächsten Jahrgang) folgenden geometrischen Reihen auf den **Grenzbegriff** führen, geben auch schon vor dem Beginn der analytischen Geometrie dem Lehrstoff ein von dem bisherigen stark verschiedenes Gepräge, so daß die „**höheren Rechnungen** für höhere Schulen“ (vgl. S. 372ff.) nicht erst mit dem eigentlichen Differentiieren und Integrieren, sondern schon mit den meisten der soeben berührten Gegenstände der Sache, wenn auch nicht der üblichen Bezeichnung nach begonnen haben.

Es wird von nicht zu unterschätzendem Vorteile sein, wenn auch die Lehrpläne jene innerliche Eigenart dieser Lehrstoffe und das ihnen entgegenkommende neuartige höhere Interesse der Schüler zu äußerlichem Ausdrucke bringen; also z. B. wirklich die Oberstufe in Arithmetik gerade mit der dritten Operationsstufe[1]), in Geometrie mit den goniometrischen Funktionen beginnen. Denn gehört es nicht zu den Vorrechten eines „Lehrplanes“, sozusagen vor den Augen des Lehrers und auch des Schülers die Lehrstoffe deutlich zu gliedern und so dafür zu sorgen, daß nicht am Ende eine bloße willkürliche Aufeinanderfolge zusammenhangslos und ungegliedert nacheinander „absolvierter“ Einzellehren wüste Köpfe bei den Schülern (und wohl auch bei den durch schlechte Lehrpläne wirr gemachten Lehrern) als unerfreuliches Schlußerträgnis des ganzen Unterrichtes zurückläßt? Dabei wird ja das logisch-systematische Hervorkehren der

1) Über einen Schönheitsfehler der neuesten österreichischen Lehrpläne durch Störung dieses Zusammenpassens der Lehr- und Operationsstufen vgl. folg. §, S. 223, Anm.

im Stoffe selbst gelegenen Gliederungen nicht zu einem doktrinären Ignorieren der äußeren Bedingungen des Unterrichtes zu führen brauchen (also vor allem der Rücksicht, wieviel man in jedem Jahrgang zu absolvieren hat, damit nicht ungleiche Belastungen der einzelnen Schuljahre eintreten; und es wird sich der Verfasser des Lehrplanes für einen einzelnen Lehrgegenstand sogar um die Anforderungen der anderen Lehrfächer desselben Jahres sehr wohl zu bekümmern haben). Es sei an die grundsätzlichen Aufgaben einer weitausschauenden Lehrplangestaltung, von denen schon im § 6 allgemein die Rede war, an dieser Stelle noch besonders erinnert, weil die Zäsur zwischen Mittel- und Oberstufe des mathematischen Unterrichtes ein besonders dankbares Beispiel für diese Forderungen einer umsichtigen Didaktik und für ihre sachgemäße Erfüllung darstellt.

So bildet insbesondere der Umstand, daß von Potenzen und Wurzeln vieles schon auf der Mittel-, ja auch schon auf der Unterstufe hatte behandelt werden müssen, schon weil und insoweit Planimetrie und Stereometrie ihrer wirklich bedurften, ein gutes Beispiel dafür, inwieweit man unter vorläufiger Beiseitestellung aller systematischen Rücksichten den Schüler mit allen Hauptlehren eines Kapitels hat praktisch vertraut machen können und doch für eine darauf folgende höhere Stufe des Unterrichtes ihm nun den Blick für den systematischen Zusammenhang dieser Lehren untereinander und mit weiteren Gebieten der Wissenschaft noch zu erschließen sich vorbehält. Erst durch solch allseitige Rücksichtnahme auf didaktische wie rein wissenschaftliche Forderungen wird das Lehrplanmachen zu einer Kunst. Bloße Handwerker des Lehrplanmachens mögen bald die eine, bald die andere Rücksicht aus dem Auge verlieren, insbesondere auch bald den Fachmann, bald den Schulmann fast oder ganz einseitig hervorkehren.

Die nächstfolgende Darstellung zuerst jener systematischen Ergänzung der Potenz- und Wurzellehre, dann der Logarithmen, dann der von einem bestimmten Punkte ab auf die Logarithmen angewiesenen Goniometrie und Trigonometrie wird versuchen, neben einigen Ratschlägen für die Behandlung der genannten Kapitel im einzelnen auch ein Beispiel einer solchen nicht einseitigen Lehrplangestaltung zu bieten. Ein Beispiel noch mehr im großen gibt dann das Zusammenarbeiten von Arithmetik, Geometrie und Physik im zweitnächsten (vorletzten) Jahrgang.

§ 23. Zur systematischen Behandlung der Potenzen und Wurzeln[1]).

Von dem Augenblicke an, da (im letzten Jahr der Unterstufe) für $a \times a$ die abkürzende Bezeichnung a^2 eingeführt wurde und ebenso $a \times a \times a = a^3$ usf., bis zu dem vorausgegangenen letzten Jahr der Mittelstufe war die Potenz immer nur als „Produkt gleicher Faktoren“ ins Auge gefaßt worden. Ja es hatten weder Planimetrie noch Stereometrie verlangt, auch nur diesen Potenzbegriff über die numerischen Exponenten zum a^n zu erweitern. Ebenso waren uns $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a} \ldots$, auch Formen und Formeln wie $\sqrt{3\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{a^4} = a\sqrt[3]{a}$, vorgekommen; aber das Bedürfnis nach einem auch nur halbwegs verallgemeinernden, geschweige systematischen Potenz- und Wurzelrechnen hatten wenigstens Planimetrie und Stereometrie noch nicht angeregt. Möge der Lehrer, dem diese oder irgendwelche andere Verallgemeinerungen Kinderspiel sind, sich gegenwärtig halten, ob sie es auch den Kindern und Knaben waren[2]); und ob er nicht, falls

---

1) Die neuen österreichischen Lehrpläne haben zwar die beiden Schlagworte „Potenzen und Wurzeln“ an das Ende der Mittelstufe gestellt und hiermit auf das Zusammengehen der gegenständlichen Zäsur zwischen zweiter und dritter Operationsstufe mit der Lehrplanzäsur zwischen Mittel- und Oberstufe scheinbar verzichtet. Aber hoffentlich nur scheinbar; denn allerdings wird man zu Ende der Mittelstufe – falls einem hier wirklich der arithmetische Lehrstoff, den wir als „Nachlese“ (S. 187) zu dem des ersten Jahrgangs der Mittelstufe dachten, ausgehen sollte – all das wiederholen können, was man schon aus Anlaß der beiden ersten Operationsstufen und namentlich auf planimetrische und stereometrische Bedürfnisse hin gelegentlich mit Potenzen und Wurzeln zu tun gehabt hat. Aber zu Beginn der Oberstufe müßte man, schon um für die Logarithmenlehre ein sicheres Fundament zu schaffen, auch diese Wiederholungen noch einmal wiederholen. Und vollends bei feineren Erwägungen über das Erweitern des Potenzbegriffes bis hinein in die Lehre von den irrationalen Zahlen, die ja dem Wortlaut nach auch schon innerhalb der „Potenzen und Wurzeln“ behandelt werden müßten, werden die Unterrichtserfahrungen bald die Unmöglichkeit des durch diesen Lehrplan – wir wiederholen es: hoffentlich nur scheinbar – Verlangten erweisen.

Man hätte aber den notgedrungenen Fehler der – leider! – siebenklassigen österreichischen Realschule, der sich auch in diesem Vorwegnehmen eines Stückes „Potenz- und Wurzellehre“ verrät, überhaupt nicht in die achtklassigen Anstalten zu verpflanzen suchen sollen.

2) Hieher ein kleines Erlebnis: Ein von mir aufrichtig hochgeschätzter, nun längst verstorbener Kollege wunderte sich, warum es im Anfangsunterricht der Buchstabenrechnung (III. Klasse) bei ihm so viele, bei mir so wenige Nichtgenügend gab. Die ins Einzelne gehende Vergleichung, was er und was ich von den 13jährigen Knaben verlangte, ergab, daß er, obwohl unser Übungsbuch überall nur von $a^3 \cdot a^5$ u. dgl. handelte, sogleich mit a^m und a^n

er möglichst bald nach jenen numerischen Exponenten auch mit allgemeinen hat rechnen lassen, hiermit allein schon kleine Konzessionen an den Formalismus gemacht habe, von dem nachmals die herkömmliche Behandlung der Potenzen und Wurzeln (auch Logarithmen) so kuriose Mißgeburten gezeugt und mit Affenliebe gepflegt hat, wie es die Beispiele auf S. 35 zeigten.

Diesen Rück- und Vorblick aber jetzt nur, weil, gleichviel wie früh oder ob erst jetzt, zu Beginn der systematischen Potenz- und Wurzellehre, der „allgemeine Exponent“ n eingeführt wird, jedenfalls dieser anfänglich doch noch ein vergleichsweise sehr spezieller, nämlich ganzer positiver ist; denn dem Schüler ist, wie gesagt, bisher die Potenz a^2, a^3, a^n schlechterdings nur als ein Produkt gleicher Faktoren vorgeführt worden; und ebenso bedeutet $\sqrt[n]{a}$ nur die Aufgabe, a als das Produkt von n gleichen Faktoren darzustellen. Und da nun ebenso zum Begriff des „Faktors“ wie zu dem des „gleich“ mindestens ihrer zweie gehören, so scheint es, als könnten wir auch künftig mit einem $n = 1, 0, -1, -2 \ldots$, und vollends mit einem gebrochenen oder gar irrationalen n schlechterdings keinen Sinn verbinden. – Bekanntlich tun wir's aber dennoch so bald als möglich, und es entsteht somit die didaktische Frage, wie jene künftige „Erweiterung des Potenzbegriffes“ so eindrucksvoll als möglich zu gestalten sei. Diese didaktische Frage aber sieht sich durchaus angewiesen auf eine wissenschaftliche Vorfrage, auf die positive Rechtsfrage einer solchen „Erweiterung“ überhaupt. Dabei ist diese Frage wieder eine über das spezielle Gebiet der Potenzen und Wurzeln natürlich selbst weit hinausgehende, sie ist eine rein logische, und zwar eine der interessantesten aus dem ganzen dornigen Gebiete der logischen Theorie wissenschaftlicher Begriffsbildung (im Gegensatze zum bloßen formellen Definieren gegebener Begriffe[1]).

---

rechnen ließ. Als ich glaubte, darin den Grund des Nichtverstehens seiner Schüler gefunden zu haben, sagte er: „Aber das versteht sich doch ganz von selbst, warum soll man immer nur mit Ziffernexponenten, nicht gleich von Anfang mit Buchstabenexponenten rechnen?“

1) In meiner Logik habe ich die Lehre vom Definieren gegebener Begriffe in die Elementarlehre (§§ 29–34), die Lehre von der systematischen Begriffsbildung in die Methodenlehre (§ 94) verwiesen. Einige Nutzanwendungen dieser in der Logik selbst noch immer im Fluß stehenden Theorien der Begriffe auf die schon in den Elementarunterricht der Mathematik hineinragenden Fragen werden im III. Teil (S. 477 ff.) nochmals berührt werden.

Da nun offenbar der Unterricht alles Unreife und Unklare (auch die beliebten modernen Wendungen von den „willkürlichen Definitionen“, der „Bequemlichkeit des Denkens“ u. dgl. m.), streng zu meiden hat, so sei hier für das sehr spezielle Gebiet der Potenz- und Wurzellehre am Anfang der Oberstufe ein Lehrgang vorgeschlagen, der zwar dem Schüler diese begrifflichen Schwierigkeiten keineswegs mehr verhehlt, sie aber auch nicht durch Phrasen zu beheben sucht, die, weil eben schon in sich unwahr, auch dem logisch unverdorbenen Schüler nie wirklich glaubhaft zu machen sind. Wollte man ihm nämlich z. B. vorreden, es sei eben nur „am bequemsten“, so und so zu definieren, so würde den Lehrer nichts vor der naseweisen Gegenfrage schützen, warum man es gerade an diesem Punkt der Mathematik so „bequem“ haben wollte, wo diese doch sonst vor den größten Unbequemlichkeiten nicht zurückscheut. Oder war auch nur das Berechnen von π seitens des ARCHIMEDES oder später auf 35 oder gar auf 700 Dezimalen „bequem“?

Eine solche Lehre von den Potenzen also, die weder der mathematisch-logischen Wissenschaft noch einer gesunden Didaktik etwas vergibt, würde sich etwa so gliedern:

I. Indem man das a^n als verallgemeinernden Ausdruck des bisherigen a^2, a^3, auch a^{10}, $10^{(10^{10})}$ u. dgl. m. einführt, macht man ausdrücklich darauf aufmerksam, daß alles bisher Gelernte und in den nächsten Stunden noch zu Erlernende einstweilen nur unter der einschränkenden Bedingung $n = 2, 3 \ldots$, also ausschließlich positiver, ganzer n gelte, daß man aber die Befreiung von einer solchen Einschränkung sobald als möglich, das heißt, die volle, natürliche „Weite des Potenzbegriffes“, durch neue, „erweiternde Definitionen“ gewinnen werde.

Schon unter dieser vorläufigen Einschränkung, vor der Erweiterung, wollen vor allem die fünf Potenzsätze:

$$\text{I. } a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \text{II. } a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$\text{III. } a^m \cdot b^m = (ab)^m \qquad \text{IV. } a^m : b^m = (a:b)^m$$

$$\text{V. } (a^m)^n = a^{mn}$$

gut geübt sein, schon weil sie die Grundlage auch des späteren Wurzel- und Logarithmenrechnens sind. Doch ist es weder nötig, für die Gleichheit der Basen in I. und II. und für die Gleichheit der Exponenten in III. und IV. erst noch eine umständliche Terminologie memorieren zu lassen, noch sollte der Formalismus diese Potenz- und die analogen

Wurzelsätze zum Tummelplatz für nichtssagende Rechenbeispiele mit ineinander geschachtelten Operationen machen. Es ist ja freilich wahr, daß, solange der Schüler mit einem einigermaßen komplizierten Ausdruck, der etwa nach dem Schema $(m+n)^a$ gebaut ist, ebenso verfahren zu dürfen glaubt wie mit einem nach a^{m+n}, eben jene Grundregeln noch nicht fest genug sitzen; aber sie setzen sich doch auch nicht in gewünschter Weise fest durch die Häufung von Schwierigkeiten, sondern weit schneller und fester durch das klare Herausarbeiten der höchst einfachen Grundgedanken sowohl in den anfänglichen „Regeln" wie in den jeweiligen „Anwendungen". Z. B.

$$\text{zu I.}\quad \underbrace{a\cdot a\ldots a}_{m\,\text{mal}}\cdot\underbrace{a\cdot a\ldots a}_{n\,\text{mal}} = \underbrace{a\cdot a\ldots a\cdot a\cdot a\ldots a}_{(m+n)\,\text{mal als Faktor}}$$

$$\text{zu III.}\quad \underbrace{a\cdot a\ldots a}_{m\,\text{mal}}\cdot\underbrace{b\cdot b\ldots b}_{m\,\text{mal}} = \underbrace{ab\cdot ab\ldots ab}_{m\,\text{mal als Faktor}}.$$

Es sei sogleich hier bemerkt, daß sich ähnlich durchsichtig auch alle Beweise für die Wurzelsätze darlegen lassen. Dabei ist's aber dort auch nicht etwa getan mit einer bloßen Berufung darauf, daß das Radizieren die inverse Operation zum Potenzieren sei. Sondern so wie schon das Subtrahieren neben seiner Bedeutung als inverse Operation zum Addieren auch selbständige Bedeutung, eben die des „Wegnehmens" hat, sollte dem Schüler ein Satz wie $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ sich auch wie eine fast unmittelbar einzusehende Wahrheit darstellen. Der leitende Gedanke hierbei ist der, daß ich z. B. eine Zerfällung in Zwölftel sozusagen auf einen Schlag oder aber so vornehmen kann, daß ich zuerst in Viertel und diese dann wieder in ihre Drittel zerfälle (welches Leitgedankens wir uns unten, S. 232, auch zur Deutung der gebrochenen Exponenten bedienen). — Was für eine formelle Ausgestaltung Lehrer und Lehrbuch solchen Gedanken in mündlichem und schriftlichem Ausdruck geben wollen, ist ganz sekundär gegenüber der Forderung, daß der Schüler nicht etwa solche Formen und Formeln mündlich und schriftlich scheinbar tadellos wiederzugeben wisse und doch vielleicht nicht einmal das Bedürfnis nach einem solchen Zurückgehen auf den Leitgedanken des jeweiligen Rechengesetzes fühlt.

Gelegenheit zu einem Beispiel, wie neben dem direkten Erfassen solcher Beziehungen innerhalb der inversen Operationen auch ihr Zurückführen auf die entsprechenden Gesetze der direkten Operationen, also hier des Potenzierens, zu seinem Recht kommt, wird die Übersetzung des ersten Potenzsatzes $g^\alpha \cdot g^\beta = g^{\alpha+\beta}$ in die Sprache der Logarithmen, $\log(a\cdot b) = \log a + \log b$, geben (S. 238, 239).

II. Und nun die versprochene „Erweiterung des Potenzbegriffes" (aus der sich die entsprechenden Erweiterungen des

Wurzelbegriffes ohne weiteres ergeben). Vor allem verhehle der Lehrer weder sich noch dem Schüler das Befremdliche einer solchen Erweiterung. Denn wenn der Potenzexponent bisher schlechterdings nicht mehr und nicht weniger bedeutet hatte als eine Anzahl gleicher Faktoren – wie sollte er dann künftig etwas anderes bedeuten können? Wäre in a^n ein negatives oder gebrochenes n ein Widerspruch, wie sollte der durch eine „bloße Definition“ künftig aus der Welt zu schaffen sein? Berufen wir uns darauf, daß ja jede Definition im Grunde „willkürlich“ sei, so läßt sich vielleicht ein Teil der Schüler durch die Berufung auf Definitionsfreiheit imponieren (zumal wenn solche Phrasen ein Jahr vor dem systematischen Logikunterricht zum besten gegeben werden oder vor Mittelschülern, die auch in künftigen Jahren keinen Logikunterricht zu erwarten haben, also wohl auch bisher nicht eben an hohe logische Ansprüche ihres eigenen Denkens gewöhnt worden waren). Diejenigen Schüler dagegen, die sich wenigstens aus der bisherigen nüchternen Mathematik einigermaßen strenge Denkgewohnheiten angeeignet haben, werden sich durch ein noch so gelehrt tuendes Gerede von Willkür, Bequemlichkeit u. dgl. nicht belehrt, sondern nur verwirrt fühlen; und mit vollem Recht wendet sich daher auch der praktische, besonnene Reidt gegen jeden Schein von Willkür. Ja er geht, wie noch zu zeigen sein wird, um eine Nuance zu weit, indem er schließlich „findet, daß man *notwendig* $a^1 = a$, $a^0 = \frac{a}{a} = 1$, $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$ setzen *muß*“. Die Stelle mag hier im Wortlaute folgen, da sie vielleicht dazu beiträgt, die Parteien der Nominalisten und Realisten wieder einmal wenigstens auf diesem sehr eng begrenzten Felde zu einem Versuch gegenseitiger Verständigung und Vordringen zu dem allein logisch berechtigten Konzeptualismus, d. h. zur Achtung vor dem Begriff als solchem, einzuladen. Reidt (1906, S. 137) sagt:

„Die erste größere Schwierigkeit entsteht bei den Potenzen mit Null, Eins und relativen Zahlen. Man darf auch hier sich nicht mit dem Notbehelf begnügen, daß man sagt, die Symbole a^0, a^1, a^{-b} hätten „eigentlich“ keinen Sinn; um jedoch dieselben gebrauchen zu können, definiere man $a^0 = 1$ usw. Denn der denkende Schüler wird fragen, ob diese Definition auf Willkür beruhe, ob man also auch ebensogut hätte anders festsetzen können, und wenn nicht, wodurch man genötigt sei, dies in der angegebenen Weise zu tun. Auch wird der bloße Zweckmäßigkeitsgrund, daß man jene Symbole, obgleich sie eigentlich keinen Sinn hätten, doch gebrauchen könne, manchem bedenklich erscheinen, der vielmehr folgern dürfte, wenn sie keinen Sinn haben, so darf man sie auch unter keinen Umständen gebrauchen. Wir empfehlen deshalb hier ein ganz entsprechendes Verfahren wie in dem analogen Falle bei der Multiplikation mit negativen Zahlen: Die Ausdrücke a^0, a^{-b} haben nur so lange keinen Sinn, als man die Definition der Potenz als eines Produktes gleicher Faktoren aufrechterhält, sie bekommen einen solchen, sobald man diese Definition naturgemäß erweitert. Das Potenzieren, wie es bis dahin geübt worden, kann aufgefaßt werden als die Lösung der Aufgabe, aus einer Grundzahl a eine Reihe anderer Zahlen zu bilden, so daß jede folgende a mal so groß ist als die vorhergehende, und aus dieser Reihe ein durch seine Stellenzahl, den Exponenten, bestimmtes Glied anzugeben. Man kann nun auch in dieser Reihe das Anfangsglied verschieben, so daß dasselbe nicht den absoluten Anfang derselben bildet, sondern auch vorausgehende Zahlen hat. (Man vgl. auch hier wieder die analoge Einführung des Begriffs der negativen Zahl.) Man kann also die obige Reihe auch nach rückwärts fortsetzen, dementsprechend den Begriff der Potenz erweitern und findet, daß man notwendig $a^1 = a$, $a^0 = \frac{a}{a} = 1$, $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$ setzen muß."

Letzteres „notwendig-muß" geht, wie gesagt, um eine logische Nuance zu weit; denn wahr ist es ja doch, daß es ein allgemeines „Prinzip der Definitionsfreiheit" – nur eben nicht in jedem beliebigen, sondern in einem von der Logik der Begriffsbildung scharf zu umgrenzenden Sinn – wirklich gibt, und daß, wenn man sich speziell von der einen Definition „Produkt gleicher Faktoren" erst hat frei machen müssen, man mindestens ebenso frei sein muß beim Schaffen der neuen Definition. Wie nun jedermann weiß, daß wahre Freiheit etwas ganz anderes ist als rohe Willkür, kommt auch hier alles darauf an, dem Gebrauch der Freiheit die richtigen Motive zu geben. Welches sind also die Motive, die in der Entwicklung der mathematischen Wissenschaft zuerst zum Einführen gebrochener und negativer Exponenten hindrängten und schließlich den Exponenten zu einem stetig variabeln machten? Die Allerneuesten antworten mit „Ökonomie des Denkens", die der nächstvorangegangenen Generation mit „Permanenz der formalen Gesetze". Die parteilose Antwort aber gibt uns hier wie sonst einzig die Geschichte der Mathematik. Da aus dieser dem Schüler aber vorerst selbst wieder kaum die markantesten Punkte der Entwicklung bekannt sind (– so wird von dem $a^{3/2}$ in Keplers III. Gesetz erst im nächsten Jahrgang gesprochen), so wird man füglich diejenige

Art der Begründung wählen, die mit dem mindesten Schein von Willkür das Wesentliche von jener künftigen Verallgemeinerung des Exponenten n zu einer stetig Veränderlichen (zuerst zur reellen, dann vielleicht günstigenfalls auch noch zur komplexen, z. B. in EULERS $e^{\pi i}$) nahebringt. Diese Forderung wäre wohl weitaus am anschaulichsten und überzeugendsten selbst wieder durch graphische Darstellung zu erfüllen (wie bald näher angedeutet und S. 247ff. ausgeführt werden soll). Wollen wir aber uns vorerst noch mit einer rein arithmetischen Begründung behelfen (wie man ja auch in der strengsten Mathematik das vorzeitige Hereinziehen geometrischer Anschauungen in Prinzipienfragen, wie die der stetigen Zahlenlinie, vermeidet, vgl. DEDEKINDS Forderung, S. 257), so läßt sich der oben von REIDT empfohlene Grundgedanke[1]) dem Schüler ebenfalls durch folgende äußere Darstellungsform auch schon sozusagen arithmetisch-anschaulich vor Augen rücken:

Wir schreiben einfach folgende zwei (drei) Reihen untereinander

$$\ldots a^4:a=a^3,\quad a^3:a=a^2,\quad a^2:a=a,\quad a:a=1,\quad 1:a=\frac{1}{a},\quad \frac{1}{a}:a=\frac{1}{a^2}\ldots$$

$$\begin{array}{cc|cccc}
a^4:a=a^{4-1}, & a^3:a=a^{3-1} & a^2:a=a^{2-1}, & a^1:a=a^{1-1}, & a^0:a=a^{0-1}, & a^{-1}:a=a^{-2}\ldots \\
=a^3, & =a^2, & =a^1, & =a^0, & =a^{-1}, & =a^{-2}\ldots
\end{array}$$

Die ganze erste Zeile ist völlig einwandfrei, auch wenn man nicht an künftige „Erweiterungen" der positiven (eigentlich „absoluten") Exponenten $n \geqq 2$ auf $n = 1, 0, -1, -2\ldots$ denkt; denn dividieren darf man $a:a$, ebensogut $1:a$ usf., ohne die sich ergebenden Quotienten $1, \frac{1}{a}$ usf. in Potenzform ausdrücken zu müssen. Dagegen deutet der Strich hinter dem $a^{3-1} (= a^2)$ in der zweiten (und dritten) Zeile an, daß bis hieher, aber auch nur bis zu diesem Exponenten 2, die Definition aus den „gleichen Faktoren" unbedenklich war; der kritische Punkt ist das a^{2-1}. Aber schon wird ersichtlich, daß wir in der ersten Zeile links vom Strich z. B. von a^4 zu a^3 einerseits mittels Dividieren durch a, andererseits durch Subtrahieren einer 1 im Exponenten gelangen können. Jenem Dividieren durch a in der ersten Zeile stellt sich ein Hindernis auch nicht in den Weg, wenn wir es an dem a^2 der dritten Zeile vornehmen, und es gibt $a^2 : a = a$. Dagegen ist der Augenblick einer bewußten Begriffserweiterung, eines sich Freimachens von der Definition aus „gleichen Faktoren" gekommen, wenn wir uns auch nur auf die Subtraktion im Exponenten $2 - 1$ einlassen und so zum a^{2-1} der

1) Ähnlich in EULERS Algebra (Reclam S. 71).

zweiten oder zum a^1 der dritten Zeile gelangen. Nachmals aber zeigt dann die Regelmäßigkeit der Reihe von Exponenten in der dritten Zeile, daß die so und nur so, gemäß der ersten Zeile, verwendeten Exponenten 1, 0, — 1, — 2 usw. die natürlichste Fortsetzung der unverfänglichen Exponenten 4, 3, 2 seien; und darum sind das die natürlichsten (wenn auch freilich nicht die einzigen formal logisch möglichen) Definitionen der neu eingeführten Begriffe.

Mag dieses halb induktorische Vorgehen von derjenigen Schule, die in der „Permanenz der formalen Gesetze" ein Letztes sieht, als wissenschaftlich inkorrekt, weil zum mindesten entbehrlich, abgelehnt werden, so hat es pädagogisch doch das für sich, daß der Schüler auf jene neuen Definitionen hingeführt wurde. Nachmals muß dann freilich noch gezeigt werden, daß auch abgesehen von jenem schrittweisen Einführen die eingeführte Definition $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ ausreichend (auch notwendig?) ist, um die Gültigkeit der Potenzgesetze I bis V unabhängig vom Vorzeichen des Exponenten zu sichern; was z. B. in HEIS Aufgabensammlung kurz und bündig durch folgende Fragen und Antworten geleistet wird:

„§ 39, 1. Gelten die für ganze Exponenten aufgestellten fünf Sätze §§ 34—38 auch für den Exponenten 0 und für negative Exponenten, und warum?

Anleitung: 1. $a^n \cdot a^0 = a^{n+0}$. Beweis: $a^n \cdot a^0 = a^n \cdot 1 = a^n$; $a^{n+0} = a^n$, mithin $a^n \cdot a^0 = a^{n+0}$;

ebenso 2. $a^n : a^0 = a^{n-0}$.

3. $a^0 \cdot b^0 = (ab)^0$. Beweis: $a^0 \cdot b^0 = 1 \cdot 1 = 1$; $(ab)^0 = 1$, mithin $a^0 \cdot b^0 = (ab)^0$;

ebenso ist 4. $a^0 : b^0 = (a:b)^0$" usw.

Immerhin dürfte auch nach dieser formal-logisch tadellosen Erfüllung mathematischer Strenge für die Forderung nicht nur strenger, sondern natürlicher Begriffsbildung noch immer etwas zu wünschen übrigbleiben — was sich dann fassen läßt in die Frage: Warum muß denn nun überhaupt „erweitert" werden? Soll auch nur diese Frage in sich berechtigt sein, so muß füglich das, was durch die „Erweiterung" beseitigt werden soll — und das war eben nichts anderes als das bisherige Definieren der Potenzen überhaupt gerade nur durch das „Produkt gleicher Faktoren" — irgendwie „zu eng" gewesen sein. Es mußte der Begriff gleicher Faktoren selber ein verhältnismäßig immer noch unwesentliches Merkmal des schließlich festzuhaltenden Begriffes von Potenzen herausgegriffen haben, so daß wir es nachmals wirklich zweckmäßig (nicht nur „aus Bequemlichkeit") abstreifen, um jenen endgültigen Begriff der Potenzen in seiner Reinheit und Unmittelbarkeit festhalten zu können. Was aber mag denn dieser gereinigte Begriff selber sein? Und darauf gibt erst seine Fassung unter dem Gesichtspunkte des *Funktionsbegriffes*[1]) die natürlichste Antwort (sie dürfte für den Schüler der Oberstufe auch keineswegs mehr zu hoch sein); nämlich so:

Schon als wir zum erstenmal darauf aufmerksam machten, daß z. B. der Preis eines Diamanten „mit dem Quadrat des Gewichtes wächst", und als wir vorläufig die Kurve mit dem Finger in die Luft zeichneten (S. 23), statt der für das einfach proportionale Wachsen des Preises mit der Menge geltenden Geraden / : dachten wir da eigentlich so sehr an ein „*Multiplizieren* mit sich selbst" und nicht vielmehr an eine sozusagen selbständige, originelle *Art des Wachsens*? Gesetzt, es würde uns also umgekehrt sogleich die sauber gezeichnete Kurve für $y = x^2$ von S. 315 vor Augen gestellt (die wir nachmals als eine Parabel 2. Grades mit vertikal aufwärts gerichteter Achse agnoszieren) – könnten wir nicht, ohne überhaupt etwas von *gleichen* (diesmal *zwei* gleichen) *Faktoren* zu wissen und daran zu denken, gerade *dieses* Wachstum als eines „nach der 2. Potenz" für die Vorstellung und Benennung festhalten? Wobei wir hier durch die Bezeichnung „2. Potenz" *nur* einen bestimmten Gegensatz hervorkehren gegen jenes minder energische Wachsen bei der einfachen Proportionalität. Durch *solche* Auffassung sind wir also den Gedanken an ein Hervorgehen aus gleichen Faktoren, wenigstens nachmals, losgeworden. Und der *neue* Gedanke nun verträgt es, von der zweiten über die erste (nicht ohne Anstoß auch über die 0.) Potenz „erweitert" zu werden hinein in die – 1., – 2. Potenz. Das überzeugende Bild hievon gibt – wenn wir auch die sogleich zu besprechenden gebrochenen Exponenten mit hineinnehmen – eine Zusammenstellung von Kurven wie die Fig. 90. Nur macht hier die *Mehrheit* der erforderlichen Kurven früher oder später wieder darauf aufmerksam, daß auch sie nur ein unvollkommener Behelf sind: Was wir als „*veränderlich*" verfolgen wollten, war ja

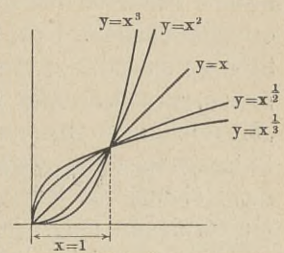


Fig. 90.

1) Vgl. hierzu die erkenntnistheoretische Bemerkung S. 280, Anm. (auch S. 447) in Sachen der Sinuskurven, die wir auch nicht *nur* „willkürlich definieren".

diesmal der Potenzexponent $n = 3, 2, 1, 0, -1, -2$; und es wird also erst bei der Exponentialkurve der Faden dieser Betrachtung wieder aufzunehmen und weiterzuspinnen sein (S. 247). – Kehren wir also einstweilen wieder zur rein arithmetischen Betrachtung zurück.

Ebensowenig willkürlich wie die Einführung negativer wird dem Schüler die Einführung gebrochener Exponenten bei einem ähnlichen Untereinanderstellen zweier Reihen erscheinen, die wir so wählen, daß unmittelbar angeknüpft wird an den Gedanken, der zum ersten Einführen gebrochener Zahlen selbst hindrängte.

Es war der, daß sich dieselbe Größe bald als Einheit, bald als Zwölfheit (z. B. der Zoll als ein zwölftel Fuß) hat auffassen lassen. Setzen wir also z. B. $a^3 = A$, wonach

$$A^2 = a^6, \qquad A^3 = a^9, \qquad A^4 = a^{12}, \ldots$$

so wird einerseits

$$A = a^{\frac{6}{2}}, \qquad = a^{\frac{9}{3}}, \qquad = a^{\frac{12}{4}}, \ldots$$

andererseits

$$A = \sqrt[2]{a^6}, \qquad = \sqrt[3]{a^9}, \qquad = \sqrt[4]{a^{12}} \ldots .$$

Besteht nun hier eine solche Zuordnung der vorerst nur der Form nach gebrochenen Exponenten zu den Wurzeln, wobei nach Ausführung der Divisionen das Gebiet der ganzzahligen Exponenten noch nicht überschritten ist, so empfiehlt sich durch diese Zuordnung augenfällig gerade wieder die Definition $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ auch allgemein als die natürlichste. Wieder folgt nun der Beweis für die Erhaltung der fünf Potenzgesetze usw., wenn wir jene Definition wählen. –

Zum weiteren abschließenden Beweis, daß wir gerade diese und nur diese Definitionen haben wählen „müssen“, würde freilich noch ein Gegenbeweis gehören, daß bei jeder anderen Wahl jene Rechenregeln nicht erhalten bleiben. Doch pflegt man selten in den Ansprüchen an logische Strenge soweit zu gehen. Will man aber umgekehrt sogar noch weiter gehen, so würde man ohne weiteres zeigen können, daß ein wirkliches „Müssen“ auch hier nie zu erreichen ist; denn auch jene speziellen Potenzgesetze, ja sogar die allgemeinsten formalen Gesetze „müssen“ nicht einmal um jeden Preis „erhalten“ bleiben (z. B. das Rechnen mit Quaternionen opfert ja von diesen formalen Gesetzen das kommutative und begnügt sich mit dem distributiven und assoziativen.[1]) Hoffentlich spürt aber sogar der zu weitgehender Strenge an- und aufgelegte Lehrer, daß derlei Eröffnungen bei Sechzehnjährigen füglich Kaviar fürs Volk wären.

1) Vgl. z. B. STOLZ, Größen und Zahlen (Teubner 1891, 30 Seiten); S. 28.

Dagegen dürfte, wie gesagt, noch weit überzeugender als selbst die pädagogisch vorsichtigst vorbereitete „reine", d. h. arithmetische Behandlung der „Erweiterungen", die ja auch bei den rationalen Bruchexponenten nicht haltmachen können (schon wegen der bald folgenden Logarithmenlehre), die *funktionale* Auffassung und für diese wieder die *graphische* Darstellung der Potenz- und Exponentialfunktionen sein. Denn erst hier drängt den Schüler die Erinnerung, daß und warum wir uns ja schon beim ersten Einführen des Negativen zu Beginn der „Buchstabenrechnung" nicht mit der im Nullpunkte abbrechenden Reihe der *positiven* Zahlen, ebenso daß und warum wir uns nicht mit der Punktreihe für die *ganzen* Zahlen zufrieden gegeben hatten, sondern durch die Punkte für die negativen und für die gebrochenen Zahlen zu einer beiderseits unbegrenzten, immer *feiner punktierten Zahlenlinie* vorgedrungen waren, wirklich zur Frage nach der Deutung einer solchen negativen und positiven Bruchpunktreihe, ja eines *Kontinuums* der Potenzexponenten. Indem wir aber solche *graphische* Darstellungen schon für die Potenz- und Wurzellehre hiermit nochmals empfehlen, mahnen wir doch zu einem Maßhalten in doppelter Hinsicht.

Erstens: Gewiß soll der Schüler auch die Potenzfunktionen nun schon allgemeiner unter dem *funktionalen* Gesichtspunkte betrachten lernen, nachdem wir ihn speziell für die zweite und dritte, und erst hierdurch angeregt auch für die erste Potenz das Wachsen von Flächen und Räumen schon seit langem (vgl. S. 25, S. 147) funktional aufzufassen angeleitet hatten. Auch mit dem Darstellen durch Kurven haben wir damals durch unsere improvisierten Zeichnungen schon angeklopft (S. 23). Aber erst jetzt halten wir jene mit dem Finger in die Luft gezeichnete Kurve an der Tafel fest, indem wir an der *Zahlenlinie* die Werte 1, 2, 3, 4 und in der dazu normalen Richtung aufwärts die Werte 1, 4, 9, 16 auftragen (dann ähnlich wie für a^2 allenfalls noch a^3, $\sqrt{a}$). Noch *nichts* aber hier von *Koordinatensystemen* (es wäre denn der Goniometrie zuliebe, S. 289), noch *nichts* vom *allgemeinen Funktionsbegriff* – all das sparen wir uns für den Beginn des nächsten (VII.) Jhgs. auf; denn erst dort gedenken wir ja den Funktions*begriff* in demjenigen Maße von *Allgemeinheit* herauszuarbeiten, das für den Mittelschüler Bedürfnis und überhaupt noch verständlich ist (vgl. S. 311 ff.).

Zweitens aber empfehlen wir, auch mit den einstweilen noch auf das Potenzieren und Radizieren sich beschränkenden graphischen Darstellungen sich lieber einige Wochen zu gedulden, bis auch das Logarithmieren ein klar bewußtes Unterscheiden von Potenz- und Exponentialfunktion zum Bedürfnis macht; und in diesem Zusammenhange wird dann auch die Benutzung der Logarithmenkurven (und wieder etwas später, vgl. S. 246, auch die Exponentialkurve) nicht mehr als bloße Draufgabe zum bisher gebräuchlichen Lehrstoff, sondern als eine gar nicht zu entbehrende Erleichterung für Schüler und Lehrer empfunden werden. — Schon aus diesem Grunde lassen wir diesen wenigen Bemerkungen zur Didaktik der Potenzlehre sogleich die Didaktik der Logarithmenlehre folgen, wiewohl im Unterrichte selbst unmittelbar an die Potenzen und Wurzeln wenigstens die Anfänge einiger weittragender Kapitel, namentlich die irrationalen und imaginären Zahlen, sowie ein Teil der nicht mehr bloß linearen Gleichungen (mittelst deren wieder die Potenz- und Wurzelsätze wirksamer als durch bloßes Transformieren, vgl. S. 180, eingeübt werden) sich anschließen werden.

§ 24. Die Logarithmen.

Elementar arithmetisch gibt es nur einen Zugang zum Begriff des Logarithmus: die Definition ${}^{b}\log c = a$ als der zweiten inversen Operation zu[1]) $b^a = c$, zusammen mit der Einsicht, daß und warum (Nichtvertauschbarkeit von Basis und Exponent) diese wesensverschieden ist von der bisher allein beachteten ersten inversen Operation $\sqrt[a]{c} = b$; z. B.

$$10^2,\ 2^{10};\ \sqrt[2]{100} = 10,\ {}^{2}\log\ 1024 = 10.$$

Da sich aber der didaktische Weg in der Regel nicht mit dem wissenschaftlichen deckt, sondern erst später in ihn einmündet, so wird man auch hier sich fragen dürfen, welcher Zugang in das dem Schüler aus mehreren Gründen fremdartige Gebiet des Logarithmenrechnens am schnellsten und für ihn einladendsten einführt. Wir kommen auf andere mögliche Wege weiter unten (S. 241 ff., zusammen mit den historischen Bemerkungen über

1) Wir schreiben nicht a^b, sondern b^a, damit der Schüler bei b sogleich an Basis denkt — als den einzigen Terminus, der der Sprache der Potenzierung und Logarithmierung gemeinsam ist.

Die Schreibung ${}^{b}\log c$ weist eine willkommene äußere Ähnlichkeit zu $\sqrt[a]{c}$ (Abkürzung für ${}^{a}\mathrm{rad}\, c$) auf; auch droht nicht wie bei $\log^b c$ (so schreiben Weber-Wellstein) der Druckfehler $\log c^b$.

Logarithmen) zurück und suchen einen auf den ersten Blick wahrscheinlich sehr radikal scheinenden Vorschlag, nämlich ohne jede weitere Vorbereitung den Schüler sogleich mit den Tafeln[1]) einigermaßen bekannt zu machen, wenigstens als möglich zu erweisen durch die folgende Lehrprobe:

L: Wozu mögen wohl die Sammlungen von lauter Zahlen, kurz genannt „Tafeln", dienen, die Sie heute zum erstenmal in der Hand haben? [Daß die „Tafeln der natürlichen goniometrischen Funktionen" gemäß unserem Vorschlag (S. 273) schon ein paar Wochen früher erklärt wurden, tut hier nichts zur Sache.] Den „Tafeleingang" bilden die natürlichen Zahlen („Numeri") von 1 bis 1000; neben ihm stehen rechts die „Logarithmen". Vielleicht finden Sie unter ihnen solche, die Ihnen den Zusammenhang mit den Numeri verraten.

S_1: Neben 10 steht 1, neben 100 steht 2, also $10^1 = 10$, $10^2 = 100$.

L: Gut. Stimmt dazu, was neben 1 steht?

S_2: Ja; $10^0 = 1$. –

L: Was würde dann das neben 2 stehende 0,30103 heißen?

S_3: $10^{0,30103} = 2$. –

L: Können Sie diese Vermutung bestätigen?

S_4: Es müßte $10^{0,30103} = \sqrt[100000]{10^{30103}} = \left(\sqrt[100000]{10}\right)^{30103}$ sein – aber so wäre diese Probe allzu langwierig.

L: Freilich. Aber annähernd?

S_5: $10^{0,3} \doteq 10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10} \doteq \sqrt[3]{8} = 2$.

L: Gut; und stimmt die Abweichung von diesen Annäherungen wenigstens der Richtung nach mit dem Erwarteten?

S_6: Ja. Da $10^{0,301} < 10^{0,33} < \sqrt[3]{10} = 2,1544$, so kann immerhin $10^{0,301} = 2$ sein.

L: Nehmen wir also vorläufig an, bei 2 stimme Ihre Vermutung. Eine andere Art, Ihre Vermutung zu bestätigen, wird sich ergeben, wenn Sie den log 20 aufsuchen.

S_7: Hier steht log 20 = 1,30103. – Nach unserer Vermutung müßte also $10^{1,30103} = 20$ sein. Dies stimmt auch, wenn $10^{0,30103} = 2$; denn weil $10^1 = 10$, so folgt $2 \times 10 = 10^{0,30103} \times 10^1 = 10^{0,30103+1} = 10^{1,30103}$.

---

1) Daß wir hiermit nicht die von KLEIN (vgl. oben S. 41) an dem norwegischen Vorgehen getadelte Beschränkung auf eine bloß mechanische Benutzung der Tafeln empfehlen, wird aus der Art des wissenschaftlichen Weiterbauens auf der ersten pädagogischen Grundlage hervorgehen.

Auf die Definition $lz = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi}$, von der KLEIN (in der während des Druckes erschienenen Autographie „Elementarmathematik" usw. [vgl. oben S. 6, 7, Anm.]) auszugehen empfiehlt, kommen wir in § 45, S. 420 zurück.

L: Schön; und es geht Ihnen vielleicht schon ein Licht auf, daß man Logarithmen nur zu addieren braucht, wenn man die Zahlen multiplizieren will. Prüfen Sie diesen Gedanken an dem log 6.

S_8: Es müßte sein $\log 6 = \log 2 + \log 3 = 0{,}30103 + 0{,}47712 = 0{,}77815$; das stimmt mit der Tafel.

L: Somit stünden wir schon vor dem ersten Logarithmensatz:

$$\log(a \times b) = \log a + \log b.$$

Und sollte es damit seine Richtigkeit haben, so werden Sie auch begreifen, wozu man „Logarithmentafeln“ berechnet hat, verkauft und was für einen Nutzen auch Sie von ihnen haben werden. Sie haben ja darüber wohl auch schon von Ihren älteren Kameraden gelegentlich was gehört?

S_9: Statt Zahlen zu multiplizieren braucht man nur ihre Logarithmen zu addieren, statt zu dividieren nur zu subtrahieren, statt zu potenzieren ...

L: Schon gut! Eh' wir uns jetzt weiter aufs Probieren und Erraten verlegen, versuchen Sie die von uns bisher bemerkte Beziehung zwischen dem Logarithmus und dem Numerus in eine Definition des Begriffs „Logarithmus“ zu fassen.

S_{10}: Unter Logarithmus versteht man ...

L: Sie stocken, und das mit Recht. Denn man kann nicht ins Blaue hinein definieren, „was Logarithmus ist“, sondern muß vor der Definition erst das Definiendum selbst ergänzen; nämlich so: Unter dem Logarithmus einer Zahl n in bezug auf die Basis b versteht man...

S_{11}: den Exponenten, mit dem man die Basis b potenzieren muß, um den Numerus n zu erhalten. [Also $b^{{}^b\log n} = n$ eine identische Gleichung wie $(\sqrt[3]{a})^3 = a$ u. dgl.]

L: Gut! Für unsere Logarithmentafeln ist die Basis 10; und mit Zehner-Logarithmen werden wir auch in weitaus den meisten Fällen künftighin rechnen. – Üben wir aber Ihre Definition vorerst auch noch an der Basis 2 ein.

S_{12}: $2^1 = 2$, $2^2 = 4$; $2^3 = 8, 16, 32$ usw. $2^{10} = 1024$. Daher z. B. ${}^2\log 2 = 1$, ${}^2\log 4 = 2$, ${}^2\log 8 = 3$ ... ${}^2\log 1024 = 10$.

L: Gut! Jetzt ähnlich für die Basis 10 u. zw. zunächst so, daß wir ebenfalls nur ganzzahlige Exponenten ins Auge fassen.

S_{13}: $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$ ... Daher z. B. ${}^{10}\log 10 = 1$, ${}^{10}\log 100 = 2$, ${}^{10}\log 1000 = 3$ ...

L: Statt ${}^{10}\log 100$, ${}^{10}\log 1000$ schreiben wir abkürzend $\log 100, \log 1000$ (wie $\sqrt{a}$ statt $\sqrt[2]{a}$). – Und jetzt noch die nicht ganzzahligen Exponenten oder Logarithmen, auf die Sie früher richtig geraten haben:

S_{14}: $\log 2 = 0{,}30103$, $\log 3 = 0{,}47712$, $\log 6 = 0{,}77815$ usw.

Ehe man nun sich und den Schüler in alle die Fährlichkeiten stürzt, die aus den echt gebrochenen Numeris mit ihren negativen Logarithmen, den negativen Numeris ohne (eigentlich mit imaginären und komplexen) Logarithmen, u. dgl. m. erwachsen, falls man diese Dinge ohne ausreichende Vorbereitung zur Sprache bringt, bediene man sich doch wieder jedenfalls und so schnell als möglich der graphischen Darstellung (Fig. 91). Auch hiebei bedarf es keines vorzeitigen Redens über Koordinatensysteme u. dgl. (wann es für diese Zeit wird, vgl. S. 314 ff.). Sondern die „Zahlenlinie", von der ja bisher bei den verschie-

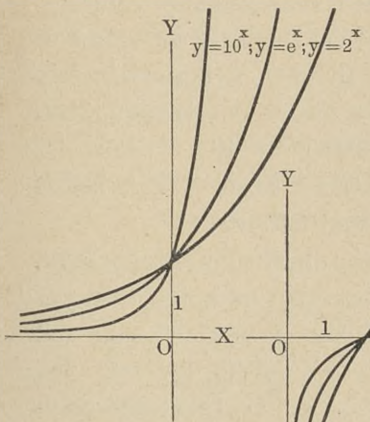


Fig. 92 (vgl. S. 247).

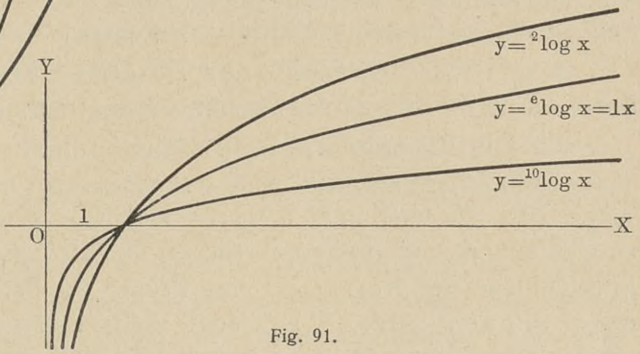


Fig. 91.

densten Gelegenheiten die Rede war, stellt auch diesmal die „Zahlen", *numeri* im speziellen Sinn der Logarithmenrechnung dar, und ohne das etwa schon im vorhinein zu begründen und gewissermaßen zu entschuldigen, trägt man frischweg auf dieser wagrechten Geraden bei 10 die Lotrechte 1, bei 100 (was freilich schon weit über die Schultafel hinausgehen wird und so an das sehr langsame Steigen der Logarithmenlinien in ihrem späteren Verlauf schon im voraus mahnt) die Lotrechte 2 auf. Da es indes mit dieser Zeichnung der Punkte der Zehner-Logarithmen nicht recht vorwärts will, so bringen wir in derselben Zeichnung sogleich auch die Punkte für die Zweier-Logarithmen von 2, 4, 8, 16, 32 ... an. Nun erst reden wir von ${}^{2}log\ 1 = 0$, ${}^{10}log\ 1 = 0$, so daß also in dem Punkte 1 der Zahlenlinie sich beide Linien schneiden und für das Intervall der echten Brüche unter die Zahlenlinie hinabtauchen (z. B. ${}^{2}log\ \frac{1}{2} = -1$, $10\ log\ \frac{1}{10} = -1$ usw.). Sodann etwa noch ${}^{10}log\ 2 = 0{,}30103$, ${}^{10}log\ 3 = 0{,}47712$ usw.

Mit dieser dringenden Empfehlung, alles Weitere und Nähere in Sachen der allgemeinen Definition der Logarithmen und der Reihen ihrer Spezialwerte immer mit Hinweisen auf die Tafel selbst und auf die graphische Darstellung zu begleiten, soll übrigens keineswegs gesagt sein, daß man sogleich nach jenen ersten wilden Versuchen, den Sinn und Zweck der Logarithmentafel zu erraten, nun vor aller eigentlich arithmetischen Theorie der Logarithmen etwa stundenlang sich mit jener Kurve beschäftigen solle. Sondern es versteht sich, daß überall mit diesen empirischen und anschaulichen Übungen sobald als möglich das Vertrautwerden mit der eingangs als „elementar arithmetischer Zugang zum Begriff des Logarithmus“ bezeichneten festen Definition Hand in Hand gehen wird; wobei dem Schüler aus den gelingenden wie den mißlingenden Übungen sobald als möglich folgende zwei Leitbegriffe in Fleisch und Blut übergehen müssen:

1. Was in der Sprache der Potenzen **Basis** heißt, heißt **Basis** auch in der Sprache der Logarithmen.

2. Der **Logarithmus** ist seiner Natur nach ein **Potenzexponent.** Jenes „sobald als möglich“ will also nicht mehr und nicht weniger sagen, als daß über dem theoretischen Begriff und den auf ihn zurückgehenden theoretischen Sätzen und Beweisen nie mehr das Anschauliche der Kurve und das Praktische der Tafel aus dem Auge verloren wird. — Da jeder Lehrer, den der bisher dargelegte Weg anspricht, ohne weiteres für das am zweckmäßigsten scheinende Ineinanderarbeiten von Theorie und Praxis seine eigenen Wege findet, so sei hier nur noch hervorgehoben, wie sich der Gedanke, daß jeder Logarithmensatz nur ein Potenzsatz in anderer Sprache sei, auch formell so darstellen läßt, daß der Schüler keinen Augenblick vor künstlichen Beweisen zu stehen glaubt, sondern nach einem Muster die übrigen Sätze und Beweise selber findet:

Um die vier Sätze für Produkt, Quotient, Potenz und Wurzel zu beweisen u. zw. für die allgemeine Grundzahl g (— der sonst für die Basis verwendete Buchstabe b ist hier schon vergeben) setzen wir ${}^{g}\log a = \alpha$, ${}^{g}\log b = \beta$, wo also laut Definition $g^{\alpha} = a$, $g^{\beta} = b$. — Sollen wir nun z. B. den an dem Beispiel $\log 6 = \log 2 + \log 3$ schon anfangs halb erratenen Satz für das Produkt $a \cdot b$ beweisen, so bilden wir uns $a \times b = g^{\alpha} \cdot g^{\beta} = g^{\alpha+\beta}$. Sogleich begrüßen wir dieses $+$ im Exponenten als den *nervus probandi* des vorhin nur erst vermuteten Lehrsatzes (I. Logarithmensatz, entsprechend dem I. Potenzsatz

S. 225). Es gilt also jetzt nur noch, auch formell diese Potenzbeziehung wieder zurückzuübersetzen in die Sprache der Logarithmen, nämlich

$$\alpha + \beta = {}^{y}\log(a \cdot b) = {}^{y}\log a + {}^{y}\log b.$$

Will der Lehrer sicher sein, daß an diesem Beweise weder der Gedankeninhalt noch die Darstellungsform dem Schüler irgendwie äußerlich geblieben sei, so muß dieser nun selber die Beweise auch für die drei anderen Gesetze zu gestalten wissen:

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b, \quad \log a^m = m \log a \quad \text{und} \quad \log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a.$$

Wegen des Überganges aus dem einen System in das andere ist auch für den Schüler noch nützlich die allgemeine Beziehung:

$${}^{x}\log y \cdot {}^{y}\log z = {}^{x}\log z,$$

[woraus speziell für $x = z$ sogleich folgt (also nicht, wie bei HEIS, als koordinierter Satz auszusprechen ist): ${}^{x}\log y \cdot {}^{y}\log x = 1$]. Auch ihr Beweis verläuft in ähnlicher Form wie die obigen, nämlich

$${}^{x}\log y = \eta, \; {}^{y}\log z = \zeta; \quad \text{somit} \quad x^{\eta} = y, \; y^{\zeta} = z;$$

womit als weiterer Weg vorgezeichnet ist $(x^{\eta})^{\zeta} = x^{\eta \cdot \zeta}$ (V. Pot. S.) usw.

Was nun das praktische Rechnen mit der Tafel betrifft, so sollen hier weiter keine Ratschläge gegeben werden, da sie sich ganz nach der Einrichtung der besonderen Tafeln richten. Insbesondere in der Streitfrage, ob fünf- oder vierstellige Tafeln (die sieben- und sechsstelligen sind ja aus der Schule allmählich verschwunden, wiewohl man in der astronomischen Wissenschaft soeben zu achtstelligen vorschreitet!), beschränken wir uns auf das Bekenntnis zu den vierstelligen, da die Gründe hierfür wiederholt[1]) überzeugend dargelegt worden sind. — Hier also wieder nur so viel, daß, wo Tafeln mit Proportionalteilen gebraucht

---

1) So z. B. von SCHÜLKE. — Als ich 1903 den Antrag auf Einführung der vierstelligen Tafeln stellte, wurde er offiziell abgelehnt. Soeben während der Korrektur dieser Bogen werden endlich vierstellige Tafeln für die österreichischen Realschulen durch den soeben herausgegebenen Lehrplan (Verordnungsblatt vom 15. April 1909, Wien) gestattet. Sie können also füglich auch für die Gymnasien und Realgymnasien nicht mehr verboten sein, wiewohl deren kurz vorher erschienener Lehrplan noch nichts hierüber sagt.

Die ersten für den österreichischen Schulgebrauch bearbeiteten vierstelligen Logarithmentafeln sind meines Wissens die von Prof. ARBES, Prag-Smichow (Wien, Tempsky-Freytag, 1905). Der Herausgeber gedenkt hier des „Entgegenkommens des k. k. Landesschulrates für Böhmen (in einem Erlaß von 1904)". — FELIX KLEIN spricht schon von dreistelligen Tafeln.

Mit der Logarithmenkurve wird sich wohl auch der logarithmische Rechenschieber in der Schule mehr und mehr einbürgern.

werden, man wieder nicht auf die graphische Darstellung verzichten wird, um aufs anschaulichste zu erläutern, warum solche Proportionalteile zulässig sind, bzw. inwieweit sie es nicht sind (nämlich: die Kurve ist für höhere Numeri eine schwach ansteigende fast Gerade, und es kommt daher auf $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ des wagrechten Fortschreitens ein Ansteigen um $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ des Unterschieds zwischen End- und Anfangswert; aber ganz gerade ist die Kurve doch nicht, und deshalb gilt diese Interpolation eben nur annähernd). Auch wird schon hier aufmerksam zu machen sein, daß ein solches Interpolieren keine Spezialität der Logarithmen ist, sondern *mutatis mutandis* bei jeder Funktion, für die Tafeln gerechnet sind, in Anwendung kommen kann. Natürlich brauchen auch diese Vorgriffe in den Gedanken- und Anschauungskreis, den so zu sagen offiziell erst die analytische Geometrie der geraden und krummen Linien erläutert, nicht in einem Anlauf und nicht mit schwerfälligen theoretischen Zurüstungen gegeben zu werden, sondern so, wie es der besondere Anlaß ungekünstelt gibt.

Die Übungen im Logarithmenrechnen selbst liefert je nach den mannigfaltigen vorgeschlagenen Lehrgängen entweder vorwiegend die Zinseszinsrechnung oder die Trigonometrie (so nach unserem Lehrgang, vgl. unten, S. 283ff.) oder sonst ein praktisches Kapitel. Nur für eines möchten wir keinem Lehrer freie Hand lassen, nämlich für die künstlichen Ungetüme von Beispielen, an denen es auch im vortrefflichen Heis nicht fehlt; so z. B. gleich an der Spitze des § 59a. „Berechnung gegebener Zahlenausdrücke mit Hilfe der Logarithmen“ das Beispiel 1:

$$\frac{49876 \times 0{,}037542 \times 68{,}7075}{7{,}81649 \times 578{,}93 \times 28{,}4299}. \quad \text{Aufl.: } 1.$$

Einen schönen, aber auch erst für den einigermaßen geübten Schüler lehrreichen Abschluß werden sodann einige Mitteilungen aus der Geschichte des Logarithmenrechnens[1]) bilden können. Als ein Beispiel und zugleich als tatsächliche Berichtigung einer vielverbreiteten Ungenauigkeit sei hieraus nur folgendes erwähnt: Bekanntlich wird den Schülern immer mitgeteilt, es gebe außer den Briggsschen Zehner-Logarithmen noch die Neperschen „natürlichen“ Logarithmen für die Basis $e = 2{,}718281828459\,.\,.$

1) Ausführliche und auch für den Unterricht vielfach anregende Darstellungen geben Weber-Wellstein I. S. 115–132. – Simon (1906), S. 66ff. – Klein, Elementarmathematik I (1908, S. 324–343).

Was aber an jenen Logarithmen oder dieser Basis besonders „natürlich" sei, pflegt man den Schülern sehr häufig nicht zu sagen. Findet man, daß sie damit nichts verloren haben, so hätten sie doch noch weniger Zeit und unbefriedigte Neugier verloren, wenn man überhaupt auch von dieser Zahl e geschwiegen hätte. Daß man zu diesem allernatürlichsten Auskunftsmittel aber doch nicht greift, mag sich daraus erklären, daß auch jene zurückhaltenden Lehrer aus ihrer Hochschulzeit doch noch zuviel Respekt vor der Zahl e mitgenommen haben, die ja in der niederen und höheren Analysis und in der Physik immer und immer wieder auftritt. Unsererseits meinen wir, daß zwar nicht wegen dieses Vorkommens in Zweigen der Wissenschaft, die dem Schüler doch fern bleiben, wohl aber wegen der nicht erst künstlich herbeizuführenden Hinweise auf jene Grenzgrößen e und e^x, die in der Tat schon der ganz elementare Lehrstoff darbietet (vgl. unten, S. 347, das Beispiel der „organischen Verzinsung"), nach wie vor der natürlichen Logarithmen neben den Zehner-Logarithmen zu gedenken sei.

Daß aber gerade d i e s e s e die „Basis der Neperschen Logarithmen" gewesen sei, ist eine traditionelle Ungenauigkeit, denn NEPER verwendete $E = (1{,}0000001)^{10000000}$. Dabei ist z. B. der

$$\text{Npersche Logarithmus von } 2 = 0{,}693146922\ldots \text{ gewesen,}$$
$$\text{wogegen } {}^{e}log\,2 = l2 = 0{,}693147180\ldots$$

In dem vorstehend skizzierten Lehrgang waren gerade die theoretisch grundlegendsten Dinge, nämlich der E x i s t e n z b e w e i s f ü r L o g a r i t h m e n und die M e t h o d e n z u r B e r e c h n u n g d e r L o g a r i t h m e n, bisher mit Stillschweigen übergangen worden. Behufs Stellungnahme des ersten Unterrichts zu diesen Dingen sei gestattet, einen vergleichenden Blick zu werfen auf die für dasselbe Kapitel von den Logarithmen gegebenen Ratschläge SIMONS (I. Aufl. 1895, S. 62–64 – die Darstellung hat in der II. Aufl. 1908 mehrere Erweiterungen und Verschärfungen erfahren, die für unseren augenblicklichen Zweck nicht wiedergegeben zu werden brauchen):

„Die O b e r s e k u n d a beginnt mit der Repetition und der Erweiterung der Potenzlehre anknüpfend an die Korrespondenz der arithmetischen Reihe der Exponenten mit der geometrischen der Potenzen; es zeigt sich, daß dem aufgestellten Prinzip gemäß $a^{\frac{1}{q}}$ definiert werden muß als $\sqrt[q]{a}$ und $a^{\frac{p}{q}}$ als $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$. Die Korrespondenz der beiden Reihen ist der Leitgedanke für die Erfindung der Logarithmen von CHUQUET bis

NEPER. Man beweist zum erstenmal den Satz, daß die Multiplikationsregel für die Potenzform charakteristisch ist:

$$\text{wenn } f(x)f(y) = f(x+y), \quad \text{so ist } f(x) = [f(1)]^x,$$

vorausgesetzt, daß $f(1)$ von 0 verschieden ist. Man zeigt nun, u. zw. genügt es, $a = 10$ zu setzen, daß, wenn die Exponentenreihe hinlänglich verdichtet wird, z.B. durch Einstellung der 1000000 tel, auch die Potenzreihe hinlänglich dicht wird, so daß sie ein Netz stets wachsender Zahlen bildet, in dessen Knoten jede vorgegebene positive Zahl gefangen wird. Damit ist ein für diese Stufe völlig genügender Existenzbeweis des Logarithmus gegeben. Zur numerischen Berechnung der Logarithmen bediene man sich des bekannten einfachen Verfahrens der fortgesetzten Quadrierung, d. h. Halbierung der Intervalle, welches schon BRIGGS anwandte.

[Im Realgymnasium und (in II. Aufl. ausgelassen)] In der Oberrealschule hat man Zeit genug, den Existenzbeweis auf den großen Satz zu stützen, der alle indirekten Operationen von der Subtraktion bis zur Auflösung der Gleichung billionten Grades zusammenfaßt, den Satz: Wenn $f(x)$ eine eindeutige Funktion des reellen Argumentes x ist und sich zwischen $x = a$ und $x = b$ gleichmäßig und stetig ändert, so gehört zu jedem Wert der Funktion zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein und nur ein Wert des x, d. h. dann ist die funktionale Beziehung zwischen x und $f(x)$ umkehrbar. Der Begriff Stetigkeit muß vorher definiert werden. Eine Funktion y der reellen Variabeln x ist im Intervall a bis b stetig, wenn nach Annahme einer beliebig (kleinen) Zahl δ sich ein ϵ, Funktion von δ, so bestimmen läßt, daß, wenn x sich innerhalb des Intervalles a bis b um nicht mehr als ϵ ändert, die Änderung des y nicht δ überschreitet. Im Gymnasium muß man Satz und Definition bis zur letzten Repetition in der Oberprima verschieben.

Nach Berechnung einiger Logarithmen (1, 2, 3, 4, 5, 6) läßt man die vier Sätze der Potenzrechnung in die Sprache der Logarithmen übertragen und übt den neuen Begriff dadurch, daß man die Grundzahl variiert, zuerst etwa 2, 3 etc., dann $\sqrt{10}$, dann 10^{-1} etc. Diese Übungen muß man von Zeit zu Zeit immer wieder vornehmen, um dadurch auch zugleich die ganze Potenz- und Wurzelrechnung zu üben, bis der Schüler schließlich auch den Logarithmus von $\sqrt[x]{x}$ im System mit der Grundzahl x^{x^x} angeben kann. Man setzt dann die drei Vorzüge, welche 10 vor anderen Grundzahlen hat, auseinander (die leichtere numerische Berechenbarkeit der Logarithmen, die Regel, daß die Kennziffer des Logarithmus stets mit der Ordnungszahl der höchsten geltenden Ziffer übereinstimmt und die Gleichheit der Mantisse für alle Zahlen, welche mit denselben geltenden Ziffern geschrieben werden), erklärt die Logarithmentafel und geht nun zu der Anwendung über.

Als Anwendungen sind bisher stets die Zinseszinsaufgaben (inkl. Renten-, Forst-, Amortisations- etc. Rechnung) als zweckmäßig befunden; der neue[1]) preußische Lehrplan will es anders aus Gründen, die mir unbekannt. Die in Rede stehende Aufgabenklasse, Anwendung der Mathematik auf das praktische Leben, ist von höchster Bedeutung, erregt das Interesse der Schüler in großem, ja größtem Maße und wird teils deshalb, teils wegen der Einfachheit der Grundgedanken von ihnen leicht assimiliert. Bei diesen Aufgaben begreifen sie die eminente praktische Bedeutung der Logarithmenrechnung sofort und versöhnen sich mit den neuen Zumutungen. Geometrische und arithmetische Reihen fügen sich hierbei ungezwungen dem System ein. Inzwischen ist auch das geometrische Pensum soweit entwickelt, daß die Trigonometrie der Logarithmenrechnung ein weiteres großes Feld der Anwendung eröffnet. Ich weise hier auf das Programm des Herrn Koppe (1893 Nr. 93) hin, das, auch von der historischen Korrespondenz der arithmetischen und geometrischen Reihe aus, sogar den umgekehrten Weg geht und die Logarithmentafel an Zinseszins knüpft. [Die folgenden Worte bis Schluß sind in der II. Auflage gesperrt gedruckt.] Meines Erachtens hat es kein Bedenken, den Schüler, nachdem er weiß, daß er die Berechnung der Logarithmen selbst unschwer vornehmen könnte, wenn er die erforderliche Zeit daran setzen wollte oder könnte, die gekaufte Logarithmentafel benutzen zu lassen; er schreibt sich ja auch seinen Cicero nicht selbst [aus den Codices] ab.“ [Hierzu noch S. 68–69 Weitergehendes, z. B. Reihe für $\log(1+z)$; $\log\frac{1+z}{1-z}$ u. dgl.]

Dieser letzte Vorschlag, den Schüler die Tafeln erst dann benutzen zu lassen, wenn er sie sich selbst zu berechnen weiß (oder wohl gar, wenn er sie wirklich selber berechnet hat, wie es das von Simon allerdings nicht geteilte Bedenken gegen gedruckte Tafeln zu wünschen scheint), steht in diametralem Gegensatz zu der eingangs mitgeteilten Lehrprobe. Ob es aber bei dieser gewissenhaften Methode wohl allen Schülern klar würde, daß es zwischen dem Gebrauch der gekauften Logarithmentafeln und dem gedruckten Cicero doch noch einen, auch wissenschaftlichen, Unterschied gibt? Unsrerseits halten wir es für eine nicht unwillkommene, ganz handgreifliche Mahnung des Schülers, daß er von Beginn der Oberstufe an es nun mit solchen Funktionen zu tun bekommt, mit denen der Anfänger überhaupt erst dann

1) Es ist der von 1891 gemeint. In der II. Auflage (1908) fügt Simon bei (S. 98): „... und auch der neueste von 1901 hat das arithm. Pensum der O II verstümmelt. Die Zinseszinsrechnung fehlt, ohne die die Obersekundaner die neue Kraft der Logarithmen nicht zu schätzen wissen. Die Konsequenz der Verschiebung ist dann die Verstümmelung des Binoms (*sic*) in Prima gewesen.“

16*

arbeiten kann, wenn er sie den Tafeln fertig entnimmt. Mag es nur immer eine geraume Zeit Sache der Neugier bleiben, wie man denn diese Tafeln der Logarithmen, der goniometrischen Funktionen und der Logarithmen der goniometrischen Funktionen berechnet[1]) habe; denn so viel ist ja dem Anfänger gleich von Anfang begreiflich zu machen, daß sie nur solche rechnen könnten, die die für diese Funktionen geltenden Gesetze im kleinen Finger hatten; und wieder weiß der Anfänger wenigstens so viel, daß eben er noch kein solcher ist. Dazu kommt der Umstand[2]), daß ja die Methoden, die man dem Schüler ohne Eingehen auf die logarithmischen Reihen begreiflich machen kann, eben doch keineswegs die sind, nach denen man heute diese Tafeln rechnet. Und wenn man nun nichts hierüber zu sagen hat als eben — — „nichts als dieses", so möchte dem Schüler sich der „Nutzen der Logarithmenrechnung" wohl auf lange hinaus nicht im richtigen Lichte darstellen. Also wenn schon das Berechnen der Logarithmen gezeigt werden soll, so jedenfalls erst gegen Abschluß der Logarithmenlehre. Es mag dann als je ein Übungsbeispiel (nicht als „die" Methode zum Berechnen der Logarithmen) das Nepersche und das Briggssche Verfahren dem Schüler gezeigt, von diesem in einigen allerersten Schritten durchgeführt und das Resultat mit seinen Tafeln verglichen werden. Hierzu dann die Bemerkung, daß Briggs zum Rechnen eines Logarithmus so ziemlich ebensoviel Zeit brauchte, wie man sie jetzt mittels der Reihen für log nat $(1 + x)$ und der daraus zu gewinnenden, noch rascher konvergierenden für die ganzen Tafeln braucht. Die Ableitung dieser Reihe selbst mag dann als ein wertvolles Übungsbeispiel für etwas weitergehende „höhere Rechnungen" (vgl. § 44 S. 408) in Aussicht gestellt werden.

Was den Vorschlag betrifft, den Begriff der Logarithmen herauswachsen zu lassen aus der Korrespondenz der arithmetischen Reihe der Exponenten mit der geometrischen der Potenzen"[3]),

1) Fragt sich doch mancher Schüler lange nicht (bei mir geschah es erst, als ich in meinem 15. Lebensjahre in Livius dasselbe fand, was ich drei Jahre vorher aus Pütz zu memorieren hatte), woher denn sein Geschichtsbuch seinen Inhalt geschöpft habe.

2) Durchaus Treffendes hierüber sagt der besonnene REIDT (1886, S. 134, 1906, S. 143).

3) Auch BOREL führt so die Logarithmen mittels der Reihen ein. In der deutschen Ausgabe von Stäckel (S. 398) lautet diese Einführung so:

„Erklärung der Logarithmen. Wir betrachten zwei steigende Reihen, eine arithmetische, die mit Null beginnt, und eine geometrische, die mit 1 so möge man gegen die historischen Gründe, die für ihn sprechen, doch auch die folgenden systematischen und pädagogischen Gegengründe abwägen: Systematisch ist, wie eingangs gesagt, das Logarithmieren für den Anfänger einfach die zweite inverse Operation der dritten Stufe; und wenn auch die Einführung dieser Operation als bloße Umkehrung des Potenzierens zuerst nur etwas Formelles ist, das seine künftigen Anwendungen nicht von vornherein erraten läßt, so ist der Schüler ja doch durch die beiden früheren Operationsstufen und das auf die Beziehung zwischen direkten und inversen Operationen gegründete Gleichungauflösen durchaus vorbereitet auf die zweite freilich auch nur formelle Frage, welches denn die dem Potenzieren inversen

---

beginnt. Bezeichnet man die Differenz der arithmetischen Reihe mit d und den Quotienten der geometrischen Reihe mit q, so sind diese beiden Reihen:

$$0,\ d,\ 2d,\ 3d,\ 4d\ldots,\ nd,$$

$$1,\ q,\ q^2,\ q^3,\ q^4\ldots,\ q^n.$$

Man sagt, jedes Glied der arithmetischen Reihe sei der Logarithmus des Gliedes von gleichem Rang in der geometrischen Reihe. Zum Beispiel ist $3d$ der Logarithmus von q^3. Man schreibt dann:

$$\log q^3 = 3d$$

und liest: Logarithmus von q hoch drei gleich drei d. Das Glied q^3 heißt auch der Numerus von $3d$, nämlich die **Zahl**, deren Logarithmus $3d$ ist. Es gibt verschiedene Logarithmensysteme; denn die Zahlen q und d lassen sich auf verschiedene Arten wählen. Wir betrachten jedoch hier nur das System der sogenannten gewöhnlichen Logarithmen, bei dem der Logarithmus von 10 gleich 1 ist.

Wie man die Logarithmen der Zahlen in diesem System berechnen kann, soll hier nicht auseinandergesetzt werden. Nur eine Bemerkung möge Platz finden. Wenn man für d eine sehr kleine Zahl und für q eine Zahl nahe bei 1 nimmt, ist der Unterschied der aufeinanderfolgenden Glieder der beiden Reihen nur sehr klein, und hieraus folgt, daß mit einer gewissen Annäherung jede Zahl in diesen beiden Reihen enthalten ist. Um die gewöhnlichen Logarithmen zu erhalten, nimmt man:

$$d = 0{,}0001$$

$$q = 1{,}0002303115\ldots;$$

bei den zugehörigen Reihen ist das 10000te Glied der arithmetischen Reihe gleich 1 und das 1000te Glied der geometrischen Reihe gleich 10."

Es folgt dann die „Einrichtung der Tafeln zu vier Dezimalen" (eine solche ist auch als herauszuschlagendes Blatt dem Buche beigegeben). – Diese Darstellung dürfte manche Bedenken erregen; namentlich: 1. Das Auftreten von d in der Definition des log kann doch nur provisorisch sein. 2. Woher gerade die Zahl $q = 1{,}0002303115\ldots$? 3. Eine nicht ganzzahlige Nummer eines Reihengliedes ist ein noch befremdenderer Gedanke als ein gebrochener oder selbst irrationaler Potenzexponent. Auch dürften die S. 420 erwähnten Bedenken KLEINs gegen ein Ausgehen von der inversen Operation zur Potenz sich in noch erhöhtem Maße gegen das Ausgehen von den Reihen richten.

Operationen seien. – Dagegen führt der Begriff der „Reihen“ in eine so neue Gedankenwelt ein und bedarf in sich so breiter Durchübung, daß es nicht unbedenklich erscheint, den Aufbau der Operationsstufen (vgl. S. 366 Aufg. 1) durch die Reihen oder aber die Reihenlehre durch die ebenfalls breite Theorie und Praxis der Logarithmierung zu zerreißen.

Indem wir in unserem Lehrgange die Reihen in den Dienst eines Herausarbeitens des allgemeinen Funktionsbegriffs stellen (S. 338 ff.), trifft übrigens das Ergebnis dieses Vorgehens mit SIMONs Endabsicht doch wieder zusammen. Natürlich wird man bei unserem Lehrgange auch die allgemeinen funktionstheoretischen Betrachtungen, die SIMON oben speziell anläßlich des „Existenzbeweises der Logarithmen“ zur Sprache bringt, für den folgenden (VII.) Jhg. versparen; und es fragt sich denn für jetzt, wie man dem Schüler auch schon vor solchen allgemein funktionstheoretischen Betrachtungen das, was der Existenzbeweis rein wissenschaftlich anstrebt, didaktisch mundgerecht machen kann. Wieder ist es da die graphische Darstellung, die, wie wir sie anfangs ganz naiv als Zuordnung einiger Logarithmenwerte zu den Punkten der Zahlenreihe unternahmen, uns erst jetzt sozusagen ins Gewissen zu reden anfängt, was alles wir damals unbesehen an- und hingenommen hatten. Hatte früher die Lehre von den irrationalen Zahlen (S. 248 und S. 254 ff.) den Blick geöffnet für die Tragweite des Schrittes von der unstetigen zur stetigen Zahlenreihe, so wird es jetzt der Schüler als keine überflüssige Strenge mehr empfinden, wenn wir uns und ihn fragen, ob es denn gewiß sei, daß es nicht nur zu den Bruchpunkten der Zahlenreihe, sondern sogar zu den dazwischenliegenden, das Kontinuum ausfüllenden Punkten stetig wachsende Logarithmenwerte gebe, so daß schließlich auch die Logarithmenkurve selbst eine stetige wird. Wahrscheinlich ist auch hier, wie so oft, das volle Verständnis der Frage und ihrer Berechtigung das bei weitem Schwierigere (vgl. S. 255 ff.) und die Antwort selbst schon vergleichsweise leicht. – Ehe wir aber an diese Antwort gehen, sollte nicht unterlassen werden, nun auch diese Frage aus der Sprache der Logarithmen erst zurückzuübertragen in die der Potenzen; d. h. wir lassen alles, was wir beim Konstruieren der Logarithmenkurve getan hatten, noch einmal ausführen, um die Exponentialkurve zu bekommen. Dabei beginnen wir wieder ganz naiv, das 10^a zuerst auszuwerten für $a = 1, 2, 3$

dann $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ (also durch wirkliches Ausziehen der zweiten und dritten Wurzel), dann für $a = -1, -2$, usw. Hier belausche nun der Lehrer den Moment, wo dem Schüler ein Licht aufgeht, daß sich die nunmehr gewonnene Kurve (s. o. S. 237, Fig. 92) von der Logarithmenkurve nur durch Vertauschen der „wagrechten“ und „lotrechten“ Richtung (oder, wie wir ein Jahr später korrekt sagen werden, der Abszissen- und Ordinatenrichtung) unterscheidet. Nur ein Lehrer, der es mit Schülern zu tun hat, denen das keine Überraschung ist, die in der neuen Kurve die um 90⁰ verdrehte Logarithmenkurve nicht mit dem Gesicht ansehen, das man bei jedem *„parturiunt montes“* macht, mag gleich vor der Logarithmenkurve und sonstigen Logarithmenlehre *in abstracto* den Unterschied von Potenzfunktion und Exponentialfunktion entwickeln[1]). Jeder andere Lehrer von minder umsichtigen Schülern wird aber an dieser neuen Einsicht der Wesensgleichheit von logarithmischer und Exponentialkurve vor allem noch einmal die definitorischen Beziehungen von Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren wiederholen, wird noch einmal eben in der Stetigkeit der Kurve den entscheidenden Rechtsgrund für die Ausdehnung der Potenzdefinition auf negative und gebrochene Exponenten (S. 232) die Schüler nachfühlen lassen und erst jetzt dieser anschaulichen Stetigkeit auch das abstrakt-arithmetische Einschließen zwischen immer engere Grenzen und das Zusammenfallen der Grenzen[2]), in welchem alle solchen Existenzbeweise bestehen, als eine Art formeller Draufgabe auf die längst aus der Anschauung von stetigen Kurven erworbene und gefestigte Überzeugung nachfolgen lassen (worüber noch einiges zu Ende des zweitnächsten § 26) und hiermit die Theorie der Logarithmen und der Operationen dritter Stufe überhaupt beschließen. – Verhehlen wir uns aber nicht, daß es auch nach wie vor manches Schuljahr und manches Schulzimmer geben wird, in dem es zu dieser Art theoretischen Abschlusses überhaupt nicht langt. –

1) Was in Sachen der Exponentialfunktion auch in einem sparsamen Unterricht zu besprechen nützlich sein mag, vgl. mathematischen Anhang zu meiner Physik, Nr. 17.

2) Weber-Wellstein I, S. 114, S. 116. – Vielleicht ist im ganzen noch lehrreicher als der formell strenge Beweis die wenigstens vorübergehende Frage, wie sich die Exponential- und die Logarithmenkurven ausnähmen (nämlich überall dichte, aber doch nicht stetige Punktreihen), wenn man sich unpraktischerweise einmal auf negative Basen einließe. Vgl. hierzu die Gründe von Klein für seine Empfehlung der Definition des Logarithmus durch das Integral, S. 235 Anm. und S. 420.

Die beiden folgenden Paragraphen mögen noch einiges zu diesen Gewissensfragen strenger Mathematiker und unstrenger Mathematiklehrer nachtragen, was im wirklichen Unterricht zum Teil schon an früheren Stellen einzuschalten gewesen sein wird.

§ 25. Irrationale und imaginäre Zahlen. Quadratische Gleichungen.

Schon durch den Zusammenhang mit der Wurzellehre (also noch vor den Logarithmen) sieht sich der Unterricht auf die irrationalen und imaginären Zahlen geführt. In ihre Berechtigung und Tragweite wird sich der Durchschnittsschüler nicht sogleich auf den ersten Anlauf hineinfinden, schon weil es nach der Geschichte der Wissenschaft ja doch auch den Forschern so ergangen ist, was durch die Wörter „irrational"[1]) und „imaginär" und sogar durch das Zeichen i für die Erinnerung festgehalten wird.

Da wir nun aber nach dem zu Ende des vorigen Paragraphen dargelegten Plane alle einigermaßen tiefergehenden, den Begriff der Grenze voraussetzenden Betrachtungen schon über das Irrationale für die Reihenlehre des folgenden (VII.) Jhgs. aufsparen, so ist für jetzt die Hauptfrage, wie der Lehrer den Schüler auch unter Verzicht auf alle vorzeitige Strenge in das Gebiet des Irrationalen so einführen kann, daß der Schüler merkt, hiermit eine neue Welt betreten zu haben. Vor allem gilt es, die schon in früheren Jahrgängen angebahnten Vorblicke auf die Größen, die sich nicht durch ganze Zahlen und durch geschlossene Brüche ausdrücken lassen, und an deren „Existenz" doch schon im Hinblick auf das Verhältnis der Diagonale zur Seite des Quadrates u. dgl. nicht zu zweifeln ist, nun zu einer festen Einsicht in den generellen Unterschied und Gegensatz zwischen Rationalem und Irrationalem herauszuarbeiten. So hatten wir schon im Abschluß der Unterstufe durch vielseitiges arithmetisches und geometrisches Durcharbeiten der $\sqrt{2}$ (und $\sqrt{3}$) dem dreizehnjährigen Knaben die Überzeugung befestigen können, daß $\sqrt{2}$ durch keine geschlossene (und auch durch keine periodische) Dezimalzahl ausdrückbar sein könne (S. 155). Daran anknüpfend mögen wir jetzt den Schüler etwa die Festigkeit jener damals gewonnenen Überzeugung einer Belastungsprobe unterziehen

1) Daß „irrational" eine unzutreffende Übersetzung von „ἄλογος" („unaussprechliche Zahl") sei, vgl. bei SIMON 1908, S. 94. Immerhin kann man auch aus diesem Wort sowohl „unsagbar" wie „undenkbar" heraushören.

lassen, indem wir ihm Bedenken[1]) wie das folgende vorlegen: „Mögen wir den Algorithmus des Wurzelziehens auch noch so lange fortsetzen und die zehn Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 in scheinbar regelloser Reihenfolge auftreten sehen, so muß, da es eben doch nur zehn Ziffern sind, irgendwann eine periodische Wiederkehr eintreten. Hat aber diese Periode auch noch soviel Stellen, so läßt sich dieser periodische Dezimalbruch in einen gemeinen verwandeln, und unser Beweis aus dem III. Jhg. ist widerlegt". Sogar wenn die Schüler diesen oder ähnliche Scheineinwände nicht sogleich formgerecht zu widerlegen wissen, wird der Lehrer aus der ganzen Haltung, die sie solchen Einwendungen entgegenbringen, erkennen können, ob und inwieweit die Überzeugungen vor allem von der Möglichkeit (Widerstreits-, speziell Widerspruchslosigkeit) und natürlich dann erst der Wirklichkeit („Existenz") des Irrationalen neben dem Rationalen schon fest oder noch schwankend sind. Bilde man sich doch nicht etwa ein, daß ein Schüler, der schon solchen Einwendungen gegenüber sich wehrlos zeigt und auf den also auch die späteren geometrischen Handgreiflichkeiten (wie der Beweis nach Fig. 93) eigentlich keinen bleibenden Eindruck gemacht haben müssen, sich eine solche Überzeugung durch die formell strenge Darstellung der Existenzbeweise der irrationalen Zahlen und der Erweiterungsbeweise ihrer Rechengesetze werde abnötigen lassen. – Immerhin soll es ihnen aber verständlich werden, daß sogar das $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$ keineswegs[2])

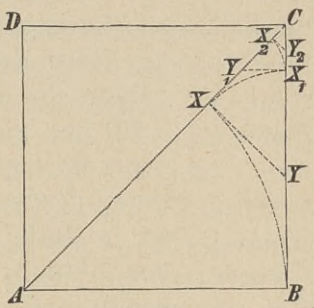


Fig. 93.

1) Dieses Bedenken vernahm ich dieser Tage (zum erstenmal in meinem Leben) von einem Fachmathematiker. Sein kombinatorischer Fehlschluß besteht darin, daß zwar die Zahl der Elemente 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 nur 10 ist, daß es sich aber um Variationen mit Wiederholungen zur Klasse $r=\infty$ handelt, deren Anzahl 10^r selbst ∞ (u. zw. sogar ein exponentielles Unendlich) ist. Sonst könnte man ebenso schließen, daß, wer aus den 25 Buchstaben des Alphabets immer wieder neue Wörter formt, in einem hinreichend langen Epos schließlich zur „Wiederkehr des Gleichen" gelangen müsse. Und umgekehrt: Schon aus den zwei Elementen 1 und 2 läßt sich ein nie periodisch werdender Dezimalbruch auf unendlich viele Arten formen – wie?

2) DEDEKIND, Stetigkeit und irrationale Zahlen (Dritte unveränderte Auflage 1905 – die erste von 1872 – erzählt im Vorwort, daß D. „eine wirkliche Definition vom Wesen der Stetigkeit" am 24. Nov. 1858 gefunden habe) sagt S. 20: „. . . Man gelangt auf diese Weise [wie in dem durchgeführten Beispiele der Addition zweier reellen nicht rationalen Zahlen] zu wirklichen

schon mitbewiesen ist, wenn sich z. B. $\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=\sqrt{36}$ einerseits direkt numerisch bestätigt, andererseits durch $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ für rationale Wurzeln allgemein nachgewiesen ist. –

In Sachen des Imaginären wird man sich zwar nicht schon beim allerersten Einführen von $\sqrt{-1}$ als einer neuen Zahlengattung auf die räumliche Deutung als Lateralzahlen einzulassen brauchen, sondern das Wenige oder Mehrere, was darüber (etwa bis höchstens zum Moivreschen Satz) mitgeteilt werden soll, der zusammenfassenden Wiederholung im letzten Jahrgang versparen (vgl. einen induktiven Weg hierzu in den vertiefenden Wiederholungen des VIII. Jhgs., S. 367). Immerhin aber weist sogleich die Reihe der Potenzen von $i=\sqrt{-1}$ durch ihre Periodizität

$$\begin{aligned} i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= 1 \\ i^5 &= i \\ i^6 &= -1 \\ i^7 &= -i \\ i^8 &= 1 \\ i^9 &= i \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

auf einen Zusammenhang mit den Winkeln (und den gerade um diese Zeit behandelten Winkelfunktionen § 29) hin, und an diese vorläufige Beobachtung mag dann die spätere Darstellung komplexer Zahlen von der Form $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ wieder erinnern. In der Tat ist ja doch eben diese einfache Beziehung zwischen der fortschreitenden Reihe der Exponenten des i und der in sich zurückkehrenden der Potenzwerte auch der letzte Grund für die Deutbarkeit des $\sqrt{-1}$ als einer normal gegen die Richtung des $+1$ und -1 gerichteten Größengattung (vgl. die primitivsten Deutungen S. 367 Anm.).

Für jetzt aber bleibt der entscheidende Rechtsgrund zur Einführung des Imaginären (einschließlich des Komplexen) überhaupt die quadratische Gleichung[1]). Am lebhaftesten fällt

---

Beweisen von Sätzen wie z. B. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$, welche meines Wissens bisher nie bewiesen sind." – Vgl. die grundlegenden Thesen dieser klassischen Schrift gegen Ende des folgenden Paragraphen (S. 257–259).

1) SIMON bemerkt in den Verhandlungen des III. internationalen Mathematikerkongresses in Heidelberg 1904, S. 639 zur „Rechnung mit komplexen Zahlen": „Gewöhnlich wird es so dargestellt, daß die quadratischen Gleichungen zu dieser Erweiterung des Zahlbegriffs führen, dieselben liefern allerdings zuerst komplexe Zahlen, aber wenn von einem Rechteck verlangt wird, daß sein Umfang 20 und sein Inhalt 29 sei, so zeigen die Zahlen $5\pm 2i$ nur an, daß, da ein solches Rechteck nicht existiert, auch seine Seiten keine Maßzahlen haben. Kurz, in den Problemen 2. Grades liegt nichts, was zur Rechnung mit komplexen Zahlen nötigt. Anders die Gleichung 3. Grades. Das Problem, von einer Kugel $\frac{1}{3}$ durch eine Ebene abzuschneiden, hat evidente Existenz; nennt man $\frac{r}{p}=x$, so erhält man die Gleichung $x^3-\frac{9}{4}x+\frac{3}{4}=0$, also $x=\sqrt[3]{-\frac{3}{8}(1-i\sqrt{2})}+\sqrt[3]{-\frac{3}{8}(1+i\sqrt{2})}$, und hier, beim *casus irredu-*

das dem Schüler auf bei der gemischt quadratischen $x^2 + ax = b$, in deren Lösung $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$ der Ausdruck unter der Wurzel ja durchschnittlich ebensooft negativ wie positiv ausfällt. Und soweit man dann den Wunsch, die letztere Hälfte von Fällen nicht *a limine* abweisen zu müssen, schon als einen Rechtsgrund zur „Erweiterung" des Zahlengebietes über die $\sqrt{+a}$ hinaus gelten läßt, wird nun hinterher auch schon die rein quadratische Gleichung $x^2 = -a$ und ihr einfachster numerischer Fall $x^2 = -1$ als ebensolche Veranlassung zum Bereichern des bisherigen Materials von Zahlen, die wir erst von jetzt an die „reellen" Zahlen nennen, eingesehen.

Eine freilich nur das Äußerlichste betreffende, nach alter Schulmeistererfahrung aber keineswegs gegenstandslose Sorgfalt bleibt es für einige Zeit, die neuen Begriffe des Irrationalen und Imaginären auch für den schwächsten Schüler nicht durcheinanderlaufen zu lassen. $\sqrt{-4}$ ist rational, wenn auch imaginär.

Wenn aber für den Schüler die quadratischen Gleichungen als das den beiden neuen Zahlenarten logisch Vorangehende sich darstellen müssen, wie ja überhaupt zuerst die jeweilige inverse Operation definiert sein muß, damit dann erst die aus

---

cibilis, wird man gezwungen, mit komplexen Zahlen zu rechnen. Es ist kein Zufall, daß der erste, der mit komplexen Zahlen gerechnet hat, Cardanus war. Die Konsequenz heißt für den Lehrplan: entweder keine komplexen Zahlen oder im Anschluß an die Gleichungen 3. Grades." [Desgleichen Simon 1906 S. 79: „Durch den *casus irreducibilis* der Gleichungen 3. Grades sind wir also gezwungen, die Rechnung mit komplexen Zahlen aufzunehmen."]

So interessant die Unterscheidung zwischen der reellen Deutung komplexer Zahlen im Kugelbeispiel und dem Fehlen einer solchen im Rechtecksbeispiel ist, so dürfte doch die zuletzt ausgesprochene didaktische Konsequenz (– nur um dieser willen nehmen wir hier zu SIMONs These Stellung) viel zu weit gehen; denn sie hätte zur weiteren die, daß, wo man nicht zu den gemischtkubischen Gleichungen kommt, man auch nicht einmal die schönen Deutungen der drei Wurzeln von $x^3 = 1$ oder der sechs von $x^6 = 1$ (vgl. S. 367) geben dürfte. – Wäre übrigens die Gleichung 3. Grades für alles Rechnen mit i und $a + bi$ wirklich obligat, so müßte schließlich i mehr oder minder mittelbar auch aus einer Gleichung 3., nicht 2. Grades definiert werden. Aber wenn man z. B. zur Reihe für $\cos\varphi$ die für $\sin\varphi$ nach Multiplikation mit i addiert und so die Reihe für $e^{\varphi i}$ bekommt, so ist man beim Begriff des i doch ausschließlich auf die Definition $i^2 = -1$ angewiesen und ein Gedanke an den *casus irreducibilis* spielt hier und ebenso in unzähligen anderen Rechnungen mit Komplexen gewiß nicht herein. [Ganz nebenbei: Wenn es in SIMON, Methodik 1906, S. 97 heißt „*i* bedeutet einen Begriff, dessen Quadrat gleich -1 ist", so ist es natürlich nicht buchstäblich zu verstehen, daß man den Begriff quadriere.] – Vgl. hiezu noch unten, S. 363, Anm.

ihr entspringende neue Gattung von Zahlen definiert werden kann (S. 366, Aufg. 1, 2), so wird sich dennoch mit dieser logischen Abfolge nicht von Anfang die des Unterrichtes decken: hier tritt sogleich in der Wurzellehre zum erstenmal die $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, die $\sqrt{-1}$, die $\sqrt{-a}$ usw. auf, erst einige Zeit später die einer breiten Einübung bedürftige Lehre von den quadratischen Gleichungen, und erst nach ihr ist der Schüler vorbereitet für die oben angedeuteten Erwägungen über den eigentlichen Rechtsgrund der Einführung des Irrationalen und Imaginären.

Zur Lehre von den quadratischen Gleichungen selbst, die einen großen Teil des arithmetischen Lehrstoffes innerhalb dieses (des VI.) Jhgs. ausmachen, dürften besondere didaktische Bemerkungen entbehrlich sein, da sich ja der Gegenstand in allen guten Aufgabensammlungen aufs gründlichste verarbeitet vorfindet. Einiges Grundsätzliche, so namentlich die Verwertung der graphischen Darstellung des Gleichungstrinoms $x^2 + ax + b$ für die Theorie dieser Gleichungen, verschieben wir auf die „Zusammenfassende Lehre von den Gleichungen“, die wir als den Abschluß des geometrischen und arithmetischen Unterrichtes überhaupt empfehlen (S. 355 ff.). Einstweilen nur soviel, daß der Zusammenhang zwischen Koeffizienten und Wurzeln zwar hier schon reichlich einzuüben ist – am besten, indem man etwa viererlei Multiplikationen wie die nebenstehenden ausführen, also aus den Wurzelfaktoren das Gleichungspolynom entstehen läßt und nicht etwa das Umgekehrte vorzeitig verlangt. Später freilich sollten auch Rechnungsproben nicht fehlen wie

$$(x-5)(x-3)$$
$$(x-5)(x+3)$$
$$(x+5)(x-3)$$
$$(x+5)(x+3)$$

$$\left[x-\left(-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}\right)\right]\cdot\left[x-\left(-\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}\right)\right].$$

Der volle Einblick in die Tragweite dieser Beziehungen aber dürfte ebenfalls erst auf jene zusammenfassende und abschließende Lehre von den Gleichungen im folgenden (VII.) Jhg. zu versparen sein. – Was ferner die trigonometrische Auflösung quadratischer Gleichungen betrifft, so sollte man die Schüler doch nicht mit den verschiedenen Rechnungsschematismen hiefür plagen, wenn man nicht Veranlassung findet, von solchen Gleichungen mit größeren Koeffizienten, bei denen sich das Einführen von Hilfswinkeln rechnerisch lohnt, wirkliche Anwendungen zu machen.

Dagegen werden die Übungsaufgaben gleich von Anfang nicht ängstlich auf quadratische Gleichungen mit nur einer Unbekannten einzuschränken sein, sondern ungezwungen sich darbietenden Anwendungen für zwei und drei Unbekannte nicht aus dem Wege gehen, vorausgesetzt, daß das natürliche Substituieren in der Hauptsache ausreicht, und daß noch nicht jene Kunstgriffe verlangt werden, die auch im nächsten Jahrgang höchstens sparsam zu praktizieren sind (S. 356).

Indem jetzt, nach der Logarithmenlehre, auch die Exponentialgleichungen wieder aufgenommen werden, ist eine erste Gelegenheit gegeben, zwischen transzendenten und algebraischen Gleichungen zu unterscheiden, wobei wieder für den Schüler diese Einteilung nicht durcheinanderlaufen darf mit den früheren (nach dem Grad oder gar nach der Zahl der Unbekannten). Dabei bleibt eine Exponentialgleichung transzendent, auch wenn sie durch die geeignete Substitution z. B. auf eine des ersten Grades mit einer Unbekannten führt. – In eben diesem Zusammenhange sollte es aber an grundsätzlichen Aufklärungen darüber nicht fehlen, daß und warum der Gegensatz von algebraisch und transzendent ebenso wie die Gleichungen auch die Operationen überhaupt, die Zahlen und die Funktionen betrifft. – Da aber die Erwähnung dieser Dinge im Lehrplan der „Prager Vorschläge“, wie der Verfasser jüngst erfahren hat, zu Mißverständnissen Anlaß gab, so seien diese durch den folgenden Paragraphen geklärt.

§ 26. Algebraische und transzendente Zahlen, Operationen, Gleichungen und Funktionen. — Geometriefreie Arithmetik?

Da die Forderung, den Unterschied zwischen „algebraisch“ und „**transzendent**“ in der Mittelschule zur Sprache zu bringen, wenn mißverstanden, wohl auch zu allerlei Verstiegenheiten führen könnte, so sei hier noch eigens ausgesprochen, inwieweit schon der primitivste Unterricht auf diese Unterscheidung führt, und was sich an sie, wenn sie in besonnener Weise mit den Schülern behandelt wird, für diese an Anregungen zum mathematischen Weiterdenken anknüpfen mag.

Vielleicht ist wieder einer der äußerlichsten Anlässe einer der handgreiflichsten: Waren nämlich die Schüler vom ersten Jahre der Mittelstufe an mit Gleichungen 1. „Grades“, jetzt, vom ersten Jahre der Oberstufe an, in systematischer Weise mit

Gleichungen 2. „Grades" beschäftigt worden, waren sie überdies bei einzelnen stereometrischen Aufgaben (wie Halbierung des Pyramidenstumpfes durch eine zur Grundfläche parallele Ebene und ähnlich Halbierung, Dreiteilung der Halbkugel u. dgl.) auf Gleichungen 3. Grades geführt worden (gleichviel, ob sie diese nur ansetzen und ordnen oder auch lösen), so liegt es nahe, daß sich im Schüler die Meinung festsetzt, er dürfe bei jeder Gleichung nach dem „Grad" fragen. Wie soll man dann einer solchen irrigen Verallgemeinerung anders entgegentreten, als indem man aufmerksam macht, daß jene Einteilung nach dem „Grade" schon nur eine Untereinteilung sei für die algebraischen Gleichungen, daß es aber neben diesen noch „transzendente", d. h. nichtalgebraische, gebe? Beispiele solcher drängen sich ja — abgesehen von den Exponentialgleichungen, namentlich der Zinseszinsrechnungen (S. 345ff.) — dem Schüler öfters auf bei ganz nahe liegenden Aufgaben, die er sich ja wohl bei einigermaßen lebendigem und selbständigem Interesse an mathematischen Dingen selber stellt (z. B. den Zentriwinkel des Kreissegmentes zu bestimmen, das ein Drittel oder ein Viertel oder $\frac{1}{n}$ des ganzen Kreises ist — und viele ähnliche Aufgaben; vgl. namentlich auch die transzendente Gleichung für die Schnitte der Tangenskurve und der Parabel S. 267, 268 Anm.).

Ein Unterricht dagegen, der nicht erst abwarten will, ob der Schüler durch ein Schweigen des Lehrers am unrichtigen Orte in irrige Meinungen und Vorurteile gerät und bei ihnen bleibt, wird auch vor einem solchen speziellen Anlasse Gelegenheit haben, der Unterscheidung von „algebraisch" und „transzendent" nicht aus dem Wege zu gehen; nämlich vor allem schon beim Einführen der irrationalen Zahlen als einer Ergänzung der Zahlenlinie. Auch bei äußerster Sparsamkeit und Vorsicht wird ja der Lehrer doch nicht auf Erwägungen wie die folgenden verzichten wollen:

Die Reihe der ganzen Zahlen war unstetig; auch die der $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2} \ldots$, ebenso die der Drittel usw. So dicht dann auch diese Bruchpunktreihe wird, wenn die Nenner immer mehr vergrößert werden, so muß sie doch immer noch eine unstetige sein: denn von $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$ haben wir ja wiederholt bewiesen, daß sie gemeinen Brüchen nicht genau gleich sein können. Es muß also zwischen den Bruchpunkten noch Platz sein für die Punkte aller durch Radizierung gefundenen irrationalen Zahlen. — Sehr wahrscheinlich würde sich nun, wenn die Besprechung hier haltmachte, in weiterdenkenden Schülern die Meinung festsetzen, durch die Punkte für alle $\sqrt[n]{a}$ oder doch für alle $\sqrt[m]{a+\sqrt[n]{b}}$ u. dgl. werde die Reihe stetig. Vielleicht sollte erst dort, wo der Lehrer bei hinreichender Sondierung merkt, daß diese irrige Meinung sich eingestellt habe, nun ihr ausdrücklich entgegengetreten werden mit dem Hinweis, daß namentlich $\pi = 3{,}14\ldots$ durch keine solche endliche Folge wenigstens von zweiten Wurzeln sich darstellen lasse; denn bestünde eine solche arithmetische Gleichheit, so wäre nicht die geometrische Aufgabe von der „Quadratur des Zirkels" unlösbar, wie dem Schüler schon mehrmals mitgeteilt wurde. Und vielleicht nur, damit nicht wieder die falsche Meinung entstehe, es sei π die einzige nicht algebraische irrationale und in diesem Sinne transzendente Zahl, mag gelegentlich auch die analoge Mitteilung in bezug auf e erfolgen (da, wie S. 241 gesagt, nur wenige Lehrer jede Erwähnung von e aus dem Unterrichte überhaupt werden ausschließen wollen).

Mögen diese Andeutungen, die das allerbescheidenste Maß dessen darstellen, was ein Unterricht dem Schüler unmöglich vorenthalten kann (da es füglich doch auch in der Arithmetik nicht beim äußerlichen „Absolvieren" so und so vieler Beweise über das Wurzelrechnen und Auflösen zusammenhangloser Gleichungsaufgaben sein Bewenden haben kann), nebenbei auch die Prinzipienfrage anregen, ob und inwieweit solche ohne Beweis bleibende Mitteilungen über prinzipielle Dinge im ersten Mathematikunterricht nützlich sein können oder als ein bloßes Vorkosten überhaupt wertlos sind. Nach Mitteilungen aus Schülererinnerungen wäre die letztere Ansicht allzu streng und skeptisch. Und sollten solche gelegentliche Anregungen auch keinen der Schüler zu selbständigem positiven Weiterarbeiten anregen, so muß es doch schon dem Lehrer und Schüler willkommen sein, wenn dieser auch nur den Inhalt der ihm sicher irgendwann zu Ohren kommenden Behauptungen, die Quadratur des Zirkels, die Verdoppelung des Würfels, die Dreiteilung des Winkels seien „unmöglich", im genau richtigen Sinn versteht, sogar wenn ihm auch die Beweise für diese Behauptungen einstweilen oder für immer unzugänglich bleiben. Denn es ist für den Mathematikunterricht jedenfalls beschämend, wenn der Lehrer dem Schüler nichts auf den Einwand zu erwidern weiß, daß ja durch $a = r\sqrt{\pi}$ die Quadratur des Zirkels, durch $A = a\sqrt[3]{2}$ die Verdoppelung des Würfels arithmetisch gelöst sei. Wenigstens diese primitiven Mißverständnisse lassen sich auch bei schwächeren Schülern beheben durch die Einleitung zu F. KLEINS „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie“ (1895); und unschwer läßt sich auch z. B. der Zusammenhang zwischen dem Delischen Problem und der Dreiteilung des Winkels (ib. 10) zu einer schönen geometrischen Aufgabe ausgestalten. Man könnte aber mit besseren Klassen immerhin den Versuch machen, ihnen etwa einige Seiten vorzulesen aus RUDIO, „Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung. Deutsch herausgegeben und mit einer Übersicht über die Geschichte des Problemes von der Quadratur des Zirkels, von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage“ (Teubner, 1892, 166 Seiten). – Da diese Schrift überdies eine Fundgrube arithmetischen und geometrischen Übungsmaterials darbietet, von dem sich vieles als Rückblick aus der Trigonometrie in die Planimetrie verwenden ließe, kommen wir auf sie beim Abschluß des nächsten Abschnittes, S. 290 ff., zurück. Einen ähnlichen Zweck würde auch gelegentlich das Vorlesen der S. 273 und 274 aus WEBER-WELLSTEIN II. erfüllen. – Natürlich eilt es gar nicht, solche Versuche in größerem Umfange schon zu Beginn der Oberstufe anzustellen, da sich solch historisch übersichtliche Aus- und Rückblicke vielmehr ganz ausgezeichnet abschließend für den obersten Jahrgang eignen. Nur begonnen sollte mit solchen Ausblicken schon am Anfang der Oberstufe werden, die sich hierdurch auch in den Augen der Schüler den Charakter einer Oberstufe verdienen würde, die „aus dem Dunkeln ins Helle strebt“.

Doch wie es der Lehrer mit diesen wahrscheinlich ungewohnt klingenden Vorschlägen auch halten mag – wenigstens eingeladen sei er, sich systematisch darauf zu besinnen, ob und wieviel er von den folgenden vier Begriffspaaren im Unterricht überhaupt und speziell schon vom Anfang der Oberstufe an zur Sprache bringen will. – Nach dem Titel des vorliegenden Paragraphen gibt es zu unterscheiden:

algebraische und transzendente Zahlen,
„ „ „ Operationen,
„ „ „ Gleichungen,
„ „ „ Funktionen.

Bekanntlich greifen diese vier Begriffspaare aufs mannigfaltigste ineinander. Wie ja z. B. die neuen Zahlen immer erst aus den neuen inversen Operationen hervorgehen (worüber eine Anwendung für die Übersicht des obersten Jahrganges S. 366 die

Wiederholungsaufgaben 1 und 2); und wie es ferner überhaupt nur Sache der Auffassung ist, ob wir von Gleichungen mit 1, 2,.. Unbekannten oder von Funktionen mit 1, 2,.. Variablen reden, so geht auch die Unterscheidung transzendenter Funktionen von algebraischen über das bisherige Gleichungenrechnen nicht weiter hinaus als die nun empfohlene Pflege des Funktionsbegriffes überhaupt. Daß z. B. im Goniometrieunterricht sogleich vom Anfang die transzendente Funktion $y = \operatorname{tg} x$ von der algebraischen Funktion $y = x^2$, deren graphische Darstellungen (für den ersten Quadranten, bzw. $x \geqq 0$) dem ungeschulten Blick des Schülers identisch scheinen könnten, deutlich unterschieden werden muß, falls nicht die ganze Goniometrie überflüssig scheinen soll, wird alsbald näher auseinanderzusetzen sein (S. 265–268). –

Und nun, da wir im vorliegenden Paragraphen schon einmal Dinge berührt haben, die etwas fremdartig klingen und, wenn mit ungeschickter Hand angefaßt, den Arithmetikunterricht in ein dem Schüler unverständliches Gebiet verschieben müßten, so sei auch noch die vom Ende des vorvorigen Paragraphen hieher zurückgestellte Prinzipienfrage berührt, wie sich unser Unterricht, der ja so ganz auf ein inniges Verbinden von Arithmetik und Geometrie abzielt, mit der genau entgegengesetzten Forderung einer souveränen, geometriefreien Arithmetik abfinden soll, die DEDEKIND nachdrücklich so formuliert hat:

„Die bisher übliche Einführung der irrationalen Zahlen knüpft nämlich geradezu an den Begriff der extensiven Größen an – welcher aber selbst nirgends streng definiert wird – und erklärt die Zahl als das Resultat der Messung einer solchen Größe durch eine zweite gleichartige[1]). Statt dessen fordere ich, daß die Arithmetik sich aus sich selbst heraus entwickeln soll. Daß solche Anknüpfungen an nicht arithmetische Vorstellungen die nächste Veranlassung zur Erweiterung des Zahlbegriffes gegeben haben, mag im allgemeinen zugegeben werden (doch ist dies bei der Einführung der komplexen Zahlen entschieden nicht der Fall gewesen); aber hierin liegt ganz gewiß kein Grund, diese fremdartigen Betrachtungen selbst in die Arithmetik, in die Wissenschaft von den Zahlen aufzunehmen. Sowie die negativen und gebrochenen

1) „Der scheinbare Vorzug der Allgemeinheit dieser Definition der Zahl schwindet sofort dahin, wenn man an die komplexen Zahlen denkt. Nach meiner Auffassung kann umgekehrt der Begriff des Verhältnisses zwischen zwei gleichartigen Größen erst dann klar entwickelt werden, wenn die irrationalen Zahlen schon eingeführt sind“.

rationalen Zahlen durch eine freie Schöpfung hergestellt, und wie die Gesetze der Rechnungen mit diesen Zahlen auf die Gesetze der Rechnungen mit ganzen positiven Zahlen zurückgeführt werden müssen und können, ebenso hat man dahin zu streben, daß auch die irrationalen Zahlen durch die rationalen Zahlen allein vollständig definiert werden. Nur das Wie? bleibt die Frage.

Die obige Vergleichung des Gebietes R der rationalen Zahlen mit einer Geraden hat zu der Erkenntnis der Lückenhaftigkeit, Unvollständigkeit oder Unstetigkeit des ersteren geführt, während wir der Geraden Vollständigkeit, Lückenlosigkeit oder Stetigkeit zuschreiben. Worin besteht denn nun eigentlich diese Stetigkeit? In der Beantwortung dieser Frage muß alles enthalten sein, und nur durch sie wird man eine wissenschaftliche Grundlage für die Untersuchung aller stetigen Gebiete gewinnen. Mit vagen Reden über den ununterbrochenen Zusammenhang in den kleinsten Teilen ist natürlich nichts erreicht; es kommt darauf an, ein präzises Merkmal der Stetigkeit anzugeben, welches als Basis für wirkliche Deduktionen gebraucht werden kann. Lange Zeit habe ich vergeblich darüber nachgedacht, aber endlich fand ich, was ich suchte. ... Im vorigen Paragraphen ist darauf aufmerksam gemacht, daß jeder Punkt p der Geraden eine Zerlegung derselben in zwei Stücke von der Art hervorbringt, daß jeder Punkt des einen Stückes links von dem Punkte des anderen liegt. Ich finde nun das Wesen der Stetigkeit in der Umkehrung, also in dem folgenden Prinzip:

„Zerfallen alle Punkte der Geraden in zwei Klassen von der Art, daß jeder Punkt der ersten Klasse links von jedem Punkte der zweiten Klasse liegt, so existiert ein und nur ein Punkt, welcher diese Einteilung aller Punkte in zwei Klassen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke hervorbringt."

Wie schon gesagt, glaube ich nicht zu irren, wenn ich annehme, daß jedermann die Wahrheit dieser Behauptung sofort zugeben wird. ... Es ist mir sehr lieb, wenn jedermann das obige Prinzip so einleuchtend findet und so übereinstimmend mit seinen Vorstellungen von einer Linie; denn ich bin außerstande, irgendeinen Beweis für seine Richtigkeit beizubringen, und niemand ist dazu imstande. Die Annahme dieser Eigenschaft der Linie ist nichts als ein Axiom, durch welches wir erst der Linie ihre Stetigkeit zuerkennen, durch welches wir die Stetigkeit in die Linie hineindenken" (S. 10–12).

Und nun folgt „§ 4. Schöpfung der irrationalen Zahlen" mit der seither berühmt gewordenen Definition: „Ist . . irgendeine Einteilung des Systems R in zwei Klassen A_1, A_2 gegeben, welche nur die charakteristische Eigenschaft besitzt, daß jede Zahl a_1 in A_1 kleiner ist als jede Zahl a_2 in A_2, so wollen wir der Kürze halber eine solche Einteilung einen Schnitt nennen und mit (A_1, A_2) bezeichnen."

Hier waren a_1 und a_2 noch rationale Zahlen gewesen. — Es werden dann S. 14 die irrationalen Zahlen α so definiert: „Jedesmal nun, wenn ein Schnitt (A_1, A_2) vorliegt, welcher durch keine rationale Zahl hervorgebracht wird [daß es solche Zahlen gibt, war S. 13, 14 an dem Beispiel $\lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2$ usw. bewiesen worden], so erschaffen wir eine neue, eine irrationale Zahl α, welche wir als durch diesen Schnitt (A_1, A_2) vollständig definiert ansehen. . . Es entspricht also von jetzt ab jedem bestimmten Schnitt eine und nur eine bestimmte rationale oder irrationale Zahl. . ."

In „§ 5. Stetigkeit des Gebietes der reellen Zahlen" folgt endlich (S. 15) die Definition der „Stetigkeit, d. h. es gilt folgender Satz: IV. Zerfällt das System $\mathfrak{R}$ aller reellen Zahlen in zwei Klassen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ von der Art, daß jede Zahl α_1 der Klasse $\mathfrak{A}_1$ kleiner ist als jede Zahl α_2 der Klasse $\mathfrak{A}_2$, so existiert eine und nur eine Zahl α, durch welche diese Zerlegung hervorgebracht wird." [Es folgt S. 18, 19 der Beweis für diesen Satz IV.]

Wem gälte es nicht als ein Zuwachs an Erkenntnis, wenn hier die sonst nur „intuitiv" faßbare Eigenschaft der „Stetigkeit" ausgeschöpft ist durch rein „diskursive" Begriffe und Sätze?

So sehr aber jene Forderung, die Arithmetik von Geometrie unabhängig zu machen, im wissenschaftlichen Interesse zu begrüßen ist, so wenig kann sie den didaktischen Entschluß, Arithmetik und Geometrie in innigste Verbindung zu setzen, wankend machen. Gesteht doch auch DEDEKIND überall ein, daß historisch und psychologisch die geometrische Anschaulichkeit fast überall (ausgenommen etwa die lateralen Zahlen) das Vorausgehende und das Bedürfnis nach reiner Arithmetik selbst erst Erzeugende gewesen sei. Was aber kann der Unterricht auch in diesen abstraktesten Dingen anderes wollen, als durch die wirksamsten Mittel dem Schüler ebenfalls nur einen ersten Blick öffnen und ein erstes Bedürfnis wecken nach einer von Geometrie befreiten Arithmetik? Kann doch schon das Wort „Befreiung" erst dann verstanden werden, wenn vorher die Verbindung anschaulich erfaßt worden war! — Also nur auch künftighin ruhig ausgehen von der Zahlen-Punktreihe und den Schüler zuerst räumlich anschauen und verstehen lehren, wieviel von da noch fehlt bis zur raumfreien Zahlen-Linie!

§ 27. Goniometrie und Trigonometrie.

Der im nachfolgenden skizzierte Lehrgang ist so gedacht, daß Goniometrie und Trigonometrie durch ein ganzes Jahr[1]), das erste der Oberstufe, neben der Arithmetik der dritten Operationsstufe (einschließlich der zugehörigen Gleichungen) einhergehen. Dabei werden die Potenzen und Wurzeln[2]) etwa die ersten zwei Monate in Anspruch nehmen und das Logarithmenrechnen erst im dritten Monat einsetzen. Diese zwei Monate Trigonometrie ohne Logarithmen sind uns aber keineswegs unwillkommen, da wir den Gebrauch der Tafeln natürlicher Funktionen, namentlich während des Vorkursus (S. 263ff.) reichlich gepflegt wissen wollen und jede verfrühte Benutzung der logarithmisch-trigonometrischen Tafeln geradezu als didaktischen Schaden betrachten.

Das reichliche Zeitausmaß ermöglicht eine reichliche planmäßige Wiederholung von Planimetrie und Stereometrie während des Trigonometriejahres. Das nächstliegende Beispiel hiefür gibt natürlich die Beziehung der trigonometrischen Auflösungsfälle zu den planimetrischen Kongruenzsätzen, allgemeiner zum Berechnen und Konstruieren ebener, aber auch räumlicher Gebilde. Wie sich ein solches Zusammengehen der Trigonometrie mit früheren (und auch späteren) Abschnitten planmäßig einrichten ließe, werden die Lehrproben gegen Schluß des Abschnittes zeigen (S. 289ff.). Für jetzt sei noch zu einer grundsätzlichen Erwägung eingeladen, welche von den beiden Anordnungen die bessere ist: die reichsdeutsche: Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie, oder die österreichische: Planimetrie, Stereometrie, Trigonometrie.

1) Dieser alte Wunsch ist durch die neuen österreichischen Lehrpläne erfüllt. Früher setzten Goniometrie und Trigonometrie an den österreichischen Gymnasien erst im zweiten Semester der sechsten Klasse ein. Im ersten Semester war Stereometrie vorausgegangen, die sich meistens sogar noch eine Zeitlang ins zweite Semester hineinzog. Infolgedessen konnte man nur Goniometrie und von Trigonometrie nur das rechtwinklige Dreieck in diesem Schuljahr beenden. Das schiefwinklige Dreieck zog sich dann in die siebente Klasse hinein, so daß wieder dieser die analytische Geometrie verkümmert war. Von nun an hat jeder der vier Hauptzweige, Planimetrie, Stereometrie, Trigonometrie, Analytik, je ein volles Schuljahr (IV. V. VI. VII.). Wieviel Anlaß zu Nervosität beim Lehrer und also auch beim Schüler durch eine solche plastische Anordnung wegfällt, kann nur ermessen, wer jahrelang darunter gelitten hat, in wie ungeschickter Weise einander jene Hauptabschnitte während der einzelnen Schuljahre sozusagen auf die Hacken getreten waren.

2) Vgl. über deren sachgemäße Ansetzung nicht zu Ende der Mittel-, sondern zu Beginn der Oberstufe S. 221, 223.

Wir bekennen uns zu letzterer – nicht nur aus den vom Standpunkt der Raumanschauung und der Stereometrie als solcher erörterten Gründen (S. 3, 203ff.), sondern auch vom Standpunkte der Goniometrie; namentlich deshalb, weil, wie schon S. 221 hervorgehoben wurde, der Schüler mit diesen zum erstenmal unter dem Namen „Funktionen" auftretenden Gebilden[1]) sin, cos, tg, ctg, (sec, cosec) eine ihm ganz neue und eine Zeitlang fremdartige Welt betritt[2]); wogegen die Stereometrie auch ihrer Methode nach der Planimetrie wesensverwandt ist und vom Schüler um so mehr als selbstverständliche Erweiterung der Planimetrie auf Dreidimensionales empfunden wird, wenn beide Zweige schon auf der Unterstufe anhaltend in der von uns vorausgesetzten innigen Verbindung und Durchdringung behandelt worden waren.

Übrigens sollen die nächsten Bemerkungen darüber, daß und wie ein Vorkursus der Goniometrie und Trigonometrie didaktisch erwünscht sei, ehe man an die systematische Goniometrie geht, ebenso gelten, wenn man die Trigonometrie nach, wie wenn man sie vor der Stereometrie lehren will. – Gerade ein solcher Vorkursus Goniometrie und Trigonometrie gibt sogleich auch zu einigen ganz allgemeinen Vorbemerkungen Anlaß.

Die Goniometrie mit ihren zahlreichen zu memorierenden Formeln (manche Lehrbücher halten deren fünfzig oder mehr für nötig – die der ebenen und sphärischen Trigonometrie nicht mitgezählt), mit ihren zahlreichen Einzelregeln über die Vorzeichen der einzelnen Funktionen in den einzelnen Quadranten, über ihr Wachsen und Abnehmen, ihre obersten und untersten Werte u. dgl. m., scheint wie geschaffen zum Tummelplatz arger didaktischer Mißgriffe. Noch einer der erträglicheren ist es, wenn jenes Arsenal von Memorierstoff wochenlang mit den Schülern einexerziert wird, ohne daß sie während all dieser Wochen erfahren, wozu denn nun alle diese „Griffe" künftig nötig sein

1) Was die Zeichen für die sechs Funktionen betrifft, so besteht hierin noch wenig Übereinstimmung. Der obigen bedient sich z. B. auch RUDIO (a. a. O. S. 23 u. a.). Manches daran ist Geschmacks- oder doch nur Bequemlichkeitssache; z. B. daß die großen Anfangsbuchstaben in Sin, Cos außer Gebrauch zu kommen anfangen oder daß man selten mehr tang schreibt, weil tg denselben Zweck erfüllt. Aus sachlichen Gründen zu widerraten ist aber z. B. die Schreibung cot, weil sie allzu leicht mit cos verwechselt wird, zumal die Buchstaben s und t von manchen ziemlich ähnlich geschrieben werden.

2) Freilich hatte HERBART in seinem „ABC der Anschauung" die Trigonometrie sogar schon beinahe an die Spitze der Planimetrie gestellt.

werden – welches fremde Land man denn durch sie erobern könne. Unerträglich dagegen ist es, daß, weil es naturgemäß bei diesem Fremdheitsgefühl mit dem Einlernen jener Definitionen und Regeln immer und immer noch nicht recht vorwärts will, sich zum immer und immer wiederholten „Griffe machen lassen" schließlich wie von selbst auch der Kasernenhofton einfindet. Aber auch wenn solche leidige emotionalen Nebenerfolge freundlich vermieden werden, bleibt es doch schon intellektuell eine trübselige Erfahrung, wenn zum Beispiel bei der Maturitätsprüfung einmal die *„res ad principia venit"* und auf die Frage des Vorsitzenden: „Ja was stellen Sie sich denn eigentlich unter einem Kosinus vor?"[1]) der Schüler weder durch die korrekte Definition noch durch eine Veranschaulichung in konkreten Fällen zu antworten weiß. Zwar folgt aus solchen einzelnen Fällen so wenig etwas wie aus allen sonstigen Prüfungsgeschichten; aber den Eindruck, daß die Wörter und Zeichen sin, cos usw. häufiger ausgesprochen und geschrieben werden, als daß bei ihnen immer etwas völlig Deutliches gedacht würde, sollte man wenigstens nicht mehr während der Maturitätsprüfung zu empfangen Gelegenheit haben.

Das Gefühl, daß in der herkömmlichen Art der Einführung in die Goniometrie nicht alles so ist, wie es sein sollte, hat denn auch zu unzähligen voneinander nach den verschiedensten Richtungen abweichenden Vorschlägen, wie es zu machen, besser zu machen sei, geführt. Nur als einer dieser Vorschläge mag auch der folgende betrachtet sein, der auch schon im mathematischen Anhang (Nr. 18) zu meiner Physik und Naturlehre (Oberstufe) knapp angedeutet ist, und der hier durch eine nähere Begründung ergänzt sei, warum zuerst die Betrachtung auf (absolute) spitze Winkel beschränkt wird, ja sogar mit nur einer Funktion (tg) beginnt. Da all das von den bisherigen Gewohnheiten stark abweicht, sei folgendes vorausgeschickt:

Man kann freilich „streng wissenschaftlich" die goniometrischen Funktionen, u. zw. alle sechs, sogleich zu Beginn so definieren,

1) Überboten wird ein solches mehr als einmal dagewesenes Schülerstückchen durch die folgende Geschichte, die ich einem mathematischen Universitätskollegen verdanke. Er war als Lehramtskandidat von einem Studiengenossen um Aufschluß gebeten worden über eine wirklich schwierige Aufgabe der elliptischen Funktionen. Nach empfangenem Aufschluß und abgestattetem Dank erklang noch zwischen Tür und Angel die Frage: „Herr Kollege, können Sie mir noch kurz sagen –: Was ist das eigentlich, ein Kosinus?"

daß die Definitionen für alle Quadranten, negative Winkel eingeschlossen, gelten. Die didaktische Frage ist nur, ob das wissenschaftlich Beste gerade hier auch das didaktisch Beste ist: solange hiefür nicht besondere Gründe beigebracht werden, wird man von vornherein hieran ebensogut zweifeln dürfen, wie auch sonst in der Didaktik die rein wissenschaftliche Rücksicht nur eine unter mehreren anderen ist. Eine der nicht bloß didaktisch, sondern auch wissenschaftlich wesentlichen Absichten des im folgenden skizzierten und in seinen einzelnen Schritten etwas näher motivierten Vorkursus, der zwischen Goniometrie und Trigonometrie noch nicht so scharf scheidet, wie es ja auch in der Geschichte der mathematischen Wissenschaft[1]) erst ganz spät geschehen ist, will die sein, daß sogleich bei der ersten Einführung der goniometrischen Funktionen der Schüler auch ihren nächsten Zweck, die Berechnung der Winkel aus den Seiten und der Seiten aus den Winkeln im rechtwinkligen Dreiecke, jeden Augenblick vor Augen hat. Daher beginnen wir nicht mit einer abstrakten Goniometrie, sondern mit einem

§ 28. Vorkursus der Goniometrie und Trigonometrie.

Die Funktion Tangens.

Wir gehen von einer speziellen Aufgabe aus: Ein Auge A (Fig. 94) befinde sich im wagerechten Abstande $b = 10$ m vom Fußpunkte einer lotrechten Turmwand und blicke zu dieser (z. B. durch das Diopter oder Ablesefernrohr eines Theodoliten) unter dem Elevationswinkel $\alpha^0 = 0^0, 1^0, 2^0, 3^0 \ldots 30^0, 45^0, 60^0 \ldots 87^0, 88^0, 89^0, 90^0$ gegen den Turm hin. Es gehören dann zu den immer größeren Winkeln α^0 auch immer größere Strecken a m vom Fußpunkt des Turmes aufwärts bis zu dem von der Blicklinie getroffenen Punkte. Man konstruiere die genannten Winkel in einer Zeichnung (am besten auf Millimeterpapier, etwa mit $b = 45$ mm als Längeneinheit, s. S. 267), messe die zugehörigen Seiten a, bestimme die

Fig. 94.

Fig. 95.

1) Eine Fülle von auch für den Unterricht wertvollen Mitteilungen über die Geschichte der einzelnen Funktionen findet man bei RUDIO (vgl. oben S. 256) zusammengestellt; einige Proben hievon im folgenden.

zugehörigen Verhältnisse $\frac{a}{b}$ und stelle jene Winkel und die Verhältnisse $\frac{a}{b}$ in einem Täfelchen zusammen. Von diesen empirisch[1]) gefundenen Werten der $\frac{a}{b}$ erlaubt die Planimetrie für $\alpha = 45^0$ aus dem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke, für $\alpha = 30^0$ und $\alpha = 60^0$ aus je einem halben gleichseitigen Dreiecke die $\frac{a}{b}$ auch zu berechnen; und es nimmt unsere Tafel hierdurch die folgende Gestalt an:

α^0	$\frac{a}{b}$ aus der Zeichnung durch Messen	$\frac{a}{b}$ planimetrisch berechnet	$tg\,\alpha$ aus der gedruckten Tafel
0	0	0,0000	0
1	unter 0,02	?	0,0175
2	unter 0,04	?	0,0349
3	über 0,05	?	0,0524
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
30^0	fast $\frac{3}{5}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = 0,5774$	0,5774
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
45^0	1	1	1
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
60^0	fast $1\frac{3}{4}$	$\sqrt{3} = 1,7321$	1,7321
63^0	fast 2	?	1,9626
64^0	über 2	?	2,0503
.	.	.	.
90^0	∞	∞	∞

Eben diese planimetrisch errechneten Wertepaare finden sich nun auch in der gedruckten „Tafel der (natürlichen) goniometrischen Funktionen“ u. zw. unter dem Titel „Tangens“. Wenn der Schüler vielleicht auch nicht sogleich darauf kommt, warum man gerade das Wort *Tangens*, „die Berührende“, gewählt hat (die Fig. 95 wird uns übrigens bald auch diese Neugierde befriedigen), so sagt uns doch ein Überblick über die Tafel, welchen Begriff wir mit dem Worte Tangens zu verbinden haben. Nämlich: Von dem als veränderlich, d. h. von 0^0 bis 90^0 wachsend gedachten Winkel ist abhängig der jeweilige Wert des

1) Ich mache bei diesem Anlaß aufmerksam auf ein neues Lehrmittel: Der neue Transporteur nach Prof. Dr. KREUSCHMER, Barmen (Lehrmittelanstalt Ehrhard, Bensheim (Hessen), Preis 0,40 M.). Nach der beigegebenen Anweisung dürfte sich dieser Transporteur und sein Drehzeiger ebensogut für den oben vorgeschlagenen Lehrgang des Ablesens der Funktionswerte auf Millimeterpapier wie für die bisherige Methode des Darstellens der Funktion am Kreise verwenden lassen.

Verhältnisses $\frac{a}{b}$. Dieses Verhältnis ist also ebenfalls veränderlich, u. zw. abhängig veränderlich, wenn der Winkel α als unabhängig veränderlich vorausgesetzt worden war. Gleichviel, ob wir schon früher [die Schüler mögen recht viele und mannigfaltige, ihnen erinnerliche Beispiele nennen!] solche Abhängigkeiten durch das Wort *„Funktion"* bezeichnet haben oder nicht (den Gedanken solcher „Gesetze" pflegten wir ja längst), so werden wir spätestens jetzt sagen: das Verhältnis $\frac{a}{b}$ (noch ausführlicher: der Exponent dieses Verhältnisses) ist eine **Funktion** des Winkels α; und da „Winkel" griechisch γωνία (gonia) heißt (von [?] γόνυ, gony, Knie), so werden wir sagen: das Verhältnis $\frac{a}{b}$ ist eine **Winkelfunktion** oder eine **goniometrische Funktion** des Winkels α. — Was alles an den so nötigen Wort- und Sacherklärungen mag hier versäumt worden sein, solange „die Pflege des funktionalen Denkens" noch nicht Programmpunkt einer Reform war.

Es wird einigermaßen vom Gutdünken des Lehrers und namentlich davon abhängen, wie weit er schon seine Schüler in graphischen Darstellungen geübt hat, welchen von beiden nun möglichen Wegen er lieber zuerst einschlägt: den praktischen, sogleich einige von den unten vorgeschlagenen konkreten trigonometrischen Anwendungen der Funktion Tangens rechnen zu lassen und so die Schüler ohne alle weitere Umschweife mit dem wirklichen Gebrauche der goniometrischen Tafel vertraut werden zu lassen; oder den folgenden mehr theoretischen, der zeigen soll, daß und warum es einer besonderen Funktion neben den schon bekannt gewordenen Potenzfunktionen (die Wurzeln mit eingeschlossen) bedurft hat. Diese letztere theoretische Erörterung — gleichviel, ob man sie früher oder später in den praktischen Unterricht einschalten will (nur ganz fehlen sollte sie nicht, wiewohl sie bei bloß formalistischem Betrieb der Goniometrie wohl immer gefehlt hat) — wird nun jedenfalls am besten an die graphische Darstellung der Funktion tg nach den Tafelwerten anknüpfen (vgl. die Zeichnung S. 267):

1) Nach dem auf S. 233 und S. 237 empfohlenen oder wenigstens als möglich dargestellten Vorgang, da wir den Gebrauch der allgemeinen Zeichen x und y wie auch den allgemeineren Begriff „Funktion" erst für den nächsten Jahrgang aufsparen, wäre an obiger Stelle die Form der Gleichung $y=x^2$ noch zu umgehen, was, wie a. a. O. dargelegt, keineswegs hindert, den in diesem schriftlichen Symbol zum Ausdruck kommenden Gedanken auch schon viel früher vielseitig zu pflegen.

Der Schüler möge sich auf Millimeterpapier das typische Bild der Tangenskurve für den ersten Quadranten dadurch verschaffen, daß er an einer wagerechten Geraden je 1 Grad als 1 mm aufträgt, dann wegen $\operatorname{tg} 45^0 = 1$ zu $\alpha = 45$ mm eine Lotrechte von gleichfalls 45 mm als Höhe aufträgt, sodann wegen $\operatorname{tg} 63^0 26' = 2$ im Endpunkte der Wagerechten von fast 63,5 mm eine Lotrechte von 45 mm $\times$ 2 = 90 mm und schließlich im Endpunkte der Wagerechten von 90 mm wegen $\operatorname{tg} 90^0 = \infty$ eine ins Unbegrenzte gehend gedachte Gerade, der die nun (mit Hilfe der der Tafel zu entnehmenden, aber auch als Tangentenstrecke für einen Kreis mit dem Halbmesser $b = 45$ mm vom Schüler selbst zu zeichnenden und zu messenden Zwischenwerte) möglichst genau zu zeichnende Kurve sich als einer Asymptote anzuschließen hat. Sodann: In der Nähe von 0^0 zweigt die Kurve unter einem endlichen[1]) Winkel τ von der Wagerechten ab (was natürlich den Schülern nicht von vornherein irgendwie zu befehlen ist, sondern was, wenn es bei den ersten Versuchen außer acht geblieben sein sollte, dem Lehrer auf einen Blick verrät, inwieweit die Zeichnung noch nichts getaugt hat). Nun gesetzt, die Schüler hätten nach und nach diese Tangenskurve in aller ihnen möglichen Genauigkeit zustande gebracht – und es pflegen sich ja immer wenigstens ein oder einige Liebhaber zu finden, die solche Aufgaben mit wirklicher Sorgfalt und Geschicklichkeit lösen, was dann für den weiteren Unterricht ausreicht und den ohne ihre Schuld Ungeschickteren erfolglosen Zeitverbrauch ersparen mag – so knüpft sich nun an diese Figur die theoretische Frage: „Können wir mit dieser unserer Tangenskurve irgendeine der Kurven für die zweite Potenz, die dritte Potenz (oder vielleicht die $2\frac{1}{2}$ Potenz) zur Deckung bringen?“[2]) Versuchen wir es mit $y = x^2$, wo ja ebenfalls

---

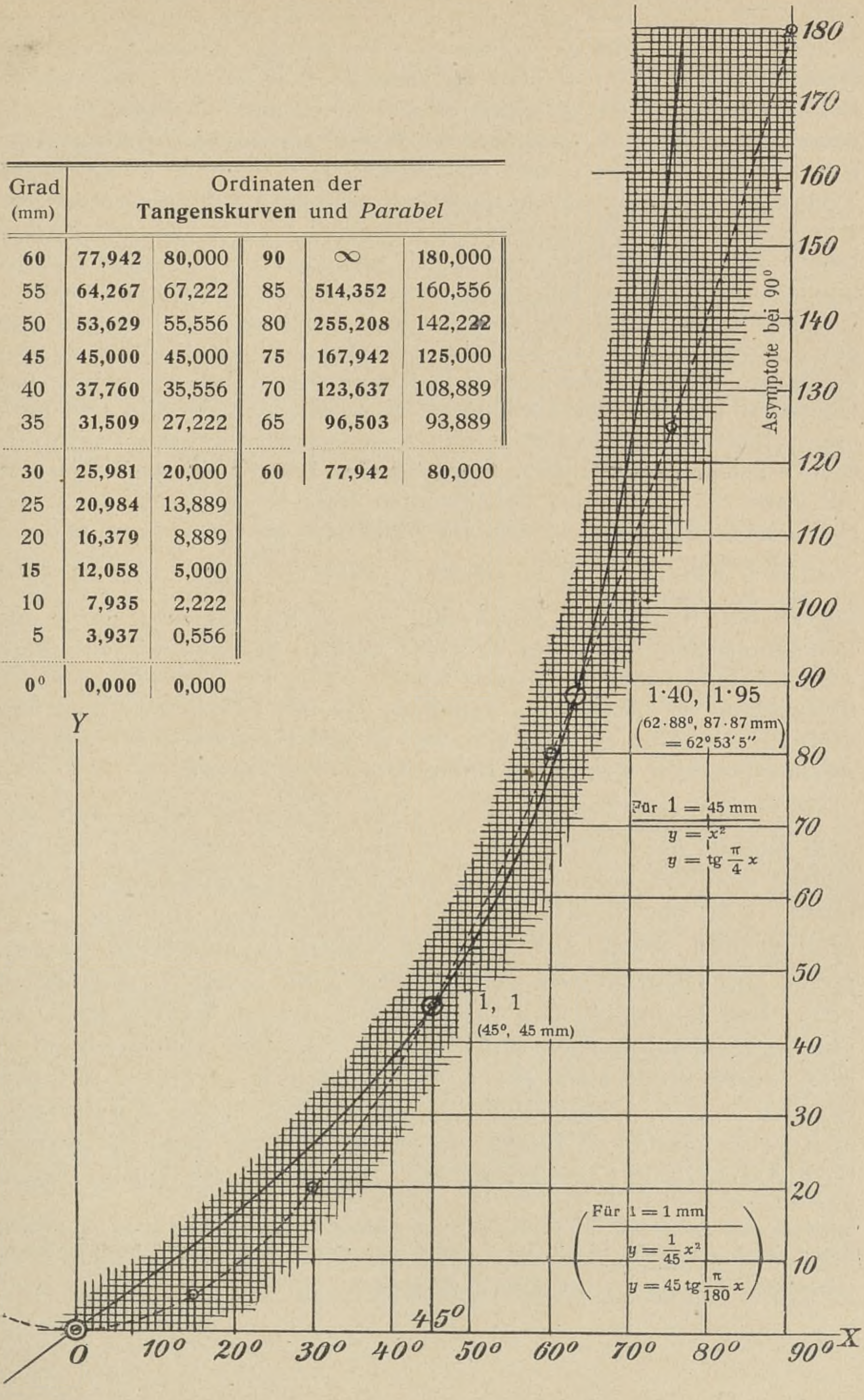
1) Als eine Übung für später, d. h. wenn auch $\frac{d}{dx} \operatorname{tg} x$ erlernt ist, ergibt sich der Winkel τ, unter dem die Tangenskurve $y = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} x$ von der Abszissenachse abzweigt, so:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\cos^2 \frac{\pi}{4} x} \text{ und für } x = 0 \text{ speziell } \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \tau = \frac{\pi}{4} = 0{,}785398,$$

woraus $\tau = 38^0 8' 45''$. – Oder mit natürlichen Tafeln für zwei zu zwei Minuten: $\operatorname{tg} 38^0 8' = 0{,}78504$, $\operatorname{tg} 38^0 10' = 0{,}78598$, woraus durch Interpolation derselbe Wert $\tau = 38^0 8' 45''$ folgt.

2) Es ist nicht nötig, alle Anwendungen und Aufgaben, zu denen das Vergleichen der zwei Kurven in der Zeichnung S. 267 während des Unterrichts der Goniometrie, der analytischen Geometrie, der Gleichungen usw. Anlaß gibt, hier aufzuzählen und zu erörtern. Nur eines: Daß die Kurven in den hier gewählten verhältnismäßigen Dimensionen außer den zwei gemeinsamen Punkten für 0, 0 und für 1, 1 (bzw. 45, 45 mm) auch noch so verhältnismäßig nahe bei letzteren einen dritten gemeinsamen Punkt haben, wird den Schüler

Grad (mm)	Ordinaten der **Tangenskurven** und *Parabel*		Grad (mm)	Ordinaten der **Tangenskurven** und *Parabel*	
60	**77,942**	80,000	**90**	∞	180,000
55	**64,267**	67,222	85	**514,352**	160,556
50	**53,629**	55,556	80	**255,208**	142,222
45	**45,000**	45,000	**75**	**167,942**	125,000
40	**37,760**	35,556	70	**123,637**	108,889
35	**31,509**	27,222	65	**96,503**	93,889
30	**25,981**	20,000	**60**	**77,942**	**80,000**
25	**20,984**	13,889			
20	**16,379**	8,889			
15	**12,058**	5,000			
10	**7,935**	2,222			
5	**3,937**	0,556			
0°	**0,000**	0,000			



für $x = 0$ auch $y = 0$ wird, und wo zu $x = 45$ mm auch $y = 45$ mm gehört. – Haben wir aber diese zwei Punkte der beiden Kurven zur Deckung gebracht, so werden wir sehen, daß es an fast allen anderen Punkten klafft; wie gesagt steigt für $x = y = 0$ die Tangenskurve unter einem von 0^0 deutlich verschiedenen Winkel an, wogegen die Kurve für $y = x^2$ sich der Wagerechten anschmiegt; für $\alpha = 90^0 = 90$ mm ist die Tangenskurve ins Unendliche gestiegen, was die Quadratkurve erst für $x = \infty$ tut. Schon durch solche Erwägungen wird es sich sogar theoretisch ganz ausreichend zeigen, daß wenigstens eine bloße Potenzfunktion nicht dasselbe leisten konnte, wie die Tangensfunktion. Und da wir nun bisher mit andersartigen Funktionen als Potenzen (die erste Potenz als lineare Funktion mit eingeschlossen) nichts zu tun hatten, so sehen unsere jungen Funktionentheoretiker am Anfang der Oberstufe ein, daß sie mit ihren bisherigen arithmetischen und geometrischen Kenntnissen nicht imstande sein werden, sich ihre Tangenstafeln selber auszurechnen. Immerhin aber liefert ihnen die Planimetrie mit ihrem Satz über das Geteiltwerden einer Dreiecksseite durch die Halbierende des Gegenwinkels ein Mittel, sich aus gegebenem $\operatorname{tg}\alpha$ sowohl $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ wie $\operatorname{tg} 2\alpha$ zu verschaffen, wobei es wegen der ins Spiel kommenden Hypotenuse einstweilen noch nicht ohne Anwendung des Pythagoreischen Lehrsatzes hergeht; deshalb kommen wir auf diese Aufgabe am besten erst wieder zurück, wenn wir nach hinreichender Durchübung an praktischen Aufgaben von der Funktion tg (und ctg) vorläufig Abschied nehmen und uns zu den Funktionen sin und cos wenden (worüber einiges am Ende dieses Paragraphen).

Was nun die Anwendung dieser ersten Bekanntschaft mit dem Begriff der Funktion tg und ihrer Tafel betrifft, so wird sie gemäß unserem didaktischen Prinzip der „angewandten Mathematik“ vor der „reinen“, zumal aber in diesem von jeher ganz überwiegend seiner Anwendungen wegen ausgebildeten Kapitel, gleich von allem Anfang so mannigfaltig als möglich zu gestalten sein. Nur kurzsichtigster Doktrinarismus oder freilich auch die bloße gedankenlose Gewohnheit könnte zum Aberglauben verleiten, man dürfe nicht eher ein rechtwinkliges Dreieck mit den Stücken a, b, α, β (und auch c) mittels der Funktion tg trigonometrisch bearbeiten lassen, bevor der Schüler nicht die ganze Goniometrie im Leibe (und dann wahrscheinlich mehr im Magen

---

allein schon neugierig machen, wie man diese Punkte durch Gleichunglösen findet, und er steht somit von selbst vor der Aufgabe, die transzendente Gleichung $x^2 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x$ zu lösen (vgl. S. 254).

als im Kopfe) hat. Auf die Gefahr hin, dem einen oder dem anderen „formal bildenden" Fachgenossen schweres Ärgernis über eine solche verweichlichende Methode zu bereiten, schlagen wir vor, sogleich in der allerersten Goniometriestunde, die dann zugleich auch Trigonometriestunde ist, Aufgaben wie die folgenden lösen zu lassen:

1. Es wird Länge und Breite des Schulzimmers gemessen (wenn dies nicht schon längst geschehen ist), und nun werden die Winkel bestimmt, die die Diagonale des Fußbodens mit den beiden Wänden einschließt. — Wir zeichnen das Rechteck in einem bestimmten Maßstab, messen die Winkel mit dem Transporteur und sehen nun zu, mit welchem Grade der Genauigkeit unsere Tafeln uns das Ergebnis der Winkelmessung bestätigen. Wir hatten definiert $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$; findet sich also z. B. $\frac{a}{b} = 0{,}8$, so sagt unsere Tafel, falls sie von 2 zu 2 Minuten fortschreitet, nur soviel:

$$\operatorname{tg} 38^0 38' = 0{,}79924$$
$$\operatorname{tg} 38^0 40' = 0{,}80020$$

also $38^0 38' < \alpha < 38^0 40'$, u. zw. durch rohe Interpolation $38^0 39\frac{1}{2}'$.

Natürlich sehen wir aus diesem mangelhaften Zahlenergebnis, daß wir mit unserer trigonometrischen Methode noch sehr im Anfang sind, und daß es Aufgaben geben wird, in denen Tafeln nach einzelnen Minuten, ja Sekunden (oder Zehntel und Hundertel Sekunden) erwünscht oder nötig sind. Aber wir sehen zugleich, daß unsere Tafeln trotz der offenbaren Lückenhaftigkeit nicht zurückstehen hinter den rohen Ergebnissen der direkten Längenmessung, wie wir sie an den Zimmerwänden u. dgl. zu vollziehen pflegen. — Wie in diesem nächstbesten Beispiel angedeutet, mögen Gedanken über die allmählichen Verfeinerungen der Messungs- und Rechnungsmittel und Methoden den ganzen Aufbau des Goniometrie- und Trigonometrie-Unterrichtes begleiten. Denn warum sollte man es den Schüler nicht während dieses Unterrichtes allmählich nacherleben lassen, wozu man das ganze Arsenal goniometrischer Tafeln auf 4, 5, 7, 8 Stellen ausgearbeitet hat? (Soeben fangen die Astronomen an, vieles von 7 auf 8stellige Tafeln umzurechnen). Der Schüler aber, der von der ersten Stunde an, d. h. schon vor einer irgendwie zusammenhängenden und auch nur relativ vollständigen Goniometrie, schon Trigonometrie, d. h. wirkliche Messung wirklicher Dreiecke mit seinen höchst bescheidenen instrumentalen Mitteln treibt, mag inne werden und bleiben, daß er mit Kanonen auf Spatzen schießt, wenn er die Zimmerwände in zweiziffrigen Maßzahlen genau gemessen hat und nun mit fünfstelligen Logarithmen die Winkel auf Hundertel Sekunden genau zu berechnen – sich belügt. – Es bleibe wieder ganz dem Lehrer überlassen, in welchem Zeitpunkte und in wie großen und häufigen Dosen er alle diese grundsätzlichen Wahrheiten seinen Schülern eingeben will; zu einer wirklichen, nicht nur phantasierten Trigonometrie gehören jene Wahrheiten mindestens ebenso notwendig wie neun Zehntel der hergebrachten goniometrischen Formeln. Denn auch ohne diese Formeln, nur schwerfälliger, könnte man schon mittels einer Funktion richtig rechnen (worauf wir bald, S. 282, zurückkommen); ohne jene beständige Rücksicht auf die Genauigkeitsgrade aber sind alle Rechnungsergebnisse teils fiktiv, teils geradezu falsch. – Aus allen diesen Gründen lassen wir baldigst jener ersten (1.) noch einige weitere handgreifliche praktische Aufgaben folgen; z. B.:

2. Die Stufen der Treppe sind $a = 10$ cm hoch, $b = 25$ cm breit. Wie steil ist die Treppe?

3. Eine Straße steigt neben den Kellerfenstern unseres Schulhauses so stark an, daß sie sich auf b m wagrechten Abstand um a m lotrechten gehoben hat. Wie groß ist der Steigungswinkel? – Umkehrungen der Aufgabe; an den Fenstern u. dgl. nachzumessen.

4. Ein Stab von $h = 1$ m Länge warf heute Mittag einen Schatten von $l = 2$ m Länge. Wie hoch stand die Sonne über dem Südpunkte?

5. Mannigfaltige Aufgaben über die Fruchtbarkeit solcher Schattenbeobachtungen für die grundlegendsten astronomischen und geographischen Konstanten; worauf im II. Band dieser didaktischen Handbücher (Himmelskunde und astronomische Geographie) ausführlich zurückzukommen sein wird. Für jetzt nur die Bemerkung, daß sogar schon Aufgaben wie die, aus dem längsten und kürzesten Schatten geographische Breite und Schiefe der Ekliptik zu berechnen (vgl. z. B. Reidt, Aufgaben zur Trigonometrie 4. Aufl., S. 80, Nr. 65, 66), die vom Standpunkt der Astronomie beim Schüler schon einen sicheren Einblick in den Zusammenhang mannigfacher Größen voraussetzen, dagegen vom Standpunkt der Goniometrie und Trigonometrie so primitiv sind, daß sie ohne weiteres schon an der Spitze des Vorkurses behandelt werden können. Denn z. B. aus dem Ansatz

$$\frac{l}{h} = \operatorname{tg}(\varphi - \epsilon); \quad \frac{L}{h} = \operatorname{tg}(\varphi + \epsilon)$$

gewinnt der Schüler mit den Tafeln der natürlichen Funktionen sogleich erste Annäherungen für $\varphi - \epsilon$ und $\varphi + \epsilon$ und hieraus φ und ϵ selbst ohne alle goniometrische Transformation. – Ob es gut ist, einen so großen Teil der Aufmerksamkeit des Schülers so kurz nach Beginn der

Goniometrie schon für eine astronomisch und geographisch so folgenreiche Anwendung in Anspruch zu nehmen, mag übrigens auch erst im II. Band unparteiisch abgewogen werden.

6. Es erfinde der Schüler selber derartige Aufgaben[1]); z. B. anknüpfend an das Ausgangsbeispiel vom Turm auch die vom indirekten Messen der Turmhöhen (der Stockwerkshöhen u. dgl.).

Sind genug solche Einzelanwendungen der Beziehung $\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$ durchgenommen — u. zw. ohne mechanisches Haften an den drei Bezeichnungen a, b, α oder an der ursprünglichen Zeichnung des Dreieckes mit einer horizontalen und einer vertikalen Kathete, sondern so, daß der Schüler bei was immer für einer Lage der Figur sofort an der wirklichen Situation z. B. des Stabes, des Sonnenstrahles, des Schattens die typische Beziehung zwischen Kathete und Winkel erschauend diese Beziehung nach allen ihr möglichen Wendungen frei beherrscht — so mögen erst diese Beziehungen in den drei festen Regeln $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $a = b\operatorname{tg}\alpha$, $b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$ festgelegt werden. Erst von da an darf und soll aber dann auch das Nichtwissen und das Nichtimgriffhaben dieser Beziehungen als das behandelt werden, was es ist: als grobe Fahrlässigkeit oder Unfähigkeit des Schülers. — So hier — und so überall, wo es Regeln anzuwenden gilt: zuerst die Anwendung, dann die Regel; eine didaktische Forderung, die man vergeblich durch die wohlfeile Bemerkung, man müsse doch zuerst die Regel haben, bevor man sie „anwenden" kann, zu entkräften suchen würde. Diese sehr allgemeine Bemerkung (— sie reicht weit über die Mathematik

1) Sogleich hier erlaube ich mir behufs allfälliger Nachahmung des Vorganges mitzuteilen, daß ich meine Schüler die Größe des Anwendungsgebietes der einzelnen Funktionen dadurch zu überschauen anhielt, daß sich die Schulklasse sechs Papierbogen, je einen für jede der sechs Funktionen, anzulegen hatte. Jeder Schüler trug dann in jeden Bogen mindestens je ein Beispiel ein, wie solche zuerst im mathematischen, später womöglich noch ausgiebiger im physikalischen Unterricht aufgetaucht waren. Also etwa:

Beispiele für die Funktion Sinus.

Schüler S_1: Im rechtwinkligen Dreieck wächst eine Kathete mit dem Sinus des ihr gegenüberliegenden Winkels (bei konstanter Hypotenuse).

Schüler S_2: An der schiefen Ebene wächst die Beschleunigung mit dem Sinus des Steigungswinkels usw.

Hierbei empfahl es sich, zuerst die schwächsten Schüler ihre Beispiele einschreiben zu lassen, da es eben die nächstliegenden waren. Die besten Schüler hatten sich dann (nachdem sie auch dem von ihren Kameraden Gelieferten nach Inhalt und Form zu den allenfalls nötigen Verbesserungen verholfen hatten) um die fernerliegenden Anwendungen umzusehen.

hinaus in jene Schuldisziplinen, die sich überhaupt nur aus „Regeln“ zusammensetzen zu müssen glauben) mag deshalb hier ausgesprochen sein, weil eben Goniometrie und Trigonometrie, wie sonst wohl kein Gebiet der Mathematik, für das Regel- und Formeldreschen überhaupt nur zu oft haben die Tenne abgeben müssen.

Ehe wir nun Abschied nehmen von diesem ersten Stückchen Vorkursus, das uns im wirklichen Unterricht immerhin eine bis zwei, vielleicht sogar drei Wochen beschäftigt haben kann, wenn wir von der einen Funktion tg aus wie von einem ersten Aussichtspunkte den Schüler nach so vielen neuen Richtungen haben blicken lassen, mögen nun (für den Leser dieser Didaktik, nicht für den Schüler) erst die Gründe folgen, warum wir von den sechs Funktionen gerade Tangens[1]) als ersten Ausgangspunkt erwählt haben, wiewohl man gewohnt ist, fast immer zunächst den Sinus zu nennen. Der Gründe für die Bevorzugung der Tangens gibt es mehrere, von denen hier folgende zwei ausreichen: 1. Die Funktion tg ist aller Werte von 0 bis ∞ fähig, und es kommt also hier nicht zu dem Eindruck einer auch nur scheinbar willkürlichen Einschränkung wie bei sin, der „nie größer als 1 sein darf.“ 2. Den Namen Tangens erklärt ein Blick auf die Fig. 95, auch schon bevor wir ausdrücklich die „Darstellung der Funktion am Kreise“ vorgenommen haben; für den Namen „Sinus“ dagegen gibt es keine solche für sich selbst zum Schüler sprechende Erklärung[2]). –

---

1) Auch ECKHARDT empfiehlt (in Hoffmann-Schottens Zeitschr., Bd. 35, 1904, S. 262–272) „Die Tangente als Grundlage der Goniometrie“. Diese Abhandlung ist nicht nur zeitlich unabhängig von meiner ebenfalls 1904 im Anhang meiner Physik veröffentlichten Anregung, mit tg zu beginnen, sondern es ist auch der ganze durch ECKHARDT empfohlene Vorgang wesentlich verschieden von dem meinigen, wie schon die ersten Worte jener Abhandlung zeigen: „Durch die Definition der goniometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck legt man diesen Funktionen von vornherein eine Fessel an. – Schon die Feststellung der Bedeutung des Sinus und Kosinus eines stumpfen Winkels bereitet Schwierigkeiten, vor allem aber auch die allgemeine Ableitung des Additionstheorems dieser zwei Funktionen.“ ECKHARDTS Ausgangsdefinition der Funktion knüpft an die Tangentenstrecke des Kreises nach der Weise der analytischen Geometrie an. Auch die Additionstheoreme für sin und cos leitet er erst aus dem für tg ab. Meinerseits glaube ich, daß dieser ganze Weg sich weniger für ein allererstes Einführen in die Goniometrie eignet, als er hinterher den Kenner (auch den gereiften Schüler) interessieren kann; schon als ein den gewöhnlichen Weg zur Abwechslung auch einmal in umgekehrter Richtung durchschreitender möglicher Vorgang.

2) RUDIO a. a. O. S. 24, 25 (nach Cantor-Hankel): Indisch hieß die „Sehne“ und später auch die „Halbsehne“: „jîva“, was die Araber „dschiba“ schrieben.

Wir wenden uns nun von der Funktion tg zur

Funktion Kotangens. – Bei mehreren der bisherigen Aufgaben hatten wir durch tg dividieren müssen; wir sind diesen Divisionen auch nicht aus dem Wege gegangen, sondern haben sie als abgekürzte durchgeführt wie die vorkommenden Multiplikationen (der Logarithmen der Funktionen bedienen wir uns ja erst viel später, vgl. unten S. 283). Aber auch ein abgekürztes Dividieren ist um so viel umständlicher als Multiplizieren, daß es sich lohnt, ein für allemal die Werte von $\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$ auszurechnen, mit denen wir dann multiplizieren dürfen, wo wir hätten durch tg dividieren müssen. Diesen reziproken Wert von Tangens nennt man Kotangens. Also $\mathrm{ctg} = \frac{1}{\mathrm{tg}} = \frac{b}{a}$. – Wiederum Zeichnen von Dreiecken mit Winkeln $\alpha = 1^0, 2^0 \ldots 88^0, 89^0$, Messen der Seiten, Zusammenstellen in einer Tafel, Vergleichung dieser mit den gedruckten Tafeln, graphische Darstellungen und Vergleichungen mit der von tg und dann wieder mannigfaltige Beispiele aus der Wirklichkeit, an denen sich namentlich auch die Grenzgleichungen $\mathrm{ctg}\, 0^0 = \infty$ (z. B. unendliche Länge des Schattens[1]) beim Sonnenauf- und untergang, also beim Höhenwinkel 0^0) und $\mathrm{ctg}\, 90^0 = 0$ kräftig einprägen – nicht als „Regel", sondern als eindrucksvolle „Anschauung" unter Gottes freiem Himmel!

Die Funktion Sinus. – Wir werden auch nicht die Definition $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ aus der Pistole schießen; sondern wir lassen im Schüler selbst vorerst den Wunsch wach werden, auch für das Verhältnis von Kathete und Hypotenuse unmittelbare Tafeln zu besitzen, nachdem wir uns zuerst angesichts irgendeiner Aufgabe, bei der die Hypotenuse ins Spiel kommt, mit den Tangenstafeln unter Heranziehung des Pythagoreischen Satzes ausgeholfen hatten. Didaktisch bedarf dieser vom Lehrer gegen sein besseres mathematisches Wissen künstlich geschaffene Umweg

---

Dieses Wort hat dieselben Konsonanten wie „dschaib", was arabisch „Einschnitt" oder „Busen" heißt; daher „sinus". (Ebenso zufällig klingt „sinus" an „Sehne" an.)

1) Rudio S. 22 über die arabischen Tafeln zuerst für Kotangenten (*umbra recta*) und erst später für Tangenten (*umbra versa*). Dieser historische Umstand enthält wieder eine didaktische Mahnung: Wohl den stärksten Eindruck macht ja bei einem Sonnenuntergang das rapide Wachsen der Schattenlänge, das dann später in dem $\mathrm{ctg}\, 0 = \infty$ seinen Ausdruck findet. – So werden auch diese Schatten-Aufgaben mit ctg ein wiederholendes Bindeglied zu den Schatten-Aufgaben mit tg (S. 270, Aufg. 4, 5) bilden.

keiner Entschuldigung; die Rechtfertigung liegt ja wieder schon in dem alten pädagogischen Rat zur „Kunst, Zeit zu verlieren." Aber auch rein wissenschaftlich lohnt diese anfängliche Unbequemlichkeit: denn wenn wir in der herkömmlichen Weise sofort alle sechs Funktionen einführen, bloß mit der Begründung, daß sich eben aus den drei Seiten a, b, c die sechs Verhältnisse $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{c}{a}$ bilden lassen, so müßte ja ein Schüler, der nicht längst gewohnt ist, die Dinge um so geduldiger hinzunehmen, je weniger er sie versteht, das Hinschreiben durch die erstaunte Frage unterbrechen: „Warum denn auf einmal hier sechs Bestimmungsgleichungen und den Pythagoreischen Satz als siebente, wo wir doch sonst alle Überbestimmungen strenger haben meiden müssen als sogar das Unterbestimmte und Unbestimmte?" Und wenn nicht geradezu Überbestimmungen im sonstigen Sinne, sind jene sechs Größen, wo schon eine genügt, jedenfalls ein *embarras de richesse.* Bei dem herkömmlichen Beginnen mit den sechs Definitionen marschieren denn freilich nur zu bald die drei Reziprokformeln $\sin\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = 1$ usw. und die drei Quadratformeln $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ usw. auf, und es muß dem Schüler scheinen, als geschehe es wieder nur den Formeln zuliebe, wenn dann unter den vielen, geradezu unabsehbar vielen Beziehungen, die ihm eben nur als Übungen im Transformieren — er weiß nicht, wozu — auferlegt werden, nun auch die Aufgabe vorkommt, aus je einer Funktion, z. B. $\operatorname{tg}\alpha$, die fünf übrigen zu ermitteln. Verzichten wir dagegen auf diesen herkömmlichen, anfangs kürzesten, später aber um so verschlungeneren Weg, so wird unser künstlicher Umweg, den Anfänger eine Zeitlang nur mit Tangens und Pythagoras rechnen und hierauf sich freuen zu lassen, wenn er es nun mit seinen Sinustafeln um so leichter haben kann, im Schüler — *incredibile dictu* — sogar nach jenen gefürchteten goniometrischen Formeln ein Bedürfnis um der Sache, nicht um der Formel willen rege werden lassen.

Nach dem Bekanntwerden mit der Sinustafel wieder allseitiges Durchüben, unter Einprägung namentlich von $\sin 0^0 = 0$, $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ (an dem ja der Geübte manchmal allein schon das Walten der Funktion sin erkennt), $\sin 90^0 = 1$. — Unter den Anwendungen wird die Beziehung zwischen Kreissehne und Zentriwinkel zu historischen Mitteilungen Anlaß geben, daß und wie die Alten ihren trigonometrischen Erfordernissen z. B. in der Astronomie durch Sehnentafeln[1]) zu genügen wußten; und es wird – ebenfalls noch vor der systematischen Darstellung am Kreise – die Beziehung zwischen Halbsehnen und halben Zentriwinkeln $\left(\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\frac{s}{r}\right.$, nicht $\left.\sin\alpha=\frac{s}{r}\right)$ ein für allemal zum Begriffe sin die typische Anschauung liefern. – Und damit sich im Schüler nicht das überflüssige Vorurteil festsetze, als sei dieses ganze Rechnen mit tg, sin usw. nur für rechtwinklige Dreiecke zu brauchen, so mag nun erinnert und angeknüpft werden an die in der Planimetrie nötig gewesene Warnung, daß in jedem Dreiecke zwar dem größeren Winkel die größere Seite entspreche, daß aber die Seite nicht einfach dem Winkel direkt proportional sei. Auf die damals offen gebliebene Frage, welches denn die wahre Beziehung dieses Winkels und dieser Dreiecksseite sei, antworten wir jetzt, indem wir sogleich den Sinussatz für das schiefwinklige Dreieck aufstellen, wozu es ja nur der Zerfällung in die zwei rechtwinkligen Dreiecke mittels der Höhe bedarf: $h=a\sin\beta=b\sin\alpha$, woraus $a:b=\sin\alpha:\sin\beta$. (Wie schon REIDT empfohlen hat, ist handlicher die Form $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=D$; denn bei den späteren systematischen Dreiecksauflösungen kehren gerade diese Quotienten immer wieder. Das D, der Durchmesser des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises, gibt ebenfalls eine Aufgabe für sich, die noch ganz gut schon in den Vorkursus paßt).

Die Funktion Kosinus. – Indem diese letzte Funktion, die der Schüler in seinen Tafeln findet, im übrigen nach demselben didaktischen Vorgang wie die drei übrigen Funktionen eingeführt und eingeübt wird (als typische Anschauung werde die Rolle festgehalten, die der cos bei allem Projizieren spielt, womit sich sogleich $\cos 0^0=1$, $\cos 60^0=\frac{1}{2}$, $\cos 90^0=0$ festlegt, nur natürlich

1) RUDIO a. a. O. S. 19, wonach die Inder „in die Trigonometrie eine sehr glückliche und folgenschwere Neuerung einführten. Die Inder haben nämlich niemals, wie die Griechen, mit der ganzen Sehne eines Bogens gerechnet, sondern stets mit der halben Sehne, welche sie dann in Beziehung zu dem halben Bogen setzten, d. h. sie rechneten von Anfang an mit dem Sinus eines gegebenen Bogens statt mit der Sehne desselben und ersetzten dementsprechend die Sehnentafeln der Alten durch Sinustafeln. Bhâskara ging sogar so weit, daß er auf Grund der von ihm gegebenen Formeln:

$$\sin 1^0=\frac{10}{573},\quad \cos 1^0=\frac{6568}{6569},$$

die nur um einige Zehnmillionstel von dem wahren Werte abweichen, also die ptolemäischen an Genauigkeit weit übertreffen, eine Sinustabelle berechnen lehrte, deren Bogen von 1^0 zu 1^0 fortschreiten."

jetzt schon mit viel weniger Zeitaufwand), mag darauf hingewiesen werden, daß *Co-sinus* die Abkürzung von *complementi sinus* ist, wodurch auch auf die Beziehungen $\cos\alpha = \sin(90^0 - \alpha) = \sin\beta$ und die analogen $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90^0 - \alpha)$ usw. hingeleitet ist. Während aber hier Analogie zwischen den beiden Kofunktionen cos und ctg besteht, darf man sich nicht etwa kurzweg auf solche Analogien in anderen Beziehungen verlassen, indem z. B. dort die Quadratformel $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, hier die Reziprokformel $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ gilt (s. u. S. 282).

Didaktische Schlußbemerkung zum Vorkursus. — Nach allen diesen Vorübungen stehen wir nun in der Tat vor der Schwelle der systematischen Goniometrie, die wir dann nicht mehr unterbrechen wollen durch Vorblicke in die Trigonometrie. Denn auch diese wollen wir später ebenfalls als ein geschlossenes systematisches Ganzes durchwandern. Es mag dieser ausdrücklichen Versicherung bedürfen, da unser Vorschlag, dem System der Trigonometrie einen Vorkursus vorauszuschicken, in dem es vom rein mathematischen Standpunkt gesehen recht unsystematisch hergegangen ist, keineswegs irgendwelche Geringschätzung des Systematischen als solchen bekunden will. Sondern gerade darum, weil wir die Systematik einer mathematischen Disziplin für zu gut halten, als daß sie den Schülern als etwas vermeintlich Äußerliches aufgenötigt werde, wollen wir diese ganz neuen Gedanken zuerst an einer goniometrischen Funktion (tg) recht fest fassen und dann an den von der einen Funktion ausstrahlenden immer zahlreicheren Relationen den Schüler allmählich spüren lassen, daß es nicht eine Erschwerung, sondern von jetzt ab eine Erleichterung ist, wenn man die möglichen Funktionen und Relationen sich möglichst strenge ordnet und sie in systematischer Vollständigkeit sich überhaupt erst einmal vor Augen stellt, um dann in den mannigfaltigen Fällen bald mehr theoretischer Anwendungen (wie in den Auflösungsfällen der Dreiecke), bald der eigentlichen praktischen Anwendungen immer sogleich nach der handlichsten Relation greifen zu können. — Da es systematischer Darstellungen der Goniometrie schon unzählige gibt, zwischen denen die wissenschaftlich und didaktisch vorzüglichsten herauszufinden dem Lehrer immer ein möglichst weiter Spielraum gewährt bleiben muß, dürfen wir uns im folgenden auf wenige einzelne Bemerkungen beschränken.

§ 29. Zur systematischen Goniometrie.

Es ist heute keine Frage mehr, daß man die allgemeinen Definitionen der goniometrischen Funktionen am besten mittels rechtwinkliger Koordinaten oder eigentlich durch Verbindung der rechtwinkligen mit den Polarkoordinaten (vgl. Fig. 95, S. 100 und S. 284) geben wird und nicht wie in älteren Büchern durch gekünstelte Unterbringung positiver und negativer Strecken in einem Kreis[1]). In der Tat lassen sich aus der Koordinatenfigur alle einzelnen Sätze über Vorzeichen, Wachsen, Grenzwerte usw. mindestens ebensogut und unmittelbar ablesen wie aus der Kreisfigur. – Dennoch möchten wir nicht raten, mit jenen Koordinaten-Definitionen der sechs Funktionen für alle Quadranten unvermittelt, bloß *„per definitionem“*, zu beginnen. Sondern auch noch innerhalb des systematischen Kurses der Goniometrie dürfte es sich empfehlen, zuerst noch einmal alles bisher an und aus einzelnen Anwendungen über die einzelnen Funktionen Erlernte, insbesondere die graphischen Darstellungen für sin, cos,

---

1) Die noch immer überaus verbreitete „Darstellung der Funktionen am Kreis“ stellt sich zweierlei Aufgaben: Erstens: In je einem Kreis vom Halbmesser $r=1$ werden die Werte je einer Funktion als Sinusstrecken, Kosinusstrecken, Tangensstrecken usw. aufgetragen. Hierbei ist es für sin und cos harmlos, weil ungezwungen, eben darum aber auch im Grunde überflüssig, daß man den Radiusvektor wirklich als Kreishalbmesser zeichnet, da auch ohne den Kreis die x als Kosinusstrecken, die y als Sinusstrecken Größe und Richtung unmittelbar darstellen. Gekünstelt dagegen ist es schon, z. B. die Tangenten für den zweiten und dritten Quadranten just an der im Nullpunkt des Kreises gelegten Tangente in den vierten bzw. ersten Quadranten hinein aufzutragen. (Ich lernte einen, übrigens ausgezeichneten, allzufrüh verstorbenen Professor der Mathematik an einer technischen Hochschule kennen, der jeden Kandidaten sofort „warf“, der ihm das Positiv- und Negativsein goniometrischer Tangenten anders als an dieser Hilfstangente zu demonstrieren wagte.) Zweitens: Die Darstellung aller sechs Funktionen an demselben Kreis. Die letztere Übung bleibt auch dann nützlich, wenn man, wie wir es vorschlagen, die unter Erstens genannte Darstellung durch die graphische Darstellung der einzelnen Funktionen in ihren Kurven ersetzt. Natürlich kann man aber auch statt jener Darstellung aller sechs Strecken an einem Kreis die sechs Kurven in einer Zeichnung vereinigen, in der man dann alles beisammen hat: sowohl das Wachsen und Abnehmen je einer Funktion wie ihre verhältnismäßigen Größen. Nur setzt eine solche Zeichnung, da sie für den ungeschulten Blick verwirrend wäre, schon die Vertrautheit mit den einzelnen Kurven voraus, wenn aus ihr für deren gegenseitiges Verhältnis etwas abzulernen sein soll. Auf keinen Fall aber sollte man darauf verzichten, z. B. die wichtige Ungleichung $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$ namentlich für die positiven α nahe bei 0 durch das Abzweigen der sin-Kurve unter, der tg-Kurve über die Gerade $y=\alpha$ ad oculos zu demonstrieren.

tg, ctg (nur anhangsweise auch für sec und cosec[1])), u. zw. jetzt unter Zugrundelegung nicht mehr nur des Gradmaßes, sondern auch des absoluten Bogenmaßes der Winkel (worauf wir noch zurückkommen, S. 280), bis zur vollen Geläufigkeit für den ersten Quadranten im Zusammenhang einzuüben; und erst wenn dies nun wirklich festsitzt, wird die Erweiterung der Definitionen für die übrigen (auch negativen) Quadranten sich großenteils wie von selbst machen. Nach der schon anderweitig (z. B. gelegentlich der negativen Potenzexponenten, S. 225ff.) begründeten didaktischen Forderung, daß man dem Schüler gegenüber jeden Schein vermeiden sollte, als würden „Definitionen“ und Definitionserweiterungen rein „willkürlich“ vorgenommen, werden wir auch bei der Erweiterung z. B. der Begriffe cos und sin für Winkel über 90^0 darauf bedacht sein, dem Schüler einen oder wo möglich mehrere Gesichtspunkte anzugeben, aus denen sich ein wirkliches Bedürfnis der Begriffserweiterung, sowie ein Grund (oder womöglich ein in sich zusammenstimmender Komplex von Gründen) ergibt, den Begriff gerade so und nicht anders, jedenfalls aber nicht bloß willkürlich zu erweitern.

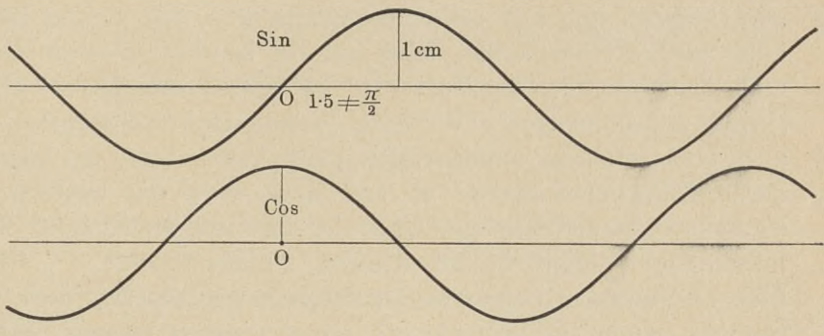
Wie diese Forderung gemeint, und daß sie nicht unmöglich ist, dürfte vielleicht am schlagendsten die Funktion Kosinus zeigen. Wenn wir (im Unterricht allerdings viel später, vgl. S. 291) den Kosinussatz für schiefwinklige Dreiecke aufgestellt haben und dabei zuerst stillschweigend ein spitzwinkliges Dreieck angenommen hatten, worauf wir ein zweitesmal dieses ausdrücklich in ein stumpfwinkliges abändern, so sehen wir in dem planimetrischen Analogon des Kosinussatzes, dem erweiterten Pythagoreischen Satz, das Glied $2cn = 2bc \cos \alpha$ aus dem Subtraktiven ins Additive umschlagen; und wir sind dieser Unterscheidung

1) Natürlich empfehlen wir keineswegs, neben den vier Funktionen sin, cos, tg, ctg, für die der Schüler Tafeln hat, auch sec und cosec mit irgendwelchem Schein gleicher Wichtigkeit behandeln zu lassen. Sie aber etwa im Unterricht gar nicht erwähnen zu wollen, würde dem Schüler die Sache in Wahrheit um mindestens ebensoviel erschweren, als man sie ihm hierdurch erleichtern will. Denn er ginge aller Vorteile verlustig, die sich aus der zyklischen Vollständigkeit der Grundformeln ergeben (vgl. z. B. Fig. 99 S. 282). Die praktischen Anwendungen sorgen dann schon von selber für die natürliche Auslese beim Üben; wie man ja auch geschichtlich erst nachmals wieder sec und cosec auszuscheiden sich gewöhnt hat. (MACH z. B. hat in seinem Lehrbuch der Physik aus historischen, diesmal aber didaktisch jedenfalls nicht zureichenden Gründen sogar das Brechungsgesetz statt durch sin in Anlehnung an die ursprüngliche Form bei SNELLIUS mittels cosec formuliert).

von Subtrahieren und Addieren erst dann überhoben, wenn wir den cos selbst als positive oder negative Größe einführen, je nachdem der Winkel kleiner oder größer ist als 90^0. Auch für $\alpha = 90^0$ schreibt uns der schon vor der Trigonometrie als Spezialfall der allgemeinen planimetrischen Sätze für das spitz- und stumpfwinklige Dreieck bewiesene Pythagoreische Satz vor, daß wir nicht etwa den Grenzfall $\alpha = 90^0$ überhaupt vermeiden zu dürfen meinen. All dies mag später wiederholend zur Sprache kommen gelegentlich des Kosinussatzes (S. 291). Jetzt, wo wir in der systematischen Goniometrie einstweilen nur den Übergang von den Funktionen absoluter spitzer Winkel zu beliebigen

Fig. 97.

Fig. 98.



Winkeln zu begründen haben, mag es genügen, darauf hinzuweisen, daß, weil bisher der cos als in jener anschaulichen Beziehung zum Projizieren stehend eingeprägt war, und weil für stumpfe Winkel die Projektion nach entgegengesetzter Richtung wie bei spitzen zu liegen kommt, wir den cos des zweiten Quadranten als negativ einführen. – Aus demselben Grunde ist dann auch für den dritten Quadranten cos noch negativ, für den vierten wieder positiv usf.

Wie man aber auch diese Erweiterung der Definitionen aus den Vorzeichen der Koordinaten begründen mag, so wird vielleicht eine noch überzeugendere, weil anschaulichere Methode die sein, aus den Kurven für den ersten Quadranten die für beliebige Quadranten zusammenzustellen. Hier ist das eindringlichste Beispiel das der Sinuskurve (Fig. 97). Wie schon erwähnt, war beim Einüben des Verlaufes der Funktion sin im ersten Quadranten das absolute Winkelmaß nach dem Bogen im Einheitskreise gründlich mit einzuüben. Es darf vom Schüler verlangt werden, daß sich ihm das Bild des ersten Quadranten der einfachen Sinuskurve mit der „Basis“ $\frac{\pi}{2} = 1 \cdot 57$ und der „Höhe“ 1[1]) in exakter Genauigkeit und mit sozusagen künstlerischer Feinfühligkeit einpräge; letztere so gemeint, daß sein Auge sich geradezu beleidigt fühlt, wenn es etwa in einer populären Schrift über Wechselströme oder dgl. eine angebliche Sinuskurve aus lauter auf- und abwärtsgerichteten Halbkreisen oder aus anderen Kreisbogen zusammengestoppelt sieht. Gesetzt also, diese mathematisch-ästhetische Forderung sei im Schüler, dank aller reichlichen Zeit, die wir auch schon im Vorkursus auf die graphischen Darstellungen verwendet hatten, sicher erfüllt. Es mag sich dann der Schüler aus Karton eine Schablone jenes ersten Quadranten ausschneiden und nun selber daraufkommen, wie er den Karton bald um die Höhenkante, bald um die Basiskante herumdrehen muß, damit sich aus den Kurvenstücken eine anständige „Wellenlinie“ zusammensetzt. Weil es Wellen und Wellenlinien gibt, auch wenn es keine Mathematiker gäbe, haben diese ein Interesse daran, Sinuslinien gerade so und nicht etwa mit unstetig aufeinanderfolgenden Kurvenstücken in die reine Mathematik einzuführen, und damit es zu diesen „Wellenlinien“ = „Sinuskurven“ komme, haben wir die Erweiterung des Begriffes Sinus für was immer für Winkelgrade so vornehmen müssen, wie wir es im Koordinatensysteme getan hatten[2]).

Es bedarf keiner näheren Anleitung und Darlegung, wie sich im Schüler die Zusammengehörigkeit von Sinus und Kosinus aus dem beständigen Anblick der zwei Hand in Hand gehenden Kurven,

---

1) Vgl. unten S. 295 ff. auch die Figuren 105 (1), [S. 295] und 107 (3), [S. 296].

2) Man sieht, wie der frühere Appell vom arithmetischen Verlauf der Potenzfunktionen an den geometrischen Verlauf der entsprechenden Kurven, durch den wir in § 23 S. 231 den letzten Schein von Willkürlichkeit beim Erweitern der Potenzdefinition beseitigten, hier in der Goniometrie sozusagen aus dem Mathematischen ins Physikalische gesteigert — oder, wie „reine“ Mathematiker sagen müssen: vergröbert — wird. Von höherer Warte gesehen ist hiermit eben an nichts Geringeres als an eine der höchsten, oder wenn man will, tiefsten erkenntnistheoretischen Grundfragen gerührt — die des Idealismus und Realismus. Nämlich sofort wieder in mathematischer Anwendung und Spezialisierung: Macht der Mathematiker seine Funktionen oder bestehen diese auch *in rerum naturà*? Nun, daß es Sinuswellen in der Natur gibt, muß auch der Idealist zugeben, und wir wollen ihm, falls er „transzendentaler Idealist“ ist, den Trost nicht rauben, daß ja schließlich auch er diese „Natur“ gemacht (KANT), also auch den Wellen ihre Sinusform „vorgeschrieben“ habe. Lassen wir sie dann die Schüler nur fleißig „nachschreiben“, d. h. nachzeichnen, und erst von ihnen die Goniometrie, sogar bis hinunter in die ersten Definitionen ablesen! (Vgl. S. 447, Anm.).

Fig. 97 und Fig. 98, festlegen muß, damit die alte Marter für Schüler und Lehrer aus dem Verwechseln von Positiv und Wachsen, Negativ und Abnehmen, Schneller- und Langsamerwachsen und abnehmen u. dgl. (was dann erst durch die Differentialquotienten für sin und cos seine endgültige Festigung empfängt, vgl. S. 406 ff.) Erfreulicherem weiche.

Nebenbei bemerkt, werden diese Kurven auch eine entscheidende Rolle spielen beim Lösen goniometrischer Gleichungen, die trotz des mit ihnen manchmal getriebenen formalistischen Mißbrauchs doch ein vortreffliches Übungsmaterial bilden und bleiben. Man wird nämlich nirgends unterlassen, der periodischen Natur der goniometrischen Funktionen dadurch gerecht zu werden, daß man zu den gefundenen Wurzeln $\left(\text{z. B. aus } \sin x = \frac{1}{2} \text{ etwa } x = \frac{\pi}{6}\right)$ sogleich die Verallgemeinerungsglieder beifügen läßt, nämlich $2k\pi$ bei sin und cos (also in jenem Beispiel $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, wozu noch $5\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ kommt, also im ganzen $x = \ldots -11\frac{\pi}{6}, -7\frac{\pi}{6}, +\frac{\pi}{6}, +5\frac{\pi}{6}, +13\frac{\pi}{6}, +17\frac{\pi}{6} \cdots$); was offenbar erst übersichtlich wird, wenn wir diese Wurzelreihen an der X-Achse der betreffenden goniometrischen Kurve markieren. Doppelt nötig wird das, wenn die Gleichung etwa zwei Hauptwerte $\left(\text{z. B. } \sin x = \pm\frac{1}{2}, \text{ also } x_1 = +\frac{\pi}{6} \text{ und } x_2 = -\frac{\pi}{6}\right)$ gegeben hätte. – Bei tg und ctg ist diese Periode $k\pi$; schon deshalb wird man auch diese Kurven, nachdem die typische Form des einen Astes für tg x nach der Zeichnung S. 267 sorgfältig gewonnen und eingeprägt, auch zu einer Kartonschablone ausgeschnitten ist, für die verschiedenen Quadranten von tg und ctg entwerfen, wenn auch nicht in dem Maße einprägen lassen wie die für sin und cos. – Endlich vorübergehend auch die für sec und cosec.

Doch zurück zu Primitiverem – zur schrittweisen Entwicklung einer derart zu belebenden systematischen Goniometrie. Wir zerlegen sie in zwei Hauptabschnitte: I. Die Funktionen für absolute spitze Winkel α, II. für beliebige Winkel φ.

I. Die Beziehungen der sechs[1]) Funktionen untereinander sollten jedenfalls erst behandelt werden, wenn die Eigenschaften jeder einzelnen derselben für den ersten Quadranten aus dem Vorkursus dem Schüler schon sehr vertraut sind. Es wird sich dann empfehlen, in folgender Weise übersichtlich darzustellen:

1) Vgl. oben S. 278, Anm.

Die Definitionen,		die Reziprokformeln,	die Quadratformeln
$\sin\alpha = \frac{a}{c}$,	$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}$	$\sin\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = 1$	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
$\cos\alpha = \frac{b}{c}$,	$\sec\alpha = \frac{c}{b}$	$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$	$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$,	$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$	$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$	$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha.$

Hauptzweck dieser Formeln ist natürlich, aus je einer Funktion die fünf anderen zu berechnen. Man sieht dabei die Schüler leicht planlos verfahren, was man ihnen nicht übel nehmen kann, solange ein fester Plan nicht gegeben worden ist.

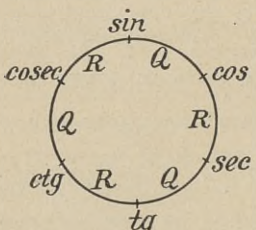


Fig. 99.

Als solcher mag das nebenstehende Schema, Fig. 99, dienen, in welchem Q und R bedeuten: Rechne nach der Quadrat-, bzw. Reziprokformel! Es zeigt sogleich, daß man, um etwa vom sin zur sec zu gelangen, *via* cos in zwei Schritten (und nicht *via* cosec, ctg, tg in vier) gehen wird. Auch überblickt man, daß es jedenfalls drei Schritte kostet, von sin zu tg oder umgekehrt zu gelangen; wobei der eine von den beiden gleich langen Wegen eine Rechnungsprobe für den andern abgeben mag.

Erst wenn sich die sechs symmetrischen Beziehungen mittels der drei *Q*- und drei *R*-Formeln gut eingeprägt haben, wird man die siebente Formel $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (der man nicht als eine achte von gleichem Rang auch $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ an die Seite stellen wird, da selbe sich zu leicht als Folgesatz der *R*-Formel ergibt) als eine sehr willkommene Abkürzung vieler dieser Rechnungen, und zugleich wieder als Rechnungsprobe mitteilen und einüben. – Es versteht sich von selbst, daß man es nirgends bei den allgemeinen Formeln wird bewenden, sondern daß man reichlich die von früher geläufigen markanten Spezialwerte für 30^0, 45^0, 60^0, auch die Grenzwerte für 0^0 und 90^0, wird substituieren lassen; denn hiebei prägen sich nicht nur diese Hauptwerte immer fester ein, sondern es wird auch erst aus ihnen der Zweck dieses Formelsystems dem Schüler so recht fühlbar. – Daneben natürlich auch die eine oder andere Zahl aus den Tafeln der natürlichen Funktionen mit mehreren Dezimalen, wobei noch immer nicht – oder erst nachmals – mit Logarithmen, sondern eine Zeitlang immer noch mit abgekürztem Multiplizieren, Dividieren und

Radizieren gearbeitet wird. Solches primitives Einüben der Beziehungen lohnt sich, indem hierbei nicht nur diese Beziehungen den Charakter willkürlich gehäufter Regeln für den Schüler allmählich ganz von selbst verlieren, sondern indem ihm so und nur so auch die Tafeln der natürlichen Funktionen allmählich wirklich vertraut werden, nicht mehr als bloße Anhäufungen von Zahlen ihn anfremden. Ohne ein solches Vertrautsein mit den Tafeln der natürlichen Funktionen aber gibt es schlechterdings kein wirkliches Verstehen der Logarithmen der Funktionen; und wer die Geduld verlieren will, wenn nach monate- und jahrelangem Arbeiten mit diesen logarithmisch-goniometrischen Tafeln noch immer plumpe Fehler gemacht werden, die zeigen, daß der Schüler solchen Irrungen kein Bewußtsein ihrer vorgängigen Unmöglichkeit entgegenstellt, wird zum guten Teil die Vernachlässigung des anfänglichen Rechnens mit natürlichen Funktionen dafür verantwortlich machen müssen. – Übrigens pflegen ja sogar viele Techniker mit Vorliebe die natürlichen, nicht die logarithmisch-goniometrischen Tafeln zu benutzen.

II. Wenn nun bei einem Lehrgange der Goniometrie, der von der ersten Stunde an die Tafeln benutzt, die ja selbst nur die ersten Quadranten enthalten, das stark vorwiegende Einüben der Beziehungen für die absoluten spitzen Winkel von selbst gerechtfertigt ist (– und auch die Quadratformeln leiten wir ja aus dem rechtwinkligen Dreieck zunächst nur für absolute spitze Winkel her): so darf natürlich doch die nachträgliche Bestätigung nicht fehlen, daß diese selben Formeln auch für die höheren und negativen Quadranten gelten. Sie ergibt sich für die R-Formeln unmittelbar aus den Definitionen; und die Q-Formeln können diesen Einklang nicht stören, da sie lauter Quadrate, also positive Zahlen enthalten. – Es wird überflüssig sein, auf die Art der Erweiterungen auch für spätere Formelgruppen einzugehen. Grundlegend dafür sind die beim Additions-Theoreme z. B. für $\sin(\alpha + \beta)$, je nachdem α, β und auch noch $\alpha + \beta < 90^0$, oder zwar $\alpha < 90^0$, $\beta < 90^0$, aber $\alpha + \beta > 90^0$ usw. sind.

Wie nun die Erweiterung der Definitionen für die Funktionen selbst, vom absoluten spitzen Winkel α zum beliebigen Winkel φ, vorzunehmen ist, sei hier nach der Darstellung aus dem mathematischen Anhang zu meiner „Physik" wiederholt. Es wurde dort beispielsweise ausgegangen von der Funktion sin. Vielleicht zerstreut die Darstellung das, wie es scheint, sehr verbreitete Vorurteil, als sei gerade für die Goniometrie die didaktische Regel des Ausgehens vom Konkreten und Einzelnen nicht gültig, sondern (nur?) hier sei vielmehr das Ausgehen vom Allgemeinsten Pflicht.

„II. Sinus für beliebige Winkel φ: Ist der gegebene Winkel $\varphi^0 > 90^0$ oder $\varphi^0 < 0^0$, so läßt sich nicht mehr ein Lot von dem einen Schenkel auf den anderen fällen, und es ist daher auch nicht mehr die Definition des Sinus von einem absoluten spitzen Winkel ohne weiteres auf jeden anderen Winkel übertragbar. Wohl aber läßt sich zu jedem beliebig großen, positiv oder negativ bezeichneten Winkel φ ein „entsprechender absoluter spitzer Winkel α" auf folgende Art zuordnen: Der Scheitel des Winkels φ wird in den Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems (Fig. 100), der eine Schenkel (Nullschenkel) in die positive Abszissenrichtung gebracht und der Winkel im Sinne von der positiven Abszissen- gegen die positive Ordinatenrichtung hin gezählt. Dann kommt der andere Schenkel (der „bewegliche Schenkel") bei stumpfen Winkeln in den II. Quadranten, bei überstumpfen Winkeln in den III., bei überspitzen Winkeln in den IV., bei negativen spitzen Winkeln ebenfalls in den IV. Quadranten usw. zu liegen.

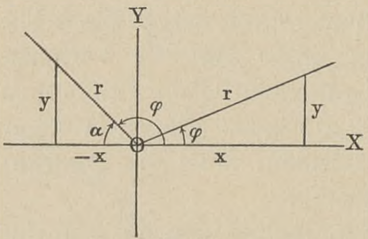


Fig. 100.

Wird von diesem beweglichen Schenkel eine beliebige Strecke r cm abgeschnitten und von dem Endpunkt auf die Abszissenachse eine Normale gefällt, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit dem spitzen Winkel α bei dem Scheitel 0; u. zw. ist α derjenige absolute Winkel, um den der gegebene Winkel φ kleiner oder größer ist als das . . -2, -1, 0-, 1-, 2-, 3-, . . . fache von 180^0. Wir nennen diesen Winkel α den „dem Winkel φ entsprechenden absoluten spitzen Winkel" und erweitern die bisherige Definition des Sinus für absolute spitze Winkel α so für beliebige Winkel φ:

Unter dem Sinus eines beliebigen Winkels φ verstehen wir den Sinus des ihm entsprechenden (absoluten spitzen) Winkels α, u. zw. mit dem Vorzeichen der Ordinate desjenigen Quadranten, bis in welchen der bewegliche Schenkel des Winkels φ reicht. Diese Definition ist eine Erweiterung der für absolute spitze Winkel gegebenen, da sie sich, wenn speziell $0^0 \leqq \varphi \leqq 90^0$ ist, mit der für $\sin \alpha$ gegebenen deckt."

Gemäß den allgemeinen Definitionen $\sin \varphi = \frac{y}{r}$, $\cos \varphi = \frac{x}{r}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ usw. läßt sich vorstehende Darstellung von der Funktion sin auch auf jede andere Funktion nahezu wörtlich übertragen und dann schließlich allgemein für alle Funktionen auf einmal aussprechen.

Was die Ableitungen für $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$ betrifft, so finden sich darüber manchmal einerseits recht umständliche, wogegen es andererseits doch wieder der Wichtigkeit des Theorems nicht angemessen ist, wenn man behufs formeller Vereinfachung der Ableitung sich auf die Hypotenuse 1 beschränkt.

Der Eindruck aller Künstlichkeit und Willkür dürfte bei folgender Form der Ableitung vermieden sein (beim Schreiben an der Tafel entfällt noch die zweite Zeile, nachdem in der ersten vorübergehend Nenner und Zähler noch offen gelassen worden waren, damit der Schüler selbst auf die zweckmäßigen q und b verfalle):

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{y}{r} = \frac{a+\eta}{r} = \frac{a}{\ } \cdot \frac{\ }{r} + \frac{\eta}{\ } \cdot \frac{\ }{r}$$

$$= \frac{a}{q} \cdot \frac{q}{r} + \frac{\eta}{b} \cdot \frac{b}{r}$$

$$= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{x}{r} = \frac{p-\xi}{r} = \frac{p}{\ } \cdot \frac{\ }{r} - \frac{\xi}{\ } \cdot \frac{\ }{r}$$

$$= \frac{p}{q} \cdot \frac{q}{r} - \frac{\xi}{b} \cdot \frac{b}{r}$$

$$= \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

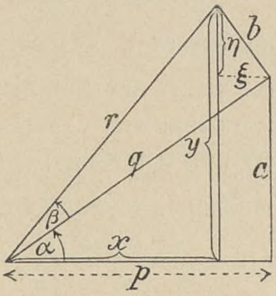


Fig. 101.

$$\sin(\alpha-\beta) = \frac{y}{r} = \frac{a-\eta}{r} = \frac{a}{\ } \cdot \frac{\ }{r} - \frac{\eta}{\ } \cdot \frac{\ }{r}$$

$$= \frac{a}{q} \cdot \frac{q}{r} - \frac{\eta}{b} \cdot \frac{b}{r}$$

$$= \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \frac{x}{r} = \frac{p+\xi}{r} \text{ usw.}$$

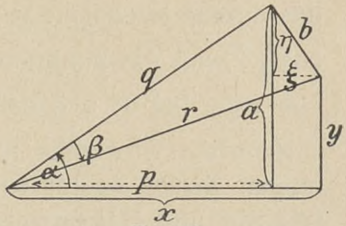


Fig. 102.

Diese Additionstheoreme geben auch Gelegenheit, den Schüler aufmerksam zu machen, wie sich z. B. wegen

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\beta} + \sin\beta\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

die Funktion sin unabhängig von den g e o m e t r i s c h e n Vorstellungen „Winkel“ und „Dreieck“ rein a r i t h m e t i s c h definieren läßt durch die „Funktionalgleichung“

$$f(x+y) = f(x)\sqrt{1-[f(y)]^2} + f(y)\sqrt{1-[f(x)]^2}.$$

Es versteht sich, daß man mit einer solchen Bemerkung für Anfänger frühestens auf den Abschluß der Goniometrie und wohl noch besser — da es sich um eine logische, also philosophische Erwägung handelt — auf den abschließenden Jahrgang warten wird. (Vgl. S. 363, Anm. 1.)

§ 30. Zur systematischen Trigonometrie.

Was das Auflösen schiefwinkliger Dreiecke aus unmittelbaren Bestimmungsstücken betrifft, so wird natürlich vor allem festzulegen sein, daß und wie sich auf

die drei Hauptsätze: Sinus-, Tangens-, Kosinussatz

die vier Auflösungsfälle I. $a\beta\gamma$, II. $ab\gamma$, III. $a>b\alpha$, IV. abc

verteilen: nämlich I und III nach dem Sinussatze, II nach dem Tangenssatz in der Form $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$ und IV nach dem Kosinussatze in der Form $\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, wofür aber immer besser $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ usw. eintritt (s. sogleich unten).

Erst wenn der Schüler in diesen typischen Aufgaben wirklich „mechanisch" rechnen gelernt hat, mag er auch mit den anderen Hilfsmitteln bekannt gemacht werden, wie mit den Mollweideschen Gleichungen, den Formeln $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\rho}{s-a}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{\rho}{s-b}$ usw., wo $\rho^2=\frac{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}{s}$. Diese letzteren Gleichungen sind (als „logarithmisch brauchbar") nicht nur zweckmäßiger als das direkte Rechnen nach $\cos\alpha$, sondern auch als das mit $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, weil die Funktion tg das Unterscheiden zwischen Winkeln von nahe bei 0^0 und nahe bei 90^0, bzw. 180^0 erspart.

Natürlich wird man hier überall den planimetrischen Deutungen dieser zuerst (oder auch erst später) durch goniometrische und trigonometrische Umformungen gefundenen Beziehungen fleißig und abwechslungsreich nachgehen.

Was ferner rein äußerlich das Anschreiben logarithmisch-trigonometrischer Rechnungen betrifft, so ist dies natürlich vielfach Geschmackssache; nur ein wüstes Durcheinanderschreiben der Hauptgleichungen und der bloßen Ausrechnungen ist als mindestens geschmacklos jedenfalls zu verbieten. An der von Reidt in seiner „Anleitung" (1906, S. 236) empfohlenen und in seinem Übungsbuch zur Trigonometrie überall durchgeführten Schreibweise dürfte vielleicht allzu weitgehender Lakonismus, der ein späteres Nachrechnen erschwert, dann aber auch das Unbeschriebenlassen breiter Ränder links und rechts durch Besseres ersetzbar sein.

In der nachfolgenden Schreibung sind links Angabe, Frage, Rechnungsgang und Ergebnisse zusammengestellt, am rechten Rand die Rechnungen mit den Differenzen (nach den fünfstelligen Schlömilchschen Tafeln), so daß der breite mittlere Teil ganz für das eigentliche Ausrechnen verbleibt.

$b=777,77$	$\log\frac{b}{\sin\beta}=\log 777,77=2,89081$	$47\cdot 0,27$
$\alpha=38^0\,12'\,47''$	$^{42}$ $\log\sin 60^0=9,93753-10$	94
$\gamma=81^0\,47'\,13''$	$-\quad-\quad+$	329
$\beta,\ a,\ c;\ f=?$	2,953322	12,69
	$\log\sin 38^0\,12'\,47''=9,791407-10$	128
$\beta=180^0-(\alpha+\gamma)$	2,744729	1407
$\beta=60^0$	$a=555,56$ 468	
	0049	$2:60=0,033$
$a=\frac{b}{\sin\beta}\cdot\sin\alpha$	48	
$a=555,56$	2,953322	$0,033\cdot 13$
	$\log\sin 81^0\,47'\,13''=9,99552429-10$	99
$c=\frac{b}{\sin\beta}\cdot\sin\gamma$	2,948846	0,429
$c=888,89$	$c=888,89$ 880	
	46	
$f=\frac{1}{2}ac\cdot\sin\beta$	$\log 2f=\log 555,56=2,744729$	
$f=213832,5$	$+\log 888,88=2,948846$	
	$+\log\sin 60^0=9,93753-10$	
	$2f=427665$ 5,631105	
	104	
	65	

Vereinfachungen an solchen Rechnungen sind sehr wohl möglich durch bloß vierstellige Tafeln, Verzicht auf Tafeldifferenzen, auf Sekunden und ihre Bruchteile u. dgl. m. — Vorschriften oder auch nur allgemein gehaltene Ratschläge über solche Ersparungen aber sollen hier nicht gegeben werden, da sich Sparsamkeit und Reichlichkeit von Zifferrechnungen hier wie überall ganz nach der Natur der Aufgabe (sofern diese nicht, wie auch obiges Beispiel, nur formalistisch ist) richten muß – was aber auch der Schüler nur durch sozusagen Selbsterleben an immer wieder neuartigen, lebensvollen Übungsbeispielen ganz allmählich lernen kann und soll.

Für alles weitere hinsichtlich der Dreiecksauflösung nach unmittelbaren und mittelbaren Bestimmungsstücken bringt Reidts-

„Anleitung" und insbesondere seine Aufgabensammlung so Eingehendes, daß hier nicht dabei verweilt zu werden braucht. Wohl aber muß daran erinnert werden, daß, ebenso wie der Verzicht auf alle zu weit gehenden Konstruktionsaufgaben aus mittelbaren Bestimmungsstücken zugunsten prinzipieller Dinge zu den Hauptforderungen der gegenwärtigen Reform gehört, dies ganz besonders auch von den analogen trigonometrischen Aufgaben gilt. Freilich wird wohl auf lange hinaus die bestehende Tradition auch hierin noch fortwirken, und die verzwickten Aufgaben aus allen möglichen und unmöglichen Kombinationen von mittelbaren Bestimmungsstücken, ohne daß irgendeine Realisierung abzusehen wäre, werden nicht sobald aus den Lehr- und Übungsbüchern und den Schulstuben weichen. Gönne sich den Luxus, wer mag und kann; von solchem weichen wird er nur dann, wenn sich der lebensvollere Stoff der Messungen im Gelände, der astronomischen Rechnungen u. dgl., wie er aus dem Unterricht im Freien sich ergibt, seine Rechte voll erobert haben wird. – Nur als Typus des Guten, das fraglos auch der ältere Geschmack für sich geltend machen konnte, sei hier die Aufgabensammlung von Reidt nochmals ausdrücklich angeführt. Welche Fülle eleganter Beispiele – von den leichtesten bis zu den schwierigsten –, welcher planmäßige Aufbau, welche pädagogische Kraft, den Schüler sich zuerst in einzelne Aufgaben verbeißen und allmählich zu jenem frohen Gefühle einer souveränen Stoffbeherrschung gelangen zu lassen, das sich die Philologen so gern an ihrem Schulpforta loben! Und doch – haben solche pädagogisch lockende Bilder nicht auch ihre Kehrseiten? Es gehört in den X. Band dieser Didaktik, warum sich solche pädagogische Einseitigkeiten, trotz ihrer nicht zu leugnenden Vorzüge, nicht haben in unsere Zeiten herüberretten lassen; und auch das aufrichtige Geständnis, daß wir einstweilen noch nichts so zweifellos Erprobtes wie eben jene Einseitigkeiten, auch noch nicht unter dem Leitgedanken der „spezifischen Allgemeinbildung", zu bieten haben, wird dort für die humanistischen wie für die realistischen Fächer abzulegen sein. Wir stehen also – was sich an dem Gegensatz der einstigen, aus der Luft gegriffenen goniometrischen Transformationen u. dgl. und der nun verlangten Messungen im Gelände u. dgl. besonders deutlich illustrieren läßt – jetzt ganz eigentlich in einem Kampfe ums Dasein. Indem dieser den älteren goniometrisch-trigonometrischen

Lehrbetrieb auf den Aussterbeetat setzt, hat aber der junge, künftige, wie wir meinen, lebensvollere Unterricht dieses Faches kaum schon irgendwo Zeit und Raum gehabt, sich recht voll und kräftig zu entwickeln. Es bleibt also abzuwarten, ob man von dem Messen im Gelände, von den astronomischen Rechnungen über einem im Schulhof aufzustellenden Gnomon u. dgl. in zehn Jahren nur sagen wird: „Es wär' zu schön gewesen!"... Nur von bloßer Bequemlichkeit, von Ausreden auf das Fehlen der nötigsten, wenn auch noch so primitiven Winkelmeßinstrumente u. dgl. können wir schon heute sagen: „Es hat nicht sollen sein."

Vielleicht dienen dem einen oder anderen Lehrer, der sich gerne von den auch ihm nicht ganz gesund scheinenden Traditionen des bisherigen Trigonometrieunterrichtes frei machen und diesem einen zum Teil andersartigen Lehr- und Übungsstoff zuführen möchte, die folgenden vier Einzelvorschläge, deren jeder für sich selbst wieder in engerem oder weiterem Ausmaß, je nachdem es die verfügbare Zeit und die Begabung der Schüler gestattet, im Unterricht zur Durchführung kommen kann:

I. Zur immanenten und erweiternden Wiederholung von Planimetrischem während des Trigonometriejahres eignet und empfiehlt sich besonders die Beziehung der Polygonometrie zur Kreisberechnung.

Innerhalb der Planimetrie als solcher war den regulären Polygonen noch nicht viel allgemeines Interesse abzugewinnen. So merkwürdig und didaktisch fruchtbar die Eigenschaften der regelmäßigen Vier- und Achtecke, der Sechs- und Zwölfecke, der Zehn- und Fünfecke sind (zu geschweigen der höheren, an Zahlentheorie heranreichenden Untersuchungen, wie die Gausssche über das Siebzehneck, vgl. Klein, „Ausgewählte Kapitel" 1895), so haften die hier mit dem Schüler zu besprechenden Eigenschaften eben immer an der speziellen Seitenzahl. Dagegen mit dem regelmäßigen n-Eck als solchem lernt der Schüler erst etwas Rechtes anfangen als einer Anwendung der rechtwinkligen Dreiecke innerhalb der Trigonometrie. Freilich sollte ihm dann hier nicht verborgen bleiben, daß nun das Benutzen des $\sin\frac{\alpha}{2}$ und $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ für $\alpha^0 = \frac{360^0}{n}$ nicht eine Lösung, sondern sozusagen eine Umgehung der in der Planimetrie z. B. dem Sieben-, Elfeck sich entgegenstellenden Schwierigkeiten ist. Ja, der Schüler soll hier einsehen lernen, daß der Unterschied von algebraischen und transzendenten Zahlen (s. o. S. 235 ff) eben auch in die goniometrischen Funktionen hineinreicht, daß nur für verhältnißmäßig ganz wenige Winkel die Mittel der Planimetrie zum Berechnen der Funktionen ausreichen, daß und warum dagegen im allgemeinen die goniometrischen Funktionen eben ein ganz Andersartiges, „Transzendentes" im Vergleich zu den algebraischen darstellen (wie S. 266 ff. an $\operatorname{tg} x$ zum Unterschied von x^2 erläutert wurde).

Einem nahe verwandten Gedankenkreise gehören dann auch die Beziehungen der Polygonometrie zur Kreisberechnung, speziell zur Lehre von π an; wofür neuerdings auf den reichen Stoff in Rudios Buch (vgl. oben S. 256 ff.) hingewiesen sei. Wenn auch die Vielecksrechnungen von Archimedes bis Huygens[1]) noch rein innerhalb der Planimetrie als solcher bleiben, so wäre für ein irgendwie genaueres Eingehen hierauf bei Vierzehnjährigen weder Zeit noch das nötige Verständnis vorauszusetzen gewesen. Jetzt, zwei Jahre später, stellt sich das alles dem Schüler schon in ganz anderem Lichte dar; er weiß nun schon einige von den eleganten planimetrisch-arithmetischen Beziehungen zu schätzen, durch die Huygens das Einschließen des Kreises zwischen das um- und eingeschriebene Polygon rechnerisch so sehr viel wirksamer zu gestalten wußte. Läßt man den Schüler vollends die eine oder andere solcher Rechnungen numerisch durchführen, wenn auch nur in ihren ersten Schritten, so lehrt ihn das nebenbei auch wieder die Wohltat seiner Logarithmen- und goniometrischen Tafeln höher schätzen. — Aber auch im Grundsätzlichen fügen sich diese alten Methoden bestens ein in den Gedankenkreis des sonstigen, namentlich des arithmetischen Lehrstoffes dieses (unseres VI.) Jhgs. Denn wenn in der Lehre vom Irrationalen dem Schüler klar geworden ist, daß bei dieser alles auf das Einschließen zwischen Grenzen ankommt, so versteht er nun erst die große Tat des Archimedes, der sich nicht mit einer wie immer genauen Annäherung der Umfangszahl begnügt, sondern eben den Nachweis für das Eingeschlossensein zwischen den Grenzen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ geliefert hatte. Insofern kann und muß man ja in der Tat seine exakte Bearbeitung des Kreisumfanges als vorbildlich für alle spätere Theorie des Irrationalen erklären, unbeschadet des Umstandes, daß freilich das Einschließen des Wertes z. B. von $\sqrt{2}$ zwischen beliebig enge rationale Grenzen eine Leistung für sich u. zw. eine sehr viel einfachere als die für π ist. — Doch genug hievon; die wenigen Bemerkungen werden zeigen, einen wie weiten Spielraum die Betrachtungen solcher Art lassen, wie vieles davon aber den Schülern auch nicht ganz vorenthalten bleiben soll.

II. Zur immanenten und erweiternden Wiederholung von Stereometrischem innerhalb des Trigonometriejahres liegen besonders nahe die Beziehungen der sphärischen Trigonometrie nicht nur zur

1) Vgl. hiezu bei Killing-Hovestadt (s. o. S. 12 Anm.) S. 345–351 die merkwürdigen Beziehungen zur Parabel u. a.

körperlichen Ecke, sondern auch zu mannigfaltigen Aufgaben über regelmäßige Polyeder, Kristallformen u. dgl. Da besondere didaktische Winke für sphärische Trigonometrie[1]) hier entbehrlich schienen (nach dem in der Einleitung, S. 13, begründeten Plane dieser Didaktik werden nur die Ausgangspunkte der einzelnen Abschnitte dargelegt), so finde nur der eine Wunsch Platz: Wenn auch im Lehrplan der Gymnasien sphärische Trigonometrie nicht als ein besonderes Kapitel genannt ist, so sollte dem Schüler doch nicht vorenthalten bleiben, was diese Disziplin zu leisten hat und wie sie grundsätzlich durch ganz einfache Herleitung aus der ebenen Trigonometrie zu ihren Grundformeln kommt. Schon allereinfachste Aufgaben aus der Astronomie, wie die Beziehung zwischen Rektaszension und Deklination der Sonne und der Schiefe der Ekliptik (vgl. den mathematischen Anhang zu meiner Physik, Nr. 18 und Leitaufgabe 212), drängen dazu, den Schüler darüber aufzuklären, daß und warum hier nur Relationen zwischen Funktionen selbst $\left(\text{z. B. } \operatorname{tg} \epsilon = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\sin \alpha}, \text{ Fig. } 103\right)$ auftreten.

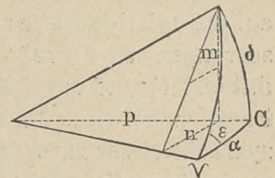


Fig. 103.

Zu gleichem Zweck wie die vorstehenden Übungsstoff-Skizzen mögen ähnlich auch noch folgende zwei Lehrproben auf einen einigermaßen neuartigen Lehr- und Übungsstoff wenigstens als möglich hinweisen:

Lehrprobe I.

Der vom rechtwinkligen auf das spitzwinklige Dreieck erweiterte Pythagoreische Satz[2]) der Planimetrie lautet in Maßzahlen

$$\left.\begin{aligned} &a^2 = b^2 + c^2 - 2bq \\ \text{oder } &a^2 = b^2 + c^2 - 2cn \end{aligned}\right\}. \quad \text{Wegen} \quad \left\{\begin{aligned} q &= c \cos \alpha \\ n &= b \cos \alpha \end{aligned}\right\} \text{ wird beidemale}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha .$$

Hier also war der Hauptgedanke des Satzes schon fertig der planimetrischen Beziehung zwischen den über den Dreieckseiten errichteten Quadraten und dem Rechteck aus der einen Dreieckseite und der Projektion der andern auf diese entnommen.

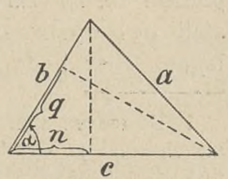


Fig. 104.

Dagegen sind es vorwiegend arithmetische Beziehungen, die unabhängig von jenem planimetrischen Satz und Beweis ebenfalls zur Formel führen. Sowie $c = m + n = a \cos \beta + b \cos \alpha$, ergibt sich

1) Vgl. in dem soeben veröffentlichten Lehrplan für die österreichischen Realschulen die Ratschläge für weitgehende Vereinfachung und Sparsamkeit in der sphärischen Trigonometrie.

2) Diese Lehrprobe bildet also eine Art Fortsetzung der didaktischen Behandlung desselben Satzes, wie sie für niedere Stufen (vgl. S. 168, 198) und für eine noch höhere (S. 364) empfohlen wird.

$$\begin{array}{rcl|c||c|c}
a & = & b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta & +a & -a & -a \\
b & = & c \cdot \cos\alpha + a \cdot \cos\gamma & -b & +b & -b \\
c & = & a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha & -c & -c & +c \\
\hline
a^2 - b^2 - c^2 & = & -2bc\cos\alpha & & &
\end{array}$$

also wieder $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$.

Um dann auch die beiden Gleichungen $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos\beta$ und $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma$ zu erhalten, kann man entweder sich bloß auf die zyklische Vertauschung berufen, oder man kann auch wieder sozusagen eine Probe machen mittels der oben in der zweiten und dritten Kolonne angegebenen Multiplikatoren, worauf wieder addiert und transponiert wird. Da wir im Grunde kein Recht haben, das Prinzip der zyklischen Vertauschung als unmittelbar evident[1]) zu beanspruchen, so ist hier die Gleichheit des ihm verdankten Ergebnisses mit dem beim wirklichen Ausrechnen der Formeln für b^2 und für c^2 eine Bestätigung seiner Richtigkeit und Nützlichkeit.

Nachdem so der Kosinussatz bloß aus der geometrischen Anschauung vom Zerfälltwerden jeder Seite durch den Fußpunkt der Höhe, aus der Definition des Kosinus als Quotienten von Projektion und Seite und einer Kette rein arithmetischer Operationen gewonnen ist, mag man verlangen, daß nun umgekehrt ebenso wieder der verallgemeinerte Pythagoreische Satz in planimetrischer Form rein arithmetisch gewonnen werde, wobei man den Beigeschmack von Goniometrie dadurch vermeiden muß, daß man von Anfang statt $\cos\alpha$ wieder $\frac{n}{b} = \frac{q}{c}$ in den Rechnungen ein- und mitführt.

Die ganze Sache ist als typisches Beispiel, und weil ja ohnedies der Kosinussatz einer der Hauptsätze ist, wichtig genug, daß wir nun den ganzen bisher zurückgelegten Weg ein zweitesmal gehen, indem wir statt des spitzwinkligen ein stumpfwinkliges Dreieck zugrunde legen. Hier hatte die Planimetrie gezeigt, daß und warum an Stelle

---

1) Es lassen sich daran wertvolle logische Betrachtungen knüpfen: denn an sich ist ja der Schluß aus zyklischer Vertauschung nur ein Analogieschluß, scheint also nicht Gewißheit, sondern nur Wahrscheinlichkeit zu liefern. Es ist aber ähnlich wie bei der Induktion, wo es ja auch neben der unvollständigen, die die naturwissenschaftlich fruchtbare ist, aber allerdings immer nur „Evidenz der Wahrscheinlichkeit" liefert (vgl. zu diesem paradoxen Ausdrucke meine Logik, § 53), noch eine vollständige Induktion gibt, die dann Gewißheit liefert und in der Mathematik insbesondere als Schluß von n auf $n+1$ gehandhabt wird.

Natürlich wird diese logische Nebenbetrachtung besser im obersten Jahrgange, nach vorausgegangenem Logikunterricht am Platze sein als schon im ersten Jahrgange der Oberstufe. – Gelegenheit zu zyklischen Vertauschungen war übrigens auch schon beim Aufsuchen von Gleichungen mit mehreren Unbekannten auf der Mittelstufe gewesen.

des subtraktiven Gliedes $-2bq$ oder $-2cn$ eben solche additive Glieder treten. Indem wir dann statt der Projektionen wieder die Ausdrücke mit dem Faktor Kosinus einführen, wird in der schon oben (S. 278) empfohlenen Weise wirklich motiviert, warum wir den Kosinus eines stumpfen Winkels als einen negativen nicht nur „definieren“, sondern warum hier bei einem stetigen Übergange vom spitzen durch den rechten in den stumpfen Winkel aus einer Subtraktion eine Addition wird, wobei auch der Durchgang $\cos 90^0 = 0$ aus dem ursprünglichen Pythagoreischen Satze, wo es weder ein Subtraktions- noch ein Additionsglied gibt, begründet erscheint.

Wird man auf ein solches Verweilen bei dem einen Kosinussatz und zurückgreifend von ihm aus auf verschiedene Sätze der Planimetrie, ja auf die Grundbegriffe des Positiven und Negativen, bloß der Zeitersparnis wegen verzichten wollen?

So sehr wir empfehlen, über der Theorie nicht die Praxis, über der reinen Mathematik nicht die angewandte zu kurz kommen zu lassen, so sollen doch umgekehrt auch nicht die Gelegenheiten versäumt werden, an markanten Punkten Um- und Rückschau zu halten auf Verwandtes und Zusammengehöriges, und als solcher Konzentrationspunkt eignet sich eben u. a. besonders gut der Kosinussatz.

In einigem Gegensatz zu dem wesentlich formalen Interesse der vorigen Lehrprobe I mache den Beschluß dieser Vorschläge zur inhaltlichen Konzentration mehrerer mathematischer Kapitel während des Trigonometriejahres (und nach ihm) die

Lehrprobe II.

Netz, Oberfläche und Kubikinhalt des Zylinderstutzes und der Kugel[1]).

Die im folgenden gestellten und gelösten Aufgaben stehen zueinander insofern in Beziehung, als sie einerseits größtenteils Anwendungen von Eigenschaften der „**Sinuskurve**“, namentlich von deren Flächeninhalt

1) Der vom Verleger freundlichst bewilligte Wiederabdruck dieser alten Arbeit des Verfassers aus der „Zeitschrift für mathem. und naturwissensch. Unterricht“ Band XVIII (1887) mag, neben seinem fachwissenschaftlichen Inhalt, der mannigfachen Übungsstoff zur Trigonometrie, Stereometrie und – man erschrecke nicht – auch zur Integralrechnung bietet (vgl. unten S. 410 ff.), in den zum Schluß auszugsweise wiederholten didaktischen Bemerkungen auch ein Dokument sein, daß ich manche heute „zeitgemäß“ gewordene Gedanken schon früh angemeldet hatte.

Nebenbei sei bemerkt, daß ich die im Aufsatze eingehend behandelte „Netzkugel“ in dem ein Jahr später (1888, im Verlag Schreiber, Eßlingen) herausgegebenen transparenten Himmelsglobus praktisch verwertet habe. Von diesem Himmelsglobus wird im II. Bande dieser didaktischen Handbücher (Himmelskunde und astronomische Geographie) noch mehrmals die Rede sein.

bilden — während andererseits die Berechnung dieses Inhaltes selbst, sowie die der Mantelfläche und des Kubikinhaltes des Zylinderstutzes und der Oberfläche eines unter III. näher zu besprechenden Kugelnetzes verschiedene Anwendungen des „**Cavalierischen Prinzipes**" darstellen.

Letzteres Prinzip sagt bekanntlich, daß zwei $\left\{\begin{matrix}\text{Körper}\\ \text{Flächen}\end{matrix}\right\}$ A_1 und A_2 gleichen Inhalt haben, wenn jede beliebige aus einer Schar paralleler $\left\{\begin{matrix}\text{Ebenen}\\ \text{Geraden}\end{matrix}\right\}$ in A_1 und A_2 gleich große Schnitte erzeugt. Dieses läßt sich dahin erweitern, daß sich die Inhalte von A_1 und A_2 verhalten wie $1:m$, wenn sich die Größen der zugehörigen Schnitte wie $1:m$ verhalten; ferner daß sich die Inhalte von A_1 und A_2 wie $1:m\cdot n$ verhalten, wenn überdies die Schnitte in A_2 durchweg n-mal so weit voneinander abstehen als die zugehörigen in A_1. Ist dabei $n=\frac{1}{m}$, d. h. sind die Schnitte in A_2 ebensovielmal so klein (so groß), als sie weiter (weniger weit) voneinander abstehen als in A_1, so sind die Inhalte von A_1 und A_2 wieder gleich; dies gilt auch dann noch, wenn m und n von Schichte zu Schichte veränderlich sind, falls nur immer $m\cdot n=1$ — eine Erweiterung des Prinzipes, von der wir in § 2 Anwendung zu machen haben werden[1]).

Im Hinblicke auf die didaktische Verwendung, welche ich in dieser kleinen Arbeit wünsche, und über welche am Schlusse noch einige Bemerkungen folgen mögen, sind die Begriffsbestimmungen und Entwicklungen so gegeben, daß bloß planimetrische und stereometrische Kenntnisse vorausgesetzt, dagegen weder goniometrische Symbole (bis auf § 8 und einige der Zusätze) noch Kurvengleichungen verwendet werden. Zur raschen Orientierung des Lehrers aber sind diese, sowie diejenigen Integrationen u. dgl., welche für das im Texte Gesagte den kürzesten Ausdruck bieten, in den Anmerkungen unter dem Texte beigegeben.

---

1) Der analytische Ausdruck des Cavalierischen Prinzips in seiner einfachsten Form besteht darin, daß, wenn

$$f(x)=F(x), \quad \text{auch} \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx=\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx;$$

ferner für die Erweiterung des Prinzips darin, daß, wenn

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx=A_1 \quad \text{ist,} \quad \int_{x_0}^{x} m f(x)\cdot n\,dx=mn\cdot A_1$$

wird — wobei $f(x)$ und $F(x)$ die Maßzahlen von $\left\{\begin{matrix}\text{Flächen}\\ \text{Längen}\end{matrix}\right\}$, dx die Maßzahl ihres Abstandes, m und n unbenannte Zahlen bedeuten, die entweder von x unabhängig, oder jede für sich derart von x abhängig sind, daß ihr Produkt wieder konstant (— in dem oben zuletzt erwähnten Falle $=1$) ist.

I.

§ 1. Als **„einfache Sinuskurve“** bezeichnen wir eine Kurve AmB (Fig. 1), deren allgemeiner Punkt m die Eigenschaft hat, daß, wenn AMD ein Kreis vom Radius 1 ist, und Ap gleich dem Bogen $\overset{\frown}{AM}$ genommen wird, die auf Ap Senkrechte pm gleich der auf OA senkrechten Halbsehne („Sinusstrecke“) PM ist. – In der einfachen Sinuskurve ist die „Höhe“ $CB = 1$, die „Basis“ $AC = \frac{\pi}{2} = 1{,}57..$ (also nahezu gleich $1\frac{1}{2}$).

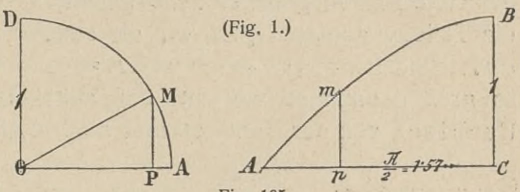


Fig. 105.

Als **„allgemeine Sinuskurve“** bezeichnen wir eine Kurve AmB (Fig. 2), deren allgemeiner Punkt m die Eigenschaft hat, daß, wenn $A_1M_1D_1$ ein Kreis vom Radius a und $A_2M_2D_2$ ein Kreis vom Radius b ist, zu $Ap = \overset{\frown}{A_2M_2}$ die Senkrechte $pm = P_1M_1$ gehört. – In der allgemeinen Sinuskurve ist die „Höhe“ $CB = a$, die „Basis“ $AC = \frac{\pi}{2} b$.

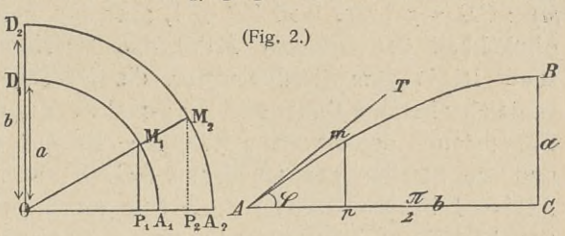


Fig. 106.

Werden unendlich viele Kurventeile, welche mit AmB (Fig. 2) kongruent sind, so aneinander gefügt, daß die nächste Fortsetzung über B hinaus in bezug auf BC symmetrisch, die nächste Fortsetzung über A hinaus in bezug auf A zentrisch zu AmB liegt usf. (vgl. Fig. 4, S. 297), so entsteht eine unbegrenzte Sinuskurve[1]) oder „Wellenlinie“, von welcher der Kurventeil AmB ein „Quadrant“ ist.

Nach diesen Definitionen lassen sich beliebig viele Punkte von Sinuskurven oder Wellenlinien konstruieren, und durch freie Verbindung dieser Punkte erhält man in beliebiger Annäherung jene Kurven selbst. Besonders empfiehlt es sich, denjenigen Punkt p zu benutzen, für welchen $Ap = \frac{1}{3} AC$ und $pm = \frac{1}{2} CB$ ist (wie sich daraus ergibt, daß, sobald $\sphericalangle AOM = 30^0$, das Dreieck POM die Hälfte eines gleichseitigen ist).

1) Die Gleichungen der Sinuskurven sind

für die einfache: $y = \sin x$,

für die allgemeine: $y = a \sin \frac{x}{b}$,

aus welcher letzteren speziell für $\frac{x}{b} = \frac{\pi}{2}$ folgt: $x = \frac{\pi}{2} b,\ y = a$.

§ 2. Um nun zunächst den **Flächeninhalt** der einfachen Sinuskurve zu finden, denken wir uns sowohl den Kreisquadranten AD (Fig. 3) als auch die ebensolange Basis AC der Sinuskurve in die nämliche Anzahl gleicher Teile geteilt, so daß z. B. $pq = \text{MN}$. Durch die Teilungspunkte legen wir die auf AC, resp. AO, Senkrechten pm, $qn \ldots$ und $\text{PR} = \text{QS} = \cdots = \text{OA} = 1$. – War nun die Zahl der Teile so groß genommen worden, daß annähernd der Streifen $mpqn$ als Rechteck von der Höhe mp und der Basis pq betrachtet werden darf, so ist sein Flächeninhalt **gleich** dem des Streifens RPQS. Denn bezeichnen wir den Exponenten des Verhältnisses MP : MO mit y[1]), so ist einerseits gemäß der in § 1 gegebenen Definition der Sinuskurve auch

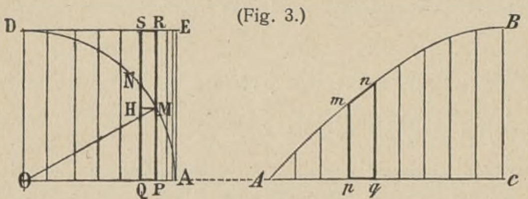


Fig. 107.

$mp : CB = y$ (oder weil $CB = 1$, auch $mp = y$), anderseits wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke MPO und MHN auch $\text{MH} : \text{MN} = y$; und somit ist in dem Streifen $mpqn$ die Dimension mp y-mal so klein, zugleich aber die Dimension pq y-mal so groß als die entsprechenden Dimensionen des Streifens RPQS. – Da nun dies für alle Streifen gilt, und die Streifen des Quadrates AODE zusammen den Flächeninhalt $\text{AO}^2 = 1$ besitzen, so ist nach dem eingangs angeführten erweiterten Cavalierischen Prinzipe auch der Flächeninhalt der einfachen Sinuskurve gleich **1** Flächeneinheit.

Da ferner die Dimensionen der allgemeinen Sinuskurve a-mal, resp. b-mal so groß sind als die der einfachen, so folgt, daß der Flächeninhalt der allgemeinen Sinuskurve gleich ist $a \cdot b$ Flächeneinheiten.

Über den „Winkel an der Spitze der Sinuskurve“ siehe § 8 S. 303 ff.

II.

§ 3. Durch einen geraden Kreiszylinder (Fig. 4) sei ein zur Achse senkrechter Schnitt $A''C''A'''C'''$ und ein zur Achse schiefer Schnitt

1) y ist hienach sin $\widehat{\text{AM}}$. – Der Grundgedanke der obigen Quadratur der Sinuskurve ist der, daß einerseits die Längen der in gleichen Abständen aufeinander folgenden Ordinaten der Sinuskurve wie auch anderseits die Projektionen der aufeinander folgenden gleichen Bogenelemente des Kreises – und somit auch die Breiten der zu diesen Bogenelementen gehörigen Streifen des dem Kreisquadranten umschriebenen Quadrates nach dem „Sinusgesetze“ zunehmen. – In Integralen lautet die Quadratur der Sinuskurve:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = 1 \quad \text{und} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}b} a \sin \frac{x}{b}\, dx = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \xi\, d\xi = ab\,.$$

$ABA'B'$ gelegt; der durch diese beiden Ebenen und den zwischen ihnen liegenden Teil des Zylindermantels begrenzte Körper heiße kurz **„Zylinderstutz"**. Sind der senkrechte Schnitt $ACA'C'$ und der schiefe Schnitt $ABA'B'$ so gelegt, daß ihre Mittelpunkte O zusammenfallen, so werden durch diese beiden Ebenen, den zu ihnen senkrechten Achsenschnitt $BB'C'''C''$ und den zwischen ihnen liegenden Teil des Zylindermantels vier kongruente, resp. symmetrische Körper begrenzt, welche in Ermangelung eines kürzeren und bezeichnenderen Namens „Zylinderstutz-Quadranten" heißen mögen; ein solcher ist $ABCOA$ (Fig. 4) und ebenso (Fig. 5), S. 298. Sein „Radius" $OA = OC$ sei $= b$, seine „Höhe" $CB = a$.

Es läßt sich zunächst zeigen, daß die krumme **Begrenzung** des in eine Ebene aufgerollten Mantels des Zylinderstutzes die **allgemeine Sinuskurve** mit der Basis $\frac{\pi}{2} b$ und der Höhe a ist, d. h.

(Fig. 4.)

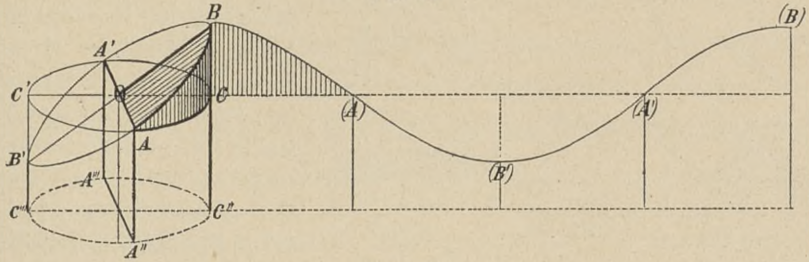


Fig. 108.

zwischen der Länge von Ap und pm besteht die Beziehung, daß, wenn die Punkte A, p, C, B in (Fig. 5) zur Deckung gebracht werden mit den gleichbezeichneten Punkten der (Fig. 2) S. 295, sich auch die allgemeinen Punkte m und m dieser Figuren decken. Gemäß der Entstehung der Sinuskurve in (Fig. 2) ist nämlich die $mp = M_1P_1$ im Verhältnisse $a : b$ kleiner als die M_2P_2, und ebenso auch wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke mpP und BCO in (Fig. 5) mp im Verhältnisse $a : b$ kleiner als die pP; diese pP ist aber wegen der Kongruenz, die zwischen dem Kreisquadranten ApC, resp. dem Bogen Ap (Fig. 5) und dem Quadranten $A_2M_2D_2$, resp. dem Bogen A_2M_2 (Fig. 2) besteht, gleich der Senkrechten M_2P_2, woraus die Gleichheit der Senkrechten mp und mp in (Fig. 2) und (Fig. 5) folgt[1]).

1) Ist die Länge des (als Kreisbogen oder als geradgestreckt gedachten) $Ap = x$, die von $pm = y$ (Fig. 5), so ist

$$pm : \mathrm{P}p = a : b, \quad \text{woraus} \quad pm = \frac{a}{b} \mathrm{P}p.$$

Ferner: $$\mathrm{P}p = \mathrm{O}p \sin \frac{\overset{\frown}{Ap}}{\mathrm{O}p} = b \sin \frac{x}{b}$$

Das **Netz** eines Zylinderstutzes vom Radius b und der Achsenlänge h, bei welchem die längste Seitenlinie $h+a$, die kürzeste $h-a$ sein soll, wird hiernach konstruiert, indem man die Seite $2b\pi$ des abgewickelt gedachten Mantels in 4 Teile je $=\frac{\pi}{2}b$ teilt, und über diesen Teilen als Basis Sinuskurven von der Höhe a so konstruiert, daß die vier Kurven zusammen eine „Wellenlinie“ mit zwei halben „Bergen“ und einem „Tal“ bilden. Im zusammengeklebten Netze bilden dann diese Ränder eine ebene Kurve (Ellipse).

§ 4. Der **Flächeninhalt** des Stückes ABC des Zylindermantels ist auf Grund von § 2 einfach $=a \cdot b$, d. h. gleich dem doppelten Inhalt des Dreieckes OCB.

§ 5. Um den **Kubikinhalt** des Zylinderstutz-Quadranten $ABCOA$ zu ermitteln, vergleichen wir letzteren mit einer quadratischen Pyramide $GHJKL$ (Fig. 5) von der Basiskante b und der Höhe a, in welcher der Fußpunkt der Höhe in die Ecke H fällt. Diese Pyramide denken wir uns so aufgestellt, daß die Kante GH in die Verlängerung der OC fällt, ferner GK gleichstimmig parallel mit OA, und die Höhe HL gleichstimmig parallel mit CB ist. Eine in einem beliebigen Abstande $OP=\xi$ von der Ebene OCB zu dieser parallele Ebene schneidet den Körper $ABCOA$ in dem Dreiecke Ppm, und hinreichend erweitert die Pyramide in dem Trapeze $rstu$. Die Flächeninhalte Δ und T dieser Figuren sind gegeben durch:

(Fig. 5.)

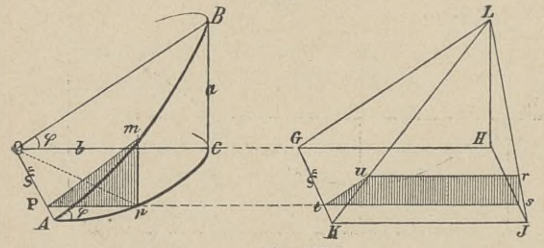


Fig. 109.

$$\Delta=\frac{1}{2}Pp \cdot pm,$$

worin $Pp=\sqrt{b^2-\xi^2}$ und $pm=\frac{a}{b}Pp=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-\xi^2},$

---

und daher $$pm=\frac{a}{b}\cdot b\sin\frac{x}{b}=a\sin\frac{x}{b},$$

also $$y=a\sin\frac{x}{b},$$

d. i. wieder die in Anm. zu § 1 aufgestellte Gleichung der Sinuskurve (Wellenlinie), worin beim Mantel des Zylinderstutz-Quadranten für x die Werte von $x=0$ bis $x=\frac{\pi}{2}$, dagegen beim Mantel des ganzen Zylinderstutzes die von $x=0$ bis $x=2\pi$ zu nehmen sind.

Die Beziehungen des schiefen Schnittes eines geraden Kreiszylinders zur Wellenlinie verwendet Helmholtz (Theorie der Tonempfindungen IV. Auflage, 1877, S. 141) zu einer hübschen Veranschaulichung der Lissajousschen Kurven.

weshalb $\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - \xi^2} \cdot \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - \xi^2} = \frac{1}{2}\frac{a}{b}(b^2 - \xi^2)$.

Ferner: $$T = \frac{1}{2}(st + ru) \cdot rs,$$

worin $st = b$, $ru = \xi$ (wie sich am leichtesten ergibt, wenn man sich durch ru einen Schnitt parallel zur Basis $GHJK$ geführt denkt, der auch quadratisch sein wird, und worin die zur Kante GK parallele Seite $= \xi$ wäre); endlich $rs = \frac{a}{b}(b - \xi)$ aus der Proportion $Js : rs = JH : LH$ oder $(b - \xi) : rs = b : a$. Daher ist

$$T = \frac{1}{2}(b + \xi) \cdot \frac{a}{b}(b - \xi) = \frac{1}{2}\frac{a}{b}(b^2 - \xi^2).$$

Es sind somit die Schnitte Δ und T flächengleich; und weil dies wegen des beliebig anzunehmenden ξ für alle parallelen Schnitte gilt, so haben nach dem eingangs angeführten Cavalierischen Prinzipe in seiner einfachsten Form die beiden Körper gleichen Kubikinhalt. Den der Pyramide können wir direkt berechnen, er ist $\frac{1}{3}b^2 \cdot a$; und somit ist auch der Kubikinhalt des Zylinderstutz-Quadranten $= \frac{1}{3}ab^2$, d. i. gleich dem Drittel des ihm umbeschriebenen quadratischen Prismas[1]).

Es verdient bemerkt zu werden, daß sowohl die Mantelfläche als der Kubikinhalt des Zylinderstutz-Quadranten frei von dem Faktor π sind, was bei der Krümmung desselben auf den ersten Blick überraschen mag – übrigens nur ein Analogon zu den bekannten Theoremen von der *„lunula Hippokratis"*, der Quadratur der Parabel u. dgl. bildet.

Zusatz. Die auf die Mantelfläche und den Kubikinhalt des ganzen Zylinderstutzes bezüglichen Aufgaben lassen sich auch ohne Kenntnis der Resultate von §§ 4 und 5 lösen, da die oberhalb und unterhalb des Schnittes $ACA'C'$ liegenden Teile der Mantelfläche und des Rauminhaltes infolge ihrer Kongruenz sich ausgleichen.

Nützlich ist dagegen obige Kubatur für die Lösung der Aufgabe: Wie groß ist der Raum J, den zwei gerade Kreiszylinder vom Radius r mit einander rechtwinklig schneidenden Achsen gemeinsam haben? (Reidt, Stereometrische Aufgaben § 32. Nr. 1339). Es seien in (Fig. 6) S_1S_2, S_3S_4, S_5S_6, S_7S_8 die Linien, in welchen die die Achsen beider Zylinder enthaltende Mittelebene des Körpers J die Mantelflächen der Zylinder schneidet; das durch sie eingeschlossene Quadrat heiße E. Legen wir senkrecht auf E vier Ebenen, welche die Eckenhalbmesser BB von E und seine Seitenhalb-

---

1) In Integralform lautet die obige Kubatur unter Beibehaltung der Bedeutung von Δ, ξ, a, b:

$$K = \int_0^b \Delta\, d\xi = \frac{1}{2}\frac{a}{b}\int_0^b (b^2 - \xi^2)\, d\xi = \frac{1}{2}\frac{a}{b}\left[b^3 - \frac{b^3}{3}\right] = \frac{1}{3}ab^2.$$

messer CC (d. h. die Zylinderachsen) enthalten: so zerfällt J in 16 Zylinderstutz-Quadranten, in denen $a = b = r$. Somit ist $J = 16 \cdot \frac{1}{3} r^2 \cdot r = \frac{16}{3} r^3$, d. i. $= \frac{2}{3}$ eines Würfels von der Seite $2r$.

Letzteres Resultat liefert das Cavalierische Prinzip auch direkt, indem ein zu E im Abstande ξ parallel geführter Schnitt in J ein Quadrat bildet, dessen halbe Seite man unschwer $= \sqrt{r^2 - \xi^2}$ findet, und dessen Fläche somit $= 4r^2 - 4\xi^2$ ist. Dieses Resultat leitet uns an, als Vergleichungskörper einen Würfel von der Seite $2r$ zu wählen, aus welchem eine Doppelpyramide heraus-

(Fig. 6.)

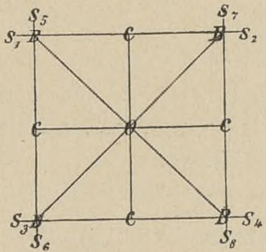


Fig. 110.

(Fig. 7.)

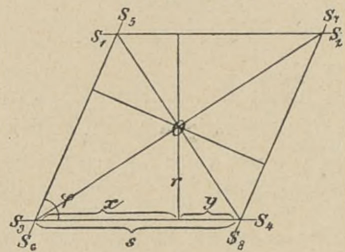


Fig. 111.

geschnitten ist, deren Scheitel im Würfelzentrum liegt, und deren Basen die zu E parallelen Würfelflächen sind. Der Inhalt dieses Vergleichungskörpers ergibt sich $= (2r)^3 - 2 \cdot \frac{1}{3}(2r)^2 \cdot r = \frac{16}{3} r^3$. (Letztere Methode bildet ein Analogon zu der bekannten Methode, den Inhalt der Kugel durch Vergleichung mit einem Zylinder *minus* einem Kegel zu bestimmen).

Erweitert man schließlich obige Aufgabe dahin, daß die beiden Zylinderachsen nicht aufeinander senkrecht stehen, sondern miteinander den Winkel φ (Fig. 7) bilden, so ist der Schnitt E nicht mehr ein Quadrat, sondern ein Rhombus mit der Seite $s = 2r \cdot \operatorname{cosec} \varphi$. – Deshalb ist auch der Inhalt des Raumes J jetzt $\operatorname{cosec} \varphi$ mal so groß als früher, also $J = \frac{16}{3} r^3 \operatorname{cosec} \varphi$. – Man kann dies wieder entweder durch die letzterwähnte direkte Anwendung des Cavalierischen Prinzipes finden, wobei auch der im Abstande ξ von E geführte Schnitt $\operatorname{cosec} \varphi$ mal größer ist als früher; – oder man bedenkt, daß von den früher betrachteten 16 Zylinderstutz-Quadranten je acht die Höhe x (Fig. 7), acht die Höhe y haben, wonach

$$J = 8 \cdot \frac{1}{3} r^2 x + 8 \cdot \frac{1}{3} r^2 y = \frac{8}{3} r^2 (x + y) = \frac{8}{3} r^2 s$$

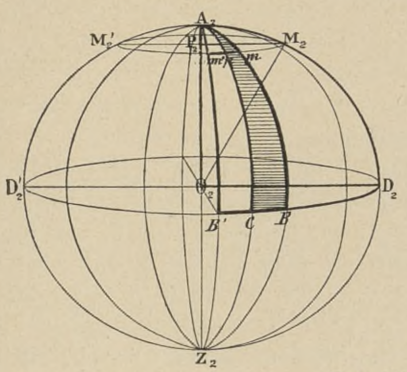
$$= \frac{8}{3} r^2 \cdot 2r \operatorname{cosec} \varphi = \frac{16}{3} r^3 \operatorname{cosec} \varphi.$$

III.

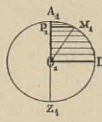
§ 6. Die Konstruktion eines ebenen **Kugelnetzes** ist wegen der doppelten Krümmung der Kugelfläche nur in Annäherungen möglich, indem nur die Krümmung nach einer Dimension durch Biegen des Netzes beim Zusammensetzen verwirklicht, die Krümmung nach der zweiten Dimension aber vernachlässigt wird. – Sehr verbreitet ist dasjenige Verfahren der Bildung eines annähernden Kugelnetzes, welches die Kugeloberfläche durch eine Anzahl gleich weit abstehender „Meridiane“ (z. B. $A_2 m B Z_2$, $A_2 m' B' Z_2$ usw.,

(Figg. 8.)

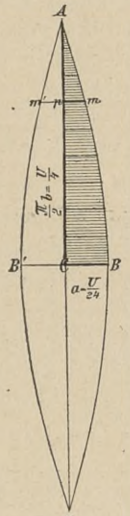
(α).



(β).



(γ).



Figg. 112.

Fig. 8, α) in Kugelzweiecke zerlegt, und diese sodann mit Vernachlässigung der Krümmung nach der Dimension der „Breitekreise“ ($M_2 m p m' M_2'$, $D_2 B C B' D_2'$ usw.) in die Ebene ausgebreitet denkt, wobei jedes Zweieck die Form einer von zwei symmetrischen Kurven $AmBZ$ und $Am'B'Z$ begrenzten Lanzette (Fig. 8, γ) erhält, deren „Länge“ $AZ = \frac{U}{2}$, und deren „Breite“ $BB' = \frac{U}{n}$ sein muß, wenn der Umfang des größten Kreises der Kugel U werden und die Zahl der Zweiecke n (z. B. 12) sein soll.

Es bleibt nun noch die Natur der **Begrenzungskurve** AmB, resp. ABZ festzustellen. – Es findet sich diesbezüglich in mehreren Lehrbüchern ohne nähere Motivierung der durch die drei Punkte A, B, Z gehende und somit vollkommen bestimmte Kreisbogen als Begrenzung angewendet. Daß sich nun dies aber keineswegs von selbst versteht, und daß namentlich nicht etwa schon deshalb, weil jene Begrenzungslinie an der Kugel selbst einen Kreisbogen – nämlich einen Meridian – bildet, sie auch im Netze einem Kreise angehören müsse, läßt sich u. a. durch den Hinweis auf den schiefabgeschnittenen Zylinder ins Gedächtnis rufen, indem sich hier die Grenzellipse beim Abrollen des Mantels in eine ganz heterogene, nämlich eine Sinuskurve verwandelt. Um aber überhaupt etwas Bestimmtes über die Natur der Kurve AmB aussagen zu können, muß vor allem festgestellt werden, in welcher Weise man sich die (nur im Sinne einer Annäherung statthafte) Ersetzung der den Breitekreisen angehörigen Bögen (z. B. mpm') durch Gerade vollzogen denken will? Hierüber dürfte es nun kaum eine näherliegende Feststellung geben als die, daß man die Mittellinie (Symmetrale) A_2pC des Zweiecks zu einer Geraden ApC ausstreckt und in jedem Punkte p dieser Geraden nach beiden Seiten hin je die halbe Länge des durch p gehenden Breitekreisbogens mpm' als Senkrechte aufträgt. — Unter dieser Voraussetzung läßt sich sofort zeigen, daß die Begrenzung des in die Ebene ausgebreiteten Kugelzweiecks wieder eine **Sinuskurve** von der Basis $AC = \frac{\pi}{2} b = \frac{U}{4}$ und der Höhe $CB = a = \frac{U}{2n}$ sei, wobei b der Radius der Kugel, U ihr Umfang ist.

Der Beweis für diese Behauptung besteht darin, daß sich 1. der ganze Umfang des durch p gehenden Breitekreises $M_2pM'_2$ zum Umfang des Äquators $D_2CD'_2$ verhält wie der Radius M_2P_2 zum Radius $D_2O_2 = b$. Da nun 2. sowohl mp, als auch BC die $2n$ten Teile des durch p gehenden Breitekreises, resp. des Äquators sind, so werden sie sich ebenfalls verhalten wie $M_2P_2 : D_2O_2$, — oder wie die Strecken $M_1P_1 : D_1O_1$, welche in einem Kreise mit dem Radius $a = \frac{U}{2n}$ (Fig. 8, β) den entsprechend bezeichneten Strecken im Kreise mit dem Radius b ähnlich liegen: wodurch nach § 1 die allgemeine Sinuskurve mit der Höhe a und der Basis $\frac{\pi}{2} b$ definiert ist[1]).

§ 7. Das praktische Verfahren für die **Konstruktion** des Netzes einer Kugel vom Umfange U (d. i. vom Radius $\frac{U}{2\pi}$) aus z. B. 12 Zweiecken gestaltet sich nach § 6 und § 1 so: 1. Man zeichnet einen Kreis

1) Um den Beweis durch Aufstellung der Gleichung der Begrenzungskurve zu geben, setzen wir, wie in der Anmerkung zu § 3 (S. 297, 298), die Länge des Bogens $A_2p = x$, die Längen des Bogens $pm = y$. Nun ist

$$pm = \frac{P_2M_2\,2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n} O_2M_2 \sin\frac{\widehat{A_2M_2}}{O_2M_2}$$

und hierin ist

$$O_2M_2 \sin\frac{\widehat{A_2M_2}}{O_2M_2} = O_2M_2 \sin\frac{\widehat{A_2p}}{A_2O_2} = b \sin\frac{x}{b};$$

somit $$pm = \frac{\pi}{n} \cdot b \sin\frac{x}{b}$$

und $$y = a \sin\frac{x}{b}$$

— also wieder die Gleichung wie in § 1. — Am kürzesten läßt sich der Grund für die Verwendung der Sinuskurve für das Kugelnetz dahin aussprechen, daß sich die Radien, Umfänge und daher auch **homologe Bögen** der Breitekreise verhalten wie die **Sinus der Poldistanzen.**

vom Durchmesser $\frac{U}{12}$, d. i. vom Halbmesser $\frac{U}{24}$, teilt den vierten Teil seines Umfanges in gleiche Teile (am bequemsten und ausreichend genau 9 an der Zahl, entsprechend je 10 Bogengraden, Fig. 8, β) und fällt aus den Teilungspunkten Senkrechte auf den ersten (letzten) Halbmesser des Viertelkreises. 2. Man teilt eine Strecke von der Länge $\frac{U}{4}$ in ebensoviele (9) Teile als den Viertelkreis und errichtet in den Teilungspunkten der Strecke senkrecht auf sie der Reihe nach die Senkrechten des Viertelkreises. 3. Durch freie Verbindung der so erhaltenen Endpunkte der Senkrechten erhält man Kurven, deren vier zu einer Lanzettform zusammengesetzt ein Zweieck liefern (Fig. 8, γ); 12 der letzteren zusammengefügt bilden dann eine Fläche, die wir der Kürze wegen im folgenden **„Netzkugel"**, u. zw. eine vom Umfang U aus 12 Zweiecken nennen wollen.

§ 8. Bisher ist bei Bestimmung der Begrenzung der Zweiecke nur auf die eine Bedingung Rücksicht genommen worden, daß die Breite der Zweiecke an den verschiedenen Stellen der Größe der entsprechenden Breitekreise gemäß sei. Für die Brauchbarkeit des Netzes aber sind noch die beiden Umstände entscheidend, in welcher Annäherung die einzelnen Zweiecke beim Zusammenfügen 1. den vollen Winkel 2π um den Pol der Netzkugel herum ausfüllen, und 2. in ihrer Krümmung nach der Dimension der Meridiane wirklich mit der Krümmung der Kugel selbst übereinstimmen?

Bezüglich der beiden Fragen ist es wichtig, den „Winkel an der Spitze der Sinuskurve", d. h. den Winkel φ, den die im Punkte A der Sinuskurve an letztere gezogene Tangente AT (vgl. Fig. 2, S. 295) mit deren Basis bildet, zu vergleichen mit dem Winkel ψ, unter welchem sich an einer wirklichen Kugel von $2n$ äquidistanten Meridianen je zwei benachbarte, resp. deren Ebenen schneiden. Für letzteren Winkel erhält man, da $2n \cdot \psi = 2\pi$ sein soll, den Wert

$$\psi = \frac{\pi}{n};$$

und speziell für $n = 12$ ist $\psi = 15^0$.

Dagegen finden wir die Größe φ am anschaulichsten durch die Bemerkung, daß sich nach § 3 die Sinuskurve von der Basis $\frac{\pi}{2} b$ und der Höhe a so an einen Kreiszylinder vom Radius b legen läßt (Fig. 5, S. 298), daß die Ebene der Ellipse, in welche hierbei die Sinuskurve übergeht, mit der Ebene des durch die Basis gebildeten Kreises einen Kantenwinkel einschließt, der ebenfalls φ ist: denn im Punkte A stehen die unendlich nahe angrenzenden Stücke beider Kurven auf der Kante OA senkrecht. Die Größe dieses Kantenwinkels bestimmt sich auf Grund dieser Beziehung nach dem Dreiecke OCB (Fig. 5) durch

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{BC}{OC} = \frac{a}{b}$; und es ist demnach auch der Winkel φ an der Spitze der Sinuskurve von der Höhe a und der Basis $\frac{\pi}{2} b$ gegeben durch

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}\ ^{1)}.$$

Für jene besonderen Sinuskurven, welche die n Zweiecke des Kugelnetzes begrenzen, ergibt sich infolge der Relation $2na = 2\pi b$ oder $a = \frac{\pi}{n} b$ der Wert

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\pi}{n}.$$

Man sieht hieraus, daß φ nur ein Näherungswert, u. zw. kleiner ist als das genaue ψ, da erst die goniometrische Tangente von φ den nämlichen Wert hat wie ψ. Die Annäherung von φ an ψ wird aber um so genauer, je größer n, d. h. je schmaler jede Lanzette des Kugelnetzes genommen wird.

Für $n = 12$ wird $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\pi}{12}$, woraus $\varphi = 14^0\, 40'\, 15''$ – so daß also der Fehler $\psi - \varphi = 0^0\, 19'\, 45''$, welcher für jede Lanzette doppelt und daher für das ganze Kugelnetz 24mal genommen **7,9⁰** – allgemein $2n\left[\frac{\pi}{n} - \operatorname{arctg} \frac{\pi}{n}\right]$ – gibt. Soviel also fehlt unserem Kugelnetz zur Ausfüllung des vollen Winkels um den Pol herum.

Führt man die analogen Rechnungen für die zu Beginn des § 6 erwähnten, durch Kreisbögen begrenzten Zweiecke aus[2]), so erhält man

---

1) Direkt erhält man diese Beziehung aus der Kurvengleichung $y = a \sin \frac{x}{b}$; nämlich: $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{b} \cos \frac{x}{b}$, woraus für $x = 0$ folgt $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}$. Für die einfache Sinuskurve, bei der $a = b = 1$, ist hiernach $\varphi = 45^0$. – Man findet diese Beziehung auch unmittelbar auf Grund der in § 1 definierten Entstehungsweise der Sinuskurve, nämlich durch die Bemerkung, daß unendlich kleine Bögen ihren Halbsehnen (Sinus) gleich sind, und daß daher die ersten Abszissen der einfachen Sinuskurve mit ihren Ordinaten gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke bilden, in welchen der gesuchte Winkel $\varphi = 45^0$ vorkommt. Diesen Dreiecken entsprechen ferner in der allgemeinen Sinuskurve rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten b und a (da laut Definition die Abszissen, resp. Ordinaten der allgemeinen Sinuskurve zu denen der einfachen durchweg in dem Verhältnisse $b:1$, resp. $a:1$ stehen), und so gelangt man auch wieder durch die letzteren elementaren und anschaulichen Betrachtungen zur Beziehung $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}$.

2) In einem Kreisbogen (Fig. 9), dessen halbe Sehne $AC = \sigma$, und dessen Pfeil $CB = a$ ist, ist der gesuchte Winkel $\varphi' = TAC = COA$ gegeben durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{AC}{CO} = \frac{2a\sigma}{\sigma^2 - a^2}.$$

Soll hierin $\sigma = \frac{U}{4}$, $a = \frac{U}{2n}$ werden, so erhält man $\operatorname{tg} \varphi' = \frac{4n}{n^2 - 4}$.

für $n=12$, $\varphi'=18^0\,55'\,28''$, wobei der Fehler $\varphi'-\psi=$ fast 4^0, welcher 24mal genommen rund 94^0, also über einen Rechten beträgt!

§ 9. Im Zusammenhange mit der Frage nach dem Schließen des Netzes hinsichtlich der Spitzen steht die nach der Krümmung der einzelnen Zweiecke beim Aneinanderfügen ihrer Ränder. Für letzteres ist die Bedingung charakteristisch, daß diese Ränder ebene Kurven bilden müssen, weil beide Zweiecke in bezug auf diese Kurven symmetrisch zu liegen kommen sollen. – Erinnern wir uns nun, daß nach § 3, wenn der Ebene einer Sinuskurve die Krümmung eines Kreiszylinders erteilt wird, in welchem die Ebene des nunmehr von der Basis der Sinuskurve gebildeten Kreises senkrecht steht auf der Zylinderachse, die Sinuskurve eine ebene Kurve (eine Schnittellipse des Zylinders)

Für $n=12$ wird $\operatorname{tg}\varphi'=\frac{12}{35}$, woraus sich obiger Wert $\varphi'\doteq 19^0$ ergibt. –

Für die Frage, welches der beiden Kugelnetze theoretisch berechtigter ist, ist es von Interesse, welcher Grenze sich die Summen Φ, resp. Φ' aller Winkel an der Spitze der Zweiecke nähern, wenn man die Anzahl n der Zweiecke unendlich wachsen läßt.

Beim Sinuskurven-Netz ist $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\pi}{n}$, daher $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\pi}{n}$ und somit $\Phi=\lim\limits_{n=\infty} 2n\cdot\operatorname{arctg}\frac{\pi}{n}=2\pi$; wie man durch die der Form $\infty\cdot 0$ entsprechenden Differentiationen nach n findet. Auch durch elementare, aber allerdings nicht ganz einwurfsfreie Rechnung erhält man dasselbe Resultat, indem man für $n=\infty$ sogleich $\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{n}$ nimmt; dann ist

(Fig. 9.)

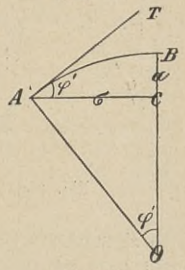


Fig. 113.

$$\Phi=\lim 2n\varphi=\lim 2n\cdot\frac{\pi}{n}=2\pi.$$

Beim Kreisbogen-Netz dagegen ist

$$\operatorname{tg}\varphi'=\frac{4n}{n^2-4},\ \text{daher}\ \varphi'=\operatorname{arctg}\frac{4n}{n^2-4}$$

und somit $\quad \Phi'=\lim\limits_{n=\infty} 2n\cdot\operatorname{arctg}\frac{4n}{n^2-4}=8,$

wie sich wiederum durch die Differentiation, oder übereinstimmend aus der minder exakten Ersetzung von $\operatorname{arctg}\frac{4n}{n^2-4}$ durch $\frac{4n}{n^2-4}$ selbst ergibt, wobei

$$\Phi'=\lim 2n\cdot\frac{4n}{n^2-4}=\lim\frac{8n^2}{n^2-4}=\lim\frac{8}{1-\frac{4}{n^2}}=8.$$

Von diesen Werten stimmt der für $\Phi=2\pi$ mit der vorauszusehenden Eigenschaft, daß unsere „Netzkugel“ für $n=\infty$ eine wirkliche Kugel wird, während das Kreisbogen-Netz auch bei unendlich vielen Lanzetten noch ein Unding bleibt, wie der Überschuß $8-2\pi=8-6{,}28..=1{,}72$, d. i. $27{,}3\,\%$ Fehler beim Schließen selbst noch des theoretisch vollkommensten Netzes dieser Art zeigt!

bildet – so dürfen wir jetzt umgekehrt sagen: damit die Ränder zweier aneinanderstoßender Zweiecke in die nämliche Ebene fallen, muß ihre Mittellinie die Krümmung eines **Kreises** erhalten. Und somit: Jedes Zweieck der Netzkugel ist nach der Dimension des Meridianes ebenso gekrümmt wie die wirkliche Kugel[1]).

1) Direkt erhält man dieses Resultat folgendermaßen: Wir legen die gekrümmte Fläche des Zweieckes so in ein rechtwinkliges Koordinatensystem $\Xi H Z$ (Fig. 10), daß die Spitze in den Anfangspunkt A, die Mittellinie ApC in die ΞZ-Ebene und die Ordinaten y der Sinuskurve parallel zur H-Achse zu liegen kommen. Es ist dann die Gleichung $\zeta = f(\xi)$ der Kurve ApC aus den Bedingungen zu ermitteln, daß zwischen der Geraden $pm = y$ und der Krummen $Ap = x$ einerseits noch immer die Relation $y = a \sin \frac{x}{b}$ bestehen soll, worin $a = \frac{b\pi}{n}$, und daß andrerseits alle Punkte m der Kurve AmB in einer Ebene liegen sollen, welche die Ξ-Achse enthält und mit der ΞZ-Ebene einen Winkel einschließt, der mit Rücksicht darauf, daß er der $2n$te Teil des vollen Kantenwinkels um die Ξ-Achse herum sein soll, $\psi = \frac{\pi}{n}$ sein müßte, welchem Werte aber im Sinne der bereits oben besprochenen Annäherung auch der Winkel φ an der Spitze der Sinuskurve entspricht, für welchen

(Fig. 10.)

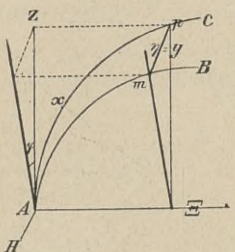


Fig. 114.

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\pi}{n}$ ist. – Die Gleichung der genannten Ebene ist dann mit Zulassung dieser Annäherung:

$$\eta = \zeta \cdot \operatorname{tg}\varphi = \frac{\pi}{n}\zeta; \text{ und wegen } \eta = y \text{ ist weiter}$$

$$\frac{\pi}{n}\zeta = \frac{b\pi}{n}\sin\frac{x}{b} \quad \text{oder} \quad \zeta = b\sin\frac{x}{b}\ (1).$$

Andrerseits besteht zwischen ξ, ζ und x die Relation

$$x = \int_0^{\xi} d\xi \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2} \qquad (2),$$

da x jetzt die Länge des von $\xi = 0$ gezählten Bogens der Kurve $\xi = f(\zeta)$ ist. Um aus (1) und (2) die Größe x zu eliminieren und die verlangte Relation zwischen ζ und ξ zu erhalten, entwickeln wir aus (1):

$$x = b \arcsin\frac{\zeta}{b}, \quad dx = \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\zeta}{b}\right)^2}}$$

und durch Gleichsetzung mit dem Differential der Gleichung (2):

$$d\xi\sqrt{1 + \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2} = \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\zeta}{b}\right)^2}},$$

welche Gleichung nach $\frac{d\zeta}{d\xi}$ aufgelöst, gibt:

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{\sqrt{b^2 - \zeta^2}}{\zeta} \quad \text{oder} \quad \xi = \int \frac{\zeta\, d\zeta}{\sqrt{b^2 - \zeta^2}} = -\sqrt{b^2 - \zeta^2} + C.$$

Zusatz. Die Ergebnisse der §§ 8 und 9 geben uns nunmehr ein genaues Bild von der Art der Annäherung, mit der die in sich widersprechende Aufgabe, ein ebenes Netz zu einer Kugel zusammenzufügen, von unserem Sinuskurven-Netz dadurch gelöst wird, daß man je eine der einander widersprechenden Bedingungen auf Kosten der übrigen nur annähernd erfüllt. – Gibt man nämlich jedem Zweiecke genau die Breite $\frac{U}{12}$, genau die Begrenzung durch Sinuskurven und genau die Krümmung des Kreises, und fügt die 12 gekrümmten Zweiecke aneinander, so stehen die Ebenen des ersten und des letzten Randes um den oben erwähnten Winkel von $2n\left[\frac{\pi}{n} - \operatorname{arctg}\frac{\pi}{n}\right] = 7{,}9^0$ voneinander ab. Man könnte nun diesen Abgang dadurch zu ersetzen suchen, daß man den Sinuskurven jedes Zweieckes nicht die Höhe $a = \frac{U}{24}$, sondern eine etwas größere Höhe a' gibt, deren Wert sich daraus bestimmt, daß wir statt φ jetzt $\psi = 15^0$ setzen. Dann ist

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{a'}{b}, \quad a' = b \cdot \operatorname{tg}\psi = \frac{U}{2\pi} \cdot \operatorname{tg} 15^0 = \frac{U}{23{,}47\ldots}$$

Es müßte also jedes Zweieck sowohl an den dem Äquator wie an allen übrigen den Breitekreisen entsprechenden Stellen im Verhältnisse 24 : 23,47 breiter gemacht werden, damit das Netz vollständig schließe ohne Änderung der richtigen Krümmung der Meridiane und der verhältnismäßigen Länge der Breitekreise. Diese modifizierte Netzkugel hätte dann aber nur mehr nach der Dimension der Meridiane genau den Umfang U, die Äquatorlänge aber wäre $\frac{24}{23{,}47} U = 1{,}023\, U$. – Statt der genauen Größe des Umfanges kann man aber auch die eine oder die andere der beiden übrigen von den obengenannten Bedingungen opfern, um das Schließen des Netzes zu erreichen; z. B. die genaue Sinuskurvenform, indem man die Winkel φ an den Spitzen von $14^0\, 40'\, 15''$ auf 15^0 ergänzt, und die Abweichung gegen die Mitte des Zweiecks hin verschwinden macht. Behält man dagegen das Netz ganz ungeändert, so wird beim Aneinanderfügen des ersten und letzten Randes die bis dahin genau kreisförmige Krümmung etwas geändert, indem sich am Pole der „Netzkugel" eine (allerdings sehr schwache) Spitze bildet.

§ 10. Wie groß ist die **Oberfläche** der „Netzkugel"? – Da sie aus n Zweiecken, und jedes der letzteren aus 4 Sinuskurven von der Höhe $a = \frac{U}{2n}$ und der Basis $\frac{\pi}{2} b = \frac{U}{4}$ besteht, so ist nach § 2 der Flächeninhalt F der Netzkugel

$$F = 4n \cdot ab = 4n \cdot \frac{U}{2n} \cdot \frac{U}{2\pi} = \frac{U^2}{\pi} = \frac{(2b\pi)^2}{\pi} = 4b^2\pi;$$

Bestimmen wir den Wert der Integrationskonstante $C = b$ gemäß dem Wertepaare $\xi = 0$, $\zeta = 0$, so erhält man die Relation

$$(\xi - b)^2 + \zeta^2 = b^2,$$

d. i. die Gleichung eines Kreises vom Halbmesser b, der die Z-Achse im Anfangspunkte tangiert. Dieser Kreis ist dann die Leitlinie derjenigen Zylinderfläche, zu welcher die einzelnen Zweiecke beim Zusammensetzen sich krümmen – übereinstimmend mit den oben gegebenen Folgerungen aus den Eigenschaften des schief abgeschnittenen Zylindermantels.

d. h. die **Oberfläche** der Netzkugel vom Radius b ist **genau gleich** der Oberfläche einer wirklichen Kugel vom Radius b. U. zw. gilt dies **unabhängig** von der Anzahl der Zweiecke.

Dieses Resultat muß auf den ersten Blick überraschen, wenn man bloß daran festhält, daß die Netzkugel sich nur um so genauer an die wirkliche Kugel annähert, je größer n ist. Der innere Grund des bewiesenen Resultates liegt in der Anwendbarkeit des Cavalierischen Prinzipes auf die Grundeigenschaft, welche wir dem Netze gegeben haben: dieser gemäß wird nämlich, wenn man neben der Netzkugel eine wirkliche Kugel vom gleichen Radius so aufstellt, daß der Äquator beider in dieselbe Ebene fällt, eine dem Äquator parallele Ebene die Kugel in einem Breitekreis, die Netzkugel in einem Polygon von n Seiten schneiden, deren Umfänge einander gleich sind, u. zw. unabhängig von der Seitenzahl n dieser Polygone. – Damit übrigens diese Berufung auf das Cavalierische Prinzip stichhaltig sei, müssen die von der nämlichen Schnittebene getroffenen Oberflächenelemente beider Körper die nämliche Neigung gegen jene Schnittebene haben. Dies ist aber nach § 9 wirklich der Fall; genau allerdings nur, solange jedes Zweieck für sich dieselbe Krümmung wie die Kugel besitzt, was nach § 8, S. 304 beim Aneinanderfügen aller n derartig gekrümmten Zweiecke zur Folge hat, daß zwischen der Ebene des ersten und letzten Randes ein Winkelabstand von

$$2n\left[\frac{\pi}{n} - \operatorname{arctg}\frac{\pi}{n}\right], \text{ d. i.} = 7{,}9^0 \text{ für } n = 12$$

bleibt, und daß somit auch die den Breitekreisen umfangsgleichen Polygone von n Seiten nicht geschlossen sind. Da aber letzterer Umstand die Anwendung des Cavalierischen Prinzipes nicht hindert, so darf die obige Ableitung der Oberfläche $F = 4b^2\pi$ der längs eines Randes offen gebliebenen Netzkugel zugleich als eine vollkommen strenge Ableitung der Oberflächenformel für die wirkliche Kugel gelten.

Übrigens läßt sich der Grundgedanke[1]) unserer Methode die Ober-

1) Dieser Grundgedanke läßt sich in Integralen so wiedergeben: Ist der Bogenabstand eines Breitekreises vom Pole $= x$, die Länge des Breitekreises $= y$, so ist die zwischen zwei unendlich benachbarten Breitekreisen liegende Fläche, unbeschadet ihrer einem Kegelmantel sich nähernden Krümmung, gleich der Fläche des Rechteckes $y\,dx$ und daher

$$F = \int_0^{\frac{U}{2}} y\,dx.$$

Nennen wir wieder den Radius der Kugel b, die Poldistanz ξ,

so ist $$F = \int_0^{b\pi} 2b\pi \sin\xi \cdot d\,(b\xi) = 2b^2\pi \int_0^{\pi} \sin\xi\,d\xi = 4b^2\pi.$$

fläche der Kugel bloß mit Hilfe der Quadratur der Sinuskurve und des Cavalierischen Prinzipes zu berechnen, auch ganz unabhängig von der Einführung eines Kugelnetzes folgendermaßen darstellen: Man lege an die Kugel eine zylindrische Fläche so, daß ein Meridian der Kugel ihre Leitlinie ist, und trage von den verschiedenen Punkten der letzteren aus längs der Seitenlinien des Zylinders nach ein und derselben Seite hin die ganze Länge der Umfänge der durch jene Punkte gehenden Breitekreise auf. Wird dann der Zylindermantel in eine Ebene ausgebreitet, so bilden jene Längen die Ordinaten einer Sinuskurve von der Basis $\frac{\pi}{2} b = \frac{U}{4}$ und der Höhe $a = U$, deren doppelter Flächeninhalt $2ab = 2U . \frac{U}{2\pi} = 4b^2\pi$ gleich dem der Kugel ist.

§ 11. Wie groß ist der **Kubikinhalt** der Netzkugel? Da nach § 8 jedes Zweieck, wenn seine Mittellinie zu einem Halbkreise gekrümmt worden ist, zusammen mit den Ebenen beider Ränder einen Raum einschließt, der aus 4 Zylinderstutz-Quadranten von der Gestalt des Körpers $ABCOA$ in (Fig. 5) besteht, und letzterer Körper nach § 5 den Kubikinhalt $k = \frac{1}{3} ab^2$ besitzt, so ist für die Kugel, wo $a = \frac{U}{2n} = \frac{b\pi}{n}$ ist,

$$K = 4n \cdot \frac{1}{3} \frac{b\pi}{n} \cdot b^2 = \frac{4}{3} b^3 \pi;$$

d. h. der **Kubikinhalt** der Netzkugel vom Radius b ist **gleich** dem Kubikinhalte der wirklichen Kugel vom Radius b, u. zw. wieder **unabhängig** von n. Auch dieses Resultat gilt, wie das analoge für die Oberfläche, nur so lange genau, als das Netz bis auf den Winkelabstand $2n \left[\frac{\pi}{n} - \text{arctg}\, \frac{\pi}{n}\right]$ (= $7{,}9^0$ für $n = 12$) zwischen der Ebene des ersten und letzten Randes offen bleibt. Während aber dieser Umstand die Berechnung der Oberfläche nicht hinderte, müssen wir uns jetzt, um für die Berechnung des Kubikinhaltes einen allseitig geschlossenen Raum zu haben, außer den gekrümmten Zweiecken auch die genannten beiden Ränder-Ebenen als Begrenzungen des Körpers denken. Lassen wir diese, wie es beim vollständigen Schließen der „Netzkugel" geschieht, in eine Ebene zusammenfallen, so gilt obige Inhaltsformel nur mehr annähernd; genau aber wieder, wenn $\text{tg}\, \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n}$ wird, d. h. für $n = \infty$.

Es folgen noch (S. 20–26) „zum Schlusse einige Worte über die didaktische Verwendung vorstehender Aufgaben, insbesondere solche über das Cavalierische Prinzip (nicht nur für Körper, sondern auch für Flächen); über die Sinuskurve („das Vertrautsein mit ihren Eigenschaften ... eine der fruchtbarsten unter allen geometrischen Einzelerkenntnissen") und über den Funktionsbegriff (die hierauf bezüglichen Forderungen wurden schon oben S. 21 angeführt). – „Zeitgemäß" geworden ist insbesondere noch der Wortlaut von S. 23, Anmerkung:

„Endlich bieten auch die ... Differentiationen und Integrationen für solche vorgeschrittene Schüler, welche ihr Privatfleiß an die Anfänge der Infinitesimalrechnung geführt hat, lehrreiche, weil einer konkreten Anschauung noch immer naheliegende Übungen; so daß für solche strebsame Anfänger die ganze kleine Arbeit allenfalls eine Privatlektüre bilden könnte, welche gerade dem tieferen Verständnisse einiger wichtigen Partien des in der Schule offiziell Behandelten zugute käme". Die hier ausgesprochene Hoffnung ist mir dann schon einige Jahre später über alles Erwarten in Erfüllung gegangen: Denn wirklich war die Privatlektüre dieser kleinen Arbeit für einen lieben Schüler in seinem Maturajahr (1892) der Anlaß zu einer ähnlichen elementaren Integration von $\int \sin^2 dx$, die man als seine allererste Publikation unter der Chiffre F. H. (hinter der nun ein mathematischer Physiker auf einer angesehenen Lehrkanzel steht) in der Zeitschrift „Österr. Mittelschule", Jhg. 1892, S. 213 nachlesen kann.

Siebzehntes Lebensjahr (mittlerer Jahrgang der Oberstufe).

§ 31. Ein Lehrgang zur abschließenden Verbindung von Geometrie, Arithmetik und Physik.

Indem das letzte Jahr der Oberstufe nur mehr einer zusammenfassenden, vertiefenden Wiederholung des ganzen Unterrichtes der Mittel- und Oberstufe vorbehalten bleibt, obliegt schon dem vorletzten Jahre der ganzen Mittelschule in allen Hauptsachen der Abschluß sowohl des arithmetischen wie des geometrischen Unterrichtes. Es sind schon inhaltlich große Aufgaben: Als geometrischer Stoff die neue Welt der analytischen Geometrie, als arithmetischer Stoff alles, was nach den Logarithmen noch übrigbleibt, und was allerdings auf den ersten Blick ein etwas buntes Vielerlei: Reihen, Kombinationen u. dgl. scheint. Aber nicht nur zu einem solchen Eindruck des Bunterlei in den Augen des Schülers es überhaupt gar nicht kommen zu lassen und auch namentlich nicht zu dem unwürdigen Eindruck, daß der arithmetische Unterricht z. B. zufällig mit dem Binomischen Satz aufhört, wie wenn ihm sonst nichts Gescheites mehr einfiele, oder weil eben das Schuljahr zu Ende ist, oder weil es bisher auch immer so gewesen war — also nicht nur, positiv formuliert, dem hergebrachten ganzen mathematischen, namentlich auch arithmetischen Lehrstoff dieses letzten Jahrgangs der Mittelschule den Charakter innerlicher Zusammengehörigkeit zu sichern, sondern ihn auch mit dem Physikunterrichte dieses Jahres in die innigste, beiden Fächern wohltätige Beziehung zu setzen, sei eine Aufgabe der folgenden didaktischen Vorschläge. Wir wollen über dieser allgemeineren Aufgabe einer würdigen Lehrplangestaltung die speziellere, den einen oder anderen brauchbaren Ratschlag im einzelnen und einzelnsten zu geben, nicht aus dem Auge verlieren.

Als allgemeine Aufgabe dieses Jahrganges haben wir uns schon im § 2 das Herausarbeiten des abstrakten und insofern allgemeinen Funktionsbegriffes gestellt. Dabei möge der Fachmathematiker sich nicht stoßen an dem etwas anmaßend klingenden Ausdruck „Allgemeiner“ Funktionsbegriff. Es versteht sich nämlich von selbst, daß, wenn dieses Wort innerhalb eines Lehrplanes für Mittelschulen vorkommt, nicht die allerhöchsten, allerletzten Verallgemeinerungen, wie sie die Mathematik nach dem ersten Aufsteigen zum $y = f(x)$ und $F(x, y, z, u \ldots) = 0$ dem Funktionsbegriffe noch zu geben vermochte, gemeint sein können; sondern, wie schon im § 2 in Aussicht genommen wurde, steht an der Schwelle dieses Jahrganges eine Verallgemeinerung ähnlicher Art wie an der Schwelle des letzten Jahrganges der Unterstufe. Hier nämlich wird der Schüler, nachdem er bisher immer nur mit 2, 3, 4, $\frac{3}{4}$, 0,75 usw. gerechnet hatte, emporgehoben zur Verallgemeinerung des a, $b \ldots$ der „Buchstabenrechnung“. Vielleicht kann sich mancher Lehrer nicht mehr zurückdenken in die Größe der Überraschung, die dem Schüler diese Verallgemeinerung bedeutet; und könnte dies ein Lehrer nicht, so würde er sie auch nicht mit dem gebührenden Nachdruck dem Schüler fühlbar zu machen der Mühe wert finden. So nun haben wir auch erst diesem vorletzten Jahrgang zur Aufgabe gestellt, dem Schüler die Abstraktion des $y = f(x)$ nahezubringen, und — über die „Operation f“ etwas aussagen zu sollen, obwohl man doch gar nicht weiß, „was für eine Operation“ (ja ob überhaupt eine „rechnerische“ Beziehung!), — der Schüler möge hierin nur mit rechter Verwunderung wieder einen zweiten sehr großen Schritt nach vorwärts sehen — „sehr groß“ mit den Maßen des Schülers, nicht des Lehrers gemessen, der die durch das Zeichen f ausgedrückte Verallgemeinerung freilich als Fachmann längst gewöhnt ist. — Vielleicht ist an diesem Punkte, wo wir die höchste, dem Mittelschüler überhaupt noch vorzuführende mathematische Verallgemeinerung zu erreichen im Begriffe sind, auch die ganz allgemein didaktische Bemerkung nicht unangebracht, daß wohl kein anderer

Umstand den pädagogischen Erfolgen eines rein wissenschaftlich noch so glänzenden Fachmannes in gleichem Maße gefährlich werden kann und muß wie das Verwechseln der Leichtigkeit solcher Abstraktionen bei ihm, dem Fachmann, und ihrer Schwierigkeiten bei dem Anfänger.

Wolle also kein Lehrer, wenn er auch noch so fleißig schon bisher sich der graphischen Darstellungen aller einzelnen vorkommenden Funktionen bedient, und wenn er auch sonst alle Gelegenheiten zu „funktionalem Anschauen" — wie wir es im Titel des § 2 neben dem „funktionalen Denken" noch ausdrücklich nannten — mit didaktischer Erfindungsgabe ausgenutzt hat, es sich und seinen Schülern verhehlen, daß es nun den großen bedeutsamen Schritt zu tun gelte, überhaupt eine mathematische Abhängigkeit zweier Größen, x und y, ins Auge zu fassen und sich zu fragen, ob sich auch mit dieser Allgemeinheit mathematischer Formen weiterhin noch etwas anfangen lasse. Weiß der Schüler noch so gut Bescheid, wie die Kurven für $y = x^2$, $y = x^3$, für $y = \pm\sqrt{x}$, für $y = \log x$, für $y = \operatorname{tg} x$, $\sin x$ usw. aussehen, so wird es doch erst den didaktischen Versuch gelten, ob der Schüler selbst bei mehr oder weniger Nachhilfe sich überhaupt noch etwas an Belehrungen zu erwarten getraut, wenn nur von „irgendeiner Kurve" nach einem beliebigen Bildungsgesetz oder sogar nach keinem bekannten die Rede sein soll (daß es überdies noch Funktionen gibt, denen nicht einmal „irgendeine Kurve" entspricht, kann dem Schüler wahrscheinlich überhaupt zu sagen erspart bleiben). Aber gesetzt, diese Einführung in den (relativ) allgemeinen Funktionsbegriff wäre an die Spitze des Unterrichtes dieses Jahrganges gestellt worden; würde eine solche Eröffnung, selbst wenn sie übrigens didaktisch noch so geschickt und vorsichtig erfolgt wäre, auf die Schüler nachhaltigen Eindruck machen, ihnen Gelegenheit zu immer wiederholter Anwendung des Gedankens geben? Sollen diese unerläßlichen didaktischen Erfolge der von allen Seiten so warm begrüßten Pflege des „funktionalen Denkens" sich wirklich einstellen, so wird man wohl mit noch weiter zurückgreifenden Wiederholungen und Anknüpfungen nicht sparen dürfen.

Ungezwungen läßt sich dieses Ziel erreichen, wenn man den ganzen Unterricht der analytischen Geometrie in seinen Dienst stellt, es aber auch hier nicht verschmäht, dem systematischen Lehrgang einen Vorkursus der analytischen Geometrie vorauszusenden. Denn ein solcher hat auch hier die Möglichkeit, didaktisch besonders Wirksames vorweg zu nehmen, es mit Vorausgegangenem ganz nach Bedarf, wenn auch einstweilen zum Teil noch einseitig, zu verknüpfen und gerade durch das Unsystematische solcher Vorübungen die Erwartungen auf die spätere systematische Darstellung zu spannen. Einige Vorschläge hiezu mögen daher den folgenden Paragraph ausfüllen. – Vorher aber sei als weiteres Programm, das gegenüber der bisherigen Praxis immerhin etwas Neues enthalten dürfte, das aufgestellt, daß es auch die Arithmetik keineswegs nötig hat, wie weltfremd zwischen den zwei großen neuen Hauptgegenständen dieses Jahrganges, jener analytischen Geometrie einerseits, der Physik andererseits, einige Nebentheorien, wie Reihen, Binomischer Satz, Kombinieren u. dgl. m. weiter zu spinnen. Sondern wenn z. B. der Physikunterricht aus innerer Notwendigkeit mit der Mechanik und diese wieder mit einer wohl durch nichts zu übertreffenden didaktischen Eindringlichkeit bei GALILEIs vorbildlich mathematischen Bearbeitungen alltäglichster Erscheinungen wie des Falles und Wurfes anheben will, so wird die Arithmetik mit den arithmetischen Reihen zur Hand sein müssen, sobald in der Physik die Fallstrecken der einzelnen Sekunden $= 1 : 3 : 5$ und die ganzen Fallstrecken $= 1 : 4 : 9$ gefunden werden; und die analytische Geometrie wird mit einigen Lehren betreffend die Parabel die Physik der Wurfparabeln unterstützen müssen. Oder ist es nicht eine beschämende Gedankenlosigkeit der bisherigen offiziellen Lehrpläne gewesen, wenn solche aufeinander sachlich angewiesene Einzellehren nach dem Wortlaut dieser Lehrpläne monate- und semesterweit auseinander zu liegen kamen? Wird man sich über die mannigfaltigen Symptome von Leblosigkeit aller drei Zweige eines solchen Unterrichtes wundern dürfen, wenn sie einander die Säftezufuhr versagen; oder darf man die Schuld an solcher Trockenheit des Unterrichtes den Lehrern zuschieben, wenn schon die Lehrpläne jede Gelegenheit versäumt hatten, dem Lehrer mit dem Auffinden und Ausnutzen solcher Beziehungen ein gutes Beispiel zu geben?

Indem die nachfolgenden Darstellungen ein Bild der vom Verfasser während der vielen Jahre seiner Unterrichtspraxis allmählich erschlossenen und als gangbar erprobten Wege zu einer innigen Verbindung des mathematisch-physikalischen (und philosophisch-propädeutischen) Unterrichtes in den obersten Klassen der Überprüfung seitens der Fachgenossen empfiehlt, wünscht er nichts besseres, als daß an die zweifellos noch zahlreich möglichen anderen Wege der Maßstab einer gleich innigen oder womöglich noch innigeren Verbindung angelegt werde. –

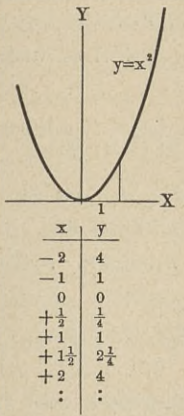
Aus bloß vorläufigen Gründen schieden wir aus den folgenden §§ 32–41 noch alles aus, was die drei genannten Gebiete an Differential- und Integralrechnung brauchen oder nahelegen, damit wir dann auf die augenblicklich noch umstrittene Frage „Höhere Rechnungen an höheren Schulen?“ eine zusammenhängende Antwort geben können. Es wird sich aber aus dem dort Empfohlenen von selbst ergeben, wie so gar nicht wir etwa ein kleineres oder größeres Kapitel Infinitesimalrechnung dem gegenwärtigen Unterricht äußerlich angeheftet, sondern wie wir sie ausschließlich aus ihm selbst, namentlich auch schon des VII. Jhgs., hervorwachsend wünschen, wenn die Symbole der Differential- und Integralrechnung an der Mittelschule überhaupt Existenzberechtigung haben und sich in ihr einleben sollen.

§ 32. Skizzen eines Vorkursus der analytischen Geometrie.

I. Darstellung einiger Gleichungen durch Kurven.

Es eignen sich hierzu die schon in früheren Jahrgängen (vgl. S. 231, 237 u. a.), aber damals noch ohne die Begriffe „Koordinatenachsen, Abszissen“ usf. entworfenen Kurven für die speziellen Funktionen $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \pm\sqrt{x}$ (die hierzu gehörigen Kurven sind meiner Physik, math. Anh. Nr. 12, Begriff der math. Funktion, entnommen). Der Schüler ist anzuhalten, daß er diese Kurven neuerdings möglichst sauber auf Millimeterpapier zeichnet. Die Mängel der Zeichnung (z. B. wenn die Kurve $y = x^2$ beim Nullpunkt eine Spitze statt der stetigen Krümmung verrät) geben nur zu mannigfache Gelegenheit, den Blick aller Schüler für die feineren Einzelheiten im Verlauf dieser Funktionen zu schärfen; z. B. daß bei den Kurven $y = x^2$, $y = x^3$ in der Nähe des Nullpunktes ein Anschmiegen an die Abszissenachse sich zeigt; was nicht nur auf die späteren Belehrungen über Tangenten und hiermit auf die anschaulichste aller Anwendungen differentialer Vorstellungen (s. u. S. 387 ff.) überhaupt vorbereitet, sondern auch schon ein allereinfachstes Beispiel dafür gibt, daß zu Abszissen, die „als (unendlich) klein **erster** Ordnung“ angenommen sind, Ordinaten gehören, die „(unendlich) klein **zweiter** Ordnung“ sind (wofür früher namentlich die sin und 1 – cos = sin vers, Halbsehne „und Pfeil“ kleiner Winkel ein typisches

Beispiel sind). Aber auch wenn man sich jetzt auf diese Begriffe von „unendlich Kleinem“ (allenfalls im Hinblick auf die von den neuesten Grundlegungen der Infinitesimalrechnung geübte Kritik) nicht einläßt, wird der Schüler schon durch das sonst nicht recht gelingende Anfertigen der Kurven belehrt, daß er bei dem dieser Zeichnung vorausgehenden Entwerfen eines Täfelchens der zusammengehörigen Werte von x und y eine gewisse Auswahl eben im Hinblick auf die Natur der Funktionen treffen, also bei x^2 und x^3 zwischen $x = 0$ und $x = 1$ noch etwa $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ einschalten muß. – Bekanntlich besteht bei einigermaßen verwickelteren Glei-



x	y
-2	4
-1	1
0	0
$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$+1$	1
$+1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$
$+2$	4
:	:

Fig. 115.

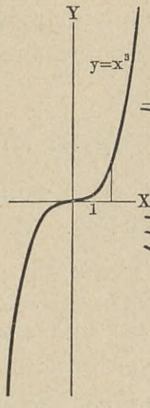


Fig. 116.

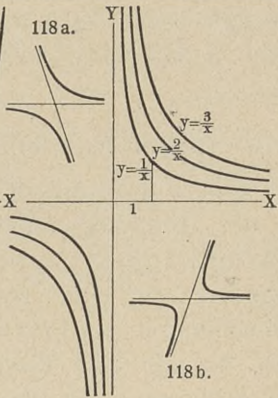
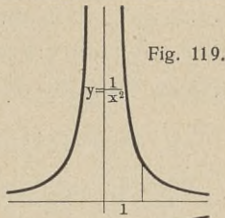


Fig. 118.



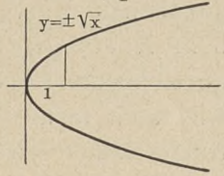


Fig. 117.

chungen, bzw. Kurven, von denen man die eine oder andere als Abschluß dieses Vorkursus vorführen mag, zumal der spätere systematische Lehrgang nicht mehr auf sie führt, in dem Herausspüren solcher charakteristischer Werte der Veränderlichen eine Hauptkunst, die nicht durch ein bloß mechanisches Auseinanderlegen der Gleichung in eine recht reichhaltige Tafel zu ersetzen ist.

Bei all diesen auf das wirkliche, sorgfältige Zeichnen von Kurven zu gegebenen Gleichungen sich gründenden Übungen bedarf es noch gar keiner theoretischen Erörterung, warum und wozu wir solche Zeichnungen machen. Der Lehrer wage es getrost, mit der Tür ins Haus zu fallen und sogleich an der Spitze des ganzen Vorkursus zu sagen: Wir wollen heute die Kurve zur Gleichung $y = x^2$ zeichnen (– auch an $y = {}^2\log x$ und $y = {}^{10}\log x$ waren wir so ohne irgendwelches *praeambulum* gegangen; S. 237). Er entwirft dann die Tabellen (indem er natürlich zu den anfänglich noch vom Lehrer gewählten Werten des x den Schüler die zugehörigen Werte des y berechnen läßt –

gleichsam schon hierin den Unterschied von Unabhängig und Abhängig symbolisierend). Falls die unvermittelte Zumutung zuerst verdutzten Gesichtern begegnet, schadet es gar nichts; wenn nur erst einige dieser Kurven, die anfangs nicht gelingen wollten, dann immer besser gelungen sind, weiß nun auch ein Schüler, der jeder abstrakten Auseinandersetzung über „das Wesen der Koordinatengeometrie“ unzugänglich gewesen wäre, weit eindringlicher, um was es sich handelt, als was immer für ein „Vortrag“ es ihm hätte nahebringen können. Auch den Lehrer läßt der Zeitpunkt, da die Zeichnungen wirklich so auszusehen anfangen, daß sein geschulter Blick die genannten Funktionen in ihnen wiedererkennt, in keinerlei Zweifel darüber, wann er übergehen darf zu der

II. Darstellung einiger Kurven durch Gleichungen.

Wieder sagt der Lehrer unvermittelt: Nun wollen wir zu einer gegebenen Kurve die Gleichung aufstellen. Beginnen wir mit dem Kreis in Mittelpunktstellung. Unter unseren bisher gezeichneten Kurven war der Kreis nicht vorgekommen. Sollen wir noch mehr Gleichungen probieren und dazu jedesmal die Kurve konstruieren, bis als eine dieser zufällig ein Kreis auftaucht? Doch kaum; wir werden vielmehr zurückgehen auf die Definition des Kreises als geometrischen Ortes aller Punkte M, die von O den Abstand a cm haben. Zeichnen wir also z. B. einen Kreis mit $a = 5$ cm. Wir sehen und wissen, daß dieser Kreis durch die Punkte $x = 3$, $y = 4$, und daß er durch $x = 4$, $y = 3$ geht; überdies durch $x = 0$, $y = 5$; $x = 5$, $y = 0$. Müssen wir nun erst raten, ob es eine Gleichung gibt, die uns für die Werte $x = 0, 3, 4, 5$ jene Werte von y liefert? Wir überblicken ja doch, daß jedes x und sein zugehöriges y Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind, und daß die Hypotenusen aller dieser Dreiecke immer $a = 5$ sind. Welche Beziehung muß also zwischen x und y bestehen, wenn alle jene Punkte M auf einem Kreis liegen sollen? Welcher Lehrsatz drückt dann die Beziehung zwischen Katheten und Hypotenusen aus? Sowie der Schüler antwortet: der Pythagoreische, also diesmal $x^2 + y^2 = 25$, sagen wir ihm: Richtig, und eben dies nennt man die Mittelpunktsgleichung des Kreises mit dem Halbmesser $a = 5$ cm; und allgemeiner ist $x^2 + y^2 = a^2 \ldots (1)$ oder $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2} \ldots (2)$ die gesuchte Kreisgleichung.

Behandeln wir nun diese Gleichung (2) wieder so, wie unter I die Gleichungen der übrigen Kurven, nämlich durch Auseinanderlegen in eine Tabelle (nunmehr auch mit Hereinnehmen irrationaler x und y, z. B. für $x = 2$, $y = \pm\sqrt{21}$) usw., so ist das geistige Band zwischen I und II schon hergestellt.

Sogleich kann und soll die Diskussion dieser Mittelpunktsgleichung erfolgen; daß zu größeren x kleinere y gehören, ist ebenso an (2) wie auch schon an (1) arithmetisch leicht zu ersehen und drückt geometrisch das Fallen des Kreisbogens im ersten Quadranten aus. Daß zu x größer als $+a$ (und zu x kleiner als $-a$) kein reeller Wert von y mehr gehört, zeigt, daß der Kreis den Bereich $-a \leqq x \leqq +a$ nicht überschreitet (was noch nicht zu schließen erlaubt, daß er eine geschlossene Kurve sei) usw. – Es erlaubt also das arithmetische Gebilde, das wir als die Gleichung des Kreises bezeichnet hatten, mittels des Analysierens dieser arithmetischen Beziehung viele (und wie sich später zeigen wird, sogar alle) geometrischen Eigenschaften des Gebildes gleichsam abzulesen, daher: „Analytische Geometrie" – deren Vater DESCARTES[1]) ist. –

Ein zweites Beispiel: Wagen wir uns sogleich an die Gleichung der Ellipse! Nur dürfen wir diese nicht in herkömmlicher Weise von allem Anfang bei der Brennpunktdefinition fassen, sondern wir definieren sie als die Kurve, die aus dem Kreis hervorgeht, indem wir alle Ordinaten im konstanten Verhältnis $b : a$ (wo $b < a$) verkürzen[2]). Dann ist die Gleichung des Kreises $Y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$, die der Ellipse $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$; die wir hierauf nach Belieben auch rational machen können und so auf $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ oder $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{y}\right)^2 = 1$ bringen.

1) Der Name DESCARTES war uns, da mit der VII. Gymnasialklasse auch der Unterricht der Logik beginnt (und in meinem Lehrbuch sogleich an der Spitze auf die „Evidenz der inneren Wahrnehmung" hingewiesen ist, von der in meinen „Zehn Lesestücken" das erste Stück über das *Cogito, ergo sum* handelt) wenige Tage vorher auch als der des „Vaters der neueren Philosophie" begegnet.

2) Gerade in diesen „Vorkursus" passen sehr wohl auch schon spannende Beispiele, wie das auf den „Ellipsenzirkel" führende: Ein Stab von $(a+b)$ cm Länge gleite mit dem einen Ende längs der Wand nieder, mit dem andern längs des Bodens vorwärts etc. – was für eine Kurve beschreibt einer seiner Punkte? Antwort: $\frac{x}{a} = \cos\alpha$, $\frac{y}{b} = \sin\alpha$, also $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ – also wieder eine Ellipse; wohl ganz wider das Erwarten einer bloßen „Anschauung".

(Näheres in meiner Physik, Math. Anh. Nr. 23.) – Neben verschiedenen anderen Vorteilen eines Beginnens mit dieser Definition fällt u. a. auch für den physikalischen Unterricht bei der Planetenbewegung noch ins Gewicht, daß sie sogleich zur Flächenformel $f = a^2\pi \cdot \frac{b}{a} = ab\pi$ führt.

So sind wir auch gerüstet für das dritte Beispiel: die Parabel. Sie ist uns ja schon in I bei $y = x^2$ und $y = \pm\sqrt{x}$ entgegengetreten. Jetzt aber unter II muß – wie wir ja am Beispiel von Kreis und Ellipse gesehen haben – unser erstes die Einführung einer geometrischen Definition der Parabel sein; und diesmal gehen wir der Brennpunktdefinition nicht mehr aus dem Wege, da sie in besonders lehrreicher Weise zeigt, worauf alles Aufstellen von Gleichungen zu gegebenen Kurven hinausläuft: Zu einer gegebenen Kurve die **Gleichung** aufstellen heißt, eine die Kurve definierende **geometrische** Eigenschaft umsetzen in eine **arithmetische** Beziehung zwischen den Koordinaten des sog. allgemeinen Punktes der Kurve.

Die die Parabel definierende Eigenschaft $FM = MQ$, umgesetzt in eine Beziehung zwischen den Koordinaten, lautet:

$$\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2}, \text{ woraus } y^2 = 2px.$$

Die Diskussion zeigt hier, daß dem Wachsen von x keine Grenze gesetzt ist, daß aber allerdings y bei größerem x immer langsamer wächst (ferner bei sehr kleinem x das entgegengesetzte Verhältnis wie bei $y = x^2$; hinsichtlich des unendlich Kleinen erster und zweiter Ordnung s. o. unter I, S. 314).

Für die Physik wertvoll, ja unentbehrlich ist noch die Vertrautheit mit Begriff und Größenbeziehungen des Parameters (nämlich: definiert war bisher die Größe p als Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie; jetzt wird definiert: der Parameter ist die Ordinate im Brennpunkte. Dann gehört zu $x = \frac{p}{2}$ ein $y = \pm\sqrt{2p \cdot \frac{p}{2}} = \pm p$).

Auch den Satz, daß der Krümmungshalbmesser im Scheitel der Parabel dem Parameter gleich ist, erlauben wir uns schon in diesem Vorkursus an- und einzuführen. Es geschieht zunächst nur, indem wir die Schüler wieder so sauber, als ihnen nur irgendwie möglich ist, Parabeln von $p = 2$ cm und etwa noch $p = 3$ cm, $p = 4$ cm zeichnen lassen und zum Scheitel dann Kreise von allerlei Größen, von denen sich der am besten anschmiegt, für den jeweilig $r_0 = p$; wogegen wir allerlei sehr einfache **Beweise** dieser merkwürdigen Gleichheit erst ein halbes Jahr später in der systematischen analytischen Geometrie nachtragen. Darüber mag sich das Gewissen des strengen Mathematikers beruhigen, wenn er bedenkt, wie physikalisch durchsichtig sich auf Grund dieser Beziehung $r_0 = p$ in der Mechanik die Beziehungen zu den Kreis- und Wurfbewegungen gestalten (vgl. meine Physik § 13, Normalbeschleunigung oder zentripetale Beschleunigung, erste Ableitung der Gleichung $b = \frac{c^2}{r}$). –

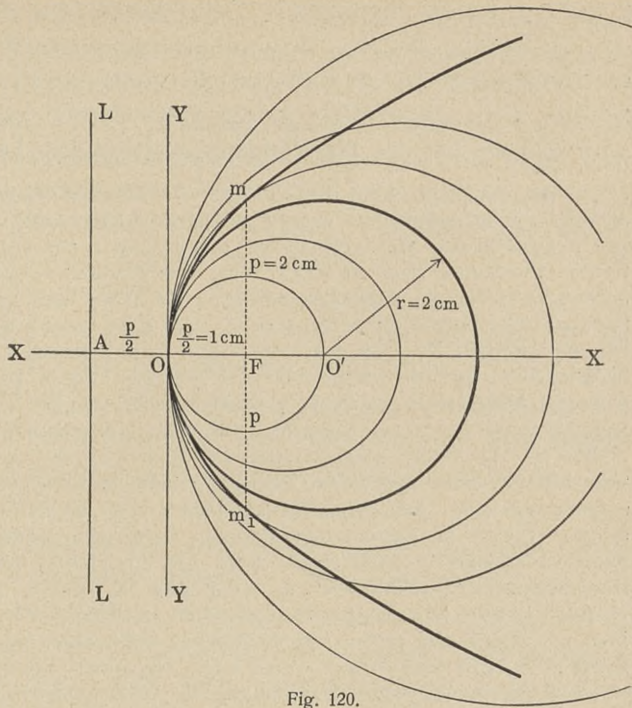


Fig. 120.

Die beiden skizzierten Lehrproben werden zur Genüge erkennen lassen, in welchem **Lehrtone** wir uns den Vorkursus der analytischen Geometrie erteilt denken. Denn auf diesen Lehrton, auf die Unbefangenheit und Zwanglosigkeit, in der der kühne Gedanke einer Darstellung der Gleichungen in Kurven und der Kurven in Gleichungen zuerst vor den Schüler hintritt, kommt alles an[1]). – Die Auswahl des Lehrstoffes dagegen, den der Lehrer jeweils für ausreichend und notwendig zu einem solchen Vorkursus hält, mag sich ganz nach dem Bedürfnis der jeweiligen Schulklasse und des nächstbevorstehenden Unterrichtes, namentlich der Physik richten. So wird man z. B. die **Gerade** entweder gar nicht schon im Vorkursus oder doch erst zum Schluß kurz erwähnen; hier etwa unter der Wendung: „Wir haben nun einige Gleichungen behandelt, die fast alle zweiten Grades waren – was mögen die Gleichungen ersten Grades $y = x$, $y = 2x$, $y = \frac{1}{2}x$,

1) Wiederholt ist es mir begegnet, daß die Hörer meiner pädagogischen

$y = \frac{1}{2}x + 1$ usw. bedeuten? Denn gerade für den Anfänger tritt das Bedürfnis, für die Behandlung dieses einförmigen Gebildes eine besondere, die „analytische“ Methode zu schaffen oder zu benutzen, nicht augenfällig genug hervor und auf keinen Fall so packend wie bei der Mannigfaltigkeit krummer Linien. Erst wenn

Kollegien, natürlich nicht die künftigen Fachlehrer der Mathematik, sondern anderer Fachgruppen, mir eingestanden, sie hätten zwar noch in Stereometrie und Trigonometrie auf „vorzüglich“ entsprochen, mit dem Beginn der analytischen Geometrie aber seien sie sich wie vernagelt vorgekommen. Es wurde daraufhin die Probe angestellt mit ein paar in die Luft gezeichneten Figuren, nämlich eben der Kurve zu $y = x^2$ und dann der Gleichung zum Kreis. Binnen wenigen Minuten ein erstauntes: Ja so, darauf kommt es an! — Das ist alles?! u. dgl. m. Was hier die wenigen Jahre Hinausgewachsenseins über die Mittelschule an Reife gezeitigt haben mögen, wird gewiß mehr als wett gemacht durch die Tatsache, daß dem Hochschüler ein Mittelschulfach, in das er nicht völlig eingedrungen ist, alsbald völlig fremd wird. Wohl aber vermochten solche angehende Pädagogen anderer Lehrfächer sich nun Rechenschaft abzulegen, daß das „Vernageltsein“ nicht so sehr ihre Schuld als die eines verkehrt in Angriff genommenen Unterrichts gewesen sei. Wenn es nach wochenlangen Zurüstungen über die Vorzeichen der Koordinaten, über Koordinatentransformationen und ähnlichem zu nichts anderem als einem Haufen Formeln über die gerade Linie kam, so müßte sich ja ein bescheidenes Maß von Begabung und — Geschmack für mathematische Dinge gerade darin kundgeben, daß man diesen vielen Lärm um nichts eben nicht begriff.

Nach meinen eigenen Erfahrungen im Unterrichte der analytischen Geometrie habe ich gar keinen Grund, für die seitens eines Gegners der Infinitesimalrechnung an höheren Schulen aufgestellte Behauptung, „daß es sogar schon mit der Koordinatengeometrie nicht recht vorwärts wolle“, mehr den Durchschnitt der Schüler als einzelne Lehrer und Lehrbücher verantwortlich zu machen. Vielmehr teile ich als eine Beobachtung, die sich mir Jahr für Jahr, manchmal mehr, manchmal minder auffällig, wiederholt hat, die folgende mit: Eine Schulklasse, die sich noch als Sexta im österreichischen Sinne, d. h. von Sechzehnjährigen, mehr oder minder kindsköpfisch verhalten hatte, zeigte geradezu einen auffälligen Fortschritt im Gesamtverhalten, wenn nun in der analytischen Geometrie die Mathematik als eine wirklich rein geistige, als eine geistreiche Macht den jungen Leuten entgegentrat. Diese spürten sehr deutlich, insbesondere durch den Kontrast des breiten Rechenapparates trigonometrischer Aufgaben, daß hier mit wenigen Buchstaben einer Kurvengleichung, mit wenigen Schritten einer Transformation sich allerwesentlichste Beziehungen fast mühelos ergeben, sobald man nur das Wesen der Methode überhaupt verstanden hat, wozu eben die typischen Beispiele des Vorkursus völlig ausreichen. — Ich will auch nicht verschweigen, daß es auf mich einen sonderbaren Eindruck machte, als ich bei der Naturforscherversammlung 1894 zu Wien von reichsdeutschen Lehrern privatim die Meinung äußern hörte, wir hätten in Österreich nur darum seit 1849 analytische Geometrie schon im Gymnasium betrieben, weil sich der mathematische Universitätsunterricht dieses Kapitels entlasten wollte. Diese Reminiszenz führe ich hier nur deshalb an, weil man genau dasselbe Argument nun wieder (von reichsdeutschen und österreichischen Lehrern) gegen die Einführung erster Anfangsgründe des Differentiierens und Integrierens an der Mittelschule anführen hörte. In anderthalb Jahrzehnten wird hoffentlich auch das nur mehr eine Reminiszenz sein.

diese ihre didaktische Schuldigkeit zur ersten Einführung dieser Methode getan haben, wird dann in systematischer Behandlung freilich mit der Geraden aus mehr als einem sachlichen Grunde zu beginnen sein. – Wir kommen auf die Bedenken gegen den jetzt sehr oft zu vernehmenden Vorschlag, man möge die erste Einführung ins „funktionale Denken" bei Vierzehnjährigen durch die graphische Darstellung der linearen Funktion $y = Ax + b$ bewerkstelligen (s. u. S. 326), S. 359 zurück.

Ob und wann ein solcher Vorkursus der analytischen Geometrie seinen didaktischen Zweck erreicht hat, bemißt sich daraus, daß durch ihn die Begriffe des unabhängig Veränderlichen (independent Variablen) und abhängig Veränderlichen zum selbsterworbenen Eigentum geworden, daß sie dem Schüler dank dem Selberzeichnen der Kurven sozusagen unter den Händen hervorgewachsen sein müssen. Mehr noch als diese geometrischen Betätigungen hat aber wohl der gleichzeitige Anfang des Physikunterrichtes getan, in dem die von GALILEI der mathematischen Behandlung zugänglich gemachten Begriffe der gleichförmigen und der gleichmäßig beschleunigten Bewegung vor allem (ebenfalls ganz nach dem Gedankengange GALILEIS) auf den freien Fall und die Bewegung an der schiefen Ebene, ihre konkreten physikalischen Anwendungen finden. Für das Aufstellen unseres Lehrganges der Mathematik ist diese Beziehung zur Physik nicht etwa ganz oder halb zufällig, sondern geradezu entscheidend; denn gerade für die Einführung des Funktionsbegriffs, der vom Anfang des VII. Jahres die zentrale Aufgabe des mathematischen Unterrichtes bildet, bieten eben jene GALILEIschen Grundbeziehungen, die wir heute in den Formeln $s = at^2$ für die gleichmäßig beschleunigte und $s = at$ für die gleichförmige Bewegung schreiben, ein noch lebendigeres, sozusagen unwiderstehlicheres Beispiel als selbst die Darstellung durch Kurven. Es ist nämlich die „Zeit t" geradezu die unabhängig Veränderliche κατ᾽ ἐξοχήν. Es läßt sich dem Schüler mit beliebiger Lebhaftigkeit ausmalen, daß er die Fallformel $s = at^2$ erst dann ganz verstanden und gewürdigt hat, wenn er sie als Beziehung zwischen der independent variablen Fallzeit t und der dependent variablen Fallstrecke s auffaßt.

Indem wir für die nähere Durchführung des Gedankens, wie schon an diesem Punkte die innige Verbindung des physikalischen mit dem mathematischen Unterrichte anzubahnen, und wie sie bis in die konkreten Einzelheiten eines möglichen Schulbetriebes durchzuführen sei, im übrigen auf den „mathematischen Anhang" zu unserer „Physik" verweisen, wollen wir nun sogleich auch den systematischen Lehrgang der analytischen Geometrie in einigen Hauptpunkten weiter verfolgen; und es mögen erst dann sowohl die arithmetischen Kapitel dieses Jahrgangs wie die Verbindung von Arithmetik und Geometrie namentlich durch eine dementsprechend eingerichtete abschließende Behandlung der Gleichungen noch nachfolgen. Das allmähliche Herausarbeiten des allgemeinen Begriffes der Funktion nach so vielen konkreten Beiträgen aus den verschiedenen Teilen des Unterrichtes begleitet natürlich diesen das ganze Jahr hindurch und läßt es nicht nur bei diesem Begriff als solchem bewenden, sondern bringt dem Schüler auch von allen Seiten zum Bewußtsein, was er gerade von dieser höchsten Abstraktion, die für ihn den Übergang von der niederen zur höheren Mathematik bildet, theoretisch wie praktisch gewonnen hat.

§ 33. Skizzen zur systematischen Darstellung der analytischen Geometrie.

I. Abschnitt. Koordinatensysteme und Koordinaten. – Koordinatentransformation.

Hier nun erst allgemeine und strenge Bestimmungen darüber, was zur mittelbaren Ortsbestimmung eines Punktes gehört: einerseits ein Koordinatensystem (zwei-, dreiachsige, Polarsysteme), andererseits die Koordinaten selbst. Von speziellen Bemerkungen hier nur folgende zwei. Erstens: Man liest gelegentlich, daß z. B. im orthogonalen System x und y „reine" Zahlen seien; man liest sehr häufig nicht, daß in der analytischen Geometrie nicht minder, als wo immer sonst in der Geometrie, der Physik oder in jedem anderen Teile der angewandten Mathematik, zu einer vollständigen Größenangabe ebenso wie eine Maßzahl auch eine Maßeinheit gehören. Und so wie es in der Physik keineswegs überflüssig ist, zu den Maßzahlen, z. B. s, t, c, g recht oft ganz ausdrücklich hinzusagen zu lassen: Zentimeter (cm), Sekunde (sec), Cel (cm sec^{-1}), Accel (cm sec^{-2}) usw., so gewöhne sich der Schüler, auch zu den Maßzahlen x und y hinzuzusagen oder wenigstens hinzuzudenken: Zentimeter oder was sonst für eine Längeneinheit. – Eine zweite (schon einigermaßen philosophische, in das Thema der „Räumlichen und raumlosen Geometrie“ hineinführende) Bemerkung ist die, daß die analytische Geometrie darum, weil sie eine vorwiegend rechnerische Methode ist, das spezifisch Räumlich-Geometrische keineswegs abgestreift hat. Z. B. $y = Ax + b$ würde nicht eine Gerade darstellen, wenn als Abszissenachse ausdrücklich eine Krumme angenommen worden wäre. Den naheliegenden Einwand eines gescheiten Schülers, daß es also eigentlich eine Zirkeldefinition wäre, wenn man die Gerade durch das Linearsein ihrer Gleichung $y = Ax + b$ definieren wollte, wird der Lehrer nicht als unberechtigt zurückweisen, sondern kann ihn bis zu eindringender Besinnung über das Wesen der analytischen Geometrie überhaupt vertiefen; was natürlich auf alle Fälle dem mathematischen Vertrautsein mit ihr nicht vorangehen, sondern sie höchstens Schritt für Schritt begleiten oder ihr erst nachfolgen kann.

Es folgen nun als Grundaufgaben über Punkte zunächst die Formeln für

Abstand $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ | Richtung $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Daß sie verdienen, als einander koordiniert behandelt zu werden, ergibt sich theoretisch aus der fundamentalen Natur der zwei Relationen Abstand und Richtung (vgl. S. 102, Anm.) und hat praktisch mehrfach Anwendung.

Zu den Aufgaben für einzelne Punkte (im Gegensatze zur Lehre von den Kurven, in der die eigentliche Stärke der analytischen Geometrie liegt) gehören auch die Flächen der Drei-, Vierecke und sonstigen Polygone aus den Koordinaten der Eckpunkte. Hier geben namentlich die Flächenformeln für das Dreieck

$$f = \tfrac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_2 + y_1) + (x_3 - x_2)(y_3 + y_2) - (x_3 - x_1)(y_3 + y_1)]$$

oder $f = \tfrac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_2 + y_1) + (x_3 - x_2)(y_3 + y_2) + (x_1 - x_3)(y_1 + y_3)]$

oder $f = -\tfrac{1}{2}[x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3]$ usf.

durch ihre proteusartige Wandelbarkeit ungesuchte Veranlassung zu Mitteilungen über algebraische Transformationen und Übungen in solchen. – Hat insbesondere das Dreieck solche Gestalt und Lage, daß der Schüler die Koordinaten der Eckpunkte aus planimetrischen Berechnungen selbst finden kann, wie (0,0; 2,1; 1,2) u. dgl., und werden diese (wie die einfachen Wurzelgrößen z. B. bei gleichseitigen Dreiecken) in die verschiedenen Buchstabenformeln eingesetzt, so ergibt sich auch reiches Material für die Wiederholung von Transformationen solcher Wurzelausdrücke (ohne formalistisches Übermaß).

Beim Polygon bietet die Gleichung

$$f = \tfrac{1}{2}\left[(y_2+y_1)(x_2-x_1)+(y_3+y_2)(x_3-x_2)+\cdots+(y_n+y_{n-1})(x_n-x_{n-1})\right]$$

die natürlichste Veranlassung, den Wunsch nach einer allgemeinen[1]) Formel für den Flächeninhalt einer beliebigen[1]) Kurve rege zu machen, der dann durch das bestimmte Integral $\int\limits_{x_0}^{x_n} y\,dx$ seine umfassende Erfüllung findet; über Gelegenheiten zum Ausführen der hiermit erst angezeigten Operation vgl. S. 412 ff.

Was die Koordinatentransformationen betrifft, so haben diese im systematischen Lehrgang (also auch in dem systematisch geordneten Lehrbuch) allerdings schon ihren Platz an dieser sehr frühen Stelle, noch vor der Lehre von den Kurven. Im mündlichen Unterrichte aber sollte man sich diese Dinge bis dahin aufsparen, wo man für die Formeln wirklich Anwendung hat, oder vielmehr so: wo konkrete Aufgaben überhaupt erst dazu drängen, an Koordinatentransformation zu denken und dann eben auch die zugehörigen „Formeln" zu entwickeln.

Dies wird z. B. zu Beginn der systematischen Lehre vom Kreis der Fall sein, wenn wir uns nicht mehr zu beschränken wünschen auf die Mittelpunktsgleichung, sondern zur allgemeinen Gleichung

$$(x-p)^2+(y-q)^2=a^2$$

übergehen wollen. Da wir übrigens diese Gleichung auch ohne den Gedanken der Transformation leicht haben können, so bildet sie nachmals für den einfachen Fall der Parallelverschiebung des rechtwinkligen Systems eine Art Rechenprobe. – Ein wirkliches Bedürfnis nach Transformation aber läßt den Anfänger vielleicht am stärksten die Aufgabe fühlen, für die Hyperbel, die sich aus dem Konstruieren der Gleichung $y=\frac{1}{x}$ ergeben hatte, eine Gleichung auch in bezug auf das zu ihr ebenso symmetrisch liegende Achsenkreuz aufzustellen, wie wir für die Ellipse eine aufgestellt hatten. Hier ist dann der Transformationswinkel 45^0, und die Transformationsformeln lauten

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos 45^0 - y'\sin 45^0 \\ y &= x'\sin 45^0 + y'\cos 45^0 \end{aligned}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{aligned} x &= (x'-y')\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y &= (x'+y')\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right.$$

1) Die Einschränkungen, unter denen jenes „allgemein" und „beliebig" zu verstehen ist, sind dem Lehrer bekannt, und er mag den Schüler allmählich auf sie aufmerksam machen.

Eingesetzt in $y=\frac{1}{x}$ oder $xy=1$ ergibt dies $x'^2-y'^2=2$. – Die Analogie zu $x^2+y^2=a^2$ ladet sogleich ein zu den bekannten Verallgemeinerungen: Sowie der Kreis nur ein spezieller (genauer ein Grenzfall) der Ellipse ist, so ist auch $x^2-y^2=2$ oder allgemeiner $x^2-y^2=a^2$ als „gleichseitige Hyperbel" nur ein spezieller Fall zur allgemeinen Gleichung $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ usw.

In dem angedeuteten Beispiele war also der Transformationswinkel $\alpha=45^0$. Daher jetzt Verallgemeinerung für einen beliebigen Transformationswinkel α, später auch mit Verschiebung des Anfangspunktes.

Der Schüler wird nachdrücklich aufmerksam zu machen sein, daß es nicht in erster Linie gelte, die neuen Koordinaten durch die alten auszudrücken (also das Unbekannte durch das Bekannte, wie man meinen möchte), sondern die alten Koordinaten durch die neuen: denn man will ja eben (wie man es im obigen Hyperbelbeispiel erlebt hatte) die Gleichung mit den alten Koordinaten ersetzen durch eine mit den neuen. Wohl aber gehen aus den ursprünglichen Transformationsformeln

$$\begin{array}{l||c|c} x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha & \sin\alpha & \cos\alpha \end{array}$$

durch die bekannten Multiplikationen und Additionen auch die folgenden hervor:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha+y\sin\alpha \\ y' &= -x\sin\alpha+y\cos\alpha \end{aligned}$$

und hier mag darauf hingewiesen werden, wie diese mit jenen sich decken, wenn man statt des Transformationswinkels $(+\alpha)$ dort oder hier $(-\alpha)$ einführt, also das System sozusagen zurückdreht. – Natürlich wird der Lehrer entscheiden, ob er solche Gelegenheiten zur wiederholenden Anwendung früheren Lehrstoffes mehr oder weniger ausführlich und vielseitig benutzen will und kann, ohne daß der Schüler das Wesentliche des systematischen Lehrganges, den er jetzt geführt werden soll, aus den Augen verliert.

Zum Übergang von rechtwinkligen zu Polarkoordinaten, im einfachsten Falle also zur Anwendung der Formeln $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, gibt die Mittelpunktsgleichung des Kreises den einfachsten Anlaß, wo $r^2\sin^2\varphi+r^2\cos^2\varphi=a^2$, also $r=(\pm)\,a$; was weiterhin sowohl zu Betrachtungen über das Wesen des Polarsystems selbst wie auch namentlich zu Wiederholungen der Goniometrie für Winkel beliebiger Quadranten u. dgl. einladet; denn wie schon in § 29, S. 277 gesagt wurde, liegt ja der eigentliche, ungekünstelte Rechtsgrund für die den goniometrischen Funktionen in verschiedenen Quadranten erteilten Vorzeichen letztlich in jenen Transformationsbeziehungen zwischen polarem und rechtwinkligem System. In $x=r\cos\varphi$ haftet das Positiv- und Negativsein unmittelbar dem x an; und weil nun, wenn zu den spitzen φ die positiven x gehört hatten, zu den stumpfen und überstumpfen φ negative x gehören, so „definieren" wir nun, daß die cos solcher Winkel negativ sein sollen[1]). — Die r lassen wir am besten (von ausnahmsweisen Zweckmäßigkeiten abgesehen) absolut, vorzeichenlos (was auch der Arbeitsteilung zwischen den Relationen „Abstand" und „Richtung" entspricht, die durch r, bzw. φ bestimmt sind — eine andere Anordnung der Begriffskomponenten freilich bei allen „Vektorenrechnungen").

Alles in allem aber raten wir noch einmal, weder die Lehre von der Koordinatentransformation noch auch die Lehre von den Koordinatensystemen überhaupt allzusehr auszudehnen; denn das Wesen aller analytischen Geometrie kann dem Schüler ja doch erst überzeugend entgegentreten aus ihrer Anwendung auf die Linien (und Flächen — indem man schon der aufklärenden Ähnlichkeiten und Unterschiede halber eine Erwähnung des Dreiachsensystems nicht ängstlich ganz vermeiden, aber auch erst bei konkreten Gelegenheiten anbringen sollte, z. B. der Darstellung des Mariotte-Gay-Lussacschen Gesetzes, vgl. des Verf. „Physik", Leitaufgabe 144; überdies bei der naheliegenden Erweiterung der Kreisgleichung $x^2+y^2=a^2$ zur Kugelgleichung $x^2+y^2+z^2=a^2$ u. dgl.; vgl. „Physik", mathematischer Anhang, Nr. 11).

II. Abschnitt. Die Gerade.

Warum im Vorkursus der analytischen Geometrie die Gerade gar nicht zur Sprache kam oder höchstens erst nach den Kurven ganz kurz gestreift wurde, ist S. 319 begründet worden. Jetzt, in der systematischen Behandlung der analytischen Geometrie, muß sie natürlich von allen Linien zuerst und wohl auch am eingehendsten behandelt werden. Nur davor muß im Interesse geradezu der ganzen analytischen Geometrie, die sich ja ihren Platz an den reichsdeutschen Schulen erst kürzlich (in Preußen 1891) und schwierig errungen hat, gewarnt werden, daß sich etwa die analytische Geometrie auf die Gerade beschränke;

1) Ich erinnere mich, daß erst, als ich auf der Universität ein Kolleg über analytische Geometrie hörte, mir dieser Grund für die Vorzeichen von goniometrischen Funktionen als erster und einziger wirklich eingeleuchtet hat. Alle im Gymnasium mit unendlichem Zeitaufwand betriebenen Übungen über die „Darstellung der goniometrischen Funktionen durch Strecken am Kreis" hatten mir eine solche Überzeugung und Einsicht nicht beizubringen vermocht — waren also verlorene Zeit und Mühe.

denn in diesem Fall hätte ja der Schüler inhaltlich gar nichts Neues erfahren, und es wäre ihm daher der mehr oder weniger instinktive oder bewußte Glaube, daß diese ganze analytische Methode eben doch nur eine Spitzfindigkeit sei, nicht zu benehmen, wenn er dann nicht ihre wunderbare Fruchtbarkeit an der Theorie krummer Linien sich bewähren sähe. Eben deshalb durfte sogar bei dem geringen Zeitausmaß, das die analytische Geometrie z. B. im österreichischen Gymnasium bis zu den jüngsten Lehrplänen (von 1908) zur Verfügung hatte (weil eben Rückstände der Trigonometrie der VI. Klasse in die VII. Klasse nachgeschleppt worden waren) der Unterricht dennoch nicht in der Lehre von der Geraden plötzlich stecken bleiben; lieber mag in solchen Notfällen diese nur in den Hauptaufgaben (z. B. ohne Eingehen auf die sogenannte Normalform der Geraden) behandelt werden, als daß etwa für die Kegelschnitte gar keine Zeit mehr bleibt.

Auch wenn wir eine streng wissenschaftliche und daher schließlich allgemeine Behandlung der Geraden anstreben, hindert uns das nicht, auch hier wieder mit dem Speziellsten zu beginnen.

Also z. B.: Gegeben sei eine Gerade, die im rechtwinkligen System durch den Anfangspunkt und durch den Punkt $x_1 = 1$, $y_1 = 2$ geht. Wie lautet ihre Gleichung? Antwort: Wie für das eine Wertepaar (1, 2) ist auch für j e d e n anderen Punkt der Geraden die O r d i n a t e das D o p p e l t e der A b s z i s s e; dieses $y = 2 \cdot x$ ist also schon die gesuchte Gleichung jener speziellen Geraden. Denn das „G e r a d“-sein ist hier geradezu d e f i n i e r t durch das P r o p o r t i o n a l-sein von y und x, wobei der Proportionalfaktor 2 die R i c h t u n g der Geraden (in bezug auf die X-Richtung) bestimmt. Ebenso ist für andere Gerade, die durch den Anfangspunkt gehen, $y = \frac{x}{2}$ (in Worten!), $y = 3x$, $y = x$, $y = -x$ (in Worten!), $y = -2x$ usw., allgemein $y = Ax$. – Hier nennen wir A den R i c h t u n g s k o e f f i z i e n t e n der G e r a d e n; u. zw. ist er bei dieser eine R i c h t u n g s **konstante** – im Gegensatz zu dem mit x v e r ä n d e r l i c h e n Richtungskoeffzienten der K u r v e n. Zum Neigungswinkel α steht er in der Beziehung $A = \operatorname{tg} \alpha$ (Diskussion der Vorzeichen für $0 \stackrel{=}{<} A \leqq \infty$, $0^0 \stackrel{=}{<} \alpha \stackrel{=}{<} 90^0$, $90^0 \stackrel{=}{<} \alpha \leqq 180^0$ usw.). Erst jetzt die Verallgemeinerung von $y = Ax$ zu $y = Ax + b$. – Knotengleichung $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, wo $a = -\frac{b}{A}$ (arithmetisch, planimetrisch, trigonometrisch!).

Bei den nun sich anschließenden speziellen Aufgaben über G l e i c h u n g e n v o n G e r a d e n a u s b e s t i m m t e n B e d i n g u n g e n braucht nicht der Schein aufzukommen, als gälte es wieder das

Memorieren recht vieler isoliert dastehender Formeln. Folgendes dürfte ein auch für den Schüler leicht und dauernd überblickbarer Weg sein:

Erste Aufgabe: Die Gleichung einer Geraden aufzustellen, die durch einen gegebenen Punkt $(x_1 y_1)$ geht, und die einen gegebenen Richtungskoeffizienten A hat. – Auflösung: Die Gleichung hat die Form $y = Ax + b$, wo zwar A, nicht aber b bekannt ist. Zum Ersatz dafür wissen wir, daß auch $y_1 = Ax_1 + b$ gelten müsse, woraus $b = y_1 - Ax_1$, so daß die gesuchte Gleichung lautet: $y = Ax + y_1 - Ax_1$. Zunächst nur zur Vereinfachung für das Gedächtnis schreiben wir $y - y_1 = A(x - x_1)$. Offenbar hätten wir aber zu dieser Gleichung sofort durch einfaches Subtrahieren und durch Herausheben von A kommen können. Jedenfalls ist den beiden Methoden gemeinsam das Eliminieren von b. Übrigens hätte sich die letzte Form der Gleichung statt des arithmetischen Eliminierens von b auch geometrisch aus dem $A = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ finden lassen. Letzterer Gedanke ist vielleicht erst anzuregen nach der folgenden

zweiten Aufgabe: Die Gleichung einer Geraden aufzustellen, die durch die zwei gegebenen Punkte $(x_1 y_1)$ und $(x_2 y_2)$ geht. – Auflösung: Da diesen zwei Punkten der Richtungskoeffizient A der Verbindungsstrecke $A = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ entspricht, so ist dieser Wert für das A der vorigen Aufgabe einzusetzen. – Statt dieser geometrischen Überlegung wieder arithmetisches Eliminieren von b und A aus $y = Ax + b$, $y_1 = Ax_1 + b$, $y_2 = Ax_2 + b$ durch zweimaliges Subtrahieren; dies wird im Lichte der früheren Methoden nicht mehr ein bloß zufälliger Kunstgriff scheinen.

Zu den weiteren Aufgaben über den Winkel zweier Geraden, parallele, normale Gerade, Durchschnitt zweier Geraden usf. hier nur folgende Andeutungen:

Daß zwei Gerade nicht nur einen, sondern zwei Winkel ν_{I} und ν_{II} (von den gleichen Scheitelwinkeln natürlich abgesehen) bilden, drückt sich darin aus, daß man mit gleichem Rechte $\nu_{\mathrm{I}} = \alpha_2 - \alpha_1$ und $\nu_{\mathrm{II}} = \alpha_1 - \alpha_2$ schreiben kann. Und dem entsprechen

$$\text{sowohl } \operatorname{tg} \nu_{\mathrm{I}} = \frac{A_2 - A_1}{1 - A_2 A_1} \text{ wie auch } \operatorname{tg} \nu_{\mathrm{II}} = \frac{A_1 - A_2}{1 - A_1 A_2};$$

man wird in der Regel den spitzen Winkel ν wählen. – Warum man es in der Regel nicht überhaupt bei der einfachen Formel für ν bewenden läßt, sondern nach der für $\operatorname{tg} \nu$, die ja theoretisch ein Umweg ist, das ν rechnet, wird dem Schüler am eindringlichsten klar, wenn er ein oder mehrere Beispiele numerisch auf dem einen und dem anderen Weg wirklich (ein-, zweimaliges Tafelaufschlagen) durchführt.

Die Beziehungen $A_{||} = A$ und $A_{\perp} = -\frac{1}{A}$ lassen sich nicht nur durch Spezialisierung aus der Gleichung von $\operatorname{tg}\nu$ gewinnen, sondern auch durch trigonometrisches Ablesen aus den entsprechenden Figuren für das betreffende Geradenpaar.

Die „Perpendikelformel“ $p = \pm \frac{y_1 - Ax_1 - b}{\sqrt{1+A^2}}$ macht den Schüler leicht stutzig durch den Zähler, der aus $y_1 = Ax_1 + b$ hervorzugehen und also immer gleich 0 sein zu müssen scheint. Solcher Vormeinung tritt deutlich folgende Ableitung entgegen:

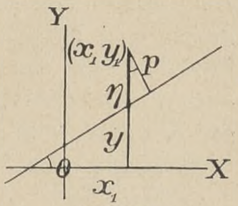


Fig. 121.

$$p = \eta \cdot \cos\alpha = \frac{\eta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\eta}{\sqrt{1+A^2}}$$

$$\eta = y_1 - y = y_1 - (Ax_1 + b) \text{ usw.}$$

Die Aufgabe: „Den Durchschnittspunkt zweier Geraden, die durch ihre Gleichungen gegeben sind, zu bestimmen“, behandle man lieber nicht in dieser Weise als eine scheinbar ganz spezielle, nur auf Gerade gehende Aufgabe. Denn das zu ihrer Lösung Wesentliche: die beiden Gleichungen **koexistieren** lassen und sie nach den Variablen x und y als Unbekannten **auflösen**, ist einer der fundamentalsten Gedanken der ganzen analytischen Geometrie, dessen Tragweite nur verdeckt würde, wenn man den Schüler zur Meinung verleiten wollte, als hafte das an der linearen Form der Gleichungen (— es wäre das kaum weniger schlimm, als ließe man den Schüler die Einteilung der Gleichungen nach ihrem Grade mit der Einteilung nach der Zahl der Unbekannten verwechseln). Vielmehr ist dies wieder ein Beispiel zu dem didaktischen Paradoxon, daß manchmal das Allgemeine leichter zu begreifen ist als das Spezielle.

Die innere Zusammengehörigkeit zwischen scheinbar so heterogenen Dingen wie Auflösen von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten (beliebig, welchen Grades oder selbst transzendent) und Durchschnittspunkt zweier Linien (gleichviel ob geraden oder krummen) darf und soll den Schüler als eine großartige, auf den ersten Blick schier unbegreifliche Beziehung zwischen Arithmetik und Geometrie überraschen. Systematisch gehört die volle Darlegung dieser Beziehungen an die Spitze jenes Abschlusses der Lehre von den Gleichungen, den wir uns, als die späteren Kapitel der analytischen Geometrie begleitend, zugleich als Abschluß des ganzen systematischen Mathematikunterrichtes gedacht haben (s. unten S. 355 ff.).

Will man also schon in der Theorie der Geraden nicht darauf verzichten, die Aufgabe vom Schnittpunkt zweier Geraden zu behandeln, so schicke man ihr mindestens etwa die Aufgabe voraus, die Schnittpunkte eines Kreises $x^2 + y^2 = a^2$ und der Geraden $y = Ax + b$ zu ermitteln (was wir dürfen, da ja aus dem Vorkursus der analytischen Geometrie die Mittelpunktsgleichung des Kreises schon bekannt ist). Auch ergibt hier die Deutung der 2 oder 1 oder 0 Wurzelpaare sogleich eine hübsche Anwendung der vorausgegangenen Perpendikelformel, indem die Diskriminante der quadratischen Gleichung in einer auch trigonometrisch leicht zu bestätigenden Beziehung zum Abstand der Geraden vom Mittelpunkte des Kreises steht. – Handgreiflicher wird all das beim Ausgehen von einer numerischen Aufgabe, z. B.

$$x^2 + y^2 = 25, \quad y = -\frac{1}{7}x + \frac{25}{7},$$

was die Wertepaare (4, 3), (— 3, 4) liefert usf.

Gleichviel aber, ob man die Aufgabe vom Schnittpunkte zweier Geraden mit oder ohne Vorausschicken jener prinzipiellen Betrachtungen über die sich schneidenden zwei Linien überhaupt behandelt, so lasse man wenigstens die Ergebnisse des Auflösens der Gleichungen

$$y = A_1 x + b_1 \quad \text{und} \quad y = A_2 x + b_2,$$

also die „Formeln"

$$x = \frac{b_1 - b_2}{A_2 - A_1} \quad \text{und} \quad y = \frac{A_2 b_1 - A_1 b_2}{A_2 - A_1}$$

nicht auswendig lernen. Dies sind keine „Formeln", denn der Schüler wird nicht, wie etwa bei $y - y_1 = A(x - x_1)$ immer wieder an den allgemeinen Ausdruck anknüpfen, sondern viel besser das Paar numerischer Gleichungen in jedem einzelnen Falle von neuem auflösen.

Ebendiese Bemerkung ist auch auf mancherlei andere Aufgaben auszudehnen: Lieber das einzelne Beispiel von Anfang bis Ende numerisch durchrechnen lassen, als daß zuerst ein Wust von „Formeln" abgeleitet und memoriert wird, in den dann immer wieder von neuem die Zahlenwerte dieses und jenes Beispiels „eingesetzt" werden. Denn beides, das Formelpauken wie das bloße Einsetzen numerischer Werte, findet der Schüler mit Recht ein ebenso zweifelhaftes Vergnügen, wie es ein zweifelhaftes Bildungsmittel ist. Hierüber aber Vorschriften im einzelnen zu geben und etwa einen „Kanon von Formeln" aufzustellen, die auch in der analytischen Geometrie auswendig gelernt werden müssen wie in der Trigonometrie, kann weder Aufgabe einer Didaktik noch einer „Instruktion" sein. Würde nicht den einzelnen Lehrer sein Takt leiten, und das heißt ja hier: das mitfühlende Beachten des jeweiligen Maßes von Fertigkeit seiner Schüler – ob ihnen dank vorausgegangener numerischer Rechnungen die in der Formel ausgedrückte allgemeine Rechenvorschrift so in Fleisch und Blut

$OA = 2a \mid OA = OC$
$CD = 2p$
$OP = x$
$PM = y$

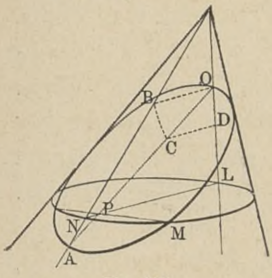


Fig. 122.

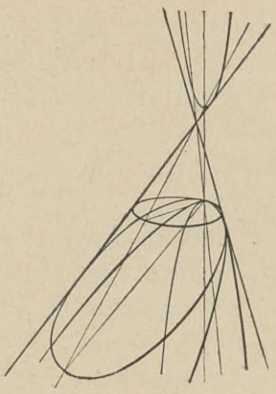


Fig. 123.

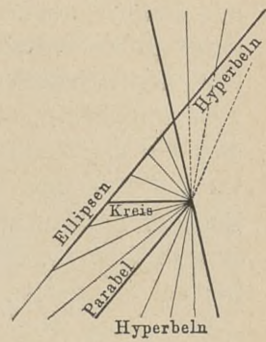


Fig. 124.

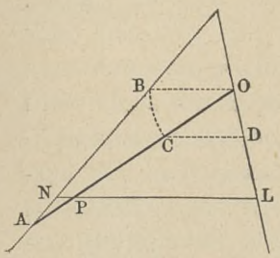


Fig. 125.

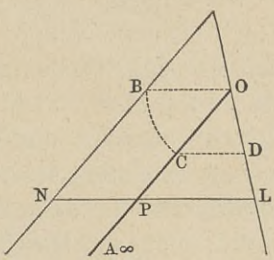


Fig. 126.

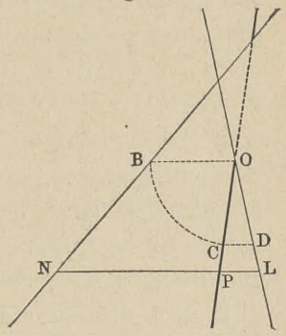


Fig. 127.

$$PM^2 = LP \cdot PN$$
$$LP : DC = OP : OC$$
$$PN : OB = AP : AO$$
$$PM^2 = \frac{DC \cdot OP}{OC} \cdot \frac{OB \cdot AP}{AO}$$
$$= \frac{2p \cdot x \cdot (2a - x)}{2a}$$
$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$$

$$PM^2 = LP \cdot PN$$
$$LP : DC = OP : OC$$
$$PN = OB$$
$$PM^2 = \frac{DC \cdot OP}{OC} \cdot OB$$
$$= 2p \cdot x$$
$$y^2 \quad = 2px$$

$$PM^2 = LP \cdot PN$$
$$LP : DC = OP : OC$$
$$PN : OB = AP : AO$$
$$PM^2 = \frac{DC \cdot OP}{OC} \cdot \frac{OB \cdot AP}{AO}$$
$$= \frac{2p \cdot x \cdot (2a + x)}{2a}$$
$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$$

übergegangen ist, daß sie eben nicht mehr als tote „Formel" vor ihm steht – – dann könnte jede weitere Vorschrift, wie und was da zu memorieren sei, den Unterricht nur noch weiter entgeisten. Dennoch mag diese Bemerkung gerade anläßlich der analytischen Geometrie der Geraden nicht überflüssig sein; denn eben ein

Mathematikunterricht, der formalistische Neigungen verrät, möchte diese dem Herkommen nach bei der Geraden zu betätigen noch am ehesten allerdings mit einigem Schein von Recht sich einreden.

Es kann aber keineswegs mehr unsere Aufgabe sein, nun auch nur ähnlich ausführlich die analytische Geometrie der einzelnen Kurven ins einzelne zu verfolgen. Dem meistumstrittenen Gebiet, der Behandlung des Tangentenproblems und was damit zusammenhängt, ohne oder mit Differentiieren, widmen wir ohnedies die ausführliche Erörterung der §§ 43, 44. Ferner kommen wir auf einzelnes die krummen Linien Betreffende noch bei der Behandlung des abschließenden Kapitels von den Gleichungen zu sprechen (S. 355 ff.). An speziellen und etwas allgemeineren Bemerkungen also nur noch folgende:

Die Lehre von den Kegelschnitten wird nicht unterlassen, wenigstens zum Schluß des Kurses (oder spätestens in den Ergänzungen gelegentlich der Wiederholung des obersten Jahrganges) auch rechnerisch die Beziehungen der drei Kurven Ellipse, Parabel, Hyperbel zu den ebenen Schnitten des geraden oder schiefen Kreiskegels nachzuweisen. Eines irgendwie umständlichen Rechenapparates bedarf es ja hiezu nicht (speziell auch nicht goniometrischer Funktionen), sondern nur einfachster planimetrischer Sätze wie in der umstehenden Darstellung (aus des Verfassers „Physik“, Mathematischer Anhang, Nr. 23) Figg. 122–127.

Haben die Kegelschnitte auch synthetische Behandlung gefunden, so sollte nicht unterlassen werden, das Unterscheidende beider Methoden, das aber im Grunde doch immer nur äußerlich sein kann im Vergleich zum Gemeinsamen, wie es ja doch schon in einem und demselben Gegenstande gegeben ist, dem Schüler gründlich zum Bewußtsein zu bringen. Ob die synthetische Behandlung vorhergegangen ist, wie es manchmal empfohlen wurde, oder ob sie der analytischen erst nachfolgt und so den Kreislauf des Unterrichts wieder zur anfänglichen Planimetrie und Stereometrie führt, wird von mancherlei wissenschaftlichen und schultechnischen Nebenrücksichten mitbestimmt sein. Aber auch wo etwa schon der Zeitmangel eine solche doppelte Behandlung nicht gestattet, wie wertvoll und aufklärend sie auch wäre, da sollte wenigstens in der Behandlung der einzelnen Aufgaben der analytischen Geometrie so oft als möglich das analytische Resultat durch synthetische Neben- und Zwischenbetrachtungen aus der

Sphäre der Abstraktion kräftig in die der Anschauung zurückübertragen werden. Hier nur ein Beispiel:

Für die Subtangente der Ellipse ergibt sich nach $\mathrm{St} = y \cdot \frac{1}{A}$

$$\mathrm{St} = y \cdot - \frac{a^2 y}{b^2 x} = - \frac{a^2 y^2}{b^2 x} = - \frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{b^2 x} = - \frac{a^2 - x^2}{x}.$$

Dieses Endergebnis zeigt, daß das St der Ellipse von b unabhängig ist und also auch auf den Kreis paßt. Diese Konstatierung für sich aber gewährt noch ein sehr dürftiges Interesse im Vergleich zu der folgenden Betrachtung: Denken wir uns einen Draht kreisförmig gebogen und mit einem durch seinen Mittelpunkt O gehenden, in seiner Ebene liegenden zweiten Draht XX und einem dritten, von einem Punkt S der XX aus den Kreis tangierenden geraden Draht zu einem festen Gestell zusammengelötet. Dann wird XX parallel zu einem gegen die Sonnenstrahlen normalen Schirm gehalten. Beim Drehen um XX wird der kreisförmige Schatten ein elliptischer, aber sowohl das Tangieren wie die Strecke OS bleiben auch in der Schattenfigur.

Was die manchmal verlangte vollständige Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

betrifft, so dürfte sie für die Mittelschule wohl gewöhnlich zuviel Zeit in Anspruch nehmen. Aber auch in solchem Falle sollte man den Schüler auf dem umgekehrten Wege von den speziellen Gleichungen her wenigstens so weit führen, daß man ihn z. B. auf Folgendes aufmerksam macht:

Dem Kreis sind auch in der allgemeinsten Form seiner Gleichung gleiche Koeffizienten des x^2 und y^2 wesentlich. Anders bei der Ellipse, wo die verschiedenen b^2 und a^2 der dem Schüler gewohnten Form auch durch Drehung der Ellipsenachsen gegen die Koordinatenachsen nicht zum Gleichwerden gebracht werden können. Der Parabel ist in der einfachsten Form $y^2 = 2px$ oder $y = x^2$ das Auftreten einer ersten und zweiten Potenz der beiden Variabeln charakteristisch gegenüber den Mittelpunktsgleichungen der drei anderen Kegelschnitte, die alle reinquadratisch sind. — In dieser Weise lassen sich immerhin einige Charakteristika der verschiedenen Kurven ohne erschöpfende Diskussion der allgemeinen Gleichung ablesen.

Umgekehrt wieder wird man gern bei manchen Einzelheiten länger verweilen, so namentlich bei den Asymptoten der Hyperbel und für sie sogar mehrere einander gegenseitig beleuchtende Ableitungen geben (vgl. Math. Anhang zur Physik, Nr. 23). — Auch zeichnerisch muß sich hierin der Blick des Schülers üben und festigen; es darf nicht vorkommen, daß, wenn er aus freier Hand eine Hyperbel entwerfen will, diese statt des asymptotischen Verlaufs ihrer Äste einen parabolischen zeigt. Da es anfänglich doch immer wieder geschieht, mag es den Ausgangspunkt für Aufklärungen über die prinzipielle Bedeutung solcher Unterschiede geben.

Bewährt sich in solcher Auswahl, namentlich der praktischen Übungen, in die natürlich auch die analytische Geometrie überall münden muß, der Geschmack des Lehrers für das wirklich Lehrreiche, so werden Lehrer und Schüler die Errungenschaft der analytischen Geometrie an Mittelschulen um keinen Preis mehr missen wollen. –

Es war bisher nur von der durch den ganzen vorletzten Jahrgang sich erstreckenden analytischen Geometrie die Rede, weil sie als die dem Schüler neuartigste Methode dem ganzen Unterricht sein Gepräge gibt. Wie schon gesagt, gilt es aber nun, Verzahnungen zu finden auch mit dem arithmetischen Lehrstoff im Abschluß der Oberstufe. – Diesen Lehrstoff denken wir uns, wie schon angedeutet, so verteilt, daß die Reihen den Anfang, die Gleichungen den Abschluß bilden. Die Gründe für diese Teilung sind in der Hauptsache: der Anschluß der Reihen einerseits an die Grundlegung des Funktionsbegriffes, andererseits an die ersten Kapitel der Mechanik (vielseitige Einübung der Gesetze der gleichmäßig beschleunigten Bewegung und des freien Falles u. dgl.); für die Gleichungen der Anschluß an die abschließenden Kapitel der analytischen Geometrie. Des näheren lassen sich diese Beziehungen so ausgestalten:

§ 34. Reihen. – Die arithmetischen Reihen.

Zuerst wenige Bemerkungen zur herkömmlichen rein arithmetischen Behandlung dieses Kapitels:

Die beiden Grundformeln

$$t = a + \overline{n-1} \cdot d \qquad \text{und} \qquad s = \frac{n}{2}(a + t)$$

geben mit ihren fünf Größen a, d, n, t, s folgende zehn Aufgaben[1]):

1) Das sonst in so vielen Beziehungen treffliche Buch von HEIS begeht hier die Ungeschicklichkeit (oder sollte eine besondere Absicht darin liegen?), die Aufgaben nicht nach den gegebenen, sondern nach den gesuchten Größen zu ordnen; z. B.

Aufgabe 7: Es ist t zu bestimmen, wenn 1) a, d und n, oder 2) a, d und s,
„ 10: Es ist n „ „ „ 1) a, d und t, „ 2) a, d und s
gegeben sind.

Gegeben:

$adn \quad adt \quad ant \quad dnt \quad | \quad ads \quad ans \quad dns \quad | \quad ats \quad dts \quad | \quad nts$

Gesucht:

$ts \quad ns \quad ds \quad as \quad | \quad nt \quad dt \quad at \quad | \quad dn \quad an \quad | \quad ad$

Welcher tiefere Sinn darin liegt, daß mehrere von ihnen auf quadratische Gleichungen führen, läßt sich durch Aufgaben wie die folgenden dem Schüler nahebringen: Wir schreiben eine fertige Reihe, z. B. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 fertig hin und denken uns von ihr gegeben $d = 1$, $t = 10$, $s = 55$. Hier scheint nun herauskommen zu müssen $a = 1$, $n = 10$. Die Auflösung der Gleichungen gibt in der Tat auch diese Wurzeln, aber zur Überraschung des Schülers überdies auch noch $a_2 = 0$, $n_2 = 11$. Es ist, als ob sich die Arithmetik mit uns den Spaß machen wollte, uns darauf aufmerksam zu machen, daß auch die scheinbar nach jeder Richtung eindeutige Bestimmtheit der vorliegenden Reihe doch noch nicht alle anderen Möglichkeiten ausgeschlossen habe. – Natürlich wird sich von solchen Einzelerscheinungen ausgehend das Interesse allmählich erweitern für die grundsätzliche Bedeutung des 1. oder 2. Grades der Eliminationsgleichungen.

Was das Aufstellen jener Grundformeln selbst betrifft, so ist die Verallgemeinerung von $u_1 = a$, $u_2 = a + d$, $u_3 = a + 2d$, $u_4 = a + 3d$, zur Formel für das „allgemeine Glied" $u_n = a + \overline{n - 1} \cdot d$ eine so naheliegende, daß hier die Anwendung des Bernouillischen Schlusses von n auf $n + 1$ sich kaum schon lohnt; der Schüler wird schwerlich von selbst auf den Zweifel kommen, ob denn hier jene Verallgemeinerung gestattet sei. Auch die Summenformel ergibt sich als eine fast selbstverständliche Verallgemeinerung von Aufgaben wie die: Die Summe der 10 (100) ersten natürlichen Zahlen zu bilden, indem man die erste und letzte, die zweite und vorletzte usw. addiert; dieser Kunstgriff selbst wird lebendiger als an abstrakten Zahlen durchgeführt an Aufgaben wie die: In einem dreieckigen Dach sind in der ersten Reihe 1, in der zweiten 2 usw., in der hundertsten 100 Ziegel, wieviel im ganzen?

So einfach diese Lehre von den arithmetischen Reihen (– u. zw. zunächst hier immer die der ersten Ordnung gemeint) an und für sich auch ist, so verträgt und verlangt sie doch um ihrer Beziehung willen zu den grundlegenden physikalischen Lehren vom freien Fall, dann aber auch wegen der vielen Aufgaben vom Typus des zu ladenden Konduktors (s. u.) nicht bloß die herkömmliche, abstrakte, arithmetische Behandlung, sondern vielseitige Veranschaulichung.

So erlaubt schon der Satz von den ungeraden Zahlen

$$1 + 3 + 5 + \quad + \overline{2n - 1} = n^2$$

die geometrische Veranschaulichung durch Fig. 128 und Fig. 129 und die physikalische in Form der Beziehung zu den Fallstrecken während der **ersten**, zweiten, dritten ... Sekunde und den Fallstrecken während **einer**, zwei, drei ... Sekunden

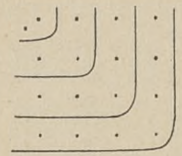


Fig. 128.

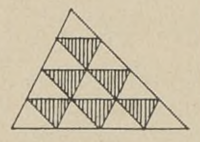


Fig. 129.

$$5 = 5 \cdot 1^2; \quad 5 + 15 = 20 = 5 \cdot 2^2;$$
$$5 + 15 + 25 = 45 = 5 \cdot 3^2 \text{ usw.}$$

oder, wenn statt des abgerundeten Wertes 5 der genauere 4,9 m, allgemein a m oder $\frac{g}{2}$ m gesetzt wird: $s = a\,t^2$ oder $s = \frac{g}{2}t^2$.

Bekanntlich war in älteren Physikbüchern beinahe an die Spitze der Lehre vom freien Fall oder allgemeiner von der gleichmäßig beschleunigten Bewegung die **Summierung** unendlich vieler unendlich kleiner nach einer arithmetischen Reihe fortschreitender Wegstückchen gestellt. Ebenfalls ist bekannt, daß Galilei sich nicht dieser umständlichen **arithmetischen**, sondern der in Fig. 130 angedeuteten **graphischen** Summierung bedient hat. Eben diese graphische Methode verdient es nun, dem Schüler nicht nur als ein (ihm dann wahrscheinlich überhaupt nicht recht verständliches) Kuriosum vorgeführt, sondern in seiner prinzipiellen Bedeutung als eine **graphische Integration** nahegebracht zu werden. Später, wenn dann der Begriff des bestimmten Integrals (wie wir zur Beruhigung ängstlicher Leser sofort ausdrücklich versichern: nur in einfachsten konkreten Beispielen, aber unbeschadet dessen doch in seiner prinzipiellen Tragweite, vgl. S. 412) allgemein aufgestellt ist, wird dem Schüler erst die ganze Genialität dieser Galileischen Antizipation eines Integrierens der nach arithmetischer Reihe, aber doch **stetig** fortschreitenden Fallstrecken ganz zum Bewußtsein kommen. —

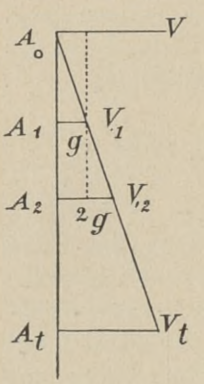


Fig. 130.

Unter den Typus dieses „**gleichmäßigen Wachsens von Nichts zu Etwas**“, das dann zur Summe $\frac{0+E}{2} = \frac{E}{2}$ führt, fallen noch viele physikalische Aufgaben (vgl. des Verfassers „Physik“, mathem. Anhang Nr. 9, Leitaufgaben Nr. 57, 58, 59): Z. B. die Arbeit gegen den Widerstand elektrischer Kräfte, die Arbeit beim Heben eines Rollbalkens, bei dem man anfangs das Gewicht 0, am Ende das Gewicht des ganzen Rollbalkens zu überwinden hat, die Arbeit beim Laden eines Konduktors usw.

Dies nur als einige Belege, wenn wir die Vermutung aussprechen, daß der herkömmliche Unterricht in dem so simplen Kapitel der arithmetischen Reihen noch kaum daran gedacht hat, sich mit so zahlreichen und grundlegend wichtigen physikalischen Aufgaben überhaupt (etwa ausgenommen die vom freien Fall, so bei Heis), geschweige denn in eine bis zur vollen Anschaulichkeit intime Beziehung zu setzen.

Arithmetische Reihen höherer Ordnung.

Die Summierung $1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2$, $1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2$ gibt ein naheliegendes, hübsches Beispiel für ein induzierendes Verallgemeinern zu $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$. Hier mag erst auch das Bedürfnis einer nachträglichen Rechtfertigung dieser „unvollständigen Induktion" vom Schüler wirklich empfunden und nun durch den „Schluß von n auf $n+1$" (der im Logikunterricht näher zu beleuchten ist) befriedigt werden.

Daß dagegen die Summierung von $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ sich sozusagen widerborstig gestaltet, indem die Formel der Summe

$$S = \tfrac{1}{6} n (n + 1)(2n + 1)$$

jedenfalls nicht durch eine simple Induktion zu erraten wäre, mag ein erster Anlaß sein, den Wunsch nach festen Methoden zur Summierung solcher Reihen rege zu machen. Ihre Beziehung zu den bestimmten Integralen vgl. S. 416. Ebenso wird das fortgesetzte Bilden der Differenzreihen den Schüler Beziehungen zum Differentiieren gemäß dem mx^{m-1} (S. 405) entdecken lassen.

§ 35. Geometrische Reihen. – Reihen und Funktionen.

Wieder entsprechen den zwei Hauptformeln

$$t = aq^{n-1} \quad \text{und} \quad s = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

zehn Doppelaufgaben, indem überall statt der Differenz d jetzt der Quotient q eintritt. Während aber bei den arithmetischen Reihen alle 10 (20) Aufgaben lösbar gewesen sind, führen bei den geometrischen die beiden Aufgaben

Gegeben	a, n, s	t, n, s
Gesucht	q, t	q, a

auf gemischte Gleichungen $n$ten Grades, sind also nicht allgemein lösbar (worüber sich nähere grundsätzliche Erläuterungen sogleich hier anschließen mögen). –

Daß volle Analogie zwischen den Formeln für die allgemeinen Glieder $t = a + \overline{n-1}\,d$ und $t = a \cdot q^{n-1}$ der arithmetischen und geometrischen Reihe besteht, nur jede Operation bei den geometrischen um eine Stufe gesteigert, gibt zur Frage Anlaß, warum solche Analogie nicht auch für die Summenformeln besteht?

Die Antwort ist, daß Analogie zu $s = \frac{n}{2}(a + t)$ bestünde, wenn wir bei der geometrischen Reihe statt nach der Summe nach dem Produkt fragten, wobei sich dann ergibt

$$P = a \cdot aq \cdot aq^2 \ldots aq^{n-1} = a^n \cdot q^{\frac{n}{2}(0+n-1)} = [a \cdot aq^{n-1}]^{\frac{n}{2}} = [a \cdot t]^{\frac{n}{2}}.$$

Den reichsten Übungsstoff für die geometrischen Reihen gibt die Zinseszinsrechnung, die sich daher im Unterricht wohl am besten sogleich hier anschließt; doch widmen wir ihr lieber im folgenden einen eigenen Paragraphen (§ 36) und verweilen jetzt bei mehreren Begriffen und Anschauungen, die sich sachgemäß an die Reihenlehre als grundlegend für das ganze mathematische Denken schließen.

Vor allem steht der allgemeine Begriff der mathematischen **Reihe**, deren Glieder nach einem bestimmten „Gesetz" fortschreiten, in innigster Beziehung zum allgemeinen Begriffe der mathematischen **Funktion**; nur daß hier, im Funktionsbegriff, schon das stetige Fortschreiten der unabhängig Veränderlichen, dort, beim Reihenbegriff, das noch unstetige Wachsen des Stellenzeigers der Reihe der Träger des gemeinsamen Begriffes einer „Veränderlichen" war. — Während nun im Vorkursus der analytischen Geometrie, wo wir ohne jedes Präambulum an die Darstellung einiger Gleichungen durch Kurven gegangen waren, sich der Gedanke der unabhängig und der abhängig Veränderlichen wie von selbst unter dem Bilde einer stetig Veränderlichen dargeboten hatte, da wir uns eben des Bildes räumlicher Strecken bedient hatten; und während sehr bald darnach die Interpretation der phoronomischen Formeln $s = at^2$, $s = at$, allgemein $s = f(t)$, uns die Zeit t als die unabhängig Veränderliche κατ᾽ ἐξοχήν zu Gemüte geführt hatte: geben uns nun die Reihen Gelegenheit, diesen Gedanken einer Zusammengehörigkeit zwischen den unstetigen Stellenzeigern 1, 2, 3, ... n und den zugehörigen Werten der Reihenglieder (*terminus* t, nicht zu verwechseln mit *tempus* t) sozusagen noch einmal vom Leibe zu rücken, damit wir ihn aus einer künstlich geschaffenen Entfernung besser im ganzen überschauen können. Ohne Bild: Wir stellen zuerst die Anordnung der Glieder einer arithmetischen Reihe (erster, zweiter, dritter Ordnung), einer steigenden, einer fallenden geometrischen

Reihe durch die diskreten Punkte längs je einer Geraden dar (Figg. 131–134). Es liegt dann nahe, uns ein übersichtlicheres Bild der jeweiligen Punktverteilung dadurch zu verschaffen, daß wir die Stellenzeiger durch aequidistante Punkte längs einer Abszissenachse und die zugehörigen Gliederwerte durch Aufrichten als Ordinaten darstellen. So bekommen wir dann zwar noch nicht stetige Kurven, sondern nur diskrete Punkte aus ihnen. Eben dies aber legt es nun nahe, zu interpolieren, u. zw. sowohl die Kurvenpunkte wie die für sie erforderlichen Punkte in der Abszissenachse: letzteres, indem wir zwischen die

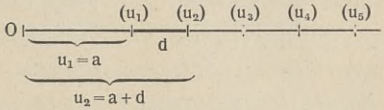
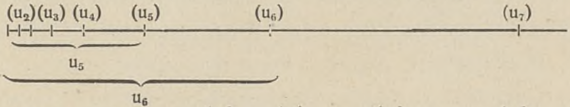
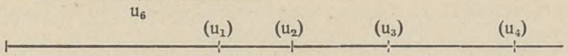


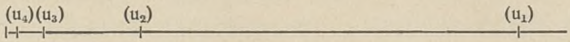
Fig. 131.

Fig. 132.


$a = 1$ mm, $q = 2$

Fig. 133.


$a = 27$ mm, $q = \frac{4}{3}$

Fig. 134.


$a = 64$ mm, $q = \frac{1}{4}$

ganzzahligen 0, 1, 2, 3... auch die Brüche $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$,... einschalten. Es bietet sich also hier von selbst Gelegenheit, alles zu wiederholen, was von früh (im III. Jhg.) an über die Zahlenlinie, über rationale und irrationale (algebraische und transzendente) Zahlen (im VI. Jhg.) gesagt worden war; denn die vermeintlich so selbstverständlichen Beziehungen zwischen Zahlenreihen und Punktreihen lernt der Schüler nun doch noch einmal von einer ganz neuen Seite sehen, indem er jetzt, eben wegen der Beziehungen zu einer dependent Variablen, den Gedanken einer unabhängig stetigen Veränderlichkeit erst als wirkliches, nicht nur künstlich gemachtes Bedürfnis verspürt. – Wie tief sich der Lehrer in Hinweise auf die Probleme, die sich der neuesten Mathematik auf diesem scheinbar so buchstäblich einseitigen (nämlich eindimensionalen) Gebiete aufgedrängt haben, einlassen will[1]), wird zum großen Teil seinem individuellen Urteil über die

1) Eine obere Grenze des auf diesem Gebiete Erreichbaren dürfte die Darstellung von SIMON (1906) bieten. Hier bringt der XI. Abschnitt „Vom Rechnen mit Reihenzahlen“, S. 44–52, eine Übersicht über „die wichtigsten, die Hauptformen der angeblich arithmetischen Einführung der Reihenzahlen“ (S. 50), nämlich die WEIERSTRASSsche Art, die DEDEKINDsche, die CANTORsche; dieser letzten gibt SIMON den Vorzug. – Vgl. oben S. 257–259.

Aufnahmsfähigkeit seiner jeweiligen Schüler anheimgegeben werden müssen. Doch sei ausdrücklich auf das Folgenschwere eines solchen Urteils sogleich hier hingewiesen: denn während einerseits die Gefahr nahe liegt, sich gerade auf diesem Gebiete wieder in formalistische Spekulationen zu verlieren, was dann nur auf Kosten der gegenwärtig angestrebten, inhaltlich wertvollen Anwendungen geschehen könnte, würde andrerseits ein Verzicht, den Schüler auch nur die Schwierigkeiten des Kontinuums, des Infinitesimalen und aller Grenzbegriffe fühlen zu lassen, den mathematischen Unterricht auf ein tieferes Niveau herabdrücken, als es mit der Überzeugung der meisten akademisch gebildeten Lehrer heute noch vereinbar sein möchte.

Hier sind es nun jedenfalls die **fallenden geometrischen Reihen**, die den natürlichsten Zugang zum Fundamentalbegriff aller „infinitesimalen" Mathematik (nicht erst der Differential- und Integralrechnung) darbieten, nämlich zum Begriff der „**Grenze**", der sich eine wohldefinierte Folge von Größen „nähert" (ob sie sie „erreicht", ist schon eine der mit jenem Begriffe wesentlich verknüpften Schwierigkeiten; s. unten S. 341, Anm.). Gewiß wäre es ganz verkehrt, wenn man den Begriff der Grenze dem Anfänger schon durch eine wenn auch noch so exakte, aber eben doch nur abstrakte Definition hinreichend vertraut gemacht zu haben meinte (vgl. S. 380, Anm.); vielmehr wird er sich erst aus reichlichen Anwendungen und nur mit Aufgebot nicht geringer didaktischer Kunst dem Schüler allmählich wirklich näher und „bis zum Greifen nahe" bringen lassen.

Ein bis heute unübertroffenes didaktisches Meisterstück zu ebendiesem Zwecke dürfen wir noch immer Zenos (sogenannte) Sophismen über die Bewegung nennen, vor allem „Achill und die Schildkröte". Hier ist es vor allem lehrreich, aus der sophistisch[1]) klingenden Einkleidung den ernsthaften, mathematischen

---

1) In meinem Unterrichte habe ich es so eingerichtet, daß wir um dieselbe Zeit (etwa im dritten Monat des VII. Jhgs.) im propädeutischen Logikunterricht zu dem für so viele logische Begriffe und Lehren (vgl. meine Logik, § 25) grundlegenden allgemeinen (nicht mehr mathematischen) Begriffe der Reihe (z. B. der Reihe von Tönen) kamen, da wir im Mathematikunterrichte mit dem Rechnerischen der Reihenlehre so ziemlich zu Ende gekommen waren. Dem schulgerechten Durchdiskutieren des „Sophismas" (auch ob es diesen Schimpfnamen wirklich verdiene, kam hiebei zur Sprache) wurden je nach Bedarf eine oder selbst mehrere Logikstunden gewidmet. Dabei waren für diese und ähnliche Diskussionen die Rollen eines „Defendenten" und „Opponenten" entsprechend den altertümlichen Formen solcher Diskussionen (vgl.

Kern rein herausschälen, dann aber auch den Schüler nicht zu einem vorschnellen Glauben gelangen zu lassen, vielmehr ihn von

---

meine Logik, § 28, „Die Widerlegung von Behauptungen und Beweisen") verteilt, und es pflegte sich auch die „Corona" lebhaft an der Debatte mitzubeteiligen. Hier einige Proben von dem, was als nicht mehr rein mathematisch und als insofern „philosophisch" zur Sprache kam. Vor allem hatte der Opponent sich und den übrigen klar zu machen, daß die Formulierung der Schlußpointe: Also kommt Achilles der Schildkröte zwar immer näher, ohne sie doch je zu erreichen", einen Doppelsinn enthält. Das „doch je" scheint aufs erste Hören den zeitlichen Sinn zu haben: auch wenn Achilles steinalt würde usw. Es läßt sich aber alsbald zeigen, daß zwar der Kern der Frage ein von Zeit und Raumbestimmungen unabhängiger ist, daß aber, einstweilen noch in zeitlicher Einkleidung (wobei wir statt des Geschwindigkeitsverhältnisses 1 : 12 etwa 1 : 2 annehmen und als Zeit zum Zurücklegen des ersten Abstandes etwa 1 Min.), jenes „ohne doch je" nur die erste von den folgenden zwei Möglichkeiten behauptet: Bleibt $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdots$ Min. notwendig kleiner als 2 Min., oder wird die Summe genau 2 Min.? Denn daß sie nicht größer als 2 Min. sein kann, ist leicht einzusehen (z. B. indem wir von zwei Bogen Papier den einen halbieren, die Hälfte wieder halbieren usw., wird auch beim Zusammenlegen der Stücke nur weniger als zwei Bogen, höchstens genau zwei Bogen, sicher aber nie mehr als zwei Bogen herauskommen). Hier glaubt nun ein schlauer Schüler den Zeno in der eigenen Schlinge gefangen zu haben: denn was sollte es außer den drei Möglichkeiten kleiner, gleich, größer noch für eine geben? – Das Kleiner und das Größer haben wir aber ausgeschlossen, also bleibt von der dreigliedrigen Disjunktion das „Gleich" übrig. Worauf der Lehrer im Namen Zenos erwidert: „Nein, meine Disjunktion war eine viergliedrige: Kleiner, Gleich, Größer oder Garnicht. Da ich nun in meinem „Sophisma" gerade dieses Garnicht zur These gemacht hatte, so darfst du diese vierte Möglichkeit nicht einfach vergessen, sondern du hast immer noch zu wählen zwischen dem Gleich und dem Garnicht. – Soweit, wenn man sich auf die formallogische Widerlegung durch eine bloße Disjunktion beschränken zu können glaubt. Halten wir uns dagegen immer wieder die inhaltliche Einkleidung des besonderen Problems vor Augen, so fällt unter das leer logische „Garnicht" als einzige ernstlich zu erwägende positive Möglichkeit jenes Kleiner.

In der Tat spitzt sich denn auch sowohl in unserem besonderen Problem wie ganz allgemein in allen Fragen von Grenzübergängen alles auf die Alternative (die zweigliedrige Disjunktion) zu: Bloß nähern oder wirklich **erreichen**? Wie oben im Texte hervorgehoben, begnügt sich gegenwärtig auch die strengste rein mathematische Behandlung mit dem „Annähern" bis auf Abstände, die „kleiner sind als jede noch so kleine vorgegebene Zahl". Und es soll hier in dieser Didaktik nicht eingegangen werden auf die jedenfalls ohnmächtigen Versuche antiker und moderner Philosophen, den Mathematikern in diese methodische Lösung dreinzureden. Soeben wird von KURT GEISSLER, „Kritik des Grenzbegriffes" (Philosophische Wochenschrift Bd. 2, S. 331) gerügt, daß von CAUCHY „die folgenden Ausdrücke in fast naiver, nicht näher untersuchter Weise gebraucht werden: *beständig nähern, immer mehr und mehr nähern, immer größer und größer werden, soweit man auch gehen mag, beständig wachsen, ins Unendliche wachsen, beständig abnehmen, immer kleiner, noch so klein, kleiner als jede anzugebende Zahl, kleiner als irgendeine Größe, beliebig groß, beliebig klein, sehr nahe kommen, schließlich.*" Nur soviel sei, wieder ganz unter Beschränkung auf Zenos Sophisma einem solchen Glauben nötigenfalls recht nachdrücklich zurückzubringen, als sei durch das numerische Auswerten der Formel $s = \frac{a}{1-q}$ das „Sophisma" auch wirklich schon gelöst. Denn jene Formel (aus der für $a = 1$, $q = \frac{1}{2}$ freilich folgt $s = 2$) ist ja aus der allgemeinen $s = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1}$ selber erst dadurch hervorgegangen, daß für $q < 1$ und $n = \infty$ kurzweg wurde $q^n = 0$. Aber wenn man z. B. 1 halbiert, $\frac{1}{2}$ wieder halbiert usw. „ins Unendliche", so scheint jedoch aus einem noch so kleinen Etwas beim nächsten Halbieren nie Nichts werden zu können. Es steht also der

und im Zusammenhange mit ihm auch schon für den Schulunterricht nutzbar hervorgehoben, wie schlicht und schlagend uns ZENO ins intellektuelle Gewissen zu reden weiß, wenn er uns scheinbar endgültig entläßt mit den Worten: „Also nähert sich Achill der Schildkröte immer mehr, ohne sie doch je zu erreichen." Das ist ein didaktisches Meisterstück vor allem deshalb, weil wir nun selber uns zu fragen anfangen: „Wie sollte er sie nicht erreichen, wo er sie augenscheinlich doch bald überholt?" Didaktisch meisterhaft ist auch die Art, wie gerade die Zeit ins Spiel gebracht wird. Beschränkte sich die Problemstellung nur auf die Wege, so möchte sich mancher Gefragte bei der negativen Antwort beruhigen, daß $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$ km nie „genau" 2 km geben, sondern daß, eine wie immer große Zahl von Summanden wir zusammentun, bis zum vollen 2 immer noch ein Abstand von der Größe des zuletzt hinzugekommenen Summanden klaffe. Diese Berufung auf den psychologischen Umstand aber, daß wir in unserem aktuellen Denken irgendeinen Summanden wohl oder übel müssen den letzten sein lassen, weil unser Leben zum Aneinanderfügen „unendlich vieler" Summanden (oder zum Ausführen unendlich vieler Schritte) eben nicht reicht, verfängt aber gar nicht mehr bei der Zeit: Gleichviel ob „wir" Zeitstrecken aneinanderfügen oder nicht, verläuft die Zeit „ganz von sich selbst" unaufhaltsam, und die zweite Zeitminute wird komplett, ganz gleichviel, ob wir sie nun aus $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ oder aus $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ oder aus $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ usw. zusammengefügt haben oder nicht. Auch insofern ist ja gerade die unaufhaltsame Zeit die (diesmal von „uns") „unabhängig Veränderliche κατ᾽ ἐξοχήν", und sie wird, weil die Summe der „wirklichen" Zeitstrecken jener Grenze 2 sich nicht nur nähert, sondern sie unwidersprechlich erreicht, vorbildlich auch für eine Summe von Raumstrecken $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$ km. – So wäre also ZENOs Sophisma ein endgültiger Beweis für das Erreichen von Grenzen (unbeschadet seiner den alltäglichen Erfahrungen entgegengesetzten und insofern als sophistisch empfundenen Behauptung eines bloßen „Näherns")? Was an philosophischen Voraussetzungen noch beigebracht werden müßte, um dem ZENOschen Sophisma nicht nur jenes didaktische Erträgnis, sondern auch dieses rein wissenschaftliche abzugewinnen, versparen wir uns anzudeuten im III. Teil § 49, S. 448; denn die dort als grundlegend hervorzuhebende Unterscheidung von Realkomplexionen und Idealkomplexionen geht jedenfalls weit hinaus über das, was auch in einem philosophisch-propädeutischen Unterrichte noch zur Sprache kommen kann. – Dagegen wird im vorstehenden der Lehrer der Logik oder Mathematik vielleicht einige Materialien finden, die er als brauchbar erkennt, und man wird daher WILLMANNs (oben S. 185 angeführten) Verzicht auf die Erörterung der ZENOnischen Bewegungsaufgabe wenigstens nicht ganz teilen.

Begriff des Unendlichen mit allen seinen Schwierigkeiten vor uns, und die Schwierigkeiten sind nicht gelöst, sondern nur versteckt, wenn wir vor jenen Grenzwert $\frac{a}{1-q}$ ohne weiteres ein Gleichheitszeichen setzen. Was wir statt jenes „=" sagen müßten, wenn wir uns von vornherein alle Dunkelheiten vom Leibe halten wollten, wäre nur, daß $\frac{a}{1-q}$ der Grenzwert ist, dem sich die Summe „nähert". Die Dunkelheiten beginnen aber schon wieder, wenn wir, wie herkömmlich, hinzufügen: „ohne Ende nähern". Denn soll das heißen: „Ohne Ende" nähern und trotzdem endlich [?] erreichen oder: nur nähern, ohne zu erreichen? Wieder sind dies Fragen, die so gewiß in der Schulmathematik nicht ihre Lösung finden, als sie sie ja auch in der strengsten Wissenschaft wahrscheinlich noch nicht für alle künftigen Zeiten gefunden haben. Aber als Fragen sind sie der Schule jedenfalls nicht fern zu halten, weder durch einen Machtspruch noch auch durch einfaches Verschweigen; denn dieselben Schwierigkeiten stecken ja schon im $\frac{1}{n} = 0$ für $n = \infty$, im Begriff der Parallelen, die sich „nie" oder „erst im Unendlichen" schneiden, in $\operatorname{tg} 90^0 = \infty$ usw. Wieder müssen hierüber in der Schule Takt und Geschmack entscheiden, da die in der Wissenschaft endgültig entscheidenden Richter, die modernen Theorien der „kritischen" Mathematik und die bis in die KANTschen Antinomien sich einlassende Philosophie, hier nicht angerufen werden können.

Der Kenner weiß, daß von der Stellungnahme zu diesen „Paradoxien des Unendlichen"[1]) auch alle Grundlegung der Infinitesimalrechnung abhängt; und man wird das auf diese durchaus sachliche Schwierigkeit sich berufende Argument der Gegner einer Einführung von wie immer bescheidenen Anfangsgründen der Infinitesimalrechnung in den Mittelschulunterricht nicht geringschätzen dürfen. Dennoch werden wir, wo wir diese Streitfrage im Zusammenhang behandeln (§ 43), auf diese prinzipiellen Fragen nicht noch einmal zurückkommen, sondern auch dort wird unser letztes Wort „Takt und Geschmack" sein müssen – was natürlich nicht hindern wird, daß wir es auch keinem wie immer

1) Die diesen Titel führende klassische Schrift BOLZANOs (nicht mehr von ihm selbst herausgegeben, sondern nach seinem Tode, 1848, von PŘIHONSKY, 1850), die längst vergriffen war, und von der jetzt nur ein anastatischer Abdruck im Handel ist, wird demnächst von mir in der Dürrschen Buchhandlung mit ausführlichen Erläuterungen des Dr. HANS HAHN neu herausgegeben werden.

gearteten Geschmack freigeben können, sich etwaige Rückfälle zu erlauben, wie den, daß man $\frac{dy}{dx}$ fälschlich als Quotient zweier Grenzwerte, statt richtig als Grenzwert eines Quotienten auffassen lehrt; vgl. S. 399.

Nehmen wir nun im Nächstfolgenden auch weitestgehende Zurückhaltung im Heranziehen von Unendlichkeitsbetrachtungen an, so werden doch folgende Grundbestimmungen über Reihen überhaupt auf keinen Fall zu vermeiden sein: die fallende geometrische Reihe ist der Typus einer konvergierenden Reihe, insofern sie die Grenze $\frac{a}{1-q}$ jedenfalls nicht überschreitet, solange $q < 1$. Wird dagegen $q = 1$ und also der Quotient $\frac{a}{0} = \infty$, so verliert die Summierung schon ihren ursprünglichen Sinn, wenn auch immerhin $a + a + a + \ldots = \infty$ noch nicht unserer Erwartung widerspricht; es wäre denn, daß $a = 0$ gewesen war.

Es empfiehlt sich hier auf alle Fälle, sowohl den vollständigen Ausdruck

$$a + aq + aq^2 + \cdots + a \cdot q^{n-1} = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

wie auch jene Grenzgleichung für $q < 1$, $n = \infty$

$$a + aq + aq^2 + \cdots \quad \text{in inf.} = \frac{a}{1-q}$$

überdies umgekehrt zu bestätigen durch einfaches Dividieren:

$$\begin{array}{l} (q^n - 1) : (q - 1) = (1 - q^n) : (1 - q) = 1 + q + q^2 + \text{usw.} \\ \qquad\qquad\qquad\quad \underline{-\ 1 \mp q} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + q \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{\pm q \mp q^2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + q^2 \quad \text{usw.} \end{array}$$

– und endlich noch diese Beziehungen auch als Spezialfälle der oft geübten Gleichung

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}$$

wiedererkennen zu lassen. – Während nun hier für $q < 1$ alles in Ordnung ist, gleichviel ob n „endlich“ oder „unendlich“, führt die Division

$$1 : (1 - q) = 1 + q + q^2 + \cdots$$

schon z. B. für $q = 2$ zu einer offenbaren Unzukömmlichkeit, indem die linke Seite $1 : (1 - 2) = -1$ eine endliche negative Zahl, die rechte Seite $1 + 2 + 4 + \cdots$ eine positive „unendliche“, nun aber „divergierende“ Reihe wird.

Der Quellpunkt der hiemit *ad oculos* demonstrierten Unstimmigkeiten ließe sich noch tiefer verfolgen; aber auch wenn man dies nicht tun will, genügt das Beispiel, den Schüler darauf aufmerksam zu machen, daß man beim Gebrauch „unendlicher Reihen" um die Vorfrage: konvergierend oder divergierend unter keiner Bedingung herumkommt[1]). – Wie sich diese Anweisung in dem praktischen Hauptfall, im Binomischen Satz für nicht ganze positive Exponenten, in der Praxis des Schulunterrichtes gestalten mag, wird noch im § 38 zu berühren sein.

§ 36. Zinseszinsrechnung.

Dieses Kapitel kann nicht anstreben, auch nur annähernd in solcher Ausführlichkeit behandelt zu werden, daß der absolvierte Gymnasiast oder Realschüler sofort mit der Kenntnis aller oder auch eines halbwegs großen Teiles derjenigen Probleme bekannt und vertraut sei, die Sparkasse, Versicherungsanstalt, weiterhin Statistik usw. an diesen Teil der angewandten Mathematik stellen. Das klare Herausarbeiten der zwei Grundformeln

$$E = A \cdot q^n \quad \text{und} \quad E = a\frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad \text{wo} \quad q = 1 + \frac{p}{100},$$

mit Darlegung ihrer Varianten und Verknüpfungen dient hier den vereinten Ansprüchen der reinen und angewandten Mathematik viel besser als die Häufung zusammenhangloser Proben aus dem Geschäftsleben (die ja einen Rückfall in den einstigen Ehrgeiz des Rechenunterrichtes bedeuten würden, z. B. schon auf der untersten Stufe alle Münz- und Gewichts-, auf der mittleren alle Zinsen-, Diskont- und Mischungsrechnungen für einen den allermeisten Schülern doch nie vorkommenden „praktischen Gebrauch" zurechtzumachen). Vielleicht sind gegenüber gewissen Schwierigkeiten oder eigentlich Verwirrungen, die sich in manchen

---

1) Wenn schon im Mittelschulunterricht vor dem unvorsichtigen Gebrauch divergenter Reihen gewarnt werden muß (wobei die auch noch zu Zeiten EULERs herrschenden „paradiesischen Zustände" [KLEIN] erwähnt werden mögen), so darf das heute schon wieder nicht mehr als unbedingter *horror divergentiae* zum Ausdruck kommen. Vgl. z. B. KLEIN, Elementarmathematik, S. 422: „Man darf aus der Konvergenz einer Reihe keineswegs schließen, daß ihre ersten Glieder die Summe auch nur mit einiger Annäherung darstellen, ebenso wie auch umgekehrt die ersten paar Glieder divergenter Reihenentwicklungen zur praktischen Darstellung einer Funktion gut brauchbar sein können." Näheres in dem Programm (Wien XIII, 1908) von Dr. JULIUS WETTERNIK, „Divergente Reihen und deren Anwendung auf lineare Differentialgleichungen", im Anschluß an „Leçons sur les séries divergentes par ÉMILE BOREL."

sonst guten Lehr- und Übungsbüchern bei der Aufstellung jener Formeln finden, folgende Winke nicht unwillkommen:

Erste Hauptaufgabe: Ein Anfangswert A wächst bei $p\%$ in n Jahren auf den Endwert E. Welche Beziehungen bestehen zwischen E, A, p, n? – Antwort: Die einfachen Zinsen von A sind in einem Jahre $z = \frac{Ap}{100}$, somit der Endwert $E_1 = A + \frac{Ap}{100}$. Der Witz der Zinseszinsrechnung besteht nun darin, daß wir diesen Endwert statt durch Addieren durch Multiplizieren finden $E_1 = A\left(1 + \frac{p}{100}\right) = Aq$. Es ist von hier ab sofort klar, daß und wie wir uns im Fahrwasser der geometrischen Reihen befinden, also $E_2 = Aq^2, \cdots E_n = E = Aq^n$ (der Unterschied gegen die Grundformel der Reihen $t = a \cdot q^{n-1}$ ist hervorzuheben). Diese Grundaufgabe wie die drei inversen Aufgaben

$$A = \frac{E}{q^n}, \quad q = \sqrt[n]{\frac{E}{A}}, \quad n = \frac{\log E - \log A}{\log q}$$

sind nun an mannigfaltig eingekleideten Aufgaben nicht nur über Geldbeträge, sondern auch Waldbestände, Bevölkerungsziffern usw. in herkömmlicher Weise einzuüben.

Erst indem wir nun zu den Varianten der ersten Hauptaufgabe übergehen, betonen wir vorher noch ausdrücklich die besonderen Voraussetzungen jener Aufgabe: daß es ganze Jahre (ganze gleiche Zeiträume) waren, an deren Ende (was sich hier freilich noch von selbst versteht, im Unterschiede zu den Varianten der Zweiten Hauptaufgabe) die Zinsen (allgemeiner der Zuwachs) zum Anfangswert hinzutreten. Halten wir, um die Formulierung nicht überflüssig allgemein und damit farblos zu machen, auch weiterhin die Beziehungen Kapital, Zinsen, Jahr fest, so ist die eine theoretisch besonders wichtige

1. Variante der I. Hauptaufgabe folgende: Die Zinsen werden nicht nach ganzen, sondern nach halben, drittel, viertel, ... r-tel Jahren zum Kapital geschlagen. Welches ist dann der Endwert $E_{n,r}$? Antwort: Nehmen wir etwa 6%, so würde nach dem ersten Halbjahr $E = A + \frac{A \cdot 3}{100}$ sein (wobei sich dieses Halbieren von p freilich nicht als mathematische Notwendigkeit von selbst versteht, sondern geschäftliche Übereinkunft ist). Somit $E = A\left(1 + \frac{1}{2}\frac{p}{100}\right)$, allgemeiner $E = A\left(1 + \frac{1}{r} \cdot \frac{p}{100}\right)$ und $E_{n,r} = A\left(1 + \frac{1}{r}\frac{p}{100}\right)^{n \cdot r}$. Die Zusammenstellung der numerischen Resultate etwa für $p = 6$, $n = 1, 2 .. 10$ und $r = 1, 2, 3, 4, 6, 12, 24$ in einer Tabelle mit zwei Tafeleingängen für n wird vielleicht am überzeugendsten das vorbereiten, was wir die theoretische Wichtigkeit dieser Aufgaben nannten: daß sie nämlich ganz von selbst hinführt auf die

Definitionsgleichung der Zahl $e = \lim\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$ für $\omega = \infty$ und weiterhin zu $e^x = \lim\left(1+\frac{x}{\omega}\right)^{\omega}$ für $\omega = \infty$; nämlich in folgender Aufgabe über „organische Verzinsung“. So können wir die Art des Zuwachses nennen, wie sie z. B. in der Pflanzenwelt der Tropen stattfindet, wo der Holzzuwachs (nicht wie bei uns nach Jahren, sondern) schon nach sozusagen unendlich kleinen Zeiträumen, also für $r = \infty$ stattfindet. Unter diesen Ausdruck für e^x fällt obiger Wert für $E_{n,r}$, wenn wir ihn so schreiben

$$E_{n,r} = A\left[\left(1+\frac{\frac{p}{100}}{r}\right)^r\right]^n = A\cdot\left(e^{\frac{p}{100}}\right)^n = A\cdot e^{\frac{pn}{100}} = A\cdot e^z,$$

wo $\frac{pn}{100} = z$ die einfachen Zinsen der Kapitalseinheit für n Jahre darstellt.

Nebenbei gesagt, dürfte dieses Auftauchen des e bei einem innerhalb möglichst enger Grenzen sich haltenden Unterricht die am unmittelbarsten sich darbietende Veranlassung sein, dem Schüler etwas von dem Respekt zu vermitteln, um deswillen die Mathematiker die nach dieser Grundzahl e fortschreitenden Logarithmen die „natürlichen“ genannt hatten (vgl. oben S. 241). Es bleibt dem Lehrer überlassen, inwieweit er bei diesem Anlaß auf jene Betrachtungen in Sachen der Exponentialfunktion u. dgl. zurückkommen will (und dann wieder bei $\frac{de^x}{dx} = e^x$, S. 406).

Zweite Hauptaufgabe. Zu Beginn jedes Jahres wird ein Sparbetrag a angelegt; welches ist der Endwert am Anfang des $n$ten Jahres? Die Antwort:

$$E = aq^{n-1} + aq^{n-2} + \cdots + aq + a = a\frac{q^n - 1}{q-1}$$

ist nach Inhalt und Form nichts als Ansatz und Ausführung des Summierens der (von rückwärts nach vorn gelesenen) geometrischen Reihe. Deshalb sollte man nur diese Sparaufgabe, nicht sogleich die Rentenaufgabe

$$E = Aq^{n-1} - a\frac{q^n - 1}{q-1}$$

als zweite Grundaufgabe einführen. Auch schon deshalb, weil ja ebenso nahe wie diese subtraktive Verknüpfung mit der ersten Hauptaufgabe auch die additive eines Weitersparens (wo Tauben sind, fliegen Tauben zu) läge, nach

$$E = Aq^{n-1} + a\frac{q^n - 1}{q-1}.$$

Neben obigen Grundformeln der Sparrechnung ist auch die Variante

$$E = Aq^n + aq\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

zu behandeln, wo am Anfang jedes Jahres eingelegt, am Ende des $n$ten „herausgenommen" oder wenigstens das Fazit gezogen wird. Von den beiden anderen Kombinationen „am Ende hineinlegen, am Ende herausnehmen" und „am Ende hineinlegen, am Anfang herausnehmen" ist letztere in sich sinnlos, die andere deckt sich mit der eingangs formulierten. Es bleibt daher bei den zwei Hauptformen

$$a\frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{und} \quad aq\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Ein großer Teil der Schwierigkeiten, die den Schülern der Ansatz der Aufgaben in ihren verschiedenen Anwendungen bereitet, behebt sich, sobald man nicht für jede Aufgabe den Ansatz selbst bis zum Eingehen auf die einzelnen Glieder der Progression zurückverfolgt, sondern sich hier der obigen zwei Hauptformen in berechtigter „Ökonomie des Denkens" bedient. Hinsichtlich der Auswahl praktisch wertvollster Anwendungen sei einfach auf die jeweilige Aufgabensammlung verwiesen. Doch möge es auch der Unterricht nicht an der Bemerkung fehlen lassen, daß wer z. B. zwischen mehreren Lebensversicherungsgesellschaften zu wählen hat, diesen schwerlich ihre Tafeln und Tarife nachrechnen wird, sondern sich letztlich doch auf den mehr oder weniger guten Ruf der einen oder anderen angewiesen sieht. Eben darum aber ist die Versicherungsmathematik zu einem Gebiete geworden, dem auch die Regierungen immer größere Aufmerksamkeit zuwenden, und wo (was man den Gymnasiasten einstweilen noch nicht verraten darf) die leitenden Juristen vielleicht bisher das einzigemal auch praktisch anerkannt haben, daß sogar für sie, die sonst Allwissenden, das „exakt" Wissenschaftliche, nämlich die Mathematik und die Mathematiker, keine *quantité négligeable* seien.

§ 37. Aus der Kombinationslehre: Permutieren, Variieren, Kombinieren.

An Gelegenheiten zu Fragen nach Kombinationszahlen hatte es schon im vorausgegangenen Unterrichte nicht ganz gefehlt; z. B.: Anzahl der Geraden, die sich durch n Punkte legen lassen (hier als lustigere Einkleidung: Wie oft muß man's klingen hören, wenn 2, 3, 4, 5 ... n Zecher mit den Gläsern anstoßen? Antwort: 1, 3, 6, 10 ... $\frac{n(n-1)}{2}$ mal). — Dazu als Permutationsaufgaben: In wievielerlei Reihenfolge können diese Zecher sitzen? Antwort: In 2, 6, 24, 120... n! – Ein weiteres, sozusagen internes Beispiel gibt die „Anzahl der Aufgaben, wenn zwischen fünf Größen zwei Gleichungen bestehen“ (wie bei den arithmetischen und geometrischen Reihen S. 334 und S. 337). Da hier drei Größen gegeben und zwei gesucht sind, so ist es auch schon ein Beispiel für

$$\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10.$$

Eine zusammenhängende Kombinationslehre gehört aber schon zu den Kapiteln an deren Streichung man zu denken pflegt, wo es mit der Zeit knapp wird. Dennoch sollte man lieber verzichten auf die eine oder andere Gruppe von Hauptfällen (z. B. man braucht nicht alle „mit Wiederholungen“ zu behandeln), statt daß man auf den eigenartigen Bildungswert des ganzen Kapitels überhaupt verzichtet. Dieser ist nämlich keineswegs ein bloß mathematischer, sondern auch ein logischer[1]). Vor allem nämlich beachte man, daß das Bilden z. B. der Permutationen gar nichts zu tun hat mit Mathematik im engeren und eigentlichen Sinne, sondern daß diese erst beginnt beim Bestimmen der Permutationszahl (ebenso wie das Zählen von Äpfeln arithmetisch ist, nicht aber das Pflanzen von Apfelbäumen).

Übereinstimmend wird begonnen mit dem Permutieren; das Kombinieren findet man aber manchesmal vor, manchesmal nach dem Variieren behandelt. Die letztere Anordnung ist die sachgemäßere, wie schon der Zusammenhang der Formeln

$$P(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$$

$$V_r(n) = n(n-1) \cdots (n - \overline{r-1})$$

$$C_r(n) = \frac{n(n-1) \cdots (n - \overline{r-1})}{1 \cdot 2 \quad \cdot \quad r} = \binom{n}{r}$$

zeigt, der natürlich seinerseits zurückgeht auf die Definition des Kombinierens als eines Variierens, bei dem alle nur durch die Permutation der Elemente sich voneinander unterscheidenden Komplexionen bloß als je eine gezählt werden.

Von den Anwendungen der Kombinationslehre im weitesten Sinne sind die grundsätzlich wichtigsten die im Binomischen Satz und in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Da auch diese beiden Kapitel bedroht sind durch die oben erwähnte Zeit-

1) Genauer wäre es zu sagen „komplexionstheoretischer“, also noch allgemeiner „gegenstandstheoretischer“; vgl. III. Teil S. 436.

ersparungsrücksicht, so werden auch die beiden folgenden Paragraphen anzudeuten haben, wie man aus ihnen Wichtigstes für den Unterricht retten kann, auch wenn man auf umfassenderes Eingehen von vornherein verzichten muß.

§ 38. Binomischer Satz.

Will man sich in Sachen der Potenz eines Binoms auf die „rekurrierende“ Darstellung der Binomialkoeffizienten beschränken, so ist die Sache in kaum einer Schulstunde eines der früheren Jahrgänge mit dem Pascalschen Dreieck

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

usf. abgetan, dessen unmittelbar einleuchtende Begründung z. B. in

$$\begin{array}{l} \underline{(a^3 + 3a^2b + 3a\,b^2 + b^3)\,(a+b)} \\ a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 \\ \underline{\quad + \; a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4} \\ a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{array}$$

usf. liegt. Auch einige von den Übungen, wie sie etwa HEIS § 40 bringt, nehmen nicht viel Zeit in Anspruch. Nur bleibt dann auch der praktische Gewinn ein sehr beschränkter, und von einer eigentlichen theoretischen Einsicht in das Wesen des „binomischen Satzes“ kann vollends nicht die Rede sein. Diese beginnt schlechterdings erst dann, wenn wir außer auf das „rekurrierende Bildungsgesetz“ der Koeffizienten, wie es uns das Pascalsche Dreieck bietet, auch auf das „independente Bildungsgesetz“ eingegangen sind, das (für ganze positive n) lautet:

$$B_r(n) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-\overline{r-1})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r} = \binom{n}{r}$$

Glaubt der Unterricht dem Schüler diese Einsicht vorenthalten zu dürfen, so ist damit nicht weiter zu rechten (im Falle starken Zeitmangels oder dgl.). Wo aber alles auf dieses merkwürdige Symbol $\binom{n}{r}$ Bezügliche als eine wirksame didaktische Einheit zur Geltung gebracht werden will, wird es die erste Aufgabe des Lehrers sein, zu beachten, ob der Schüler das sachliche Bedürfnis, das von der erkurrierenden zur independenten Form rein wissenschaftlich weitertreibt, seinerseits auch wirklich verspürt hat; im weiteren gilt es dann, dieses Bedürfnis zu klären und das Grundsätzliche jenes Unterschiedes herauszuarbeiten. Freilich hätte eine ähnliche Frage auch schon z. B. bei den geometrischen Reihen aufgeworfen werden können, doch wird hier, weil der Fortschritt von der rekurrierenden Bildung des a, aq, aq^2, aq^3 zum independenten allgemeinen Glied aq^{n-1} doch gar zu selbstverständlich war, ein solches Bedürfnis kaum recht deutlich verspürt worden sein. Dagegen hat wohl jeder, den man etwa $(a+b)^{10}$ hat entwickeln lassen, es als schwerfällig empfunden, wenn er auch die Koeffizienten der 9ten, 8ten... Potenz hat in Kauf nehmen müssen. Und überdies bleibt ja die unmittelbare Gesetzmäßigkeit, wie der $r$te Koeffizient der $n$ten Potenz von r und n abhänge, auch dann noch undurchsichtig, wenn man ihn durch jenes Zurückgehen auch schon wirklich berechnet hat.

Wie also soll man nun das $B_r(n)$ berechnen? Die Antwort liegt in der Gleichung $B_r(n) = C_r(n)$ d. h. in der Begründung, daß und warum jener Binomialkoeffizient zahlengleich ist der Kombinationszahl für n Elemente zur $r$ten Klasse.

Diese Begründung wieder liegt darin, daß man von dem Produkt

$$(x+a)(x+b)\cdot(x+c)\dots(x+n)$$

nach einander die ersten zwei, dann drei, dann vier Faktoren wirklich ausmultiplizieren und dann $a = b = c = \dots = n = y$ werden läßt. Vor diesem Gleichsetzen hatten sich die Koeffizienten z. B. $(a+b+c)$, $(ab+ac+bc)$, abc ergeben, also Kombinationen aus drei Elementen zur 1., 2., 3. Klasse; und nach dem Gleichsetzen wird daraus $3y$, $3y^2$, y^3; wo in dem 3 3 1 ohne weiteres die Zahlen aus der dritten Zeile des Pascalschen Dreiecks wiederzuerkennen sind.

Wäre die Kombinationslehre dem Binomischen Satze nicht vorausgegangen, so könnte man ja immerhin den obigen independenten Wert für $B_r(n)$ als vorläufig unmotivierte Behauptung mitteilen und nachträglich durch den Schluß von n auf $(n+1)$ zeigen, daß dieses Gesetz sich auch für die $(n+1)$te Potenz bewährt. Doch ist das Gewaltsame und daher auch pädagogisch Unbefriedigende dieses Überspringens der Kombinationslehre nicht zu verkennen. Es mag dies wieder als ein Beispiel erwähnt sein, daß auf einer höheren Stufe des Unterrichtes der wissenschaftliche Zusammenhang als solcher in der Regel nun doch schon auch die didaktisch natürlichste Weise des Vorgehens an die Hand zu geben pflegt.

Die bisherigen Andeutungen hatten sich ganz von selbst auf ganzzahlige, positive Exponenten beschränkt. Daß man auf den allgemeinen Binomischen Satz mit allem, was an Konvergenzbetrachtungen und Abgrenzungen seines Geltungsbereiches zu seiner exakten Aufstellung und Begründung gehört, im Mittelschulunterricht wohl nie und nirgends wird eingehen können, steht wenigstens dem Verfasser fest[1]). Soll aber darum auf jede Erwähnung und Benutzung einiger speziellen Fälle von negativen und gebrochenen Exponenten ebenso grundsätzlich verzichtet werden? Dagegen sprechen doch wieder die Bedürfnisse schon des physikalischen Unterrichtes, sofern nicht auch dieser aus doktrinären Gründen sich den mathematischen Apparat schmälert oder schmälern läßt.

Schon die Annäherungsformel $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \doteq 1 + \frac{1}{2}x$ erlaubt einen interessanten Ausblick, daß und unter welchen Bedingungen der Binomische Satz immerhin nicht nur für die ganzen positiven Exponenten, in welchen er eine geschlossene Reihe liefert, von Bedeutung ist. Freilich könnte man jene Näherungsformel auch ohne Hinweis auf die Beziehung zum Binomischen Satz, speziell auf $\binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$, ausschließlich durch Ausquadrieren bestätigen und sich so überzeugen, daß es hier nur um das Glied $\frac{x^2}{4}$ nicht stimmt; ferner begreifen, daß es nur hat geopfert werden dürfen, wenn $x < 1$ usw. Warum aber nicht solche Einsichten zu einem Ausblick wenigstens auf das Problem, das die binomische Entwicklung für gebrochene und negative Exponenten einschließt, für den Schüler didaktisch ausnutzen? Versuchen wir es dann, in jener Entwicklung noch ein Glied mit dem Koeffizienten

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} - 1)}{1 \cdot 2} = -\frac{1}{8}$$

hinzuzunehmen und auch dieses $\sqrt{1+x} \doteq 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$ wieder zu quadrieren, so fällt jetzt nach $1 + x$ das $\frac{x^2}{4}$ ganz heraus, und die Probe differiert nur mehr um Glieder mit x^3 und x^4. Vgl. auch das Beispiel S. 201, Anm.

Schon wegen dieser Beziehungen zu den konvergenten Reihen mündet der Binomische Satz wieder in die geometrischen Reihen ein, als welche sich die probeweise durchgeführten Entwicklungen von $(1-x)^{-1}$ und $(1+x)^{-1}$ nachmals herausstellen, wiewohl er unabhängig hievon anfänglich nur als eine spezielle

1) SIMON (1908, S. 102) empfiehlt mindestens noch ein Eingehen auf $n = 0$ und $n = -1$. „Hier liegt die Wasserscheide zwischen Arithmetik und Analysis.“

Aufgabe aus der Kombinatorik hervorgegangen war. Es bleibt also dem Lehrer Spielraum, aber auch eine jedenfalls irgendwie zu lösende Aufgabe, diese drei Kapitel nicht außer allem Zusammenhang zu lassen, sondern sie eben durch den Binomischen Satz in solchen Zusammenhang zu setzen; was allein schon dafür spricht, „den Binom“[1]) nicht kurzweg aus dem Unterricht hinauszuwerfen.

§ 39. Aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Ob die Wahrscheinlichkeitsrechnung, die so lange neben anderen Spezialitäten, in die der arithmetische Lehrstoff der Mittelschule zu verlaufen pflegte, ein stilles, aber unangefochtenes Dasein geführt hatte, nun im Zeitalter der Entlastungsmode aus den Plänen zu verschwinden habe, – und ob, wenn und wo sie verschwunden, man sie bei der nächsten Revision wieder einzuführen habe, scheint fast eine Sache des Zufalls geworden zu sein. Sollte es aber für ein solches Schwanken der Lehrplanverfasser gar keine höheren Instanzen geben als augenblickliche Geber- oder Nehmerlaune und die größere oder geringere Geneigtheit, von alten Traditionen sich frei zu machen oder zu ihnen zurückzukehren?

Als eine solche höhere Instanz erkennen wir wenigstens unsererseits gerade für einen mathematischen Unterbau zur Lehre von der Wahrscheinlichkeit durchaus die Logik an; und sie würde wohl auch von allen Verfassern mathematischer Lehrpläne als solche anerkannt werden, wenn nur eben ein systematischer Logikunterricht, in den hier der mathematische einzugreifen hat und umgekehrt, selber anerkannt und verbreitet wäre. Da aber diese didaktischen Handbücher eine philosophische Propädeutik (welcher der IX. Band gehört) als ein zugestandenes Erfordernis eines ins Volle wirkenden realistischen Unterrichtes festhalten, so kommt auch der Bedeutung einer mathematischen für die logische Wahrscheinlichkeitslehre und umgekehrt Beweiskraft zu.

Nach diesem Maßstabe kommt es keineswegs auf die Menge und Künstlichkeit der Einzelaufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung an, wenn diese dem Mittelschüler wirklich lehrreich werden soll. Aber man lege nur einmal noch vor aller Definition des Wahrscheinlichkeitsbruches u. dgl. dem Schüler eine allereinfachste Frage wie die folgende vor:

1) So schreibt SIMON mehrmals (vgl. z. B. S. 165, S. 243 Anm.). Ist dieses Maskulinum auch bei anderen Mathematikern gebräuchlich?

Gehört mehr Glück dazu, mit einem Würfel eins oder sechs zu werfen? – und man wird einzelne finden, die ganz ernstlich meinen, man müsse z. B. einen höheren Einsatz auf sechs als auf eins wagen. Ist das berichtigt, so frage man, ob es gleiche Einsätze verdient, wenn man mit zwei Würfeln zwei oder sieben oder zwölf werfen will. Wird nun hier wieder für Gleichwertigkeit optiert, so ist es Zeit, darauf hinzuweisen, daß für zwei und zwölf immer nur je eine Kombination ($1 + 1$, bzw. $6 + 6$), für sieben dagegen sechs Kombinationen ($1 + 6$, $2 + 5$, $3 + 4$, $4 + 3$, $5 + 2$, $6 + 1$) die „günstigen Fälle" bilden.

So sind wir auch vorbereitet auf den Begriff der „gleichwahrscheinlichen Fälle"; denn so sollte man sagen statt des bei Mathematikern fast allgemein verbreiteten „gleichmöglich". Eine leichte Überlegung zeigt ja, daß streng genommen „Möglich" nicht einer Steigerung fähig ist wie „Wahrscheinlich". – So gehen schon vom Anfang der Wahrscheinlichkeitsrechnung mathematische und logische Gedanken engstens Hand in Hand. Leider ist dabei die Logik der Wahrscheinlichkeit innerhalb der zuständigen philosophischen Fachwissenschaft noch keineswegs zu einigermaßen vollständiger, geschweige denn allgemeiner Durchbildung gelangt. Das sollte aber den Mathematiker nicht verleiten, seine mathematischen Begriffsbestimmungen überhaupt unabhängig von logischen Voraussetzungen geben zu wollen. Zum Glück wirkt aber das Logische in naiven Intellekten kräftig genug, daß auch ohne alle irreführende Definitionen und anfechtbare Deduktion aus ihnen siebzehnjährige Schüler recht wohl zu Einsichten wie die folgenden zu bringen sind: Die Wahrscheinlichkeit, daß entweder das eine oder das andere Ereignis eintritt, ist $w_1 + w_2$; dagegen, daß sowohl das eine als auch das andere eintritt, $w_1 \times w_2$. Wird man die in solchen arithmetisch mehr als einfachen Übungen liegende logische Übung so gering anschlagen, daß man die auf sie verwendete Zeit auf irgendeinen anderen mathematischen oder außermathematischen Lehr- und Übungsstoff besser verwenden zu können meint? Wie weit man dann auf diese logischen Grundlagen Aufgaben bauen will, deren Witz schon wieder vorwiegend im rechnerischen Teil der Kombinatorik liegt, mag sich ganz nach der Neigung des Lehrers und nach der zur Verfügung stehenden Zeit richten. –

Vielleicht lockt es aber umgekehrt auch manchen Logiklehrer, auf die grandiosen physikalisch-metaphysischen Folgerungen ausblicken zu lassen, die ein Boltzmann für die Richtung des Weltlaufes zum „Wahrscheinlicheren" hin gewagt hat.

§ 40. Zur abschließenden Lehre von den Gleichungen.

Die Prager Vorschläge[1]) empfehlen als Abschluß des ganzen Arithmetik- (und Geometrie-) Unterrichtes der Oberstufe (vgl. auch den Zusammenfassenden Lehrplan bei S. 430):

c) Zusammenfassende Darstellung der bisherigen Lehre von den Gleichungen in algebraischer und graphischer Form (Ergänzung durch Gleichungen höherer Grade, die sich auf quadratische zurückführen lassen, quadratische mit mehreren Unbekannten u. dgl., ferner durch die in ganzen Zahlen aufzulösenden unbestimmten Gleichungen ersten Grades mit zwei und drei Unbekannten und ihre Beziehungen zu Gitterpunkten). Annähernde Lösung algebraischer (und gelegentlich vorkommender transzendenter) Gleichungen durch graphische Methoden.

Hoffentlich sprechen diese Forderungen größtenteils für sich. Denn die Gleichungen waren es ja, die schon vom Anfang der Mittelstufe das geistige Band für alle arithmetischen Einzellehren bildeten, indem in ihnen die gegenseitige Abhängigkeit der direkten und inversen Operationen auf der 1., 2. und 3. Operationsstufe zum Ausdruck kommt. Nicht Zufall oder Willkür ist es demnach auch — und darf auch dem Schüler nicht wie solche erscheinen —, daß das arithmetische Korrelat der geometrischen Gebilde gerade wieder die Gleichungen von Kurven und Flächen sind.

Will sich also der Unterricht der sogenannten elementaren Mathematik die mehrfach gerügte Stillosigkeit abgewöhnen, mit etwas Beliebigem, z. B. dem Binomischen Satz oder etwas Wahrscheinlichkeitsrechnung (oder bei den nach SIMON empfohlenen Spezialitäten aus der algebraischen Analysis mit dem MOIVREschen Theorem oder dem $e^{\pi i}$ oder dgl.) abzuschließen, so gibt es für ihn keinen inhaltlich monumentaleren und auch didaktisch fruchtbareren Abschluß als eben eine solche zusammenfassende Gleichungslehre. Und sollte denn nach einer solchen nicht schon dank der hausbackensten Regeln der Didaktik ein unabweisliches Bedürfnis sein, wenn bisher die Einzellehren

1) Leider hat der neue österreichische Lehrplan, der sich sonst an die Prager Vorschläge in einer für diese höchst erfreulichen und schmeichelhaften Weise anschließt, auf diesen Abschluß c) verzichtet. Dennoch ist zu hoffen, daß in einer Unterrichtspraxis, der es widerstrebt, den Lehrgang der Oberstufe ohne eine auch für den Schüler deutlich wirksame Abschließung und Krönung zu lassen, eine solche zusammenfassende Gleichungslehre sich früher oder später einbürgern werde, falls die obigen Gründe triftige sind.

in betreff der Gleichungen sich über mindestens vier Jahrgänge verteilt, für die Erinnerung des Schülers also auch mehr oder weniger verstreut hatten?

Es bedarf, wenn diese Forderung grundsätzlich anerkannt ist, natürlich für den Lehrer keiner besonderen Ratschläge, wie er nun nochmals z. B. die verschiedenen Einteilungsgründe für die Gleichungen vor allem Durcheinanderlaufen zu bewahren hat und was er sonst noch aus der Theorie der Gleichungen dem Schüler angemessen halten mag.

War z. B. dem Schüler gezeigt worden, daß eine quadratische Gleichung nicht mehr als zwei Wurzeln haben kann, oder wie nach Kenntnis der einen mittels Dividierens des Gleichungstrinoms durch den einen Wurzelfaktor der andere, und hiemit auch die andere Wurzel gefunden werden kann u. dgl. m., so sollte mindestens die Frage gestreift werden, ob und woher man wisse, daß jede quadratische und weiterhin jede algebraische Gleichung mindestens eine Wurzel hat. Natürlich wird man nicht auf die allgemeinen Gaussschen Beweise eingehen; aber warum sollte man von ihnen nicht wenigstens berichten, daß sie in aller Strenge geführt sind, und daß diese Wurzeln keine andere Form haben als $x + yi$. Nicht um die beiläufige Mitteilung als solche handelt es sich, sondern darum, daß der Schüler in aller Strenge einsieht, daß ohne einen solchen „Existenzbeweis" alles das, was man ihm sonst an Technik des Gleichungenauflösens beigebracht hat, in der Luft hänge.

Was die Beziehungen zur analytischen Geometrie betrifft, so braucht man sich nur frei gemacht zu haben von der gedankenlosen Gewohnheit, den Lehrstoff dann für absolviert zu halten, wenn man eben die ausdrücklich vorgeschriebenen Linien 1. und 2. Grades absolviert hat; und ganz von selbst wird man dann, wenn man innerhalb der Gleichungsaufgaben z. B. auf das sicher nicht zu schwierige Beispiel $x^4 + y^4 = a^4$, $x + y = b$ stößt, den Schüler einladen, sich über die graphische Darstellung jener Gleichung 4. Grades einige Gedanken zu machen. Irgendwelche Ähnlichkeiten mit dem Kreis $x^2 + y^2 = a^2$ muß ja jene Kurve 4. Grades haben. Vom Standpunkt der Gleichungslehre besonders dringend ist die Frage, was sich an der Kurve wesentlich gegenüber dem Kreise geändert haben muß, daß es jetzt zu vier mit der Geraden $x + y = b$ gemeinsamen Punkten kommen kann. — So könnte die Ausdeutung mittels analytischer Geometrie zu einem der Maßstäbe werden, nach denen die bloß formalistischen Gleichungen von höheren Graden mit mehreren Unbekannten wirksam einzuschränken sein werden (vgl. S. 253).

Also nur keine Engherzigkeit von beiden Seiten, weder von der der Gleichungslehre noch der der analytischen Geometrie. Ein lebensvoller und belebender Unterricht muß zu solchen kleinen Seitensprüngen und Ausblicken in die Gebiete, die außerhalb des zusammenhängenden Lehrplanes liegen, immer noch Zeit und Kraft haben. – Hoffentlich schützt uns dieser über die offiziellen Grenzen der herkömmlichen Lehrplänebemessung hinausblickende Rat vor dem Verdacht der Rückschrittlichkeit, wenn wir nun zur Vorsicht mahnen gegenüber einem vorzeitigen Hereintragen der graphischen Methoden in die einzelnen Kapitel der Gleichungslehre, wie sie neuestens nicht selten als Methode zur Einführung in das funktionale Denken empfohlen wurde. Vielleicht ist vieles hieran nur Geschmackssache; mancher Lehrer mag schöne, ihn befriedigende Erfolge erzielen, wenn er schon mit Vierzehnjährigen jenes Kapitel der analytischen Geometrie, das vom Durchschnitte zweier Geraden handelt, und wenn er mit Sechzehnjährigen die Parabel als einfachste Kurve für quadratische Gleichungen, – also drei Jahre, bzw. ein Jahr vor der zusammenhängenden analytischen Geometrie behandelt. Ein anderer Lehrer aber wieder mag, wenn ein solches Vorwegnehmen durch die Lehrpläne nun plötzlich geradezu von ihm verlangt wird, hierdurch gegenüber der ganzen Forderung des „funktionalen Denkens" kopfscheu werden. Was sich gegenüber solchen Geschmacksdifferenzen an einigermaßen objektiven didaktischen Ratschlägen und Grundsätzen der weiteren Erwägung empfehlen läßt, dürften zum mindesten die folgenden Thesen und Fragen sein:

Wie schon oben S. 329 gesagt wurde, ist es denn doch wohl einer der fundamentalsten und für den Anfänger auch überraschendsten Gedanken, daß dem geometrischen Phänomen des Sich-Schneidens zweier Linien (allgemeiner des Auftretens gemeinsamer Punkte) arithmetisch das Auflösen zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten entspricht. Auch noch innerhalb des zusammenhängenden Lehrganges der Geometrie wird man diesen Gedanken nicht aus der Pistole schießen, sondern nachdem man sich allenfalls des Grundsatzes „Die Verwunderung sei der Anfang der Philosophie", nämlich der Verwunderung über das Zusammengehen je einer geometrisch und arithmetisch so grundlegenden Erscheinung, bzw. Operation, recht ausgiebig bedient hat, den Schüler zum völligen Verstehen dieses Wunders gelangen lassen; etwa indem man ihn zwei vorgelegte Gleichungen mit numerischen Koeffizienten in Täfelchen auseinanderlegen, dabei beachten läßt, daß im allgemeinen zu einem x je zweierlei y gehören, daß aber diese y-Paare gegen ein gewisses x hin sich nähern und endlich zu einerlei Wert werden usw. Die didaktische Frage ist nun nur die, ob ein 14jähriger Schüler, dem noch der primitive Rechnungsmechanismus des Gleichungen-Auflösens zu schaffen macht, schon das dankbarste Publikum für solche Feinheiten ist, oder ob das, was ihm auf dieser Stufe zum größten Teile doch noch der Lehrer in den Mund streichen muß, nicht nach wenigen Jahren, eben während der zusammenhängenden analytischen Geometrie, wesentlich vom Schüler selbst und daher jetzt zu seiner viel größeren Freude und Befriedigung hätte gefunden werden können? Ebenso, wenn man schon ein Jahr vor dieser analytischen Geometrie die Parabel $y = x^2 + px + q$ sich schneiden läßt mit der Geraden $y = 0$ – während es doch bekanntlich noch ein Jahr später manchem Schüler nicht sogleich eingehen will, daß und warum just $y = 0$ die Gleichung der Abszissenachse sei. – Doch wir wollen, wie gesagt, niemandem die Freude verderben an beliebig frühen Antizipationen der analytischen Geometrie im Dienste funktionalen Denkens schon bei frühen und frühesten Gleichungsaufgaben; nur feierlich verwahren wollen wir dann jenes gesunde, glückliche Prinzip – das funktionale Denken und die graphische Darstellung bei allen wissenschaftlich und didaktisch passenden Gelegenheiten zu pflegen – gegen alle Vorwürfe, die etwa bei ungeschickter Einführung dieser Neuerung nicht ausbleiben könnten.

Als nicht erst didaktisch, sondern schon fachwissenschaftlich unhaltbar muß insbesondere der seltsamerweise mehrfach aufgetauchte Vorschlag abgelehnt werden, man solle das Wesen einer graphischen Darstellung an die Lehre von den unbestimmten (fälschlich sogenannten Diophantischen)[1] Gleichungen anknüpfen; denn bei diesen handelt es sich nur um die ganzzahligen, also durchaus unstetige Wertepaare. Dagegen gehört es zum Wesen der graphischen Darstellung aller im Unterrichte vorkommenden Funktionen (an denen Unstetigkeiten nur als Ausnahme, z. B. bei $y = \operatorname{tg} x$, vorkommen), daß dem stetig veränderlichen x ein stetig veränderliches y und somit ein stetiger Kurvenzug entspricht. Den „Diophantischen“ Gleichungen dagegen

1) Simon 1908, S. 53.

entspricht als geometrisches Analogon das Aufsuchen nur der Gitterpunkte (s. u.), durch die die Gerade $ax + by = c$ hindurchgeht. – Daß ein so grundsätzlicher Unterschied hat übersehen werden können, möchte einen bange machen um das didaktische Schicksal der in sich so gesunden Forderung von graphischen Darstellungen der im Unterricht vorkommenden Gleichungen überhaupt.

Ferner sei in Sachen der „Diophantischen" Gleichungen (um den hergebrachten Ausdruck auch weiterhin einstweilen noch zu gebrauchen) nebenbei hier als eine nicht unbedenkliche Neuerung die verzeichnet und zur Diskussion gebracht, daß die neuesten österreichischen Lehrpläne sie kurzerhand überhaupt gestrichen haben. Auch dies dürfte denn doch ein Zuwenig sein gegenüber einem einstigen Zuviel. Es ist nämlich an österreichischen Schulen vorgekommen, daß ein ganzes Semester hindurch nur Diophantische Gleichungen betrieben wurden; ja es ist vorgekommen, daß ein ganzes Semester hindurch nur Näherungsbrüche behandelt wurden, deren einzige Anwendung dann wieder in einem anderen Semester die eine Methode zur Lösung von Diophantischen Gleichungen war. Muß man aber solchen Takt- und Geschmacklosigkeiten die unverdiente Ehre erweisen, behufs ihrer Unmöglichmachung wieder das Kind mit dem Bade auszugießen? Wenn freilich ein Verteidiger der Diophantischen Gleichungen diese just nicht auf der Ober-, sondern schon auf der Mittelstufe behandelt wissen wollte, wo sie dem Schüler günstigstenfalls den Eindruck einer mit der andern Gleichungslehre gar nicht zusammenhängenden Spezialität machen können, so möchte man sich fast wieder damit versöhnen, wenn nun auch dieser Mißgriff unmöglich geworden ist. Verrät sich aber auch in allen solchen Mißgriffen einzelner Lehrer (oder, was dann freilich sehr viel verhängnisvoller ist, einzelner Lehrpläne, die der Schulinspektor den Lehrern aufzuzwingen berechtigt oder verpflichtet ist) zum mindesten ein Mangel an mathematischem Stilgefühl, so könnte gerade ein Lehrplan an derartigen gefährlichen Stellen einfach dadurch vorbeugend wirken, daß er den einzelnen Stoffen innerhalb des Unterrichts diejenigen Stellen anweist, die ihnen im System der Wissenschaft selbst zukommen. Eine Bemerkung, die natürlich sehr weit über das an sich harmlose Gebiet der unbestimmten Gleichungen hinausgeht.

Was nun aber diese **unbestimmten Gleichungen** selbst angeht, so weiß jeder wirkliche Mathematiker, daß sie nicht mehr und nicht weniger sind als die Eingangspforte zur **Zahlentheorie**; und den Schüler gegen Ende des systematischen Unterrichtes einen Blick auch durch dieses Pförtchen tun lassen, kann nicht schaden, sondern nur nützen. Natürlich kann es sich nicht darum handeln, durch zeitraubendes Durchrechnen recht vieler Zahlenbeispiele etwa die Eulersche Methode ebenso zur Fertigkeit eines Algorithmus zu steigern wie den des Multiplizierens. Aber gerade das Fremdartige dieser auf ausschließlich ganzzahlige Resultate lossteuernden Rechnungen mag immerhin einen ersten Eindruck geben von der eigenartigen Stellung aller zahlentheoretischen Untersuchungen im Vergleich zu aller übrigen dem Schüler bisher bekannt gewordenen Arithmetik. Auch frühere Lehren, wie die von der Kettendivision, zeigen so dem Schüler ein neues Gesicht. Da nun aber einmal in diesen unbestimmten Gleichungen, wie es scheint, die Gefahr didaktischer Mißgriffe besonders nahe liegt, so sei noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, daß auch sie mehr als durch alles andere belebt werden durch die graphischen Darstellungen; aber diese bestehen hier nicht in Kurven, sondern nur in Punkten; nämlich in den Gitterpunkten, in denen sich die zu den rechtwinkligen Koordinatenachsen in den Abständen 1, 2, 3..., auch — 1, — 2, — 3... parallel gezogenen Hilfsgeraden schneiden. Statt dann z. B. die allgemeinen Werte für x und y von der Form $x = x_0 + bn$, $y = y_0 - an$ durch hochnotpeinliche arithmetische Betrachtungen einschränken zu lassen auf die positiven Lösungen, zeigt es sich durch das Konstruieren der Ausgangsgleichung als einer Geraden, ob diese überhaupt durch den ersten Quadranten hindurchführt, und durch welche Gitterpunkte sie daselbst geht. — Sogar die eine oder andere unbestimmte Gleichung zweiten Grades mag in dieser Weise behandelt werden, so vor allem die die pythagoreischen Zahlen liefernde $x^2 + y^2 = z^2$. Keineswegs aber soll man darum sogleich wieder doktrinär eine ganze Theorie dieser unbestimmten Gleichungen in den Unterricht hereintragen. Denn, wie gesagt, diese unbestimmten Gleichungen sollen ja überhaupt nur den Charakter eines Exkurses haben, und als solcher kann er auch bei quantitativer Beschränkung lebhaft anregen. —

Alle einschlägigen Spezialitäten, wie die Ketten- und Näherungsbrüche, mögen ja immerhin geopfert bleiben. Oder wird auch ihnen noch einmal ein Tag der Rückkehr kommen?

Auf alle Fälle wird man sich — was wiederum eine Bemerkung weitertragender Art ist — bei allen Besonderheiten und Exkursen, namentlich auch bei denen in das Gebiet der algebraischen Analysis, vorher immer die prüfende Frage vorlegen, ob sie an „Wichtigkeit“[1]) sich messen können mit einigen

1) Diese leidigen Wörter „wichtig“ und „wichtigst“ sollten füglich

Ausblicken in das Gebiet der Differential- und Integralrechnung, denen wir schon behufs allgemeiner Anbahnung solcher vergleichender Bewertungen der „höheren Rechnungen an höheren Schulen“ die nächsten fünf Paragraphen widmen. Hier aber sei sogleich noch zum Kapitel der Verbindung von Gleichungslehre und analytischer Geometrie bemerkt, daß schon die Methoden zur annähernden Berechnung von Gleichungswurzeln (also auch bei transzendenten Gleichungen), wie diese von dem neuen österreichischen Lehrplan an eben dieser Stelle empfohlen werden, einen rechten Reiz nur für diejenigen Schüler haben, denen man das Wesen einer „abgeleiteten Funktion“ nicht vorenthalten hat. Ebenso z. B. die HORNERsche Divisionsmethode, bei der dem Schüler mehr noch als die aus den Anfängen der Differentialrechnung ihm geläufig gewordene arithmetische Form $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ das Denken an Sehnen und Tangenten beliebiger Kurven zur Gewohnheit geworden sein muß; d. h. also ebenfalls ein erstes Endchen Differentialrechnung.

§ 41. Abschluß der Oberstufe (achtzehntes Lebensjahr).

Das volle letzte Jahr des Mathematikunterrichtes wünschen wir **Wiederholungen**[1]) aus dem Gesamtgebiet des mathematischen

in wohlstilisierten Lehrplänen überhaupt nicht mehr vorkommen. Denn wem ist denn jenes allzeit bereite „Wichtigste“ aus wer weiß was für Lehrfächern wirklich „wichtig“? Dem Schüler selber leider gewöhnlich am allerwenigsten.

1) Dieses Wiederholungsjahr ist seit langem an den österreichischen Gymnasien verwirklicht, wiewohl oder vielleicht weil hier der Mathematik im letzten Jahr nur zwei (!) wöchentliche Stunden eingeräumt sind. Zum mindesten eine dritte Stunde wäre natürlich höchst wünschenswert (solange wir nicht etwa die wahlfreie Zweiteilung der obersten Klasse bekommen, wo dann jene zwei Stunden nur für die nichtrealistische Abteilung ausreichen möchten, um die erworbenen Kenntnisse nicht schon vor Abschluß des Gymnasiums einrosten und absterben zu lassen). – Gleichwohl mag es lehrreich sein, wenn ich oben dasjenige Bild von einem abschließenden Jahrgang des Mathematikunterrichtes entwerfe, das meine eigenen Erfahrungen aus vielen Jahren einer Unterrichtserteilung unter so schwierigen äußeren Bedingungen wiedergibt. Denn alles in allem darf ich sagen: Trotz dieser nur zwei Stunden haben sich in einem solchen obersten Jahrgange, eben weil er nur der vertiefenden Wiederholung gewidmet war, doch recht erfreuliche Erfolge erzielen lassen – eine Erfahrung, die auch für andere Unterrichtsfächer ein lockendes Beispiel sein sollte, indem ein Maturitätsprüfungsjahr, das möglichst wenig mit dem „Beibringen“ von neuen Stoffmassen beunruhigt ist, sondern sich vielmehr der nach neuen, großen Gesichtspunkten fortschreitenden Überschau und Zusammenfassung widmen könnte, dem Herbeiführen und schließlichen Konstatieren geistiger Reife unvergleichlich besser dienen würde als unsere

Schulunterrichts vorbehalten, was aber „Erweiterungen und Vertiefungen an einzelnen Stellen" keineswegs aus-, sondern vielmehr einschließt.

Es bedarf keiner näheren Ausführung, wie sehr gerade im Mathematikunterricht ein solches wiederholendes Überschauen des ganzen Stoffes durch die innere Zusammengehörigkeit des ganzen Gegenstandes schon rein sachlich geboten ist. Wohl aber müssen wir darauf hinweisen, daß nicht nur von gegenständlicher, sondern auch von psychologisch-didaktischer Seite her ein solches Bedürfnis doppelt dringend ist, wenn, wie wir es im ganzen vorausgegangenen Lehrgang bei so vielen einzelnen Gelegenheiten empfahlen, im didaktischen Interesse das bloß Gegenständliche anfangs künstlich (der Mathematiker würde sagen: gewaltsam) beiseite gesetzt wurde. Wenn z. B. SIMON[1])

gegenwärtige jämmerliche Schauprüfung zu Ende des Mittelschulkurses, die den Namen Maturitätsprüfung ja doch nur zum Zweck der Bemäntelung ihrer inneren Hohlheit führt. – (Vorstehendes ist geschrieben, bevor an die vielbesprochene Reform, die diese Maturitätsprüfung in Österreich 1908 erfahren hat, auch nur gedacht wurde. Da die bei der bisher einzigen Prüfung gesammelten Erfahrungen – und manche grundsätzliche Erwägung, auf die ich bei anderer Gelegenheit einzugehen gedenke – nur zu leicht eine neuerliche Reform nötig machen könnten, mag Obiges als eine Erinnerung an jüngst – und noch keineswegs überall – vergangene Zeiten bis auf weiteres unverändert stehen bleiben.)

Die Meraner Vorschläge formulieren den Lehrplan der Oberprima so: „1. Kegelschnittslehre sowohl in analytischer als in synthetischer Behandlung, mit Anwendung auf die Elemente der Astronomie. 2. Wiederholungen aus dem Gesamtergebnis des mathematischen Schulunterrichtes, womöglich an der Hand größerer Aufgaben, die rechnerisch und zeichnerisch durchgeführt werden müssen. 3. Rückblicke unter Heranziehung geschichtlicher und philosophischer Gesichtspunkte."

Dazu in den Erläuterungen: „In der Reifeprüfung wird sich die mathematische Ausbildung des Schülers und ihr Einfluß auf seine Ausbildung überhaupt am klarsten erkennen lassen, wenn von der jetzigen Forderung der Lösung von vier speziellen Aufgaben abgegangen wird und statt dessen einerseits eine zusammenhängende Darstellung eines allgemeinen Themas, andererseits die vollständige (rechnerische und zeichnerische) Behandlung einer Aufgabe verlangt wird. Ebenso dürfte bei der mündlichen Prüfung mehr Gewicht auf das Verständnis als auf das Auswendigwissen vieler spezieller Formeln zu legen sein."

Da man annehmen darf, daß die hier unter 1. verlangte Kegelschnittslehre (die in Österreich schon im vorletzten Jahrgang absolviert sein muß) von den verfügbaren vier Stunden etwa die Hälfte in Anspruch nehmen wird, so bleibt für die unter 2. und 3. genannten Wiederholungen und Rückblicke auch das österreichische Ausmaß von zwei Stunden.

1) SIMON, Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis, 1906, S. 3.

jüngst geradezu schreibt: „Die Reform des Unterrichtes liegt in der starken Betonung des philosophischen und besonders des psychologischen Elementes", so versteht es sich von selbst, daß man ein solches Ziel erst mit Schülern zu erreichen hoffen darf, denen „philosophisches[1]) und besonders psychologisches" Denken wenigstens nicht mehr ganz fremd ist; das aber ist günstigenfalls in der obersten Klasse zu erreichen, nachdem in der vorletzten Klasse eine propädeutische Logik betrieben wurde und in der letzten durch die propädeutische Psychologie einiges Können in der Beachtung und Verarbeitung psychischer Tatsachen gepflegt wird. Inwieweit in solchen Staaten, wo ein regelmäßiger Unterricht der philosophischen Propädeutik einstweilen noch ein frommer Wunsch ist, der Lehrer der Mathematik selber und *ad hoc* für das Beibringen der nötigen logischen und psychologischen Voraussetzungen sorgen kann und muß, bleibe der zusammenhängenden Erwägung im IX. Bande dieser didaktischen Handbücher vorbehalten. Zwar ist es – um das Ergebnis dieser Erwägung hier für unseren nächsten Zweck vorwegzunehmen – sicherlich der vollkommenste Zustand, wenn neben „philosophischen Elementen" in allen Unterrichtsfächern auch eine philosophische Propädeutik als eigenes zusammenfassendes Fach[2]) an unseren höheren Schulen Platz findet. Immerhin aber nehmen die innerhalb der Mathematik und die unmittelbar ganz aus diesem Gegenstand selbst erwachsenden Anregungen für wenigstens eine philosophische Disziplin, die Logik, von jeher einen unbestrittenen Haupt- und Ehrenplatz in unserem Bildungswesen ein. Indem wir die Rechtsgründe dieses alt-

1) Wieder erzähle ich zu diesem verpönten Wort ein eigenes Erlebnis. Im Jahre 1890 sagte mir der damalige Landesschulinspektor nach einer Mathematikstunde der obersten Klasse: „Ich habe beobachtet, daß Sie öfters philosophische Bemerkungen in den Mathematikunterricht einflechten; verstehen diese alle?" Worauf ich nichts antworten konnte als: „Nein, es verstehen sie nicht alle; sondern ich habe beobachtet, daß der Prozentsatz solcher, die für das Philosophische überhaupt Verständnis haben, unter unseren Gymnasiasten nicht größer, aber auch nicht kleiner ist als nachmals unter den sogenannten gebildeten Erwachsenen." – Übrigens war jenes „Philosophische" damals nichts anderes gewesen als die auf S. 285 erwähnte Möglichkeit, die Funktion Sinus nicht wie gewöhnlich aus dem rechtwinkligen Dreieck, also wesentlich geometrisch, sondern aus der Funktionsgleichung, also wesentlich arithmetisch, zu definieren. – Vgl. auch S. 422, Anm.

2) Diese These habe ich auf der Jahreshauptversammlung des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturw., Jena, Pfingsten 1905, näher begründet (vgl. den Bericht in Pietzkers „Unterrichtsblättern").

hergebrachten Ansehens der Logik für die Mathematik und einige in neuer und neuester Zeit auch gegen dieses Ansehen laut gewordene Meinungen etwas allgemeiner gegeneinander abzuwägen auf den III. Teil (S. 465 ff.) versparen, mag hier ein ganz konkretes Beispiel veranschaulichen, was an Ausbeute für eine vertiefte logische (und gegenstandstheoretische) Auffassung des mathematischen Denkens gerade erst dieser obersten Stufe angemessen sein mag. Wir geben das Beispiel noch einmal in Form einer

Lehrprobe: Der Pythagoreische Satz im wiederholenden Abschluß der Oberstufe.

Nachdem wir diesem Satz schon die Lehrproben für die Unterstufe (S. 168 ff.) und für die Mittelstufe (S. 198 ff.) gewidmet haben und auch innerhalb des Trigonometrieunterrichtes (S. 291 ff.) noch einmal auf ihn zurückgekommen waren, bleibt für das Wiederholungsjahr in materieller Hinsicht füglich nichts Neues mehr zu sagen. Dennoch liegen formale oder, wie wir deutlicher sagen können, logische Fragen immer noch nahe genug, um den Schülern den guten alten Satz noch einmal in neuem Lichte zu zeigen.

Den natürlichen Ausgangspunkt bietet der Umstand, daß wir von Anfang an geometrische und arithmetische Beweise für den Satz gegeben haben. War etwa das nur Luxus oder Sport? Wir wissen ja aus der Logik, daß von mehreren Beweisen für dieselbe Wahrheit keineswegs jeder gleich „natürlich“ ist. Teils ist es das subjektive Moment der zu erwerbenden Evidenz, teils das objektive, daß wir durch den natürlicheren Beweis eben „tiefer in die Natur der zu beweisenden Beziehung“ eindringen. Und deshalb liegt nicht nur die Frage offen, ob die geometrischen oder die arithmetischen Beweise für den Pythagoreischen Satz die natürlicheren sind, sondern ob die Natur dieses Satzes selbst eine mehr geometrische oder arithmetische ist? Unsererseits wagen wir uns zur letzteren Auffassung zu bekennen — keineswegs als ob wir etwa für eine „Arithmetisierung der Geometrie“ überhaupt schwärmten. Vielleicht aber spricht die folgende Erwägung ganz *ad hoc* des Pythagoreischen Satzes von selbst dafür, auf die „Quadrate“ im Sinne gleichseitig-rechtwinkliger Vierecke bei diesem Satz viel weniger Gewicht zu legen als auf die „Quadrate“ im Sinne der zweiten Potenzen. Damit der Lehrer dem Schüler diese Ansicht nicht etwa suggeriere (was es auf dieser Stufe überhaupt nicht mehr geben sollte), sondern damit sich dem Schüler die Einsicht des „daß“ und „warum“ einer solchen Bevorzugung überhaupt aufdränge, mag ihn der Lehrer mit der Frage überraschen: Wie lautet der Pythagoreische Lehrsatz? Wundert sich der Abiturient über die Kleinkinderfrage, so bitte der Lehrer noch einmal um die recht exakte, d. h. also auch nicht mit Nebensächlichem behaftete, nicht zu eng gefaßte Formulierung. Und beginnt der Schüler mit: „Das Quadrat der Hypotenuse ist gleich der Summe usw.“, so unterbricht ihn der Lehrer mit dem Vorschlage folgender erweiterter Formulierung: Man wird ja wohl auch sagen dürfen: Irgendeine Figur über der Hypotenuse ist gleich der Summe zweier ähnlicher, ähnlich liegender Figuren über den beiden Katheten“. Der Schüler gibt das ohne weiteres zu; denn er weiß ja, daß, wenn er die Beziehungen zwischen den Maßzahlen der Quadrate im geometrischen Sinn durch die arithmetische Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ dargestellt hatte, es nur des Durchmultiplizierens z. B. mit $\frac{\sqrt{3}}{4}$ bedarf, um die gleichseitigen Dreiecke über den drei Seiten des rechtwinkligen Dreieckes zu erhalten; oder ebenso des Multiplizierens mit $\frac{\pi}{4}$, um die Flächen der Kreise zu haben, deren Durchmesser die Dreieckseiten sind usf. — Wie ist nun der Satz in dieser verallgemeinerten Form zu beweisen? Die Antwort liegt in der vom Schüler unzähligemal benutzten Figur mit der einzigen Hilfslinie, der vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse gezogenen Höhe. Hiermit aber ist auch schon der Beweis fertig: denn die zwei kleineren Dreiecke sind ja ähnlich dem Ganzen, und ihre Summe ist ihm flächengleich[1]).

Die verblüffende Einfachheit dieses Beweises gibt nach verschiedenen Richtungen hin zu denken. Vor allem kann die Beziehung, wenn sie sich ohne weiteres von den Quadraten im geometrischen Sinn auf alle beliebigen Flächenformen ausdehnen[2]) läßt, unmöglich ausschließlich oder auch nur sehr enge an der Quadratgestalt als solcher haften. Vielmehr ist es die eine arithmetische Eigenschaft, die ihrerseits wieder mit der Quadratgestalt, aber doch nur insofern zusammenhängt, als eben u. a. auch die Quadratflächen mit der zweiten Potenz wachsen. Es liegt aber nur in der Wahl des Quadrates als Flächeneinheit, daß

1) Ich habe diesen Beweis aus den ungedruckten Schriften BERNHARD BOLZANOS. Als 1903 ROBERT V. STERNECK (damals noch in Wien und Schriftführer der Philosophischen Gesellschaft) das von dieser wieder aufgefundene Konvolut ungedruckter Manuskripte BOLZANOS († 1848) aufschnürte, war das erste, worauf sein Blick fiel, jener Beweis. Ich habe ihn seither vielen Mathematikern mitgeteilt und von allen gehört, er sei ihnen neu, und von den meisten, daß sie ihn für den das Wesen der Beziehung am unverhülltesten treffenden halten. Nur wenige beanstandeten den Mangel an Stileinheit. Ob ein solcher vorliegt, möchte ich hiermit der Diskussion unterbreiten.

2) Eines der Mitglieder meines Prager pädagogischen Seminares lieferte u. a. für die gleichseitigen Dreiecke über Katheten und Hypotenusen einen direkten, rein geometrischen Beweis analog dem Euklidischen. Dieser vielgepriesene und vielgelästerte (vgl. S. 172, Anm.) Euklidische Beweis mit seinen Zerlegungen der Quadrate als solcher hätte also dann doch nicht das tiefste Wesen der pythagoreischen Wahrheit getroffen.

die Formel für das Quadrat die denkbar einfachste $f = a^2$ ist: denn hätten wir als Flächeneinheit das gleichseitige Dreieck mit der Seite 1 cm gewählt, so käme diese einfachste Formel eben dem gleichseitigen Dreieck mit der Seite a cm zu. Also nur das Wachsen der Flächen nach der zweiten Potenz und die Summe solcher zweiten Potenzen ist und bleibt das Wesentliche. Und so ist es auch diese funktionale Beziehung, die in dem $a^2 + b^2 = c^2$ (diese Gleichung nicht symbolisch-geometrisch, sondern wirklich direkt arithmetisch gelesen), die das „Wesen", die „Natur" des Pythagoreischen Satzes ausmacht: nicht die ersten, nicht die dritten oder sonst welche, sondern gerade nur die zweiten Potenzen der die Katheten in einer beliebigen Maßeinheit ausdrückenden Maßzahlen muß man addieren, um die ebenso hohe Potenz der Maßzahl der Hypotenuse zu erhalten.

Aus diesem Gesichtspunkte ergeben sich dann noch neue Ausblicke auf die Analogien zwischen der Diagonale des Rechteckes $d^2 = a^2 + b^2$ und der Diagonale des Quaders $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$; und dann auch weitere Ausblicke in die arithmetisch durch $z^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2$ oder $Z^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + \cdots x_n{}^2$ zu definierenden, nicht mehr zu veranschaulichenden 4- und n-dimensionalen Räume, besser Mannigfaltigkeiten.

Es braucht dem in diesen Dingen heimischen Lehrer nicht gesagt zu werden, wie sich's von solchen Gesichtspunkten aus weiter philosophiert; höchstens mag der Rat des Maßhaltens gerade unter so erfreulichen Voraussetzungen wieder nicht ganz überflüssig sein. —

Um es auch an einer Bemerkung, wenigstens an einem Beispiel nicht ganz fehlen zu lassen, wie sich die Wiederholung des arithmetischen Lehrstoffes zu einer dieser Oberstufe würdigen auch bei Verzicht auf algebraische Analysis u. dgl. gestaltet, teile ich aus meiner eigenen Praxis mit, daß wir die Wiederholung begannen mit folgenden Fragen (je eine auf „Zettel" 1, 2., 3.... nach der unten beschriebenen äußerlichen Einrichtung):

1. Überblick über die sieben **Operationen** der Arithmetik.

III.	$\sqrt[a]{c} = b$	$b^a = c$	${}^b\log c = a$
II.	$c : a = b$ (Div. als Mess.)	$a \cdot b = c$	(Div. als Teilung) $c : b = a$
I.	$c - a = b$	$a + b = c$	$c - b = a$

2. Übersicht über die Gattungen und Arten von **Zahlen**.

Natürliche Zahlen oder Anzahlen (im Gegensatze zu den späteren negativen und gebrochenen auch: positive ganze Zahlen). Hervorgehen aller übrigen aus den inversen Operationen (im einzelnen auszuführen; nötigenfalls Warnungen vor Konfusionen der Terminologie, z. B. zwischen rationalen und reellen Zahlen u. dgl.).

3. Auflösung der **Gleichungen** $z=1$, $z^2=1$, $z^3=1$, $z^4=1$, $z^5=1$, $z^6=1\ldots$

Bis zu welchem Grad reichen hier die Mittel des bisherigen Unterrichts aus? [Reziproke Gleichungen z. B. bei

$$z^5-1=(z^4+z^3+z^2+z+1)(z-1).]$$

Wie ändert sich das Ergebnis, wenn statt $+1$ gesetzt wird -1, $+a$, $-a$?

4. Die Ergebnisse der vorigen Aufgaben sind graphisch darzustellen unter der Annahme, daß die rein imaginären Zahlen „laterale“ seien.

Da auf früheren Stufen ein Beweis, daß und warum die komplexe Zahl $z=x+yi$ durch den Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y darzustellen ist, schwerlich auf volles Verständnis, geschweige auf die nötige Kritik[1]) rechnen könnte, so mag jetzt gerade die den Anfänger überraschende Beziehung zwischen den Einheitswurzeln und den regelmäßigen Polygonen einen ersten und hinreichend starken Eindruck von der Zweckmäßigkeit jener geometrischen Deutung des Imaginären und Komplexen hervorbringen.

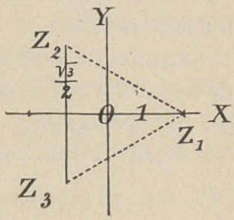


Fig. 135.

Nämlich etwa so: Für $x^3=1$ waren die Wurzeln $z_1=1$, $z_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Konstruieren wir diese drei Punkte, so zeigt sich das regelmäßige Dreieck (Fig. 135). Ebenso bei $z^4=1$ das regelmäßige Viereck [gemäß

$$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=0,$$

also $x_{1,3}=\pm1$, $x_{2,4}=\pm i$]. Dann bei $z^6=1$ durch die Zerfällung in $(z^3+1)(z^3-1)=0$ und daraus $z^3=-1$ und $z^3=1$ usw. die Verschränkung zweier regelmäßiger Dreiecke zu einem regelmäßigen Sechseck (Fig. 136). — Etwas umständlicher gestaltet sich die Auflösung von $x^4=-1$; aber aus der Präsumption[2]), daß die Wurzeln ebenfalls die Form $\xi+\eta i$ haben werden,

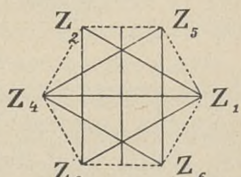


Fig. 136.

1) Über die simpelste Begründung, wonach die imaginäre Einheit die mittlere Proportionale aus der positiven und der negativen sei, wird heute gern gelächelt oder — geschimpft. Es war aber dieser Zugang zur räumlichen Deutung des Imaginären der historisch erste, und so wird er gerade für den ersten Unterricht auch heute noch nicht zu verachten sein. – MACH (Erkenntnis und Irrtum, S. 326) sagt: „WALLIS (*Algebra*, 1673, Kap. 66–69) ist zuerst durch geometrische Anwendungen der Algebra auf den Gedanken geleitet worden, $\sqrt{-1}$ als die mittlere geometrische Proportionale zwischen -1 und $+1$ aufzufassen $(+1:i=i:-1$, woraus $i=\sqrt{-1})$. Diese Auffassung tritt nun mehr oder weniger klar noch einigemal auf, bis ARGAND (*Essai sur la manière de représenter les quantités imaginaires*, Paris 1806) sie mit voller Allgemeinheit und Deutlichkeit darlegt.“ – Vgl. S. 250, 251 Anm.

2) Ihre Berechtigung ist allerdings um keinen geringeren Preis zu erweisen,

ergeben sich aus $\xi^4 + 4\xi^3\eta i - 6\xi^2\eta^2 - 4\xi\eta^3 i + \eta^4 = -1$ durch die Zerfällung in $\xi^4 - \xi^2\eta^2 + \eta^4 = -1$ und $\xi^3\eta - \xi\eta^3 = 0$ hier die vier Eckpunkte des Quadrates mit den den Achsen parallelen Seiten. Daher dann für $x^8 = 1$ wieder durch die Verschränkung der zwei Quadrate das regelmäßige Achteck.

Das sind immerhin schon einige beachtenswerte Induktionsfälle, aus denen sich dann leicht die Lösung von $x^n = 1$ durch die den Eckpunkten des regelmäßigen n-Ecks entsprechenden Zahlen vermuten läßt, und weiterhin auch der MOIVREsche Satz.[1]) – Natürlich wird ein Lehrgang, der ohnedies auf diesen Satz eingegangen ist, jenes induktiven Weges nicht bedürfen; vielleicht aber kann doch auch er ihn sich irgendwie, d. h. sei es von Anfang, sei es auch nachträglich, didaktisch nutzbar machen. –

Ich pflegte hier die Erinnerung an ein Beispiel aufzubewahren, mittels dessen PETZVAL[2]), einer meiner Lehrer an der Universität Wien, uns die laterale Natur der imaginären Zahlen in seiner jovialen – diesmal feucht-fröhlichen – Weise mundgerecht zu machen liebte:

5. „Ich traf meinen Freund häufig in der Nähe des Bahnhofs B und fragte ihn, ob er hier wohne. Er antwortete: Gehe ich von meinem Haus H 1 km in der Richtung der Bahn vorwärts, so komme ich zu einem Wirtshaus mit kühlen Bieren W_1; gehe ich von meinem Haus H 1 km entgegengesetzt, so komme ich zum Wirtshaus W_2. Das doppelte Quadrat des Abstandes meines Hauses vom Bahnhof B ist gleich dem Rechteck aus den Abständen der beiden Wirtshäuser von B."

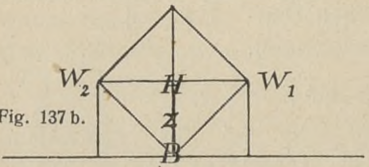


Fig. 137 b.

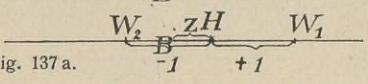


Fig. 137 a.

als durch den Hinweis auf die GAUSSschen Beweise, daß jede algebraische Gleichung eine Wurzel, u. zw. speziell von der Form $a + bi$ habe. Keiner dieser Beweise kann im Mittelschulunterrichte wirklich durchgeführt werden (vgl. S. 356). Aber immerhin wäre es wenigstens jetzt, beim Abschluß des Unterrichts, an der Zeit, daran zu erinnern, daß wir eigentlich schon bei den quadratischen Gleichungen verpflichtet gewesen wären, uns zu fragen, ob denn jede wenigstens eine Wurzel habe. Erst wenn dieses bejaht ist, würden die überall behandelten Sätze und Methoden des Dividierens durch den Wurzelfaktor u. dgl. m. nicht mehr zum Teil in der Luft hängen.

1) Auch dieser läßt sich induktiv vorbereiten, wenn nicht sogleich allgemein $\cos\varphi + i\sin\varphi$ geschrieben wird, sondern wenn wir zuerst für die Koordinaten der Ecken des regelmäßigen Dreieckes statt z. B. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ schreiben lassen $\cos 120^0 + i\sin 120^0$ usf.

2) Berühmt als der erste Berechner lichtstarker photographischer Objektive.

Der Ansatz $2z^2 = (z+1)(z-1)$ liefert $z = \sqrt{-1}$. „Ich rufe erstaunt: Du wohnst ja gar nicht, denn $\sqrt{-1}$ ist ja imaginär!“ Er antwortete: Ich wohne nur nicht an der Bahn (Fig. 137a), sondern 1 km seitwärts von ihr (Fig. 137b).“ –

Es bedarf auch keiner besonderen Ratschläge mehr, wie weit nun der Lehrer – jedenfalls nur an der Hand konkreter Beispiele und sonstiger bestimmter Anlässe – sich einlassen soll auf jene Grenzfragen der Arithmetik und Philosophie, die wir als Bemühung um letzte Grundlagen der Arithmetik fast erst in unseren Tagen und jedenfalls viel später als die analogen Bemühungen um die Grundlagen der Geometrie haben aktuell werden sehen (§ 26). Bedürfte es noch einer Mahnung zur Vorsicht in diesen Dingen, so läge ja ohnedies die stärkste und leidigste in dem noch so gar nicht ausgetragenen Kampfe auch schon um den richtigsten Begriff der Zahl überhaupt; ein paar Worte darüber noch im III. Teil (S. 432 ff.).

Auch der Ruf nach nichteuklidischer Geometrie auf der obersten Stufe (wie er z. B. auf der Hauptversammlung des Vereines zur Förderung des Unterrichtes der Mathematik und Naturwissenschaften, Jena 1905, erscholl), soll keineswegs ungehört verhallen, – wäre es auch nur, damit noch einmal der Charakter einer Annahme (S. 466, – nicht einer bloßen „Definition“), der in der Natur des Euklidischen wie jedes anderen „Axioms“ liegt, dem Schüler klar zum Bewußtsein komme. Wagt es der Lehrer, auch über den positiven Ausbau der verschiedenen nichteuklidischen Geometrien den Schülern kleinere oder größere Mitteilungen zu machen (vgl. S. 193–195), so tut er es bis heute und wohl noch auf einige Zeit hinaus ohnedies auf eigene Rechnung und Gefahr. Doch wird der Rat berechtigt sein, daß man diesen problematischen Dingen (neben den S. 256 empfohlenen historischen) füglich erst dann Zeit opfern sollte, wenn die in unserem Schulwesen seit langer Zeit eingebürgerten – und wir dürfen von dem im nächsten Abschnitte (§§ 43–46) ausführlich begründeten Standpunkt wohl auch hinzufügen: einige noch nicht allgemein eingebürgerte Elemente der „höheren Rechnungen an höheren Schulen“ völlig zu ihrem Rechte gekommen sind.

Indes pflegen es ganz andere, viel primitivere Sorgen zu sein, die den Lehrer während des Maturitätsprüfungsjahrs auch im Mathematikunterrichte in Atem halten; und deshalb mögen, wie die Dinge tatsächlich leider nun einmal liegen, willkommener als speziellere Ratschläge für die Verwirklichung jener höchsten und schönsten Gesichtspunkte die folgenden ganz äußerlichen Kunstgriffe zur Aufteilung der Unterrichts- und Übungszeit behufs bestmöglicher Erreichung der Prüfungszwecke ohne allzuentwürdigende Hintansetzung der eigentlichen mathematischen Bildungsziele dem Praktiker dienen.

Der Lehrer teilt sogleich zu Beginn des Jahres den ganzen zu wiederholenden Stoff in größere Abschnitte und stellt die Wochen und Monate fest[1]), bis zu denen die Schüler für sich diese einzelnen Kapitel so weit wiederholt haben müssen, als sie es eben schon ohne das Eingreifen des Lehrers imstande sind. Ferner hat es sich als handlich bewährt, die einzelnen Aufgaben auf gesonderte Blätter (auf „Zettel“, nicht in Hefte) schreiben zu lassen, damit, wenn das Durchrechnen aller in den Unterrichtsstunden nicht möglich gewesen war, bei späteren Wiederholungen bequem auf die noch ausständigen zurückgegriffen werden kann; auch damit dieselbe Aufgabe immer womöglich nach mehreren, recht mannigfachen Methoden gerechnet werden kann, die sich nach und nach auf demselben Zettel übersichtlich beisammen finden. — Für die mündliche Prüfung mag in Aussicht gestellt werden, daß eine dieser durchgerechneten Aufgaben allenfalls als Notanker gegeben wird. — Doch genug solcher Maßregeln „aus der Praxis — für die Praxis“ — nämlich der nur allzu handgreiflichen einer Prüfungsvorbereitung. Freilich beherrscht diese zu so ganz überwiegendem Maße das Sinnen und Denken (oder Nichtdenken) der Abiturienten, daß gerade die hochsinnigsten Vorschläge für eine würdige Gestaltung der Prüfung am stärksten Gefahr laufen, an deren nun mehr als hundertjähriger Tradition zu scheitern. So lassen die Schlußworte der hierauf bezüglichen Meraner Vorschläge: „Es dürfte bei der mündlichen Prüfung mehr Gewicht

---

1) Ich pflegte das (in Österreich vom 15. Sept. bis 15. Juli dauernde) Schuljahr für diese ergänzenden Wiederholungen so einzuteilen:

20. Sept. bis 1. Nov.: Gleichungen aller Arten;
1. Nov. bis 1. Dez.: Goniometrie und Trigonometrie;
1. Dez. bis Weihnachten: Reihen;
Neujahr bis 15. Febr. (Schluß des Wintersemesters): Stereometrie;
15. Febr. bis 1. April: Analytische Geometrie;
1. April bis Mitte Mai (schriftl. Maturitätsprüfung): Gesamtwiederholung.

Von der schriftlichen bis zur mündlichen Prüfung (Anfangs Juli) Fortsetzung der Gesamtwiederholung, bei der nicht mehr nur ich die Schüler, sondern vielmehr die Schüler mich so oft als nötig und möglich fragten.

auf das Verständnis als auf das Auswendigwissen vieler spezieller Formeln (!) zu legen sein", tief blicken – unter die Oberfläche!

Sollte aber auch der mündlichen Prüfung aus jenen Gründen überhaupt nicht zu helfen sein, so sind um so beachtenswerter die positiven Vorschläge für die schriftliche Prüfung[1]. Hier sind es bekanntlich die immer noch nur zu häufigen albernen Aufgaben von den Kegeln mit angesetzten Halbkugeln (vgl. oben, S. 212), den Zinseszinsrechnungen nach fiktiven Verhältnissen, den abstrakten Gleichungen, deren richtige Lösung nur einen Schluß erlaubt, an wie vielen ebenso nichtssagenden Übungsbeispielen dieser oder jener spezielle Kunstgriff eingedrillt worden sein mag – kurz, es sind die zusammenhanglosen formalistischen Aufgaben, durch die ebenfalls eher alles andere denn die „geistige Reife" im allgemeinen, „eine Vertiefung lebendiger Auffassung des eigentlichen Gedankeninhaltes der Mathematik" im besonderen ausgewiesen werden kann. Vieles kann hier schon der gute Geschmack des einzelnen Lehrers bessern (aber leider geben die beliebten „Sammlungen von Maturitätsprüfungsaufgaben", die auf Grund der Schulprogramme zusammengestellt zu werden pflegen, nur allzuviele Beispiele auch für schlechten Geschmack – sei es der Lehrer, sei es der Veranstalter solcher Sammlungen). – Im besonderen seien als gründliche Abhilfe solcher Mängel empfohlen alle Arten von Aufgaben, in denen Beziehungen zu anderen Unterrichtsfächern, also besonders zur Physik angestrebt sind. Gegen solche Aufgaben hört man manchesmal einwenden, daß, wenn dem Schüler eine solche mißlinge, man nicht wisse, ob man ihm das Nichtgenügend in Mathematik oder in Physik anzurechnen habe. Als ob die räumliche Ausfüllung der einzelnen Zensurfelder des Prüfungszeugnisses wirklich das Endziel alles Unterrichts wäre! Doch würde das Verfechten einer minder engherzigen Auffassung vom Zwecke alles Prüfens und Notenschreibens sogleich wieder den ganzen Komplex der keineswegs nur didaktischen, sondern nur zu sehr auch administrativen und politischen Zeit- und Streitfragen, die man diesem leidigen Gegenstande schon gewidmet hat, aufzurollen zwingen. Es bleibt

1) Gerade diese, die schriftliche Prüfung aus Mathematik, ist bei der österreichischen „Erleichterung" der Maturitätsprüfung ganz weggefallen! – Bei der verbliebenen mündlichen Prüfung wird es wohl schwerlich zu der von den Meraner Vorschlägen empfohlenen „zusammenhängenden Darstellung eines allgemeinen Themas" kommen.

also letztlich kein anderer Rat als der, daß der Lehrer seinen guten mathematischen Geschmack bei der Wahl der schriftlichen (und mündlichen) Prüfungsaufgaben mit jenen außermathematischen und außerpädagogischen Mächten so gut in Einklang setzen mag als er eben kann und – darf.

Anhang zur Didaktik der obersten zwei Jahrgänge:

§ 42. Höhere Rechnungen[1]) an höheren Schulen.

Wiewohl die seit wenigen Jahren viel diskutierte „Frage der Infinitesimalrechnung an Realschulen und Gymnasien" für uns längst[2]) keine „Frage" mehr ist, indem die eigene Lehrtätigkeit

1) Der Ausdruck „Infinitesimalrechnung" ist sonderbar schwerfällig. Gleichbedeutend und etwas besser klingend wäre „Unendlichkeitsrechnung" (vgl. den Titel bei SCHRAUTZER, s. u.); doch hat dieses Wort wenig Aussicht auf Einführung, da nicht wenige Mathematiker gegenwärtig das Wort „unendlich" selbst ausgeschaltet wissen möchten, was dann freilich auch das „Infinitesimale" treffen würde. Wir werden also im folgenden das Wort „Höhere Rechnungen" für die auszuwählenden Begriffe und Sätze aus der Differential- und Integralrechnung (nicht auch schon für Reihenlehre, analytische Geometrie usw.) gebrauchen. – Vgl. über die Abgrenzung „niederer" und „höherer Mathematik" § 2.

2) Ich habe meine Stellung zu dieser „Frage" schon 1891 veröffentlicht in der Zeitschrift „Österreichische Mittelschule", V. Jahrg., S. 130–132 (in den Zusätzen zu den „Bemerkungen über Fragen des höheren Unterrichts" usw. [vgl. S. 21 Anm. 1]. In Sonderausgabe Wien, Hölder, 1891):

„Damit meine Behauptung, »daß wir in den österreichischen Gymnasien sogar schon heute bei verschiedenen Gelegenheiten Differentialrechnung treiben«, nicht von Fernerstehenden mißdeutet werde, nenne ich hier als die beiden wichtigsten solcher „Gelegenheiten" das Rechnen mit Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bei ungleichförmigen Bewegungen und das Berechnen der Tangenten an Kurven in der analytischen Geometrie. Ich unterlasse es nicht, meinen Schülern mitzuteilen, daß das erstere Problem für NEWTON, das letztere fast gleichzeitig für LEIBNIZ den Anstoß zur Erfindung der Differentialrechnung gegeben habe, welche denn auch von NEWTON zuerst als *„methodus fluxionum"*, von LEIBNIZ als „Methode der Tangenten" benutzt und bekannt gemacht worden ist. – Wenn ich ferner den Wunsch durchblicken ließ, es möchte der gemeinsame Grundgedanke dieser gelegentlichen Anwendungen differentialer Vorstellungen klarer herausgearbeitet werden, als es bisher üblich ist, so richtet sich diese Bemerkung zunächst gegen die Weise, wie unsere Geometrielehrbücher die Aufgabe von den Tangenten aufstellen und lösen. Es wird nämlich z. B. bei der Ellipse sogleich von der Gleichung

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

ausgegangen, und von hier durch die bekannte Transformation zu

$$y - y_1 = -\frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)}(x - x_1)$$

eines vollen Vierteljahrhunderts für die wissenschaftliche Berechtigung und die didaktische Durchführbarkeit solcher Forderungen spricht, so bleibt es immerhin noch eine Frage, wie dem Widerstand einzelner gegen die allgemeine Anerkennung jener Forderungen aufs wirksamste zu begegnen sei. Der negativen Methode,

---

und endlich durch die Substitution $x_2 = x_1$ zu

$$y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1)$$

fortgeschritten. – Es ist nun nur eine unscheinbare Modifikation des Vorgehens, welche mir ausreichend, aber auch notwendig scheint, um hier das Wesentliche – die Ermittlung des Koeffizienten

$$A = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

als des „Richtungskoeffizienten" – aus dem relativ Unwesentlichen – seiner speziellen Anwendung zur Aufstellung der Tangentengleichung – herauszuheben und dem Schüler als den eigentlichen springenden Punkt der ganzen Methode nahezubringen. Zu diesem Behufe formuliere ich – nachdem schon in der analytischen Geometrie des Punktes die Aufgabe: „Zu zwei Punkten $x_1 y_1, x_2 y_2$ die Richtung der durch sie bestimmten Geraden zu finden", durch die Formel

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

gelöst worden war, und nachdem wieder in der Geometrie der Geraden in der Gleichung

$$y = Ax + b$$

das A als „Richtungskoeffizient" erkannt und erörtert worden ist – die analoge Aufgabe für krumme (und gerade) Linien überhaupt: „Zu einer Linie, deren Gleichung gegeben ist, den Richtungskoeffizienten $\operatorname{tg} \sigma$ der Sehne (Sekante) durch einen Punkt $x\ y$ und einen Nachbarpunkt $x'y'$ – und sodann den Richtungskoeffizienten A im Punkte xy selbst zu ermitteln." – Die Lösung dieser Aufgabe erfolgt in bekannter Weise, wie sie sich in jedem Lehrbuche der Differentialrechnung zu Beginn der geometrischen Anwendungen findet, – nur daß wir statt der Symbole $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ und $\frac{dy}{dx}$ die Symbole verwenden

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{y' - y}{x' - x}$$

und

$$A = \operatorname{tg} \tau = \frac{y' - y}{x' - x} \quad \text{für } x' = x.$$

Nun werten wir die A aus für die Gleichungen $y = x^2$, $y = ax^2$, $y = \sin x$, $y = a \sin \alpha x$, $y = \cos x$, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, sodann ohne Auflösung der Gleichung nach y (durch die bekannte Faktorenzerlegung) für $x^2 + y^2 = a^2$, $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$, überall mit Prüfung an numerischen Beispielen. Und erst, nachdem so die prinzipielle Bedeutung des A ganz klar und geläufig geworden ist, wenden wir die gefundenen A zur Lösung der verhältnismäßig untergeordneten Aufgaben an, die Gleichungen der Tangente und Normale und einiger der Längen von T, N, St, Sn für den Kreis, die Ellipse usw. zu finden. – Bei solcher Hervorhebung der Bedeutung der Größe A werden die Schüler von die Bedenken im einzelnen wiederzugeben und zum so und sovielten Male zu entkräften, ist füglich vorzuziehen die positive,

---

selbst inne, daß hier wesentlich derselbe Gedanke verwertet werde wie zu Beginn der Mechanik, wenn

aus dem Begriffe der mittleren Geschwindigkeit $v_m = \frac{s' - s}{t' - t}$

der der Geschwindigkeit im Zeitpunkt t: $v = \frac{s' - s}{t' - t}$ für $t' = t$

und aus dem Begriffe der mittleren Beschleunigung $w_m = \frac{v' - v}{t' - t}$

der der Beschleunigung im Zeitpunkt t: $w = \frac{v' - v}{t' - t}$ für $t' = t$

gewonnen worden war. Auch im einzelnen gestaltet sich die Rechnung bei Anwendung dieser Gleichungen z. B. auf die Fallformel $s = at^2$, nämlich

$$v_m = \frac{at'^2 - at^2}{t' - t} = a(t' + t), \qquad v = 2at;$$

$$w_m = \frac{2at' - 2at}{t' - t} = 2a = g, \qquad w = 2a$$

also auch $w = g$ (woraus $v = gt$, $s = \frac{g}{2} t^2$), ganz analog den Berechnungen des A für die Parabel $y = ax^2$ und auch beim Kreis $x^2 + y^2 = a^2$ u. dgl.

Nichts anderes also meinte ich mit „einem klaren Herausarbeiten des gemeinsamen Grundgedankens der gelegentlichen Anwendung differentialer Vorstellungen“ (wozu noch einzelne Anlässe im physikalischen Unterricht, z. B. bei der Theorie des Regenbogens, kommen). Von hier bis zum Aufstellen und Einüben der Differentialquotienten aller elementaren Funktionen, wie es den Anfang eines systematischen Lehrganges der Differentialrechnung bildet, und der sich anschließenden allgemeinen arithmetischen und geometrischen Theorien, ist noch ein weiter Weg. – Ich habe übrigens, solange ich an unserer Anstalt in den drei obersten Klassen Mathematik unterrichte, jedes Jahr mehrere Schüler gefunden, die sich bei einer privaten Anleitung von meiner Seite ohne Mühe in die andere Symbolik für obige Größen

$$A = \frac{dy}{dx}; \; v = \frac{ds}{dt}, \; w = \frac{dv}{dt}$$

einarbeiteten und dann durch Privatfleiß (dem ich nur durch absichtlich möglichst knapp gehaltene Andeutungen zweckmäßige Richtung wies) ganz hübsche Fortschritte an der Hand von Stegemanns Lehrbuch machten. – Ich habe nicht unterlassen, mich in solchen Fällen bei den Eltern und Erziehern zu erkundigen, ob diese Betätigung des privaten Fleißes und freien Interesses nicht „Überbürdung“ zur Folge habe – und bin jedesmal aufs bestimmteste hierüber beruhigt worden.

Ein anderes Ausmaß von „Differentialrechnung“ für das Gymnasium würde ich weder „für jetzt“ noch für irgendwelche Zukunft „verlangen“ oder auch nur »wünschen«. –“

Soweit 1891, als „die Frage der Infinitesimalrechnung“ wohl erst noch selten aufgeworfen war. Wenn meine folgenden gegenwärtigen Vorschläge nach so vielen Jahren etwas weiter gehen, so ist und bleibt doch das Obige noch immer das Wesentliche von dem, was ich auch jetzt wünsche und empfehle.

daß wir das Was und Wie solcher höherer Rechnungen an höheren Schulen hier grundsätzlich charakterisieren und an Lehrproben veranschaulichen, deren durchgehende Auswertung für den wirklichen Schulbetrieb dann hier wie sonst dem mündlichen Unterricht und den Lehrbüchern überlassen bleibt. Nur so weit sollen uns die Geister, die verneinen, zu einem Eingehen auf ihre Befürchtungen von Überbürdung u. dgl. veranlassen, als diese Befürchtungen zugleich Anzeichen dafür sind, daß das von uns Gewollte von Anfang mißverstanden worden ist. Vielleicht bahnt es ein allseitiges Verständnis und Einverständnis am besten an, wenn wir anknüpfen an die wiederholt abgegebenen Versicherungen der Reformer, daß hinsichtlich der Einzelheiten, wieviel an Infinitesimalrechnung erlaubt oder gefordert sei, der Unterrichtspraxis weitester Spielraum[1]) gelassen werden müsse. Dies führt von selbst auf Abstufungen; und so werden wir im folgenden drei Stufen unter dem Schlagwort einer „ersten, zweiten, dritten Dosis“ Differential- und Integralrechnung für Gymnasiasten und Realschüler unterscheiden; nämlich;

Erste Dosis: Das Existenzminimum von höheren Rechnungen für Gymnasien und Realschulen.

Zweite Dosis: Das wünschenswerte Durchschnittsmaß höherer Rechnungen.

Dritte Dosis: Wahlfreie Zugaben höherer Rechnungen.

§ 43. Das Existenzminimum höherer Rechnungen an höheren Schulen.

Es wird vor allem im einzelnen zu zeigen sein, daß sich dieses Minimum völlig mit dem deckt, was man in einer nun schon jahrzehntelangen Unterrichtspraxis, mit ihren regelmäßigen Ausscheidungen von Veraltetem und Assimilierung von Neuem, als unvermeidliche Entlehnungen aus Differential- und Integralrechnung im Mathematik- und Physikunterricht der Gymnasien und Realschulen tatsächlich schon betrieben hat, nur daß man es bis vor ganz kurzem beileibe nicht mit seinem wahren Namen „Differential- und Integralrechnung“ zu nennen sich getraut hatte.

---

1) Meraner Vorschläge (S. 97 des Gesamtberichtes): „Die Kommission befürwortet in dem Lehrplane, daß der Unterricht in der Prima des Gymnasiums bis [doch wohl *inclusive*?] an die Schwelle der Infinitesimalrechnung vordringe, läßt aber hinsichtlich der Form dieses Abschlusses Raum für weitere Erprobungen und für die individuelle Betätigung der einzelnen Lehrer.“

Demnach müßten solche, die jetzt auch noch unter dieses Existenzminimum herabgehen zu sollen meinen, vor allem die Last des Beweises auf sich nehmen, daß man auch bisher schon z. B. von Geschwindigkeit bei veränderlichen Bewegungen, von Richtungskoeffizienten bei Kreis, Ellipsen, Parabel, Hyperbel usw. überhaupt nicht geredet habe oder doch nicht hätte reden sollen[1]. Solange nicht ein solcher Beweis, entgegen jener ganzen Bewährung aus der Unterrichtspraxis, erbracht ist, werden wir Folgendem den Rang einer Tatsache, u. zw. einer in sich gerechtfertigten Tatsache, lassen müssen und diese Tatsache zum festen Ausgangspunkt aller unserer weiteren Betrachtungen machen:

Bei einem Unterricht (wie er z. B. seit Jahrzehnten in der VII. Klasse der österreichischen Gymnasien erteilt wird), wo die Physik mit Mechanik noch vor dem Unterricht der analytischen Geometrie einsetzt, ist die erste[2]) nicht zu umgehende Gelegenheit, von Differentialquotienten zu sprechen, gegeben durch die beiden Begriffe der Geschwindigkeit und Beschleunigung. — Längst haben unsere Physiklehrbücher, wenn sie von diesen Dingen reden mußten, dabei aber die Kunstausdrücke und Zeichen für die Differentialquotienten nicht gebrauchen durften, sich mit halben Anleihen bei der Sprech- und Schreibweise der Differentialrechnung beholfen. — So schrieb MACH in seiner Naturlehre (1891):

§ 27. Sind die durchlaufenen Wege in aufeinanderfolgenden gleichen Zeitteilen verschieden, so heißt die Bewegung eine ungleichför-

1) Daß und mit welchem Erfolge an einzelnen Punkten wirklich eine solche Gegenreformation versucht worden ist, belege einstweilen das Beispiel von der „Abschaffung des Trägheitsmomentes" an den österreichischen Gymnasien und Realschulen seit 1900, s. unten S. 416.

2) SCHRAUTZER, „Zur Einführung der Unendlichkeitsrechnung in die Mittelschule", Programm Laibach 1907, empfiehlt nicht nur im Anschluß an meine „Naturlehre" den oben skizzierten Weg, sondern er hält sogar den Physiklehrer für den noch vor dem Mathematiklehrer Berufenen zur Einführung des Schülers in die Grundvorstellungen der „Unendlichkeitsrechnung". — Letzterer Vorschlag erklärt sich wohl vor allem daraus, daß an unseren österreichischen Realschulen sehr häufig der Unterricht der Mathematik nicht zusammen mit dem der Physik, sondern mit dem der darstellenden Geometrie in die Hand eines Lehrers gelegt ist. Dem darstellenden Geometer aber liegen dann allerdings die meisten Fragen infinitesimaler Art bei weitem ferner als dem Physiker. Es ist nur eine Frage, ob überhaupt bei der Verbindung „Mathematik — darstellende Geometrie" die Interessen des Mathematikunterrichtes als solchen ebensogut gewahrt sind wie durch die Verbindung „Mathematik—Physik" (die an den Gymnasien fast überall durchgeführt ist). Aber jedenfalls kann der Physikunterricht mit dem durch jenen Vorschlag bekundeten Vertrauen in seine Beiträge zur angewandten Mathematik als solcher zufrieden sein.

mige. Während nun für die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung sich immer dieselbe Maßzahl ergibt, ob man den in einer oder in 15 oder in $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ Sekunden zurückgelegten Weg zur Bestimmung benutzt, hat die obige Definition in dem vorliegenden Fall keinen bestimmten Sinn mehr. Die Maßzahlen fallen sehr verschieden aus, je nach der Wegstrecke, welche man in Betracht zieht, und je nach dem Zeitpunkt, von welchem man die Zählung der Zeit beginnt. Einen je kleineren Zeitteil einer beliebigen Bewegung man aber betrachtet, desto mehr nähert sich die Bewegung in demselben der Gleichförmigkeit. Ist Δs das in einem sehr kleinen Zeitteil Δt zurückgelegte Wegstück, so nennen wir $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ die Maßzahl der Geschwindigkeit in diesem Zeitteil (*oder* in *diesem* Zeit*punkt*). Die Maßzahl gibt die Wegstrecke an, welche in einer Zeiteinheit (Sekunde) zurückgelegt würde, wenn in allen folgenden (Δt gleichen) Zeitelementen derselbe Weg zurückgelegt würde wie in dem betrachteten Element Δt."

Hier ist die gewaltsame Gleichstellung „in diesem Zeitteil (*oder* in *diesem* [in welchem?] Zeit*punkt*)" nur zu sehr geeignet, dem Schüler mit einem Schlag (der nur eben sogleich auch als ein „Schlag aufs Haupt" empfunden wird) das ganze Hauptproblem der Differentialrechnung, den Grenzübergang von der Zeitstrecke zum Zeitpunkt vor das intellektuelle Gewissen zu rücken. Überdies bleibt bekanntlich der Anfänger, dem die Zeichen Δs und Δt bisher nie vor Augen getreten waren, nur zu leicht in dem Mißverständnis stecken, als seien dies Produkte. Will demnach der Lehrer dem Schüler jene Stelle zu vollem Verständnis bringen, so sieht er sich stärker und früher, als ihm lieb sein kann, genötigt, sich auf die Hauptgedanken und Bezeichnungen der Differentialrechnung halb nebenher einzulassen.

Als zweites Beispiel[1]) eines solchen Einstürmens (oder Einschmuggelns?) von Infinitesimalem auf die von keiner Seite her darauf vorbereiteten Schüler sei noch folgender Wortlaut aus dem

1) Vom Standpunkte der physikalischen (für jetzt abgesehen von der mathematischen) Didaktik ist überdies gegen beide Lehrtextproben der Vorwurf zu erheben, daß der Schüler bei Symbolen wie $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ unmöglich etwas Faßbares denken kann, wenn ihm nicht sogleich eine Anwendung auf bestimmte Wegzeitgesetze (vgl. meine Physik, § 3) vorgeführt wird; und daher ist es mehr als fraglich, ob es überhaupt didaktisch zulässig ist, den ganzen rechnerischen Apparat von $\frac{\sigma}{\tau}$, $\frac{\omega}{\tau}$ in Symbolen und Definitionen zuerst völlig abstrakt vorzuführen und dann erst im nächsten Paragraphen auch nur die gleichförmige Bewegung – ebenfalls noch abstrakt, aber doch nicht mehr so

in Österreich seit langem beinahe alleinherrschenden Physikbuche (XII. Auflage, 1900), Mechanik § 2, vorgeführt:

„Legt das Bewegliche in der Zeit t den Weg s zurück, so gelangt es in einen bestimmten Punkt; in dem folgenden Zeitteilchen τ lege es den Weg σ zurück; dann heißt $\frac{\sigma}{\tau}$ die mittlere Geschwindigkeit des Beweglichen während des dem Zeitmomente t folgenden Zeitintervalles τ. Bei unendlicher Verkleinerung von τ tritt eine unendliche Verkleinerung von σ ein, und der obige Quotient strebt einer bestimmten Grenze zu und wird kurz Geschwindigkeit des Beweglichen zur Zeit t genannt. Sie hängt von dem Gesetze ab, nach welchem der Weg sich mit der Zeit ändert. Ist an allen Stellen der Bahn die Geschwindigkeit dieselbe, so wird die Bewegung gleichförmig, im entgegengesetzten Falle ungleichförmig genannt. Bezeichnet man im letzteren Falle die in einem Bahnpunkte zur Zeit t erlangte Geschwindigkeit [mit ?] v, in einem ferneren zur Zeit $t + \tau$ erreichten Bahnpunkte [mit ?] $v + \omega$, so kann man den Quotienten $\frac{\omega}{\tau}$ mittlere Beschleunigung (Acceleration), bzw. mittlere Verzögerung (Retardation) während der Zeit t nennen. — Wird τ und ω unendlich klein, so wird der obige Quotient, der einen bestimmten Wert annimmt, Beschleunigung resp. Verzögerung zur Zeit t genannt. Je nachdem der erhaltene Quotient konstant bleibt oder mit der Zeit sich ändert, spricht man von einer gleichförmig beschleunigten resp. verzögerten, oder einer ungleichförmig beschleunigten resp. verzögerten Bewegung."

Erlaubt war es also lange schon, die Geschwindigkeit als einen Differentialquotienten zu berechnen; und nur das war nicht erlaubt, sie auch einen Differentialquotienten zu nennen und für sie das Symbol $\frac{ds}{dt}$ anzuwenden. Offenbar kann die Sache nichts Wesentliches verlieren, wenn wir uns auch weiterhin, d. h. innerhalb unserer „ersten Dosis", der Scheu vor dem Namen und dem schriftlichen Zeichen fügen. Vielleicht können wir sogar aus dieser Not eine Tugend machen und uns wirklich noch einige Zeit, ja schlimmstenfalls für immer, des bequemen Symbols enthalten: denn vielleicht kommt diese Entsagung, daß hier einmal „das

---

allgemein, durchzuführen. Ist doch sonst in aller Didaktik anerkannt, daß das Ausgehen von abstrakten Begriffen ohne vorhergehende konkrete Anschauung zu nichts, also auch nicht zu jenen Begriffen, sondern höchstens zum wenigstens „vorläufig" unverstandenen Auswendiglernen der bloßen Wörter und Zeichen führt. — Ich habe daher in meiner Physik und Naturlehre mit der Vorführung wirklicher Bewegungen an der schiefen und der wagrechten Ebene (§ 2) begonnen und obige im Texte (S. 382) angeführten Maßformeln für die Geschwindigkeit und Beschleunigung erst nachfolgen lassen (§§ 4, 5).

Wort sich nicht zur rechten Zeit einstellt“, dem Begriff des Differentialquotienten insofern zugute, als wir uns nun um so mehr an die diesem Begriffe zugrundeliegende Anschauung halten müssen.

Diese Anschauung besteht in Sachen der **Geschwindigkeit** darin, daß wir, nachdem für die gleichförmige Bewegung die Maßformel $c = \frac{S}{T}$ zu vollem physikalischen[1]) Verständnis gebracht ist, nun den Schüler Schrittchen für Schrittchen jenen erstaunlich sinnreichen Weg selber gehen lassen, der über die Maßformel für die (konstante) Geschwindigkeit bei gleichförmigen Bewegungen zur Maßformel für die (veränderliche) Geschwindigkeit bei den ungleichförmigen Bewegungen führt. Es ist bekanntlich der folgende[2]):

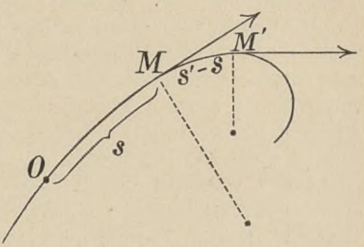


Fig. 138 [13].

1) Daß es mit bloßen „Definitionen“ wie die beliebte: „Geschwindigkeit ist der Weg in der Zeit Eins“ (vgl. o. S. 85 und S. 150, Anm.) u. dgl. nicht getan ist, wurde oft in der Ztschr. f. d. phys. Unterr. erörtert. In der großen Ausgabe meiner Physik ist in ausführlicher Weise zusammengestellt, was der Lehrer sogleich am Beginn der rechnenden Mechanik, d. i. eben beim Geschwindigkeitsbegriff (§ 4), alles vorzusehen hat, damit im Physikunterricht nicht von vornherein ein denkfaules Hinschreiben bloßer Buchstaben einreiße. Auch die physikalischen Formeln dürfen dem Schüler nichts Geringeres sein als die knappste und eindringlichste Aufforderung zu immer wieder sich erneuernden Anschauungsvorstellungen von physikalischen Größen als solchen.

2) Ich kann nichts anderes tun, als die betreffende Darstellung meiner Physik (Vieweg 1904) und Naturlehre (Vieweg und Gerold 1903) hier wörtlich wiederholen; brauche aber wohl kaum beizufügen, daß im mündlichen Unterricht auch diese dem Fachmann mehr als einfach scheinenden Dinge noch mit aller Behutsamkeit entwickelt sein wollen, so daß der mündliche Unterricht in einer vorher überhaupt nicht abzusehenden und vorzuschreibenden Weise, sondern ganz nach den individuellen Bedürfnissen der Schüler sich richtend, selbst zwischen die einzelnen Gedankenschrittchen noch Kunstpausen, veranschaulichende Beispiele usw. einfügen wird. –

Es sei dem obigen physikalischen Lehrtext in bezug auf seine mathematische Formgebung sogleich hier eine Bemerkung vorausgeschickt, um allfälligen Bedenken wegen „mathematischer Unstrenge“ zuvorzukommen. Daß z. B. statt des kurzen Symboles $\frac{ds}{dt}$ das umständliche $\frac{s'-s}{t'-t}$ für $t'=t$ gebraucht wird, ergab sich vor allem aus dem äußerlichen Umstand, daß in unserem Unterricht der analytischen Geometrie der analoge Schritt beim Bilden der Richtungskoeffizienten in gleicher Formgebung längst eingelebt ist (man vergleiche z. B. den weiter unten, S. 388, mitgeteilten Lehrtext aus einem verbreiteten Lehrbuch der Geometrie, wo es heißt: „Läßt man ... x_2

„Hat ein Punkt binnen t sec längs seiner Bahn $OM = s$ cm (Fig. 13) und binnen t' sec den Weg $OM' = s'$ cm zurück-

---

in x_1 und y_2 in y_1 übergehen" usw.). Durch die analoge Forderung „für $t' = t$!" wird nun allerdings sozusagen nur das Erreichen des Grenzwertes $\lim \Delta t = 0$ als des zu erreichenden Zieles lakonisch ausgesprochen, ohne daß über den Weg des „Überganges zur Grenze" etwas Näheres angedeutet ist. Aber aus den oben (S. 383ff.) im Text angeregten und dem Lehrer zur Wahl und Entscheidung überlassenen Gründen dürfte gerade das, was hier einstweilen wissenschaftlich anfechtbar geblieben ist, didaktisch wirksamst dazu auffordern, erst nach klar erkannten und in den Beispielen $s = at^2$, $s = at$, $s = a \sin \alpha t$ auch faktisch erreichten Zielen ($2at$, a, $\alpha a \cos \alpha t$) des Grenzüberganges nachmals auch über diesen selbst, über den Weg zum Ziele, sich die näheren Gedanken zu machen.

In der während des Druckes erscheinenden zweiten Auflage der reichsdeutschen Bearbeitung meiner Naturlehre (Oberstufe) durch F. POSKE werden die betreffenden Formeln nun schon ausführlicher so geschrieben:

$$v = \lim \left[\frac{s' - s}{t' - t}\right] \text{ für } t' = t, \text{ bzw. } b = \lim \left[\frac{v' - v}{t' - t}\right] \text{ für } t' = t;$$

$$\text{z. B. } v = \lim \left[\frac{at' - at}{t' - t}\right] = a, \text{ bzw. } b = \lim \frac{2at' - 2at}{t' - t} = 2a.$$

Zur Zeit der Abfassung meines Buches (erschienen 1904) hätte dieser Gebrauch des Zeichens *lim* wahrscheinlich noch „allgemeines Schütteln des Kopfes" erregt. So rasch ändern sich die Ansichten darüber, was im Unterricht möglich und alsbald auch notwendig ist! –

Es sei auch sogleich bemerkt, daß obiges Beginnen mit dem Berechnen von Geschwindigkeiten vor dem Berechnen der Richtungskoeffizienten ganz übereinstimmt mit dem Lehrgang von IRVING FISHER, Kurze Einleitung in die Differential- und Integralrechnung („Infinitesimalrechnung"), Teubner 1904. – Sein Text beginnt so: „Infinitesimalrechnung. Kapitel I. Die allgemeine Methode der Differentiation. 1. Die Infinitesimalrechnung behandelt die Grenzverhältnisse verschwindender Größen. Diese Definition kann jedoch erst bei einer gewissen Vertrautheit mit den »Grenzverhältnissen« verständlich werden. 2. Der Begriff eines Grenz- oder Endverhältnisses ist in vielen wohlbekannten Beziehungen grundlegend." Nach numerischen Beispielen über mittlere Geschwindigkeiten heißt es dann: „Obwohl sich die Zeit und die Strecke der Null in der Grenze nähern, ist es doch nicht im mindesten mit deren Verhältnis der Fall. Die Grenze, der sich dies Verhältnis nähert, oder das Endverhältnis der durchlaufenen Strecke zur verbrauchten Zeit, wenn beide letzteren Größen verschwinden, ist nämlich die genaue Geschwindigkeit in dem gegebenen Zeitpunkte." Unter 3. folgt dann ebenfalls die Auswertung für das Weg-Zeit-Gesetz $s = 16t^2$ (wo 16 unser a für den freien Fall in Fuß bedeutet). Es wird daraus abgeleitet $\frac{\Delta s}{\Delta t} = 32t + 16\,\Delta t \ldots (1)$ und $\lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = 32t \ldots (2)$. Dazu wird unter 4. erörtert, „daß mit abnehmendem Δt auch Δs sich der Null nähert, da doch ein Körper in Null Zeit keine Strecke durchlaufen kann. Man muß sich aber hüten, den Grenzwert von $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ durch $\frac{0}{0}$ auszudrücken, da dieser letztere Ausdruck, augenscheinlich, ganz unbestimmt gelegt, so entfällt auf die Zeitstrecke $\tau = (t' - t)$ sec die Wegstrecke $\sigma = (s' - s)$ cm; und seine Geschwindigkeit wäre, wenn

---

ist. Obwohl nun das Verhältnis des Grenzwertes von Δs zum Grenzwert von Δt unbestimmt ist, ist jedoch der Grenzwert des Verhältnisses von Δs zu Δt vollständig bestimmbar. Und ausschließlich mit diesem letzteren Begriff, d. h. der Grenze von $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, oder $\lim \frac{\Delta s}{\Delta t}$, wird der Leser hier zu tun haben." – Später, von 10. ab, wird „die Tangentialrichtung einer Kurve in deren beliebigem Punkte" und als erstes Beispiel die Kurve $y = 1 + 5x - x^2$ behandelt. –

Ich versage es mir, aus den schon in der Einleitung S. 8 hinsichtlich der Lehrbuchliteratur überhaupt dargelegten Gründen, hier auch die während der allerletzten Jahre in vorher nie dagewesener Häufigkeit erschienenen Lehrbücher für Funktionenlehre und Infinitesimalrechnung speziell an Mittelschulen im einzelnen namhaft zu machen. Viel didaktisch Ausgezeichnetes, daneben aber auch unglaublich Verkehrtes (bis herunter zu Gleichungen wie $d \int x$ [*sic*, ohne dx] $= x$) ist auf den Markt gelangt. Alle diese Bücher (sowie nicht wenige Programmabhandlungen), auch die sachlich und didaktisch besten, stellen eben doch nur eine Art Provisorium dar, da nach den Versicherungen aller Reformer nicht dem bisherigen Unterricht ein neuer Abschnitt hinzugefügt, sondern nur das in ihm schon Heimische an infinitesimalen Betrachtungen klar herausgearbeitet werden soll. Ein besonderes Lehrbuch für Funktions- und Infinitesimalrechnung neben dem hergebrachten Lehrbuch der „Elementarmathematik" wäre aber eine beständige Versuchung zu solchem äußerlichen Hinzufügen von Lehrstoff. – In der Tat haben auch schon mehrere alte und neue Lehrbücher das nötig Dünkende an „höheren Rechnungen" ihrem Lehrgange selbst nicht nur an-, sondern eingefügt. Auch dies geschah aber z. B in einem der in Österreich seit langem verbreitetsten Arithmetikbücher so, daß schon im Lehrstoff der fünften Klasse ein Abschnitt über Limiten auftritt, ohne auch nur die entfernteste Anknüpfung und Andeutung, woher und wozu dieser Begriff und diese Sätze. Sollte das geschehen sein, um die neuen Forderungen ad absurdum zu führen? Zur Entschuldigung mag gesagt werden, daß eben die frühere Systematik dieses Lehrbuches schon so versteinert war, daß ein organisches Hervorwachsen neuer Stoffe oder Gesichtspunkte von dieser Seite her kaum mehr erwartet und gefordert werden kann. Vielmehr zeigt das neue, junge Leben, das seit den Forderungen einer „zeitgemäßen Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an höheren Schulen" allenthalben sprießt, auch darin seine Lebenskraft, daß es mehrere ältere und junge Didaktiker zur Abfassung gründlich neuer Lehrbücher ermutigt hat, in denen nun das Funktionale und Infinitesimale mit dem übrigen Stoff sich wirklich organisch durchdringt. Das ist um so bedeutungsvoller, da bis zu jenem Impuls von seiten des Funktionalen und Infinitesimalen der Mut, auch in den übrigen Gebieten gründlich Neues in Form neuer systematischer Lehrbücher zu wagen, bis auf wenige Ausnahmen überhaupt wie für immer gelähmt schien. –

Es sei sogleich hier als eines der besten objektiven Mittel, dem Neuen auch in die Mittelschulen besonnen Bahn zu brechen, auf die historischen Darstellungen des Werdens der Infinitesimalrechnung, also nicht so sehr ihrer Geschichte wie ihrer Vorgeschichte, hingewiesen. Ganz ausgezeichnet und auch für den Mittelschüler durchweg lehrreich ist die Darstellung in überall konstant, zu messen durch $c = \frac{\sigma}{\tau} = \frac{s' - s}{t' - t}$ cm sec^{-1}. Eben diese Größe wählen wir aber auch für alle (ungleichförmigen oder gleichförmigen) Bewegungen des Punktes von M bis M' als Maßzahl seiner

mittleren Geschwindigkeit (für die Zeitstrecke von t bis t'):

$$v_m = \frac{s' - s}{t' - t}.$$

Mittels dieser Gleichung läßt sich eine um so genauere Beschreibung der wirklichen Bewegung des Punktes geben, für je mehr und je kleinere Zeitstrecken $(t' - t)$, $(t'' - t')$ ... die zugehörigen Wegstrecken $(s' - s)$, $(s'' - s')$ ... bekannt sind (LA 3, 4)[1]. — Eine vollkommen genaue Angabe der Geschwindigkeit, mit welcher der bewegte Punkt den Punkt M der Bahn durchläuft, erhält man erst durch folgende Methode (vgl. math. Anhang Nr. 13)[2]:

Wir wählen den Punkt M' unendlich nahe bei M. Es wird dann sowohl die Wegstrecke $(s' - s)$ wie die Zeitstrecke $(t' - t)$ unendlich klein, und es ergibt sich die folgende Maßzahl für die nach Verlauf von t sec erreichte

augenblickliche Geschwindigkeit (im Zeitpunkt t):

$$v = \frac{s' - s}{t' - t} \quad \text{für} \quad t' = t.$$

Soweit der Lehrtext innerhalb der „Physik" und „Naturlehre".

JULES TANNERY-KLAESS, „Geschichtlicher Anhang" (von PAUL TANNERY): VI. „Über den Ursprung der Differential- und Integralrechnung" (S. 332–339). Ferner (für den Lehrer) bei A. VOSS, „Über das Wesen der Mathematik" (1908) in Verbindung mit der Geschichte der Theorie des Irrationalen auch die der Infinitesimalrechnung.

1) Die hier zitierten Leitaufgaben lauten:

3. Welche Fallstrecken entsprechen im freien Falle und an schiefen Ebenen bei Neigungen von $^9/_{10}$, $^8/_{10}$, $^7/_{10}$, ... $^3/_{10}$, $^2/_{10}$, $^1/_{10}$, 0 den Fallzeiten 0,1, 0,2 ... 0,01, 0,02 ... sec? Man stelle diese Fallstrecken durch nebeneinandergestellte Gerade (wie am Wurfapparate, Fig. 17, S. 20) dar und erkläre, warum die die unteren Endpunkte verbindende Kurve eine nach unten konkave ist.

Bemerkung: Sind insbesondere die Fallzeiten „klein erster Ordnung", so werden die Fallstrecken (wegen des Vorkommens von t^2) „klein zweiter Ordnung".

4. Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit eines freifallenden Körpers während der ersten, zweiten, dritten, vierten ... hundertstel, tausendstel Sekunde nach Beginn der Bewegung?

Anleitung: Ist z. B. $t = 0{,}003$, $t' = 0{,}004$, so ist $v_m = 5 \cdot (0{,}003 + 0{,}004)$ m sec^{-1} = 3,5 cm sec^{-1}.

2) Die hier zitierte Nummer des mathematischen Anhanges führt den Titel: „Ausdrücke von der Form $\frac{y' - y}{x' - x}$ für $x' = x$ (Differentialquotienten)".

Alles kommt aber nun darauf an, dem Schüler unmittelbar nach Einführung dieser Symbole zum Bewußtsein zu bringen, daß sie erst nur Anweisungen zu Rechnungen enthalten, und daß die Durchführung der Rechnung sich anders und anders gestaltet, je nachdem die Beziehung zwischen s und t eine andere und andere ist. Dieses Bewußtsein läßt sich in den Schüler nicht wieder bloß hineinreden, sondern er muß es sogleich durch eigenes Tun sich erwerben; und dazu gehört nun, daß man mindestens an zwei konkreten Funktionen — unser Lehrgang darf hier auf Grund der vorausgegangenen Versuche an der schiefen und der wagerechten Ebene schon die beiden Weg-Zeit-Gesetze $s = at^2$ und $s = at$ voraussetzen — die Folge jener Prozeduren: Bilden der Differenzen $at'^2 - at^2$ usw. bis zum gefährlichen Schritt $t' = t$ in allen Einzelheiten verfolgen kann; also (in Fortsetzung des obigen Lehrtextes):

Erstes Beispiel: Gegeben sei das Weg-Zeit-Gesetz $s = at^2$; dann ist

$$v_m = \frac{at'^2 - at^2}{t' - t} = a\,\frac{t'^2 - t^2}{t' - t} = a\,\frac{(t' + t)(t' - t)}{t' - t} = a(t' + t).$$

Ferner:

$$v = a(t + t) = a \cdot 2t = 2at.$$

Von dem Ermessen des Lehrers wird es bei alledem abhängen, ob er es auch schon innerhalb dieser unserer ersten Dosis Differentialrechnung für zweckmäßig hält, den Schüler auf die kritischen Stellen in diesen Rechnungen selber aufmerksam zu machen, oder nicht für weiser, falls der Schüler selber keine Bedenken findet, sie ihm auch nicht schon hier sozusagen von außen „beizubringen". Wirksamer wird es später[1]) geschehen beim Problem der Tangenten, auf das wir bald zurückkommen. Nur so viel mag in rein rechnerischer Sprache schon jetzt auf alle Fälle hervorgehoben werden: Wollten wir an dem Ausdruck

1) Bei der bis zur jüngsten Reform vorgeschriebenen österreichischen Verteilung des Lehrstoffes kam man zum Tangentenproblem fast ein halbes Jahr nach jener Einführung in die Mechanik; bei dem nunmehr schon mit dem Beginn des VII. Jhgs. zusammenfallenden Beginn der analytischen Geometrie dauert es aber von jenen grundlegenden Lehren der Mechanik bis zu den immerhin schon zu den höheren Aufgaben der analytischen Geometrie zählenden Tangentenaufgaben immer wieder einige Monate. Nur bis ganz an den Schluß (wie es in der unten, S. 388 besprochenen Lehrtextprobe geschieht) sollte man diese große Lehre von den Tangenten nicht schieben, vielmehr das Grundsätzliche darüber sogleich nach der Theorie der Geraden, vor Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel, klar machen und dann bei jeder dieser vier (und einigen anderen) Kurven je nach Bedarf anwenden.

$\frac{at'^2 - at^2}{t' - t}$ sogleich, während im Zähler und Nenner noch die Subtraktionszeichen stehen, die Prozedur des $t' = t$ vollziehen, so „vertrüge" er dies nicht; denn es ergäbe sich dann $\frac{0}{0}$, also etwas „Unbestimmtes" (wie dem Schüler schon zu Beginn der Arithmetik der Mittelstufe eingeschärft zu werden pflegt; z. B. HEIS, Übungsbuch § 26)[1]). Aber der Ausdruck läßt ja zum Glück durch Wegheben des Faktors $(t' - t)$ die Transformation in $a\ (t' + t)$ zu; und da es in dieser Form solche boshafte Subtraktionszeichen, die zu Nullen führen, nicht mehr gibt, so „verträgt" es erst dieser Ausdruck, daß man in ihm $t' = t$ setzt; er gibt dann $a\ (t + t) = a \cdot 2t = 2at$.

Im gescheiten Schüler mag immerhin das Bedenken, wie denn jene verhängnisvolle Unbestimmtheit des $\frac{0}{0}$ durch das bloße Ausdividieren $\frac{t'^2 - t^2}{t' - t} = t' + t$ habe weggeschafft werden können, falls sie vorher wirklich in dem Gedankengang war, auch ohne weiteres Dreinreden des Lehrers fortwirken. Ist auch das gewählte Exempel mehr als einfach, so enthält es bereits alle Prinzipienfragen, die schon während des ersten Rausches über NEWTONS Erfindung der Fluxionsrechnung einen so gescheiten Philosophen wie

1) Bekanntlich pflegte man früher die Ausdrücke $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 0^0, 1^∞ u.dgl.m. als „unbestimmte Symbole" zu bezeichnen. Gegenwärtig zieht man es vor, selbst diese Symbole zu meiden, da sie in der Tat allzuleicht das Unmögliche z. B. der Forderung, „0 durch 0 zu dividieren", vergessen machen. Eines Nachweises, daß und worin diese Unmöglichkeit besteht, bedarf es wissenschaftlich nicht mehr; wohl aber der didaktischen Erwägung, wie man dem Schüler die Einsicht in das Bestehen dieser Unmöglichkeit, ihr „Warum?" vermittelt (nicht bloß „beibringt"). Natürlich bleibt hierfür die Ausgangsfrage die: Soll es ein Dividieren als Teilen oder als Messen sein? und die Antwort: „Teilen" schon gar nicht; aber auch das „Messen" hat bei zwei „fertigen Nullen" keinen Sinn mehr. – Wenn nun aber auch die neuere kritische Mathematik mit ihrer Theorie der Grenzwerte längst positive Gedanken an Stelle jenes unklaren Hantierens mit „unbestimmten Symbolen" gesetzt hat, so wäre es doch didaktisch nicht geraten, sich in Spekulationen über solchen Ersatz schon daraufhin einzulassen, daß sich beim bloß mechanischen Substituieren diese Symbole immer und immer wieder aufdrängen; sondern didaktisch weit zweckmäßiger wird mit solchen grundsätzlichen Aufklärungen bis dahin gewartet, wo nicht nur eine arithmetische Formel, sondern geometrische Figuren, wie Figg. 140 und 141, S. 394, dafür sorgen, daß alle diese Schwierigkeiten ja nicht wie vom Zaun gebrochen und in der Luft hängend erscheinen. Eben deshalb warten wir mit allen näheren Aufklärungen nicht nur über die Berechtigung, sondern schon über den Sinn der Forderung „$t' = t$!" bis zur analogen Forderung „$x' = x$!", durch die der Übergang von der Sekante zur Tangente sein sinnfälliges räumliches Vorbild erhält; vgl. unten S. 394.

BERKELEY das Kind mit dem Bade haben ausgießen lassen und die seither zu zahllosen Revisionen der Grundlagen des Rechnens mit dem „Unendlichkleinen" oder, wie man es sonst taufen zu sollen meinte und meint, geführt haben. Einige Andeutungen für die dem Mittelschüler angemessenen Antworten auf diese Prinzipienfragen versparen wir auf die „zweite Dosis".

Als zweites Beispiel führen wir die Rechnung an dem Weg-Zeit-Gesetze $s = at$ für die gleichförmige Bewegung durch; u. zw. erst als zweites, weil hier der Rechnungsgang so übereinfach ist, daß der Schüler das Charakteristische an ihm allein nicht mehr spüren würde; nämlich (in Fortsetzung des Lehrtextes):

$$v_m = \frac{at' - at}{t' - t} = a\frac{t' - t}{t' - t} = a.$$

Daher auch $v = a$; wo a „der Weg in der Zeit 1" maßzahlengleich ist der diesmal **konstanten** Geschwindigkeit. –

An die Berechnung der Geschwindigkeiten schließt sich die der **Beschleunigungen** an; wobei wir uns in den Begriffsbestimmungen kürzer fassen können, nämlich so:

„Bei ungleichmäßig beschleunigten Bewegungen ergeben sich analog den Gleichungen für v_m und v folgende Maßformeln für die

$$\text{mittlere Beschleunigung } w_m = \frac{v' - v}{t' - t},$$

$$\text{augenblickliche Beschleunigung } w = \frac{v' - v}{t' - t} \text{ für } t' = t.$$

Anwendung zunächst auf die im § 4 betrachteten zwei Bewegungen:

1. Für $s = at$ war $v = a$, somit ist $w_m = \frac{a - a}{t' - t} = 0$ und daher auch $w = 0$; d. h. die **gleichförmigen** Bewegungen oder die Bewegungen von **konstanter Geschwindigkeit** haben die **Beschleunigung Null.**

2. Für $s = at^2$ war $v = 2at$ und daher ist $w_m = \frac{2at' - 2at}{t' - t} = 2a$ und also auch $w = 2a$; d. h. bei Bewegungen nach dem Weg-Zeit-Gesetz $s = at^2$ ist die Beschleunigung **konstant** (von der Zeit t unabhängig)."

Bald nach diesen Anwendungen auf die Weg-Zeit-Gesetze $s = at^2$ und $s = at$ werden nach dem in unserer Physik und Naturlehre (§ 12) eingehaltenen Lehrgang die Rechnungsanweisungen für v_m, v, w_m, w angewendet auch auf das Weg-Zeit-Gesetz für Sinusschwingungen, $s = a \cdot \sin \alpha t$; nämlich so:

$$v_m = \frac{a \sin \alpha t' - a \sin \alpha t}{t' - t} = a \frac{2 \cos \frac{\alpha t' + \alpha t}{2} \sin \frac{\alpha t' - \alpha t}{2}}{t' - t} = \alpha a \cos \alpha \frac{t' + t}{2} \cdot \frac{\sin \alpha \frac{t' - t}{2}}{\alpha \cdot \frac{t' - t}{2}},$$

woraus für $t = t$ wird: $v = \alpha a \cos \alpha t$ . . . (6)

Hieraus folgt weiter:

$$v_m = \frac{\alpha a \cos \alpha t' - \alpha a \cos \alpha t}{t' - t} = \alpha a \frac{-2 \sin \frac{\alpha t' + \alpha t}{2} \cdot \sin \frac{\alpha t' - \alpha t}{2}}{t' - t} = -\alpha^2 a \sin a \frac{t' + t}{2} \cdot \frac{\sin \alpha \frac{t' - t}{2}}{\alpha \frac{t' - t}{2}}$$

woraus für $t' = t$ folgt: $w = -\alpha^2 a \sin \alpha t$ oder $w = -\alpha^2 s$ . . . (7).

Nebenbei bemerkt bietet vorstehende Rechnung (die gewiß nirgends über das hinausgeht, was man in der Goniometrie zur Einübung von $\sin\varphi - \sin\psi$ und $\cos\varphi - \cos\psi$ verlangt) ein gutes Beispiel zu der neuestens mehrfach empfohlenen Rollenverteilung zwischen Physik- und Mathematikstunden[1]): Wenn nämlich dem Schüler in der Physikstunde die Rechnung für v_m und v ausführlich gezeigt worden ist, so kann man die ganz analoge Rechnung für w_m und w (nicht überhaupt, etwa auch schon bei $s = at^2$, sondern erst hier, bei $s = a \sin \alpha t$) ruhig als Hausaufgabe geben, die dann nicht in der Physikstunde, sondern in der Mathematikstunde wiederholend geprüft werden mag. Man wird dabei die lehrreiche Erfahrung machen, daß, was dem Schüler innerhalb des Physikunterrichtes noch als eine abschreckend verwickelte Rechnung erscheinen konnte, ihn in der Mathematikstunde als sehr einfach anmutet – denn in diesen Stunden ist er eben bei weitem Verwickelteres schon von jeher gewöhnt. Eben darum aber scheue der Physikunterricht auch nicht, was ihm an Rechnungen (wirkliches, nicht nur vermeintliches) Bedürfnis ist; er scheide nur recht reinlich den physikalischen Ansatz von der rechnerischen Durchführung, woraus überdies das tiefere, geradezu erkenntnistheoretische Erfassen des Unterschiedes, ja Gegensatzes zwischen Empirischem und rein Mathematischem noch einen wertvollen Beleg gewinnt.

Auch dies sei noch ausdrücklich bemerkt, daß und warum wir auf die rechnerische Behandlung der Geschwindigkeit auch bei

---

1) Näheres über die rechte Mitte zwischen einem Übermaß von Mathematik im physikalischen Unterricht und einem weichherzigen Verzicht auch auf das Nötige vgl. in meinem Aufsatz „Das Mathematische im physikalischen Unterricht“, Ztschr. f. d. physikal. und chem. Unterricht XVIII S. 1–12; daselbst auch über das Infinitesimale und das Erkenntnistheoretische u. dgl. m. in der mathematischen Physik der Mittelschule.

den Sinusschwingungen besondern Wert legen, wiewohl sich ja doch die Sache bekanntlich graphisch sehr viel einfacher erledigen läßt (nämlich durch Projektion der Geschwindigkeit der Kreisung auf den Kreisdurchmesser, wodurch sich sofort die Funktion cos anschaulich rechtfertigt – vgl. Physik, Leitaufgabe 20): Der Schüler soll und muß nämlich, wenn er die Tragweite der in dem $\frac{s'-s}{t'-t}$ für $t'=t$ liegenden Rechnungsvorschrift auch nur halbwegs voraussehen soll, eben sich nicht mit den zwei algebraischen Funktionen $s = at^2$ und $s = at$ begnügen, sondern wenigstens noch die eine transzendente Funktion $s = a \cdot \sin \alpha t$ (oder einfach $s = \sin t$) wirklich nach jener Anweisung differentiiert haben. Auch tritt ihm hier zuerst entgegen, daß sich jede Differentialformel zuspitzt auf eine gewisse Limite; hier $\frac{\sin \xi}{\xi} = 1$ (was in der Goniometrie eingehend erörtert und veranschaulicht worden war, vgl. mathem. Anhang zur „Physik", Nr. 19 und 21). Daß diese und jede solche Limitenberechnung der springende Punkt sei, würde z. B. beim $\frac{t'^2 - t^2}{t'-t} = t' + t$ nicht recht fühlbar, weil infolge längerer Gewöhnung die Beziehung schon wie selbstverständlich geworden war.

Weiterhin ist die Kenntnis der Differentialquotienten gerade von sin und cos für die Physik auch anderweitig (Wellen, Wechselströme) so häufig Bedürfnis, daß es sich gewiß lohnt, schon gelegentlich des ersten Auftretens der Sinusfunktion im Physikunterricht, also eben bei den Sinusschwingungen, bei diesen Beziehungen ausdrücklich zu verweilen. Wir kommen bald (S. 406) darauf noch einmal zurück. Denn nach jenen phoronomischen, aber vor letzteren anderweitigen physikalischen Anwendungen treffen wir in unserem mathematischen Lehrgang auf den

zweiten Hauptanlaß zu elementarem Differentiieren, das Problem der **Tangenten** (diese auf Leibniz zurückgehende Bezeichnung im weiteren Sinne, für alle Aufgaben über veränderliche Richtungen verstanden – analog den obigen Aufgaben über veränderliche Geschwindigkeiten). – Wo man (wie in Österreich seit 1849) analytische Geometrie bis einschließlich der der Kegelschnitte treibt und dabei die Berührungsgrößen an Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel mit Recht als eine Hauptsache des ganzen Abschnittes gelten ließ und läßt, dort treibt man, wie gesagt, auch schon Differentialrechnung. Daß wir das Wesen des Gedankens schon durch die Wahl der Schriftzeichen und die ganze Anlage der Rechnung, bei der zum erstenmal der Richtungskoeffizient z. B. des Kreises $A = -\frac{x}{y}$ auftauchte, dem Auge des unkundigen Schülers mit einem gewissen Raffinement zu verhüllen wußten, ändert an der Tatsache jener „59 Jahre Differentialrechnung in Österreich" natürlich gar nichts; und es gehört nur ein sonderbarer Geschmack dazu, zu glauben, daß man durch das Verhüllen eines großen Gedankens, einfach mittels Nichthervorhebens der ganzen Rechnungsgliederung, etwas didaktisch oder wohl gar mathematisch Zweckmäßiges erzielt habe. In dieser Hinsicht seien dem in der Anmerkung S. 372–374 Mitgeteilten hier noch einige ins einzelne gehende Bemerkungen angefügt, die zwar Äußerlichkeiten zu betreffen scheinen, aber dennoch nicht verschwiegen werden sollen, weil vielleicht an dem Nichtbeachten solcher Äußerlichkeiten ein Hauptgrund (freilich eine *ratio insufficiens*) liegt, warum man jenem großen Gedanken immer noch Schwierigkeiten in den Weg legt oder im Wege liegend meint. Beginnen wir also wieder mit der Darstellung in einem (übrigens viel Gutes enthaltenden) Buche. Ohne daß hier irgend etwas anderes über das Problem der Tangenten vorausgeschickt worden wäre, heißt es gegen Ende der analytischen Geometrie:

„Gleichungen der Tangenten.

§ 264. a) Ellipse. Es seien $M_1(x_1 y_1)$ und $M_2(x_2 y_2)$ zwei Punkte der Ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

also

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$$

und

$$b^2x_2^2 + a^2y_2^2 = a^2b^2 \quad (1)$$

Die Gleichung der durch die Punkte M_1, M_2 bestimmten Sekante lautet (§ 225c)

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1);$$

dieselbe kann mittels der Gleichungen (1) in folgender Weise umgeformt werden. Es ist

$$b^2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + a^2(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 0,$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)},$$

somit

$$y - y_1 = -\frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)}(x - x_1)$$

die Gleichung der Sekante M_1 M_2.

Läßt man nun M_2 mit M_1 zusammenfallen, also x_2 in x_1 und y_2 in y_1 übergehen, so verwandelt sich die letzte Gleichung in

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1)$$

oder nach einigen Transformationen in

$$b^2 x x_1 + a^2 y y_1 = a^2 b^2.$$

Dies ist die Gleichung der Ellipsentangente, welche dem Berührungspunkte $(x_1 y_1)$ entspricht.

Zusatz: Durch die Substitution $b = a$ erhält man

$$x x_1 + y y_1 = a^2$$

als Gleichung der Tangente, welche den Kreis $x^2 + y^2 = a^2$ im Punkte $(x_1 y_1)$ berührt."

Es folgen dann die analogen Rechnungen für Hyperbel und Parabel, dann die Normalen usf.

Hier ist vor allem die Wahl der Zeichen x_1 und y_1 ungeeignet, denn durch Indices pflegen wir feste, konstante Koordinaten zu bezeichnen im Gegensatz zu den veränderlichen x und y. Der Punkt M_1 sollte also M heißen[1]) und seine Koordinaten x, y; denn er ist als ein allgemeiner, keineswegs als konstanter Punkt des Ellipsenumfanges gedacht. Ebenso ist M_2 kein fester Punkt, er soll nur ein Nachbarpunkt des Punktes M sein und an diesen heranrücken; und so sollte man also auch ihn nicht mit M_2, sondern mit M' und seine Koordinaten nicht mit x_2, y_2, sondern mit x', y' bezeichnen. – Man mag das Kleinkrämerei nennen, aber da sie ganz bestimmten Gedanken dienen, heißt in den Symbolen wählerisch sein, nicht zugleich kleinlich sein. Schon durch die Symbolik bestimmte Gedanken nahelegen, andere fernhalten,

1) Natürlich müssen bei dieser Verfügung über die Zeichen x und y als „laufende Koordinaten der Ellipse" die „laufenden Koordinaten der tangierenden Geraden" anders, etwa $\xi\eta$, genannt werden. Wenn dagegen obige Ableitung für die laufenden Koordinaten der tangierenden Geraden selbst x und y wählt und wieder $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ für Punkte der Ellipse, so ist es kein Wunder, wenn die Schüler nie recht darüber ins klare kommen, was von diesen Größen sich auf die Gerade, was auf die Ellipse sich bezieht, was variabel und was konstant ist. – Alle diese Vorerwägungen entfallen natürlich, wenn wir, wie es in unserem obigen Text empfohlen wird, ganz direkt nur auf den Richtungskoeffizienten der Ellipse als solchen lossteuern, wo dann während dieser ganzen Rechnung nur die $xx'yy'$ vorkommen. Erst wenn man diesen Richtungskoeffizienten u. a. für die Zwecke der Tangentengleichung anwendet, sagt man, diese habe die allgemeine Form $\eta = A\xi + B$; ferner, weil sie durch den Ellipsenpunkt xy geht, auch die Form $\eta - y = A(\xi - x)$, somit weiter $\eta - y = -\frac{b^2 x}{a^2 y}(\xi - x)$, woraus schließlich $b^2 x\xi + a^2 y\eta = a^2 b^2$ wird.

ist dem Anfänger gegenüber durchaus gerechtfertigt; die Möglichkeit, daß sich mit irreleitenden Symbolen falsche oder – gar keine Gedanken verbinden, liegt ja nur zu nahe, da eben das bloße Nachmalen der Zeichen für den Schüler, der sich in der Sache nicht auskennt, immer das letzte Auskunftsmittel bleibt.

Viel wesentlicher aber als diese Nebenbemerkung über die Symbolik ist das klare Herausheben des **Richtungskoeffizienten** als solchen aus den sonstigen Zutaten von Tangentengleichung, Normalengleichung, Subtangentenstrecke usw. Es heißt den Kern mit der einkleidenden Schale verquicken, wenn man von Anfang auf die Tangentengleichung als solche lossteuert und nicht vielmehr von Anfang alle Aufmerksamkeit des Schülers auf die eine entscheidende Größe lenkt – auf den

$$\text{Richtungskoeffizienten } A = \frac{y' - y}{x' - x} \text{ für } x' = x.$$

Gleichviel übrigens, ob man diesen Differenzquotienten und das in $x' = x$ angezeigte Ziel des Grenzüberganges nun wirklich, wie wir es empfehlen, explicite, als eine Sache für sich – an die sich dann ganz von selbst sogleich Betrachtungen über Steigen und Fallen der Funktion, über Maxima und Minima (z. B. besonders dankbar bei sin und cos) anschließen – oder ob man sie implicite nur im Dienste der Tangentengleichung zur Sprache bringt, ist es wieder, wie oben bei Geschwindigkeit v und Beschleunigung w gezeigt wurde, durchaus nötig, daß man auch hier der in obiger Formel für A vorgezeichneten allgemeinen Rechnungsanweisung sogleich möglichst einfache Rechnungsausführungen, u. zw. nicht nur die an den drei Gleichungen $b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2$ (inkl. für $a = b$) und $y^2 = 2px$, folgen läßt; wofür sich wieder früher als sogar der Kreis die Parabel $y = x^2$ empfiehlt. Es wird dann

$$A_m = \frac{x'^2 - x^2}{x' - x} = x' + x \quad \text{und} \quad A = x + x = 2x.$$

Überhaupt dürfte aber die überall bewährte didaktische Hauptregel, eine wenn auch späterhin noch so sehr ins Allgemeine führende Betrachtung einzuleiten durch eine spezielle, ja bis ins einzelnste individuelle Aufgabe, den folgenden Vorgang bei der allerersten Besprechung der Tangentenaufgabe empfehlen:

Wir haben zum soundso vielten Male die Kurve zur Gleichung $y = x^2$ an die Tafel und ins Heft zeichnen lassen u. zw. diesmal recht säuberlich, da wir besonders wichtige Dinge mit ihr vorhaben.

Wir zeigen nun, indem wir ihr mit dem Finger nachfahren, wie sich die Richtung dieser Bewegung von Punkt zu Punkt ändert (und wir unterlassen es nicht, daran zu erinnern, daß, wenn man sich jene Parabel umgekehrt, mit der konkaven Seite nach unten, als Wurfparabel denkt, der geworfene Körper in der Tat von Augenblick zu Augenblick nach anderen Richtungen zielt). Wir stellen nun die ganz individuelle Aufgabe: Zuerst rechnerisch, dann zeichnerisch jene Richtung für den Punkt M, dessen $x = 3$ (und daher $y = 9$), zu ermitteln. Und erst hier setzt nun die bekannte Betrachtung ein: Wir wählen einen Nachbarpunkt M', legen durch M und M' zuerst die Sekante, lassen dann M' immer näher an M heranrücken usf. Wenn dann wie oben $A = 2x$ sich ergeben hat, so spezialisieren wir auch hier es sofort für $x = 3$ und erhalten also $A = 6$. – Hier mag der Lehrer sich überzeugen, ob die Schüler die Ausgangsfrage noch lebhaft im Sinne haben: wenn ja, so müssen sie selbst darauf verfallen, dieses Resultat zu konstruieren, u. zw. gemäß der Deutung von $\operatorname{tg}\tau = 6$; was am nächstliegenden, wenn auch nicht bequemsten so geschieht, daß man von M aus eine beliebige Strecke parallel zur X-Achse und deren Sechsfaches parallel zur Y-Achse aufträgt; womit der Tangente ihre Richtung angewiesen ist. – Nun erst Einsetzung auch für $x = 2$, $x = 1$ in obiges $A = 2x$; denn erst hierdurch gewinnt die Bezeichnung „abgeleitete Funktion" für den Schüler Sinn und Berechtigung. Sodann die bequemste Konstruktion, indem z. B. für den Parabelpunkt M_1 (1,1) auf der Abszissenachse selbst $x = \frac{1}{2}$ aufgetragen und die Tangente durch M_1 und $(0, \frac{1}{2})$ bestimmt wird usw. – Aber auch jetzt noch ja nicht früher zu anderen Funktionen eilen, ehe diese eine Musterfunktion $y = x^2$ ihr volles didaktisches Erträgnis geliefert hat: Also das Abnehmen bzw. Wachsen für $\operatorname{tg}\tau \lesseqgtr 0$, das Minimum für $\operatorname{tg}\tau = 0$ u. dgl. m. – Dann aber auch wieder nicht steckenbleiben bei dieser einen Funktion; sondern damit sich das Charakteristische des immer gleich bleibenden Rechenmodus abhebe von seiner Ausgestaltung für verschiedenartige Funktionen, wird alsbald nun auch $y = ax^2$ behandelt – namentlich, weil dieses das völlige Analogon zum $s = at^2$ darstellt, an dem wir zuerst jenen Rechnungsmechanismus kennen gelernt hatten.

Dies ist ja nun auch der große Moment, wo es dem Schüler am nächsten liegt, selbst zu bemerken, wie das Gleichartige jener Rechnungsanweisungen nach

$$\frac{y'-y}{x'-x} \text{ für } x' = x \qquad \text{und} \qquad \frac{s'-s}{t'-t} \text{ für } t' = t$$

noch einen tieferliegenden gemeinsamen Grund und Zweck haben müsse, wenn sie scheinbar so heterogene Dinge wie veränderliche Richtungen und veränderliche Geschwindigkeiten rein mathematisch exakt nachzubilden erlauben; dieses Gemeinsame hat dann aller weitere Unterricht immer klarer und überzeugender herauszuarbeiten.

Als nächste Fortsetzung des bisherigen Lehrganges empfehlen wir, nun von der Parabel $y = x^2$ sogleich überzugehen zum Kreis $x^2 + y^2 = a^2$ (wie dieser auch im Vorkursus der analytischen Geometrie alsbald der Parabel $y = x^2$ gefolgt war; vgl. S. 316).

Bevor man aber an die herkömmliche Ableitung des A für den Kreis $x^2 + y^2 = a^2$ in dieser impliziten Form geht, dürfte sich empfehlen, der Rechnung anfangs die dem Schüler geläufigere, wenn auch unbequemere Form des $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ zu geben; denn der hierbei erforderlich werdende Kunstgriff, den Zähler (nicht wie sonst die Nenner) rational zu machen, weist wieder darauf hin, daß es auf die Gewinnung eines handlichen Limitenausdruckes ankomme. Somit für den Anfang:

$$A_m = \frac{\sqrt{a^2 - x'^2} - \sqrt{a^2 - x}}{x' - x} = \frac{(a^2 - x'^2) - (a^2 - x^2)}{(x' - x)\left[\sqrt{a^2 - x'^2} + \sqrt{a^2 - x^2}\right]}$$
$$= -\frac{x' + x}{\sqrt{a^2 - x'^2} + \sqrt{a^2 - x^2}};$$
$$A = -\frac{2x}{2\sqrt{a^2 - x}} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Erst wenn dieses wenig übersichtliche Resultat gewonnen ist, mag man aufmerksam machen, daß ja $\sqrt{a^2 - x^2} = y$, also $A = -\frac{x}{y}\cdot$ Und erst jetzt mag diese Form als das einfachere Resultat uns darauf aufmerksam machen, daß wir uns auch an obiger Rechnerei wahrscheinlich etwas hätten ersparen können, womit nun der Schüler erst Verständnis und Dankbarkeit bekommt für die Einfachheit der traditionellen Rechnung

$$\left.\begin{array}{r} x'^2 + y'^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{array}\right\} \text{ also } (x'^2 - x^2) + (y'^2 - y^2) = 0,$$
$$\frac{y' - y}{x' - x} = -\frac{x' + x}{y' + y}, \quad A = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

Dies nebenbei ein Beispiel zu Rousseaus didaktischer „Kunst, Zeit zu verlieren“; besser etwas Zeit geopfert, als daß sich dem Schüler hinter dem Kunstgriff das Wesen einer Rechnung verbirgt. Und lehrt man ja doch auch in der systematischen Differentialrechnung früher explizite als implizite Funktionen differentiieren[1].

---

1) Es sei hier im Interesse der guten Sache eine Beobachtung registriert, die ich an einem der kampflustigsten Gegner aller Differentialrechnung an Gymnasien gemacht zu haben – fürchte: Dem Mann schien überhaupt noch nie ein- und aufgefallen zu sein, daß, was er Jahr für Jahr seinen Schülern

Gleichviel aber, ob man zuerst die implizite Form $-\frac{x}{y}$ oder die explizite $-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ erhalten hat, ist der Schüler jedenfalls aufmerksam zu machen, daß nur die letzte Form unmittelbar auch den Wert von $A = \operatorname{tg}\tau$ ebenso als eine Funktion (die „abgeleitete Funktion") der unabhängigen Veränderlichen x darstellt, wie bisher immer die Ordinate y (als „ursprüngliche Funktion") dargestellt worden war. Aus (und nach) diesen rechnerischen Bemerkungen nun wieder die zeichnerische Darstellung der planimetrischen Tangente an den Kreis im allgemeinen Punkt M auf Grund dieser Beziehung $\operatorname{tg}\tau = -\frac{x}{y}$ (aus der sich das längst bekannte Normalsein auf dem Radius erst nachmals in der Formel für die Subnormale $Sn = x$ oder ähnlich ergibt).

Jetzt erst ist der Standpunkt gewonnen, von wo aus der Schüler überschauen kann, warum man ihn in der analytischen Geometrie neuerdings mit einem „Problem der Tangenten" plagt, wo er doch in der simplen Kreislehre die Tangente kurz und gut als „die im Endpunkt des Radius auf ihm Normale" längst ausreichend zu kennen geglaubt hatte.

Wo sich solche Einwendungen verraten (und hoffentlich bleiben sie weder wegen Gedankenlosigkeit noch wegen Furcht vor einem unnah-

---

als die obige Zerlegung in die Faktoren $(x'+x)(x'-x)+(y'+y)(y'-y)=0$ vorrechnet, überhaupt gar nichts anderes ist als die elementare Schreibung für dasselbe, was er (vor freilich langen Jahren) an der Universität unter dem Namen „Differentiation einer impliziten Funktion" gelernt hatte; nämlich daß aus $x^2+y^2=a^2$ folgt $2x\,dx+2y\,dy=0$, daher $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ usw.

Da immer noch ab und zu bezweifelt wird, ob es aufrichtig gemeint sei, wenn wir Verteidiger eines bißchen Differential- (und Integral-) Rechnung an Mittelschulen anstatt der gefürchteten „Mehrbelastung" geradezu „Vereinfachung" versprechen (sogar „Schwindel" habe ich dieses versprochene „Vereinfachen und Vertiefen" halböffentlich nennen hören), so seien für den Verkenner jener Zusammengehörigkeit des elementaren und des differentialen Berechnens des Richtungskoeffizienten für den Kreis die beiden Rechnungsformen hier einander zum Vergleich auf ihre „Einfachheit" gegenübergestellt:

$x^2+y^2=a^2$ $x'^2+y'^2=a^2$	$x^2+y^2=a^2$
$(x'^2-x^2)+(y'^2-y^2)=0$	
$(x'+x)(x'-x)+(y'+y)(y'-y)=0$	$2x\,dx+2y\,dy=0$
$\frac{y'-y}{x'-x}=-\frac{x'+x}{y'+y}$	
$\frac{y'-y}{x'-x}$ (für $x'=x$) $=-\frac{x}{y}$	$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$

baren Lehrer aus), da ist die erste Erwiderung des Lehrers: Bei allen anderen Kurven außer beim Kreis kennen wir eben nicht die Normale vor den Tangenten. Dann aber auch beim Kreis selbst – wieviel wußten wir denn bisher von den Eigenschaften der Kreistangente?

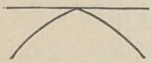


Fig. 139.

„Daß sie mit der Kreislinie nur einen Punkt gemeinsam hat.“ Aber das ist in Fig. 139 auch der Fall, und niemand spricht hier von einer Tangente. „Aber beim Kreis schmiegt sich die Gerade an die Krumme an.“ Woher wissen wir das? „Aus der Anschauung.“ Ganz richtig – aber eben diese „Anschauung“ ist es, der wir jetzt durch das „Denken“ haben näherkommen, die wir auf Begriffe und exakte Rechenausdrücke haben bringen wollen. Und so Geheimnisvolles enthält jene „Anschauung vom Anschmiegen“, daß auch in unserem Rechenmechanismus es nicht ohne Schwierigkeiten abgegangen ist; gestehen wir sie uns nur ein! Zuerst an unserer Parabel-Zeichnung und -Rechnung: wie haben wir aus der Sekante eine Tangente werden lassen? „Indem wir den Punkt M' an M immer näher heranrücken ließen.“ Bis zum vollen Zusammenfallen oder nicht? Und hier sieht sich der Schüler so unwidersprechlich, daß auch ein Gewaltspruch (wie Machs Gleichsetzung von Zeitteil und Zeitpunkt, vgl. oben S. 377) nicht als Autorität aufkommen kann, vor die folgende Alternative gestellt: Solange M' mit M „nicht ganz“ zusammengefallen ist, ist die Sekante noch nicht Tangente (Fig. 140). Sobald aber M' wirklich in M hineingerückt ist, gibt es nicht mehr zwei Punkte, wie sie zur Bestimmung einer Richtung erforderlich sind (Fig. 141); sondern durch den Punkt M kann man nun Gerade nach beliebigen Richtungen ziehen, die alle gleichen Anspruch hätten, aus jener Sekante „hervorgegangen“ zu sein – wenn

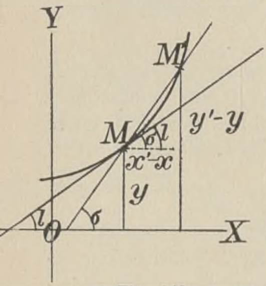


Fig. 140.

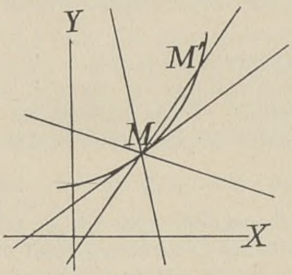


Fig. 141.

es eben nur darauf ankäme, daß aus den zwei Punkten M' und M der eine M werde, und nicht auch darauf, wie (nämlich durch stetige Führung längs des Kurvenbogens $M'M$) der Nachbarpunkt M' in den Ausgangspunkt M hineinrückt.

Das arithmetische Gegenstück dazu, daß beim Einswerden von M' und M die frühere Sekante alle bestimmte Richtung einbüßt, ist das $\frac{0}{0}$, sobald wir in $\frac{x'^2 - x^2}{x' - x}$ vorschnell und schlechthin $x' = x$ setzen. Soll der Lehrer dem Schüler aus dieser Klemme herauszuhelfen suchen oder nicht? Das wird ganz von dem dramatischen Verlauf der vorangegangenen Diskussion abhängen: hat sich's der Schüler leicht gemacht, so mache es ihm der Lehrer schwer – und umgekehrt. Für diesen letzteren Fall möge nun immerhin wieder die Anschauung der wohlvertrauten Kreistangente das vorläufig (für die „erste Dosis") letzte Argument bleiben; aber doch so, daß dem auf die Fig. 141 hinweisenden Einwand Genüge geschieht. Hierüber wäre also etwa folgendes zu sagen: Auch wer an einen Kreis im Punkte M eine Tangente wirklich ziehen will, läßt ja die Linealkante vor allem durch den Punkt M gehen, und sie wird dabei im allgemeinen auch noch durch einen zweiten Punkt M' gehen. Solange dabei der Zeichner einen Abstand von M' und M bemerkt, dreht er das Lineal um M so, daß M' sich M nähert; und er macht mit dieser Drehung halt, sobald M' nicht mehr merklich von M verschieden ist. Dieses Haltmachen in der Drehung aber ist etwas ganz anderes, als ob der Zeichner vom Anfang sich gesagt hätte: Ich will ja ohnedies nicht zwei Punkte, sondern den einen M; und es muß also jede Gerade, die durch M geht, schon „Tangente" sein. So also ist für das Zustandekommen der wirklichen Tangente die Art der Bewegung, welche uns allgemein gesprochen einen Grenzübergang darstellt, etwas durchaus Wesentliches; und ebenso wesentlich ist es dann auch, wenn wir z. B. dem $\frac{x'^2-9}{x'-3}$ für $x'=3$ einen „Hauptwert" 6 zusprechen, wiewohl ja allerdings, wenn wir die Transformation in $x'+3$ unterlassen hätten, dieser Hauptwert hinter der Form $\frac{0}{0}$ sich verborgen hätte. – Erst nachdem all diese Schwierigkeiten ehrlich gefühlt worden sind, wird man auf die bei der obigen Forderung (S. 382): „Setze $t'=t$!" vorgemerkte Unzulässigkeit (nicht nur „Unbestimmtheit") des Quotienten zweier Nullen mit didaktischem Erfolg noch näher eingehen. Nicht die bloße, nur negierende Ablehnung schon des „Symbols" als solchen darf hier das letzte Wort sein; sondern die positive Einsicht, warum wir z. B. das $v=2at$ [nicht nochmals ein bloßes $2a(t+\tau)$], warum wir das $3\cdot 2x$ [nicht nochmals ein bloßes $3\cdot(2x+\Delta x)$] für den erreichten Grenzwert erklären, beruhigt den Schüler darüber, daß, um nur beim letzten Beispiel zu bleiben, es in je einem Punkte der Parabel oder des Kreises wirklich nur eine Tangente gibt und daß nicht etwa diese eine Tangente nur ein verschwommener Repräsentant für beliebig viele recht nahe beieinanderliegende Sekanten sei. Immer wieder ist hier einzuschärfen, daß diese eine Tangente im Punkte M, wenn sie auch nicht mehr, wie die durch zwei Punkte M und M' bestimmten Sekanten, durch diesen einen Punkt M selbst ihre Auszeichnung als „Hauptwert" empfangen kann, diese doch anderswoher empfängt: weil wir nämlich wissen, wie der Punkt M' in den Punkt M herangeführt und in ihn übergegangen ist. – Ja – denken wir uns M' sogar durch M hindurch nach der anderen Seite der Kurve weitergehend, so erhalten wir eine erste Anregung für das Unterscheiden des

„rechtsseitigen und linksseitigen Differentialquotienten“[1]). So ferne solche späte Verfeinerungen sonst dem Anfangsunterricht bleiben müssen, so sollte doch ein Schüler, der seit langem gewöhnt worden war (namentlich seit dem Einschließen des Kreises zwischen das äußere und innere Polygon, S. 290, dann wieder der Pyramide zwischen die äußeren und inneren Cavalierischen Prismen, S. 218), sich in der Tat erst ganz sicher fühlen, wenn wir die die Lage der Tangente bestimmenden Größen zwischen zwei Grenzen, eine untere und obere, eingeschlossen haben. Immerhin aber mag sich auch eine achtbare, wenn auch nicht völlige strenge Überzeugung schon eingestellt haben aus dem bloßen Herzuwandern des M' an M, ohne ein stetiges Hinüberschreiten nach der anderen Seite der Kurve. Wieder wird es didaktisch das Geratenste sein, lieber den Schüler zu beobachten, ob sich in ihm solche Bedürfnisse nach Strenge einstellen und inwieweit er sie sich selbst zu befriedigen vermag, als daß ihm der Lehrer die schönsten und strengsten Beweise nur „beibringt“.

Oder findet man, daß auch hiermit schon zuviel spekuliert sei, und will man lieber ganz schweigen über die Schwierigkeiten, die sich hinter der Rechnung als solcher verbergen, ganz gleichviel, ob man $x' = x$ oder $\lim \Delta x = 0$ oder dx schreibt, sondern will man immer nur darauflosrechnen, um für Ellipse, Hyperbel, Parabel so schnell als möglich die Gleichungen der Tangente, dann die der Normale, dann die Längen der Subtangenten, Subnormalen usw. ausrechnen zu lassen? Wer für unser Existenzminimum an Differentialrechnung, insofern sich diese einfach mit dem Herausarbeiten der Bildungswerte der längst eingebürgerten Lehrstoffe deckt, nur aus diesem Grunde „keine Zeit“ hat, weil er sonst nicht alle $6 \times 4 = 24$ Formeln[2]) für die sechs Berührungsgrößen an den vier Kurven ausrechnen könnte — dem wissen wir ein ausgiebiges Mittel zur Entlastung: Er schenke einfach dem Schüler auch das Hinschreiben aller jener 24 entgeisteten Formeln! Ob wir einem solchen aber auch noch zutrauen können,

1) Vgl. u. a. F. KLEIN, „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien“. (Autographierte Vorlesungen 1901, S. 82.)

2) Hat der Schüler begriffen und gewürdigt, daß es was Schönes ist, wenn wir nun in unserer „Methode der Tangenten“ für was immer für Kurven (sobald wir nur ihre A zu berechnen wissen) ein unfehlbares und einheitliches Mittel zum Auswerten jener je sechs Formeln besitzen, so hat er sich auch verdient, daß ihm der Lehrer nur die hübschesten jener Anwendungen aussucht. Z. B.: Die Subtangente der Parabel $= p$; des Kreises $= \frac{y^2}{x} = \frac{a^2 - x^2}{x}$ und ebenso groß auch bei der Ellipse; was wir dann nicht unterlassen, auf die schon oben S. 333 empfohlene Art zu veranschaulichen. U. dgl. m.

daß er dann einen wie immer primitiv gewählten Lehrstoff, sei es der Trigonometrie oder auch nur der Euklidischen Planimetrie, interessant und geistbildend zu gestalten verstünde?

§ 44. Das Durchschnittsmaß höherer Rechnungen an höheren Schulen.

Wenn nun alles das, was der vorige Paragraph als Existenzminimum an höheren Rechnungen bezeichnete, an unseren höheren Schulen tatsächlich schon in der Hauptsache – nur vielleicht nicht in der glücklichsten Lehrform – eingelebt ist, warum ist dann die „Frage der Infinitesimalrechnung an höheren Schulen" überhaupt noch eine Frage, ja sogar ein Streitgegenstand? Soweit es die bloße Angst vor dem Worte ist, widmen wir ihr alsbald noch ein paar Worte. In der Sache sei aber sogleich zugestanden, daß, was mehrere der Reformer wollen, in der Tat ein mehr oder weniger ansehnliches Plus über jenes Minimum hinaus ist. Und sogleich sei auch ausgesprochen, daß gegenwärtig auch wir für ein solches Plus eintreten und die eigentlich dankbare Aufgabe der Reform darin sehen, wenn sie die richtige Grenze zwischen dem Mehr und dem Zuviel so abzustecken weiß, daß nicht aus bloßer Angst vor Überschreitungen die wohlbegründeten Bedürfnisse noch länger unbefriedigt bleiben.

Als einen objektiven Maßstab dafür, was die höheren Schulen an höheren Rechnungen auch noch außer dem Berechnen der Tangenten und noch außer dem Berechnen einiger Geschwindigkeiten und Beschleunigungen nicht nur brauchen könnten, sondern wirklich brauchen, wird von allen Vorkämpfern und Verteidigern der höheren Rechnungen an höheren Schulen der physikalische Unterricht nach seinem bisherigen, nicht etwa nach einem erst willkürlich erweiterten Lehrstoff an erster Stelle genannt. Wir werden auf diese Sachlage zu Ende dieses Paragraphen zurückkommen.

Den nächstliegenden Gesichtspunkt aber für die Beurteilung, inwieweit ein Hinausgehen über das im vorigen Paragraphen abgegrenzte Existenzminimum nicht nur möglich, sondern auch wünschenswert ist, liefert der Schrecken aller Nichtkenner der „höheren Mathematik" vor den bloßen Wörtern „Infinitesimalrechnung, Differentialrechnung, Integralrechnung" und vor den Schriftzeichen $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\int x\,dx$, $\int \sin x\,dx$ u. dgl., die ihnen auf Grund ihrer eigenen Mittelschulerinnerungen natürlich so unverständlich sind wie sonst nur weniges auf der Welt, und die sie daher mehr fürchten und – verabscheuen als jeden anderen ihnen unverständlichen Gedanken. – Daher war und ist es das sicherste Mittel, den Argumenten solcher Nichtkenner, die ja in Schulfragen des realistischen Unterrichtes ein lautes und nur zu oft entscheidendes Wort haben, alle Kraft, vielmehr allen Schein von Kraft, zu benehmen, wenn man ihnen diese gefürchteten Zeichen aus den Augen, jene Wörter aus den Ohren räumt. – Gesetzt aber, es seien in der „ersten Dosis" den Schülern durch die Schreibung

$$\frac{y'-y}{x'-x} \text{ für } x'=x \quad \text{und} \quad \frac{s'-s}{t'-t} \text{ für } t'=t$$

die den Richtungen und Geschwindigkeiten zugrunde liegenden Gedanken völlig klar geworden. Wenn nun diese umständliche, nämlich wirklich jeden einzelnen Gedankenschritt – Bilden der Differenzen, ihrer Quotienten und das Ziel (noch nicht auch den Weg) der Grenzübergänge – ausdrücklich zur schriftlichen Darstellung bringende Rechnungsanweisung das Gemeinsame der beiden Begriffe zu vollem Verständnis gebracht hat, können füglich doch auch die hinterher mitgeteilten offiziellen Zeichen

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{ds}{dt}$$

nicht mehr stören. Vielmehr werden sie als eine willkommene Abkürzung der schwerfälligen Schreiberei auch dem Durchschnittsschüler, der die „erste Dosis" gedanklich verdaut hat, willkommen sein, wie und weil sie ebenso in der Differentialrechnung selbst als die handlichsten sich bewährt haben – trotz der Bedenken und nur zu häufig auch sachlichen Mißverständnisse, die sie erweckt haben. Man weiß, wie sich zeitweilig die Scheu vor diesen Zeichen bis zu Versuchen, sie wieder völlig auszuscheiden, gesteigert hat, und wie man sich ausschließlich mit den Zeichen $f'(x)$ u. dgl. zu behelfen gesucht hat. Gegenwärtig weiß man, daß die „Differentiale" harmlos sind, wenn man bei $\frac{dy}{dx}$ nur nicht an einen Quotienten der Grenzen (also zweier Nullen[1]),

---

1) Leider wird gerade diese verhängnisvolle Deutung von $\frac{dy}{dx}$ vertreten in dem Programm (Berlin 1895, Nr. 56) von Hugo Frank, „Einführung in die Infinitesimalrechnung", indem aus $\frac{a^2-b^2}{a-b}$, $\frac{a^3-b^3}{a-b}$ für $b=a$ und zwei anderen Beispielen gefolgert wird: „Der Quotient oder das geometrische Verhältnis $\frac{0}{0}$ ist also an und für sich etwas Unbestimmtes, es *erhält* [?] aber einen be-

sondern wenn man ausdrücklich nur an die **Grenze des Quotienten** aus Δy und Δx denkt, die dieser erreicht, wenn Δx (und abhängig von Δx auch Δy) ihre Grenzen Null (und Null) erreichen. Die dx überhaupt und überall abzuschaffen erscheint schon wegen des Zeichens $\int y\,dx$ aussichtslos. Im übrigen kommen für den Unterricht auch unserer „zweiten Dosis" die dx und dy ohnedies kaum je anders als im $\frac{dy}{dx}$ vor.

Was also alles in allem von pädagogischer Seite zur Frage der Einführung oder auch Nichteinführung der Zeichen für die unvermeidlichen Gedanken der Differentialquotienten zu sagen ist, dürfte sich auf Grundsätze stützen lassen, die anderweitig in der Didaktik geradezu schon zu Gemeinplätzen geworden sind: Zuerst die Sache und die Anschauung von ihr, dann der Gedanke oder der Begriff, zuletzt erst das Wort und das Schriftzeichen! Daß, wo Begriffe fehlen, das Wort oder sonst ein Zeichen nie zur rechten, sondern immer zu unrechter Zeit sich einstellt, versuchen freilich immer wieder der Nominalismus[1]) und eine in der Zuspitzung auf bloße „Zeichen" ihr Heil suchende Überwissenschaft theoretisch zu leugnen. In der Pädagogik aber bürgt die Tatsache, daß alles in allem der Verbalismus in absteigender, der Realismus in aufsteigender Linie sich bewegen, mit der Macht einer Tatsache für das umgekehrte Verhältnis, an dem ein gesund gebliebener Menschenverstand auch nie gezweifelt hat. — Daraus aber folgt für unsere gegenwärtige Frage nach ihrer schlicht pädagogischen Seite: Es kann nicht schaden, wenn dem Schüler die Symbole der Differentialrechnung so lange geradezu fern gehalten werden, bis sich nicht aus allen Anzeichen des physikalischen und mathematischen Unterrichtsbetriebes mit hinreichender

---

stimmten Wert, sobald man weiß, wie die Nullen entstanden sind. Um diese verschiedene Entstehungsweise zu kennzeichnen, schreibt man für den Differentialquotienten $\lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ auch $\frac{dy}{dx}$, wobei dy die aus y, dx die aus x *entstandene Null* [!] bedeutet; dy kann durch dx nicht ersetzt werden, wohl aber dx durch dx [?], denn da $\frac{x_1 - x}{x_1 - x} = 1$ für alle [?] Werte von x, so bleibt es auch 1, wenn x_1 und x zusammenfällt, d. h. $\frac{dx}{dx} = 1$, ebenso $\frac{3dx}{dx} = 3$, aber $\frac{dy}{dx}$ ist unbestimmt, solange man nicht den Zusammenhang von dy und dx kennt. Kennt man aber die Entstehungsweise von dy und dx, so kann man mit ihnen wie mit ganzen [?] Zahlen rechnen, während sonst [?] eine Division mit Null nicht erlaubt ist."

1) Über ihn ein persönliches Bekenntnis „*Non credo*" im III. Teil, S. 435.

Sicherheit gezeigt hat, daß der Gedanke von Grenzwerten, denen die Quotienten verschiedener Größen zustreben, festsitzt, und daß das Einheitliche in der proteusartigen Mannigfaltigkeit, in der dieser Gedanke immer wiederkehrt und sich aus mathematischen und physikalischen Anschauungen heraus geradezu aufdrängt, auch vom Schüler als ein wirkliches Denkbedürfnis lebhaft gefühlt werde. Sind aber diese logisch-didaktischen Vorbedingungen erfüllt, so wäre auch alle weitere Angst vor dem bequemsten Zeichen für den Differentialquotienten nur mehr eine bloße Idiosynkrasie. – Soviel über die Zeichen als solche.

Was nun wieder die Sache selbst betrifft, so beginnen mit beinahe vollständiger Einhelligkeit die rein wissenschaftlichen Darstellungen von Anfangsgründen der Differentialrechnung damit, daß der Quotient

$$\lim \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

einfach „per definitionem“ eingeführt wird. Es besteht also keine geringe Gefahr, daß auch für einen künftigen Mittelschulunterricht mit unverhüllter Differentialrechnung die Versuchung nur allzunahe liege, auch er dürfe oder solle mit solchen „Definitionen“ beginnen. Wir würden aber diesen Weg auch bei einem über das Existenzminimum hinausstrebenden Lehrgang der Differentialrechnung für Mittelschulen für keineswegs besser halten als den viel bedächtigeren, der im vorigen Paragraphen empfohlen wurde: Nicht anfangen mit einer allgemeinen Definition, die freilich ebensogut auf das Tangenten- wie auf das Geschwindigkeitsproblem und noch dazu auf alle die anderen, zum Teil ganz unerwarteten Anwendbarkeiten des Differentialquotienten paßte; sondern man konzentriere für den ersten Anfang das ganze Interesse des Schülers auf das ganz bestimmte phoronomische Problem, wie man für die Geschwindigkeiten Maßzahlen bei nicht konstanten Bewegungen aufstellen soll – später wieder auf das Problem, wie man für jeden Punkt in Linien nicht konstanter Richtung die Richtungskoeffizienten aufstellen soll. Von solchen ganz konkreten, der Anschauung naheliegenden Einzelaufgaben nehme auf alle Fälle (– ob nicht am besten sogar im Hochschulunterricht, solange dies der Mittelschulunterricht versäumt hat?) die Methode des Infinitesimalen ihren Ausgang. Es wird mindestens zweier solcher Einzelaufgaben bedürfen, damit der Schüler an ihnen, gerade weil sie ihm anfänglich schlechthin heterogen, einander völlig wesensfremd erschienen waren, das dennoch Gemeinsame mit heilsamer Überraschung gewahr werde. Erst jetzt ist der pädagogische Moment gekommen, wo dem Schüler die abstrakte, von jeder konkreten Anwendung von vornherein unabhängige und eben darum auch jeder weiteren künftigen Anwendung von vornherein angepaßte allgemeine Definition des Differentialquotienten was immer für einer[1]) Funktion selbst wieder ein gedankliches Bedürfnis geworden ist. Aber auch jetzt, wenn dieses Bedürfnis wirklich durch obige allgemeine Formel, durch den Begriff der „abgeleiteten Funktion" und was sonst an Terminologie und schriftlicher Darstellung unentbehrlich geworden ist, seine theoretische Befriedigung gefunden hat, darf man es nicht an mannigfachen (jedenfalls aber nicht bloß formalistischen) Übungen fehlen lassen, die die neue Symbolik wieder auf die alten, schon vertraut gewordenen Gedanken und letztlich wieder auf die beiden leitenden Anschauungen der Geschwindigkeits- und der Tangentenaufgabe zurückanwenden. Erst bei solchen Anwendungen wird es sich am deutlichsten zeigen, ob es mit der Übersetzung der alten Gedanken in die neue Sprache schnell oder langsam, gewandt oder stockend, vonstatten geht; Überhetzung des Lehrtempos, damit man nur recht bald zu den fertigen Differentialformeln für recht viele einfache und zusammengesetzte Funktionen komme, wäre eine pädagogische Verkehrtheit, die man sicher nicht der Differentialrechnung als solcher in die Schuhe schieben dürfte.

1) Es versteht sich beinahe von selbst oder sollte sich doch verstehen, daß man vor harmlosen Anfängern nicht sogleich die Finessen auskramen wird, es gebe auch nichtdifferentiierbare Funktionen u. dgl. Sträubt sich das wissenschaftliche Gewissen eines Lehrers vor dem zurückhaltenden Stillschweigen über solche Dinge, so mag er sich durch folgende zwei Erwägungen beruhigen: Erstens die allgemein wissenschaftlich-didaktische, daß wir ja nicht erst in der Differentialrechnung, sondern fast in keiner einzigen Wissenschaft die volle Wahrheit, d. h. die Rücksicht nicht nur sozusagen auf die ersten, sondern auch auf die zweiten, dritten Glieder (und das unvermeidliche Restglied) menschlicher Erkenntnisse schon im ersten Anlauf vermitteln können; und eine spezielle Beruhigung mag da dem in exakten Wissenschaften geschulten Lehrer die Rechenpraxis des Astronomen geben, der ja beinahe grundsätzlich mit ersten Annäherungen beginnt und dann immer feinere Zusatzglieder sozusagen Stück um Stück anfügt. — Zweitens ist das stillschweigende Ignorieren der nicht differentiierbaren Funktionen in der Differentialrechnung für Mittelschulen um so sicherer erlaubt, als weder in den Kegelschnitten noch in den physikalischen Anwendungen diese spät entdeckten „Kuriosa" der rein abstrakten Mathematik wirklich vorkommen. Vgl. hierzu (S. 427) die Vorbehalte in Sachen der Fourierschen Zerlegung einer Funktion in eine Reihe von Sinus.

Also z. B.: Wenn wieder an $y = x^2$ jetzt die Prozedur des $\frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$ usw. vollzogen und $2x$ als die abgeleitete Funktion von x^2 bezeichnet worden ist, so lasse man es auch jetzt noch nicht fehlen an Spezialisierungen bis ins einzelne, indem man den Schüler anhält, für $x = 3, 2, 1, 0, -1$ die zugehörigen $6, 4, 2, 0, -2$ sowohl an der Parabel $y = x^2$ durch die zugehörigen $\operatorname{tg} \tau$ und τ, wie auch in der phoronomischen Deutung von $s = t^2$ die $v = 2t$ als Geschwindigkeiten wiederholend durchzuführen; er darf die Sache nicht eher völlig verstanden zu haben sich schmeicheln, ehe ihm nicht jeder dieser Spezialwerte wieder eine konkrete Anschauung geliefert hat.

Eben weil ein solches Herabsteigen ins einzelne und einzelnste an den Hochschulen, wo bisher die Differentialrechnung den relativ elementarsten Teil des ganzen Mathematikunterrichtes gebildet hatte, füglich dem Lernenden je nach seinen eigenen Bedürfnissen überlassen werden durfte (wiewohl auch hier noch das Haften am bloßen Zeichen nur zu oft den Sinn für ein gründlich anschauliches Erfassen erstickt), so bleiben in der Tat einer Didaktik des Mittelschulunterrichtes gerade in den allerersten Anfangsgründen der Differentialrechnung noch Aufgaben zu lösen, die dem Mathematiker vom Fach höchst kleinlich scheinen mögen, dem sorgsamen Lehrer und Lehrbuchverfasser aber ein dankbares Feld seiner didaktischen Kunst darbieten. Mag sich diese „Bewegungsfreiheit“, welche gerade für diese erst neu zu erobernden Gebiete übereinstimmend gefordert und verheißen wird, sonst wie immer betätigen, so wird doch auf alle Fälle anzustreben sein, daß für den Schüler nach jenen Übungen im Konkreten und einzelnen sich nun auch ein volles Verständnis für die allgemeine Aufgabe entwickle, nämlich daß und warum das Bilden einer abgeleiteten Funktion $f'(x)$ zu was immer für einer Funktion $f(x)$ ein nichts weniger als willkürlich ersonnener und bloß „definierter“ Rechnungsvorgang sei.

Wie dies zu geschehen hat, knüpfen wir vielleicht am besten an die Äußerung eines der (damals hartnäckigsten — 1908 bekehrten) Gegner der Differentialrechnung an Mittelschulen an, der so argumentierte[1]: „Da wir durch die Pflege des Funktionsbegriffes ohnedies schon einen neuen Lehrstoff bekommen, so dürfen wir nicht durch das Diffe-

1) Auf dem Mittelschultag, Wien 1906, gelegentlich des Vortrages von ZAHRADNICEK und der Erstattung der „Prager Vorschläge“.

rentiieren noch einen zweiten hereinnehmen." Einer solchen, ganz an den Äußerlichkeiten haftenden Bemessung bloßer Lehrstoffquanta, ohne einen Blick auf und für ihre innere natürliche Zusammengehörigkeit, ist doch wohl entgegenzuhalten:

Was will man denn überhaupt, wenn man zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ eine andere, abgeleitete Funktion $f'(x)$ nach der Rechnungsvorschrift $\lim \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ bildet? Tut man das nur so nebenher, d. h. kann man sich in einen funktionalen Zusammenhang zwischen einem x und $f(x)$ auch ohne ein Hinüberblicken auf das $f'(x)$ vertiefen? Gewiß, man kann die Buchstabengleichung $y=x^2$ in eine Tabelle der numerischen Wertepaare auseinanderlegen, kann dann diese in einem rechtwinkligen Koordinatensystem als eine mehr oder minder dichte Punktreihe graphisch darstellen, kann durch diese Punktreihe eine Kurve legen, an ihr das Abnehmen für negative, das Zunehmen für positive x, den Minimalwert für $x=0$ usw. ablesen. Das alles kann man tun, ohne an die Ausgangsfrage der Differentialrechnung zu rühren. Liegt aber diese weitere Frage fern, oder gehört sie ungezwungen und natürlich mit zur Untersuchung der Funktion $y=x^2$? Unsererseits dächten wir, daß doch jeder, der auch nur begriffen hat, warum denn x^2 als eine „Funktion" von x bezeichnet wird, früher oder später ganz von selbst auf die Frage kommen müßte: In welchem Maße wächst x^2, wenn x wächst; denn daß x^2 stärker wächst als x $\left(\text{für } x > \frac{1}{2}\right)$, gehört ja mit zum allerersten Innewerden des Funktionsgedankens an diesem ersten eindringlichen Beispiele (vgl. S. 23) eines von einfach direkter Proportionalität verschiedenen Zusammenhanges zweier Größen. Jene Frage aber erweist sich sogleich als noch unreif und vag; denn das „Wachsen" von x^2 ist ja ein anderes und anderes, je nachdem man verschiedene x und verschiedene Zuwüchse von x zugrunde legt. Also sehen wir uns bei präzisem Denken ganz von selber vorwärtsgedrängt zur weiteren präzisierenden Frage: Gesetzt, ich nehme ein bestimmtes x, was für Zuwüchse von x^2 entsprechen den verschiedenen Zuwüchsen von x? Und alsbald drängt sich noch präziser der „verschwindend kleine Zuwachs" von x und der ihm zugehörige von y als das bei weitem Interessanteste auf. Von da ab ist es wieder ein gewiß nicht künstlicher, sondern der natürlichste aus dem bloßen Bedürfnis nach Präzisierung der Anfangsfrage sich ergebende Gedankenschritt, daß wir eben nach dem Verhältnis, dem Quotienten jener zwei „verschwindenden" Differenzen fragen. Und für diesen uns nun zum Bedürfnis gewordenen Gedanken ist eben jene Rechnungsanweisung $\lim \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ und gerade nur sie der adäquate und allgemeine schriftliche Ausdruck. Einem Lehrer (es wird hoffentlich nur wenige geben), der diesen natürlichen Zusammenhang zwischen Funktionsbegriff und Differentialrechnung, zwischen $f(x)$ und $f'(x)$, seinerseits nicht lebendig verspürt hat, ist allen Ernstes anzuraten, für seine Person von der „Bewegungsfreiheit" in Sachen mit Differentialrechnung wirklich nur den Gebrauch zu machen, daß er ihr im eigenen wie im Interesse seiner Schüler sorgfältig aus dem Wege geht. Dann aber lieber auch nicht nur der Differentialrechnung, sondern auch dem Funktionsbegriff. Von Geschwindigkeiten und Richtungskoeffizienten, von graphischen Darstellungen usw. mag er, da es nun die „Lehrpläne" einmal verlangen, nach wie vor so gut reden als er eben — kann und es gewöhnt ist.

Wenn dagegen ein Lehrer, der wirklich über seinem Gegenstande steht, das anfängliche Herabsteigen zu den allerspeziellsten „Anwendungen"[1]) der Differentialrechnung und von da das Wiederaufsteigen zu dieser allgemeinen Rechtfertigung des Begriffes einer „abgeleiteten Funktion" glücklich bewerkstelligt hat, so hat er das Unterrichtsziel, das sich eine Fortführung der „Grundgedanken der elementaren Funktionenlehre bis an die Schwelle der Infinitesimalrechnung" für den durchschnittlichen Mittelschüler stecken kann, im wesentlichen auch schon erreicht. Denn es ist nun eine ganz untergeordnete und je nachdem von Schule zu Schule und von Jahrgang zu Jahrgang ganz verschieden zu beantwortende Frage, auf wieviel und wievielerlei einzelne Funktionen man diese allgemeine Anweisung des Differentiierens oder Bildens der abgeleiteten Funktion ausdehnen will. Unsererseits empfehlen wir strengste Sparsamkeit; nämlich kein Differentiieren sozusagen auf Vorrat, sondern nur für jene Funktionen, die im sonstigen mathematischen und physikalischen

---

1) Das mißverstandene Wort „Anwendung" hat, soviel ich sehe, den Wiener Vorschlägen (vgl. S. 5, Anm.) die Zustimmung unnötig erschwert. Denn es erregt den Schein, als sollten immer zuerst die allgemeinen Formeln der Differential- und Integralrechnung abgeleitet werden und dann erst auf die besonderen Aufgaben der Physik und Mathematik (Quadratur, Kubatur, Hydrostatischer Druck, Druckzentrum, Trägheitsmoment, Fallbewegung, Potential usw.) „angewendet" werden. Nach allem Obigen aber denken wir uns ja die „Anwendung", d. h. unmißverständlich: den konkreten Fall immer zuerst und dann erst die Verallgemeinerung in eine abstrakte mathematische Formel. — Es ist also wie nach der didaktischen Auffassung des richtigen Verhältnisses zwischen „reiner" und „angewandter Mathematik" (§ 9 und III. Teil, S. 449) überhaupt: sosehr das Wort „angewandt" für sich zu besagen scheint, daß man das zuerst allgemein haben müsse, was man im besonderen „anwendet", so wenig beweist dieses etymologische Argument für das sachliche Verhältnis zwischen reiner (allgemeiner) und angewandter (besonderer) Mathematik als Wissenschaft, geschweige denn für die Unterrichtspraxis.

Unterricht wirklich vorkommen, und auf deren abgeleitete Funktionen auch der scheinbar ohne Differentialrechnung erteilte Unterricht geführt hatte. So kommen z. B. im Mittelschulunterricht an Funktionen von Funktionen kaum andere vor als log sin und log cos; und hier wäre es ja ganz hübsch, wenn man die den Schüler jeden Augenblick beschäftigenden Proportionalteile einer solchen Tafel ebenso durch ihre Beziehung zu den Differentialquotienten von innen heraus ihm vertraut machen würde wie die Proportionalteile der einfachen Funktionen sin und cos. Offenbar hängt aber das Wesen der Sache nicht daran, wieweit man sich auch nur mit nächstliegenden Anwendungen einläßt, falls nur der Grundgedanke begriffen ist. Das Ideal wäre ja doch auch hier, den Schüler diese naheliegenden Entdeckungen selber machen zu lassen. Um wieviel tiefer sitzt dann so etwas als die bloß „vorgetragene" Anwendung! Daher zum Ausdehnen des Differentiierens auch auf andere Funktionen als die bisher immer fast ausschließlich als Beispiele angeführten x^2, $\sin x$, $\cos x$, wenn überhaupt noch andere zur Sprache kommen sollen, nur kurz folgende spezielle Ratschläge:

Es liegt nahe, dieselben Rechnungsschritte, die an x^2 so eingehend gezeigt und erörtert worden waren, nachzuahmen an $y = x^3$, $y = x^4$ und nun aus $3x^2$, $4x^3$ zur Verallgemeinerung $y = x^m$ durch induzierende Vermutung auf $m \cdot x^{m-1}$ zu schließen; was sich hierauf für ganze positive m ebensoleicht durch den Binomischen Satz wie nach

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + \text{usf.}$$

bestätigt. Ein Bedürfnis nach der Ausdehnung dieser einfachsten Differentialquotientenformel auch auf andere als ganze positive Exponenten dürfte sich aber innerhalb der physikalischen oder sonstigen Anwendungen für die Mittelschulmathematik kaum mehr ergeben; daher mag es auch hier wieder, wie wir es beim Binomischen Satz für nicht ganzzahlig positive Exponenten empfahlen (S. 352), zur Beruhigung des Lehrers genügen, wenn er die Schüler aufmerksam macht, daß und warum für andere als ganze Exponenten die Verallgemeinerung, zu x^m gehöre ebenfalls die abgeleitete Funktion $m \cdot x^{m-1}$, gültig bleibe, daß aber die Beweise hierfür über den Rahmen des Mittelschulunterrichtes gingen. — Den Fall $y = x^{-1}$ lohnt sich wegen der Beziehung zum Gravitationspotential (s. u. S. 415) direkt zu behandeln:

$$\frac{\frac{1}{x'} - \frac{1}{x}}{x' - x} = -\frac{1}{x'x} \text{ usw. } \left(\text{nicht zu verwechseln mit } \frac{1}{x} = \frac{dlx}{dx}\text{; s. u.}\right).$$

Eine unter den österreichischen Anhängern der Reform noch strittige Frage betrifft die Exponentialfunktion und den Logarithmus. Von $\frac{dlx}{dx} = \frac{1}{x}$ Gebrauch machen zu dürfen wäre namentlich bei der barometrischen Höhenmessung willkommen, wenn sich's auch durch elementare Rechnung ebensogut oder -schlecht umgehen läßt wie alle oder fast alle höheren Rechnungen in der elementaren Physik. Immerhin aber erfordert schon das Einführen der Exponentialfunktion und dann die Ermittlung der Limite $\frac{a^\delta - 1}{\delta} = la$ das Betreten von Gebieten, über die man sonst beim Erwähnen des Ausdruckes „natürlicher Logarithmus" im Gegensatze zum Briggsschen immer bloß zu reden pflegte. Wenn sich nun zwar auch die Definitionen von e, von e^x und log nat x oder lx ohne umständliches Eingehen auf Reihenentwicklungen, etwa unter Anknüpfung an die konkrete Aufgabe der „organischen Verzinsung" (S. 347), dem Schüler nahebringen lassen und dann auch aus der Definitionsgleichung von e und e^x fast unmittelbar die für das Differentiieren von Exponentialfunktion und Logarithmus erforderlichen Limitenformeln aufstellen ließen, so hängen doch diese Dinge mit den übrigen Anwendungen der Differentialrechnung, namentlich im physikalischen Unterricht, bei weitem nicht so nahe zusammen, daß man aus dem Differentiieren gerade dieser Funktion eine Kabinettsfrage für die ganze Infinitesimalrechnung an der Mittelschule machen sollte. Es wird immer Lehrer geben, die dies und ähnliches ohne Überbürdung der Schüler einzuflechten wissen, und wieder andere Lehrer, die mit solchen Zugaben lieber und besser sparsam verfahren.

Um so unentbehrlicher sind, wie schon im vorigen Paragraphen gesagt wurde, die Differentialquotienten für Sinus und Kosinus. Ja erst durch die Beziehungen (vgl. hiezu Fig. 97 und Fig. 98, S. 279)

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \qquad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$$

erhalten schon die ersten Regeln der Goniometrie: Sinus ist im ersten Quadranten positiv und wächst, Sinus im zweiten Quadranten positiv und nimmt ab, Kosinus ist im ersten positiv und nimmt ab, im zweiten negativ und nimmt ab (dazu noch: Sinus nimmt anfangs schnell, später langsam zu, Kosinus anfangs langsam, später schnell ab) usf., die man sonst durch endloses Einpauken doch nicht über die immer wiederkehrende Verwechslung von Positivsein und Wachsen, Negativsein und Abnehmen sicherzustellen vermochte, ihre einzig angemessene gedankliche und eben hiermit auch gedächtnismäßige Fixierung. — Von der sonstigen Tragweite, ja völligen Unentbehrlichkeit der Anwendungen gerade dieser beiden Differentialquotienten war ebenfalls schon im vorigen Paragraphen durch die kurze Erwähnung der Wechselströme u. dgl. die Rede: für die Unterscheidung von „Stärke" und „Änderungsgeschwindigkeit“, die bei aller Elektro- und Magnetoinduktion als grundlegend eingeschärft wird, ist die Wechselbeziehung der Funktionen Sinus und Kosinus geradezu vorbildlich. An anderweitige Anwendungen (Regenbogen u. dgl.) erinnert das flüchtige Durchblättern jedes Physikbuches, so daß sie keiner weiteren Aufzählung bedürfen. – Eine nicht unnützliche Draufgabe mag es sein, gerade hier auch auf die Möglichkeit dritter, vierter und höherer Differentialquotienten aufmerksam zu machen, weil eben die Funktionen Sinus und Kosinus durch das Ineinandergreifen ihrer Differentialquotienten und die Wiederkehr nach jenen vier Ableitungen einen neuen Hinweis darauf enthalten, wie es sogar diesen weitgehenden Gedankenbildungen nicht an jeder Möglichkeit der Veranschaulichung fehlt; was dann Licht zurückwerfen mag auf alle jene Schülerfehler, wo Geschwindigkeiten mit Beschleunigungen, Richtungen mit Krümmungen u. dgl. – also erste mit zweiten Differentialquotienten und umgekehrt – verwechselt zu werden pflegen.

Und wie steht es nun um die sonstigen Verallgemeinerungen – das Differentiieren der Funktionen von Funktionen, der Funktionen mehrerer Variablen und was sonst jedes systematische Lehrbuch der Differentialrechnung der Reihe nach behandelt? Wir haben in bezug hierauf nur einen sehr summarischen Rat zu erteilen: Es zuerst, auch nachdem die Erlaubnis zu einem ersten Kleinwenig-Differentiieren erkämpft ist, ein paar Jahre lang noch ohne diese Dinge zu versuchen und dafür an die Erfolge, die der Unterricht mit der vorstehend skizzierten Auswahl aus den allerersten Anfangsgründen der Differentialrechnung beim Durchschnittsschüler erzielt hat, recht strenge Maßstäbe (nicht so sehr an den Schüler als an den Lehrer) anzulegen. So viel wird ja auch der tatenlustigste Neuerer zugeben, daß, wenn irgend etwas von jener „zweiten Dosis“ vom Schüler nicht restlos verdaut und assimiliert ist, alles weitere Füttern mit noch schwererer Kost eine ebenso mörderische Grausamkeit wäre, wie wenn man es bei einem Säugling, der die Muttermilch nicht verträgt, mit Fleischkost versuchen wollte. Die einzig vernünftige Reformpolitik ist die, ein paar Jahre langsam vorgehen und immer erst an dem „Heut’ hast du’s erlebt“ die gedankenlose Angst vor dem Neuen als solchem in sich selber absterben zu lassen. Zu prophezeien, wieviel von einer solchen allmählich fest gewordenen Operationsbasis aus irgendwelche weitergehende Lehren der Differentialrechnung künftig sich erobern mögen, ist heute noch nicht nötig, wenn auch in manchen Punkten nicht schwierig.

Wenn z. B. heute da und dort viel Zeit geopfert wird, um manchmal recht heikle Aufgaben über Maxima und Minima mittels der Diskriminanten quadratischer Gleichungen oder gar durch isolierte Kunstgriffe lösen zu lassen, so wird mit der bloßen Gewöhnung an das Zeichen

$\frac{dy}{dx}$ jener Sport sehr bald der ungekünstelten Methode Platz machen. Oder wer wollte darauf verzichten, die Maxima und Minima von sin durch den Hinweis auf die Nullwerte von cos zu bestätigen u. dgl. m. Natürlich wird man auch bei Maximumaufgaben nicht darauf vergessen, vor allem an unmittelbar einleuchtende elementare Lösungen anzuknüpfen; z. B. daß die Fläche $f = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ die größte für $\gamma = 90^0$ ist.

Ebenso wird für die Mittelschulen, die sich an die Reihen für $\sin x$, $\cos x$ und etwa $l(1+x)$ bisher gewagt hatten, die Mac Laurinsche Reihe[1]) eine sehr willkommene Vereinfachung sein.

Aber gerade auf diese und ähnliche weitergehende Dinge sollten auch die ungeduldigsten Reformer das „Wir können warten“ anwenden, eben weil sie für die bisher skizzierte „erste und zweite Dosis“, wie lächerlich klein sie auch vom Standpunkte der Differentialrechnung sich ausnimmt, im Interesse eines natürlich zu gestaltenden mathematischen Unterrichtes nicht mehr bis zum *consensus omnium* warten wollen und können. – Das beste Lob, das die Bescheidenheit unserer bisherigen Vorschläge ernten könnte, wäre ein spöttisches „Wenn's weiter nichts ist!“ der bisherigen Antireformer.

Über allen solchen immer mehr subjektiven Maßstäben aus den Gewohnheiten der hergebrachten „reinen“ Mathematik steht aber als objektiver das Bedürfnis der im sonstigen Schulunterricht tatsächlich „angewandten“ Mathematik. Darum sei als ein solches objektives Maß dafür, was wir von „höherer Mathematik“ nicht nur brauchen könnten, sondern wirklich brauchen, noch einmal der physikalische Unterricht herangezogen; u. zw. wieder der physikalische Unterricht nach seiner schon bisher traditionell gewordenen Stoffabgrenzung unter gewissenhafter Vermeidung aller bloßen Expansionsgelüste. Will man auf einen Blick überschauen, was der Verfasser vorliegender Didaktik des mathematischen Unterrichtes als durch den gegenwärtigen Physikunterricht an mathematischen Kenntnissen schlechterdings gefordert ansieht, so werden hierüber der „mathematische Anhang“ und die „80 Leitaufgaben“ im Hilfsbuch zur Naturlehre (für Schüler)[2]) den

1) SIMON verlangt wiederholt auch die TAYLORsche Reihe (z. B. 1908, S. 113), obwohl er im ganzen der Differentialrechnung keineswegs die regelmäßige Rolle innerhalb der höheren Schulen zuzuweisen scheint, wie es jetzt verlangt wird. (Z. B. 1908, S. 170: „Will der Lehrer Differentialrechnung oder höhere Algebra treiben, so hindere man ihn nicht, vorausgesetzt, daß er das Notwendige absolviert hat.“) Dagegen nimmt SIMON beträchtliche Teile der algebraischen Analysis allenthalben und, wie es scheint, als regelmäßig zu fordernde Lehrstoffe in Aussicht. – Überhaupt scheinen einige Partien aus der „algebraischen Analysis“ an preußischen Schulen seit langem oder kurzem Gewohnheitsrechte inne zu haben, die den österreichischen immer fremd waren.

2) Dagegen enthält die große Ausgabe der Physik (für den Lehrer) und das „Hilfsbuch zur Physik“ ein beträchtliches Plus (z. B. 230 Leitaufgaben

raschesten Überblick geben. Es finden sich dort mehrere Gegenstände, die vom Standpunkt des überlieferten Mathematikunterrichtes sich wie völlige Neueindringlinge ausnehmen: so Krümmungshalbmesser, einhüllende Kurven, Trajektorien. Wenn aber von ihnen auch zuzugeben ist, daß sie für den hergebrachten Unterricht der Elementarmathematik einfach nicht existiert haben, so ist doch nicht minder zuzugeben, daß sich der Physikunterricht ihrer längst bei wiederholten Gelegenheiten bedient hat und bedienen mußte: des Krümmungsmittelpunktes und Krümmungshalbmessers bei den Spiegeln und Linsen, bei elliptischen Planetenbahnen, bei der Beschleunigung (Zentripetalbeschleunigung und -kraft); der einhüllenden Kurven und Flächen bei den Brennlinien an Spiegeln und Linsen und insbesondere beim Huygensschen Prinzip; der Trajektorien bei den Niveau- und Kraftlinien, bei der Stromverzweigung. – Oder will man dem physikalischen Unterricht eine dieser physikalischen Lehren noch verbieten – sind sie nicht physikalisch so grundlegend[1]), daß man mit ihrem Aufgeben auch noch ganze weitere Partien aufgeben müßte? Freilich mochte und mußte es bei einem mehr oder minder oberflächlichen Erwähnen dieser Begriffe und Termini sein Bewenden haben, wenn jene Dinge im Physikunterricht zur Sprache kamen und Schüler und Lehrer jedesmal spürten, daß das eben mathematische Dinge wären, die zu erwähnen aber der mathematische Unterricht überhaupt vergessen hatte, nur weil es in die traditionelle Abgrenzung der Elementarmathematik nun einmal nicht paßte. – Wie ist nun gegen solche Oberflächlichkeit Abhilfe zu treffen? Einfach dadurch, daß auch der Mathematikunterricht die Scheuklappen gegen jene Bedürfnisse des Physikunterrichtes endlich ablegt und sich bewußt wird, daß er auch in diesen Punkten Pflichten gegen die Nachbardisziplin hat, und daß er diesen Pflichten sehr wohl nachkommen kann, wenn er nur erst den wissenschaftlichen Egoismus einer möglichst „reinen Mathematik", die immer nur sich selbst Zweck ist, aufgegeben hat.

Wenn aber auch aus all diesen Gründen die Sache eines maßvollen Gebrauches der Differentialrechnung an höheren Schulen

---

statt der nur 80 des „Hilfsbuch zur Naturlehre"), das auch der „dritten Dosis" nur zu wechselnder Wahl dienen will; s. u. S. 425.

1) Freilich ist z. B. die Brennlinie „grundlegend" nicht in demselben Sinne wie das Reflexions- und das Brechungsgesetz. Aber der Schüler, der in seiner Kaffeetasse oder im Innern eines Fingerringes eben die Brennlinie erblickt – soll er sich einer Insubordination schuldig fühlen, wenn ihn die hübsche Kurve mehr interessiert als der „Brennpunkt", von dem sein Lehrbuch allein zu reden für gut findet? – Für die Entwöhnung von bloßer Buchphysik und Ermutigung zur Naturphysik sind gerade solche Anpassungen an die Naturmathematik, die nun einmal meistens „höhere" ist, gar sehr „grundlegend".

unverkennbar und zum Teil schon tatsächlich eine siegreiche ist, so ist um so stärker umstritten augenblicklich noch die Frage:

§ 45. Auch Integralrechnung?

Ob auch von dieser an der Mittelschule die Rede sein dürfe, versteht sich keineswegs jedem von selbst, der in Sachen der Differentialrechnung nicht nur der ersten, sondern auch der vorstehend skizzierten zweiten Dosis zustimmt. — Der Verfasser hatte erst jüngst wieder Gelegenheit gehabt, jene Frage strikt verneinen zu hören, hatte aber dabei Gelegenheit, sich zu überzeugen, daß an denjenigen Lehrgang, für den wir sie unsererseits bejahen zu dürfen und müssen glauben, gar nicht einmal gedacht worden war.

Vor allem also wieder einige Bemerkungen, wie man es jedenfalls nicht machen soll. Bloß zu sagen, daß es zum „Differentiieren" eine inverse Operation, das „Integrieren" gebe, nützt dem Schüler gar nichts. Es wird ihm aber auch schwerlich etwas nützen, wenn man jene Nominaldefinition sogleich dahin anwendet, daß man einige von den entwickelten Differentialformeln z. B. $d(x^2) = 2x\,dx$ in der Form $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$ und $d(\sin x) = \cos x\,dx$ in der Form $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ u. dgl. m. hinschreiben läßt. Vielmehr schließen wir uns denjenigen an, die einen für den Schüler wirklich lebensvollen Anlaß, von Integralen und von Integrieren zu sprechen, nur in den bestimmten Integralen sehen. Ohne Frage ist es dann schon eine der schwierigeren Zumutungen an den Anfänger, innerhalb der zweiten Dosis höherer Rechnungen auch noch die Beziehungen des bestimmten zum unbestimmten Integral und damit wieder zum Differentiieren zu überblicken. — Wie wir dies meinen, und wie die Sache zu machen ist, damit sie nicht wie ein erratischer Block in den Elementarunterricht hineinstürzt, zeigen vielleicht schon ausreichend die wenigen Beispiele, die in des Verfassers „Physik" und „Naturlehre", Anhang aus der angewandten Mathematik, Nr. 15, „Summen von unendlich vielen unendlich kleinen nach einem bestimmten Gesetz fortschreitenden Größen" behufs Einführung des Begriffs „Integral" ausgewählt wurden. Doch mag jener Vorgang in Beispielen noch durch ein paar grundsätzliche Erwägungen gerechtfertigt werden:

Vor allem machen wir den Feinden des Integrierens an der Mittelschule das Zugeständnis, daß Begriff, Name und Symbol des Integrals hier nichts zu suchen haben, wenn die Sache selbst bisher der Mittelschule fern geblieben war. Dies wurde von den oben erwähnten jüngsten Gegnern auch behauptet; aber nur in offener Verkennung und Leugnung unleugbarer Tatsachen. Denn tatsächlich hat man, um wieder beim oberen Ende des bisherigen Unterrichts zu beginnen, längst allerorts die Flächenformeln für die Parabel $f = \frac{2}{3}xy$ und für die Ellipse $f = ab\pi$ behandelt. Hiebei werden die krummlinig begrenzten Flächen in „schmale" Streifen zerlegt, und das ist – gleichviel, ob man mit mehr oder weniger Recht und in mehr oder weniger strenger Begründung von „unendlich schmalen" Streifen spricht – unleugbar der Ansatz zum Integrieren. Ein solches ist aber auch jede der einzelnen Anwendungen, die man im vorausgegangenen Stereometrieunterricht vom Cavalierischen Prinzip gemacht hat. Und niemand wird leugnen können und wollen, daß überhaupt alles, was auf des ARCHIMEDES „Exhaustionsmethode"[1]) zurückgeht, wie jene Parabelformel $\frac{2}{3}xy$, eben Integralrechnung ist, ganz gleichviel, ob man es so nennt oder ob man das Wort ebenso verschweigen will, wie man das Wort Differentialrechnung beim Ableiten der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen oder bei den Richtungskoeffizienten des Tangentenproblems die längste Zeit verschwieg. – Dazu kommen dann wiederum die zahlreichen Anwendungen des Integrierens schon in den grundlegendsten Teilen eines elementaren Physikunterrichts. So z. B., wenn man (wie es wenigstens früher allgemein üblich war) die Wegformel $s = \frac{1}{2}gt^2$ aus der gegebenen konstanten Beschleunigung durch Summierung (nicht wie oben umgekehrt: aus $s = \frac{1}{2}gt^2$ durch zweimaliges Differentiieren $v = gt$ und $w = g$) entwickelte; wie denn auch die das rechnende Summieren der arithmetischen Reihe stetig wachsender Wegstrecken geistreich ersetzende graphische Methode Galileis ein solches Integrieren war. Ganz dieselbe arithmetische und geometrische Methode liefert

1) Daß der Begriff „Exhaustionsmethode" enger ist, als man ihn gewöhnlich nimmt, nämlich einen Grenzübergang speziell mittels geometrischer Reihen bezeichnet, vgl. bei TANNERY (s. o. S. 382 Anm.) S. 333. –

Vielleicht hilft es ebenfalls den Widerstand gegen Integralrechnung an Mittelschulen bei denen, die sich mit Differentialrechnung befreundet haben, wenigstens mildern, wenn sie sogleich den ersten Satz jener historischen Darstellung lesen: „Die ersten Probleme der Differential- und Integralrechnung, die gestellt und gelöst wurden, sind Probleme über Quadratur und Kubatur". – Also bestimmte Integrale lange vor dem Differentiieren!

dann auch die Summen von Elementararbeiten gegen elastische Kräfte, beim Laden eines Konduktors u. dgl. m. (vgl. S. 336).

Wenn nun solchen Konstatierungen gegenüber die Feinde des Integrierens triumphierend entgegnen: Du siehst ja, daß all das ohne Integrieren gegangen ist — so müssen wir ihnen leider erwidern: Ihr scheint doch recht wenig tief eingesehen zu haben, was ihr bei jeder dieser Rechnungen eigentlich getan habt; und leider können wir ihnen gerade nach dem Maßstab einer gesunden Didaktik nicht „verzeihen, denn sie wissen nicht, was sie tun". Versuchen wir aber dennoch eine Verständigung, indem wir zuerst an einem allerprimitivsten Beispiel auf denjenigen Gedanken eingehen, der die vermeintliche Stärke der Gegner bildet. Es sei die

Aufgabe: Die Fläche des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten x, y zu bestimmen. Nun: „Ohne alle Integralrechnung wissen wir, daß $f = \frac{1}{2}xy$, weil eben das Dreieck die Hälfte des Rechtecks mit den Seiten x, y ist." — Gut. Aber es ist doch auch eine naheliegende Vorstellung, sich diese Dreiecke in Gedanken aufzubauen aus den schmalen Streifen, deren Längsausdehnung der Seite y parallel ist, und deren einzelne Größen von Null an (der der Seite y gegenüberliegenden Spitze) nach dem Gesetz einer geraden Linie (der Hypotenuse) stetig wachsen bis zum letzten Streifen von der größten Länge y, wo im einfachsten Falle $y = x$ (allgemeiner $y = Ax$) ist. Will man die Summe all dieser unendlich vielen unendlich schmalen Streifen wissen, so muß man nun freilich nicht erst nach einer bestimmten Methode rechnen — auch wenn man eingesehen hat, daß sie nach dem Gesetz einer arithmetischen Reihe wachsen: denn man weiß eben, die fertige Summe ist die Hälfte des Rechtecks xy. Aber man kann doch auch die Summe[1])

$$(\xi + 2\xi + \cdots + \overline{n-1}\,\xi)\,\xi = \tfrac{1}{2}(n-1)\cdot(n-1+1)\,\xi^2 \doteq \frac{x^2}{2}$$

(allgemeiner $\frac{1}{2}xy$) vor den Augen der Schüler aus ihren „unendlich vielen Gliedern" aufbauen. Und sollte eine solche „zweite Methode" nicht didaktisch aus mehr als einem Grunde willkommen sein?

Liegt sodann nicht auch schon einem Mittelschüler nahe genug die Frage, was sich an der Sache ändern würde, wenn dieser Streifen nicht nach dem Gesetz einer geraden Linie $y = x$ oder $y = Ax$, sondern z. B. einer Parabel $y = x^2$ oder $y = Ax^2$ wüchse? Darauf geben die der Integralrechnung Unbedürftigen als Antwort die freilich wunderbar hübsche Ableitung (Fig. 142, frei nach ARCHIMEDES), die zeigt, daß

1) Die strengere Einschließung zwischen zwei Grenzen vgl. meine Physik. Leitaufgabe Nr. 9.

je zwei zusammengehörige Streifen innerhalb und außerhalb der Parabel sich wie 1 : 2 verhalten[1]) und daß somit das von x, y und dem Parabelbogen begrenzte Stück ein Drittel des Rechtecks aus x und y, also für die (gegen Fig. 142 um 90° gedrehte) Parabel $y = x^2$ den Wert hat:

$$f = \tfrac{1}{3} x \cdot x^2 = \frac{x^3}{3} \cdot \; -$$

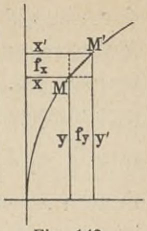


Fig. 142.

Merken aber nun unsere Gegner nicht, daß sie hiermit dem Schüler wieder etwas vorenthalten, indem sie mit *Kunstgriffen* arbeiten, die für jeden halbwegs denkenden Anfänger als „ein Erdenrest zu tragen peinlich“ empfunden werden müssen, so hübsch jeder einzelne für sich auch sei; denn es „fehlt leider nur das geistige Band“ zwischen diesen verschiedenen einzelnen Kunstgriffen. — Aber freilich, das war ja eben der Zustand auch unserer Wissenschaft selber während des ganzen Jahrhunderts vor der sog. Erfindung der Integralrechnung durch Newton und Leibniz[2]). Gewiß, die einzelnen Kunstgriffe, mittels deren Guldin, Fermat und so viele andere manchmal ganz verzwickte Summierungen zu bewältigen wußten, repräsentierten für sich und vollends zusammen genommen hundertmal mehr Scharfsinn als *nach* jener Erfindung das simple Besinnen auf die inversen Differentialformeln und das Einsetzen der Grenzen. Wer aber würde darum wagen, der endlich gefundenen *Methode* jene unmethodischen, wenn auch noch so schlau ausgeklügelten einzelnen Lösungen der einzelnen Probleme vorzuziehen? Und wer wagt, was er rein wissenschaftlich als Fortschritt *nicht* zu verstehen doch wohl kaum eingestehen möchte, rein didaktisch nicht als Fortschritt gelten zu lassen? — Also das von uns Gemeinte nun sofort als positiver Vorschlag formuliert:

Nach wie vor lassen wir zuerst die *Summierungen*, die sich uns in Planimetrie, Stereometrie, analytischer Geometrie und zumal in der Physik immer und immer wieder als ganz natürlich in der Natur der Sache gelegene Aufgaben aufdrängen, nach den altbewährten einzelnen Kunstgriffen lösen. Aber allmählich machen wir doch auch auf das *Gemeinsame* aller dieser Aufgaben, daß es sich hier um ein Summieren *stetig* wachsender Größen handle, aufmerksam — und auch

---

1) In meiner Physik (Anhang der angewandten Mathematik, Nr. 21) ist die Ableitung dargestellt als Beispiel verschiedener Methoden der Annäherung (aus Recktecks-, Trapezstreifen), die schließlich zur *selben Grenze* führen.

2) Vgl. hiezu aus dem oben (S. 382, Anm.) empfohlenen geschichtlichen Anhang zu Tannery, was alles im Unterricht zu erwähnen wäre, damit die gewöhnliche Darstellung, die Differentialrechnung sei von Newton als („Fluxions“)-Methode der Geschwindigkeiten, von Leibniz als „Methode der Tangenten“ erfunden worden, nicht den Schüler zur irrigen Meinung verleite, als hätten gerade diese zwei großen Entdeckungen keine sozusagen organische Vorgeschichte gehabt.

darauf, daß gleichwohl jedes dieser Beispiele nach einer anderen Methode, eigentlich also nach keiner einheitlichen Methode gelöst worden sei. Sollte es da unseren Schülern allzuviel zugetraut sein, daß irgendeiner von ihnen eines Tages angesichts z. B. jener beiden Resultate $\frac{x^2}{2}$ und $\frac{x^3}{3}$ darauf verfällt, diese Beziehung zu den Differentialquotienten zu wittern? Würde der Lehrer, dem einer mit dieser Entdeckung kommt, sie als „nicht in die Mittelschule gehörig" zurückweisen wollen? Wer in seiner Gegnerschaft nicht soweit geht, bedarf natürlich aber auch keiner Ratschläge mehr, wie er nun dem Schüler die Freude an seiner Entdeckung zu einem bleibenden Besitz und, was noch wichtiger ist, zur Freude an weiterem Erwerben solchen Besitzes in künftigen Hochschulstudien gestalten solle. Ohne bestimmte Vorschläge für die didaktische Ausgestaltung, die ja von Fall zu Fall, von Schüler zu Schüler und von Lehrer zu Lehrer wechseln wird, hier näher ausführen zu wollen, halten wir als den Kern aus den bisherigen Beispielen folgendes fest:

Von Integralen und vom Integrieren ist in der Mittelschule dort und nur dort zu sprechen, wo schon der bisherige Lehrstoff und Unterricht auf das Summieren stetig wachsender Größen geführt und solche Aufgaben durch Kunstgriffe von Fall zu Fall gelöst hatte. Gelegentlich irgendeiner dieser Aufgaben (wohl kaum früher, als bis der übrige Unterricht auf den Begriff des Differentials und auf die Zeichen dx, dt usw. geführt hatte) wird mitgeteilt, daß für solche Summen das Summenzeichen $\int$ unter dem Namen „Integralzeichen" gebräuchlich ist, und daß und warum man schreibt $\int_0^x x\,dx$, $\int_0^x x^2\,dx$, allgemein $\int_a^b f(x)\,dx$.

Hiebei war noch keinerlei Rede von dem Zusammenhang dieser bestimmten mit dem unbestimmten Integrale, also auch nicht von dem Zusammenhang mit dem Differentiieren; und auch die Namen „Integral" und „Integrieren" (d. h. Rückgängigmachen eines vorausgegangen gedachten Differentiierens) bleiben daher fürs erste unerklärt.

Sind dann für die bisher vorgekommenen, in diese Form bestimmter Integrale gebrachten Summen die durch die jeweiligen Kunstgriffe gefundenen Einzelergebnisse hingeschrieben, so wartet nun der Lehrer am besten ab, ob einigen Schülern der Zusammenhang zwischen den Ausgangswerten x, x^2 und den Summenwerten $\frac{x^2}{2}$, $\frac{x^3}{3}$ von selbst auffällt. Höchstens mag er „ein Hölzchen werfen“ durch die Mitteilung, daß Integrieren und Differentiieren zueinander inverse Operationen seien, wie Dividieren und Multiplizieren; und er mag dann wieder abwarten, ob nun einzelnen Schülern hierüber das nötige Licht an allereinfachsten Induktionsfällen aufgeht, also $d\frac{x^2}{2} = x\,dx$, $d\frac{x^3}{3} = x^2 dx$, und deshalb $\int\limits_0^x x\,dx = \frac{x^2}{2}$, $\int\limits_0^x x^2 dx = \frac{x^3}{3}$. Wenn ja, so kann nun diese Induktion bestätigt werden durch weitere Beispiele, wie etwa $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1$, falls die elementare Integration der Sinuskurve nach S. 296 behandelt worden war; desgleichen $\int\limits_0^R \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{R}$ als kurzer Ausdruck für die in der physikalischen Lehre vom Potential entwickelte Summe[1]), die nun nachträglich durch $\frac{d}{dr}\left(-\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}$ den physikalischen Zusammenhang zwischen Arbeit, Kraft und Weg mathematisch durchleuchtet.

All dies tastende Suchen nach einer festen einheitlichen Methode für das Bilden jener Summen (statt jener Kunstgriffe) läßt sich aber, falls der Schüler sich bis hieher durchgearbeitet hat (denn gerade solche feinere Dinge wollen wir ihm am allerwenigsten mit dem Nürnberger Trichter eingeben), zum Glück sehr leicht und konkret in die Form eines festen Beweises fassen: es ist der Beweis für den Satz, daß die letzte Ordinate einer als Funktion der Abszisse ausgedrückten Fläche $F(x)$ durch genau die nämliche Operation $\lim\limits_{\Delta x = 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$ gewonnen wird, durch die wir aus $f(x)$ den Differentialquotienten $\lim\limits_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ gewonnen hatten.

Zwar ist es nicht wahrscheinlich, daß, wenn der hiemit skizzierte Vorgang auch noch so sehr der didaktisch geratenste wäre, aus den Gegnern der Integralrechnung am Gymnasium sogleich Anhänger werden; doch mögen im folgenden noch einige (für die schon vorhandenen oder gewonnenen Anhänger allerdings überflüssige) Einzelausführungen folgen:

---

1) Vgl. meine „Physik“ und „Naturlehre“ § 22.

Längst war es im Physikunterricht eingebürgert[1]), die Trägheitsmomente einiger einfachst gestalteter homogener Körper berechnen zu lassen. Das physikalisch einfachste solcher Beispiele ist das Trägheitsmoment der Strecke für eine durch ihren Endpunkt gehende zu ihr normale Achse. Die bekannte Rechnung[2]) führt auf die Reihe $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2$, deren Summierung man unter den Übungsaufgaben der arithmetischen Reihen zu behandeln pflegt (z. B. HEIS § 82, Nr. 22). Bekanntlich läßt sich diese Summierung auf mehrere Arten durchführen, die aber fast alle wieder den Charakter schon nicht mehr ganz nahe liegender Kunstgriffe[3]) haben. Hat man sich hierauf im Arithmetikunterricht eingelassen, so hat auch jene Aufgabe vom Trägheitsmoment der Strecke für den Physikunterricht gar keine Schwierigkeit[3]). Nun wird man aber wohl fragen dürfen, ob das Bildende jener arithmetischen und dieser physikalischen Rechnungen voll herausgearbeitet worden ist, wenn man es unterlassen hat, darauf hinzuweisen, daß das Charakteristische dieser Berechnung eines Trägheitsmomentes

1) Wie schon oben (S. 376 Anm.) erwähnt, haben die österreichischen Instruktionen von 1898 und 1900 allerdings den Versuch gemacht, das Trägheitsmoment an den Gymnasien und Realschulen abzuschaffen, und auch die neuesten Lehrpläne haben jenen Fehler nicht gutgemacht. Es ist an dieser Stelle nicht darauf einzugehen, welche Bedürfnisse des physikalischen Unterrichtes als solchen durch eine solche Gewaltkur (à la Doktor Eisenbart) verletzt werden. Wohl aber ist es ein trauriges Mißtrauensvotum gegen den mathematischen Unterricht als solchen, den man für unfähig erklärt, dem physikalischen auch nur in dem Ausmaße, das für die paar Summierungen ausreicht, in die Hände zu arbeiten.

2) Sie lautet (vgl. Physik, LA. 90): „Denken wir uns die Länge l unterteilt in n sehr kurze, gleiche Strecken ρ, und denken wir uns die Masse m des ersten Elementes im Abstand ρ, die des nächsten in 2ρ, des dritten in $3\rho \ldots$ cm von der Achse vereinigt, so ist:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= m\rho^2 + m(2\rho)^2 + m(3\rho)^2 + \cdots + m(n\rho)^2 \\ &= m\rho^2 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 \cdots + n^2) \\ &+ m\rho^2 \cdot \frac{n^3}{3} = {}^1/_3\,(mn)(n\rho)^2 = {}^1/_3\, Ml^2. \end{aligned}$$

3) Freilich darf man es nicht so machen wie das Physiklehrbuch von MÜNCH, das einfach dekretierte, es sei $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3}$. Denn ein nicht ganz gläubiger Schüler überzeugt sich doch gar zu leicht durch Einsetzen einer besonderen Zahl, daß dies einfach nicht wahr ist. Damit die Sache mit richtigen Dingen zugehe, sollte der Arithmetikunterricht im Interesse des Physikunterrichtes nicht unterlassen (– HEIS aber hat es a. a. O. unterlassen), nach Ableitung der Summenformel (vgl. S. 337 und Math. Anhang zur Physik, Nr. 10) darauf aufmerksam zu machen, daß sie sich für $n = \infty$ der Grenze $\frac{n^3}{3}$ nähert (– der Eindruck, daß das keine eigentliche „Grenze" mehr sei, da ja $\frac{\infty^3}{3} = \infty$, erledigt sich durch den Hinweis auf jenes $(mn) = M$ und $(n\rho)^2 = l^2$).

nicht in den zufälligen Kunstgriffen besteht, die zur Reihensummierung hatten verwendet werden müssen; sondern schon in der unvermeidlichen Ausgangsfrage, wie man es anstellen soll, die Summe der Trägheitsmomente aller Teilstrecken zu bilden, wiewohl ja diese Streckenelemente unendlich zahlreich, weil verschwindend klein genommen werden müssen (denn mit dem Wegrücken eines Massenpunktes um auch noch so wenig von der Drehungsachse ändert sich sein Trägheitsmoment schon wieder etwas). Wer vor aller Rechnerei den Schüler diesen eigentlichen Sitz der Schwierigkeit hat verspüren lassen, kann aber sogleich aus dem Schüler auch leicht herausfragen, daß diese Schwierigkeit ja keineswegs erst „von heute" sei, sondern daß uns etwas ganz Wesensgleiches längst vorgekommen war; z. B. als wir auch nur das Volumen einer Pyramide oder eines Kegels hatten berechnen wollen: denn wie immer wir dabei das Cavalierische Prinzip uns zunutze gemacht hatten, so schließt ja auch dieses Prinzip wieder die wesentliche Schwierigkeit ein, daß wir die einzelnen Scheiben, in die wir die Pyramide geschnitten hatten, wie Prismen behandeln, wiewohl es ja keine Prismen sind, auch wenn wir ihrer „unendlich viele unendlich dünne" nehmen. — Hier nun richten wir an den erklärten Feind aller Integralrechnung an Mittelschulen die Anfrage (nicht eine rhetorische Frage, sondern eine wirkliche Anfrage), wie er sich aus dieser Schwierigkeit herauszuziehen pflegt, ohne irgend etwas zu berühren, was der Kenner der Integralrechnung nicht als deren wesentlichen Grundgedanken reklamieren müßte. Man wende nicht ein, daß die von uns (oben S. 217) besprochene Veranschaulichung mit den sich tubusartig ineinander schiebenden „Ringen" alle solche infinitesimalen Betrachtungen umgangen habe; ein solches Lob wäre unverdient, denn wir entgehen bei jenem Ineinanderschieben in eine „Platte" nicht der Berufung auf den infinitesimalen Gedanken, daß die bei dem einen und dem anderen Körper verbleibenden Restplatten nur dann sicher und genau gleich werden, wenn jede für sich den Grenzwert Null erreicht. Und um einen solchen Gedanken, der den Grundgedanken aller Grenzübergänge beim bestimmten Integral bildet, kommen wir auch nicht herum, wenn wir bei den Quadraturen der Ellipse und Parabel die kleinen Rechtecke, um die die äußeren und die inneren Rechteckstreifen differieren (Fig. 142), zu einem Streifen zusammenschieben — kurz wir entgehen ihm nirgends, wo wir Summen aus unendlich vielen, unendlich kleinen, nach einem bestimmten Gesetze fortschreitenden Größen zu bilden haben. Ob wir dann solche Summen, wie wir sie allenthalben auch schon im Elementarunterrichte des Gymnasiums und der Realschule zu bilden haben, und die eben — **Integrale** sind, auch vor Schülerohren so zu nennen uns getrauen oder nicht, ist offenbar eine völlig sekundäre und untergeordnete Frage. Wieder und noch einmal sei ausdrücklich hervorgehoben, daß es auf diesen Gedanken ankommt, nicht auf das Wort und das schriftliche Symbol; so daß wir sogar auch wieder (wie oben, S. 399, bei den Differentialquotienten bemerkt) aus der Not eine Tugend machen können, falls wir es wirklich für eine Erleichterung halten, dem Schüler zwar den Gedanken der mit ihm herkömmlicherweise behandelten Integrationen von Grund aus klar zu machen, ihm aber dabei das hiefür bewährte Zeichen $\int_a^b f(x)\,dx$ vorzuenthalten. Auf jeden Fall wäre dem Schüler dieses allgemeine Zeichen ebenso erst gegen Schluß der ganzen Betrachtungsweise mitzuteilen, wie wir ja auch mit dem allgemeinen Zeichen $f(x)$ erst zu einer Zeit herausrückten (zu Anfang des VII. Jhgs.), da vorher der Schüler schon längst mit besonderen Funktionen vertraut geworden war; und ebenso auch mit $\lim \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ erst nach zahlreichen Einzelbeispielen (S. 400).

Gesetzt dagegen, der Lehrer teilt die Scheu vor dem $\int$-Zeichen nicht, so würde er, sobald er z. B. gelegentlich der Flächenberechnung des Ellipsenquadranten durch Zerlegung in schmale Rechtecke und Vergleichung mit den entsprechenden des Kreisquadranten $\frac{1}{4}\,a \cdot a \cdot \pi$ (ganz unter Beschränkung auf die herkömmlichen elementaren Formen der Schreibung) den Wert $\frac{1}{4}\,a \cdot b \cdot \pi$ gefunden hat, nun nach Schluß dieser Rechnung den Schülern mitteilen: Was wir jetzt berechnet haben, schreibt man in der Integralrechnung so:

$$F = \int_0^a y\,dx = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{4}\,ab\pi$$

(— wo diese Funktion $\sqrt{a^2 - x^2}$ unter dem $\int$-Zeichen eine ist, für die sich der Rückgang auf das zugehörige unbestimmte Integral und die Methode seiner Auswertung wohl kaum mehr dem Durchschnittsschüler mit Erfolg zeigen läßt).

Ebenso im obigen Beispiel vom Trägheitsmoment einer Strecke; erst nach der elementaren Rechnung teilen wir den Schülern mit: Was wir jetzt berechnet haben, schreibt man (von den auf die Masse bzw. Dichte bezüglichen Faktoren abgesehen) in der Integralrechnung so:

$$M = \int_0^l x^2\,dx = \frac{l^3}{3}.$$

Ebenso in dem noch viel einfacheren Beispiel der Arbeit gegen elastische Kräfte; auch hier sagen wir erst nach der elementaren Berechnung mittels des Arbeitsdiagramms[1]), das diesmal ein recht-

1) Physik und Naturlehre, § 22, 2. Aufgabe.

winkliges Dreieck ist: Was wir jetzt berechnet haben, schreibt man in der Integralrechnung so: $A = \int_0^s \kappa x \cdot dx = \frac{1}{2}\kappa s^2$. –

Als ein ganz dem Mathematik- (nicht Physik-)Unterricht angehöriges Beispiel sei noch das von den Oberflächen der Körper aus der Drehung regelmäßiger Vielecke um einen Eckendurchmesser (S. 214) in Erinnerung gebracht. Schon an jener frühen Stelle des Mathematikunterrichtes darf man sich nicht damit begnügt haben, dem Schüler die schöne Uniformierung der drei Formeln für
Zylinder $m = 2\pi r \cdot h$, Kegel $m = r\pi \cdot s$, Kegelstutze $m = (R + r)\pi \cdot s$
zu $m = 2\pi\rho \cdot h$ nur „beizubringen", ohne ihn auf den tieferen Grund und Zweck dieser Transformation aufmerksam und ihm diese voll verständlich zu machen. In der Sprache des Integrierens läßt er sich so ausdrücken, daß es galt, an Stelle der je zwei veränderlichen Größen r und h beim Zylinder, r und s beim Kegel und der drei R, r, s beim Kegelstutz alles auf Eine Veränderliche h zu bringen, wie sie sich in der Formel $2\pi\rho \cdot h$ aussondert, nachdem wir alles übrige in der Konstanten $2\rho\pi$ untergebracht haben. Es war also jene Rechnung ein Ersetzen von $\int dm$ durch $\int_0^{2r} 2\rho\pi dh = 2\pi\rho \int_0^{2r} dh = 2\pi\rho \cdot 2r$ usw., wo für den Übergang der regelmäßigen $2n$-Ecke in den erzeugenden Kreis der Kugel auch $\lim\limits_{n=\infty} \rho = r$.

Daß das Ansetzen des bestimmten Integrals gerade immer die Besiegung einer solchen Schwierigkeit anstrebt und erreicht, muß dann der Schüler auch bei den übrigen Anwendungen spüren; z. B. beim Trägheitsmoment einer Strecke, ja schon bei der Fläche des rechtwinkligen Dreieckes, das wir aus stetig wachsenden Streifen zusammengesetzt denken. –

Es darf dem Lehrer überlassen bleiben, zu entscheiden, durch wie viele solcher Beispiele er die Schüler vorwärmen will für die verallgemeinernde Mitteilung, daß und warum sehr viele und welche der bisher durchgenommenen elementaren Rechnungen des Mathematik- und Physikunterrichtes eigentlich „Integrationen" gewesen seien; was ja als rein tatsächlich zu konstatieren nicht einmal der Gegner der Integralrechnung an der Mittelschule wird verwehren bzw. leugnen wollen.

Wie fern es uns dagegen liegt, etwa dem Schüler ein fertiges, wenn auch noch so sparsames Verzeichnis von Formeln unbestimmter Integrale aufzuladen, wird auch dem Gegner unseres Vorschlages der Rückblick auf den bisher geschilderten Weg zeigen. Auch wer diesen Weg nicht bis dahin fortsetzen zu sollen meint, wo er den Schüler auf die Spur leitet, daß der ihm durch obige Summendefinitionen nahegebrachte Begriff des bestimmten Integrals[1]) irgend etwas zu tun habe mit dem Differentiieren, wird dem Schüler schon allein durch den vereinheitlichenden Begriff eine Vereinfachung und damit eine Erleichterung seines Denkens verschafft haben. Findet dagegen

1) Als ein grundsätzlich wichtiges Beispiel, daß bei einem derartigen Eindringen der Integralrechnung in den Rahmen unserer Mittelschulen auch die sonstige Praxis des mathematischen Unterrichtes tiefgehende Änderungen zu erwarten hätte, sei hier der (schon oben S. 235, Anm. erwähnte) Vorschlag von FELIX KLEIN berührt, den Begriff des Logarithmus nicht von seiten der Potenzen, sondern des Integrals her zu definieren. Ich führe aus der Darstellung nur die Gründe gegen das Ausgehen von der Potenz-Definition (a. a. O. S. 320–323) und die Zusammenfassung des positiven Vorschlages (S. 346–347) an:

„In der Definition aus der Umkehrung des Potenzierens ergeben sich bereits eine Reihe innerer Schwierigkeiten, über die man meistens hinweggeht, ohne sie recht aufzuklären, und die wir gerade deshalb uns hier recht deutlich machen wollen. Dabei wird es bequem sein, für a und c, deren gegenseitige Abhängigkeit wir studieren wollen, die für Variable geläufigen Bezeichnungen x, y einzuführen, so daß unsere Grundgleichungen sind:

$$x = b^y, \quad y = {}_{(b)}\log x.$$

Nun nimmt man zunächst b stets positiv; bei negativem b würde nämlich x für ein ganzzahliges y abwechselnd positive und negative Werte annehmen, für rationale y aber gar vielfach imaginäre Werte, und die Gesamtheit dieser Wertepaare x, y würde keinen stetigen Kurvenzug bilden können. Aber auch für $b > 0$ läßt sich nicht ohne anscheinend ganz willkürliche Festsetzungen auskommen. Denn für ein rationales $y = \frac{m}{n}$ (wo m, n teilerfremd seien) ist bekanntlich $x = b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$ definiert; diese Wurzeln haben aber n Werte und, selbst wenn wir uns auf reelle Zahlen beschränken, für ein gerades n noch 2 Werte; die Festsetzung ist nun die, daß x stets gleich dem positiven Wurzelwert, dem sogenannten Hauptwert sein soll. Was das besagt, wollen wir uns einmal an der Hand des wohlbekannten Bildes der Logarithmuskurve $y = \log x$ überlegen, das ich für den Moment der größeren Deutlichkeit halber hier wohl bereits benutzen will.

Durchläuft y die überall dicht liegende Menge der rationalen Zahlen, so bilden die positiven Hauptwerte $x = b^y$ eine überall dichte Menge auf unserer Kurve. Würden wir nun bei geradem Nenner n von y allemal auch die zugehörigen negativen Werte x markieren, so erhalten wir eine, man möchte sagen „halb so dichte“, aber immer noch „überall dichte“ Punktmenge auf dem Spiegelbilde unserer Kurve in bezug auf die y-Achse ($y = \log(-x)$). Es ist nun so unmittelbar durchaus nicht zu begreifen, warum, wenn man jetzt sämtliche reellen, auch irrationalen Werte y zuläßt, sich gerade die Hauptwerte rechts zu einer kontinuierlichen durchaus regulär verlaufenden Kurve ergänzen lassen, und ob und warum nicht auch die negativen, linken Werte eine ähnliche Vervollständigung gestatten. Wir werden sehen, daß wir das nur mit tieferen funktionentheoretischen Hilfsmitteln voll werden verstehen können, mit Hilfsmitteln, die der Schule nicht zu Gebote stehen können. Und darum verzichtet man dort eben auf das innere Verständnis der Sachlage und begnügt sich meist mit der für den Schüler freilich auch recht überzeugenden autoritativen Feststellung, ein noch weiter, bis zur einheitlichen Methode des Integrierens als Umkehrung des Differentiierens, gehender Freund der Integralrechnung, daß auch schon innerhalb der zweiten Dosis nicht nur diese Beziehung zwischen Differentiieren und Integrieren, sondern auch einige Fertigkeit in diesem selbst in einer nahen Zukunft sich werde verwirklichen

---

daß man $b > 0$ und die positiven Hauptwerte nehmen muß und daß alles andere falsch * ist; hierauf begründet sich dann der Satz, daß der Logarithmus eine eindeutige nur für positive Argumente definierte Funktion ist.“ [Über dieses „falsch“ s. u.*]

Nach einer historischen Darstellung der Theorie selbst schließt KLEIN:

„Ich möchte nun hier noch einmal kurz zusammenfassen, wie ich mir die Einführung des Logarithmus auf der Schule auf jenem einfachen und natürlicheren Wege etwa denken würde: Der oberste Grundsatz wäre, daß die richtige Quelle zur Einführung neuer Funktionen die Quadratur bekannter Kurven ist. Das entspricht, wie ich zeigte, einmal dem historischen Sachverhalt, ebenso aber auch dem Vorgehen in den höheren Teilen der Mathematik (vgl. z. B. die elliptischen Funktionen). Im Verfolg dieses allgemeinen Prinzipes geht man nun von der Hyperbel $\eta = \frac{1}{\xi}$ aus und bezeichnet den Flächeninhalt des unter ihr gelegenen Flächenstückes von der Ordinate $\xi = 1$ bis zu der $\xi = x$ als Logarithmus von x. Indem man die Endordinate sich bewegen läßt, kann man aus der geometrischen Anschauung heraus die Änderung des Inhalts mit x qualitativ leicht übersehen und daher die Kurve $y = \log x$ ihrem ungefähren Verlaufe nach zeichnen. Um nun die Funktionalgleichung des Logarithmus möglichst einfach zu gewinnen, kann man etwa davon ausgehen, daß

$$\int_1^x \frac{d\xi}{\xi} = \int_c^{cx} \frac{d\xi}{\xi},$$

wie sich durch die Transformation $c\xi = \xi'$ der Integrationsvariablen ergibt; d. h. der Flächeninhalt zwischen den Ordinaten 1 und x ist derselbe wie zwischen den um das c-fache vom Nullpunkt entfernten c und cx: Diese Tatsache kann man aber leicht geometrisch sehr anschaulich machen, indem man überlegt, daß die Größe des Flächenstücks erhalten bleibt, wenn man es unter der Hyperbel entlang schiebt und es dabei nur in dem Maße ausdehnt, wie die Höhe verringert wird. Nach diesem Satze aber ergibt sich sofort das Additionstheorem:

$$\int_1^{x_1} \frac{d\xi}{\xi} + \int_1^{x_2} \frac{d\xi}{\xi} = \int_1^{x_1} \frac{d\xi}{\xi} + \int_{x_1}^{x_1 \cdot x_2} \frac{d\xi}{\xi} = \int_1^{x_1 \cdot x_2} \frac{d\xi}{\xi}.$$

Ich würde sehr wünschen, daß man diesen Weg recht bald einmal im Schulunterricht praktisch erproben möchte; wie sich dabei die Durchführung im einzelnen zu gestalten hat, das muß natürlich der erfahrene Schulmann entscheiden. Im Meraner Lehrplan haben wir übrigens noch nicht gewagt, diesen Weg als Norm vorzuschlagen.“ –

In der Tat wäre eine solche „Norm“ für die Zeit des Kampfes um Integralrechnung in Mittelschulen überhaupt gefährlich gewesen. Denn wenn z. B. (vgl. S. 164) noch kürzlich von manchen Schulmännern behauptet wurde, man lassen, so mag hier überall die hoffentlich bald sich herausbildende Unterrichtspraxis selbst über die Grenzen des Erreichbaren entscheiden. –

Vielleicht werden gerade durch das bescheidene Ausmaß auch der zweiten Dosis nach §§ 44 und 45, wie wir uns das Heranführen des Schülers „bis an die Schwelle der Infinitesimalrechnung" denken, die Furchtsamen darüber beruhigt, daß auf gar keinen Fall das Verpflanzen einer fertigen, zusammenhängenden Differential- und Integralrechnung in die Mittelschule beabsichtigt ist; auch nicht innerhalb der nun noch kurz zu skizzierenden „dritten Dosis".

§ 46. Wahlfreie Zugaben aus Differential- und Integralrechnung.

Was im folgenden an Einzelaufgaben aus Differential- und Integralrechnung noch vorgeschlagen wird, setzt voraus, daß entweder der Lehrer mit einzelnen Schülern Privatissima[1]) abhält,

dürfe nicht mehr das Kubikwurzelziehen lehren, das man besser mit Logarithmen mache, so würden diese folgern, es sei verlangt worden, daß man das Integrieren vor dem Radizieren lehre. Wer dagegen möglichst viel der gegebenen Anregung dem hergebrachten Gang ein- und anfügen will, wird vor allem nicht sagen, daß „alles andere falsch*" ist, wenn man nicht eine positive Basis und die positiven Hauptwerte nimmt; sondern er wird sogleich bei diesem frühen Anlaß auf das spätere Ausfüllen von Lücken in der Begründung der Logarithmentheorie (und sozusagen im Verlauf der Funktion log selbst) vorausverweisen. Diese Ausfüllung durch die Integraldefinition des Logarithmus wird dann wohl selten (als „Norm") schon in der zweiten Dosis als Durchschnittsmaß für alle Schüler sich verwirklichen. Um so mehr aber fällt eine so vertiefte Logarithmenlehre dann in die „dritte Dosis", wo gleich anderen, namentlich im Physikunterricht so häufig notgedrungen verbleibenden Lücken auch diese rein mathematische mit einer Anzahl von „Vertrauensmännern" (S. 426) als ausfüllbar erörtert werden kann.

Insbesondere läßt sich von der oben als „oberster Grundsatz" aufgestellten These, „daß die richtige Quelle zur Einführung neuer Funktionen die Quadratur bekannter Kurven ist", wieder hinüberleiten zu den noch allgemeineren Bemerkungen, wie sich Funktionen und Operationen durch Funktionalgleichungen definieren lassen, was oben (S. 285 und S. 363) an dem Additionstheorem für sin als ein den Lehrstoff der Goniometrie nachmals in neuem Lichte zeigender Gedanke für das Wiederholungsjahr empfohlen wurde. Vielleicht geht auch von da ein Lehrer noch einen Schritt weiter, z. B. $\sin x$ als die inverse Operation zu $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ zu definieren.

1) Es sei mir erlaubt hier mitzuteilen, daß ich solche Privatissima durch mehr als zehn Jahre (im Theresianischen Gymnasium zu Wien) abgehalten habe und davon erst abstehen mußte, als mir (seit meiner Habilitation als Privatdozent der Philosophie und Pädagogik an der Universität Wien) schlechterdings nicht mehr die nötige Zeit für diese meine Lieblingsstunden zu Gebote stand. Da vielleicht manchen gleichgesinnten Leser nähere Daten hierüber interessieren, so teile ich noch folgendes mit: Es pflegten sich jedes Jahr zwei oder drei Freiwillige auf je eine wöchentliche Stunde für höhere Mathematik zu melden; in der Regel während der analytischen Geometrie der

die den Schulorganismus als solchen in keiner Weise angehen; oder aber, daß sich der schöne Zukunftsplan – trotz aller ihm in den Weg gestellten Hindernisse – verwirklicht, auf der obersten Stufe (etwa im letzten Jahr oder besser in den beiden letzten Jahren) deutlichen individuellen Begabungen einzelner Schüler eine zur vollen akademischen Freiheit hinüber leitende „Wahlfreiheit“[1]) zu gewähren; so daß z. B., wie in Preußen vor einigen Jahren vorgeschlagen wurde, in der obersten Klasse allenfalls nur mehr zwei wöchentliche Stunden Mathematik[2]) für alle Schüler vorgeschrieben wären, wogegen den besonders Begabten (die dafür in anderen Fächern entlastet werden) etwa sechs wöchentliche Stunden Mathematik geboten werden. Sicherlich würde sich ein solches Superplus an Unterrichtszeit durch gar nichts angemessener ausnutzen lassen als durch ein stetiges Weiterschreiten auf dem Wege, der mit der ersten und der zweiten Dosis höherer Rechnungen betreten worden war. Es käme übrigens auf den Versuch an, ob, wenn der eine Lehrer diese vier

---

VII. Klasse (einmal, als schon in der VI. Klasse während der Goniometrie und der Logarithmen sich in schönem Übereifer zehn Freiwillige gemeldet hatten, stellte sich der Unterschied in der Befähigung so vieler bald als ein Hemmnis heraus). Hoffentlich wird es nur als weiterer konkreter Beitrag dieser Schilderung des Tatsächlichen genommen, wenn ich hier zweier lieber Schüler besonders gedenke: M. S., der 1890, und F. H., der 1892 am Theresianum seine Maturitätsprüfung abgelegt hat. Beide waren durch das, was sie bis dahin an Differential- und Integralrechnung gelernt hatten, befähigt, schon im ersten Semester ihrer Hochschulstudien bei STEFAN das Kolleg über theoretische Mechanik mitzumachen, was ihnen in dem viersemestrigen Turnus der Stefanschen Vorlesung einen willkommenen Vorsprung gewährte, da man es sonst erst im dritten Semester belegte.

1) Den gleichen Zweck wie dieser Vorschlag der Wahlfreiheit verfolgt ein von mir schon früher gemachter Vorschlag: jedem Lehrer der obersten Klassen je eine „Freistunde“ zuzuweisen, in der er, auf die individuellen Interessen seiner Schüler und einigermaßen auch auf seine eigenen eingehend, die Eifrigen und Begabten in der Wahl ihrer Privatlektüre fördern, auf lehrreiche, an den Schulunterricht mehr oder weniger noch anknüpfende Probleme aufmerksam machen – kurz, mit den der Hochschule sich Nähernden das betreiben kann, was ihm nach freier Überzeugung, ohne alle Reglementierung, zur Vorbereitung auf eine würdige akademische Freiheit ersprießlich scheint. Schultechnisch dürfte sich eine solche Freistunde noch viel einfacher durchführen lassen als die im ganzen viel weiter gehende Idee der „Wahlfreiheit“. Natürlich müssen an dieser Stelle die bloßen Andeutungen genügen. (Näheres im Vortrage „Die Reformbewegungen“ usw.; vgl. S. 5.)

2) An den österreichischen Gymnasien sind diese zwei wöchentlichen Stunden das Um und Auf des Mathematikunterrichtes in der obersten Klasse überhaupt. Daß und warum sich sogar mit diesem Minimum an Unterrichtszeit immerhin noch etwas ausrichten läßt, ist im § 41, S. 361 näher erörtert.

Überstunden mit Determinanten, ein anderer mit kubischen Gleichungen, ein dritter und vierter mit irgendwelchen anderen noch innerhalb der offiziellen Elementarmathematik sich haltenden Spezialkapiteln (z. B. algebraische Analysis) auszufüllen versuchte, bei ihnen von der „Wahlfreiheit" zugunsten oder zuungunsten solcher Mathematik mehr Gebrauch gemacht würde als bei dem Lehrer, der die Differential- und Integralrechnung fortsetzt.

Noch einmal dürfte (wie bei der ersten und zweiten Dosis) die Physik am sichersten dafür richtunggebend sein, daß in die wahlfreie Infinitesimalrechnung nicht wahllos irgendwelche Kapitel aus dem unerschöpflichen Gebiet hereingezogen werden. Wiederum könnte angeknüpft werden an den mit GALILEI beginnenden Lehrgang der Physik[1]). Sein lehrreicher anfänglicher Irrtum, die Fallgeschwindigkeit sei proportional der Fallstrecke, und dann seine richtige Vermutung, sie sei proportional der Fallzeit, lassen sich nun in der Form der Differentialgleichungen $\frac{ds}{dt} = Cs$ und $\frac{ds}{dt} = gt$ darstellen, und diese kann man nun in aller Form integrieren. Natürlich werden dabei nicht die besonderen Integrationsergebnisse (einschließlich des Nachweises, daß und warum die Exponentialfunktion das richtige Weg-Zeit-Gesetz gar nicht hat sein können[2])) die Hauptsache sein, sondern vielmehr die prinzipiellen Darlegungen, daß und warum für die meisten Naturgesetzlichkeiten gerade die Form der Differentialgleichung der sich uns darbietende erste Zugang ist; warum wir aber von der Differential- zur Integralgleichung weiterstreben u. dgl. m. — Die Differentialgleichung der schwingenden Bewegung $\frac{d^2s}{dt^2} = -\alpha^2 s$ bietet schon ein reichhaltigeres Beispiel. In seinem Lichte stellt sich dann auch die Aufgabe vom freien Fall $\frac{d^2s}{dt^2} = g$ noch einmal von einer neuen Seite dar. Denn es kann jetzt an der rechnerisch viel schwierigeren Aufgabe $\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{s^2}$ die Fiktion erörtert werden, die in der Behandlung des freien Falles als einer konstant beschleunigten Bewegung lag; das als homogen fingierte Galileische Kraftfeld der Erde ist ja in Wahrheit nur eine erste Annäherung für das wirkliche Newtonsche Kraftfeld (vgl. Naturlehre § 21). Daß und wie hier beim Aufgeben dieser Fiktion an Stelle der einfachen Funktion $s = \frac{g}{2} t^2$ in Wahrheit eine Art von arccos-Funktion einzutreten habe, setzt freilich schon viel mehr an Integralformeln voraus, als auch vorgeschritteneren Schülern in der Regel zuzumuten ist, klärt aber jetzt auch erst die wenigen Aus-

1) Vgl. Galileis Gedankengang in einer für Schulzwecke etwas vereinfachten Gestalt in Physik (und Naturlehre) § 2, § 6 und im logischen Anhang, Nr. 2.
2) Vgl. Mach, Gesch. d. Mechanik, V. Aufl. S. 129, 262.

erwählten darüber auf, warum sich der Elementarunterricht sogar schon beim freien Fall nicht auf die volle Wahrheit hatte einlassen können, sondern mit der Fiktion einer konstanten (von Fallstrecke und Fallzeit unabhängigen) Schwerebeschleunigung und Schwerkraft hatte bescheiden müssen. (Vgl. hiezu S. 401, Anm.)

Vielleicht genügt das herausgegriffene Beispiel, um erkennen zu lassen, wie man in den leider zahlreichen Fällen, bei denen der Durchschnittsunterricht manches Physikalische der unzureichenden mathematischen Mittel wegen im Halbdunkel hatte lassen müssen, dieses wenigstens für eine Auswahl von Schülern aufhellen könnte und sollte; und wie man, von diesem Wunsche geleitet, um einen höchst passenden (namentlich auch pädagogisch wohl vorbereiteten, weil der berechtigten Wißbegierde der Schüler voll sich anpassenden) Unterrichtsstoff aus höherer Mathematik nicht verlegen sein kann. Ohne daß also noch weitere Einzelproben solchen Stoffes angegeben zu werden brauchen, wird sich als allgemeine Norm vielleicht die empfehlen lassen, daß nur dort, wo der herkömmliche Physikunterricht gerade wegen der mangelnden Kenntnisse einschlägiger Formeln der Differential- und Integralrechnung auf einzelne dringende Aufgaben nur hatte hinweisen, sie aber ungelöst lassen oder durch schwerfällige Elementarmethoden[1]) hätte lösen lassen müssen, nun überall die adäquate Lösung mittels der Verfahrungs- und Darstellungsweisen der regelrechten Differential- und Integralrechnung in volles Licht zu

1) Ich glaube sagen zu dürfen, daß, wenn der Lehrer die sämtlichen unter Verzicht auf die Symbole der höheren Mathematik gestellten und gelösten „230 Leitaufgaben“ meiner Physik daraufhin durchsieht, was sich von ihnen in die Sprache der Differential- und Integralrechnung übertragen läßt, er um Übungsstoff in eben diesem Übertragen schon der bloßen Darstellungsform, und bei der Mehrzahl dieser Aufgaben auch der Lösung durch gewöhnliches Differentiieren und Integrieren, nicht mehr in Verlegenheit sein wird. Dazu kommt dann noch der „mathematische Anhang“ als solcher, wo sich ja ebenfalls viele der dort in elementarer Form durchgeführten Rechnungen in den Symbolen und Methoden der höheren Mathematik viel einfacher gestalten. —

Ob es nicht überhaupt ein sehr naheliegendes Mittel zur Überbrückung der oft beklagten Kluft zwischen der Hochschulausbildung und den Mittelschulbedürfnissen unserer Lehramtskandidaten wäre, wenn sie angehalten würden, noch vor ihrer Lehramtsprüfung aus eigener Kraft (nötigenfalls mit einzelnen Anfragen an die Leiter der wissenschaftlichen Seminare), irgendeines der approbierten Mittelschullehrbücher daraufhin durchzuarbeiten, wie sich das hier *ad usum delphini* Dargestellte in der ihnen während ihrer Hochschuljahre geläufigeren Sprache der hohen Wissenschaft ausnimmt? Es wäre dies gewiß den Lehramtskandidaten und den angehenden wirklichen Lehrern (die „die Eierschalen der Wissenschaft noch nicht abgestreift“

setzen wäre. Neben dem wissenschaftlichen hätte ein solches Vorgehen auch noch den sozusagen schulmoralischen Wert, daß das allen aufmerksamen und aufrichtigen Lehrern nur zu wohl bekannte Mißtrauen, mit dem die Schüler den notgedrungenen rechnerischen Winkelzügen des physikalischen Unterrichtes gegenüberstehen[1]), wenigstens von einigen Vertrauensmännern, eben den der nötigen Infinitesimalrechnung kundigen Schülern, nicht weiter geteilt zu werden braucht; und bekanntlich glaubt ja der Schüler besser unterrichteten Kameraden lieber als dem bestunterrichtenden Lehrer, wenn dieser aus was immer für Gründen mit der vollen Wahrheit hinter dem Berg zu halten genötigt ist.

Nur um auch die obere Grenze anzudeuten, die selbst die wahlfreie Infinitesimalrechnung nicht mehr wird überschreiten wollen, sei erwähnt, daß wir schon im gewöhnlichen Physikunterricht sogar an so hohe Theoreme wie die Fouriersche Auflösung einer Funktion in eine Reihe von Sinus zu rühren genötigt sind. Denn an keinem Gymnasium oder keiner Realschule wird heute von Klangfarben gesprochen, ohne des Helmholtzschen Satzes von der „Zerlegung der Klänge in einfache Töne" zu gedenken. Dazu kommen die Wechselströme und Mehrphasenströme, etwa auch der Multiplextelegraph — und wieder die Zerlegung der scheinbar unregelmäßigen Luftdruckkurven in periodische Kurven[2]). Hier kann und muß der Durchschnittsunterricht allerlei Auswege ersinnen[3]), um ohne Integralsatz auszusprechen, daß die

---

haben, wie der abgeklärte, aber nicht sehr aufgeklärte Rektor im „Probekandidaten" sagt), gewiß die natürlichste Vorübung dafür, sich auch im späteren Schulleben überall bewußt zu bleiben, daß die Schulwissenschaften zwar eine andere Sprache sprechen, aber nicht schlechthin andere Gedanken haben müssen als die höhere Wissenschaft. Eine Bemerkung, die natürlich weit über die Beziehungen zwischen Hoch- und Mittelschul-Mathematik und Physik hinausreicht, indem sie sich — wie wir hoffen wollen — auf alle schulmäßig, aber nur eben nicht verschult betriebenen Schulfächer erstreckt.

1) „Schwindel!" hört man laut oder leise während aller jener Annäherungen rufen; denn der herkömmliche mathematische Unterricht unterläßt es zu zeigen, daß das „Annähern" (und „Vernachlässigen") auch schon innerhalb der Grenzen der wirklich elementaren Mathematik durchaus festen und gerechtfertigten Prinzipien folge. Vgl. den mathematischen Anhang meiner Physik Nr. 21: „Annähernde Rechnungen in der Physik".

2) Auch die von Halbwissern oft bespöttelte Beschreibung, die Ptolemäus von den Schleifen und Zacken in den Planetenbahnen durch seine Epizykel gab (und über die spätere Zeiten Epiepizykel lagerten) waren schon solche Auflösungen in Sinusfunktionen (Näheres im II. Bd., Didaktik der Himmelskunde und astronomischen Geographie).

3) Vgl. Mathematischer Anhang zur Physik Nr. 20 (auch im „Hilfsbuch der Physik") „Darstellung einer gegebenen Kurve durch Superposition von Sinuskurven (Fouriers Satz)". Daselbst als Beispiele Fig. 143 (und eine größere aus

z. B. von der „Schneckenklaviatur“ (d. h. vom Cortischen Organ in der Schnecke des Ohres) jeden Augenblick gelöste Aufgabe der Klanganalyse wissenschaftlich nun einmal nicht anders lautet als: In einer Sinusreihe $f(x) = a_0 + a_1 \sin(A_1 + x) + a_2 \sin(A_2 + 2x) + \cdots + a_n \sin(A_n + nx) + \cdots$ die Koeffizienten zu bestimmen, welchen dann die relativen Stärken der einzelnen Partialtöne entsprechen. — Für den abstrakten Mathematiker fordert freilich die Vorfrage, ob man denn überhaupt (oder vielmehr, unter welchen einschränkenden Bedingungen man) eine solche Gleichung ansetzen dürfe, eine Voruntersuchung, der gegenüber, wenn dieses Recht erwiesen ist, das Auswerten der leichtere Teil ist. Zum Glück wird aber jene Voruntersuchung gegenstandslos, wenn im speziellen Hinblick auf die physikalisch-psychologisch schon feststehende Tatsache, daß die Analyse in Sinusfunktionen stattfand, wirklich nur mehr um jene Koeffizienten gefragt zu werden braucht. Das Ansetzen der dann noch nötigen Integrationen als allgemeiner Rechnungsanweisung und das Auswerten für charakteristische Fälle der $f(x)$ (Zickzacklinie wie bei der gezupften Seite u. dgl.) erfordern schon Rechnungen, die für die wahlfreie dritte Dosis zwischen dem zu Leichten und dem zu Schweren gerade noch die richtige Mitte halten.

Doch alle solche ins einzelne gehende Vorschläge sind, wie noch einmal ausdrücklich betont werde, für einen wahlfreien Kursus ja eigentlich überflüssig. Nur darum seien sie hieher gesetzt, weil die Mahnung nicht überflüssig sein wird, es möchte auch der freieste Spielraum, den sich höhere Mathematik an den höheren Schulen dereinst erkämpfen mag, lieber mit den den Schulinteressen sonst nahestehenden konkreten Anschauungen der Mathematik statt mit weltfremden Formalismen bebaut werden. Denn auch ein schwer erkämpfter Spielraum könnte durch ungeschickte Benutzung — und dann lieber über kurz als über lang — wieder verloren gehen.

PFAUNDLER). — Schon 1877 habe ich in Carls Repertorium einen „Superpositionsapparat“ zur raschen mechanischen Ausführung solcher Superpositionen von Sinuskurven veröffentlicht. (Es war mein erster Schulapparat. Seither sind zahlreiche ähnliche Apparate veröffentlicht worden; ich weiß nicht, ob ihnen gegenüber mir die Priorität zukommt.)

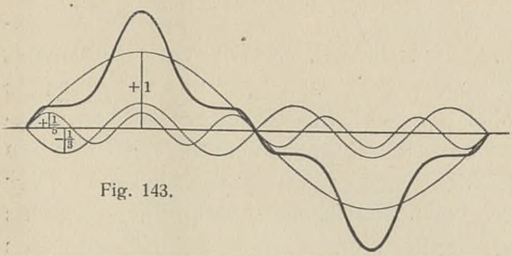


Fig. 143.

§ 47. Ein Einheitslehrplan der Mathematik für Mittelschulen.

Vorbemerkungen. Indem wir — aus den zu Ende des § 6 (S. 51) dargelegten Gründen erst als Abschluß der Lehrproben und Lehrgänge, wie sie im vorstehenden zweiten Hauptteil unserer „Didaktik des mathematischen Unterrichtes“ manchmal nur skizzierend, manchmal wieder bis ins einzelne gehend, ein persönliches Bekenntnis unserer Wünsche für die Zukunft des mathematischen Mittelschulunterrichtes darstellen — diese nunmehr in einen Lehrplan zusammenfassen, seien zur Vermeidung von Mißverständnissen namentlich folgende beiden Erklärungen vorausgeschickt.

Erstens: Aus dem Worte „Einheitslehrplan“ wolle nicht herausgehört werden, daß wir eine Einheitsschule empfehlen. Es wird Aufgabe des X. Bandes sein, unsere Zurückhaltung gegenüber diesem so sehr beliebten Schlagwort zu begründen, u. zw. weniger durch Wiederholung der oft geäußerten Bedenken gegen die Möglichkeit einer wirklichen Einheitsschule, in der Gymnasium und Realschule in eins verschmolzen wären, als durch nähere Entwicklung der positiven Merkmale, durch die der Begriff der „spezifischen Allgemeinbildung“ (vgl. S. 503) den realistischen und den humanistischen Anstalten ihre Eigenart läßt oder vielmehr erst verschafft und sichert. Für jetzt aber darf ganz speziell vom mathematischen Unterricht wohl schon behauptet werden, daß die zwei oder drei Hauptschularten nicht eine besondere Gymnasial- und eine besondere Realschulmathematik kennen sollten. Daß die bisher in Geltung gewesenen Lehrpläne ein scheinbares Auseinanderweichen nicht nur der Lehrgänge, sondern sogar der Bildungsziele geduldet haben, war, wie an anderer Stelle[1]) schon hatte gesagt werden müssen, keineswegs selbst wieder Ausfluß eines höheren Planes, sondern eine leidige historische Unvollkommenheit, daß man Realschulpläne durch Realschulmänner, ein paar Jahr später wieder Gymnasialpläne durch Gymnasialmänner anfertigen ließ und eine Fühlungnahme zwischen den so Beauftragten selten oder nie stattfand. Möge denn das Einheitliche der nachfolgenden Lehrpläne für künftighin vor allem eine Mahnung sein, sich gegenseitig umeinander zu bekümmern und voneinander zu lernen. Die Differenzierungen, die nach wie vor nötig sein werden (vgl. z. B. über das verschiedene Maß von „Fertigkeit“ bei gleicher „Einsicht“ S. 498), mögen erst dort eintreten, wo dem Einheitlichen sein Recht geworden ist; und in eben diesem Sinn nennt sich das Nachfolgende einen „Einheitslehrplan“, der dem künftigen Herausarbeiten des Spezifischen hoffentlich nirgends Hindernisse in den Weg legt, sondern den auch in Zukunft jedenfalls

1) Prager Vorschläge (s. o. S. 5), S. 5 der Sonderausgabe. — Auch Protokoll der Wiener Mittelschulenquete 1908 (s. o. Vorwort, Anm.), S. 389.

nötigen und dann erst wirklich planmäßigen Verzweigungen immer noch als Durch- und Weiterbildungen eines und desselben großen Schulorganismus, wie es ja dem ganzen Schulwesen je eines Staates ziemt, Anregungen zu weiterer Entwicklung gibt.

Zweitens: Ein anderes Mißverständnis wäre es, wenn man den nachfolgenden Lehrplan für schon irgendwo realisiert oder auch nur als irgendwo in der Weise einer Verordnung „auf dem Papiere stehend" ansähe. Vielmehr will die nachfolgende Fassung eines Einheitslehrplanes für nicht mehr und nicht weniger gelten als die freie wissenschaftlich-pädagogische Überzeugung des Verfassers dieses I. Bandes der Didaktischen Handbücher. Im Zustandekommen dieser Überzeugung aber lassen sich — unter einem geologischen Bilde — vier Schichten unterscheiden: Zugrunde liegen die Vorschläge, die der Verfasser schon 1887 im Wiener Verein „Mittelschule" (vgl. oben Vorwort) für die Neugestaltung des Unterrichtes entwickelt hatte[1]). Nach vielen Jahren oft peinlicher Konflikte zwischen dem, was daraufhin offiziell als „Lehrplan" vorgeschrieben war und blieb, und was der Verfasser dagegen als seine ausreifende didaktische Überzeugung auch seinen Schülern nutzbar machen zu müssen meinte, kam die im Vorwort erzählte Einladung zu dieser Didaktik und die Niederschrift eines großen Teiles von ihr, einschließlich der Zusammenfassung in einem „Lehrplan", während der ersten Hälfte des Jahres 1905. Dann in der zweiten Hälfte 1905 die (von jener alten Anregung natürlich ganz unabhängigen) Meraner Vorschläge, durch die das längst Ersehnte eine so erhebende Bestätigung empfing. Aus jenen alten und diesen neuen Vorschlägen wuchsen dann unter Beteiligung zahlreicher Prager Fachgenossen die Prager Vorschläge 1906 hervor; aus diesen dann die offiziellen österreichischen Lehrpläne von 1908 und 1909 — und endlich, indem alle bei diesen Anlässen beigesteuerten Verbesserungsvorschläge noch einmal überdacht und minder geeignet Erscheinendes wieder beseitigt wurde, die nachfolgenden Fassungen. —

Weder schien es nötig, den Wortlaut der in den verschiedenen reichsdeutschen Staaten augenblicklich geltenden Lehrpläne, noch den der Meraner Vorschläge, noch den der nun rechtsgültigen österreichischen Pläne, die für Gymnasien, Realgymnasien und Realschulen bis auf Einzelheiten gleichlautend sind, hier wiederzugeben; denn diese Fassungen sind in aller oder wenigstens der jeweils Nächstbeteiligten Händen. —

1) Wie (und durch wen) diese Vorschläge von 1887 zu Fall gebracht wurden, erzählen des näheren die damaligen Sitzungsberichte in der Zeitschrift „Mittelschule". — Gesetzt aber, das damals Vorgeschlagene sei heute gut — warum haben nicht schon 22 Jahre lang Zehntausende von Mittelschülern davon profitieren dürfen? Gibt es in der Didaktik an Jahr und Tag geknüpfte Entdeckungen und Erfindungen, die es entschuldigen, wenn der Fortschritt jahrzehntelang warten muß? — Auch eine grundsätzliche „Reformfrage"!

Indem die herkömmlichen Klassenzahlen der preußischen und österreichischen Schulen unten folgen, drücken sie also nur ebenfalls einen Wunsch aus: es möchten in gerade diese Lebensjahre jene Lehrstoffe Eingang finden, soweit dies nicht ohnehin schon jetzt der Fall ist. Denn immerhin sind die nachfolgenden Lehrpläne (wiewohl sie z. B. von dem in Österreich seit 60 Jahren für Mathematik stabil gewesenen stärker abweichen als die neuen Lehrpläne irgendeines anderen Schulfaches von den alten) doch so konservativ gehalten, als es die pädagogisch-didaktischen Überzeugungen ihres Verfassers zugelassen haben. — Aber gerade indem sie sich nunmehr den Lehrplänen keines einzigen Staates völlig anschließen, mögen sie einen pädagogischen Impuls für künftige „Einheitslehrpläne" auch noch in einem anderen Sinn darstellen: in dem gewiß nicht allzu utopischen, daß auch die einzelnen Staaten voneinander und von einer nicht verstaatlichten Didaktik soviel als jeweils möglich sich bei künftigen Neugestaltungen anregen lassen.

Zur nebenstehenden Lehrplan-Tafel.

Den Lebensjahren nach entsprechen einander im großen ganzen die „Jahrgänge" des nebenstehenden Lehrplan-Entwurfes und folgende Klassenzahlen in Preußen und Österreich:

Lebensjahr	Nummer des Jahrganges in dieser Didaktik	Preußen	Österreich	
		Gymn., Realgymn. u. Oberrealschulen neunklassig	Gymn., Realgymn., Reform-Realgymn. achtklassig	Oberrealschule siebenklassig
10		VI	Vorbereitungsklasse (vgl. S. 50 und S. 56).	(Der Eintritt in die Realschule erfolgt in der Regel 1 Jahr später als ins Gymnasium.)
11	1	V	1	
12	2	IV	2	1
13	3	U III	3	2
14	4	O III	4	3
15	5	U II	5	4
16	6	O II	6	5
17	7	U I	7	6
18	8	O I	8	7

Arithmetik | Geometrie

Unterstufe (drei Jahre). — Zielbestimmungen:

Arithmetik: **Vorschule der Zahlenlehre bis (einschließlich) zu den Anfängen der Buchstabenrechnung als zusammenfassender Darstellung der Rechengesetze.**

Geometrie: **Vorschule der Raumlehre, in durchgängiger Verbindung planimetrischer und einfachster stereometrischer Anschauungen und Handfertigkeiten. Verwertung und Durchbildung der vom gewöhnlichen Leben und den übrigen Schulfächern (Geographie, Naturgeschichte usw.) nahegelegten Raumvorstellungen. —**

Gewöhnung an den sinngemäßen und sicheren Gebrauch der arithmetischen und geometrischen Kunstsprache (ohne vorzeitige Erzwingung formeller Definitionen).

Erster Jahrgang (elftes Lebensjahr).

Rechnen: Die vier Grundrechnungsarten an ganzen und Dezimalzahlen (benannten und unbenannten) in beschränktem, nur allmählich sich erweiterndem Zahlenbereiche. Auffassung der Dezimalzahlen zuerst nach dem Positionssysteme, später als Dezimalbrüche, in Verbindung mit Vorübungen für das Bruchrechnen (gemeine Brüche, die an konkreten Anschauungsbeispielen als besondere Arten benannter Zahlen ohne sog. Bruchregeln zu behandeln sind und deren Nenner nur kleine, übersichtliche Primfaktoren enthalten). Maße, Gewichte, Münzen (Wertzeichen) des Vaterlandes (und nur die geläufigsten auch des Auslandes).

Raumlehre: Vorübungen im Anschauen einfachster Körperformen, namentlich des Würfels und der Kugel. Übungen im Gebrauch von Zirkel, Lineal, Maßstab, Winkelhaken, Transporteur. Messen und Zeichnen von Gegenständen der Umgebung. Vertrautwerden mit den Eigenschaften und Beziehungen einfachster individueller Raumgebilde (Winkel von 90°, 60°, gleichschenklig-rechtwinklige, gleichseitige Dreiecke u. dgl.). Parallel- und Normalsein von Geraden und Ebenen an individuellen Flächen- und Körperformen.

Inhalt von Quadrat, Rechteck, Würfel, Quader als Anwendungen des metrischen Maßsystems.

Zweiter Jahrgang (zwölftes Lebensjahr).

Rechnen: Maße und Vielfache; Vertrautwerden mit den Primfaktoren eines allmählich sich erweiternden Zahlenkreises. Verallgemeinernde Gesetze des Bruchrechnens; Verwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche und umgekehrt. — Direkt und verkehrt proportionale Größen (als einfachste Anlässe zu funktionalem Denken) in Schlußrechnungen. Zinsen-, Teilungs- Durchschnitts- und Mischungsrechnungen unter Beschränkung auf einfachste Beispiele aus dem Gesichtskreis des Schülers (mit Versparung aller schwierigeren auf die Gleichungslehre des IV. und V. Jhgs.).

Raumlehre: Anschauung der Symmetrie von körperlichen und ebenen Gebilden. Einsicht in die ausreichenden Bestimmungsstücke durch Konstruktion (als Ersatz der Kongruenzbeweise). — Mannigfaltige Anwendungen auf direkte und indirekte Messungen im Schulzimmer, womöglich auch im Gelände. Dreiecke, Vierecke, Vielecke (namentlich regelmäßige); Kreise. Die dazu gehörigen geraden Prismen und Zylinder. Kugel nach den Erfordernissen des gleichzeitigen Geographieunterrichtes. Beweglichkeit der Gebilde (ihre Gestalt- und Größenänderungen bei Änderung der Bestimmungsstücke, Übergehen ineinander, Grenzgebilde).

Dritter Jahrgang (dreizehntes Lebensjahr).

a) Anfänge der allgemeinen Arithmetik als abschließende Zusammenfassung des bisherigen Rechenunterrichtes: Darstellung der Rechengesetze in Worten und Buchstaben, Übungen im Substituieren (häufige Proben für die allgemeinen Rechnungen durch Einsetzen besonderer Zahlen in Angabe und Resultat). Angezeigte und ausgeführte Operationen (Klammerausdrücke; Kopfrechnen). Negative Zahlen in einfachsten und ungekünstelten Anwendungen (Thermometer-, Höhenskala, Wasserstände, Zahlenlinie).

b) Umfangs- und Flächenmessungen (Drei-, Vier-, Vielecke, Kreis); Raummessungen (gerade Prismen und Zylinder). Konstruierende und rechnende Flächen- und Raumvergleichungen und Verwandlungen. Messungen und Vergleichungen an Gegenständen des Schulzimmers, des Schulgartens und womöglich auch im Gelände. Pythagoreischer Satz mit reichlichen Veranschaulichungen und Anwendungen an ebenen und einfachsten körperlichen Gebilden (z. B. Diagonale des Würfels, Höhe gerader quadratischer Pyramiden).

c) Vielseitige Verbindung des arithmetischen und geometrischen Unterrichtes. Graphische Darstellung der vier Rechnungsoperationen an Strecken, der Ausdrücke für $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $(a+b)(a-b)$, $(a+b)^3$ u. dgl. an Rechtecken, Würfeln usw. Quadrat- und Kubikwurzelziehen im Anschluß an die planimetrischen und stereometrischen Rechnungen. Abgekürztes Multiplizieren, Dividieren und Radizieren. Beurteilung des anzustrebenden und zu erreichenden Genauigkeitsgrades auf Grund wirklichen Messens der Bestimmungsstücke. Überschlag der Größenordnung des Ergebnisses; Bestätigung der Schätzungs- und Rechnungsergebnisse durch nachträgliches Messen und Wägen der berechneten Körper- und Flächenmodelle. — Weitere Anregungen zu funktionalem Denken: Wachsen der Längen-, Flächen- und Raumausdehnungen der (in unmittelbarer Anschauung und beim Zeichnen in verjüngtem Maßstab) als ähnlich erkannten Figuren und Körper mit der ersten, zweiten und dritten Potenz, der zweiten und dritten Wurzel von Bestimmungsstücken. — Einfachste Bestimmungsgleichungen, soweit die planimetrischen und stereometrischen Rechnungen dieses Jahrganges auf sie führen.

Arithmetik | Geometrie

Mittelstufe (zwei Jahre). — Zielbestimmungen:

Arithmetik: **Allgemeine Arithmetik der ersten und zweiten Operationsstufe.**

Geometrie: **Planimetrie und Stereometrie.**

Anbahnung des Sinnes für die wissenschaftliche Verknüpfung mathematischer Einzelbegriffe und Einzelsätze in Arithmetik und Geometrie (unter Verzicht auf ein der Altersstufe noch nicht angemessenes Hervorkehren letzter Prinzipien und rein deduktiver Darstellung).

Vierter Jahrgang (vierzehntes Lebensjahr).

Allgemeine Arithmetik: Die Operationsgesetze und ihr Zusammenhang, zu erläutern und einzuüben weniger durch bloße Transformationen (nach identischen Gleichungen) als durch das Lösen von Bestimmungsgleichungen und Rechnungsproben durch Einsetzen der (numerischen und algebraischen) Ergebnisse in die Ausgangsgleichung. — Zahlensysteme; Maße, Vielfache, Brüche; Verhältnisse, Proportionen. Gleichungen des ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten; reine Gleichungen des 2. Grades, soweit sie im planimetrischen Unterrichte benötigt werden.

Planimetrie (konstruierend und rechnend): Erläuterung der Euklidischen definierenden und beweisenden Darstellungsform an charakteristischen Beispielen.

Konstruktionsaufgaben nach mannigfaltigen Methoden (auch der der algebraischen Analyse) unter Ausschluß aller nur durch besondere Kunstgriffe lösbaren Aufgaben. Gegen Abschluß, in Verbindung namentlich mit der Verhältnis- und Ähnlichkeitslehre: Einführung in neuere Auffassungen und Methoden der perspektiven Abbildung (hiermit auch Überleitung zum perspektiven Zeichnen des folgenden Jahrganges).

Fünfter Jahrgang (fünfzehntes Lebensjahr).

Erweiterungen und Ergänzungen des arithmetischen Lehrstoffes des vorausgegangenen Jahrganges. Fortgesetztes Lösen von Gleichungen des ersten Grades (und einfachster höherer Grade) aus mannigfaltigen Anwendungsgebieten. Insbesondere auch arithmetische (numerische) Durchführung der in den Stereometriestunden in der Regel nur angesetzten geometrischen Aufgaben.

Stereometrie (konstruierend und rechnend): Als Vorübungen zeichnerische Darstellung einfachster Körperformen (namentlich auch im Anschlusse an die Kristallographie); planimetrische Rechnungen über Längen und Flächen an solchen Körpern.

Die so erworbenen Raumanschauungen verarbeitet durch die abstrakten Begriffe und Sätze über die gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen, unter Beschränkung auf die grundlegenden und typischen Sätze und Beweise. — Flächen- und Rauminhaltsberechnungen für Prismen (Zylinder), Pyramide (Kegel), Kugel und ihre einfacheren Schnittflächen und Schnittkörper. — Eulers Satz, regelmäßige Polyeder.

Arithmetik | Geometrie

Oberstufe (drei Jahre). — Zielbestimmungen:

Abschluß der sog. niederen und von hier aus stetige Überleitung in die sog. höhere Mathematik, durch Zusammenfassung der bisherigen Übungen im funktionalen Denken zum wissenschaftlichen Funktionsbegriff. Hiebei auch gelegentliches Herausarbeiten der namentlich schon im elementaren Physikunterricht gegebenen Anschauungen vom Infinitesimalen (unter Verzicht auf begriffliche Kritik der theoretischen Grundlagen des Irrationalen und der Infinitesimalrechnung und auf eine auch nur relativ zusammenhängende Technik im Differentiieren und Integrieren).

Sechster Jahrgang (sechzehntes Lebensjahr).

Dritte arithmetische Operationsstufe: Potenzen, Wurzeln, Logarithmen. Gleichungen des zweiten Grades mit einer (und leichteste mit mehreren) Unbekannten; irrationale, imaginäre und komplexe Zahlen, insoweit das Lösen jener Gleichungen auf sie führt. Erläuterung des Unterschiedes zwischen algebraischen und transzendenten Zahlen, Operationen, Gleichungen und Funktionen, soweit die Beispiele der Logarithmen und der goniometrischen Funktionen hiezu Anlaß geben.

Goniometrie und Trigonometrie unter wiederholender Vergleichung mit planimetrischen und stereometrischen Konstruktionen und Rechnungen. Graphische Darstellungen der goniom. Funktionen schon beim Einprägen ihrer Grundeigenschaften und Beziehungen. Vielseitige Anwendung der Trigonometrie zu Aufgaben der Feldmessung, Geographie, Astronomie usw., wobei die Bestimmungsstücke möglichst durch (wenn auch rohe) Messungen seitens des Schülers zu beschaffen sind.

Siebenter Jahrgang (siebzehntes Lebensjahr).

a) Arithmetische Reihen erster Ordnung (und solche höherer Ordnung, soweit sie im physikalischen Unterrichte benötigt werden). Geometrische Reihen (Anwendung namentlich auf Zinseszinsrechnung); an den unendlichen fallenden Erläuterung der Konvergenz. Binomischer Satz; Binomialkoeffizienten in rekurrierender und independenter Darstellung. Binomialreihe für negative und gebrochene Exponenten nur insoweit, als ihre ersten Glieder vielgebrauchte Näherungsformeln liefern. — Permutieren, Variieren, Kombinieren in einfachsten Fällen. Anwendung auf einfachste Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

b) Analytische Geometrie: Anknüpfend an die bisher für einzelne Funktionen gegebenen graphischen Darstellungen nunmehr allgemeine Anwendung der analytischen Methode auf die Linien des ersten und zweiten Grades unter gelegentlichen Hinweisen auf die synthetische Behandlung der nämlichen Gebilde und Beziehungen. — Fortgesetzte Hinweise auf die namentlich im physikalischen Unterrichte sich darbietenden empirischen Funktionen; ihre graphischen Darstellungen durch Kurven (und Flächen) als Grundlage für die Aufstellung mathematischer Gesetzmäßigkeiten in den Naturerscheinungen.

c) Zusammenfassende Darstellung der ganzen bisherigen Lehre von den Gleichungen in algebraischer und graphischer Form (Ergänzung durch Gleichungen höherer Grade, die sich ohne besondere Kunstgriffe auf quadratische zurückführen lassen, quadratische mit mehreren Unbekannten u. dgl., ferner durch die in ganzen Zahlen aufzulösenden unbestimmten Gleichungen ersten Grades mit zwei und drei Unbekannten und ihre Beziehungen zu Gitterpunkten). Annähernde Lösung algebraischer (und gelegentlich vorkommender transzendenter) Gleichungen durch graphische Methoden.

Differentialquotienten und Integrale unter Beschränkung auf die Bedürfnisse des elementaren Unterrichtes der Physik und Mathematik (z. B. Geschwindigkeit, Beschleunigung, Trägheitsmoment; Richtungskoeffizienten, Maxima, Minima).

Achter Jahrgang (achtzehntes Lebensjahr).

Wiederholungen aus dem Gesamtgebiet des mathematischen Schulunterrichtes, namentlich der Gleichungen und Reihen, der Stereometrie, Trigonometrie und analytischen Geometrie. Erweiterungen und Vertiefungen an einzelnen Stellen. Anwendungen auf die verschiedenen Gebiete des Unterrichtes und des in ihm zur Sprache kommenden wirklichen Lebens.

Rückblicke und Ausblicke nach geschichtlichen und philosophischen Gesichtspunkten.

Bemerkung: In den mathematischen Lehrstunden des VII. und VIII. Jhgs. können zweckmäßig auch alle allgemeinen Ableitungen und numerischen Durchführungen von Rechnungen erledigt werden, deren physikalischer Ansatz in den Physikstunden gewonnen wurde und die so eine Hauptanwendung der verschiedensten mathematischen Einzellehren, insbesondere auch fortwährende Anlässe zur Unterscheidung zwischen Präzisions- und Approximationsmathematik darbieten.

Dritter Teil.

Rest- und Grenzfragen[1]) der mathematischen Didaktik an die Psychologie, die Erkenntnislehre und an die allgemeine Didaktik als Bildungslehre.

§ 48. Die psychologischen (und gegenständlichen) Grundlagen des mathematischen Denkens.

Daß an der Didaktik des mathematischen wie jedes anderen Unterrichtes die Psychologie beteiligt ist, ja daß sie für sie eine (nicht die einzige) Grundwissenschaft ist, bedarf hier keiner allgemeinen Begründung; diese gehört vielmehr selbst in die allgemeine Didaktik und wird hier als erledigt vorausgesetzt[2]).

Speziell am mathematischen Denken und vollends am mathematischen Denkenlernen ist das Psychologische nach mehreren Richtungen in ausnehmendem Maße beteiligt. Bildet doch bekanntlich allein schon die Psychologie der Raumvorstellungen[3])

---

1) Vgl. WILLMANN, Didaktik als Bildungslehre (3. Aufl. 1903), I. Bd. S. 92: „Die Didaktik besitzt an gewissen bleibenden Problemen und immer wiederkehrenden Aufgaben ein Zentrum, vermöge dessen sie einen eigenen und einheitlichen Untersuchungskreis darstellt, zugleich aber hat sie an ihrer Peripherie Berührungen mit einer Reihe von Wissensgebieten, die ihr den Antrieb zu spezialisierender Verzweigung geben. Diesem Antriebe auf Kosten der Mitte nachzugeben, ist ebenso unstatthaft, wie die Mitte als das Ganze anzusehen und jenen Grenzverkehr gering zu achten."

2) Freilich ist sie es in Wirklichkeit noch lange nicht in dem Maße, wie es der Psycholog einerseits, der Pädagog andererseits wünschen möchte; dies namentlich infolge des unvollkommenen Zustandes der wissenschaftlichen Psychologie selbst und mehr noch infolge der oft wenig glücklichen Auswahl, die von seiten der Pädagogik aus den einstweilen vorhandenen, nur allzu mannigfaltigen Psychologien getroffen wird. Einiges Nähere zu diesen Klagen und Anklagen in meiner Wiener Antrittsvorlesung „Pädagogik und Philosophie" (dritter der „Drei Vorträge zur Mittelschulreform," Wien 1908).

3) Zu einer Reihe von psychologischen, logischen und sonstigen philosophischen Fragen aus dem Grenzgebiete der Mathematik und Philosophie, an denen zum Teil auch die Didaktik des mathematischen Unterrichtes mehr oder weniger mittelbar interessiert ist, habe ich Beiträge gegeben in zwei Abhandlungen „Räumliche und raumlose Geometrie" (I. und II.), deren erste, kürzere sich vorwiegend an die Mathematiker, deren zweite sich an die Philosophen, zunächst an die Kantianer wendet. Sie wird in Druck gehen, wenn der der vorliegenden Didaktik abgeschlossen sein wird. Es kann daher im folgenden auf sie nur gelegentlich vorverwiesen werden; und auch dies

und Raumurteile ein seit langem mit besonderem Eifer durchforschtes Teilgebiet der allgemeinen Psychologie, und dieser Eifer ist auch in der besonderen Schwierigkeit der hierhergehörigen Probleme mehr als ausreichend begründet. – Nicht ebenso ausgedehnt ist die Psychologie der Zahlvorstellungen und Zahlurteile; aber selbst, was wir davon bisher besitzen, zeigt ein wo möglich noch stärkeres Auseinandergehen der Meinungen über unser Denken in Zahlen und über das Wesen der Zahlen selbst[1]) als sogar die Raumpsychologie (und die sonstige theoretische Philosophie vom Wesen des Raumes).

Will nun trotz des unvollkommenen Zustandes der bisher geleisteten philosophischen Facharbeit auf diesen Gebieten aus ihr ein Didaktiker der Raum- und Zahlenlehre doch den einstweilen schon möglichen Gewinn ziehen, so wird er vor allem seine Rest- und Grenzfragen an jene Gebiete möglichst eng umgrenzt zu stellen haben. Und hievon ist schon das ein wichtiger Gewinn, wenn der Lehrer der Mathematik und der Verfasser mathematischer Lehrbücher sich auf gewisse Allgemeinheiten, insbesondere auf Definitionen von Grundbegriffen – also namentlich „Was ist Raum?, Was ist Zahl?" lieber gar nicht einlassen[2]), als daß sie die Schüler mit problematischen, mit minder- oder gar unterwertigen Antworten auf diese Fragen umsonst bemühen.

a) Die Zahlenvorstellungen.

So hält z. B. jede Definition, die die Zahl nur als Zeichen[3]) erklärt, schon nicht stand vor der einfachen (auch einem geschickten

---

nicht, um auf diese den Mathematikern und den Philosophen selbst als noch durchaus umstritten geltenden Grenzfragen endgültige Antworten geben zu wollen, als vielmehr, um dem Lehrer der Mathematik einige besonders kritische Stellen zu bezeichnen, an denen er nicht etwa gerade die Antworten dieser oder jener Partei seinen Schülern dogmatisch aufnötigen oder suggerieren sollte.

1) Daß die Fragen nach dem „Wesen der Zahl" und dem „Wesen des Raumes" überhaupt nicht mehr in die Psychologie, sondern in die „Gegenstandstheorie" gehört, sei schon hier kurz vorgemerkt (s. u. S. 436 Anm.).

2) So beginnt denn auch z. B. BOREL-STÄCKEL so: „Was man unter einer Menge von Gegenständen und unter der Anzahl der Gegenstände einer Menge versteht, wird hier als bekannt vorausgesetzt." Ebenso TANNERY-KLASS: „Den Begriff der ganzen Zahl will ich als bekannt voraussetzen. Wir wissen, daß die ganze Zahl entweder angibt, wieviel verschiedene Gegenstände in einer Sammlung sind, oder daß sie die Stelle bezeichnet, die ein Gegenstand in einer bestimmten Reihe einnimmt."

3) Als ein Beispiel, wie vieles in diesen Dingen selbst zwischen den leitenden Forschern noch strittig ist, seien folgende Stellen aus dem „Jahres-

Schüler zuzutrauenden) Gegenfrage: Muß denn nicht jedes Zeichen doch etwas bezeichnen, etwas bedeuten? Ein „Zeichen“

bericht der Deutschen Mathematikervereinigung“, VII. Bd., 1. Heft, 1899, angeführt:

FELIX KLEIN (Über Aufgabe und Methode des mathematischen Unterrichts an den Universitäten, a. a. O., S. 128) sagt: „Herr Pringsheim verlangt, daß aller mathematische Universitätsunterricht mit einer scharfen Entwicklung des Begriffes der Zahl und speziell der Irrationalzahl beginnen müsse, wobei er den Zahlbegriff so abstrakt wie möglich faßt, indem er sich an die Heinesche Definition anschließt, derzufolge die Zahlen bloße Zeichen sind, denen eine eindeutig bestimmte Sukzession zukommt, und mit denen nach bestimmten Vorschriften gerechnet werden kann“.

A. PRINGSHEIM (Zur Frage der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung, a. a. O., S. 140–141) erwidert: „Die ... von mir befolgte Methode, die Zahlen in erster Linie als Zeichen aufzufassen, denen lediglich eine bestimmte Sukzession zukommt und mit denen nach bestimmten Regeln gerechnet wird, erklärt nun freilich Herr KLEIN als die denkbar abstrakteste. Mir will das keineswegs einleuchten, da doch gerade bei dieser Auffassung die Zahl mit einer ganz konkreten Vorstellung untrennbar verknüpft erscheint. Und ich möchte zu bedenken geben, daß dann Schachfiguren oder Spielkarten ebenfalls als äußerst schwierige Abstraktionen gelten müßten. Die eben angedeutete Analogie scheint mir geradezu schlagend und läßt sich im einzelnen leicht weiterführen: Mit einem unvollständigen Kartenspiel kann ich nicht Skat spielen; aber auch mit einem vollständigen nicht, wenn ich die betreffenden Regeln nicht kenne. Mit einem unvollständigen Zahlenapparat kann ich keine Analysis treiben, mit einem vollständigen erst dann, wenn ich damit zu rechnen verstehe ...“ –

Unsererseits haben wir es hier nicht mit dem nächsten Anlaß der Kontroverse, nämlich dem mathematischen Universitätsunterrichte zu tun; dennoch lassen sich an die Definition und das Gleichnis von PRINGSHEIM einige auch für den ersten Arithmetik- (und Logik-)Unterricht nützliche Bemerkungen anknüpfen.

Vor allem wird man bei einigem guten Willen finden, daß, wiewohl dem ominösen Wort „Zeichen“ auch hier wieder der Ehrenplatz eines *genus proximum* in der Definition der Zahl angewiesen ist, dieses Wort selber ein möglichst inhalts- und bedeutungsleeres Zeichen, ohne Beziehung auf ein „Bezeichnetes“, bezeichnen will (was nun freilich selbst wieder etwas abstrakt klingt). Wollte man sich einen solchen Gebrauch des Wortes „Zeichen“ versagen, so müßte man eben wieder von Komplexionen reden, an denen nichts in Betracht gezogen wird als „eine bestimmte Sukzession“ und daß mit ihnen „nach bestimmten Regeln gerechnet wird“ (wobei freilich auch der Begriff „Rechnung“ in einem viel abstrakteren Sinne genommen ist und erst aus seiner herkömmlichen Korrelation zu jedem minder abstrakt gefaßten Zahlenbegriff gelöst werden müßte). – Aber auch noch eine Frage zum Skatbeispiel: Wären, wenn es bei den Spielkarten gerade auch nur auf die „Sukzession“ und die „Regeln“ ankommt, nach dem Wortlaut der fraglichen Definition, nicht auch die Spielkarten Zahlen und die Zahlen Spielkarten? Wenn ja, so wäre eben jene Zahldefinition doch zu weit, weil zu abstrakt. – Und ebenso: Was für ein Unterschied bliebe noch zwischen Rechnen und Spielen?

Um mit dem bisherigen Rat zur Vorsicht, nötigenfalls zur Enthaltsamkeit in Sachen des Allgemeinbegriffes „Zahl“, auch einen positiven Hinweis auf ohne Bezeichnetes ist ja doch ebenso unmöglich wie ein Gatte ohne Gattin, ein Größer ohne Kleiner, eine Ursache ohne Wirkung – überhaupt ein relativer Begriff ohne sein Korrelat. Ebenso schlimm ist es, wenn eine Definition beginnt: „Die Zahl ist ein Ausdruck" (vgl. oben S. 61) usw. Denn wieder gibt es keinen „Ausdruck", der nichts ausdrückt; und auf das Ausgedrückte kommt es an, letztlich aber wieder auf dessen Bedeutung. Dieser Bedeutung, dem Gegenstande des Ausdrückens oder Bezeichnens gegenüber sinken alle ausdrückenden Laute, Gebärden, schriftlichen Zeichen oder sonstigen Symbole, alle Wörter, Namen zu Nichtigkeiten, *„flatus vocis"*, herab. Hat man ihnen aber selber soeben die Bedeutung genommen, so wird man nicht ungehalten sein dürfen, wenn ein anderer die Zeichen als solche unbedeutend findet. – Aber freilich, die geistreiche Teufelei: „Denn leider, wo

---

eine auch im Unterricht jedenfalls mit vielseitigem Nutzen zu verwendende Darstellung zu verbinden, sei das nur 30 Seiten starke, aber überaus inhaltsreiche Schriftchen von OTTO STOLZ „Größen und Zahlen" (Teubner 1891) hier nochmals empfohlen. Für unser besonderes Thema ist vor allem beachtenswert, daß sogar hier eine allgemeine Antwort auf die Frage „Was ist die Zahl?" gar nicht versucht wird, sondern es heißt nur (S. 10): „Die verschiedenen Arten von Zahlen, von denen wir im folgenden hören werden, erscheinen als besondere Fälle dem eingangs aufgestellten allgemeinen Größenbegriffe untergeordnet." [Als „das Merkmal des Groß- und Kleinseins" (S. 5) „brauchen wir nur festzusetzen, daß je zwei von ihnen entweder als gleich oder ungleich bezeichnet werden". Gegen diese Definition erhebt sich freilich sogleich wieder das unmathematische Bedenken: Auch zwei Farben können ja „als gleich oder ungleich bezeichnet werden" – haben sie darum schon „das Merkmal des Groß- und Kleinseins"?] Worauf es STOLZ ankommt, ist die historische und sachliche Entwicklung der verschiedenen Arten von Zahlen bis hinauf zu HAMILTONS Quaternionen, von deren Wesen eine überaus lichtvolle Darstellung gegeben wird. – Will der Lehrer es auf der obersten Stufe des Unterrichtes nicht bei bloßer Veranschaulichung des Lateralen, wie wir sie oben S. 367 als die hausbackenste anführten, und noch weniger bei der bloßen Versicherung bewenden lassen, daß die Zeit ein-, die Zahl zwei- und der Raum dreidimensional sei, so mag ihm die Darstellung von STOLZ dazu dienen, die Lehre von der Zahlenebene dahin zu vertiefen, daß und warum zwar auch andere Gebilde als $a+bi$ noch räumlich darstellbar sind, aber dann nur mehr unter Verzicht auf das kommutative Gesetz der Multiplikation. – Auch einer Versuchung zu bloßem leeren Weiterspekulieren, wie sie bei gescheiten Schülern leicht die unwillkommene Folge solcher Anregungen ist, tritt das Schriftchen entgegen (S. 30): „Die allgemeine Arithmetik trägt, wie GAUSS ja schon 1831 ausgesprochen hat, in sich selbst ihren Abschluß, so daß man eine weitere Bereicherung derselben weder zu erwarten noch zu befürchten braucht. Auf sie folgt die Theorie der Quaternionen, an Bedeutung sie zwar nicht erreichend, aber immerhin merkwürdig als Denkmal genialen Scharfsinnes und wertvoll für geometrische und mechanische Untersuchungen."

Begriffe fehlen, da stellt ein Wort zur rechten Zeit sich ein", hat ihr Bürgerrecht als ernsthafte Theorie sich in der Geschichte der Philosophie längst unter dem Titel „Nominalismus" gesichert. Und wenn man mit diesem seit dem Mittelalter, ja dem Altertum, bis auf unsere Tage nicht fertig geworden ist, so wird wohl auch künftighin der Nominalismus einem tief gefühlten Bedürfnis soundsovieler Philosophen und Nichtphilosophen den adäquaten Ausdruck geben. Diese wortfreundliche und denkfeindliche Theorie erhebt seit den Tagen der antiken Skepsis immer und überall dort ihr Haupt, wo es mit dem Verstehen (dem „Erklären", aber auch schon dem „Beschreiben") solcher Erkenntnistatsachen, die über das Sehen, Hören, Riechen, Schmecken, Tasten hinausgehen, nicht mehr recht vorwärts will. Es müßte daher erst die sensualistische Grundvoraussetzung, daß die Analyse von was immer für Gedanken letztlich eine „Analyse der Empfindungen" (von Farben, Tönen, Gerüchen ...) sei, widerlegt sein, ehe man die nominalistische These „Zahlen sind Namen"[1]) oder „Zahlen sind Zeichen, Ausdrücke" u. dgl. m. von Grund aus widerlegen könnte. Da hiezu an dieser Stelle nicht der Platz ist, so sei von der dem Verfasser richtig scheinenden Antwort auf die Frage „Was sind und sollen Zahlen?" (DEDEKIND) hier nur so viel[2]) mitgeteilt,

1) MACH sagt im Abschnitte „Namen und Zahlen" (Wärmelehre, S. 67): „Was sind Zahlen? Die Zahlen sind ebenfalls Namen ... Wir zählen, wo wir die Unterscheidung gleicher Dinge festhalten wollen. Also wir geben jedem einzelnen einen Namen, ein Zeichen. Das Zählen beginnt mit dem Zuordnen der wohlbekannten Finger, deren Namen auf diese Weise allmählich Zahlen werden" usw. – Während hier MACH – auch abgesehen von der nominalistischen Grundauffassung – ausdrücklich der (auch von HELMHOLTZ und KRONECKER vertretenen) Theorie sich anschließt, daß die Ordinalzahlen primär seien im Vergleiche zu den Kardinalzahlen (dieser althergebrachte Terminus weist freilich auf die entgegengesetzte Auffassung hin), will dagegen MACH (Erkenntnis und Irrtum, S. 321), „auf den gelehrten Streit, ob die Kardinal- oder Ordinalzahlen psychologisch oder logisch als die primären zu betrachten seien, nicht eingehen. Zahlennamen für kleinere Zahlen können zweifellos entstehen ohne ein Ordnungsprinzip." Aus den letzten Worten müßte man sogar eine Zurücknahme der nominalistischen Identifizierung von „Zahl" und „Zahlenname" herauslesen. – Unabhängig von der vielfach anfechtbaren philosophischen Deutung der mitgeteilten psychologischen und kulturhistorischen Tatsachen bildet dieser ganze Abschnitt „Zahl und Maß' (S. 315–330) wieder eine Fundgrube von Anregungen, die zum Teil sicher auch auf der obersten Stufe des mathematischen Unterrichtes verwendbar sein werden.

2) Von obigem Bruchstück einer Antwort auf die Frage „Was ist die Zahl?" sei rückhaltlos anerkannt, daß schon das *genus* „Komplexion" in dem hier gemeinten Sinne Vorkenntnisse aus der allgemeinen Psychologie (und der

daß dem unmöglichen *genus proximum* „Zeichen" („Ausdrücke" u. dgl.) ausdrücklich das folgende entgegengestellt werde:

Relations-, Komplexions-, allgemein: Gegenstandstheorie, s. u.) voraussetzt, die in den Kreisen der Nichtpsychologen — und zu diesen gehören nun einmal die Mathematiker als solche — gegenwärtig noch nicht verbreitet zu sein pflegen. Denn die Psychologie jener höheren geistigen Tätigkeiten, zu denen auch das Analysieren und Kolligieren gehört, pflegt ja auch unter den Psychologen von Fach gegenwärtig noch sehr zu kurz zu kommen und nur von einzelnen Psychologen und Psychologenschulen mit der nötigen Intensität betrieben zu werden.

In meiner seit mehreren Jahren vergriffenen Logik (1890) behandelt der § 24 „Begriffe, welche aus der Reflexion auf psychische Erscheinungen hervorgehen". Und hier heißt es u. a.: „Daß aber sogar die tiefergehenden Untersuchungen der Grundbegriffe solcher Wissenschaften, welche dem psychischen Gebiete fern zu stehen scheinen, doch auf dieses Gebiet führen und eben hierdurch ‚philosophischen' Charakter annehmen, zeigt in einem besonders lehrreichen Beispiele die so naheliegende Frage: Was ist die Zahl? Der Sinn des Satzes: ‚Ich sehe hier . ˙ . drei Punkte' ist nicht identisch mit dem: ‚Ich sehe hier einen, einen, einen Punkt.' Damit ich sie als ‚drei' vorstelle, muß ich vor allem jeden Punkt für sich ‚als Einheit' aufgefaßt haben, u. zw. so, daß die Vorstellungen jener Einheiten nicht irgendwie selbst in eine Vorstellung ‚verschmelzen' oder verschwimmen, sondern daß sie mir als getrennt bewußt bleiben. (Man versuche, wieviel Einheiten man auf solche Art noch — ‚direkt', § 26 — vorstellen kann, ohne bereits arithmetische Zerlegungen, wie $5 = 3 + 2$, $6 = 3 \times 2 \ldots$ zu Hilfe zu nehmen. Hamilton hält 8 für die obere Grenze, jedenfalls ist jene Fähigkeit bei Verschiedenen sehr verschieden; vgl. § 97, S. 112). Ohne jene psychischen Tätigkeiten des Setzens als ‚Einheit' und des Zusammenfassens gäbe es also keinen Begriff auch nur von den kleinsten absoluten Zahlen (‚Anzahlen') und somit keinerlei Arithmetik. — Allerdings aber kann jene zusammengesetzte psychische Tätigkeit vollzogen (und somit auch Arithmetik betrieben) werden ohne eigene psychologische Reflexion auf jene Tätigkeit: denn der Arithmetiker hält sich am Beginne seiner Wissenschaft nicht auf bei der Frage ‚Was ist die Zahl?', sondern er findet die Vorstellungen der kleinsten Anzahlen und einer daraus abstrahierten Vorstellung von ‚Zahl' als etwas vor, was bereits in früher Kindheit erworben und seit jener Zeit praktisch verwendet worden war. Anders der Erkenntnistheoretiker (Psycholog, Logiker): er erkennt, indem er jene Frage zu beantworten unternimmt, den wesentlichen Anteil, den das Psychische an jenem Begriffe hat; und er erkennt dies nur, indem er seine Reflexion auf sein eigenes psychisches Tun beim Bilden der Anzahlen (und späterhin der negativen, gebrochenen . . . Zahlen) richtet."

Ich halte von Vorstehendem das Wesentliche auch heute noch für einwandfrei. Nur ist der hier eingenommene psychologische Standpunkt durch Meinongs Gegenüberstellung von Psychologie und „Gegenstandstheorie" an Bedeutung zurückgetreten hinter dem gegenstandstheoretischen (Näheres über diesen neuen Begriff und Terminus vgl. § 49, S. 451). Von letzterem aus wurde der Zahlbegriff, übrigens ganz im Sinne moderner Mannigfaltigkeitslehre, behandelt von Meinongs Schüler Dr. Mally in seinen „Beiträgen zur Gegenstandstheorie des Messens" (in den von Meinong herausgegebenen Untersuchungen zur Gegenstandstheorie und Psychologie, 1904, Leipzig, bei Johann Ambrosius Barth). —

Zahlen sind eine bestimmte Gattung von **Komplexionen** (zwischen was immer für Gattungen und Arten des Gezählten). – Was hier zu einer Definition noch fehlt, nämlich die Angabe der *differentia specifica* (gegenüber anderen Arten von Komple-

---

Merkwürdig selten trifft man in der Literatur den Gedanken an, daß wir (vor aller arithmetischen Zuordnung oder sonstigen Verknüpfung) von den Zahlen 2, 3, 4 bis etwa hinauf zu jener HAMILTONschen Grenze selbständige Vorstellungen haben. So sagt ausnahmsweise richtig FRIEDRICH ALBERT LANGE (Logische Studien S. 141), „daß die Zahl ursprünglich nicht etwa durch systematisches Hinzufügen von einem zu einem usw. entsteht, sondern daß jede der kleineren, dem später entstehenden System zugrunde liegenden Zahlen durch einen besonderen Akt der Synthesis der Anschauungen gebildet wird, worauf dann erst späterhin die Beziehungen der Zahlen zueinander, die Möglichkeit des Addierens usw. erkannt werden." – Ich halte diese Betonung der psychologischen und auch noch der begrifflichen Selbständigkeit jeder einzelnen Zahl (die zum Glück unabhängig ist von LANGEs Liebhaberei für den „Raum" als Grundlage der formalen Logik, der Zeit und der Zahl) für durchaus zutreffend. Denn wollte man z. B. „fünf" so „definieren": $5=4+1$, $4=3+1$, $3=2+1$, $2=1+1$, so müßte man sich beim sukzessiven Substituieren dieser Subdefinitionen zum mindesten merken, daß es gerade „vier" solcher Substitutionen gegeben hat. Rein logisch ginge das ja, da immerhin die Zahl der zu merkenden Substitutionen um 1 kleiner ist als die Zahl der zur Fünfheit zusammenzufassenden Einheiten; aber daß die damit verbundene psychologische Komplikation sich nicht in dem wirklichen Vorgang beim Vorstellen kleinster ganzer Zahlen findet, dürfte durch untrügliche Selbstbeobachtung für jedermann zu erweisen sein.

Sehr eingehend und vielseitig erörtert EHRENFELS (Zur Philosophie der Mathematik, Viertelsjahrsschrift für Philosophie, Band XV, 1891, S. 285–347) die psychologischen und erkenntnistheoretischen Grundlagen der Arithmetik. Auch er verzichtet auf die Angabe eines *genus proximum* für den Begriff der Zahl, da ihm die drei in Betracht kommenden psychologischen Theoreme vom Ursprung schon der Begriffe Einheit und Vielheit (aus der Konzentrierung der Aufmerksamkeit, aus dem In-Relation-setzen, aus äußerer Wahrnehmung) teils an der Ungeklärtheit der vorausgesetzten psychologischen Tatsachen und Begriffe zu scheitern scheinen, teils von ihm als unmöglich erwiesen werden. Aber (S. 290): „Wenn man die klarste und deutlichste Zahlvorstellung, diejenige, welche die meisten Menschen nur bis Vier oder Fünf zu fassen vermögen, die „direkte" Zahlvorstellung, als psychologisches Faktum unanalysiert hinnimmt (das Recht hierzu gibt die Empirie in unzweifelhafter Weise) und sein Augenmerk lediglich auf die verschiedenen Arten hinlenkt, wie diese Vorstellung umschrieben wird und Zahlen „indirekt" zum Bewußtsein kommen, so eröffnet sich ohne bedeutende Schwierigkeit eine Reihe wohlverbürgter, fruchtbarer Erkenntnisse." Und nun werden der Reihe nach beschrieben: Die Zählvorstellungen, die Wort- und Schriftvorstellungen, die bildlichen Zahlvorstellungen (z. B. fünf als Zahl der Ecken des Drudenfußes), die Größenvorstellungen von Zahlen (durch Größenverhältnisse), dann die Summierungs-, Produkt- und Potenzvorstellungen, die Differenzvorstellungen (wo treffend darauf hingewiesen wird, daß wir das Subtrahieren nicht nur als invers zum Addieren, sondern auch direkt als Wegnehmen denken) usw.

xionen, die nicht Zahlen sind), wäre erst durch eine allseitige Komplexionstheorie[1]) zu geben, wozu hier wieder nicht der Ort ist. – Für die richtigen *differentiae specificae* im arithmetischen Sinne, nämlich was ganze, rationale, reelle usw. Zahlen sind, sorgt ja zum Glück unabhängig von aller Psychologie und Komplexionstheorie schon – die Arithmetik selber.

b) Die Raumvorstellungen.

Minder schlimm als bei den Zahlen steht es, wie gesagt, mit der Psychologie der Raumvorstellungen[2]). Auch ohne Eingehen auf letzte Fragen, z. B. nach dem psychologischen Ursprung der Raumvorstellungen[3]) überhaupt, kann und muß es den Geometrielehrer interessieren, zu wissen und zu beachten, wie es im best- und im mindestbegabten Schüler mit dem Stammkapital von Raumanschauungen, das er aus den Jahren vor der Schulzeit mitbringt, bestellt ist, und was sich während der Jahre der Volks-

1) Siehe Anmerkung, S. 437, Zeile 1 v. o.

2) Immerhin zeigt z. B. das ausführliche Kapitel „Der Raum" in POINCARÉs „Wissenschaft und Hypothese" eine eigentümliche Vorliebe für die psychologischen Raumtheorien früherer Jahrzehnte, indem die Muskelempfindungen bei ihm noch immer eine so große Rolle spielen wie zu Zeiten LOTZEs. Und doch sollte seit HERINGs exakter Lehre von den Gesichtsraumempfindungen, die nach ihm so etwas unmittelbar Erlebtes sind, wie die Farbenempfindungen (bei denen doch auch niemand von bloßen „Farbenzeichen" analog den viel berufenen „Lokalzeichen" spricht), das alte und in mannigfaltigen Formen immer wiederkehrende Vorurteil gewichen sein, als müsse man sich gerade in Sachen der Raumpsychologie in selbstgeschaffene Schwierigkeiten stürzen. Dem Vorurteil, daß es mit der Raumempfindung komplizierter zugehe als mit Farben-, Tonempfindungen u. dgl., tritt noch immer wirksam das Buch von STUMPF „Der psychologische Ursprung der Raumvorstellungen" (1873) entgegen. Nach diesen psychologischen Grundlegungen und nach HERINGs sorgfältigen physiologisch-psychologischen Versuchen ist z. B. alles nicht nur überflüssig, sondern geradezu falsch, was POINCARÉ a. a. O., S. 55 sagt: „Jeder weiß, daß diese Wahrnehmung der dritten Dimension sich auf die Empfindung einer Anstrengung bei der zu machenden Akkommodation des Auges reduziert und auf die Empfindung der konvergenten Richtung, welche beide Augen annehmen müssen, um einen bestimmten Gegenstand deutlich wahrzunehmen. Das sind Muskelempfindungen" usw.

Vorstehendes ist geschrieben 1905 auf Grund von „Wissenschaft und Hypothese", 1. Aufl. d. deutschen Ausgabe, 1904. Inwieweit diese Ablehnung speziell von POINCARÉs Vorliebe für Muskelempfindungen gegenüber dem Sehraum zu mildern ist angesichts der Darstellung im „Wert der Wissenschaft" (1906), wird in „Räumliche und raumlose Geometrie" etwas näher zu erwägen sein; daselbst auch der Dank zu sagen für so manches, was in POINCARÉs philosophischen Beiträgen zu den Raumproblemen dankenswert ist.

3) Dies der Titel des § 46 meiner Psychologie (S. 304–346 der großen Ausgabe 1897, S. 91–95 der Schulausgabe, IV. Aufl. 1907).

und Mittelschule noch tun läßt, um jenes Stammkapital sozusagen nutzbringend sich weiter verzinsen zu lassen; oder ohne Gleichnis: inwieweit die vorhandene Raumvorstellung noch um anschauliche Zugaben bereichert werden könne, und wie an diese Anschauungen die weitere logische Bearbeitung der Raumvorstellungen[1]) anknüpfen müsse, damit alle jene Raumbegriffe, die den Gegenstand der Geometrie bilden, nicht „Begriffe ohne Anschauungen“ und als solche „leer“ (KANT) und vollends nicht etwa gar „Zeichen ohne Bedeutung“ bleiben oder werden.

Der nächstliegende Fehler, den der Lehrer angesichts dieser psychologischen Gegebenheiten im räumlichen Denken seiner Schüler zu meiden hat, ist der, daß er über den streng definierten Begriffsinhalten, die die Geometrie gemäß ihrer logischen Absichten den Lehrsätzen zugrunde legt, nicht jene kunstlosen Vorstellungsinhalte, die das Kind schon mitbringt, unbeachtet läßt.

Das einfachste und auffälligste Beispiel für ein solches Zweierlei dürfte die Vorstellung vom Kreis bieten. Die Geometrie versteht unter dem Kreis fast[2]) immer eine ebene geschlossene Linie, deren sämtliche Punkte von einem gegebenen Punkte, dem Mittelpunkte, gleiche Abstände haben. Schwerlich aber dürfte auch unter tausend Kindern oder Erwachsenen, denen nicht zufällig eben diese Definition aus der Schulerinnerung in den Ohren liegt, einer bei einem Kreis an etwas anderes denken als an die konstante Krümmung (das Ebensein dabei stillschweigend vorausgesetzt). Denn diese Krümmung und auch schon geringe Abweichungen von der Konstanz der Krümmung drängen sich der Anschauung mit großer Kraft auf[3]). Gerade von dieser Krümmung darf aber bekanntlich in jener offiziellen Definition der Geometrie nicht die Rede sein: denn daß die Linie konstanten Abstandes in keinem ihrer Teile gerade sein können, ist ja schon ein „konsekutives[4]) Merkmal“ und seine Aufnahme in die

---

1) Dies der Titel des § 47 meiner Psychologie.

2) Z. B. In der absoluten Geometrie von FRISCHAUF wird ausgegangen von der Definition der Kugelfläche (als Fläche konstanten Abstandes von einem Mittelpunkt) und der Kreis erst nachmals definiert als Durchschnittslinie zweier Kugelflächen. Das Motiv dieser Umstellung der herkömmlichen Definitionsfolge ist, daß man so den Begriff des Eben im Begriff des Kreises nicht vorauszusetzen braucht.

3) Vgl. meine Abhandlung über „Krümmungskontraste“ in der Zeitschr. f. Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane von Ebbinghaus Bd. X (1896).

4) Im Gegensatz zu einem konstitutiven, in die Definition mit aufgenommen; vgl. meine Logik, § 21.

Definition würde gegen die Regel der Definition *„ne sit abundans“* verstoßen. Warum aber jenes der Anschauung so lebhaft sich aufdrängende Merkmal der konstanten Krümmung nicht an die Spitze einer geometrisch-logischen Theorie des Kreises[1]) gestellt werden kann, wird eben dem geometrischen Logiker erst bei weitem später klar, wenn er verstehen gelernt hat, auf welch schwierige Begriffe (Normalen in zwei unendlich benachbarten Kurvenpunkten u. dgl.) der abstrakte und allgemeine Begriff der Krümmung angewiesen ist. –

Diese Tatsache der Zweierleiheit, der weit klaffenden Kluft zwischen einer sozusagen psychologischen und der logischen Kreisvorstellung, ist wichtig genug, daß wir ihr noch zwei andere Beispiele an die Seite stellen. Es sind die Vorstellungen von Parallelismus und von Symmetrie, über die HILLEBRAND[2]) sagt:

„So zweifelhaft es ist, ob der geometrische Begriff des Parallelismus durch die Gleichheit der senkrechten Abstände definiert werden darf, so sicher ist es, daß der psychologische Parallelismus oder, wenn man will, der Parallelismus nach dem unmittelbar optischen Eindrucke gerade aus diesem Merkmale u. zw. nur aus diesem konstruiert wird. Wer zwei Gerade als parallel sieht, denkt nicht daran, ob sie sich in beliebiger Verlängerung schneiden oder nicht, er sieht den Parallelismus an den Stücken, die ihm optisch vorliegen – in seinem Bewußtsein zeigt sich nichts von einer in der Phantasie vollzogenen Verlängerung dieser optischen Gebilde; was er also sieht, kann nichts anderes sein als die

1) In den Skizzen zu einer „Vorschule der Raumlehre“ habe ich (S. 99) in Anpassung an die psychologische Entwicklung, aber wahrscheinlich zum Entsetzen solcher Mathematiklehrer, die mehr das geometrisch reife System als das naive Raumdenken der Kinder und der Volkssprache vor Augen haben – einige Übungen über „kleine und große Krümmung“ in Nr. 2, noch vor der vom Kreis handelnden Nr. 3, angebracht.

2) Theorie der scheinbaren Größe bei binokularem Sehen. Denkschriften der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, Bd. LXXII (1902, S. 5). –

Eine große Zahl von Einzelbeispielen über die Verschiedenheit des verstandesmäßig Geometrischen und des unmittelbar (optisch und haptisch) Anschaulichen in unseren Raumvorstellungen enthält die „Analyse der Empfindungen“ von MACH. Insbesondere alles, was die pädagogischen Reformer für das Heranziehen motorischer Verrichtungen beim Geometrieunterricht verlangen, wird durch MACHs Lehre psychologisch gestützt (wenn auch MACHs Theorien der Raumvorstellungen selbst psychologisch vielfach nicht einwandfrei sind). – Insbesondere hat EHRENFELS dort, wo MACH noch von „Empfindungen“ spricht, „Gestaltqualitäten“, den Begriff der „Gestalt“ vom Räumlichen z. B. auch auf „Tongestalten“ übertragend, aufgezeigt; vgl. S. 84, Anm. 2. (Über das Verhältnis der „Anschauung“ zur Gestalt und wieder der „Gestalt“ zur „Beziehung“ vgl. „Räumliche und raumlose Geometrie“.)

Gleichheit der senkrechten Abstände. Ich mache diese Bemerkung, damit nicht ein mit der Geschichte des „Parallelentheorems“ vertrauter Leser sich zu einem erkenntnistheoretischen Einwande angeregt fühle, der hier, wo wir es nicht mit der Theorie der „geometrischen Axiome“, sondern mit unseren unmittelbaren Anschauungen zu tun haben, an die unrichtige Stelle käme. – Der Begriff der Symmetrie – um auf ein Analogon hinzuweisen – läßt sich geometrisch ganz scharf definieren; aber nur einige Spezialfälle des Symmetrischen im geometrischen Sinne sind auch psychologische Symmetrien, d. h. werden auch als Symmetrien gesehen.“

Die hier von HILLEBRAND richtig bemerkte und geschilderte Verschiedenheit zwischen psychologischer und logisch-geometrischer Vorstellung von Parallelen würde auch jeder Eisenbahnarbeiter bestätigen können, der zu prüfen hat, ob die Schienen parallel liegen: denn auch er prüft ja jenen Abstand, der überall der gleiche sein müsse, mit einem eigens dazu angefertigten Abstandsmesser, und er denkt gewiß nicht daran, was wäre, wenn die Schienen „ins Unendliche“ liefen. – Warum aber begnügt sich dann nicht auch die wissenschaftliche Geometrie mit diesem so handlichen Begriff des gleichen Abstandes der Parallelen, zumal sie den schwierigen Begriff des Schneidens oder Nichtschneidens im Unendlichen dabei los wäre? Offenbar schon deshalb, weil, wenn nun die zwei Geraden *nicht* parallel sind, sogleich auch der Begriff des Abstandes[1]) und somit auch der des gleichen Abstandes seinen Inhalt verliert.

Wie soll sich also der geometrische Elementarunterricht zu diesem und jedem der zahlreichen analogen Fälle eines mehr oder minder weit klaffenden Auseinanderfallens von psychologischen Raumvorstellungen und logisch-geometrischen Raumbegriffen verhalten? Offenbar darf er nicht jene mitgebrachte Vorstellung des Kindes von der „überall gleich krummen“ Linie vornehm ignorieren, auch nicht über sprachliche Unbeholfenheiten wie „überall gleich rund“ u. dgl. spotten, weil doch im Geometriebuch eine sachlich wie sprachlich völlig unanfechtbare Definition säuberlich gedruckt zu lesen und binnen wenigen Minuten glatt zu memorieren sei. *Auch das logisch Unvollkommene zu seinem psychologischen Recht kommen zu lassen*, dazu gewähren die drei Jahre des propädeutischen Unterrichtes der Geometrie sehr gut, aber auch kaum mehr als ausreichend Zeit

1) Von dem „Abstand zweier windschiefen Geraden“ hier abgesehen.

(auf die sprachliche Seite des Hinüberführens aus dem kunstlosen Sprechen des Kindes über seine Raumvorstellungen in die Kunstsprache der Geometrie kommen wir noch im § 52 zurück). – Aber auch noch auf der Mittelstufe, wo man ja schon in die theoretisch geläuterten Begriffe der wirklichen Geometrie einführen will, braucht man mit Definitionen wie die vom Nichtschneiden der Parallelen nicht wie mit der Tür ins Haus zu fallen; bevor man die Definition gibt, kann man ja jetzt aus dem Schüler schon herausfragen, warum es mit dem „überall gleichen Abstand" so lange nicht geht, als man nicht weiß, was „Abstand" bei zwei Linien (denn ursprünglich geht ja der Begriff des „Abstandes" nur auf je zwei Punkte) überhaupt hieße, wenn die Geraden nicht schon als parallel vorausgesetzt wären. – Und diese Rücksichtnahmen auf vorhandene Vorstellungsinhalte werden bis auf die obersten Stufen sich erstrecken. Warum z. B. die Ellipse immer sogleich durch die Brennpunktsdefinition einführen, wenn die perspektivische soviel näher liegt (Kreisscheiben bei schiefer Daraufsicht, Verkürzung, Verlängerung des Schattens einer Kreisscheibe [oder Kugel?] auf einer zu den Strahlen nicht normalen Wand; Verkürzung, Verlängerung der Ordinaten eines Kreises usw.); vgl. S. 317.

Noch lehrreicher für eine künftige „Pflege der Raumanschauung" sind aber vollends manche sehr unwissenschaftliche Tatsachen, die einem allzusehr nur in die wissenschaftliche Geometrie eingesponnenen Lehrer den Blick darauf wiedergeben können, wie es um das tatsächlich räumliche Vorstellen der Menschen außerhalb der Schulstube eigentlich bestellt ist. Aus allerlei tragikomischen Erfahrungen sei empfohlen, z. B. ein Rendezvous zu belauschen, das sich zwei Frauen „bei der Kirche" oder „im Park" geben: „Ich erwarte dich um zehn Uhr auf der linken Seite". Sie sind dann sehr erstaunt, daß man sich auf diese Abrede hin nicht getroffen hat; denn beide haben sich ja etwas ganz Bestimmtes bei dieser Abmachung gedacht – nur wäre es ihnen im Traume nicht eingefallen, daß sich auch nicht die andere ganz dasselbe bei den Worten der Abmachung gedacht habe. Daß „links" ein Relationsbegriff ist, und was etwa sonst noch alles erforderlich wäre, um die Koordinaten[1]) des Punktes, bei dem man sich zu treffen gedachte, zu wirklich

1) PETZVAL (s. o. S. 368, Anm. 2) pflegte uns einzuschärfen, daß auch seine Adresse nichts sei als die „Koordinaten seiner Wohnung".

eindeutigen zu machen, darf man ja von der gewöhnlichen, vorwiegend schöngeistigen Denk- und Sprachbildung nicht voraussetzen oder verlangen ... So geht denn allenthalben das nicht schulmäßige Denken und Sprechen von Raumdingen noch immer seine urwüchsigen Wege und das gelehrte geometrische Denken und Sprechen auch schon mit zehnjährigen Kindern wiederum die seinigen. Sollte sich denn aber zwischen diesen zwei annoch getrennten Welten nicht eine Brücke schlagen lassen, die man die Kinder geduldig in kleinen Schritten erst beschreiten lehren müßte? – Warum z. B. nicht schon die ersten Konstruktionsaufgaben, die ja ohnedies, wie im § 14 gezeigt wurde, als bloß mechanische Anwendungen mechanischer „Kongruenzsätze" keinen Sinn haben, sondern deren Witz in dem Begreifen liegt, daß es Mindestzahlen von eindeutigen Bestimmungsstücken gibt, die letzlich wieder Abstands- und Richtungs-Relationen sind – warum nicht schon die ersten Dreieckskonstruktionen in solche konkrete Formen kleiden, als gälte es, sich z. B. bei der Aufgabe c, α, β im Dreieckspunkt C ein Rendezvous[1]) zu geben? Damit erst wäre dann den viel späteren geodätischen und astronomischen Anwendungen der Trigonometrie wirklich psychologisch vorgearbeitet.

Doch genug solcher Anregungen, die auch den von seiten der hergebrachten Schulgeometrie, nicht von Seiten einer pädagogischen Psychologie herkommenden Lehrer nur aufmerksam

---

1) Das Zurechtfinden in einer fremden Stadt gibt ein verwandtes Beispiel. Man beobachte sich nur einmal selber, wie gut oder wie schlecht es einem hiebei geht: der eine kann stundenlang durch die zum erstenmal besuchten Straßen wandeln und hat dabei immer noch ein mehr oder weniger bestimmtes „Gefühl" (psychologisch richtig also: einen Komplex von Erinnerungs- und Erwartungsvorstellungen) von der Richtung, woher er gekommen ist und wohin er schließlich will. Der andere gerät schon nach einer Viertelstunde Gehens zu seiner Verwunderung an den Ausgangspunkt zurück und hat nichts davon bemerkt, daß er hier notwendig eine Wendung von mindestens 360 Grad (oder gar 720 Grad?) gemacht hat (vgl. S. 108 das Spiel „Topfschlagen"). Und wie sehr verschiedene Mengen von mehr oder minder untereinander zusammenhängenden Raumbildern müssen sich hiebei festgelegt haben! – Allen diesen psychologischen Gegebenheiten sucht ein wirklicher Unterricht der Heimatkunde gerecht zu werden, soweit eben nicht auch er nur auf dem Papier steht. Was alles an solcher Psychologie der Raumvorstellungen versäumt dann ein Geographieunterricht, der sich dieser alten Forderungen überhebt! Möchten nur die Geographen immer wieder fordernd an die Geometrielehrer und -lehrpläne herantreten, damit die Gedanken- und Rücksichtslosigkeiten eines um alle diese Wirklichkeiten der Seele unbekümmerten Geometrieunterrichtes endlich in sich selber verkümmern und sich nicht mit dem bloßen Worte „Raumanschauung" begnügen.

machen wollen, wieviel es für eine vollendete Didaktik nicht nur aus der hohen wissenschaftlichen Psychologie, sondern auch aus der sog. „Haus-, Feld- und Wiesenpsychologie" für die Belebung unseres mathematischen Unterrichtes noch zu entdecken und zu erfinden gäbe. Der Mathematikunterricht von seiner Seite aus kann den Forderungen der gegenwärtigen und künftigen Psychologie entgegenkommen, wenn er seine künstliche Isolierung aufgibt zugunsten allseitiger Fühlungnahme mit den vergleichsweise ebenfalls halb kunstlosen Raumanschauungen, mit denen fast aller sonstige realistische Unterricht von den frühesten Schuljahren an arbeitet (Beispiele hiefür S. 99, Anm. 2, S. 117 unten u. a.). –

Es mag hier als Bestätigung der bisher dargelegten Forderung, daß sich die Schulgeometrie allenthalben „herablassen" müßte, um Fühlung mit der „natürlichen Geometrie" (oder vielmehr Vorgeometrie) zu erhalten, noch folgende Stelle aus WEBER-WELLSTEIN[1]) angeführt sein, da sie einerseits noch allerlei wertvolles konkretes Einzelmaterial für den veranschaulichenden Unterricht bringt, andrerseits aber auch weitertreibt von der psychologischen zur erkenntnistheoretischen Grundlage der Geometrie:

„Ein Lehrsystem der natürlichen Geometrie müßte zunächst in einem einleitenden Kapitel nach naturwissenschaftlichen Methoden gleichsam das Rohmaterial der Geometrie an Vorstellungen und Tatsachen einsammeln. Dieses Kapitel, so wie wir es uns denken, wäre ganz vortrefflich für den Vorunterricht in der Geometrie geeignet, um die Raumanschauung zu wecken, zu stärken und den geometrischen Beobachtungssinn, die Quelle des schöpferischen geometrischen Vermögens, zu schärfen. – Was ließe sich nicht alles über die (materielle) Gerade sagen! Ein gespannter Faden von nicht allzu großer Länge hätte zunächst, wie wir bereits ausgeführt haben, die Vorstellung der Geraden zu wecken. Wir könnten einen Draht so biegen, daß er dem gespannten Faden sich innig anschmiegen läßt, das wäre dann ein stabileres Modell. Indem wir an diesem Draht entlang visieren, erscheint er zum Punkte verjüngt, sein „Inneres wird vom Äußeren beschattet" (Plato). Wir unterstützen den Draht in zwei Punkten; er wird dann festliegen, während ein Punkt ihn nicht festlegen konnte – den „Mittelpunkt" ausgenommen; wir verschieben nun den Stab, während die zwei Stützen bleiben, und visieren gleichzeitig: die Gerade wird sich zum Punkte verjüngen und in Ruhe zu sein scheinen. So ergibt sich die Fortsetzbarkeit der Geraden (Strecke) und zugleich die Tatsache, daß sie durch zwei Punkte

1) II. Bd., S. 23–25.

mechanisch festgelegt und begrifflich bestimmt ist. Dann wäre die Absteckung gerader Linien im Feld, durch fortgesetztes Einvisieren, das Richtungnehmen beim Militär, das Zielen und vieles andere zu besprechen, wo der Begriff der Geraden empirisch verwirklicht wird. Das Lineal wäre endlich die vollkommenste Realisierung der Geraden, aber ein Blick durch ein Vergrößerungsglas hätte uns vor der Illusion zu bewahren, daß diese Vollkommenheit absolut ist.

Reicher fließen die Beobachtungen, wenn wir zum Begriff der natürlichen (materiellen) Ebene aufsteigen. Der Spiegel einer ruhenden Flüssigkeit wäre etwa das Prototyp; wir beobachten sofort, daß wir die Linealkante nach allen Richtungen scharf auflegen können. Wir bemerken diese Eigenschaft alsbald an anderen Flächen, die wir darauf zur Probe unmittelbar auf die Oberfläche der Flüssigkeit legen; so bekommen wir dann etwa in einer dünnen Platte ein haltbares Modell der Ebene. Es wird durch drei seiner Punkte, die nicht in gerader Linie liegen (die Schwerlinien ausgenommen), mechanisch festgelegt; über drei stützende Punkte hin kann die Fläche willkürlich verschoben werden, ohne daß sie beim Visieren zu schlingern scheint: die Ebene ist durch drei Punkte bestimmt. Interessant wäre es dann, zu zeigen, wie bei den verschiedenen Handwerken die (begrenzte) Ebene hergestellt und nach allen Seiten erweitert wird.

Doch genug! Aus dieser Skizze dürfte hinreichend klar werden, wie wir uns den ersten Anschauungsunterricht in der empirischen Geometrie etwa gestaltet denken; er könnte sehr anregend sein. Es sei nur noch gestattet, kurz darauf hinzuweisen, welch reiches Material wir aus der Beobachtung der Symmetrie an Naturgegenständen gewinnen könnten. Indem wir die achsiale Symmetrie in der Ebene zunächst ganz roh dadurch nachahmen, daß wir auf einen Bogen Papier mit schwarzer Kreide irgendeinen Gegenstand, etwa ein halbes Kastanienblatt zeichnen und dann durch Falten des Papiers längs der Symmetrieachse und festes Aufeinanderlegen der beiden Papierhälften die Figur auf die andere Seite der Symmetrieachse abklatschen, gewinnen wir einen geeigneten Übergang von der rein beobachtenden Geometrie zur zeichnenden. Man sieht und beweist leicht aus der Definition, daß ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Symmetrieachse liegt, beim Kopieren in sich selbst übergeht, und findet durch Verwendung zweier solcher Kreise unmittelbar eine Konstruktion des einem Punkte zugeordneten Punktes. Damit werden zahlreiche Konstruktionsaufgaben zugänglich.

Ist so das empirische Material der Geometrie hinreichend gesammelt und durch einfache Schlüsse bereits die Möglichkeit logischer Bearbeitung erkannt und die Freude an scharfsinnigen Schlüssen, die uns die verborgenen Eigenschaften der Figuren enthüllen, hinreichend geweckt, so handelte es sich in einem zweiten Kapitel der natürlichen Geometrie darum, zwischen logisch beweisbaren und durch die Erfahrung zu gewinnenden Eigenschaften der geometrischen Gebilde streng zu scheiden; es würde sich zeigen, daß je nach den Sätzen, die man als unbeweisbar voraussetzt, ein gegebener Satz bald beweisbar, bald unbeweisbar sein wird. In letzter Linie ist es also Willkür oder Sache des Geschmackes, welche Tatsachen man als Grundsätze betrachten will und welche nicht; es kommt nur darauf an, daß die Grundsätze empirisch leicht, d. h. ohne umständliche Experimente, erkannt werden können."

Das Programm des letzten Absatzes geht, wie man sieht, über das didaktisch verwendbare Rohmaterial einer „natürlichen Geometrie" schon weit hinaus. Denn es enthält ein ganz bestimmtes Glaubensbekenntnis zur Erkenntnistheorie des geometrischen Denkens überhaupt, u. zw. das denkbar radikalste. Hieran aber ist gerade die Didaktik des mathematischen Unterrichtes und insbesondere die dem Fortschritt dienende insofern interessiert, als sie durch nichts, auch nicht durch zufällige erkenntnistheoretische Zutaten, dem Fortschritt seinen Eingang in die Schulen erschwert sehen möchte. Sie muß darum an die Möglichkeit, ja Wahrscheinlichkeit denken, daß derjenige Teil der Lehrer, der nicht an eine empiristische, sondern (wohl meist nach KANTscher Tradition) an eine apriorische (und doch wieder nicht nach neuesten Moden bloß logistische) Geometrie glaubt, mit der empiristischen Erkenntnistheorie auch die empirische Geometrie im Unterricht als eine böse Ketzerei von sich weisen zu müssen glaubt. Daher mag der nächste Abschnitt dem *audiatur et altera pars* in Sachen des mathematischen Erkennens gewidmet sein; natürlich nicht so weit, als eine souveräne Erkenntnistheorie es fordern würde, sondern durchaus nur im Dienste einer vorurteilsfreien Didaktik des mathematischen Denkenlernens.

§ 49. **Aus der Erkenntnislehre**[1]).

An Fragen der Erkenntnistheorie ist die Praxis auch des elementarsten Mathematikunterrichtes näher interessiert, als beide Teile auf den ersten Blick wohl glauben möchten. — Die Mathe-

1) Wir wählen die Bezeichnung „Erkenntnislehre", nicht Erkenntnistheorie, damit auch die Logik mit verstanden sei (der wir übrigens noch den besonderen § 50 widmen). Beide haben es mit dem „Erkennen", dem „richtigen Denken" zu tun. Ihr oft umstrittenes Verhältnis läßt sich vielleicht am schnellsten und überzeugendsten durch das der Elektrizitätstheorie (mit ihren

matiklehrer wundern und entrüsten sich gelegentlich darüber, daß ihnen und ihrem Gegenstande eine Sonderstellung innerhalb des Ganzen einer Schule angewiesen zu werden pflegt; sie mer-

---

Kugelfunktionen, Maxwellschen Gleichungen u. dgl.) und der Elektrotechnik erläutern (die Durchführung dieser Analogie bis ins einzelne hoffe ich bald in der Neubearbeitung meiner „Logik" zu geben, die um einen Band „Erkenntnistheorie" vermehrt werden soll). – –

Da es leider üblich ist, auch gewisse metaphysische Begriffe und Theorien (wohl aus einer falschen Scham vor dem Worte „Metaphysik") ebenfalls als „erkenntnistheoretisch" zu bezeichnen, so sei sogleich hier vorausgeschickt, daß im vorliegenden Abschnitt weder solche eigentlich metaphysische Fragen (etwa, ob es einen „Raum an sich" gebe) noch auch solche aus dem Grenzgebiete der Metaphysik und Erkenntnistheorie behandelt werden sollen. Eine solche wäre z. B. die auf S. 280, Anm. berührte Frage: „Macht der Mathematiker seine Funktionen, oder bestehen diese auch in *rerum natura*? Nun, daß es Sinuswellen in der Natur gibt, muß auch der Idealist zugeben" usw. Natürlich war das dort nur als eine Art Kriegserklärung hingeworfen, ohne jede Erwartung, daß sich „der Idealist" durch den Appell an die „in der Natur" vorkommenden Sinuswellen irgendwie geschlagen gäbe. Denn er kann und wird sogleich erwidern, daß ja diese „wirklichen" Sinuswellen natürlich ebensowenig „wirklich" sind, wie auch nur die psychologisch-wirklich phantasierten Geraden des reinsten Geometers geometrisch-wirkliche Geraden sind; sie sind ja günstigstenfalls doch nur „schnurgerade", d. h. nicht ohne Dicke usf. Damit jenes *argumentum ad hominem* aus dem „Wirklichsein" der Sinuswellen – und ebenso schon früher (S. 231, Anm.) der Appell von den angeblich „willkürlich" erweiterten Potenzdefinitionen an eine sozusagen in *rerum natura* vorgegebene und durch die graphische Darstellung der Potenzkurven „vorgeschriebene", d. h. überwillkürliche, überpsychologische Potenzfunktion – einen ernstlich-erkenntnistheoretischen Wert bekomme, müßte gegenüber allem erkenntnistheoretischen Idealismus der strenge und dabei hinreichend weite Begriff des erkenntnistheoretischen Realismus geklärt und gesichert sein. Zu dieser strengen Weite gehört namentlich, daß man bei „Real" nicht nur an eigentliches Dasein (z. B. von Wasserwellen und was metaphysisch hinter diesen stecken mag), sondern daß man auch an das bloße Bestehen (z. B. von Relationen) denkt. Gewiß kommt den Funktionen der Mathematik und ebenso allen Gleichungswurzeln u. dgl. nicht ein Dasein, sondern nur ein Bestehen zu; und so überall, wo der Mathematiker gegenwärtig von „Existenz" spricht, während Ältere (z. B. BOLZANO) vorsichtiger und erkenntnistheoretisch wohl einwandfreier nur von „Möglichkeit" sprachen.

Wenn die Mathematiker das Wort „Existenz" innerhalb ihrer „daseinsfreien" Wissenschaft in einem Sinne gebrauchen, den die an ein allgemeineres, nämlich an das denkbar allgemeinste Gegenstandsgebiet verpflichteten Gegenstandstheoretiker und ebenso die Erkenntnistheoretiker und Metaphysiker mit ihrem Gebrauch des Wortes „Existenz" nicht wohl zur Deckung bringen können, so liegt ein – freilich schwacher – Trost hiefür darin, daß ja die Termini Existenz und Realität in der Philosophie selbst noch nicht zu einem festen Sprach- und Begriffsgebrauch gelangt sind, wenn man auch gerade über diese Dinge schon jahrtausendelang philosophiert. Das Wort „Realismus" im didaktischen Sinn wird uns im X. Band Veranlassung geben, es durch seine untereinander geradezu heterogenen Gegensätze ken aber nicht, daß sie selbst zu einer solchen Absonderung beitragen, wenn sie von ihrer Wissenschaft rühmen, daß sie die schlechthin einzige[1]) sei, der eigentliche Evidenz und Gewißheit zukommt. Ein Lehrer pflegte seinen Schülern diese Sonderstellung in folgenden drastischen Worten einzuschärfen: „Wenn Sie wissen wollen, daß das Pferd vier Füße hat, oder wie das Perfektum von λείπω lautet, so müssen Sie Augen und Ohren aufmachen. Aber daß das Quadrat der Hypotenuse gleich ist der Summe der Quadrate über den beiden Katheten, das können Sie auch in einer finsteren Kammer mittels Ihrer eigenen reinen Anschauung einsehen"[2]). Bekanntlich hat ein alter Philosoph dieses Rezept der Dunkelkammer noch wirksamer gemacht, indem er sich behufs ungestörter Spekulation die Augen ausstach.

(Verbalismus, Humanismus, Idealismus usf.) zu einem didaktisch eindeutigen zu machen. Für jetzt sei der erkenntnistheoretisch wichtigste Gegensatz, der zwischen „real" und „ideal", als auch wissenschaftlich-mathematisch fruchtbar belegt durch die schon S. 342, Anm. berührte Unterscheidung von „Realkomplexionen" und „Idealkomplexionen" (MEINONG). Z. B. Der Witz des Zenonischen „Sophisma" liegt darin, daß man an den Hörer die Zumutung macht, er solle sich alle Glieder der Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$ explicite, d. h. in je einer besonderen Vorstellung („Idee" im Sinne der Engländer) vorstellen, was sogleich, „wegen der Kürze des menschlichen Lebens", als faktisch (und nur insoweit auch logisch) unmöglich eingesehen wird. Der Ernst jenes „Sophisma" aber, um dessentwillen wir es ein didaktisches Meisterstück nannten, liegt darin, daß sich trotzdem das Enthaltensein aller jener unendlich vielen Teile in der „Summe 2", z. B. in zwei unaufhaltsam abfließenden Minuten, verwirklicht zeigt. Als Realkomplexion ist das $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots=2$ einwandfrei, als Idealkomplexion mit psychologischen Unmöglichkeiten behaftet. Freilich ist das eine Lösung dieses „Sophisma" und weiterhin wohl auch der KANTschen Antinomien, die dem Appell an „Ideen" im Sinne KANTs so ziemlich entgegengesetzt ist.

Sollte nicht schon dies eine Beispiel zeigen, daß ein künftiges Zusammengehen von Mathematik und Philosophie trotz aller bisherigen üblen Erfahrungen ein noch immer erstrebenswertes Ziel wäre? Ob man auch dieser „Grenze" sich nur „ohne Ende nähern" oder sie dereinst noch „erreichen" wird?

1) Vgl. z. B. das Wort von LITTROW, S. 505.

2) Auch der bescheidenste Psycholog bemerkt sofort, daß hier nichts anderes gemeint ist als eine Phantasievorstellung (z. B. von einer gezeichneten Figur zum Pythagoreischen Satz) an Stelle der Wahrnehmungsvorstellung. Ebensogut könnte aber dann ein Musiker, der statt beim Klavier beim Schreibtisch komponiert, behaupten, er habe „reine Anschauungen" von Tönen. Daß analog der gewöhnlichen Raumgeometrie eine „Farbengeometrie" (MEINONG) denkbar ist, ohne daß man darum eine „reine Farbenanschauung" analog KANTs „reiner Raumanschauung" annehmen müßte, wird in „Räumliche und raumlose Geometrie" weiterhin zu erörtern sein.

„Reine Anschauung“ – dieser KANTsche Leit- und Lieblingsbegriff ist also eingedrungen schon bis hinunter in unsere Schulstuben. Und wie KANT reine und angewandte Logik aufs schärfste schied, so wogt gerade heute der Kampf zwischen reiner und angewandter Mathematik, und dabei legt es schon das Wort „angewandt“ nahe, daß das „rein“ das frühere (gleichviel, ob im zeitlichen oder nur logischen oder im speziell „transzendentalen“ Sinne) sei. Was Wunder also, wenn auch der mathematische Unterricht von der Vormeinung beherrscht ist, es müsse zu allererst reine Mathematik getrieben worden sein, damit man sie, soweit dann Zeit und Lust reicht, auf dieses oder jenes anwenden könne; jedenfalls sei reine Mathematik die Hauptsache, angewandte die Nebensache.

Wenn sich so höchste Philosophie und primitivste Schulpraxis vereinigen, der Mathematik eine Sonderstellung in der Wissenschaft und in der Schule anzuweisen und diesen Ausnahmsstandpunkt zu einer der festesten Traditionen zu machen, über die Wissenschaft und Schule überhaupt verfügen – ist es dann nicht aussichtslos, etwas gegen das Monopol der Mathematik hier wie dort zu sagen? Nun, es kommt eben auch hier auf einen Versuch an, ob sich die ausgezeichnete Stellung der Mathematik innerhalb alles Denkens und des mathematischen Unterrichtes innerhalb alles Denkenlehrens nicht doch noch etwas anders umgrenzen und begründen lasse, als es bisher traditionell gewesen war.

Schon lange, ehe KANT die Mathematik für den „formidablen Bundesgenossen“ seiner aprioristischen Philosophie erklärt hatte, war von LOCKE, LEIBNIZ, HUME die erkenntnistheoretische Tatsache festgestellt worden, daß es beim mathematischen Vorstellen und Urteilen wesentlich anders hergehe als beim Sammeln von „Erfahrungen“ der äußeren und inneren Natur. So hat HUME[1]) der Erkenntnis von Einzeltatsachen (*matters of fact*) die mathematische Erkenntnis als eine von Relationen zwischen bloß Gedachtem (*relations of ideas*) gegenübergestellt. Auch er, der Vater selbst noch des modernsten Positivismus (der sich viel deutlicher „Negativismus“ nannte), hob kräftigst hervor, daß

---

1) Untersuchung über den menschlichen Verstand, IV. Abschnitt. (Abgedruckt als sechstes der „Zehn Lesestücke aus philosophischen Klassikern“ [50 Seiten], 4. Auflage 1906, Tempsky, Leipzig und Wien, die den Anhang meiner Propädeutischen Logik und Psychologie bilden).

diese mathematische Erkenntnis vor jener empirischen darin etwas voraus habe, daß wir bei den „Tatsachen“ immer etwas (u. a. Bestehen oder Nichtbestehen einer Kausalbeziehung) letztlich einfach hinnehmen müssen, ohne es von Grund aus verstehen zu können. Ja in der endgültigen Zerstörung aller Hoffnungen, als sei ein solcher empirischer Rest restlos in reines Denken aufzulösen, besteht das größte und unvergänglichste aller Verdienste HUMEs um die Erkenntnistheorie und durch sie auch um die Erkenntnispraxis der empirischen Forschung. Denn wenn dann doch noch um die Mitte des XIX. Jh. ein POISSON versucht hat, den Satz vom Kräfteparallelogramm rein mathematisch zu beweisen, so hat seither die mathematische Physik, zu der ja auch die Mechanik gehört, alle solchen Beweise als Scheinbeweise erkannt und hierin endlich sich der um hundert Jahre älteren philosophischen Entdeckung angeschlossen. KANT aber hatte inzwischen das viel zitierte Wort geprägt: „Ich behaupte aber, daß in jeder besonderen Naturlehre nur so viel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist“[1]). Unbekümmert um ein solches, für die Mathematik freilich schmeichelhaftes Dogma war es den Früheren und ist es auch den Späteren nicht eingefallen, allem den Namen einer „Wissenschaft“ abzusprechen, das nicht oder insoweit es nicht mathematisch ist. Es muß also wohl auch KANT unter „mathematisch“ etwas verstanden haben, das sich nicht ganz mit dem engumgrenzten Begriff deckt, den wir wenigstens in der Schule darunter verstehen — der Zahlen- und Raumlehre als solcher. Vielmehr war es bei KANT die eigentümliche Methode des „Konstruierens“ (auch dieses Wort in viel weiterem Sinn verstanden als etwa in der Schulgeometrie) — also primär die Methode und erst sekundär das sonst als „Mathematik“ umgrenzte Gegenstandsgebiet — der er jene Auszeichnung vorbehalten wissen wollte. Freilich glaubte auch KANT dieser Methode in der Hauptsache nichts anderes zugänglich als das Gebiet seiner „reinen Anschauungen“: Raum und Zeit. Denn wenn er in den „Metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft“ auch physi-

1) KANT, Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft, Vorrede. (Berliner Ausgabe, IV. Bd., S. 470. — Hierzu in den „Sachlichen Erläuterungen“ S. 638 einiges zur Deutung und Einschränkung jenes Ausspruches). — Auch SIMON führt diesen Ausspruch wiederholt beifällig an, indem er daraus für den ausgezeichneten Rang der Mathematik auch als Schulwissenschaft argumentiert.

kalische Gegenstände, wie Kräfte und Massen, der apriorischen Methode zugänglich zu machen sucht, so stellt er sich ja doch von Anfang auf den mechanistischen Standpunkt, der alles Natursein und Naturgeschehen letztlich wieder in Räumliches und Zeitliches auflösen zu können meint. – Es bedarf gewiß keiner weiteren Entschuldigung, wenn wir nicht versuchen, an dieser Stelle den also verschlungenen Knäuel von Meinungen und Problemen, von Urteilen und Vorurteilen aufzurollen und zu entwirren; denn Aufgabe des vorliegenden Abschnittes ist nicht die Erkenntnistheorie um ihrer selbst willen, wohl aber die erste Anleitung zur mathematischen Erkenntnispraxis womöglich ein paar Finger breit vorwärts zu rücken, indem wir sie vor allem entlasten von einigen auch auf eine mathematische Schulpraxis schwer drückenden, erkenntnistheoretischen Vorurteilen. Deshalb sei hier zu allererst nur gewarnt vor dem dogmatischen und noch dazu mißverständlichen Nachsprechen jenes oft zitierten Wortes des „kritischen Philosophen" und im übrigen zu einer selbständigen Stellungnahme gegenüber den einschlägigen Grundfragen des mathematischen Erkennens einzuladen oder aufzureizen versucht durch einige negative und einige positive Thesen. Also:

1. Zahl und Raum nehmen keine Sonderstellung gegenüber allen übrigen Erkenntnisgegenständen ein. Die ihnen zugewandten Denkformen genießen den Vorzug der mathematischen Evidenz und mathematischen Gewißheit nicht als ein ausschließliches Vorrecht. Die Mathematik nimmt im System der Wissenschaft nicht eine isolierte, in keiner Einteilung der anderen Wissenschaften unterzubringende Stellung ein. – Diesen negativen Thesen reihen sich die positiven an:

2. Wohl gibt es eine Behandlungsweise von Erkenntnisgegenständen, die „gegenstandstheoretische[1]) Methode", von der die mathematische Methode, wie sie bisher überwiegend der Zahl und dem Raum zugewandt wurde, nur ein spezieller Fall ist. Das Wesentliche der allgemeinen gegenstandstheoretischen Methode besteht darin, daß diese an was immer für Anschauungs-

1) Obiges ist geschrieben im Sommer 1905, und ich lasse es unverändert auch nach dem Erscheinen von MEINONGs neuester Veröffentlichung „Die Stellung der Gegenstandstheorie im System der Wissenschaften" (Voigtländer [jetzt Fritz Eckhardt] 1907); denn die feineren Unterschiede interessieren nur den philosophischen, nicht den mathematischen Fachmann.

oder Denkgegenständen, gleichviel ob Größen oder nicht, alle diejenigen Relationen und Komplexionen innerhalb eines Gegenstandes, die durch die in Relationen und Komplexionen gesetzten Glieder notwendig und ausreichend „fundiert" sind, zu ihren Untersuchungsgegenständen wählt. Nur ein kleiner Teil solcher Relationen (z. B. Verschiedenheit) und Komplexionen (z. B. ganze Zahlen) sind schon durch solche Glieder fundiert, die nur „in der Anschauung" gegeben sind (z. B. Grün und Blau, die wir unmittelbar als verschieden erkennen – eine Nuß und noch und noch und noch eine Nuß, die wir dann als vier Nüsse erkennen, ohne daß wir erst Definitionen und Annahmen darüber machen müßten, was Blau, Grün und Nüsse sind). Dagegen müssen für weitaus die meisten Relationen (z. B. alle Gleichungen) und Komplexionen (z. B. irrationale Zahlen) Definitionen und Annahmen schon die Glieder künstlich und dann mehr oder weniger unanschaulich zurecht machen, damit sie Surrogate für anschauliche Fundierungen abgeben.

Und daher nun der Wahn, als sei das Anschauliche – ausgenommen das „rein Anschauliche" (das es aber leider gar nicht gibt) – eigentlich unter der Würde des „strengen Wissens". Zwar ist es wahr: Niemand kann von einem Ofen und noch einem Ofen[1]) solche Anschauungen haben, daß er aus der bloßen Wahrnehmung oder Beobachtung deren Gleichheit behaupten dürfte – ihre Ungleichheit ist unendlich (sogar: ∞^{∞}) wahrscheinlich vorhanden, sogar auch dort, wo wir durchaus keine mehr bemerken. Aber wenn wir dann mit um so besserem Gewissen immer wieder bei den verschiedensten Gelegenheiten schreiben $A = B$, weil wir die Gleichheit entweder unmittelbar angenommen (z. B. von den Halbmessern eines Kreises) oder aus solchen Annahmen deduziert haben (z. B. für die Durchmesser des Kreises) – dürfen wir uns darum einbilden, diese leeren „Zeichen" A und B seien nun die eigentlichen Fundamente der angenommenen oder behaupteten oder bewiesenen Gleichheit oder sonst einer Relation? Dagegen spricht alles, was schon oben (S. 433ff. u. a.) gegen „Zeichen ohne Bezeichnetes" gesagt wurde. Wäre diese Liebhaberei für „bloße Zeichen" und „für rein formale Verknüpfung", die seitens einer neuesten Phase der Philosophie (– übrigens einer gänzlich un-, ja antikantischen) als das Heil

1) Vgl. das von Herrn SCHULTZ für seinen Quartanerunterricht gewählte Beispiel, das wir unten, S. 468, weiter zergliedern.

aller Mathematik und namentlich auch aller Erkenntnistheorie der Mathematik verkündet wird, auf diesen Gipfeln menschlicher Erkenntnis am Platze, so müßte ja letztlich auch in den Niederungen der Schulstuben ein Lehrer, der seine Schüler z. B. das $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ und alle übrigen „Formeln" recht vollständig gedankenlos nachmalen sieht, dies als ein Emporklimmen zu jenen Gipfeln freudigst begrüßen. – Wer dagegen in diesen leidigen Vorkommnissen der Schulstube Unrat wittert und hier gegen alle gedankenlos hingeschriebenen Zeichen wettert, mag, wenn er, aus dieser Schulnot aufblickend, des weiteren den letzten B e d e u t u n g e n aller arithmetischen und geometrischen Symbole nachsinnt, aus der gegenwärtigen Erkenntnis- und Gegenstandstheorie sich wenigstens den einen Trost holen: daß hier das Erforschen der Natur jener „daseinsfreien" Relationen und Komplexionen gegenwärtig selber erst noch eine A u f g a b e darstellt, der sich (hoffentlich!) die Forschung gerade dann mit doppeltem Eifer zuwenden wird, wenn die augenblickliche Mode der bedeutungsfreien Zeichen, wenn die Invasion des Nominalismus aus der ein halbes Jahrtausend hinter uns liegenden scholastischen Philosophie in die augenblickliche Philosophie der exakten Wissenschaften wieder hinter uns liegen wird.

3. „R e i n e" und „a n g e w a n d t e Mathematik" unterscheiden sich, wenn obige negative und positive Thesen 1 und 2 auch nur in der Hauptsache richtige Beschreibungen unseres mathematischen und außermathematischen Denkens darstellen, keineswegs, wie KANT geglaubt hat, darin, daß wir in Raum und Zahl (welche letztere KANT ganz äußerlich und gewaltsam, nur dem Raum zuliebe, der Zeit zugesellte) V o r s t e l l u n g s gebilde „a p r i o r i" mit uns herumtragen (allenfalls gar schon von der Geburt her mitbringen), die wir erst nachmals den empirischen Bewußtseinsinhalten als „apriorische Formen" aufprägen.

Was alles an erkenntnistheoretischen Dogmen und Theorien mitstürzt, wenn d i e s e r Begriff des „Reinen" und der „Formen" stürzt, haben wir hier nicht zu untersuchen. Aber schon auf dem vergleichsweise so sehr engen und bescheidenen Gebiete der mathematischen Didaktik sehen wir uns nach Abstoßung der überlieferten Vorurteile eines Vorrechtes der „Form" vor dem Inhalt und einer Unabhängigkeit des „Reinen" von seinen Einkleidungen und Anwendungen auf einen Schlag um die traditionelle Rechtfertigung des traditionellen Unterrichtsgetriebes gebracht. – Ist dieser erkenntnistheoretische Verlust ein didaktischer Gewinn? Schon unser § 4 bekannte sich zu einem vorläufigen „Ja", das es nun einigermaßen zu begründen gilt.

Um denn so rasch als möglich diesen Allgemeinheiten, ohne die eine prinzipielle Rechtfertigung der Neuerungen natürlich nicht möglich wäre, wieder die konkreten Anwendungen aus dem Gesichtskreis des praktischen Schulbetriebes folgen zu lassen, ermessen wir, wie sich der vormals schier unermeßlich scheinende Gegensatz zwischen mathematischem und naturwissenschaftlichem Unterricht im Lichte einer solchen vorurteilslosen Erkenntnislehre fast bis auf Null verkleinert. Vielleicht bringen wir am schnellsten und wirksamsten die Fach- und Schulmänner der Mathematik und Physik auf unsere, d. h. auf die Seite der neuen (d. h. künftigen) Erkenntnistheorie (um die Anerkennung seitens der „reinen" Erkenntnistheoretiker als solcher handelt es sich für diesmal nicht), wenn wir sie daran erinnern, wie weit doch die mathematische Methode sich schon über das Gebiet der „reinen" Zahlen, des „reinen" Raums und der „reinen" Zeit hinaus erweitert hat, vor allem in das der „mathematischen Physik", wo mechanische und elektrische Spannungen, Wärmegrade, Lichtstärken usw. Gegenstand einer füglich doch auch „wissenschaftlich" zu nennenden Untersuchung geworden sind — im ganzen freilich erst nach jener Zeit, da KANT aus seiner „reinen Naturwissenschaft" z. B. die Chemie und die Psychologie noch ganz ausdrücklich ausschließen zu sollen geglaubt hatte.

Wie also macht es der mathematische Physiker, wenn er die in Wärmegraden, elektrischen Potentialen, Farben, Lichtstärken usw. sich uns darstellende Wirklichkeit seinem Denken, seiner Wissenschaft unterwerfen will? Immer und überall sehen wir dieselbe Methode am Werke: der exakte Forscher unterfährt[1]) die Wirklichkeit durch seine Definitionen und Annahmen. Und er macht dies nicht anders in der außermechanischen Physik als

1) Ich habe diesen Ausdruck „Unterfahren" zuerst gebraucht in meinen Studien zur gegenwärtigen Philosophie der Mechanik (Nachwort zu Kants Metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft. Leipzig, Johann Ambrosius Barth 1900, S. 101). — Seither wieder in den Diskussionen über „Grenzfragen der Mathematik und Philosophie" (Wissenschaftliche Beilage zum neunzehnten Jahresbericht der Philosophischen Gesellschaft an der Universität zu Wien, 1906, s. o. S. 195, Anm.) S. 22: „... Wie aber der Übergang von der experimentellen zur theoretischen Physik nichts ist als ein Unterfahren der uns gegebenen physischen Gegenstände mit selbstgeschaffenen Begriffen und Annahmen, so löst sich auch die Antinomie

innerhalb der physikalischen Mechanik selbst: Hier beginnt er mit der weitestgehenden aller Fiktionen, indem er statt mit den einzig wirklichen Körpern beginnt mit einer „Mechanik des Punktes". Dann tut er einen Schritt nach vorwärts, um den Körpern als solchen gerecht zu werden, aber nur, indem er anstatt ihrer wieder die „starren Systeme" einführt. Dann sucht er dem offenbaren und ausnahmslosen Nichtstarrsein aller wirklichen Körper und Stoffe gerecht zu werden durch das Fingieren der ebensowenig irgendwo realisierten Grenzbegriffe der „vollkommen elastischen" und der „vollkommen unelastischen" Körper. Dann sucht er den verschiedenen wirklichen Stoffen ihre Stelle anzuweisen, indem er sie zwischen diesen beiden Grenzen bald näher der einen, bald näher der anderen einordnet — aber auch dies nur, indem er wiederum Annahmen darüber macht, daß eine elastische Nachwirkung von weniger als $^1/_{20000}$ als überhaupt nicht mehr vorhanden fingiert werden dürfe. Usf.

Ganz ebenso nun „unterfahren" wir auch, was uns außerhalb der Mechanik an tatsächlichen Potentialen, Lichtstärken usw. begegnet, durch Annäherungen und immer wieder nur durch Annäherungen an selbstgeschaffene Fiktionsideale. Aber auch diese seine idealisierende Tätigkeit selbst übersieht der Physiker absichtlich oder unabsichtlich — er freut sich über die gelungene Herstellung magnetischer Kraftlinien durch Eisenspäne, der Lemniskaten bei Stromverzweigungen durch NOBILIsche Ringe, der LISSAJOUschen Figuren durch selbstschreibende Pendel, Photogramme u. dgl.; und er sieht nicht oder will nicht sehen, um wieviel voller, satter an Wirklichkeit diese Dinge, diese „Streifen"[1]) sind als die vorher geometrisch entworfenen und auf Gleichungen gebrachten Kurven. Und diese Wirklichkeit macht vor allem auch darin ihr Recht geltend, daß sie immer und immer wieder

---

zwischen der anschaulichen und der unanschaulichen Geometrie einfach so: Wir ‚unterfahren' unsere räumlichen Anschauungen und Erfahrungen durch die Begriffe Punkt, Abstand, Richtung, Gleich usf., aus denen sich die geometrischen Definitionen zusammensetzen".

1) FELIX KLEIN hat zuerst in den Erlanger Ber. 1873 und in den Math. Ann. 22 (183, p. 249) den Begriff des „Funktionsstreifens" eingeführt und in der autographierten Vorlesung „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie" (Leipzig 1902, S. 12ff.) zum anschaulichen Typus des Begriffes der Approximations- im Gegensatz zur Präzisionsmathematik gemacht. Näheres hierüber in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. III_1, Heft 1, S. 147 im Artikel „Die Begriffe Linie und Fläche" von MANGOLDT.

sich an jene Kurven eben nicht genau hält, daß sie die Konturen verwischt – daß sie dem Gedanken als solchem jeden Augenblick zu fühlen gibt, wie sehr sie, die Wirklichkeit, ihm, dem „reinen" Gedanken, zum mindesten um ebensoviel überlegen ist, als er ihr überlegen zu sein sich angemaßt hatte. – Was aber ist dann das Primäre: das „Reine" oder das „Angewandte"? – Man sieht sogleich, wie sehr diese Frage auch die benachbarten Begriffe des „Präzisen" oder des „Approximativen" trifft.

Wollten wir uns für jede künftige Philosophie der Mathematik doch belehren lassen, daß, wenn wir Räumliches, Zeitliches und Zahlenmäßiges zum Gegenstande einer abstraktiven Betrachtung machen, es mit Raum, Zeit und Zahl wenigstens in dem einen Punkt nicht anders als mit Farben, Wärme- oder Ladungsgraden und dgl. m. zugegangen ist: daß wir auch zu den Raum-, Zeit- und Zahlrelationen ebenso die anschaulichen Fundamente in uns vorgefunden[1]) haben mußten, wie uns für eine Temperaturverschiedenheit zwei Temperaturen in der Erfahrung

1) Geradezu „empfunden" freilich nur beim Raum – dagegen nicht bei der Zeit (weil wir nur Gegenwärtiges empfinden können) und nicht bei der Zahl (die eine Komplexion, schon ein „Gegenstand höherer Ordnung", nie ein „Empfindungsgegenstand") ist. – Nur so wird auch das oft zitierte (WELLSTEIN II S. 122, SIMON 1908 u. a.) Wort von GAUSS über die verschiedene Stellung von Raum und Zahl bestätigt und vor mehr oder minder schiefen Ausdeutungen bewahrt. So zitiert z. B. auch wieder MACH („Erkenntnis und Irrtum" I. Aufl. 1905, S. 384): GAUSS spricht gelegentlich die Überzeugung aus, „daß wir die Geometrie nicht vollständig a priori begründen können"... [Brief von Gauß an Bessel, 27. Jänner 1829]. „Wir müssen in Demut zugeben, daß, wenn die Zahl bloß unseres Geistes Produkt ist, der Raum auch außer unserem Geiste eine Realität hat, der wir a priori ihre Gesetze nicht vollständig vorschreiben können." MACH fügt hinzu: „Der Ausdruck: ‚Die Zahl ist Produkt oder Schöpfung des Geistes' wird seither von den Mathematikern wiederholt gebraucht. Unbefangene psychologische Beobachtung lehrt jedoch, daß die Bildung des Zahlbegriffes ebenso durch die Erfahrung eingeleitet wird wie die Bildung der geometrischen Begriffe. Mindestens muß man die Erfahrung gemacht haben, daß in gewissem Sinne gleichwertige Objekte mehrfach und unveränderlich vorhanden sind, bevor Zahlbegriffe sich bilden können. Auch das Zählexperiment spielt in der Entwicklung der Arithmetik eine bedeutende Rolle." – Es sind nur Nuancierungen, die dem Nichtphilosophen, und leider auch nur zu vielen *soi disant* Philosophen (welchen Namen MACH für sich bekanntlich ablehnt) allzu fein scheinen mögen, in denen sich unsere Haltung zum Anteil der Erfahrung auch am Apriorischen von den durch GAUSS und wieder durch MACH vertretenen Ansichten unterscheidet; und es ist nicht zu verlangen, daß diese Nuancen für einen mathematisch und physikalisch noch so geschulten, philosophisch aber ungeschulten, – oder was noch schlimmer ist, verschulten Blick nicht schon

gegeben sein müssen (oder wie wir vor dem Urteil über die Verschiedenheit von Blau und Grün die Empfindungen, also Vorstellungen von Blau und von Grün gehabt haben müssen).

Wäre das wissenschaftlich – und das heißt eben hier erkenntnistheoretisch – einmal begriffen und zugegeben, so möchte es wohl auch die Schulpraxis des mathematischen Unterrichtes von Grund aus in die neuen Bahnen lenken oder wenigstens nicht mehr durch gegensätzliche Vorurteile im Fortschreiten aufhalten lassen. Da es aber allen bisherigen Erfahrungen über das Tempo, in dem das philosophisch Vernünftige dem philosophisch Verstiegenen gegenüber sich durchzusetzen pflegt, widersprechen würde, von der allgemeinen Anerkennung einer neuen Erkenntnistheorie das Tempo der mathematischen Schulreform abhängig zu machen, so wollen wir uns lieber freuen, daß in den neuesten Forderungen zum Umgestalten des mathematischen Unterrichtes es gerade die „Anwendungen“ gewesen sind, die hier ganz aus dem souveränen Interessenkreis der Schule selbst heraus die Schäden des Formalismus wirksam zu bekämpfen angefangen haben. Freilich ist es noch nicht entschieden, wem in der weiteren Entwicklung der souveränen Mathematik der Sieg beschieden sein wird, dem Betonen des „Angewandten“ (etwa nach KLEIN) oder dem Betonen des „Reinen“ (etwa nach HILBERT). Und es wird auch der einen und der anderen Partei kein theoretisch ins Gewicht fallender Kräftezuschuß sein, wenn im Leben der Schule inzwischen die „Anwendungen“ über den Formalismus gesiegt haben sollten. Wohl aber mag es den Kämpfern für eine nicht nur formalistische Schulmathematik als nicht unwichtiger Kraft-

---

wieder unter der erkenntnistheoretischen Unterschiedsschwelle liegen sollten. In unserer, der erkenntnistheoretischen Sprache lautet der Unterschied: „Es gibt apriorische **Urteile**, wiewohl es **keine** apriorischen **Vorstellungen** gibt.“ Da dieser Unterschied nicht einmal für KANT geklärt war, kann man auch von GAUSS nicht verlangen, er hätte innerhalb seiner summarisch richtigen These: „daß wir die Geometrie nicht vollständig a priori begründen können“, nun doch näher unterscheiden sollen, was wir an ihr a priori begründen können (nämlich die geometrischen Urteile) und was nicht (nämlich die Vorstellungen von den allen Raumbeziehungen und Raumgestalten zugrunde liegenden Raumörtern). – Diese Dinge stellen freilich für die gegenwärtige Erkenntnistheorie so sehr allererste Anfangsgründe dar, daß, solange sich diese nicht durchzusetzen vermögen, der fachmännische, nicht bloß dilettantische Erkenntnistheoretiker nur resigniert auf endloses Weiterspinnen der Kontroversen über „apriorische und empirische Geometrie“ usf. *in inf.* gefaßt zu sein hat. Einiges Weitere und Nähere hierüber in „Räumliche und raumlose Geometrie“.

zuschuß gelten, wenn sie hören, daß die Theorie der „reinen Form“ in der Erkenntnistheorie ebensowenig mehr als die einzige angesehen wird, wie etwa die formalistische Musik gegenüber der Musik, die im XIX. Jahrhundert die ganze Welt des Äußeren und Inneren umspannen gelernt hat.

Damit wir aber schließlich nach so weitausschauenden Betrachtungen, die den Gedanken des Reinen und des Formalen an seiner erkenntnistheoretischen Wurzel fassen mußten, nicht etwa um ihn auszurotten, sondern um ihn nur an den richtigen Platz zu versetzen, der hohen Erkenntnislehre nun auch einige für das Schulleben unmittelbar genießbare Früchte abgewinnen, wollen wir zusehen, wie sich der bisher theoretisch verkleinerte Abstand zwischen reiner Mathematik und empirischer Naturwissenschaft in den herkömmlichen Ausdrücken der Unterrichtspraxis beider Wissenschaften ausnimmt.

Knüpfen wir an den Vorschlag (S. 161) an, auf der Unterstufe des mathematischen Unterrichtes nicht von „Beweisen“, sondern vom „Erklären“ zu sprechen. Auch im physikalischen Unterricht der Oberstufe hat man ja vor gar nicht langer Zeit noch „beweisen“ und immer wieder „beweisen“ zu müssen geglaubt: „Pendelbeweis“, „Linsenbeweis“ usw. hießen die Schreckgespenster, die der Lehrer an die Tafel malte, und die den Schüler bis lange über die Maturitätsprüfung hinaus in seine Träume verfolgten. Mit der Zeit wurde man gescheiter und geschmackvoller und sprach von einer Ableitung der Linsenformel aus dem Brechungsgesetz, von der Ableitung der Pendelformel aus den Eigenschaften der kreisenden Bewegung oder aus dem Energiesatz. Dieses Wort „Ableiten“ ließ es wenigstens unentschieden, ob die Prämissen, aus denen abgeleitet wurde, als bloß angenommen oder als in letzter Linie doch auch wieder aus sich heraus einleuchtend hingenommen werden sollten. Und so paßte auch das Wort „Ableiten“ oder „Deduzieren“ zu der endlich erlangten Einsicht, daß es z. B. einen apriorischen Beweis für den Satz des Kräfteparallelogrammes überhaupt nicht geben könne, da unvermeidlich schon das Prinzip der Unabhängigkeit der Kräfte von den Bewegungen ein empirisches Mittelstück zwischen dem rein phoronomischen (insofern apriorischen) Satz vom Beschleunigungsparallelogramm und dem dynamischen (insofern empirischen) Satz vom Kräfteparallelogramm bildet. – Deutlicher noch als „Ableiten“ sagt aber das Wort „Erklären“, daß wir einfach einen empirischen Tatbestand unserem Denken zugänglich machen wollen, indem wir ihn eingliedern in anderes Verstandenes (nicht nur unverstanden uns eben als bloß „bekannt“, „gewohnt“ Geltendes, wie HUME und MACH wollen). Zwar könnte man auch aus dem Worte „Erklären“ heraushören, daß ein restloses Erklären angestrebt werde; vor einem solchen Mißverständnis sollte aber die oft genug wiederholte ehrliche Versicherung schützen, daß man längst wisse, wie die letzten **Prinzipien** einer empirischen Wissenschaft eben selbst noch von unserem Denken als nicht weiter (mittelbar) erklärbar und doch auch nicht aus sich (unmittelbar) einleuchtend, eben als **letzte** Tatsachen hingenommen werden müssen.

Nun wogt in der Erkenntnistheorie der Mathematik gegenwärtig stärker als je der Streit, ob es mit den „Axiomen“ der einst für schlechterdings erfahrungsfrei gehaltenen „reinen“ Mathematik ebenso stehe wie mit den jedenfalls empirischen „Prinzipien“ der Physik, speziell auch der Mechanik; und nichts anderes scheint zur Rettung des axiomatischen Charakters übrigzubleiben, als daß man sie als Sache der „Übereinkunft“ erklärt. Daß dieser Art Spekulationen die Schule bis auf weiteres am besten noch fernbleibt, wird vielleicht von allen erkenntnistheoretischen Parteien in Sachen einer Philosophie der Mathematik zugegeben werden; wenigstens für so lange, bis die logischen Grundlagen allen solchen Streites über „Axiome“ und „Definitionen“ in neue Gleichgewichtslagen eingerückt sind. Sollte aber bis dahin nicht der vorurteilsfreieste Mittelweg zwischen den extremen Grundüberzeugungen der sein, daß man es im mathematischen Unterricht schon aus didaktischen Gründen möglichst so hält, wie es sich im naturwissenschaftlichen allmählich als die natürlichste Logik herausgestellt hat? Man hält es hier nicht mehr für unwürdig, *in medias res* zu gehen und die Tatsachen vor allem für sich selber sprechen zu lassen. Erst wenn das „Daß“ und das „Wie“ durch Beobachtung der Einzeltatsache (die man womöglich den Schüler sogar selbst hat hervorrufen lassen) feststeht, fragt man „Warum“? Oder vielmehr: man erwartet mit Recht, daß eben die Tatsache selbst im Schüler die Neugier nach dem „Warum?“ tausendmal kräftiger erregen wird, als wenn man aus einer Ableitung, aus einer noch so „strengen“ Deduktion die Tatsache samt ihrer Erklärung erst hätte scheinbar hervorgehen lassen. Und so nun sollte nach allem, was die vorausgegangenen Teile dieser Didaktik an Einzelbeispielen beigebracht haben, der gleiche wissenschaftliche und didaktische Vorgang auch im Mathematikunterricht nicht für unwürdig gehalten werden. Zumal auf der Unterstufe sollte man die einzelnen auffälligsten Wahrheiten, ob sie nun den Axiomen näher oder ferner stehen, wie den Satz von den sechs dem Halbmesser gleichen Sehnen (S. 99ff.), von der Winkelsumme des Dreiecks (S. 111), den Pythagoreischen (S. 168), als zunächst wirklich überraschende „Tatsachen" vorführen, die, eben weil sie sich zunächst als empirische Wahrheiten uns aufgedrängt haben, um so kräftiger die Neugier nach dem „Warum" reizen. Auch diese Neugier dämpfe man nicht allzurasch durch den „Beweis", sondern befriedige sie durch eine allmähliche Erklärung, die es im Anfang nicht genau damit zu nehmen braucht, ob auch sie vorerst noch empirische Elemente mit hereinnimmt (z. B. das Aneinanderlegen der drei gleichseitigen Dreiecke, deren Winkel dann zusammen einen gestreckten geben, S. 109). Auch der mathematische Unterricht wird dann nicht viel eher als der physikalische, d. h. erst auf der Oberstufe, bei den Prinzipien anlangen. Erst ein solches *„res ad principia venit"* sichert dem mathematischen Unterricht seinen Charakter als einen im unanfechtbaren Sinne „realistischen" im Gegensatz zu allem bloß „formalistischen".

Eine über die bloßen Schulinteressen hinausblickende Erwägung aber, inwiefern unbeschadet alles Gesagten die Mathematik (als „spezielle Gegenstandstheorie") keineswegs grob empiristisch unter die „Naturwissenschaften" einzureihen ist, sondern welche Stellung im System der Wissenschaften ihr ganz allgemein zukommt, und daß im besonderen auch nicht etwa schon durch die Einreihung der Schulmathematik unter die „realistischen" Fächer etwas gegen ihren apriorischen Charakter gesagt sein soll, bleibe dem X. Band vorbehalten. Fürs erste mögen schon die nachfolgenden Bemerkungen zum Schlagwort „induktiv" es verhüten helfen, daß man die Einreihung der Mathematik in die „realistischen Fächer" als eine Einreihung der Mathematik in die „induktiven Wissenschaften" mißverstehe.

Vielleicht hat man es bisher vermißt, daß in dem ganzen Abschnitt aus der Erkenntnistheorie (und Logik) von allen einschlägigen Schlagworten die schlagendsten, nämlich „**Induktion**" und „**induktiv**" einstweilen noch ganz vermieden worden sind.

„Der Lehrer gehe auf der Unterstufe des mathematischen Unterrichtes induktiv vor", hat der Schreiber dieser Zeilen so manche

Schulgröße sagen hören, die bei anderer Gelegenheit sich nicht scheute einzugestehen, daß ihr jeder philosophische Kunstausdruck ein ewig unverständliches Ding sei. Einzig und allein das Wort „induktiv" scheint von der allgemeinen Unbeliebtheit alles Philosophischen oder philosophisch Klingenden eine Ausnahme zu machen (– höchstens noch das Wort „anschaulich" teilt das Schicksal des psychologisch-pädagogisch-didaktischen Kleingeldes, ein bis zur Unkenntlichkeit, jedenfalls bis zur „Unanschaulichkeit", abgegriffenes Schlagwort geworden zu sein).

Zuerst also wieder rein theoretisch gefragt: Gibt es in der Mathematik selber, d. h. in der den strengsten wissenschaftlichen Anforderungen, unbekümmert um alle didaktischen Nebenrücksichten zustrebenden freien Forschung auf mathematischem Gebiete, überhaupt eine Induktion? Bekanntlich ja, nämlich die sog. vollständige Induktion mittels des „Schlusses von n auf $n+1$"[1]). Aber nicht diese interessiert uns hier, sondern die „unvollständige Induktion", die ein allgemeines Urteil schon dann ausspricht, wenn sie sich bewußt ist, nicht alle unter das Urteil fallenden Einzelfälle auch einzeln geprüft zu haben. Nun – auch diese unvollständige Induktion hat sich um die Mathematik bekanntlich große heuristische Verdienste erworben; namentlich in der Zahlentheorie hat sie von den Entdeckungen FERMATS bis auf den heutigen Tag schöne Sätze geliefert. Aber fühlt nicht jeder Mathematiker, der der Induktion eine frisch gepflückte Frucht verdankt, hiebei immer noch etwas wie einen Stachel: zunächst, ob es denn gewiß auch im nächsten oder im 101. oder 1001. nicht untersuchten Falle sich immer noch so verhalten wird, und dann: warum die induzierten Beziehungen bestehen? Kurz, kein Mathematiker läßt die frische Frucht einer frisch und fröhlich gewagten Induktion auch schon als eine völlig reife Frucht der wirklichen Mathematik gelten. Die Induktion innerhalb der Mathematik in allen Ehren – aber nie ist die wirkliche Mathematik eine induktive, eine empirische Wissenschaft; weder die Wissenschaft der Zahlen[2]) noch die

---

1) Über seine große Bedeutung für die strengsten theoretischen Grundlegungen der Mathematik vgl. u. a. HÖLDER (Anschauung und Denken in der Geometrie [1900]) und insbesondere POINCARÉ „Wissenschaft und Hypothese".

2) In den „Studien zur gegenwärtigen Philosophie der Mechanik" (s. S. 53 Anm.) habe ich gerade die Gesetze der Zahlen, z. B. die induktiv erratenen der Zahlentheorie, als einen Beleg dafür angeführt, daß es Naturnotwendigkeiten gebe, auch bevor sie noch „denknotwendig" geworden sind.

vom Raum, wenn uns dieser auch letztlich durch unsere Raumempfindungen gegeben ist, die also „Erfahrungen“ so gut (nur etwas schief ausgedrückt) sind wie die Farben oder die Wärmegrade.

Haben wir durch dieses erkenntnistheoretische Bekenntnis den induktiven Charakter der wissenschaftlichen Mathematik weit ausschließlicher abgelehnt, als es den philosophischen Lieblingsmeinungen gar vieler gegenwärtiger Mathematiker selbst passen mag, so haben wir uns hiedurch das Recht erworben, für die mathematische Didaktik ebenso vorurteilslos die Grenzen zu bestimmen, innerhalb deren der wirklichen Induktion immer noch ihr zwar nicht logisches, dafür aber psychologisches Recht zukommt. Wirkliche, unvollständige Induktion war es z. B., wenn wir uns nicht die Mühe verdrießen und die Freude nehmen ließen, den Pythagoreischen Satz nacheinander für die Kathetenverhältnisse 1 : 1, 1 : 2, 1 : 3, ... 2 : 3, 2 : 5, 3 : 4 usw. in sauber ausgeführten Zeichnungen zu „entdecken“ (S. 170). Wirklich induktiv war es in den Vorübungen zu den Bruchrechnungen (S. 78 ff.) mit allerlei Bruchregeln zugegangen. Wirklich induktiv war sogar auch unsere allererste Einführung nicht nur in die Gesetze der Logarithmen, sondern auch schon in deren Begriff (S. 235). Induktiv sind wir sogar noch vorgegangen, als wir zu x^2, x^3, x^4 die abgeleiteten Funktionen $2x$, $3x^2$, $4x^3$ bildeten und daraus auf nx^{n-1} schlossen, ohne auch diese allgemeine Formel allgemein ableiten zu wollen (S. 405). Ebenfalls induktiv auch wieder beim MOIVREschen Satz aus dem regelmäßigen Drei-, Vier- usw. -Eck der graphischen Darstellung der Einheitswurzeln (S. 368). Sind das nun nur didaktische Spielereien, oder paßt sich hier die induktive Form wirklich den natürlichen psychischen Bedingungen der Erkenntnisgewinnung an? Natürlich glauben und hoffen wir das letztere, sonst hätten wir jene Induktionen nicht empfohlen. Wollen wir aber mit solchem Vorgehen nicht selber nur einem didaktischen Instinkt folgen, von dem wir natürlich glauben, er

---

Denn ein zahlentheoretischer Satz enthält eine n o t w e n d i g e Beziehung zwischen den Zahlen selbst, unabhängig von dem Zeitpunkt, in dem er vermutet, erraten oder erst wirklich als gewiß bewiesen ist. Möchten also auch die Zahlen selbst „freie Schöpfungen unseres Geistes“ sein, so sind es doch gewiß nicht die „Gesetze der Zahlen“. Auch diese werden wie die im engeren Sinne so genannten „Naturgesetze“ entdeckt, nicht etwa erfunden. Dies wieder nur ein Stück Bekenntnis zu jener allgemeinen erkenntnistheoretisch-metaphysischen These behufs Abgrenzung von Idealismus und Realismus, die oben S. 447, Anm., auch nur angemeldet, nicht allgemein bewiesen wurde.

sei gesund, mancher andere aber glauben dürfte, er sei ungesund, so erhebt uns über die Region des Instinktes eben doch wieder niemand anderer als die strenge logische Theorie der Induktion selbst. Aber haben wir schließlich eine solche? J. St. Mill z. B., der noch immer den allermeisten[1]) als tadellose Autorität in Sachen der induktiven und deduktiven Logik gilt, läßt sich bei den gröbsten Entstellungen der Erkenntnistatsachen ertappen; so z. B., wenn es ihm nur eine Induktion aus vielen Einzelerfahrungen ist, daß 2 Steinchen + 1 Steinchen = 3 Steinchen sind. Alle Kundgebungen einzelner Logiker (z. B. Sigwarts) gegen solche Vergewaltigungen konnten nicht hindern, daß eine Mehrzahl grundsätzlich „modern" Denkender immer wieder von „Zählerfahrungen" u. dgl. m. spricht. Da unter solchen Umständen ein einzelner weder die eine noch die andere Partei durch die bloße Stimmenzahl merklich zu stärken oder zu schwächen vermag, so sei hier nur z. B. die eine Tatsache neuerlicher Überlegung empfohlen: Wer die Erkenntnis, daß sich um 1 Münze 6 gleiche Münzen bei gegenseitiger Berührung herumlegen lassen, nur auf bloßes „Probieren" hin glaubt, gilt wenigstens unter Mathematikern für minder voll, als wer es auch am „Studieren", d. h. am Deduzieren aus dem Satze von der Winkelsumme, nicht hat fehlen lassen. Sollte nun nicht derjenige, der in $2 + 1 = 3$ nur eine Induktion aus Zählerfahrungen sieht, sich dümmer stellen, als er wirklich ist? Sollte er nicht „aus der Natur" des 2, des 1, des +, des =, des 3 das $2 + 1 = 3$ restlos einsehen, verstehen können? Sollte er nicht spüren, daß hier kein „Erdenrest zu tragen peinlich" in sein Denken mehr mit eingeht? Kein Rest von Unverständlichem, einfach Hinzunehmendem, wie er ihn ja sogar in den letzten Prinzipien der Mechanik hinnehmen mußte (s. oben S. 459)?

Was aber den letzten Rechtsgrund für den besonnenen Gebrauch der Induktion, des Ausgehens vom konkreten Einzelfall, gerade in der Didaktik des mathematischen Unterrichtes bildet, ist die folgende, zunächst wieder psychologische Sachlage: Auch im einzelnen läßt sich schon das Allgemeine[2]) erkennen

1) Gegen Mills Autorität hat sich längst Mach aufgelehnt. Jüngst tat es wieder (im Anschluß an Dühring) Keferstein in seiner Didaktik der Physik (Reins Handbuch der Pädagogik).

2) Strenger hieße es: das Notwendige. – Für eine systematische Erkenntnistheorie und Logik (die dann eine Inhalts-, nicht eine Umfangslogik sein muß, welcher letzteren leider gerade die neuesten philosophierenden

nach einem tiefsinnigen Worte GOETHES. Denken wir uns auch in diesen Gedanken nur an Beispielen aus der Schulmathematik hinein: Ist nicht schon die Erkenntnis des $1^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2$ am gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecke wertvoll, auch solange um alle anderen rechtwinkligen Dreiecke noch gar nicht gefragt ist? Sodann: Auch schon wenn wir an dem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten 2 und 3 im Hypotenusenquadrat $4 + 9 = 13$ Einheitsquadrate bloß empirisch „gezählt" haben – hat uns da die sinnige Betrachtung der Figuren nicht wenigstens ein Stück vom Nerv des nachmaligen allgemeinen Beweises an Fig. 83, S. 191 schon bloßgelegt? Dabei wird es Schülerintellekte geben, in denen sich dieses Bloßlegen eben nicht vollzieht; nicht im ersten Einzelfalle, auch nicht im zweiten und dritten – und dann auch sehr wahrscheinlich nicht während des „allgemeinen Beweises". Angenommen, es hätte sich ein solcher Dummkopf dabei aber treulich gemerkt, daß es im 2., im 10. Falle soundso gewesen sei; angenommen, er hätte, vielleicht selbst wieder aus Instinkt, seine mangelnde Einsicht durch Fleiß wettzumachen, es daher auch an einem 11., 12., ... 100. Falle geduldig wieder „versucht" und immer die Gleichheit der Flächenzahlen zwischen der Summe der zwei Kathetenquadrate und des Hypotenusenquadrates bestätigt gefunden: dann wäre dieser beschränkte Kopf der reine Typus desjenigen nur „Induzierenden", den die Fanatiker der Induktion zum Ideal des „modernen", weil nur in „Erfahrungen" denkenden oder sich ihnen gar nur passiv hingebenden Menschen zu machen unermüdlich bemüht sind.

Und damit genug dieses Bekenntnisses in Sachen der Induktion, das die polemische Form nicht überall vermieden hat, weil hier wirklich noch alles im Kampf der Meinungen steht. Längst zwar redete man von „induktiver Logik" und meint hierunter eine Logik der Induktion. Diese bildet sogar den Stolz der modernen Logik, da sich diese durch eben diesen großen Zuwachs weit hinausgewachsen fühlt über die antike, Aristotelische und die sie fortspinnende scholastische Logik. Aber besitzen wir wirklich schon eine durchaus befriedigende Logik der Induktion,

Mathematiker und mathematisierenden Philosophen mit einseitiger Vorliebe anhängen) steht fest, daß von den beiden durch KANT populär gewordenen Kriterien des Nichtinduktiven, nämlich „Allgemeinheit" und „Notwendigkeit", die Notwendigkeit durchaus primär ist im Vergleich zur Allgemeinheit. Dieser Primat läßt sich als notwendig erweisen, ist aber leider noch lange nicht allgemein bekannt, geschweige anerkannt.

die einerseits der Erkenntnispraxis seit GALILEI in ihrer unermeßlichen Fruchtbarkeit auch nur halbwegs theoretisch zu folgen vermocht hat (BACON vermochte dies bekanntlich nicht im entferntesten), und die andererseits innerhalb ihres eigenen Gebietes ihre eigenen Fundamente zu ihrer eigenen Befriedigung so geklärt und zu wissenschaftlichem Gemeingut gemacht hat, daß philosophische Tagesmoden (wie die vom „bloßen Beschreiben“, nicht mehr „Erklären“, Verstehen) einfach zu schweigen hätten?

Zum Glück ist die Mathematik und vollends der mathematische Unterricht diesem Gebiete von Streitigkeiten noch immer tatsächlich entrückt, wie häufig man auch gelegentlich die Mathematiker sich empiristischer Redewendungen bedienen hört, sobald sie eben nicht mehr als fachmäßige Mathematiker, sondern als erkenntnistheoretische Dilettanten sprechen. — —

Es gibt aber noch ein ebenfalls der Erkenntnislehre im weiteren Sinne angehöriges Gebiet, das der deduktiven Logik, das heißt also wieder: der Logik der Deduktion, welches gerade, weil es seit zweitausend Jahren manchmal nur zu sehr verquickt wurde mit den Erkenntnisgegenständen und Erkenntnismethoden der Mathematik, auch heute noch sogar die Didaktik des Mathematikunterrichtes ganz unmittelbar beeinflußt und in seiner guten oder schlechten Gestalt mitbestimmt. Daher widmen wir noch eine besondere Betrachtung diesem Deduktiv-Logischen oder, wie wir es, um auch diesem bedenklichen Worte nicht aus dem Wege zu gehen, nennen wollen, diesem vielberufenen „Formal-Logischen“.

§ 50. Das Formallogische im mathematischen Unterricht.

Haben die vorausgehenden Blicke in die Erkenntnistheorie es einigermaßen gerechtfertigt, wenn wir uns weder kurzweg dem Parteiprogramm der „Empiristen“ noch dem der „Rationalisten“ anschließen konnten, so mag hiedurch auch für eine die alltägliche Schulpraxis unmittelbar angehende Beseitigung einiger Vorurteile eines bloßen *aut-aut* in Sachen des im Mathematikunterrichte traditionellen formallogischen Apparates vorgearbeitet sein. Wagen wir daher sogleich die These:

Es war und ist ein Vorurteil, daß gerade der mathematische Stoff eine logische Form verlange, die weit abweicht von der in allen anderen Wissenschaften und im außerwissenschaftlichen Denken üblichen. Die Zeiten sind vorbei, da man z. B. die Ethik *more mathematico* in die Form von Definitionen und Syllogismen pressen zu können und zu müssen glaubte. Zwar kann niemand auch ein freiestes Gespräch führen, das nicht, wenn es nicht leeres Geschwätz sein soll, zur gedanklichen Unterlage im Grunde ebenfalls Definitionen, Behauptungen, Schlüsse (auch solche nach *„Barbara“, „Ferio“* usw.), Beweise usw. haben müßte. Denn mit den einzelnen Wörtern des Gespräches müssen ja doch möglichst eindeutig bestimmte Vorstellungsinhalte, also Begriffe[1]) verbunden sein; die Wörter aber werden größtenteils ausgesprochen, um Urteile[2]) und Annahmen[3]) auszudrücken (daneben allerdings auch Forderungen, Wünsche und dgl. m., was, als dem emotionalen, nicht dem intellektuellen Gebiete angehörig, hier außer Betracht bleiben mag). Diese Urteile dürfen nicht ohne Begründungen hingeworfen werden – kurz: Wer einmal genug Logiker ist, um durch was immer für freie oder gebundene Redeformen hindurch auf die Gedankenformen zu blicken und durch das Kleid der Sprache hindurch den lebendigen Leib der Gedanken in all seinen Gliedern und Funktionen selbst wieder anschauend und denkend zu erfassen – der weiß genau, ob ein solches Gespräch, und ebenso, ob die wissenschaftliche Darstellung z. B. eines technischen Journals, den berechtigten Forderungen und Formen einer echten Logik gerecht geworden ist, oder wo ihnen kleinere oder größere Entgleisungen passiert sind.

Unbeschadet eines solchen geschärften Blickes für richtige und unrichtige Denkformen hat aber füglich jeder auch noch so gelehrte Logiker der Gegenwart es sich abgewöhnt, ein Pedant zu sein und sich als solcher zu geben. Nur der mathematische Unterricht glaubt immer noch, es dem mathematischen Wissensinhalte schuldig zu sein, daß er ihm eine logische Form aufzwingt, die ebenso inkongruent ist den wirklichen logischen Bedürfnissen dieses Stoffes wie einfach – dem guten Geschmack. Wäre für den sehr speziellen Stoff der Schulmathematik, für die Zahl und den Raum, die logische Form Euklidischer Definitionen, Postulate, Voraussetzungen, Behauptungen, Beweise, Korrollarien usw. in lückenloser Ausführlichkeit wirklich unumgängliches Bedürfnis, so wäre z. B. auch jedes Schulbuch der Physik, ja wohl auch der

1) Vgl. meine Logik, § 14: „Begriffe sind Vorstellungen von eindeutig bestimmtem Inhalte.“

2) Vgl. meine Logik, § 41ff.

3) Vgl. MEINONGs Monographie „Über Annahmen“ (Johann Ambrosius Barth, 1901, zweite Auflage 1910).

Geschichte, das in leichteren Kleidern statt in solchen Panzern einhergeht, ein Verbrechen am gesunden Menschenverstande. Da man aber umgekehrt über eine solche Darstellungsform[1]) in jedem anderen als nur gerade dem mathematischen Gebiete, wo man sie eben zweitausend Jahre lang gewöhnt ist, hell auflachen würde – warum sollte da nicht auch in der Mathematik eine kleidsamere Tracht endlich zeitgemäß geworden sein und einen recht wesentlichen Teil einer „zeitgemäßen Umgestaltung" bilden?

Indem wir aber hier letztlich an den guten Geschmack in Sachen der äußeren Darstellungsform des mathematischen Inhaltes appellieren, möchten wir durchaus das Mißverständnis ausgeschlossen wissen, als hielten wir das Logische wirklich nur für ein Äußerliches, das man dem lebendig mathematischen Gedankenleib an- und abziehen kann wie ein Kleid. Vielmehr hat der Verfasser dieser Zeilen Gelegenheit gehabt, im Verkehre mit übrigens sonst hochgeschätzten mathematischen Schulmännern zu beobachten, daß diese gerade mangels einer auch nur halbwegs systematischen Beschäftigung mit der wissenschaftlichen Logik als solcher nur allzubald kopfscheu werden, wenn sie bei Erörterung mathematischer und mathematisch-didaktischer Fragen auch nur den einen oder anderen Kunstausdruck der wirklichen Logik hören, dessen sich der Logiker natürlich ebenso unbefangen bedient wie der Mathematiker irgendeines seiner vielen tausend technischen Ausdrücke, ohne daß ihm jemand zu sagen wagt, er bediene sich

1) Es hat bekanntlich sehr überrascht, als Heinrich Hertz in seiner posthumen „Mechanik" diese den logischen Apparat hervorkehrende Darstellungsform wieder einmal aufgriff. Der Kundige weiß, daß es geschehen ist, weil die Fragen nach den Grenzen zwischen „Definition" und „Erfahrung" (allgemeiner zwischen Rationalem und Empirischem) auch in der Mechanik strittig geworden waren, nachdem die gesunde Naivität der klassischen Mechanik einmal aufgegeben oder verloren war. Die abstrakte Logik kann es nur begrüßen, wenn sie ab und zu ihre Triftigkeit und Nützlichkeit seitens konkreter Wissenschaften ebenso anerkannt sieht, wie der Arzt seine Kunst durch den in gesunden Tagen sie verachtenden Naturmenschen. – Auch die strenge Darstellungsform der Hilbertschen Grundlagen ist Anerkennung eines solchen Bedürfnisses – also wohl auch einer gewissen Erkrankung des gesunden logischen Sinnes der einst naiv gewesenen und nun manchmal doch wohl allzu kritisch gewordenen Mathematik. Wie aber der gar nicht genug zu schätzende Kern dieser logischen Kritik und manchmal Hyperkritik das Herausarbeiten aller Unabhängigkeitsrelationen zwischen den einzelnen Axiomen und Axiomengruppen ist, so sollte in ihrer Art die Didaktik des mathematischen Unterrichts von dieser Pflege der Unabhängigkeitsrelationen insofern profitieren, als sie sich bewußt bleibt, daß (oder wenigstens inwieweit) die Naivität des Schullebens unabhängig ist und bleiben muß vom Kritizismus hoher und allzu hoher Logistik.

unverständlicher oder gar inhaltsleerer Wörter und Phrasen. – Eine wirkliche Besserung des Mißbrauches logischer Formen ist also schlechterdings nur von jener (sich vielleicht nie vollkommen verwirklichenden) Zukunft zu hoffen, da wenigstens der mathematische Didaktiker ein bißchen Studium der wissenschaftlichen Logik nicht unter seiner Würde gehalten haben wird. Solange aber jenes Ideal nicht erreicht ist, wird der Fachmann der Logik nicht über den mehr oder minder schmerzlichen Eindruck hinwegkommen, daß mancher Mathematiker – vom bescheidenen Schulmann bis hinauf zum großen, fruchtbaren mathematischen Forscher – den logischen Apparat handhabt wie ein Nichtphysiker einen physikalischen Apparat. Wenn letzterer unter ungeschulten Händen in der Regel früher oder später mehr oder weniger leidet, wundert sich niemand darüber – wenigstens kein Physiker. Nun, was dem Naturforscher recht ist, gesteht man bekanntlich noch lange nicht dem Philosophen als billig zu. Daher gestatte man diesem, wenigstens zu lächeln, wenn er einmal den logischen Apparat von täppischen Händen recht gründlich mißbraucht sieht; und als ein heiteres Beispiel dafür – dessen ernster Kern aber die Lehre ist, wie unglaublich weit in unserem Mathematikunterricht noch der vermeintlich „logische" Formalismus geht – stehe hier der Anfang eines Aufsatzes (aus den Unterrichtsblättern für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von PIETZKER, Jhg. 1905, S. 11ff.):

„Über den einleitenden geometrischen Unterricht in Quarta. Von Dr. Ernst Schultz, Oberlehrer am Schiller-Realgymnasium zu Stettin.

In dem 5. Heft des 13. Bandes des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung wird ein Brief des Herrn MAX SIMON[1]) in Straßburg i. E. an Herrn FELIX KLEIN veröffentlicht, in welchem Herr SIMON seine Methode über den Anfangsunterricht in der Geometrie auseinandersetzt. Das Charakteristische dieser Methode besteht darin, daß die Schüler rein experimentell mit den ersten geometrischen Weisheiten bekannt gemacht werden. Jeder strenge Beweis ist verpönt... Viele

1) Es liegt mir eine vom Februar 1889 datierte Buchhändleranzeige (Springer, Berlin) vor: „Der erste Unterricht der Raumlehre. Ein methodischer Leitfaden für die unteren Klassen höherer Lehranstalten, sowie für die Volksschule in heuristischer Darstellung bearbeitet von Dr. MAX SIMON, Seminarlehrer in Berlin." Es heißt darin u. a.: „Ein Vorwegnehmen der eigentlichen planimetrischen Lehren und ihrer strengen Beweise wird jedoch grundsätzlich möglichst vermieden." Also ebenfalls das obige Programm. Ob der Verfasser nur ein Namensvetter oder identisch ist mit dem Verfasser der „Didaktik", ist mir nicht bekannt (das abfällige Urteil gegen den „Seminarlehrer" s. o. S. 55, Anm. 2, spräche dagegen).

Wege führen nach Rom! Ein jeder Lehrer wird seine Methode für die beste halten. Es fragt sich nur, ob auch der erste Grundsatz der Pädagogik erfüllt wird: Wird durch die Methode der Schüler zum selbstständigen logischen Denken erzogen? Werden die nach der rein experimentellen Methode eingeführten Schüler imstande sein, die größeren streng geführten Beweise zu überschauen? ... Daß die Schüler schon in der Quarta mit der Ebenheit, der Symmetrieebene, Symmetrieachse und mit der axialen Symmetrie bekannt gemacht werden, halte ich für viel zu weitgehend, um nicht zu sagen, für ein pädagogisches Verbrechen. Nein, Herr Simon, die Schüler sollen von Anfang an in den mathematischen Unterrichtsstunden geübt werden, ihre Gedanken so zu formulieren, daß sie in mathematischer Form wiedergegeben werden können. Ich halte dies für eine Hauptaufgabe des mathematischen Unterrichtes, sei es in der Quarta oder in der Prima. Haben die Schüler das zunächst an den einfachsten Beispielen gelernt, dann werden die Schüler auch Gefallen an den strengen Beweisen der geometrischen Lehrsätze über die Winkel an Parallelen usw. finden. Ich spreche hier aus Erfahrung. Es ist viel leichter, die Schüler mit handwerksmäßigen Kunstgriffen vertraut zu machen, als sie an die strenge mathematische Form zu gewöhnen. Der Mathematiker wird schon gemerkt haben, daß ich mich der rein experimentellen Methode sehr skeptisch gegenüber verhalte.

Meine erste mathematische Lehrstunde beginne ich damit, daß die Schüler mir Größen nennen müssen. Mit großem Interesse werden alle [?] Klassengegenstände genannt. Alsdann führe ich sie zu dem Begriffe der Gleichheit. Daß dies stets durch Frage und Antwort geschieht, brauche ich wohl nicht besonders hervorzuheben. Jetzt erhält die eine Größe (Ofen) den Namen A, die andere Größe (Ofen) den Namen B, und da sie gleiches Aussehen haben, so sehen die Schüler die Gleichheit von A und B ein, was mathematisch geschrieben wird: $A = B$.

Hiemit haben wir das durch Beobachtung gefundene Resultat an den Körpern A und B mathematisch formuliert und ausgedrückt. Jetzt suche ich den Schülern rein experimentell klar zu machen, daß gleiche Größen durcheinander ersetzt werden können, und sofort lernen sie dies in mathematischen Zeichen wiederzugeben. Hieran schließt sich das Klarmachen und das mathematische Formulieren der Grundsätze Gleiches zu Gleichem addiert usw. und Gleiches von Gleichem subtrahiert usw. Mit diesen drei angeführten Grundsätzen komme ich in der Quarta völlig aus. Zuerst geschieht die Einübung an Größen, welche mit einem Buchstaben bezeichnet werden, daran schließen sich Größen, die mit zwei Buchstaben benannt werden, d. h. ich komme zu Strecken. Hier bespreche ich Strecke, Strahl, Gerade. Jetzt müssen sich die Schüler mit der eigentümlichen Bezeichnungsweise vertraut machen, daß $XY = YX$ ist. Nach hinreichender Übung der Grundsätze an diesen so bezeichneten

Größen gehe ich zu Größen über, die mit drei Buchstaben bezeichnet werden. Ich komme also zu den Winkeln . . .“

Was soll man dazu sagen? Wir sagen im Anschluß an Worte des Verfassers: „Nein, Herr SCHULTZ,“ – die Schüler sollen nicht vom Anfang an in den mathematischen Unterrichtsstunden angeleitet werden, ihren gesunden Menschenverstand einzutauschen für das Nachschreiben und Nachsprechen mathematischer Kunstwörter und Zeichen – mathematisch klingender und aussehender Formeln und Formen, bei denen von einem mathematischen Denkinhalt deshalb nicht abstrahiert zu werden braucht, weil sie schon von Anfang an gar keinen hatten. Hiefür genügt das eine klassische Beispiel von den zwei Öfen. A propos: Verfügt denn in der Tat das Schulzimmer des Herrn S. über zwei Öfen – wenn Ja, bürgt „ihr gleiches Aussehen“ denn wirklich mit mathematischer Genauigkeit dafür, daß sie wirklich und in jeder Beziehung gleich sind (ist doch das Gegenteil unendlich wahrscheinlich) – wenn Nein, woher dann das „gleiche Aussehen“ (bei nur einem Ofen?) – oder ist dann das gleiche Aussehen (des einen wirklichen und des einen phantasierten Ofens), also auch „der Begriff der Gleichheit“, nicht schon ausdrücklich vorausgesetzt – wie sollen die Schüler sie also erst hinterher „einsehen“ – und sehen sie sie besser ein, wenn wir schreiben $A=B$, als wenn wir sagen: Dieser Ofen ist gleich jenem Ofen?

Ferner: Das Wesentliche des Begriffs der Strecke liegt für Herrn SCHULTZ darin, daß sie mit zwei, der Begriff des Winkels darin, daß er mit drei Buchstaben bezeichnet wird. . . .

Gegen ein so streng logisches und pädagogisch strenges System kämpfen Götter selbst vergebens. Indem wir alle Hoffnung draußen lassen, den – hoffentlich nun mehr verschwindend kleinen – Teil der Lehrer, der in einem solchen System seine Beruhigung gefunden hat, für unsere Partei im Kampfe um eine zeitgemäße Umgestaltung des Mathematikunterrichtes zu gewinnen, erübrigt nur, sich über die Stärke der beiden einander gegenüberstehenden Kampfesscharen keinen Täuschungen hinzugeben. Nur um womöglich alles, was bisher an Widerstand gegen ein Fortschreiten in der Richtung vom Veralteten zum Neuen noch latent gewesen war, zur offenen Kundgabe des entgegengesetzten Standpunktes zu reizen, hat vorliegendes Buch auch seinen entgegengesetzten Standpunkt laut verkündet, keineswegs aber um die Verständigung, wo sie gewünscht und gesucht wird, irgendwie zu erschweren.

Denken wir uns also alle ungesunde Formalistik ebenso in den logischen Formen des theoretischen Lehrstoffes wie auf dem womöglich noch beliebteren Tummelplatz formalistischer Aufgaben schon überwunden, denken wir uns, daß einem gesunden Interesse an der formalen Gestaltung mathematischer Stoffe überall der Boden vorbereitet sei durch ausgiebig inhaltlich Interessantes — wie hat es dann der neue Mathematikunterricht einzurichten, daß ihm was immer für eines der Güter formaler Bildung, dem einst eine formalistische Pädagogik mit Überspringung der Inhalte zustreben zu müssen meinte, nicht nur nicht verloren gehe, sondern daß er auch sie auf die natürlichste Weise erreiche, ohne Künstlichkeiten, darum aber nicht ohne pädagogische, und in unserer augenblicklichen Angelegenheit: auch nicht ohne logische Kunst? Mehreres ist schon in den vorausgegangenen Teilen insbesondere darüber gesagt worden, wie der einst über alles geschätzte logische Erfolg des Mathematikunterrichtes sich, nach dem Grundsatz: „Wir können warten", auf der Mittel- und Oberstufe voll erreichen läßt, gerade wenn wir auch auf der Unterstufe jedes vorzeitige Forcieren der logischen Form, solang es noch an erklecklichem mathematischen Inhalte fehlt, vermeiden. Mag es dem Lehrer, der das Wesentliche dieser logischen Form und Formen voll begriffen hat, auch ein Opfer kosten (das wir von dem, der es nicht begriffen hat, überhaupt nicht verlangen), im Anfang nicht nur auf alle strengen Beweise, sondern sogar schon auf die strengen Begriffe, ja selbst auf eine tadellos reinliche mathematische Kunstsprache, zu verzichten, so wird ihm der schönste Lohn für diesen zeitweiligen Verzicht darin werden, wenn er dann im Schüler, gerade weil er immer auf die mathematischen Dinge und auf die Beziehungen zwischen den Dingen seinen Blick gerichtet hält, nun ganz allmählich ein wirkliches Bedürfnis, sozusagen einen logischen Hunger nach korrekten Begriffs- und Urteilsinhalten von diesen Dingen und Beziehungen, nach den von den Tiefen der Grundlegung durch Definitionen und Axiome höher und höher sich aufschichtenden Lehrsätzen, — wenn der Lehrer ein solches Verlangen aus dem unverbildeten Verstande des Schülers heraus organisch wachsen sieht. Sollte aber ein solches Vertrauen auf spontane Entwicklung der Schülerintellekte zu optimistisch sein, sollte das logische Bedürfnis langsamer keimen und reifen, als es auch der langsamst vorgehende Unterricht abwarten kann, so wird der logische

Appetit sich ja auch einmal reizen lassen durch außergewöhnliche logische Mittel. Und als ein solches – natürlich keineswegs als mathematische Alltagskost – empfehlen sich ganz von selbst die bekannten „mathematischen Sophismen." (Ist doch auch historisch die Logik, als deren Vater man den SOKRATES mit seinem Dringen auf Definitionen nennt, überhaupt erst durch die Künste der Sophisten ins Leben gerufen worden.) Zwar zeigen sich die Schüler auch noch nach genossenem Logikunterrichte[1]), also mehrere Jahre nach Beginn der Mittelstufe, oft recht unbeholfen, den Nerv eines solchen mathematischen Trugschlusses aufzudecken, und man wird daher Vierzehnjährigen nicht viel in solchem Widerlegen von Sophismen zutrauen dürfen. Aber man warte nur ruhig ab, an welcher Stelle die ernsten Anregungen, die von Scherzen, wie den beiden folgenden, ausgehen, im mathematischen Denken des einen und des anderen Schülers Wurzel schlagen und für sein ganzes logisches Denken Früchte tragen mögen.

Erstes Sophisma.

Behauptung: *Jedes ebene Dreieck ist gleichseitig.*

Beweis: Wir ziehen die Streckensymmetrale zu AB und die Winkelsymmetrale zu C. Von ihrem Schnittpunkt S ziehen wir die Hilfslinien SA, SB und die Normalen SN und SP (Fig. 144). Dann sind

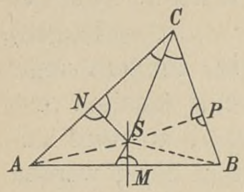


Fig. 144.

$\triangle AMS \cong BMS (SWS)$, daher $AS = BS$.
$\triangle CSN \cong CSP (SWW)$, daher $SN = SP$.
$NC = PC$.
$\triangle ASN \cong BSP (SSW)$, daher $AN = BP$.
Somit $AN + NC = BP + PC$ und $AC = BC$.

Ebenso läßt sich aber dann beweisen, daß das Dreieck nicht nur gleichschenklig, sondern auch gleichseitig ist, da wir die Winkelsymmetrale statt von C auch von A oder B aus hätten ziehen können.

Die Widerlegung des Sophismas hat von dem einzigen Punkte auszugehen, daß wir uns nicht bestimmt auf „Voraussetzungen", sondern auf die „bloße Anschauung" verlassen hatten. Wir haben nämlich unbesehen hingenommen, daß der Schnittpunkt S innerhalb der Dreiecksfläche liege. Es zeigt aber schon eine hinreichend genaue Zeichnung, daß er außerhalb der Fläche liegt. Und wenn wir uns nicht nochmals bloß auf eine „genaue Zeichnung" berufen wollen (denn eine von idealer Genauigkeit gibt es

1) In Österreich während der VII. Klasse, bei Siebzehnjährigen.

ja doch nicht), so hätten wir dem Satze, daß die AB seitens der Winkelsymmetrale von C im Verhältnis $AC:BC$ geteilt wird, die Berichtigung zu entnehmen, daß der Teilungspunkt auf der Hälfte BM zu liegen käme (nicht wie in unserer durch einen zu kleinen Winkel ACS gefälschten Figur auf der Hälfte MA). Es ist auch weiterhin noch lehrreich zu verfolgen, was sich nach dieser Richtigstellung an der Figur ändert: es fällt nämlich auch der Fußpunkt P in die Verlängerung von CB, und der Summe $AN+NC$ wird gleich die Differenz $CB-BP$.

Zweites Sophisma.

Beweis, *daß* $64=65$. Zwei rechtwinklige Dreiecke von den Katheten 3 und 8 und zwei rechtwinklige Trapeze von den Parallelseiten 3 und 5 und der Höhe 5 geben, je nachdem man sie zusammensetzt, einmal ein Quadrat von der Fläche

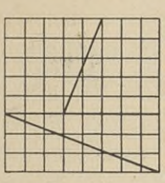


Fig. 145.

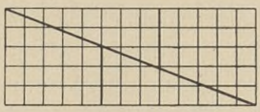


Fig. 146.

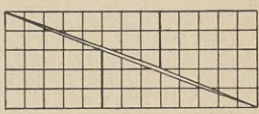


Fig. 147.

$8 \times 8 = 64$, das andere Mal ein Rechteck von der Fläche $13 \cdot 5 = 65$ (Fig. 145, 147).

Die Widerlegung des Sophismas besteht darin, daß die schiefen Geraden am Trapez und Dreieck nicht in eine Rechtecksdiagonale zusammenfallen, sondern ein Rhomboid (Fig. 147) von der Größe eines der kleinen Quadrate einschließen. Der Beweis für jenes Nichtzusammenfallen liegt darin, daß $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{8}$ ist und $\frac{2}{5} > \frac{3}{8}$, also auch $\alpha > \beta$. –

Wir haben uns bei der Widerlegung beider Sophismen schon einiger Kenntnisse sachlicher und terminologischer Art bedient, die der Schüler erst im späteren Unterricht systematisch erwirbt. Die Widerlegung wird also, wenn sie dem Zweck dienen soll, den Schüler in eine erste Bekanntschaft mit den logischen Formen von Voraussetzung, Beweis usw. erst einzuführen, sich dem noch unwissenschaftlichen oder wenigstens noch nicht streng wissenschaftlichen Denken und Sprechen des Schülers anzupassen haben. – Doch es bedarf ja keiner näheren Anleitung, wie etwa dieser Weg als ein etwas ungewöhnlicher in das Gebiet einer zusammenhängenden wissenschaftlichen Geometrie von Lehrer und Schüler neben anderen möglichen weiter zu beschreiten sei.

Nur so viel sei nochmals festgestellt: daß der im Lehrplane für die Mittelstufe empfohlene „Verzicht auf ein der Altersstufe noch nicht angemessenes Hervorkehren letzter Prinzipien und rein deduktiver Darstellungen“ ja nicht einen Verzicht darauf bedeuten soll, daß auch künftighin, nur noch wirksamer als von altersher, die Schüler in der Mathematik und speziell in dem der Mittelstufe vorzuführenden Stück auch schon der Planimetrie und Stereometrie ein Musterbeispiel von „logischer Strenge“ kennen lernen. Nur sollen sie es jetzt eben allmählich kennen lernen — wogegen sie bei „dem verfrühten Gebrauche der logischen Formen“ diese ebensowenig kennen gelernt haben wie den in unverständliche Formen gepreßten mathematischen Inhalt selbst.

Zu einigen der im Verlaufe der Darstellung berührten spezifisch logischen Begriffe und Lehren nur noch eine kurz andeutende Stellungnahme:

1. Soll man bei den Lehrsätzen auf die jeweiligen **Umkehrungen** und ihre Beweise eingehen oder nicht? Darauf ist weder mit uneingeschränktem Ja noch Nein zu antworten. Wenn z. B. gezeigt ist, daß der geraden Linie eine lineare Gleichung zwischen zwei Variabeln entspricht, so folgt daraus noch nicht, daß auch jeder linearen Gleichung zwischen zwei Variabeln eine Gerade und nur eine Gerade entspreche. Da nun aber letzterer Satz doch auch eine wichtige mathematische Wahrheit darstellt, so muß er eben bewiesen werden. Der allgemein logische Sachverhalt ist eben einmal der, daß sich der Satz z. B. „Alle Pferde sind Säugetiere“ nicht „rein umkehren“ läßt in „Alle Säugetiere sind Pferde“. Daneben aber läßt sich der Satz „Alle Affen sind Vierhänder“ nun doch umkehren in „Alle Vierhänder sind Affen“. Logisch allgemein formuliert: Dem Urteile SaP kann sowohl die Umkehrung PiS wie auch PaS entsprechen (oder mit den von Schröder in seiner „Algebra der Logik“ benutzten Symbolen: $S \subset P$ und $S \mathrel{=\!\!\!\in} P$). Ob aber die eine oder die andere Relation gilt, fällt schon aus dem Rahmen der Logik als solcher heraus, und deshalb muß innerhalb der einzelnen Fachwissenschaft entschieden und bewiesen werden, ob angesichts eines gegebenen Begriffspaares Umkehrbarkeit oder Nichtumkehrbarkeit besteht. — Eben dies aber den Schülern auch anläßlich des Geometrieunterrichtes allgemein logisch verständlich und überzeugend zu machen, dürfte wohl hundertmal wichtiger sein, als für hundert einzelne geometrische Sätze diese Umkehrungs- oder Nichtumkehrungsbeweise in aller Ausführlichkeit durchzuführen. Vielmehr genügen einige wenige typische Beispiele. Z. B. Im Sehnenviereck ist die Winkelsumme $\alpha + \gamma = 2R$; und: Ist in einem Viereck $\alpha + \gamma = 2R$, so ist es ein Sehnenviereck. Der Beweis für diese Umkehrung ist ein indirekter; angenommen nämlich, es wäre kein Sehnenviereck, so müßte sich durch

drei der Punkte der Kreis legen lassen, und dieser schnitte dann die eine Seite oder ihre Verlängerung in einem vierten Punkte; so ergäbe sich ein Dreieck, bei dem der Außenwinkel nicht gleich wäre der Summe der ihm gegenüberliegenden Winkel usw. – Freilich muß dann von einem solchen Musterbeispiel verlangt werden, daß der aufgebotene logische Apparat auch bis ins kleinste durchsichtig wird und nirgends wie eine müßige Plackerei sich ausnimmt; und es ist und bleibt immerhin fraglich, ob Schüler, denen eine Emporführung zu freier Reflexion auf das Logische als solches durch die übrige Unterrichtsorganisation versagt ist und bleibt, sich zu einer solchen Würdigung – natürlich nicht nur gerade der Umkehrungsbeweise – überhaupt bringen lassen. Doch wie dies immer sei: so gut sich sonst Unzähliges sehr wohl unmittelbar mehr oder minder vollkommen einsehen läßt, auch wenn auf die streng formellen Beweise verzichtet wird, so besonders deutlich hier bei den Umkehrungssätzen. Gerade der geometrische Unterricht als solcher vergibt sich gewiß gar nichts, wenn er statt des diskursiven Denkens vorwiegend die Raumphantasie in Anspruch nimmt und die fraglichen Figuren, dank der fleißig gepflegten Übungen im Beweglichdenken der Figuren, variieren und dabei beachten läßt, ob im direkten Satz die Abhängigkeitsbeziehungen derart bindend sind, daß für ein Anderssein in der Umkehrung kein Spielraum mehr bleibt. Z. B. Jedem gleichschenkligen Trapez läßt sich ein Kreis umschreiben. Innerhalb der so entstehenden Figur lassen sich nun an einem Trapez zwei anstoßende Seiten festhalten, die anderen aber noch reichlich so bewegen, daß das Sehnenviereck keineswegs Trapez, geschweige gleichschenklig bleiben muß. Jener Satz also war nicht umkehrbar. Übungen darüber, welchen Gattungen und Arten der Vierecke sich Kreise ein- und umschreiben lassen und welchen nicht, und welche der so sich ergebenden Sätze umkehrbar sind und welche nicht, dürften schon dem mittleren Jahrgang der Unterstufe sehr angemessen sein, wiewohl sich hier jeder Beweisschematismus noch von selbst verbietet, wogegen das Üben in jenem Beweglichdenken ein Hauptinteresse jener frühen Stufe bilden darf und soll (S. 129).

2. Das unter 1. Gesagte ist selbst wieder nur eine Nutzanwendung der allgemein logischen Über- und Unterordnung der Begriffe[1]). Wiewohl dieses logische Verhältnis eines der primitivsten ist, so

1) Es verdient vielleicht für die Erinnerung hier festgehalten zu werden, daß absolvierte Realschüler als Lehramtskandidaten der Mathematik, darstellenden Geometrie, Chemie usf., die durch die bisherige Prüfungsvorschrift verpflichtet sind, pädagogische Vorlesungen als außerordentliche Hörer mitzumachen, anläßlich des Kollegs „Logik und Didaktik" mir wiederholt darüber klagten, sie hätten während ihres ganzen Realschulunterrichtes die termini „Über- und untergeordneter Begriff" zu vernehmen nicht Gelegenheit gehabt! Erst innerhalb dieses Kollegs sei ihnen das logische Verhältnis

knüpfen sich doch noch einige Bemerkungen speziell für den mathematischen Unterricht daran: Bekanntlich hat der Lehrer unzähligemal sein Kreuz damit, die Schüler vor Unklarheiten und Schnitzern zu bewahren, wie die, als ob Parallelogramm (weil es fälschlich mit dem Rhomboid identifiziert wird — aus leicht ersichtlichen psychologischen Anlässen) und Rechteck koordiniert wären, wo doch Parallelogramm die Gattung (*genus*, übergeordnet), Rechteck die Art (*species*, untergeordnet) ist. Hier helfen dann übersichtliche Gruppierungen wie die:

Viereck

Trapezoid, Trapez, Parallelogramm

Parallelogramm: Rhomboid, Rhombus; Rechteck, Quadrat

Rhomboid	Rhombus
Rechteck	Quadrat

Eine Frage[1]) für sich aber ist es schon, ob wir wirklich gut tun, selbst wieder z. B. Rechteck und Quadrat zu koordinieren. Strenger

z. B. der Begriffe Viereck und Parallelogramm, oder Parallelogramm und Rhombus klar geworden. Als ich ihnen dann sagte: Nun, meine Herren, da werden Sie mir ja böse sein, daß ich Sie mit so unfruchtbaren, trockenen Unterscheidungen plage, antworteten sie mir treuherzig: Aber nein, Herr Professor, wir empfinden das ja als eine große Wohltat und begreifen erst jetzt, warum uns der mathematische und naturwissenschaftliche Lehrstoff der Realschule so häufig vielmehr konfus gemacht als aufgeklärt hat. – Werden mir einzelne Fanatiker eines logikfreien Realschulunterrichtes gram sein, wenn ich dieses Bekenntnis hiemit der Öffentlichkeit übergebe? Wahrlich, sie brauchten nur eben nicht Fanatiker zu sein, um zu begreifen, daß gerade einer, der, wie ich, auf eine Realschule der Zukunft die größte und schönste Hoffnung setzt, mit der unseligen siebenklassigen (mitten in ihrer Entwicklung von den vor wenigen Jahrzehnten noch drei- bis sechsklassigen zu acht- oder neunklassigen Schulen steckengebliebenen) Realschule Österreichs bitter unzufrieden sein muß. Ich wünsche ganz ausdrücklich durch diese Kriegserklärung an die notgedrungenen Mängel dieser gegenwärtigen siebenklassigen Realschule Gegenerklärungen zu provozieren, damit für den X. Band dieser didaktischen Handbücher ein Material vorliege, an welchem alle solche Bildungsfragen um so wirksamer ausgetragen werden können.

Uns in Österreich, die wir es mit der Realschule wahrhaft gut meinen, überkommt geradezu Neid angesichts einer so hochsinnigen Haltung zu philosophischen Fragen und Interessen, wie sie PAUL ZIERTMANN einnimmt in seinem Programm (Nr. 164, 1906) „Die Philosophie im höheren Schulunterricht, mit besonderer Berücksichtigung der Oberrealschule", worauf im IX. Bande dieser didaktischen Handbücher ausführlich zurückzukommen sein wird. Übrigens sei mit Genugtuung hervorgehoben, daß gelegentlich der jüngsten Wiener Mittelschulenquete (Jänner 1908) und der ihr vorangegangenen zahlreichen Versammlungen und öffentlichen Besprechungen wiederholt der Ruf nach einer philosophischen Propädeutik auch an den österreichischen Realschulen erging, und daß ihm von keiner Seite ausdrücklich entgegengeredet wurde. Nur scheitert auch diese wohltätige Anregung vorläufig noch gänzlich an jener unseligen Siebenklassigkeit.

1) Auf eine noch viel primitivere Frage stießen wir S. 95 Anm.: Darf man sagen: Die Flächen des Würfels sind Ebenen, und zugleich: Die Flächen des

wäre es, das Quadrat als den Grenzfall des Rechteckes (in bezug auf die Seiten, wie des Rhombus in bezug auf die Winkel) zu bezeichnen. Ebenso ist ja auch die Gleichheit ein Grenzfall der Ungleichheit[1]), der rechte Winkel eine Grenze der schiefen zwischen spitzen und stumpfen (und nicht eigentlich ihnen beiden koordiniert).

3. Ein ganz besonders wichtiges Thema aber, das auch unter den Titel der über- und untergeordneten Begriffe gehört, ist das der Begriffserweiterung; um eben dieser allgemein logischen Bedeutung mehr als um ihrer selbst willen verweilten wir seinerzeit (S. 225ff.) eingehend bei der sonst so vielfach problematischen „Erweiterung des Potenzbegriffes". Hiezu auch die Bemerkung zur Erweiterung des Begriffes Winkelfunktionen über den ersten Quadranten hinaus (S. 283). Was bei jeder solchen „Erweiterung" deutlich zu machen ist, betrifft vor allem die Vermeidung des Scheins, als wäre durch den neuen Begriff der alte umgestoßen. Vielmehr muß gezeigt werden, daß nur in den alten Begriffen neben anderen, verbleibenden Merkmalen ein verhältnismäßig unwesentliches aufgenommen worden war. Aber auch nach dem Fallenlassen dieses Merkmales muß wieder gezeigt werden, daß wirklich der neue Begriff den alten, sobald man ihn nur auf das damalige Gebiet wieder zurück anwendet, noch genau in sich fasse; also z. B. daß die Definition der Winkelfunktionen nach dem rechtwinkligen Koordinatensystem die Ausgangsdefinition aus dem rechtwinkligen Dreieck wieder liefert (S. 284).

4. Etwas über das bloß formal Logische schon hinausgehend wären Aufklärungen über das Wesen der Abstraktion, die aller logischen Begriffsbildung als deren psychisches Mittel zugrunde liegt. Der mathematische Unterricht würde dieser, weil auch unter den Logikern und Psychologen (allerdings mit Unrecht) noch strittigen Tatsache vielleicht am besten aus dem Wege gehen, wenn er dann nicht Gefahr liefe, offenbaren Unsinn[2]) zu reden; so z. B. daß die physischen Körper Stoff haben, die mathematischen dagegen keinen. Wahr ist ja doch nur, daß die Mathematik von diesem Stoffe abstrahiert (ἀφαίρεσις), nicht, daß sie ihn von dem Raume irgendwie abtrennt (χωρισμός). – Sogleich noch viel tiefer gehend ist aber dann die Frage, ob auch diese richtig verstandene Auffassung der Abstraktion ausreicht, wirklich alle mathematischen Begriffe in ihrer Strenge und Reinheit von Grund

Würfels sind Quadrate? Folgt dann nicht (für den Anfänger): Jede Ebene ist ein Quadrat? – Man sagt freilich nicht: „Ich reite auf einem Säugetier", wenn man sagen will: „Ich reite auf einem Pferd". – Solchen logischen Verhältnissen und Paradoxen nachzuspüren, ist aber für den Anfänger lehrreich und – belustigend.

1) Vgl. S. 96, Anm. 1.

2) Vgl. z. B. (bei Schotten, Vergleich. Plan. I, 209), wie J. C. V. HOFFMANN das „„von der Dicke abstrahieren"" (sie „„wegdenken"") schildert.

aus zu verstehen. Darauf ist zu antworten, daß es rätselhaft bliebe, wie wir aus dem Anblick der sauberst gezeichneten Ellipse, des sorgfältigst geschnitzten Würfels durch bloßes Abstrahieren von den immer noch unvermeidlich anhaftenden Unvollkommenheiten der technischen Ausführung zu den Begriffen dieser Gebilde kommen. Dies aber nicht so sehr deshalb, weil wir ja selbst wieder nicht wüßten, bis wohin wir die tatsächliche Beschaffenheit der Striche und Körper als „Unvollkommenheiten" in Gedanken zu beseitigen haben; sondern vielmehr deshalb, weil allzudeutlich in die Definitionen allenthalben Relationen (von Gleichheit und Ungleichheit[1]), insbesondere von Abständen und Richtungen, vgl. oben S. 101, Anm.) eingehen. Vollends haben Kreis, Ellipse, Würfel, Kugel usw., aber auch die mit (wenigstens psychologischem) Unrecht fast überall als „Elemente" behandelten Geraden und Ebenen schon nicht mehr bloßen Beziehungs-, sondern Gestaltcharakter. Sowohl zu den Vorstellungen von Beziehungen wie zu jenen von Gestalten (über die Wesensverschiedenheit von Beziehung und Gestalt vgl. „Räumliche und raumlose Geometrie") gelangen wir aber selbst wieder nur durch eine ganz andere geistige Tätigkeit (nach der Schule MEINONG „Vorstellungsproduktion"), die weit hinausgeht über bloßes Anblicken und bloßes Abstrahieren.

1) Was insbesondere das logische (sowie das psychologische und gegenstandstheoretische) Verhältnis von Gleichheit und Ungleichheit betrifft (vgl. o. S. 97, Anm. 1), so sei hier folgendes wenigstens angedeutet: Es gibt eine „Prärogative der Verschiedenheit" vor der Gleichheit. Wenn nämlich z. B. der Violinspieler seine a-Saite nach dem a des Klaviers oder der Stimmgabel gestimmt und die beiden Töne als für seine musikalischen Zwecke „gleich" befunden hat, so kann er, falls er zugleich erkenntnistheoretische Interessen hat, sich dennoch sagen, daß sie mit unendlicher Wahrscheinlichkeit mehr oder weniger ungleich sein werden. Hat er dagegen sogleich auf das erste Anschlagen und Streichen bemerkt, daß die Saite um einen halben oder gar um zwei ganze Töne zurückgegangen ist, so kann er sich mit voller Gewißheit sagen, daß sie nicht etwa doch gleich sind. Es gibt eben Verschiedenheiten, die „unter die Merklichkeitsschwelle" sinken und dann nicht mehr direkt als Verschiedenheiten zu erkennen sind, sondern mit Gleichheiten verwechselt werden. Es gibt aber keine ähnliche Verwechslungschance bei überschwelligen Verschiedenheiten. — Analoges, wie hier für Gleich und Verschieden an einem Beispiel gezeigt wurde, dem sich unzählige andere Beispiele aus anderen Empfindungs- und auch Nichtempfindungsgebieten anreihen ließen, gilt insbesondere auch für die beiden Vorstellungsgegenstände Gerade und Krumm: Ich kann von dem straffst gespannten Faden nicht direkt erkennen, ob er wirklich gerade oder untermerklich krumm ist; ich weiß aber von einer schlaff hängenden Kette, daß sie nicht etwa doch gerade ist (von öden nominalistischen Scherzen wie dem, daß man ja auch das Krumme gerade und das Gerade krumm nennen könne, schweigen wir natürlich hier, so ernst sie auch leider oft genug, z. B. unter dem Vorwand nichteuklidischer Geometrie, die aber dann gründlich mißverstanden ist, genommen werden).

Ob nun diese unbestreitbaren psychologischen Sachverhalte ausreichen, Wenn aber auch das bloße „Abstrahieren“ als solches nicht ausreichend ist für das Schaffen aller mathematischen Vorstellungsinhalte, so ist es doch unbestreitbar notwendig für jede Auswahl von Vorstellungsmerkmalen, also auch für jede Definition. Indem wir erst hiemit an dem Punkte angelangt sind, von

die von mir wiederholt vertretenen Definitionen Gerade = Nichtkrumm, Gleich = Nichtverschieden (die jedenfalls noch immer eine Prärogative vor den formell ebenso guten umgekehrten Krumm = Nichtgerade, Verschieden = Nichtgleich für sich haben) zu Grundlagen einer Präzisionsgeometrie zu machen, ist mir jüngst (durch Einwendungen MEINONGs, der einst selbst jene Definition des Gleich gegeben hatte) zweifelhaft geworden. – Für didaktische Interessen aber bleibt es immer wertvoll, zu beachten, wie der Würfel mit seinen gleichen Flächen erst durch die ungleichen des Quaders und ebenso der Kreis durch seine gleichen Halbmesser und gleiche Krümmung erst im Gegensatze zu den ungleichen der Ellipse usw. den Eindruck einer innerhalb seiner Gattung ausgezeichneten Art hervorbringt. Und indem hier wieder nicht eigentlich das Verhältnis von Gattung und Art, sondern das von Kontinuum und Grenze (das oben, S. 477, an dem von Rechteck und Quadrat, desgleichen schiefen und rechten Winkeln, erörtert wurde) vorliegt, ist die ganze Betrachtung von Gleich und Ungleich grundlegend für das der Präzisions- und Approximationsgegenstände überhaupt. Vgl. diese Termini in MEINONGs Buch (s. o. S. 451, Anm.). „Über die Stellung der Gegenstandstheorie im System der Wissenschaften,“ S. 84, wo ebenfalls schließlich auf das Verhältnis zwischen „Strecke“ (Kontinuum) und „Punkt“ verwiesen wird. Hiefür wäre freilich schlimm, wenn nun wirklich innerhalb der Geometrie der „Punkt“ allen Kredit verloren hätte, d. h. zu einem mehr- (oder gar beliebig viel-)deutigen Wort herabgesetzt bliebe.

Im ganzen wird man heute sagen müssen, daß ein Teil der wissenschaftlichen Mathematiker, ausgesprochen oder unausgesprochen, an Präzisionsmathematik überhaupt verzweifle und sich im Empirismus und Approximatismus (wie man ihn nennen könnte) behaglich fühle oder – stelle; ein anderer, wohl der größere Teil aber zwar die Mathematik nicht dem Sensualismus oder der Skepsis ausgeliefert sehen will, aber die einst soviel gepriesene „Exaktheit“ nur retten zu können glaubt, indem er sie dem Logismus ausliefert. Hiermit ist dann jenes *aut-aut* geschaffen, das alle räumliche Geometrie unter dem Titel der „natürlichen“ zu einer bloß approximativen macht, alle präzise aber zu einer raumlosen, zu einer „reinen Beziehungslehre“. Der Frage, ob es denn wirklich keine exakte Raumgeometrie mehr geben dürfe, wird in „Räumliche und raumlose Geometrie“ nachzusinnen sein. Thesen wie die S. 194 Anm. angeführte: „Jeder Versuch, den Flächen eine, den Linien zwei und den Punkten alle drei Dimensionen zu nehmen, ist [in der natürlichen Geometrie] durchaus abzulehnen“, werden innerhalb des Schulzimmers sogar seitens solcher Lehrer, die sie zu ihrem eigenen wissenschaftlichen Glaubensbekenntnis gemacht haben, besser verschwiegen als mit einem noch so leisen Schein geometrischen Skeptizismus oder Nihilismus verkündet werden. Ganz ebenso aber auch die entgegengesetzten der raumlosen Geometrie, also etwa, daß hinfort die Wörter Punkt, Gerade und Ebene nicht mehr und nicht weniger bedeuten als die Buchstaben ABC abc $\alpha\beta\gamma$ oder sonstige an sich „bedeutungsfreie“ Zeichen, auf deren an sich „willkürliche“ (nur „postulierte“) Verknüpfung es fürder allein noch ankomme.

dem die mathematische Darstellung als solche auszugehen pflegt, um ihr dann die Axiome (Postulate?) folgen zu lassen, münden aber diese wenigen Bemerkungen über das Logische in der Mathematik wieder ein in das schon erörterte Erkenntnistheoretische zur Mathematik. Denn wir sahen schon im vorigen Paragraphen, S. 459 ff., wie schon die allererste Frage, ob Definitionen und Axiome logisch auf gleicher Stufe rangieren oder nicht, soeben noch mitten im Streit steht; desgleichen die Grundfragen jeder höheren als einer bloß formalen Logik um die Rolle der Induktionen der Mathematik (S. 460) u. dgl. m.

Darum hier genug der obigen wenigen Proben dafür, daß eine in sich gesunde wissenschaftliche Logik auch einem gesunden Mathematikunterricht wirklich Bedürfnis sein könnte. Nicht der mathematischen Didaktik diese ganze Logik selber auszuarbeiten und anzubieten, kann eine Aufgabe dieses didaktischen Handbuches sein. Vielmehr steht hier alles, eben wegen der in völliger Umgestaltung begriffenen wissenschaftlichen Logik selbst, auf dem Niveau bloßer „Prolegomena zu einer künftigen Logik der Mathematik“, die auch ihrerseits erst „als wissenschaftliche Grundlegung zur Didaktik der Mathematik wird auftreten können“.

Da uns aber unsere „Rest- und Grenzfragen der mathematischen Didaktik“ nun wieder auf den vielumstrittenen Begriff des „Formalen“ zurückgeführt haben, so mag mit diesem auch der letzte Abschnitt dieser Restfragen einsetzen.

§ 51. **Aus der allgemeinen Didaktik als Bildungslehre**[1]).

Blicken wir zurück auf den Ausgangspunkt des I. Teiles „Ziele und Wege des mathematischen Unterrichts“, so war es sogleich der ganz einer allgemeinen Didaktik angehörende Begriff der „formalen Bildung“, der unserer Darstellung ihre Richtung

---

1) Absichtlich lasse ich den Titel des letzten Abschnittes anklingen an den Titel des Hauptwerkes meines Amtsvorgängers an der Universität Prag, OTTO WILLMANN. Seine „Didaktik als Bildungslehre“ ist in 3. Auflage 1904 erschienen. Mit ihrem vielseitigen Inhalt mögen nicht nur die Andeutungen dieses Schlußabschnittes unseres I. Bandes, sondern auch überhaupt die zehn Bände unserer Didaktik speziell des realistischen Unterrichtes verglichen werden. Ohne Zweifel würden von beiden Seiten her, von der der allgemeinen wie jeder speziellen Didaktik, die Wege noch sehr viel weiter auszubauen und zu beschreiten sein, damit sie sich zu einem geschlossenen Verkehrsnetz verbinden, innerhalb dessen dann hoffentlich nicht mehr wie bisher nur allzuhäufig die pädagogischen Theoretiker und didaktischen Praktiker aneinander vorbeigehen.

gab. Dies aber nicht in der hergebrachten Weise, daß wir diesen Begriff oder dieses Schlagwort einer „formalen Bildung“ als etwas über allem Zweifel Erhabenes hinnehmen und alle weitere Darstellung von ihm abhängig machen; sondern genau entgegengesetzt wählten wir in bewußter Einseitigkeit den mathematischen Inhalt zum ersten notwendigen Bestimmungsstück der unterrichtenden Tätigkeit jedes Mathematiklehrers. Denn sogleich vom Anfang zwei Ziele auf einmal verfolgen zu wollen, das formale und das inhaltliche, erschien als so bedenklich wie jede Doppelheit von Zielen überhaupt, sei es beim Wandern, sei es beim Forschen. Da es also von den doppelten Zielen einer inhaltlichen wie formalen Bildung keineswegs im vorhinein einleuchtet, daß es ein und derselbe Weg sei, der zu ihnen führt, so behandelten wir die Doppelheit der Wege ähnlich einem Scheideweg und entschlossen uns in bewußter vorläufiger Einseitigkeit, vom Anfang bis zum Ende unseres Lehrganges die, inhaltlichen Ziele fest im Auge zu behalten und abzuwarten, wieviel von den „formalen“ sich dabei von selbst mit erreichen lasse. Jetzt aber, am Ende dieses Weges, den wir in raschen Schritten durch die acht oder neun Lebensjahre und die ihnen zufallenden Lehrinhalte, zum Teil sogar nur springend, durchmessen haben stehen wir vor der Restfrage, ob wir hiemit dem Ziel einer formalen Bildung von selber ebensonahe gekommen seien, als wenn wir dieses von vornherein zum Hauptziel, dagegen die inhaltliche Bildung im mathematischen Anschauen und Denken nur zu einem Mittel gemacht hätten, wie es bisher im mathematischen Unterricht fast ausnahmslos üblich gewesen war.

Indem wir so jene vorläufige Einseitigkeit wettmachen durch die ausdrückliche Erklärung, daß wir den schon im Begriff jeder Bildungsarbeit liegenden gesunden Kern des Begriffes einer formalen Bildung ebensogut zu schätzen wissen wie die beredtesten Formalisten, wollen wir allerdings nicht verhehlen, daß uns das für diesen Begriffskern übliche Wort „formal“ ein wenig glückliches, ja infolge seiner Eignung zum bloßen Schlagwort sogar geradezu verhängnisvoll scheint. Es teilt diese üblen Eigenschaften mit dem Worte „Form“ überhaupt, hinter dem sich Unklarheiten und Dürftigkeiten von jeher z. B. ebenso in der Philosophie wie in den schönen Künsten, ja selbst im gesellschaftlichen Leben, zu verbergen liebten.

Der uns jetzt allein angehende Gegensatz auf didaktisch-pädagogischem Gebiete wird viel schärfer als durch die abgegriffenen Wörter „Inhalt“ und „Form“ durch das schon berührte Begriffspaar der „Unterrichts- und Erziehungswerte“[1]) getroffen.

Vorauszuschicken ist hier nur ein klärendes Wort, mit welchem Recht Unterricht und Erziehung bald nebeneinander als koordinierte Begriffe, bald wieder so genannt und verwendet werden, daß das Unterrichten unter das Erziehen fällt als ein ihm logisch subordinierter Teil — hier noch gar nicht zu sprechen von der ethischen Höherbewertung eines durch die Erziehung zu entwickelnden guten Wollens im Vergleich zu dem durch bloßes Unterrichten zu erzielenden bloßen Wissen. Daß ein in diesem Sinne „erziehender Unterricht“, soweit er überhaupt möglich und nicht erst durch Künsteleien[2]) zu erzwingen ist, höher stehe als ein bloß an den Intellekt sich wendender Unterricht, darf hier einfach als praktisch zugestanden vorausgesetzt werden. Für eine exakte pädagogische Theorie aber, die das Aus- und womöglich Anbilden wertvoller psychischer Dispositionen[3]) überhaupt als Ziel aller Erziehung formuliert, ist es die natürliche Begriffsbestimmung, das Unterrichten auch schon rein logisch dem Erziehen zu subordinieren[4]) und nicht

---

1) Vgl. oben § 1, S. 15 und § 5, S. 38. — Ich habe diese Unterscheidung von „Unterrichtswerten“ und „Erziehungswerten“ zugrunde gelegt meinem ersten Beitrag zur Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht (Jhg. II 1888, S. 1—9) „Die humanistischen Aufgaben des physikalischen Unterrichtes“. — Denselben Titel führt meine Prager Antrittsvorlesung (1903, mit Zusätzen, 17 Seiten, Vieweg 1904).

2) HERMANN SCHWARZ führt im ersten seiner Artikel „Die experimentale Pädagogik in Deutschland“ (Neue Jahrbücher für das klassische Altertum usw. und für Pädagogik, 1907—09) Beispiele solcher Künsteleien aus der Ausdehnung des ZILLERschen Gesinnungsunterrichtes auf den ersten Rechenunterricht an.

3) Vgl. meine Wiener Antrittsrede „Pädagogik und Philosophie“ (als dritter der „Drei Vorträge zur Mittelschulreform“, 1908), S. 131.

4) THEOBALD ZIEGLER beginnt seine „Geschichte der Pädagogik mit besonderer Rücksicht auf das höhere Unterrichtswesen“ (Baumeisters Handbuch, zweite Aufl. 1904 [dritte Aufl. 1909]) mit der Feststellung: „Erziehen und Unterrichten, Gewöhnen und Lehren, Üben und Lernen gehören zusammen und bilden erst zusammen ein Ganzes und das Ganze. Daher ist Pädagogik nicht identisch mit Didaktik oder Unterrichtslehre, als ob Unterrichten das einzige Geschäft des Pädagogen wäre, ist derselben aber auch nicht koordiniert, so daß die Aufgaben des Lehrers für sich und getrennt von denen des Erziehers betrachtet werden dürften; sondern beide bilden zusammen eins, in der Weise, daß die Didaktik einen wesentlichen Bestandteil der Pädagogik ausmacht; weil zur Erziehung auch der Unterricht gehört, gehört die Didaktik zur Pädagogik.“

einfach ihm zu koordinieren. Denn angenommen, es gäbe ein Unterrichten, das nur den Intellekt, gar nicht den Charakter bildet, so wären ja auch die rein intellektuellen Dispositionen eines klaren Vorstellens, eines sicheren Urteilens sicherlich „wertvolle Dispositionen“ und ihre Ausbildung fällt also ohne weiteres unter jenen allgemeinen Begriff des Erziehung[1]).

Um nun dem unzähligemal behandelten Gegenstande von Erziehungswerten der Mathematik womöglich noch einige neue systematische Gesichtspunkte zu erschließen, regen wir hier an, sich anstatt gelegentlicher, wenn auch noch so vielseitiger Einfälle über die verstandesbildende, die phantasiebildende Kraft des mathematischen Unterrichtes usw. zur Abwechslung einmal einer systematischen Psychologie als Leitfaden zu bedienen.

Es mag daran erinnert sein, daß dort zwischen Vorstellungs-, Urteils-, Gefühls- und Begehrungsdispositionen unterschieden wird. — Dabei gliedern sich schon die Vorstellungen nach vielerlei[2]) Einteilungsgründen; die Begehrungen vor allem in zwei: Wünschen und Wollen (wobei das „Streben“ nicht ein drittes Glied bildet, sondern ein Wollen des in fernerer Zukunft Liegenden ist). Es fehlt viel, beinahe alles, daß auch nur die Psychologen untereinander über diese primitivsten Gliederungen (die nicht aus einer öden Lust am Einteilen, sondern aus einem doch wohl berechtigten Wunsch einiger Vollständigkeit im Über-

1) Mit diesem grundsätzlichen inneren Verhältnis stimmt es dann zwar äußerlich nicht, wenn in den Lehrerbildungsanstalten das eine Jahr „Erziehungslehre“, das andere Jahr „Unterrichtslehre“ auf dem Lehrplan steht. Und um so mehr wiese die herkömmliche Parallelisierung von „Pädagogik und Didaktik“ auf Koordination, nicht Subordination hin. Man wird aber nicht erwarten oder es der Mühe wert halten, diese Herkömmlichkeiten der Bezeichnungsweisen um jener Prinzipienfrage willen umstürzen zu wollen. Genug, wenn man sich klar gemacht, daß, wer — um wieder zu dem für uns Nächsten zurückzukehren — Mathematik gut unterrichtet, auch jedenfalls gut erzieht, sei es bloß den Intellekt, sei es, was wichtiger ist und bleibt, den Willen.

2) In meiner Psychologie, § 8, nicht weniger als sieben. Ein von außen her Urteilender hat zwar schon aus dieser bloßen Siebenzahl der Einteilungsgründe auf „Formalismus“ einer solchen Psychologie geschlossen. Vielleicht würde er bei näherem Zusehen (und nachdem er sich die Frage vorgelegt hätte, welche dieser vielen Einteilungen etwa keinen wirklichen und wichtigen Unterschied innerhalb unseres Vorstellungslebens trifft) zu dem entgegengesetzten Eindruck gekommen sein, daß gerade eine solche Mannigfaltigkeit und Reichhaltigkeit ebenso erfreulich ist wie z. B. die einer Flora und Fauna, und daß das Nichtbeachten sachlich gegebener Unterschiede und das Unterlassen hierauf sich gründender Einteilungen nur eine Folge und ein Zeichen zurückgebliebener Beobachtungskraft der betreffenden Wissenschaft wäre, sei es Botanik und Zoologie, sei es die Psychologie.

blicken der vollen Mannigfaltigkeit seelischer Tatsachen entspringen) einig wären, und es fehlt daher noch viel mehr, daß die Mathematiker und die mathematischen Didaktiker sich zu einer systematischen Kenntnisnahme aller dieser psychologischen Arten und Unterarten, der Schülerseele durch Mathematik von so vielen, womöglich allen Seiten her beizukommen, verpflichtet fühlten. Daher soll auch das Nachfolgende nicht eine Ausführung, sondern höchstens Proben von einem Programm zukünftiger planmäßiger Bebauung des gesamten Gebietes einer mathematischen Bildungslehre darstellen.

Beginnen wir also für jetzt nicht nach der Reihenfolge der psychologischen Grundklassen, die in einer systematischen Psychologie noch immer mit Vorstellungen (einschließlich Empfindungen) beginnen[1]) und mit dem Willen endigen müssen; sondern beginnen wir im Hinblick auf die pädagogische Abstufung der Erziehungswerte diesmal wirklich sogleich mit dem Willen, der Willensbildung durch Mathematik. Es wird sich ja dann alsbald zeigen, daß und warum sie auf die Pflege intellektueller Zustände, letztlich evidenter Urteile, angewiesen ist; denn ihre Gewinnung ist ja hier das Ziel des Wollens.

I. Willensbildung durch Mathematik.

Zu diesem ebenfalls unzähligemal behandelten Thema bilden das eindringlichste konkrete Beispiel die mathematischen Aufgaben: Die Aufgabe als solche gibt ja dem Schüler den sozusagen greifbaren Anlaß, in sie sich zu verbeißen und hiebei eine Zähigkeit des Wollens zu entwickeln, mit der ja vielleicht in der Tat im ganzen sonstigen Unterricht nichts zu vergleichen sein mag. Auch eine bissige Stelle beim Übersetzen aus einer Fremdsprache hält dem Schüler zwar ebenso unerbittlich das Bewußtsein vor, daß er die Lösung noch nicht habe; aber was er dann als Lösung anerkennen dürfe, das läßt ihn die Fremdsprache nicht ebenso unzweideutig schon während der Arbeit des Suchens erkennen wie die Mathematik. Hier gibt es, wenn keine anderen Kriterien, schließlich die Rechenprobe[2]) oder das

1) Der psychologisch kundige Leser wird diese Art des Voranstellens der Vorstellungen in einem System der Psychologie nicht verwechseln mit HERBARTs gescheitertem Versuch, alle anderen psychischen Phänomene, z. B. auch Gefühl und Willen, auf Vorstellungen „zurückzuführen“.

2) Freilich liefert auch die „Probe“ nur Evidenz der Wahrscheinlichkeit (vgl. meine Logik, § 53), nicht Evidenz der Gewißheit. Aber das Defizit

Konstruieren mit Zirkel oder Lineal, um aus eigener Entscheidung zu erkennen, ob es dann wirklich klappt. Die befriedigende Übersetzung dagegen gibt doch immer nur eine mögliche, nicht die notwendige Lösung der Schwierigkeit. Doch bleibe die Überprüfung eines solchen Übergewichts der mathematischen Aufgabe über jede andere wie billig der gemeinsamen Erwägung und Abwägung der Fachlehrer der verschiedenen Fächer vorbehalten (sie gehört aus den an der Spitze des § 1 angeführten Gründen nicht in den I., sondern in den X. Band dieser Handbücher).

Für die schärfere psychologische Analyse, was im Schüler bei solchem Verbeißen[1]) in eine Aufgabe emotional vor sich geht, ergäbe sich die Unterscheidung, daß das oft nicht eigentlich Übungen im Wollen, sondern nur im Wünschen sind. Streng genommen kann der Schüler ja nur wünschen, bei jeder noch so schwierigen Aufgabe die richtige Lösung zu finden; er kann dies auch, wenn er (gleichviel ob mit Recht oder Unrecht) der Meinung ist, daß das Erreichen dieses Zieles seine Kräfte übersteige. Wollen können wir ja nur, dessen Erreichen wir nicht für unmöglich halten (nicht zu verwechseln damit, als müßten wir uns vor dem Wollen auch schon über das Möglich ein Urteil gebildet haben[2]). Der theoretisch geschulte Psycholog findet alle diese Nuancierungen der Willenspsychologie verwirklicht in jedem Brüten des Schülers über der Lösung einer mathematischen Aufgabe; und ist der Lehrer psychologisch geschult, so versteht er, warum manches Abmühen den Schüler nicht übt, sondern lähmt. Aber diese entscheidenden Kriterien über den schließlichen pädagogischen Wert jener sozusagen mathematischen Willensübungen sind nicht durch noch so fein geschliffene

---

zwischen jener Wahrscheinlichkeit und der Gewißheit ist bei einer gelingenden Rechnungsprobe, zumal wenn diese von verschiedenen Seiten her durchgeführt wurde, bei weitem kleiner, als wenn das Übersetzen einen plausiblen Sinn gegeben hat. Der Schüler ist oft sehr verwundert, wenn der Lehrer die Übersetzung dennoch ablehnt; nach einer stimmenden Rechnungsprobe ist er vor solcher Enttäuschung bei weitem sicherer.

1) SIMON (1908, S. 39) schildert sehr hübsch und warnt mit Recht: „Es klingt harmlos, wenn ein junger einflußreicher Lehrer seinen Tertianern regelmäßig sagt: ‚Überlegt euch bis zur nächsten Stunde mal diese zwei bis drei Aufgaben, wer keine Lust hat, läßt's sein, und wenn einer nichts herausbringt, so macht's auch nichts', – ja, aber die Jungen, die sitzen bis in die Nacht hinein, und ihr ganzes Sinnen und Trachten ist gefesselt. Die anderen Fächer werden dadurch geschädigt."

2) Näheres in meiner Psychologie § 80; ferner in „Hundert psychol. Schulversuche" (s. o. S. 111), Versuch Nr. 100.

psychologische Formeln abstrakt und allgemein für die pädagogische Praxis abzugrenzen; sondern da die psychologische Abstraktion hier wie sonst überall erst in der praktischen Pädagogik selber den Befähigungsnachweis zu erbringen hat, ob sie dem Seelenleben des Schülers bis in die einzelnsten, für den einzelnen Fall eben noch wesentlichen Züge zu folgen vermocht hatte, so genüge hier die Einladung an den Mathematiklehrer, Gelingen und Mißlingen der von ihm dem Schüler auferlegten Übungen einmal unter solchen psychologischen Gesichtspunkten vor sich selber zu überprüfen. Das wird dann nicht nur zur Bestätigung des leider nur zu bekannten Falles führen, daß, wenn einem Lastpferd eine Aufgabe gestellt wird, die es schließlich für zu schwer erkennt, es sogar durch Peitschenhiebe nicht mehr zu weiteren Anstrengungen zu bewegen ist. Es wird auch nicht nur zu Trivialitäten nnd Binsenweisheiten führen wie die, daß die Aufgaben immer nur langsam an Schwierigkeit zu steigern seien u. dgl. m. Es wird aber vielleicht die Grenzen abstecken helfen zwischen einer aus dem wachsenden Kraftgefühl sich stetig steigernden Lust an mathematischer Arbeit als solcher und dem Ausarten des mathematischen Interesses zur Lust an mathematischem Sport. Freilich, wer wollte einem Schachspieler sagen und beweisen, daß bis hieher sein Interesse ein gesundes, von da ab ein einseitiges, Kraft verschwendendes sei? Wer wollte überhaupt dem Sport Grenzen vorschreiben, die er ja natürlich gerade dann, wo er zum Unsinn geworden ist, weder kennen noch anerkennen kann? Also wird man auch immer einzelne Fexe des Gleichungs- und Konstruktionsaufgabenlösens in den Kauf nehmen müssen. Nur gegen eine Unterrichtsorganisation, die es auf das Züchten der Fexerei von vornherein anlegte und wohl gar die ihr im Unsinn nicht folgenden Schüler disqualifiziert, werden sich die gegenüber allen Auswüchsen eines Sportes schließlich doch in der Majorität verbleibenden Vernünftigen auflehnen dürfen. – Einfach auf die Seite solcher gesunden Vernunft aber stellen sich die Meraner Vorschläge mit der Warnung vor denjenigen Aufgabengattungen, die die mathematische Willensübung in bloßen mathematischen Sport zu verkehren am meisten Gelegenheit gegeben haben.

II. Gefühlsbildung durch Mathematik.

Ist aber nicht von allen auszudenkenden Bildungswerten der Mathematik wenigstens gerade dieser eine von vornherein ausgeschlossen? Ja – wenn man bei „Gefühlen“ nur an unklarstes, schwankendstes Psychisches denkt oder gar, wie SCHOPENHAUER, im Begriff „Gefühl“ nur etwas Negatives, nämlich den kontradiktorischen Gegensatz zum „Wissen“ sieht. Denn da von dem Wissen, „Lernen“ (μαθ) die Mathematik geradezu ihren Namen hat, so scheint diese Abweisung schnell begründet. Erinnert sich aber der Psycholog der „Wissens- und Wertgefühle“[1]) und unter den „höheren Werten“ der logischen, ethischen und ästhetischen, so sieht die Sache sogleich minder hoffnungslos aus.

Unter logischen Gefühlen[2]) wird wesentlich dasselbe verstanden, was man Interesse nennt. Und nicht nur bedarf es keines Wortes darüber, wie rege mathematisches Interesse gerade auch schon im Schüler sein kann, sondern immer wieder wurde die ganz besondere Eignung mathematischer Stoffe hervorgehoben, im Schüler das reine theoretische Interesse (sozusagen ein uninteressiertes Interesse) zu wecken und zu pflegen. Das mag auch dem Schüler selber bei guten Gelegenheiten gesagt werden – und „gut“ sind natürlich nur solche, in denen er dieses Interesse soeben aufrichtig und stark selber erlebt hatte. Dann aber mag es auch in Ausdrücken eines so starken Enthusiasmus und Idealismus geschehen, wie ihm PLATON Worte verliehen hat, wenn er immer wieder das Mathematische als ein dem Göttlichen Ähnliches pries. – Zu „schwanken“ brauchen solche Gefühle keineswegs – aber freilich würde es einer psychologischen und gegenstandstheoretischen Reife, wie sie die Neuplatoniker von heute keinesfalls schon erwiesen haben, bedürfen, um vorerst dem Lehrer und dann vielleicht, vielleicht sogar dem Schüler zu zeigen, wie ohne alle Mystik die Eigenart gerade des mathematischen Denkens uns heranführt an eine „daseinsfreie“ Welt eigenartiger Schönheit, die in mathematischen „Gestalten“ ihren Ausdruck findet und so den Kreislauf, der mit Klarheit des „Anschauens“[3]) anhebt und im Fühlen der Schönheit mündet, harmonisch eröffnet und abschließt.

Aber wenigstens die ethischen Gefühle und mit ihnen die ethischen Werte müssen in der Mathematik leer ausgehen? Wieder:

1) Nach MEINONG; vgl. meine Psychologie § 61, 66.
2) Psychologie § 70.
3) Über die Korrelation von Anschauen und Gestalt (analog der von Hören und Schall [Klang, Geräusch], Sehen und Farbe [auch von Gesichtsraum-Empfindungsinhalten], überhaupt von psychischen Akten und ihren Gegenständen) vgl. „Räumliche und raumlose Geometrie“.

Ja – wenn wir das Ethische einschränken auf das: „Liebe Deinen Nächsten wie Dich selbst". Denn hier klafft freilich die Kluft zwischen dem Wohl des Nächsten, dem „Humanen" und insofern „Humanistischen" einerseits – Zahl, Zeit, Raum und was immer für Fundamenten apriorischer Beziehungen, dem „Realistischen" im weitesten Sinne andererseits, allzu breit und tief. Aber gemach: Auch die altruistische Ethik beansprucht nur als Kern aller Güte, aller Ethik zu gelten, und sie verschließt sich nicht[1]) der ethischen Würde der Wahrheit, der Schönheit. Wenn wir der unerschöpflichen Freude eines Mozart an Musik ethischen Adel zuerkennen, so gewiß nicht minder der Antwort NEWTONS auf die Frage, wie er seine mathematischen Entdeckungen machen konnte: „Weil ich immer an sie gedacht habe." Kann den Schüler auch nur zeitweilig seine Liebe zur Mathematik recht erfüllen (und die anderen Fächer mögen dann nicht sogleich eifersüchtig werden), so werden wir ihn auch sittlich zu dieser Zeit in guter Hut wissen. Geben wir uns aber dann nur keinem schönen Wahn darüber hin, daß Leben und Leidenschaften – wir müssen es sogar hoffen – ihn nicht mit Versuchungen überraschen werden, vor denen ihn seine mathematischen Passionen allein freilich nicht schützen würden.

III. Urteilsbildung durch Mathematik.

Zu diesem Gegenstande ist hier fast nichts mehr zu sagen, man müßte denn den Mut haben, das unzähligemal gut Gesagte wirklich noch einmal zu sagen. Die vielberufene „Verstandesbildung" durch Mathematik gehört genau hieher, da eben der Verstand nichts ist als Disposition zu richtigem Urteilen. Nur eines noch einmal: Nicht auf das richtige Urteilen allein kommt es an, sondern auf richtig Urteilen mit Einsicht in die Richtigkeit. An dieser einfachen Ergänzung und Vertiefung versündigt sich, wie in allen Teilen dieses Buches zu erinnern war, aller Unterricht, der, weil in der Mathematik die richtigen Sätze sich so haarscharf von den halbrichtigen und unrichtigen unterscheiden wie in keiner anderen Wissenschaft und keinem anderen Gebiete außerwissenschaftlicher Erkenntnis, nun einfach diese richtigen Sätze haufen- und tonnenweise[2]) auswendig lernen läßt. Und noch eins. Auch hier kommt es ja nicht so sehr auf

1) Vgl. Psychologie § 71 (S. 475 der großen Ausgabe).

2) Mir drängte sich dieses Bild auf, als ich dieser Tage an der Adria Millionen von Sardellen in die Fässer stampfen sah. Diese lebten gerade so wenig mehr wie die geometrischen Sätze unserer gedruckten Elementarbücher

das richtige Urteil als psychisch aktuellen Urteilsvorgang als auf die bleibende Urteilsdisposition an. Wie soll aber eine solche Disposition zu einsichtigem, evidentem Urteil entstehen, wenn die einzelnen Urteile evidenzlos, wenn sie nur korrekt hergesagte „Sätze" gewesen waren? – Angesichts des geradezu unermeßlichen Unfugs, der gegen das, was nachgerade Binsenwahrheit sein sollte, in einer ausgedehnten Schulpraxis noch immer geübt zu werden scheint, sei diesem Thema vom einzig gesunden Verhältnis zwischen mathematischem Denken und Sprechen alsbald ein eigener Paragraph (§ 52) gewidmet.

IV. Vorstellungsbildung durch Mathematik.

Hieher gehört vor allem alles, was an der Spitze dieses Dritten Teiles über „Die psychologischen Grundlagen des mathematischen Denkens" gesagt wurde. Denn die Grundlage alles „Denkens" im Sinne von Urteilen (und Annahmen) bilden ja doch die Vorstellungen – die Wahrnehmungs- und Phantasievorstellungen, die Erst- und Zweitvorstellungen[1]) – die wir in ihrer ganzen Mannigfaltigkeit besser in den Terminus „Denken" ein- als von ihm ausschließen. Bekanntlich hat sich eine Mehrzahl von Psychologen bis zum heutigen Tage noch nicht dazu aufraffen können, innerhalb der intellektuellen Vorgänge neben dem Vorstellen auch dem Urteilen einen besonderen Platz einzuräumen. Umgekehrt sehen wir die modernste, intellektualisierende Mathematik geneigt, über den Urteilen die Vorstellungen, über dem „Verstand" die „Sinnlichkeit" zu übersehen. Vielleicht kann es gemäß dem *„ex errore discimus"* gerade der mathematischen Didaktik in ihrer bisherigen Verfassung, sobald sie nach

---

und ihre Nachplapperungen in unseren dumpfen Schulstuben. Die lebendige Mathematik aber muß in den Köpfen und zwischen den Fingerspitzen und erst ganz zuletzt auf den Zungen schon unserer kleinsten Schüler etwas so Lebendiges sein wie der Fisch im Wasser.

1) Diese Termini habe ich vorgeschlagen in der Abhandlung „Räumliche und raumlose Geometrie" in Anlehnung und Fortführung des von MEINONG eingeführten Terminus „Gegenstände höherer Ordnung" (Ztschr. f. Psychologie, 1899, Bd. XXI, S. 182–272 [auch in Sonderausgabe]). Da sich z. B. auf den Gegenständen „Grün" und „Blau" die Relation Verschiedenheit „aufbaut" („fundiert" ist durch jene „Fundamente" der Verschiedenheitsrelation), so sind in diesem Beispiel „Grün" und „Blau" „Gegenstände niederer Ordnung" (inferiora), die Verschiedenheit ein „Gegenstand höherer Ordnung" (superius). Ich schlug nun vor, statt „Inferiora" und „Superiora" zu sagen Erst- und Zweit- (auch Dritt-...)Gegenstände und dementsprechend auch Erst- und Zweit-Vorstellungen.

Psychologischem auszublicken anfängt, recht und willkommen sein, wenn zeitweilige Einseitigkeiten im mathematischen Urteilen daran erinnern, daß wir um so weniger der grundlegenden Vorstellungen vergessen oder sie geringschätzig behandeln dürfen. Es war insofern einer der grundlegenden Programmpunkte vorliegenden Buches, nicht nur auf die „Pflege der Raumanschauung" zu dringen, sondern geradezu behufs einer Reform des mathematischen Denkens (im engeren Sinne) vor allem einer weit- und tiefgehenden Belebung und Bereicherung des mathematischen „Anschauens" und „Anschaulichen" bis hinunter zu den „Wahrnehmungsvorstellungen" (im Gegensatz zur mißverständlichen und mißverstandenen „reinen Anschauung" – vgl. S. 449) das Wort zu reden. – –

Möchten diese wenigen Proben aus einer auf elementarpsychologische Tatsachen und Begriffe zurückgehenden Besinnung über die Möglichkeit und Notwendigkeit, auf diese Gegebenheiten der Schülerseele zurückzugehen, recht vielen Fachgenossen auch in der Schulmathematik eine Einladung sein, es mit solcher planmäßigen psychologischen Vertiefung ihrer Unterrichtspraxis und Theorie zu versuchen – wieviel und wie schöne Beiträge, z. B. über die Beziehungen zwischen Mathematik und Phantasie[1]), sie auch schon ohne systematische Psychologie zu bieten vermochten. Erst nach viel zahlreicheren und gründlicheren Einzelbeiträgen aus den philosophischen Grundlehren einer „Didaktik als Bildungslehre" überhaupt wird es an der Zeit sein, an den allseitigen Zusammenschluß dieser Beiträge zu gehen. Oder sollte sich bis dahin unsere Schulmathematik auch ohne alle Schulphilosophie zu ganz neuen Formen und Inhalten entwickelt und ausgestaltet haben? Innerhalb der gegenwärtigen „zeitgemäßen Umgestaltung" dürfen solche Zukunftsfragen auf sich beruhen. Kehren wir daher zu Allernächstliegendem zurück.

§ 52. Mathematikunterricht als Sprech-, Schreib- und Zeichenunterricht. Einsicht und Fertigkeit.

Es ist eine durchaus berechtigte Forderung, daß der Unterricht was immer für eines Faches zugleich Unterricht in der Muttersprache sein müsse. Der Mathematikunterricht ist hiezu sogar in besonderer Weise dadurch berufen, daß der unvergleichlich

1) Z. B. DANINGER, Ästhetisches aus der Mathematik und Physik (1907, Programm des Altstädtergymnasiums in Prag).

klare und feste Inhalt dieses Gegenstandes auch von selbst nach einem ebenso klaren sprachlichen Ausdruck verlangt. Eindeutige Bestimmtheit jedes Wortes und Satzes, kein Wort zuviel, keines zuwenig, und was sich an diese elementarsten Anforderungen der Korrektheit sonst noch knüpft, bis zu den höheren Forderungen einer sprachlichen Stilistik, die ja alle letztlich auf strenge Angemessenheit zwischen Gedankeninhalt und sprachlicher Form zurückgehen — all dies kann und muß der Unterricht der Mathematik strenger verlangen und bemessen als jeder andere: denn kein anderer Gegenstand verfügt über so schlechthin eindeutig bestimmte Begriffe wie die Mathematik.

Welches ist aber das wirksamste Mittel, diese in der Sache selbst liegenden Vorzüge für den Unterricht möglichst voll nutzbar zu machen? Manchem mag die Antwort mehr als nahe zu liegen scheinen. Da das Lehrbuch natürlich nur solche Formulierungen der Definitionen, Axiome, Lehrsätze und Beweise enthalten darf, die sachlich wie sprachlich gleich streng korrekt sind, so läßt man all das den Schüler so schnell wie möglich wörtlich auswendig lernen und gestattet beim Hersagen des Gelernten auch nicht die kleinste Abweichung vom Wortlaut: dann hat ja der Schüler tadellos richtig gesprochen. — Gewiß — er hat richtig gesprochen, aber ebensogewiß hat er hierdurch nicht richtig sprechen gelernt. Denn wollen wir auch in diesem Punkte mit wertvoller „formaler Bildung" Ernst machen, so muß sich das Korrektsprechenkönnen, das an dem mathematischen Stoff gelernt worden ist, auch an jedem anderen Stoffe wohltätig bewähren. Aber nicht einen fertigen Satz korrekt nachsagen, sondern den sprachlichen Ausdruck für korrekt gebildete Vorstellungen und Urteile selber korrekt bilden können, heißt korrekt sprechen können. Eben dieses besagt aber richtig verstanden jene immer wiederholte Forderung, daß aller, also auch der mathematische Unterricht **Sprech-**, nicht Sprachunterricht sein soll! —

Wir berühren hiemit einen wunden Punkt eines großen Teiles unseres gegenwärtig noch herrschenden Unterrichtssystems — — einen Punkt, von dem zum mindesten allerlei Übel nach verschiedenen Richtungen ausstrahlen. Man hat das Übel oft, wahrscheinlich aber immer noch nicht nachdrücklich genug vermerkt an dem besonderen Anlaß der deutschen (und vormals auch der freien lateinischen) „Aufsätze"; und soweit es überhaupt vermerkt worden ist, hat man auch den Grund des Übels darin erkannt, daß die Schüler in weitaus den meisten Fällen unseres Schullebens angehalten werden, über etwas zu sprechen, was doch nicht ihre eigenen Gedanken sind — statt daß sie vor allem dazu angehalten würden, wenn sie gerade einmal keine eigenen Gedanken haben, einfach (nach dem oft gerühmten Vorbild spartanischer Jünglinge) zu schweigen. Sondern man ist nach unserem nun einmal seit Jahrhunderten überlieferten Schulsystem ganz zufrieden, wenn sie Tag für Tag, Stunde für Stunde das ihnen Vorgesagte korrekt nachsagen. Das weitschichtige Thema soll an dieser Stelle natürlich keineswegs weiter verfolgt werden[1]. Nur das eine, was sogleich wieder ausschließlich den Mathematikunterricht betrifft, darf und muß gesagt werden: Da wohl kein anderer Vorstellungs- und Urteilsinhalt so primitiv ist wie der mathematische (auch schon der physikalische ist bei weitem reicher — vgl. das Prinzipielle hierüber im X. Bd.), so kann es füglich im Mathematikunterricht gar nicht geschehen, daß der Schüler über etwas zu sprechen gezwungen wäre, was er sich gar nicht hat vorstellen können. Ein Quadrat, ein Parallelogramm kann sich auch der Dümmste vorstellen; und es ist auch kaum eine so tiefe Stufe der Begabung für Denken und Sprechen zu finden, daß nicht was immer für eine noch so kleine Inadäquatheit zwischen Denken an und Sprechen über diese primitivsten Vorstellungsgegenstände vom Kinde selbst bemerkt werden könnte, wenn nur der Lehrer zuerst den geistigen Blick — nötigenfalls mit Hilfe des leiblichen Blickes auf eine die Inadäquatheit *ad oculos* demonstrierende Figur — auf den Gedanken als solchen richtet und dem Schüler Zeit läßt, über das endlich Begriffene nun erst auch seine eigenen immer besser zutreffenden Worte zu finden. Mag man also zur Entschuldigung alles unendlichen Redens beim Abfragen des Eingelernten, wo ja der Schüler kaum bei einem Hundertstel der „vorgeschriebenen Lehrstoffe“ darnach gefragt wird, ob das, was er dem Lehrer sagt, denn auch von ihm selber geglaubt, geurteilt worden, ob es seine eigene Überzeugung oder wenigstens Vermutung sei — mag zur Entschuldigung dieses unseres Lern- und Abfragesystems gesagt werden, daß anders unsere Lehrpläne sich nicht „absolvieren“ lassen, so gilt diese Entschuldigung doch am wenigsten angesichts der einfachsten aller Denkgegenstände, der mathematischen. Sobald wir uns dazu aufraffen werden, auch im Schulleben nicht mehr die Gottes-

1) Vortreffliches hierüber bei REIDT 1906, S. 16, 62, 103 ff.

gabe der Sprache herabzuwürdigen, indem wir sie zu etwas anderem gebrauchen als zum Ausdruck eigener Gedanken, so werden es offenbar vor allen anderen diese einfachsten Gegenstände sein, die die Sprache ihrem natürlichen Zwecke wiedergeben und so den Schüler wohl auch für vieles oder alles andere Sprechen über andere Gegenstände in ihrer Weise mit üben. Und „Mitübung“[1]) ist ja der korrekte psychologische Ausdruck für das so oft unpsychologisch gebrauchte Wort „formal bilden.“ Nur wollen wir nicht vergessen, daß eben weil es jenen mathematischen Denkgegenständen an Durchsichtigkeit kaum irgendein anderer gleichtut, eine tiefe Kluft besteht zwischen dem natürlichen Sprechen des Kindes, das ja vom ersten Lallen an[2]) ohne klar analysierte Vorstellungsinhalte hat geschehen müssen, und den Anfängen wissenschaftlichen Sprechens über jene klar gedachten allereinfachsten Anschauungsgebilde. – Daher Geduld mit dem mathematischen Sprechenlernen – nicht die Zeit für verloren halten, die verwendet wurde auf zehn mehr und immer weniger verfehlte Versuche, der Anschauung und dem ebenfalls nur allmählich an und aus ihr sich festigenden Begriffe die richtigen Worte zu leihen! – Vielleicht gibt es nur ein ganz sicheres Mittel, alle wirklichen Geist und Sprache bildenden Erfolge des Mathematikunterrichtes in der Wurzel zu ersticken: wenn man nämlich die schon fertigen Definitionen und Sätze aus dem Buche auswendig lernen läßt . . . –

Im Anschluß an diese sprachliche „Form“ des Mathematikunterrichtes noch ein Kapitelchen nicht ungesunden Formalismus,

---

1) Vgl. meine Psychologie § 35, S. 197.

2) Angesichts des sinnlosen Auswendiglernenlassens von arithmetischen und geometrischen Definitionen drängt sich die Frage auf, ob eine künftige Pädagogik nicht auch noch eine neue Methode für das Päppeln der Kinder erfinden wird: man lasse sie nicht etwa den Löffel zur Hand nehmen und die Suppe oder das Ei auslöffeln, sondern man beginne so: Unter einer Suppe versteht man die Lösung von Nährsalzen in Wasser usw., Unter einem Ei versteht man usw., Unter einem Löffel versteht man usw. Natürlich wird erst eine künftige Erfahrung lehren, ob bei solcher Methode die Kinder schon vor oder erst nach dem Memorieren und Rezitieren dieser Definitionen verhungert sein werden. Und nicht erst auf die Frage, ob man beim Mathematik- und so ziemlich jedem anderen Unterrichte den Kindern die Arbeit des Auswendiglernens von soundso vielen für sie leeren Wörtern ersparen soll oder nicht (was dann der Sprach-, nicht Sprechunterricht als solcher entscheiden mag), sondern nur darauf kommt es uns für jetzt bei unserem Unglauben an die „formalbildende Kraft“ einer von Gedanken losgelösten Sprache an, daß bei der Definitionen-Lern-Methode das mathematische Denken als solches zu kurz kommt – daß das Kind mathematisch verhungert.

das mathematische **Schreiben** oder die mathematische Kalligraphie, wie wir es kurz nennen könnten.

Daß der Mathematikunterricht sowohl in seinem geometrischen wie im arithmetischen Teil zur Pflege einer nicht nur strengkorrekten, sondern auch gefälligen, womöglich schönen äußeren Form der schriftlichen Arbeiten reichlich Gelegenheit gibt, bedarf keiner breiten Darlegung; desgleichen nicht der Satz, daß eine schleuderische Schreibung der Ziffern und Buchstaben, schleuderisches Zeichnen der geometrischen Figuren unter keiner Bedingung zu dulden ist, nicht einmal in den für das Auge des Lehrers in der Regel nicht bestimmten Konzepten (wie denn dem Schüler überhaupt nahezulegen wäre, daß er seine Zeit besser verwendet, wenn er sich gewöhnt, auch ohne Konzept eine wenigstens anständige schriftliche Ausarbeitung zu liefern – wobei ihm dann das Streichen von rechtzeitig bemerkten Fehlern nicht übel genommen werden darf). Das Minimum dessen, was an Sorgfalt in der Schreibung vom Schüler nicht nur verlangt werden kann, sondern muß, ist ein sorgfältiges Setzen der Gleichheitszeichen, der Bruchstriche u. dgl. (bekannte Anlässe zu unermüdlichen Zwischenrufen des Lehrers: den Bruchstrich zuerst schreiben, dann erst den Nenner und Zähler! – u. dgl. m.); der Schüler kann und muß begreifen, daß das eine Rücksicht ist, die er nicht einer angeblichen Pedanterie des Lehrers, sondern dem darzustellenden Gedanken selbst entgegenbringt. Denn das Gleichheitszeichen ist sozusagen das heilige Symbol des Mathematikers; der Bruchstrich kann je nach seiner Stellung sehr Verschiedenes bedeuten. Schiefe Bruchstriche sind gar nicht oder nur in bestimmt vorgeschriebenen Fällen zu gestatten. – Eine jedenfalls auch nicht bloß äußerliche Rücksicht auf Äußeres ist ferner die vernünftige Disposition des Raumes der Schultafel für die Rechnung. Der Gedankenlosigkeit, statt beim linken oberen Rande sogleich in der Mitte der Tafel mit dem Schreiben zu beginnen, mag der Lehrer durch die launige Interpretation des *Quidquid agis, prudenter agas, et respice finem*, wo diesmal „*finis*" den „rechtsseitigen Rand der Tafel" bedeutet, mit leidenschaftsloser Beharrlichkeit entgegentreten. Für das zweckmäßige Anschreiben typisch wiederkehrender Schemata wurden beim Dreieckauflösen (S. 287) Vorschläge gemacht.

Vielleicht tut, nicht weniger als dem Schüler Strenge für jenes Minimum, manchem Lehrer eine Abmahnung vor Übertreiben der äußeren Form not. Wenn z. B. die Hefte bestimmter Schulklassen sich durch die phantasievolle Verwendung von roter, blauer, grüner Tinte dem Auge noch so angenehm präsentieren, so wird für diese herrliche äußere Form mit großer Wahrscheinlichkeit eben doch irgendwie der mathematische Gedankeninhalt den Schadenersatz zu leisten haben. Feste Vorschriften für das Minimum, Maximum und Optimum der rechten

Mitte zwischen Inhalt und Form kann natürlich hier niemand (auch kein Direktor) geben, da sogleich nach den objektiven Forderungen des mathematischen Inhaltes den immer doch sehr subjektiven des guten Geschmackes ihr Recht bleibt.

Vom Schreiben ist nur ein Schritt zum **Zeichnen** – ja dieses geht jenem an Wichtigkeit (in einem gesunden Volksschulunterricht zum Teil auch zeitlich) voraus. – Am raschesten gelangen wir zu einigen nützlichen Gesichtspunkten durch Anknüpfen an folgende Thesen von SCHOTTEN (Vergleichende Planimetrie, Bd. I, S. 32):

„Nach meiner Ansicht müßte der Zeichenunterricht mit dem geometrischen von Anfang an systematisch verknüpft werden, ja ein rein geometrisches Zeichnen müßte der einzige [?] Gegenstand dieses Unterrichtszweiges auf der Schule sein. Durch einen so geleiteten Unterricht würde der Schüler mit der Handhabung von Lineal und Zirkel vertraut werden, ja bei der reichlichen Zeit würden die Schüler es zu einer gewissen Vollendung bringen können, die äußerst befruchtend auf den wissenschaftlichen Unterricht in der Geometrie einwirken würde. Das obligatorische Zeichnen müßte aber auch noch in Sekunda und Prima eingeführt werden und sich als Ziel das perspektivische resp. projektivische Zeichnen stecken. Würde das erreicht, so würde ein großer Teil der Vorwürfe gegen das Gymnasium schwinden.

Es sei mir gestattet, meine Ansichten hierüber durch eine Vergleichung klarzustellen. Das Ziel gleichmäßiger Ausbildung für alle und einer harmonischen Ausbildung des einzelnen muß für das Zeichnen ebenso gelten wie für alle anderen Fächer. Das Gymnasium soll nicht für einen bestimmten Beruf vorbereiten, sondern für alle. Wie nun der Mathematiker nicht Mathematiker heranzieht, der Gesanglehrer keine Solosänger, der Turnlehrer keine Turner heranbildet, sondern der erste durch die Mathematik auf den Geist einwirkt, der letzte auf einen kräftigen, gewandten Körper hinarbeitet, so soll und darf auch im Zeichenunterricht nicht auf künstlerische Ausbildung der Wert gelegt werden. Das Ziel braucht nicht zu sein, eine Landschaft oder einen Kopf künstlerisch zeichnen zu können, – derartige Leistungen müssen für den, der sich dazu berufen fühlt, ebensogut in Privatstunden gefördert werden, wie etwa die Ausbildung der stimmlichen oder sonstiger musikalischen Anlagen – sondern das Zeichnen muß einzig und allein in systematischer Verbindung mit der Mathematik stehen, deren dienende Schwester sein."

Gerade weil wir diesen Auffassungen und Forderungen in den meisten Punkten beistimmen, seien auch die feineren Differenzpunkte vermerkt. Vor allem werden und sollen die letzten

Stellen nicht als Ausdruck einer Abneigung oder Minderbewertung künstlerischer Fähigkeiten und Betätigungen gegenüber den durch die Mathematik zu pflegenden, vorwiegend verstandesmäßigen und auf ihrer obersten Stufe zu eigentlicher „Wissenschaft" sich erhebenden, aufgefaßt werden. Denn zum Wesen einer „harmonischen Ausbildung des einzelnen" gehört jedenfalls, daß die Schule, wenn sie aus den von SCHOTTEN aufrichtig eingestandenen Gründen schon nicht viel Positives zur künstlerischen Ausbildung, auch wo im einzelnen solche Anlagen vorhanden sind, tun kann, doch nicht dem gegenüber, was das Elternhaus dafür tun möchte, negierend sich verhalte, sei es durch grundsätzliche Nichtbeachtung und mehr oder weniger deutlich zur Schau getragene Geringschätzung, sei es gar durch direkte Hemmung (tatsächliche Beispiele solchen negativen Verhaltens stünden uns leider zur Verfügung). Einiges Grundsätzliche über das wünschenswerte Verhältnis von Kunst und Wissenschaft, auch soweit es in unsere Schulen hineinragt, bleibe dem X. Band vorbehalten. Aber auch innerhalb des sehr eng begrenzten Bereiches, in dem hier eine der schönen Künste, die des Zeichnens, berührt wurde, ist es vielleicht schon geraten, Ausdrücke wie „dienende Schwester" ganz zu vermeiden. Gewiß, soweit vom Zeichnen nur das für die Geometrie Verwendbare in Betracht kommt, sind das, vom Standpunkt des Zeichenunterrichts gesehen, so bescheidene Dinge, daß der Ausdruck „dienen" an sich keine Herabwürdigung mehr ist. Erinnert man sich dagegen, daß und wie seit dem Erscheinen jenes I. Bandes von SCHOTTENS Vergleichender Planimetrie (1890) der Zeichenunterricht es auch schon auf den untersten Stufen, in der Volksschule, angestrebt und erreicht hat, in ein gesunderes Verhältnis zur ganz eigentlich künstlerischen Empfänglichkeit und Tätigkeit zu gelangen – als Repräsentant all dieser Bemühungen sei nur der Name KERSCHENSTEINERS[1]) dankbar genannt –, so wird es umgekehrt geraten sein, die bösen Erinnerungen an das einstige lähmende monatelange Hinmalen horizontaler, vertikaler isolierter Strecken in womöglich punktierten Zeichenheften u. dgl. m. gerade im Bewußtsein künstlerisch fühlender Zeichenlehrer nicht mehr wach-

1) In dem unten (S. 500) angeführten Buch von KERSCHENSTEINER, Grundfragen der Schulorganisation, sagt der Verfasser ganz allgemein, er möchte „dem Schlagworte: ‚Jede Stunde, eine Sprachstunde' ein anderes zur Seite setzen: ‚Jedes Sachgebiet, ein Zeichengebiet' ".

zurufen, sondern sie der verdienten Vergessenheit so bald als möglich verfallen zu lassen. Nun könnte freilich ein einseitiger Geometrielehrer finden, daß ihm die Fertigkeiten der aus der Volks- in die Mittelschule aufsteigenden Kinder im Nachzeichnen, ja Malen von Baumblättern, Schmetterlingen und solchen allzu lebendigen Dingen für das Nachzeichnen der geometrischen Elementargebilde noch weniger nützen als jene wagrechten und lotrechten Strecken. Aber unsere Didaktik hat ja versucht, auch den Geschmack an jenen *membris disiectis*, die z. B. als Einleitung in die Stereometrie (vgl. S. 203) monatelang wie leeres Stroh gedroschen wurden, hinüberzuleiten auf geometrisch Lebensvolleres – was man keinen übertriebenen Ausdruck finden wird, wenn wir dabei auch nur an die noch nicht lebendigen Kristalle u. dgl. denken. Die Geometrie als solche reicht nun einmal an das wirklich Lebendige nicht heran (wie sie sich an dem typischen Beispiel, daß man für die Kurve einer menschlichen Silhouette nicht „die Gleichung“ aufzustellen vermag, immer wieder vor Augen halten mag). Bekanntlich aber gibt es einen Vermittler zwischen dem geometrisch Starren und dem organisch Lebendigen: es ist das künstlerische Ornament. In den Beratungen der Prager Mittelschule über die Reform des mathematischen Unterrichtes wurde von einem so strengen Gelehrten, wie es der Astronom OPPENHEIM ist, unter dem Beifall aller Versammelten auf die einst im geometrischen Unterricht nicht verschmähte Pflege eines bescheidenen ornamentalen Zeichnens hingewiesen. Unser Rat, ein gutes Stück des allerersten Geometrieunterrichtes, nämlich beim Gebrauch des Zirkels, an die sechslanzettige Rosette (Fig. 22 S. 99) anzuknüpfen, fällt unter jenen allgemeinen Rat OPPENHEIMS[1]). Und da es dann umgekehrt wieder nur zu nahe liegt, daß ein geometrischer Unterricht, der seine eingerosteten pedantischen Gewohnheiten endlich abgeworfen haben wird, nun diesen Rat wieder allzueifrig befolge, so mag auch die Warnung vor dem Extrem, einem Aufgehenlassen der Geometrie im bloßen „geometrischen Zeichnen“ oder gar bloßen Ornamentzeichnen, nicht überflüssig sein.

Erweitern wir freilich den Blick von dem, was man „Mathematik“-Unterricht im engsten Sinne nennt, zum Unterricht der darstellenden Geometrie, und von dieser im engsten Sinne wieder

1) Auch LAURIN fügt einem schwedischen Lärobok i Geometri (Lund 1890) Tafeln mit hübschen ornamentalen geometrischen Figuren bei.

zu den Diensten, die sie nicht nur z. B. dem Maschinenbauer, sondern auch dem Baukünstler erweist, so erweitern sich auch die Beziehungen zwischen Mathematik und darstellender Kunst sogleich ganz gewaltig. Waren doch ein LIONARDO DA VINCI und ein ALBRECHT DÜRER Väter einer mathematischen Theorie des perspektivischen Zeichnens. Aber es wäre überschwänglich, nach solchen Maßstäben seine Hoffnungen und Wünsche auf ein künftiges Wiederzusammengehen von darstellender Mathematik und darstellender Kunst einzurichten. Genug, wenn auf der Vignette dieses Bandes der Künstler nur vom äußersten Rande her wohlwollend in das Treiben der Mathematiker guckt. Warum sich RAFFAEL doch gerade diese Mathematiker und Mathematiklehrlinge als nächste Nachbarn erwählt hat?

Was auch ohne irgendwie neue Lehrziele und Methoden von jedem normalen Mathematikunterricht in Sachen des Zeichnens der Schüler verlangt werden darf und von jeher hätte verlangt werden sollen, wird das folgende Minimum sein: Der Schüler soll im Bedarfsfalle seine planimetrischen und stereometrischen Figuren mit Zirkel und Lineal sachrichtig und sauber zu zeichnen imstande sein; mit Tusche oder Tinte ausgezogen brauchen diese Figuren in der Regel nicht zu werden. Der Reißfeder dürfte sogar der scharf gespitzte Bleistift bei allen jenen Figuren vorzuziehen sein, wo der Schüler durch Nachmessen zu möglichst genauen numerischen Werten gelangen soll, welches empirische Mittel wir ja namentlich auf der Unterstufe nirgends unter der Würde der Mathematik gehalten haben. Der Schüler soll sich aber auch nicht durch den Gebrauch von Zirkel und Lineal verwöhnen, sondern er muß imstande sein, sowohl in seinem Hefte wie an der Schultafel alle nicht etwa allzu komplizierten Figuren (die eben der Unterricht ohnedies meidet) aus freier Hand so weit wiederzugeben, daß sich das für den Satz oder Beweis Wesentliche ohne gewollte und ungewollte Paradoxa ersehen läßt. (Der mehrfach besprochene Sport mancher Lehrer, eine theoretische Wahrheit aus einer den Voraussetzungen justament augenfällig widerstreitenden Figur ableiten zu lassen, mag ebenso für Ausnahmsfälle verspart bleiben wie die Belehrung über den Wert der streng mathematisch demonstrierenden Methode mittels mathematischer Sophismen; S. 472, 473). –

Und nun, da zuletzt von zwei „Fertigkeiten", dem Schreiben und dem Zeichnen, die Rede gewesen ist, noch ein grundsätzliches Wort über die Fertigkeiten in ihrem Verhältnis zu den Einsichten überhaupt. Zwar wird angesichts des besonderen Gegenstandes dabei vorwiegend von diesem Verhältnis innerhalb der Mathematik die Rede sein; es möge aber dabei immerhin auch die Übertragbarkeit des Verhältnisses auf andere Unterrichtszweige, sogar nicht nur des realistischen Unterrichts allein, mitbedacht werden, insoweit es sich hier um Erwägungen zur und aus der „allgemeinen Bildungslehre“ handelt.

Als in den Prager Vorschlägen (s. o. S. 5) ein differenzierendes Merkmal zwischen dem Mathematikunterrichte an Gymnasien und Realschulen und ein Grund, den letzteren eine höhere Stundenzahl für Mathematik zuzuweisen, in den hier zu pflegenden „Fertigkeiten“ rechnerischer und zeichnerischer Art gefunden wurde, nahmen dies einige angesehene Realschulmänner in Wien übel. Der Realschule die Fertigkeit, dem Gymnasium die Einsicht als Lehrziel zuzuweisen, bekunde eine Mißachtung des Zieles von „allgemeiner Bildung“, das sich auch die Realschulen (allerdings erst seit wenigen Jahrzehnten, u. zw. nach dem Muster der Gymnasien) angeeignet hatten. – Daß indes eine solche vermeintliche Minderbewertung der Realschule und ihres mathematischen Unterrichtes auf einem bloßen Mißverständnis, ja eigentlich nur auf ungenauer Kenntnisnahme des Wortlautes der Prager Vorschläge beruht, wird unwiderleglich aus deren Wortlaut hervorgehen, der darum hier wiedergegeben sei (S. 5 der SA):

„Die Prager Mittelschule kam zur Überzeugung, daß derzeit kein triftiger Grund mehr besteht, warum nicht Gymnasien und Realschulen (wenigstens die achtklassige Realschule der Zukunft) für den Unterricht der Mathematik wesentlich gleichlautende Lehrpläne haben sollten. Ein nur scheinbarer Gegengrund ist der, daß das österreichische Gymnasium nach wie vor drei, die Realschule (für Arithmetik, Geometrie und geometrisches Zeichnen zusammen) vier bis acht Wochenstunden zur Verfügung hat. Es hat nämlich die Realschule im Hinblick auf die künftigen technischen Berufe, zu denen sie vorbereitet, die Verpflichtung, nebst der Einsicht in die mathematischen Wahrheiten auch eine bedeutend weitergehende Fertigkeit in rechnerischer und zeichnerischer Hinsicht ihren Schülern zu vermitteln, als deren die Berufe bedürfen, zu denen das Gymnasium in der Regel hinführt. Da aber diese Rücksicht auf die künftigen Berufe unter den Lehrzielen des Gymnasiums wie der Realschule erst an zweiter Stelle steht, wogegen beide als erstes Ziel eine höhere allgemeine Bildung grundsätzlich gemeinsam haben (und trotz einzelner gegen die „allgemeine Bildung“ erhobener Stimmen auch fernerhin behalten sollen), so darf das Gymnasium trotz der geringen Stundenzahl seinen Schülern nichts von den allgemein bildenden Grundlagen des mathematischen Denkens vorenthalten, nach denen sich die Auswahl des Lehrstoffes und ihre methodische Darbietung richtet."

Dank jenem Wörtchen „nebst" hätte also schon bloßes genaues Lesen jene andere Interpretation ausgeschlossen, als würde der Realschule nur die „Fertigkeit" zugewiesen. Das zufällige Mißverständnis sei uns aber Anlaß, gerade im Gegensatz zu jenen Realschulmännern nochmals der Fertigkeit unsere volle Hochachtung zu bezeugen, durch folgende grundsätzliche Erwägungen:

Als der vielleicht fruchtbarste Zuwachs an pädagogischen Gedanken in unseren jüngsten Reformbewegungen ist die Pflege aller wirklichen Tätigkeit gegenüber allem bloßen Wissen[1])

---

1) Diese Betonung der „Tätigkeit" neben und vor dem bloßen „Wissen" ist so sehr zu einem ständigen Programmpunkt aller Schulreformer geworden, daß weder eine Aufzählung von Literatur noch gar das Aufwerfen von Prioritätsfragen mehr möglich ist (– auch GOETHE war schon lange nicht mehr der erste). So schließt sich denn überall, wo in vorstehender Didaktik auf Tätigkeit beim Mathematiklernen gedrungen wird, unsere Stimme nur den zahllosen Gleiches fordernden an. – Weil aber dieser Forderung nicht selten geschadet worden ist durch maßlose Übertreibungen, was dann Wasser auf die Mühle der wenigen war, die noch an die alte Lernschule glauben und sich mit ihr begnügen, so sei als Gegengewicht gegen solche Übertreibungen nach beiden Seiten hier der ebenso nachdrückliche wie besonnene Vortrag von KERSCHENSTEINER, „Produktive Arbeit und ihr Erziehungswert" (in „Grundfragen der Schulorganisation, Eine Sammlung von Reden, Aufsätzen und Organisationsbeispielen", Teubner 1907) angeführt. Z. B. S. 64: „Ein größeres Feld für produktive Arbeit wäre sicher an den Mittelschulen gegeben. Es wäre noch in ausgiebigerem Maße vorhanden, würde nicht über einzelnen Gruppen dieser Schulen beständig die Peitsche des „positiven Wissens" knallen. Ich muß bekennen, daß das heute verlangte Maß positiven Wissens in diesen Schulen zwar durchaus von einem normal begabten, nicht allzu bequemen Jungen für eine kurze Spanne Zeit erworben werden kann, daß es aber nur erworben werden kann auf Kosten des produktiven Könnens. Ein Amerikaner, der seit einigen Monaten in Deutschland sich aufhält und unsere höheren Schulen studiert, sagte mir jüngst allen Ernstes, es scheine, daß die deutschen Kinder so vieles zu lernen haben, damit sie nicht zuviel zum Denken kommen" usw. – Daß hier nicht einseitige Hand-, sondern ebenso vielseitige Geistesarbeit verlangt wird, belege z. B. die fast entgegengesetzt klingende Stelle aus demselben Vortrag (ib. S. 10): „‚Der tüchtige Arbeiter, der tüchtige Künstler, der tüchtige Kaufmann nützt dem Vaterland am besten dadurch, daß er seinem Berufe mit Verständnis obliegt und sich um andere Dinge nicht viel kümmert.' Wenn das im modernen Staate nur wahr wäre! Gerade je tüchtiger einer ist, um so notwendiger bedarf der Staat oder die Gemeinde seiner in Tausenden von wirtschaftlichen und sozialen Fragen, von Bildungs- und Kunstfragen . . ." – So drängen auch solche Betrachtungen wieder zu letzten abschließenden Fragen sozialer Bildung, wie sie, vom realistischen Unterricht ausgehend, unser X. Band zu beantworten wird versuchen müssen.

nicht nur zu begrüßen, sondern auch so energisch und rasch als nur immer möglich in die wirkliche Schulpraxis überzuführen. Anregungen hiezu hatte innerhalb unseres begrenzten Gebietes einer mathematischen Didaktik die Empfehlung des Zeichnens, des wirklichen Zeichnens, daneben aber auch des Modellierens, des Messens im Gelände, der Bestätigung von Rauminhaltsbestimmungen durch wirkliches Wägen (das ja nicht wieder nur der Lehrer, sondern unter seiner Anleitung und Aufsicht der Schüler zu vollziehen hat) u. dgl. m. zu geben sich bemüht. Alles solche wirkliche Tun findet nun seinen natürlichen Abschluß wieder erst darin, daß es sich zur Fertigkeit steigert (genauer und allgemeiner: die aktuelle Betätigung hinterläßt Dispositionen). Dabei ist dieser Begriff der „Fertigkeit" nicht etwa eingeschränkt auf manuelle Tätigkeit, sondern auch auf rein Intellektuelles ist er übertragbar und war immer gemeint, wenn man verlangte, daß „aus Wissen ein Können werden" solle. Aber allerdings bleibt dann ein solches bloß intellektuelles Können doch wieder nur eine Art Schatten (wie ja sogar alles Denken nur ein Schatten wirklichen Seins ist), ein Schatten von Betätigungen manueller Art und weiterhin der Betätigung aller wertvollen Kräfte des physischen Menschen überhaupt. Ja an dem letzteren Punkte dürfte die eigentlich natürliche Berührung zwischen wissenschaftlicher und künstlerischer (bis zu dramatischer) Betätigung, also kurz zwischen Wissenschaft und Kunst[1]) selbst, gelegen sein (worauf, wie gesagt, im X. Bande zurückzukommen sein wird).

Wenn nun trotz dieser psychologisch und physiologisch tief begründeten Würde der Fertigkeit als solcher dieses Wort für das Ohr sogar mancher Pädagogen einen noch immer herabwürdigenden Beiklang hat, so läßt sich auch das psychologisch erklären: Die Psychologie und Psychophysik vor allem der Willensleistungen lehrt uns die ausgedehnte Rolle der mechanisierten Bewegungen[2]) kennen und verstehen. Es sind solche, die anfänglich bewußte Willensleistungen waren, und bei denen später, nach voll erreichter Übung, das Wollen mehr oder minder vollständig ausfallen konnte, ohne daß darum die Leistung als solche an Vollkommenheit einbüßt. – Hiemit ist nun freilich die Möglichkeit gegeben, daß eine nicht erst mechanisierte,

1) „Kunst kommt von Können" schärfte RICHARD WAGNER ein.
2) Vgl. meine Psychologie (Große Ausgabe S. 536).

sondern schon von Anfang nur mechanisch gewesene Tätigkeit zwar die äußeren Leistungen ebenfalls liefert, die inneren Vorgänge aber schon von vornherein überspringt. So kann dann eine solche äußere Leistung geradezu zur Täuschung werden, falls sie nämlich durch bloßen Drill herbeigeführt wurde und dennoch irgendwie die Meinung erweckt, als seien ihr auch die normalen und wertvollen inneren Vorgänge vorausgegangen.

Diese theoretischen Feststellungen also vor allem nochmals zur Erläuterung und Vertiefung desjenigen, was wir Gutes speziell z. B. über das „mechanische Rechnen" (S. 69ff.) zu sagen hatten, dann aber auch als Versicherung, daß auch wir zwischen Fertigkeit und Fertigkeit nur zu wohl einen Unterschied zu machen wissen. Also in dem besonderen Falle, der den Anlaß zu diesen allgemeinen Feststellungen gegeben hat: Würde wirklich irgendwo das geometrische Zeichnen (aber auch das Freihandzeichnen) an Realschulen dahin entgeistet, daß nur mehr eine handwerksmäßige Fixigkeit im Ziehen von Linien[1]) Anfang und Ende einer solchen Zeichenkunst bildete, so wäre zur Verteidigung einer solchen bloßen Fertigkeit freilich nichts mehr zu sagen. Eine solche Minderwertigkeit finge aber nicht erst bei den auf äußere Betätigung abzielenden Teilen des Mathematikunterrichtes an; sondern wenn z. B. während der Prager Verhandlungen ein ausgezeichneter Realschulmann (Direktor und selbst Lehrer der Mathematik) schwer geklagt hat, an den österreichischen Realschulen werde (infolge ihrer unseligen Siebenklassigkeit) „den Schülern die analytische Geometrie nur wie ein Firnis aufgetragen", so richten sich auch gegen solche Unfertigkeit alle Minderbewertungen einer im engsten Sinne sogenannten Fertigkeit, die von der ihr naturgemäß entsprechenden Einsicht zu früh

1) Vor einiger Zeit las ich in den Unterrichtsblättern für Mathematik und Naturwissenschaften eine geradezu begeisterte Anzeige seitens eines hervorragenden Realschulmannes über eine zeichnerische Leistung: Ein reguläres 64-eck mit seinen sämtlichen Diagonalen! Was Wunder, wenn andere Leute die Befürchtung hegen, daß über solcher wirklich bloß manueller Tätigkeit und Fertigkeit doch manche geistige Güter verkümmern könnten. — Soeben klagt mir ein Kollege, dem niemand den Ruhm eines der vorgeschrittensten Mathematiker streitig macht, daß an österreichischen Realschulen mit dem bloßen „Ausziehen" der Zeichnungen für Darstellende Geometrie unzählige Stunden totgeschlagen werden. Denn dieses Zeichnen erfolge ausschließlich zu Hause, wogegen in der Schule (gemeint sind natürlich nur die wenigen, meinem Kollegen direkt bekannt gewordenen Schulen) die Darstellende Geometrie ausschließlich „vorgetragen" und von den Schülern in die Hefte „nachgeschrieben" werde!!

oder von Anfang an losgerissen worden war. – Und freilich dürften noch manche andere Einzelerscheinungen des mathematischen Unterrichtes solchen psychologischen Bemerkungen unterliegen, auf die ein aufmerksames Auge zu haben aber dem Leser dieser Didaktik im einzelnen konkreten Falle überlassen bleiben mag.

Wie erhaben dagegen jede echte Fertigkeit über alle Geringschätzung ist, bemißt sich in unserem besonderen Falle auch noch daran, ob denn nach jenem neuen pädagogischen Prinzip physischer Betätigung nicht etwa gar die bloße Einsicht, wie jene Gegenüberstellung sie dem Gymnasium zuzuweisen schien, für das eigentlich Minderwertige erklärt werden müßte? Doch hieße auch das wieder Gutes, Neues auf die Spitze treiben und dadurch *ad absurdum* führen. Nicht schlimmer könnte (oder konnte, z. B. in gewissen Übertreibungen Herrn KLEINPETERS) dem neuen Arbeitsideal geschadet werden, als wenn man es in einen Gegensatz zum einstigen Bildungsideal[1]) setzen zu müssen meint. Doch mögen auch diese Prinzipienfragen dem X. Bande vorbehalten bleiben. Hier nur so viel, daß auch die gegenwärtige Reform des Mathematikunterrichtes darauf keineswegs verzichtet hat, das Wort „Allgemeinbildung" in ihr Programm aufzunehmen, aber freilich mit der KLEINschen Determination einer „spezifischen Allgemeinbildung". Auch daß das nicht etwa eine *contradictio in adiecto* ist, daß nicht in dem hier gemeinten Sinne „spezifisch" und „allgemein" einander widerstreiten, wird erst im X. Bande nachzuweisen sein. Für jetzt genüge das Beispiel, daß eben das an der Realschule zur mathematischen Einsicht noch hinzukommende Maß von mathematischer „Fertigkeit" ein solches Spezifisches der Realschule darstellt; was dann dem Gymnasium sein Recht sichert, sein Spezifisches wieder in anderen, nicht gerade mathematischen „Fertigkeiten" (aber hoffentlich auch nicht mehr nur in der krampfhaften *„imitatio"* Ciceronianischen Lateins!) zu suchen.

Nachdem aber hier der Begriff „Bildung" als solcher berührt wurde, mögen schon diesen I. Band noch zwei oder drei zum Nachdenken über den „allgemeinen Bildungswert der Mathematik" einladende Äußerungen beschließen.

---

1) Vgl. meinen Aufsatz „Arbeitsideal und Bildungsideal" in der wissensch. „Beilage zur [Münchener] Allgem. Zeitung", 14. Januar 1905.

§ 53. Mathematische Bildung und Allgemeinbildung.

Wer aus den kleinen und bis ins kleinste hinabreichenden Fragen des täglichen Schulbetriebs seinen Blick wieder erheben will zu den höchsten Fragen alles Bildungswesens, muß von vornherein wissen, daß, wie die Mathematik nur ein kleines Stück der ganzen Welt ist, so auch der Mathematikunterricht jedenfalls nicht das Ganze der Bildungsaufgaben auf sich nehmen kann. Darüber freilich, als einen wie großen Bruchteil dieses Ganzen ein nach allen seinen möglichen Wirkungen voll ausgenutzter Mathematikunterricht günstigenfalls sich selber einzuschätzen habe, gehen die Meinungen weit auseinander. Und da es den Vertretern heterogener Wissens- und Bildungsgebiete unbenommen bleiben muß, ihr Fach im besten Lichte zu sehen und darzustellen, so darf dies füglich auch der Mathematiker – ohne daß in derartigen Selbsteinschätzungen die eine oder die andere Partei über sich selbst und über den ausdrücklich oder stillschweigend für einen Gegner erklärten Rivalen objektiver Richter sollte sein wollen. Weder wollen wir daher die auch heute noch für und wider einen alle übrigen Fächer überragenden Unterrichts- und Erziehungswert der Mathematik sich aussprechenden Stimmen noch um eine vermehren, noch auch wollen wir versuchen, den Streit dieser Stimmen zu schlichten; sondern es mag nur als Zeugnis dafür, daß man den hier obwaltenden Fragen schon lange nachsinnt, und daß man schon lange den Wert der Mathematik sehr wohl nicht nur nach ihrer praktischen Nützlichkeit, sondern nach ihrer Beziehung zur Allgemeinbildung als einem höheren und letzten Maßstab zu bemessen das Bedürfnis gehabt hat, zuerst eine Stimme aus einer nun schon sechs Jahrzehnte alten Vergangenheit[1]) vernommen werden, nämlich Worte aus

1) Aus einer noch viel älteren Vergangenheit sind die folgenden Worte PLATONs doppelt merkwürdig, weil auch sie schon scharf unterscheiden zwischen dem, was wir in unserem § 1 unterschieden als „Inhaltliche und formale Bildung durch die Mathematik“ (– die Übersetzung ist entnommen den „Abhandlungen der Friesschen Schule“ 1905, I. Band, 2. Heft „Über kritische Mathematik bei Platon.“ Ein Beitrag zur Ideenlehre. Von BRINKMANN, S. 330 ff.):

„Also wird es wohl gut sein, die Kenntnis gesetzlich zu fordern und die künftigen Inhaber der höchsten Staatsämter anzuweisen, daß sie sich der Rechenkunst zuwenden und sich mit ihr beschäftigen, nicht in der gewöhnlichen Weise, sondern bis sie mit der Vernunft selbst zur Anschauung der Natur der Zahlen gelangen, nicht zu Kauf und Verkauf wie Handelsleute oder Krämer, sondern um des Krieges willen und einer leichten Umkehr der Seele

LITTROWS einst so sehr geschätzter und verbreiteter (sogar heute noch neu aufgelegter) „Populärer Himmelskunde“:

„Man muß es beklagen, daß die mathematischen Wissenschaften noch immer keinen wesentlicheren Teil unserer Erziehung und selbst unserer späteren Bildung[1]) ausmachen. Die meisten, selbst von denjenigen, welche

selbst von der Sinnlichkeit zur Wahrheit und zum Sein. Und jetzt sehe ich auch wahrhaftig, schloß ich, wie schön und vielfach nützlich uns die Rechenkunst für unsere Zwecke ist, wenn man sie der Erkenntnis und nicht des Geschäfts halber betreibt... Weiter: Hast du schon bemerkt, daß die geborenen Rechner für alle Wissenschaften sozusagen von Natur geschärft sind, die Menschen mit langsamem Verstand aber, wenn sie in der Rechenkunst sich unterweisen lassen und üben, selbst falls sie keinen anderen Nutzen davon haben, gleichwohl alle in der Richtung größerer Geistesschärfe fortschreiten?“...

Diesen Einsichten sei aus allerneuester Zeit gegenübergestellt der Vorschlag eines Redners (einstigen „Inhabers der höchsten Staatsämter“) auf der Wiener Mittelschul-Enquete 1908 (Stenographisches Protokoll S. 160), „... daß der mathematische Unterricht bereits in der sechsten Gymnasialklasse abschließen könnte, und daß die Mathematik nicht mehr einen Gegenstand der Maturitätsprüfung zu bilden hätte, wohl aber die Physik...“ — Ich hatte darauf zu erwidern (ib. S. 386), daß mir in der ganzen Literatur der mathematischen Didaktik „der Gedanke, mit der sechsten Klasse abzuschließen, noch nicht vorgekommen ist. Es ist das in der Tat ein ἅπαξ λεγόμενον. Wenn ich bedenke, daß durch Jahrhunderte neben der klassischen Philologie die Mathematik als der Träger der geistigen Schulung gegolten hat, wenn ich an die jüngsten Naturforscherversammlungen in Meran, Stuttgart und Dresden zurückdenke, an den glänzenden Bericht GUTZMERS (Halle) und was wir von einer so verneverten Mathematik uns mitversprechen, so würde ich den Vorsprung, den wir in Österreich durch die Erkenntnis errungen haben, daß auch die Mathematik »nicht zum leeren Schatten eines anderen Gegenstandes gemacht werden« dürfe, gerade im jetzigen Augenblicke am unliebsten zurücktun... Denken Sie sich eine Physik in der siebenten und achten Klasse nur auf Grund der Mathematik bis zur sechsten Klasse... [was an dem Beispiele des Begriffes „Volt“ näher ausgeführt wurde, vgl. hiezu meinen Aufsatz „Die neuen österreichischen Lehrpläne für Physik“, Ztschr. f. d. physikal. u. chem. Unterr., Jhg. XXII, 1909]... Ich wechsle nun den Standpunkt völlig und erhebe mich zum philosophischen. PLATON hat das tausendmal zitierte: »ἀγεωμέτρητος μὴ εἰσίτω!« über seinen Hörsaal geschrieben. Meine Herren! Wenn wir die mathematische Schulung in den obersten Klassen unserer Gymnasien aufgeben, so haben wir auch den humanistischen Unterricht schwer geschädigt. Wir haben eine der Brücken zwischen dem humanistischen und dem realistischen Unterrichte abgebrochen, und ich glaube, die Herren Philologen werden die letzten sein wollen, die, wenn man sagen würde, aus den unteren Klassen ist die Naturgeschichte und die Physik verschwunden, aus den oberen Klassen die Mathematik, das Odium auf sich laden möchten, daß in ihrem Interesse oder gar auf ihren Impuls hin diese Rückschritte getan worden sind.“

1) In überraschendem (wenigstens scheinbarem) Gegensatz hiezu sagt A. VOSS („Über das Wesen der Mathematik“, 1908, S. 4), „... daß die Mehrzahl der Gebildeten der Mathematik im allgemeinen eine fast an Überschätzung grenzende Verehrung entgegenbringt. Sie spricht sich nicht nur in der immer zunehmenden Wertschätzung aus, welche der Mathematik als Bildungs- und

auf vielseitiges Wissen und sogar auf eigentliche Gelehrsamkeit gerechten Anspruch machen, die mit Stolz auf den Vorrat ihrer gesammelten Kenntnisse herabsehen und Unkenntnis jeder Art für ein Gebrechen halten, die meisten von diesen stehen doch gar nicht an, sooft zufällig die Rede auf die mathematischen Wissenschaften kommt, ihre völlige Unwissenheit als eine ganz erlaubte Sache, die sich gleichsam von selbst versteht, mit einer Offenheit, mit einer Naivetät zu bekennen, die man für Scherz halten müßte, wenn sie nicht gewöhnlich gleich darauf von Fragen und Äußerungen begleitet würde, die eine Art von Entsetzen erregen und die Wahrheit jenes Geständnisses nur zu sehr bestätigen.

Abgesehen von der Notwendigkeit dieser Kenntnisse im wissenschaftlichen und oft selbst im gemeinen Leben; abgesehen, daß ohne sie das schönste und dem Menschen angemessenste Studium, das der Natur im großen, beinahe unmöglich ist: so sollte schon der wohltätige Einfluß, welchen die Kultur dieser Wissenschaften auf die Bildung des menschlichen Geistes überhaupt äußert, uns bestimmen, ihnen in dem Felde unserer öffentlichen Erziehung eine der ersten Stellen anzuweisen. Welche andere Doktrin bietet diese Bestimmtheit der Begriffe, diese strenge Ordnung der Schlüsse, diese Gewißheit ihrer Beweise dar? Aus ihrem Gebiete ist jenes heillose, vage Geschwätz und jenes unselige Mittelding zwischen Wissen und Glauben, das in allen [?] anderen sogenannten Wissenschaften gleich einem Unkraut wuchert und keine gute Pflanze aufkommen läßt, völlig verbannt. Durch sie wird der Geist zur Aufnahme aller wahren Erkenntnisse, zur Bekämpfung der Vorurteile und Irrtümer, zur Entfernung aller Illusionen und halbverstandenen Annahmen und zur Verwerfung aller nicht auf eigene Überzeugung gegründeten Autorität, würdig vorbereitet; und wenn überhaupt dem Menschen gegönnt ist, von Wahrheit zu sprechen, so ist es hier und hier allein [?], wo er sie finden kann. Endlich, und dies möchte in unseren Tagen nicht zu übersehen sein, bietet diese Wissenschaft, als die beste Disziplin des menschlichen Geistes, unserer Jugend und durch sie den kommenden Geschlechtern die angemessenste Gelegenheit dar, ihre geistige Kraft zu üben und ihren Sinn für das Höchste, was uns angeht, für Recht und Wahrheit zu wecken und zu stählen, um dem sie von allen Seiten umgebenden Andrange eines kränkelnden und in sich selbst zerfallenen Zeitgeistes zu widerstehen, dessen Fortschritte eine männliche und kraftvolle Anhänglichkeit an das Gute überall zu einem sehr dringenden Bedürfnis gemacht haben."

Erziehungsmittel unserer Jugend zugeschrieben wird, sondern auch in den Gedanken unserer größten Geister (Galilei, Kant)." Dann allerdings wieder: „... Und doch ist die Mathematik ... noch immer die unpopulärste aller Wissenschaften"; „... es zeigt sich im großen und ganzen der Mathematik gegenüber eine auffallend geringe Einsicht...". –

Wieviel hat sich hieran gebessert? Wo krankt es trotz der äußeren Rechte, die seither die Mathematik im Rahmen unserer Schulen sich erkämpft hat, noch an der inneren Verfassung und Lebenskraft dieses Schulfaches? Diese und ähnliche Gedanken mag eine solche Stimme aus der Vergangenheit bei uns Heutigen anregen. – Da aber nichts kräftiger anregt als der Widerspruch, so wollen wir uns zu ihm reizen lassen durch – GOETHE. In den „Wanderjahren“[1]) sagt er:

> „... Es ist von nichts Wenigerem als von dem Mißbrauch fürtrefflicher und weitauslangender Mittel die Rede ... Spricht man von Mißbrauch, so scheint man die Würde des Mittels selbst anzutasten, denn es liegt ja immer noch in dem Mißbrauch verborgen; spricht man von Mittel, so kann man kaum zugeben, daß seine Gründlichkeit und Würde irgendeinen Mißbrauch zulasse ... Es ist auch hier von einem Komplex mehrerer bedeutender Menschen, von einer hohen Wissenschaft, von einer wichtigen Kunst und, daß ich kurz sei, von der Mathematik die Rede.“

Mag der Fachmathematiker an dieser Kriegserklärung unseres gerade nur in diesem e i n e n Fache wie in keinem anderen unwissenden Großen lachend oder schweigend vorübergehen – wird es auch der über die Bildungswerte a l l e r Fächer nachsinnende Schulmathematiker dürfen? Darf es eine Didaktik, die der a n g e w a n d t e n Mathematik das Wort geredet hat? Wird doch in jenen dunklen Worten nicht die „hohe Wissenschaft“ als solche angezweifelt, sondern erst ihre Verwendung als „Mittel“. Machen w i r von Mathematik auch nur als von einem Bildungsmittel schon überall den rechten Gebrauch? – Doch da hier von Mathematik im Hinblick auf Astronomie die Rede ist, so gibt uns schon der II. Band dieser Didaktischen Handbücher Gelegenheit, auf das feierlich angekündigte Paradoxon zurückzukommen.

Im übrigen aber mag aus den Diskussionen, die dieser I. Band angeregt haben möchte, erst der X. Band, „Das Verhältnis der realistischen Unterrichtsfächer zu den sogenannten humanistischen“, die Summe ziehen.

1) Jubiläumsausgabe, XIX. Bd., S. 133/34. Diese fügt in den Anmerkungen (S. 292) bei: „Mit dem hier nicht mitgeteilten Aufsatz, den der Astronom vorliest, ist ohne Zweifel die Abhandlung »Über Mathematik und deren Mißbrauch« gemeint, die erst 1833 in Bd. X der Nachgelassenen Werke erschien. In diese Abhandlung hat GOETHE auch einen diesbezüglichen Brief Ciccolinis an Zach aufgenommen.“

Namenregister.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

I. Band: Arithmetik und Algebra. Mit 57 Figuren und 3 Tafeln. [XVI u. 431 S.] gr. 8. 1908. In Leinwand geb. n. M. 8.60.
II. — Geometrie. Mit 403 Figuren. [XII u. 324 S.] gr. 8. 1909. In Leinwand geb. n. M. 6.40.

„... Das Erscheinen dieses Buches ist ein Ereignis für den mathematischen Unterricht unserer höheren Schulen. Die Namen des französischen Verfassers und des deutschen Bearbeiters sind bereits von programmatischer Bedeutung. Einer der wichtigsten Programmpunkte in der Bewegung für die Umgestaltung und Erweiterung des Mathematikunterrichtes der höheren Schulen lautet: Pflege des auf zahlreichen Gebieten der Wissenschaft so wichtigen funktionalen Denkens schon auf der Schule. Emile Borel ist einer der hervorragendsten Funktionentheoretiker der Gegenwart und hat, so hoch die von ihm sonst bearbeiteten Teile der Analysis über den hier in Frage kommenden einfachsten Elementen auch stehen, es nicht für zu gering erachtet, Schulbücher zu verfassen und in diese die von der modernen Reformbewegung geforderten Elemente (Koordinatenbegriff und graphische Darstellung, Begriff der veränderlichen Größe und der Funktion) aufzunehmen. Seine Bücher sind für den Mathematikunterricht der französischen Schulen von größter Bedeutung geworden.“ **(Frankfurter Zeitung.)**

Enriques, Dr. F., Professor an der Universität Bologna, Fragen der Elementargeometrie. Aufsätze von U. Amaldi, E. Baroni, R. Bonola, B. Calò, G. Castelnuovo, A. Conti, E. Daniele, F. Enriques, A. Giacomini, A. Guarducci, G. Vailati, G. Vitali, gesammelt und zusammengestellt von Federigo Enriques. Deutsche Ausgabe von Dr. H. Fleischer in Königsberg i. Pr. In 2 Teilen.

I. Teil: Prinzipien der Geometrie. Deutsch von Professor Dr. H. Thieme in Bromberg. [Erscheint Ostern 1910.]
II. — Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit. Mit 135 Textfiguren. [XII u. 348 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. M. 9.—

Der vorliegende Band bildet den zweiten Teil der deutschen Ausgabe der im Jahre 1900 unter Mitwirkung zahlreicher Mitarbeiter erschienenen „Questioni riguardanti la geometria elementare“, die in größerem Umfange demselben Zwecke dienen sollen wie F. Kleins 1895 erschienene nunmehr vergriffene „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie“: eine Sammlung derjenigen Fragen zu sein, bei welchen die Ergebnisse der höheren mathematischen Theorien oder eine feinere logische Kritik es möglich gemacht haben, dem Inbegriff klassischer Lehren, als deren Zusammenfassung das Werk Euklids gewöhnlich betrachtet wird, etwas Grundlegendes hinzuzufügen. Es enthält die Artikel VII—XIV des Originals und außerdem einen neuen Artikel (den neunten), die sämtlich von den „Konstruktionsaufgaben“ handeln, während die ersten sechs Artikel — die den ersten Teil der deutschen Ausgabe bilden werden — die „Prinzipien der Geometrie“ behandeln. Der zweite Teil erscheint zuerst, weil er u. a. bestimmt ist, die obengenannte Schrift von F. Klein, die nicht neu aufgelegt werden soll, zu ersetzen.

Grundlehren der Mathematik. Für Studierende und Lehrer. In 2 Teilen. Mit vielen Textfiguren. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Teil: Die Grundlehren der Arithmetik und Algebra. Bearbeitet von E. Netto und C. Färber. 2 Bände. [In Vorbereitung.]
II. — Die Grundlehren der Geometrie. Bearbeitet von W. Frz. Meyer und H. Thieme. 2 Bände.
1. Band: Die Elemente der Geometrie. Von Professor Dr. Hermann Thieme, Direktor des Realgymnasiums zu Bromberg. Mit 323 Textfiguren. [XII u. 394 S.] 1909. n. M. 9.—
2. — Von W. Frz. Meyer in Königsberg. [In Vorbereitung.]

Die „Grundlehren der Mathematik“ sind als ein dem heutigen Stande der Wissenschaft entsprechendes Gegenstück zu R. Baltzers „Elementen der Mathematik“ gedacht. Sie bilden kein Handbuch, in dem aller irgendwie wissenswerte Stoff aufgespeichert wurde, sondern sie sind in erster Linie dem Unterricht, und zwar auch dem Selbstunterricht gewidmet. Tieferen Fragen suchen sie durch gelegentliche Ausblicke gerecht zu werden. Nicht minder soll auch den historischen Interessen Rechnung getragen werden durch die Angabe der wichtigsten Momente in der zeitlichen Entwicklung der einzelnen Theorien.

Speziell wird der zweite Teil in freier Darstellung den Grundlagen, Grundzügen und Grundmethoden der Geometrie gewidmet sein. Im ersten Bande (Verfasser H. Thieme) erhalten die „Elemente“, einschließlich der analytischen Geometrie der Ebene, gerade durch das sorgfältige Eingehen auf das Axiomatische ihre charakteristische Färbung, ohne daß die praktischen Forderungen des Lehrstoffes vernachlässigt würden. Der zweite Band (Verfasser W. Fr. Meyer) wird unter Heranziehung der Hilfsmittel der modernen Algebra (und auch Funktionentheorie) die Geometrie der „Transformationen“ behandeln, wobei mit Rücksicht auf den zur Verfügung stehenden Raum eine beschränkte Auswahl von selbst geboten ist.

Gutzmer, Dr. A., Professor an der Universität Halle a. S., Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. Gesamtbericht, enthaltend die Vorverhandlungen auf den Versammlungen in Cassel und

träge, gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik, Göttingen, Ostern 1904. Gesammelt von F. Klein und Ed. Riecke. Mit einem Abdruck verschiedener einschlägiger Aufsätze von E. Götting und F. Klein. Enthaltend Beiträge der Herren O. Behrendsen, E. Bose, E. Götting, F. Klein, Ed. Riecke, Fr. Schilling, J. Stark, K. Schwarzschild.

I. Teil (1. u. 2. Heft). Mit 6 Fig. [VII u. 190 S.] gr. 8. 1904. Geh. n. M. 3.60.

Inhalt: F. Klein, Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen; Bemerkungen im Anschluß an die Schulkonferenz von 1900. — E. Götting, Über das Lehrziel im mathematischen Unterricht an den höheren Lehranstalten. — F. Klein, Hundert Jahre mathematischer Unterricht an den höheren preußischen Schulen. — F. Klein, Bemerkungen zu den sog. Hamburger Thesen der Biologen. — Ed. Riecke, Grundlagen der Elektrizitätslehre mit Beziehung auf die neueste Entwicklung. — O. Behrendsen, Über einige den Unterricht in der Physik und Chemie an höheren Schulen betreffende Fragen. — J. Stark, Über die Physik an der Schule. — E. Bose, Über Kurse in physikalischer Handfertigkeit. — K. Schwarzschild, Astronomische Beobachtungen mit elementaren Hilfsmitteln.

Sonderausgaben: **Klein**, Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts. [IV u. 82 S.] Geh. n. M. 1.60.
Riecke, Beiträge zur Frage des Unterrichts in Physik und Astronomie. [III u. 83—190 S.] Geh. n. M. 2.—

II. Teil (3. Heft). Mit 151 Figuren und 5 Doppeltafeln. [VI u. 198 S.] gr. 8. 1904. Geh. n. M. 5.—

Inhalt: Friedrich Schilling, Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie. Mit einem Anhang: Welche Vorteile gewährt die Benutzung des Projektionsapparates im mathematischen Unterricht.

Teil I und II in einem Band gebunden n. M. 8.60.

——— und Geheimrat Dr. **Ed. Riecke**, Professor an der Universität Göttingen, über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen. Nebst Erläuterung der bezüglichen Göttinger Universitätseinrichtungen. Vorträge, gehalten in Göttingen Ostern 1900 bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik. Gesammelt von F. Klein und Ed. Riecke. Mit einem Wiederabdruck verschiedener einschlägiger Aufsätze von F. Klein. Mit 84 Figuren. [VI u. 252 S.] gr. 8. 1900. In Leinw. geb. n. M. 6.—

Inhalt: Ed. Riecke, Zur Geschichte des physikalischen Instituts und des physikalischen Unterrichts an der Universität Göttingen. F. Klein, Allgemeines über angewandte Mathematik. Über technische Mechanik. F. Schilling, Über darstellende Geometrie. E. Wiechert, Einführung in die Geodäsie. G. Bohlmann, Über Versicherungsmathematik. Eug. Meyer, Die Wärmeausnutzung der Dampfmaschinen. Th. Descoudres, Über Elektrotechnik.

Ferner an früheren Aufsätzen von F. Klein: Plan eines physikalisch-technischen Universitäts-Instituts, 1895; Anforderungen der Ingenieure und Ausbildung der Lehramtskandidaten, 1896; Universität und technische Hochschule, 1898; Neueinrichtungen in Göttingen, 1899.

Lazzeri, G., und **A. Bassani**, Elemente der Geometrie (und zwar Geometrie der Ebene und des Raumes verwebt). Mit Genehmigung der Verfasser aus dem Italienischen übersetzt von P. Treutlein. [ca. 400 S.] gr. 8. Geb. [Erscheint Ostern 1910.]

Lipps, Dr. **G. F.**, Professor an der Universität Leipzig, das moderne Bildungsideal und der wissenschaftliche Schulunterricht. gr. 8. Geb. [Erscheint Ostern 1910.]

Müller, Dr. **F.**, Professor in Dresden, Führer durch die mathematische Literatur. Mit besonderer Berücksichtigung der historisch wichtigen Schriften. [X u. 252 S.] gr. 8. 1909. Geh. n. M. 7.— in Leinwand geb. n. M. 8.—

Das Buch gibt eine systematische Übersicht über diejenigen Einzelwerke und Journalabhandlungen aus der reinen Mathematik, deren Kenntnis dem Studierenden unentbehrlich ist. Besondere Berücksichtigung haben die historisch wichtigen Schriften gefunden sowie auch die Zeitschriften-Literatur und die Enzyklopädien. Der Studierende, welcher Vorlesungen über eine spezielle Disziplin besucht, wird in den Stand gesetzt, die Quellen dieser Disziplinen, die Original-arbeiten, die Lehrbücher, die Aufgabensammlungen, die Tafeln usw., auf welche in der Vorlesung oft nur in Kürze hingewiesen werden kann, mit Leichtigkeit aufzufinden. Auch weist der Führer auf Studienwerke für diejenigen Disziplinen hin, über welche nicht gelesen wurde.

E. Pascals Repertorium der höheren Mathematik. Deutsche Ausgabe von A. Schepp. In 2 Teilen: Analysis und Geometrie. 2. neubearbeitete Auflage. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Teil: Die Analysis. Unter Mitwirkung von E. Pascal sowie Ph. Furtwängler, A. Guldberg, H. Hahn, E. Jahnke, H. Jung, A. Loewy, H. E. Timerding, hrsg. von Dr. P. Epstein, Professor an der Universität Straßburg i. E. [ca. 800 S.] ca. n. M. 12.— [Erscheint Herbst 1909.]

II. — Die Geometrie. Unter Mitwirkung von E. Pascal sowie L. Berzolari, R. Bonola, E. Ciani, M. Dehn, Fr. Dingeldey, F. Enriques, G. Giraud, H. Grassmann, G. Guareschi, L. Heffter, W. Jacobsthal, H. Liebmann, J. Mollerup, J. Neuberg, U. Perazzo, O. Staude, E. Steinitz, H. Wieleitner und K. Zindler, hrsg. von Dr. H. E. Timerding, Prof. an der Techn. Hochschule Braunschweig. [ca. 900 S.] ca. n. M. 14.—. [Erscheint Ostern 1910.]

Bei der Bearbeitung der zweiten Auflage werden die Herausgeber in erster Linie bestrebt sein, dem Buche seine Vorzüge zu erhalten. Daneben aber erfährt es formell und inhaltlich so durchgreifende Änderungen, daß es in vieler Beziehung als ein neues Werk gelten kann.

Zunächst muß im ersten Teile den in den letzten Jahren erzielten Fortschritten Rechnung getragen werden, neue Methoden (z. B. in der Variationsrechnung) und neu eröffnete Gebiete, wie die Integralgleichungen, die moderne Funktionentheorie, die algebraischen Zahlen fordern eine nicht unbeträchtliche Erweiterung des Stoffes, ganz besonders aber haben es die Bearbeiter nach Möglichkeit vermieden, eine große Menge von Einzelheiten lose aneinander zu reihen, sondern haben vielmehr auf eine zusammenhängende und in sich geschlossene Darstellung Wert gelegt.

Dieselben Grundsätze werden dann auch im zweiten Teile befolgt werden. Es soll nicht bloß eine Übersicht über das weite Gebiet der Geometrie im einzelnen, sondern auch eine Darlegung ihrer allgemeinen Prinzipien und Methoden gegeben und von dem gegenwärtigen Stand der Auffassungen Rechenschaft erteilt werden.

Schmid, Dr. B., Oberlehrer am Realgymnasium zu Zwickau, der naturwissenschaftliche Unterricht und die wissenschaftliche Ausbildung der Lehramtskandidaten der Naturwissenschaften. Ein Buch für Lehrer der Naturwissenschaften aller Schulgattungen. [IV u. 352 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. M. 6.—

Das Buch geht nach einer Schilderung der gegenwärtigen Reformbestrebungen auf dem Gebiete des naturwissenschaftlichen Unterrichts auf den Bildungswert der Naturwissenschaften näher ein und betrachtet denselben nach seiner sachlichen und formalen Seite. Es folgen eingehendere Abhandlungen über den Biologieunterricht im allgemeinen, den Unterricht in Anthropologie, Zoologie, Botanik, Mineralogie, Geologie (Geographie), Chemie und Physik (Astronomie), in denen die methodischen Bestrebungen des naturwissenschaftlichen Unterrichts der Gegenwart behandelt werden, und neben den höheren Schulen auch die Volksschulen zu Worte kommen. Besondere Abschnitte sind auch dem Zeichnen, dem Schulgarten, der Exkursion, den Schülerübungen, den Sammlungen und der philosophischen Propädeutik gewidmet. Endlich wird auf die Ausbildung der Lehrer für Naturwissenschaften näher eingegangen und zum Schluß eine Übersicht über die Lehrpläne verschiedener Schulgattungen gegeben.

Schriften, veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission: I. Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission. In zwanglosen Heften. gr. 8. Steif geh.

I. H. Fehr, Vorbericht über Organisation und Arbeitsplan der Kommission. [S. 1—10.] 1909. n. M. —.30.

II. G. Noodt, über die Stellung der Mathematik im Lehrplan der höheren Mädchenschule vor und nach der Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Preußen. [S. 11 bis 32.] 1909. n. M. —.80.

III. F. Klein u. H. Fehr, erstes Rundschreiben des Hauptausschusses. [S. 33—38.] 1909. n. M. —.20.

——— II. Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission. Herausgegeben von F. Klein. In etwa 16 Heften. Lex.-8. Steif geh.

Band I Heft 1: W. Lietzmann, Stoff und Methode im mathematischen Unterricht der norddeutschen höheren Schulen. Auf Grund der vorhandenen Lehrbücher. Mit einem Einführungswort von F. Klein. [XII u. 102 S.] 1909. n. M. 2.—

Schriften des Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht.

1. Bericht über die Tätigkeit des Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht im Jahre 1908. Erstattet von dem Vorsitzenden A. Gutzmer in Halle a. S. [10 S.] gr. 8. Geh. n. M. —.30.
2. Mathematik und Naturwissenschaft an den neugeordneten höheren Mädchenschulen Preußens. Wie erhalten wir die erforderlichen Lehrkräfte? Denkschrift, verfaßt vom Deutschen Ausschuß für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. [4 S.] gr. 8. Geh. n. M. —.20.
3. Zusatz zu der obigen Denkschrift. [2 S.] gr. 8. Geh. n. M. —.10.

——— mathematische und physikalische für Ingenieure und Studierende. Herausgegeben von Dr. E. Jahnke, Professor an der Kgl. Bergakademie zu Berlin. In Bänden zu 5—6 Bogen. 8. Steif geh. u. in Leinwand geb.

I. Einführung in die Theorie des Magnetismus. Von Dr. R. Gans, Professor an der Universität Tübingen. Mit 40 Textfiguren. [VI u. 110 S.] 1908. Steif geh. n. M. 2.40, in Leinwand geb. n. M. 2.80.

II. Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln. Von K. W. Wagner, Ingenieur in Charlottenburg. Mit 23 Textfiguren. [IV u. 109 S.] 1908. Steif geh. n. M. 2.40, in Leinwand geb. n. M. 2.80.

III. Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. Von Dr. Cl. Schaefer, Privatdozent an der Universität Breslau. Mit Bildnis J. C. Maxwells und 32 Textfiguren. [VIII u. 174 S.] 1908. Steif geh. n. M. 3.40, in Leinwand geb. n. M. 3.80.

IV. Die Theorie der Besselschen Funktionen. Von Dr. P. Schafheitlin, Professor am Sophien-Realgymnasium zu Berlin. Mit 1 Figurentafel. [V u. 129 S.] 1908. Steif geh. n. M. 2.80, in Leinwand geb. n. M. 3.20.

V. Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Von Dr. E. Jahnke, Professor an der Kgl. Bergakademie zu Berlin, und F. Emde. Ingenieur in Berlin. Mit 53 Figuren. [XII u. 176 S.] 1909. In Leinwand geb. n. M. 6.—

VI. Die Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik. Von Dr. W. v. Ignatowski in Berlin. 2 Teile. I. Teil. Die Vektoranalysis. Mit 27 Figuren im Text. [VIII u. 112 S.] 8. 1909. Steif geh. n. M. 2.60, in Leinwand geb. n. M. 3.— [II. Teil unter der Presse.]

VII. Theorie der Kräfte. Von Dr. H. E. Timerding, Professor an der Techn. Hochschule zu Braunschweig. [Erscheint im Dezember 1909.]

Weitere Bände werden demnächst folgen.

Schwering, Prof. Dr. **K.**, Direktor des Gymnasiums an der Apostelkirche zu Cöln a. Rh., Handbuch der Elementarmathematik für Lehrer. Mit 139 Figuren. [VIII u. 408 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. M. 8.—

„Um unser Urteil über das vorliegende Werk gleich vorauszunehmen, so halten wir es in der Tat für ein ausgezeichnetes Hilfsbuch für den Lehrer der Mathematik, der in ihm nicht nur eine wissenschaftlich einwandfreie Darstellung der Prinzipien und Theorien findet, sondern sicher auch viele Anregung, gewissen Fragen zu eigener Untersuchung näher zu treten, sowie endlich seinen Unterricht zu beleben und zu vertiefen.“ **(Zeitschrift f. d. math. u. naturw. Unterricht.)**

Simon, Dr. **M.**, Professor am Lyzeum und Honorarprofessor an der Universität Straßburg i. E., Euklid und die sechs planimetrischen Bücher. Mit Benutzung der Textausgabe von J. L. Heiberg. Mit 192 Figuren. [VII u. 141 S.] gr. 8. 1901. Geh. n. M. 5.—

——— Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis. Mit 9 Textfiguren. [VI u. 108 S.] gr. 8. 1906. Geb. n. M. 3.20.

——— über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert. Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Ergänzungsband I. Mit 28 Figuren. [VIII u. 278 S.] gr. 8. 1906. Geh. n. M. 8.—, in Leinw. geb. n. M. 9.—

Tannery, J., Professor an der Universität Paris, Subdirektor der École normale supérieure zu Paris, Elemente der Mathematik. Mit einem geschichtlichen Anhang von P. Tannery. Autorisierte deutsche Ausgabe von Dr. P. Klaess, Gymnasiallehrer in Echternach (Luxemburg). Mit einem Einführungswort von Felix Klein und 184 Textfiguren. [XII u. 364 S.] gr. 8. 1909. Geh. n. M. 7.—, in Leinwand geb. n. M. 8.—

Das vorliegende Buch entspricht den neuen französischen Lehrplänen von 1902 und behandelt das mathematische Pensum der Philosophieklasse. Aus dem reichen Inhalte des Werkes seien einige der bemerkenswertesten Kapitel hervorgehoben: algebraische Geometrie, Koordinaten, empirische Kurven, graphische Darstellung der Funktionen (graphische Fahrpläne), graphische Methoden zur Auflösung der Gleichungen, Elemente der Differential- und Integralrechnung, Grenzwerte, Reihen. — In ebenso klassischer Form behandelt am Schlusse der Bruder des Verfassers, P. Tannery, einige wichtige Kapitel der Geschichte der Mathematik; sie beziehen sich meistens auf die im Buche selbst behandelten Fragen.

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker, unter Mitwirkung von Fr. Auerbach, O. Knopf, H. Liebmann, E. Wölffing u. a. herausg. von Felix Auerbach. I. Jahrg. 1909/10. Mit einem Bildnis Lord Kelvins. [XLIV u. 450 S.] 8. In Leinwand geb. n. M. 6.—

Während es Taschenbücher und Kalender für Chemiker, Geographen, Techniker, Elektrotechniker, Astronomen usw. gibt, entbehren die Mathematiker und Physiker bis heute dieses bequemen und, wenn einmal vorhanden, unentbehrlichen Hilfsmittels. Es wird hiermit dem Kreise der Interessenten zum ersten Male vorgelegt, und zwar mit Rücksicht auf die nahen Beziehungen zwischen Mathematik und Physik in einer beide Wissenschaften umfassenden Form. Es enthält Angaben über Personalien, Literatur, Praktisches usw., hauptsächlich aber ein Gerippe des Tatsachenmaterials der genannten Disziplinen, zu denen noch Astronomie, Geodäsie und physikalische Chemie als Annexe hinzugefügt wurden, um allseitigen Bedürfnissen entgegenzukommen. Bei dem gewaltigen Umfange der in Rede stehenden Wissenschaften mußte man sich für diesen ersten Jahrgang auf eine Auswahl des zunächst Wichtigsten und Dringendsten beschränken; es ist aber in Aussicht genommen, in den folgenden Jahrgängen immer wieder neues hinzuzufügen, so daß die Abnehmer nach und nach ein, dem Charakter eines Taschenbuches entsprechend, lückenloses Material in die Hand bekommen.

Von den Mitarbeitern wird E. Wölffing die reine Mathematik, H. Liebmann die Mechanik, O. Knopf die Astronomie und Geodäsie, Fr. Auerbach die physikalische Chemie und der Herausgeber den Rest bearbeiten.

Voß, Dr. A., Professor an der Universität München, über das Wesen der Mathematik. Rede, gehalten am 11. März 1908 in der öffentlichen Sitzung der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. Erweitert und mit Anmerkungen versehen. [98 S.] gr. 8. 1908. Steif geh. n. M. 3.60.

Weber, Dr. H., und Dr. **J. Wellstein**, Professoren an der Universität Straßburg i. E., Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. gr. 8.

I. Band: Elementare Algebra und Analysis. Bearbeitet von Heinrich Weber. 2. Aufl. Mit 38 Textfiguren. [XVIII u. 539 S.] 1906. In Leinwand geb. n. M. 9.60.

II. — Elemente der Geometrie. Bearbeitet von Heinrich Weber, Joseph Wellstein und Walther Jacobsthal. 2. Aufl. Mit 251 Textfiguren. [XII u. 596 S.] 1907. In Leinwand geb. n. M. 12.—

III. — Angewandte Elementar-Mathematik. Bearbeitet von Heinrich Weber, Joseph Wellstein und Rud. H. Weber (Rostock). Mit 358 Textfiguren. [XIII u. 666 S.] 1907. In Leinwand geb. n. M. 14.—

Das bewährte Werk wendet sich in erster Linie an die gegenwärtigen und künftigen Lehrer an höheren Schulen, an die Studierenden der Mathematik unserer Hochschulen. Es beansprucht nicht, wie die große Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, das Material allseitig zu erschöpfen, nach der historischen und literarischen Seite hin vollständigen Aufschluß zu geben. Es will eine Verbindung herstellen zwischen der höheren Mathematik und der Mathematik der Schule, indem es einerseits dem Studierenden ein Führer ist, wo er der Auffrischung und Ergänzung früher erworbener Kenntnisse bedarf, andererseits dem Lehrer ein Wegweiser, um das im Studium der höheren Mathematik Erworbene der Vertiefung und Bereicherung des Unterrichts nutzbar zu machen. Besonderes Gewicht ist auf die wissenschaftliche Ausgestaltung der allgemeinen Grundlagen gelegt.