DIE

POTENTIALFUNCTION

UND DAS

POTENTIAL.

EIN

BEITRAG ZUR MATHEMATISCHEN PHYSIK

VON

R. CLAUSIUS.

VIERTE VERMEHRTE AUFLAGE.

LEIPZIG,
JOHANN AMBROSIUS BARTH.
1885.

DIE

POTENTIALFUNCTION

UND DAS

POTENTIAL.

320.

DIE

POTENTIALFUNCTION

UND DAS

POTENTIAL.

EIN

BEITRAG ZUR MATHEMATISCHEN PHYSIK

VON

R. CLAUSIUS.

VIERTE AUFLAGE.

S. Ziobrowski

LEIPZIG

JOHANN AMBROSIUS BARTH.

1885.

Leipzig. Druck von Grimme & Trömel.

Vorwort.

Die vorliegende Schrift beschäftigt sich mit der schon von Laplace und Poisson angewandten und später von Green[1]) und Gauss[2]) speciell behandelten Function, welcher Green den Namen Potentialfunction gegeben hat, und sie hat den Zweck, den Leser auf möglichst einfache Art mit dieser Function vertraut zu machen.

Sie giebt daher eine von den Grundgleichungen der Mechanik ausgehende, zusammenhängende Auseinandersetzung von der Bedeutung dieser Function, von den Bedingungen, unter denen sie anwendbar ist, und von den wichtigsten über ihr Verhalten geltenden Sätzen. Daran schliesst sich zugleich die Behandlung einer anderen Grösse an, welche von Green gar nicht und von Gauss nur gelegentlich und unvollständig besprochen ist, nämlich des aus der Potentialfunction durch Integration hervorgehenden Potentials, welches als Ausdruck der von Naturkräften gethanen mechanischen Arbeit in der mathematischen Physik eine grosse Rolle spielt.

---

[1]) An Essay on the Application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism; by George Green. Nottingham 1828. — Wieder abgedruckt in Crelle's Journ. Bd. 44 u. 47.

[2]) Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte. Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839.

Die gegenwärtige vierte Auflage entspricht der dritten und unterscheidet sich von den beiden ersten vorzugsweise durch eine beträchtliche Vermehrung des Inhaltes. In dem ursprünglichen und bei den ersten Auflagen eingehaltenen Plane des Buches lag es nur, diejenigen Gleichungen und Sätze, welche für das eigentliche Wesen der Potentialfunction und des Potentials characteristisch sind, zu entwickeln und unter Berücksichtigung aller in Betracht kommenden Fälle zu beweisen, und demgemäss wurde von der Aufnahme weiterer, die Potentialfunction betreffender Gleichungen und Sätze, wie sie in den Schriften von Green, Gauss und Dirichlet vorkommen, abgesehen. Bei der Bearbeitung der neuen Auflagen hat es mir aber doch zweckmässig geschienen, auch von diesen Gleichungen und Sätzen die wichtigsten, welche nicht blos Anwendungen auf specielle Körperclassen enthalten, sondern von allgemeiner Bedeutung für die Potentialtheorie sind, mit aufzunehmen und dadurch der Auseinandersetzung eine grössere Vollständigkeit zu geben, und ich zweifele nicht daran, dass dieses von den Lesern als eine Verbesserung anerkannt werden wird.

Bonn, März 1885.

R. Clausius.

Inhalt.

I. Die Potentialfunction.

II. Das Potential.

I. Die Potentialfunction.

§ 1.

Ausgangspunct der Betrachtungen.

Um die Bedeutung der Potentialfunction und den Grund ihrer Einführung in die Mechanik und mathematische Physik klar zu erkennen, wird es zweckmässig sein, ein Wenig zurückzugreifen und zuerst eine allgemeinere Grösse zu betrachten. Bei der Behandlung der Kräfte, welche ein beweglicher Punct erleiden kann, und der von ihnen ausgeübten Wirkungen stellt es sich nämlich heraus, dass bei einer grossen und wichtigen Classe von Kräften die sämmtlichen zu ihrer Bestimmung nothwendigen Grössen sich in einfacher Weise aus einer und derselben Function ableiten lassen. Wenn wir diese Function zunächst in möglichster Allgemeinheit betrachten und sie dann durch besondere Annahmen über die Kräfte specialisiren, so werden wir auf naturgemässem Wege von selbst zu dem Begriffe der Potentialfunction gelangen.

§ 2.

Bedingungen, welche als erfüllt vorauszusetzen sind.

Es sei ein beweglicher Punct p im Raume mit den Coordinaten x, y und z gegeben, auf welchen beliebige Kräfte wirken, die wir uns in eine Gesammtkraft P zusammengesetzt denken wollen. Diese Kraft wird, abgesehen davon, dass sie an einer bestimmten Stelle des Raumes mit der Zeit veränderlich sein kann, auch für eine bestimmte Zeit im Allgemeinen an verschiedenen Stellen des Raumes verschieden sein. Um sie zu einer bestimmten Zeit für alle Stellen des Raumes vollständig zu bestimmen, müssen drei Functionen der Raumcoordinaten gegeben sein, eine für die Grösse der Kraft und zwei für ihre Richtung. Denken wir uns die Gesammtkraft P in drei nach den Coordinatenrichtungen wirkende Componenten X, Y und Z zerlegt, so können wir auch sagen: zur vollständigen Bestimmung der Kraft müssen die drei Componenten als Functionen der Raumcoordinaten bekannt sein.

Diese drei Functionen können, wenn man nur von Kräften im Allgemeinen spricht, als ganz von einander unabhängig angesehen werden, indem sich aus jeden drei Componenten eine Kraft zusammensetzen lässt. Betrachtet man aber die in der Wirklichkeit vorkommenden Kräfte, so findet man, dass deren Componenten sehr häufig in einer eigenthümlichen Beziehung zu einander stehen, indem sie nämlich durch die drei partiellen Differentialcoefficienten einer und derselben Function der drei Raumcoordinaten dargestellt werden. Für die Bezeichnung stellt es sich in solchen Fällen, wie weiter unten ersichtlich werden wird, als zweckmässig heraus, nicht die Function selbst, sondern ihren negativen Werth durch einen Buchstaben darzustellen, als welchen wir U wählen wollen. Dann ist zu setzen:

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{1}$$

Damit dieses möglich sei, müssen bekanntlich die Functionen X, Y und Z folgende Bedingungsgleichungen erfüllen:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}; \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}; \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}. \tag{2}$$

Demnach bilden die Functionen dieser Art unter allen mathematisch möglichen Functionen nur einen sehr speciellen Fall. Dessenungeachtet ist dieser Fall bei der Betrachtung der Naturerscheinungen von der grössten Wichtigkeit, weil er, wie wir weiter unten sehen werden, eine Art von Kräften umfasst, welche schon bisher eine sehr bedeutende Rolle in der Physik spielten, und wahrscheinlich noch eine viel allgemeinere Bedeutung haben, als früher angenommen wurde.

§ 3.

Einfache Bestimmung der auf die Kraft bezüglichen Grössen durch die Function U.

Wenn diese Beziehung zwischen den Componenten der Kraft stattfindet, so wird dadurch die Betrachtung der Kraft und ihrer

Wirkungen ausserordentlich erleichtert. Während man sonst drei einzeln gegebene Functionen in Rechnung zu bringen hat, hat man es jetzt nur mit einer Function zu thun, aus welcher alle auf die Kraft bezüglichen Grössen auf einfache Weise abgeleitet werden können.

Wie man leicht sieht, wird unter Voraussetzung der Gleichungen (1) die ganze auf den Punct p wirkende Kraft P dargestellt durch:

$$(3) \qquad P = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2},$$

und die Winkel, welche diese Kraft mit den Coordinatenrichtungen bildet, und deren Cosinus a, b und c heissen mögen, werden bestimmt durch die Gleichungen:

$$(4) \qquad a = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{P}; \quad b = -\frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{P}; \quad c = -\frac{\frac{\partial U}{\partial z}}{P}.$$

Will man ferner von der Kraft P die in irgend eine vorgeschriebene Richtung s fallende Componente S haben, so lässt sich diese ebenfalls sehr einfach ausdrücken. Sei nämlich φ der Winkel, welchen die Richtung s mit der Richtung der Kraft bildet, so ist:

$$S = P \cos \varphi,$$

wofür man, wenn α, β und γ die Cosinus der Winkel sind, welche die Richtung s mit den Coordinatenrichtungen bildet, schreiben kann:

$$S = P(a\alpha + b\beta + c\gamma).$$

Die drei Cosinus a, b und c sind schon durch die Gleichungen (4) bestimmt, und die drei anderen Cosinus lassen sich ebenfalls leicht ausdrücken. Bilden wir nämlich für den in der Richtung s beweglich gedachten Punct p die Differentialcoefficienten $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s}$, in denen die Zähler die Veränderungen bezeichnen, welche die Coordinaten des Punctes erleiden, wenn er in der Richtung s um ein Wegelement verschoben wird, so können wir setzen:

$$(5) \qquad \alpha = \frac{\partial x}{\partial s}; \quad \beta = \frac{\partial y}{\partial s}; \quad \gamma = \frac{\partial z}{\partial s}.$$

Durch Einsetzung der in (4) und (5) gegebenen Werthe der sechs Cosinus geht die Gleichung für S über in:

$$S = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right),$$

und in dieser Gleichung lässt sich die ganze rechte Seite durch den einfachen Differentialcoefficienten $\frac{\partial U}{\partial s}$ ersetzen. Man erhält also:

(6) $$S = -\frac{\partial U}{\partial s}.$$

d. h. es gilt für die beliebige Richtung s eine ebensolche Gleichung, wie diejenigen, welche unter (1) für die drei Coordinatenrichtungen angenommen wurden.

§ 4.

Geometrische Darstellung mit Hülfe der Niveauflächen. Benennung der Function U.

Die Function U kann ferner dazu dienen, die Richtung und Grösse der Kraft an verschiedenen Stellen des Raumes geometrisch anschaulich darzustellen.

Schreiben wir:

(7) $$U = A,$$

worin A irgend eine Constante bedeutet, so ist dieses die Gleichung einer Fläche. Durch Differentiation dieser Gleichung kommt:

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = 0.$$

Hierin sind dx, dy und dz die Componenten einer kleinen Verschiebung ds, welche der Punct p, wenn er gezwungen ist, in jener Fläche zu bleiben, in derselben erleiden kann. Denken wir uns dx, dy, dz ersetzt durch $\frac{\partial x}{\partial s}ds$, $\frac{\partial y}{\partial s}ds$, $\frac{\partial x}{\partial s}ds$, und dividiren dann die Gleichung durch P und ds, so kommt:

(8) $$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{P}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{P}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\frac{\partial U}{\partial z}}{P}\cdot\frac{\partial z}{\partial s} = 0.$$

Wenn man die Vorzeichen dieser Gleichung umkehrt, so stellen die beiden Factoren jedes der drei Glieder, aus welchen hier die linke Seite besteht, nach den Gleichungen (4) und (5) die Cosinus der Winkel dar, welche die Kraft P und die Verschiebung ds mit einer der Coordinatenrichtungen bilden. Demnach bedeutet dann die ganze linke Seite den Cosinus des Winkels zwischen der Kraft und der Verschiebung, und da dieser Cosinus der Gleichung zufolge Null ist, so ist der Winkel ein rechter.

Dasselbe gilt für jede Verschiebung, welche der Punct p von seiner Anfangslage aus innerhalb der Fläche erleiden kann, und es folgt daraus, dass die an dieser Stelle wirkende Kraft auf der Fläche senkrecht ist; und ebenso verhält es sich natürlich auch an allen anderen Stellen der Fläche. Demnach hat die durch Gleichung (7) dargestellte Fläche die Eigenschaft, dass sie für alle in ihr gelegenen Punkte durch ihre Normalen die Richtungen der Kraft anzeigt. Sie spielt also in Bezug auf die betrachtete Kraft dieselbe Rolle, wie die Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit in Bezug auf die Schwerkraft, und man nennt sie daher eine Niveaufläche.

Fügt man zu der Constanten A noch eine unendlich kleine constante Grösse α hinzu, so stellt die dadurch entstehende neue Gleichung

$$U = A + \alpha$$

eine zweite Fläche dar, welche der ersten im Allgemeinen unendlich nahe liegt, und dieselben Eigenschaften hat, wie jene. Bezeichnen wir den senkrechten Abstand dieser beiden Flächen von einander an irgend einer Stelle mit ε, so ist der Bruch $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ offenbar nichts anderes als der Differentialcoefficient $\frac{\partial U}{\partial n}$, wenn n die an der betrachteten Stelle auf der ersten Fläche nach der zweiten hin errichtete Normale bedeutet. Der negative Werth dieses Differentialcoefficienten stellt die in die Richtung der Normale fallende Componente der Kraft dar, und da dem Vorigen nach die ganze Kraft auf der Fläche senkrecht ist, so stellt der Bruch $\frac{\alpha}{\varepsilon}$, abgesehen vom Vorzeichen, die an dieser Stelle wirkende ganze Kraft dar, und wir können daher, wenn wir den absoluten Werth einer Formel durch Vorsetzung von v. n. (valor numericus) andeuten, setzen:

$$P = \text{v. n.} \frac{\alpha}{\varepsilon}. \tag{9}$$

Ob die Kraft nach der Seite der positiven oder negativen Normale geht, hängt davon ab, ob die Grösse α negativ oder positiv ist, indem die Regel gilt, dass die Kraft nach der Seite geht, nach welcher U abnimmt. Was die Grösse der Kraft anbetrifft, so ist zu bemerken, dass in dem Bruche $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ nur ε von der Lage des betrachteten Punctes in der Fläche abhängt, während α constant ist, und es folgt daher, dass die Kraft an den verschiedenen Stellen der ersten Fläche dem Abstande der zweiten Fläche umgekehrt proportional ist.

Zugleich sieht man, dass, wenn die Kraft in der Fläche überall endlich ist, die beiden Flächen sich nicht schneiden können, weil für die Durchschnittslinie $\varepsilon = 0$ und somit P unendlich werden müsste.

Denkt man sich nun ein ganzes System solcher Flächen construirt, von denen jede sich von der vorhergehenden nur dadurch unterscheidet, dass die Constante um einen, in allen Fällen gleichen, unendlich kleinen Werth vergrössert ist, so lassen diese Flächen an jeder Stelle des Raumes durch ihre Richtung und ihren gegenseitigen Abstand die Richtung und Grösse der Kraft erkennen.

Für die Function U, welche dem Vorigen nach alle Elemente zur Bestimmung der Kraft auf eine so einfache Weise liefert, hat Hamilton den Namen „force function" eingeführt, welcher im Deutschen als Kraftfunction oder Kräftefunction gebräuchlich geworden ist.

§ 5.

Hauptfall, in welchem eine Kraftfunction existirt.

Unter den Fällen, in welchen eine Kraftfunction existirt, ist der wichtigste der, wo die Kraft, welche auf den gegebenen Punct wirkt, sich zerlegen lässt in Centralkräfte, d. h. in anziehende oder abstossende Kräfte, welche von bestimmten Puncten des Raumes ausgehen, und um diese herum nach allen Seiten gleich stark wirken, so dass ihre Stärke nur von der Entfernung abhängt.

Sei p' mit den Coordinaten x', y' und z' ein solcher Punct, und bezeichnen wir den Abstand zwischen p und p' mit r, indem wir setzen:

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}, \tag{10}$$

so muss die Stärke der Kraft sich durch eine Function von r darstellen lassen, und sie sei mit $f(r)$ bezeichnet, wobei vorausgesetzt sein soll, dass ein positiver Werth dieser Function eine auf Vergrösserung von r hinwirkende, also abstossende und ein negativer Werth eine anziehende Kraft bedeute. Die Richtung der Kraft ist bestimmt durch die Lage der beiden Puncte zu einander, und zwar haben die Cosinus der Winkel, welche die positive Kraftrichtung mit den drei Coordinatenrichtungen bildet, folgende Werthe:

$$\frac{x-x'}{r}, \quad \frac{y-y'}{r}, \quad \frac{z-z'}{r}.$$

Hieraus ergeben sich sofort die in die drei Coordinatenrichtungen fallenden Componenten der Kraft. Beschränken wir uns zunächst auf die in die x-Richtung fallende Componente, so ist diese:

$$X = f(r)\frac{x-x'}{r}.$$

Nun ist aber nach (10):

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-x'}{r},$$

und dadurch geht die vorige Gleichung über in:

$$X = f(r)\frac{\partial r}{\partial x}.$$

Wir wollen nun eine neue Function von r einführen, welche das negative Integral der vorigen ist, indem wir setzen:

$$F(r) = -\int f(r)\,dr, \tag{11}$$

woraus folgt:

$$\frac{dF(r)}{dr} = -f(r).$$

Dadurch, dass die Grösse r von den Coordinaten x, y, z des Punctes p abhängt, ist auch $F(r)$ mittelbar eine Function dieser drei Grössen, und wir können schreiben:

$$\frac{\partial F(r)}{\partial x} = \frac{dF(r)}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = -f(r)\frac{\partial r}{\partial x}.$$

Der letzte Ausdruck unterscheidet sich von dem, welchen wir vorher für die Componente X gefunden haben, nur durch das entgegengesetzte Vorzeichen. Dasselbe, was für diese Componente gilt, gilt natürlich auch für die beiden anderen, und wir erhalten somit die Gleichungen:

$$(12) \quad X = -\frac{\partial F(r)}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\partial F(r)}{\partial y}; \quad Z = -\frac{\partial F(r)}{\partial z}.$$

Man sieht hieraus, dass $F(r)$, als Function von x, y, z betrachtet, die Kraftfunction für den vorliegenden Fall ist.

Dieses Resultat lässt sich sogleich erweitern auf den Fall, wo gleichzeitig mehrere Puncte auf den gegebenen Punct p wirken. Sei p'_1 ein zweiter Punct, sein Abstand vom Puncte p heisse r_1 und die von ihm ausgehende Kraft werde ihrer Stärke nach durch die Function $f_1(r_1)$ ausgedrückt; so bilden wir zunächst die Function:

$$F_1(r_1) = -\int f_1(r_1)\, dr_1$$

und können dann die nach der x-Axe gehende Componente dieser Kraft durch $-\frac{\partial F_1(r_1)}{\partial x}$ darstellen. Dasselbe gilt für einen dritten, vierten etc. Punct, und man erhält daher, wenn eine beliebige Anzahl von Puncten wirkt, für die nach der x-Axe gehende Componente der Gesammtkraft einen Ausdruck von folgender Form:

$$X = -\frac{\partial F(r)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(r_1)}{\partial x} - \frac{\partial F_2(r_2)}{\partial x} - \text{etc.}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left[F(r) + F_1(r_1) + F_2(r_2) + \text{etc.}\right]$$

oder wenn man die Summe von Functionen unter ein Summenzeichen zusammenfasst:

$$X = -\frac{\partial}{\partial x} \Sigma F(r).$$

Ganz entsprechende Ausdrücke gelten natürlich für die beiden anderen Componenten, wobei die Summe von Functionen für alle drei Fälle dieselbe bleibt. Von den in dieser Summe vorkommenden

Grössen r, r_1, r_2 etc. enthält jede die Coordinaten eines der wirksamen Puncte, und ausserdem enthalten alle die Coordinaten x, y und z des Punctes p, welcher die Wirkung erleidet. Wir können also, ebenso wie jede einzelne der Functionen, so auch ihre Summe als eine Function von x, y und z betrachten, und wollen zur Abkürzung setzen:

$$U = \Sigma F(r). \tag{13}$$

Dann ist:

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z}, \tag{14}$$

und U ist somit die Kraftfunction.

§ 6.

Beschränkung auf solche Kräfte, welche dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional sind, und Beziehung der Kräfte auf Agentien.

Wir wollen nun unsere Annahmen über die Kraft noch weiter specialisiren.

Die Abstossungs- und Anziehungskräfte, von welchen vorher nur vorausgesetzt wurde, dass sie sich durch irgend welche Functionen der Entfernungen darstellen lassen, sollen den Quadraten der Entfernungen umgekehrt proportional sein.

Ferner wollen wir nicht blos von Puncten sprechen, welche anziehend oder abstossend auf einander wirken, sondern annehmen, dass sich in diesen Puncten irgend etwas befinde, was die Wirkung ausübe und erleide. Es kann dieses z. B. ponderable Masse sein, welche nach dem gewöhnlichen Gravitationsgesetze anziehend wirkt, oder Electricität, oder Magnetismus. Da wir über die Natur der letzteren nichts Zuverlässiges wissen, und es ausserdem zweckmässig ist, der Darstellung eine solche Allgemeinheit zu geben, dass sie auch andere noch unbekannte Fälle umfassen kann, wollen wir die Benennung so wählen, dass nichts Hypothetisches darin liegt, sondern nur die Fähigkeit eine Wirkung auszuüben, darin angedeutet ist. Dazu scheint mir das auch sonst gebräuchliche Wort Agens sehr geeignet. Von einem Agens soll nur vorausgesetzt werden, dass es sich der Quantität nach bestimmen lasse, und dass die

Kraft, welche eine gewisse Menge eines Agens ausübt, unter sonst gleichen Umständen der Menge proportional sei.

Soweit es bis jetzt bekannt ist, üben nur Agentien von gleicher Art eine solche Abstossung oder Anziehung, wie sie den obigen Gesetzen entspricht, auf einander aus. So wirkt ponderable Masse auf ponderable Masse, Electricität auf Electricität, Magnetismus auf Magnetismus, und in solchen Fällen, wo scheinbar ungleichartige Agentien in derselben Weise auf einander wirken, oder wo über den eigentlichen Ursprung der Kräfte Zweifel herrschen, bleibt, nach allem, was bis jetzt bekannt ist, für die mathematische Behandlung der Sache wenigstens immer noch die Möglichkeit vorhanden, solche Annahmen über die wirksamen Agentien zu machen, dass man nur zwischen gleichartigen Agentien Kräfte der genannten Art als vorhanden zu betrachten braucht. Dessenungeachtet ist es nicht nothwendig, unsere Formeln von vorn herein auf gleichartige Agentien zu beschränken, denn diese Beschränkung kann sehr leicht nachträglich hinzugefügt werden.

Es seien also irgend zwei Mengen[1]) von auf einander wirkenden Agentien gegeben, von denen vorläufig angenommen werden soll, dass sie in bestimmten Puncten p und p' concentrirt seien. Die im Puncte p befindliche Menge, nach irgend einer Einheit gemessen, heisse q, und die im Puncte p' befindliche Menge, welche, wenn sie demselben Agens angehört, natürlich auch nach derselben Einheit gemessen wird, im anderen Falle aber eine besondere Einheit hat, heisse q'. Die Kraft, welche diese beiden Mengen auf einander ausüben, lässt sich den gemachten Annahmen nach darstellen durch die Formel:

$$f(r) = e\,\frac{q \cdot q'}{r^2}, \tag{15}$$

worin e eine Grösse ist, die von der Natur der Agentien, und von den gewählten Einheiten abhängt. Dadurch, dass dieser Coefficient

1) Ich vermeide absichtlich das Wort Masse, weil man mit diesem Begriffe die Vorstellung des Beharrungsvermögens verbindet, und die Grösse des Beharrungsvermögens als Maass der Masse nimmt, während mit dem Begriffe eines wirksamen Agens das Beharrungsvermögen nicht nothwendig verbunden zu sein braucht, und in den Fällen, wo es vorhanden ist, die Einheit des Beharrungsvermögens eine andere sein kann, als diejenige, nach welcher man misst, wenn es sich um die Bestimmung der ausgeübten Kraft handelt.

positiv oder negativ sein kann, wird der Unterschied zwischen Abstossung und Anziehung ausgedrückt. Führt man diese Formel in die zur Bestimmung der Kraftfunction dienende Gleichung (11) ein, so kommt:

$$F(r) = -\int e\frac{q \cdot q'}{r^2}\,dr = e\frac{q \cdot q'}{r}. \tag{16}$$

Denken wir uns nun, dass auf die Menge q nicht blos Eine sondern mehrere Mengen q', q'_1, q'_2 etc. wirken, welche unter sich gleichartig oder ungleichartig sein können, so ist, wenn wir zunächst der Allgemeinheit wegen das Letztere voraussetzen, und daher die Coefficienten e als ungleich betrachten, die gesammte Kraftfunction:

$$\begin{aligned} U &= q\left(e\frac{q'}{r} + e_1\frac{q'_1}{r_1} + e_2\frac{q'_2}{r_2} + \text{etc.}\right) \\ &= q\sum e\frac{q'}{r}. \end{aligned} \tag{17}$$

Sind dagegen die wirksamen Mengen unter sich gleichartig, so hat e für alle denselben Werth und kann daher aus dem Summenzeichen herausgenommen werden, also:

$$U = qe\sum\frac{q'}{r}. \tag{18}$$

Wenn das wirksame Agens nicht, wie bisher angenommen wurde, in einzelnen Puncten concentrirt ist, sondern einen Raum stetig ausfüllt, so denken wir es uns in Elemente dq' zertheilt, und beziehen den Abstand r auf jedes Element, oder, strenger ausgedrückt, auf irgend einen Punct jedes Elementes, wodurch die Summe in ein Integral übergeht, nämlich:

$$U = qe\int\frac{dq'}{r}. \tag{19}$$

Dass diese Umwandlung des vorigen Ausdrucks zulässig ist, ohne dass er dadurch seine Bedeutung als Kraftfunction verliert, ist unmittelbar klar, solange sich der Punct p ausserhalb des von dem wirksamen Agens ausgefüllten Raumes befindet, so dass für kein Element dq' der Abstand r gleich Null oder auch nur mit den Dimensionen des Elementes vergleichbar wird. In diesem Falle kann man sich nämlich jedes Element des Agens, welches ein Raumelement ausfüllt, in irgend einem Puncte dieses Raumelementes concentrirt denken, ohne dass dadurch die Wirkung, welche das Element auf das im Puncte p concentrirt gedachte Agens ausübt, merklich verändert wird. Für den anderen Fall, wo p sich innerhalb jenes Raumes befindet, soll die Gültigkeit des Ausdruckes (19) als Kraftfunction weiterhin noch besonders bewiesen werden, und wir wollen ihn vorläufig auch für diesen Fall als richtig gelten lassen.

Der Ausdruck (19) ist allgemeiner als der Ausdruck (18), und umfasst den letzteren, indem die Integration sich auch dann ausführen lässt, wenn endliche Mengen in einzelnen Puncten concentrirt sind.

§ 7.

Annahmen, unter denen die Kraftfunction zur Potentialfunction wird.

Fügen wir nun endlich zu den bisher gemachten Annahmen noch folgende zwei hinzu: 1) dass auch das im Puncte p befindliche Agens, welches die Wirkung erleidet, von derselben Art sei, wie das, welches die Wirkung ausübt, und 2) dass die Menge desselben nicht beliebig, sondern eine Einheit sei, so ist die so vereinfachte Kraftfunction diejenige, welche wir Potentialfunction nennen. Bezeichnen wir diese zum Unterschiede mit V, und wählen wir für den im Vorigen mit e bezeichneten Coefficienten in diesem Falle den Buchstaben ε, so ist, jenachdem das wirksame Agens in einzelnen Puncten concentrirt oder stetig durch einen Raum verbreitet ist, zu setzen:

$$\text{(I.)} \qquad V = \varepsilon \sum \frac{q'}{r}$$

$$\text{(Ia.)} \qquad V = \varepsilon \int \frac{dq'}{r}.$$

Wir können demnach den Begriff der Potentialfunction folgendermaassen definiren: Die Kraftfunction eines Agens, welches nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernung anziehend oder abstossend wirkt, bezogen auf eine in einem Puncte concentrirt gedachte Einheit desselben Agens, heisst Potentialfunction.

Hieraus folgt, dass die negativen Differentialcoefficienten

$$-\frac{\partial V}{\partial x}, \quad -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad -\frac{\partial V}{\partial z}$$

die drei Componenten derjenigen Kraft darstellen, welche das Agens auf eine im Puncte x, y, z gedachte Einheit desselben Agens ausüben würde. Befindet sich in diesem Puncte wirklich die Menge q des Agens, so sind die Componenten der auf diese ausgeübten Kraft:

$$-q\frac{\partial V}{\partial x}, \quad -q\frac{\partial V}{\partial y}, \quad -q\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Man sieht, dass zwischen diesen drei Grössen und den vorigen der Unterschied stattfindet, welchen man bei ponderablen Massen mit den Worten beschleunigende und bewegende Kraft ausdrückt.

§ 8.

Messung der Agentien und Festsetzung des Coefficienten ε.

Um mit Hülfe der Gleichungen (I.) und (Ia.) die Potentialfunction für die verschiedenen Fälle, auf welche sie Anwendung findet, berechnen zu können, braucht nur noch angegeben zu werden, wie bei verschiedenen Agentien die Mengen gemessen werden müssen, und wie sich die Grösse ε dabei verhält.

Bei ponderablen Massen, welche sich nach dem Gravitationsgesetze anziehen, ist ε negativ, und der numerische Werth von ε muss so gewählt werden, dass er die Anziehungskraft darstellt, welche zwei Masseneinheiten in der Einheit der Entfernung auf einander ausüben.

Bei der Electricität unterscheidet man bekanntlich zwei Arten, welche die Eigenschaft haben, dass Mengen derselben Art sich unter einander abstossen, dagegen Mengen verschiedener Art sich anziehen. Ob die beiden Electricitäten wirklich als zwei verschiedene für sich bestehende Agentien zu betrachten sind, oder ob die Erscheinungen sich auch aus dem Vorhandensein eines einzigen Agens erklären lassen, ist für unsere jetzigen Untersuchungen gleichgültig. In ihnen kommt es nur darauf an, die Electricität in solcher Weise in die Formeln einzuführen, dass dadurch die von ihr ausgeübten Kräfte richtig dargestellt werden. Die so gebildeten mathematischen

Ausdrücke behalten ihre Gültigkeit, auch wenn man die Vorstellung über das Wesen der Electricität ändert. Um alle in der Electrostatik vorkommenden Kräfte, obwohl sie in manchen Fällen anziehend und in anderen abstossend sind, doch unter eine gemeinsame Formel zusammenfassen zu können, in welcher ε immer dasselbe Vorzeichen behält, hat man den Unterschied des Vorzeichens auf die Electricitätsmengen selbst übertragen, indem man die Mengen der einen Electricität als positive und die der anderen als negative Grössen in Rechnung bringt. Dann wird die Kraft, welche irgend zwei in zwei Puncten concentrirte Electricitätsmengen q und q' auf einander ausüben, durch die Formel:

$$\varepsilon \frac{q \cdot q'}{r^2}$$

dargestellt, worin ε eine unveränderliche Grösse ist, und zwar eine positive Grösse, weil in dem Falle, wo q und q' gleiche Vorzeichen haben, der ganze Ausdruck positiv werden muss, wie es der Abstossung entspricht.

Bei dieser Art die Mengen der beiden verschiedenen Electricitäten in Rechnung zu bringen, kann man die Electricität im Ganzen ein abstossendes Agens nennen, weil bei der Benennung das Verhalten positiver Mengen maassgebend ist, und die Aenderungen, welche die Kraft dadurch erleidet, dass eine oder beide Mengen negativ werden, sich von selbst verstehen. Will man für irgend welche, theils positive, theils negative Electricitätsmengen die Potentialfunction bestimmen, so kann man das in der Gleichung (Ia.) vorkommende Integral über alle gegebenen Electricitätsmengen ausdehnen, indem man die Elemente dq' je nach der Art der betreffenden Electricitätsmengen positiv oder negativ nimmt. Die so erhaltene Potentialfunction bezieht sich dann auf eine im Puncte p gedachte Einheit positiver Electricität.

Bei der Bestimmung magnetischer Kräfte kann man ebenfalls, ohne über die wirkliche Natur des Magnetismus irgend eine Annahme zu machen, Nordmagnetismus und Südmagnetismus als zwei Agentien betrachten, die sich in Bezug auf ihre gegenseitigen Einwirkungen wie die beiden Electricitäten verhalten. Wir bringen die Mengen des einen, z. B. des Nordmagnetismus, als positive und die des anderen als negative Grössen in Rechnung; dann behält ε einen unveränderlichen Werth, und die Potentialfunction, welche wir bekommen, bezieht sich auf eine im Puncte p gedachte Einheit von Nordmagnetismus.

Die Grösse ε ist in diesen Fällen die Abstossungskraft, welche zwei positive Einheiten des betreffenden Agens in der Einheit der Entfernung auf einander ausüben, was auch für die ponderable Masse gilt, wenn Anziehungskraft als negative Abstossungskraft gerechnet wird. Wenn bei einem Agens die Einheit, welche als Maass dient, nicht im Voraus gegeben ist, sondern willkürlich gewählt werden kann, so lässt sich dadurch noch eine Vereinfachung erreichen. Wählt man nämlich als Einheit des Agens diejenige Menge, welche auf eine gleich grosse Menge desselben Agens in der Einheit der Entfernung die Einheit der Kraft ausübt, so ist der absolute Werth von ε gleich Eins, und was das Vorzeichen antrifft, so ist bei ponderabler Masse zu setzen $\varepsilon = -1$, dagegen bei Electricität und Magnetismus $\varepsilon = +1$. Wir wollen indessen vorläufig über die Einheiten der Agentien keine bestimmten Annahmen machen, und daher das allgemeine Zeichen ε beibehalten.

§ 9.

Ueber den Namen Potentialfunction und das bei der Bestimmung dieser Function angewandte Vorzeichen.

Bevor wir zur weiteren Behandlung unserer Function schreiten, müssen noch erst ein paar Bemerkungen über den Namen und das Vorzeichen derselben eingeschaltet werden.

Der Name Potentialfunction ist von Green eingeführt. Gauss, welcher später dieselbe Function ebenfalls einer speciellen Betrachtung unterwarf, nannte sie kürzer Potential. Ich habe aber die ältere Benennung, Potentialfunction, beibehalten, weil das Wort Potential noch für einen anderen Begriff gebraucht wird, der dem vorigen zwar verwandt aber nicht gleich ist. Ich glaube, dass diese Unterscheidung sich im zweiten Abschnitte dieser Schrift, welcher vom Potential handelt, hinlänglich rechtfertigen wird, und in der That ist sie auch schon von mehreren hervorragenden Autoren, wie Betti,[1]) Riemann,[2])

1) Teorica delle forze che agiscono secondo la legge di Newton, Pisa 1865.

2) Schwere, Electricität und Magnetismus, nach den Vorlesungen von Bernh. Riemann, bearbeitet von Hattendorff. Hannover 1876.

Kötteritzsch[1]) und von Bezold[2]) als sachgemäss anerkannt.

Was ferner das Vorzeichen der Potentialfunction anbetrifft, so macht Gauss bei der Bildung der letzteren zwischen anziehenden und abstossenden Agentien keinen Unterschied, indem er in seinen Ausdruck der Potentialfunction den Factor ε, welcher positiv oder negativ sein kann, und dadurch jene beiden Fälle unterscheidet, nicht aufgenommen hat. Dadurch wird es aber nothwendig, jene Unterscheidung an einer anderen Stelle, nämlich bei der Ableitung der Kraftcomponenten aus der Potentialfunction zu machen, indem man nicht in allen Fällen die negativen Differentialcoefficienten der Potentialfunction als Ausdrücke der Kraftcomponenten betrachten darf, sondern diese Differentialcoefficienten bald mit dem negativen, bald mit dem positiven Vorzeichen versehen muss, jenachdem das wirksame Agens ein abstossendes oder anziehendes ist. Dieses scheint mir aber nicht zweckmässig zu sein. Da die eigentliche Bedeutung der Potentialfunction darin liegt, Alles, was zur Bestimmung der Kraft nöthig ist, auf eine einfache Weise darzustellen, und sie nur ein specieller Fall der allgemeineren Kraftfunction ist, so halte ich es für angemessener, den Unterschied, ob das wirksame Agens ein abstossendes oder anziehendes ist, schon bei der Bildung der Potentialfunction selbst zu berücksichtigen, so dass die Ableitung der Kraftcomponenten aus der Potentialfunction immer in einer und derselben Weise geschehen kann.

Wird dieses als zweckmässig zugestanden, so bleibt nur noch die Frage zu entscheiden, ob man es so einrichten soll, dass man, um die Componenten der Kraft, welche die im Puncte p gedachte positive Einheit des Agens erleidet, auszudrücken, nur die einfachen Differentialcoefficienten oder ihre negativen Werthe anzuwenden hat. Das erstere ist natürlich einfacher, und ich habe daher in den beiden ersten Auflagen dieses Buches das Vorzeichen der Potentialfunction in diesem Sinne gewählt, habe jedoch schon damals darauf aufmerksam gemacht, dass auch für die andere Wahl des Vorzeichens gewichtige Gründe sprechen. Seitdem bin ich nun zu der Ueberzeugung gelangt, dass die letzteren Gründe überwiegen, besonders wenn man das Princip von der Erhaltung der Energie

---

1) Lehrbuch der Electrostatik von Th. Kötteritzsch. Leipzig 1872.

2) Physikalische Bedeutung der Potentialfunction, von W. von Bezold. München 1861, und mehrere Aufsätze in Pogg. Ann.

in der für die Anwendung bequemsten Form darstellen will, und ich habe daher in der dritten und ebenso in der vorliegenden Auflage schon bei der Kraftfunction und demgemäss auch bei der einen speciellen Fall derselben bildenden Potentialfunction das Vorzeichen so gewählt, dass die Kraftcomponenten durch die mit dem negativen Vorzeichen versehenen Differentialcoefficienten dieser Functionen dargestellt werden.

§ 10.

Das Potentialniveau.

Was weiter oben in § 4 bei Betrachtung der Kraftfunction U über die Niveauflächen gesagt ist, gilt natürlich in gleicher Weise auch für die Potentialfunction V.

Die Gleichung

$$V = A, \tag{20}$$

worin A eine Constante bedeutet, ist die Gleichung einer Niveaufläche, und eine in irgend einem Puncte dieser Fläche gedachte positive Einheit des Agens erleidet eine Kraft, welche auf der Fläche senkrecht ist, und zwar ist die Kraft von der Fläche aus nach der Seite hin gerichtet, nach welcher die Potentialfunction abnimmt.

Denkt man sich eine unendliche Menge solcher Flächen construirt, deren Gleichungen sich nur dadurch von einander unterscheiden, dass die an der rechten Seite stehende Constante bei jeder folgenden um einen gewissen unendlich kleinen Werth grösser ist, als bei der vorhergehenden, dann lässt dieses System von Flächen an jeder Stelle des Raumes die Kraft, welche eine dort gedachte positive Einheit des Agens erleiden würde, nach Richtung und Grösse erkennen. Die Grösse der Kraft ist dem Abstande je zweier auf einander folgender Flächen umgekehrt proportional.

Man kann den Werth, welchen die Potentialfunction an irgend einer Stelle des Raumes hat, und durch welchen diejenige Niveaufläche, in der diese Stelle sich befindet, bestimmt wird, kurz das Potentialniveau dieser Stelle nennen.

An verschiedenen Stellen des Raumes sind die Potentialniveaux im Allgemeinen verschieden, und die Verschiedenheit kann sich nicht nur auf den absoluten Werth, sondern auch auf das Vorzeichen beziehen. Bei Agentien, welche nur anziehend wirken (wie die ponderable Masse), kommen nur negative Potentialniveaux vor. Bei solchen Agentien dagegen, welche theils anziehend, theils abstossend wirken (wie die Electricität), können in verschiedenen Theilen des Raumes negative und positive Potentialniveaux vorkommen, und diese Theile des Raumes werden von einander getrennt durch eine Fläche mit dem Potentialniveau Null.

Wenn der Punct p, in welchem wir uns die Einheit des Agens concentrirt denken, sich von der Stelle, wo er sich ursprünglich befand, nach verschiedenen Richtungen bewegt, so hängt die Kraft, welche bei dieser Bewegung fördernd oder hemmend wirkt, davon ab, wie schnell in der betreffenden Richtung das Potentialniveau sich ändert. Nach Richtungen, in welchen das Potentialniveau constant bleibt, wirkt keine Kraft, und nach anderen Richtungen wirken um so stärkere Kräfte, je schneller in ihnen die Aenderung des Potentialniveaus stattfindet, und zwar ist die auf irgend eine Richtung bezogene Kraft positiv oder negativ, jenachdem das Potentialniveau in dieser Richtung abnimmt oder zunimmt.

§ 11.

Bestimmung der Potentialfunction für den Fall, wenn der Punct p sich innerhalb des von dem wirksamen Agens stetig erfüllten Raumes befindet.

In § 6 wurde gesagt, dass es nicht unmittelbar klar sei, ob die durch Gleichung (19) bestimmte Function U auch für den Fall, wenn der Punct p sich innerhalb des von dem wirksamen Agens stetig erfüllten Raumes befindet, die Eigenschaft habe, durch ihre negativen Differentialcoefficienten die Kraftcomponenten darzustellen, und dasselbe gilt natürlich auch von der in § 7 betrachteten, durch die Gleichung (Ia.) bestimmten Function V. Wir wollen daher diesen Fall jetzt näher untersuchen, wobei wir uns aber, da die beiden Functionen sich in dieser Beziehung ganz gleich verhalten müssen, auf Eine von ihnen beschränken können, wozu wir die Potentialfunction V wählen wollen.

In der unter (Ia.) gegebenen Formel der Potentialfunction:

$$\varepsilon \int \frac{1}{r} \, dq'$$

ist die zu integrirende Function $\frac{1}{r}$ für diejenigen Elemente dq', welche den betrachteten Punct unmittelbar umgeben, unendlich gross, weil der Abstand r für dieselben unendlich klein ist, und derselbe Umstand findet, wie wir gleich nachher sehen werden, in noch höherem Grade bei den Formeln statt, welche man erhält, wenn man die Kraftcomponenten entweder direct oder durch Differentiation der Potentialfunction bestimmen will. Nun ist freilich daraus, dass die zu integrirende Function für gewisse Elemente unendlich gross wird, noch nicht zu schliessen, dass auch das Integral selbst unendlich gross oder unbestimmt werden müsse, denn es kann sein, dass die Summe derjenigen Elemente, für welche die zu integrirende Function einen unendlich grossen Werth von einer gewissen Ordnung annimmt, selbst eine unendlich kleine Grösse von noch höherer Ordnung ist, so dass der Einfluss dieser Elemente verschwindet, und das ganze Integral einen bestimmten endlichen Werth behält. Indessen darf man ein solches Verhalten doch nicht ohne Weiteres voraussetzen, sondern muss bei jedem derartigen Integrale, bevor man es zu weiteren Rechnungen anwendet, durch besondere Betrachtungen darüber entscheiden, ob die Integration in der Weise ausführbar ist, dass sie einen bestimmten endlichen Werth liefert. Dazu dient besonders das Verfahren, durch Einführung anderer Veränderlicher das Integral so umzuformen, dass die nun zu integrirende Function für alle Elemente dieser neuen Veränderlichen endlich bleibt, wodurch dann die bestimmte Ausführbarkeit der Integration ausser Zweifel gesetzt ist.

Dieses Verfahren wollen wir zunächst auf die Potentialfunction, und dann auf die Kraftcomponenten und die Differentialcoefficienten der Potentialfunction anwenden.

Wir wollen dabei der Kürze wegen den von dem Agens stetig erfüllten Raum einen Körper nennen, wobei wir aber unter dem Inhalte des Körpers nur dasjenige Agens verstehen, für welches wir die Potentialfunction bestimmen wollen, und alles, was sonst noch in dem Körper sein mag, unberücksichtigt lassen. Sei k' die Dichtigkeit des Körpers bei dem Puncte x', y', z', mit der Bedeutung, dass, wenn $d\tau$ ein Raumelement vorstellt und dq' die Menge des darin enthaltenen wirksamen Agens ist, man hat:

$$dq' = k' d\tau, \tag{21}$$

wobei wir annehmen wollen, dass die Grösse k', welche eine Function von x', y', z' ist, nirgends unendlich gross werde. Dadurch geht der unter (Ia.) gegebene Ausdruck der Potentialfunction über in:

$$V = \varepsilon \int \frac{k'}{r} d\tau. \tag{22}$$

Um für das Raumelement einen für unsern Zweck passenden Ausdruck zu gewinnen, wollen wir folgende räumliche Bestimmungsweise einführen. Wir theilen zunächst den Raum in unendliche schmale Pyramiden ein, welche ihre Spitzen sämmtlich in dem Puncte p haben. Denken wir uns um p als Mittelpunkt eine Kugelfläche mit der Längeneinheit als Radius beschrieben, so schneidet jede Elementarpyramide aus derselben ein Flächenelement aus, welches $d\sigma$ heissen möge. Die Grösse dieses Flächenelementes bestimmt die Grösse des körperlichen Winkels, welchen die Elementarpyramide an ihrer Spitze bildet, und wir wollen daher dieses mit $d\sigma$ bezeichnete Element kurz das Element des körperlichen Winkels nennen. Die dabei geltende Einheit ergiebt sich daraus, dass der ganze Winkelraum um den Punct gleich 4π zu setzen ist, indem der Flächeninhalt einer mit der Längeneinheit als Radius geschlagenen Kugelfläche bekanntlich durch 4π dargestellt wird.

Betrachten wir nun in einer Elementarpyramide ein unendlich kurzes Stück, welches zwischen zwei um p geschlagenen Kugelflächen mit den Radien r und $r + dr$ liegt, so können wir dieses Stück als das Raumelement $d\tau$ annehmen. Da dasselbe als kleines Prisma mit der Grundfläche $r^2 d\sigma$ und der Höhe dr anzusehen ist, so kommt:

$$d\tau = r^2\, dr\, d\sigma. \tag{23}$$

Demnach ist:

$$dq' = k' r^2\, dr\, d\sigma, \tag{24}$$

und dadurch geht der obige Ausdruck von V über in:

$$V = \varepsilon \iint k' r\, dr\, d\sigma. \tag{25}$$

Hierin ist die zu integrirende Function $k'r$ für die ersten Elemente dr nicht nur nicht unendlich gross, sondern im Gegentheil unendlich klein, und die oben erwähnte Schwierigkeit fällt somit fort, indem man ohne Weiteres sieht, dass das Integral einen bestimmten endlichen Werth haben muss.

§ 12.

Bestimmung der Potentialfunction einer Kugelschicht, in welcher die Dichtigkeit eine Function des Radius ist.

Ich glaube, dass es zweckmässig sein wird, für einen speciellen Fall die Bestimmung der Potentialfunction wirklich auszuführen, weil die im Folgenden zu behandelnden Sätze durch Anwendung auf einen concreten Fall besonders anschaulich werden. Dazu ist besonders der Fall geeignet, wo der wirksame Körper eine Kugelschicht ist, in welcher die Dichtigkeit innerhalb jeder concentrischen Kugelfläche constant ist, aber von einer solchen Kugelfläche zur anderen variiren kann. Für eine Kugelschicht dieser Art hat nämlich die Potentialfunction eine sehr einfache Gestalt, und ausserdem ist auch die Kenntniss dieses Falles für manche andere Betrachtungen nützlich.

Es sei also ein Raum gegeben, welcher zwischen zwei concentrischen Kugelflächen mit den Radien a und A liegt, und von dem wirksamen Agens in der Weise erfüllt ist, dass die Dichtigkeit k' nur eine Function des Radius ist.

Wir gehen zur Bestimmung der Potentialfunction von der Gleichung (22) aus, nämlich:

$$V = \varepsilon \int \frac{k'}{r} d\tau.$$

Um das hierin vorkommende Integral zu berechnen, wollen wir Polarcoordinaten um den Mittelpunct der Kugelschicht einführen. Die vom Mittelpuncte aus durch den Punct p gezogene Gerade möge die Axe des Systems sein. Denken wir uns nun vom Mittelpuncte aus nach dem Puncte der Schicht, wo sich das Raumelement $d\tau$ befindet, einen Leitstrahl gezogen, so soll die Länge dieses Leitstrahles mit ρ, der Winkel, welchen der Leitstrahl mit der Axe bildet, mit ϑ, und endlich der Winkel, welchen die durch die Axe und den Leitstrahl gelegte Ebene mit irgend einer durch die Axe gehenden festen Ebene bildet, mit φ bezeichnet werden. Führen wir dann noch für den Abstand des in der Axe liegenden Punctes p vom Mittelpuncte den Buchstaben l ein, so erhalten wir für die Grösse r, die Entfernung des Raumelementes $d\tau$ vom Puncte p, den Ausdruck:

$$r = \sqrt{\rho^2 + l^2 - 2\rho l \cos\vartheta},$$

und können zugleich für das Raumelement $d\tau$ die bekannte Formel:

$$d\tau = \rho^2 \sin\vartheta \, d\rho \, d\vartheta \, d\varphi$$

anwenden. Dadurch geht die obige Gleichung über in:

$$(26) \qquad V = \varepsilon \iiint \frac{k' \rho^2 \sin\vartheta}{\sqrt{\rho^2 + l^2 - 2\rho l \cos\vartheta}} \, d\rho \, d\vartheta \, d\varphi,$$

worin die Integration nach φ von 0 bis 2π, nach ϑ von 0 bis π und nach ρ von a bis A auszuführen ist.

Die Integrationen nach φ und ϑ lassen sich sofort ausführen und geben:

$$(27) \qquad V = \frac{2\pi\varepsilon}{l} \int_a^A k' \rho \left(\sqrt{\rho^2 + l^2 + 2\rho l} - \sqrt{\rho^2 + l^2 - 2\rho l}\right) d\rho.$$

Die hierin unter den beiden Wurzelzeichen befindlichen Ausdrücke sind vollständige Quadrate, und die Quadratwurzeln lassen sich daher ausziehen; indessen ist dabei noch eine besondere Bemerkung zu machen. Jede der beiden Quadratwurzeln kann, an sich genommen, sowohl positiv als negativ sein; im vorliegenden Falle aber, wo die Quadratwurzeln specielle Werthe der Entfernung r sind, welche eine absolute Grösse ist, dürfen wir von den beiden Werthen jeder Wurzel nur den positiven anwenden. Wir haben also zu setzen:

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho^2 + l^2 + 2\rho l} &= \rho + l \\ \sqrt{\rho^2 + l^2 - 2\rho l} &= \rho - l, \text{ wenn } \rho > l \\ &= l - \rho, \text{ wenn } \rho < l. \end{aligned}$$

Hierdurch nimmt die unter dem Integralzeichen stehende Differenz der beiden Wurzeln folgende zwei verschiedene Formen an. Wenn $\rho > l$, so ist:

$$(28) \qquad \sqrt{\rho^2 + l^2 + 2\rho l} - \sqrt{\rho^2 + l^2 - 2\rho l} = \rho + l - (\rho - l) = 2l.$$

Wenn $\rho < l$, so ist:

(28a.) $\sqrt{\rho^2 + l^2 + 2\rho l} - \sqrt{\rho^2 + l^2 - 2\rho l} = \rho + l - (l - \rho) = 2\rho.$

Wegen dieser Verschiedenheit des zu integrirenden Ausdruckes müssen wir nun in Bezug auf die Lage des Punctes p drei Fälle unterscheiden.

1) Der Punct p liege innerhalb des Hohlraumes der Kugelschicht.

In diesem Falle ist $l < a$, und somit müssen alle bei der Integration vorkommenden Werthe von ρ grösser als l sein, woraus folgt, dass von den beiden Gleichungen (28) und (28a.) die erstere anzuwenden ist. Dadurch nimmt der Ausdruck der Potentialfunction, welche wir für diesen Fall mit V_i bezeichnen wollen, folgende Form an:

$$V_i = \frac{2\pi\varepsilon}{l}\int_a^A k'\rho \,.\, 2l\, d\rho$$

oder:

$$V_i = 4\pi\varepsilon\int_a^A k'\rho\, d\rho. \tag{29}$$

Dieser Ausdruck ist von l unabhängig, und es folgt daraus, dass innerhalb des Hohlraumes die Potentialfunction constant ist. Die Kraft, welche das in der Kugelschicht befindliche Agens auf eine irgend wo im Hohlraume gedachte Menge des Agens ausüben würde, muss also Null sein.

Nimmt man speciell an, die Dichtigkeit k' sei constant und somit die Kugelschicht homogen, so kann man auch die Integration nach ρ ausführen und erhält:

$$V_i = 2\pi\varepsilon k' (A^2 - a^2). \tag{30}$$

2) Der Punct p liege ausserhalb der Kugelschicht.

In diesem Falle ist $l > A$, und somit können nur solche Werthe von ρ bei der Integration vorkommen, die kleiner als l sind, und man hat daher die Gleichung (28a.) anzuwenden. Die Potentialfunction, welche für diesen Fall mit V_e bezeichnet werden möge, nimmt also folgende Form an:

$$V_e = \frac{2\pi\varepsilon}{l}\int_a^A k'\rho \,.\, 2\rho\, d\rho = \frac{4\pi\varepsilon}{l}\int_a^A k'\rho^2\, d\rho.$$

Schreiben wir diesen Ausdruck in der Gestalt

$$V_e = \frac{\varepsilon}{l}\int_a^A k' \,.\, 4\pi\rho^2 d\rho,$$

so stellt das Product $4\pi\rho^2 d\rho$ das Volumen einer unendlich dünnen Kugelschicht zwischen zwei Kugelflächen mit den Radien ρ und $\rho + d\rho$ dar, und das Product $k' \,.\, 4\pi\rho^2 d\rho$ bedeutet die in dieser unendlich dünnen Kugelschicht enthaltene Menge des Agens. Demnach ist die Grösse, welche man durch die Integration erhält, nichts weiter, als die in der ganzen gegebenen Kugelschicht enthaltene Menge des Agens. Bezeichnen wir diese Menge mit Q, so lautet die Gleichung:

$$(31) \qquad V_e = \varepsilon \frac{Q}{l}.$$

Da l der Abstand des Punctes p vom Mittelpuncte der Kugelschicht ist, so sieht man, dass für jeden im äusseren Raume gelegenen Punct die Potentialfunction denselben Werth hat, und demnach auch die Kraft, welche die Kugelschicht auf eine in dem Puncte gedachte Menge des Agens ausübt, in derselben Weise stattfindet, wie wenn die ganze in der Kugelschicht enthaltene Menge des Agens im Mittelpuncte concentrirt wäre.

Für den speciellen Fall, wo die Dichtigkeit k' constant ist, kann man die vorige Gleichung auch so schreiben:

$$(32) \qquad V_e = \frac{4\pi}{3}\varepsilon k' \frac{A^3 - a^3}{l}.$$

3) Der Punct p liege in der Kugelschicht selbst.

In diesem Falle liegt der Werth von l zwischen a und A, und demnach sind die bei der Integration vorkommenden Werthe von ρ zum Theil kleiner, zum Theil grösser als l. Wir müssen daher das in der Gleichung (27) vorkommende Integral in zwei Integrale zerlegen. Das erste ist von a bis l zu nehmen, und in ihm ist die Gleichung (28a.) anzuwenden; das zweite ist von l bis A zu nehmen, und in ihm ist die Gleichung (28) anzuwenden. Es kommt also, wenn wir die Potentialfunction für diesen Fall mit V_m bezeichnen:

$$V_m = \frac{2\pi\varepsilon}{l}\left(\int\limits_a^l k'\rho \,.\, 2\rho d\rho + \int\limits_l^A k'\rho \,.\, 2l d\rho\right)$$

oder:

$$(33) \qquad V_m = 4\pi\varepsilon\left(\frac{1}{l}\int\limits_a^l k'\rho^2 d\rho + \int\limits_l^A k'\rho \, d\rho\right).$$

Für den Fall, wo k' constant ist, also durchweg den beim Puncte p geltenden Werth k hat, lassen sich die Integrationen ausführen und man erhält:

$$(34) \qquad V_m = 2\pi\varepsilon k\left(A^2 - \frac{1}{3}l^2 - \frac{2}{3}\frac{a^3}{l}\right).$$

In den vorstehenden Gleichungen können die Radien a und A der inneren und äusseren Grenzfläche der Kugelschicht beliebige Werthe haben, und es mögen in dieser Beziehung noch zwei specielle Fälle besonders hervorgehoben werden.

Wenn man es, statt mit einer Kugelschicht, mit einer Vollkugel zu thun hat, so braucht man nur den Radius a der inneren Grenzfläche gleich Null zu setzen, dann findet die mit V_i bezeichnete, auf den inneren Hohlraum bezügliche Potentialfunction keine Anwendung, und die Ausdrücke für V_m und V_e vereinfachen sich in so leicht ersichtlicher Weise, dass es nicht nöthig sein wird, sie in der vereinfachten Form noch einmal anzuführen.

Der zweite specielle Fall, welcher besonders für die Electricitätslehre von Interesse ist, ist der, wenn man die Schicht als unendlich dünn annimmt, und dabei zugleich die Dichtigkeit k' als unendlich gross, so dass die in der Schicht enthaltene Menge des Agens eine endliche Grösse bleibt. Wir wollen für diesen Fall die auf eine homogene Kugelschicht bezüglichen Formeln (30) und (32) in folgender Weise schreiben:

$$V_i = 2\pi\varepsilon k'(A-a)(A+a)$$

$$V_e = \frac{4\pi\varepsilon}{3}k'(A-a)\frac{A^2+Aa+a^2}{l}.$$

Nehmen wir nun an, dass die Dicke $A-a$ unendlich abnehme, und zugleich die Dichtigkeit k' in demselben Verhältnisse unendlich zunehme, so dass das Product $k'(A-a)$ eine bestimmte endliche

Grösse bleibe, welche h heissen möge, so nähern sich beide Ausdrücke bestimmten Grenzwerthen, welche dieselben sind, die man erhält, wenn man von vorn herein nur eine einzelne mit dem Agens bedeckte Kugelfläche betrachtet, und unter h die Flächendichtigkeit versteht, in dem Sinne, dass auf dem Flächenelemente $d\omega$ die Menge $h d\omega$ des Agens befindlich ist. Zur Bildung dieser Grenzwerthe hat man in den Summen $A + a$ und $A^2 + Aa + a^2$ zu setzen $A = a$, und die Formeln lauten daher:

$$(35) \qquad \begin{cases} V_i = 4\pi\varepsilon h a \\ V_e = 4\pi\varepsilon h \dfrac{a^2}{l}. \end{cases}$$

Will man in allen in diesem § betrachteten Fällen die Potentialfunction als Function rechtwinkliger Coordinaten haben, so braucht man in den gewonnenen Formeln nur für die Grösse l den Ausdruck zu setzen, welcher sie in rechtwinkligen Coordinaten darstellt. Sind nämlich x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des Mittelpunctes der Kugelschicht, so hat man zu setzen:

$$l = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

§ 13.

Bestimmung der Kraftcomponenten für einen im Innern des wirksamen Körpers liegenden Punct.

Wir wollen nun in derselben Weise, wie wir in § 11 die Potentialfunction behandelt haben, die Componenten der Kraft, welche der Körper auf den Punct p ausübt, behandeln, und zwar wollen wir, da die nach verschiedenen Richtungen gehenden Componenten in gleicher Weise zu behandeln sind, die nach der x-Richtung gehende Componente als Beispiel wählen.

Die von einem Elemente dq', dessen Coordinaten x', y', z' sind, und dessen Abstand von p durch r dargestellt wird, auf p ausgeübte Kraft ist $\varepsilon \frac{dq'}{r^2}$, und die in die x-Richtung fallende Componente dieser Kraft ist $\varepsilon \frac{dq'}{r^2} \cdot \frac{x - x'}{r}$, und man erhält daher für die x-Componente der ganzen Kraft den Ausdruck:

$$(36) \qquad X = \varepsilon \int \frac{x - x'}{r^3} dq'.$$

Hierin wird für unendliche kleine Werthe von r die zu integrirende Function sogar ein unendlich Grosses von der zweiten Ordnung; dessenungeachtet genügt auch hier die Einführung der obigen Differentiale, um diesem Uebelstande auszuweichen. Setzen wir nämlich für dq' wieder den in (24) gegebenen Ausdruck, so kommt:

$$X = \varepsilon \iint k' \frac{x - x'}{r} \, dr \, d\sigma. \tag{37}$$

Da die Länge $x - x'$ stets kleiner oder höchstens ebensogross als r ist, so bleibt die hier zu integrirende Function $k' \frac{x - x'}{r}$ für alle Elemente dr eine endliche Grösse, und die Integration muss also einen bestimmten endlichen Werth geben.

Im vorigen Ausdrucke bedeutet der Bruch $\frac{x - x'}{r}$ den negativen Werth des Cosinus des Winkels, welchen der von p nach dem Puncte x', y', z' hinführende Leitstrahl mit der x-Axe bildet. Nennt man diesen Winkel ϑ, so kann man schreiben:

$$X = - \varepsilon \iint k' \cos \vartheta \, dr \, d\sigma. \tag{38}$$

In dieser Form ist der Ausdruck auch auf die Kraftcomponenten nach beliebigen anderen Richtungen anwendbar, wenn man festsetzt, dass ϑ den Winkel des veränderlichen Leitstrahles mit derjenigen Richtung, für welche man die Kraftcomponente bestimmen will, bedeuten soll.

§ 14.

Bestimmung der Differentialcoefficienten der Potentialfunction für einen im Innern des wirksamen Körpers liegenden Punct.

Es fragt sich nun, ob die ebengefundene Formel für die Kraftcomponente X mit dem negativen Differentialcoefficienten der Potentialfunction $-\frac{\partial V}{\partial x}$ übereinstimmt.

Bei dieser Untersuchung entsteht eine neue Schwierigkeit. Wir haben in § 11 die Potentialfunction in eine Form gebracht, welche zeigt, dass sie stets einen bestimmten endlichen Werth hat. Diese

Form ist aber nicht brauchbar, wenn es sich darum handelt, die Potentialfunction nach den Coordinaten des Punctes p zu differentiiren, denn in diesem Falle darf man dem Puncte p nicht von vorn herein eine feste Lage zuschreiben, und darf ihn daher auch nicht zum Mittelpuncte von Polarcoordinaten machen. Man kann zwar denjenigen Punct, für welchen man den Differentialcoefficienten kennen will, zum Mittelpuncte der Polarcoordinaten wählen, muss dann aber die Potentialfunction so bestimmen, dass sie sich nicht auf diesen Mittelpunct bezieht, sondern auf irgend einen in seiner Nähe liegenden Punct, für welchen man die Coordinate, nach der man differentiiren will, noch als veränderlich betrachten kann. Wenn man einen solchen Ausdruck für die Potentialfunction gewonnen hat, so kann man ihn differentiiren, und erst nachdem dieses geschehen ist, darf man in dem dadurch erhaltenen Ausdrucke des Differentialcoefficienten der Coordinate einen bestimmten Werth beilegen, welchen man dann für unseren Fall so zu wählen hat, dass er dem Mittelpuncte der Polarcoordinaten entspricht.

Es kommt also darauf an, es so einzurichten, dass in dem Ausdrucke der Potentialfunction die zu integrirende Function für alle Elemente endlich bleibt, auch wenn der Punct p nicht im Mittelpuncte der Polarcoordinaten liegt, und dass in dem Ausdrucke des Differentialcoefficienten der Potentialfunction die zu integrirende Function wenigstens dann für alle Elemente endlich bleibt, wenn der Punct p im Mittelpunct der Polarcoordinaten liegt.

Demgemäss denken wir uns, wenn wir nach x differentiiren wollen, durch den im Voraus gegebenen Punct, für welchen wir den Differentialcoefficienten $\frac{\partial V}{\partial x}$ kennen wollen, eine gerade Linie parallel der x-Richtung gezogen, und für einen beliebigen Punct dieser Geraden wollen wir die Potentialfunction bestimmen. Die rechtwinkligen Coordinaten jenes im Voraus gegebenen Punctes seien x_1, y_1, z_1 und die Coordinaten des beweglichen Punctes p seien x, y_1, z_1. Wir nehmen nun jenen ersteren Punct zum Mittelpuncte von folgendem Systeme von Polarcoordinaten. Die genannte, mit der x-Axe parallele Gerade bilde die Axe dieses Systemes. Die Länge des vom Mittelpuncte nach dem Elemente dq' gezogenen Leitstrahles heisse l, der Winkel, welchen der Leitstrahl mit der Axe bildet, ϑ, und der Winkel, welchen die durch die Axe und den Leitstrahl gelegte Ebene mit irgend einer anderen durch die

Axe gehenden festen Ebene bildet, φ. Dann ist der Ausdruck des Raumelementes:

$$d\tau = l^2 \sin \vartheta \, dl \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Um den Abstand r dieses Elementes von dem beweglichen Puncte p zu bestimmen, wissen wir, dass p in der Axe liegt, um die Strecke $x - x_1$ vom Mittelpuncte entfernt, und zwar nach der positiven oder negativen Seite, je nachdem diese Differenz positiv oder negativ ist. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{l^2 - 2l(x - x_1)\cos\vartheta + (x - x_1)^2} \\ &= \sqrt{l^2 \sin^2\vartheta + (l\cos\vartheta + x_1 - x)^2}. \end{aligned}$$

Demnach ist die Potentialfunction:

$$V = \varepsilon \iiint \frac{k' l^2 \sin\vartheta}{\sqrt{l^2 \sin^2\vartheta + (l\cos\vartheta + x_1 - x)^2}} \, dl \, d\vartheta \, d\varphi. \tag{39}$$

Hierin ist die zu integrirende Function offenbar für alle Werthe der Veränderlichen l, ϑ und φ endlich, da der Zähler den Factor $l \sin\vartheta$ enthält, welcher niemals grösser als der Nenner werden kann.

Differentiiren wir diesen Ausdruck nach x, so kommt zunächst:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \varepsilon \iiint \frac{k' l^2 \sin\vartheta \, (l\cos\vartheta + x_1 - x)}{[l^2 \sin^2\vartheta + (l\cos\vartheta + x_1 - x)^2]^{\frac{3}{2}}} \, dl \, d\vartheta \, d\varphi,$$

und wenn wir hierin, dem Obigen gemäss, für x den bestimmten Werth x_1 setzen, welcher dem Mittelpuncte der Polarcoordinaten entspricht, so erhalten wir:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \varepsilon \iiint k' \sin\vartheta \cos\vartheta \, dl \, d\vartheta \, d\varphi. \tag{40}$$

Man sieht, dass in dieser Formel wiederum die zu integrirende Function für alle bei der Integration vorkommenden Elemente endlich bleibt. Demnach sind die oben gestellten Bedingungen erfüllt, und die letzte Formel kann als der richtige Ausdruck des Differentialcoefficienten $\frac{\partial V}{\partial x}$ an dem gegebenen Puncte betrachtet werden.

Vergleicht man diesen Ausdruck von $\frac{\partial V}{\partial x}$ mit dem in Gleichung (38) für X gefundenen, so ist klar, dass das Product $\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ das Flächenelement darstellt, welches die durch die beiden Winkelelemente $d\vartheta$ und $d\varphi$ bestimmte Elementarpyramide aus der um den Mittelpunct der Coordinaten beschriebenen Kugelfläche mit dem Radius 1 ausschneidet, und wir können daher dieses Product in der Gleichung (40) durch $d\sigma$ ersetzen; ferner können wir in der Gleichung (40), in welcher vorausgesetzt ist, dass der Punct p im Mittelpuncte der Polarcoordinaten liege, dr statt dl schreiben. Wenn dann endlich noch die Gleichung (40) an beiden Seiten mit -1 multiplicirt wird, so wird der in ihr an der rechten Seite stehende Ausdruck mit dem in (38) an der rechten Seite stehenden identisch, und man erhält also:

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Es versteht sich auch hier wieder von selbst, dass ganz ebenso, wie der Differentialcoefficient nach x, auch die Differentialcoefficienten nach y und z oder nach irgend einer beliebigen Richtung s sich behandeln lassen, und wir können daher als gewonnenes Resultat aussprechen: sowohl ausserhalb als auch innerhalb des Raumes, welcher von dem wirksamen Agens erfüllt ist, werden durch die mit dem negativen Vorzeichen versehenen ersten Differentialcoefficienten der Potentialfunction die Kraftcomponenten dargestellt.

§ 15.

Satz in Bezug auf die zweiten Differentialcoefficienten der Potentialfunction.

Wenden wir uns nun zur Betrachtung der zweiten Differentialcoefficienten, so finden wir wieder eine wichtige Eigenschaft der Potentialfunction.

Da nach Gleichung (10) ist:

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2},$$

so erhält man, wenn man den Bruch $\frac{1}{r}$ zweimal nach derselben Veränderlichen differentiirt:

$$(41)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2} = -\dfrac{1}{r^3} + 3\dfrac{(x-x')^2}{r^5} \\[2ex] \dfrac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y^2} = -\dfrac{1}{r^3} + 3\dfrac{(y-y')^2}{r^5} \\[2ex] \dfrac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^2} = -\dfrac{1}{r^3} + 3\dfrac{(z-z')^2}{r^5} \end{cases}$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen kommt:

$$(42)\qquad \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^2} = 0.$$

Um dieses Resultat auf die Potentialfunction anzuwenden, betrachten wir die allgemeine in (I a.) gegebene Form derselben:

$$V = \varepsilon \int \frac{1}{r}\, dq'.$$

Für den Fall, dass r für alle vorkommenden dq' eine endliche Grösse bleibt, können wir die doppelte Differentation sofort unter dem Integralzeichen vornehmen. Wir erhalten also für den auf x bezüglichen Differentialcoefficienten die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \varepsilon \int \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2}\, dq' = \varepsilon \int \left(-\frac{1}{r^3} + 3\,\frac{(x-x')^2}{r^5} \right) dq'.$$

Der unter dem letzten Integralzeichen in Klammer stehende Ausdruck kann offenbar unter der gemachten Voraussetzung, dass r nicht unendlich klein wird, keinen unendlich grossen Werth annehmen, und die für die bestimmte Ausführbarkeit der Integration nothwendige Bedingung ist daher ohne Weiteres erfüllt. In entsprechender Weise erhalten wir für die auf y und z bezüglichen Differentialcoefficienten die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \varepsilon \int \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y^2} dq' = \varepsilon \int \left(-\frac{1}{r^3} + 3\frac{(y-y')^2}{r^5}\right) dq'$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \varepsilon \int \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^2} dq' = \varepsilon \int \left(-\frac{1}{r^3} + 3\frac{(z-z')^2}{r^5}\right) dq'.$$

Wenn wir die in diesen drei Gleichungen vorkommenden Integrale addiren, so heben sie sich natürlich ebenso auf, wie die Ausdrücke (41), und wir bekommen:

(43) $$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Diese Summe der drei zweiten Differentialcoefficienten kommt in der Potentialtheorie so häufig vor, dass es zweckmässig ist, sie durch ein kurzes Zeichen darzustellen, und wir wollen dieses, ähnlich wie Green, durch ein vor die Function geschriebenes Δ thun,[1]) so dass die vorige Gleichung in dieser Abkürzung lautet:

(43a.) $$\Delta V = 0.$$

Da bei der Bildung dieser Gleichung vorausgesetzt wurde, dass r für alle Elemente dq' endlich bleibe, so folgt daraus, dass, wenn das wirksame Agens einen körperlichen Raum stetig ausfüllt, die Gleichung nur für den Fall bewiesen ist, dass der Punct p ausserhalb dieses Körpers liegt, und vorläufig müssen wir sogar annehmen, dass p in endlichem Abstande von der Oberfläche des Körpers entfernt liege.

§ 16.

Gestaltung des vorigen Satzes für den Fall, wenn der betrachtete Punct sich innerhalb des wirksamen Körpers befindet.

Befindet sich p innerhalb des Körpers, so ist für die nächsten Elemente dq' der Abstand r unendlich klein und die in (41)

1) Green hat das Zeichen δV gebraucht, da aber der Buchstabe δ auch zur Bezeichnung der Variationen angewandt wird, so ist es zweckmässig, statt dessen ein anderes Zeichen anzuwenden, wozu Δ sehr geeignet ist. Noch will ich bemerken, dass Betti in seiner oben citirten werthvollen Schrift die in (43) vorkommende Summe nicht durch ΔV, sondern durch $\Delta^2 V$ bezeichnet.

gegebenen zu integrirenden Ausdrücke werden daher unendlich gross. Man könnte nun vielleicht meinen, dass dieser Umstand auch hier, wie in den früheren Fällen, weil er sich nur auf eine unendlich kleine Menge des Agens bezieht, kein wesentliches Hinderniss für die Anwendbarkeit der Formeln bilde; bei näherer Betrachtung findet man jedoch, dass die Sache sich in diesem Falle anders verhält, weil die zu integrirenden Functionen unendliche Grössen von zu hoher Ordnung werden.

Bilden wir nämlich den Differentialcoefficienten $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ in der vorher angegebenen Weise, und setzen darin für das Element dq' den in Gleichung (24) gegebenen Ausdruck $k'r^2\,dr\,d\sigma$, so kommt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \varepsilon \iint \frac{k'}{r}\left(-1 + 3\,\frac{(x-x')^2}{r^2}\right) dr\,d\sigma,$$

und wenn wir hierin noch für $\frac{x-x'}{r}$, wie in § 13, schreiben $-\cos\vartheta$, und dem entsprechend das Element $d\sigma$ durch $\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$ ersetzen, so lautet die Formel:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \varepsilon \iiint \frac{k'}{r}(-1 + 3\cos^2\vartheta)\sin\varphi\,dr\,d\vartheta\,d\varphi.$$

Man sieht, dass selbst in dieser durch Einführung von Polarcoordinaten umgestalteten Formel wegen des r, welches im Nenner geblieben ist, die zu integrirende Function für die ersten Elemente dr unendlich gross wird. Auf den ersten Blick könnte es sogar scheinen, als ob auch das ganze Integral unendlich gross werden müsste, weil das Integral $\int \frac{dr}{r}$, wenn es von $r = 0$ bis zu einem endlichen Werthe von r genommen wird, unendlich gross wird. Wenn man jedoch auch die Integrationen nach den beiden Winkeln und insbesondere diejenige nach ϑ berücksichtigt, so findet man, dass allerdings, wenn diese Integrationen nur auf einen Theil des körperlichen Winkelraumes um p ausgedehnt werden, im Allgemeinen unendliche Werthe entstehen, dass aber bei Ausdehnung auf den ganzen Winkelraum, wobei nach ϑ von 0 bis π integrirt werden muss, das Integral sich in die Gestalt einer algebraischen Summe bringen lässt, welche unendlich grosse Glieder enthält, die aber verschiedene Vorzeichen haben, und sich der Form nach gegenseitig aufheben. Diese Summe ist nicht als unendlich gross zu betrachten, aber auf der andern Seite kann man ihr auch keinen bestimmten endlichen Werth zuschreiben, weil die algebraische Summe zweier mit entgegengesetzten Vorzeichen versehener unendlicher Grössen, welche der Form nach gleich sind, nicht ohne Weiteres gleich Null zu setzen ist, sondern einen unbestimmten Werth hat.

Ohne auf das Verhalten derartiger Ausdrücke mit unendlich werdenden Gliedern hier näher einzugehen, können wir jedenfalls soviel sagen, dass der obige Ausdruck von $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ (welcher dadurch entstanden ist, dass in der unter (Ia.) gegebenen Formel von V, worin die Integration noch ganz unausgeführt ist, die zweifache Differentiation unter dem Integralzeichen vorgenommen wurde), zur Bestimmung des wahren Werthes von $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ nicht geeignet ist, weil selbst nach Einführung von Polarcoordinaten die zu integrirende Function nicht für alle vorkommenden Werthe der Veränderlichen endlich bleibt. Wir müssen also die Werthe der zweiten Differentialcoefficienten von V und ihrer Summe ΔV auf andere Weise zu bestimmen suchen.

Es wird zweckmässig sein, hier gleich im Voraus anzugeben, welches Resultat man bei der richtigen Bestimmungsweise jener Grössen erhält. Sei nämlich k die Dichtigkeit des Agens in dem betrachteten Puncte p, mit den Coordinaten x, y, z, so ist:

$$\text{(II.)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\varepsilon k \\ \Delta V = -4\pi\varepsilon k. \end{array} \right.$$

Diese Gleichung, welche die früher unter (43) und (43a.) mitgetheilte Gleichung als speciellen Fall umfasst, indem ausserhalb des Körpers $k = 0$ ist, drückt die zweite Haupteigenschaft der Potentialfunction aus, nämlich die, dass man aus der Potentialfunction eines Agens auch seine Dichtigkeit k als Function der Raumcoordinaten ableiten, und somit die Art, wie das Agens durch den Raum vertheilt ist, bestimmen kann.

Bevor wir dazu übergehen, diesen Satz in voller Allgemeinheit zu beweisen, möge des leichteren Verständnisses wegen zuerst ein einfacher specieller Fall betrachtet und für diesen eine oft angewandte Behandlungsart angeführt werden.

§ 17.

Beweis des Satzes für den Fall eines homogenen Körpers.

Der zur vorläufigen Behandlung gewählte specielle Fall ist derjenige, wo die Dichtigkeit des Agens in dem ganzen Körper gleich oder, mit anderen Worten, der Körper in Bezug auf das Agens homogen ist, und wo ferner der betrachtete Punct p sich in endlicher Entfernung von der Oberfläche befindet.

In diesem Falle ist die Grösse k' constant und hat den bei p geltenden Werth k, und man kann daher, nachdem man in der Gleichung (Ia.) das Mengenelement dq' durch das Product $kd\tau$ ersetzt hat, worin $d\tau$ das Raumelement bedeutet, den Coefficienten k aus dem Integralzeichen herausnehmen und schreiben:

$$(44) \qquad V = \varepsilon k \int \frac{1}{r} d\tau.$$

Man denke sich nun um einen in der Nähe des betrachteten Punctes p liegenden Punct eine ganz im Innern des Körpers liegende Kugelfläche geschlagen, welche den Punct p umschliesst und überall in endlicher Entfernung von demselben bleibt, welches Letztere bei der angenommenen Lage des Punctes p möglich ist. Durch diese Kugelfläche wird der gegebene Körper in zwei Theile getheilt, nämlich in den, welcher innerhalb, und in den, welcher ausserhalb der Kugelfläche liegt. Demgemäss wollen wir auch das in der Gleichung (44) vorkommende Integral in zwei Theile theilen, welche äusserlich durch die an die Integralzeichen gesetzten Indices 1 und 2 unterschieden werden sollen. Die Gleichung (44) geht dann über in:

$$(45) \qquad V = \varepsilon k \int_1 \frac{1}{r} d\tau + \varepsilon k \int_2 \frac{1}{r} d\tau.$$

worin das erste Integral sich über den Rauminhalt der Kugel und das zweite sich über den ausserhalb der Kugel liegenden Theil des Körpers erstreckt.

Die erste Integration lässt sich sogleich wirklich ausführen. Die dazu nöthige Rechnung ist schon oben in § 12, welcher sich auf eine von zwei concentrischen Kugelflächen begrenzte Kugelschicht, (worin als specieller Fall auch die Vollkugel inbegriffen ist), bezieht, auseinandergesetzt, und aus der dort unter (34) gegebenen Gleichung, in welcher für eine Vollkugel $a = 0$ zu setzen ist, ergiebt sich, wenn der Radius der Kugel mit A und der Abstand des betrachteten Punctes p vom Mittelpuncte der Kugel mit l bezeichnet wird:

$$\int_1 \frac{1}{r}\, d\tau = 2\pi\left(A^2 - \frac{1}{3} l^2\right).$$

Nennen wir noch die Coordinaten des Mittelpunctes der Kugel x_0, y_0, z_0, so ist:

$$l^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

wodurch die vorige Gleichung übergeht in:

$$\int_1 \frac{1}{r}\, d\tau = 2\pi\left\{A^2 - \frac{1}{3}\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]\right\}.$$

Setzen wir diesen Werth des ersten Integrals in die Gleichung (45) ein, so erhalten wir:

$$(46)\quad V = 2\pi\varepsilon k\left\{A^2 - \frac{1}{3}\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]\right\} + \varepsilon k \int_2 \frac{1}{r}\, d\tau.$$

Diese Gleichung lässt sich nun differentiiren, denn im zweiten Integrale, in welchem nur endliche Werthe von r vorkommen, kann man die Differentiation ohne Weiteres unter dem Integralzeichen vornehmen. Wir erhalten dadurch:

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= -\frac{4}{3}\pi\varepsilon k + \varepsilon k \int_2 \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2}\, d\tau \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= -\frac{4}{3}\pi\varepsilon k + \varepsilon k \int_2 \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y^2}\, d\tau \\
\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= -\frac{4}{3}\pi\varepsilon k + \varepsilon k \int_2 \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^2}\, d\tau.
\end{aligned}\right.$$

Addirt man diese drei Gleichungen, so geben die drei noch unausgeführten Integrale, gemäss der Gleichung (42), als Summe Null, und es kommt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-4\pi\varepsilon k.$$

oder:

$$\Delta V=-4\pi\varepsilon k,$$

welches die zu beweisende Gleichung ist.

Eine eigenthümliche Form der Potentialfunction eines homogenen Körpers, mittelst deren die vorstehende Gleichung sich noch leichter beweisen lässt, deren Ableitung aber hier den Gang der Betrachtungen mehr, als zweckmässig ist, unterbrechen würde, wird noch in einem am Ende dieses Buches anzuschliessenden Zusatze[1]) mitgetheilt werden.

§ 18.

Veränderte Form der Gleichung (II.) und vorläufige Beschränkung.

Was nun den allgemeinen, auch für nicht homogene Körper geltenden Beweis anbetrifft, so bietet dieser einige Schwierigkeiten dar, welche man in verschiedenen Weisen zu heben gesucht hat. Ich will hier einen Beweis mittheilen, welchen ich zuerst im Jahre 1858 in Liouville's Journal (Ser. II, T. III) veröffentlicht habe, und welcher, wie es mir scheint, in einfachster Weise das Unendlichwerden von Gliedern unter den Integralzeichen vermeidet.

Er bezieht sich nicht direct auf die Potentialfunction, sondern auf die mit X, Y, Z bezeichneten Kraftcomponenten, indem er für folgende Gleichung gilt:

$$\text{(IIa.)}\qquad \frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=4\pi\varepsilon k.$$

Diese Gleichung lässt sich aber mittelst der oben allgemein bewiesenen Gleichungen

$$X=-\frac{\partial V}{\partial x};\quad Y=-\frac{\partial V}{\partial y};\quad Z=-\frac{\partial V}{\partial z}$$

leicht auf die Gleichung (II.) zurückführen.

1) Siehe Zusatz I.

Um es bei dem Beweise nicht von vorn herein mit einem zu complicirten Falle zu thun zu haben, wollen wir vorläufig annehmen, der betrachtete Punct p befinde sich in endlicher Entfernung von der Oberfläche des gegebenen Körpers, und es komme in der unmittelbaren Nähe des Punctes auch keine sprungweise Aenderung der Dichtigkeit k des Körpers vor. Dann können wir uns um den Punct eine geschlossene Fläche beschrieben denken, welche überall um eine endliche Strecke von ihm entfernt ist, und innerhalb deren nur stetige Dichtigkeitsänderungen stattfinden, und auf den von dieser Fläche eingeschlossenen Theil des Körpers können wir unsere Betrachtung beschränken, da aus § 15 bekannt ist, dass der Theil des Körpers, welcher ausserhalb dieser Fläche liegt, und dessen Elemente sich daher alle in endlicher Entfernung von p befinden, nichts zu dem Werthe der linken Seite der Gleichung (IIa.) beitragen kann.

Der Fall, wo der Punct p unendlich nahe an der Oberfläche des gegebenen Körpers oder an einer Stelle, wo die Dichtigkeit des Körpers sich sprungsweise ändert, gelegen ist, soll weiter unten einer besonderen Betrachtung unterworfen werden.

§ 19.

Umgestaltung der Ausdrücke der Kraftcomponenten.

Zur Bestimmung der Kraftcomponente X gilt die unter (38) gegebene Gleichung, welche wir, wenn wir die Cosinus der Winkel, welche der von p ausgehende Leitstrahl r mit den Coordinatenrichtungen bildet, von jetzt an durch die einfachen Buchstaben a, b und c bezeichnen, so schreiben können:

$$(48) \qquad X = -\varepsilon \iint k' \, a \, dr \, d\sigma.$$

Hierin ist die Integration nach r für den Theil des Leitstrahles auszuführen, welcher innerhalb des betrachteten Körperstückes liegt. Da die Gestalt der geschlossenen Fläche, welche dieses Körperstück einschliesst, und welche wir kurz die Oberfläche des betrachteten Körpers nennen wollen, beliebig gewählt werden kann, so wollen wir annehmen, diese Fläche sei so geformt, dass jeder von p ausgehende Leitstrahl sie nur Einmal treffe. Bezeichnen wir dann den Werth, welchen r am Durchschnittspuncte hat, mit R, so ist die Integration von 0 bis R auszuführen. Da ferner der mit a bezeichnete Cosinus von r unabhängig ist, und nur k' von r abhängt, so können wir die vorige Gleichung auch so schreiben:

$$X = -\varepsilon \int d\sigma\, a \int_0^R k'\, dr. \tag{49}$$

Hierin wollen wir nun das auf den körperlichen Winkel bezügliche Integral in ein auf die Oberfläche des betrachteten Körpers bezügliches verwandeln. Sei $d\omega$ das Flächenelement, welches die dem körperlichen Winkel $d\sigma$ entsprechende Elementarpyramide aus der Oberfläche ausschneidet, und sei i der Cosinus des Winkels, welchen die auf diesem Oberflächenelemente nach Aussen hin errichtete Normale mit einem von p nach dem Elemente gezogenen und darüber hinaus verlängerten Leitstrahle bildet, so gilt die Gleichung:

$$i\, d\omega = R^2\, d\sigma$$

oder anders geschrieben:

$$d\sigma = \frac{i}{R^2}\, d\omega. \tag{50}$$

Durch Einsetzung dieses Werthes von $d\sigma$ geht (49) über in

$$X = -\varepsilon \int d\omega\, a \frac{i}{R^2} \int_0^R k'\, dr, \tag{51}$$

worin die durch das erste Integralzeichen angedeutete Integration über die ganze Oberfläche des betrachteten Körpers zu nehmen ist.

Nachdem für das Element des körperlichen Winkels dasjenige der Oberfläche eingeführt ist, ist es zweckmässig, auch das Integral $\int k'\, dr$ etwas abzuändern. Dieses Integral bezieht sich auf die den Punct p mit dem Oberflächenelement $d\omega$ verbindende Gerade, und seiner bisherigen Form liegt die Anschauung zu Grunde, dass die Gerade von p nach $d\omega$ hin gehe, und in dieser Richtung auch die Integration auszuführen sei. Da nun aber das Oberflächenelement $d\omega$ eine feste Lage hat, während die Lage des Punctes p

als veränderlich angesehen werden muss, indem nach seinen Coordinaten differentiirt werden soll, so ist es für die folgenden Betrachtungen angemessener, uns die Gerade von $d\omega$ nach p hin gehend zu denken und in dieser Richtung die Integration auszuführen. Während wir den Abstand irgend eines auf der Geraden gewählten Punctes vom Puncte p mit r bezeichnet haben, wollen wir den Abstand desselben Punctes von dem anderen Endpuncte der Geraden, wo $d\omega$ liegt, mit ρ bezeichnen. Dann ist.

$$r = R - \rho$$

$$dr = -d\rho.$$

Setzen wir demnach in jenem Integrale $-d\rho$ an die Stelle von dr, und bedenken zugleich, dass dem Grenzwerthe $r = 0$ der Grenzwerth $\rho = R$ und dem anderen Grenzwerthe $r = R$ der Grenzwerth $\rho = 0$ entspricht, so kommt:

$$\int_0^R k'\,dr = -\int_R^0 k'\,d\rho = \int_0^R k'\,d\rho.$$

Durch diese kleine Veränderung nimmt die Gleichung (51) folgende für unseren Zweck bequemere Form an:

$$X = -\varepsilon \int d\omega\, a \frac{i}{R^2} \int_0^R k'\,d\rho. \tag{52}$$

Aus dieser für die Componente X gefundenen Formel können wir sofort auch diejenigen für die Componenten Y und Z ableiten. Da nämlich a die einzige in der Formel vorkommende Grösse ist, welche auf die x-Axe Bezug hat, so brauchen wir für diese nur die entsprechenden auf die beiden anderen Axen bezüglichen Grössen b und c, (die Cosinus der Winkel, welche der Leitstrahl mit der y- und z-Axe bildet), zu substituiren. Dabei wollen wir zur Abkürzung noch für das auf ρ bezügliche Integral einen einfachen Buchstaben einführen, indem wir setzen:

$$H = \int_0^R k'\,d\rho. \tag{53}$$

Dann lauten die Ausdrücke für die drei Kraftcomponenten:

$$(54)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= -\varepsilon\int\frac{ai}{R^2}H\,d\omega \\ Y &= -\varepsilon\int\frac{bi}{R^2}H\,d\omega \\ Z &= -\varepsilon\int\frac{ci}{R^2}H\,d\omega. \end{aligned}\right.$$

In diesen Ausdrücken kann man, da das Oberflächenelement $d\omega$, nach welchem integrirt werden soll, von den Coordinaten x, y, z des Punctes p ganz unabhängig ist, die Differentiation nach diesen Grössen unter den Integralzeichen vornehmen, und da die im Nenner stehende Grösse R für alle Oberflächenelemente endlich ist, so ist es schon aus diesem Grunde selbstverständlich, dass die durch die Differentiation entstehenden Ausdrücke nicht unendlich gross werden können.

§ 20.

Beweis der Gleichung (IIa.) für homogene Körper.

Obwohl es gar keine Schwierigkeit hat, mittelst der eben gewonnenen Ausdrücke der Kraftcomponenten die Gleichung (IIa.) sofort für nicht homogene Körper zu beweisen, wollen wir der leichteren Anschauung wegen zunächst den Beweis für homogene Körper einschalten, was auch insofern zweckmässig ist, als wir dabei zu Gleichungen gelangen, welche uns weiterhin nützlich sein werden.

Für einen homogenen Körper, in welchem k' constant den beim Puncte p stattfindenden Werth k hat, nimmt die zur Bestimmung von H dienende Gleichung (53) folgende einfache Gestalt an:

$$(55)\qquad H = k\int_0^R d\varrho = kR,$$

und dadurch gehen die Gleichungen (54) über in

$$(56)\qquad \left|\begin{aligned} X &= -\,\varepsilon k \int \frac{ai}{R}\, d\omega \\ Y &= -\,\varepsilon k \int \frac{bi}{R}\, d\omega \\ Z &= -\,\varepsilon k \int \frac{ci}{R}\, d\omega. \end{aligned}\right.$$

Um diese Ausdrücke für die Differentiation nach x, y und z geeignet zu machen, wollen wir sie so umformen, dass diese Grössen nicht implicite, sondern explicite in ihnen vorkommen. Seien ξ, η, ζ die Coordinaten des Oberflächenelementes $d\omega$, dann gilt für R die Gleichung:

$$(57)\qquad R = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$$

und die durch a, b und c bezeichneten Cosinus werden bestimmt durch die Gleichungen:

$$(58)\qquad a = \frac{\xi - x}{R};\quad b = \frac{\eta - y}{R};\quad c = \frac{\zeta - z}{R}.$$

Führt man ferner für die Cosinus der Winkel, welche die auf dem Oberflächenelemente $d\omega$ nach Aussen hin errichtete Normale mit den Coordinatenaxen bildet, die Zeichen α, β, γ ein, so wird der mit i bezeichnete Cosinus bestimmt durch

$$(59)\qquad \begin{aligned} i &= a\alpha + b\beta + c\gamma \\ &= \frac{(\xi - x)\,\alpha + (\eta - y)\,\beta + (\zeta - z)\,\gamma}{R}. \end{aligned}$$

Durch diese Gleichungen geht die erste der Gleichungen (56) über in:

$$(60)\qquad X = -\,\varepsilon k \int \frac{(\xi - x)\,[(\xi - x)\,\alpha + (\eta - y)\,\beta + (\zeta - z)\,\gamma]}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}}\, d\omega.$$

Indem man diese Gleichung nach x differentiirt, erhält man zunächst:

$$(61)\qquad \frac{\partial X}{\partial x} = \varepsilon k \int \left\{ \frac{(\xi - x)\alpha + (\eta - y)\beta + (\zeta - z)\gamma + (\xi - x)\alpha}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}} - 3\frac{(\xi - x)^2[(\xi - x)\alpha + (\eta - y)\beta + (\zeta - z)\gamma]}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{5}{2}}} \right\} d\omega.$$

Hierin kann man nun wieder die Zeichen R, a und i einführen, und wenn man dann auch für die beiden anderen Coordinatenrichtungen die entsprechenden Gleichungen bildet, so erhält man:

$$(62)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x} &= \varepsilon k \int \frac{a\alpha - (3a^2 - 1)i}{R^2} d\omega \\ \frac{\partial Y}{\partial y} &= \varepsilon k \int \frac{b\beta - (3b^2 - 1)i}{R^2} d\omega \\ \frac{\partial Z}{\partial z} &= \varepsilon k \int \frac{c\gamma - (3c^2 - 1)i}{R^2} d\omega. \end{aligned} \right.$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen unter Berücksichtigung der Gleichungen

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$
$$a\alpha + b\beta + c\gamma = i$$

ergiebt sich:

$$(63)\qquad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \varepsilon k \int \frac{i}{R^2} d\omega.$$

Hierin kann man nun wieder mit Hülfe von (50) statt des Oberflächenelementes $d\omega$ das Element des körperlichen Winkels $d\sigma$ einführen, wodurch entsteht:

$$(64)\qquad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \varepsilon k \int d\sigma.$$

Die hierin angedeutete Integration lässt sich sofort ausführen und giebt einfach den ganzen körperlichen Winkelraum um p, also den Werth 4π, und wir erhalten somit die zu beweisende Gleichung:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 4\pi\varepsilon k.$$

§ 21.

Beweis der Gleichung (IIa.) für nicht homogene Körper.

Wir gehen nun wieder zurück zu den unter (54) gegebenen allgemeineren Ausdrücken von X, Y und Z, von denen der erste lautete:

$$X = -\varepsilon \int \frac{ai}{R^2} H d\omega.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung erhält man zunächst:

$$\text{(65)} \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = -\varepsilon \int \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{ai}{R^2}\right) \cdot H + \frac{ai}{R^2} \cdot \frac{\partial H}{\partial x}\right] d\omega.$$

Wendet man nun wieder für R, a und i die im vorigen § unter (57), (58) und (59) gegebenen Ausdrücke an, so findet man:

$$\frac{ai}{R^2} = \frac{(\xi - x)\,[(\xi - x)\,\alpha + (\eta - y)\,\beta + (\zeta - z)\,\gamma]}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^2}$$

Differentiirt man diesen Ausdruck nach x und führt dann wieder die Grössen R, a und i ein, so kommt:

$$\text{(66)} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{ai}{R^2}\right) = \frac{-a\alpha + (4a^2 - 1)i}{R^3}$$

Diesen Werth hat man in (65) einzusetzen. Bildet man dann auch noch die entsprechenden Gleichungen für die beiden anderen Coordinatenrichtungen, so erhält man:

$$\text{(67)} \qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial x} &= \varepsilon \int \left[\frac{a\alpha - (4a^2 - 1)i}{R^3} H - \frac{ai}{R^2} \cdot \frac{\partial H}{\partial x}\right] d\omega \\
\frac{\partial Y}{\partial y} &= \varepsilon \int \left[\frac{b\beta - (4b^2 - 1)i}{R^3} H - \frac{bi}{R^2} \cdot \frac{\partial H}{\partial y}\right] d\omega \\
\frac{\partial Z}{\partial z} &= \varepsilon \int \left[\frac{c\gamma - (4c^2 - 1)i}{R^3} H - \frac{ci}{R^2} \cdot \frac{\partial H}{\partial z}\right] d\omega.
\end{aligned}\right.$$

Addirt man diese drei Gleichungen, und bedenkt dabei wieder, dass man zu setzen hat:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$
$$a\alpha + b\beta + c\gamma = i,$$

so heben sich die Glieder, welche H als Factor haben, gegenseitig auf, und es bleibt:

$$(68)\quad \frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=-\varepsilon\int\left(a\frac{\partial H}{\partial x}+b\frac{\partial H}{\partial y}+c\frac{\partial H}{\partial z}\right)\frac{i}{R^2}\,d\omega.$$

Es kommt nun noch darauf an, die Differentialcoefficienten von H näher zu betrachten. Da das mit H bezeichnete Integral, nämlich:

$$\int_0^R k'\,d\rho,$$

sich über eine Gerade erstreckt, welche in dem Oberflächenpuncte ξ, η, ζ beginnt und in unserem Puncte mit den Coordinaten x, y, z endet, so können wir es als eine Function der sechs Grössen ξ, η, ζ, x, y, z ansehen. Die drei letzten dieser Grössen können den obigen Gleichungen gemäss durch folgende Formeln dargestellt werden:

$$x=\xi-aR$$
$$y=\eta-bR$$
$$z=\zeta-cR.$$

Hierin könnten wir noch eine der drei Grössen a, b, c durch die beiden übrigen ausdrücken, oder wir könnten alle drei durch zwei andere Grössen, welche die Richtung der von dem Oberflächenpuncte nach p gehenden Geraden bestimmen, darstellen; indessen ist es für unseren gegenwärtigen Zweck bequemer, einfach die drei Grössen a, b, c beizubehalten. Denken wir uns nun die drei vorigen Formeln in dem Ausdrucke von H für x, y und z substituirt, so erhalten wir einen Ausdruck, welcher die Grössen ξ, η, ζ, a, b, c, R enthält.

Wenn wir nun die Grösse H nach x, y und z differentiiren sollen, so sind dabei die Coordinaten ξ, η, ζ des Oberflächenpunctes als constant anzusehen, und wir können daher die Differentiationen in der Weise ausführen, dass wir uns H durch einen Ausdruck, welcher a, b, c und R als Veränderliche enthält, dargestellt denken, und dann diese vier Veränderlichen wiederum als Functionen von x, y, z betrachten. Auf diese Weise erhalten wir

z. B. für den nach x genommenen Differentialcoefficienten folgenden Ausdruck:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial R} \cdot \frac{\partial R}{\partial x}.$$

Nun ist in Folge der obigen Werthe von a, b, c und R zu setzen:

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{-1 + a^2}{R}; \quad \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{ab}{R}; \quad \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{ac}{R}; \quad \frac{\partial R}{\partial x} = -a,$$

wodurch die vorige Gleichung übergeht in:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial a} \cdot \frac{-1 + a^2}{R} + \frac{\partial H}{\partial b} \cdot \frac{ab}{R} + \frac{\partial H}{\partial c} \cdot \frac{ac}{R} - \frac{\partial H}{\partial R} a,$$

oder anders geordnet:

$$(69) \qquad \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{R}\left[-\frac{\partial H}{\partial a} + a\left(a\frac{\partial H}{\partial a} + b\frac{\partial H}{\partial b} + c\frac{\partial H}{\partial c}\right)\right] - a\frac{\partial H}{\partial R}.$$

Der in dieser Gleichung am Ende stehende Differentialcoefficient $\frac{\partial H}{\partial R}$ hat eine sehr einfache Bedeutung. Es ist nämlich:

$$(70) \qquad \frac{\partial H}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R}\int_0^R k' \, d\varrho,$$

worin k' die Dichtigkeit an derjenigen Stelle des Körpers bezeichnet, welche in der betrachteten, den Oberflächenpunct ξ, η, ζ mit dem Punct p verbindenden Geraden vom ersteren Puncte um die Strecke ϱ entfernt ist. Die Lage dieser Stelle und dadurch auch die dort stattfindende Dichtigkeit k' ist, wenn der Oberflächenpunct als gegeben vorausgesetzt wird, durch die Grössen a, b, c und ϱ bestimmt. Da ferner bei der Integration nach ϱ die Grössen a, b, c, welche die Richtung der Geraden bestimmen, als constant vorausgesetzt werden, und nur ϱ veränderlich ist, so kann man in dem vorstehenden Integrale k' einfach als Function von ϱ ansehen. Nun gilt aber bekanntlich von dem nach der oberen Grenze eines Integrales genommenen Differentialcoefficienten der durch die folgende Gleichung ausgedrückte Satz:

$$\frac{d}{dR}\int^R f(\varrho)\, d\varrho = f(R).$$

Wenden wir dieses auf unseren Fall an, so ist $f(R)$ der Werth, welchen die Dichtigkeit k' an derjenigen Stelle der Geraden hat, welche um die Strecke R von der Oberfläche entfernt ist, d. h. in unserem Puncte p. Indem wir diesen speciellen Werth von k' einfach mit k bezeichnen, können wir die vorige Gleichung so schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial R}\int_0^R k'\,d\varrho = k,$$

und dadurch geht die Gleichung (70) über in:

$$\frac{\partial H}{\partial R} = k. \tag{71}$$

Setzen wir diesen Werth in die Gleichung (69) ein, und bilden zugleich die entsprechenden Gleichungen für die beiden anderen Differentialcoefficienten $\frac{\partial H}{\partial y}$ und $\frac{\partial H}{\partial z}$, so kommt:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{1}{R}\left[-\frac{\partial H}{\partial a} + a\left(a\frac{\partial H}{\partial a} + b\frac{\partial H}{\partial b} + c\frac{\partial H}{\partial c}\right)\right] - ak \\
\frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{1}{R}\left[-\frac{\partial H}{\partial b} + b\left(a\frac{\partial H}{\partial a} + b\frac{\partial H}{\partial b} + c\frac{\partial H}{\partial c}\right)\right] - bk \\
\frac{\partial H}{\partial z} &= \frac{1}{R}\left[-\frac{\partial H}{\partial c} + c\left(a\frac{\partial H}{\partial a} + b\frac{\partial H}{\partial b} + c\frac{\partial H}{\partial c}\right)\right] - ck.
\end{aligned}\right. \tag{72}$$

Multipliciren wir diese Gleichungen, die erste mit a, die zweite mit b und die dritte mit c, und addiren sie, so heben sich an der rechten Seite alle in den eckigen Klammern stehenden Glieder gegenseitig auf, und die drei übrigen Glieder lassen sich in eines zusammenziehen, nämlich:

$$a\frac{\partial H}{\partial x} + b\frac{\partial H}{\partial y} + c\frac{\partial H}{\partial z} = -k. \tag{73}$$

Durch Anwendung dieser Gleichung geht die Gleichung (68) über in:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \varepsilon\int k\,\frac{i}{R^2}\,d\omega.$$

Da k eine Grösse ist, welche sich, wenn man von einem Oberflächenelemente zu einem anderen übergeht, nicht ändert, welche also für unsere Integration constant ist, so kann sie aus dem Integralzeichen herausgenommen werden, also:

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=\varepsilon k\int\frac{i}{R^2}d\omega. \tag{74}$$

Nun wollen wir wieder statt des Oberflächenelementes $d\omega$ das Element des körperlichen Winkels $d\sigma$ einführen, indem wir abermals von der in § 19 gegebenen Gleichung (50), nämlich

$$d\sigma=\frac{i}{R^2}d\omega,$$

Gebrauch machen. Dadurch erhalten wir:

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=\varepsilon k\int d\sigma. \tag{75}$$

Die hierin vorgeschriebene Integration ist über den ganzen körperlichen Winkelraum auszuführen, und giebt daher 4π, wodurch die Gleichung übergeht in:

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=4\pi\varepsilon k. \tag{76}$$

Wir sind somit auch für nicht homogene Körper durch eine Reihe ganz einfacher und nur auf den Grundprincipien der Differential- und Integralrechnung beruhender mathematischer Operationen zu der zu beweisenden Gleichung gelangt.

§ 22.

Erweiterte Anwendbarkeit der auf homogene Körper bezüglichen Formeln.

Im vorstehenden Beweise, in welchem vorausgesetzt wurde, dass der Punct p sich in endlicher Entfernung von der Oberfläche des gegebenen Körpers befinde, haben wir die Annahme machen können, der zu betrachtende Körper sei so gestaltet, dass jeder von p ausgehende Leitstrahl die Oberfläche nur einmal schneide. Wenn nämlich die Oberfläche des gegebenen Körpers dieser Bedingung nicht entsprach, so brauchten wir nicht den ganzen Körper zu betrachten, sondern konnten uns aus demselben durch eine den Punct p in endlicher Entfernung umgebende, der Bedingung entsprechende Fläche einen kleineren Körper ausgeschnitten denken, und konnten dann die Betrachtung auf diesen letzteren beschränken, indem für den ausserhalb dieser Fläche liegenden Theil des gegebenen Körpers jedenfalls die in (IIa.) vorkommende Summe gleich Null sein muss.

Wenn wir nun aber auch den speciellen Fall, wo der Punct p der Oberfläche unendlich nahe liegt, untersuchen wollen, so müssen wir dabei wenigstens den dem Puncte p zunächst liegenden Theil der Oberfläche des gegebenen Körpers in seiner eigenen Gestalt beibehalten. Es möge daher, bevor wir zur Untersuchung dieses speciellen Falles übergehen, der Nachweis geführt werden, dass die in den vorigen §§ entwickelten Formeln auch gültig bleiben, wenn der betrachtete Körper eine beliebige Gestalt hat. Dabei wird sich zugleich herausstellen, dass die Formeln nicht blos auf einen innerhalb des Körpers, sondern auch auf einen ausserhalb desselben liegenden Punct anwendbar sind.

Der leichteren Anschauung wegen möge auch diese Betrachtung zunächst für einen homogenen Körper angestellt werden.

Für die Kraftcomponente X gilt allgemein der unter (48) gegebene Ausdruck, welcher sich bei einem homogenen Körper, bei dem k' constant gleich k zu setzen ist, in folgender Gestalt schreiben lässt:

$$X = -\varepsilon k \int d\sigma\, a \int dr. \tag{77}$$

Hierin ist die durch das zweite Integralzeichen angedeutete Integration sofort auszuführen, und giebt als allgemeines Integral einfach r. Es handelt sich aber noch darum, auch die Grenzwerthe so zu wählen, wie es der Lage des Punctes p und der Gestalt des Körpers entspricht.

Befindet sich p innerhalb des Körpers, so muss jeder von p ausgehende Leitstrahl, sofern der Körper endlich und daher seine Oberfläche ganz geschlossen ist, wenigstens Einmal die Oberfläche schneiden, und wenn der Körper so gestaltet ist, dass nach manchen Richtungen hin die Leitstrahlen die Oberfläche mehr als Einmal schneiden, so muss die Anzahl der Durchschnitte jedenfalls eine ungerade sein. Betrachten wir eine nach einer solchen Richtung gehende Elementarpyramide, so liegt diese von der Spitze bis zum ersten Durchschnitte innerhalb des Körpers, vom ersten bis zum zweiten Durchschnitte ausserhalb, vom zweiten bis zum dritten innerhalb u. s. f. Da für unsere Kraftcomponente nur die Theile in Betracht kommen, welche innerhalb des Körpers liegen, so haben wir, wenn R_1, R_2, R_3 etc. die vom Puncte p aus gerechneten Abstände der aufeinander folgenden Durchschnitte sind, die Integration nach r von 0 bis R_1, von R_2 bis R_3 u. s. f. auszuführen, und bekommen dadurch:

$$(78) \qquad X = -\varepsilon k \int (R_1 - R_2 + R_3 - \text{etc.})\, a d\sigma.$$

Die hierin noch angedeutete Integration nach σ hat sich über den ganzen körperlichen Winkelraum um p zu erstrecken.

Befindet sich p ausserhalb des Körpers, so muss für jeden Leitstrahl, welcher den Körper überhaupt trifft, die Anzahl der Durchschnitte mit der Oberfläche eine gerade sein, und das Integral nach r ist in diesem Falle, wie man leicht sieht, von R_1 bis R_2, dann, (falls noch weitere Durchschnitte vorkommen), von R_3 bis R_4 u. s. f. zu nehmen. Es kommt also:

$$(78\text{a.}) \qquad X = -\varepsilon k \int (-R_1 + R_2 - \text{etc.})\, a d\sigma.$$

Das Integral nach σ bezieht sich in diesem Falle natürlich nur auf den Theil des körperlichen Winkelraumes um p, in welchem der gegebene Körper liegt. Denkt man sich also von p aus um den Körper einen Berührungskegel gelegt, so erstreckt sich das Integral nach σ über die Oeffnung dieses Kegels. Sollte der Körper die Gestalt einer ganz geschlossenen Schaale haben, und p in dem eingeschlossenen Hohlraume liegen, so würde das Integral wieder über den ganzen körperlichen Winkelraum 4π auszudehnen sein.

Befindet sich p gerade in der Oberfläche des Körpers, so ist es gleichgültig, welche der beiden letzten Gleichungen man anwendet, um das Resultat abzuleiten, wenn man nur die Richtungen, nach welchen $R_1 = 0$ gesetzt werden muss, in entsprechender Weise wählt.

In den vorstehenden Ausdrücken von X ist nun, wie in den früher gegebenen, statt des Elementes des körperlichen Winkels $d\sigma$ das Oberflächenelement $d\omega$ einzuführen. Dazu dürfen wir aber jetzt nicht ein für allemal die Gleichung (50) anwenden, sondern wir müssen zwei Fälle danach unterscheiden, ob der Leitstrahl, indem er wächst, aus dem Körper heraustritt, oder in ihn hineintritt, und ob daher der mit i bezeichnete Cosinus positiv oder negativ ist. Im ersteren Falle hat man, wie in (50), zu setzen:

$$d\sigma = \frac{i}{R^2} d\omega,$$

im letzteren Falle dagegen muss gesetzt werden:

$$d\sigma = -\frac{i}{R^2} d\omega.$$

Sehen wir nun, wie sich hierdurch die obigen Integrale gestalten. Wenn eine Elementarpyramide die Oberfläche mehrmals schneidet, so gehören zu demselben Elemente $d\sigma$ des körperlichen Winkels mehrere Oberflächenelemente $d\omega_1$, $d\omega_2$ etc., jedes mit seinem besonderen Werthe von i, so dass der Reihe von Producten $R_1 d\sigma$, $R_2 d\sigma$ etc., welche in den Integralen vorkommen, ebensoviele Producte $\frac{i_1}{R_1} d\omega_1$, $\frac{i_2}{R_2} d\omega_2$ etc. entsprechen. Untersucht man die unter den Integralzeichen vor den einzelnen R stehenden Vorzeichen, so findet man, dass in den Fällen, wo das betreffende R das Pluszeichen hat, die erste der beiden vorigen Gleichungen anzuwenden ist, während dagegen in den Fällen, wo das R das Minuszeichen hat, die zweite Gleichung, in welcher das Minuszeichen vorkommt, anzuwenden ist, so dass durch das doppelte Minuszeichen wieder das Pluszeichen entsteht. Es erhalten also alle Producte $\frac{i}{R} d\omega$ äusserlich das Pluszeichen, und da alle durch das vorige Verfahren in Rechnung kommenden Elemente $d\omega$ zusammen gerade die ganze Oberfläche des Körpers ausmachen, so entsteht aus jeder der beiden Gleichungen (78) und (78 a.) die einfache Gleichung:

$$X = -\varepsilon k \int \frac{ai}{R} d\omega,$$

worin die Integration über die Oberfläche des gegebenen Körpers auszuführen ist. Diese Gleichung stimmt mit der ersten der Gleichungen (56) überein, ist aber nach den vorstehenden Betrachtungen nicht mehr blos auf Körper von besonderer Gestalt und auf innerhalb derselben gelegene Puncte, sondern auf Körper von beliebiger

Gestalt und auf innerhalb und ausserhalb gelegene Puncte anwendbar. Ebenso verhält es sich natürlich auch mit den beiden letzten der Gleichungen (56), welche sich auf die Componenten Y und Z beziehen.

Demnach können auch die in § 20 aus den Gleichungen (56) abgeleiteten Gleichungen (62), und die aus diesen durch Addition hervorgehende Gleichung

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \varepsilon k \int \frac{i}{R^2} d\omega$$

ohne Weiteres auf beliebig gestaltete Körper und auf innerhalb und ausserhalb derselben gelegene Puncte angewandt werden.

Bei der mit dieser letzteren Gleichung vorzunehmenden Umformung dagegen, bei welcher statt des Oberflächenelementes $d\omega$ wieder das Element des körperlichen Winkels $d\sigma$ eingeführt werden soll, muss das in § 20 angewandte Verfahren etwas vervollständigt werden. Die Transformationsgleichung kann die doppelte Form

$$\frac{i}{R^2} d\omega = \pm d\sigma$$

haben, und da zu Einem Elemente $d\sigma$ soviele Elemente $d\omega$ gehören, wie die betreffende Elementarpyramide Durchschnitte mit der Oberfläche hat, so ist jedes $d\sigma$ auch in der Formel eben so oft zu setzen, und zwar mit dem Plus- oder Minuszeichen, jenachdem der Leitstrahl an der betreffenden Stelle aus dem Körper heraus- oder in ihn hineintritt. In Bezug auf die Anzahl der vorkommenden Durchschnitte sind die beiden Fälle, wo der Punct p ausserhalb oder innerhalb des Körpers liegt, von einander zu unterscheiden.

Liegt p ausserhalb des Körpers, so schneidet jede Elementarpyramide, welche überhaupt den Körper trifft, seine Oberfläche eine gerade Anzahl von Malen, und eben so oft kommt das dazugehörige $d\sigma$ in dem Integrale vor, und zwar abwechselnd mit dem negativen und positiven Vorzeichen. Unsere Gleichung nimmt also folgende Form an:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \varepsilon k \int (-1 + 1 - \text{etc.})\, d\sigma,$$

worin die unter dem Integralzeichen stehende Klammer offenbar Null wird, indem sie eine gerade Anzahl von Gliedern enthält, welche den absoluten Werthen nach gleich, und den Vorzeichen nach je zwei entgegengesetzt sind. Wir erhalten somit das mit der in § 15 bewiesenen Gleichung (43) übereinstimmende Resultat:

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0.$$

Liegt p dagegen innerhalb des Körpers, so kommt jedes Element des körperlichen Winkels eine ungerade Anzahl von Malen vor, das erste Mal positiv, und dann abwechselnd negativ und positiv. Unsere Gleichung nimmt also in diesem Falle folgende Form an:

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=\varepsilon k\int(1-1+1-\text{etc.})\,d\sigma,$$

worin die unter dem Integralzeichen stehende Klammer eine ungerade Anzahl gleicher, aber abwechselnd mit entgegengesetzten Vorzeichen versehener Glieder enthält. Diese Glieder heben sich soweit gegenseitig auf, dass nur das erste übrig bleibt, und die Gleichung sich somit auf folgende einfachere reducirt:

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=\varepsilon k\int d\sigma,$$

welche ganz dieselbe ist, wie die in § 20 gegebene Gleichung (64), und durch Ausführung der Integration giebt:

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=4\pi\varepsilon k.$$

§ 23.

Erweiterte Anwendbarkeit der auf nicht homogene Körper bezüglichen Formeln.

Um nun auch die auf nicht homogene Körper bezüglichen Formeln auf beliebig gestaltete Körper und auf Puncte innerhalb und ausserhalb derselben anwendbar zu machen, möge, dem Vorigen entsprechend, folgende Betrachtungsweise eingeführt werden.

Innerhalb des gegebenen Körpers wird, wie wir voraussetzen, die Dichtigkeit k' durch eine sich nur stetig ändernde Function der Raumcoordinaten dargestellt. Wir wollen uns nun diese Function in irgend einer stetigen Weise auch über die Grenzen des Körpers hinaus fortgesetzt denken, so dass k' eine überall stetige Function bedeute, welche nicht nur innerhalb, sondern auch ausserhalb des Körpers gültig ist. Demnach soll also in einem ausserhalb des Körpers liegenden Puncte unter k' nicht die dort wirklich stattfindende Dichtigkeit Null, sondern diejenige Dichtigkeit verstanden werden, welche dort stattfinden würde, wenn der Körper mit der durch dieselbe Function ausgedrückten Dichtigkeit bis zu diesem Puncte reichte.

Um nun für irgend einen innerhalb oder ausserhalb des gegebenen Körpers liegenden Punct p die in die x-Richtung fallende Kraftcomponente X zu bestimmen, gehen wir wieder von der Gleichung (48) aus, welche wir in folgender Form schreiben wollen:

$$X = -\varepsilon \int d\sigma\, a \int k'\, dr.$$

Hierin denken wir uns zuerst die Integration nach r, nämlich:

$$\int k'\, dr$$

ausgeführt. In diesem Integrale müssen nun wieder die Grenzen in der Weise gewählt werden, wie es der Gestalt des Körpers und der Lage des Punctes p entspricht.

Befindet sich p innerhalb des Körpers, so dass jeder Leitstrahl die Oberfläche eine ungerade Anzahl von Malen schneidet, so zerfällt das Integral in folgende Theile:

$$\int_0^{R_1} k'\, dr + \int_{R_2}^{R_3} k'\, dr + \text{etc.}$$

Statt die Summe in dieser Form zu schreiben, wollen wir uns eine Reihe von Integralen gebildet denken, deren jedes von Null bis zu einem der Durchschnitte mit der Oberfläche geht. Dabei setzen wir für die Theile des Leitstrahles, welche ausserhalb des Körpers liegen, nicht $k' = 0$, sondern wenden die Werthe von k' an, welche der angenommenen sowohl ausserhalb als innerhalb des Körpers gültigen Function entsprechen. Die so erhaltenen Integrale haben wir abwechselnd mit dem positiven und negativen Vorzeichen zu versehen, und erhalten dadurch statt der vorigen Summe die folgende gleichbedeutende Summe:

$$\int_0^{R_1} k' \, dr - \int_0^{R_2} k' \, dr + \int_0^{R_3} k' \, dr - \text{etc.}$$

Befindet sich p ausserhalb des Körpers, so dass jeder Leitstrahl die Oberfläche eine gerade Anzahl von Malen schneidet, so zerfällt das Integral in folgende Theile:

$$\int_{R_1}^{R_2} k' \, dr + \int_{R_3}^{R_4} k' \, dr + \text{etc.}$$

oder wenn wir wieder ebenso, wie vorher, verfahren:

$$-\int_0^{R_1} k' \, dr + \int_0^{R_2} k' \, dr - \int_0^{R_3} k' \, dr + \int_0^{R_4} k' \, dr - \text{etc.}$$

Durch Einsetzung dieser Ausdrücke nimmt die zur Bestimmung von X dienende Gleichung folgende Formen an. Wenn p innerhalb des Körpers liegt:

$$(79) \qquad X = -\varepsilon \int d\sigma \, a \left(\int_0^{R_1} k' \, dr - \int_0^{R_2} k' \, dr + \int_0^{R_3} k' \, dr - \text{etc.} \right).$$

Wenn p ausserhalb des Körpers liegt:

$$(79\text{a.}) \qquad X = -\varepsilon \int d\sigma \, a \left(-\int_0^{R_1} k' \, dr + \int_0^{R_2} k' \, dr - \text{etc.} \right).$$

Hierin führen wir nun wieder statt des Elementes des körperlichen Winkels $d\sigma$ das Element der Oberfläche $d\omega$ ein, nach der Gleichung:

$$d\sigma = \pm \frac{i}{R^2} \, d\omega.$$

Dabei ist, ganz so, wie im vorigen § auseinandergesetzt wurde, zu bemerken, dass zu jedem Elemente $d\sigma$ so viele Elemente $d\omega$ gehören, wie der betreffende Leitstrahl Durchschnitte mit der Oberfläche hat, also gerade so viele, wie in den beiden vorstehenden Gleichungen innerhalb der Klammern Integrale nach r stehen;

ferner, dass von den beiden Vorzeichen dann das positive anzuwenden ist, wenn das betreffende Integral das positive Vorzeichen hat, und dann das negative, wenn das Integral das negative Vorzeichen hat. Dadurch vereinfachen sich die Ausdrücke, und nehmen beide eine und dieselbe Form an, nämlich:

$$X = -\varepsilon \int d\omega\, a \frac{i}{R^2} \int_0^R k'\, dr,$$

worin R die Länge des Leitstrahles nach dem betreffenden Oberflächenelemente bedeutet, und die durch das erste Integralzeichen angedeutete Integration über die ganze Oberfläche auszuführen ist.

Statt des Integrales nach r können wir, wie es in § 19 geschehen ist, das entsprechende Integral nach $\rho = R - r$ setzen, und zur Abkürzung möge für dieses Integral wieder ein einfacher Buchstabe eingeführt werden, indem wir setzen:

$$H = \int_0^R k'\, dr = \int_0^R k'\, d\rho.$$

Wenn wir dann noch neben dem für die Componente X gefundenen Ausdrucke die entsprechenden auf die Componenten Y und Z bezüglichen Ausdrücke bilden, so erhalten wir:

$$X = -\varepsilon \int \frac{ai}{R^2} H d\omega$$

$$Y = -\varepsilon \int \frac{bi}{R^2} H d\omega$$

$$Z = -\varepsilon \int \frac{ci}{R^2} H d\omega.$$

Dieses sind die im § 19 unter (54) gegebenen Gleichungen, welche aber durch die hier ausgeführte Entwickelung eine erweiterte Bedeutung gewonnen haben, indem sie auf Körper von beliebiger Gestalt anwendbar sind, und ausserdem nicht nur für den Fall gelten, wenn p sich innerhalb des Körpers befindet, sondern auch für den Fall, wenn p ausserhalb desselben liegt.

Mit diesen Ausdrücken können wir nun dieselben Rechnungen anstellen, wie im § 21, und gelangen dadurch zu der unter (74) angeführten Gleichung:

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=\varepsilon k\int\frac{i}{R^2}d\omega.$$

Bei der weiteren Behandlung dieser letzteren Gleichung ist dann ebenso zu verfahren, wie es am Schlusse des vorigen § auseinandergesetzt wurde, und wir erhalten dadurch wieder für einen ausserhalb des Körpers liegenden Punct:

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0$$

und für einen innerhalb des Körpers gelegenen Punct:

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=4\pi\varepsilon k,$$

welche beiden Gleichungen, wie zum Schlusse dieser Auseinandersetzung noch einmal bemerkt werden möge, sich auch so schreiben lassen:

$$\Delta V=0$$

$$\Delta V=-4\pi\varepsilon k.$$

§ 24.

Specielle Betrachtung des Falles, wenn der Punct p sich in unmittelbarer Nähe der Oberfläche befindet.

Es bleibt nun noch zu untersuchen, wie die in den vorigen §§ betrachteten Differentialcoefficienten der Kraftcomponenten sich verhalten, wenn p, sei es innerhalb, sei es ausserhalb des Körpers, sich der Oberfläche unendlich nähert, ob sie auch dann stets bestimmte endliche Werthe behalten, deren Summe entweder 0 oder $4\pi\varepsilon k$ ist, oder ob sie in unendlicher Nähe der Oberfläche unendlich grosse Werthe annehmen, wodurch dann über den Werth ihrer Summe Zweifel entstehen könnten.

Wir gehen von den unter (54) gegebenen Ausdrücken von X, Y, Z aus, deren erweiterte Gültigkeit im vorigen § nachgewiesen ist. Durch Differentiation derselben erhält man die schon unter (67) angeführten Gleichungen, welche hier noch einmal wiederholt werden mögen:

$$\frac{\partial X}{\partial x}=\varepsilon\int\left[\frac{a\alpha-(4a^2-1)i}{R^3}H-\frac{ai}{R^2}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}\right]d\omega$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y}=\varepsilon\int\left[\frac{b\beta-(4b^2-1)i}{R^3}H-\frac{bi}{R^2}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}\right]d\omega$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z}=\varepsilon\int\left[\frac{c\gamma-(4c^2-1)i}{R^3}H-\frac{ci}{R^2}\cdot\frac{\partial H}{\partial z}\right]d\omega.$$

Die hierin unter den Integralzeichen stehenden Ausdrücke enthalten Potenzen der Grösse R, nämlich des Abstandes des betreffenden Oberflächenelementes $d\omega$ vom Puncte p, in den Nennern. Da nun, wenn der Punct p der Oberfläche unendlich nahe ist, für die ihm zunächst liegenden Elemente der Oberfläche R unendlich klein wird, so kann die Frage entstehen, ob dessenungeachtet alle Integrale bestimmte endliche Werthe behalten, oder ob vielleicht einzelne derselben unendlich gross werden.

Um diese Frage zu entscheiden, wollen wir wieder untersuchen, ob die Integralausdrücke sich so umgestalten lassen, dass für alle Elemente derjenigen Grösse, nach welcher integrirt werden soll, die zu integrirende Function endlich bleibt.

In dieser Beziehung lassen sich alle diejenigen Glieder der obigen Ausdrücke, welche die Grösse i als Factor haben, sehr kurz abmachen. Nämlich dadurch, dass wir das Oberflächenelement $d\omega$, welches wir in die Ausdrücke von X, Y, Z statt des körperlichen Winkels $d\sigma$ eingeführt haben, um unter den Integralzeichen nach x, y, z differentiiren zu können, nach geschehener Differentiation wieder durch das Element des körperlichen Winkels ersetzen, indem wir die bekannte Gleichung

$$d\sigma=\pm\frac{i}{R^2}d\omega$$

anwenden. Die drei Gleichungen lauten dann:

$$(81)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial X}{\partial x}=\varepsilon\displaystyle\int\frac{H}{R}\cdot\frac{a\alpha}{R^2}d\omega-\varepsilon\int\pm\left[(4a^2-1)\frac{H}{R}+a\frac{\partial H}{\partial x}\right]d\sigma\\[2ex]\dfrac{\partial Y}{\partial y}=\varepsilon\displaystyle\int\frac{H}{R}\cdot\frac{b\beta}{R^2}d\omega-\varepsilon\int\pm\left[(4b^2-1)\frac{H}{R}+b\frac{\partial H}{\partial y}\right]d\sigma\\[2ex]\dfrac{\partial Z}{\partial z}=\varepsilon\displaystyle\int\frac{H}{R}\cdot\frac{c\gamma}{R^2}d\omega-\varepsilon\int\pm\left[(4c^2-1)\frac{H}{R}+c\frac{\partial H}{\partial z}\right]d\sigma,\end{cases}$$

wobei in den auf $d\sigma$ bezüglichen Integralen von den in den eckigen Klammern stehenden Ausdrücken so viele Werthe zu nehmen sind, wie Durchschnitte des betreffenden Leitstrahles mit der Oberfläche vorkommen, und zwar mit dem $+$ oder $-$ Zeichen, je nachdem der Leitstrahl an der Durchschnittsstelle, indem er wächst, aus dem Körper heraus- oder in den Körper hineintritt.

Die in den eckigen Klammern stehenden Ausdrücke bleiben nun offenbar für alle vorkommenden Elemente $d\sigma$ endlich. Da nämlich H die Bedeutung

$$H = \int_0^R k'\, d\rho$$

hat, so sieht man leicht, dass der Bruch $\frac{H}{R}$ endlich bleiben muss, sofern die Grösse k' in dem zu betrachtenden Raume nirgends unendlich gross wird, was wir voraussetzen. Ebenso ist klar, dass die Differentialcoefficienten $\frac{\partial H}{\partial x}$, $\frac{\partial H}{\partial y}$, $\frac{\partial H}{\partial z}$ endlich bleiben müssen, sofern die Grösse k' in dem zu betrachtenden Raume keine sprungweisen Aenderungen erleidet, welche Bedingung ebenfalls bei der Art, wie im vorigen § die Grösse k' definirt wurde, erfüllt ist, selbst für Puncte, welche sich gerade in der Oberfläche befinden. Im Uebrigen kommen nur die Grössen a, b und c vor, welche Cosinus von Winkeln bedeuten, und also nicht unendlich gross werden können. Demnach ist von denjenigen in den Gleichungen (81) vorkommenden Integralen, welche sich auf $d\sigma$ beziehen, ohne Weiteres klar, dass sie die oben gestellte Bedingung, dass die zu integrirenden Ausdrücke für alle Elemente $d\sigma$ endlich bleiben, erfüllen.

Es bleiben also nur noch die drei Integrale:

$$\int \frac{H}{R} \cdot \frac{a\alpha}{R^2}\, d\omega; \quad \int \frac{H}{R} \cdot \frac{b\beta}{R^2}\, d\omega; \quad \int \frac{H}{R} \cdot \frac{c\gamma}{R^2}\, d\omega$$

zu betrachten. Von diesen kann noch eines auf die beiden anderen zurückgeführt werden, z. B. das letzte auf die beiden ersten. Wir können nämlich, gemäss der Gleichung

$$i = a\alpha + b\beta + c\gamma,$$

in dem letzten Integrale statt $c\gamma$ schreiben:

$$i - a\alpha - b\beta,$$

und dann wieder $\frac{i}{R^2}d\omega$ durch $\pm d\sigma$ ersetzen, wodurch kommt:

$$(82)\quad \int\frac{H}{R}\cdot\frac{c\gamma}{R^2}d\omega=\int\pm\frac{H}{R}d\sigma-\int\frac{H}{R}\cdot\frac{a\alpha}{R^2}d\omega-\int\frac{H}{R}\cdot\frac{b\beta}{R^2}d\omega.$$

Hierin bedarf das auf $d\sigma$ bezügliche Integral nach dem schon vorhin Gesagten keiner weiteren Besprechung, und die übrigen an der rechten Seite stehenden Integrale sind die beiden ersten der drei oben genannten Integrale.

Die nähere Untersuchung dieser Integrale wollen wir hier, um nicht zu weitläufig zu werden, nur in der Weise ausführen, dass wir für die Coordinatenaxen bestimmte, bei der Betrachtung bequeme Richtungen wählen. Wir denken uns von dem zu betrachtenden Puncte p eine Normale auf die Oberfläche gefällt, und wählen dann die Richtung der z-Axe dieser Normale parallel. Da der Anfangspunct der Coordinaten beliebig angenommen werden kann, ohne dass dadurch die Allgemeinheit der Untersuchung eine weitere Beschränkung erleidet, so wollen wir den Fusspunct der Normale als Anfangspunct der Coordinaten und demnach die Normale selbst als z-Axe und die im Fusspuncte an die Oberfläche gelegte Tangentialebene als xy-Ebene nehmen. Unter diesen Umständen sind die Coordinaten x und y des Punctes p gleich Null, und die unter (58) § 20 zur Bestimmung von a und b gegebenen Ausdrücke lauten daher für einen Punct der Oberfläche, dessen Coordinaten ξ, η, ζ sind:

$$(83)\qquad a=\frac{\xi}{R};\quad b=\frac{\eta}{R},$$

welche Ausdrücke in unsere Integrale einzusetzen sind.

Was die Ausdehnung der Integrationen betrifft, so können wir dieselbe auf den Theil der Oberfläche beschränken, dessen Elemente sehr nahe an p liegen, denn für alle entfernteren Elemente der Oberfläche, für welche R nicht mehr unendlich klein ist, können die unter den Integralzeichen stehenden Ausdrücke nicht unendlich gross werden, und die den entfernteren Theilen der Oberfläche entsprechenden Theile der Integrale bedürfen daher keiner besonderen Untersuchung. Die so beschränkten Integrale wollen wir mit A und B bezeichnen, so dass wir nach Einführung der vorher gegebenen Werthe von a und b schreiben können:

$$A = \int \frac{H}{R} \cdot \frac{\xi \alpha}{R^3} d\omega; \quad B = \int \frac{H}{R} \cdot \frac{\eta \beta}{R^3} d\omega. \tag{84}$$

worin die Integrale sich über ein sehr kleines Flächenstück um den Anfangspunct der Coordinaten erstrecken sollen.

Wenn nun die Gleichung der Oberfläche in der Form

$$\zeta = f(\xi, \eta) \tag{85}$$

gegeben ist, so sind die Cosinus der Winkel, welche die an irgend einem Puncte der Fläche errichtete Normale mit den Coordinatenaxen bildet, durch folgende Formeln bestimmt:

$$\left|\begin{aligned} \alpha &= -\frac{\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)^2}} \\ \beta &= -\frac{\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)^2}} \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)^2}}. \end{aligned}\right. \tag{86}$$

Mit Hülfe der letzten dieser drei Gleichungen gehen die beiden ersten über in:

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= -\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \gamma \\ \beta &= -\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \gamma. \end{aligned}\right. \tag{87}$$

Setzen wir den Werth von α in die erste der Gleichungen (84) ein, so kommt:

$$A = -\int \frac{H}{R} \cdot \frac{\xi \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}}{R^3} \gamma d\omega. \tag{88}$$

Das Product $\gamma d\omega$ ist die Projection des Elementes $d\omega$ auf die xy-Ebene, oder, wenn wir uns das ganze betrachtete Flächenstück auf die xy-Ebene projicirt denken, so können $\gamma d\omega$ als ein Element dieser Projection ansehen, und dann die Integration auf die letztere beziehen. Wir führen dazu Polarcoordinaten in der xy-Ebene um den Anfangspunct der rechtwinkligen Coordinaten ein, indem wir den nach irgend einem Puncte der Ebene gezogenen Leitstrahl mit u, und den Winkel, welchen dieser mit der x-Axe bildet, mit φ bezeichnen. Dann wird ein Element der Ebene dargestellt durch:

$$u du\, d\varphi$$

und diesen Ausdruck können wir daher für $\gamma d\omega$ setzen. Wenn wir dabei zugleich berücksichtigen, dass

$$\xi = u \cos \varphi$$

ist, so geht (88) über in:

$$(89) \qquad A = -\iint \frac{H}{R} \cdot \frac{\cos \varphi \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} u^2}{R^3} du\, d\varphi.$$

Hierin müssen wir endlich noch den Differentialcoefficienten $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$ näher betrachten. Im Anfangspuncte der Coordinaten sind, da die xy-Ebene in diesem Puncte Tangentialebene ist, die beiden Differentialcoefficienten $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ gleich Null, und für die Umgebung dieses Punctes können wir, wenn die hier stattfindende Krümmung der Oberfläche als endlich vorausgesetzt wird, setzen:

$$(90) \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = mu; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = nu,$$

worin m und n zwei Functionen von u und φ sind, welche für kleine Werthe von u nicht unendlich gross werden. Die Gleichung (89) lässt sich also schreiben:

$$(91) \qquad A = -\iint \frac{H}{R} \cdot \frac{m \cos \varphi \,.\, u^3}{R^3} du\, d\varphi.$$

In derselben Weise kann man auch das Integral B behandeln, und erhält dadurch

$$(92) \qquad B = -\iint \frac{H}{R} \cdot \frac{n \sin \varphi \,.\, u^3}{R^3}\, du\, d\varphi.$$

Da nun die Grösse R, welche durch die Gleichung

$$R = \sqrt{u^2 + (\zeta - z)^2}$$

bestimmt ist, nicht kleiner als u werden kann, so kann der Bruch $\frac{u^3}{R^3}$ nicht unendlich gross werden, und dasselbe gilt auch, wie schon erwähnt, von dem Bruche $\frac{H}{R}$. Demnach sind die Integrale A und B in eine Form gebracht, in welcher sie der Bedingung genügen, dass die zu integrirende Function für alle vorkommenden Werthe der Veränderlichen, nach welchen integrirt werden soll, endlich bleibt.

Nachdem gezeigt ist, dass die Differentialcoefficienten $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial y}$, $\frac{\partial Z}{\partial z}$ auch bei unendlicher Annäherung an die Oberfläche immer bestimmte endliche Werthe behalten, kann auch kein Zweifel darüber entstehen, dass die mit $-\Delta V$ bezeichnete Summe dieser drei Differentialcoefficienten im äusseren und inneren Raume die Werthe 0. und $4\pi\varepsilon k$ bis dicht an die Oberfläche behält. Im Momente, wo der Punct p die Oberfläche durchschreitet, und aus dem äusseren leeren Raume in den Körper hineintritt, ändern die Elemente $d\sigma$ zum Theil plötzlich ihr Vorzeichen, und dadurch entsteht die sprungweise Aenderung des Werthes von ΔV.

§ 25.

Einfluss des Umstandes, wenn die Krümmung der Oberfläche an der betreffenden Stelle unendlich gross ist.

Bei der vorigen Auseinandersetzung wurde vorausgesetzt, dass die Krümmung an der betreffenden Stelle endlich sei; aber auch diese Voraussetzung ist keine durchaus nothwendige. Nehmen wir an, dass statt der Gleichungen (90) die folgenden Gleichungen gelten:

(93) $$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = m u^{\mu}; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = n u^{\nu},$$

so ist, wenn die Exponenten μ und $\nu < 1$ sind, die Krümmung an dem betreffenden Puncte, welcher zugleich der Anfangspunct der Coordinaten ist, unendlich gross. Dessenungeachtet behalten die Integrale A und B bestimmt angebbare endliche Werthe, so lange nur die Exponenten angebbare positive Werthe haben.

Setzen wir nämlich in (89) für $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$ die obengegebene Formel ein, so kommt statt der Gleichung (91), wenn wir zugleich für R seinen Werth substituiren:

$$A = -\iint \frac{H}{R} \cdot \frac{m \cos \varphi \, u^{2+\mu}}{[u^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}} du \, d\varphi.$$

Hierin wollen wir die neue Veränderliche u' einführen mit der Bedeutung:

$$u' = u^{\mu},$$

woraus folgt:

$$u = u'^{\frac{1}{\mu}}$$

$$du = \frac{1}{\mu} u'^{\frac{1}{\mu} - 1} du'.$$

Dadurch geht der Ausdruck über in:

(94) $$A = -\frac{1}{\mu} \iint \frac{H}{R} \cdot \frac{m \cos \varphi \, u'^{\frac{3}{\mu}}}{\left[u'^{\frac{2}{\mu}} + (\zeta - z)^2\right]^{\frac{3}{2}}} du' \, d\varphi.$$

Hierin kann der Nenner des zweiten unter den Integralzeichen stehenden Bruches nicht kleiner als $u'^{\frac{3}{\mu}}$ werden, und die zu integrirende Function bleibt also endlich. Dasselbe gilt natürlich auch von dem Integrale B, welches sich vom vorigen nur dadurch unterscheidet, dass n an die Stelle von m, ν an die Stelle von μ und $\sin \varphi$ an die Stelle von $\cos \varphi$ tritt.

Nur dann hören diese Schlüsse auf gültig zu sein, wenn die Körper-Oberfläche an der Stelle, wo der Punct p sich befindet, so gestaltet ist, dass auch die Gleichungen (93) mit angebbaren positiven Werthen von μ und ν nicht mehr angewandt werden können, wenn also, wie GAUSS es bei einer anderen Gelegenheit ausdrückt,[1] die Differentialcoefficienten $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ mit keiner Potenz von u mehr zu einerlei Ordnung gehören. Dieses ist insbesondere der Fall bei absolut scharfen Spitzen und Kanten, bei denen es gar keine bestimmte Tangentialebene giebt. Indessen sind auch Fälle denkbar, wo noch eine bestimmte Tangentialebene vorhanden ist, und doch die Gleichungen (93) nicht gelten. GAUSS führt als ein Beispiel der Art an, wenn die Differentialcoefficienten von der Ordnung $\frac{1}{\log \frac{1}{u}}$ wären. Solche Fälle können in Bezug auf die vorliegende Frage denen zugesellt werden, wo die Fläche wirkliche Spitzen und Kanten bildet. Was diese letzteren Fälle anbetrifft, so kann man sich leicht davon überzeugen, dass bei unendlicher Annäherung an eine Spitze oder Kante die Differentialcoefficienten $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial y}$ und $\frac{\partial Z}{\partial z}$ einzeln unendlich gross werden; und wenn in ihrer Summe die unendlich grossen Glieder sich der Form nach auch gegenseitig aufheben, so kann man doch einer algebraischen Summe, in der unendlich grosse Glieder vorkommen, nicht ohne Weiteres einen bestimmten endlichen Werth zuschreiben.

§ 26.

Zurückführung des Falles, wo in der Nähe von p eine sprungweise Aenderung der Dichtigkeit stattfindet, auf den vorigen.

Auf den in den beiden vorigen §§ betrachteten Fall, wo der Punct p sich in der Nähe der Oberfläche befindet, lässt sich auch der Fall zurückführen, wo p zwar tief im Innern des Körpers liegt, aber die Dichtigkeit des Körpers in der Nähe dieses Punctes eine sprungweise Aenderung erleidet.

Es sei ein Körper gegeben, der durch eine innere Fläche in zwei Theile getheilt wird, welche sich in Bezug auf ihre Dichtigkeit

1) Allgemeine Lehrsätze u. s. w. S. 25.

verschieden verhalten. Die Dichtigkeit des einen sei durch k_1 dargestellt, welches Zeichen eine Function der Raumcoordinaten bedeuten soll, die sich nur stetig ändert. Die Dichtigkeit des andern sei $k_1 + k_2$, worin k_1 dieselbe Function ist, wie vorher, und k_2 eine andere Function, die sich, soweit sie gilt, ebenfalls nur stetig ändert, die aber von jener Fläche an, obwohl sie in derselben noch einen endlichen Werth hat, nach der einen Seite hin ungültig wird, so dass also der Werth, welchen k_2 in der Fläche hat, die Grösse des Sprunges darstellt. Dann denken wir uns in dem Raume, wo die Dichtigkeit $k_1 + k_2$ ist, zwei Körper so über einander gelagert, dass sie beide denselben Raum ausfüllen, einen mit der Dichtigkeit k_1 und den anderen mit der Dichtigkeit k_2. Der erstere bildet mit dem an der entgegengesetzten Seite der Fläche befindlichen Körpertheile einen zusammenhängenden Körper, dessen Dichtigkeit überall durch die stetige Function k_1 dargestellt wird, und welchen wir C_1 nennen wollen. Den letzteren dagegen, mit der Dichtigkeit k_2, betrachten wir als einen für sich bestehenden Körper, welcher C_2 heisse, und welcher jene Trennungsfläche als einen Theil seiner Oberfläche hat.

Hiernach kann man sich die Potentialfunction V des ganzen gegebenen Körpers in die Potentialfunctionen V_1 und V_2 der beiden Körper C_1 und C_2 zerlegt denken. Dann hat man:

$$V = V_1 + V_2$$

und daraus folgt:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2.$$

Die erste der beiden rechts stehenden Grössen ändert sich, wenn der Punct p die Trennungsfläche durchschreitet, nur stetig, weil der Punct dabei im Innern des Körpers C_1 bleibt, und sie wird an beiden Seiten der Fläche durch $-4\pi\varepsilon k_1$ dargestellt. Die zweite Grösse dagegen ändert sich sprungweise. An der einen Seite der Fläche (d. h. ausserhalb des Körpers C_2), bis dicht an die Fläche hinan, ist sie $= 0$; an der anderen Seite (d. h. innerhalb des Körpers C_2) ebenfalls bis dicht an die Fläche hinan, ist sie $= -4\pi\varepsilon k_2$. Wir erhalten also im Ganzen:

an der einen Seite der Fläche $\Delta V = -4\pi\varepsilon k_1$

„ „ andern „ „ „ $\Delta V = -4\pi\varepsilon (k_1 + k_2)$.

Bezeichnen wir, wie früher, die ganze Dichtigkeit mit k, wobei k aber jetzt eine Function darstellt, die eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet, indem an der einen Seite der Fläche $k = k_1$, und an der andern $k = k_1 + k_2$ ist, so können wir die beiden vorigen Gleichungen in Eine überall gültige Gleichung zusammenfassen:

$$\Delta V = -4\pi\varepsilon k,$$

welches wieder unsere Gleichung (II) ist. Die Grösse ΔV ist also überall ganz so bestimmt, wie die Dichtigkeit k, und erleidet auch mit dieser die gleichen, entweder stetigen oder sprungweisen Aenderungen.

Nur in dem Falle, wo in unmittelbarer Nähe des Punctes p eine sprungweise Aenderung der Dichtigkeit stattfindet, und zugleich die Fläche, in welcher sie stattfindet, an der betreffenden Stelle eine Spitze oder Kante bildet, tritt eine Unbestimmtheit ein, gerade so, wie in dem entsprechenden Falle in der Nähe der Oberfläche.

§ 27.

Anhäufung eines Agens auf einer Fläche.

Es kommt zuweilen der Fall vor, dass man eine Quantität eines Agens zu betrachten hat, von welcher man annimmt, dass sie nicht einen Raum stetig ausfüllt, sondern nur über eine Fläche stetig verbreitet ist. So ist es z. B. bekannt, dass Electricität, welche einem leitenden Körper mitgetheilt wird, im Gleichgewichtszustande nicht das Innere des Körpers erfüllt, sondern nur an der Oberfläche desselben angehäuft ist. Es kann zwar in der Wirklichkeit nicht eine mathematische Fläche sein, welche die Electricitätsmenge enthält, sondern man muss sich eine Schicht von sehr geringer Dicke denken; indessen in der Rechnung wird bei den meisten Untersuchungen diese Dicke vernachlässigt, und man denkt sich die ganze Electricitätsmenge in einer mathematischen Fläche befindlich.

Wir müssen nun untersuchen, ob unter dieser Bedingung die Potentialfunction und ihre Differentialcoefficienten neue bemerkenswerthe Eigenschaften zeigen.

§ 28.

Bestimmung der Potentialfunction für eine gleichförmig mit dem Agens bedeckte ebene Figur.

Wir wollen zunächst wieder einen einfachen speciellen Fall zur Betrachtung auswählen, welcher besonders geeignet ist, die mit dieser Bedingung verknüpften Eigenthümlichkeiten klar hervortreten zu lassen, und nach dessen Behandlung dann die allgemeine Betrachtung kürzer gefasst werden kann, als es sonst ohne Beeinträchtigung der Verständlichkeit möglich wäre. Wir wollen nämlich vorläufig annehmen, dass die mit dem Agens bedeckte Fläche ein Stück einer Ebene, und dass die Vertheilung des Agens über dieselbe gleichförmig sei.

Wenn die auf einem Elemente $d\omega$ der Fläche befindliche Menge des Agens $h d\omega$ ist, so nennen wir h die Dichtigkeit des Agens, und wo es zur Unterscheidung nothwendig ist, können wir, wie es schon in § 12 geschehen ist, diese Dichtigkeit, welche sich auf eine Fläche bezieht, im Gegensatze zu der gewöhnlichen, welche sich auf den körperlichen Raum bezieht, Flächendichtigkeit nennen. Ist nun r der Abstand des Elementes $d\omega$ von dem Puncte p, so haben wir zur Bestimmung der Potentialfunction die Gleichung:

$$V = \varepsilon h \int \frac{d\omega}{r}, \tag{95}$$

worin die Integration über den Flächeninhalt der ebenen Figur, welche mit dem Agens bedeckt ist, ausgeführt werden muss.

Um das Integral in eine für unseren Zweck geeignete Form zu bringen, nehmen wir die Ebene, welche die Figur enthält, zur xy-Ebene unseres Coordinatensystemes. Wenn wir dann vom Puncte p mit den Coordinaten x, y und z ein Perpendikel auf diese Ebene fällen, und dessen Fusspunct betrachten, so hat dieser ebenfalls die Coordinaten x und y, während seine dritte Coordinate Null ist. Diesen Fusspunct wollen wir nun zum Mittelpuncte eines Systemes von Polarcoordinaten in der Ebene nehmen, in welchem der Leitstrahl u, und der Winkel desselben mit der x-Axe φ heissen soll. Dann können wir setzen:

$$d\omega = u\, du\, d\varphi,$$

und zugleich haben wir, wenn ξ und η die rechtwinkligen Coordinaten dieses Flächenelementes sind:

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} \\ r &= \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2} \\ &= \sqrt{u^2 + z^2} \end{aligned}$$

und die Gleichung für V geht daher über in:

$$V = \varepsilon h \iint \frac{u\,du\,d\varphi}{\sqrt{u^2 + z^2}}. \tag{96}$$

Hierin lässt sich die Integration nach u sogleich ausführen. Man hat nämlich allgemein:

$$\int \frac{u\,du}{\sqrt{u^2 + z^2}} = \sqrt{u^2 + z^2}$$

und es kommt nur darauf an, die den Umständen entsprechenden Grenzwerthe in diese Formel einzusetzen. Dabei macht es einen wesentlichen Unterschied, ob der Fusspunct des von p auf die Ebene gefällten Perpendikels innerhalb oder ausserhalb der mit dem Agens bedeckten Figur liegt. Für unsere weiteren Betrachtungen ist nur der Fall von Interesse, wo er innerhalb liegt, und diesen Fall wollen wir daher voraussetzen.

Dann ist das Integral vom Anfangspuncte des Leitstrahles bis zu seinem Durchschnittspuncte mit dem Umfange der Figur zu nehmen, und wenn die Figur so gestaltet ist, dass der Leitstrahl den Umfang mehrmals schneidet, was dann jedenfalls eine ungerade Anzahl von Malen geschehen muss, so kommen noch die Stücke vom zweiten bis zum dritten Durchschnitte, dann vom vierten bis zum fünften Durchschnitte u. s. f. in Betracht. Nennen wir also die den einzelnen Durchschnitten entsprechenden Werthe von u der Reihe nach U_1, U_2 etc. und setzen ferner zur Abkürzung:

$$R_1 = \sqrt{U_1{}^2 + z^2}; \quad R_2 = \sqrt{U_2{}^2 + z^2} \text{ etc.}$$

so kommt:

$$V = \varepsilon h \int (-\sqrt{z^2} + R_1 - R_2 + R_3 - \text{etc.})\, d\varphi.$$

In dem ersten Gliede innerhalb der Klammer dürfen wir nicht einfach z an die Stelle von $\sqrt{z^2}$ setzen, weil diese Wurzel, welche ein specieller Werth des Abstandes r ist, stets positiv sein muss, während z positive und negative Werthe haben kann. Ich werde daher, um dieses anzudeuten, den Wurzelausdruck in der Formel beibehalten.

Da die Grösse $\sqrt{z^2}$ von φ unabhängig ist, so können wir bei diesem Gliede auch die zweite Integration ohne Weiteres ausführen, und erhalten dadurch, indem das Integral von 0 bis 2π zu nehmen ist:

$$(97) \qquad V = -2\pi\varepsilon h\sqrt{z^2} + \varepsilon h\int (R_1 - R_2 + R_3 - \text{etc.})\, d\varphi.$$

Das hierin noch vorkommende Integral können wir in eine andere Gestalt bringen, in welcher es für die beabsichtigten Differentiationen geeignet ist. Wir führen dazu statt des Winkelelementes $d\varphi$ das zwischen seinen Schenkeln liegende Element ds des Umfanges ein. Ist i' der Cosinus des Winkels, welchen die auf ds errichtete Normale mit dem Leitstrahle bildet, wobei die Normale nach der Aussenseite des Umfanges, und der Leitstrahl nach der Seite hin, wohin er wächst, betrachtet wird, so hat man:

$$(98) \qquad \frac{i'}{U}\, ds = \pm\, d\varphi,$$

worin, sofern die Elemente ds und $d\varphi$ beide als positiv vorausgesetzt werden, das obere oder das untere Vorzeichen zu nehmen ist, jenachdem der Leitstrahl, indem er wächst, den Umfang von innen nach aussen oder umgekehrt schneidet. Diese Vorzeichen sind dieselben, wie die, mit welchen die in dem Integrale vorkommenden Grössen R_1, R_2, R_3 etc. behaftet sind. Wenn man daher für irgend eins der Producte $\pm R\, d\varphi$ das Product $\frac{R}{U} i'\, ds$ substituirt, so muss man diesem letzteren äusserlich immer das Pluszeichen geben. Da ferner in dem Integrale für jedes Winkelelement $d\varphi$ gerade so viele verschiedene Werthe von R vorkommen, als zu dem Winkelelemente verschiedene Bogenelemente gehören, so bilden alle Bogenelemente, die durch jene Substitution eingeführt werden, zusammen den ganzen Umfang der Figur. Demnach kann man schreiben:

$$(99) \qquad V = -2\pi\varepsilon h\sqrt{z^2} + \varepsilon h\int\frac{R}{U}\,i'\,ds,$$

worin das Integral über den ganzen Umfang auszudehnen ist.[1])

1) Der Vollständigkeit wegen will ich auch anführen, wie die Formel sich gestaltet, wenn der Fusspunct des von p auf die Ebene gefällten Perpendikels ausserhalb der mit dem Agens bedeckten Figur liegt. In diesem Falle muss für jeden Leitstrahl, welcher die Figur überhaupt trifft, die Anzahl der Durchschnitte mit dem Umfange eine gerade sein, und die Integration nach u in der Gleichung (96) bezieht sich auf das Stück vom ersten bis zum zweiten Durchschnitte, dann, falls noch mehr Durchschnitte vorkommen, vom dritten bis zum vierten u. s. f. Man erhält daher statt der Gleichung (97):

$$(a) \qquad V = \varepsilon h\int(-R_1 + R_2 - \text{etc.})\,d\varphi,$$

worin die Integration nach φ sich nur über den Winkelraum erstreckt, welcher die Figur einschliesst. Wenn man in dieser Gleichung für das Winkelelement $d\varphi$ das Bogenelement ds einführt, so erhält man statt (99):

$$(b) \qquad V = \varepsilon h\int\frac{R}{U}\,i'\,ds.$$

Sollte der Fusspunct in unmittelbarer Nähe des Umfanges liegen, so dass für gewisse Bogenelemente die Grösse U unendlich klein wird, so ist (mit Ausnahme des Falles, wo $z = 0$ ist, so dass R mit U zugleich verschwindet) die in den Ausdrücken (99) und (b) vorkommende Form des Integrals zur Ausführung der Rechnung nicht geeignet. Um sich jedoch einen Ueberblick davon zu verschaffen, welche Werthe das Integral in solchen Fällen annimmt, kann man die ursprünglichen Formen des Integrals, welche in (97) und (a) enthalten sind, betrachten. Wenn man sich dann den Fusspunct so bewegt denkt, dass er den Umfang der Figur von aussen nach innen durchschreitet, so findet man, dass der Werth, welchen das in (97) vorkommende Integral an der Innenseite unendlich nahe am Umfange hat, um $2\pi\sqrt{z^2}$ grösser ist, als der Werth, welchen das in (a) vorkommende Integral an der Aussenseite unendlich nahe am Umfange hat, und dass folglich der mit dem Durchschreiten des Umfanges verbundene plötzliche Uebergang von dem einen Integral zum anderen einer sprungweisen Werthzunahme des Integrals um $2\pi\sqrt{z^2}$ entspricht. Dadurch wird der Umstand, dass in der Gleichung (97) das Product $2\pi\varepsilon h\sqrt{z^2}$ als ein mit dem Minuszeichen versehenes besonderes Glied vorkommt, während es in der Gleichung (a) fehlt, ausgeglichen, so dass der ganze Werth von V keine sprungweise Aenderung erleidet.

§ 29.

Verhalten der Differentialcoefficienten erster Ordnung der Potentialfunction.

Wir wollen nun mit Hülfe der letzten Gleichung die Differentialcoefficienten der Potentialfunction bilden.

Da die Grösse s, nach welcher integrirt werden soll, von den Coordinaten x, y und z des Punctes p unabhängig ist, so können wir unter dem Integralzeichen differentiiren. Die Formeln von U, R und i', welche dazu angewandt werden müssen, lassen sich ohne Weiteres hinschreiben. Bezeichnen wir die Coordinaten des Bogenelementes ds mit ξ' und η' und die Cosinus der Winkel, welche die auf dem Elemente errichtete Normale mit der x- und y-Axe bildet, mit α' und β', so kommt:

$$(100)\quad \left|\begin{aligned} U &= \sqrt{(\xi'-x)^2+(\eta'-y)^2} \\ R &= \sqrt{(\xi'-x)^2+(\eta'-y)^2+z^2} \\ i' &= \frac{(\xi'-x)\,\alpha'+(\eta'-y)\,\beta'}{U} \end{aligned}\right.$$

Wenn man, wie wir es im Folgenden thun wollen, voraussetzt, dass der Fusspunct des von p gefällten Perpendikels in endlicher Entfernung vom Umfange der Figur liegt, so sind U und R für alle bei der Integration vorkommenden Elemente endliche Grössen.

Differentiiren wir nun unter Berücksichtigung der vorigen Gleichungen die Gleichung (99) zuerst nach z, so bekommen wir:

$$(101)\quad \frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi\varepsilon h\frac{z}{\sqrt{z^2}} + \varepsilon h z\int\frac{i'}{R\,U}\,ds,$$

worin der Bruch $\frac{z}{\sqrt{z^2}}$ gleich $+1$ oder -1 ist, jenachdem z positiv oder negativ ist.

Die Hauptfrage in Bezug auf den für $\frac{\partial V}{\partial z}$ gefundenen Ausdruck ist die, wie sich derselbe in unmittelbarer Nähe der mit dem Agens bedeckten Fläche verhält. Lassen wir z unendlich klein und Null werden, so wird das zweite Glied des Ausdruckes, welches den Factor z und ausserdem nur solche Factoren hat, die endlich bleiben, ebenfalls unendlich klein und Null. Anders ist es mit dem ersten Gliede. Dieses ist an der Seite der Fläche, wo z positiv ist, constant gleich $-2\pi\varepsilon h$, und an der anderen Seite, wo z negativ ist, constant $+2\pi\varepsilon h$. Es ändert also seinen Werth in dem Moment, wo p die Fläche durchschreitet, sprungweise um $4\pi\varepsilon h$. Bezeichnen wir die Grenzwerthe, denen $\frac{\partial V}{\partial z}$ sich nähert, wenn p von der positiven oder von der negativen Seite aus unendlich nahe an die Fläche heranrückt, resp. mit $\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{+0}$ und $\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{-0}$ [1]) so kommt:

$$\text{(102)} \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{+0} = -2\pi\varepsilon h; \ \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{-0} = +2\pi\varepsilon h$$

$$\text{(103)} \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{-0} = -4\pi\varepsilon h.$$

Die letztere Gleichung lässt sich, wie wir weiterhin sehen werden, auch auf den allgemeinen Fall, wo die Fläche gekrümmt, und die Vertheilung des Agens über dieselbe ungleichförmig ist, ausdehnen, und bildet eine neue wichtige Eigenschaft der Potentialfunction.

Wir können nun die Gleichung (99) ebenso unter Berücksichtigung der Gleichungen (100) nach x und y differentiiren. Führen wir dieses zuerst nach x aus, so erhalten wir:

$$\text{(104)} \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = \varepsilon h \int \left[\frac{(R^2 + z^2)(\xi' - x)}{R U^3} i' - \frac{R}{U^2} \alpha' \right] ds.$$

Dieser Ausdruck lässt sich in eine einfachere Form bringen. Es ist nämlich:

$$\frac{R}{U^2} = \frac{R^2}{R U^2} = \frac{U^2 + z^2}{R U^2} = \frac{1}{R} + \frac{z^2}{R U^2},$$

und wenn man dieses in dem zweiten unter dem Integralzeichen stehenden Gliede einsetzt, so kann man schreiben:

---

1) Man könnte gegen diese von mir angewandte und auch von Kötteritzsch, Riemann u. A. adoptirte Bezeichnung vielleicht einwenden, dass es sich nicht um den Fall handelt, wo der Abstand absolut Null und der Punct daher in der Fläche selbst gelegen ist, sondern um den, wo der Abstand unendlich klein wird; indessen glaube ich, dass schon das vor der Null stehende $+$ oder $-$ Zeichen deutlich genug erkennen lässt, dass nicht einfach der Abstand Null gemeint ist, bei welchem das Vorzeichen keinen Sinn haben würde, sondern dass die Annäherung an den Abstand Null, welche von der positiven oder negativen Seite aus stattfinden kann, angedeutet werden soll. Diese Andeutung glaubte ich auf andere Art nicht eben so einfach machen zu können.

$$(105)\quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\varepsilon h \int \frac{\alpha'}{R} ds + \varepsilon h \int \left[\frac{(R^2+z^2)(\xi'-x)}{R U^3} i'' - \frac{z^2}{R U^2} \alpha' \right] ds.$$

Es lässt sich nun der Satz beweisen, dass das hierin vorkommende zweite Integral für jede geschlossene Curve Null ist. Da dieser Beweis nicht ganz kurz ist, und daher den Gang der Auseinandersetzung an dieser Stelle in einer die Uebersichtlichkeit störenden Weise unterbrechen würde, so will ich ihn in einem Zusatze führen.[1]) Unter Voraussetzung dieses Satzes bleibt von der rechten Seite der vorstehenden Gleichung nur das erste Glied übrig. Da der Differentialcoefficient nach y ganz dieselbe Behandlungsweise zulässt, so können wir die beiden sich ergebenden Ausdrücke gleich zusammenschreiben:

$$(106)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -\varepsilon h \int \frac{\alpha'}{R} ds \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= -\varepsilon h \int \frac{\beta'}{R} ds. \end{aligned} \right.$$

Man sieht sogleich, dass diese Ausdrücke sich, wenn p an die Fläche heranrückt und sie durchschreitet, nirgends sprungweise ändern, und dass sie daher auch anwendbar sind, wenn p in der Fläche selbst liegt.

Nachdem für die drei Coordinatenrichtungen, deren eine als senkrecht zur Ebene und die beiden anderen als parallel der Ebene vorausgesetzt wurden, die Differentialcoefficienten bestimmt sind, kann man sofort auch den Differentialcoefficienten nach irgend einer anderen Richtung bilden.

Es sei durch p eine beliebige Gerade gezogen, in welcher wir uns p beweglich denken wollen. Der Abstand des Punctes p von demjenigen Puncte, wo die Gerade die Ebene schneidet, und zwar nach der einen Seite positiv und nach der andern negativ gerechnet, sei mit l bezeichnet, dann ist es der Differentialcoefficient $\frac{\partial V}{\partial l}$, um den es sich handelt. Die Beziehung zwischen diesem Differentialcoefficienten $\frac{\partial V}{\partial l}$ und den auf die Coordinatenrichtungen bezüglichen Differentialcoefficienten $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ bestimmt sich ebenso,

---

1) Siehe Zusatz II. am Ende des Buches.

wie die in § 3 besprochene Beziehung zwischen $\frac{\partial U}{\partial s}$ und $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$. Wir schreiben nämlich zunächst:

$$\frac{\partial V}{\partial l} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial l}.$$

Nun ist aber, wenn φ, ψ, ϑ die Winkel bedeuten, welche die Gerade l mit den Coordinatenrichtungen bildet, zu setzen:

$$\frac{\partial x}{\partial l} = \cos\varphi; \quad \frac{\partial y}{\partial l} = \cos\psi; \quad \frac{\partial z}{\partial l} = \cos\vartheta,$$

und dadurch geht die vorige Gleichung über in:

$$\frac{\partial V}{\partial l} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial V}{\partial y}\cos\psi + \frac{\partial V}{\partial z}\cos\vartheta, \tag{107}$$

und es lässt sich somit, nachdem die drei Differentialcoefficienten $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$ und $\frac{\partial V}{\partial z}$ bestimmt sind, der auf eine beliebige andere Richtung bezügliche Differentialcoefficient ohne Weiteres hinschreiben.

Fragen wir insbesondere, wie der Differentialcoefficient $\frac{\partial V}{\partial l}$ sich ändert, wenn der Punct p die Fläche durchschreitet, so können wir folgende Gleichung bilden:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial l}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial l}\right)_{-0} = \left\{\begin{aligned} &\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{-0}\right]\cos\varphi \\ +&\left[\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{-0}\right]\cos\psi \\ +&\left[\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{-0}\right]\cos\vartheta \end{aligned}\right\}$$

Nun haben wir vorher gesehen, das die Differentialcoefficienten $\frac{\partial V}{\partial x}$ und $\frac{\partial V}{\partial y}$ beim Durchschreiten der Fläche keine sprungweise Aenderung erleiden, und demgemäss sind die in den beiden ersten eckigen Klammern stehenden Differenzen gleich Null. Die in der dritten eckigen Klammer stehende Differenz haben wir zu $-4\pi\varepsilon h$ bestimmt. Wir erhalten also für den Differentialcoefficienten, welcher nach einer Richtung genommen ist, die mit der auf der Fläche errichteten Normale den Winkel ϑ bildet, folgende Gleichung:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial l}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial l}\right)_{-0} = -4\pi\varepsilon h\cos\vartheta. \tag{108}$$

§ 30.

Formeln, zu welchen man gelangt, wenn man den in Gleichung (95) gegebenen Ausdruck der Potentialfunction differentiirt.

Im vorigen § sind die Differentialcoefficienten der Potentialfunction einer gleichförmig mit dem Agens bedeckten ebenen Figur nicht unmittelbar aus dem ersten, in Gleichung (95) gegebenen Ausdrucke der Potentialfunction abgeleitet, sondern vielmehr aus dem in Gleichung (99) gegebenen, welcher aus jenem ersten dadurch entstanden war, dass wir die Integration nach u vollzogen, und dann statt des Winkelelementes $d\varphi$ das Element des Umfanges ds eingeführt hatten.

Wir wollen nun aber noch einmal zu der Gleichung (95), nämlich:

$$V = \varepsilon h \int \frac{d\omega}{r},$$

zurückkehren, um zu sehen, zu was für Formeln wir gelangen, wenn wir diese Gleichung differentiiren. Berücksichtigt man, dass zu setzen ist:

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2},$$

so erhält man durch die Differentiationen:

$$(109) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \varepsilon h \int \frac{\xi - x}{r^3}\, d\omega \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \varepsilon h \int \frac{\eta - y}{r^3}\, d\omega \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= -\, \varepsilon h \int \frac{z}{r^3}\, d\omega. \end{aligned} \right.$$

Zu denselben Formeln, nur mit entgegengesetzten Vorzeichen, gelangt man auch, wenn man direct die Kraftcomponenten X, Y und Z bestimmt.

Denken wir uns nun in diesen Formeln den durch die Coordinate z bestimmten Abstand des Punctes p von der Ebene unendlich klein und Null werdend, so wird für diejenigen Flächenelemente, welche den Fusspunct des von p auf die Ebene gefällten Perpendikels zunächst umgeben, für welche also die Grössen $\xi - x$ und $\eta - y$ unendlich klein werden, auch die in den Nennern stehende Grösse r unendlich klein. Da nun r in den Nennern in der dritten Potenz vorkommt, während die Zähler die Grössen $\xi - x$, $\eta - y$ und z nur in der ersten Potenz enthalten, so werden die Brüche unendlich gross, und die Integrale sind somit in der vorstehenden Form für den Fall, wo z unendlich klein oder Null ist, nicht anwendbar. Es fragt sich nun, ob wir die Integrale so umgestalten können, dass die zu integrirende Function endlich bleibt.

Bei dem letzten Integrale, durch welches der Differentialcoefficient $\frac{\partial V}{\partial z}$ bestimmt wird, ist dieses leicht ausführbar, und wir können dadurch die schon im vorigen § gefundene Gleichung (103) in anderer Weise, als dort geschehen ist, ableiten. Es wird vielleicht nicht ohne Nutzen sein, die Ableitung auch auf diesem Wege durchzuführen, weil der in jener Gleichung ausgesprochene wichtige Satz dadurch noch anschaulicher wird.

Die Grösse $-\frac{z}{r}$ stellt den Cosinus des Winkels dar, welchen der von p nach dem Flächenelemente $d\omega$ gezogene Leitstrahl mit der z-Axe bildet. Da nun die Normale des Elementes mit der z-Axe parallel ist, so können wir auch sagen, $-\frac{z}{r}$ sei der Cosinus des Winkels zwischen Leitstrahl und Normale. Bezeichnen wir diesen Cosinus, wie der in § 19 u. f. geschehen ist, mit i, so lautet die letzte der Gleichungen (109):

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \varepsilon h \int \frac{i}{r^2} d\omega.$$

Bezeichnen wir ferner, wie es ebenfalls in jenen §§ geschehen ist, den körperlichen Winkel der unendlichen schmalen Pyramide, welche den Punct p als Spitze und das Flächenelement $d\omega$ als Grundfläche hat, mit $d\sigma$, so gilt die Gleichung:

$$d\sigma = \pm \frac{i}{r^2} d\omega.$$

Hierin ist das $+$ Zeichen zu setzen, wenn p an der negativen Seite der Ebene liegt, und der von p ausgehende Leitstrahl somit die Ebene von der negativen zur positiven Seite durchschneidet, so dass der mit i bezeichnete Cosinus positiv ist; dagen das — Zeichen, wenn p an der positiven Seite der Ebene liegt.

Im ersteren Falle, wo p an der negativen Seite der Ebene liegt, geht durch Einführung von $d\sigma$ die obige Gleichung über in

$$(110) \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = \varepsilon h \int d\sigma,$$

und hierin stellt das Integral den ganzen körperlichen Winkel dar, unter welchem die gegebene Figur vom Puncte p aus erscheint. Im zweiten Falle, wo p an der positiven Seite der Ebene liegt, erhält man:

$$(110a.) \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = -\varepsilon h \int d\sigma,$$

worin wiederum das Integral den körperlichen Winkel darstellt, unter welchem die Figur von der jetzigen Lage des Punctes p aus erscheint. Denkt man sich nun, dass der Punct p an der einen oder anderen Seite unendlich nahe an die Ebene heranrücke, so nimmt in beiden Fällen der körperliche Winkel den Werth 2π an, und wir haben also zu setzen:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{-0} = 2\pi\varepsilon h; \quad \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{+0} = -2\pi\varepsilon h,$$

woraus sich durch Subtraction ergiebt:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{-0} = -4\pi\varepsilon h.$$

Weniger einfach macht sich die Sache bei den ersten beiden der drei Gleichungen (109). Wollten wir, wie vorher, statt des Flächenelementes $d\omega$ das Element des körperlichen Winkels $d\sigma$ einführen, so würden wir erhalten:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \varepsilon h \int \pm \frac{\xi - x}{ri} d\sigma; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \varepsilon h \int \pm \frac{\eta - y}{ri} d\sigma,$$

welche Ausdrücke für den Fall, wo z endlich klein oder Null ist, unbrauchbar sind, weil dann unter den Elementen $d\sigma$ solche vorkommen, für welche die im Nenner stehende Grösse i unendlich klein oder Null wird. Wollten wir andererseits, wie es in § 28 geschehen ist, die Polarcoordinaten u und φ um den Fusspunct des Perpendikels einführen, so würden wir erhalten:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \varepsilon h \iint \frac{u^2 \cos \varphi}{r^3} \, du \, d\varphi; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \varepsilon h \iint \frac{u^2 \sin \varphi}{r^3} \, du \, d\varphi,$$

worin zugleich zu setzen wäre:

$$r = \sqrt{u^2 + z^2}.$$

In diesen Ausdrücken wird, wenn z unendlich klein oder Null ist, für unendlich kleine Werthe von u der Nenner ein unendlich kleines von höherer Ordnung, als Zähler, und die Ausdrücke sind daher ebenfalls für unseren Zweck nicht dienlich.

Aus diesen Gründen habe ich den unter (95) gegebenen Ausdruck der Potentialfunction in den unter (99) gegebenen umgeformt, in welchem nur noch ein nach dem Umfange zu nehmendes Integral vorkommt, und dann erst habe ich die Differentiationen ausgeführt.

§ 31.

Verhalten der Differentialcoefficienten zweiter Ordnung der Potentialfunction.

Es ist noch von Interesse, zu erfahren, wie sich unter der gemachten Voraussetzung, dass das wirksame Agens nur über eine Fläche verbreitet ist, die Gleichung $\Delta V = 0$ verhält. Da sich unter dieser Voraussetzung auf einer endlichen Fläche eine endliche Menge des Agens befindet, die mathematische Fläche aber, wenn man ihre Grösse so bestimmen will, dass man sie als einen Theil des körperlichen Raumes betrachtet, gleich Null zu setzen ist, so folgt daraus, dass die Dichtigkeit des Agens, wenn man sie nicht als Flächendichtigkeit, sondern in dem gewöhnlichen Sinne als Raumdichtigkeit auffasst, unendlich gross ist, und es entsteht daher die Frage, ob unter diesen Umständen jene Gleichung bis in unmittelbarer Nähe der Fläche gültig bleibt.

Wir bilden dazu die zweiten Differentialcoefficienten der Potentialfunction, welche in ΔV vorkommen. Aus Gleichung (101) ergiebt sich, da der Bruch $\frac{z}{\sqrt{z^2}}$ an der einen oder anderen Seite der Ebene bis an diese selbst hinan constant ist:

$$(111)\qquad \frac{\partial V}{\partial z^2} = \varepsilon h \int \frac{i'}{RU}\, ds - \varepsilon h z^2 \int \frac{i'}{R^3 U}\, ds$$

$$= \varepsilon h \int \frac{R^2 - z^2}{R^3 U}\, i'\, ds$$

$$= \varepsilon h \int \frac{U}{R^3}\, i'\, ds.$$

Ferner ergiebt sich aus den Gleichungen (106):

$$(112)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\varepsilon h \displaystyle\int \frac{\xi' - x}{R^3}\, \alpha'\, ds, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\varepsilon h \displaystyle\int \frac{\eta' - y}{R^3}\, \beta'\, ds. \end{cases}$$

und somit:

$$(113)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\varepsilon h \int \frac{(\xi' - x)\,\alpha' + (\eta' - y)\,\beta'}{R^3}\, ds$$

$$= -\varepsilon h \int \frac{U}{R^3}\, i'\, ds.$$

Dieser letzte Ausdruck ist dem in (111) für $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ gefundenen gleich und entgegengesetzt, und beide heben sich somit bei der Addition auf, und man erhält:

$$\Delta V = 0.$$

Diese Gleichung gilt hiernach an beiden Seiten der Fläche bis dicht an sie hinan.

Will man statt des bisher benutzten Coordinatensystems x, y, z, dessen z-Axe auf der Ebene senkrecht steht, ein anderes rechtwinkliges Coordinatensystem x_1, y_1, z_1 anwenden, so kann man durch eine ähnliche Betrachtung, wie sie am Ende des § 29 vorkam, jeden der drei Differentialcoefficienten

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1{}^2},\ \frac{\partial^2 V}{\partial y_1{}^2},\ \frac{\partial^2 V}{\partial z_1{}^2}$$

durch die sechs Differentialcoefficienten

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}$$

ausdrücken, von denen auch die drei letzten endliche Grössen sind, welche sich leicht aus (106) ableiten lassen. Durch Addition der Ausdrücke ergiebt sich dann sofort, dass

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1{}^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y_1{}^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z_1{}^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

sein muss. Der Schluss, dass die Gleichung $\Delta V=0$ auch bei unendlicher Annäherung an die Fläche gültig bleibt, ist also von der Wahl des Coordinatensystemes unabhängig.

In der Fläche selbst ist die Gleichung nicht anwendbar, weil hier die Grösse $\frac{z}{\sqrt{z^2}}$ eine sprungweise Aenderung erleidet.

§ 32.

Betrachtung einer gleichförmig mit Agens bedeckten Kugelfläche.

Es wird vielleicht nicht unzweckmässig sein, an die gleichförmig mit Agens bedeckte ebene Figur noch einen anderen speciellen Fall, nämlich die gleichförmig mit Agens bedeckte Kugelfläche anzuschliessen, weil diese sich besonders leicht behandeln lässt.

Für eine solche Kugelfläche haben wir nämlich schon in § 12 die innere und äussere Potentialfunction V_i und V_e bestimmt. Wenn a den Radius der Kugelfläche und ρ den Abstand des Punctes p von ihrem Mittelpuncte bedeutet, so können wir gemäss der dort unter (35) gegebenen Gleichungen setzen:

$$V_i = 4\pi\varepsilon h a$$

$$V_e = 4\pi\varepsilon h \frac{a^2}{\rho}.$$

Da nun die Gerade, deren Länge durch ρ dargestellt wird, auf der Kugelfläche senkrecht ist, so ist, wenn wir die Normale auf der Fläche nach Aussen hin als positiv rechnen, der nach ρ genommene Differentialcoefficient zugleich der nach der Normale genommene Differentialcoefficient, und zwar haben wir an der für die Normale positiven Seite den Differentialcoefficienten von V_e und an der negativen Seite den von V_i zu nehmen. Betrachten wir von diesen beiden Differentialcoefficienten die in unmittelbarer Nähe der Fläche geltenden Werthe, so können wir, wenn wir die Normale mit n bezeichnen, setzen:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} = \left(\frac{d V_e}{d\rho}\right)_{\rho = a}; \quad \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0} = \left(\frac{d V_i}{d\rho}\right)_{\rho = a}.$$

Der letztere Differentialcoefficient ist Null, weil V_i constant ist, der erstere dagegen giebt:

$$\left(\frac{d V_e}{d\rho}\right)_{\rho = a} = -4\pi\varepsilon h\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)_{\rho = a} = -4\pi\varepsilon h.$$

Folglich erhält man:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0} = -4\pi\varepsilon h,$$

welches die in § 29 unter (103) gegebene Gleichung ist.

Um nun auch nach anderen Richtungen, z. B. nach den Coordinatenrichtungen eines beliebigen rechtwinkligen Coordinatensystems differentiiren zu können, brauchen wir nur zu berücksichtigen, dass für ρ folgender Ausdruck gilt:

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

worin x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des Mittelpunctes der Kugelfläche bedeuten. Dann erhalten wir:

$$\frac{\partial V_e}{\partial x} = \frac{d V_e}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = -4\pi\varepsilon h \frac{a^2}{\rho^2}\frac{x - x_0}{\rho}.$$

Setzen wir hierin $\rho = a$ und bezeichnen zugleich den Winkel zwischen der x-Richtung und der Richtung von ρ, welche zugleich die Richtung der Normale ist, mit ϑ, so kommt:

$$\left(\frac{\partial V_e}{\partial x}\right)_{\rho = a} = -4\pi\varepsilon h \cos\vartheta.$$

Um diese Gleichung mit der früher gegebenen entsprechenden Gleichung auch der Form nach in Uebereinstimmung zu bringen, denken wir uns durch den betreffenden Punct der Oberfläche, dessen Coordinaten ξ, η, ζ heissen mögen, eine Gerade parallel der x-Axe gezogen, und bezeichnen für einen auf dieser Geraden beweglichen Punct die Differenz $x - \xi$ mit l. Dann können wir, indem wir die Aussenseite der Fläche als die positive betrachten, setzen:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial l}\right)_{+0}=\left(\frac{\partial V_e}{\partial x}\right)_{\rho=a}=-4\pi\varepsilon h\cos\mathfrak{J}.$$

Zugleich ist:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial l}\right)_{-0}=\left(\frac{\partial V_i}{\partial x}\right)_{\rho=a}=0,$$

und es kommt somit

$$\left(\frac{\partial V}{\partial l}\right)_{+0}-\left(\frac{\partial V}{\partial l}\right)_{-0}=-4\pi\varepsilon h\cos\mathfrak{J},$$

welches die in § 29 unter (108) gegebene Gleichung ist.

Was ferner die Differentialcoefficienten zweiter Ordnung nach den Coordinaten anbetrifft, so erkennt man sofort, dass innerhalb und ausserhalb bis dicht an die Fläche hinan die Gleichungen $\Delta V_i = 0$ und $\Delta V_e = 0$ gelten.

§ 33.

Betrachtung einer beliebig gekrümmten Fläche, in welcher die Dichtigkeit des Agens nicht constant zu sein braucht.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung des allgemeinen Falles, wo die Fläche welche das Agens enthält, beliebig gekrümmt und die Vertheilung des Agens ungleichförmig ist; indessen wollen wir nicht alle für die einfacheren Fälle gemachten Entwickelungen auch hier durchführen, sondern uns darauf beschränken, den in § 29 und im vorigen § gefundenen, durch die Gleichung (103) ausgedrückten Satz allgemein zu beweisen. Wir können denselben folgendermaassen aussprechen. In irgend einem Puncte P der Fläche sei eine Normale errichtet; in dieser denken wir uns den Punct p beweglich und bezeichnen seinen Abstand vom Fusspuncte P der Normale mit n, wobei diese Grösse an der einen Seite der Fläche als positiv und an der anderen als negativ gerechnet wird. Dann ist:

$$\text{(III.)}\qquad \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0}-\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0}=-4\pi\varepsilon h,$$

worin die Indices $+0$ und -0 die Grenzwerthe andeuten sollen, denen $\frac{dV}{dn}$ sich nähert, wenn der Punct p von der positiven oder negativen Seite aus unendlich nahe an die Fläche hinanrückt, und h den Werth bedeutet, welchen die für einen beliebigen Punct mit h' bezeichnete Flächendichtigkeit in dem Puncte P hat, wo die Normale errichtet ist.

Die Entwickelungen, welche für den Beweis dieses Satzes nöthig sind, sind in vieler Beziehung den in § 24 enthaltenen ähnlich. Wir legen wieder im Puncte P an die Fläche eine Tangentialebene, und nehmen diese zur xy-Ebene unseres Coordinatensystemes, und die Normale zur z-Axe, so dass $\frac{\partial V}{\partial n}$ und $\frac{\partial V}{\partial z}$ gleichbedeutend sind. Wir brauchen auch hier von der Fläche nur ein sehr kleines aber endliches Stück um P speciell zu betrachten. Nennen wir nämlich die Potentialfunction dieses kleinen Stückes für sich allein V_1, und die Potentialfunction der gesammten übrigen Fläche V_2, so dass

$$V = V_1 + V_2$$

ist, so sind für $\frac{\partial V_2}{\partial n}$ die in der vorigen Gleichung enthaltenen Grenzwerthe unter einander gleich, da dieser Differentialcoefficient im Puncte P keine Unterbrechung der Stetigkeit erleiden kann. Es ist also:

$$\left(\frac{\partial V_2}{\partial n}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V_2}{\partial n}\right)_{-0} = 0,$$

und wenn daher bewiesen werden kann, dass die Gleichung:

$$\text{(114)} \qquad \left(\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)_{-0} = -\,4\pi\varepsilon h$$

gilt, so ist damit auch die Gleichung (III.) bewiesen.

Wenn für ein Flächenelement $d\omega$ bei dem Puncte (ξ, η, ζ), wo die Dichtigkeit h' stattfindet, der Abstand vom Puncte p mit r bezeichnet wird, indem

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - z)^2}$$

ist, so hat man:

$$(115)\qquad V_1 = \varepsilon \int \frac{h'}{r}\, d\omega,$$

worin die Integration über das betrachtete kleine Flächenstück auszudehnen ist. Hierin wollen wir statt h' den gleichbedeutenden Ausdruck:

$$h\gamma + \left(\frac{h'}{\gamma} - h\right)\gamma$$

schreiben, worin γ, wie in § 24, den Cosinus des Winkels bedeutet, welchen die auf $d\omega$ errichtete Normale mit der z-Axe bildet, eine Grösse, die bei P selbst gleich 1 und in der Nähe von P wenig von 1 abweichend ist. Dadurch kommt:

$$V_1 = \varepsilon h \int \frac{\gamma}{r}\, d\omega + \varepsilon \int \left(\frac{h'}{\gamma} - h\right) \frac{\gamma}{r}\, d\omega,$$

woraus wir durch Differentiation erhalten:

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} = \varepsilon h \int \frac{(\zeta - z)\gamma}{r^3}\, d\omega + \varepsilon \int \left(\frac{h'}{\gamma} - h\right) \frac{(\zeta - z)\gamma}{r^3}\, d\omega.$$

Ferner ist, wenn die Cosinus der Winkel, welche die vorher erwähnte Normale auf $d\omega$ mit der x- und y-Axe und mit dem Leitstrahl r bildet, α, β und i heissen:

$$i = \frac{\xi\alpha + \eta\beta + (\zeta - z)\gamma}{r}$$

$$\frac{(\zeta - z)\gamma}{r} = i - \frac{\xi\alpha + \eta\beta}{r},$$

und die vorige Gleichung geht daher über in:

$$(116)\ \frac{\partial V_1}{\partial z} = \varepsilon h \int \frac{i}{r^2}\, d\omega + \varepsilon h \int \frac{-\xi\alpha - \eta\beta}{r^3}\, d\omega + \varepsilon \int \left(\frac{h'}{\gamma} - h\right) \frac{(\zeta - z)\gamma}{r^3}\, d\omega.$$

Die drei hierin vorkommenden Integrale wollen wir zur Abkürzung durch die Buchstaben E, F und G bezeichnen, so dass die Gleichung lautet:

$$(116\text{a.})\qquad \frac{\partial V_1}{\partial z} = \varepsilon h\, E + \varepsilon h\, F + \varepsilon\, G.$$

Die beiden letzten dieser Integrale erlauben eine andere Behandlung, als das erste, weil in ihnen die zu integrirenden Functionen Factoren enthalten, welche beim Puncte P gleich Null werden, was in dem ersten nicht der Fall ist. Wir wollen daher das Integral E gesondert und dann die Integrale F und G gemeinsam betrachten.

§ 34.

Verhalten der Grösse E.

Wir führen in E statt des Flächenelementes $d\omega$, wie in § 24, das Element $d\sigma$ des körperlichen Winkels ein, und erhalten:

$$E = \int \pm d\sigma.$$

Um die Wahl des Vorzeichens einfach ausdrücken zu können, wollen wir die beiden Seiten der Fläche, nach welchen die Normale n positiv und negativ gerechnet wird, kurz die positive und negative Seite der Fläche nennen. Dann ist, wenn der von p nach $d\omega$ gezogene Leitstrahl, indem er wächst, die Fläche von der negativen zur positiven Seite durchschneidet, $d\sigma$ mit dem Pluszeichen zu nehmen, im anderen Falle mit dem Minuszeichen.

Wenn daher p sich in dem negativen Theile der Normale n befindet, so gilt für den ersten Durchschnitt irgend einer Elementarpyramide mit der Fläche das Pluszeichen, für den zweiten, falls die Fläche so gekrümmt ist, dass zwei Durchschnitte vorkommen, das Minuszeichen u. s. f. Daraus folgt, wie man leicht sieht, dass das ganze Integral den körperlichen Winkel darstellt, unter welchem der Umfang des betrachteten Flächenstückes von p aus erscheint, und zwar ist von den beiden körperlichen Winkeln, in welche der ganze Winkelraum durch die von p aus durch den Umfang gelegte Kegelfläche getheilt wird, derjenige zu nehmen, in welchem der Fusspunct P der Normale liegt.

Befindet sich p in dem positiven Theile der Normale, so ist bei jeder Elementarpyramide für den ersten Durchschnitt das Minuszeichen, für den zweiten das Pluszeichen u. s. f. anzuwenden, wodurch das ganze Integral eine negative Grösse wird. Der absolute Werth dieser Grösse stellt wieder den körperlichen Winkel dar, unter welchem der Umfang des Flächenstückes von p aus erscheint, und zwar ebenfalls denjenigen der beiden in Betracht kommenden

Winkel, in welchem der Fusspunct P liegt. Aus dem letzteren Umstande folgt, dass in diesem Falle der körperliche Winkel nach der entgegengesetzten Seite zu nehmen ist, als im vorigen. Denkt man sich also zwei Lagen von p zu beiden Seiten des Fusspunctes P, aber beide unendlich nahe demselben, und somit auch unter einander unendlich nahe, so erhält man für diese beiden Lagen zwei körperliche Winkel, welche sich zu 4π ergänzen. Demnach können wir, wenn wir für den Fall, wo der Punct p an der negativen Seite liegt, den körperlichen Winkel mit σ_1 bezeichnen, schreiben:

$$E_{-0} = \sigma_1$$

$$E_{+0} = -(4\pi - \sigma_1).$$

Bilden wir nun die Differenz $E_{+0} - E_{-0}$, so hebt sich darin die einmal mit dem $+$ Zeichen und einmal mit dem $-$ Zeichen vorkommende Grösse σ_1 auf, und es bleibt:

$$E_{+0} - E_{-0} = -4\pi. \tag{117}$$

§ 35.

Verhalten der Grössen F und G.

Wir betrachten nun die beiden anderen in der Gleichung (116) vorkommenden Integrale F und G. Diese lauten:

$$\left\{\begin{aligned} F &= \int \frac{-\xi\alpha - \eta\beta}{r^3}\, d\omega \\ G &= \int \left(\frac{h'}{\gamma} - h\right) \frac{\zeta - z}{r^3}\, \gamma\, d\omega. \end{aligned}\right. \tag{118}$$

Es soll nun bewiesen werden, dass diese Integrationen bestimmt ausführbar sind und dass, wenn z von einem kleinen negativen Werthe durch Null zu einem positiven übergeht, die Integrale dabei keine sprungweise Aenderung erleiden.

In dem ersten können wir, wie in § 24, setzen:

$$\alpha = -\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\gamma; \quad \beta = -\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\gamma,$$

wodurch es übergeht in:

$$F = \int \frac{\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\xi + \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\eta}{r^3} \gamma d\omega.$$

Ferner wollen wir in der xy-Ebene statt der rechtwinkligen Coordinaten ξ und η um denselben Anfangspunct die Polarcoordinaten u und φ einführen, dann ist:

$$\xi = u \cos\varphi, \quad \eta = u \sin\varphi$$

und somit:

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \cos\varphi; \quad \frac{\partial \eta}{\partial u} = \sin\varphi,$$

und wenn wir mittelst dieser Gleichungen $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ aus den vorigen eliminiren:

$$\xi = \frac{\partial \xi}{\partial u} u; \quad \eta = \frac{\partial \eta}{\partial u} u.$$

Dadurch nimmt der in F vorkommende Zähler eine einfachere Form an, nämlich:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\xi + \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\eta = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial u}\right) u = \frac{\partial \zeta}{\partial u} u.$$

Endlich können wir in beiden Integralen für das Product $\gamma d\omega$, welches die Projection des Elementes $d\omega$ auf die xy-Ebene darstellt, ein Element dieser Ebene setzen, und dann die Integration über die Projection des betrachteten Flächenstückes auf die Ebene ausführen. Das Element der Ebene, in Polarcoordinaten ausgedrückt, ist $u\,du\,d\varphi$, und die Gleichungen (118) gehen somit über in:

$$(119) \quad \begin{cases} F = \iint \frac{\partial \zeta}{\partial u} \cdot \frac{u^2}{r^3} du\, d\varphi \\ G = \iint \left(\frac{h'}{\gamma} - h\right) \frac{(\zeta - z) u}{r^3} du\, d\varphi. \end{cases}$$

Nehmen wir nun zunächst an, dass die Fläche an der betrachteten Stelle nur eine endliche Krümmung habe, und dass auch die Dichtigkeit h sich in der Nähe derselben nur allmälig ändere, dass also ihre Differentialcoefficienten endliche

Grössen seien, so können wir, da die xy-Ebene im Puncte P Tangentialebene ist, setzen:

$$(120) \quad \begin{cases} \zeta = mu^2 \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial u} = m'u \\ \dfrac{h'}{\gamma} - h = nu, \end{cases}$$

worin m, m' und n Functionen von u und φ sind, welche für kleine Werthe von u nicht unendlich gross werden. Durch Einsetzung der beiden letzten Formeln in die Ausdrücke (119) gehen diese über in:

$$(121) \quad \begin{cases} F = \displaystyle\iint m' \frac{u^3}{r^3}\, du\, d\varphi \\ G = \displaystyle\iint n \frac{(\zeta - z)\, u^2}{r^3}\, du\, d\varphi. \end{cases}$$

Bedenkt man hierbei, dass

$$r = \sqrt{u^2 + (\zeta - z)^2}$$

ist, so sieht man leicht, dass die zu integrirenden Functionen für keine Werthe von u und z unendlich gross werden können, und dass somit die Integrationen bestimmt ausführbar sind.

Um noch zu zeigen, dass die Ausdrücke beim Durchgange von z durch Null keine sprungweise Aenderung erleiden, wollen wir die Grösse $\frac{1}{r^3}$ in eine Reihe entwickeln. Die Formel von r lautet, wenn man darin für ζ seinen in (120) gegebenen Werth setzt:

$$r = \sqrt{u^2 + z^2 - 2mzu^2 + m^2u^4}.$$

Hierin wollen wir die Grösse t mit der Bedeutung

$$(122) \quad t = \sqrt{u^2 + z^2}$$

einführen, dann kommt:

$$r = \sqrt{t^2 - 2mzu^2 + m^2u^4}$$

$$= t\sqrt{1 - 2m\frac{zu^2}{t^2} + m^2\frac{u^4}{t^2}}$$

und daraus folgt weiter:

$$\frac{1}{r^3}=\frac{1}{t^3}\left(1+3m\frac{zu^2}{t^2}-\frac{3}{2}m^2\frac{u^4}{t^2}+\text{etc.}\right).$$

Wenn man diese Reihe, welche stark convergirt, weil u nur kleine Werthe haben kann, in die Ausdrücke (121) einsetzt, und im letzteren derselben auch im Zähler für ζ seinen Werth aus (120) setzt, so kann man schreiben:

$$(123)\quad\begin{cases} F=\iint m'\frac{u^3}{t^3}\,du\,d\varphi+\iint 3mm'\frac{zu^5}{t^5}\,du\,d\varphi-\text{etc.}\\ G=-\iint n\frac{zu^2}{t^3}\,du\,d\varphi+\iint mn\frac{u^4}{t^3}\,du\,d\varphi-\text{etc.}\end{cases}$$

Auf diese Weise ist jede der Grössen F und G in eine Reihe von Gliedern zerlegt, von denen das erste unter den Integralzeichen einen Bruch enthält, der im Zähler in Bezug auf z und u von demselben Grade ist, wie im Nenner in Bezug auf t, während die folgenden Glieder Brüche enthalten, die im Zähler von höherem Grade als im Nenner sind. Diese letzteren Glieder lassen sich kurz abmachen. Wenn man von einem derselben den Differentialcoefficienten nach z bilden will, so kann man unter den Integralzeichen differentiiren, wodurch dort ein Bruch entsteht, dessen Zähler noch von gleichem oder höherem Grade als der Nenner ist, und da ein solcher Bruch für keine Werthe von z und u unendlich gross werden kann, so muss auch das Integral für alle Werthe von z endlich bleiben. Da somit der Differentialcoefficient des betrachteten Gliedes endlich bleibt, so kann das Glied selbst beim Durchgange von z durch Null keine sprungweise Aenderung erleiden. Es bleibt also in jedem der beiden obigen Ausdrücke nur das erste Glied besonders zu behandeln, um auch an ihm dieselbe Eigenschaft nachzuweisen. Wir wollen diese Grössen mit F' und G' bezeichnen, indem wir setzen:

$$(124)\quad\begin{cases} F'=\iint m'\frac{u^3}{(u^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,du\,d\varphi\\ G'=-\iint n\frac{zu^2}{(u^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,du\,d\varphi.\end{cases}$$

Statt der ersten dieser beiden Grössen wollen wir noch eine andere bilden. Wir bezeichnen den Werth, welchen F' für $z = 0$ annimmt, mit A, nämlich:

$$A = \iint m' \, du \, d\varphi$$

und bilden dann die Differenz:

$$(125) \qquad F' - A = -\iint m' \frac{(u^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - u^3}{(u^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} du \, d\varphi.$$

Von den beiden Grössen $F' - A$ und G' lässt sich nun leicht beweisen, dass sie, wenn z unendlich klein und Null wird, ebenfalls unendlich klein und Null werden müssen. Setzt man nämlich in den unter den Integralzeichen stehenden Brüchen für z einen unendlich kleinen Werth, so werden die Brüche für alle endlichen Werthe von u unendlich klein, und nur für unendlich kleine Werthe von u nehmen sie endliche Werthe an, die man leicht näher bestimmen kann. Der erste Bruch:

$$\frac{(u^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - u^3}{(u^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

geht, wenn u bis Null abnimmt, in den Grenzwerth 1 über. Der zweite Bruch:

$$\frac{zu^2}{(u^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

zeigt ein etwas complicirteres Verhalten. Wenn u soweit abnimmt, dass es ein unendlich Kleines von derselben Ordnung wie z wird, so wird dadurch der Bruch endlich, und wenn u noch weiter abnimmt, so dass es ein unendlich Kleines von höherer Ordnung als z wird, so wird der Bruch wieder unendlich klein. Sei nämlich δ eine unendlich kleine Grösse, und setzen wir:

$$z = a\delta, \quad u = b\delta,$$

worin a und b endliche Coefficienten sind, so geht dadurch der vorige Bruch über in:

$$\frac{a\delta \, . \, b^2 \delta^2}{(b^2 \delta^2 + a^2 \delta^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{ab^2}{(b^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}};$$

setzen wir dagegen:

$$z = a\delta; \quad u = b\delta^2,$$

so geht der Bruch über in:

$$\frac{a\delta \, . \, b^2\delta^4}{(a^2\delta^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{b^2}{a^2}\delta^2.$$

Das Wesentliche aber, worauf es für unsere Betrachtung ankommt, gilt für den einen Bruch so gut, wie für den anderen, nämlich dass das Intervall von u, innerhalb dessen der Bruch einen endlichen Werth hat, nur unendlich klein ist, und dass ferner, wenn man sich denkt, dass der schon unendlich kleine Werth von z noch immer kleiner bis Null werde, dann auch einerseits jenes Intervall von u, innerhalb dessen der Bruch endlich ist, und andererseits die ausserhalb dieses Intervalles stattfindenden unendlich kleinen Werthe des Bruches immer kleiner bis Null werden. Daraus folgt, dass, wenn man die in $F' - A$ und G' angedeutete Integration nach u von $u = 0$ bis zu einem beliebigen endlichen Werthe von u ausführt, man dadurch Grössen erhalten muss, die mit z zugleich unendlich klein und Null werden.

Man kann dieses letztere Resultat auch noch auf eine andere Art beweisen, welche vielleicht noch klarer ist. Betrachten wir zuerst die Grösse $F' - A$, so ist darin der vorher besprochene Bruch mit dem Factor m' behaftet, welcher von u abhängt. Wenn nun die Integration nach u zwischen irgend zwei Grenzen ausgeführt werden soll, so kann man sicher sein, dass das dadurch entstehende Integral seinem Werthe nach zwischen denjenigen beiden Integralen liegt, welche man erhält, wenn man statt der veränderlichen Grösse m' ein Mal den grössten Werth, welchen sie zwischen jenen beiden Grenzen von u hat, und das andere Mal den kleinsten Werth setzt, und dann die Integration ausführt. Wenn man daher findet, dass diese beiden letzten Integrale unendlich klein oder Null werden, so muss man schliessen, dass dasselbe auch mit jenem ursprünglich gegebenen Integrale der Fall ist. Ebenso verhält es sich mit der Grösse G' in Bezug auf den Factor n. Nun lässt sich aber in beiden Ausdrücken, wenn man für m' und n constante Werthe setzt, die Integration nach u sofort wirklich ausführen. Bezeichnen wir die constanten Werthe zum Unterschiede mit m'_1 und n_1 und integriren von $u=0$ bis $u=U$, wo U irgend einen endlichen Werth bedeuten soll, so kommt:

$$m'_1 \int_0^U \frac{(u^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - u^3}{(u^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} du = m'_1 \left(U - \frac{U^2+2z^2}{\sqrt{U^2+z^2}} + 2\sqrt{z^2} \right)$$

$$n_1 \int_0^U \frac{zu^2}{(u^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} du$$

$$= n_1 \left[-\frac{zU}{\sqrt{U^2+z^2}} + z \log(U+\sqrt{U^2+z^2}) - z\log\sqrt{z^2} \right].$$

Man sieht sogleich aus der Form dieser Ausdrücke, dass sie mit z zugleich unendlich klein und Null werden, und zwar für alle beliebigen Werthe der constanten Factoren m'_1 und n_1, und somit auch für die oben erwähnten grössten und kleinsten Werthe. Demnach muss dasselbe Resultat auch gültig bleiben, wenn statt der constanten Werthe wieder die veränderlichen Factoren m' und n eingeführt werden, und daraus folgt weiter, dass auch die ganzen Grössen $F'-A$ und G' mit z zugleich unendlich klein und Null werden müssen, und dass daher die Grössen F' und G' beim Durchgange von z durch Null keine sprungweise Aenderung erleiden können.

Da dasselbe, was hier von F' und G' gefunden ist, sich dem oben Gesagten nach auch auf die vollständigen in (123) gegebenen Ausdrücke von F und G ausdehnen lässt, so können wir schreiben:

$$(126) \qquad \begin{cases} F_{+0} - F_{-0} = 0 \\ G_{+0} - G_{-0} = 0. \end{cases}$$

Gehen wir nun zu der Gleichung (116a.) zurück, und berücksichtigen dabei die Gleichung (117), so erhalten wir:

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial z}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V_1}{\partial z}\right)_{-0} = \varepsilon h (E_{+0} - E_{-0}) = -4\pi\varepsilon h.$$

Da die z-Axe in der Richtung der Normale genommen ist, so kann man statt des Differentialcoefficienten nach z auch den nach n schreiben, also:

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)_{-0} = -4\pi\varepsilon h.$$

Hieraus ergiebt sich nach dem, was in § 33 gesagt ist, sofort auch die zu beweisende Gleichung (III.):

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0} = -4\pi\varepsilon h.$$

§ 36.

Specieller Fall, wenn an der betreffenden Stelle die Krümmung der Fläche unendlich gross ist, oder die Dichtigkeit sich unendlich schnell ändert.

Bei dem vorigen Beweise wurde vorausgesetzt, dass die Krümmung der Fläche an der betreffenden Stelle endlich sei, und auch h sich in der Nähe dieser Stelle nur allmälig ändere. Wir wollen nun diese Voraussetzung fallen lassen, und statt der Gleichungen (120) schreiben:

$$(127) \qquad \left\{\begin{aligned} &\zeta = m u^{1+\mu} \\ &\frac{\partial \zeta}{\partial u} = m' u^{\mu} \\ &\frac{h'}{\gamma} - h = n u^{\nu}, \end{aligned}\right.$$

worin m, m' und n dieselbe Bedeutung haben, wie früher, und μ und ν irgend welche positive Grössen sind. Wenn $\mu < 1$ ist, so wird der Differentialcoefficient $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2}$, und mit ihm die Krümmung der Fläche für $u = 0$ unendlich gross. Ist $\nu < 1$, so wird $\frac{\partial \frac{h'}{\gamma}}{\partial u}$ und daher im Allgemeinen auch $\frac{\partial h'}{\partial u}$ für $u = 0$ unendlich gross. Dessenungeachtet lässt sich beweisen, dass die Gleichung (III.) gültig bleibt, so lange die Grössen μ und ν nur angebbare positive Werthe haben.

Wir können dabei wieder, nachdem wir die Grössen F und G in Reihen entwickelt haben, unsere Aufmerksamkeit auf das erste Glied jeder Reihe beschränken, denn man erkennt leicht, dass, wenn sich für dieses Glied die fraglichen Eigenschaften nachweisen lassen, (nämlich dass die Integration bestimmt ausführbar ist, und das Integral beim Durchgange von z durch Null keine sprungweise Aenderung erleidet), dann dieser Nachweis bei den höheren Gliedern um so weniger Schwierigkeiten haben kann. Wir erhalten daher statt (124) die Ausdrücke:

$$(128)\quad \left\{\begin{aligned} F' &= \iint m' \frac{u^{2+\mu}}{(u^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, du\, d\varphi \\ G' &= -\iint n \frac{z u^{1+\nu}}{(u^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, du\, d\varphi. \end{aligned}\right.$$

In den hier vorkommenden Brüchen sind, wenn μ und ν kleiner als 1 sind, die Zähler von niedrigerem Grade als die Nenner, und die Brüche bleiben daher nicht für alle Werthe von z und u endlich. Indessen lässt sich diese Schwierigkeit durch die schon in § 25 angewandte Art der Umformung beseitigen. Führen wir nämlich statt der Veränderlichen u die beiden Veränderlichen u' und u'' ein mit der Bedeutung:

$$u' = u^{\mu} \text{ und } u'' = u^{\nu},$$

so kommt:

$$(129)\quad \left\{\begin{aligned} F' &= \iint \frac{m'}{\mu} \cdot \frac{u'^{\frac{3}{\mu}}}{\left(u'^{\frac{2}{\mu}} + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\, du'\, d\varphi \\ G' &= -\iint \frac{n}{\nu} \cdot \frac{z u''^{\frac{2}{\nu}}}{\left(u''^{\frac{2}{\nu}} + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\, du''\, d\varphi. \end{aligned}\right.$$

Bei dieser Form der Ausdrücke bleiben die zu integrirenden Functionen für alle Werthe von z und von u' und u'' endlich, und es lassen sich auf diese Ausdrücke dieselben Betrachtungen anwenden, wie auf die Ausdrücke (124) im vorigen §, und man erhält daher wieder als Resultat die Gleichung (III.).

Diese Gleichung hört erst dann auf gültig zu sein, wenn die

Gleichungen (127) für keine angebbaren positiven Werthe von μ und ν anwendbar sind. Dabei ist aber zu bemerken, dass die meisten Fälle dieser Art schon von selbst von dem durch die Gleichung (III.) ausgedrückten Satze ausgeschlossen sind. Bildet die Fläche an der betreffenden Stelle eine scharfe Spitze oder Kante, so dass es dort keine bestimmte Tangentialebene giebt, so giebt es auch keine bestimmte Normale, und der Differentialcoefficient $\frac{\partial V}{\partial n}$ hat daher keinen Sinn. Erleidet ferner die Dichtigkeit h' gerade an der betreffenden Stelle eine sprungweise Aenderung, so hat h keinen bestimmten Werth und die Gleichung verliert dadurch ihre Bedeutung. Es bleiben also nur solche Fälle übrig, wie zu Ende des § 25 einer als Beispiel angeführt ist, welche aber zu speciell sind, um sich hier einer besonderen Betrachtung zu verlohnen.

§ 37.

Potentialfunction einer gleichförmig mit Agens bedeckten geraden Linie.

An den in den §§ 27 bis 36 betrachteten Fall, wo das Agens sich auf einer Fläche befindet, schliesst sich bei geometrischem Fortschreiten der practisch freilich weniger wichtige Fall an, wo das Agens über eine Linie stetig verbreitet ist, so dass sich auf einem endlichen Linienstücke eine endliche Menge des Agens befindet.

Der einfachste Fall dieser Art ist der, wo ein Stück einer geraden Linie so mit dem Agens bedeckt ist, dass sich auf gleichen Längenabschnitten gleich viel davon befindet, und da dieser Fall die hier in Betracht kommende Eigenschaft der Potentialfunction besonders bequem erkennen lässt, so möge er zuerst behandelt werden.

Die mit dem Agens bedeckte Gerade möge als z-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystemes genommen werden. Ein Element derselben heisse dz' und die darauf befindliche Menge des Agens werde mit $g dz'$ bezeichnet, worin g die als constant vorausgesetzte Liniendichtigkeit bedeutet. Die dem Anfangs- und Endpuncte der Geraden entsprechenden Werthe von z' sollen a und b heissen. Der Punct p mit den Coordinaten x, y, z, für welchen die Potentialfunction zu bestimmen ist, soll eine solche Lage haben, dass der Werth von z zwischen a und b liegt.

Die für die Potentialfunction geltende Gleichung ist:

$$V = \varepsilon g \int_a^b \frac{dz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z' - z)^2}},$$

oder, wenn wir den Abstand des Punctes p von der Geraden mit ρ bezeichnen, und demgemäss setzen:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

so kommt:

$$V = \varepsilon g \int_a^b \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + (z' - z)^2}}. \tag{130}$$

Hierin lässt sich die Integration ausführen, und giebt:

$$V = \varepsilon g \log \frac{b - z + \sqrt{\rho^2 + (b - z)^2}}{a - z + \sqrt{\rho^2 + (a - z)^2}}.$$

Multipliciren wir den unter dem Lagarithmuszeichen stehenden Bruch in Zähler und Nenner mit $z - a + \sqrt{\rho^2 + (z - a)^2}$, so wird der Nenner einfach ρ^2, und der Ausdruck lässt sich dann so schreiben:

$$\begin{aligned} V = -2\varepsilon g \log \rho + \varepsilon g \log \left[b - z + \sqrt{\rho^2 + (b - z)^2}\right] \\ + \varepsilon g \log \left[z - a + \sqrt{\rho^2 + (z - a)^2}\right]. \end{aligned} \tag{131}$$

Setzt man hierin wieder für ρ seinen Werth $\sqrt{x^2 + y^2}$, so hat man V als Function von x, y, z und kann nach jeder der drei Coordinaten differentiiren.

Von besonderem Interesse sind die Werthe, welche die Potentialfunction V und ihr nach ρ genommener Differentialcoefficient annehmen, wenn ρ unendlich klein und Null wird, wenn also der betrachtete Punct sich der mit Agens bedeckten Linie unendlich nähert und sie erreicht. Dividirt man die vorige Gleichung durch $\log \rho$, und lässt dann ρ bis Null abnehmen, so verschwinden die beiden letzten Glieder an der rechten Seite, weil der Nenner $\log \rho$ unendlich gross wird, während die Zähler endlich bleiben, und es kommt somit, wenn man den auf $\rho = 0$ bezüglichen Grenzwerth durch den beigesetzten Index 0 andeutet:

$$(132) \qquad \left(\frac{V}{\log \rho}\right)_0 = -2\varepsilon g.$$

Differentiirt man ferner die obige Gleichung nach ρ, multiplicirt sie darauf mit ρ und lässt dann ρ zu Null werden, so verschwinden wieder die beiden letzten Glieder, und es bleibt:

$$(133) \qquad \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right)_0 = -2\varepsilon g.$$

Diese Gleichungen sind für die Potentialfunction einer nur auf einer Linie befindlichen Menge des Agens characteristisch.

§ 38.

Beweis der characteristischen Gleichungen für eine gekrümmte und ungleichförmig mit Agens bedeckte Linie.

Wir wollen nun statt der geraden Linie, auf welcher die Dichtigkeit constant ist, eine beliebig gekrümmte Linie mit veränderlicher Dichtigkeit betrachten, wobei wir nur voraussetzen wollen, dass die Krümmung überall endlich sei, und die Dichtigkeit sich nur stetig ändere. Bei der Behandlung dieses allgemeinen Falles wollen wir uns aber darauf beschränken, zu beweisen, dass auch für ihn die obigen characteristischen Gleichungen gelten.

In irgend einem zur Betrachtung ausgewählten Puncte der mit dem Agens bedeckten Linie denken wir uns die Tangente an dieselbe gelegt, und nehmen diese als z-Axe und zwei beliebige durch den Berührungspunct gehende, auf ihr und unter einander senkrechte Gerade als x- und y-Axe eines Coordinatensystems. Den Punct p denken wir uns im positiven Arme der x-Axe liegend, so dass die Coordinate x zugleich der senkrechte Abstand des Punctes von der Linie ist.

Ist nun ds irgend ein Element der Linie mit den Coordinaten x', y', z' und wird die darauf befindliche Menge des Agens mit $g'ds$ bezeichnet, so ist die Potentialfunction:

$$V = \varepsilon \int \frac{g'ds}{\sqrt{(x-x')^2 + y'^2 + z'^2}},$$

woraus folgt:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\varepsilon \int \frac{g'(x-x')\,ds}{[(x-x')^2 + y'^2 + z'^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Diese Ausdrücke sollen nun soweit berechnet werden, dass die Werthe von $\frac{V}{\log x}$ und $x\frac{\partial V}{\partial x}$ für $x=0$ bestimmt werden können.

Dabei braucht die Integration nur für ein sehr kleines Stück der Linie zu beiden Seiten des Anfangspunctes der Coordinaten ausgeführt zu werden, denn für die Potentialfunction der entfernteren Theile versteht es sich von selbst, dass sie und ihr Differentialcoefficient nach x endlich bleiben, und dass somit die Producte derselben mit $\frac{1}{\log x}$ und x für $x=0$ verschwinden.

Um die Ausdrücke für unsere Betrachtung geeignet zu machen, müssen sie umgeformt werden. Sei dz' die Projection des Elementes ds auf die z-Axe und γ der Cosinus des Winkels, welchen ds mit der z-Axe bildet; dann ist:

$$ds = \frac{1}{\gamma}\, dz'.$$

Nach Einführung dieses Werthes für ds betrachten wir die Grösse $\frac{g'}{\gamma}$. Die Dichtigkeit im Anfangspuncte der Coordinaten sei mit g bezeichnet. Da ferner der mit γ bezeichnete Cosinus im Anfangspuncte der Coordinaten, wo die Linie die z-Axe berührt, gleich 1 ist, so hat der ganze Bruch $\frac{g'}{\gamma}$, welcher als Function von z' angesehen werden kann, für $z'=0$ den Werth g, und für andere Werthe von z' kann man setzen:

$$\frac{g'}{\gamma} = g + lz',$$

worin l eine Function von z' ist, welche für kleine Werthe von z' nicht unendlich gross wird. Die Gleichung für V lautet dann:

$$V = \varepsilon \int \frac{(g + lz')\, dz'}{\sqrt{(x - x')^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

Nun kann man ferner, weil die Linie im Anfangspuncte der Coordinaten die z-Axe berührt, setzen:

$$x' = mz'^2; \quad y' = nz'^2,$$

worin m und n ebenfalls endliche Functionen von z' sind. Indem wir diese Werthe anwenden, und zugleich, ähnlich wie in § 35, das Zeichen t mit der Bedeutung

$$t = \sqrt{x^2 + z'^2}$$

einführen, erhalten wir:

$$V = \varepsilon \int \frac{(g + lz')\,dz'}{t\sqrt{1 - 2m\frac{xz'^2}{t^2} + (m^2 + n^2)\frac{z'^4}{t^2}}},$$

worin wir den unter dem Integralzeichen stehenden Ausdruck folgendermaassen in eine Reihe entwickeln können:

$$V = \varepsilon \int \left(g\frac{1}{t} + l\frac{z'}{t} + gm\frac{xz'^2}{t^3} + lm\frac{xz'^3}{t^3} - \text{etc.} \right) dz'.$$

Integriren wir nun zunächst das erste Glied der Reihe von irgend einem kleinen negativen Werthe von z', welcher $-a$ heissen möge, bis zu einem kleinen positiven Werthe, welcher b heissen möge, so erhalten wir, ähnlich wie in § 37:

$$\varepsilon g \int_{-a}^{b} \frac{dz'}{\sqrt{x^2 + z'^2}} = \varepsilon g \Big[-2\log x + \log\left(a + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$$
$$+ \log\left(b + \sqrt{x^2 + b^2}\right) \Big].$$

Wenn wir diese Gleichung durch $\log x$ dividiren, und dann x gleich Null werden lassen, so verschwinden die beiden letzten Glieder an der rechten Seite, und es kommt:

$$\varepsilon g \left(\frac{1}{\log x} \int_{-a}^{b} \frac{dz'}{\sqrt{x^2 + z'^2}} \right)_0 = -2\varepsilon g.$$

Was nun die übrigen Glieder der in dem Ausdrucke von V unter dem Integralzeichen stehenden Reihe anbetrifft, so sind diese alle in Bezug auf x, z' und t von höherer Ordnung, als das erste, und man sieht sofort, dass ihre Integrale nicht unendlich gross werden können, und dass somit die Producte derselben mit $\frac{1}{\log x}$ für $x = 0$ verschwinden müssen. Man erhält also im Ganzen:

$$(134)\qquad \left(\frac{V}{\log x}\right)_0 = -2\varepsilon g.$$

In gleicher Weise ist auch der Differentialcoefficient von V zu behandeln. Durch Differentiation des obigen in eine Reihe entwickelten Ausdruckes von V erhalten wir:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \varepsilon\int\left(-g\frac{x}{t^3} - l\frac{xz'}{t^3} + gm\frac{z'^2}{t^3} - 3gm\frac{x^2 z'^2}{t^5}\right.$$
$$\left. + lm\frac{z'^3}{t^3} - 3lm\frac{x^2 z'^3}{t^5} + \text{etc.}\right)dz'.$$

Die Integration des ersten unter dem Integralzeichen stehenden Gliedes giebt:

$$-\varepsilon g\int_{-a}^{b}\frac{x\,dz'}{(x^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\varepsilon g}{x}\left(\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{x^2+b^2}}\right).$$

Wenn man diese Gleichung mit x multiplicirt und dann x gleich Null werden lässt, so geht sie über in:

$$-\varepsilon g\left(x\int_{-a}^{b}\frac{x\,dz'}{(x^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}\right)_0 = -2\varepsilon g.$$

Alle übrigen unter dem Integralzeichen stehenden Glieder geben, wenn sie integrirt und mit x multiplicirt werden, Grössen, welche für $x=0$ verschwinden, und man erhält daher im Ganzen:

$$(135)\qquad \left(x\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 = -2\varepsilon g.$$

Da nun die x-Axe irgend eine durch den zur Betrachtung ausgewählten Punct der Linie gehende, auf der Linie senkrechte Gerade ist, und der Punct p der Voraussetzung nach im positiven Arm der x-Axe liegt, so bedeutet x den senkrechten Abstand dieses Punctes von der Linie, und kann daher, in Uebereinstimmung mit der im vorigen § angewandten Bezeichnung, auch durch ρ dargestellt werden, wodurch (134) und (135) übergehen in:

$$(\text{IV.})\qquad \left(\frac{V}{\log\rho}\right)_0 = \left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)_0 = -2\varepsilon g.$$

Es gelten also für den in diesem § betrachteten allgemeineren Fall dieselben Gleichungen, wie die, welche im vorigen § für einen specielleren Fall abgeleitet und dort unter (132) und (133) angeführt wurden.

§ 39.

Characteristische Gleichungen für eine in einem Puncte concentrirt gedachte Menge des Agens und Zusammenstellung der verschiedenen characteristischen Gleichungen.

Wenn man sich eine endliche Menge des Agens in einem Puncte concentrirt denkt, so ist die Form ihrer Potentialfunction so einfach, dass es kaum nöthig ist, darüber etwas Weiteres zu sagen. Indessen der Vollständigkeit wegen mögen auch für diesen Fall noch die Gleichungen in die Form gebracht werden, in welcher sie den in den bisher betrachteten Fällen gefundenen characteristischen Gleichungen entsprechen, damit man die Art, wie diese Gleichungen sich stufenweise ändern, wenn das Agens entweder stetig durch einen Raum verbreitet, oder in eine Fläche, oder in eine Linie, oder endlich in einen Punct zusammengedrängt ist, deutlich übersehen kann.

Wenn sich in einem gegebenen Puncte die Menge q des Agens befindet, und der Abstand des betrachteten Punctes p von jenem gegebenen Puncte mit $\mathfrak{r}$ bezeichnet wird, so ist die Potentialfunction:

$$V = \varepsilon \frac{q}{\mathfrak{r}},$$

woraus folgt:

$$\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{r}} = -\varepsilon \frac{q}{\mathfrak{r}^2}.$$

Hieraus ergiebt sich, dass man setzen kann:

$$\text{(V.)} \qquad \mathfrak{r} V = -\mathfrak{r}^2 \frac{\partial V}{\partial \mathfrak{r}} = \varepsilon q.$$

Diese Gleichungen bleiben auch, wenn $\mathfrak{r}$ gleich Null wird, unverändert gültig, und dann entsprechen sie den früher gefundenen characteristischen Gleichungen.

Der Uebersichtlichkeit wegen mögen diese Gleichungen hier noch einmal zusammengestellt werden. Es sind die folgenden:

(II.) $$\Delta V = -4\pi\varepsilon k$$

(III.) $$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0} = -4\pi\varepsilon h$$

(IV.) $$\left(\frac{V}{\log \rho}\right)_0 = \left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)_0 = -2\varepsilon g$$

(Va.) $$(\mathfrak{r}V)_0 = -\left(\mathfrak{r}^2\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{r}}\right)_0 = \varepsilon q.$$

§ 40.

Satz von Green.

Um noch einige weitere Eigenschaften der Potentialfunction entwickeln zu können, muss zunächst ein geometrischer Satz mitgetheilt werden, welcher von Green in seiner berühmten auf die Potentialfunction bezüglichen Abhandlung aufgestellt ist. Die diesen Satz ausdrückenden Gleichungen mögen im Folgenden abgeleitet werden.

Es sei ein vollständig begrenzter Raum gegeben, dessen Element wir mit $d\tau$ bezeichnen wollen. Ferner seien U und V irgend zwei Functionen der Raumcoordinaten, von welchen wir vorläufig annehmen wollen, dass sie selbst und ihre Differentialcoefficienten erster und zweiter Ordnung in dem ganzen Raume überall endlich bleiben. Dann betrachten wir zunächst folgendes Integral:

$$\int \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}\, d\tau,$$

worin die Integration über den ganzen gegebenen Raum auszuführen ist. Dieses Integral lässt sich gemäss der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

folgendermaassen in zwei Integrale zerlegen:

(136) $$\int \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}\, d\tau = \int \frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right) d\tau - \int U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\, d\tau.$$

Das erste hierin an der rechten Seite stehende Integral lässt sich in ein anderes umformen. Wir schreiben dazu statt $d\tau$ das Product $dx\,dy\,dz$ und führen dann die Integration nach x aus. Dabei haben wir zur Bestimmung der Grenzwerthe von x diejenigen Puncte zu betrachten, in welchen eine zwei bestimmten Werthen von y und z entsprechende, der x-Axe parallele Gerade die Oberfläche des gegebenen Raumes durchschneidet. Solche Durchschnitte müssen wenigstens zwei vorkommen, es können aber je nach der Gestalt der Oberfläche auch vier, sechs etc. vorkommen. Die betreffenden Werthe von x wollen wir mit x_1 und x_2, dann weiter, wenn mehr als zwei Durchschnitte vorkommen, mit x_3 und x_4 u. s. f. bezeichnen, und durch dieselben Indices wollen wir auch die Werthe, welche irgend welche Functionen der Coordinaten an den betreffenden Durchschnittspuncten haben, characterisiren. Dann können wir schreiben:

$$(137)\qquad \iiint \frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)dx\,dy\,dz = \iint\left[-\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)_1 + \left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)_2 - \text{etc.}\right]dy\,dz.$$

Das Product $dy\,dz$ stellt den Querschnitt eines längs der mit der x-Axe parallelen Geraden gedachten unendlich schmalen Prismas dar. Schneidet dieses aus der Oberfläche die Flächenelemente $d\omega_1$ und $d\omega_2$ und, falls noch weitere Durchschnitte vorkommen, die Flächenelemente $d\omega_3$ und $d\omega_4$ u. s. f. aus, so bestehen für diese Flächenelemente einfache Gleichungen. Betrachten wir zunächst den ersten Durchschnitt, so ist $dy\,dz$ gleich dem Producte aus $d\omega_1$ und dem Cosinus des Winkels der auf diesem Flächenelemente nach Innen zu errichteten Normale mit der x-Richtung. Dieser Cosinus ist aber gleich dem Differentialcoefficienten $\frac{\partial x}{\partial n}$, und man kann daher schreiben:

$$dy\,dz = \left(\frac{\partial x}{\partial n}\right)_1 d\omega_1.$$

Für den zweiten Durchschnitt gilt eine entsprechende Gleichung, nur dass hier das Minuszeichen angewandt werden muss, weil hier die der x-Axe parallele Gerade, indem sie wächst, die Oberfläche nicht von Aussen nach Innen, sondern von Innen nach Aussen durchschneidet. Es kommt also:

$$dy\,dz = -\left(\frac{\partial x}{\partial n}\right)_2 d\omega_2.$$

Ebenso hat man, wenn noch weitere Durchschnitte vorkommen, zu setzen:

$$dy\,dz = \left(\frac{\partial x}{\partial n}\right)_3 d\omega_3$$

$$dy\,dz = -\left(\frac{\partial x}{\partial n}\right)_4 d\omega_4$$

u. s. f. Demgemäss erhält man die Gleichung:

$$\left[-\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)_1 + \left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)_2 - \text{etc.}\right] dy\,dz$$

$$= -\left[\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial n}\right)_1 d\omega_1 + \left(U\frac{\partial V}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial n}\right)_2 d\omega_2 + \text{etc.}\right].$$

Denkt man sich nun für alle der x-Axe parallelen Elementarprismen, welche den Raum durchschneiden, solche Gleichungen gebildet, so bilden die sämmtlichen Flächenelemente, welche in allen diesen Gleichungen an der rechten Seite vorkommen, gerade die ganze Oberfläche des gegebenen Raumes. Man kann also schreiben:

$$\iint\left[-\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)_1 + \left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)_2 - \text{etc.}\right] dy\,dz = -\int U\frac{\partial V}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial n}\,d\omega,$$

worin die an der rechten Seite angedeutete Integration sich auf die ganze Oberfläche erstrecken soll. Hierdurch geht die Gleichung (137) über in:

$$(138)\qquad \iiint\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right) dx\,dy\,dz = -\int U\frac{\partial V}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial n}\,d\omega$$

und demgemäss die Gleichung (136) in:

$$(139)\qquad \int\frac{\partial U}{\partial x}\,\frac{\partial V}{\partial x}\,d\tau = -\int U\frac{\partial V}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial n}\,d\omega - \int U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,d\tau.$$

Eine ganz entsprechende Gleichung, wie diese für die x-Richtung ist, lässt sich natürlich auch für die y- und z-Richtung bilden, und durch Addition aller drei Gleichungen erhalten wir eine neue Gleichung. Um diese und andere ähnliche Gleichungen bequem schreiben zu können, wollen wir ein Summenzeichen von folgender Bedeutung einführen. Wenn ein auf die x-Richtung bezüglicher Ausdruck hingeschrieben und davor das Summenzeichen gesetzt ist, so soll das eine Summe aus den drei auf die drei Coordinatenrichtungen bezüglichen Ausdrücken von derselben Form bedeuten, so dass man z. B. hat:

$$(140) \qquad \sum \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Unter Anwendung dieses Summenzeichens kann man die durch die erwähnte Addition entstehende Gleichung folgendermaassen schreiben:

$$(141) \qquad \int \sum \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}\,d\tau = -\int U \sum \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}\,d\omega - \int U \sum \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,d\tau.$$

Für die erste hier an der rechten Seite stehende Summe kann man einen einfacheren Ausdruck setzen. Es ist nämlich:

$$\sum \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial n},$$

und für die zweite an der rechten Seite stehende Summe ist im Obigen schon das Zeichen ΔV eingeführt. Dadurch geht die Gleichung (141) über in:

$$(142) \qquad \int \sum \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}\,d\tau = -\int U \frac{\partial V}{\partial n}\,d\omega - \int U \Delta V\,d\tau.$$

Neben dieser Gleichung muss natürlich auch die folgende, durch blosse Vertauschung von U und V aus ihr entstehende Gleichung gelten:

$$(143) \qquad \int \sum \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}\,d\tau = -\int V \frac{\partial U}{\partial n}\,d\omega - \int V \Delta U\,d\tau,$$

und aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen ergiebt sich

$$(144)\qquad \int U\frac{\partial V}{\partial n}d\omega+\int U\Delta V d\tau=\int V\frac{\partial U}{\partial n}d\omega+\int V\Delta U d\tau.$$

Diese drei Gleichungen (142), (143) und (144) drücken den Green-schen Satz aus.

§ 41.

Erweiterung der vorstehenden Gleichungen.

Bei der im vorigen § gegebenen Ableitung der den Green-schen Satz ausdrückenden Gleichungen wurde vorausgesetzt, dass die Functionen U und V ihre Differentialcoefficienten erster und zweiter Ordnung in dem gegebenen Raume überall endlich seien. Die Gleichungen können aber unter Umständen auch gültig bleiben, wenn unendliche Werthe der Functionen und ihrer Differentialcoefficienten in dem Raume vorkommen, nur muss dann durch besondere Betrachtungen nachgewiesen werden, dass die in den Gleichungen vorkommenden Integrale bestimmte endliche Werthe behalten. Unter den in dieser Beziehung vorkommenden Fällen ist für uns der wichtigste der, wenn eine der Functionen die Potentialfunction eines in dem Raume befindlichen, nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernung abstossend und anziehend wirkenden Agens enthält, und über die Vertheilung dieses Agens keine beschränkende Bedingung gemacht ist, so dass auch Anhäufungen endlicher Mengen in Flächen, Linien und Puncten vorkommen können.

Es möge gleich der äusserste Fall, nämlich die Anhäufung einer endlichen Menge des Agens in einem Puncte angenommen werden. Es sei also ein in dem gegebenen Raume gelegener Punct p' mit den Coordinaten x', y', z' gegeben, welcher die Menge q des Agens enthalte, und indem wir annehmen, dass V nur die Potentialfunction dieses Agens sei, wollen wir setzen:

$$(145)\qquad V=\varepsilon\frac{q}{r},$$

worin r den Abstand irgend eines Punctes p mit den Coordinaten x, y, z vom Puncte p' bedeutet, so dass man hat:

$$(146)\qquad r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},$$

woraus folgt:

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{x - x'}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + 3\frac{(x - x')^2}{r^5}.$$

In diesem Falle erhält man bei unendlicher Annäherung an den Punct p' für die Function V und ihre ersten und zweiten Ableitungen unendlich grosse Werthe von erster, zweiter und dritter Ordnung, und es fragt sich, wie unter diesen Umständen die in (142), (143) und (144) vorkommenden Integrale sich verhalten.

Die Integrale, welche nur die Function V selbst oder ihre ersten Ableitungen enthalten, lassen sich kurz abmachen. Für diese genügt es, Polarcoordinaten um den Punct p' einzuführen, um zu bewirken, dass unter den Integralzeichen Alles endlich bleibt, wodurch es selbstverständlich wird, dass auch die Integrale bestimmte endliche Werthe haben.

Es handelt sich also nur noch um das Integral

$$\int U \Delta V \, d\tau.$$

Dieses lässt sich nach Einsetzung des in (145) gegebenen Werthes von V so schreiben:

$$\varepsilon q \int U \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) d\tau$$

und hiervon wollen wir zunächst nur den Theil

$$\varepsilon q \int U \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} d\tau$$

betrachten. Gemäss Gleichung (146) ist:

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x'^2}$$

und man kann daher setzen:

$$\varepsilon q \int U \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} d\tau = \varepsilon q \int U \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x'^2} d\tau.$$

Da nun die Function U von den Coordinaten x', y', z', des Punctes p' unabhängig ist, so kann man die vorige Gleichung auch so schreiben:

$$\varepsilon q \int U \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} d\tau = \varepsilon q \int \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \left(\frac{U}{r}\right) d\tau$$

und da ferner das Raumelement sich durch das Product $dx\, dy\, dz$ ersetzen lässt und somit die Integration nach Grössen auszuführen ist, welche ebenfalls von x', y', z' unabhängig sind, so kann man die Differentiation auch ausserhalb des Integralzeichens andeuten und somit schreiben:

$$\varepsilon q \int U \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} d\tau = \varepsilon q \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \int \frac{U}{r} d\tau.$$

Denkt man sich nun die entsprechenden Gleichungen auch für die beiden anderen Coordinatenrichtungen gebildet und alle drei Gleichungen addirt, so kommt:

$$(147) \qquad \int U \Delta V\, d\tau = \varepsilon q \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}\right) \int \frac{U}{r} d\tau.$$

Die hierin an der rechten Seite stehende Grösse können wir nun nach der in § 16 angeführten und in den darauf folgenden §§ bewiesenen Gleichung (II.) leicht bestimmen. Indem wir dort die Potentialfunction eines durch einen Raum stetig verbreiteten Agens durch den Ausdruck

$$\varepsilon \int \frac{k'}{r} d\tau$$

bestimmt hatten, worin k' eine Function der Coordinaten x', y', z' des Raumelementes $d\tau$, nämlich die beim Puncte (x', y', z') stattfindende Dichtigkeit bedeutete, haben wir die Gleichung

$$\Delta \left(\varepsilon \int \frac{k'}{r} d\tau\right) = -4\pi \varepsilon k$$

bewiesen, welche wir unter Forthebung von ε so schreiben können:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\int\frac{k'}{r}\,d\tau=-4\pi k.$$

Hierin bedeutet k die Dichtigkeit am Puncte (x, y, z). Natürlich kann man unter gegenseitiger Vertauschung von x, y, z und x', y', z' auch ebensogut schreiben:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2}{\partial z'^2}\right)\int\frac{k}{r}\,d\tau=-4\pi k',$$

und wenn man hierin U an die Stelle von k setzt, so erhält man:

$$\left(\frac{\partial^2}{d x'^2}+\frac{\partial^2}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2}{d z'^2}\right)\int\frac{U}{r}\,d\tau=-4\pi U'. \tag{148}$$

Hierdurch geht (147) über in:

$$\int U\Delta V\,d\tau=-4\pi\varepsilon q\,U', \tag{149}$$

worin U' den Werth der Function U an dem Puncte p', wo die Menge q des Agens sich befindet, bedeutet.

Den so gewonnenen Ausdruck wollen wir nun vergleichen mit demjenigen, welchen man erhalten würde, wenn das Agens, von welchem V die Potentialfunction ist, nicht in einem Puncte concentrirt, sondern stetig durch den Raum verbreitet wäre. Dann könnte man gemäss Gleichung (II.) ΔV durch $-4\pi\varepsilon k$ ersetzen, und zugleich könnte man für das Product $k d\tau$, welches die in dem Raumelemente $d\tau$ enthaltene Menge des Agens darstellt, dq schreiben. Dadurch würde man erhalten:

$$\int U\Delta V\,d\tau=-4\pi\varepsilon\int U\,dq.$$

Diese Gleichung stimmt mit (149) in der Weise überein, dass sie die allgemeinere Form hat, und (149) als speciellen Fall umfasst. Wendet man sie nämlich auf eine im Puncte p' concentrirte Menge des Agens an, so hat für alle Elemente dq dieses Agens die Function U einen und denselben Werth U' und man kann daher setzen:

$$\int U\,dq = U'\int dq = U'q,$$

wodurch die vorige Gleichung in (149) übergeht.

Da nun für die beiden extremen Fälle, wo das Agens stetig durch den Raum verbreitet, und wo es in einem Puncte concentrirt ist, eine und dieselbe Gleichung gilt, so kann man es als selbstverständlich betrachten, dass diese Gleichung auch für die Fälle, wo das Agens auf Linien und Flächen zusammengedrängt ist, gültig bleibt. In der That braucht man sich in diesen Fällen nur die auf den einzelnen Linien- oder Flächenelementen befindlichen unendlich kleinen Mengen des Agens in Puncten concentrirt zu denken, um sofort wieder zu derselben Gleichung zu gelangen. Man kann daher die Gleichung

$$(150)\qquad \int U\Delta V\,d\tau = -4\pi\varepsilon\int U\,dq$$

für jede Vertheilung des Agens als gültig betrachten, mag es stetig durch den Raum verbreitet oder auf Flächen, Linien oder Puncte zusammengedrängt sein.

Nachdem wir gesehen haben, wie das Integral $\int U\Delta V\,d\tau$ sich gestaltet, wenn V die Potentialfunction eines in dem gegebenen Raume befindlichen Agens ist, wollen wir annehmen, V sei von der allgemeineren Gestalt

$$(151)\qquad V = v + \varepsilon\int\frac{dq}{r},$$

worin das letzte Glied an der rechten Seite die genannte Potentialfunction ist, und v irgend eine andere Function darstellt, welche aber die Bedingung erfüllt, dass sie und ihre ersten und zweiten Ableitungen an keiner Stelle des gegebenen Raumes unendlich gross werden. Sollte z. B. V die Potentialfunction von Agens, welches sich ausserhalb des gegebenen Raumes befindet, enthalten, so würde diese in v mit einzubegreifen sein. Die Potentialfunction von Agens, welches sich innerhalb des gegebenen Raumes befindet, erfüllt in dem Falle, wo das Agens stetig durch den Raum verbreitet ist, auch noch die für v gestellten Bedingungen, und eine solche Potentialfunction kann daher, sofern sie in V vorkommt, nach Belieben in v oder in das letzte Glied einbegriffen werden. Ist dagegen von dem innerhalb des Raumes befindlichen Agens ein Theil auf Flächen, Linien und Puncte zusammengedrängt, so muss dessen Potentialfunction durch das letzte Glied dargestellt werden. Indem wir nun für V diese allgemeinere in (151) gegebene Form annehmen, haben wir statt (150) zu setzen:

$$(152) \qquad \int U \Delta V \, d\tau = \int U \Delta v \, d\tau - 4\pi\varepsilon \int U \, dq.$$

Alles, was im Vorstehenden über die Function V gesagt ist, lässt sich auch auf die Function U anwenden. Denken wir uns, U enthalte die Potentialfunction von Agens, welches sich innerhalb des gegebenen Raumes befinde und ganz oder zum Theil auf Flächen, Linien oder Puncte zusammengedrängt sei, und dessen Element zum Unterschiede von dem bei der Betrachtung von V angenommenen Agens mit $d\mathfrak{q}$ bezeichnet werden möge, und ausserdem sei in U eine Function u enthalten, welche die Bedingung erfüllt, dass sie und ihre ersten und zweiten Ableitungen in dem gegebenen Raume nirgends unendlich gross werden, und schreiben wir demgemäss U in der allgemeineren Form:

$$(153) \qquad U = u + \varepsilon \int \frac{d\mathfrak{q}}{r},$$

so erhalten wir:

$$(154) \qquad \int V \Delta U \, d\tau = \int V \Delta u \, d\tau - 4\pi\varepsilon \int V \, d\mathfrak{q}.$$

Es können auch beide Functionen U und V gleichzeitig die in (151) und (153) gegebenen allgemeineren Formen haben; nur wollen wir in diesem Falle annehmen, dass die Puncte des gegebenen Raumes, in welchen sie unendlich oder unstetig werden, nicht gerade zusammenfallen. Setzen wir dann in die am Schlusse des vorigen § angeführten Gleichungen die unter (152) und (154) gegebenen Ausdrücke ein, so kommt:

$$(155) \qquad \int \sum \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} d\tau = -\int U \frac{\partial V}{\partial n} d\omega - \int U \Delta v \, d\tau + 4\pi\varepsilon \int U \, dq.$$

$$(156) \qquad \int \sum \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} d\tau = -\int V \frac{\partial U}{\partial n} d\omega - \int V \Delta u \, d\tau + 4\pi\varepsilon \int V \, d\mathfrak{q}.$$

$$(157)\quad \int U\frac{\partial V}{\partial n}d\omega+\int U\Delta\, v\, d\tau-4\pi\varepsilon\int U\, dq$$
$$=\int V\frac{\partial U}{\partial n}d\omega+\int V\Delta\, u\, d\tau-4\pi\varepsilon\int V\, d\mathfrak{q}.$$

Die Grösse ε, deren Einführung in diese Gleichungen nur den Zweck hatte, dem letzten Gliede der in (151) und (153) gegebenen Ausdrücke von V und U ganz die von uns für die Potentialfunction angewandte Form zu geben, kann, wenn es der Einfachheit wegen zweckmässig scheint, gleich 1 gesetzt werden. Damit dann jenes Glied doch noch die Form einer Potentialfunction behalte, braucht man nur anzunehmen, die Einheit, nach welcher das Agens gemessen wird, sei so gewählt, dass zwei Einheiten des Agens in der Einheit der Entfernung die Einheit der Kraft auf einander ausüben.

§ 42.

Satz über den nach der Normale einer geschlossenen Fläche genommenen Differentialcoefficienten der Potentialfunction.

Indem wir nun zu Anwendungen der vorstehenden Gleichungen schreiten, wollen wir zunächst für die Grösse U die einfachste Annahme machen, dass sie constant und zwar gleich 1 sei. Dann ist:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial U}{\partial y}=0;\quad \frac{\partial U}{\partial z}=0,$$

und die Gleichung (155) geht somit für diesen Fall über in:

$$(158)\qquad \int\frac{\partial V}{\partial n}d\omega+\int\Delta\, v\, d\tau-4\pi\varepsilon\int dq=0.$$

Ferner wollen wir uns denken, V sei die Potentialfunction eines irgend wie, theils innerhalb, theils ausserhalb des gegebenen Raumes vertheilten Agens. Indem wir dann V in der unter (151) gegebenen Form schreiben, nämlich:

$$V=v+\varepsilon\int\frac{dq}{r},$$

wollen wir unter v die Potentialfunction des ausserhalb des gegebenen Raumes befindlichen Agens verstehen, während die Potentialfunction alles innerhalb des Raumes befindlichen Agens durch das letzte Glied dargestellt werden soll. Unter diesen Umständen ist in dem gegebenen Raume überall $\Delta v = 0$, und das Integral $\int dq$ stellt die ganze in dem gegebenen Raume enthaltene Menge des Agens dar, welche wir mit Q bezeichnen wollen. Dadurch geht die Gleichung (158) über in:

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\omega = 4\pi \varepsilon Q. \tag{159}$$

Diese Gleichung ist der Ausdruck einer sehr einfachen Beziehung zwischen dem nach der Normale einer geschlossenen Fläche genommenen Differentialcoefficienten der Potentialfunction, für dessen negativen Werth man auch die Normalkraft setzen kann, und der von der Fläche eingeschlossenen Menge des Agens.

Sollte auf der Fläche selbst eine endliche Menge des Agens befindlich sein, so würde der Differentialcoefficient $\frac{\partial V}{\partial n}$ für zwei einander unendlich nahe liegende Puncte ausserhalb und innerhalb der Fläche verschiedene Werthe haben, und man könnte alsdann in der vorstehenden Gleichung sowohl den äusseren, als auch den inneren Differentialcoefficienten in Anwendung bringen. Im ersteren Falle würde die auf der Fläche befindliche Menge des Agens in Q mit einbegriffen sein, im letzteren Falle nicht.

§ 43.

Bestimmung der Potentialfunction eines durch eine Fläche von dem betreffenden Raume getrennten Agens.

Es sei eine geschlossene Fläche gegeben und entweder ausserhalb derselben Agens in beliebiger Vertheilung vorhanden, für welches die innere Potentialfunction bestimmt werden soll, oder innerhalb Agens vorhanden, für welches die äussere Potentialfunction bestimmt werden soll. Auf der Fläche selbst kann sich in beiden Fällen ebenfalls eine endliche Menge des Agens befinden.

Es möge nun zuerst der Fall zur Betrachtung ausgewählt werden, wo das Agens sich ausserhalb der Fläche befindet, und die Potentialfunction in dem von ihr eingeschlossenen Raume bestimmt werden soll.

Wir nehmen dann diese Potentialfunction als die in der Gleichung (157) enthaltene Function V. Dann fällt in dem unter (151) gegebenen allgemeinen Ausdrucke von V das Integral mit dq fort, so dass V und v gleichbedeutend werden. Zugleich gilt für den ganzen von der Fläche eingeschlossenen Raum die Gleichung $\Delta V = 0$. Demnach geht die Gleichung (157) über in:

$$(160) \qquad \int U \frac{\partial V}{\partial n} d\omega = \int V \frac{\partial U}{\partial n} d\omega + \int V \Delta u \, d\tau - 4\pi\varepsilon \int V dq.$$

Ferner möge, um den Werth von V für irgend einen in diesem Raume gelegenen Punct p' mit den Coordinaten x', y', z' zu bestimmen, gesetzt werden:

$$U = \frac{1}{r}$$

worin r den Abstand des Punctes (x, y, z), auf welchen U sich bezieht, von jenem Puncte p' bedeutet. Aus der Vergleichung dieses Ausdruckes von U mit dem unter (153) gegebenen allgemeinen Ausdrucke ergiebt sich, dass man $u = 0$ setzen und das Integral mit dq auf eine im Puncte p' concentrirte Menge $\frac{1}{\varepsilon}$ von Agens beziehen muss. Demnach fällt in der obigen Gleichung (160) das vorletzte Glied fort, und im letzten ist zu setzen:

$$\varepsilon \int V dq = V' \varepsilon \int dq = V'$$

worin V' den Werth von V im Puncte p' bedeutet. Die Gleichung lautet dann also:

$$\int \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} d\omega = \int V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\omega - 4\pi V',$$

woraus folgt:

$$(161) \qquad V' = \frac{1}{4\pi} \int \left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} \right) d\omega.$$

Mittelst dieser Gleichung kann man, wenn in allen Puncten der gegebenen Fläche der Werth der Potentialfunction und ihres nach der Normale genommenen Differentialcoefficienten bekannt ist, auch für jeden Punct des von der Fläche eingeschlossenen Raumes den Werth der Potentialfunction berechnen, ohne dass man dazu die Vertheilung des Agens zu kennen braucht.

Es möge nun der andere Fall betrachtet werden, wo das Agens von der Fläche eingeschlossen ist, und die Potentialfunction in dem äusseren Raume bestimmt werden soll. Damit dieser äussere Raum allseitig begrenzt sei, wie es zur Anwendung unserer Gleichungen nöthig ist, denken wir uns um irgend einen im Endlichen liegenden Punct, z. B. um den Anfangspunct der Coordinaten, eine Kugelfläche mit dem unendlich grossen Radius R geschlagen, und betrachten nun den zwischen der gegebenen Fläche und der unendlich grossen Kugelfläche liegenden Raum als denjenigen, innerhalb dessen die Potentialfunction bestimmt werden soll.

Dann können wir ebenso verfahren, wie vorher. Wir nehmen die Potentialfunction als die in den Gleichungen vorkommende Function V, und um den Werth derselben für irgend einen Punct p' zu bestimmen, bezeichnen wir den Abstand des Punctes (x, y, z) von jenem Puncte mit r und setzen dann $U = \frac{1}{r}$. Dadurch erhalten wir zur Berechnung von V' wieder die Gleichung (161), bei deren Behandlung wir aber einige besondere Umstände berücksichtigen müssen. Erstens ist bei der Bildung der nach der Normale genommenen Differentialcoefficienten jetzt die Seite der Normale, welche von der gegebenen geschlossenen Fläche nach Aussen geht, als positiv zu rechnen, weil diese für den betrachteten Raume nach Innen geht. Auch ist, wenn auf der Fläche selbst sich eine endliche Menge des Agens befindet, unter $\frac{\partial V}{\partial n}$ jetzt der äussere Differentialcoefficient zu verstehen. Ferner muss das Flächenintegral sich jetzt nicht blos auf die gegebene Fläche, sondern auch auf die unendlich grosse Kugelfläche erstrecken.

Dieser letztere Umstand bringt aber keinen Unterschied in dem Werthe des Integrals hervor. Da nämlich der Radius R unendlich gross sein soll, so können gegen ihn alle endlichen Entfernungen vernachlässigt werden. Demnach kann man für einen auf der Kugelfläche gelegenen Punct für $\frac{1}{r}$ und V die Werthe setzen, welche man erhalten würde, wenn der Punct p' und das ganze von der gegebenen Fläche eingeschlossene Agens, dessen Menge wir mit Q bezeichnen wollen, sich im Mittelpuncte der Kugelfläche befände, nämlich:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \text{ und } V = \varepsilon \frac{Q}{R},$$

und entsprechend erhält man für die Differentialcoefficienten, wenn man zugleich berücksichtigt, dass die Normale die Richtung des nach Innen gehenden Radius hat:

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{1}{R^2} \text{ und } \frac{\partial V}{\partial n} = \varepsilon \frac{Q}{R^2}.$$

Ferner können wir das Flächenelement der Kugelfläche anders ausdrücken, indem wir das Element $d\sigma$ des körperlichen Winkels am Mittelpuncte einführen und dann setzen $d\omega = R^2 d\sigma$. Durch Einsetzung dieser Werthe geht das in (161) vorkommende Integral, soweit es sich auf die Kugelfläche bezieht, über in:

$$\int\left(\varepsilon \frac{Q}{R} \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R} \varepsilon \frac{Q}{R^2}\right) R^2 d\sigma = \varepsilon \int\left(\frac{Q}{R} - \frac{Q}{R}\right) d\sigma.$$

Hierin ist jedes der beiden in der Klammer stehenden Glieder unendlich klein, und das Integral würde daher schon aus diesem Grunde verschwinden, selbst wenn auch nicht noch der andere Grund hinzukäme, dass die beiden Glieder sich gegenseitig aufheben. Demnach können wir bei der Ausführung der in (161) angedeuteten Integration von der Kugelfläche absehen, und brauchen, wie im vorigen Falle, nur die gegebene Fläche zu berücksichtigen.

§ 44.

Betrachtung des Falles, wo nur die Potentialfunction selbst in der Fläche gegeben ist.

Es sei wiederum, wie im vorigen §, eine geschlossene Fläche gegeben, und angenommen, dass sich entweder ausserhalb oder innerhalb derselben Agens in beliebiger Vertheilung befinde. Es möge aber jetzt nicht der Werth der Potentialfunction und ihres nach der Normale genommenen Differentialcoefficienten, sondern nur der Werth der Potentialfunction selbst für jeden Punct der Fläche gegeben sein. Es fragt sich, was sich in diesem Falle über die im resp. inneren oder äusseren Raum geltenden Werthe der Potentialfunction schliessen lässt.

Zu dieser Betrachtung wollen wir die im vorigen § für U angenommene Form $\frac{1}{r}$ noch durch Hinzufügung eines zweiten Gliedes vervollständigen, indem wir setzen:

$$U = u + \frac{1}{r}, \tag{162}$$

worin u eine Function der Coordinaten bedeutet, welche folgende Eigenschaften haben soll. In der gegebenen Fläche soll u überall den Werth $-\frac{1}{r}$ haben. In dem ganzen betrachteten resp. inneren oder äusseren Raume soll überall die Gleichung $\Delta u = 0$ gelten. Endlich soll bei der Betrachtung des äusseren Raumes noch die Bedingung gestellt werden, dass in unendlichen Entfernungen die Producte Ru und $R^2 \frac{\partial u}{\partial R}$, worin R den Abstand des betrachteten unendlich entfernten Punctes von einem im Endlichen gelegenen Puncte, z. B. dem Anfangspuncte der Coordinaten, bedeutet, nicht unendlich gross werden.

Indem man diese Form von U auf die Gleichung (160) anwendet, und im Uebrigen so verfährt, wie im vorigen §, erhält man statt der Gleichung (161) die folgende:

$$V' = \frac{1}{4\pi} \int \left(V \frac{\partial \left(u + \frac{1}{r} \right)}{\partial n} - \left(u + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial V}{\partial n} \right) d\omega,$$

worin auch vom ersten Differentialcoefficienten nach n das von $\frac{\partial V}{\partial n}$ schon oben Gesagte gilt, dass er an der nach dem betrachteten Raume hin liegenden Seite der Fläche zu nehmen ist, und worin die Integration wieder nur über die gegebene Fläche ausgeführt zu werden braucht, weil für die unendlich grosse Kugelfläche, nach Ersetzung von $d\omega$ durch $R^2 d\sigma$, in beiden unter dem Integralzeichen befindlichen Gliedern der Factor von $d\sigma$ unendlich klein wird. Da nun aber nach unserer Voraussetzung in allen Puncten der gegebenen Fläche die Summe $u + \frac{1}{r}$ den Werth Null hat, so fällt das zweite unter dem Integralzeichen stehende Glied fort, und es bleibt:

$$V' = \frac{1}{4\pi} \int V \frac{\partial \left(u + \frac{1}{r} \right)}{dn} d\omega. \tag{163}$$

Mit Hülfe dieser Gleichung würde man, wenn die Function u bekannt wäre, aus den Werthen, welche V in der gegebenen Fläche hat, auch für jeden Punct des resp. inneren oder äusseren Raumes den Werth von V berechnen können. Ist die Function u nicht bekannt, lässt sich aber nachweisen, dass es stets eine und auch nur Eine Function u giebt, welche den obigen Bedingungen genügt, so kann man aus der Gleichung zwar nicht ohne Weiteres die Werthe von V berechnen, aber man kann aus ihr schliessen, dass sie vollkommen bestimmt sind, und man erhält dann also folgenden wichtigen Satz: durch die Werthe, welche die Potentialfunction in der gegebenen Fläche hat, sind auch die Werthe der Potentialfunction in allen Puncten des resp. inneren oder äusseren Raumes vollständig bestimmt.

Befindet sich das Agens nur auf der Fläche selbst, so gilt der vorstehende Satz für den inneren und äusseren Raum gleichzeitig, und man kann ihn dann so aussprechen: wenn für ein auf einer geschlossenen Fläche befindliches Agens die Potentialfunction auf der Fläche selbst gegeben ist, so ist sie dadurch auch im ganzen inneren und äusseren Raume bestimmt.

Ferner ist für den Fall, wo es sich um die Potentialfunction in dem äusseren Raume handelt, noch zu bemerken, dass statt Einer geschlossenen Fläche, welche Agens umgiebt, auch deren mehrere gegeben sein können, was aber als so selbstverständlich anzusehen ist, dass es nicht nöthig sein wird, darauf noch ferner besonders hinzuweisen.

Es kommt nun darauf an, den oben erwähnten Nachweis von der eindeutigen Existenz der Function u zu führen.

§ 45.

GREEN's Nachweis von der eindeutigen Existenz der Function u.

GREEN, welcher die Function u zuerst eingeführt hat, stellt, um sich von ihrer Existenz zu überzeugen, eine eigenthümliche, auf die Electricität bezügliche Betrachtung an.

Man nehme an, die gegebene Fläche sei für Electricität vollkommen leitend, und stehe mit der Erde in leitender Verbindung, was man sich durch einen unendlich dünnen Draht bewirkt denken kann. Ferner nehme man an, im Puncte p' sei die Menge $\frac{1}{\varepsilon}$ von positiver Electricität concentrirt. Diese Electricität wird durch Influenz bewirken, dass positive Electricität von der Fläche in die Erde abströmt, und die Fläche eine negative Ladung annimmt, welche sich so über dieselbe vertheilen muss, dass die gesammte Potentialfunction der in p' und der auf der Fläche befindlichen Electricität auf der ganzen Fläche constant ist, und zwar, wie in der Erde, den Werth Null hat. Verstehen wir nun unter u die Potentialfunction der auf der Fläche befindlichen Electricität für sich allein, und bedenken, dass die Potentialfunction der in p' befindlichen Electricitätsmenge durch $\frac{1}{r}$ dargestellt wird, so erhalten wir für alle Puncte der Fläche die Gleichung:

$$u + \frac{1}{r} = 0.$$

Dadurch ist die erste Bedingung, dass u in der Fläche überall den Werth $-\frac{1}{r}$ haben soll, erfüllt. Ferner sieht man sofort, dass die so bestimmte Function u sowohl für den inneren als auch für den äusseren Raum der Bedingung $\Delta u = 0$ genügt, und dass in unendlichen Entfernungen weder Ru noch $R^2 \frac{du}{dR}$ unendlich gross werden.

Giebt man es also als sicher zu, dass unter den genannten Umständen immer ein vollkommen bestimmter Gleichgewichtszustand der Electricität auf der Fläche entstehen muss, so ist damit auch die Existenz einer bestimmten Function u, welche allen gestellten Bedingungen genügt, bewiesen. Es ist sogar für weitere Schlüsse bequem, dass die Function u auf diese Weise eine so einfache physicalische Bedeutung gewonnen hat. Aber als ein streng mathematischer Beweis dafür, dass immer eine und nur Eine Function existirt, welche den Bedingungen entspricht, kann diese Green'sche Betrachtung nicht wohl gelten.

Es ist daher dieser Gegenstand später noch von Gauss, Thomson und Lejeune-Dirichlet behandelt und die Art, wie Letzterer ihn zum Abschluss zu bringen gesucht hat, möge im folgenden § nach den von Grube veröffentlichten Dirichlet'schen Vorlesungen mitgetheilt werden, obwohl auch gegen diese Entwickelung Einwendungen in Bezug auf ihre mathematische Strenge erhoben sind.

§ 46.

DIRICHLET'sche Verallgemeinerung des vorstehenden Satzes und Beweis derselben.

DIRICHLET hat dem Satze folgende allgemeinere Form gegeben.

Es giebt für einen beliebigen begrenzten Raum immer eine und nur Eine Function u von x, y, z, die selbst und deren Differentialcoefficienten erster Ordnung stetig sind, die innerhalb jenes ganzen Raumes die Gleichung $\Delta u = 0$ erfüllt, und die endlich in jedem Puncte der Oberfläche einen vorgeschriebenen Werth hat.

Diesen erweiterten Satz nennt man jetzt häufig das DIRICHLET'sche Princip, indessen darf dabei der Antheil, welchen GAUSS und besonders GREEN an der Aufstellung desselben gehabt haben, nicht ausser Acht gelassen werden.

Der von DIRICHLET geführte Beweis ist folgender.

Man nehme zuerst eine allgemeinere Function U an, welche von den drei oben gestellten Bedingungen nur den beiden zu genügen braucht, dass sie und ihre Differentialcoefficienten erster Ordnung stetig sind, und dass sie in jedem Puncte der Oberfläche den vorgeschriebenen Werth hat, und bilde mit dieser Function folgende Grösse:

$$W = \int \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau. \tag{164}$$

Da es nun offenbar unendlich viele Functionen U geben muss, welche den beiden genannten Bedingungen genügen, so wird man unter Anwendung derselben auch für W unendlich viele Werthe erhalten. Alle diese Werthe müssen positiv sein, da der unter dem Integralzeichen befindliche Ausdruck wesentlich positiv ist. Demnach muss für irgend eine der Functionen U die Grösse W ein Minimum werden, und diese specielle Function, welche ausser den oben genannten Bedingungen noch der Bedingung genügt, dass sie W zum Minimum macht, möge mit u bezeichnet werden. Es lässt sich nun beweisen, dass diese Function die Gleichung $\Delta u = 0$ erfüllt.

Wir können nämlich zwischen der speciellen Function u und irgend einer anderen der unendlich vielen Functionen U folgende Gleichung bilden:

$$U = u + hs,$$

worin h eine beliebige Constante ist und s eine Function bedeutet, welche den beiden Bedingungen zu genügen hat, dass sie und ihre Differentialcoefficienten erster Ordnung stetig sind, und dass sie in allen Puncten der Oberfläche den Werth Null hat. Aus der vorigen Gleichung ergiebt sich:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + h\frac{\partial s}{\partial x}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + h\frac{\partial s}{\partial y}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} + h\frac{\partial s}{\partial z}.$$

Durch Quadrirung und Addition dieser Gleichungen und nachherige Integration erhalten wir, wenn wir zur Abkürzung wieder das in § 40 eingeführte Summenzeichen anwenden:

$$\int\sum\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 d\tau = \int\sum\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 d\tau + 2h\int\sum\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x}d\tau + h^2\int\sum\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 d\tau.$$

Da nun nach der Bedingung, dass u diejenige der Functionen U sein soll, für welche W das Minimum wird, die Differenz

$$\int\sum\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 d\tau - \int\sum\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 d\tau$$

nicht negativ sein kann, so kann nach der vorstehenden Gleichung auch die Summe

$$2h\int\sum\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x}d\tau + h^2\int\sum\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 d\tau$$

nicht negativ sein. Diese Bedingung aber kann für beliebige Werthe von h nur dadurch erfüllt sein, dass

$$(165) \qquad \int\sum\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x}d\tau = 0,$$

denn, wenn dieses Integral einen angebbaren Werth hätte, so könnte man das Vorzeichen und die Grösse von h so wählen, dass das erste Glied der vorstehenden Summe negativ und dem absoluten

Werthe nach grösser als das zweite Glied wäre, wodurch die ganze Summe negativ werden würde.

Nun lässt sich nach dem GREEN'schen Satze für die Functionen u und s folgende Gleichung bilden:

$$\int \sum \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x}\, d\tau = -\int s \frac{\partial u}{\partial n}\, d\omega - \int s\, \Delta u\, d\tau. \tag{165a.}$$

Das hierin an der linken Seite stehende Integral ist dem oben gesagten nach gleich Null. Ferner ist auch das erste an der rechten Seite stehende Integral gleich Null, weil s an der Oberfläche überall den Werth Null hat. Demnach geht die Gleichung über in

$$\int s\, \Delta u\, d\tau = 0. \tag{166}$$

Da nun s im Innern des gegebenen Raumes eine beliebige, nur an die Bedingung der Stetigkeit gebundene Function ist, so kann diese Gleichung nur dadurch allgemein erfüllt werden, dass Δu überall in dem Raume gleich Null ist, denn, wenn dieses nicht der Fall wäre, so könnte man s so annehmen, dass es überall mit Δu gleiches Vorzeichen hätte, so dass das Product $s\, \Delta u$ überall positiv wäre und das Integral daher nicht Null werden könnte. Demnach genügt die specielle Function u, welche W zum Minimum macht, neben den beiden für die allgemeine Function U gestellten Bedingungen auch noch der dritten, dass $\Delta u = 0$, und da es, wie schon gesagt, unter den Functionen U immer eine geben muss, welche W zum Minimum macht, so muss es auch immer eine Function geben, welche den drei in dem Satze gestellten Bedingungen genügt.

Es bleibt nun noch zu beweisen, dass es nur Eine solche Function giebt.

Zunächst ist durch eine Umkehrung der vorigen Betrachtungen leicht ersichtlich, dass jede Function U, welche die Bedingung $\Delta U = 0$ erfüllen würde, auch W zu einem Minimum machen müsste, und es braucht also nur noch bewiesen zu werden, dass ausser jener bestimmten Function u keine andere der Functionen U die Grösse W zu einem Minimum macht.

Angenommen nun, es gebe ausser u noch eine zweite Function $u + s$, welche W zu einem Minimum mache, so wollen wir andere Functionen U, welche von $u + s$ nur wenig abweichen, durch $u + hs$

darstellen, worin h eine Constante sein soll, die sich nur wenig von 1 unterscheidet. Es würde dann die Differenz

$$\int \sum \left(\frac{\partial (u + hs)}{\partial x} \right)^2 d\tau - \int \sum \left(\frac{\partial (u + s)}{dx} \right)^2 d\tau$$

nicht negativ werden dürfen.

Indem wir nun, wie oben, die Differentialcoefficienten der Summen $u + hs$ und $u + s$ in die betreffenden Summen von Differentialcoefficienten zerlegen, und dabei die Gleichung (165), welche für jede Function s gelten muss, berücksichtigen, erhalten wir:

$$\int \sum \left(\frac{\partial (u + hs)}{\partial x} \right)^2 d\tau = \int \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 d\tau + h^2 \int \sum \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 d\tau$$

$$\int \sum \left(\frac{\partial (u + s)}{\partial x} \right)^2 d\tau = \int \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 d\tau + \int \sum \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 d\tau$$

und die vorige Differenz, welche nicht negativ sein darf, geht daher über in:

$$(h^2 - 1) \int \sum \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 d\tau.$$

Da nun h^2 eben so wohl kleiner, wie grösser als 1 sein kann, so kann der Factor $h^2 - 1$ negativ werden, und somit muss, wenn das Product nicht negativ werden soll, der andere Factor Null sein, und wir erhalten daher, wenn wir die angedeutete Summe jetzt vollständig ausschreiben:

$$(167) \qquad \int \left[\left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = 0.$$

Diese Gleichung kann nur dadurch erfüllt sein, dass für den ganzen Raum ist:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial z} = 0,$$

und demgemäss muss s constant sein. Da ferner an der Oberfläche, gemäss den für die Function s gestellten Bedingungen, $s = 0$ sein muss, so kann s auch im Innern nur den Werth Null haben, und die Function $u + s$ ist daher mit u identisch. Folglich ist u die einzige Function, welche W zu einem Minimum macht und demgemäss den drei in dem Satze gestellten Bedingungen genügt.

Den vorstehend mitgetheilten Beweis, welcher sich auf den allgemeineren Fall, wo die Function u an jedem Puncte der Oberfläche irgend einen vorgeschriebenen Werth haben soll, bezieht, kann man natürlich auch auf den specielleren Fall, wo die Function den bestimmten Werth $-\frac{1}{r}$ haben soll, anwenden. Auch für den Fall, wo der äussere Raum betrachtet wird, und wo also zu der gegebenen Fläche noch die unendlich grosse Kugelfläche hinzukommt, reichen die für die GREEN'sche Function und ihre Ableitung nach R in Bezug auf unendliche Entfernungen gestellten Bedingungen aus, um das Flächenintegral in (165a.) zum Verschwinden zu bringen und so den DIRICHLET'schen Beweis anwendbar zu machen.

§ 47.

Flächenbelegung, deren Potentialfunction in der Fläche selbst vorgeschriebene Werthe hat.

Für eine geschlossene Fläche giebt es stets eine und nur Eine Vertheilung von Agens auf der Fläche selbst, deren Potentialfunction in jedem Puncte der Fläche einen vorgeschriebenen Werth hat.

In § 44 haben wir gesehen, dass für den Fall, wo das Agens sich nur auf der Fläche befindet, durch die in der Fläche geltenden Werthe der Potentialfunction, auch die Potentialfunction im inneren und äusseren Raume vollkommen bestimmt ist. Ist aber die Potentialfunction in beiden Räumen bestimmt, so sind es auch ihre innerhalb und ausserhalb der Fläche nach der Normale genommenen Differentialcoefficienten. Bezeichnen wir nun, indem wir die Normale nach einer bestimmten Seite, z. B. nach Aussen hin, als positiv rechnen, den äusseren Differentialcoefficienten dicht an der Fläche mit $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0}$ und den inneren Differentialcoefficienten dicht an der Fläche mit $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0}$, so gilt für die Flächendichtigkeit h die in § 33 unter (III.) gegebene Gleichung, welche wir in folgender Form schreiben können:

$$h = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0}\right].$$

Somit ist die Flächendichtigkeit, welche der gestellten Bedingung genügt, vollständig bestimmt, und dadurch der Satz bewiesen.

Natürlich kann dieser Satz, welcher im Vorigen nur für Eine geschlossene Fläche ausgesprochen ist, auch sofort auf beliebig viele geschlossene Flächen ausgedehnt werden.

§ 48.

Ersetzung des durch einen Raum verbreiteten Agens durch Agens, welches sich nur auf der Grenzfläche des Raumes befindet.

Es sei eine Quantität Agens gegeben, welche durch den von einer geschlossenen Fläche umgrenzten Raum beliebig verbreitet ist, und sich auch zum Theil auf der Oberfläche befinden kann. Dann giebt es stets eine und nur Eine Vertheilung von Agens auf der Fläche allein, welche im ganzen äusseren Raume dieselbe Potentialfunction hat, wie das gegebene Agens. Ebenso giebt es in dem Falle, wo das Agens sich ausserhalb der Fläche befindet, eine und nur Eine Vertheilung auf der Fläche allein, welche im ganzen inneren Raume dieselbe Potentialfunction hat, wie das gegebene Agens.

Da es nach dem vorigen § immer eine und nur Eine Vertheilung von Agens auf der Fläche giebt, deren Potentialfunction in jedem Puncte der Fläche einen vorgeschriebenen Werth hat, so muss es auch eine und nur Eine Vertheilung auf der Fläche geben, deren Potentialfunction in allen Puncten der Fläche gleich der Potentialfunction des gegebenen Agens ist. Wenn aber die beiden Potentialfunctionen an der Fläche überall einander gleich sind, so müssen sie auch in dem ganzen resp. äusseren oder inneren Raume einander gleich sein.

§ 49.

Bestimmung einer Function V, welche die Gleichung $\Delta V = -4\pi\varepsilon k$ erfüllt.

Im Obigen wurde als eine der wichtigsten Eigenschaften der Potentialfunction die für sie stattfindende Gültigkeit der partiellen Differentialgleichung $\Delta V = -4\pi\varepsilon k$ bewiesen, worin k die Dichtigkeit des betreffenden Agens bedeutet, welche natürlich für die Stellen, wo sich kein Agens befindet, gleich Null zu setzen ist. Es möge nun noch eine umgekehrte Betrachtung angestellt werden.

Es werde nämlich für irgend eine Function V der Raumcoordinaten, von der vorausgesetzt werden soll, dass sie und ihre ersten und zweiten Ableitungen nirgends unendlich gross werden, die Annahme gemacht, dass die Gleichung

$$\Delta V = -4\pi\varepsilon k$$

gültig sei, worin k irgend eine Function der Coordinaten bedeuten soll, welche innerhalb eines ganz im Endlichen liegenden Raumes beliebige endliche Werthe haben kann, ausserhalb dieses Raumes aber bis in's Unendliche überall Null ist. Ferner möge noch die Bedingung hinzugefügt werden, dass in unendlich grosser Entfernung R vom Anfangspuncte der Coordinaten sowohl V als auch das Product $R\frac{\partial V}{\partial R}$ unendlich klein werden. Dann lässt sich beweisen, dass durch diese Bedingungen die Function V vollkommen bestimmt ist, indem sie durch die Potentialfunction eines Agens, welches die Raumdichtigkeit k hat, dargestellt wird.

Wir benutzen dazu die Green'sche Gleichung (157), welche nach den über V gemachten Annahmen eine vereinfachte Form erhält. Betrachtet man nämlich die unter (151) gegebene allgemeine Form von V, so sieht man, dass darin für den gegenwärtigen Fall das Integral mit dq fortgelassen und v mit V als gleichbedeutend angesehen werden kann, weil V die dort für v gestellten Bedingungen erfüllt. Ferner ist für Δv, welches nach dem ebengesagten mit ΔV gleichbedeutend ist, der oben gegebene Werth $-4\pi\varepsilon k$ zu setzen. Dadurch geht die Gleichung über in:

$$(168)\qquad \int U\frac{\partial V}{\partial n}d\omega-4\pi\varepsilon\int Uk\,d\tau=\int V\frac{\partial U}{\partial n}d\omega$$
$$+\int V\Delta u\,d\tau-4\pi\varepsilon\int V d\mathfrak{q}.$$

Um nun den Werth V', welchen die Function V an einem beliebig gewählten Puncte p' mit den Coordinaten x', y', z' hat, zu bestimmen, nehmen wir für U dieselbe Form an, wie in § 43, nämlich:

$$U=\frac{1}{r},$$

worin r den Abstand des Punctes p mit den Coordinaten x, y, z von jenem Puncte p' bedeutet. Dann folgt, wie in § 43 auseinander gesetzt wurde, dass man zu setzen hat:

$$u=0 \text{ und } \varepsilon\int V d\mathfrak{q}=V',$$

und die Gleichung (168) geht daher über in:

$$\int\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}d\omega-4\pi\varepsilon\int\frac{k}{r}d\tau=\int V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\omega-4\pi V',$$

oder anders geordnet:

$$(169)\qquad V'=\varepsilon\int\frac{k}{r}d\tau+\frac{1}{4\pi}\int\left(V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}\right)d\omega.$$

Diese Gleichung wollen wir auf den ganzen Raum, welcher von einer um den Anfangspunct der Coordinaten mit dem unendlich grossen Radius R geschlagenen Kugelfläche eingeschlossen ist, anwenden. Dann bezieht sich das in ihr vorkommende Flächenintegral auf die unendlich grosse Kugelfläche. In diesem Integrale können wir, wie es in § 43 geschah, das Flächenelement $d\omega$ durch $R^2 d\sigma$ ersetzen, worin $d\sigma$ das Element des körperlichen Winkels bedeutet, ferner für $\frac{1}{r}$ und $\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}$ ihre Werthe $\frac{1}{R}$ und $\frac{1}{R^2}$ setzen und endlich $\frac{\partial V}{\partial n}$ in $-\frac{\partial V}{\partial R}$ umformen. Dadurch nimmt das Integral folgende Form an:

$$\int\left(V+R\frac{\partial V}{\partial R}\right)d\sigma.$$

Da nun gemäss der über V gemachten Annahme die beiden hier in Klammer stehenden Glieder unendlich klein sind, so verschwindet das ganze Integral, und die Gleichung (169) geht über in:

$$V'=\varepsilon\int\frac{k}{r}\,d\tau. \tag{170}$$

Hierdurch ist die Behauptung, dass die Function V, von welcher V' den auf den Punct (x', y', z') bezüglichen Werth bedeutet, vollkommen bestimmt ist, und durch die Potentialfunction eines Agens mit der Dichtigkeit k dargestellt wird, bewiesen.

§ 50.

Ausnahmestellen und deren Absonderung.

Im vorigen § wurde von der Function V vorausgesetzt, dass sie und ihre ersten und zweiten Ableitungen nirgends unendlich gross seien, und dass überall die Gleichung $\Delta V = -4\pi\varepsilon k$ erfüllt sei. Wir wollen nun die Betrachtung in der Weise erweitern, dass wir Ausnahmestellen zulassen, nämlich Flächen, Linien und Puncte, in welchen ΔV der obigen Gleichung nicht genügt und überhaupt keinen endlichen Werth hat, für welche dagegen die anderen früher besprochenen und in § 39 übersichtlich zusammengestellten characteristischen Gleichungen in Kraft treten, nämlich für Flächen die Gleichung (III.), für Linien die Gleichungen (IV.) und für Puncte die Gleichungen (Va.).

Um beim Vorhandensein solcher Ausnahmestellen doch die Gleichung (169) anwenden zu können, umgeben wir die Stellen mit Flächen, durch welche sie vom übrigen Raume abgesondert werden.

Wenn als Ausnahmestelle eine Fläche gegeben ist, so legen wir neben dieselbe zu beiden Seiten zwei unendlich nahe parallele Flächen und verbinden deren Ränder durch eine unendlich schmale Fläche, welche so gestaltet ist, dass sie von jeder auf dem Rande der gegebenen Fläche senkrecht stehenden Ebene in einem unendlich kleinen Halbkreise geschnitten wird. Die beiden parallelen Flächen und die Randfläche zusammen bilden unsere Absonderungsfläche. Sollte die gegebene Fläche geschlossen sein, so würde natürlich die Randfläche fortfallen.

Wenn als Ausnahmestelle eine Linie gegeben ist, so construiren wir die Absonderungsfläche in folgender Weise. Um jeden Punct der Linie denken wir uns in einer auf der Linie senkrechten Ebene einen Kreis mit dem unendlich kleinen Radius ρ geschlagen. Diese sämmtlichen Kreise bilden zusammen eine cylinderartige Fläche, welche wir uns an den Enden durch zwei um die Endpuncte der Linie geschlagene Halbkugeln mit dem Radius ρ geschlossen denken. Sollte die Linie geschlossen sein, so würden die Endflächen fortfallen.

Wenn als Ausnahmestelle ein Punct gegeben ist, so nehmen wir als Absonderungsfläche einfach eine um den Punct geschlagene unendlich kleine Kugelfläche.

Nachdem auf diese Weisen alle Ausnahmestellen von Flächen umgeben sind, können wir die Gleichung (169), nämlich:

$$V' = \varepsilon \int \frac{k}{r}\, d\tau + \frac{1}{4\pi} \int \left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} \right) d\omega,$$

auf denjenigen Raum anwenden, welcher von dem ganzen, innerhalb der unendlich grossen Kugelfläche liegenden Raume nach Ausschluss der von den Absonderungsflächen begrenzten unendlich kleinen Räume übrig bleibt. Dabei ist zu bemerken, dass es für das erste an der rechten Seite stehende Integral nur einen unendlich kleinen Unterschied macht, ob die Integration jene von den Absonderungsflächen begrenzten unendlich kleinen Räume mit umfasst, oder nicht, da die Grösse k der Voraussetzung nach auch in diesen Räumen endlich bleibt. Bei dem zweiten Integrale dagegen entsteht dadurch, dass die Integration ausser der unendlich grossen Kugelfläche, welche nur einen verschwindend kleinen Integralwerth giebt, noch die Absonderungsflächen zu umfassen hat, ein wesentlicher Unterschied.

§ 51.

Bestimmung der Function V unter Berücksichtigung der Absonderungsflächen.

Indem wir nun dazu schreiten, die auf die verschiedenen Absonderungsflächen bezüglichen Theile des in (169) vorkommenden Flächenintegrals zu bestimmen, wählen wir zunächst eine solche Absonderungsfläche zur Betrachtung aus, welche eine Fläche einschliesst. Dabei können wir die Randfläche gegen diejenigen beiden Flächen, welche der gegebenen Fläche parallel sind, als unendlich klein vernachlässigen. Um das auf die letzteren beiden Flächen bezügliche Integral zu bilden, fassen wir immer zwei Flächenelemente zusammen, welche sich gegenüberliegen und eben so gross sind, wie das zwischen ihnen liegende Flächenelement $d\omega$ der gegebenen Fläche. Dann können wir den Theil des in (169) vorkommenden Flächenintegrals, welcher sich auf diese Absonderungsfläche bezieht, so schreiben:

$$\int \left[\left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} \right)_1 + \left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} \right)_2 \right] d\omega,$$

worin die Indices 1 und 2 andeuten sollen, dass von dem in Klammer stehenden Ausdrucke die in den beiden parallelen Flächen geltenden Werthe zu nehmen sind. Die Integration ist dann einfach über die gegebene Fläche auszudehnen.

Nun ist aber, weil die beiden parallelen Flächen unter einander und der gegebenen Fläche unendlich nahe sind, zu setzen:

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \text{ und } V_2 = V_1 = V,$$

worin die Buchstaben ohne Index sich auf die gegebene Fläche beziehen. Man kann daher das vorige Integral auch so schreiben:

$$\int \left\{ V \left[\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right)_1 + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right)_2 \right] - \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_2 \right] \right\} d\omega.$$

Was nun die Differentialcoefficienten nach n anbetrifft, so ist zu bemerken, dass im vorstehenden Ausdrucke die Normale nach der Seite als positiv zu rechnen ist, welche in Bezug auf den betrachteten Raum nach Innen geht, was für die beiden parallelen Flächen nach entgegengesetzten Richtungen stattfindet. Um nun aber mit unserer früheren, bei Flächen angewandten Bezeichnungsweise in Uebereinstimmung zu kommen, wollen wir die Normale auf der gegebenen Fläche, welche zugleich Normale auf den beiden parallelen Flächen ist, nach einer bestimmten Richtung als positiv rechnen, nämlich von der parallelen Fläche, auf welche sich der Index 1 bezieht, nach der parallelen Fläche hin, auf welche sich der Index 2 bezieht, und zugleich wollen wir die beiden Werthe, welche der nach der Normale genommene Differentialcoefficient an den beiden Seiten der gegebenen Fläche in ihrer unmittelbaren Nähe hat, durch die Indices $+0$ und -0 von einander unterscheiden. Dann ist zu setzen:

$$\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)_2=\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)_{+0}; \quad \left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)_1=-\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)_{-0}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_2=\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0}; \quad \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_1=-\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0},$$

wodurch der vorige Ausdruck übergeht in:

$$\int\left\{V\left[\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)_{+0}-\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)_{-0}\right]-\frac{1}{r}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0}-\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0}\right]\right\}d\omega.$$

Nun erleidet aber der Differentialcoefficient $\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}$ beim Durchgange durch die gegebene Fläche keine sprungweise Aenderung, und die beiden Werthe $\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)_{+0}$ und $\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)_{-0}$ können daher nur unendlich wenig von einander verschieden sein, so dass ihre Differenz, welche sich in der ersten eckigen Klammer befindet, zu vernachlässigen ist. Für die in der zweiten eckigen Klammer stehende Differenz können wir nach (III.) setzen: $-4\pi\varepsilon h$. Demnach nimmt der auf diese Absonderungsfläche bezügliche Theil des in (169) vorkommenden Flächenintegrals folgende einfache Form an:

$$4\pi\varepsilon\int\frac{h}{r}\,d\omega.$$

Sollten mehrere Ausnahmeflächen vorhanden sein, so könnte man doch den vorstehenden Ausdruck für sie alle zusammen beibehalten, wenn man nur festsetzte, dass das Integral sich auf alle gegebenen Flächen erstrecken soll.

Wir wählen nun weiter eine solche Absonderungsfläche, welche eine Linie einschliesst, zur Betrachtung aus. Dabei können wir uns auf die cylinderartige Fläche beschränken, indem die halbkugelförmigen Endflächen unendlich klein von höherer Ordnung sind. Um ein Element der cylinderartigen Fläche auszudrücken, wollen wir in der durch irgend einen Punct der Linie gelegten Normalebene, welche die cylinderartige Fläche in einem unendlich kleinen Kreise mit dem Radius ρ schneidet, den Winkel eines vom Mittelpuncte ausgehenden Leitstrahles mit einer durch den Mittelpunct gehenden festen Geraden mit φ bezeichnen, so dass das Element des Kreises durch $\rho d\varphi$ dargestellt wird. Ferner wollen wir uns neben der ersten Normalebene noch eine zweite um ds von ihr entfernte gelegt denken, welche mit ihr zusammen einen unendlich schmalen Streifen aus der cylinderartigen Fläche ausschneidet. Dann können wir ein Element dieses Streifens durch $\rho\, d\varphi\, ds$ darstellen, und diesen Ausdruck statt $d\omega$ in Anwendung bringen. Da ferner der Radius ρ auf der Oberfläche senkrecht ist, so können wir die Differentialcoefficienten nach n auch durch Differentialcoefficienten nach ρ ersetzen. Dadurch nimmt der auf diese Absonderungsfläche bezügliche Theil des in (169) vorkommenden Flächenintegrales folgende Form an:

$$\iint\left(V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\rho}-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)\rho\,d\varphi\,ds,$$

oder etwas umgeschrieben:

$$\int ds\int\left(\rho V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\rho}-\frac{1}{r}\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)d\varphi.$$

Was das erste hier in Klammer stehende Glied anbetrifft, so ist der Factor ρV für unendlich kleine Werthe von ρ, gemäss (IV.), unendlich klein. Dazu kommt noch, dass bei je zwei Werthen von φ, welche um π von einander verschieden sind, und für welche daher ρ entgegengesetzte Richtungen hat, der Differentialcoefficient $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \rho}$ bei unendlich nahe gleichen absoluten Werthen entgegengesetzte Vorzeichen hat, während der andere Factor ρV gleiche Vorzeichen hat, woraus folgt, dass selbst dann, wenn ρV nicht schon an sich unendlich klein wäre, das Verschwinden des Gliedes dadurch eintreten würde, dass in dem von 0 bis 2π zu nehmenden Integrale nach φ je zwei Elemente sich aufheben. In dem zweiten Gliede kann man $\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}$, gemäss (IV.), durch $-2\varepsilon g$ ersetzen, und unter r können wir statt des auf die Peripherie des unendlich kleinen Kreises bezüglichen Werthes den auf den Mittelpunct bezüglichen Werth setzen. Dadurch geht der Ausdruck über in:

$$\int ds \frac{2\varepsilon g}{r} \int d\varphi$$

und durch Ausführung der Integration nach φ in:

$$4\pi\varepsilon \int \frac{g\, ds}{r}.$$

Eben diesen Ausdruck kann man auch beibehalten, wenn mehrere Ausnahmelinien vorhanden sind, indem man festsetzt, dass das Integral sich auf alle diese Linien beziehen soll.

Wählen wir endlich eine solche Absonderungsfläche zur Betrachtung aus, welche einen Ausnahmepunct umgiebt, also eine mit einem unendlich kleinen Radius, der $\mathfrak{r}$ heissen möge, um diesen Punct beschriebene Kugelfläche, so können wir darin das Flächenelement $d\omega$ durch $\mathfrak{r}^2 d\sigma$ darstellen, worin $d\sigma$ das Element des körperlichen Winkels bedeutet, und können ferner die Differentialcoefficienten nach n durch Differentialcoefficienten nach $\mathfrak{r}$ ersetzen. Der auf diese Fläche bezügliche Theil des in (169) vorkommenden Flächenintegrales lautet dann:

$$\int\left(V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{r}}-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\mathfrak{r}}\right)\mathfrak{r}^2 d\sigma.$$

Hierin gilt vom ersten Gliede im Wesentlichen dasselbe, wie im vorigen Falle. Das Product $\mathfrak{r}^2 V$ ist, gemäss (Va.), unendlich klein, und selbst, wenn dieses nicht der Fall wäre, so würde das über den ganzen körperlichen Winkelraum ausgeführte Integral dadurch unendlich klein werden, dass $\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\mathfrak{r}}$ an je zwei aneinander gegenüberliegenden Puncten der Kugelfläche bei unenendlich nahe gleichen absoluten Werthen entgegengesetzte Vorzeichen hat. Im zweiten Gliede ist $-\mathfrak{r}^2\frac{\partial V}{\partial\mathfrak{r}}$, gemäss (Va.), durch εq zu ersetzen, und für r kann statt des auf die Kugelfläche bezüglichen Werthes der auf den Mittelpunct bezügliche Werth genommen werden, wodurch der Ausdruck übergeht in:

$$\varepsilon\frac{q}{r}\int d\sigma$$

oder nach Ausführung der Integration:

$$4\pi\varepsilon\frac{q}{r}.$$

Sind mehrere Ausnahmepuncte vorhanden, so kann man die auf sie bezüglichen Theile des Flächenintegrals zusammenfassen in:

$$4\pi\varepsilon\sum\frac{q}{r}.$$

Kehren wir nun zu der Gleichung (169) zurück, und setzen für das darin angedeutete Flächenintegral die Summe der für die drei Arten von Absonderungsflächen gefundenen Ausdrücke, so erhalten wir statt der Gleichung (170) die folgende:

$$(171)\qquad V'=\varepsilon\int\frac{k}{r}d\tau+\varepsilon\int\frac{h}{r}d\omega+\varepsilon\int\frac{g}{r}ds+\varepsilon\sum\frac{q}{r}.$$

Somit ist auch in diesem allgemeineren Falle, wo Ausnahmestellen vorkommen, der im Puncte p' geltende Werth der Function V vollkommen bestimmt, und aus der Form des Ausdruckes ist ersichtlich, dass V nichts anderes ist, als die Potentialfunction eines Agens, von welchem ein Theil durch den Raum mit der Raumdichtigkeit k verbreitet ist, während zugleich auf gegebenen Flächen endliche Mengen mit der Flächendichtigkeit h, auf gegebenen Linien endliche Mengen mit der Liniendichtigkeit g, und in gegebenen Puncten endliche Mengen q, q_1 etc. befindlich sind.

Sollte eine der gegebenen Linien in einer der gegebenen Flächen liegen, so würde es für das Flächenintegral $\int \frac{h}{r} d\omega$ nur einen unendlich kleinen Unterschied machen, ob es den Theil der Fläche, welcher von der für die Linie construirten Absonderungsfläche eingeschlossen wäre, mit umfasste, oder nicht, und das Entsprechende würde auch für den Fall gelten, wo einer der gegebenen Puncte in einer der gegebenen Flächen oder Linien läge.

II. Das Potential.

§ 52.

Ausgangspuncte für die Auseinandersetzung.

Um den Begriff des Potentials und die Rolle, welche es bei physicalischen Untersuchungen spielt, erläutern zu können, muss ich zwei Fundamentalsätze der Mechanik voraussetzen, nämlich 1) den Satz von den virtuellen Bewegungen oder, wie man gewöhnlich sagt, von den virtuellen Geschwindigkeiten, und 2) das D'ALEMBERT'sche Princip. Es ist hier nicht der Ort dazu, diese Sätze zu entwickeln und zu beweisen, sondern ich will sie nur anführen, um die weiteren Betrachtungen daran anknüpfen zu können. Dabei will ich sie aber in etwas vollständigerer Form aussprechen, als es gewöhnlich geschieht, weil es für physicalische Untersuchungen von Wichtigkeit ist, genau zu wissen, unter welchen Bedingungen sie gültig sind, und welche Modificationen sie erleiden, wenn die Bedingungen sich ändern.

§ 53.

Begriff der virtuellen Bewegungen und Unterscheidung zweier Fälle.

Es sei irgend ein System von beweglichen Puncten p, p_1, p_2 etc. gegeben, welche entweder ganz frei nach jeder beliebigen Richtung beweglich oder durch gewisse Bedingungen in ihren Bewegungen beschränkt seien. Solche beschränkenden Bedingungen können in dem Systeme selbst liegen, wenn die Puncte irgend wie unter einander in Verbindung stehen, so dass durch die Bewegung einiger Puncte die Bewegung anderer ganz oder theilweise mit bestimmt ist; oder sie können von aussen her gegeben sein, wie z. B. wenn ein Punct gezwungen ist, in einer gegebenen festen Fläche oder Curve zu bleiben, oder ganz fest an einer Stelle zu verharren, wodurch dann natürlich auch die anderen Puncte, welche mit diesem zusammenhängen, entsprechenden Beschränkungen in ihren Bewegungen unterliegen.

In Bezug auf die beschränkenden Bedingungen findet noch ein wesentlicher Unterschied statt. Wenn ein Punct gezwungen ist, in einer festen Fläche zu bleiben, so kann er sich senkrecht gegen die Fläche weder nach der einen, noch nach der anderen Seite bewegen. Denkt man sich aber, der Punct befinde sich an der Oberfläche eines festen, für ihn undurchdringlichen Körpers, so kann er sich in der Richtung der Normale nach der einen Seite, welche nach dem Innern des Körpers geht, nicht bewegen, während nach der anderen Seite, welche nach aussen geht, seine Bewegung frei ist. Ebenso verhält es sich mit der Electricität in einem leitenden Körper, welcher von Nichtleitern umgeben ist, indem ein an der Oberfläche befindliches Electricitätstheilchen sich wohl nach dem Innern des Leiters, aber nicht nach Aussen bewegen kann. Denkt man sich ferner zwei bewegliche Puncte, welche durch eine starre Linie unter einander verbunden sind, so können sie sich weder einander nähern, noch von einander entfernen; sind sie dagegen durch einen biegsamen Faden verbunden, und nimmt man an, sie seien schon so weit von einander entfernt, dass der Faden gespannt sei, so können sie sich zwar nicht weiter von einander entfernen, wohl aber einander nähern. Ich werde solche Bewegungshindernisse, welche nach einer Richtung hin die Bewegung unmöglich machen, nach der entgegengesetzten Richtung aber sie frei lassen, Bewegungshindernisse mit einseitigem Widerstande nennen; solche dagegen, bei denen jede zwei entgegengesetzte Richtungen sich gleich verhalten, so dass, wenn nach der einen Seite die Bewegung verhindert ist, sie auch nach der entgegengesetzten Seite nicht geschehen kann, sollen, wo es zur Unterscheidung nöthig ist, Bewegungshindernisse mit beiderseitigem Widerstande genannt werden.

Es möge nun das gegebene System von der Lage aus, in welcher es ursprünglich betrachtet wurde, eine unendlich kleine Bewegung machen, so dass die einzelnen Puncte unendlich kleine Wegstücke zurücklegen. Diese kleinen Wege dürfen dem Vorigen nach nicht als für jeden Punct beliebig betrachtet werden, sondern sie müssen so beschaffen sein, dass sie den beschränkenden Bedingungen, welchen die Bewegungen der Puncte unterworfen sind, genügen. Man hat daher ein solches System von unendlich kleinen

Bewegungen, welche jenen Bedingungen nach möglich sind, indem man ursprünglich vorzugsweise die verschiedenen Geschwindigkeiten der gleichzeitigen Bewegungen in's Auge gefasst hat, ein System von virtuellen Geschwindigkeiten genannt. Diese Bezeichnung ist aber nicht ganz zweckmässig, weil durch die Geschwindigkeiten, mit welchen die Puncte sich gleichzeitig bewegen, nur die verhältnissmässigen Längen der kleinen Wege, nicht aber ihre Richtungen, welche ebenfalls in Betracht kommen müssen, bestimmt werden. Ich glaube daher, dass es bezeichnender wäre, von virtuellen Bewegungen zu sprechen, denn bei dem Worte Bewegung denkt man sogleich an Grösse und Richtung, während das Wort Geschwindigkeit, wenigstens im gewöhnlichen Sprachgebrauche, die Richtung nicht mit in sich begreift.

In den meisten Fällen giebt es für dasselbe System von Puncten unendlich viele Systeme von virtuellen Bewegungen. Wenn alle vorkommenden Bewegungshindernisse solche mit beiderseitigem Widerstande sind, so gehört zu jedem Systeme von virtuellen Bewegungen auch das entgegengesetzte, indem die Puncte sich sowohl nach der einen, als nach der anderen Seite bewegen können. Kommen dagegen Bewegungshindernisse mit einseitigem Widerstande vor, so giebt es Systeme von virtuellen Bewegungen, welche nur nach der einen Seite, nicht aber nach der entgegengesetzten Seite stattfinden können. Wir wollen die erste Art von virtuellen Bewegungen umkehrbare und die letzte Art nichtumkehrbare nennen.

§ 54.

Begriff der virtuellen Momente und Ausdruck des betreffenden Satzes.

Es sei nun weiter angenommen, dass auf die einzelnen beweglichen Puncte Kräfte wirken. Wenn auf einen Punct mehrere Kräfte wirken, so kann man diese entweder einzeln betrachten, oder sie sich auch in eine Resultante zusammengesetzt denken. Diese Kräfte werden mit den virtuellen Bewegungen in der Weise verbunden, dass man jede virtuelle Bewegung mit der in die Richtung der Bewegung fallenden Componente der auf den Punct wirkenden Kraft multiplicirt, und die dadurch entstehenden Producte werden die virtuellen Momente der Kräfte genannt. Es gehört also zu jedem Systeme von virtuellen Bewegungen ein System von virtuellen Momenten. Die einzelnen Momente können positiv oder negativ sein, jenachdem die betreffende Kraftcomponente nach der Seite hin gerichtet ist, wohin die Bewegung geht, oder nach der entgegengesetzten.

Mit Hülfe dieser virtuellen Momente kann man die Bedingungen, welche erfüllt sein müssen, damit das System von Puncten unter dem Einflusse der auf sie wirkenden Kräfte im Gleichgewichte sei, auf einfache Weise durch folgenden Satz ausdrücken: Es ist für das Gleichgewicht nothwendig und hinreichend, dass für alle vorkommenden Systeme von virtuellen Bewegungen die Summe der virtuellen Momente Null oder negativ ist.

Es versteht sich hiernach von selbst, dass für ein umkehrbares System von virtuellen Bewegungen das erstere stattfinden muss, dass die Summe der virtuellen Momente Null ist, denn hätte sie einen angebbaren negativen Werth, so würde man für die ebenfalls möglichen umgekehrten Bewegungen einen angebbaren positiven Werth erhalten, was dem Satze widerspricht. Für solche Fälle, wo nur umkehrbare virtuelle Bewegungen vorkommen, kann man daher einfach sagen: es muss für alle Systeme von virtuellen Bewegungen die Summe der virtuellen Momente Null sein. Dieses ist die Form, in welcher man den Satz gewöhnlich ausgesprochen findet, indem dabei die Fälle, wo nichtumkehrbare virtuelle Bewegungen vorkommen, ausser Acht gelassen sind.

Um den Satz mathematisch auszudrücken, seien δs, δs_1, δs_2 etc. die kleinen Wege, welche die Puncte bei einem Systeme von virtuellen Bewegungen zurücklegen; ferner P, P_1, P_2 etc. die Kräfte, welche auf die einzelnen Puncte wirken, wobei jetzt angenommen sein möge, dass, wenn auf einen Punct mehrere Kräfte wirken, diese schon in eine Resultante zusammengefasst seien, endlich seien φ, φ_1, φ_2 etc. die Winkel zwischen den Kräften und den entsprechenden virtuellen Bewegungen. Dann werden die virtuellen Momente durch die Producte $P\cos\varphi\,.\,\delta s$, $P_1\cos\varphi_1\,.\,\delta s_1$, $P_2\cos\varphi_2\,.\,\delta s_2$ etc. dargestellt, und man erhält als Ausdruck des vorigen Satzes:

$$P\cos\varphi\,.\,\delta s + P_1\cos\varphi_1\,.\,\delta s_1 + P_2\cos\varphi_2\,.\,\delta s_2 + \text{etc.} \overline{\overline{<}}\, 0$$

oder kürzer:

$$(1) \qquad \Sigma P\cos\varphi\,.\,\delta s \overline{\overline{<}}\, 0,$$

worin für den Fall, dass nur umkehrbare virtuelle Bewegungen vorkommen, nur das Zeichen $=$ anzuwenden ist, für den Fall aber, dass auch nichtumkehrbare Bewegungen vorkommen, beide Zeichen $=$ und $<$ gelten.

Für die Anwendung ist es bequemer, dem vorigen Ausdrucke eine etwas andere Gestalt zu geben. Bezeichnen wir die Veränderungen, welche die Coordinaten x, y, z des Punctes p durch die kleine Bewegung δs erleiden, mit δx, δy und δz, und zerlegen wir die auf den Punct wirkende Kraft P in ihre drei in die Coordinatenrichtungen fallenden Componenten X, Y und Z, so ist, wie sich leicht nachweisen lässt:

$$P \cos \varphi \,.\, \delta s = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z,$$

und entsprechende Gleichungen gelten auch für die anderen Puncte, und man erhält daher statt (1):

$$(2) \qquad \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) \overline{\overline{<}} 0.$$

§ 55.

Ausdruck desselben Satzes unter Anwendung des Begriffes der Arbeit.

Die im vorigen Satze mit dem Namen virtuelles Moment bezeichnete Grösse steht in innigem Zusammenhange mit einer anderen Grösse, welche in der Mechanik eine bedeutende Rolle spielt. Wenn ein Punct das Wegstückchen δs zurücklegt, und die in die Richtung des Weges fallende Kraftcomponente $P \cos \varphi$ an allen Puncten des kleinen Weges vollkommen gleich ist, so stellt das Product $P \cos \varphi \,.\, \delta s$ die bei der Bewegung von der Kraft gethane Arbeit dar. Die hierbei gemachte Voraussetzung, dass $P \cos \varphi$ seinen Werth während der Bewegung nicht ändere, ist aber im Allgemeinen nicht streng erfüllt. Wenn die wirksame Kraft an verschiedenen Stellen des Raumes nach Grösse und Richtung verschieden ist, so ist sie auch auf den verschiedenen Theilen des unendlich kleinen Weges nicht als vollkommen gleich zu betrachten; und wenn ferner δs nicht ein Stück einer geraden Linie, sondern ein Stück einer Curve ist, so liegt auch darin ein Grund, weshalb der Winkel φ zwischen Kraft und Weg und die davon abhängige Kraftcomponente für die verschiedenen Theile des Weges etwas verschieden sein muss, selbst wenn die Richtung der Kraft überall dieselbe wäre. Der vollständige Ausdruck der Arbeit ist daher, wenn man $P \cos \varphi$ als Function von s betrachtet, so zu schreiben:

$$P\cos\varphi\,.\,\delta s + \frac{1}{2!}\cdot\frac{d\,(P\cos\varphi)}{ds}\,\delta s^2 + \frac{1}{3!}\cdot\frac{d^2\,(P\cos\varphi)}{ds^2}\,\delta s^3 + \text{etc.}$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes ist dasselbe, was im Vorigen das virtuelle Moment der Kraft genannt wurde, und man sieht also, dass die von der Kraft bei der kleinen Bewegung gethane Arbeit sich von dem virtuellen Momente nur durch das Hinzukommen solcher Grössen unterscheidet, welche in Bezug auf die Weglänge von höherer als erster Ordnung sind.

Hiernach kann man den Gleichgewichtssatz auch folgendermaassen aussprechen: Für das Gleichgewicht ist es nothwendig und hinreichend, dass für jedes System von virtuellen Bewegungen die Summe der von allen Kräften gethanen Arbeitsgrössen entweder ein unendlich Kleines von höherer als erster Ordnung in Bezug auf die Weglängen, oder negativ ist.

Wenn alle virtuellen Bewegungen umkehrbar sind, so gilt nur das Erstere, dass die Gesammtarbeit ein unendlich Kleines von höherer Ordnung sein muss. Man kann dann bei dieser Art den Gleichgewichtssatz auszusprechen noch eine weitere Angabe hinzufügen. Daraus, dass die unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung positiv oder negativ sein können, entsteht der Unterschied des stabilen und labilen Gleichgewichtes, und zwar in folgender Weise. Ist für alle Systeme von virtuellen Bewegungen die Gesammtarbeit aller Kräfte negativ, so ist das Gleichgewicht stabil; ist sie für alle Systeme positiv, so ist das Gleichgewicht labil; ist sie endlich, was auch vorkommt, für einige Systeme negativ und für andere positiv, so kann man das Gleichgewicht weder vollkommen stabil, noch vollkommen labil nennen.

§ 56.

Das D'ALEMBERT'sche Princip.

Aus dem Gleichgewichtssatze lässt sich mit Hülfe des D'ALEMBERT'schen Principes der allgemeine Satz der Bewegung ableiten.

Dabei müssen wir aber die beschränkenden Bedingungen, welchen die Bewegungen der Puncte unterworfen sind, zum Theil etwas anders betrachten, als vorher. Es wurde im Vorigen angenommen, dass auch Bewegungshindernisse mit einseitigem Widerstande vorkommen können, von denen vorausgesetzt wurde, dass sie einem beliebigen auf sie ausgeübten Drucke widerstehen, ohne dass dabei die Kraft, mittelst deren sie diesen Widerstand leisten, in Betracht gezogen wurde. Bei der Bewegung aber lässt sich die Sache häufig nicht so einfach abmachen, denn wenn man z. B. annehmen wollte, dass ein Punct mit einer gewissen Geschwindigkeit gegen eine absolut feste Wand flöge, so würde daraus eine plötzliche Vernichtung der Bewegung folgen, wie sie in der Natur nicht vorkommt. Wenn ein Körper gegen eine feste Wand fliegt, so findet eine gegenseitige Einwirkung zwischen Wand und Körper statt, welche von zwar sehr kurzer, aber doch endlicher Dauer ist; während dieser Zeit erleiden die Bewegungen der Theile des Körpers gewisse Aenderungen, welche ebenso, wie die sonstigen Bewegungsänderungen, mit den zugehörigen Kräften in Rechnung gebracht werden können. Durch dieses Verfahren, welches in anderen ähnlichen Fällen ebenfalls angewandt werden kann, werden die in Betracht zu ziehenden Kräfte vermehrt, aber dafür fallen die Bewegungshindernisse mit einseitigem Widerstande als solche aus der Betrachtung fort. Will man die Sache ganz vollständig und streng behandeln, so muss man auch noch berücksichtigen, dass die Wand nicht ganz in Ruhe bleibt, sondern ebenfalls etwas in Bewegung geräth und dadurch einen Theil der lebendigen Kraft des Körpers in sich aufnimmt. Man muss dann also die Wand und die übrigen mit ihr in Verbindung stehenden Gegenstände auch als aus beweglichen Theilen bestehende Körper betrachten und ihre Bewegungen in die Gleichungen mit aufnehmen, so dass also nicht nur die Kräfte vermehrt werden, sondern das zu betrachtende System von beweglichen materiellen Puncten selbst vergrössert wird.

Es giebt freilich Fälle, wo eine Fläche, welche einseitig der Bewegung widersteht, ohne erheblichen Fehler einfach als absolut festes Bewegungshinderniss gelten kann; indessen kann man dieses in den betreffenden Fällen zur Vereinfachung der Rechnung benutzen, ohne dass es nöthig wäre, in der hier folgenden allgemeinen Betrachtung darauf Rücksicht zu nehmen. Wir wollen daher im Folgenden voraussetzen, dass keine Bewegungshindernisse mit einseitigem Widerstande vorkommen, und dass somit *alle virtuellen Bewegungen umkehrbar seien*.

Wir wenden uns nun wieder zu dem früher betrachteten Systeme von beweglichen Puncten, worunter wir jetzt materielle

Puncte mit den Massen m, m_1, m_2 etc. verstehen, und deren Coordinaten, welche der Reihe nach x, y, z; x_1, y_1, z_1 etc. heissen mögen, wir als Functionen der Zeit t betrachten. Wir bilden nun für den ersten Punct, auf welchen eine Kraft wirkt, deren Componenten X, Y und Z sind, folgende Grössen:

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2}; \quad Y - m\frac{d^2y}{dt^2}; \quad Z - m\frac{d^2z}{dt^2},$$

ebenso für den zweiten Punct die Grössen:

$$X_1 - m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}; \quad Y_1 - m_1\frac{d^2y_1}{dt^2}; \quad Z_1 - m_1\frac{d^2z_1}{dt^2}$$

u. s. w. Diese Grössen, welche man die Componenten der verlorenen Kräfte nennt, müssen in dem Ausdrucke (2) an die Stelle der Componenten der gegebenen wirksamen Kräfte gesetzt werden. Dadurch erhält man, da von den beiden Zeichen $=$ und $<$ nur das erstere anzuwenden ist, weil alle virtuellen Bewegungen als umkehrbar angenommen werden, folgende Gleichung:

$$(3) \quad \sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0.$$

Hierin bezieht sich das Summenzeichen auf alle Massen, welche an der Bewegung theilnehmen, auch wenn darunter solche vorkommen, auf die keine der gegebenen Kräfte direct einwirkt, während in dem für das Gleichgewicht geltenden Ausdrucke (2), wenn mehrere Puncte untereinander in Verbindung sind, von denen einige unter der Einwirkung der gegebenen Kräfte stehen und andere nicht, nur die ersteren unter dem Summenzeichen enthalten sind.

Dieses ist die allgemeine Bewegungsgleichung, welche bekanntlich in der Mechanik von grosser Wichtigkeit ist. Sie bleibt auch gültig, wenn die beweglichen Massen nicht in Puncten concentrirt sind, sondern Räume stetig ausfüllen, in welchem Falle die Summation durch eine Integration zu ersetzen ist, was nach gewissen Umformungen des Ausdruckes geschehen kann.

§ 57.

Satz von der Aequivalenz von lebendiger Kraft und Arbeit, und Bedingung, welche für seine Gültigkeit erfüllt sein muss.

Wir wollen nun die Gleichung (3) dazu anwenden, den Satz von der Aequivalenz von lebendiger Kraft und mechanischer Arbeit abzuleiten.

Dazu müssen wir zunächst wieder über die beschränkenden Bedingungen, welchen die Bewegungen der Puncte unterworfen sind, sprechen. Bei den Betrachtungen über das Gleichgewicht konnte es als von selbst verständlich angesehen werden, dass diese Bedingungen der Art seien, dass durch sie allein keine Bewegung der Puncte veranlasst werden könne. Wenn also z. B. von einem der Puncte angenommen wurde, dass er gezwungen sei, in einer gegebenen Fläche zu bleiben, so wurde diese Fläche als fest und unveränderlich vorausgesetzt, denn wenn die Fläche sich bewegte oder mit der Zeit ihre Gestalt änderte, so würde dadurch allein schon eine Bewegung des Punctes bedingt sein, so dass die zum Gleichgewichte gehörige Ruhe nicht möglich wäre. Bei den Betrachtungen über die Bewegung dagegen brauchen solche Fälle nicht ausgeschlossen zu werden, denn man kann sehr wohl die Bewegung eines Punctes betrachten, welcher sich in einer bewegten Fläche befindet und deren Bewegung mitmacht, und ausserdem in der Fläche durch die auf ihn wirkende Kraft noch besonders bewegt wird.

Mathematisch ist die Bedingung, dass ein Punct, dessen Coordinaten x, y, z heissen, in einer festen Fläche bleiben muss, darzustellen durch eine Gleichung von der Form:

$$F(x, y, z) = 0;$$

dagegen die Bedingung, dass der Punct in einer Fläche bleiben muss, die selbst beweglich oder mit der Zeit veränderlich ist, durch eine Gleichung von der Form:

$$F(x, y, z, t) = 0.$$

In ähnlicher Weise kann man den Unterschied zwischen den beiden Fällen, ob in den gegebenen Bedingungen, denen die Bewegungen der Puncte unterworfen sind, schon der Grund zur Entstehung von Bewegungen liegt oder nicht, allgemein dahin aussprechen, dass die Gleichungen, welche die Bedingungen darstellen, im ersteren Falle ausser den Coordinaten der gegebenen Puncte noch die Zeit oder andere von der Zeit abhängige Grössen, im letzteren Falle dagegen nur die Coordinaten der Puncte als Veränderliche enthalten.

Diese beiden Fälle unterscheiden sich wesentlich durch die Art, wie die wirklich stattfindende Bewegung mit den virtuellen Bewegungen zusammenhängt. Wenn man aus Bedingungsgleichungen, welche die Zeit enthalten, die virtuellen Bewegungen bestimmen will, so muss man dieses für einen bestimmten Zeitmoment thun, und die Zeit ist daher bei dieser Rechnung als eine constante Grösse zu behandeln. Sei z. B. eine solche Gleichung, welche die Coordinaten einer Anzahl von Puncten und ausserdem die Zeit enthält, in folgender Form gegeben:

$$(4) \qquad F(x, y, z, x_1, y_1, z_1 \ldots\ldots t) = 0,$$

so erhält man daraus für die virtuellen Bewegungen zur Zeit t folgende Gleichung:

$$(5) \qquad \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial F}{\partial z_1}\delta z_1 + \ldots\ldots = 0,$$

worin nur Differentialcoefficienten nach den Coordinaten der Puncte vorkommen. Betrachtet man dagegen die Bewegungen, welche die Puncte während der unendlich kleinen Zeit von t bis $t + dt$ wirklich ausführen, und deren Projectionen auf die Coordinatenaxen dx, dy, dz, dx_1, dy_1, dz_1 etc. heissen mögen, so muss man für diese eine Gleichung bilden, in welcher die Veränderung der Zeit mit berücksichtigt ist, nämlich:

$$(6) \qquad \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial F}{\partial z_1}dz_1 + \ldots\ldots + \frac{\partial F}{\partial t}dt = 0.$$

Hieraus sieht man, dass in einem solchen Falle, wo die gegebenen Bedingungsgleichungen die Zeit enthalten, die für dx, dy, dz, dx_1, dy_1, dz_1 etc. geltenden Gleichungen verschieden sind von den für δx, δy, δz, δx_1, δy_1, δz_1 etc. geltenden, und dass daher das

System von Bewegungen, welche die Puncte während der kleinen Zeit von t bis $t + dt$ wirklich ausführen, im Allgemeinen mit keinem der Systeme von virtuellen Bewegungen, welche für die Zeit t gelten, identisch sein kann. Enthalten dagegen die gegebenen Bedingungsgleichungen die Zeit nicht, so fällt in den für dx, dy, dz, dx_1, dy_1, dz_1 etc. geltenden Gleichungen das letzte Glied, welches den Differentialcoefficienten nach t als Factor hat, fort, und dann stimmen diese Gleichungen mit den für δx, δy, δz, δx_1, δy_1, δz_1 etc. geltenden überein, und für diesen Fall muss daher das System der wirklich stattfindenden Bewegungen eins der vielen Systeme von virtuellen Bewegungen sein.

Auf den zuletzt genannten Fall bezieht sich nun unser Satz von der Aequivalenz von lebendiger Kraft und mechanischer Arbeit, und ich will die Voraussetzung, von welcher wir bei seiner Entwickelung ausgehen müssen, und auf welcher daher auch seine Gültigkeit beruht, hier noch einmal aussprechen. Die Bedingungsgleichungen, welchen die Bewegungen der Puncte unterworfen sind, dürfen als Veränderliche nur die Coordinaten der Puncte enthalten; oder wie man es dem Vorigen nach auch ausdrücken kann: in den gegebenen Bedingungen darf nicht selbst schon der Grund zur Entstehung von Bewegungen liegen, d. h. es dürfen in ihnen nicht implicite Kräfte enthalten sein, welche ebenso, wie die explicite gegebenen Kräfte, Bewegungen hervorrufen und die vorhandenen Bewegungen beschleunigen oder verzögern können.

Unter dieser Voraussetzung muss die obige Gleichung (3), welche für jedes System von virtuellen Bewegungen gilt, auch gültig bleiben, wenn man statt der virtuellen Bewegungen die während der Zeit dt wirklich ausgeführten Bewegungen setzt, welche ja mit einem der Systeme von virtuellen Bewegungen zusammenfallen müssen. Um bestimmt anzudeuten, dass sich die Bewegungen auf die Zeit dt beziehen, wollen wir statt dx, dy, dz vollständiger schreiben:

$$\frac{dx}{dt}dt, \quad \frac{dy}{dt}dt, \quad \frac{dz}{dt}dt.$$

Durch Substitution dieser Grössen an die Stelle von δx, δy, δz geht (3) über in:

$$\sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{dx}{dt} + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{dy}{dt} + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\frac{dz}{dt}\right]dt = 0,$$

wofür wir bei etwas anderer Zusammenfassung der Glieder schreiben können:

$$(7)\qquad \sum m\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}\right)dt$$

$$=\sum\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)dt.$$

Hierin können wir die linke Seite einfacher ausdrücken. Bezeichnen wir die Geschwindigkeit des ersten Punctes zur Zeit t mit v, so ist:

$$v^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

und daraus folgt:

$$\frac{d(v^2)}{dt}=2\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}\right),$$

und die entsprechenden Gleichungen müssen auch für die Geschwindigkeiten aller übrigen Puncte gelten. Durch Anwendung dieser Gleichungen geht (7) über in:

$$(8)\qquad \frac{1}{2}\sum m\,\frac{d(v^2)}{dt}\,dt=\sum\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)dt.$$

Der hier auf der linken Seite stehende Ausdruck lässt sich sofort integriren, und wir wollen dieses von irgend einer Anfangszeit t_0 bis zur Zeit t ausführen, wobei wir die zur Anfangszeit stattfindenden Geschwindigkeiten der Puncte mit v_0, $(v_1)_0$, $(v_2)_0$ etc. bezeichnen. Auf der rechten Seite können wir die Integration vorläufig nur andeuten. Es kommt also:

$$(9)\quad \frac{1}{2}\sum mv^2-\frac{1}{2}\sum mv^2_0=\int_{t_0}^{t}\sum\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)dt.$$

Diese Gleichung enthält den gesuchten Satz, und es kommt nur noch darauf an, die Bedeutung der auf beiden Seiten befindlichen Ausdrücke näher anzugeben. Wenn eine Masse m sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, so nennen wir $\frac{1}{2}mv^2$ die lebendige

Kraft der Masse[1]); demnach ist $\frac{1}{2}\Sigma mv^2$ die lebendige Kraft des ganzen Systemes von Massen, und die linke Seite der Gleichung bedeutet die Zunahme der lebendigen Kraft, welche während der Zeit von t_0 bis t in dem Systeme stattgefunden hat. Was ferner die rechte Seite anbetrifft, so ergiebt sich aus dem, was in § 55 gesagt ist, dass der Ausdruck:

$$\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)dt,$$

wenn man von unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung absieht, die Arbeit bedeutet, welche die auf den ersten Punct wirkende Kraft während der Zeit dt thut; und dementsprechend stellt die rechte Seite der vorigen Gleichung die von allen in dem Systeme wirksamen Kräften während der Zeit von t_0 bis t gethane Arbeit dar. Folglich lässt sich die Bedeutung der Gleichung so aussprechen: die während irgend einer Zeit in dem Systeme entstehende Vermehrung der lebendigen Kraft ist gleich der während derselben Zeit von den wirksamen Kräften gethanen Arbeit.

§ 58.

Unterschied in Bezug auf die Ausführbarkeit des die Arbeit darstellenden Integrals und Einführung des Ergals.

Wir sind sowohl beim Gleichgewichte als auch bei der Bewegung zu Gleichungen gelangt, welche die mechanische Arbeit enthalten, und müssen nun den Ausdruck, welcher die letztere darstellt, etwas näher betrachten.

Bezeichnen wir die von t_0 bis t in dem Systeme gethane Arbeit mit L, so ist:

$$(10)\qquad L=\int_{t_0}^{t}\sum\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)dt.$$

1) Etwas abweichend von der früher üblichen Benennungsweise, nach welcher mv^2 die lebendige Kraft genannt wurde.

Hierin sind die Kraftcomponenten X, Y und Z erstens von den Coordinaten der beweglichen Puncte abhängig, denn die auf einen Punct wirkende Kraft kann an verschiedenen Stellen des Raumes verschieden sein; ferner können sie direct von der Zeit abhängen, indem die wirksamen Kräfte mit der Zeit veränderlich sein können; ausserdem können sie von dem augenblicklichen Bewegungszustande des Systems abhängen, wie es z. B. bei der vom Luftwiderstande herrührenden Kraft der Fall ist, welche von der Geschwindigkeit des bewegten Körpers abhängt. Da nun aber die Coordinaten der Puncte und alle mit der Bewegung zusammenhängenden Grössen, welche in den Kraftcomponenten vorkommen können, als Functionen der Zeit anzusehen sind, so kann man auch die Kraftcomponenten selbst als Functionen dieser einen Veränderlichen betrachten, und daraus folgt weiter, dass der ganze zu integrirende Ausdruck sich ebenfalls als Function der Zeit allein darstellen lassen muss. Demnach ist die in unserer Gleichung vorgeschriebene Integration immer möglich, sobald die Bewegung hinlänglich bekannt ist, um die Zurückführung des Ausdruckes auf eine Function der Zeit wirklich bewerkstelligen zu können, indem es sich dann nur noch darum handelt, eine Function von Einer Veränderlichen nach dieser Veränderlichen zu integriren.

Es giebt aber auch Fälle, wo diese Zurückführung nicht nothwendig ist, sondern wo man das Integral in der Form

$$\int \Sigma (X dx + Y dy + Z dz)$$

schreiben und die Coordinaten als von einander unabhängige Veränderliche betrachten kann, und die Integration doch ausführbar bleibt. Dazu ist erforderlich, dass der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck das vollständige Differential einer Function der Coordinaten der Puncte ist. Die Bezeichnung dieser Function wollen wir, wie es auch früher schon bei der Einführung des Zeichens U geschehen ist, so wählen, dass wir nicht die Function selbst, sondern ihren negativen Werth durch einen Buchstaben darstellen, welcher Ω sein mag. Dann können wir setzen:

$$(11) \qquad \Sigma (X dx + Y dy + Z dz) = - d\Omega.$$

Dadurch geht die Gleichung (10) über in:

$$(12) \qquad L = -\int d\Omega = \Omega_0 - \Omega,$$

worin Ω_0 den Anfangswerth von Ω bedeuten soll.

Da nun die Grössen Ω_0 und Ω nur Functionen der anfänglichen und schliesslichen Coordinaten der Puncte sind, so folgt daraus, dass in diesem Falle die bei irgend einer Bewegung gethane Arbeit nur von der Anfangs- und Endlage der Puncte abhängt, nicht aber von den Zwischenlagen des Systems und von der Form der Wege, welche die einzelnen Puncte zurückgelegt haben, was natürlich eine grosse Vereinfachung ist.

Die Grösse Ω, welche in so einfacher Weise zur Bestimmung der Arbeit dient, möge nach dem griechischen Worte ἔργον (Werk, Arbeit) das Ergal genannt werden. Dann kann man die Bedeutung der vorstehenden Gleichung so aussprechen: Die bei irgend einer Bewegung von allen dabei wirksamen Kräften gethane Arbeit ist gleich der Abnahme des Ergals.

§ 59.

Veränderter Ausdruck der Gleichgewichtsbedingung.

Mit Hülfe des Ergals kann man dem in § 55 ausgesprochenen Gleichgewichtssatze eine einfachere Form geben.

Es wurde dort gesagt, es sei für das Gleichgewicht nothwendig und hinreichend, dass für jedes System von virtuellen Bewegungen die Summe der von allen Kräften gethanen Arbeitsgrössen entweder ein unendlich Kleines von höherer als erster Ordnung in Bezug auf die Weglängen, oder negativ sei. Wenn nun die in dem Systeme wirkenden Kräfte von der Art sind, dass sie ein Ergal haben, so wird die Arbeit, jenachdem sie positiv oder negativ ist, durch eine negative oder positive Aenderung, d. h. eine Ab- oder Zunahme des Ergals dargestellt. Demgemäss lautet dann die Gleichgewichtsbedingung: für jedes System von virtuellen Bewegungen muss die Veränderung des Ergals entweder ein unendlich Kleines von höherer Ordnung oder positiv sein.

Wenn alle virtuellen Bewegungen umkehrbar sind, so gilt nur das Erstere, dass die Veränderung des Ergals ein unendlich Kleines von höherer Ordnung sein muss, und daraus, dass diese sowohl positiv, als auch negativ sein kann, entsteht der Unterschied des stabilen und labilen Gleichgewichtes. Wenn für alle Systeme von virtuellen Bewegungen nur positive Veränderungen des Ergals möglich sind, so ist der Werth des Ergals ein Minimum; wenn nur negative Aenderungen vorkommen, so ist er ein Maximum; wenn endlich bei einigen Systemen von virtuellen Bewegungen die Veränderungen positiv und bei anderen negativ sind, so ist der Werth des Ergals weder allgemein ein Minimum, noch allgemein ein Maximum. Daran schliesst sich nun der beim Gleichgewichte vorkommende Unterschied in folgender Weise an. Der Fall, wo das Ergal ein Minimum ist, entspricht dem stabilen, der Fall, wo das Ergal ein Maximum ist, dem labilen Gleichgewichte, während in solchen Fällen, wo das Ergal weder allgemein ein Minimum, noch allgemein ein Maximum ist, auch das Gleichgewicht weder vollständig stabil, noch vollständig labil ist.

§ 60.

Die Energie.

Wir kehren nun zu der Gleichung (9) zurück, und setzen darin für den an der rechten Seite stehenden Ausdruck der Arbeit die in (12) gegebene Differenz. Zugleich wollen wir auch für die lebendige Kraft ein besonderes Zeichen einführen, indem wir setzen:

(13) $$T = \frac{1}{2} \sum mv^2.$$

Dann lautet die Gleichung:

$$T - T_0 = \Omega_0 - \Omega,$$

oder anders geschrieben:

(14) $$T + \Omega = T_0 + \Omega_0.$$

Diese Gleichung drückt aus, dass die Summe aus lebendiger Kraft und Ergal zu Ende der Bewegung denselben Werth hat, wie zu Anfang, und da man die betrachtete Bewegung beliebig abgrenzen und somit während ihres ganzen Verlaufes jeden Zeitpunct als Endpunct wählen kann, so kann man allgemeiner sagen: die Summe aus lebendiger Kraft und Ergal ist während der Bewegung constant.

Für diese Summe, welche natürlich bei der Behandlung der Bewegungserscheinungen eine wichtige Rolle spielt, hat man einen besonderen Namen eingeführt, indem man sie die Energie des Systems genannt hat, wodurch der vorige Satz folgenden noch kürzeren Ausdruck gewinnt: die Energie bleibt bei der Bewegung constant. Diesen Satz nennt man den Satz von der Erhaltung der Energie.

§ 61.

Ein Fall, in welchem die Kräfte ein Ergal haben.

Zu den Fällen, wo ein Ergal existirt, gehört zunächst der schon früher in § 5 behandelte Fall, wo die Kräfte, welche auf einen beweglichen Punct wirken, sich zerlegen lassen in anziehende und abstossende Kräfte, welche von festen Puncten des Raumes ausgehen und ihrer Stärke nach irgend welche Functionen der Entfernung sind.

Es seien p', p'_1, p'_2 etc. solche feste Puncte mit den Coordinaten x', y', z'; x'_1, y'_1, z'_1 etc. und von den beweglichen Puncten sei vorläufig nur Einer p mit den Coordinaten x, y, z zur Betrachtung ausgewählt. Die Entfernung zwischen p und p' heisse r', so dass man hat:

$$(15) \qquad r' = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2},$$

und die Kraft, mit welcher p' auf p wirkt, werden durch $f(r')$ dargestellt, und sei abstossend oder anziehend, jenachdem diese Function positiv oder negativ ist. Ebenso sei der Abstand zwischen p und p'_1 mit r'_1 und die von p'_1 ausgehende Kraft mit $f_1(r'_1)$ bezeichnet u. s. f. Wenn man dann folgende neue Functionen bildet:

$$F(r') = -\int f(r')\,dr'$$

$$F_1(r'_1) = -\int f_1(r'_1)\,dr'_1,$$

etc.

und darauf setzt:

$$(16) \qquad U = F(r') + F_1(r'_1) + \text{etc.} = \Sigma F(r'),$$

so ist U die Kraftfunction für den Punct p, und man hat:

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

In Folge dieser Gleichung kann man schreiben:

$$Xdx + Ydy + Zdz = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right),$$

und da U eine Grösse ist, welche nur die Coordinaten x, y, z als Veränderliche enthält, so ist der hier rechts in Klammer stehende Ausdruck ihr vollständiges Differential, welches kurz mit dU bezeichnet werden kann, und somit ist die geforderte Integration ohne Weiteres ausführbar, indem man erhält:

$$(17) \qquad \int(Xdx + Ydy + Zdz) = -\int dU = -U + \text{Const.}$$

Hat die Bewegung des Punctes p von einem gegebenen Anfangspuncte aus stattgefunden, dessen Coordinaten x_0, y_0, z_0 heissen mögen, und nennen wir den Werth, welchen die Function U an dieser Stelle hat, U_0, so gilt für die Arbeit, welche bei der Bewegung von dort aus bis zu dem Puncte x, y, z von den wirksamen Kräften gethan ist, die Gleichung:

$$(18) \qquad L = U_0 - U.$$

Daraus folgt, dass bei dieser Art von Kräften das oben Gesagte gilt, dass nämlich, wenn der Anfangs- und Endpunct der Bewegung gegeben sind, die Arbeit vollständig bestimmt ist, ohne dass man den Weg, auf welchem der Punct von der einen Stelle zur anderen gelangt ist, zu kennen braucht. Ja man kann noch mehr sagen: es brauchen nur die beiden Niveauflächen, in welchen der Anfangs- und Endpunct liegen, und welche bekanntlich bestimmten Werthen der Function U entsprechen, gegeben zu sein, um die Arbeit vollständig bestimmen zu können.

Die vorstehenden Betrachtungen können wir nun leicht auf den Fall ausdehnen, wo nicht blos Ein beweglicher Punct p, sondern ein ganzes System beweglicher Puncte p, p_1, p_2 etc. gegeben ist, während die Kräfte, welche auf sie wirken, wie vorher, von den festen Puncten p', p'_1, p'_2 etc. ausgehen. In diesem Falle giebt es für jeden der beweglichen Puncte eine Kraftfunction der vorher besprochenen Art, und wenn man diese der Reihe nach mit U, U_1, U_2, etc. bezeichnet, so kann man schreiben:

$$\begin{aligned}\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) &= -dU - dU_1 - dU_2 - \text{etc.}\\ &= -d(U + U_1 + U_2 + \text{etc.}).\end{aligned}$$

Die hier auf der rechten Seite in Klammer stehende Summe kann man auch in folgender Weise bezeichnen:

$$U + U_1 + U_2 + \text{etc.} = \Sigma F(r'), \tag{19}$$

worin aber das Summenzeichen eine weitere Bedeutung hat, als in der Gleichung (16), indem es nicht blos so viele Glieder umfasst, als feste Puncte vorhanden sind, sondern so viele, als es Combinationen von je einem beweglichen mit einem festen Puncte giebt. Die obige Gleichung lautet demnach:

$$\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) = -d\Sigma F(r'). \tag{20}$$

Der zu integrirende Ausdruck ist also auch für beliebig viele bewegliche Puncte auf die Form eines vollständigen Differentials zurückgeführt und die durch $\Sigma F(r')$ dargestellte Grösse ist somit das Ergal.

§ 62.

Ein anderer Fall, in welchem die Kräfte ein Ergal haben.

Ein anderer Fall, welchen wir zu betrachten haben, ist der, wo die beweglichen Puncte unter einander selbst anziehende oder abstossende Kräfte ausüben, welche ihrer Stärke nach irgend welche Functionen der Entfernung sind.

Der Abstand der beiden Puncte p und p_1, deren Coordinaten x, y, z und x_1, y_1, z_1 sind, heisse r, so dass man hat:

$$r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}, \tag{21}$$

und die Kraft, welche sie auf einander ausüben, sei durch $\varphi(r)$ bezeichnet. Diese Kraft wirkt auf beide Puncte mit gleicher Stärke und in entgegengesetzter Richtung, und sie kommt daher in der Formel für die Gesammtarbeit zweimal vor, erstens am Puncte p, wo ihre Componenten sind:

$$\varphi(r)\frac{x-x_1}{r};\quad \varphi(r)\frac{y-y_1}{r};\quad \varphi(r)\frac{z-z_1}{r},$$

und zweitens am Puncte p_1, wo ihre Componenten sind:

$$\varphi(r)\frac{x_1-x}{r};\quad \varphi(r)\frac{y_1-y}{r};\quad \varphi(r)\frac{z_1-z}{r}.$$

Nun hat man in Folge von (21):

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x-x_1}{r} \text{ und } \frac{\partial r}{\partial x_1}=\frac{x_1-x}{r}$$

und man kann daher, wenn man noch die Function $\Phi(r)$ mit der Bedeutung:

$$\Phi(r)=-\int\varphi(r)\,dr$$

einführt, schreiben:

$$\varphi(r)\frac{x-x_1}{r}=\varphi(r)\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{\partial\Phi(r)}{\partial x}$$

$$\varphi(r)\frac{x_1-x}{r}=\varphi(r)\frac{\partial r}{\partial x_1}=-\frac{\partial\Phi(r)}{\partial x_1}.$$

Entsprechende Gleichungen gelten auch für die Componenten nach der y- und z-Richtung, und die sechs Componenten der beiden entgegengesetzten Kräfte werden daher durch folgende Differentialcoefficienten dargestellt:

$$-\frac{\partial\Phi(r)}{\partial x};\quad -\frac{\partial\Phi(r)}{\partial y};\quad -\frac{\partial\Phi(r)}{\partial z};$$

$$-\frac{\partial\Phi(r)}{\partial x_1};\quad -\frac{\partial\Phi(r)}{\partial y_1};\quad -\frac{\partial\Phi(r)}{\partial z_1}.$$

Nimmt man nun aus der ganzen Summe:

$$\Sigma(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)$$

den Theil heraus, welcher sich auf diese beiden entgegengesetzten Kräfte bezieht, so lautet derselbe:

$$-\Big(\frac{\partial\Phi(r)}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi(r)}{\partial y}dy+\frac{\partial\Phi(r)}{\partial z}dz$$

$$+\frac{\partial\Phi(r)}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\Phi(r)}{\partial y_1}dy_1+\frac{\partial\Phi(r)}{\partial z_1}dz_1\Big),$$

und der hier in Klammer stehende Ausdruck ist, da r nur von den sechs Grössen x, y, z, x_1, y_1, z_1 abhängt, und daher auch $\Phi(r)$ als eine Function dieser sechs Grössen zu betrachten ist, ein vollständiges Differential, wofür man einfach $d\Phi(r)$ schreiben kann.

Ebenso giebt jede zwischen zwei beweglichen Puncten wirkende Kraft sechs Glieder, welche zusammen ein vollständiges Differential bilden. Man kann daher, wenn nur solche Kräfte vorkommen, welche die beweglichen Puncte unter einander ausüben, schreiben:

$$(22)\qquad \begin{aligned} \Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) &= -d\Phi(r) - d\Phi_1(r_1) - \text{etc.} \\ &= -d[\Phi(r) + \Phi_1(r_1) + \text{etc.}] \\ &= -d\Sigma\Phi(r), \end{aligned}$$

worin die an der rechten Seite angedeutete Summe so viele Glieder enthält, als sich aus den beweglichen Puncten Combinationen zu je zweien bilden lassen. Es existirt somit auch für diesen Fall ein Ergal, welches durch $\Sigma\Phi(r)$ dargestellt wird.

Nimmt man nun endlich den Fall an, dass die beiden betrachteten Arten von Kräften gleichzeitig wirken, dass also die beweglichen Puncte Anziehungs- und Abstossungskräfte sowohl von festen Centren aus erleiden, als auch unter einander selbst ausüben, so braucht man nur die beiden vorher gewonnenen Resultate zu vereinigen. Man erhält dann:

$$(23)\qquad \begin{aligned} \Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) &= -d\Sigma F(r') - d\Sigma\Phi(r) \\ &= -d[\Sigma F(r') + \Sigma\Phi(r)], \end{aligned}$$

worin sich auf der rechten Seite die erste Summe auf alle Combinationen je eines beweglichen Punctes mit einem festen Puncte, und die zweite Summe auf alle Combinationen der beweglichen Puncte unter einander zu je zweien bezieht. Der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck ist also das Ergal, so dass wir setzen können:

$$(24)\qquad \Omega = \Sigma F(r') + \Sigma\Phi(r).$$

§ 63.

Potential eines entweder in einzelnen Puncten concentrirten oder durch einen Raum stetig verbreiteten Agens auf ein anderes.

Wir wollen nun die vorher gemachten Annahmen in derselben Weise weiter specialisiren, wie wir es in § 6 und 7 gethan haben, um von der allgemeinen Kraftfunction zur Potentialfunction zu gelangen. Es soll nämlich angenommen werden, dass sich in den Puncten, welche auf einander wirken, gewisse Mengen von Agentien befinden, welche die Wirkung ausüben und erleiden, und dass ferner die Kräfte dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional seien.

Die in den beweglichen Puncten p, p_1, p_2 etc. befindlichen Mengen seien q, q_1, q_2 etc.,[1]) und die in den festen Puncten p', p'_1, p'_2 etc. befindlichen Mengen q', q'_1, q'_2 etc. Die Kraft, welche die Mengen q und q', welche um die Strecke r' von einander entfernt sind, auf einander ausüben, wird durch

$$e\frac{qq'}{r'^2}$$

dargestellt, worin e ein Factor ist, welcher von der Natur der Agentien und von den gewählten Einheiten abhängt. Nehmen wir an, dass alle auf einander wirkenden Agentien von gleicher Natur seien, und dass zwischen ihnen nur solche Unterschiede vorkommen, die sich dadurch ausdrücken lassen, dass man die Mengen theils positiv, theils negativ in Rechnung bringt, so ist jener Factor für alle vorkommenden Combinationen von zwei Mengen gleich, und wir haben ihn oben für diesen Fall zum Unterschiede mit ε bezeichnet.

---

1) Für die in den Puncten befindlichen Mengen der wirksamen Agentien sind andere Zeichen gewählt, als für die in denselben Puncten befindlichen materiellen Massen, welche mit m, m_1, m_2 etc. bezeichnet wurden, weil nämlich die Agentien, welche die Kräfte ausüben, von den Massen, welche dadurch in Bewegung gesetzt werden, verschieden sein können. Denkt man sich z. B. ein ponderables Molecül, welches mit Electricität geladen ist, so kann man sich vorstellen, dass durch die Kraft, welche die Electricität erleidet, nicht nur diese selbst, sondern auch das Molecül, an welchem sie haftet, in Bewegung gesetzt wird.

Wir erhalten demnach für die Function, welche die Kraft zwischen zwei Mengen ausdrückt, die Form:

$$f(r') = \varepsilon \frac{qq'}{r'^2}$$

und daraus folgt:

$$F(r') = -\int f(r')\, dr' = \varepsilon \frac{qq'}{r'}.$$

Bilden wir nun die in den Gleichungen (19) und (20) vorkommende Summe $\Sigma F(r')$, für welche wir in diesem Falle ein besonderes Zeichen W' einführen wollen, so erhalten wir:

$$(25) \qquad W' = \varepsilon \sum \frac{qq'}{r'},$$

worin das Summenzeichen alle Combinationen je einer der Mengen q mit einer der Mengen q' umfasst, und r' der zu jeder Combination gehörige Abstand ist.

Diese Grösse W' ist das Potential des Systemes der q' auf das System der q. Da in ihr die Mengen q und q' in ganz gleicher Weise vorkommen, so kann man sie auch das Potential des Systemes der q auf das System der q', oder auch das Potential der beiden Systeme auf einander nennen.

Man kann die vorige Summe in der Weise zerlegen, dass man immer die Glieder, welche eine und dieselbe Menge des Systemes der q enthalten, zusammenfasst und daraus Partialsummen bildet, welche man dann noch addiren muss, um die Gesammtsumme zu erhalten. Diese Partialsummen lauten, wenn man jedesmal die allen Gliedern gemeinsame Menge vor das Summenzeichen setzt:

$$\varepsilon q \sum \frac{q'}{r'}; \quad \varepsilon q_1 \sum \frac{q'}{r'_1}; \quad \varepsilon q_2 \sum \frac{q'}{r'_2} \text{ etc.}$$

worin die verschiedene Bezeichnung der Abstände r', r'_1, r'_2 etc. andeuten soll, dass in jeder Summe die Abstände von dem Puncte aus gerechnet werden müssen, wo sich die vor dem Summenzeichen stehende Menge befindet. Nun sind aber die Grössen:

$$\varepsilon \sum \frac{q'}{r'}; \quad \varepsilon \sum \frac{q'}{r'_1}; \quad \varepsilon \sum \frac{q'}{r'_2} \text{ etc.,}$$

die Werthe der Potentialfunction des Systemes der q' an den Puncten, wo sich die Mengen q, q_1, q_2 etc. befinden, und wir wollen diese Werthe dem Früheren entsprechend mit V', V'_1, V'_2 etc. bezeichnen, dann lauten jene Partialsummen:

$$qV'; \quad q_1 V'_1; \quad q_2 V'_2 \text{ etc.}$$

und dadurch geht der Ausdruck für das Potential über in:

$$W' = \Sigma q V'. \tag{26}$$

Man kann statt dieses Ausdruckes auch den ihm analogen schreiben, welcher entsteht, wenn man die beiden Systeme unter einander vertauscht. Sei nämlich V die Potentialfunction des Systemes der q an der Stelle, wo sich eine der Mengen q' befindet, so ist:

$$W' = \Sigma q' V. \tag{26a.}$$

Wenn die Agentien, welche auf einander wirken, nicht in einzelnen Puncten concentrirt sind, sondern Räume stetig ausfüllen, so muss man sie in Elemente zerlegen, und statt der Summenzeichen Integralzeichen einführen. Dadurch erhält man an Stelle der Gleichung (25):

$$W' = \varepsilon \iint \frac{dq\, dq'}{r'}, \tag{27}$$

worin sich die eine Integration über das ganze Agens q und die andere über das ganze Agens q' erstreckt. Durch Einführung der Potentialfunction des einen oder des anderen Agens erhält man:

$$W' = \int V' dq = \int V dq'. \tag{28}$$

§ 64.

Potential eines Systemes von Puncten, welche mit Agens versehen sind, oder eines durch einen Raum stetig verbreiteten Agens auf sich selbst.

Wir betrachten nun in derselben Weise die Kräfte, welche die Bestandtheile des beweglichen Systemes auf einander ausüben. Gehen wir zuerst wieder von dem Falle aus, wo endliche Mengen q, q_1, q_2 etc. des Agens in Puncten concentrirt sind, so ist ohne Weiteres klar, dass die in (22) vorkommende Summe $\Sigma\Phi(r)$, welche wir für unseren jetzigen Fall mit W bezeichnen wollen, folgende Form annimmt:

$$W = \varepsilon \sum \frac{q q_1}{r}, \tag{29}$$

worin das Summenzeichen sich auf alle Combinationen der Mengen q zu je zweien bezieht, und r die betreffenden Abstände bedeutet. Diese Grösse ist das Potential des mit den Mengen q, q_1, q_2 etc. versehenen Systemes von Puncten auf sich selbst.

Für den Fall, dass das Agens einen Raum stetig ausfüllt, muss man setzen:

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon \iint \frac{dq\,dq_1}{r}, \tag{30}$$

worin die Integration zweimal über dasselbe Agens auszuführen ist. Bedeutet V die Potentialfunction des betrachteten Agens an der Stelle, wo sich eins seiner eigenen Elemente dq befindet, so geht der vorige Ausdruck über in:

$$W = \frac{1}{2}\int V dq. \tag{31}$$

Der Factor $\frac{1}{2}$, welcher in diesen Ausdrücken enthalten ist, obwohl er sich in den entsprechenden Ausdrücken (27) und (28) nicht findet, musste in diesem Falle deshalb hinzugefügt werden, weil in den Integralen jedes Product aus zwei Elementen dq_m und dq_n doppelt vorkommt, einmal in der Anordnung $dq_m\,dq_n$ und das andere Mal in der Anordnung $dq_n\,dq_m$, während es in dem Potentiale nur einmal vorkommen darf.

Ausser diesem Umstande ist bei den Formeln für W noch ein anderer Umstand zur Sprache zu bringen. Unter den unendlich vielen Combinationen von je zwei Elementen, welche jene Integrale in sich begreifen, kommen auch solche vor, welche nicht zwei verschiedene Elemente, sondern zweimal dasselbe Element enthalten. Der einer solchen Combination entsprechende Theil des Gesammtintegrales ist aber nicht in dem Sinne aufzufassen, dass man in dem Ausdrucke $\frac{dq\,dq}{r}$ den Nenner r absolut gleich Null zu setzen hat, sondern man kann sich das Element dq wieder in unendlich viele Theile zerlegt denken, deren jeder ein unendlich Kleines von höherer Ordnung ist, und kann nun durch entsprechende Combination dieser Theile unter einander ebenso das Potential der unendlich kleinen Menge dq auf sich selbst bilden, wie in dem Ausdrucke (30) das Potential einer endlichen Menge auf sich selbst gebildet ist. In diesem Potentiale des Elementes dq auf sich selbst kommen dann wieder Glieder vor, in denen je einer der in höherer Ordnung unendlich kleinen Theile mit sich selbst combinirt ist. Mit einem solchen Gliede kann man dann wieder ebenso verfahren, wie vorher mit dem Gliede $\frac{dq\,dq}{r}$, und kann so beliebig weiter fortfahren.

Es fragt sich nun, ob dieser Umstand, dass in dem Integrale auch die Potentiale der einzelnen Elemente auf sich selbst enthalten sind, wegen des darin vorkommenden unendlich kleinen Nenners der bestimmten Ausführung der Integration hinderlich ist, und, wenn dieses nicht der Fall sein sollte, ob diese Potentiale der einzelnen Elemente auf sich selbst einen solchen Einfluss auf den Werth des Gesammtpotentials haben, dass sie bei der Ausführung der Integration irgendwie besonders berücksichtigt werden müssen.

Beide Fragen lassen sich am leichtesten beantworten, wenn wir die in (31) gegebene zweite Formel von W betrachten, weil wir die darin vorkommende Function V schon oben vollständig behandelt haben, und daher die Transformationen, welche bei der in (30) gegebenen ersten Formel nöthig wären, nicht mehr auszuführen brauchen. Dabei versteht es sich dann von selbst, dass, was für die zweite Formel gilt, auch für die erste gelten muss, da jene in vereinfachter Form ganz dasselbe ausdrückt wie diese.

Wir wissen aus dem Früheren, dass die Potentialfunction auch im Innern des von dem Agens stetig erfüllten Raumes überall einen endlichen Werth behält, und demnach muss auch das Integral $\int V\,dq$ einen vollständig bestimmten endlichen Werth haben, wodurch die erste Frage entschieden ist. Was ferner die zweite Frage anbetrifft, so haben wir in § 11 unter (25) die Potentialfunction in folgender Form dargestellt:

$$V = \varepsilon\iint k'r\,dr\,d\sigma,$$

worin $d\sigma$ das Element des körperlichen Winkels ist. In dieser

Form ist der Abstand r nicht nur aus dem Nenner verschwunden, sondern er kommt sogar als Factor vor. Daraus folgt, dass, wenn man sich um den Punct, auf welchen sich die Potentialfunction bezieht, und welcher in dieser Formel zugleich der Mittelpunct der Polarcoordinaten ist, einen unendlich kleinen Raum abgegrenzt denkt, es auf den Werth von V nur einen unendlich kleinen Einfluss haben kann, ob man bei seiner Berechnung die in diesem kleinen Raume enthaltene Menge des Agens berücksichtigt oder nicht. Demnach können wir auch bei dem Integral $\int V dq$ sagen, es macht nur einen unendlich kleinen Unterschied, ob bei der Bestimmung von V die kleine Menge dq mitgerechnet oder fortgelassen ist, und wenn man annimmt, dass das letztere geschehen sei, d. h. dass in den verschiedenen Gliedern $V dq$, $V_1 dq_1 \ldots \ldots V_n dq_n$, welche in dem Integrale vorkommen, die Werthe von V, $V_1 \ldots \ldots V_n$ immer so bestimmt seien, dass dasjenige Element, mit welchem die Potentialfunction multiplicirt ist, in ihr selbst nicht vorkommt, so fallen dadurch aus dem Integrale die Combinationen, welche zweimal dasselbe Element enthalten, fort. Da somit der Unterschied, welcher in dem Gesammtintegrale dadurch entsteht, dass man die Potentiale der einzelnen Elemente auf sich selbst entweder miteinbegreift, oder fortlässt, nur ein unendlich kleiner ist, so folgt daraus, dass es durchaus nicht erforderlich ist, diese Potentiale in irgend einer Weise speciell in Betracht zu ziehen.

Ganz anders verhält es sich in dem zu Anfang dieses § betrachteten Falle, wo wir uns endliche Mengen des Agens in einzelnen Puncten concentrirt dachten. In diesem Falle würde es einen wesentlichen Unterschied machen, wenn man das betreffende Potential so verstehen wollte, dass darin nicht nur die Potentiale der verschiedenen Mengen auf einander, sondern auch die Potentiale der einzelnen, in Puncten concentrirten Mengen auf sich selbst enthalten sein müssten. Bei der letzteren Auffassung würde man zu einem Potentiale von unendlicher Grösse gelangen, und man muss daher, wenn man einen endlichen Werth behalten will, die Potentiale der einzelnen Mengen auf sich selbst fortlassen. Daraus folgt dann aber, dass die erhaltene Grösse, welche oben „das Potential des mit den Mengen q, q_1, q_2 etc. versehenen Systemes von Puncten auf sich selbst“ genannt wurde, nicht als gleichbedeutend mit dem Potentiale des gesammten in den Puncten befindlichen Agens auf sich selbst zu betrachten ist.

Uebrigens ist der Fall, wo endliche Mengen eines Agens in mathematischen Puncten concentrirt sind, nur ein fingirter, der in der Wirklichkeit nicht vorkommen kann. Es kommt daher bei Betrachtung wirklich vorkommender Fälle die zuletzt erwähnte Unterscheidung gar nicht zur Sprache.

§ 65.

Anwendung der Potentiale zur Bestimmung der Arbeit.

Mit Hülfe der in den vorigen §§ definirten Potentiale lassen sich nun die Arbeitsgrössen ebenso darstellen, wie es schon oben beim Ergal auseinandergesetzt wurde, da das Potential ja nur ein specieller Fall des Ergals ist. Indessen möge es wegen der vielfachen Anwendungen des Potentials hier noch einmal kurz angeführt werden.

Wenn ein Agens, dessen Theile beweglich sind, seien diese Theile nun in einzelnen Puncten concentrirt, oder durch einen Raum stetig verbreitet, sich unter dem Einflusse eines festen Agens bewegt, so wird die Arbeit, welche dabei von den Kräften des letzteren gethan wird, dargestellt durch die Abnahme des Potentials des festen Agens auf das bewegliche. Bezeichnen wir also dieses Potential, wie oben, mit W', und seinen Anfangswerth mit W'_0, so ist die Arbeit:

$$W'_0 - W'.$$

Ebenso wird die Arbeit derjenigen Kräfte, welche die Theile des beweglichen Agens auf einander ausüben, dargestellt durch die Abnahme des Potentials des beweglichen Agens auf sich selbst, welches oben mit W bezeichnet wurde, und der Ausdruck für diese Arbeit ist daher:

$$W_0 - W.$$

Wenn man endlich beide Arten von Kräften berücksichtigen will, so muss man auch beide Potentiale anwenden, und erhält als Ausdruck der Arbeit:

$$(W + W')_0 - (W + W').$$

In diesem Falle kann man die Sache aber auch noch anders ausdrücken. Denkt man sich nämlich noch das Potential des festen Agens auf sich selbst gebildet, welches W'' heissen möge, so ist die Summe $W + W' + W''$ das Potential des gesammten Agens, des festen und beweglichen zusammen, auf sich selbst. Bei der Bewegung des beweglichen Agens bleibt nun das Potential W'' des festen Agens auf sich selbst unverändert, und der Ausdruck für die Arbeit ändert daher seinen Werth nicht, wenn man dieses Potential darin mit aufnimmt, und schreibt:

$$(W + W' + W'')_0 - (W + W' + W'').$$

Wenn man also das feste und bewegliche Agens zusammen als ein Ganzes betrachtet, und dessen Potential auf sich selbst bildet, so stellt die Abnahme dieses Potentials die Arbeit aller wirksamen Kräfte dar.

Ebenso wie bei der Bestimmung der Arbeit gilt natürlich auch bei der Formulirung der Gleichgewichtsbedingung und bei der Bestimmung der Energie Alles, was oben allgemein vom Ergal gesagt ist, in dem speciellen Falle, wo nur Anziehungs- und Abstossungskräfte vorkommen, welche dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional sind, vom Potential.

Zusatz I.

Ableitung der in § 17 erwähnten Form der Potentialfunction eines homogenen Körpers.

In den ersten Auflagen dieses Buches habe ich eine eigenthümliche Form der Potentialfunction eines homogenen Körpers entwickelt, welche sich durch ihre Einfachheit und die Leichtigkeit, mit welcher sich aus ihr gewisse Schlüsse ziehen lassen, auszeichnet. Diese Form habe ich in der dritten und ebenso auch in der vorliegenden Auflage im Texte fortgelassen, um dort die Uebersichtlichkeit nicht durch zu grosse Breite zu stören. Indessen scheint sie mir doch ein hinlängliches Interesse darzubieten, um sie hier in einem Zusatze mitzutheilen.

Wenn man in dem in § 7 unter (Ia.) gegebenen Ausdrucke der Potentialfunction, nämlich

$$V = \varepsilon \int \frac{dq'}{r},$$

das Mengenelement dq' durch das Product $k d\tau$ ersetzt, worin $d\tau$ das Raumelement und k die als constant vorausgesetzte Dichtigkeit bedeutet, so kommt:

$$V = \varepsilon k \int \frac{d\tau}{r},$$

und wenn man hierin ferner, wie in § 11, für $d\tau$ das Product $r^2 dr\, d\sigma$ einführt, worin $d\sigma$ das Element des körperlichen Winkels darstellt, so lautet die Gleichung:

$$V = \varepsilon k \iint r\, dr\, d\sigma$$

oder anders geschrieben:

(1) $$V = \varepsilon k \int d\sigma \int r\, dr.$$

Verfährt man mit diesem Ausdrucke so, wie es in § 22 mit dem unter (77) gegebenen Ausdrucke von X geschehen ist, so erhält man zunächst durch Integration nach r

(2) $$V = \frac{\varepsilon k}{2} \int (\pm R_1{}^2 \mp R_2{}^2 \pm \text{etc.})\, d\sigma.$$

Setzt man hierin ferner, wie es dort geschehen ist:

(3) $$d\sigma = \pm \frac{i}{R^2}\, d\omega,$$

worin $d\omega$ das Oberflächenelement bedeutet, welches dem Elemente des körperlichen Winkels $d\sigma$ entspricht, und i den Cosinus des Winkels darstellt, welchen die auf $d\omega$ nach Aussen hin errichtete Normale mit dem von p nach $d\omega$ gezogenen und darüber hinaus verlängerten Leitstrahle bildet, und wählt man dabei die Vorzeichen in der dort erläuterten Weise, so erhält man:

(A) $$V = \frac{\varepsilon k}{2} \int i\, d\omega,$$

worin das Integral sich einfach über die ganze Oberfläche des gegebenen Körpers zu erstrecken hat. Dieses ist der erwähnte neue Ausdruck der Potentialfunction eines homogenen Körpers, welcher sowohl für Puncte innerhalb des Körpers, als auch für Puncte ausserhalb desselben gültig ist.

Mit Hülfe dieses Ausdruckes lässt sich der Werth von ΔV für innerhalb und ausserhalb des Körpers gelegene Puncte leicht bestimmen. Es ist nämlich:

(4) $$\Delta V = \frac{\varepsilon k}{2} \int \left(\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} \right) d\omega.$$

Um die hierin angedeuteten Differentiationen auszuführen, müssen wir i ausdrücken. Die Cosinus der Winkel, welche der nach $d\omega$ gezogene Leitstrahl mit den Coordinatenaxen bildet, mögen mit a, b, c und die Cosinus der Winkel der auf $d\omega$ errichteten Normale mit den Coordinatenaxen mit α, β, γ bezeichnet werden; dann ist:

(5) $$i = a\alpha + b\beta + c\gamma.$$

Ferner ist, wenn ξ, η, ζ die Coordinaten des Elementes $d\omega$ sind:

(6) $$a = \frac{\xi - x}{R}; \quad b = \frac{\eta - y}{R}; \quad c = \frac{\zeta - z}{R}.$$

Dadurch geht die vorige Gleichung über in:

(7) $$i = \frac{(\xi - x)\alpha + (\eta - y)\beta + (\zeta - z)\gamma}{R}$$

und zugleich ist:

(8) $$R = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}.$$

Hiernach können wir die Differentialcoefficienten von i bilden, und bekommen:

(9) $$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial i}{\partial x} &= \frac{\xi - x}{R^2} i - \frac{\alpha}{R} \\ \frac{\partial i}{\partial y} &= \frac{\eta - y}{R^2} i - \frac{\beta}{R} \\ \frac{\partial i}{\partial z} &= \frac{\zeta - z}{R^2} i - \frac{\gamma}{R} \end{aligned}\right.$$

(10) $$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} &= \frac{3(\xi - x)^2 - R^2}{R^4} i - 2\frac{\xi - x}{R^3}\alpha \\ \frac{\partial^2 i}{\partial y^2} &= \frac{3(\eta - y)^2 - R^2}{R^4} i - 2\frac{\eta - y}{R^3}\beta \\ \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} &= \frac{3(\zeta - z)^2 - R^2}{R^4} i - 2\frac{\zeta - z}{R^3}\gamma. \end{aligned}\right.$$

Wenn man diese drei Gleichungen addirt, so heben sich die ersten Glieder an der rechten Seite auf, und es bleibt:

(11) $$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = -2\frac{(\xi - x)\alpha + (\eta - y)\beta + (\zeta - z)\gamma}{R^3}$$

$$= -2\frac{i}{R^2},$$

und dadurch geht die Gleichung (4) über in:

(12) $$\Delta V = -\varepsilon k \int \frac{i}{R^2} d\omega.$$

Hierin kann man nun gemäss (3) wieder $d\sigma$ für $d\omega$ einführen, Dabei ist, wie es in § 22 auseinandergesetzt wurde, in solchen Fällen, wo ein Leitstrahl die Oberfläche mehrmals schneidet, dasselbe Element $d\sigma$ mehrmals mit verschiedenen Vorzeichen zu setzen, und man erhält dadurch, jenachdem der Punct p innerhalb oder ausserhalb des Körpers liegt, eine der beiden Gleichungen:

$$(13)\qquad \begin{cases} \Delta V = -\varepsilon k \int (1 - 1 + 1 - \text{etc.})\, d\sigma \\[2ex] \Delta V = -\varepsilon k \int (-1 + 1 - \text{etc.})\, d\sigma, \end{cases}$$

von denen die erstere in der Klammer eine ungerade und die letztere eine gerade Anzahl von Gliedern hat. In der ersteren Gleichung heben sich die in der Klammer stehenden Glieder, mit Ausnahme des ersten, gegenseitig auf, und es bleibt:

$$\Delta V = -\varepsilon k \int d\sigma,$$

worin die Integration über den ganzen körperlichen Winkelraum auszuführen ist, so dass man endlich erhält:

$$(14)\qquad \Delta V = -4\pi\varepsilon k.$$

In der zweiten Gleichung heben sich alle in der Klammer stehenden Glieder gegenseitig auf, und es kommt:

$$(15)\qquad \Delta V = 0,$$

welches die beiden zu beweisenden Gleichungen sind.

In Bezug auf die ersten Ableitungen des unter (A) gegebenen Ausdruckes von V stellt sich ein eigenthümliches Verhalten heraus. Indem man die Gleichung (A) nach x differentiirt, erhält man:

$$(16)\qquad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\varepsilon k}{2} \int \frac{\partial i}{\partial x}\, d\omega = \frac{\varepsilon k}{2} \int \left(\frac{\xi - x}{R^2}\, i - \frac{\alpha}{R} \right) d\omega.$$

Wenn man hierin für den Bruch $\frac{\xi - x}{R}$, welcher den Cosinus des Winkels bedeutet, den der vom Puncte p nach dem Flächenelemente

$d\omega$ gezogene Leitstrahl mit der x-Axe bildet, den oben eingeführten Buchstaben a setzt, so lautet die Gleichung:

$$(17) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\varepsilon k}{2}\int\left(\frac{ai}{R} - \frac{\alpha}{R}\right) d\omega.$$

Vergleicht man hiermit den in § 20 unter (56) gegebenen Ausdruck von X, nämlich:

$$(18) \qquad X = -\varepsilon k \int \frac{ai}{R} d\omega,$$

so scheint es auf den ersten Blick, als ob die aus der Bedeutung der Potentialfunction hervorgehende Gleichung

$$(19) \qquad X = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

nicht erfüllt wäre. Es lässt sich aber durch eine geometrische Betrachtung nachweisen, dass der Ausdruck, um welche die linke und rechte Seite dieser letzten Gleichung scheinbar von einander verschieden sind, sich auf Null reducirt.

Wir wollen diesen Nachweis dadurch führen, dass wir zeigen, dass man aus derselben Gleichung, aus welcher der oben unter (18) gegebene Ausdruck von X abgeleitet ist, auch einen anderen Ausdruck ableiten kann. Der Allgemeinheit wegen wollen wir dabei statt der speciell nach der x-Richtung gehenden Kraftcomponente, die in die Richtung einer beliebigen durch p gezogenen Geraden l fallende Kraftcomponente L betrachten. Die zur Bestimmung dieser Kraftcomponente dienende Gleichung lautet, wenn wir den Winkel, welchen der Leitstrahl mit der Geraden l bildet, mit ϑ bezeichnen, und demgemäss in der in § 22 unter (77) gegebenen Gleichung $\cos\vartheta$ an die Stelle von a setzen, folgendermaassen:

$$(20) \qquad L = -\varepsilon k \int d\sigma \cos\vartheta \int dr$$

und hieraus erhält man durch Integration:

$$(21) \qquad L = -\varepsilon k \int (\pm R_1 \mp R_2 \pm \text{etc.}) \cos\vartheta \, d\sigma,$$

welche Gleichung den beiden in § 22 unter (78) und (78a.) gegebenen Gleichungen entspricht. R_1, R_2 etc. bezeichnen wie dort die Längen, welche der von p ausgehende Leitstrahl bis zu den Puncten hat, wo er die Oberfläche schneidet. Von den beiden Vorzeichen, welche vor jedem R stehen, ist das obere zu nehmen, wenn der Leitstrahl, indem er wächst, die Oberfläche von innen nach aussen durchschneidet, und das untere, wenn er die Oberfläche von aussen nach innen durchschneidet. Das Integral ist, wenn p innerhalb des Körpers liegt, über den ganzen körperlichen Winkelraum 4π zu nehmen, und wenn p ausserhalb des Körpers liegt, über den Theil des körperlichen Winkelraumes, innerhalb dessen die von p ausgehenden Leitstrahlen die Oberfläche des Körpers treffen.

Wir führen nun, um das Element $d\sigma$ auszudrücken, Polarcoordinaten um den Punct p ein, indem wir die durch p gehende Gerade l als Axe nehmen, und dann unter ϑ, wie vorher, den Winkel des Leitstrahles mit der Axe verstehen, und mit φ den Winkel bezeichnen, welchen die durch die Axe und den Leitstrahl gelegte Ebene mit einer anderen durch die Axe gehenden festen Ebene bildet. Dadurch geht die Gleichung (21) über in:

$$(22) \qquad L = -\varepsilon k \iint (\pm R_1 \mp R_2 \pm \text{etc.}) \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Hierin wollen wir unsere Aufmerksamkeit zunächst nur auf das Integral nach ϑ richten, welches wir der Kürze wegen durch einen einfachen Buchstaben bezeichnen wollen, indem wir setzen:

$$(23) \qquad J = \int (\pm R_1 \mp R_2 \pm \text{etc.}) \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta.$$

Dieses Integral bezieht sich auf die Curve, in welcher eine durch die Axe gelegte und nach der durch den Winkel φ bestimmten Richtung gehende Ebene die Oberfläche des Körpers schneidet, und es ist für unseren Zweck vortheilhaft, das Bogenelement ds dieser Curve statt des Winkelelementes $d\vartheta$ anzuwenden. Wenn an der Stelle, von wo aus wir die Länge s des Bogens rechnen wollen, der Leitstrahl die Oberfläche in der Richtung von innen nach aussen durchschneidet, so nehmen wir s nach der Seite hin als wachsend an, wohin ϑ wächst, im anderen Falle umgekehrt, so dass $\frac{d\vartheta}{ds}$ im ersteren Falle positiv, im letzteren negativ ist. Wenn dann die Curve in ihrem weiteren Verlaufe sich so biegt, dass die

Durchschnittsrichtung des Leitstrahles sich umkehrt, so macht es sich von selbst, dass an derselben Stelle auch $\frac{d\vartheta}{ds}$ sein Vorzeichen ändert. Demnach hat $\frac{d\vartheta}{ds}$ immer dasselbe Vorzeichen, mit welchem der zu diesem Bogenelemente gehörige Leitstrahl R in der vorigen Gleichung zu nehmen ist, und man kann daher statt $\pm R\,d\vartheta$ schreiben $R\frac{d\vartheta}{ds}ds$. Da ferner zu jedem Elementarwinkel $d\vartheta$ gerade so viele Bogenelemente ds gehören, als die vorige Gleichung verschiedene Werthe von R enthält, so geht die Gleichung über in:

$$J = \int R \cos\vartheta \sin\vartheta \frac{d\vartheta}{ds} ds, \tag{24}$$

worin R und ϑ, da der Winkel φ bei der Integration constant ist, als Functionen von s zu betrachten sind.

Wir wollen nun den zu integrirenden Ausdruck in zwei Factoren zerlegen, welche in der folgenden Gleichung durch einen Punct von einander getrennt sind:

$$J = \int R \sin\vartheta \,.\, \cos\vartheta \frac{d\vartheta}{ds} ds,$$

und auf dieses Product wollen wir die Methode der theilweisen Integration anwenden. Da das Integral von $\cos\vartheta \frac{d\vartheta}{ds} ds$ einfach $\sin\vartheta$ ist, so erhalten wir, wenn wir die Grenzwerthe von R und ϑ mit R', ϑ' und R'', ϑ'' bezeichnen:

$$J = R'' \sin^2\vartheta'' - R' \sin^2\vartheta' - \int \sin\vartheta \frac{d(R\sin\vartheta)}{ds} ds. \tag{25}$$

Die beiden ersten Glieder dieses Ausdruckes sind entweder gleich Null, oder, wenn sie angebbare Werthe haben, so heben sie sich gegenseitig auf. Da nämlich unsere Integration von der geschlossenen Durchschnittscurve, welche die Ebene mit der Körperoberfläche bildet, nur den Theil umfassen soll, welcher an der einen Seite der Axe liegt (denn die nach der entgegengesetzten Seite der Axe gehende andere Hälfte derselben Ebene entspricht einem anderen Werthe von φ, der um 180^0 von dem hier angenommenen verschieden ist), so sind in Bezug auf die Grenzen der Integration zwei

Fälle möglich. 1) Wenn von der Curve nur ein Stück an der einen Seite der Axe liegt, so liegen die beiden Endpuncte dieses Stückes in der Axe selbst, und die Grenzwerthe ϑ' und ϑ'' des Winkels ϑ sind daher entweder 0 oder π, woraus folgt, dass $\sin\vartheta'$ und $\sin\vartheta''$, und mit ihnen jene beiden Glieder einzeln gleich Null werden. 2) Wenn die ganze geschlossene Curve an der einen Seite der Axe liegt, so fällt ihr Endpunct mit dem Anfangspuncte zusammen. Die beiden Grenzwerthe sowohl von R als auch von ϑ sind also unter einander gleich, und jene beiden Glieder heben sich gegenseitig auf. Es kann auch vorkommen, dass die beiden erwähnten Fälle zugleich stattfinden oder einer von ihnen sich mehrmals wiederholt, da die Durchschnittscurve einer Ebene mit der Körperoberfläche aus mehreren in sich geschlossenen Theilen bestehen kann; aber dadurch wird an dem Resultate, dass die beiden ersten Glieder des vorigen Ausdruckes fortfallen, nichts geändert. Es bleibt also nur das letzte Glied zu betrachten, und wenn wir dieses noch dadurch abändern, dass wir unter dem Integralzeichen mit R multipliciren und dividiren, so kommt:

$$(26) \qquad J = -\int \frac{R \sin\vartheta \dfrac{d(R\sin\vartheta)}{ds}\, ds}{R}.$$

Dieser Ausdruck muss nun noch, um den vollständigen Ausdruck von L zu erhalten, gemäss der Gleichung (22), mit $d\varphi$ multiplicirt und mit dem zweiten Integralzeichen und dem Factor $-\varepsilon k$ versehen werden. Es kommt also:

$$(27) \qquad L = \varepsilon k \int\!\!\int \frac{R \sin\vartheta \dfrac{d(R\sin\vartheta)}{ds}\, ds\, d\varphi}{R}.$$

Der Zähler des Bruches, welcher hier unter dem Integralzeichen steht, hat eine einfache geometrische Bedeutung. Das Product $R\sin\vartheta$ ist die Projection des Leitstrahles R auf eine auf der Axe senkrechte Ebene, und demnach ist, wie man leicht sieht, der ganze Zähler seinem absoluten Werthe nach die auf dieselbe Ebene bezogene Projection desjenigen Elementes der Oberfläche, welches den Elementen ds und $d\varphi$ entspricht, welche Projection, abgesehen vom Vorzeichen, durch $\cos\nu \,.\, d\omega$ dargestellt wird, wenn $d\omega$ das Oberflächenelement, und ν den Winkel zwischen der darauf errichteten Normale und der Axe bedeutet. Was die Vorzeichen anbetrifft, so kann man sich durch eine nähere Betrachtung des Gegenstandes leicht davon überzeugen, dass in Folge dessen, was über den Sinn, in welchem s als wachsend angenommen wird, gesagt ist, die Grösse $\frac{d\,(R \sin \vartheta)}{ds}$, welche allein in jenem Zähler ihr Vorzeichen ändern kann, immer dasselbe Vorzeichen hat, wie $\cos \nu$, wobei ich daran erinnern will, dass die Normale, auf welche sich der Winkel ν bezieht, immer in der Richtung vom Körper nach aussen hin betrachtet wird. Man kann also schreiben:

$$R \sin \vartheta \,\frac{d\,(R \sin \vartheta)}{ds}\, ds\, d\varphi = \cos \nu \,.\, d\omega,$$

und dadurch geht die vorige Gleichung über in:

$$L = \varepsilon k \int \frac{\cos \nu}{R}\, d\omega. \tag{28}$$

Diese Gleichung enthält an der rechten Seite den gesuchten Ausdruck der in die l-Richtung fallenden Kraftcomponente L.

Um hieraus den Ausdruck der in die x-Richtung fallenden Kraftcomponente X zu erhalten, brauchen wir nur für $\cos \nu$ das Zeichen α zu setzen, welches wir oben für den Cosinus des Winkels, welchen die auf $d\omega$ errichtete Normale mit der x-Richtung bildet, angewandt haben. Es kommt also:

$$X = \varepsilon k \int \frac{\alpha}{R}\, d\omega. \tag{29}$$

Aus der Vergleichung dieses hier gewonnenen Ausdruckes von X mit dem früher gewonnenen und oben unter (18) angeführten ergiebt sich die Gleichung:

$$\int \left(\frac{ai}{R} + \frac{\alpha}{R} \right) d\omega = 0, \tag{30}$$

mit Hülfe deren sich die Gleichungen (17) und (18) mit (19) in Uebereinstimmung bringen lassen.

Da es übrigens nach der Potentialtheorie als selbstverständlich anzusehen ist, dass die Kraftcomponente X gleich $-\frac{\partial V}{\partial x}$ sein muss, so könnte man auch die Schlussweise umkehren, und die in (17) und (18) an der rechten Seite stehenden Ausdrücke, nach Abänderung des Vorzeichens eines derselben, ohne Weiteres einander gleich setzen, also:

$$\frac{\varepsilon k}{2}\int\left(\frac{ai}{R}-\frac{\alpha}{R}\right)d\omega=\varepsilon k\int\frac{ai}{R}\,d\omega,$$

wodurch man sofort, ohne die vorher angestellten etwas weitläufigen Betrachtungen, zu der geometrisch interessanten, für jede geschlossene Fläche geltenden Gleichung (30) gelangen würde.

Zusatz II.

Beweis des in § 29, S. 74 angeführten Satzes.

Es sei in einer Ebene eine geschlossene Curve gegeben. Die Ebene möge als xy-Ebene eines rechtwinkligen Raumcoordinaten-Systemes genommen werden. Es sei ferner ein beliebiger Punct p im Raum mit den Coordinaten x, y, z gegeben, und von diesem ein Perpendikel auf die Ebene gefällt. Betrachten wir nun irgend einen Punct der Curve, dessen Coordinaten ξ' und η' heissen mögen, so soll sein Abstand vom Puncte p mit R, und der in der Ebene vom Fusspuncte des Perpendikels aus nach ihm gezogene Leitstrahl mit U bezeichnet werden. Errichtet man an diesem Puncte auf der Curve eine in der Ebene liegende, nach auswärts gehende Normale, so soll der Cosinus des Winkels, welchen diese Normale mit der x-Axe bildet, mit α', und der Cosinus des Winkels, welchen sie mit der Verlängerung des Leitstrahles U bildet, mit i' bezeichnet werden. Nennt man dann noch ein an dem betreffenden Puncte genommenes Bogenelement der Curve ds, so soll bewiesen werden, dass folgende Gleichung stattfindet:

$$(1)\qquad \int\left[\frac{(R^2+z^2)\,(\xi'-x)}{R\,U^3}\,i'-\frac{z^2}{R\,U^2}\,\alpha'\right]ds=0,$$

worin das Integral über die ganze geschlossene Curve zu nehmen ist.

Setzen wir zur Abkürzung:

$$(2)\qquad \begin{cases} P = \dfrac{(R^2+z^2)\,(\xi'-x)}{R\,U^3}\,i' \\[2ex] Q = \dfrac{z^2}{R\,U^2}\,\alpha', \end{cases}$$

so lautet die zu beweisende Gleichung:

$$(3)\qquad \int (P-Q)\,ds = 0.$$

Es möge nun der Winkel, welchen der Leitstrahl U mit der x-Axe bildet, mit φ, und das dem Bogenelemente ds entsprechende Element dieses Winkels mit $d\varphi$ bezeichnet werden; dann ist, wie man leicht sieht, und wie es auch schon in der Gleichung (98) § 28 ausgedrückt wurde:

$$i'ds = \pm\, U d\varphi.$$

Hierin ist, wenn ds und $d\varphi$ beide als positiv betrachtet werden, das obere oder untere Vorzeichen anzuwenden, jenachdem i' positiv oder negativ ist, d. h. jenachdem der Leitstrahl U, indem er wächst, den Umfang in der Richtung von innen nach aussen oder von aussen nach innen durchschneidet. Nimmt man aber an, dass, während man von irgend einem Anfangspuncte aus in einem gewissen Sinne in der Curve herumgeht, der Bogen s immer wachsen soll, und betrachtet dabei zugleich den Winkel φ als Function von s, so kann der Differentialcoefficient $\frac{d\varphi}{ds}$ sowohl positiv, als negativ sein, und zwar ändert er an denselben Stellen der Curve sein Vorzeichen, wo der mit i' bezeichnete Cosinus sein Vorzeichen ändert. Lässt man also s in dem Sinne wachsen, dass der Differentialcoefficient $\frac{d\varphi}{ds}$ an irgend einer Stelle der Curve gleiches Vorzeichen mit i' hat, so haben diese beiden Grössen auch überall gleiche Vorzeichen, und man kann daher in der vorigen Gleichung von den beiden äusserlich hinzugefügten Vorzeichen ein für alle Mal das obere anwenden, und somit folgende Gleichung bilden:

$$(4)\qquad i' = U\frac{d\varphi}{ds}.$$

Ferner ist $\alpha' ds$, abgesehen vom Vorzeichen, die Veränderung, welche die Coordinate η' eines in der Curve beweglichen Punctes erleidet, während dieser das Bogenelement ds durchläuft. Da nun die Gleichung

$$\eta' - y = U \sin \varphi$$

gilt, worin y dem Obigen nach eine durch die Lage des Punctes p im Voraus gegebene Grösse ist, so hat man:

$$d\eta' = d(U \sin \varphi)$$

und demnach kann man schreiben:

$$\alpha' ds = \pm d(U \sin \varphi).$$

Was das Vorzeichen anbetrifft, so überzeugt man sich leicht durch einfache geometrische Betrachtungen, dass auch in dieser Gleichung, wenn man den Bogen s in dem vorher festgesetzten Sinne als wachsend annimmt, überall das obere Vorzeichen anzuwenden ist, und man kann daher folgende Gleichung bilden:

$$\alpha' = \frac{d(U \sin \varphi)}{ds}. \tag{5}$$

Setzen wir die in (4) und (5) gegebenen Werthe von i' und α' in den Gleichungen (2) ein, und schreiben zugleich für die Differenz $\xi' - x$ ihren Werth $U \cos \varphi$, so erhalten wir:

$$P = \frac{R^2 + z^2}{RU} \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds}$$

$$Q = \frac{z^2}{RU^2} \cdot \frac{d(U \sin \varphi)}{ds}$$

$$= \frac{z^2}{RU^2} \sin \varphi \frac{dU}{ds} + \frac{z^2}{RU} \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds},$$

und demnach:

$$P - Q = \frac{R}{U} \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds} - \frac{z^2}{RU^2} \sin \varphi \frac{dU}{ds}. \tag{6}$$

Hierin lassen sich die beiden Glieder an der rechten Seite in der Weise umgestalten, dass sie in einen Differentialcoefficienten zusammengezogen werden können. Bedenkt man, dass

$$R = \sqrt{U^2 + z^2},$$

worin z von s unabhängig ist, und daher

$$\frac{dR}{ds} = \frac{U}{R} \cdot \frac{dU}{ds},$$

so erhält man:

$$\frac{d\left(\frac{R}{U}\right)}{ds} = \frac{1}{R} \cdot \frac{dU}{ds} - \frac{R}{U^2} \cdot \frac{dU}{ds}$$
$$= \frac{U^2 - R^2}{RU^2} \cdot \frac{dU}{ds}$$
$$= -\frac{z^2}{RU^2} \cdot \frac{dU}{ds}.$$

Wendet man diese Gleichung auf das zweite an der rechten Seite stehende Glied der Gleichung (6) an, und setzt zugleich im ersten Gliede:

$$\cos\varphi \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d \sin\varphi}{ds},$$

so kommt:

$$P - Q = \frac{R}{U} \cdot \frac{d\sin\varphi}{ds} + \sin\varphi \frac{d\left(\frac{R}{U}\right)}{ds},$$

oder zusammengezogen:

(7) $$P - Q = \frac{d\left(\frac{R}{U}\sin\varphi\right)}{ds}.$$

Demnach nimmt das in den Gleichungen (3) und (1) enthaltene Integral folgende einfache Gestalt an:

$$\int \frac{d\left(\frac{R}{U}\sin\varphi\right)}{ds} ds.$$

Hierin lässt sich die Integration ohne Weiteres ausführen, und giebt, wenn wir die Grenzwerthe des Integrales durch die Indices 0 und 1 andeuten:

$$\left(\frac{R}{U}\sin\varphi\right)_1 - \left(\frac{R}{U}\sin\varphi\right)_0.$$

Für eine geschlossene Curve, bei welcher der Anfang und das Ende des Bogens in einen und denselben Punct zusammenfallen, sind beide Grenzwerthe gleich und heben sich auf, und die zu beweisende Gleichung (1) ist somit erfüllt.

Leipzig,
Druck von Grimme & Trömel.