I/II

Holzstiche
aus dem xylographischen Atelier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunschweig.

Papier
aus der mechanischen Papier-Fabrik
der Gebrüder Vieweg zu Wendhausen
bei Braunschweig.

COMPENDIUM

DER

HÖHEREN ANALYSIS.

VON

DR. OSKAR SCHLÖMILCH,

KÖNIGL. SÄCHSISCHEM GEHEIMRATH A. D., MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU LEIPZIG, DER KÖNIGL. SCHWEDISCHEN AKADEMIE ZU STOCKHOLM, DER KAISERL. LEOPOLDINISCHEN AKADEMIE ETC.

IN ZWEI BÄNDEN.

ZWEITER BAND.

VIERTE AUFLAGE.

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSTICHEN.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1895.

VORLESUNGEN

ÜBER EINZELNE THEILE DER

HÖHEREN ANALYSIS

GEHALTEN

AM

K. S. POLYTECHNICUM ZU DRESDEN

VON

DR. OSKAR SCHLÖMILCH,

KÖNIGL. SÄCHSISCHEM GEHEIMRATH A. D., MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU LEIPZIG, DER KÖNIGL. SCHWEDISCHEN AKADEMIE ZU STOCKHOLM, DER KAISERL. LEOPOLDINISCHEN AKADEMIE ETC.

VIERTE AUFLAGE.

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSTICHEN.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1895.

VORREDE ZUR ERSTEN AUFLAGE.

Die Verzögerung im Erscheinen des vorliegenden zweiten Bandes meines Compendiums d. h. A. ist nicht etwa aus Nachlässigkeit entstanden, sie ist vielmehr eine absichtliche. Vor drei Jahren nämlich, als schon ein grosser Theil des Manuscriptes vollendet war, trat eine Reorganisation des hiesigen Polytechnikums ein, welche mir die angenehme Aussicht eröffnete, die meisten der hier behandelten Gegenstände vortragen zu können; eingedenk des alten Spruches *docendo discimus*, wollte ich diese Gelegenheit zur Probe auf die praktische Brauchbarkeit meines Werkes nicht unbenutzt vorübergehen lassen und habe in der That seit jener Zeit die Lehre von den Functionen complexer Variabelen, die Theorie der elliptischen Integrale und Functionen und einiges Andere mehrmals im dritten Fachcurs unseres Institutes vorgetragen. Die Folge davon war eine ziemlich bedeutende Umarbeitung des ersten Entwurfes, von der ich hoffe, dass sie den Werth des Buches vergrössert haben möge.

Bei dem ausserordentlichen Umfange, den namentlich die vorgenannten Theorieen in neuerer Zeit erlangt haben, ist mir übrigens das Maasshalten sehr schwer und nur dadurch möglich geworden, dass ich mich auf das beschränkte, was bei der Lösung mechanischer und physikalischer Probleme hauptsächlich zur Anwendung kommt. Neue Darstellungen und neue Resultate wird man an mehreren Stellen finden, ebenso eine reichliche Angabe der einschlagenden Literatur. Die Zahlenbeispiele für die Berechnung elliptischer Integrale und Functionen verdanke ich der Güte meines Collegen Herrn Prof. O. Fort, dessen Sicherheit im Zahlenrechnen für die Richtigkeit der Angaben bürgen dürfte.

Dresden, im September 1866.

O. Schlömilch.

VORREDE ZUR ZWEITEN AUFLAGE.

Die günstigen Beurtheilungen, welche dem vorliegenden Werke zu Theil geworden sind, sowie das Erscheinen einer von Herrn Dr. Graindorge in Lüttich veranstalteten französischen Uebersetzung der Abschnitte über die elliptischen Integrale und Functionen lassen mich vermuthen, dass ich bei der Auswahl, Begrenzung und Darstellung der gegebenen Theorieen ein gewisses praktisches Maass richtig getroffen habe. Es lag daher keine Veranlassung vor, das behandelte Material wesentlich zu vermehren, wohl aber sind kleinere Zusätze und Verbesserungen häufig angebracht worden. Zugleich benutze ich diese Gelegenheit, um denjenigen Herren, welche mich mit werthvollen Bemerkungen über die erste Auflage erfreut haben (insbesondere Herrn Dr. Weber für seine ausführliche Besprechung im Jahrg. 1867 der Heidelberger Jahrbücher), meinen besten Dank auszusprechen.

Dresden, im August 1873.

O. Schlömilch.

VORREDE ZUR DRITTEN AUFLAGE.

So bedeutend auch die Fortschritte sind, welche die Wissenschaft in den letzten Jahren gemacht hat, so konnte doch nur wenig davon für die vorliegende neue Auflage benutzt werden, weil das Meiste weit über den Rahmen des Werkes hinausfällt. Das letztere soll auch jetzt nichts Anderes geben als eine Einführung in die höheren Theorieen der Analysis.

Dresden, im Juli 1878.

O. Schlömilch.

VORREDE ZUR VIERTEN AUFLAGE.

Die vorliegende Auflage unterscheidet sich nur wenig von ihrer Vorgängerin, weil die inzwischen von der Wissenschaft gemachten Eroberungen (z. B. Mehrdimensionale Räume, Gruppentheorie etc.) noch keinen Eingang in die Gedankenkreise der Physiker und Ingenieure gefunden haben.

Besonderen Dank spreche ich Herrn Professor Dr. R. Fricke in Braunschweig aus, der während meiner längeren Krankheit die Güte hatte, die Correctur der vorliegenden Auflage zu besorgen.

Dresden, im Juli 1895.

O. Schlömilch.

INHALT.

Die höheren Differentialquotienten.

Die Gammafunctionen.

Die elliptischen Integrale.

Die elliptischen Functionen.

Die vielfachen Integrale.

Die Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

DIE HÖHEREN

DIFFERENTIALQUOTIENTEN.

Die höheren Differentialquotienten.

Eine ausführliche Untersuchung über die höheren Differentialquotienten von Functionen einer einzigen Variabelen hat es mit zwei Hauptproblemen zu thun, von denen das eine gewissermaassen die Umkehrung des anderen ist. Setzt man nämlich $y = \varphi(x)$ und bezeichnet $F(y) = F[\varphi(x)]$ kurz mit $f(x)$, so kann man entweder die Aufgabe stellen, $f^{(n)}(x)$ durch $F'(y)$, $F''(y)$, $F'''(y)$ etc. auszudrücken, oder man kann umgekehrt verlangen, dass $F^{(n)}(y)$ durch $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ etc. ausgedrückt werde, wobei sich von selbst versteht, dass unter allen Umständen auch $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)$ etc. in die Rechnung eingehen müssen. Zufolge der identischen Gleichung

$$f^{(n)}(x) = D_x^n f(x) = D_x^n F[\varphi(x)]$$

ist die erste Aufgabe einerlei mit dem Probleme der mehrmaligen Differentiation einer zusammengesetzten Function, von welchem in Thl. I. nur wenige specielle Fälle behandelt worden sind. Die zweite Aufgabe kommt auf die Vertauschung der unabhängigen Variabelen hinaus; denn betrachtet man erst y als unabhängige Variabele und führt nachher eine neue Veränderliche x ein, welche mit y durch die Gleichung $y = \varphi(x)$ verbunden ist, so entsteht die Frage nach der neuen aus dieser Substitution entspringenden Form von $D_y^n F(y) = F^{(n)}(y)$. Wegen

$$D_y^n F(y) = \frac{d^n F(y)}{d y^n} = \frac{d^n F[\varphi(x)]}{[d\varphi(x)]^n} = \frac{d^n f(x)}{[d\varphi(x)]^n}$$

kann man auch sagen, dass es sich im vorliegenden Falle darum handelt, eine gegebene Function von x in Beziehung auf eine andere

Function von x, letztere als unabhängige Variabele betrachtet, zu differenziren. Für beide Hauptaufgaben werden wir im Folgenden die Lösungen geben und daran einige Anwendungen knüpfen.

I. Die Differentiation der zusammengesetzten Functionen.

Durch mehrmalige Differentiation der beiden Gleichungen

1) $$f(x) = F(y), \qquad y = \varphi(x)$$

gelangt man ohne Mühe zu den Formeln

$$\begin{aligned} f'(x) &= F'(y)\,\varphi'(x), \\ f''(x) &= F'(y)\,\varphi''(x) + F''(y)\,\varphi'(x)^2, \\ f'''(x) &= F'(y)\,\varphi'''(x) + 3F''(y)\,\varphi'(x)\,\varphi''(x) + F'''(y)\,\varphi'(x)^3, \\ & \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

und hieraus schliesst man auf folgendes allgemeine Bildungsgesetz

2) $$f^{(n)}(x) = F'(y)\,X_1 + F''(y)\,X_2 + \cdots + F^{(n)}(y)\,X_n,$$

worin $X_1, X_2, \ldots X_n$ gewisse, vorläufig noch unbekannte variabele Factoren bezeichnen, die nur von der Function φ, nicht aber von F abhängen. Ebendeswegen kann irgend eine passende Specialisirung von F zur Bestimmung der Coefficienten X dienen; am besten eignet sich hierzu die Substitution $F(y) = e^{ty}$, welche giebt

$$D_x^n e^{ty} = (t X_1 + t^2 X_2 + \cdots + t^n X_n)\, e^{ty}.$$

Multiplicirt man beiderseits mit e^{-ty}, differenzirt k — mal nach t und setzt schliesslich $t = 0$, so erhält man die Gleichung

$$\left[D_t^k (e^{-ty} D_x^n e^{ty})\right]_{(t=0)} = 1.2.3\ldots k\, X_k$$

und hieraus X_k. Um noch eine andere Form für die linke Seite zu erhalten, erinnern wir an den Satz, dass überhaupt

$D_x^n \psi(x+\varrho) = D_\varrho^n \psi(x+\varrho)$ mithin $D_x^n \psi(x) = \left[D_\varrho^n \psi(x+\varrho)\right]_{(\varrho=0)}$

ist, also

$$D_x^n e^{ty} = D_x^n e^{t\varphi(x)} = \left[D_\varrho^n e^{t\varphi(x+\varrho)}\right]_{(\varrho=0)}.$$

Der Werth von X_k gestaltet sich hiernach wie folgt

$$X_k = \frac{1}{1.2.3\ldots k}\left[D_t^k\left(e^{-t\varphi(x)} D_\varrho^n e^{t\varphi(x+\varrho)}\right)\right]_{(t=0,\ \varrho=0)}$$

oder compendiöser, wenn zur Abkürzung

3) $$\Theta = \varphi(x+\varrho) - \varphi(x)$$

gesetzt wird,

4) $$X_k = \frac{1}{1.2.3\ldots k}\left[D_t^k D_\varrho^n e^{t\Theta}\right]_{(t=0,\ \varrho=0)}$$

Durch Ausführung der auf t bezüglichen Differentiation ergiebt sich ferner

$$5)\qquad X_k = \frac{1}{1.2.3\ldots k}\left[D_\varrho^n \Theta^k\right]_{(0)}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$6)\qquad U_k = \left[D_\varrho^n \Theta^k\right]_{(0)} = \left[D_\varrho^n \{\varphi(x+\varrho) - \varphi(x)\}^k\right]_{(0)},$$

so hat man statt der Gleichung 2) die folgende:

$$7)\quad \left\{\begin{aligned} &f^{(n)}(x) = D_x^n F(y) \\ &= \frac{U_1}{1}F'(y) + \frac{U_2}{1.2}F''(y) + \cdots + \frac{U_n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(y). \end{aligned}\right.$$

Dieses Resultat lässt sich auch durch Induction aus den drei anfänglichen Formeln für $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ ableiten und nachher mittelst des Schlusses von n auf $n+1$ beweisen.

Hinsichtlich des Werthes von U_k ist noch zu bemerken, dass er in entwickelterer Form dargestellt werden kann, wenn man $[\varphi(x+\varrho) - \varphi(x)]^k$ mittelst des binomischen Satzes in eine Reihe verwandelt und bei der Differentiation der einzelnen Reihenglieder von dem Satze

$$\left[D_\varrho^n \psi(x+\varrho)\right]_{(0)} = D_x^n \psi(x)$$

Gebrauch macht; man gelangt so zu der Formel:

$$8)^{*})\qquad U_k = (k)_0 D_x^n y^k - (k)_1 y D_x^n y^{k-1} + (k)_2 y^2 D_x^n y^{k-2} - \cdots.$$

Die wichtigeren speciellen Fälle der Formeln 5) und 6) sind folgende:

Differentiation der Functionen von Potenzen.

a. Für $y = \varphi(x) = \dfrac{1}{x}$ hat man nach Nro. 6)

$$U_k = \left[D_\varrho^n\left(-\frac{\varrho}{x(x+\varrho)}\right)^k\right]_{(0)} = \frac{(-1)^k}{x^k}\left[D_\varrho^n\{\varrho^k(x+\varrho)^{-k}\}\right]_{(0)}$$

und mittelst der bekannten Regel für die Differentiation der Producte

*) Unter der obigen Form ist U_k zuerst von R. Hoppe in dessen „Theorie der höheren Differentialquotienten" (Leipzig, 1845) angegeben worden; die kürzere Formel 5) rührt von U. Meyer her, der sie in Grunert's Archiv der Mathematik, Bd. 9, mittelst des Taylor'schen Satzes abgeleitet hat. Die Formel 4) und deren hier mitgetheilte Herleitung findet sich in der lesenswerthen Theoria derivatarum altiorum ordinum, auct. G. Steinbrink (Berol. 1876, Calvary).

$$U_k = \frac{(-1)^k}{x^k}(n)_k\, 1\,.\,2\,.\,3 \ldots k\left[D_\varrho^{n-k}(x+\varrho)^{-k}\right]_{(0)}$$

$$= (-1)^k (n)_k \frac{1.2\ldots k}{x^k} \cdot \frac{(-1)^{n-k} k(k+1)(k+2)\ldots(n-1)}{x^n}$$

$$\frac{U_k}{1.2.3\ldots k} = \frac{(-1)^n (n-1)(n-2)\ldots . k\,.\,(n)_k}{x^{n+k}}.$$

Ordnet man die Glieder in umgekehrter Folge, indem man von der Formel $(n)_{n-k} = (n)_k$ Gebrauch macht, so gelangt man zu dem Resultate

$$(-1)^n D_x^n F\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x^{2n}} F^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{(n-1)(n)_1}{x^{2n-1}} F^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{(n-1)(n-2)(n)_2}{x^{2n-2}} F^{(n-2)}\left(\frac{1}{x}\right) + \cdots$$

Hiernach ist z. B. für $F(y) = e^{ay}$

$$(-1)^n D^n e^{\frac{a}{x}}$$

$$= \frac{1}{x^n}\left\{\left(\frac{a}{x}\right)^n + (n-1)(n)_1\left(\frac{a}{x}\right)^{n-1} + (n-1)(n-2)(n)_2\left(\frac{a}{x}\right)^{n-2} + \cdots\right\} e^{\frac{a}{x}}.$$

b. Die Specialisirung $y = \varphi(x) = x^2$ liefert

$$U_k = \left[D_\varrho^n\{\varrho^k(2x+\varrho)^k\}\right]_{(0)} = (n)_k 1\,.\,2 \ldots k\left[D_\varrho^{n-k}(2x+\varrho)^k\right]_{(0)},$$

$$\frac{U_k}{1.2.3\ldots k} = (n)_k k(k-1)(k-2)\ldots(2k-n+1)(2x)^{2k-n},$$

mithin ist bei umgekehrter Anordnung der Summanden

$$9)\quad D_x^n F(x^2) = (2x)^n F^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2} F^{(n-1)}(x^2)$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2}(2x)^{n-4} F^{(n-2)}(x^2)$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots .(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3}(2x)^{n-6} F^{(n-3)}(x^2) + \cdots .$$

So hat man z. B. für $F(y) = e^{ay}$

$$D^n e^{ax^2} = (2ax)^n e^{ax^2}\left\{1 + \frac{n(n-1)}{1\,.\,4ax^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,(4ax^2)^2} + \frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,(4ax^2)^3} + \cdots\right\}.$$

Als zweites Beispiel diene die Annahme $F(y) = (1+ay)^\mu$; es ergiebt sich dann

$$D^n(1+ax^2)^\mu = \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)(2ax)^n}{(1+ax^2)^{n-\mu}}\left\{1 + \frac{n(n-1)}{1.(\mu-n+1)}\frac{1+ax^2}{4ax^2}\right.$$
$$\left.+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.(\mu-n+1)(\mu-n+2)}\left(\frac{1+ax^2}{4ax^2}\right)^2 + \cdots\right\}.$$

Für $\mu = n + \frac{1}{2}$, $a = -1$ erhält man specieller

$$D^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{(2n+1)(2n-1)\ldots3.1}{n+1}(-x)^n(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\left\{n+1-\frac{(n+1)n(n-1)}{2.3}\frac{1-x^2}{x^2}\right.$$
$$\left.+\frac{(n+1)n\ldots(n-3)}{2.4.3.5}\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)^2 - \cdots\right\}$$

oder auch, wenn $n = m - 1$ gesetzt wird,

$$D^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{(-1)^{m-1}1.3.5\ldots(2m-1)}{m}\left\{(m)_1 x^{m-1}\sqrt{1-x^2} - (m)_3 x^{m-3}(\sqrt{1-x^2})^3\right.$$
$$\left. + (m)_5 x^{m-5}(\sqrt{1-x^2})^5 - \cdots\right\}.$$

Mittelst der Substitution $x = \cos u$, wobei u einen Bogen des ersten Quadranten bedeuten möge, ist die eingeklammerte Reihe leicht zu summiren; sie verwandelt sich nämlich in

$$(m)_1\cos^{m-1}u\sin u - (m)_3\cos^{m-3}u\sin^3 u$$
$$+ (m)_5\cos^{m-5}u\sin^5 u - \cdots$$

und nach Thl. I, S. 40, Formel 15) ist ihre Summe $= \sin mu = \sin(m\arccos x)$ also

$$10)\,^{*)}\; D^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^{m-1}1.3.5\ldots(2m-1)}{m}\sin(m\arccos x).$$

c. Die Specialisirung $y = \varphi(x) = \sqrt{x}$ liefert

$$U_k = \left[D_\varrho^n(\sqrt{x+\varrho} - \sqrt{x})^k\right]_{(0)}$$

oder für $\varrho = x\tau$, $d\varrho = x\,d\tau$,

$$U_k = x^{\frac{1}{2}k-n}\left[D_\tau^n(\sqrt{1+\tau}-1)^k\right]_{(0)}.$$

Um die angedeutete auf τ bezügliche Differentiation auszuführen, setzen wir zur Abkürzung

$$T = \sqrt{1+\tau} - 1 = \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau}+1}$$

*) Dieses Resultat verdankt man Jacobi; s. Crelle's Journal für Mathem. Bd. 15, S. 1.

und bemerken, dass

$$\frac{dT}{d\tau} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\tau}} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\tau}{T} - 1} = \tfrac{1}{2} \frac{T}{\tau - T}$$

mithin

$$\tfrac{1}{2} T = (\tau - T) T'$$

ist. Diese Gleichung multipliciren wir mit T^{k-2} und differenziren das Product $(n-1)$ mal; es wird dann

$$\tfrac{1}{2} D^{n-1} T^{k-1} = D^{n-1}(\tau T^{k-2} T') - D^{n-1}(T^{k-1} T')$$

$$= \tau D^{n-1}(T^{k-2} T') + (n-1) D^{n-2}(T^{k-2} T') - D^{n-1}(T^{k-1} T')$$

und für $\tau = 0$

$$\tfrac{1}{2}[D^{n-1} T^{k-1}]_{(0)} = (n-1)[D^{n-2}(T^{k-2} T')]_{(0)} - [D^{n-1}(T^{k-1} T')]_{(0)}$$

$$= \frac{n-1}{k-1}[D^{n-1} T^{k-1}]_{(0)} - \frac{1}{k}[D^n T^k]_{(0)}.$$

Da in dieser Gleichung nur die beiden Differentialquotienten $D^n T^k$ und $D^{n-1} T^{k-1}$ vorkommen, so lässt sich der erste Differentialquotient durch den zweiten ausdrücken, nämlich

$$[D^n T^k]_{(0)} = \frac{k(2n-k-1)}{2(k-1)}[D^{n-1} T^{k-1}]_{(0)}.$$

Durch $(k-1)$-malige Anwendung dieser Formel erhält man

$$[D^n T^k]_{(0)} = k \frac{(2n-k-1)(2n-k-2)\ldots(2n-2k+1)}{2^{k-1}}[D^{n-k+1} T]_{(0)}$$

d. i. weil der letzte Differentialquotient unmittelbar entwickelt werden kann

$$[D^n T^k]_{(0)}$$

$$= k \frac{(2n-k-1)(2n-k-2)\ldots(2n-2k+1)}{2^{k-1}}$$

$$\cdot \frac{(-1)^{n-k} 1.3.5\ldots(2n-2k-1)}{2^{n-k+1}}.$$

Zufolge dieses Werthes ist weiter

$$\frac{U_k}{1.2.3\ldots k} = \frac{(-1)^{n-k}}{2^n x^{n-\frac{1}{2}k}}$$

$$\cdot \frac{(2n-k-1)(2n-k-2)\ldots(2n-2k+1).1.3.5\ldots(2n-2k-1)}{1.2.3\ldots.(k-1)},$$

und wenn man, behufs umgekehrter Anordnung der Summanden, $k = n - h$ setzt, so wird

$$\frac{U_{n-h}}{1.2.3\ldots(n-h)}$$
$$=\frac{(-1)^h}{2^n(\sqrt{x})^{n+h}}\cdot\frac{(n+h-1)(n+h-2)\ldots.(2h+1).1.3.5\ldots(2h-1)}{1.2.3\ldots.(n-h-1)}$$
$$=\frac{(-1)^h}{(2\sqrt{x})^{n+h}}\cdot\frac{(n+h-1)(n+h-2)\ldots(n+1)n(n-1)\ldots(n-h)}{1.2.3\ldots.h}.$$

Hiernach ergiebt sich folgende Formel

$$11)^{*)}\qquad D_x^n F(\sqrt{x})=\frac{F^{(n)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^n}-\frac{n(n-1)}{1}\,\frac{F^{(n-1)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^{n+1}}$$
$$+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2}\,\frac{F^{(n-2)}(\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^{n+2}}-\ldots\ldots$$

Nimmt man beispielsweis $F(y)=(1+ay)^{2n-1}$, so findet man

$$D^n(1+a\sqrt{x})^{2n-1}$$
$$=\frac{(2n-1)\ldots n}{2\sqrt{x}}a\left(\frac{a(1+a\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\right)^{n-1}\left\{1-\frac{n-1}{1}\,\frac{1+a\sqrt{x}}{2a\sqrt{x}}\right.$$
$$\left.+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\left(\frac{1+a\sqrt{x}}{2a\sqrt{x}}\right)^2-\ldots\right\}.$$

Darin ist erstens

$$\frac{(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)n}{2^{n-1}}=\frac{1.2.3.4\ldots.(2n-1)}{2^{n-1}1.2.3\ldots(n-1)}$$
$$=\frac{1.2.3.4\ldots(2n-1)}{2.4.6.8\ldots(2n-2)}=1.3.5\ldots.(2n-1),$$

ferner lässt sich die eingeklammerte Reihe mittelst des binomischen Satzes summiren, und so entsteht die einfachere Gleichung

$$12)\qquad D^n(1+a\sqrt{x})^{2n-1}=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}\,\frac{a}{\sqrt{x}}\left(a^2-\frac{1}{x}\right)^{n-1}.$$

d. Will man den allgemeinen Fall $y=\varphi(x)=x^\lambda$ betrachten, so ist es am zweckmässigsten, die Formel 8) zu benutzen und dabei die Bezeichnung

$$\overset{n}{[\mu]}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\overline{\mu-n-1})$$

einzuführen; man erhält

$$D_x^n F(x^\lambda)=\frac{1}{x^n}\left\{\frac{L_1 x^\lambda}{1}F'(x^\lambda)+\frac{L_2 x^{2\lambda}}{1.2}F''(x^\lambda)+\ldots\right\},$$

worin L_k durch folgende Formel bestimmt ist

---

*) Vom Verfasser zuerst mitgetheilt in Crelle's Journal, Bd. 32, Seite 1.

$$L_k = (k)_0 [k\lambda]^n - (k)_1 [(k-1)\lambda]^n + (k)_2 [(k-2)\lambda]^n - \cdots\cdot\cdot$$

In den drei speciellen Fällen $\lambda = -1$, $\lambda = 2$, $\lambda = \frac{1}{2}$ lässt sich die für L_k angegebene endliche Reihe summiren, und man kommt dann auf die unter a, b, c angegebenen Formeln zurück.

Differentiation der Functionen von Exponentialgrössen.

Für $y = \varphi(x) = e^x$ findet man nach Nro. 7) und Nro. 8)

13) $$D_x^n F(e^x) = \frac{E_1 e^x}{1} F'(e^x) + \frac{E_2 e^{2x}}{1.2} F''(e^x) + \cdots\cdot\cdot,$$

worin die Coefficienten E_1, E_2, etc. durch folgende Formel bestimmt sind

14) $$E_k = (k)_0 k^n - (k)_1 (k-1)^n + (k)_2 (k-2)^n - \cdots\cdot\cdot$$

Als Beispiel diene die Annahme

$$F(y) = \frac{1}{1+y^2},$$

woraus nach Formel 14) auf Seite 277, Thl. I, folgt

$$F^{(k)}(y) = (-1)^k 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k \frac{\sin\left[(k+1) \arctan \dfrac{1}{y}\right]}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}(k+1)}},$$

es ergiebt sich dann

15) $$D^n \frac{1}{1+e^{2x}} = -E_1 e^x \frac{\sin(2 \arctan e^{-x})}{\sqrt{(1+e^{2x})^2}} + E_2 e^{2x} \frac{\sin(3 \arctan e^{-x})}{\sqrt{(1+e^{2x})^3}} - E_3 e^{3x} \frac{\sin(4 \arctan e^{-x})}{\sqrt{(1+e^{2x})^4}} + \cdots\cdot\cdot$$

Auf gleiche Weise lässt sich der specielle Fall

$$F(y) = \frac{y}{1+y^2}$$

behandeln, wenn man die Formel 15) auf S. 277, Thl. I, zu Hülfe nimmt; man erhält

16) $$D^n \frac{e^x}{1+e^{2x}} = -E_1 e^x \frac{\cos(2 \arctan e^{-x})}{\sqrt{(1+e^{2x})^2}} + E_2 e^{2x} \frac{\cos(3 \arctan e^{-x})}{\sqrt{(1+e^{2x})^3}} - E_3 e^{3x} \frac{\cos(4 \arctan e^{-x})}{\sqrt{(1+e^{2x})^4}} + \cdots\cdot$$

Diese Formeln führen u. A. zur independenten Bestimmung der Tangenten- und Secantencoefficienten. Nach Formel 11) auf S. 281, Thl. I, ist nämlich mit Rücksicht auf Nro. 32) in §. 50

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\tau_1}{1}x - \frac{\tau_3}{1.2.3}x^3 + \frac{\tau_5}{1.2\ldots5}x^5 - \cdots$$

oder

$$1 - \frac{2}{e^{2x}+1} = \frac{\tau_1}{1}x - \frac{\tau_3}{1.2.3}x^3 + \frac{\tau_5}{1.2\ldots5}x^5 - \cdots$$

mithin, wenn n irgend eine ungerade Zahl bedeutet,

$$-2\left[D^n\frac{1}{1+e^{2x}}\right]_{(0)} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\tau_n$$

und da man die linke Seite nach Formel 15) entwickeln kann, so erhält man τ_n, nämlich

$$17)\qquad \tau_n = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\,2\left\{E_1\frac{\sin(\frac{2}{4}\pi)}{\sqrt{2^2}} - E_2\frac{\sin(\frac{3}{4}\pi)}{\sqrt{2^3}} + \cdots\right\}.$$

Mittelst desselben Verfahrens erhält man die Secantencoefficienten. Nach Formel 13) Seite 281, Thl. I, ist zunächst

$$\frac{2}{e^x+e^{-x}} = 2\frac{e^x}{e^{2x}+1}$$

$$= 1 - \frac{\tau_2}{1.2}x^2 + \frac{\tau_4}{1.2.3.4}x^4 - \frac{\tau_6}{1.2\ldots6}x^6 + \cdots$$

mithin für gerade n

$$2\left[D^n\frac{e^x}{1+e^{2x}}\right]_{(0)} = (-1)^{\frac{1}{2}n}\tau_n$$

d. i. unter Anwendung von Nro. 16)

$$18)\qquad \tau_n = (-1)^{\frac{1}{2}n+1}\,2\left\{E_1\frac{\cos(\frac{2}{4}\pi)}{\sqrt{2^2}} - E_2\frac{\cos(\frac{3}{4}\pi)}{\sqrt{2^3}} + \cdots\right\}.$$

Durch die Formeln 13) und 14) erledigt sich zugleich die Differentiation beliebiger Functionen von $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, etc. Macht man nämlich Gebrauch von den Relationen

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},\ \text{etc.}\quad (i=\sqrt{-1}),$$

so bleibt immer nur eine Function von e^{ix} übrig, die sich nach den vorigen Formeln differenziren lässt, wenn man ix für x, mithin idx für dx setzt.

Differentiation von Functionen des Logarithmus.

Die Methode, deren wir uns bisher zur Bestimmung von U_k bedient haben, passt nicht auf den Fall $y = \varphi(x) = lx$, weil der n-te Differentialquotient von $y^k = (lx)^k$ nicht unmittelbar bekannt ist. Wir schlagen daher einen anderen Weg ein.

Differenzirt man $F(lx)$ mehrmals nach einander, so bemerkt man leicht folgendes Bildungsgesetz

$$19)\quad D_x^n F(lx) = \frac{1}{x^n}\left\{C_0 F^{(n)}(lx) - C_1 F^{(n-1)}(lx) + C_2 F^{(n-2)}(lx) - \cdots\right\},$$

worin C_0, C_1, C_2, etc. gewisse, vorläufig noch unbekannte Coefficienten bedeuten, die übrigens unabhängig von x sind. Zu ihrer Bestimmung dient die specielle Annahme $F(y) = e^{-\lambda y}$, bei welcher alle angedeuteten Differentiationen ausführbar werden, nämlich

$$D^n F(lx) = D^n x^{-\lambda} = (-1)^n \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n-1)x^{-\lambda-n},$$
$$F^{(k)}(lx) = (-1)^k \lambda^k x^{-\lambda}.$$

Die übrig bleibende Gleichung

$$20)\qquad \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)\ldots\ldots(\lambda+n-1)$$
$$= C_0\lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + C_2\lambda^{n-2} + \cdots + C_{n-1}\lambda$$

giebt zu erkennen, dass man die Coefficienten C_0, C_1, etc. durch Ausführung der angedeuteten Multiplication in combinatorischer Form erhalten kann; es findet sich

$$C_0 = 1,\quad C_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1),$$
$$\begin{aligned} C_2 = 1\,.\,2 + 1\,.\,3 + 1\,.\,4 + \cdots &+ 1\,.\,(n-1) \\ + 2\,.\,3 + 2\,.\,4 + \cdots &+ 2\,.\,(n-1) \\ + 3\,.\,4 + \cdots &+ 3\,.\,(n-1) \\ \cdots\cdots\cdots & \\ &+ (n-2)(n-1), \end{aligned}$$

u. s. w.

überhaupt ist C_1 die Summe der Zahlen $1, 2, 3, \ldots (n-1)$, C_2 die Summe der in ihnen liegenden Combinationen zu je zweien (ohne Wiederholungen) wenn jede solche Ambe als Product angesehen wird, C_3 ist die auf gleiche Weise gebildete Summe der Ternen u. s. w. Nennt man, wie üblich, den Ausdruck

$$\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots\ldots(\lambda+n-1)$$

eine Facultät n-ten Grades, so sind C_1, C_2, etc. die sogenannten Facultätencoefficienten, welche zum Exponenten n gehören. Wo die Angabe des Grades nöthig ist, pflegt man

$$\overset{n}{C}_1,\quad \overset{n}{C}_2,\quad \overset{n}{C}_3,\ \dots\ \overset{n}{C}_{n-1}$$

statt $C_1, C_2, \dots C_{n-1}$ zu schreiben.

Als Beispiel zu Formel 19) diene die Annahme $F(y) = y^p$, wo p eine ganze positive Zahl bedeuten soll. Bei umgekehrter Anordnung der Summanden ergiebt sich

21) $$D^n(lx)^p$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\left\{\overset{n}{C}_{n-1}p(lx)^{p-1} - \overset{n}{C}_{n-2}p(p-1)(lx)^{p-2}\right.$$
$$\left. + \overset{n}{C}_{n-3}p(p-1)(p-2)(lx)^{p-3} - \dots\right\}.$$

Ist $n < p$, so kommen in der Parenthese n Glieder vor; im Falle $n \geqq p$ verschwinden diejenigen Glieder, bei denen die Anzahl der gemachten Differentiationen mehr als p beträgt, so dass übrig bleibt

$$D^n(lx)^p$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}}{x^n}\left\{\overset{n}{C}_{n-1}p(lx)^{p-1} - \overset{n}{C}_{n-2}p(p-1)(lx)^{p-2} + \cdots\right.$$
$$\left. + (-1)^{p+1}\overset{n}{C}_{n-p}p(p-1)(p-2)\dots 2.1\right\}.$$

Daraus folgt z. B. für $x = 1$, wenn $(lx)^p$ kurz mit $f(x)$ bezeichnet wird

22) $$f^{(n)}(1) = (-1)^{n+p}\overset{n}{C}_{n-p}1.2.3\dots p.$$

Eine Anwendung dieser Formel ist folgende. Erhebt man beide Seiten der Gleichung

$$l(1+z) = \tfrac{1}{1}z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \cdots,$$
$$-1 < z < +1,$$

auf die p-te Potenz, so erhält man ein Resultat von der Form

$$[l(1+z)]^p$$
$$= A_p z^p + A_{p+1}z^{p+1} + A_{p+2}z^{p+2} + \cdots\cdots$$

und zufolge des Taylor'schen Satzes müssen hier, wenn $f(x) = (lx)^p$, $x = 1$, $h = z$ gesetzt wird, folgende Gleichungen stattfinden

$$A_p = \frac{f^{(p)}(1)}{1.2\dots p},\quad A_{p+1} = \frac{f^{(p+1)}(1)}{1.2\dots(p+1)},\ \text{u. s. w.}$$

Mittelst der Formel 22) erhält man jetzt

23) $$[l(1+z)]^p = \overset{p}{C}_0 z^p - \frac{\overset{p+1}{C}_1}{p+1}z^{p+1} + \frac{\overset{p+2}{C}_2}{(p+1)(p+2)}z^{p+2} - \dots$$
$$-1 < z < +1.$$

Hieran werden wir später die independente Bestimmung der Facultätencoefficienten knüpfen.

Differentiation der Potenzen von Functionen.

Die bisherigen Fälle hatten das Gemeinsame, dass die Function $y = \varphi(x)$ specialisirt wurde und $F(y)$ willkürlich blieb; das Gegenstück hierzu bilden die Fälle, wo $F(y)$ specialisirt und y allgemein gelassen wird. Als ersten derartigen Fall betrachten wir

$$F(y) = y^p$$

und setzen dabei p als ganz beliebige Zahl voraus. Die Formeln 7) und 8) geben dann

$$D_x^n y^p = (p)_1 U_1 y^{p-1} + (p)_2 U_2 y^{p-2} + \cdots + (p)_n U_n y^{p-n},$$

$$U_k = (k)_0 V_k - (k)_1 V_{k-1} y + (k)_2 V_{k-2} y^2 + \cdots \pm (k)_{k-1} V_1 y^{k-1},$$

wobei die Abkürzungen

$$V_k = D_x^n y^k, \quad V_{k-1} = D_x^n y^{k-1} \text{ u. s. w.}$$

benutzt worden sind. Substituirt man die aus der zweiten Gleichung genommenen Werthe von $U_1, U_2, \ldots U_n$ in die erste Gleichung, so kann man letztere leicht nach Potenzen von y ordnen und das Resultat auf folgende Form bringen

$$24) \quad D_x^n y^p = A_1 V_1 y^{p-1} + A_2 V_2 y^{p-2} + \cdots + A_n V_n y^{p-n},$$

worin irgend einer der Coefficienten $A_1, A_2, \ldots A_n$ ist

$$A_k = (k)_0 (p)_k - (k+1)_1 (p)_{k+1} + (k+2)_2 (p)_{k+2} - \cdots \pm (n)_{n-k} (p)_n.$$

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, benutzen wir die Formeln

$$(k)_0 = 1, \quad (k+1)_1 = \frac{k+1}{1}, \quad (k+2)_2 = \frac{(k+2)(k+1)}{1.2}, \ldots\ldots$$

$$(p)_{k+1} = \frac{p-k}{k+1}(p)_k, \quad (p)_{k+2} = \frac{(p-k)(p-k-1)}{(k+1)(k+2)}(p)_k, \ldots.$$

und erhalten

$$A_k = (p)_k \{1 - (p-k)_1 + (p-k)_2 - \cdots \pm (p-k)_{n-k}\}.$$

Hier lässt sich die in der Parenthese stehende Reihe summiren, wenn man die bekannte Formel *)

$$(\alpha)_m(\beta)_0 + (\alpha)_{m-1}(\beta)_1 + (\alpha)_{m-2}(\beta)_2 + \cdots + (\alpha)_0(\beta)_m = (\alpha+\beta)_m$$

für $\alpha = -1$, $\beta = p-k$, $m = n-k$ benutzt; es folgt

$$A_k = (-1)^{n-k}(p)_k(p-k-1)_{n-k} = (p)_k(n-p)_{n-k}$$

---

*) Man erhält sie u. A. dadurch, dass man einerseits die Reihen für $(1+z)^\alpha$ und $(1+z)^\beta$ mit einander multiplicirt, andererseits die gleichgeltende Reihe für $(1+z)^{\alpha+\beta}$ direct entwickelt und schliesslich die Coefficienten von z^m vergleicht.

oder auch, wenn $(n-p)_{n-k}$ durch $(n-p)_n$ ausgedrückt wird,

$$A_k = p\,.\,(n-p)_n \frac{(-1)^k (n)_k}{p-k}.$$

Zufolge der Werthe von A_1, A_2, etc. und V_1, V_2, etc. hat man endlich nach Nro. 24)

$$25)\quad D_x^n y^p = p(n-p)_n \left\{-\frac{(n)_1}{p-1} y^{p-1} D_x^n y + \frac{(n)_2}{p-2} y^{p-2} D_x^n y^2 - \cdots\right\}$$

und es liegt hierin der bemerkenswerthe Satz, dass die Differentiation jeder beliebigen Potenz einer Function auf die Differentiation der ganzen positiven Potenzen derselben Function zurückkommt.

Als Anwendung der Formel 25) wollen wir zeigen, wie sich die in Nro. 23) gegebene Reihenentwickelung, welche dort nur für ganze positive p bewiesen wurde, auf beliebige p ausdehnen lässt. Setzt man nämlich

$$y = \frac{l(1+x)}{x}$$

und bezeichnet mit k eine ganze positive Zahl, so ist nach Nro. 23)

$$y^k = \overset{k}{C}_0 - \frac{\overset{k+1}{C}_1}{k+1} x + \cdots + (-1)^n \frac{\overset{k+n}{C}_n}{(k+1)\ldots(k+n)} x^n + \cdots$$

mithin, wenn n-mal differenzirt und dann $x=0$ gesetzt wird,

$$\left[D_x^n y^k\right]_{(0)} = (-1)^n \frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}{(k+1)(k+2)\ldots(k+n)} \overset{n+k}{C}_n.$$

Aus der Formel 25) folgt nun für $x=0$, also $y=1$, und unter Benutzung der vorstehenden Formel

$$\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}\left[D_x^n y^p\right]_{(0)}$$

$$= (-1)^n p(n-p)_n \left\{-\frac{(n)_1}{p-1}\cdot\frac{\overset{n+1}{C}_n}{2\ldots(n+1)} + \frac{(n)_2}{p-2}\cdot\frac{\overset{n+2}{C}_n}{3\ldots(n+2)} - \cdots\right\}$$

$$= \frac{(-1)^n p(n-p)_n}{1\,.\,2\ldots n}\left\{-\frac{(n)_1}{(n+1)_1}\frac{\overset{n+1}{C}_n}{p-1} + \frac{(n)_2}{(n+2)_2}\frac{\overset{n+2}{C}_n}{p-2} - \cdots\right\}.$$

Damit ist der Coefficient bestimmt, welchen x^n erhält, sobald y^p nach Potenzen von x entwickelt wird. Unter Benutzung des abkürzenden Zeichens

$$26)\quad P_n = \frac{p\,.\,(n-p)_n}{1\,.\,2\ldots n}\left\{-\frac{(n)_1}{(n+1)_1}\frac{\overset{n+1}{C}_n}{p-1} + \frac{(n)_2}{(n+2)_2}\frac{\overset{n+2}{C}_n}{p-2} - \cdots\right\}$$

hat man also folgende Reihenentwickelung

$$27)\qquad \left[\frac{l(1+x)}{x}\right]^p = 1 - P_1 x + P_2 x^2 - P_3 x^3 + \cdots\cdots,$$

welche gleichfalls an die Bedingung $-1 < x < +1$ gebunden ist.

Differentiation der Logarithmen von Functionen.

Ertheilt man der Gleichung 25) die Form

$$D_x^n \frac{y^p - 1}{p} = (n-p)_n \left\{ -\frac{(n)_1}{p-1} y^{p-1} D_x^n y + \frac{(n)_2}{p-2} y^{p-2} D_x^n y^2 - \cdots \right\}$$

und geht dann zur Grenze für verschwindende p über, so erhält man

$$28)\qquad D_x^n l y = \frac{(n)_1}{1 y} D_x^n y - \frac{(n)_2}{2 y^2} D_x^n y^2 + \frac{(n)_3}{3 y^3} D_x^n y^3 - \cdots.$$

Die Differentiation des Logarithmus einer Function reducirt sich demnach auf die Differentiation der successiven ganzen positiven Potenzen derselben Function.

Mittelst der Formel 28) sind z. B. die höheren Differentialquotienten von $l\cos x$ und $l\sin x$ leicht zu entwickeln; man würde nämlich die Potenzen von $\cos x$ und $\sin x$ nach den auf Seite 261 des ersten Theils angegebenen Formeln in Cosinus oder Sinus der Vielfachen von x umsetzen und dann die auf der rechten Seite angedeuteten Differentiationen ausführen *).

II. Die Vertauschung der unabhängigen Variabelen.

Aus den im Anfange des ersten Abschnittes aufgestellten Formeln sind $F'(y)$, $F''(y)$, $F'''(y)$ etc. der Reihe nach leicht herzuleiten, nämlich

$$F'(y) = \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

$$F''(y) = \frac{\varphi'(x) f''(x) - \varphi''(x) f'(x)}{\varphi'(x)^3},$$

$$F'''(y) = \frac{\varphi'(x)^2 f'''(x) - 3\varphi'(x)\varphi''(x) f''(x) + [3\varphi''(x)^2 - \varphi'(x)\varphi'''(x)] f'(x)}{\varphi'(x)^5},$$

u. s. w.

---

*) Die mitgetheilten Anwendungen der allgemeinen Formeln 5) und 6) sind meistens von R. Hoppe in dessen schon genannter Schrift entwickelt worden, zum Theil auf weniger einfache Weise.

wie man auch durch successive Differentiationen und Divisionen mit $\varphi'(x)$ finden kann. Um allgemein $F^{(n)}(y)$ zu entwickeln, nehmen wir die Gleichung 7) für die Werthe $n = 1, 2, 3, \ldots n$ in Anspruch und eliminiren aus den erhaltenen n Gleichungen die $n-1$ Functionen $F'(y)$, $F''(y)$, ... $F^{(n-1)}(y)$. Dies hat auf dem folgenden Wege keine Schwierigkeit.

Vermöge der Bedeutung von U_k sind die erwähnten n Gleichungen:

$$f'(x) = \frac{D\Theta}{1} F'(y),$$

$$f''(x) = \frac{D^2\Theta}{1} F'(y) + \frac{D^2\Theta^2}{1.2} F''(y),$$

$$f'''(x) = \frac{D^3\Theta}{1} F'(y) + \frac{D^3\Theta^2}{1.2} F''(y) + \frac{D^3\Theta^3}{1.2.3} F'''(y),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{D^n\Theta}{1} F'(y) + \frac{D^n\Theta^2}{1.2} F''(y) + \cdots + \frac{D^n\Theta^n}{1.2\ldots n} F^{(n)}(y),$$

und darin beziehen sich die mit D angedeuteten Differentiationen auf die Variabele ϱ, die nach Ausführung jener Differentiationen $= 0$ zu nehmen ist. Wir setzen nun abkürzend

29) $$\Omega = \frac{\varrho}{\varphi(x+\varrho) - \varphi(x)} = \frac{\varrho}{\Theta},$$

multipliciren die obigen Gleichungen der Reihe nach mit den Factoren

$$(n-1)_0[D^{n-1}\Omega^n]_{(0)},\ (n-1)_1[D^{n-2}\Omega^n]_{(0)},\ (n-1)_2[D^{n-3}\Omega^n]_{(0)}, \ldots$$
$$(n-1)_{n-1}[\Omega^n]_{(0)},$$

worin sich die angedeuteten Differentiationen gleichfalls auf ϱ beziehen, und addiren die Producte. Die entstehende Summe lässt sich in folgender Form darstellen

30) $$(n-1)_0[D^{n-1}\Omega^n]_{(0)} f'(x) + (n-1)_1[D^{n-2}\Omega^n]_{(0)} f''(x) + \cdots$$
$$\cdots + (n-1)_{n-1}[\Omega^n]_{(0)} f^{(n)}(x)$$

$$= \frac{a_n}{1.2\ldots n} F^{(n)}(y) + \frac{a_{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{(n-1)}(y) + \cdots + \frac{a_1}{1} F'(y),$$

und zwar ist hier

$$a_k = (n-1)_{n-1}[\Omega^n][D^n\Theta^k] + (n-1)_{n-2}[D\Omega^n][D^{n-1}\Theta^k]$$
$$+ (n-1)_{n-3}[D^2\Omega^n][D^{n-2}\Theta^k] + \cdots\cdots$$

oder

$$a_k = (n-1)_0[\Omega^n][D^n\Theta^k] + (n-1)_1[D\Omega^n][D^{n-1}\Theta^k]$$
$$+ (n-1)_2[D^2\Omega^n][D^{n-2}\Theta^k] + \cdots,$$

wobei am Ende $\varrho = 0$ zu nehmen ist. Man bemerkt nun augenblicklich, dass sich der für a_k gefundene Ausdruck sehr zusammenziehen lässt, nämlich in

$$a_k = [D^{n-1}(\Omega^n \,.\, D\Theta^k)]_{(0)} = k[D^{n-1}(\Omega^n \Theta^{k-1}\Theta')]_{(0)},$$

woraus wegen $\Omega\Theta = \varrho$ wird

$$a_k = k\,[D^{n-1}(\varrho^{k-1}\Omega^{n-k+1}\Theta')]_{(0)}.$$

Wendet man die Regel zur Differentiation der Producte an, indem man ϱ^{k-1} als den einen, $\Omega^{n-k+1}\Theta'$ als den anderen Factor betrachtet, so erhält man weiter

$$a_k = k \,.\, (n-1)_{k-1} \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (k-1)\,[D^{n-k}(\Omega^{n-k+1}\Theta')]_{(0)}$$

oder für $k = n - h$

31) $$\frac{a_{n-h}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-h)} = (n-1)_{n-h-1}\,[D^h(\Omega^{h+1}\Theta']_{(0)}$$

Nun ist zufolge der Bedeutungen von Θ und Ω

$$\Theta = \frac{\varrho}{\Omega},\quad \Theta' = \frac{1}{\Omega} - \frac{\varrho\,\Omega'}{\Omega^2},$$

$$\begin{aligned} D^h(\Omega^{h+1}\Theta') &= D^h\Omega^h - D^h(\varrho\,\Omega^{h-1}\Omega') \\ &= D^h\Omega^h - \varrho\,D^h(\Omega^{h-1}\Omega') - h\,D^{h-1}(\Omega^{h-1}\Omega'), \end{aligned}$$

oder, weil sich rechter Hand der erste Summand gegen den letzten hebt,

$$D^h(\Omega^{h+1}\Theta') = -\,\varrho\,D^h(\Omega^{h-1}\Omega') = -\,\frac{\varrho}{h}\,D^{h+1}\Omega^h,$$

mithin durch Substitution in Nro. 31)

$$\frac{a_{n-h}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-h)} = -\,(n-1)_{n-h-1}\left[\frac{\varrho}{h}\,D_\varrho^{h+1}\,\Omega^h\right]_{(0)}.$$

Da im Allgemeinen $\left[D_\varrho^{h+1}\Omega^h\right]_{(0)}$ eine bestimmte endliche Function von x bildet, so verschwindet die rechte Seite der vorstehenden Gleichung in Folge des Factors $\varrho = 0$, vorausgesetzt, dass h nicht $= 0$ ist; man hat daher

$$a_{n-h} = 0,\quad \text{wenn } h > 0.$$

Im Falle $h = 0$ dagegen erhält man unmittelbar aus Nro. 31)

$$\frac{a_n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n} = [\Omega\,\Theta']_{(0)} = \left[\frac{\varrho}{\varphi(x+\varrho) - \varphi(x)}\,\varphi'(x+\varrho)\right]_{(0)} = 1.$$

Die rechte Seite der Gleichung 30) reducirt sich jetzt auf $F^{(n)}(y)$, und so ist nun

32) $$\begin{aligned} F^{(n)}(y) = (n-1)_0\left[D_\varrho^{n-1}\Omega^n\right]_{(0)} f'(x) + (n-1)_1\left[D_\varrho^{n-2}\Omega^n\right]_{(0)} f''(x) \\ + (n-1)_2\left[D_\varrho^{n-3}\Omega^n\right]_{(0)} f'''(x) + \cdots \end{aligned}$$

Man kann diese Formel, welche die vollständige Lösung des gestellten Problems enthält, auf doppelte Weise umgestalten, je nachdem eine Zusammenziehung oder eine weitere Entwickelung derselben wünschenswerth ist.

Für den ersten Zweck dient die Bemerkung, dass

$$f^{(k)}(x) = \left[D_\varrho^k f(x+\varrho)\right]_{(0)} = \left[D^{k-1} f'(x+\varrho)\right]_{(0)}$$

gesetzt werden darf; es folgt dann aus Nro. 32)

$$F^{(n)}(y) = \left[D_\varrho^{n-1}\{\Omega^n f'(x+\varrho)\}\right]_{(0)}$$

und ohne Abkürzungen, wenn $F[\varphi(x)] = f(x)$ ist,

33) $$F^{(n)}[\varphi(x)] = \left[D_\varrho^{n-1}\left\{\left(\frac{\varrho}{\varphi(x+\varrho)-\varphi(x)}\right)^n f'(x+\varrho)\right\}\right]_{(0)},$$

oder, wenn $x + \varrho = \xi$ gesetzt wird,

34) $$F^{(n)}[\varphi(x)] = \left[D_\xi^{n-1}\left\{\left(\frac{\xi - x}{\varphi(\xi)-\varphi(x)}\right)^n f'(\xi)\right\}\right]_{(\xi = x)}.$$

Um ferner die Gleichung 32) weiter zu entwickeln, schreiben wir

35) $$F^{(n)}(y) = P_0 f^{(n)}(x) + (n-1)_1 P_1 f^{(n-1)}(x) + (n-1)_2 P_2 f^{(n-2)}(x) + \cdots\cdots$$

und bemerken, dass der Ausdruck

$$P_k = \left[D_\varrho^k \Omega^n\right]_{(0)} = \left[D_\varrho^k \left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)^{-n}\right]_{(0)}$$

mittelst der Formel 25) umgestaltet werden kann, wenn die in letzterer vorkommenden Grössen x, y, n, p der Reihe nach durch ϱ, $\frac{\Theta}{\varrho}$, k, $-n$ ersetzt werden. Hiernach erhalten wir zunächst

$$D_\varrho^k\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)^{-n} = -n(k+n)_k\left\{\frac{(k)_1}{n+1}\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)^{-n-1} D_\varrho^k\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right) - \frac{(k)_2}{n+2}\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)^{-n-2} D_\varrho^k\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)^2 + \cdots\right\}$$

und für $\varrho = 0$

$$P_k = -n(n+k)_k\left\{\frac{(k)_1}{(n+1)y'^{n+1}}\left[D_\varrho^k\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)\right]_{(0)} - \frac{(k)_2}{(n+2)y'^{n+2}}\left[D_\varrho^k\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)^2\right]_{(0)} + \cdots\cdots\right\}.$$

Die Differentialquotienten rechter Hand gestatten noch eine Transformation; wenn nämlich die identische Gleichung

$$\varrho^h\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)^h = \Theta^h,$$

worin h eine ganze positive Zahl bedeuten möge, $(k+h)$-mal differenzirt und nachher $\varrho = 0$ genommen wird, so findet sich

$$(k+h)_h . 1 . 2 . 3 \ldots h\left[D_\varrho^k\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)^h\right]_{(0)} = \left[D_\varrho^{k+h}\Theta^h\right]_{(0)}$$

mithin

$$\left[D_\varrho^k\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)^h\right]_{(0)} = \frac{\left[D_\varrho^{k+h}\Theta^h\right]_{(0)}}{(k+1)(k+2)\ldots(k+h)},$$

Zur Abkürzung sei endlich

36) $$Q_h = \frac{\left[D_\varrho^{k+h} \Theta^h\right]_{(0)}}{(k+1)(k+2)\ldots(k+h)};$$

die für P_k angegebene Formel lässt sich dann in folgender Weise darstellen

37)*) $$P_k = -n\frac{(n+k)_k}{y'^n}\left\{\frac{(k)_1}{n+1}\,\frac{Q_1}{y'} - \frac{(k)_2}{n+2}\,\frac{Q_2}{y'^2} + \cdots\right\}.$$

Wie man aus den Formeln 2) und 5) verglichen mit Nro. 35), 36) und 37) ersieht, haben die beiden in der Einleitung erwähnten Fundamentalprobleme mit einander die Eigenthümlichkeit gemein, dass ihre Lösungen zuletzt auf die mehrfachen Differentiationen der Potenzen von Θ zurückkommen.

Ein bemerkenswerthes Beispiel zu Formel 34) bietet die Annahme $\varphi(x) = \frac{1}{x}$; man erhält

$$F^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = \left[D_\xi^{n-1}\{(-x\xi)^n f'(\xi)\}\right]_{(\xi=x)}$$
$$= (-1)^n x^n \left[D_\xi^{n-1}\{\xi^n f'(\xi)\}\right]_{(\xi=x)},$$

d. i.

$$F^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n x^n \,.\, D_x^{n-1}\{x^n f'(x)\},$$

oder auch, wie sich u. A. bei Ausführung der auf der rechten Seite angedeuteten Differentiationen zeigt,

$$F^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n x^{n+1} D_x^n\{x^{n-1} f(x)\}.$$

Bezeichnet man $F\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ kurz mit z, so kann man dieses Resultat in folgender Form darstellen

38)**) $$\frac{d^n z}{\left(d\frac{1}{x}\right)^n} = (-1)^n x^{n+1} \frac{d^n(x^{n-1}z)}{dx^n}.$$

*) Das Problem der Vertauschung der unabhängigen Variabelen ist in allgemeiner Auffassung zuerst vom Verfasser durch die Formeln 32) bis 37) gelöst worden; siehe die Sitzungsberichte der Königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Jahrg. 1857; oder Zeitschrift für Mathematik u. Physik, Thl. III, S. 65. Wie man mit Hülfe der Determinantentheorie zu denselben Formeln gelangen kann, zeigte E. Hess in der Zeitschr. f. Mathem. u. Phys., Thl. XVII, S. 1.

**) Auf anderem Wege ist S. Spitzer zu derselben Formel gelangt und hat sie zur Reduction gewisser Differentialgleichungen benutzt; s. dessen Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen (Wien 1860), pag. 65, Nro. 131).

Die Differentiation unentwickelter Functionen.

Wenn zwischen den Variabelen x und y die Gleichung

39) $$x = \varphi(y)$$

stattfindet, so folgt daraus ein Resultat von der Form

$$y = \psi(x),$$

und irgend eine Function von y, etwa $f(y)$, ist dann auch eine Function von x, was durch die Gleichung

$$f(y) = F(x)$$

ausgedrückt werden möge. Nach dem Vorigen hat es nun keine Schwierigkeit, die nach x genommenen Differentialquotienten von $f(y) = F(x)$ aus der ursprünglich gegebenen Gleichung herzuleiten; es ist nämlich

$$f(y) = F(x) = F[\varphi(y)],$$

$$\frac{d^n f(y)}{dx^n} = \frac{d^n F(x)}{dx^n} = \frac{d^n F[\varphi(y)]}{[d\varphi(y)]^n} = F^{(n)}[\varphi(y)].$$

Man erhält folglich den gesuchten Differentialquotienten, wenn man in Formel 33) y an die Stelle von x treten lässt, also

40) $$\frac{d^n f(y)}{dx^n} = D_{\varrho}^{n-1}\left\{\left(\frac{\varrho}{\varphi(y+\varrho)-\varphi(y)}\right)^n f'(y+\varrho)\right\}_{(0)}.$$

Am einfachsten gestaltet sich die Sache in dem häufig vorkommenden Falle $f(y) = y$, d. h. da, wo es sich um die Differentialquotienten der inversen Function $y = \psi(x)$ handelt; es ist dann

41) $$\frac{d^n y}{dx^n} = D_{\varrho}^{n-1}\left\{\left(\frac{\varrho}{\varphi(y+\varrho)-\varphi(y)}\right)^n\right\}_{(0)}.$$

Selbstverständlich kann man die auf den rechten Seiten von Nro. 40) und 41) stehenden Ausdrücke ebenso wie vorhin weiter entwickeln, wenn man y statt des früheren x schreibt.

Transformation der Potenzenreihe von Mac Laurin.

Wir gehen von der bekannten Gleichung aus

$$F(y) = A_0 + \frac{A_1}{1}y + \frac{A_2}{1.2}y^2 + \frac{A_3}{1.2.3}y^3 + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots + \frac{A_n}{1.2.3\ldots n}y^n + R_{n+1},$$

worin

$$A_0 = F(0), \quad A_1 = F'(0), \quad A_2 = F''(0)\ldots\ldots$$

ist, und das Ergänzungsglied R_{n+1} unter der, auf Seite 438 des ersten Theiles angegebenen Form

$$R_{n+1} = \frac{1}{1.2\ldots n}\int_0^y (y-u)^n F^{(n+1)}(u)\,du$$

dargestellt werden kann. Mittelst der Substitutionen

$$y = \varphi(x), \quad F(y) = F[\varphi(x)] = f(x)$$

erhalten wir zunächst

$$f(x) = A_0 + \frac{A_1}{1}\varphi(x) + \frac{A_2}{1.2}\varphi(x)^2 + \frac{A_3}{1.2.3}\varphi(x)^3 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{A_n}{1.2.3\ldots n}\varphi(x)^n + R_{n+1},$$

und, wie unmittelbar erhellt, liegt hierin die Entwickelung einer Function $f(x)$ nach Potenzen irgend einer anderen Function $\varphi(x)$. Zur vollständigen Lösung dieser Aufgabe wird es aber nothwendig, sowohl die Coefficienten A_0, A_1, A_2 etc. als den Rest R_{n+1} durch $f(x)$ und $\varphi(x)$ allein auszudrücken; dies kann auf folgende Weise geschehen.

Bezeichnet a einen Werth von der Beschaffenheit, dass $\varphi(a) = 0$ ist, d. h. bezeichnet a irgend eine reelle oder complexe Wurzel der Gleichung $\varphi(x) = 0$, so hat man für $x = a$

$$f(a) = F[\varphi(a)] = F(0) = A_0$$

oder umgekehrt $A_0 = f(a)$. Aus der allgemeinen Formel

$$F^{(k)}[\varphi(x)] = D_\xi^{k-1}\left\{\left(\frac{\xi - x}{\varphi(\xi) - \varphi(x)}\right)^k f'(\xi)\right\}_{(\xi = x)}$$

ergiebt sich ferner für $x = a$

$$F^{(k)}(0) = D_\xi^{k-1}\left\{\left(\frac{\xi - a}{\varphi(\xi)}\right)^k f'(\xi)\right\}_{(\xi = a,)}$$

oder

$$A_k = D_x^{k-1}\left\{\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^k f'(x)\right\}_{(x=a)}.$$

Was endlich den Rest R_{n+1} anbetrifft, so ist zunächst

$$R_{n+1} = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,n}\int_0^{\varphi(x)} [\varphi(x) - u]^n F^{(n+1)}(u)\,du$$

und daraus wird durch Substitution von $u = \varphi(t)$, wo t eine neue Variabele bezeichnet,

$$R_{n+1} = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,n}\int_a^x [\varphi(x) - \varphi(t)]^n F^{(n+1)}[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

doch ist zu bemerken, dass den früheren Grenzen $u = 0$, und $u = \varphi(x)$ nur in dem Falle die Grenzen $t = a$ und $t = x$ entsprechen, wenn $\varphi(t)$ von $t = a$ bis $t = x$ entweder nur wächst oder nur abnimmt, weil diese Eigenschaft bei der ursprünglichen Variabelen u von selber stattfindet. Setzen wir nun voraus, dass a reell sei und dass $\varphi(t)$ die eben erwähnte Eigenschaft besitze, so können wir auch $F^{(n+1)}[\varphi(t)]$ leicht durch f und φ ausdrücken; das Gesammtresultat besteht dann in folgenden Formeln:

$$42)\qquad f(x) = A_0 + \frac{A_1}{1}\varphi(x) + \frac{A_2}{1\,.\,2}\varphi(x)^2 + \cdots\cdots + \frac{A_n}{1\,.\,2\,.\,3\,...\,n}\varphi(x)^n + R_{n+1},$$

$$43)\qquad A_0 = f(a),\quad A_k = D^{k-1}\left\{\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^k f'(x)\right\}_{(x=a)}$$

$$44)\qquad R_{n+1} = \frac{1}{1\ldots n}\int\limits_a^x [\varphi(x)-\varphi(t)]^n D_\varrho^n\left\{\left(\frac{\varrho}{\varphi(t+\varrho)-\varphi(t)}\right)^{n+1} f'(t+\varrho)\right\}_{(0)} \varphi'(t)\,dt.$$

Wollte man die unter Nro. 42) angegebene Reihe ins Unendliche fortsetzen, so müsste man entweder die Bedingungen ermitteln, bei welchen $\operatorname{Lim} R_{n+1} = 0$ wird (für $n = \infty$), oder man hätte auf anderem Wege die Grenzen für x zu bestimmen, innerhalb deren jene unendliche Reihe convergirt und $f(x)$ zur Summe hat. Es wird sich später bei einer anderen Gelegenheit zeigen, dass diese Grenzen für die Gültigkeit der Entwickelung unabhängig von der Restuntersuchung, also gewissermaassen a priori, gefunden werden können, und es ist dies der Grund, warum wir den Gegenstand vorläufig nicht weiter verfolgen. Nur wollen wir noch zeigen, wie sich die Formel 42) zu einem anderen speciellen Zwecke benutzen lässt.

Das Bildungsgesetz der Facultätencoefficienten.

Auf Seite 12 wurden die Facultätencoefficienten durch combinatorische Operationen bestimmt, deren Ausführung zwar jederzeit möglich, aber bei einigermaassen grossen Exponenten mit ausserordentlichen Weitläufigkeiten verbunden ist. Es entsteht daher die Frage, ob die angegebenen Ausdrücke eine Vereinfachung zulassen. Man hat nun für den ersten Coefficienten

$$\overset{n}{C}_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2};$$

für den zweiten

$$\overset{n}{C}_2 = 1\,.\,[2+3+4+\cdots+(n-1)]$$
$$+\,2\,.\,[3+4+\cdots+(n-1)]$$
$$+\,3\,.\,[4+\cdots+(n-1)]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\,(n-2)(n-1)$$

und durch Summirung der einzelnen Horizontalreihen

$$\overset{n}{C}_2 = 1\cdot\frac{(n+1)(n-2)}{2}+2\cdot\frac{(n+2)(n-3)}{2}+3\cdot\frac{(n+3)(n-4)}{2}+\cdots$$
$$\cdots+(n-2)\cdot\frac{(2n-2).1}{2}.$$

Irgend eines dieser Reihenglieder ist

$$q\,\frac{(n+q)(n-q-1)}{2} = \tfrac{1}{2}\left\{n(n-1)\,q - q^2 - q^3\right\},$$

worin q die Werthe 1, 2, 3, ... $(n-2)$ erhält; man hat daher

$$\overset{n}{C}_2 = \tfrac{1}{2}n(n-1)[1+2+3+\cdots+(n-2)]$$
$$-\tfrac{1}{2}[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-2)^2]$$
$$-\tfrac{1}{2}[1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-2)^3],$$

d. i. wegen der bekannten Summen dieser Reihen und nach gehöriger Zusammenziehung

$$\overset{n}{C}_2 = \frac{n(n-1)(n-2)(3n-1)}{24}.$$

Schon beim dritten Coefficienten wird dieses Verfahren sehr umständlich, und wir gehen deshalb einen anderen Weg.

In der unter der Bedingung $y^2 < 1$ geltenden Formel

$$[l(1+y)]^p = \overset{p}{C}_0\,y^p - \overset{p+1}{C}_1\,\frac{y^{p+1}}{p+1} + \overset{p+2}{C}_2\,\frac{y^{p+2}}{(p+1)(p+2)} - \cdots$$

setzen wir

$$l(1+y) = x \quad \text{also} \quad y = e^x - 1$$

und erhalten dann die neue, für $l\,2 > x > -\infty$ geltende Entwickelung

$$x^p = \overset{p}{C}_0\,(e^x-1)^p - \overset{p+1}{C}_1\,\frac{(e^x-1)^{p+1}}{p+1} + \overset{p+2}{C}_2\,\frac{(e^x-1)^{p+2}}{(p+1)(p+2)} - \cdots,$$

worin wir p als ganze positive Zahl voraussetzen wollen. Die nämliche Entwickelung muss sich auch aus Formel 42) ergeben, wenn

$$f(x) = x^p, \quad \varphi(x) = e^x - 1$$

genommen wird, so dass

$$x^p = A_0 + \frac{A_1}{1}(e^x - 1) + \frac{A_2}{1.2}(e^x-1)^2 + \cdots + \frac{A_{p-1}}{1.2\ldots(p-1)}(e^x-1)^{p-1}$$
$$+ \frac{A_p}{1.2\ldots p}(e^x-1)^p + \frac{A_{p+1}}{1.2\ldots(p+1)}(e^x-1)^{p+1} + \cdots\cdots$$

ist. Die Vergleichung beider Entwickelungen von x^p giebt erstens

$$A_0 = A_1 = A_2 \ldots\ldots = A_{p-1} = 0,$$

was auch sonst gleich erhellt, wenn man für e^x die gewöhnliche Reihe setzt und Alles nach Potenzen von x ordnet. Zweitens folgt für jedes ganze positive k inclusive $k = 0$

$$(-1)^k \frac{\overset{p+k}{C_k}}{(p+1)(p+2)\ldots(p+k)} = \frac{A_{p+k}}{1.2.3\ldots(p+k)}$$

oder

$$\overset{p+k}{C_k} = \frac{(-1)^k}{1.2.3\ldots p} A_{p+k}$$

d. i. nach Formel 43), wobei $a = 0$ zu nehmen ist,

$$\overset{p+k}{C_k} = \frac{(-1)^k}{1.2.3\ldots p} D^{p+k-1}\left\{\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^{p+k} p x^{p-1}\right\}_{(0)}.$$

Wendet man rechter Hand die Regel zur Differentiation der Producte an, so erhält man

$$\overset{p+k}{C_k} = (-1)^k (p+k-1)_{p-1} D^k \left\{\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^{p+k}\right\}_{(0)}$$

oder, wenn n statt $p+k$ und ϱ für x geschrieben wird,

$$45)\qquad \overset{n}{C_k} = (-1)^k (n-1)_k \left[D^k\left(\frac{\varrho}{e^\varrho - 1}\right)^n\right]_{(0)}.$$

Der noch übrige Differentialquotient gehört zu der früher betrachteten Form

$$P_k = \left[D_\varrho^k \Omega^n\right]_{(0)} = \left[D_\varrho^k\left(\frac{\varrho}{\varphi(x+\varrho) - \varphi(x)}\right)^n\right]_{(0)}$$

und kann daher nach Nro. 37) entwickelt werden, sobald man $y = \varphi(x) = e^x$ und dann $x = 0$ setzt, wodurch $y' = 1$ wird; es ist demgemäss

$$46)\qquad \left[D^k\left(\frac{\varrho}{e^\varrho - 1}\right)^n\right]_{(0)}$$
$$= -n.(n+k)_k \left\{\frac{(k)_1}{n+1} Q_1 - \frac{(k)_2}{n+2} Q_2 + \cdots + (-1)^{k+1} \frac{(k)_k}{n+k} Q_k\right\}$$

und darin

$$Q_h = \frac{[D^{k+h}(e^\varrho - 1)^h]_{(0)}}{(k+1)(k+2)\ldots\ldots(k+h)}.$$

Die noch angedeutete Differentiation ist leicht auszuführen, wenn man $(e^{\varrho}-1)^h$ mittelst des binomischen Satzes entwickelt; dies giebt

$$47)\quad Q_h = \frac{(h)_0 h^{h+k} - (h)_1 (h-1)^{h+k} + (h)_2 (h-2)^{h+k} - \cdots}{(k+1)(k+2)(k+3)\ldots(k+h)}$$

mithin nach Nro. 46) und 45)

$$48)\quad \overset{n}{C}_k = (-1)^{k+1} n(n-1)_k (n+k)_k \left\{\frac{(k)_1}{n+1} Q_1 - \frac{(k)_2}{n+2} Q_2 + \cdots \right.$$
$$\left. + (-1)^{k+1} \frac{(k)_k}{n+k} Q_k \right\}.$$

Hinsichtlich des mit Q_h bezeichneten Quotienten ist noch zu bemerken, dass derselbe gleichfalls mit der Theorie der Facultäten in gewissem Zusammenhange steht. Definirt man nämlich die Facultät als eine Function zweier Variabelen μ (der Basis) und p (des Exponenten), welcher die beiden Eigenschaften

$$\psi(\mu, 0) = 1, \quad \psi(\mu, p+1) = (\mu + p)\,\psi(\mu, p)$$

zukommen*), so hat man einerseits für $p = 0, 1, 2 \ldots (n-1)$

$$\begin{aligned}
\psi(\mu, 1) &= \mu\,\psi(\mu, 0) = \mu,\\
\psi(\mu, 2) &= (\mu+1)\,\psi(\mu, 1) = \mu(\mu+1),\\
\psi(\mu, 3) &= (\mu+2)\,\psi(\mu, 2) = \mu(\mu+1)(\mu+2),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\psi(\mu, n) &= \mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1),
\end{aligned}$$

andererseits für $p = -1, -2, \ldots -n$,

$$\psi(\mu, 0) = (\mu-1)\,\psi(\mu, -1) \text{ oder } \psi(\mu, -1) = \frac{1}{\mu-1},$$

$$\psi(\mu, -1) = (\mu-2)\,\psi(\mu, -2) \text{ oder } \psi(\mu, -2) = \frac{1}{(\mu-1)(\mu-2)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi(\mu, -n) = \frac{1}{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n)};$$

der Consequenz wegen muss also der letztere Ausdruck eine Facultät mit negativem Exponenten heissen. Unter der Bedingung $\mu > n$ kann dieselbe in eine nach absteigenden Potenzen von μ fortgehende Reihe entwickelt werden, deren Coefficienten wir nach Analogie mit $\overset{-n}{C}_0$, $\overset{-n}{C}_1$, $\overset{-n}{C}_2$ etc. bezeichnen, nämlich

$$\psi(\mu, -n) = \overset{-n}{C}_0 \mu^{-n} + \overset{-n}{C}_1 \mu^{-n-1} + \overset{-n}{C}_2 \mu^{-n-2} + \cdots$$

---

*) Vergleiche die Abhandlung von Crelle: Mémoire sur la théorie des puissances, des fonctions angulaires et des facultés analytiques, in Crelle's Journal, Bd. 7.

Für $\mu = \frac{1}{\lambda}$ wird noch unter der Bedingung $\lambda < \frac{1}{n}$

$$\frac{1}{(1-\lambda)(1-2\lambda)(1-3\lambda)\dots(1-n\lambda)}$$
$$= \overset{-n}{C_0} + \overset{-n}{C_1}\lambda + \overset{-n}{C_2}\lambda^2 + \overset{-n}{C_3}\lambda^3 + \cdots\cdots$$

und hier kommt es zunächst auf die Bestimmung der Coefficienten an. Man gelangt dazu am einfachsten, wenn man von der identischen Gleichung *)

$$\frac{(-1)^n 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \dots . n \,.\, \lambda^n}{(1-\lambda)(1-2\lambda)(1-3\lambda)\dots(1-n\lambda)}$$
$$= (n)_0 - (n)_1 \frac{1}{1-\lambda} + (n)_2 \frac{1}{1-2\lambda} - (n)_3 \frac{1}{1-3\lambda} + \cdots$$

ausgeht, rechter Hand alle Glieder nach steigenden Potenzen von λ entwickelt und das Resultat mit dem vorigen vergleicht; es ergiebt sich

$$49)\quad \overset{-n}{C_k} = \frac{(n)_0 n^{n+k} - (n)_1 (n-1)^{n+k} + (n)_2 (n-2)^{n+k} - \dots}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \dots . n}.$$

Die Formel 47) wird hiernach sehr einfach

---

*) Nach der Lehre von der Zerlegung echt gebrochener Functionen (Thl. I, Cap. IX.) darf man

$$\frac{1}{x(x-1)(x-2)\dots(x-n)}$$
$$= \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \cdots + \frac{a_n}{x-n}$$

setzen; multiplicirt man beiderseits mit $x(x-1)\dots(x-n)$ und nimmt dann der Reihe nach $x = 0, 1, 2, 3$, etc., so erhält man

$$1 = (-1)^n 1.2.3\dots n\, a_0 = (-1)^n \frac{1.2\dots n}{(n)_0} a_0,$$
$$1 = (-1)^{n-1} 1.1.2\dots(n-1)\, a_1 = -(-1)^n \frac{1.2\dots n}{(n)_1} a_1,$$
$$1 = (-1)^{n-2} 1.2.1\dots(n-2)\, a_2 = +(-1)^n \frac{1.2\dots n}{(n)_2} a_2,$$

u. s. w.

Hieraus bestimmen sich die Werthe von a_0, a_1, a_2, etc., und es ist dann

$$\frac{1}{x(x-1)(x-2)\dots(x-n)}$$
$$= \frac{(-1)^n}{1.2\dots n}\left\{\frac{(n)_0}{x} - \frac{(n)_1}{x-1} + \frac{(n)_2}{x-2} - \dots\right\},$$

woraus für $x = \frac{1}{\lambda}$ die obige Gleichung folgt.

$$Q_h = \frac{1}{(k+h)_h} \overset{-h}{C_k},$$

und demzufolge geht die Formel 48) über in

$$\overset{n}{C_k} = (-1)^{k+1}\, n(n-1)_k(n+k)_k \left\{ \frac{(k)_1}{(k+1)_1} \frac{\overset{-1}{C_k}}{n+1} - \frac{(k)_2}{(k+2)_2} \frac{\overset{-2}{C_k}}{n+2} + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + (-1)^{k+1} \frac{(k)_k}{(2k)_k} \frac{\overset{-k}{C_k}}{n+k} \right\},$$

wofür bei umgekehrter Anordnung der Summanden geschrieben werden kann

$$\overset{n}{C_k} = n(n-1)_k(n+k)_k \left\{ \frac{(k)_0}{(2k)_k} \frac{\overset{-k}{C_k}}{n+k} - \frac{(k)_1}{(2k-1)_{k-1}} \frac{\overset{-(k-1)}{C_k}}{n+k-1} \right.$$
$$\left. + \frac{(k)_2}{(2k-2)_{k-2}} \frac{\overset{-(k-2)}{C_k}}{n+k-2} - \cdots \right\}.$$

Um diesen Ausdruck möglichst zu vereinfachen, bemerken wir zuerst, dass

$$\frac{(k)_p}{(2k-p)_{k-p}} = \frac{k(k-1)\ldots(k-p+1)}{1.2.3\ldots p} \cdot \frac{(k-p)(k-p-1)\ldots 2.1}{(2k-p)(2k-p-1)\ldots(k+1)}$$
$$= \frac{1.2.3\ldots.k}{2k(2k-1)\ldots(k+1)} \cdot \frac{2k(2k-1)\ldots(2k-p+1)}{1.2\ldots p} = \frac{(2k)_p}{(2k)_k}$$

mithin

$$\overset{n}{C_k} = \frac{n(n-1)_k(n+k)_k}{(2k)_k} \left\{ \frac{(2k)_0}{n+k} \overset{-k}{C_k} - \frac{(2k)_1}{n+k-1} \overset{-(k-1)}{C_k} \right.$$
$$\left. + \frac{(2k)_2}{n+k-2} \overset{-(k-2)}{C_k} - \ldots \right\}$$

ist und dass noch folgende Umwandlung gilt

$$(n+k)_k n(n-1)_k = \frac{(n+k)\ldots(n+1)}{1.2\ldots k} n \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{1.2\ldots k}$$
$$= (n-k) \frac{(n+k)(n+k-1)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots(2k)}$$
$$\cdot \frac{2k(2k-1)\ldots(k+1)}{1.2\ldots.k}$$
$$= (n-k)(n+k)_{2k}(2k)_k,$$

mittelst deren die vorige Gleichung die neue Form erhält

$$\overset{n}{C_k} = (n-k)(n+k)_{2k} \left\{ \frac{(2k)_0}{n+k} \overset{-k}{C_k} - \frac{(2k)_1}{n+k-1} \overset{-(k-1)}{C_k} \right. \tag{50}$$
$$\left. + \frac{(2k)_2}{n+k-2} \overset{-(k-2)}{C_k} - \ldots \right\}.$$

Hierin liegt der bemerkenswerthe Satz, dass die Facultätencoefficienten positiver Exponenten durch die Facultätencoefficienten negativer Exponenten ausgedrückt, mithin auch independent berechnet werden können *).

So findet man z. B. für $k = 2$ aus Formel 49)

$$\overset{-2}{C_2} = 7, \quad \overset{-1}{C_2} = 1$$

und nachher aus Nro. 50)

$$\overset{n}{C_2} = (n+2)_4(n-2)\left\{\frac{1}{n+2}\cdot 7 - \frac{4}{n+1}\right\} = \frac{n(n-1)(n-2)(3n-1)}{2\,.\,3\,.\,4};$$

ebenso

$$\overset{n}{C_3} = (n+3)_6\,(n-3)\left\{\frac{1}{n+3}\cdot 90 - \frac{6}{n+2}\cdot 15 + \frac{15}{n+1}\right\}$$

d. i.

$$\overset{n}{C_3} = \frac{n^2(n-1)^2(n-2)(n-3)}{2\,.\,4\,.\,6}$$

u. s. w.

Will man für den praktischen Gebrauch der Facultätencoefficienten eine Tafel derselben entwerfen, so thut man besser, nicht die vorhin entwickelten Formeln, sondern sogenannte Recursionsformeln anzuwenden, bei welchen jeder Facultätencoefficient aus seinen Nachbarn hergeleitet wird. Derartige Formeln erhält man sehr leicht auf folgendem Wege.

Die Entwickelung der Facultäten mit den Exponenten $-(n-1)$ und $-n$ liefert die beiden Gleichungen

$$\frac{1}{(1-\lambda)(1-2\lambda)(1-3\lambda)\ldots(1-\overline{n-1}\,\lambda)}$$
$$= \overset{-(n-1)}{C_0} + \overset{-(n-1)}{C_1}\lambda + \overset{-(n-1)}{C_2}\lambda^2 + \overset{-(n-1)}{C_3}\lambda^3 + \ldots\,,$$
$$\frac{1}{(1-\lambda)(1-2\lambda)\ldots(1-\overline{n-1}\,\lambda)(1-n\lambda)}$$
$$= \overset{-n}{C_0} + \overset{-n}{C_1}\lambda + \overset{-n}{C_2}\lambda^2 + \overset{-n}{C_3}\lambda^3 + \ldots\ldots;$$

deren zweite durch Multiplication mit $(1-n\lambda)$ in die erste übergehen muss; die Vergleichung der beiderseitigen Coefficienten von λ^k giebt daher

51) $$\overset{-n}{C_k} = \overset{-(n-1)}{C_k} + n\,\overset{-n}{C_{k-1}}.$$

---

*) Dieses Resultat hat der Verfasser zuerst in Crelle's Journal, Bd. 44, Seite 344, unter etwas anderer Form entwickelt.

Da man im voraus weiss, dass immer

$$\overset{-n}{C_0} = 1, \quad \overset{-1}{C_k} = 1$$

ist, so erhält man aus Nro. 51) der Reihe nach:

$$\begin{array}{lll} \overset{-2}{C_1} = 3, & \overset{-3}{C_1} = 6, & \overset{-4}{C_1} = 10, \ldots\ldots \\ \overset{-2}{C_2} = 7, & \overset{-3}{C_2} = 25, & \overset{-4}{C_2} = 65, \ldots\ldots \\ \overset{-2}{C_3} = 15, & \overset{-3}{C_3} = 90, & \overset{-4}{C_3} = 350, \ldots\ldots \end{array}$$

u. s. w.

Durch Entwickelung der Facultäten mit den Exponenten n und $n+1$ hat man ferner die beiden Gleichungen

$$\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots\ldots(\mu+n-1)$$
$$= \overset{n}{C_0}\mu^n + \overset{n}{C_1}\mu^{n-1} + \overset{n}{C_2}\mu^{n-2} + \overset{n}{C_3}\mu^{n-3} + \cdots,$$
$$\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1)(\mu+n)$$
$$= \overset{n+1}{C_0}\mu^{n+1} + \overset{n+1}{C_1}\mu^n + \overset{n+1}{C_2}\mu^{n-1} + \cdots\cdots,$$

deren erste durch Multiplication mit $(\mu+n)$ in die zweite übergehen muss; die nachherige Vergleichung der Coefficienten von μ^{n-k+1} giebt

52) $$\overset{n+1}{C_k} = \overset{n}{C_k} + n\,\overset{n}{C}_{k-1}.$$

Da man im voraus weiss, dass

$$\overset{n}{C_0} = 1, \quad \overset{k}{C_k} = 0$$

ist, so erhält man aus Nro. 52) der Reihe nach

$$\begin{array}{lll} \overset{2}{C_1} = 1, & \overset{3}{C_1} = 3, & \overset{4}{C_1} = 6, \ldots\ldots \\ & \overset{3}{C_2} = 2, & \overset{4}{C_2} = 11, \ldots\ldots \\ & & \overset{4}{C_3} = 6, \ldots\ldots \end{array}$$

u. s. w.

Die Recursionsformeln 51) und 52) sind übrigens nicht wesentlich verschieden, denn die zweite verwandelt sich in die erste, sobald man $-n$ an die Stelle von n treten lässt.

Wegen späterer Anwendungen mag hier noch eine kleine Tafel der Facultätencoefficienten Platz finden.

$n =$	-4	-3	-2	-1	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$	$+7$	$+8$	$+9$
$C_0 =$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$C_1 =$	10	6	3	1		1	3	6	10	15	21	28	36
$C_2 =$	65	25	7	1			2	11	35	85	175	322	546
$C_3 =$	350	90	15	1				6	50	225	735	1960	4536
$C_4 =$	1701	301	31	1					24	274	1624	6769	22449
$C_5 =$	7770	966	63	1						120	1764	13132	67284
$C_6 =$	34105	3025	127	1							720	13068	118124
$C_7 =$	145750	9330	255	1								5040	109584
$C_8 =$	611501	28501	511	1									40320

DIE FUNCTIONEN

COMPLEXER VARIABELEN.

Die Functionen complexer Variabelen.

Bereits in Cap. VIII. des ersten Theiles wurde über die Functionen complexer Variabelen eine Untersuchung angestellt, jedoch blieb letztere auf die sogenannten einfachen Functionen beschränkt, und es handelte sich dabei nur um die genaue Bestimmung des Sinnes, welchen man mit den Symbolen z^μ, a^z, $\log z$, $\sin z$, $\cos z$, ... $\arcsin z$, $\arccos z$, ... in dem Falle zu verbinden hat, wo z eine complexe Variabele bedeutet. Im Folgenden soll diese Untersuchung weiter geführt, d. h. auf beliebige Functionen ausgedehnt werden; ganz besondere Aufmerksamkeit verdienen hierbei die Fragen nach den Differentialquotienten und den Integralen solcher Functionen, weil letztere, sobald $z = x + iy$ gesetzt wird, eigentlich als Functionen zweier unabhängigen, wenn auch auf bestimmte Weise mit einander verbundenen Variabelen x und y zu betrachten sind.

Bevor wir uns auf eine Untersuchung von Functionen der complexen Variabelen $z = x + iy$ einlassen, wird es aber zweckmässig sein, diese Variabele selber einer genaueren Discussion zu unterwerfen.

I. Die geometrische Bedeutung der complexen Zahlen.

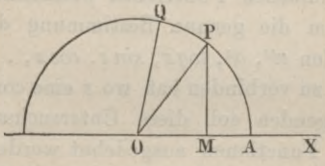
Aus den Elementen der analytischen Geometrie ist hinreichend bekannt, dass eine geradlinige Strecke, deren absolute Länge r heissen möge, mit $+ r$ oder $- r$ bezeichnet werden muss, je nachdem sie vom Coordinatenanfange aus auf der positiven oder negativen Seite der Abscissenachse abgeschnitten worden ist. Denkt man sich die erste Lage als die ursprüngliche, die zweite mittelst einer Drehung um 180^0 aus jener entstanden, so kann man auch sagen: die absolute Länge r erhält bei ihrer Anfangslage den Factor $+1$, nach einer Drehung von 180^0 dagegen den Factor -1, und in sofern die Factoren $+1$ und -1 die Richtung von r oder die Ablenkung des r von der x-Achse bestimmen, ist es vielleicht nicht unpassend, sie Richtungscoefficienten oder Ablenkungsfactoren zu nennen. Diese Bemerkung führt zu einer allgemeineren Frage. Bezeichnet man nämlich mit r_θ eine Gerade, deren Länge r ist, und deren Richtung mit der Richtung der positiven x den Winkel θ einschliesst, so hat man nach dem Vorigen $r_0 = r(+1)$, $r_\pi = r(-1)$, und man kann daher erwarten, dass im Allgemeinen eine Gleichung von der Form

1) $$r_\theta = rf(\theta)$$

stattfinden werde, worin $f(\theta)$ eine noch unbekannte Function von θ ist, welche den Ablenkungsfactor für eine Ablenkung $= \theta$ darstellt.

Um die Function $f(\theta)$ zu bestimmen, denken wir uns zwei vom Coordinatenanfang O ausgehende Gerade $OP = OQ = r$, deren erste mit dem positiven Theile der x-Achse den Winkel $POX = \theta$, und deren zweite mit OX den Winkel $QOX = \theta + \eta$ einschliessen möge (Fig. 1); es ist dann OQ mit $r_{\theta+\eta}$ zu bezeichnen und

Fig. 1.



2) $$r_{\theta+\eta} = rf(\theta + \eta).$$

In so fern aber die Gerade $r_{\theta+\eta}$ ihrer Richtung nach um den Winkel η von r_θ abweicht, gilt auch die Gleichung

$$r_{\theta+\eta} = r_\theta f(\eta),$$

wobei r_θ als die ursprüngliche, $r_{\theta+\eta}$ als die abgelenkte Gerade betrachtet wird. Setzt man hier statt r_θ seinen Werth aus Nro. 1), so folgt

$$r_{\theta+\eta} = rf(\theta)f(\eta);$$

durch Vergleichung mit Nro. 2) ergiebt sich nun für die mit f bezeichnete Function die Bedingung

3) $$f(\theta + \eta) = f(\theta)f(\eta).$$

Ebenso leicht erhält man, entweder analytisch aus der vorstehenden Gleichung oder durch m nach einander folgende Drehungen um die Winkel $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_m$

$$f(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_m) = f(\theta_1)f(\theta_2)\ldots f(\theta_m)$$

und specieller, wenn diese Winkel gleich genommen werden,

4) $$f(m\theta) = [f(\theta)]^m.$$

Diese Gleichung liefert erstens für $\theta = 1$, wobei die constante Grösse $f(1)$ zur Abkürzung C heissen möge,

5) $$f(m) = C^m,$$

und es ist hiermit die Form der Function f für den speciellen Fall bestimmt, dass die Variabele eine ganze positive Zahl ist. Nimmt man ferner in Nro. 4) $\theta = \frac{p}{q}$, $m = q$ und versteht unter p, q ganze positive Zahlen, so erhält man

$$f(p) = \left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q$$

oder

6) $$f\left(\frac{p}{q}\right) = [f(p)]^{\frac{1}{q}} = [C^p]^{\frac{1}{q}} = C^{\frac{p}{q}}.$$

Zufolge der Bemerkung, dass Irrationalzahlen mit jedem beliebigen Genauigkeitsgrade durch rationale Brüche (Decimalbrüche) dargestellt werden können, schliesst man aus Nro. 6) für jedes positive θ

$$f(\theta) = C^\theta.$$

Setzt man endlich in Nro. 3) $\eta = -\theta$ und beachtet die unmittelbar bekannte Gleichung $f(0) = 1$, so findet man

$$1 = f(\theta)\,f(-\theta) \quad \text{oder} \quad f(-\theta) = \frac{1}{f(\theta)} = C^{-\theta},$$

und es ist demnach für jedes reelle θ

7) $$f(\theta) = C^\theta.$$

Da die Function $f(\theta)$ ihrer Natur nach durchaus stetig sein muss, so muss auch C durchaus denselben Werth haben, und es kann daher irgend eine Specialisirung des θ zur Bestimmung von C benutzt werden. Für $\theta = \pi$ ist aber $f(\pi) = -1$, mithin

$$-1 = C^\pi \quad \text{oder} \quad C = (-1)^{\frac{1}{\pi}},$$

und nach Nro. 7)

$$f(\theta) = (-1)^{\frac{\theta}{\pi}},$$

d. i. zufolge der Lehre von den Potenzen complexer Zahlen

$$f(\theta) = \cos k\theta + i \sin k\theta,$$

worin k eine positive oder negative ungerade Zahl bezeichnet. Dieselbe bestimmt sich durch die Specialisirung $\theta = \frac{\pi}{k}$, welche $f\left(\frac{\pi}{k}\right) = -1$ giebt. Setzt man nämlich fest, dass $f(\theta)$ erst dann $= -1$

werde, wenn θ in π übergegangen ist, so muss $k = 1$ genommen werden, und man hat definitiv

8) $$r_\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r e^{i\theta}.$$

In dem speciellen Falle $\theta = \frac{1}{2}\pi$ ergiebt sich $r_{\frac{1}{2}\pi} = ir$; demnach bedeutet ir eine Gerade, welche die Länge r besitzt und mit der x-Achse einen rechten Winkel bildet.

Setzt man in der Formel 8) $r\cos\theta = x$, $r\sin\theta = y$, wo x und y die gewöhnlichen rectangulären Coordinaten des Punktes P sind, so folgt

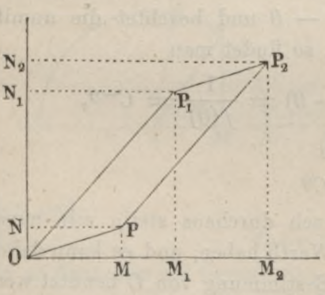
9) $$r_\theta = x + iy;$$

die complexe Zahl $x + iy$ wird also geometrisch durch den Complex der rechtwinklig zu einander liegenden Strecken OM und MP, d. h. durch die gebrochene Linie OMP dargestellt*).

Hiernach lassen sich auch die vier Grundoperationen, nämlich die Addition, Subtraction, Multiplication und Division complexer Zahlen auf folgende Weise geometrisch darstellen.

In Fig. 2 sei $OM = x$, $ON = y$, mithin $x + iy$ durch den Punkt P repräsentirt, dessen Coordinaten x und y sind; ebenso möge $x_1 + iy_1$ durch den Punkt $x_1 y_1$ oder P_1 repräsentirt sein; der Summe $x + iy + x_1 + iy_1 = x + x_1 + i(y + y_1)$ entspricht dann derjenige Punkt P_2, dessen Coordinaten $x + x_1$ und $y + y_1$ sind. Aus einfachen geometrischen Gründen bildet nun P_2 die vierte Ecke des aus den Seiten OP und OP_1 gebildeten Parallelogrammes, demnach kann P_2 unmittelbar aus P und P_1

Fig. 2.



*) Die obige geometrische Deutung der complexen Zahlen ist schon 1750 von H. Kühn (Novi commentarii Academ. Petropol. ad annum 1750) angeregt, aber erst 1831 von Gauss begründet worden (Göttinger gelehrte Anzeigen vom Jahre 1831, Seite 64). Den im Texte gegebenen rein mathematischen Beweis nebst einer Geschichte aller hierher gehörenden Arbeiten verdankt man Drobisch (Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. 2, S. 171). Später hat Möbius gezeigt, wie man mittelst jener Construction Eigenschaften von Punkten in einer Geraden auf Punkte in einer Ebene übertragen und damit zu neuen Verwandtschaften zwischen Punktesystemen gelangen kann (Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften; mathem.-phys. Classe, Jahrg. 1852, S. 41, und Jahrg. 1853, S. 14).

durch Construction hergeleitet werden, ohne dass es vorher der Aufsuchung von x, y, x_1, y_1 bedarf. Ebenso leicht kann die Differenz zweier complexen Zahlen construirt werden; es sind dann P_2 und P_1 gegeben, aus denen P durch eine leicht aufzufindende Construction hergeleitet wird.

Handelt es sich um die Multiplication zweier complexen Zahlen, so denke man sich dieselben durch Modulus und Amplitude ausgedrückt, nämlich

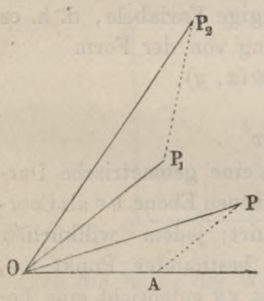
$$x + iy = r\,(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)$$
$$x_1 + iy_1 = r_1\,(cos\,\theta_1 + i\,sin\,\theta_1)$$

und nehme in Fig. 3: $OP = r$, $\angle\, POX = \theta$, $OP_1 = r_1$, $\angle\, P_1OX_1 = \theta_1$, so dass die gegebenen complexen Factoren wieder durch die Punkte P und P_1 repräsentirt sind. Wegen

$$(x + iy)\,(x_1 + iy_1) = rr_1\,[cos\,(\theta + \theta_1) + i\,sin\,(\theta + \theta_1)]$$

wird nun das Product durch einen Punkt dargestellt, dessen Modulus $= rr_1$, und dessen Amplitude $= \theta + \theta_1$ ist. Um vorerst rr_1 als Linie zu construiren, nehmen wir auf der x-Achse die Strecke OA gleich der Längeneinheit, ziehen AP und construiren ein dem Dreiecke OAP ähnliches Dreieck OP_1P_2, der Art, dass OA und OP_1 entsprechende Seiten $\angle\, AOP$ und $\angle\, P_1OP_2$ gleiche, in derselben Drehungsrichtung genommene Winkel sind. Die Proportionalität der einschliessenden Seiten giebt nun $OP_2 = rr_1$, mithin ist OP_2, wenigstens der Grösse nach, der Radiusvector des gesuchten Punktes. Da aber zugleich $\angle\, P_2OX = \theta + \theta_1$ ist, so stellt der Winkel P_2OX die Amplitude des gesuchten Punktes dar, mithin ist P_2 der Repräsentant des Productes. Die Multiplication der beiden gegebenen complexen Factoren besteht also darin, dass der Modulus r im Verhältnisse von $1 : r_1$ vergrössert und gleichzeitig die Amplitude θ um θ_1 vermehrt wird. Auf analoge Weise lässt sich der Quotient zweier complexen Zahlen construiren.

Fig. 3.



Bei allen folgenden Untersuchungen denken wir uns die complexe Variabele $x + iy$ immer als stetig veränderlich, d. h. wir betrachten jede einzelne der beiden reellen Variabelen als continuirlich. Durchläuft nun $x + iy$ stetig ein bestimmtes Intervall, etwa von $x_0 + iy_0$ bis $X + iY$, so beschreibt der die complexe Variabele darstellende Punkt P irgend einen Weg, dessen Anfangspunkt die Coordinaten x_0, y_0, und dessen Endpunkt die Coordinaten X, Y besitzt. Dieser Weg ist zufolge der Willkürlichkeit des x und y ein ganz beliebiger und völlig regelloser; er kann aus irgend welchen geraden oder krummen Linien zusammengesetzt sein, nur muss er zwischen den gegebenen Endpunkten einen ununterbrochenen Zug bilden. Man ersieht hieraus einen der wesentlichsten Unterschiede zwischen reellen und complexen Variabelen; während nämlich eine reelle Variabele x nur auf dem einen Wege der Abscissenachse von $x = x_0$ bis $x = X$ gelangen kann, sind bei einer complexen Variabelen z unendlich viele Wege von $z = x_0 + iy_0$ bis $z = X + iY$ möglich.

II. Darstellung der Functionen complexer Variabelen.

Eine Function der complexen Variabelen $x + iy$ ist im Allgemeinen wieder eine complexe, jedoch abhängige Variabele, d. h. es existirt im Allgemeinen immer eine Gleichung von der Form

$$f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

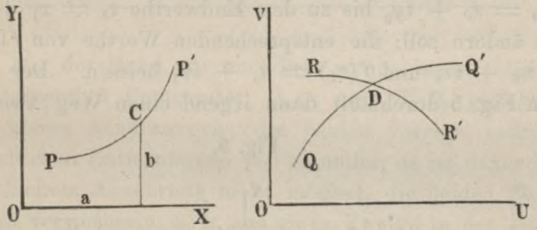
wofür wir zur Abkürzung

$$f(x + iy) = u + iv$$

schreiben werden. Auch hiervon lässt sich eine geometrische Darstellung geben, wenn man u und v in einer neuen Ebene uv als Coordinaten eines beweglichen Punktes construirt; jedem willkürlich gewählten Punkte xy entspricht dann ein bestimmter Punkt uv, und einem willkürlichen Wege des Punktes xy entspricht eine bestimmte vom Punkte uv beschriebene Curve. Diese verläuft in einem ununterbrochenen Zuge, sobald u und v stetige Functionen von x und y sind; wir nennen dann $f(x + iy)$ gleichfalls eine continuirliche Function von $x + iy$.

Besondere Aufmerksamkeit verdient hierbei die schon aus der Algebra bekannte Thatsache, dass es zweierlei Functionen giebt, nämlich einmal solche, bei denen jedem individuellen Werthe der Variabelen nur ein einziger Functionswerth entspricht, andererseits solche, bei denen zu jedem individuellen Werthe der Variabelen zwei oder mehrere Functionswerthe gehören. Eine Function der ersten Art, wie z. B. $\alpha + \beta z + \gamma z^2$, e^z, $\cos z$, $\sin z$ etc. nennt man e i n d e u t i g (monodrom), Functionen der zweiten Art heissen m e h r d e u t i g e; so ist z. B. $\sqrt{z - c}$ zweideutig, $\sqrt[3]{z - c}$ dreideutig, $\log z$ unendlich vieldeutig (Thl. I, §. 56). In Beziehung auf die mehrdeutigen Functionen muss noch hervorgehoben werden, dass es specielle Werthe der Variabelen geben kann, für welche zwei oder mehrere jener im Allgemeinen verschiedenen Functionswerthe zusammenfallen; so sind z. B. die beiden Werthe von $\sqrt{z - c}$ im Allgemeinen von einander verschieden, nur für $z = c$ werden sie gleich, und zwar beide $= 0$. Um dies graphisch darzustellen, denken wir uns eine stetige Function der Variabelen $z = x + iy$ so beschaffen, dass im Allgemeinen jedem z zwei verschiedene Functionswerthe $u + iv$ und $U + iV$ entsprechen, welche nur in dem speciellen Falle $z = c = a + ib$ den gemeinschaftlichen Werth $\alpha + i\beta$ erhalten mögen. Jedem Punkte xy oder P in Fig. 4 entsprechen dann zwei in endlicher Entfernung liegende Punkte Q und R, deren erster die Coordinaten u, v, und deren zweiter die Coordinaten U, V besitzt. Lässt man P irgend einen Weg PP' durchlaufen, so werden Q und R gewisse Curven QQ' und RR' beschreiben, welche

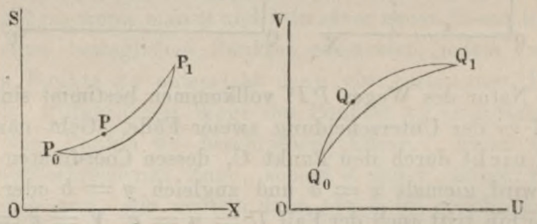
Fig. 4.



durch die Natur des Weges PP' vollkommen bestimmt sind. Hierbei bedarf es der Unterscheidung zweier Fälle. Geht nämlich der Weg PP' nicht durch den Punkt C, dessen Coordinaten a und b sind, so wird niemals $x = a$ und zugleich $y = b$ oder niemals $z = c$, mithin tritt auch der Fall $U = u = \alpha$, $V = v = \beta$ nicht ein, d. h. die Curven QQ' und RR' haben keinen gemeinschaftlichen Punkt. Wenn dagegen der Weg PP' durch den Punkt C hindurchführt, so wird einmal $U = u = \alpha$, $V = v = \beta$, und die Curven QQ', RR' besitzen dann gemeinschaftlich den Punkt D, dessen Coordinaten α und β sind. Den Punkt C, welchem die Verzweigung in D entspricht, pflegt man einen Verzweigungspunkt zu nennen; man hat daher den Satz, dass die Curven QQ' und RR' einen oder keinen gemeinschaftlichen Punkt besitzen, je nachdem der Weg von z durch den Verzweigungspunkt geht oder nicht. — Dies lässt sich noch auf eine andere, des Folgenden wegen bemerkenswerthe Weise ausdrücken. Unter allen Umständen nämlich kann eine zweiastige Curve als eine Zusammensetzung zweier einastigen Curven betrachtet werden, und zwar ist dies nur auf eine einzige Art möglich, sobald die letzteren Curven nirgends zusammentreffen; haben aber dieselben einen gemeinschaftlichen Punkt wie in Fig. 4, so darf man ebensowohl QDQ' und RDR' wie auch QDR' und RDQ' als die einzelnen Zweige betrachten, denn die einzig vorhandene Bedingung der Continuität verlangt nur, dass jeder Zweig ununterbrochen verlaufe. Eine zweideutige Function kann demnach für eine Zusammensetzung zweier eindeutigen Functionen gelten, und zwar ist dies auf eine oder auf zwei Arten möglich, je nachdem der Weg der unabhängigen Variabelen am Verzweigungspunkte vorbei oder durch ihn hindurchführt. Mit geringen, leicht aufzufindenden Modificationen gelten diese Bemerkungen auch für mehrdeutige Functionen mit mehreren Verzweigungspunkten.

Wir untersuchen nun den Einfluss, welchen eine Verlegung des Weges von z auf die Werthe von $f(z)$ ausübt. Es sei zunächst $f(z)$ eine stetige und eindeutige Function, worin sich z von dem Anfangswerthe $z_0 = x_0 + iy_0$ bis zu dem Endwerthe $z_1 = x_1 + iy_1$ continuirlich ändern soll; die entsprechenden Werthe von $f(z)$ mögen $f(z_0) = u_0 + iv_0$ und $f(z_1) = u_1 + iv_1$ heissen. Der Punkt xy oder P in Fig. 5 durchläuft dann irgend einen Weg zwischen den

Fig. 5.

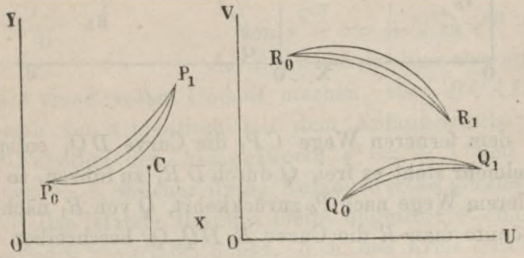


festen Punkten $x_0 y_0$ oder P_0 und $x_1 y_1$ oder P_1, und diesem Wege entspricht eine gewisse, vom Punkte uv oder Q beschriebene Curve $Q_0 Q_1$. Lässt man ein zweites Mal P wiederum von P_0 bis P_1 gehen, aber auf einem anderen Wege, so beschreibt Q eine andere Curve, welche gleichfalls in Q_0 anfängt, aber auch in Q_1 endigen muss; denn im entgegengesetzten Falle müssten dem Werthe $z_1 = x_1 + iy_1$ zwei verschiedene Werthe von $f(z_1) = u_1 + iv_1$ entsprechen, was gegen die Voraussetzung der Eindeutigkeit von $f(z)$ streiten würde. Mit anderen Worten, bei jeder eindeutigen Function ist der Endwerth $f(z_1)$ unabhängig von dem Wege, auf welchem z nach z_1 gelangt. — Durchläuft nun der Punkt xy eine geschlossene

Curve, so erhält z am Ende seinen Anfangswerth wieder; dasselbe gilt, dem soeben Gesagten zufolge, auch von $f(z)$, mithin besteht das Bild von $f(z)$ gleichfalls aus einer geschlossenen Curve.

Bei einer zweideutigen Function bedarf es der Unterscheidung, ob der Weg von z keinen Verzweigungspunkt trifft oder durch einen solchen hindurchgeht. Im ersten Falle entsprechen dem Wege $P_0 P_1$ zwei Curven $Q_0 Q_1$ und $R_0 R_1$, welche keinen gemeinschaftlichen Punkt besitzen (Fig. 6). Denkt man sich den Weg $P_0 P_1$ geändert,

Fig. 6.



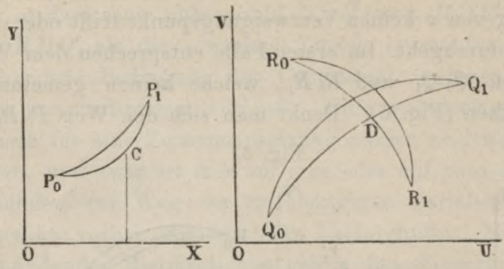
und zwar vor der Hand nur unendlich wenig, so erleiden, wegen der vorausgesetzten Continuität, $Q_0 Q_1$ und $R_0 R_1$ gleichfalls nur unendlich kleine Aenderungen; die beiden Zweige befinden sich aber in endlichen Entfernungen von einander, es ist daher bei jener unendlich kleinen Aenderung nicht möglich, die beiden Zweige mit einander zu verwechseln, d. h. aus einem Zweige in den anderen zu gerathen. Durch eine unendliche Menge solcher unendlich kleinen Aenderungen, d. h. durch stetige Aenderung lässt sich der ursprüngliche Weg zwischen P_0 und P_1 in jeden anderen überführen*), und wenn keiner von allen möglichen Zwischenwegen einen Verzweigungspunkt trifft, so gilt für jeden einzelnen Zweig der zweideutigen Function alles Das, was vorhin für eine eindeutige Function bewiesen wurde. Man hat daher auch folgenden Satz: Wenn P eine geschlossene Curve durchläuft, in deren Innerem kein Verzweigungspunkt liegt, so beschreibt jeder der Punkte Q und R gleichfalls eine geschlossene Curve.

Diese Schlüsse verlieren ihre Kraft, wenn einer der Zwischenwege von P durch einen Verzweigungspunkt C führt, welchem der

*) Man kann sich diesen Uebergang durch die Vorstellung eines absolut biegsamen und dehnbaren Fadens versinnlichen, welcher in den Punkten P_0 P_1 befestigt ist und daher die Form jeder beliebigen Curve zwischen jenen Punkten annehmen kann.

Durchschnitt D entsprechen möge (Fig. 7). Ist nämlich P von P_0 bis C, mithin Q von Q_0 bis D gegangen, so liegt keine Nothwendig-

Fig. 7.



keit vor, dem ferneren Wege CP_1 die Curve DQ_1 entsprechen zu lassen, vielmehr steht es frei, Q durch DR_1 zu führen, so dass, wenn P auf anderem Wege nach P_0 zurückkehrt, Q von R_1 nach R_0 kommt. Ebenso könnte man R die Curve $R_0 D Q_1 Q_0$ beschreiben lassen.

Wenn demnach P einen geschlossenen Weg durchläuft, der einen Verzweigungspunkt enthält, so ist es nicht nothwendig, dass Q und R gleichfalls geschlossene Curven beschreiben, oder, was dasselbe ist, dass die Function am Ende wieder ihren Anfangswerth erhält. Selbstverständlich gilt dieser Satz ebenso für mehrdeutige Functionen mit mehreren Verzweigungspunkten.

Um diese allgemeinen Erörterungen durch ein Beispiel zu erläutern, betrachten wir die doppeldeutige Function

$$w = \sqrt{z}.$$

Setzt man wie bisher

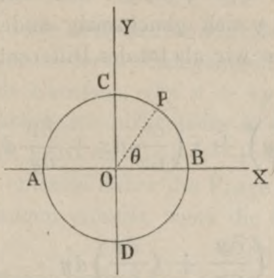
$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta},$$

so sind die beiden Werthe der Function

$$w = +(\sqrt{r})e^{\frac{1}{2}i\theta} \quad \text{und} \quad w = -(\sqrt{r})e^{\frac{1}{2}i\theta},$$

worin $(\sqrt{r})$ den absoluten Werth von $\sqrt{r}$ bezeichnet; für $z = 0$ fallen beide Functionswerthe zusammen, mithin ist $z = 0$ der Verzweigungspunkt. Wir denken uns um denselben mit einem beliebigen Radius, z. B. mit $r = 1$, einen Kreis beschrieben, welcher die Abscissenachse in A und B schneidet, und untersuchen nun, wie sich die Function $+(\sqrt{r})e^{\frac{1}{2}i\theta}$ ändert, wenn z einmal auf dem oberen Halbkreise ACB, das andere Mal auf dem unteren Halbkreise ADB von $z = -1$ nach $z = +1$ übergeht (Fig. 8). In beiden Fällen bleibt r constant $= 1$, auf dem ersten Wege nimmt θ von π bis 0 ab, und die erwähnte Function gelangt

Fig. 8.



$$\text{von } e^{\frac{1}{2}i\pi} = +i \text{ zu } e^0 = +1;$$

auf dem zweiten Wege wächst θ von π bis 2π, und die Function gelangt

$$\text{von } e^{\frac{1}{2}i\pi} = +i \text{ zu } e^{i\pi} = -1,$$

der Endwerth ist hier also ein anderer. Lässt man z einen vollen Umlauf machen, etwa $BCADB$, so ist der Endwerth von z identisch mit dem Anfangswerthe; dagegen erhält die Function den Anfangswerth $e^0 = +1$ und den Endwerth $e^{i\pi} = -1$, welcher ihrem Anfangswerthe gerade entgegengesetzt ist. Das letztere Resultat bleibt ungestört, wenn man sich den Radiusvector r variabel denkt, d. h. den Kreis durch eine beliebige geschlossene Curve $BC'A'D'B$ ersetzt *).

III. Die Differentialquotienten der Functionen complexer Variabelen.

Wenn z eine reelle Variabele, w eine eindeutige Function von z bezeichnet, so ist der Differentialquotient $\frac{dw}{dz}$ eine ganz bestimmte, gleichfalls eindeutige Function von z, für welche es ganz gleichgültig bleibt, auf welche Weise man sich dz als unendlich abnehmendes Increment denken will. Ob diese Eigenschaft des Differentialquotienten auch bei complexen z gilt, bedarf deswegen einer besonderen Untersuchung, weil $z = x + iy$ zwei von einander unabhängige Variabele enthält und daher in der Gleichung

$$w = f(z) \quad \text{oder} \quad u + iv = f(x + iy)$$

u und v Functionen von x und y sind.

---

*) Wie Puiseux gezeigt hat, entspricht einer jedesmaligen Umkreisung eines Verzweigungspunktes eine Vertauschung der Wurzeln algebraischer Gleichungen; siehe die Abhandlung Recherches sur les fonctions algèbriques (Liouville, Journal de mathématiques, tom. XV, pag. 365), oder deren Uebersetzung von H. Fischer (Halle 1861).

Wir betrachten zunächst den allgemeinen Fall, wo sowohl u als v eine ganz willkürlich gebildete Function der beiden Variabelen x und y ist, etwa $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$, und setzen $u + iv = w$. Lassen wir nun x und y sich gleichzeitig ändern, so dass $dz = dx + idy$ ist, so erhalten wir als totales Differential von w

$$dw = d(u + iv) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right)$$

mithin als Differentialquotienten

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) dy}{dx + idy}$$

oder auch

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}}{1 + i\frac{dy}{dx}}$$

Hieraus ersieht man sofort, dass $\frac{dw}{dz}$ von dem Verhältnisse $\frac{dy}{dx}$ d. h. von der Richtung abhängt, nach welcher der Punkt xy in der Ebene xy verschoben wurde; diese Richtung ist aber ganz willkürlich, mithin $\frac{dw}{dz}$ unendlich vieldeutig. Diese Unbestimmtheit verschwindet nur in dem einen Falle, wo

$$\text{10)} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} = i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

ist, weil sich dann $1 + i\frac{dy}{dx}$ hebt. Die vorstehende Gleichung zerfällt in die beiden folgenden

$$\text{11)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

und diese sind nun die Bedingungen dafür, dass der Differentialquotient $\frac{dw}{dz}$ sowohl von der Grösse als von der Richtung der Verschiebung des Punktes xy unabhängig ist. Was endlich den gesuchten Differentialquotienten betrifft, so hat man dafür

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

oder auch

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Zu den Bedingungsgleichungen 11) gelangt man auch bei einer anderen Gelegenheit, nämlich durch folgende Betrachtung. Jede Function von $x + iy$ hat zwar die Form $u + iv$, aber umgekehrt ist nicht jedes $u + iv$ eine Function von $x + iy$, wie man z. B. an $x^2 + y^2 + 2ixy = (x + iy)^2 + 2y^2$ sehen kann. Es entsteht daher die Frage nach den Bedingungen, welchen u und v genügen müssen, wenn die Gleichung

$$u + iv = f(x + iy)$$

bestehen soll. Aus dieser folgen durch partielle Differentiationen die zwei Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f(x + iy)}{\partial x} = f'(x + iy),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f(x + iy)}{\partial y} = if'(x + iy),$$

deren rechte Seiten bis auf den Factor i übereinstimmen. Es muss daher

$$i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}$$

sein, welche Gleichung mit Nro. 10) identisch ist und daher wieder auf die unter Nro. 11) entwickelten Bedingungen führt.

Durch Zusammenfassung der vorigen Ergebnisse gelangt man zu folgendem Satze: wenn $w = u + iv$ nicht ein blosser Complex willkürlicher Functionen von x und y, sondern eine eigentliche Function von $x + iy$ ist, so gelten immer die in 11) aufgestellten Bedingungen; dann ist aber $\frac{dw}{dz}$ auch nicht unbestimmt vieldeutig, sondern eine ganz bestimmte, von dem Verhältnisse $\frac{dy}{dx}$ unabhängige Grösse*).

---

*) In seinen Exercices d'analyse et de physique mathématique, tome IV, p. 346, nennt Cauchy den Ausdruck $u + iv$ monogen, sobald u und v den erwähnten Bedingungen genügen; dem Obigen zufolge ist diese Benennung überflüssig, und braucht man nur in diesem Falle $u + iv$ schlechthin eine Function von z zu nennen, wie es Riemann in seiner Inauguraldissertation (Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse, Göttingen 1851, S. 8) zuerst gethan hat.

In den erwähnten Bedingungsgleichungen können übrigens die Variabelen u und v gesondert werden. Differenzirt man nämlich die erste nach x, die zweite nach y und subtrahirt beide Ergebnisse, so erhält man

12)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

wird dagegen die erste nach y, die zweite nach x differenzirt, so giebt die Addition

13)
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Demnach genügen u und v einer und derselben partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Der vorhin erwähnte geometrische Sinn der Bedingungen 11) lässt noch eine bemerkenswerthe Relation zwischen den Figuren erkennen, welche entstehen, sobald einerseits der Weg der Variabelen z in der Ebene xy, andererseits der Gang von $w = f(z)$ in der Ebene uv construirt wird. Ertheilt man nämlich der Variabelen z zwei unendlich kleine, nach verschiedenen Richtungen gehende Zunahmen, deren Grössen, der Unterscheidung wegen, mit

$$dz_{(1)} = dx_{(1)} + i dy_{(1)} \quad \text{und} \quad dz_{(2)} = dx_{(2)} + i dy_{(2)}$$

bezeichnet werden mögen, so erhält man in der Ebene xy drei unendlich nahe an einander liegende, im Uebrigen aber ganz beliebige Punkte P, P_1, P_2, Fig. 9, mit den Coordinaten

$$x, y; \quad x + dx_{(1)}, y + dy_{(1)}; \quad x + dx_{(2)}, y + dy_{(2)}.$$

Diesen entsprechen in der Ebene uv drei gleichfalls unendlich nahe liegende Punkte Q, Q_1, Q_2, deren Coordinaten sind

$$u, v; \quad u + du_{(1)}, v + dv_{(1)}; \quad u + du_{(2)}, v + dv_{(2)},$$

und da der Differentialquotient

$$\frac{dw}{dz} = \frac{du + i dv}{dx + i dy}$$

unabhängig von der Richtung der Verschiebung des Punktes P ist, so hat man

14)
$$\frac{dw_{(1)}}{dz_{(1)}} = \frac{dw_{(2)}}{dz_{(2)}}.$$

Mittelst der Substitutionen

$$dz_{(1)} = PP_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\ dz_{(2)} = PP_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$
$$dw_{(1)} = QQ_1 = s_1(\cos\eta_1 + i\sin\eta_1),\ dw_{(2)} = QQ_2 = s_2(\cos\eta_2 + i\sin\eta_2)$$

erhält man aus Nro. 14)

$$\frac{s_1}{r_1}[\cos(\eta_1 - \theta_1) + i\sin(\eta_1 - \theta_1)] = \frac{s_2}{r_2}[\cos(\eta_2 - \theta_2) + i\sin(\eta_2 - \theta_2)],$$

mithin

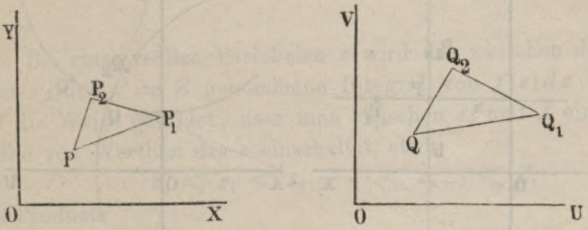
$$\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2}, \quad \eta_1 - \theta_1 = \eta_2 - \theta_2$$

oder

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{s_2}{s_1}, \quad \theta_2 - \theta_1 = \eta_2 - \eta_1.$$

Die unendlich kleinen Dreiecke PP_1P_2 und QQ_1Q_2 haben also das gleiche Seitenverhältniss $PP_2 : PP_1 = QQ_2 : QQ_1$ und gleiche Zwi-

Fig. 9.



schenwinkel $P_1PP_2 = Q_1QQ_2$; sie sind demnach ähnlich. Da dies von je drei unendlich nahe liegenden und einander entsprechenden Punkten beider Ebenen gilt, so kann man sagen: irgend eine in der Ebene xy gezeichnete Figur ist auf der Ebene uv so abgebildet, dass die entsprechenden kleinsten Theile beider Figuren ähnlich sind*).

Als Beispiel hierzu betrachten wir die Function $w = tan\, z$ oder

$$u + iv = tan\,(x + iy),$$

worin nach Formel 3) auf Seite 265 des ersten Theils

$$15) \quad u = \frac{2\,sin\,2x}{e^{2y} + 2\,cos\,2x + e^{-2y}}, \quad v = \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{e^{2y} + 2\,cos\,2x + e^{-2y}}$$

ist, welche Ausdrücke den Bedingungen 11) genügen. Lassen wir zunächst den Punkt xy auf einer in der Entfernung b parallel zur x-Achse liegenden Geraden fortrücken, so ist y constant $= b$, dagegen x als Variabele zu betrachten; die Gleichung der entsprechenden, vom Punkte uv durchlaufenen Curve findet sich dann aus den Gleichungen 15), wenn $y = b$ gesetzt und x eliminirt wird. Man erhält so

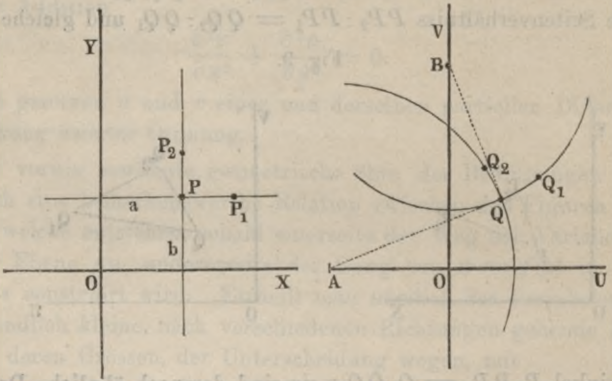
---

*) Die Aufgabe, derartige Abbildungen herzustellen, löste zuerst Gauss in einer von der Kopenhagener Akademie gekrönten Preisschrift (siehe Schumacher's Astronomische Abhandlungen; Heft 3, S. 5 bis 30). Die hierauf sich gründende Verwandtschaft der Curven behandelte Siebeck in Crelle's Journal (Bd. 55, S. 221).

$$u^2 + v^2 - 2\beta v + 1 = 0, \qquad \beta = \frac{e^{2b} + e^{-2b}}{e^{2b} - e^{-2b}};$$

die Curve ist demnach ein Kreis, dessen Mittelpunkt B um β vom Coordinatenanfang entfernt auf der v-Achse liegt, und dessen Radius $= \sqrt{\beta^2 - 1}$ ist (Fig. 10). Wenn ferner der Punkt xy eine in der

Fig. 10.



Entfernung a parallel zur y-Achse liegende Gerade durchläuft, so beschreibt der Punkt uv eine Curve, deren Gleichung aus Nro 15) für $x = a$ und durch Elimination von y folgt, nämlich

$$u^2 + v^2 + 2\alpha u - 1 = 0, \qquad \alpha = \cot 2a.$$

Diese Curve ist gleichfalls ein Kreis, dessen Mittelpunkt A um $-\alpha$ vom Coordinatenanfang entfernt auf der u-Achse liegt und dessen Halbmesser $= \sqrt{\alpha^2 + 1}$ ist. Dem Durchschnitte P der beiden Parallelen in der xy-Ebene entspricht in der uv-Ebene derjenige Durchschnitt Q beider Kreise, dessen Coordinaten

$$\frac{2 \sin 2a}{e^{2b} + 2 \cos 2a + e^{-2b}}, \quad \frac{e^{2b} - e^{-2b}}{e^{2b} + 2 \cos 2a + e^{-2b}}$$

sind; der unendlich kleinen geradlinigen Strecke PP_1 entspricht der unendlich kleine Kreisbogen QQ_1, ebenso der Strecke PP_2 der Bogen QQ_2. Da die Dreiecke P_1PP_2 und Q_1QQ_2 ähnlich sind, so müssen sich die Kreise rechtwinklig schneiden, was mittelst ihrer Gleichungen leicht verificirt werden kann. Einem gitterförmigen Systeme von Parallelen zu den Achsen der x und y entspricht überhaupt ($w = \tan z$ vorausgesetzt) ein System von Kreisen, deren Mittelpunkte auf den Achsen der u und v liegen, die sich rechtwinklig schneiden und dabei unendlich kleine Rechtecke bilden, welche den Rechtecken in der xy-Ebene ähnlich sind.

IV. Die Integrale synektischer Functionen.

Bei einer reellen Variabelen z wird das zwischen den Grenzen $z = z_0$ und $z = Z$ genommene Integral von $f(z)\,dz$ bekanntlich auf die Weise gebildet, dass man zwischen z_0 und Z eine beliebige Reihe von Werthen des z einschaltet, etwa

$$z_0 < z_1 < z_2 \cdots < z_{n-1} < Z,$$

die Producte

$$f(z_0)(z_1 - z_0),\ f(z_1)(z_2 - z_1),\ \ldots\ f(z_{n-1})(Z - z_{n-1})$$

addirt und von der Summe den Grenzwerth für unendlich wachsende n und gleichzeitig unendlich abnehmende $z_1 - z_0, z_2 - z_1, \ldots Z - z_{n-1}$ aufsucht. Diese Definition behält auch dann noch eine klare Bedeutung, wenn $f(z)$ innerhalb des Integrationsintervalles mehrmals unendlich oder discontinuirlich wird. In dem speciellen Falle, wo $f(z)$ von $z = z_0$ bis $z = Z$ endlich und stetig bleibt, kann man übrigens statt der allgemeinen Gleichung

16) $$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$$

$$= Lim\,[f(z_0)(z_1 - z_0) + f(z_1)(z_2 - z_1) + \cdots + f(z_{n-1})(Z - z_{n-1})]$$

die kürzere

17) $$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = F(Z) - F(z_0)$$

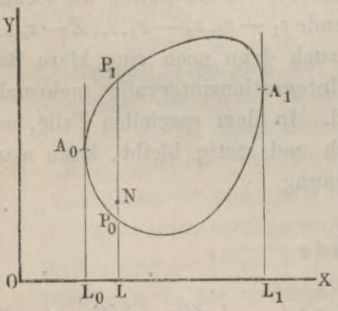
benutzen, worin $F(z)$ das unbestimmte Integral von $f(z)\,dz$ bedeutet. Die in Nro. 16) angegebene Definition des bestimmten Integrales wollen wir auch bei complexen z, z_0 und Z unverändert beibehalten. Aus der Natur einer solchen Veränderlichen folgt dann sogleich, dass es einen wesentlichen Unterschied macht, ob man ein Integral zwischen reellen oder zwischen complexen Grössen nimmt. Während nämlich ein reelles z nur auf einem Wege von $z = z_0$ nach $z = Z$ übergeführt werden kann, ist dies bei einem complexen z auf unendlich viele Arten möglich; ein bestimmtes Integral mit complexen Grenzen muss also vor der Hand als unendlich vieldeutig gelten, und jedenfalls bedarf es einer Untersuchung des Einflusses, den verschiedene Wege des z auf den Werth des Integrales haben können.

Da es sich hierbei (wegen $z = x + iy$) um Integrale mit zwei unabhängigen Variabelen handelt, so schicken wir erst eine Bemerkung über gewisse Doppelintegrale voraus. Es bezeichne nämlich $\Phi(x, y)$ eine reelle Function der beiden Variabelen x, y, und dieselbe sei endlich, stetig und eindeutig für alle x und y, welche, als rechtwinklige Coordinaten betrachtet, Punkte innerhalb einer bestimmten geschlossenen Curve charakterisiren; ferner möge das Doppelintegral

$$\int\int \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} dx\, dy$$

auf alle, jenen Contour nicht überschreitenden x und y, d. h., kurz ausgedrückt, auf die geschlossene Fläche bezogen werden*). Integrirt man zuerst in Beziehung auf y, so hat man als Integrationsgrenzen für y die zur Abscisse x gehörenden Ordinaten $LP_0 = y_0$, $LP_1 = Y$ (Figur 11), wobei wir voraussetzen, dass eine Parallele zur y-Achse den gegebenen Umfang nur zweimal treffe; die Integrationsgrenzen für x sind die Entfernungen $OL_0 = x_0$ und $OL_1 = X$, in welchen die beiden parallel zur y-Achse an den Contour gelegten Tangenten die Abscissenachse schneiden. Nach diesen Bemerkungen ist das obige Doppelintegral

Fig. 11.



$$= \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} dy = \int_{x_0}^{X} dx [\Phi(x, Y) - \Phi(x, y_0)]$$

$$= \int_{x_0}^{X} \Phi(x, Y)\, dx + \int_{X}^{x_0} \Phi(x, y_0)\, dx.$$

*) Setzt man $\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} = Z$, und betrachtet Z als dritte Coordinate, so kann man das Integral durch ein Volumen veranschaulichen (Thl. I., §. 95).

Das erste Integral rechter Hand bedeutet die Summe aller Producte von der Form $\Phi(x, y)\,dx$, wenn x von x_0 bis X geht und statt y jederzeit die Ordinaten des Zweiges $A_0 P_1 A_1$ genommen werden, d. h. kürzer, das erste Integral bezieht sich auf den Fall, wo ein veränderlicher Punkt xy den Zweig $A_0 P_1 A_1$ durchläuft. Im zweiten Integral geht x rückwärts von X bis x_0, statt y sind die Ordinaten des Zweiges $A_1 P_0 A_0$ zu nehmen; das Integral entspricht also dem Falle, wo der Punkt xy den Weg $A_1 P_0 A_0$ zurücklegt. Beide Integrale zusammen geben mithin die Summe aller Producte von der Form $\Phi(x, y)\,dx$ für den Fall, dass der Punkt xy den ganzen Contour in der Richtung $A_0 P_1 A_1 P_0 A_0$ einmal durchläuft. Demnach besteht die Gleichung

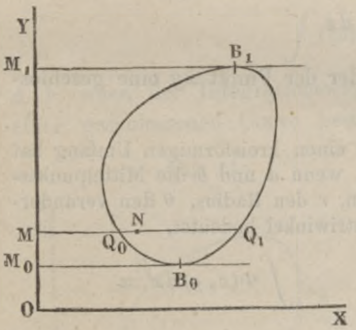
18) $$\int\!\!\int \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y}\,dx\,dy = \int \Phi(x, y)\,dx,$$

worin sich links die Integrationen über alle Punkte der geschlossenen **Fläche** erstrecken, während sich die Integration rechts nur auf den **Umfang** derselben Fläche bezieht.

Eine ganz analoge Behandlung gestattet das Integral

$$\int\!\!\int \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x}\,dx\,dy,$$

Fig. 12.



für welches der Spielraum des xy derselbe wie vorhin, und innerhalb dessen $\Psi(x, y)$ gleichfalls endlich, stetig und eindeutig sein möge. Integrirt man zuerst in Beziehung auf x und setzt in Fig. 12 $MQ_0 = \xi_0$, $MQ_1 = \Xi$, $OM_0 = \eta_0$, $OM_1 = \Upsilon$, so erhält man statt des genannten Doppelintegrales

$$\int_{\eta_0}^{\Upsilon} dy \int_{\xi_0}^{\Xi} \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x}\,dx = \int_{\eta_0}^{\Upsilon} dy\,[\Psi(\Xi, y) - \Psi(\xi_0, y)]$$

$$= \int_{\eta_0}^{\Upsilon} \Psi(\Xi, y)\,dy + \int_{\Upsilon}^{\eta_0} \Psi(\xi_0, y)\,dy.$$

Das erste Integral rechter Hand entspricht dem Wege $B_0 Q_1 B_1$, das zweite dem Wege $B_1 Q_0 B_0$, ihre Summe dem ganzen Umlaufe $B_0 Q_1 B_1 Q_0 B_0$; man hat daher analog Nro. 18)

$$\int\!\!\int \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x}\,dx\,dy = \int \Psi(x, y)\,dy,$$

und zwar beziehen sich die Integrationen links auf alle Punkte der Fläche, die Integration rechts auf die Punkte des Umfanges, wenn letzterer in der Richtung $B_0 Q_1 B_1 Q_0 B_0$ durchlaufen wird. Diese Richtung ist der früheren $A_0 P_1 A_1 P_0 A_0$ gerade entgegengesetzt; will man daher in beiden Integralen rechter Hand die nämliche Richtung haben, so muss man dem einen das entgegengesetzte Vorzeichen geben *); es ist demnach präciser

$$19)\qquad \int\int \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x}\, dx\, dy = -\int \Psi(x, y)\, dy.$$

Aus den Gleichungen 18) und 19) erhält man durch Subtraction, bei umgekehrter Anordnung in kürzerer Schreibweise

$$20)\qquad \int (\Phi\, dx + \Psi\, dy) = \int\int \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) dx\, dy,$$

von welcher Gleichung wir sogleich Gebrauch machen werden.

Wie früher setzen wir

$$w = f(z) \quad \text{oder} \quad u + iv = f(x + iy),$$

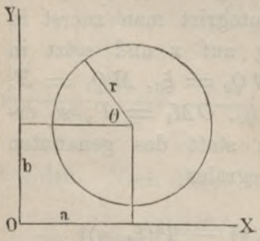
und beschäftigen uns mit der Aufgabe, den Werth des Integrales

$$\int f(z)\, dz$$

für den Fall zu bestimmen, dass z oder der Punkt xy eine geschlos-

---

Fig. 13.



*) Für einen kreisförmigen Umfang hat man z. B., wenn a und b die Mittelpunktscoordinaten, r den Radius, θ den veränderlichen Centriwinkel bedeutet,

$$\int \Phi(x, y)\, dx = \int_0^{2\pi} \Phi(a - r\cos\theta,\ b + r\sin\theta)\, r\sin\theta\, d\theta,$$

$$\int \Psi(x, y)\, dy = \int_{2\pi}^{0} \Psi(a - r\cos\theta,\ b + r\sin\theta)\, r\cos\theta\, d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} \Psi(a - r\cos\theta,\ b + r\sin\theta)\, r\cos\theta\, d\theta.$$

Die Integrationsgrenzen 0 und 2π bleiben aber dieselben, wenn r variabel, d. h. eine Function von θ wird.

sene Curve durchläuft, innerhalb deren $f(z)$ endlich, stetig und eindeutig bleibt. Vermöge der Werthe von $f(z)$ und z ist nun zunächst

$$\begin{aligned}\int f(z)\,dz &= \int (u+iv)(dx+i\,dy)\\ &= \int (u\,dx - v\,dy) + i\int (v\,dx + u\,dy),\end{aligned}$$

worin sich die Integrale rechter Hand auf den gegebenen Contour beziehen. Da nach den gemachten Voraussetzungen u und v reelle, endliche, stetige und eindeutige Functionen sind, so lässt sich jedes der einfachen Integrale mittelst der Formel 20) in ein Doppelintegral umwandeln, mithin ist auch

$$\int f(z)\,dz = \int\!\!\int\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx\,dy + i\int\!\!\int\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx\,dy.$$

Gleichzeitig hat man, weil $u + iv$ eine Function von $x + iy$ bedeutet,

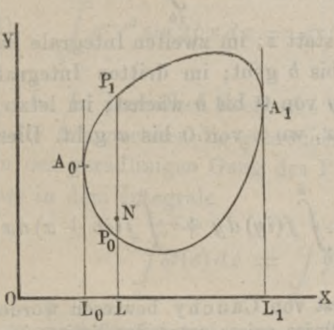
$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}=0;$$

die vorigen Doppelintegrale verschwinden also, und es bleibt

$$\int f(z)\,dz = 0,$$

d. h. wenn der Integrationsweg der complexen Variabelen z aus einer geschlossenen Curve besteht, innerhalb deren $f(z)$ endlich, stetig und eindeutig bleibt, so hat das Integral von $f(z)\,dz$ immer den Werth Null.

Fig. 14.



Mittelst dieses Satzes lässt sich unsere eigentliche Aufgabe sofort lösen. Bezeichnen wir nämlich das Integral von $f(z)\,dz$ kurz mit $I(s)$, sobald die Curve s den Integrationsweg von z darstellt, so haben wir nach dem Vorigen $I(A_0P_1A_1P_0A_0) = 0$ oder

$$I(A_0P_1A_1) + I(A_1P_0A_0) = 0.$$

Im zweiten Integrale lässt sich die Bewegungsrichtung umkehren, wenn gleichzeitig das Vorzeichen umgekehrt wird; es ist also

$$I(A_0P_1A_1) - I(A_0P_0A_1) = 0$$

und hieraus folgt

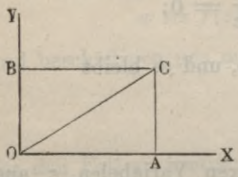
$$I(A_0 P_1 A_1) = I(A_0 P_0 A_1).$$

D. h.: durchläuft die Variabele z in gleichem Sinne zwei verschiedene Wege von z_0 bis Z, so erhält das zwischen diesen Grenzen genommene Integral von $f(z)\,dz$ in beiden Fällen denselben Werth, vorausgesetzt, dass $f(z)$ sowohl im Inneren als auf dem Umfange des von beiden Integrationswegen eingeschlossenen Raumes stetig, endlich und eindeutig bleibt. Noch kürzer lässt sich dies ausdrücken, wenn man eine Function synektisch nennt, sobald sie die ebengenannten Eigenschaften besitzt; der Satz lautet dann: das Integral von $f(z)\,dz$ ist so lange unabhängig von den verschiedenen Integrationswegen, als $f(z)$ zwischen jenen Wegen synektisch bleibt*).

Wir geben im Folgenden einige Anwendungen dieses Theoremes, namentlich um zu zeigen, wie dasselbe zur Ermittelung der Werthe von bestimmten Integralen dienen kann.

a. In Fig. 15 sei $AOBC$ ein Rechteck aus den Seiten $OA = a$ und $OB = b$; als Integrationsweg möge einmal die gebrochene Linie OAC, das andere Mal die gebrochene Linie OBC benutzt werden. Im ersten Falle geht z erst von 0 bis a, dann von a bis $a + ib$; im zweiten Falle geht z erst von 0 bis ib, dann von ib bis $ib + a$, mithin ist, wenn $f(z)$ innerhalb des Rechtecks synektisch bleibt,

Fig. 15.



$$\int_0^a f(z)\,dz + \int_a^{a+ib} f(z)\,dz = \int_0^{ib} f(z)\,dz + \int_{ib}^{ib+a} f(z)\,dz.$$

Im ersten Integrale schreiben wir x statt z; im zweiten Integrale hat z die Form $a + iy$, wo y von 0 bis b geht; im dritten Integrale kann $z = iy$ gesetzt werden, wenn y von 0 bis b wächst; im letzten Integrale ist z von der Form $ib + x$, wo x von 0 bis a geht. Diese Substitutionen geben zusammen

$$\int_0^a f(x)\,dx + i\int_0^b f(a+iy)\,dy = i\int_0^b f(iy)\,dy + \int_0^a f(ib+x)\,dx$$

*) Dieser Fundamentalsatz ist zuerst von Cauchy bewiesen worden in dem Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires. Paris 1825. Die Benennung „synektisch" hat Cauchy später eingeführt in der Abhandlung: Sur les rapports différentiels des quantités géométriques etc. (Comptes rendus, 1855, p. 447). Unter den verschiedenen Beweisen des Theoremes zeichnet sich der obige, aus Riemann's Inauguraldissertation entnommene, durch Eleganz und Strenge aus.

oder bei anderer Anordnung

$$21)\quad \int_0^a f(x+ib)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx = i\left\{\int_0^b f(a+iy)\,dy - \int_0^b f(iy)\,dy\right\}.$$

Hiernach ist z. B. für $f(z) = e^{-z^2}$, wenn sowohl die reellen als die imaginären Theile beiderseits verglichen werden,

$$e^{b^2}\int_0^a e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = \int_0^a e^{-x^2}dx + e^{-a^2}\int_0^b e^{y^2}\sin 2ay\,dy$$

$$e^{b^2}\int_0^a e^{-x^2}\sin 2bx\,dx = \int_0^b e^{y^2}dy - e^{-a^2}\int_0^b e^{y^2}\cos 2ay\,dy.$$

Bei unendlich wachsenden a nähern sich die Producte

$$e^{-a^2}\int_0^b e^{y^2}\sin 2ay\,dy \quad \text{und} \quad e^{-a^2}\int_0^b e^{y^2}\cos 2ay\,dy$$

der gemeinschaftlichen Grenze Null, weil jedes der beiden Integrale einen endlichen, zwischen

$$+\int_0^b e^{y^2}dy \quad \text{und} \quad -\int_0^b e^{y^2}dy$$

liegenden Werth besitzt; man erhält demnach

$$22)\quad \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = e^{-b^2}\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-b^2},$$

$$23)\quad \int_0^\infty e^{-x^2}\sin 2bx\,dx = e^{-b^2}\int_0^b e^{y^2}dy.$$

b. In demselben Rechtecke wie vorhin nehmen wir erst die Diagonale OC, nachher die gebrochene Linie OAC als Integrationsweg. Um den geradlinigen Gang des Punktes $z = x + iy$ auszudrücken, muss in dem Integrale

$$\int_0^{a+ib} f(z)\,dz = \int_0^{a+ib} f(x+iy)(dx + i\,dy)$$

$y = \dfrac{b}{a}x$ gesetzt und x von 0 bis a ausgedehnt werden; das Integral verwandelt sich damit in

$$\left(1 + i\frac{b}{a}\right)\int_0^a f\left(x + i\frac{b}{a}x\right)dx.$$

Die Integration längs der gebrochenen Linie OAC wird ebenso wie bei der vorigen Anwendung ausgedrückt, und daher gilt die Gleichung

$$\frac{a+ib}{a}\int_0^a f\left(\frac{a+ib}{a}x\right)dx = \int_0^a f(x)\,dx + i\int_0^b f(a+iy)\,dy.$$

Substituirt man noch $a=\alpha\gamma$, $b=\beta\gamma$, linker Hand $x=\alpha\xi$ und rechts $y=\gamma\eta$, so erhält man

$$24)\quad (\alpha+i\beta)\int_0^\gamma f[(\alpha+i\beta)\xi]\,d\xi = \int_0^{\alpha\gamma} f(x)\,dx + i\gamma\int_0^\beta f[\gamma(\alpha+i\eta)]\,d\eta.$$

Hiernach ist z. B. für $f(z)=e^{-z^2}$, wenn die reellen und imaginären Bestandtheile beider Seiten verglichen werden,

$$\alpha\int_0^\gamma e^{-(\alpha^2-\beta^2)\xi^2}\cos(2\alpha\beta\xi^2)\,d\xi + \beta\int_0^\gamma e^{-(\alpha^2-\beta^2)\xi^2}\sin(2\alpha\beta\xi^2)\,d\xi$$

$$= \int_0^{\alpha\gamma} e^{-x^2}\,dx + \gamma e^{-\alpha^2\gamma^2}\int_0^\beta e^{\gamma^2\eta^2}\sin(2\alpha\gamma^2\eta)\,d\eta,$$

$$\beta\int_0^\gamma e^{-(\alpha^2-\beta^2)\xi^2}\cos(2\alpha\beta\xi^2)\,d\xi - \alpha\int_0^\gamma e^{-(\alpha^2-\beta^2)\xi^2}\sin(2\alpha\beta\xi^2)\,d\xi$$

$$= \gamma e^{-\alpha^2\gamma^2}\int_0^\beta e^{\gamma^2\eta^2}\cos(2\alpha\gamma^2\eta)\,d\eta.$$

Jedes der auf η bezüglichen Integrale hat einen zwischen

$$\int_0^\beta e^{\gamma^2\beta^2}(+1)\,d\eta = +\,\beta e^{\beta^2\gamma^2}$$

$$\text{und}\quad \int_0^\beta e^{\gamma^2\beta^2}(-1)\,d\eta = -\,\beta e^{\beta^2\gamma^2}$$

liegenden Werth, und daher sind die letzten Ausdrücke beider Gleichungen unter der gemeinschaftlichen Form

$$\varepsilon\beta\gamma e^{-(\alpha^2-\beta^2)\gamma^2}$$

enthalten, wo ε zwischen -1 und $+1$ liegt. Vorausgesetzt, dass $\alpha^2>\beta^2$ ist, convergirt dieses Product gegen die Null, wenn γ unendlich wächst, und es bleibt dann

$$\alpha\int_0^\infty e^{-(\alpha^2-\beta^2)\xi^2}\cos(2\alpha\beta\xi^2)\,d\xi + \beta\int_0^\infty e^{-(\alpha^2-\beta^2)\xi^2}\sin(2\alpha\beta\xi^2)\,d\xi = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\beta \int_0^\infty e^{-(\alpha^2-\beta^2)\xi^2} \cos(2\alpha\beta\,\xi^2)\,d\xi - \alpha \int_0^\infty e^{-(\alpha^2-\beta^2)\xi^2} \sin(2\alpha\beta\,\xi^2)\,d\xi = 0,$$

woraus folgt

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-(\alpha^2-\beta^2)\xi^2} \cos(2\alpha\beta\,\xi^2)\,d\xi &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \\ \int_0^\infty e^{-(\alpha^2-\beta^2)\xi^2} \sin(2\alpha\beta\,\xi^2)\,d\xi &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}, \end{aligned}\right\} \alpha^2 > \beta^2.$$

Für $\alpha^2 - \beta^2 = a$, $2\alpha\beta = b$, wo a nothwendig eine positive Constante sein muss, erhält man noch

$$25)\qquad \int_0^\infty e^{-a\xi^2} \cos(b\,\xi^2)\,d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{a^2+b^2}},$$

$$26)\qquad \int_0^\infty e^{-a\xi^2} \sin(b\,\xi^2)\,d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{a^2+b^2}},$$

wofür kürzer

$$\int_0^\infty e^{-(a+ib)\xi^2}\,d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2(a+ib)}}, \quad a > 0,$$

geschrieben werden kann, falls $\sqrt{a+ib}$ eindeutig genommen wird*).

V. Die Integrale asynektischer Functionen.

Das Fundamentaltheorem des vorigen Abschnittes gilt zwar nicht mehr, wenn der Integrationsweg des z durch einen Punkt geht oder einen Punkt einschliesst, in welchem $f(z)$ mehrdeutig, unendlich oder discontinuirlich wird, es kann aber dazu dienen, um gewisse, im Folgenden näher bezeichnete Punkte dieser Art zu umgehen. Die Eindeutigkeit einer Function $f(z)$ wird nämlich dadurch nicht gestört, dass $f(z)$ sich an irgend einer Stelle sprungweis ändert oder unendlich wird, wie z. B. der Bruch $1:(c-z)$, bei welchem für

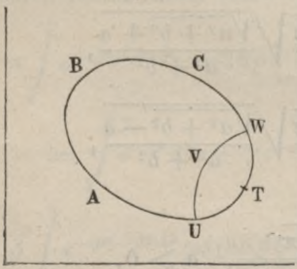
*) Die Formeln 21), 24) und eine Reihe ähnlicher sind zuerst von Cauchy entwickelt worden. Siehe dessen Mémoire sur les intégrales définies (Mémoires présentés à l'académie des sciences. Tome I, 1827), sowie die Abhandlung Recherche d'une formule générale qui fournit la valeur de la plupart des intégrales définies connues et celle d'un grand nombre d'autres (Annales de Gergonne, T. XVI et XVII).

$z = c$ beide Fälle zugleich eintreten. Wir wollen daher künftig voraussetzen, dass $f(z)$ innerhalb bekannter Grenzen eindeutig bleibe, aber innerhalb derselben Grenzen beliebig vielmal discontinuirlich oder unendlich, oder beides zugleich werden könne; die Punkte, in denen solche Fälle eintreten, mögen Ausnahmepunkte heissen.

Wie die Integrale solcher asynektischer Functionen zu behandeln sind, wird die folgende Untersuchung zeigen; sie theilt sich in zwei verschiedene Discussionen, je nachdem die vorkommenden Ausnahmepunkte auf dem Integrationswege, oder innerhalb eines geschlossenen Integrationsweges liegen.

A. In Fig. 16 sei $ABCA$ ein in sich zurücklaufender Integrationsweg, auf welchem ein einziger Ausnahmepunkt T liegen möge; mittelst einer beliebigen, innerhalb des Contours $ABCA$ gezogenen Linie UVW lässt sich nun leicht ein neuer Integrationsweg $ABCWVU$ herstellen, bei welchem der Punkt T so umgangen wird, dass derselbe ausgeschlossen bleibt. Für diesen neuen Integrationsweg gilt das Fundamentaltheorem des Abschnittes IV, es ist also

Fig. 16.



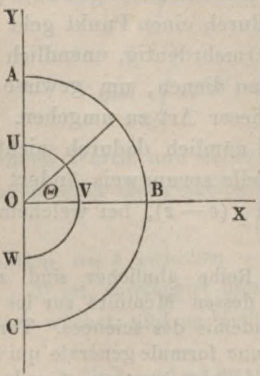
$$I(UABCW) + I(WVU) = 0$$

oder

$$I(UABCW) = I(UVW).$$

Man kann nun den Integrationsweg UVW dem Ausnahmepunkte T beliebig nahe kommen lassen, und dann nähert sich der Integrationsweg $UABCW$ mehr und mehr dem gegebenen Integrationswege $TABCT$; das gesuchte Integral erscheint jetzt als der Grenzwerth, gegen welchen das Integral $I(UVW)$ convergirt, sobald der Weg UVW, wofür man einen aus dem Mittelpunkte T beschriebenen Kreisbogen wählen kann, unendlich abnimmt.

Fig. 17.



Als Beispiel diene das Integral (Fig. 17)

$$\int \frac{e^{-z}}{z}\, dz,$$

und zwar bestehe der Integrationsweg aus einem mit dem Radius $OB = b$ aus dem Coordinatenanfange beschriebenen, nur positive x enthaltenden Halbkreise ABC nebst dem zugehörigen Durchmesser CA. Da die Function $\frac{e^{-z}}{z}$ für $z > 0$ und beliebige positive x synektisch bleibt, dagegen für $z = 0$ unendlich und zugleich discontinuirlich wird, so ist der Coordinatenanfang der einzig vorhandene, auf dem Integrationswege liegende Ausnahmepunkt. Zur Umgehung desselben wählen wir einen mit dem Radius $OU = r$ beschriebenen Halbkreis und erhalten

$$I(ABC) + I(CW) + I(WVU) + I(UA) = 0$$

oder

$$I(ABC) + I(CW) + I(UA) = I(UVW).$$

Im ersten Integrale substituiren wir $z = be^{i\theta}$, im zweiten und dritten $z = iy$, im vierten $z = re^{i\theta}$; dies giebt

$$\int_{+\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{1}{2}\pi} e^{-b(\cos\theta + i\sin\theta)} i\,d\theta + \int_{-b}^{-r} \frac{e^{-iy}}{y}\,dy + \int_{+r}^{+b} \frac{e^{-iy}}{y}\,dy$$

$$= \int_{+\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{1}{2}\pi} e^{-r(\cos\theta + i\sin\theta)} i\,d\theta$$

und bei verschwindendem r

$$i\int_{+\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{1}{2}\pi} e^{-b(\cos\theta + i\sin\theta)}\,d\theta + \int_{-b}^{+b} \frac{e^{-iy}}{y}\,dy = -i\pi,$$

womit der Werth des Integrales, bezogen auf den gegebenen Integrationsweg, bestimmt ist. Durch Vergleichung der imaginären Bestandtheile findet man noch

$$\int_{+\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{1}{2}\pi} e^{-b\cos\theta}\cos(b\sin\theta)\,d\theta - \int_{-b}^{+b} \frac{\sin y}{y}\,dy = -\pi,$$

oder, wie leicht zu sehen ist

$$2\int_0^b \frac{\sin y}{y}\,dy = \pi - 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-b\cos\theta}\cos(b\sin\theta)\,d\theta.$$

Lässt man b unendlich wachsen und berücksichtigt die für positive u geltende Relation

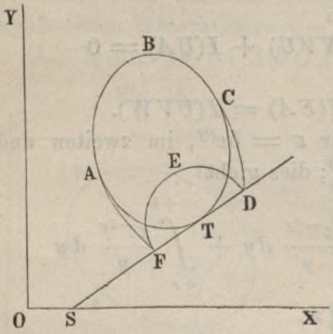
$$e^{-u} = \frac{1}{e^u} < \frac{1}{1 + \frac{1}{2}u^2},$$

so gelangt man zu der Formel

$$\text{27)} \qquad \int_0^\infty \frac{\sin y}{y}\, dy = \frac{\pi}{2}.$$

Die an dem vorstehenden Beispiele gezeigte Operation lässt sich folgendermaassen auf das allgemeine Integral $\int f(z)\,dz$ anwenden. In Fig. 18 bedeute T den einzigen, auf dem Integrationswege $ABCA$ liegenden Ausnahmepunkt, dessen rechtwinklige Coordinaten ξ und η heissen mögen; in T sei eine Tangente ST an den Integrationsweg gelegt und $\angle TSX = \tau$, endlich sei mit dem Radius $TF = r$ um T ein Halbkreis beschrieben, welcher die Tangente ST in F und D schneidet. Zieht man noch die Linien AF und DC, so erhält man einen neuen Contour $ABCDEFA$, welcher den Punkt T ausschliesst und mittelst hinreichend kleiner r immer so construirt werden kann, dass er keinen etwa sonst noch vorhandenen Ausnahmepunkt enthält. Wie früher ist nun

Fig. 18.



$$I(FABCD) = I(FED)$$

oder, wenn für irgend einen Punkt des Halbkreises

$$x = \xi + r\cos\vartheta, \quad y = \eta + r\sin\vartheta,$$

mithin

$$z = x + iy = \xi + i\eta + re^{i\vartheta} = \zeta + re^{i\vartheta}$$

gesetzt wird,

$$I(FABCD) = i\int_{\tau+\pi}^{\tau} f(\zeta + re^{i\vartheta})re^{i\vartheta}\, d\vartheta.$$

Bei unendlich abnehmenden r wird sich nun in manchen Fällen das Product

$$f(\zeta + re^{i\vartheta})\, re^{i\vartheta}$$

einer bestimmten Grenze nähern, welche λ heissen möge; die vorige Gleichung geht dann in die folgende über

$$I(TABCT) = i\int_{\tau+\pi}^{\tau} \lambda\, d\vartheta$$

und wenn überdiess λ unabhängig von ϑ ist, so wird

$$I(TABCT) = -\, i\pi\lambda.$$

Um dieses Resultat in einer Formel darstellen zu können, wollen wir mit

$$\int_{(s_1)} f(z)\, dz$$

ein Integral bezeichnen, auf dessen geschlossenem Integrationswege ein einziger Ausnahmepunkt vorkommt; wir haben dann die Formel

$$\int_{(s_1)} f(z)\, dz = -\, i\pi\lambda, \quad \lambda = Lim[\delta f(\zeta + \delta)],$$

worin zur Abkürzung $re^{i\vartheta} = \delta$ gesetzt worden ist.

Dieses Resultat lässt sich leicht auf den Fall ausdehnen, wo mehrere Ausnahmepunkte $T_1, T_2, \ldots T_n$ auf dem Integrationswege liegen. Bezeichnet man das betreffende Integral mit

$$\int_{(s_n)} f(z)\, dz$$

und wiederholt die vorige Betrachtung für jeden einzelnen Ausnahmepunkt, so erhält man

$$\int_{(s_n)} f(z)\, dz = -\, i\pi(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n),$$

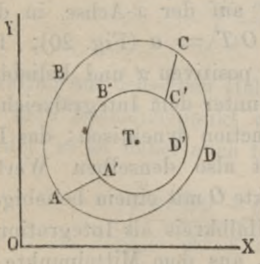
worin die einzelnen Grenzwerthe durch die Formel

$$\lambda_k = Lim[\delta f(\zeta_k + \delta)]$$

bestimmt werden.

B. Ist zweitens T in Fig. 19 ein Ausnahmepunkt, $ABCD$ ein um denselben herumgehender Integrationsweg von der Beschaffenheit, dass weder im Inneren noch auf der Peripherie von $ABCD$ ein zweiter Ausnahmepunkt und eben so wenig ein Verzweigungspunkt liegt, ist ferner $A'B'C'D'$ ein anderer Integrationsweg von derselben Eigenschaft, so kann man mittelst der beiden Verbindungslinien AA'

Fig. 19.



und CC' zwei neue geschlossene Curven $ABCC'B'A'$ und $ADCC'D'A'$ herstellen, von denen keine den Ausnahmepunkt T enthält. Es gilt daher, wenn diese beiden Curven als Integrationswege genommen werden, die Gleichung

$$I(ABCC'B'A') = I(ADCC'D'A'),$$

aus welcher durch Zerlegung folgt

$$I(ABC) + I(CC') + I(C'B'A') + I(A'A)$$
$$= I(ADC) + I(CC') + I(C'D'A') + I(A'A);$$

nach Hebung der beiderseits vorkommenden Integrale $I(CC')$ und $I(A'A)$ hat man auch

$$I(ABC) - I(ADC) = -I(C'B'A') + I(C'D'A')$$

oder, wenn im zweiten Integrale links und im ersten rechts die Richtung des Weges entgegengesetzt genommen wird,

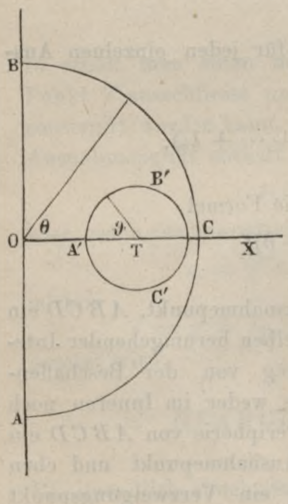
$$I(ABC) + I(CDA) = I(A'B'C') + I(C'D'A')$$

d. i.

$$I(ABCDA) = I(A'B'C'D'A').$$

Die Integration längs $ABCDA$ liefert also den nämlichen Werth, wie die Integration längs $A'B'C'D'A'$, falls $f(z)$ auf und zwischen beiden Wegen synektisch bleibt.

Fig. 20.



Mittelst dieses Satzes kann man einen gegebenen Integrationsweg auf einen kleineren, z. B. auf einen unendlich kleinen, aus dem Mittelpunkte T beschriebenen Kreis zurückführen.

Als Beispiel diene das Integral

$$\int \frac{e^{-z}}{a-z}\,dz,$$

worin a eine reelle positive Constante bezeichnen möge. Der Ausnahmepunkt T liegt hier auf der x-Achse in der Entfernung $OT = a$ (Fig. 20); für alle übrigen positiven x und beliebige y bleibt die unter dem Integralzeichen stehende Function synektisch; das Integral erhält also denselben Werth, wenn man erst einen aus dem Mittelpunkte O mit einem beliebigen Radius $b > a$ construirten geschlossenen Halbkreis als Integrationsweg nimmt, und nachher z einen vollen, aus dem Mittelpunkte T

beschriebenen Kreis durchlaufen lässt, dessen Halbmesser $r < b - a$ sein muss. Dies giebt zunächst

$$I(AB) + I(BCA) = I(A'B'C'A');$$

im ersten Integrale setzen wir $z = iy$, im zweiten $z = be^{i\theta}$, im dritten $z = a - re^{-i\vartheta}$ und erhalten

$$i\int_{-b}^{b} \frac{e^{-iy}}{a - iy} dy + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{1}{2}\pi} \frac{e^{-b(\cos\theta + i\sin\theta)}}{a - b(\cos\theta + i\sin\theta)} b(-\sin\theta + i\cos\theta)\, d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{-(a - r\cos\vartheta + ir\sin\vartheta)}\, d\vartheta$$

Dividirt man mit i und vergleicht dann beiderseits die reellen Theile, so findet man

$$\int_{-b}^{b} \frac{a\cos y + y\sin y}{a^2 + y^2} dy$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{be^{-b\cos\theta}[(a - b\cos\theta)\cos(\theta - b\sin\theta) - b\sin\theta\sin(\theta - b\sin\theta)]}{a^2 - 2ab\cos\theta + b^2} d\theta$$

$$+ e^{-a}\int_0^{2\pi} e^{r\cos\vartheta}\cos(r\sin\vartheta)\, d\vartheta$$

und hieraus wird für $b = \infty$ und $r = 0$

28) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a\cos y + y\sin y}{a^2 + y^2} dy = 2\pi e^{-a}.$$

Bezieht man in dem analogen Integrale

$$\int \frac{e^{-z}}{a + z} dz$$

die Integration auf denselben Halbkreis wie vorhin, so ergiebt sich, weil hier kein Ausnahmepunkt vorkommt, dass der Integralwerth verschwindet; es ist daher auch für $b = \infty$ der reelle Theil

29) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a\cos y - y\sin y}{a^2 + y^2} dy = 0.$$

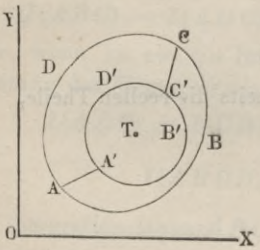
Aus den Gleichungen 28) und 29) folgt noch

$$30)\quad \int_0^\infty \frac{\cos y}{a^2+y^2}dy = \frac{\pi}{2a}e^{-a}, \int_0^\infty \frac{y \sin y}{a^2+y^2}dy = \frac{\pi}{2}e^{-a},$$

worin a eine positive, die Null übersteigende Constante sein muss. Die zweite Formel giebt übrigens, wie man aus Nr. 27) ersieht, auch für $a = 0$ ein richtiges Resultat.

Es hat keine Schwierigkeit, die an dem vorigen Beispiele gezeigte Operation zu verallgemeinern. Ist nämlich T der einzige Ausnahmepunkt innerhalb der beiden geschlossenen Integrationswege $ABCD$ und $A'B'C'D'$ (Fig. 21), mithin

Fig. 21.



$$I(ABCD) = I(A'B'C'D'),$$

so nehme man für letzteren einen aus T mit dem Radius r beschriebenen Kreis von hinreichender Kleinheit, und transformire das zweite Integral in Polarcoordinaten. Die rechtwinkligen Coordinaten von T mögen ξ und η heissen; für alle Punkte des Kreises $A'B'C'D'$ ist dann

$$x = \xi + r\cos\vartheta,\quad y = \eta + r\sin\vartheta$$

oder, wenn $x + iy = z$, $\xi + i\eta = \zeta$ gesetzt wird,

$$z = \zeta + re^{i\vartheta},$$

mithin

$$I(ABCD) = i\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+2\pi} f(\zeta + re^{i\vartheta})\, r e^{i\vartheta}\, d\vartheta,$$

worin ϑ_0 den Anfangswerth von ϑ bezeichnet. Bei unendlich abnehmendem r wird hieraus, wenn man die in A eingeführte Bezeichnung beibehält

$$I(ABCD) = i\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+2\pi} \lambda\, d\vartheta = i.2\pi\lambda.$$

Um dieses Resultat durch eine Formel darstellen zu können, wollen wir ein Integral, welches sich auf einen geschlossenen, nur einen Ausnahmepunkt enthaltenden Integrationsweg bezieht, mit

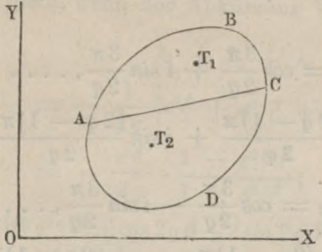
$$\int_{(0_1)} f(z)\, dz$$

bezeichnen; wir haben dann die Gleichung

$$\int_{(0_1)} f(z)\, dz = 2i\pi\lambda,\qquad \lambda = Lim\,[\delta f(\zeta + \delta)].$$

Dieses Ergebniss lässt sich mit Leichtigkeit auf den Fall ausdehnen, wo innerhalb des geschlossenen Integrationsweges zwei Ausnahmepunkte T_1 und T_2 vorkommen, welche durch die Coordinatencomplexe $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$ und $\zeta_2 = \xi_2 + i\eta_2$ bestimmt sein mögen. Eine Querlinie AC theilt nämlich den Umfang $ABCDA$ (Fig. 22) in zwei geschlossene Curven, und es ist dabei immer möglich, AC so zu legen, dass der eine Theil $ABCA$ nur den einen Ausnahmepunkt T_1, der andere $CDAC$ nur den Punkt T_2 enthält. Für die einzelnen Theile ist nun nach Nro. 32)

Fig. 22.



$$I(ABCA) = 2i\pi\lambda_1, \quad I(CDAC) = 2i\pi\lambda_2;$$

andererseits hat man durch Zerlegung

$$\begin{aligned} I(ABCDA) &= I(ABCA) + I(ACDA) \\ &= I(ABC) + I(CA) + I(AC) + I(CDA); \end{aligned}$$

das zweite und dritte Integral rechter Hand heben sich, und für die übrigen kann man ihre vorhin bestimmten Werthe setzen, wodurch entsteht

$$\int_{(o_2)} f(z)\,dz = 2i\pi(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Auf gleiche Weise erhält man die allgemeine Formel *)

$$\int_{(o_n)} f(z)\,dz = 2i\pi(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)$$

$$\lambda_k = Lim[\delta f(\zeta_k + \delta)].$$

Als Beispiel hierzu betrachten wir das Integral

$$\int \frac{z^{2p}}{1 + z^{2q}}\,dz,$$

worin p und q ganze positive Zahlen bedeuten mögen und z einen über der x-Achse liegenden geschlossenen Halbkreis durchlaufen soll, dessen Mittelpunkt der Coordinatenanfang und dessen Radius $R > 1$ ist. Die eindeutige Function

$$f(z) = \frac{z^{2p}}{1 + z^{2q}}$$

*) Diesen Satz hat Cauchy gefunden und unter etwas anderer Form in dem schon erwähnten Mémoire sur les intégrales définies dargestellt.

wird so oft unendlich und zugleich discontinuirlich, als der Nenner durch Null hindurchgeht; im Ganzen existiren demnach $2q$ Ausnahmepunkte, deren z die Werthe von $\sqrt[2q]{-1}$ sind, nämlich (Theil I., Seite 257)

$$\zeta_1 = \cos\frac{\pi}{2q} + i\sin\frac{\pi}{2q},\quad \zeta_2 = \cos\frac{3\pi}{2q} + i\sin\frac{3\pi}{2q},\ \dots$$

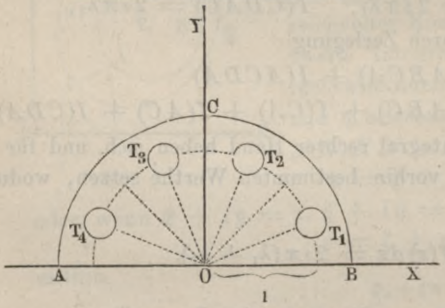
$$\zeta_q = \cos\frac{(2q-1)\pi}{2q} + i\sin\frac{(2q-1)\pi}{2q},$$

$$\zeta_{q+1} = \cos\frac{\pi}{2q} - i\sin\frac{\pi}{2q},\quad \zeta_{q+2} = \cos\frac{3\pi}{2q} - i\sin\frac{3\pi}{2q},\ \dots$$

$$\zeta_{2q} = \cos\frac{(2q-1)\pi}{2q} - i\sin\frac{(2q-1)\pi}{2q}.$$

Von diesen $2q$ Ausnahmepunkten liegen die q ersten über, die q übrigen unter der Abscissenachse; die letzteren fallen ausserhalb des vorhin angegebenen Integrationsweges und kommen daher nicht in Betracht (Fig. 23 zeigt die oberen Ausnahmepunkte für den Fall $q = 4$). Das Integral besteht nun aus den beiden Theilen $I(AOB)$ und $I(BCA)$; im ersten schreiben wir x für z, im zweiten substituiren wir $z = Re^{i\theta}$ und erhalten

Fig. 23.



$$\int_{-R}^{R}\frac{x^{2p}}{1+x^{2q}}\,dx + i\int_0^{\pi}\frac{R^{2p+1}e^{i(2p+1)\theta}}{1+R^{2q}e^{i2q\theta}}\,d\theta$$
$$= 2i\pi(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_q).$$

Nennen wir ζ irgend eine der Wurzeln $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_q$, so gehört dazu der Grenzwerth

$$\lambda = Lim\frac{\delta(\zeta+\delta)^{2p}}{1+(\zeta+\delta)^{2q}} = Lim\frac{\delta(\zeta+\delta)^{2p}}{1+\zeta^{2q}+(2q)_1\zeta^{2q-1}\delta+(2q)_2\zeta^{2q-2}\delta^2+\cdots}$$

oder wegen $\zeta^{2q} = -1$ und nach Hebung von δ im Zähler und Nenner

$$\lambda = \frac{\zeta^{2p}}{(2q)_1\zeta^{2q-1}} = -\frac{\zeta^{2p+1}}{2q}.$$

Dies giebt, wenn zur Abkürzung $\frac{(2p+1)\pi}{2q} = \beta$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_q \\
&= -\frac{1}{2q}\left\{e^{i\beta} + e^{3i\beta} + e^{5i\beta} + \cdots + e^{(2q-1)i\beta}\right\} \\
&= -\frac{e^{i\beta}}{2q} \cdot \frac{1 - e^{2qi\beta}}{1 - e^{2i\beta}};
\end{aligned}$$

darin ist $e^{2qi\beta} = \cos 2q\beta + i \sin 2q\beta = \cos(2p+1)\pi + i \sin(2p+1)\pi = -1$, folglich

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_q$$

$$= -\frac{1}{q} \cdot \frac{\cos\beta + i\sin\beta}{1 - \cos 2\beta - i \sin 2\beta} = -\frac{1}{q} \cdot \frac{\cos\beta + i\sin\beta}{2\sin\beta(\sin\beta - i\cos\beta)}$$

$$= -\frac{1}{q} \cdot \frac{i}{2\sin\beta} = -\frac{i}{2q\sin\frac{(2p+1)\pi}{2q}}.$$

Man hat demnach die Integralformel

$$\int_{-R}^{R} \frac{x^{2p}}{1+x^{2q}}\,dx + i \int_0^{\pi} \frac{R^{2p+1} e^{(2p+1)i\theta}}{1 + R^{2q} e^{2qi\theta}}\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{q\sin\frac{(2p+1)\pi}{2q}}.$$

Lässt man R ins Unendliche wachsen und setzt $2p+1 < 2q$ voraus, so convergirt das zweite Integral linker Hand gegen die Null, und es bleibt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2p}}{1+x^{2q}}\,dx = \frac{\pi}{q\sin\frac{(2p+1)\pi}{2q}}$$

oder

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2p}}{1+x^{2q}}\,dx = \frac{\pi}{2q\sin\frac{(2p+1)\pi}{2q}}, \quad 2p+1 < 2q.$$

Mittelst der Substitutionen

$$x^{2q} = t, \quad x = t^{\frac{1}{2q}}, \quad \frac{2p+1}{2q} = \mu,$$

wobei $t^{\frac{1}{2q}}$ im absoluten Sinne zu nehmen ist, erhält man noch die Formel

31) $$\int_0^\infty \frac{t^{\mu-1}}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{\sin \mu\pi},\ \ 0 < \mu < 1,$$

welche in Thl. I, S. 433, auf anderem Wege entwickelt wurde.

Besondere Aufmerksamkeit verdient noch der Fall, wo das Product

$$f(\zeta + r e^{i\vartheta})\, r e^{i\vartheta}$$

bei verschwindendem r unendlich wird; das Integral, bezogen auf den mit r beschriebenen Kreis, erhält dann die Form

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+2\pi} \infty\,.\,d\vartheta,$$

die ebenso vieldeutig und unbestimmt ist, wie z. B. die Ausdrücke $\frac{0}{0}$, $0\,.\,\infty$ u. dergl. *). In solchen Fällen muss man das bisherige Verfahren auf passende Weise modificiren; wir wollen dies an Beispielen zeigen, da sich eine allgemeine Regel nicht geben lässt.

Bezeichnet p eine ganze positive Zahl, so führt die gewöhnliche Substitution $z = \zeta + r e^{i\vartheta}$ zu der Gleichung

$$\int \frac{z^p\,dz}{(z-\zeta)^2} = i \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+2\pi} \frac{(\zeta + r e^{i\vartheta})^p}{r e^{i\vartheta}}\,d\vartheta,$$

deren rechte Seite für $r = 0$ die oben erwähnte unbestimmte Form erhalten würde; dagegen ist nach dem binomischen Satze

$$\int \frac{z^p\,dz}{(z-\zeta)^2}$$
$$= i \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+2\pi} \left\{ \frac{\zeta^p}{r} e^{-i\vartheta} + (p)_1 \zeta^{p-1} + (p_2)\,\zeta^{p-2} r e^{i\vartheta} + \cdots \right\} d\vartheta$$

und durch Integration der einzelnen Glieder

---

*) So ist z. B.

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+2\pi} \frac{1}{r}\,d\vartheta = \frac{2\pi}{r} = \infty$$

bei verschwindendem r. Dagegen hat man für jedes endliche r

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+2\pi} \frac{1}{r e^{i\vartheta}}\,d\vartheta = \frac{1}{r} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+2\pi} (\cos\vartheta - i \sin\vartheta)\,d\vartheta = 0,$$

und dies bleibt auch für beliebig kleine r richtig.

$$\int \frac{z^p\, dz}{(z-\zeta)^2} = 2\, i\pi p \zeta^{p-1}.$$

Die Grösse von r bleibt hier ganz willkürlich; das Resultat gilt daher auch für verschwindende r.

Wegen einer späteren sehr wichtigen Anwendung betrachten wir noch die Integrale

$$\int \frac{F(z)}{z-\zeta} dz, \quad \int \frac{F(z)}{(z-\zeta)^2} dz, \quad \int \frac{F(z)}{(z-\zeta)^3} dz \ldots,$$

wobei der Integrationsweg eine geschlossene Curve sein möge, auf und innerhalb welcher $F(z)$ synektisch bleibt. Das erste Integral bietet keine Schwierigkeit, weil sich hier

$$r e^{i\vartheta} f(\zeta + r e^{i\vartheta}) = F(\zeta + r e^{i\vartheta})$$

der endlichen bestimmten Grenze $F(\zeta)$ nähert; es ist daher

32) $$\int \frac{F(z)}{z-\zeta} dz = 2\, i\pi\, F(\zeta).$$

Im zweiten Integrale tritt der vorhin erwähnte Ausnahmefall ein; man kann ihn aber leicht dadurch vermeiden, dass man erst das Integral

$$\int \frac{F(z)}{(z-\zeta)(z-\zeta_1)} dz$$

betrachtet und nachher ζ_1 in ζ übergehen lässt. Als Werth des vorstehenden Integrales findet man nach der bisherigen Methode oder durch Zerlegung in Partialbrüche

$$2\, i\pi \frac{F(\zeta_1) - F(\zeta)}{\zeta_1 - \zeta}$$

also für $\zeta_1 = \zeta + h$

$$\int \frac{F(z)}{(z-\zeta)(z-\zeta-h)} dz = 2\, i\pi \frac{F(\zeta+h) - F(\zeta)}{h},$$

und bei verschwindendem h

$$\int \frac{F(z)}{(z-\zeta)^2} dz = 2\, i\pi\, F'(\zeta).$$

Dieses Verfahren lässt sich ohne Mühe verallgemeinern, und zwar giebt dasselbe, falls $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ von einander verschieden sind,

$$\int \frac{F(z)\,dz}{(z-\zeta)(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)\dots(z-\zeta_n)}$$
$$= 2i\pi\left\{\frac{F(\zeta)}{(\zeta-\zeta_1)(\zeta-\zeta_2)(\zeta-\zeta_3)\dots(\zeta-\zeta_n)}\right.$$
$$+\frac{F(\zeta_1)}{(\zeta_1-\zeta)(\zeta_1-\zeta_2)(\zeta_1-\zeta_3)\dots(\zeta_1-\zeta_n)}$$
$$+\frac{F(\zeta_2)}{(\zeta_2-\zeta)(\zeta_2-\zeta_1)(\zeta_2-\zeta_3)\dots(\zeta_2-\zeta_n)}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\left.+\frac{F(\zeta_n)}{(\zeta_n-\zeta_1)(\zeta_n-\zeta_2)(\zeta_n-\zeta_3)\dots(\zeta_n-\zeta_{n-1})}\right\}.$$

Nimmt man specieller $\zeta_1 = \zeta + h$, $\zeta_2 = \zeta + 2h$, $\zeta_3 = \zeta + 3h$ u. s. w., so erhält man hieraus

$$\int \frac{F(z)\,dz}{(z-\zeta)(z-\zeta-h)(z-\zeta-2h)\dots(z-\zeta-nh)}$$
$$= \frac{(-1)^n 2i\pi}{1\,.\,2\dots n}\cdot\frac{(n)_0F(\zeta)-(n)_1F(\zeta+h)+(n)_2F(\zeta+2h)-\cdots}{h^n}$$

oder, wenn rechter Hand die Anordnung der Summanden umgekehrt wird,

$$\int \frac{F(z)\,dz}{(z-\zeta)(z-\zeta-h)(z-\zeta-2h)\dots(z-\zeta-nh)}$$
$$= \frac{2i\pi}{1\,.\,2\,.\,3\dots n}\cdot\frac{\varDelta^n F(\zeta)}{\varDelta\zeta^n},\qquad \varDelta\zeta = h.$$

Durch Uebergang zur Grenze für unendlich abnehmende $\varDelta\zeta = h$ folgt noch

33) $$\int \frac{F(z)\,dz}{(z-\zeta)^{n+1}} = \frac{2i\pi}{1\,.\,2\,.\,3\dots n}F^{(n)}(\zeta).$$

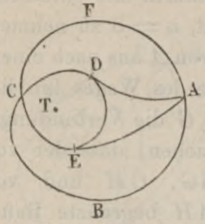
Der hier vorkommende Ausnahmepunkt ist gewissermaassen als ein $(n+1)$facher zu betrachten, weil sich in ihm die $n+1$ vorherigen Ausnahmepunkte vereinigt haben.

VI. Die vieldeutigen Integrale.

Bei den vorigen Untersuchungen wurde stillschweigend angenommen, dass der Integrationsweg eine einfache geschlossene Curve sei, welche einen gegebenen Ausnahmepunkt nur einmal umläuft; diese Beschränkung wollen wir jetzt aufheben, also eine mehrmalige Umkreisung eines Ausnahmepunktes zulassen.

Als Integrationsweg nehmen wir zuerst die Curve $ABCDECFA$, welche sich in C selber schneidet und den Ausnahmepunkt T zweimal umkreist (Fig. 24).

Fig. 24.



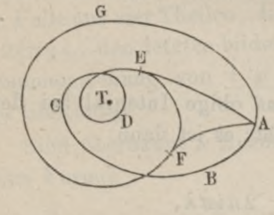
Zieht man die beiden Verbindungslinien AD und AE so, dass der Raum ADE den Ausnahmepunkt T nicht enthält, was auf unendlich viele Arten möglich ist, so lässt sich der von D bis E reichende Theil des ganzen Integrationsweges durch den Weg DAE ersetzen, man erhält daher als gesammten neuen Integrationsweg die Curve $ABCDAECFA$, welche in die beiden einfachen Curven $ABCDA$ und $AECFA$ zerfällt. Nun ist

$$I(ABCDAECFA) = I(ABCDA) + I(AECFA);$$

jedes der Integrale rechter Hand reducirt sich wie früher auf das Integral längs eines unendlich kleinen um T beschriebenen Kreises, und hat den Werth $2i\pi\lambda$; der Werth des ganzen Integrales ist daher $= 4i\pi\lambda$, da beide Umläufe nach derselben Richtung vor sich gehen.

Auf ähnliche Weise lässt sich ein dreimaliger Umgang $ABCDEFG$ (Fig. 25) in den Doppelumgang $ABCDEA$ und in den einfachen Umgang $AFGA$ zerlegen; der Werth des Integrales ist dann $6i\pi\lambda$. Ueberhaupt entspricht einem n-maligen Umgange der Integralwerth $2ni\pi\lambda$ oder $-2ni\pi\lambda$, jenachdem der Umgang in der positiven oder negativen Drehungsrichtung erfolgt ist.

Fig. 25.

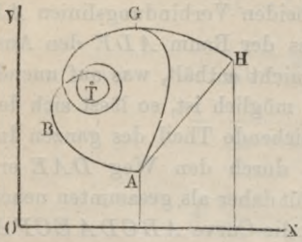


Hieran knüpft sich eine allgemeine Bemerkung rücksichtlich des zwischen gegebenen Grenzen $z = z_0$ und $z = z_1$ genommenen Integrales

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz$$

für den Fall, dass $f(z)$ bei irgend welchen Werthen von z discontinuirlich oder unendlich werden kann. Ist nämlich nur ein Ausnahmepunkt für $z = \zeta$ vorhanden und sind die Punkte A, H, T die Repräsentanten der Werthe $z = z_0$, $z = z_1$, $z = \zeta$ (Fig. 26 a. f. S.), so besteht die allgemeinste Art des Ueberganges von A nach H in der Verfolgung einer Curve, welche von A ausgeht, den Punkt T mehrfach, etwa n-mal, umkreist und in H endigt. Der Specialfall, wo keine Umkreisung des Ausnahmepunktes stattfindet, ist hierin mit enthalten, weil es freisteht, $n = 0$ zu nehmen. Man kann nun von A aus nach einem gegen das Ende des Weges hin liegenden Punkte G die Verbindungslinie AG so ziehen, dass der von den Linien AG, GH und von der Geraden AH begrenzte Raum AGH den Ausnahmepunkt T nicht enthält. Der Integrationsweg GH lässt sich dann durch den Weg GAH ersetzen. Der gesammte Weg des z zerfällt hiermit in die geschlossene, von A ausgehende und nach n Umläufen wieder in A anlangende Curve $ABGA$ und in die Gerade AH. Berücksichtigt man noch, dass die Curve $ABGA$ dem n-maligen Umlaufe in einem unendlich kleinen Kreise äquivalent ist, so hat man den Satz: alle möglichen Integrationswege zwischen A und H reduciren sich zuletzt auf eine beliebig vielfache Durchlaufung eines um T beschriebenen Elementarkreises und auf den geradlinigen Weg AH. Dieses Theorem ist leicht in einer Formel darzustellen, wenn man mit

Fig. 26.



$$\int\!\!\!\!/_{z_0}^{z_1} f(z)\, dz$$

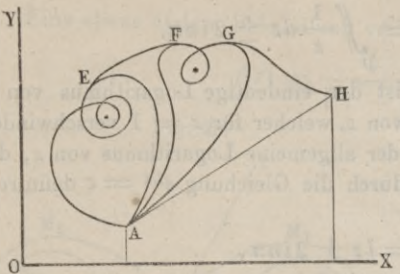
denjenigen Werth bezeichnet, welchen das obige Integral bei der Integration längs der Geraden AH erreicht; es ist dann

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\, dz = \int\!\!\!\!/_{z_0}^{z_1} f(z)\, dz \pm 2 n i \pi \lambda,$$

wobei die verschiedenen Vorzeichen den verschiedenen Drehungsrichtungen entsprechen. Wie man sieht, ist ein Integral unendlich vieldeutig, sobald ein Ausnahmepunkt vorkommt.

Diese Betrachtungen sind leicht auf den Fall auszudehnen, wo die Function $f(z)$ zwei Ausnahmepunkte besitzt. Als Integrationsweg zwischen A und H nehmen wir zunächst eine Curve, die von A ausgeht, erst den einen, dann den anderen Ausnahmepunkt mehrmals umwindet und in H endigt (Fig. 27). Ersetzt man den Bogen EF durch EAF und analog GH durch GAH, so zerfällt der gesammte Integrationsweg in zwei geschlossene Curven, von denen die eine den ersten, die andere den zweiten Ausnahmepunkt mehrfach umkreist, und in die gerade Linie AH. Das allgemeine Integral besteht daher aus drei Theilen; die beiden ersten Theile entsprechen beliebig vielen Umläufen in Elementarkreisen um die Ausnahmepunkte; der letzte Theil ist das geradlinige Integral zwischen den gegebenen Grenzen. Bei umgekehrter Anordnung hat man demnach, wenn n_1 und n_2 die Umlaufszahlen bedeuten,

Fig. 27.



$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = \int\!\!\!\!\!/_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz + 2i\pi(\pm n_1\lambda_1 \pm n_2\lambda_2).$$

Man kann sich auch vorstellen, dass der Integrationsweg, von A ausgehend, zunächst den ersten Ausnahmepunkt p-mal umkreise, dann den zweiten Ausnahmepunkt n_2-mal, hierauf wieder den ersten q-mal und nun erst dem Punkte H zulaufe. Dies ändert aber nichts an der obigen Formel. Wie leicht zu sehen ist, besteht das Integral in diesem Falle aus vier Theilen; die ersten drei sind $\pm 2i\pi p\lambda_1$, $\pm 2i\pi n_2\lambda_2$, $\pm 2i\pi q\lambda_1$, den letzten bildet wieder das geradlinige Integral. Durch Zusammenziehung von $\pm p \pm q$ in $\pm n_1$ erhält man wieder die vorige Gleichung.

Sind überhaupt k Ausnahmepunkte vorhanden, so gilt die allgemeine Formel

$$34)\quad \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = \int\!\!\!\!\!/_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz + 2i\pi(\pm n_1\lambda_1 \pm n_2\lambda_2 \pm \cdots \pm n_k\lambda_k),$$

$$\lambda = Lim[\delta f(\zeta + \delta)],$$

und es ist dabei gleichgültig, in welcher Reihenfolge die Umläufe um die Ausnahmepunkte gedacht werden. Nur mag noch einmal daran erinnert sein, dass die ganze Betrachtung eine monodrome Function $f(z)$ voraussetzt, weil im Gegenfalle die vorgenommenen Wegeverlegungen (z. B. EAF statt EF in Fig. 27) nicht erlaubt sein würden.

Als erstes Beispiel nehmen wir die Function

$$f(z) = \frac{1}{z},$$

welche nur einen Ausnahmepunkt für $z = 0$ besitzt. Hier ist $\lambda = 1$ mithin für $z_0 = 1$ und $z_1 = z$

$$\int_1^z \frac{1}{z}\, dz = \int\!\!\!\int_1^z \frac{1}{z}\, dz \pm 2in\pi.$$

Das Integral rechter Hand ist der eindeutige Logarithmus von z, d. h. derjenige Logarithmus von z, welcher für $z = 1$ verschwindet; das Integral linker Hand ist der allgemeine Logarithmus von z, den wir mit Lz bezeichnen und durch die Gleichung $e^{Lz} = z$ definiren. Die Formel lautet demnach

35) $$Lz = lz \pm 2in\pi,$$

und enthält den bekannten Satz von der unendlichen Vieldeutigkeit des allgemeinen Logarithmus. Wäre diese Function nicht schon aus der Algebra bekannt, so würde man sie durch die Integralrechnung kennen gelernt und mittelst der Gleichung

$$Lz = \int_1^z \frac{1}{z}\, dz$$

definirt haben; diese Definition hätte dann auch die Vieldeutigkeit von Lz gezeigt, sobald nur alle möglichen Integrationswege zwischen $z = 1$ und $z = z$ berücksichtigt wurden.

Ein zweites Beispiel liefert die Function

$$f(z) = \frac{1}{1 + z^2},$$

welche zwei Ausnahmepunkte an den Stellen $z = +i$ und $z = -i$ besitzt. Es ist hier

$$\lambda_1 = Lim \frac{\delta}{1 + (i + \delta)^2} = Lim \frac{1}{2i + \delta} = +\frac{1}{2i},$$

$$\lambda_2 = Lim \frac{\delta}{1 + (-i + \delta)^2} = Lim \frac{1}{-2i + \delta} = -\frac{1}{2i},$$

mithin für $z_0 = 0$, $z_1 = z$,

$$\int_0^z \frac{1}{1 + z^2}\, dz = \int\!\!\!\int_0^z \frac{1}{1 + z^2}\, dz + \pi(\pm n_1 \pm n_2),$$

wobei $\pm n_1 \pm n_2$ zu einer beliebigen ganzen positiven oder negativen Zahl n zusammengezogen werden kann. Das Integral rechter Hand ist $= arctan\, z$ in dem gewöhnlichen eindeutigen Sinne, wonach $arctan\, 0$ verschwindet; das Integral linker Hand bezeichnen wir mit $Arctan\, z$ und verstehen darunter irgend einen Bogen, der z zur Tangente hat. Die Gleichung

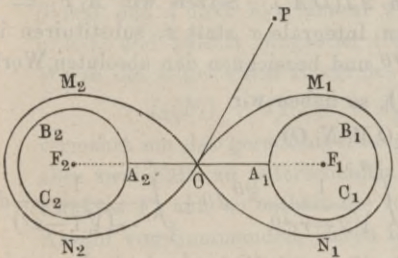
36) $$Arctan\, z = arctan\, z \pm n\pi$$

enthält nun den bekannten Satz, dass einer gegebenen Tangente unendlich viele Bögen entsprechen, die um je π von einander differiren.

Eine etwas andere Behandlung verlangt die Function

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}},$$

Fig. 28.



weil dieselbe nicht monodrom ist und für $z = +1$ sowie für $z = -1$ gleichzeitig Ausnahmepunkte und Verzweigungspunkte besitzt, welche in Fig. 28 mit F_1 und F_2 bezeichnet sind. Analog dem vorigen Beispiele soll hier der Werth des allgemeinen Integrales

$$\int_0^z \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}\, dz$$

für einen ganz beliebigen Integrationsweg untersucht werden, oder, was dasselbe ist, man verlangt alle möglichen Werthe von *Arcsin* z, wenn unter diesem Zeichen irgend ein Bogen verstanden wird, der z zum Sinus hat.

Dem Werthe $z = 0$ entspricht der Anfangswerth $f(0) = \pm 1$; um diese Doppeldeutigkeit zu vermeiden, wollen wir $f(0) = +1$ nehmen, also nur den einen Zweig der Curve beachten. Ferner sei der Punkt P der Repräsentant der oberen Integrationsgrenze z; wir haben dann wieder zu untersuchen, welche Werthe das vorige Integral annimmt, wenn der Integrationsweg, von O ausgehend, die Punkte F_1 und F_2 mehrfach umwindet und in P endigt.

Lassen wir zunächst die Variabele z von O aus die geschlossene Curve OM_1N_1O durchlaufen, welche den Punkt F_1 einmal umkreist, so können wir wie früher diesen Weg mittelst zweier Hülfslinien auf die Gerade OA_1, den Kreis $A_1B_1C_1$ und die Gerade A_1O zurückführen. Bei einer monodromen Function würde der Werth, den $f(z)$ im Anfangspunkte A_1 des Kreises hat, derselbe sein, wie der Endwerth, den $f(z)$ nach Durchlaufung des Kreises bei der Rückkehr in A_1 erhält; bei der vorliegenden Function verhält sich aber die Sache gerade umgekehrt, weil $\sqrt{1 - z^2}$ beim Umlaufe um den Verzweigungspunkt sein Vorzeichen ändert (Seite 45). Die Function ist daher positiv auf dem Hinwege OA_1, negativ auf dem Rückwege $A_1 O$, und wenn z wieder nach O zurückgelangt ist, hat $f(z)$ den Werth -1 angenommen. Dieser Umstand influirt wesentlich auf das Integral $\int f(z)\,dz$, wenn dasselbe längs der Curve $OM_1 N_1 O$ genommen wird; in der Gleichung

$$I(OM_1 N_1 O) = I(OA_1) + I(A_1 B_1 C_1 A_1) + I(A_1 O)$$

heben sich nämlich die Integrale $I(OA_1)$ und $I(A_1 O)$ nicht auf, vielmehr geben sie zusammen $2I(OA_1)$. Setzen wir $A_1 F_1 = r$, schreiben im ersten und letzten Integrale x statt z, substituiren im zweiten Integrale $z = 1 - re^{i\theta}$ und bezeichnen den absoluten Werth von $\sqrt{1-z^2}$ mit $(\sqrt{1-z^2})$, so haben wir

$$I(OM_1 N_1 O)$$

$$= \int\limits_0^{1-r} \frac{1}{+(\sqrt{1-x^2})}dx - i\sqrt{r}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2-re^{i\theta}}}e^{\frac{1}{2}i\theta}d\theta + \int\limits_{1-r}^{0}\frac{1}{-(\sqrt{1-x^2})}dx.$$

Durch Uebergang zur Grenze für unendlich abnehmende r wird hieraus

$$I(OM_1 N_1 O) = \pi.$$

Bei einem zweiten Umlaufe um F_1 bleibt diese Betrachtung im Wesentlichen dieselbe, nur ändert sich das Vorzeichen, weil jetzt $f(z)$ mit dem vorhin erwähnten Endwerthe -1 anfängt und mit dem Endwerthe $+1$ zurückkehrt; für den zweiten Umlauf gilt also der Integralwerth $-\pi$. Bezeichnet $I_n(F_1)$ den Werth, welchen das Integral nach n Umläufen um F_1 erhält, so ist

$$I_2(F_1) = 0,\quad I_3(F_1) = \pi,\quad I_4(F_1) = 0,\quad I_5(F_1) = \pi, \ldots.$$

Eine gerade Anzahl von Umläufen giebt demnach Dasselbe wie kein Umlauf, und wenn daher überhaupt von Umkreisungen des Punktes F_1 die Rede sein soll, so muss deren Anzahl eine ungerade Zahl ausmachen.

Nach einer solchen Reihe von Umläufen ist z wieder zu Null, $f(z)$ zu -1 geworden, und man kann jetzt zu Umläufen um F_2 übergehen. Durch eine ganz ähnliche Betrachtung wie vorhin ergiebt sich hierbei, wenn für das Integral längs des Kreises $A_2 B_2 C_2 A_2$ die Substitution $z = -1 + re^{i\theta}$ benutzt wird,

$$\int\limits_0^{-(1-r)}\frac{1}{-(\sqrt{1-x^2})}dx + i\sqrt{r}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2-re^{i\theta}}}e^{\frac{1}{2}i\theta}d\theta + \int\limits_{-(1-r)}^{0}\frac{1}{+(\sqrt{1-x^2})}dx$$

und bei verschwindendem r

$$I_1(F_2) = \pi.$$

Nach diesem Umgange hat die Function den Werth $+ 1$ erhalten, welcher dem Anfangswerthe entgegengesetzt ist. Geht man wieder von diesem Werthe aus, so findet man für den zweiten Umlauf den Integralwerth $- \pi$, folglich

$$I_2(F_2) = 0, \quad I_3(F_2) = \pi, \quad I_4(F_2) = 0, \quad I_5(F_2) = \pi, \ldots\ldots$$

Der allgemeinste Integrationsweg zwischen $z = 0$ und $z = z$ besteht nun darin, dass man erst α-mal den Punkt F_1 umkreist, dann β-mal den Punkt F_2, hierauf wieder γ-mal um F_1, δ-mal um F_2 u. s. f. und zuletzt längs der Geraden von O nach P geht. Der Werth des allgemeinen Integrales ist hiernach gleich der Summe von

$$I_\alpha(F_1) + I_\beta(F_2) + I_\gamma(F_1) + I_\delta(F_2) + \cdots$$

vermehrt um das geradlinige Integral zwischen 0 und z. Hierbei sind aber zwei Fälle zu unterscheiden. Hört man mit Umkreisungen des Punktes F_2 auf, so enthält die vorstehende Reihe der I eine gerade Anzahl von Summanden, deren letzter $I_\mu(F_2)$ ist und wobei α, β, γ, ... μ ungerade Zahlen bedeuten, weil sonst die betreffenden Umläufe gar nicht zu rechnen wären; als Summe der obigen Reihe hat man jetzt $2n\pi$, wo n eine beliebige ganze Zahl ist. Nach diesen Umläufen kommt $f(z)$ mit dem Werthe $f(0) = + 1$ in O an, mithin ist

$$\int_0^z \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,dz = 2n\pi + \int\!\!\!\!\!/_0^z \frac{1}{+(\sqrt{1-z^2})}\,dz.$$

Hört man dagegen mit Umgängen um F_1 auf, so enthält die Reihe der I eine ungerade Anzahl von Summanden, deren letzter $I_\nu(F_1)$ ist; die Summe beträgt daher $(2n+1)\pi$. Dann kommt aber $f(z)$ mit dem Werthe $f(0) = - 1$ in O an und es wird

$$\int_0^z \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,dz = (2n+1)\pi + \int\!\!\!\!\!/_0^z \frac{1}{-(\sqrt{1-z^2})}\,dz.$$

Zu untersuchen ist nur noch, wie sich die Sache gestaltet, wenn man umgekehrt verfährt, d. h. mit $f(0) = + 1$ anfangend, zuerst F_2, dann F_1, dann wieder F_2 u. s. w. umkreist, so dass die Reihe der I lautet

$$I_\alpha(F_2) + I_\beta(F_1) + I_\gamma(F_2) + I_\delta(F_1) + \cdots$$

Man findet nun leicht $I(OM_2N_2O) = I_1(F_2) = - \pi$ und ersieht daraus ohne Rechnung, dass es in den obigen Gleichungen nur einer Vorzeichenänderung bedarf, um sie dem jetzigen Falle anzupassen.

Alles Bisherige zusammen führt zu den zwei Formeln

37) $$Arcsin\, z = \pm 2n\pi + arcsin\, z,$$

38) $$Arcsin\, z = \pm (2n+1)\pi - arcsin\, z,$$

welche sich in die eine Gleichung

39) $$Arcsin\, z = \tfrac{1}{2}\pi \mp (\tfrac{1}{2}\pi - arcsin\, z) \pm 2m\pi$$

zusammenziehen lassen.

An diese Beispiele knüpft sich noch eine allgemeine Bemerkung. Man sieht nämlich, dass das Integral einer Function, die Ausnahmepunkte oder Verzweigungspunkte enthält, im Allgemeinen unendlich vieldeutig ist und dass sich die verschiedenen Werthe desselben um Vielfache einer gewissen Constanten unterscheiden. Bei Lz ist $2i\pi$ diese Constante, bei $Arctan\, z$ ist sie π, bei $Arcsin\, z$ beträgt sie 2π. Betrachten wir überhaupt das Integral

$$\int_c^z f(z)\, dz$$

als Function seiner oberen Grenze z und setzen demgemäss

$$\int_c^z f(z)\, dz = \varphi(z),$$

nennen wir ferner w den Werth des geradlinigen Integrales und γ jene Constante, so ist bei geradliniger Integration

$$\varphi(z) = w,$$

dagegen hat man als allgemeinen Werth des Integrales

$$\varphi(z) = w \pm n\gamma.$$

Hieraus folgt eine bemerkenswerthe Eigenschaft der inversen Function von φ, d. h. derjenigen Function ψ, welche entsteht, wenn man die Gleichung $\varphi(z) = t$ nach z auflöst, was ein Resultat von der Form $z = \psi(t)$ giebt. Man erhält nämlich für den Fall der geradlinigen Integration

$$z = \psi(w),$$

dagegen im Allgemeinen

$$z = \psi(w \pm n\gamma),$$

mithin, weil z als obere Integrationsgrenze in beiden Gleichungen dasselbe ist,

$$\psi(w \pm n\gamma) = \psi(w).$$

Diese Relation zeigt, dass die Function ψ immer wieder dieselben Werthe bekommt, sobald die Variabele w um γ, 2γ, 3γ, etc. zu- oder abnimmt, dass also ψ eine periodische Function von w ist. Die Constante γ heisst dann der Index (auch Modulus) der Periodicität. Demnach muss z. B., wenn $Lz = w$ gesetzt wird, die inverse Function $z = e^w$ als periodisch gelten, und zwar ist hier der Periodicitätsindex γ imaginär $= 2i\pi$. Ebenso führt die Gleichung $Arctan\, z = w$ zu der inversen Function $tan\, w$ mit der Periode π, endlich giebt $Arcsin\, z = w$ die Function $sin\, w$, deren Periodicitätsindex $= 2\pi$ ist. Wir kommen später auf diese Betrachtungen zurück.

VII. Die Potenzenreihen.

Eine unendliche, nach Potenzen der complexen Variabelen $z = x + iy$ fortschreitende Reihe, also eine Reihe von der allgemeinen Form

40) $$C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \cdots\cdots$$

nennen wir convergent, wenn sowohl ihr reeller als imaginärer Theil für sich eine convergirende Reihe bildet. Diese beiden Bestandtheile sind leicht zu sondern mittelst der Substitutionen

$$C_n = K_n(cos\,\gamma_n + i\,sin\,\gamma_n), \quad z = r(cos\,\theta + i\,sin\,\theta),$$

von welchen die erste selbstverständlich nur für den Fall gilt, dass die Coefficienten complexe Zahlen sind; die erwähnte Reihe wird dann zur folgenden

$$K_0 + K_1 r\,cos(\gamma_1 + \theta) + K_2 r^2 cos(\gamma_2 + 2\theta) + \cdots\cdots$$
$$+ i\{K_1 r\,sin(\gamma_1 + \theta) + K_2 r^2 sin(\gamma_2 + 2\theta) + \cdots\cdots\}.$$

Wie man leicht bemerken wird (vergl. Bd. I, §. 40), convergirt jede dieser Reihen unter der Bedingung $Lim(K_n r^n) = 0$, welche sicher erfüllt ist, wenn die Reihe

$$K_0 + K_1 r + K_2 r^2 + \cdots\cdot$$

convergirt *). Dazu gehört nach Bd. I, Seite 173, dass

---

*) Es möge hier folgende allgemeinere Bemerkung Platz finden. Bezeichnen $t_0, t_1, t_2, \ldots$ reelle positive Zahlen, welche eine convergirende Reihe

$$T = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \cdots\cdot$$

bilden, sind ferner $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ positive echte Brüche, so bildet der Ausdruck

$$S_n = \lambda_0 t_0 + \lambda_1 t_1 + \cdots + \lambda_{n-1} t_{n-1}$$

eine Function von n, welche gleichzeitig mit n fortwährend wächst, aber immer kleiner als T bleibt; dies beweist, dass die Reihe

$$\lambda_0 t_0 + \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \cdots\cdot$$

mit der vorigen zugleich convergirt. Sind ferner $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$ irgend welche theils positive, theils negative echte Brüche, so bilden nach dem Vorigen die positiven Glieder der Reihe

$$r < Lim \frac{K_n}{K_{n+1}}$$

ist; die anfangs erwähnte Reihe convergirt demnach unzweifelhaft, und zwar stärker als eine geometrische Progression, wenn

$$mod\, z < mod\left(Lim \frac{C_n}{C_{n+1}}\right)$$

genommen wird. Setzt man zur Abkürzung

$$mod\left(Lim \frac{C_n}{C_{n+1}}\right) = R,$$

so kann man auch sagen: die fragliche Reihe convergirt für alle z, deren entsprechende Punkte innerhalb eines mit dem Halbmesser R beschriebenen Kreises liegen. Diesen Kreis pflegt man den **Convergenzkreis** der Reihe zu nennen.

Mittelst der soeben benutzten Schlussweise ergiebt sich auch, dass die Reihen

$$41)\quad \begin{cases} 1\,C_1 + 2\,C_2 z + 3\,C_3 z^2 + 4\,C_4 z^3 + \cdots, \\ 1.2\,C_2 + 2.3\,C_3 z + 3.4\,C_4 z^2 + \cdots, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

convergiren, sobald die entsprechenden Reihen

$$1K_1 + 2K_2 r + 3K_3 r^2 + 4K_4 r^3 + \cdots,$$
$$1.2K_2 + 2.3K_3 r + 3.4K_4 r^2 + \cdots,$$
u. s. w.

die nämliche Eigenschaft besitzen; nach einer bekannten Convergenzregel ist dies unter der gleichen Bedingung

$$r < Lim \frac{K_n}{K_{n+1}}$$

der Fall, mithin convergiren die Reihen 40) und 41) innerhalb eines und desselben Convergenzkreises.

Definirt man die Functionen $f(z)$, $f_1(z)$, $f_2(z)$, etc. als Summen der vorigen Reihen, nämlich

---

$$\mu_0 t_0 + \mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \cdots$$

für sich genommen eine convergirende Reihe; dasselbe gilt von den negativen Gliedern, mithin convergirt auch die ganze Reihe, und zwar unbedingt, weil die Convergenz ungestört bleibt, wenn statt der Factoren μ_0, μ_1, μ_2 etc. ihre absoluten Werthe genommen werden. Endlich folgt noch, dass die Convergenz der aus positiven Gliedern bestehenden Reihe

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \cdots$$

die Convergenz der complexen Reihe

$$(\mu_0 + i\nu_0)\,t_0 + (\mu_1 + i\nu_1)\,t_1 + (\mu_2 + i\nu_2)\,t_2 + \cdots$$

nach sich zieht, falls alle μ und ν zwischen -1 und $+1$ enthalten sind.

$$
42)\left\{\begin{array}{llll}
f(z) = C_0 + C_1 z + & C_2 z^2 + & C_3 z^3 + \cdots, \\
f_1(z) = \quad 1\,C_1 & + 2\,C_2 z + & 3\,C_3 z^2 + \cdots, \\
f_2(z) = & 1.2\,C_2 & + 2.3\,C_3 z + \cdots, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{array}\right.
$$

so sind dieselben innerhalb des Convergenzkreises endliche Functionen von z; dass sie auch eindeutig sind, versteht sich von selbst, weil eine convergirende Reihe nicht zwei verschiedene Summen haben kann. Wohl aber bedarf es einer speciellen Untersuchung, ob jene Functionen stetig und monogen sind. Dieser Discussion wollen wir erst eine Bemerkung voranschicken.

Bei ganzen positiven m hat man nach dem binomischen Satze

$$(z + \Delta z)^m - z^m = m z^{m-1} \Delta z + \tfrac{1}{2} m(m-1) z^{m-2} \Delta z^2 S,$$

worin zur Abkürzung

$$S = 1 + \frac{m-2}{3}\,\frac{\Delta z}{z} + \frac{(m-2)(m-3)}{3\,.\,4}\left(\frac{\Delta z}{z}\right)^2 + \cdots$$

gesetzt worden ist. Nennt man ϱ den Modulus von $\dfrac{\Delta z}{z}$, wonach

$$\frac{\Delta z}{z} = \varrho\,(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$$

sein möge, so erhält S die Form

$$S = U + iV = P(\cos\sigma + i\sin\sigma),$$

und zwar ist

$$U = 1 + \frac{m-2}{3}\,\varrho\cos\vartheta + \frac{(m-2)(m-3)}{3\,.\,4}\,\varrho^2\cos 2\vartheta + \cdots,$$

$$V = \qquad \frac{m-2}{3}\,\varrho\sin\vartheta + \frac{(m-2)(m-3)}{3\,.\,4}\,\varrho^2\sin 2\vartheta + \cdots.$$

Der absolute Werth von U beträgt weniger als

$$1 + \frac{m-2}{3}\,\varrho + \frac{(m-2)(m-3)}{3\,.\,4}\,\varrho^2 + \cdots < (1+\varrho)^{m-2},$$

man hat folglich

$$U^2 < (1+\varrho)^{2m-4}.$$

Ferner beträgt der absolute Werth von V weniger als $(1+\varrho)^{m-2} - 1$ oder es ist

$$V^2 < [(1+\varrho)^{m-2} - 1]^2,$$

und mit der vorigen Ungleichung zusammen

$$U^2 + V^2 < 2(1+\varrho)^{2m-4} - 2(1+\varrho)^{m-2} + 1.$$

Wie man leicht bemerkt, gilt für jede reelle Zahl q, wenn sie mehr als $\frac{1}{2}$ beträgt, die Ungleichung

$$2q^2 - 2q + 1 < \tfrac{9}{4}q^2,$$

daher ist

$$U^2 + V^2 < \tfrac{9}{4}(1+\varrho)^{2m-4}$$

oder, wenn die Wurzel ausgezogen wird,

$$P < \tfrac{3}{2}(1+\varrho)^{m-2}.$$

Man darf daher

$$P = 2\lambda(1+\varrho)^{m-2}$$

setzen, wo λ einen positiven, weniger als $\frac{3}{4}$ betragenden echten Bruch bezeichnet. Hiernach ist

$$S = 2\lambda(1+\varrho)^{m-2}(\cos\sigma + i\sin\sigma)$$

und

43) $$(z+\Delta z)^m - z^m = mz^{m-1}\Delta z + m(m-1)z^{m-2}\Delta z^2\lambda(1+\varrho)^{m-2}e^{i\sigma}.$$

In der Gleichung

44) $$f(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \cdots$$

ertheilen wir nun der Variabelen z einen Zuwachs Δz von solcher Kleinheit, dass

$$mod\frac{\Delta z}{z} = \varrho < \frac{R}{r} - 1$$

ist, was immer geschehen kann, weil $r < R$ vorausgesetzt wird und daher $\frac{R}{r} - 1$ einen positiven die Null übersteigenden Werth hat. Es ist dann

$$mod(z+\Delta z) = mod\left[z\left(1+\frac{\Delta z}{z}\right)\right] = mod\,z\,.\,mod\left(1+\frac{\Delta z}{z}\right)$$
$$= r\sqrt{1 + 2\varrho\cos\vartheta + \varrho^2} < r(1+\varrho),$$

mithin um so mehr

$$mod(z+\Delta z) < R;$$

demzufolge liegt $z+\Delta z$ noch innerhalb des Convergenzkreises, und es gilt daher die Gleichung

$$f(z+\Delta z) = C_0 + C_1(z+\Delta z) + C_2(z+\Delta z)^2 + \cdots\cdot$$

Diese giebt in Verbindung mit Nro. 44) und unter Anwendung des Hülfssatzes in Nro. 43)

$$f(z+\Delta z) - f(z)$$
$$= \Delta z[1C_1 + 2C_2 z + 3C_3 z^2 + 4C_4 z^3 + \cdots\cdot]$$
$$+ \Delta z^2[C_2 + 2.3\,C_3\lambda_1 z(1+\varrho)e^{i\sigma_1} + 3.4\,C_4\lambda_2 z^2(1+\varrho)^2 e^{i\sigma_2} + \cdots],$$

worin $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ positive echte Brüche, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ irgend welche Bögen bedeuten. Die erste der obigen Reihen convergirt und hat eine bestimmte endliche Summe, die schon mit $f_1(z)$ bezeichnet worden ist. In der zweiten Reihe kann man den allgemeinen Term

$$(n+1)(n+2)\, C_{n+2}\, \lambda_n z^n (1+\varrho)^n (\cos\sigma_n + i\sin\sigma_n)$$

durch Einführung der Werthe

$$C_{n+2} = K_{n+2}(\cos\gamma_{n+2} + i\sin\gamma_{n+2}), \quad z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

umformen; derselbe erhält dann die Gestalt

$$(n+1)(n+2)\, K_{n+2}\, [r(1+\varrho)]^n \lambda_n (\cos\tau_n + i\sin\tau_n),$$

wobei es auf den Winkel τ_n nicht weiter ankommt. Die zweite Reihe wird jetzt

$$C_2 + 2.3\, K_3\, r(1+\varrho)\, \lambda_1 (\cos\tau_1 + i\sin\tau_1)$$
$$+ 3.4\, K_4 [r(1+\varrho)]^2 \lambda_2 (\cos\tau_2 + i\sin\tau_2) + \cdots$$

Wegen $r(1+\varrho) < R$ convergirt die Reihe

$$2\,.\,3\, K_3\, r(1+\varrho) + 3\,.\,4\, K_4 [r(1+\varrho)]^2 + \cdots$$

und da sich die vorhergehende nur durch die echt gebrochenen Factoren

$$\lambda_1 \cos\tau_1, \quad \lambda_1 \sin\tau_1, \quad \lambda_2 \cos\tau_2, \quad \lambda_2 \sin\tau_2, \ldots$$

davon unterscheidet, so convergirt auch jene Reihe. Nach diesen Erörterungen kann man

45) $$f(z+\varDelta z) - f(z) = f_1(z)\, \varDelta z + W \varDelta z^2$$

setzen, wo $f_1(z)$ und W endliche Grössen sind, so lange $z + \varDelta z$ innerhalb des Convergenzkreises liegt.

Die vorstehende Gleichung lehrt Zweierlei. Einmal folgt daraus für unendlich abnehmende δ und ε

$$Lim\, [f(z+\delta) - f(z-\varepsilon)] = 0;$$

die Function $f(z)$ ändert sich demnach stetig für alle innerhalb des Convergenzkreises liegenden z. Zweitens ergiebt sich bei unendlich abnehmenden $\varDelta z$

$$Lim \frac{f(z+\varDelta z) - f(z)}{\varDelta z} = f_1(z) \quad \text{oder} \quad \frac{df(z)}{dz} = f_1(z);$$

die Function besitzt demnach einen eindeutigen Differentialquotienten, d. h. sie ist monogen.

Die bisherigen Untersuchungen beweisen zusammen, dass die Summe einer unendlichen Potenzenreihe eine synektische Function ihrer Variabelen ist, so lange die letztere innerhalb des Convergenzkreises bleibt.

Hieran knüpfen sich noch zwei andere Bemerkungen. Die Reihe für $f_1(z)$ war aus den Differentialquotienten der Reihenglieder von $f(z)$ gebildet; nachher fand sich, dass $f_1(z)$ der Differentialquotient von $f(z)$, also $= f'(z)$ ist, mithin besteht der Differentialquotient von der Summe einer Potenzenreihe aus der Summe von den Differentialquotienten der einzelnen Glieder. Kürzer heisst dies, eine Gleichung von der Form

$$f(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \cdots$$

darf ohne Weiteres differenzirt werden, und es ist

$$f'(z) = \quad 1\,C_1 + \quad 2\,C_2 z + \quad 3\,C_3 z^2 + \cdots,$$

dann wieder

$$f''(z) = 1.2\,C_2 + 2.3\,C_3 z + 3.4\,C_4 z^2 + \cdots,$$

u. s. w.

Geht man umgekehrt vom Differentialquotienten $f'(z)$ zu $f(z)$ zurück, so folgt, dass eine Potenzenreihe ohne Weiteres zwischen solchen Grenzen integrirt werden darf, die innerhalb des Convergenzkreises liegen; der Integrationsweg bleibt dabei willkürlich innerhalb des Convergenzkreises.

Wir discutiren noch die verwandte Frage, ob ein Integral von der Form

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} F(z)(C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \cdots)\,dz,$$

worin $F(z)$ eine synektische Function bedeuten möge, auf die Summe von den Integralen der einzelnen Glieder zurückkommt, ob es also der Reihe

$$C_0 \int\limits_{z_0}^{z_1} F(z)\,dz + C_1 \int\limits_{z_0}^{z_1} F(z)\,z\,dz + C_2 \int\limits_{z_0}^{z_1} F(z)\,z^2\,dz + \cdots$$

gleich gesetzt werden darf; wobei natürlich anzunehmen ist, dass der Integrationsweg innerhalb des Convergenzkreises liegt. Noch allgemeiner wird diese Untersuchung, wenn man sich statt der Potenzenreihe irgend eine andere Reihe denkt, etwa

$$Z_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots,$$

welche innerhalb eines, den Integrationsweg einschliessenden Raumes convergiren möge. Zerlegt man die vorliegende Reihe in

$$\begin{aligned} Z_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots \\ = Z_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{n-1} + R_n, \end{aligned}$$

worin selbstverständlich $R_n = Z_n + Z_{n+1} +$ etc. ist, so erhält man durch Integration der einzelnen Ausdrücke rechter Hand

$$\int_{z_0}^{z_1} F(z)\{Z_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots\}\,dz - \int_{z_0}^{z_1} F(z)\,R_n\,dz$$

$$= \int_{z_0}^{z_1} F(z)\,Z_0\,dz + \int_{z_0}^{z_1} F(z)\,Z_1\,dz + \cdots + \int_{z_0}^{z_1} F(z)\,Z_{n-1}\,dz.$$

Aus der Gleichung

$$R_n = Z_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots - (Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_{n-1})$$

folgt nun, weil bei unendlich wachsenden n der Subtrahend denselben, und zwar endlichen Werth erlangt, welchen der Minuend schon besitzt, $Lim\, R_n = 0$; es kann daher auch das Product aus der endlich bleibenden Function $F(z)$ und der unendlich abnehmenden Grösse R_n beliebig klein gemacht werden. In Folge dieses Umstandes ist wieder *)

$$Lim\left\{\int_{z_0}^{z_1} F(z)\,R_n\,dz\right\} = 0,$$

---

*) Um jedem etwaigen Zweifel an diesem Schlusse zu begegnen, fügen wir noch folgende Erläuterung bei. Es sei $z = x + iy$, $F(z)\,R_n = u_n + iv_n$, so wird

$$\int_{z_0}^{z_1} F(z)\,R_n\,dz = \int (u_n + i\,v_n)\,(dx + i\,dy)$$

$$= \int u_n\,dx + i\int v_n\,dx$$

$$+ i\int u_n\,dy - \int v_n\,dy,$$

und hierin sind u_n, v_n Functionen von x, y, n, welche für unendliche n gegen die Null convergiren. Zufolge des gegebenen oder willkürlich gewählten Integrationsweges kann man sich ferner y als Function von x vorstellen, etwa $y = \varphi(x)$, und diesen Werth im ersten Integrale rechter Hand substituiren; letzteres erhält dann die Form

$$\int_{x_0}^{x_1} u_n\,dx$$

und darin ist u_n nur von x und n abhängig. Dass nun dieses Integral gleichzeitig mit u_n gegen die Null convergirt, folgt sehr leicht, namentlich wenn man sich das Integral als Fläche einer Curve denkt. Für das nächste Integral gelten genau dieselben Schlüsse. Bei den letzten zwei Integralen bedarf es nur der kleinen Modification, dass man umgekehrt x durch y ausdrückt, also auch u_n und v_n als Functionen von y und n darstellt.

und es gilt demnach die Gleichung

$$46)\qquad \int_{z_0}^{z_1} F(z)\{Z_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots\} dz$$

$$= \int_{z_0}^{z_1} F(z) Z_0\, dz + \int_{z_0}^{z_1} F(z) Z_1\, dz + \int_{z_0}^{z_1} F(z) Z_2\, dz + \cdots\cdot$$

vorausgesetzt, dass der Integrationsweg innerhalb des Convergenzraumes der Reihe $Z_0 + Z_1 +$ etc. liegt, und dass $F(z)$ innerhalb des Integrationsweges synektisch bleibt.

Die vorigen Betrachtungen lassen sich mit geringen Modificationen auf solche Reihen ausdehnen, welche nach absteigenden Potenzen von z fortschreiten, d. h. auf Reihen von der Form

$$C_0 + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \frac{C_3}{z^3} + \cdots\cdot$$

Zunächst findet man leicht, dass die vorliegende Reihe unter der Bedingung

$$mod\, z > mod\left(Lim \frac{C_n}{C_{n-1}}\right)$$

convergirt, dass sie also ausserhalb des Kreises convergent bleibt, innerhalb dessen die frühere Reihe convergirte. Setzt man $\frac{1}{z} = u$, so sind $F\left(\frac{1}{z}\right)$ für $z > R$, sowie $F(u)$ für $u < R$ gleichzeitig synektisch, und es reicht diese Bemerkung aus, um die früheren Sätze auf den gegenwärtigen Fall zu übertragen.

Um nun die allgemeinen Bedingungen zu erhalten, unter welchen eine Function $F(z)$ in einer Potenzenreihe entwickelbar ist, erinnern wir an die am Ende des Abschnittes V. bewiesenen Formeln 32) und 33). Bleibt nämlich die Function $F(z)$ synektisch innerhalb eines bestimmten Raumes und wählt man ferner als Integrationsweg für z eine innerhalb desselben Raumes liegende geschlossene Curve, welche den Punkt ζ einmal umkreist, so hat man die beiden Formeln

$$F(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{F(z)}{z-\zeta}\, dz,$$

$$\frac{F^{(n)}(\zeta)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,n} = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{F(z)}{(z-\zeta)^{n+1}}\, dz,$$

und wie leicht zu sehen ist, enthalten die Gültigkeitsbedingungen derselben keine überflüssige Einschränkung. Wenn nun $F(z)$ synektisch bleibt für jedes z, dessen Modulus weniger als eine bekannte Grösse R beträgt, und wenn zugleich $mod\,\zeta < R$ ist, so kann man als Integrationsweg einen um den Coordinatenanfang beschriebenen Kreis wählen, dessen Radius $> mod\,\zeta$ aber $< R$ ist; dieser Kreis umschliesst den Punkt ζ, und für alle Punkte seiner Peripherie ist $mod\,z > mod\,\zeta$. Zufolge des letzteren Umstandes gilt die Reihenentwickelung *)

$$\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{\zeta}{z}} = \frac{1}{z} + \frac{\zeta}{z^2} + \frac{\zeta^2}{z^3} + \cdots,$$

und man hat daher nach der ersten der vorigen Formeln

$$F(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int\frac{F(z)}{z}dz + \frac{\zeta}{2i\pi}\int\frac{F(z)}{z^2}dz + \frac{\zeta^2}{2i\pi}\int\frac{F(z)}{z^3}dz + \cdots\cdots$$

oder, wenn man beide Formeln für $\zeta = 0$ anwendet,

$$F(\zeta) = F(0) + \frac{\zeta F'(0)}{1} + \frac{\zeta^2 F''(0)}{1\,.\,2} + \cdots\cdots$$

Durch diese Formel wird der Satz von Mac Laurin auf complexe Variabele ausgedehnt, und zwar unter der Bedingung, dass der Modulus von ζ kleiner als der Radius des Kreises ist, innerhalb dessen die zu entwickelnde Function synektisch bleibt. Die Convergenz der erhaltenen Reihe versteht sich von selbst, weil die Reihe einer endlichen Grösse $F(\zeta)$ gleich ist **).

Dieses einfache Theorem gewährt dadurch einen wesentlichen Vortheil, dass es die Untersuchung über den Rest der Mac Laurin'-

---

*) Als identische Gleichung gilt die Formel

$$\frac{1-q^n}{1-q} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$$

ebenso für complexe wie für reelle q. Setzt man

$$q = r\,(\cos\theta + i\sin\theta),$$

so ist bei echt gebrochenen r und unendlich wachsenden n

$$Lim\,(r^n) = 0,$$

mithin auch

$$Lim\,(q^n) = Lim\,[r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)] = 0,$$

und man erhält die Formel

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots,$$

deren Gültigkeit hiernach an die Bedingung $mod\,q < 1$ gebunden ist.

**) Ihrem wesentlichen Inhalte nach rühren diese Betrachtungen von Cauchy her (Considérations nouvelles sur la théorie des suites et sur schen Reihe völlig erspart und unmittelbar aus der Natur einer gegebenen Function die Bedingungen ihrer Entwickelbarkeit erkennen lässt. Ist z. B. μ keine ganze positive Zahl, so bleibt die Function $(1+z)^\mu$ eindeutig, endlich und stetig, wenn man von dem Anfangswerthe $1^\mu = 1$ ausgeht und den Modulus von z die Einheit nicht erreichen lässt, während für $mod\, z = 1$ ein Verzweigungspunkt auftritt. Der allgemeine binomische Satz gilt daher für jedes z, dessen Modulus unter der Einheit liegt. Ein anderes Beispiel liefert die Function

$$\frac{z}{e^z - 1},$$

welche für $z = i\,.\,2\pi$ discontinuirlich und zugleich unendlich wird, aber für jedes z, dessen Modulus weniger als 2π beträgt, synektisch bleibt; die Entwickelung dieser Function ist daher an die Bedingung $mod\, z < 2\pi$ gebunden.

Wir kehren noch einmal zu den vorigen allgemeinen Formeln zurück, um mit wenigen Worten zu zeigen, wie sich auf ähnliche Weise die Taylor'sche Reihe entwickeln lässt. Hält man nämlich die früheren Bedingungen fest und ersetzt den Nenner $z - \zeta$ durch $z - \gamma - (\zeta - \gamma)$, so gelangt man zu der Gleichung

$$F(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{F(z)\,dz}{z - \gamma - (\zeta - \gamma)}$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int \frac{F(z)\,dz}{z-\gamma} + \frac{\zeta-\gamma}{2i\pi}\int\frac{F(z)\,dz}{(z-\gamma)^2} + \frac{(\zeta-\gamma)^2}{2i\pi}\int\frac{F(z)\,dz}{(z-\gamma)^3} + \cdots$$

$$= F(\gamma) + \frac{\zeta-\gamma}{1}F'(\gamma) + \frac{(\zeta-\gamma)^2}{1\,.\,2}F''(\gamma) + \cdots,$$

welche für $\zeta = \gamma + h$ den Taylor'schen Satz darstellt. Zur Gültigkeit der Entwickelung gehört, dass $mod\, h$ weniger beträgt als der Modulus desjenigen z, für welches $F(\gamma + z)$ aufhört synektisch zu sein.

Die vorigen Betrachtungen, welche auf der Voraussetzung beruhten, dass $F(z)$ innerhalb einer Kreisfläche synektisch bleibe, gestatten noch eine wesentliche Verallgemeinerung, sobald man sich eine Function $F(z)$ denkt, die innerhalb eines ringförmigen Raumes synektisch ist. Man kann in diesem Falle um den Coordinatenanfang zwei Kreise von der Beschaffenheit construiren, dass $F(z)$ sowohl auf

---

les lois de leur convergence in den Exercices d'Analyse et de Physique mathématique; livraison 9, Paris 1840). Den Herleitungen von Cauchy und seinen Nachfolgern (Puiseux, Briot und Bouquet) fehlt indessen der jedenfalls erforderliche Nachweis, dass man unendliche complexe Reihen ohne Weiteres integriren darf.

als zwischen beiden Kreisumfängen synektisch bleibt; innerhalb des entstandenen Kreisringes möge wieder der Punkt ζ liegen. Bezeichnet r_0 den Radius des inneren Kreises und wird die Peripherie des letzteren als Integrationsweg des z genommen, so hat das Integral

$$\int_{(r_0)} \frac{F(z)}{z-\zeta}\,dz$$

einen gewissen Werth W, welcher nur von den etwaigen innerhalb des Kreises (r_0) liegenden Ausnahmepunkten, nicht aber von ζ abhängt, weil dieser Punkt ausserhalb des genannten Kreises liegt. Nimmt man dagegen den grösseren, mit dem Radius r_1 beschriebenen Kreis zum Integrationsweg, so enthält das Integral

$$\int_{(r_1)} \frac{F(z)}{z-\zeta}\,dz$$

nicht nur alle vorherigen Ausnahmepunkte, sondern auch den Ausnahmepunkt ζ, und zwar nur diesen einen mehr, weil $F(z)$ innerhalb des Kreisringes synektisch ist und daher $F(z):(z-\zeta)$ innerhalb dieses Raumes nur für $z=\zeta$ unendlich wird. Zufolge dieser Bemerkungen gelten die beiden Formeln

$$\int_{(r_0)} \frac{F(z)}{z-\zeta}\,dz = W,$$

$$\int_{(r_1)} \frac{F(z)}{z-\zeta}\,dz = W + 2i\pi F(\zeta),$$

und man erhält daraus durch Subtraction

$$\int_{(r_1)} \frac{F(z)}{z-\zeta}\,dz - \int_{(r_0)} \frac{F(z)}{z-\zeta}\,dz = 2i\pi F(\zeta)$$

oder

$$47)\qquad F(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\left\{\int_{(r_1)} \frac{F(z)}{z-\zeta}\,dz + \int_{(r_0)} \frac{F(z)}{\zeta-z}\,dz\right\}.$$

Im ersten Integrale ist $r_1 = mod\,z > mod\,\zeta$, also wie früher

$$\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{z} + \frac{\zeta}{z^2} + \frac{\zeta^2}{z^3} + \cdots;$$

im zweiten Integrale ist $r_0 = mod\,z < mod\,\zeta$, mithin

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \frac{z^2}{\zeta^3} + \cdots,$$

und nach Substitution dieser Reihen erhält man durch Integration der einzelnen Glieder ein Resultat von der Form

$$F(\zeta) = a_0 + a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + a_3 \zeta^3 + \cdots$$
$$+ \frac{b_1}{\zeta} + \frac{b_2}{\zeta^2} + \frac{b_3}{\zeta^3} + \cdots.$$

Ist also $F(z)$ synektisch innerhalb eines Kreisringes und liegt ζ innerhalb desselben Ringes, so lässt sich $F(\zeta)$ in eine Doppelreihe verwandeln, die nach steigenden und fallenden Potenzen von ζ fortschreitet*). Die Coefficienten a_0, a_1, a_2 etc. sind die nämlichen wie in der Mac Laurin'schen Reihe; die Coefficienten b_1, b_2 etc. bestimmen sich mittelst der Formel

$$b_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{(r_0)} z^{n-1} F(z)\, dz.$$

Als Beispiel kann man die Function

$$F(\zeta) = \frac{1}{(\alpha - \zeta)(\beta - \zeta)}$$

nehmen, wenn man $mod\,\alpha < mod\,\zeta < mod\,\beta$ voraussetzt; es ist dann r_0 zwischen $mod\,\alpha$ und $mod\,\zeta$, r_1 zwischen $mod\,\zeta$ und $mod\,\beta$ zu wählen.

Wir betrachten schliesslich noch den Fall, wo $F(z)$ ausserhalb eines mit dem Radius r_0 beschriebenen Kreises synektisch bleibt, so dass r_1 beliebig gross genommen werden darf. Das erste Integral in Nro. 47) lässt sich dann durch Einführung von $z = r_1 e^{i\theta}$ folgendermaassen darstellen:

$$\int_{(r_1)} \frac{F(z)}{z - \zeta}\, dz = i \int_0^{2\pi} \frac{F(r_1 e^{i\theta})}{1 - \dfrac{\zeta}{r_1} e^{-i\theta}}\, d\theta,$$

und wenn $F(r_1 e^{i\theta})$ bei unendlich wachsenden r_1 die Null zur Grenze hat, so convergirt der Werth des vorstehenden Integrales ebenfalls gegen die Null. Die Formel 47) reducirt sich dann auf

$$48) \qquad F(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(r_0)} \frac{F(z)}{\zeta - z}\, dz$$

und giebt die Entwickelung

$$F(\zeta) = \frac{b_1}{\zeta} + \frac{b_2}{\zeta^2} + \frac{b_3}{\zeta^3} + \cdots.$$

Letztere gilt demnach, wenn $F(z)$ ausserhalb eines bestimmten Kreises (r_0) synektisch bleibt, wenn zweitens $F(r_1 e^{i\theta})$ für $r_1 = \infty$ verschwindet, und wenn drittens $mod\,\zeta > mod\,r_0$ ist.

Ein Beispiel hierzu liefert wieder die Function

---

*) Das obige Theorem ist von Laurent gefunden worden; s. Briot und Bouquet, Theorie d. period. Funct. Nro. 30.

$$F(\zeta) = \frac{1}{(\alpha - \zeta)(\beta - \zeta)}$$

wenn $mod\,\alpha < mod\,\beta < mod\,\zeta$ genommen wird, in welchem Falle r_0 einen beliebigen, zwischen $mod\,\beta$ und $mod\,\zeta$ einzuschaltenden Werth besitzt.

VIII. Die Facultätenreihen.

Bereits in Thl. I, S. 169 wurde für einen speciellen Zweck eine Reihe entwickelt, deren einzelne Glieder Quotienten aus je zwei Facultäten sind; wir betrachten hier diese Reihe noch einmal unter der Voraussetzung, dass die vorkommenden Grössen complexe Zahlen sind, und wollen nachher die allgemeinere Frage erörtern, unter welchen Umständen eine gegebene Function in eine solche Facultätenreihe entwickelbar ist.

Aus der früheren Formel

$$\frac{1}{\alpha - \beta}\left[\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)}\right]$$
$$= \frac{\beta}{\alpha(\alpha+1)} + \frac{\beta(\beta+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} + \dots + \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-2)}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}$$

folgt für $\alpha = \lambda$, $\beta = t$ und durch Addition der Gleichung

$$\frac{1}{\lambda - t}\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}$$

die neue Formel

$$49)\qquad \frac{1}{\lambda - t}\left[1 - \frac{t(t+1)(t+2)\dots(t+n-1)}{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+n-1)}\right]$$
$$= \frac{1}{\lambda} + \frac{t}{\lambda(\lambda+1)} + \frac{t(t+1)}{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+n-2)}{\lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+n-1)}.$$

Um den Grenzwerth zu ermitteln, welchem sich das Product

$$P_n = \frac{t(t+1)(t+2)\cdot\dots(t+n-1)}{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+n-1)}$$

bei unendlich wachsenden n nähert, zerlegen wir P_n in die beiden Producte

$$P_k = \frac{t(t+1)(t+2)\dots(t+k-1)}{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+k-1)},$$

$$P_{n-k} = \frac{(t+k)(t+k+1)\dots(t+n-1)}{(\lambda+k)(\lambda+k+1)\dots(\lambda+n-1)},$$

von denen das erste die constante, nachher näher zu bestimmende Zahl von k Factoren enthält, und das zweite aus $n-k$ Factoren besteht. Setzt man zur Abkürzung $n - 1 = m$ und substituirt

$$t = u + iv, \qquad \lambda = \mu + iv,$$

so erhält P_{n-k} die Form

$$\sqrt{\frac{(u+k)^2+v^2}{(\mu+k)^2+\nu^2}\cdot\frac{(u+k+1)^2+v^2}{(\mu+k+1)^2+\nu^2}\cdots\frac{(u+m)^2+v^2}{(\mu+m)^2+\nu^2}}\cdot e^{i\omega},$$

wobei es auf den Werth von ω nicht weiter ankommt. Der unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck heisse Q_m; es ist dann

$$P_n = P_k\sqrt{Q_m}\cdot e^{i\omega} \tag{50}$$

und ferner, wenn $u^2+v^2=r^2$, $\mu^2+\nu^2=\varrho^2$ gesetzt wird,

$$Q_m = \frac{1+\frac{2u}{k}+\frac{r^2}{k^2}}{1+\frac{2\mu}{k}+\frac{\varrho^2}{k^2}}\cdot\frac{1+\frac{2u}{k+1}+\frac{r^2}{(k+1)^2}}{1+\frac{2\mu}{k+1}+\frac{\varrho^2}{(k+1)^2}}\cdots\frac{1+\frac{2u}{m}+\frac{r^2}{m^2}}{1+\frac{2\mu}{m}+\frac{\varrho^2}{m^2}}.$$

Man kann nun k so gross wählen, dass der absolute Werth jedes der beiden Ausdrücke

$$\frac{2u}{k}+\frac{r^2}{k^2} \text{ und } \frac{2\mu}{k}+\frac{\varrho^2}{k^2}$$

weniger als $\frac{1}{2}$ beträgt, und dann lässt sich $l\,Q_m$ mittelst der Formel

$$l(1+x) = x-\varepsilon x^2, \qquad 0<\varepsilon<1,$$

entwickeln, welche bei positiven und negativen x gilt, wenn $x^2<\frac{1}{4}$ ist *). Hiernach erhält man

$$\begin{aligned} l\,Q_m = {} & 2(u-\mu)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{m}\right) \\ & +(r^2-\varrho^2)\left\{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}+\cdots+\frac{1}{m^2}\right\} \\ & -\alpha_k\left(\frac{2u}{k}+\frac{r^2}{k^2}\right)^2-\cdots-\alpha_m\left(\frac{2u}{m}+\frac{r^2}{m^2}\right)^2 \\ & +\beta_k\left(\frac{2\mu}{k}+\frac{\varrho^2}{k^2}\right)^2+\cdots+\beta_m\left(\frac{2\mu}{m}+\frac{\varrho^2}{m^2}\right)^2, \end{aligned}$$

worin $\alpha_k, \ldots \alpha_m$ und $\beta_k, \ldots \beta_m$ nicht näher bestimmte positive echte Brüche bedeuten. Bei unendlich wachsenden m divergirt die erste der obigen vier Reihen; die übrigen convergiren, mithin ist

*) Bezeichnet nämlich ξ den absoluten Werth von x, so ist bei echt gebrochenen ξ

$$l(1+\xi) = \xi-\xi^2\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\xi+\tfrac{1}{4}\xi^2-\cdots\right)$$

und die Summe der eingeklammerten Reihe $<\frac{1}{2}$ oder gleich einem echten Bruche ε. Ferner hat man

$$l(1-\xi) = -\xi-\xi^2\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\xi+\tfrac{1}{4}\xi^2+\cdots\right),$$

und für $\xi<\frac{1}{2}$ ist die Summe der eingeklammerten Reihe

$$<\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{1}{2})^3+\cdots$$

d. h. <1. Beides zusammen giebt die obige Formel.

$$l\,Q_\infty = 2(u-\mu)(+\infty)$$

und hieraus folgt, dass Q_m die Null zur Grenze hat, sobald $u - \mu$ negativ ist. Unter dieser Voraussetzung giebt die Gleichung 50)

$$Lim\,P_n = 0,$$

wofern nicht P_k unendlich ist, was nur dann vorkommen könnte, wenn $\nu = 0$ und μ eine negative ganze Zahl wäre. Schliessen wir diesen Fall aus, so haben wir nach Nro. 49) die Gleichung

$$51) \quad \frac{1}{\lambda - t} = \frac{1}{\lambda} + \frac{t}{\lambda(\lambda+1)} + \frac{t(t+1)}{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)} + \cdots,$$

und zwar unter der doppelten Bedingung, dass der reelle Theil von λ, vermindert um den reellen Theil von t, einen positiven die Null übersteigenden Rest giebt, und dass keine der Grössen λ, $\lambda + 1$, $\lambda + 2$, etc. verschwindet.

Nach dieser Voruntersuchung erinnern wir wieder an die unter Nro. 47) bewiesene Formel

$$F(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\left\{\int\limits_{(r_1)} \frac{F(z)}{z-\zeta}\,dz + \int\limits_{(r_0)} \frac{F(z)}{\zeta - z}\,dz\right\},$$

worin sich die erste Integration auf einen mit dem Halbmesser r_1, die zweite auf einen mit dem Halbmesser r_0 beschriebenen Kreis bezieht, während $F(z)$ auf und zwischen beiden Integrationswegen synektisch bleiben muss. Das erste Integral lässt sich nach Formel 51) für $\lambda = z = r_1 e^{i\theta}$ und $t = \zeta = \xi + i\eta$ nicht entwickeln, weil der Punkt ζ zwischen beiden Kreisen liegt und ebendeshalb die Bedingungen $r_1{}^2 > \xi^2 + \eta^2$ und $r_1 \cos\theta - \xi > 0$ innerhalb des Intervalles $\theta = 0$ bis $\theta = 2\pi$ mit einander unverträglich sind. Viel günstiger gestalten sich die Verhältnisse bei dem zweiten Integrale, wenn in Nro. 51) $\lambda = \zeta = \xi + i\eta$, $t = z = r_0 e^{i\theta}$ genommen wird; die Bedingungen

$$r_0{}^2 < \xi^2 + \eta^2 < r_1{}^2 \quad \text{und} \quad \xi - r_0 \cos\theta > 0$$

lassen sich nämlich dadurch erfüllen, dass man ξ positiv und grösser als r_0 wählt, womit die Möglichkeit, dass eine der Grössen ζ, $\zeta + 1$, $\zeta + 2$, etc. verschwindet, von selber ausgeschlossen ist. Man erhält jetzt ein Resultat von der Form

$$52) \quad F(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(r_1)} \frac{F(z)}{z-\zeta}\,dz$$
$$+ \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta(\zeta+1)} + \frac{c_3}{\zeta(\zeta+1)(\zeta+2)} + \cdots,$$

und zwar gilt dasselbe so lange, als $r_0 < \sqrt{\xi^2 + \eta^2} < r_1$ und zugleich $\xi > r_0$ ist, d. h. wenn der Punkt ζ innerhalb des Kreis-abschnittes liegt, der einerseits von dem mit dem Radius r_1 beschriebenen Kreise, andererseits von der im Abstande r_0 parallel zur y-Achse gezogenen Geraden begrenzt wird. Die Coefficienten c_1, c_2, etc. bestimmen sich mittelst der Formel

$$c_n = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{(r_0)} z(z+1)\ldots(z+n-2)\,F(z)\,dz$$

und können leicht auf die Coefficienten b_1, b_2, b_3 etc. zurückgeführt werden, welche bei der Entwickelung von $F(\zeta)$ nach absteigenden Potenzen von ζ vorkommen. Setzt man nämlich gemäss einer früheren Bezeichnung

$$z(z+1)(z+2)(z+3)\ldots(z+m-1)$$
$$= \overset{m}{C}_0 z^m + \overset{m}{C}_1 z^{m-1} + \overset{m}{C}_2 z^{m-2} + \cdots + \overset{m}{C}_{m-1} z,$$

so erhält man durch Entwickelung der unter dem Integralzeichen stehenden Facultät

$$c_n = \overset{n-1}{C}_0 b_n + \overset{n-1}{C}_1 b_{n-1} + \cdots\cdot + \overset{n-1}{C}_{n-2} b_2.$$

Die vorige Entwickelung vereinfacht sich noch, wenn $F(z)$ für jedes ausserhalb des Kreises (r_0) liegende z synektisch bleibt und wenn zugleich $F(r_1 e^{i\theta})$ für $r_1 = \infty$ verschwindet; das Anfangsintegral fällt dann weg und es bleibt

53) $$F(\zeta) = \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta(\zeta+1)} + \frac{c_3}{\zeta(\zeta+1)(\zeta+2)} + \cdots\cdot,$$

wobei der reelle Bestandtheil von ζ grösser als r_0 sein muss. Die Coefficienten c_1, c_2, etc. behalten dieselben Werthe wie vorhin *).

Ein passendes Beispiel hierzu liefert die Function

$$F(z) = l\left(1 + \frac{1}{z}\right)$$

falls der Logarithmus eindeutig, d. h. so genommen wird, dass $l\,1 = 0$ ist. Da $F(z)$ sowohl für $z = 0$ als für $z = -1$ unendlich wird, so ist r_0 sowohl > 0 als > 1 zu nehmen, wozu $r_0 > 1$ hinreicht. Man kennt nun die Werthe von b_1, b_2, etc. zufolge der Entwickelung

$$l\left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{1}\,\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{z^3} - \cdots,$$
$$\mathrm{mod}\, z > 1,$$

---

*) Der Verfasser hat die obige Untersuchung zuerst in den Sitzungsberichten der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften mitgetheilt. (Bericht vom 1. November 1863.)

und es ist daher unter den Bedingungen, dass $mod\,\zeta > 1$ und dass der reelle Bestandtheil von ζ positiv ist,

$$l\left(1+\frac{1}{\zeta}\right)=\frac{c_1}{\zeta}+\frac{c_2}{\zeta(\zeta+1)}+\frac{c_3}{\zeta(\zeta+1)(\zeta+2)}+\cdots$$

Für die Coefficienten hat man $c_1 = 1$ und

$$c_{n+1}=(-1)^n\left\{\overset{n}{C}_0\frac{1}{n+1}-\overset{n}{C}_1\frac{1}{n}+\overset{n}{C}_2\frac{1}{n-1}-\cdots\right\}$$

oder in kürzerer Fassung

$$c_{n+1}=(-1)^n\int_0^1 t(t-1)(t-2)\ldots(t-\overline{n-1})\,dt.$$

Setzt man den positiven Ausdruck

$$\int_0^1 t(1-t)(2-t)\ldots(n-1-t)\,dt=\alpha_n,$$

so wird $c_{n+1} = -\alpha_n$, mithin

54) $$l\left(1+\frac{1}{\zeta}\right)=\frac{1}{\zeta}-\frac{\alpha_1}{\zeta(\zeta+1)}-\frac{\alpha_2}{\zeta(\zeta+1)(\zeta+2)}-\cdots,$$

und die Werthe der Coefficienten sind:

$$\alpha_1=\tfrac{1}{2},\quad \alpha_2=\tfrac{1}{6},\quad \alpha_3=\tfrac{1}{4},\quad \alpha_4=\tfrac{19}{30},\quad \alpha_5=\tfrac{9}{4},\cdots$$

Als zweites Beispiel wählen wir die Function

$$F(z)=1-z\,l\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{z}-\frac{1}{3}\,\frac{1}{z^2}+\frac{1}{4}\,\frac{1}{z^3}-\cdots,$$

wobei der Logarithmus eindeutig wie vorhin genommen werden möge. Setzt man zur Abkürzung

$$\int_0^1 t^2(1-t)(2-t)\ldots(n-1-t)\,dt=\beta_n,$$

so findet man unter denselben Bedingungen wie bei dem vorigen Beispiele

55) $$1-\zeta l\left(1+\frac{1}{\zeta}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\zeta}-\frac{\beta_1}{\zeta(\zeta+1)}-\frac{\beta_2}{\zeta(\zeta+1)(\zeta+2)}-\cdots,$$

und zwar sind die Werthe der Coefficienten:

$$\beta_1=\tfrac{1}{3},\quad \beta_2=\tfrac{1}{12},\quad \beta_3=\tfrac{7}{60},\quad \beta_4=\tfrac{17}{60},\quad \beta_5=\tfrac{41}{42},\cdots$$

Gelegentlich möge noch bemerkt werden, dass sich Entwickelungen dieser Art zu einer vortheilhaften Transformation mancher endlichen Reihen benutzen lassen. Ertheilt man nämlich in dem Ausdrucke

$$\frac{1}{\zeta(\zeta+1)(\zeta+2)\ldots(\zeta+k-1)}$$

dem ζ der Reihe nach die Werthe $1, 2, 3, \ldots p$ und addirt alle entstehenden Brüche, so erhält man

$$\frac{1}{1\,.\,2\ldots k}+\frac{1}{2\,.\,3\ldots(k+1)}+\cdots+\frac{1}{p(p+1)\ldots(p+k-1)}$$
$$=\frac{1}{1\ldots(k-1)}\left\{\frac{1}{k}+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1\,.\,2}{k(k+1)(k+2)}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots(p-1)}{k(k+1)(k+2)\ldots(k+p-1)}\right\}$$

und hier lässt sich die in Parenthese stehende Reihe nach Formel 49) für $\lambda = k$, $t = 1$, $n = p$ summiren; dies giebt

$$56)\quad \frac{1}{1.2\ldots k}+\frac{1}{2.3\ldots(k+1)}+\cdots+\frac{1}{p(p+1)\ldots(p+k-1)}$$
$$=\frac{1}{k-1}\left\{\frac{1}{1.2\ldots(k-1)}-\frac{1}{(p+1)(p+2)\ldots(p+k-1)}\right\},$$

wobei selbstverständlich $k > 1$ sein muss. Nehmen wir jetzt in der Gleichung 54) $\zeta = 1, 2, \ldots p$ und addiren alle Ergebnisse, so können wir rechter Hand die Formel 56) anwenden und erhalten

$$l(p+1)=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p}$$
$$-\frac{\alpha_1}{1}\left\{\frac{1}{1}-\frac{1}{p+1}\right\}-\frac{\alpha_2}{2}\left\{\frac{1}{1.2}-\frac{1}{(p+1)(p+2)}\right\}-\ldots$$

oder, wenn die von p unabhängige Summe

$$\frac{\alpha_1}{1}\cdot\frac{1}{1}+\frac{\alpha_2}{2}\cdot\frac{1}{1.2}+\frac{\alpha_3}{3}\cdot\frac{1}{1.2.3}+\cdots=A$$

gesetzt wird,

$$57)\qquad \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p}$$
$$=A+l(p+1)-\frac{1}{1}\,\frac{\alpha_1}{p+1}-\frac{1}{2}\,\frac{\alpha_2}{(p+1)(p+2)}-\cdots.$$

Mittelst der vorhin angegebenen Werthe der Coefficienten α_1, α_2, etc findet man

$$A = 0{,}5772156649\ldots$$

Die Gleichung 57) bietet den Vortheil, dass die vorkommende Facultätenreihe immer convergirt, und zwar um so stärker, je grösser p ist. Eine Summe wie z. B. $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1000}$ lässt sich hiernach mit grosser Leichtigkeit berechnen.

Multiplicirt man die Gleichung 54) mit $\frac{1}{2}$, subtrahirt davon die Gleichung 55) und setzt zur Abkürzung

$$\tfrac{1}{2}\alpha_n - \beta_n$$

$$= \int_0^1 (\tfrac{1}{2} - t)\, t(1-t)(2-t)\ldots(n-1-t)\, dt = \gamma_n,$$

so kann man dem Resultate folgende Form ertheilen

$$(\zeta + \tfrac{1}{2})\, l(\zeta+1) - (\zeta - \tfrac{1}{2})\, l\zeta - l\zeta - 1$$

$$= -\frac{\gamma_1}{\zeta(\zeta+1)} - \frac{\gamma_2}{\zeta(\zeta+1)(\zeta+2)} - \frac{\gamma_3}{\zeta(\zeta+1)(\zeta+2)(\zeta+3)} - \ldots$$

Durch Addition aller der Gleichungen, welche hieraus für $\zeta = 1, 2, \ldots p$ hervorgehen, erhält man

$$(p + \tfrac{1}{2})\, l(p+1) - l(1.2.3\ldots p) - p$$

$$= -\frac{\gamma_1}{1}\left\{\frac{1}{1} - \frac{1}{p+1}\right\} - \frac{\gamma_2}{2}\left\{\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(p+1)(p+2)}\right\} - \ldots$$

oder, wenn die von p unabhängige Summe

$$\frac{\gamma_1}{1} \cdot \frac{1}{1} + \frac{\gamma_2}{2} \cdot \frac{1}{1.2} + \frac{\gamma_3}{3} \cdot \frac{1}{1.2.3} + \ldots = B$$

gesetzt wird,

$$58)\quad l(1.2.3\ldots p) = B + (p + \tfrac{1}{2})\, l(p+1) - p$$
$$- \frac{1}{1}\frac{\gamma_1}{p+1} - \frac{1}{2}\frac{\gamma_2}{(p+1)(p+2)} - \ldots$$

Die Werthe der Coefficienten sind

$$\gamma_1 = -\tfrac{1}{12},\quad \gamma_2 = 0,\quad \gamma_3 = \tfrac{1}{120},\quad \gamma_4 = \tfrac{1}{30},\quad \gamma_5 = \tfrac{25}{168}, \ldots$$

und mittelst derselben findet sich

$$B = -0{,}0810614668\ldots$$

Eine etwas bessere Gestalt bekommt die Formel 58), wenn man $p = q - 1$, ferner

$$1 + B = 0{,}9189385332 = C$$

setzt und beiderseits lq addirt; es wird dann

$$59)\quad l(1.2.3\ldots q) = C + (q + \tfrac{1}{2})\, lq - q$$
$$- \frac{1}{1}\frac{\gamma_1}{q} - \frac{1}{2}\frac{\gamma_2}{q(q+1)} - \frac{1}{3}\frac{\gamma_3}{q(q+1)q+2)} - \ldots$$

Mittelst der auf Seite 441 des ersten Theiles ausgeführten Betrachtung kann man sich übrigens leicht überzeugen, dass C hier denselben Werth besitzt, wie dort, nämlich $C = \frac{1}{2} l(2\pi)$*).

*) Von einem anderen Gesichtspunkte ausgehend, hat der Verfasser die Facultätenreihen behandelt im Jahrgange 1859 der Sitzungsberichte

IX. Die Reihen von Bürmann und Lagrange.

I. Wir gehen noch einmal auf die Reihenentwickelung

60) $$F(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + \cdots$$

zurück, deren Convergenzkreis oder Gültigkeitskreis durch die eine Bedingung bestimmt ist, dass $F(t)$ innerhalb desselben synektisch bleiben muss. Die Fläche dieses Kreises, also den Spielraum der complexen Variabelen t, denken wir uns auf die Weise entstanden, dass zunächst *mod* t von Null an bis zu dem grössten erlaubten Werthe wächst und dass nachher der so erhaltene Radius des Convergenzkreises eine volle Umdrehung um den Mittelpunkt ausführt. Demzufolge ist *mod* t eine endliche und eindeutige Variabele, welche von Null bis zu einem, durch die Natur von $F(t)$ bestimmten Maximum continuirlich zunimmt. — Setzen wir nun

$$t = \varphi(z), \quad F(t) = F[\varphi(z)] = f(z),$$

so erhalten wir statt der Gleichung 60) die folgende

61) $$f(z) = C_0 + C_1 \varphi(z) + C_2 \varphi(z)^2 + C_3 \varphi(z)^3 + \cdots,$$

und für diese sind noch die Bedingungen der Gültigkeit zu ermitteln. In dieser Beziehung erinnern wir erstens an den Umstand, dass t und $F(t)$ endliche, eindeutige und stetige Variabele waren; es müssen daher auch $\varphi(z)$ und $f(z)$ innerhalb eines gemeinschaftlichen Spielraumes synektische Functionen sein. Weil ferner in Nro. 60) *mod* t sein Wachsthum mit dem Werthe Null anfängt, so muss es wenigstens einen speciellen Werth $z = z_0$ geben, für welchen *mod* $\varphi(z)$ den Anfangswerth Null erhält, mithin auch $\varphi(z) = 0$ wird; die Auflösung dieser Gleichung liefert die verschiedenen Werthe von z_0. Lassen wir jetzt die Variabele z, von $z = z_0$ ausgehend, irgend einen Weg in der xy-Ebene durchlaufen, so muss die immer positive Grösse *mod* $\varphi(z)$ von Null an eine Zeit lang wachsen (denn eine mit Null beginnende Abnahme würde in's Gebiet des Negativen führen), wohl aber kann es geschehen, dass *mod* $\varphi(z)$ späterhin wieder abnimmt, dann nochmals wächst u. s. w. Die verschiedenen Maxima und Minima, welche *mod* t = *mod* $\varphi(z)$ erreichen kann, lassen sich auf gewöhnlichem Wege ermitteln, indem man *mod* t = *mod* $\varphi(x + iy)$ als Function der beiden unabhängigen Variabelen x und y ansieht; sie mögen $R_0, R_1, R_2 \ldots$ heissen und nach ihrer Grösse geordnet sein, so dass

---

der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, wovon ein Abdruck in der Zeitschrift für Mathematik und Physik. Bd. IV, S. 390.

R_0 das kleinste jener Maxima und Minima ist. Da nun $mod\, t$ in Nro. 60) nur wächst, so muss der Weg des z an die Bedingung $mod\, \varphi(z) < R_0$ geknüpft werden, denn in jedem anderen Falle, z. B. $mod\, \varphi(z) < R_2$, könnte man den Weg des z so wählen, dass $mod\, \varphi(z)$ anfangs zwar zunähme, zuletzt aber bis R_0 abnähme, was dem stetigen Wachsthume von $mod\, t$ widerspräche. Indem man $mod\, \varphi(z) = mod\, \varphi(x+iy)$ durch x und y ausdrückt, erhält man statt der Bedingung $mod\, \varphi(z) < R_0$ eine Ungleichung von der Form $0 < \psi(x,y) < R_0$, und diese bestimmt denjenigen Raum der xy-Ebene, innerhalb dessen der Punkt xy bleiben und auch der Anfangspunkt z_0 liegen muss.

Um diese Betrachtungen zu vervollständigen, untersuchen wir die Maxima und Minima von $mod\, \varphi(z)$ etwas genauer. Es sei zu diesem Zwecke

$$\varphi(z) = \varphi(x+iy) = u + iv,$$

mithin

$$mod\, \varphi(z) = \sqrt{u^2 + v^2},$$

so haben wir als Bedingungen für die Maxima und Minima von $\sqrt{u^2+v^2}$:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

oder kürzer die eine Gleichung

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} - i\left(u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0.$$

Weil ferner $u + iv$ eine (monogene) Function von $x + iy$ ist (Seite 47), so gelten die Beziehungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

und dadurch geht die vorige Gleichung über in

$$(u - iv)\left(\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Dies giebt, weil $u - iv$ nicht $= 0$ ist,

$$\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \text{ d. h. } \frac{d\varphi(z)}{dz} = 0;$$

mit anderen Worten: diejenigen Werthe von z, welche $mod\, \varphi(z)$ zu einem Maximum oder Minimum machen, sind Wurzeln der Gleichung $\varphi'(z) = 0$.

Alles Bisherige zusammen liefert folgende Regel zur Beurtheilung der Gültigkeit von Nro. 61): man bestimme zuerst die Wurzeln der Gleichung $\varphi(z) = 0$, von denen z_0 eine sein möge; man löse ferner die Gleichung $\varphi'(z) = 0$ auf, deren Wurzeln $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ heissen sollen, berechne hieraus die Moduli

$$R_0 = mod\,\varphi(Z_0), \quad R_1 = mod\,\varphi(Z_1), \quad R_2 = mod\,\varphi(Z_2), \ldots.$$

und ordne dieselben nach ihrer Grösse; die Ungleichung

$$mod\,\varphi(z) < R_0,$$

verbunden mit dem Anfangswerthe $z = z_0$, bestimmt dann alle zulässigen Wege des z, vorausgesetzt, dass auf jedem derselben $f(z)$ und $\varphi(z)$ synektisch bleiben.

Um endlich noch die Coefficienten der Reihe in Nro. 61) zu bestimmen, geben wir letzterer die bequemere Form

$$62)\quad f(z) = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{1}\varphi(z) + \frac{\lambda_2}{1.2}\varphi(z)^2 + \frac{\lambda_3}{1.2.3}\varphi(z)^3 + \cdots$$

Daraus folgt zunächst für $z = z_0$

$$63)\quad \lambda_0 = f(z_0);$$

ferner ist

$$\lambda_n = \frac{d^n F(t)}{dt^n} \text{ für } t = 0$$

$$= \frac{d^n f(z)}{[d\varphi(z)]^n} \text{ für } z = z_0$$

und nach der Lehre von der Vertauschung der unabhängigen Variabelen (Seite 19, Formel 34)

$$64)\quad \lambda_n = D_z^{n-1}\left\{\left(\frac{z - z_0}{\varphi(z)}\right)^n f'(z)\right\}_{(z=z_0)},$$

wobei die angehangene Gleichung $z = z_0$ bedeutet, dass nach geschehener Differentiation $z = z_0$ zu setzen ist*).

---

*) Die Formeln 62), 63) und 64) wurden 1796 von Bürmann (in Mannheim) auf anderem Wege entwickelt (Mémoires de l'Institut, tome II, pag. 14) jedoch, dem damaligen Standpunkte der Wissenschaft gemäss, ohne Angabe der Gültigkeitsbedingungen für die Gleichung 62). Neuerdings ist Puiseux (Liouville's Journal Bd. 15) von der leicht beweisbaren Formel

$$\int \frac{f'(z)\,dz}{\varphi(z) - \varphi(\zeta)} = 2in\frac{f'(\zeta)}{\varphi'(\zeta)}$$

ausgegangen, worin sich die Integration auf eine geschlossene Curve bezieht, innerhalb deren $f'(z)$ und $\varphi(z)$ synektisch bleiben und wobei $\varphi(z)$ so beschaffen sein muss, dass die Gleichung $\varphi(z) - \varphi(\zeta) = 0$ nur durch $z = \zeta$ erfüllt werden kann. Unter der Voraussetzung $mod\,\varphi(\zeta) < mod\,\varphi(z)$

Wir geben im Folgenden eine Reihe von Beispielen zu diesen allgemeinen Erörterungen.

a. Es sei $\varphi(z) = z(c - z)$ und $z_0 = 0$. Die Gleichung $\varphi'(z) = 0$ hat dann nur die eine Wurzel $Z_0 = \frac{1}{2}c$, welcher $\varphi(Z_0) = \frac{1}{4}c^2$ entspricht. Denken wir uns der Allgemeinheit wegen c als complexe Zahl, nämlich

$$c = a + ib = h(\cos\varepsilon + i\sin\varepsilon),$$

so ist

$$R_0 = \operatorname{mod}\varphi(Z_0) = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2) = \tfrac{1}{4}h^2,$$

und als Bedingung für die Gültigkeit der Entwickelung

$$65)\quad f(z) = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{1} z(c - z) + \frac{\lambda_2}{1.2} z^2(c - z)^2 + \cdots,$$

$$\lambda_0 = f(0), \quad \lambda_n = D_z^{n-1}\left\{\frac{f'(z)}{(c - z)^n}\right\}_{(z=0)}$$

erhalten wir

$$\operatorname{mod}[z(c - z)] < \tfrac{1}{4}h^2,$$

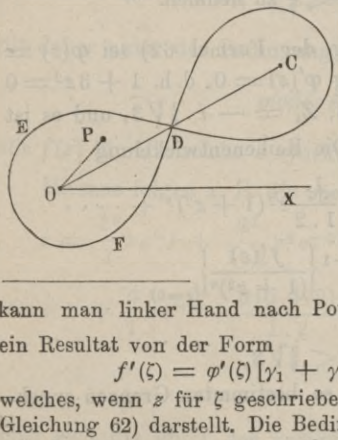
vorausgesetzt, dass $f(z)$ innerhalb des so bestimmten Raumes synektisch bleibt. Der geometrische Sinn hiervon tritt am deutlichsten hervor, wenn man statt rechtwinkeliger Coordinaten Polarcoordinaten benutzt, also

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

setzt; es ergiebt sich nämlich

$$r\sqrt{h^2 - 2hr\cos(\theta - \varepsilon) + r^2} < \tfrac{1}{4}h^2.$$

Fig. 29.



Ist nun (Fig. 29) $OP = r$, $\angle POX = \theta$, $OC = h$, $\angle COX = \varepsilon$, $OD = \frac{1}{2}h$, so muss hiernach der Punkt P im Innern der halben Lemniscate DEF liegen, und $f(z)$ für alle solche Punkte synektisch bleiben. Statt der Wurzel $z_0 = 0$ könnte man auch $z_0 = c$ nehmen, doch erhält man dabei kein wesentlich neues Resultat.

---

kann man linker Hand nach Potenzen von $\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}$ entwickeln und erhält ein Resultat von der Form

$$f'(\zeta) = \varphi'(\zeta)[\gamma_1 + \gamma_2\varphi(\zeta) + \gamma_3\varphi(\zeta)^2 + \cdots],$$

welches, wenn z für ζ geschrieben wird, den Differentialquotienten der Gleichung 62) darstellt. Die Bedingungen für die Entwickelung stimmen mit den oben angegebenen überein; die Coefficienten γ_1, γ_2, etc. bestimmt Puiseux nur als sogenannte Residuen, ohne sie auf Differentialquotienten zurückzuführen.

Die oben angegebene Bedingung lässt sich in speciellen Fällen mittelst der gewöhnlichen Convergenzregeln leicht verificiren. So erhält man z. B. aus Nro. 65) für $c = 1$ und $f(z) = (1-z)^\mu$, wobei diese Potenz eindeutig, und zwar so genommen werden möge, dass dem Werthe $z = 0$ der Anfangswerth $1^\mu = 1$ entspricht,

$$
\begin{aligned}
(1-z)^\mu = 1 - \frac{\mu}{1} z(1-z) + \frac{\mu(\mu-3)}{1.2} z^2(1-z)^2 \\
- \frac{\mu(\mu-4)(\mu-5)}{1.2.3} z^3(1-z)^3 \\
+ \frac{\mu(\mu-5)(\mu-6)(\mu-7)}{1.2.3.4)} z^4(1-z)^4 - \cdots
\end{aligned}
$$

Es sei ferner $z(1-z) = t(\cos\omega + i\sin\omega)$, so convergirt diese Reihe gleichzeitig mit der folgenden

$$1 - \frac{\mu}{1} t + \frac{\mu(\mu-3)}{1.2} t^2 - \frac{\mu(\mu-4)(\mu-5)}{1.2.3} t^3 + \cdots$$

und in dieser nähert sich der Quotient aus dem $(n+1)$ten Gliede, dividirt durch das $n$te, der Grenze

$$Lim\left\{-\frac{(\mu-2n)(\mu-2n-1)}{(n+1)(\mu-n-1)} t\right\} = 4t, \quad (n=\infty)$$

woraus die Convergenzbedingung

$$t < \tfrac{1}{4} \quad \text{oder} \quad mod[z(1-z)] < \tfrac{1}{4}$$

folgt, welche mit der früheren Angabe übereinstimmt. Bei Beschränkung auf reelle z ist hiernach $0 \leqq z < \frac{1}{2}$ zu nehmen.

b. Für eine zweite Anwendung der Formel 62) sei $\varphi(z) = z(1+z^2)$ und $z_0 = 0$. Die Gleichung $\varphi'(z) = 0$, d. h. $1 + 3z^2 = 0$ giebt in diesem Falle $Z_0 = +i \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $Z_1 = -i \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3}$, und es ist $mod\,\varphi(Z_0) = mod\,\varphi(Z_1) = \frac{2}{9}\sqrt{3}$. Die Reihenentwickelung

$$66)\quad f(z) = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{1} z(1+z^2) + \frac{\lambda_2}{1.2} z^2(1+z^2)^2 + \cdots$$

$$\lambda_0 = f(0), \qquad \lambda_n = D_z^{n-1}\left\{\frac{f'(z)}{(1+z^2)^n}\right\}_{(z=0)}$$

gilt demnach unter der Bedingung

$$mod[z(1+z^2)] < \tfrac{2}{9}\sqrt{3},$$

vorausgesetzt, dass $f(z)$ innerhalb der so bestimmten Grenzen synektisch bleibt.

Als speciellen Fall betrachten wir die Annahme $f(z) = arctan\, z$, wobei der Einfachheit wegen z reell sein möge. Dies giebt

$$arctan\, z = \frac{z(1+z^2)}{1} - \frac{4}{1}\frac{z^3(1+z^2)^3}{3} + \frac{6.7}{1.2}\frac{z^5(1+z^2)^5}{5} - \frac{8.9.10}{1.2.3}\frac{z^7(1+z^2)^7}{7} + \cdots,$$

und aus der Bedingung, dass der absolute Werth von $z(1+z^2)$ weniger als $\frac{2}{9}\sqrt{3}$ betragen muss, folgt dann

$$-0{,}34401 \cdots < z < +0{,}34401 \ldots$$

Auch hier ist die Verification mittelst der gewöhnlichen Convergenzregeln sehr leicht. Als Grenzwerth des Verhältnisses zweier aufeinander folgenden Glieder findet man nämlich (dem absoluten Werthe nach)

$$Lim\left\{\frac{(3n-1)\,3n(3n+1)}{n.2n(2n+1)}\,\frac{2n-1}{2n+1}\,z^2(1+z^2)^2\right\} = \tfrac{27}{4}z^2(1+z^2)^2,$$

mithin convergirt oder divergirt die obige Reihe, je nachdem $z^2(1+z^2)^2$ weniger oder mehr als $\frac{4}{27}$ beträgt, was mit dem Früheren übereinstimmt.

c. Für $\varphi(z) = z e^{-z}$ und $z_0 = 0$ wird $Z_0 = 1$, $mod\, \varphi(Z_0) = e^{-1}$; die Reihenentwickelung

$$67)\qquad f(z) = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{1} z e^{-z} + \frac{\lambda_2}{1.2} z^2 e^{-2z} + \cdots.$$

$$\lambda_0 = f(0), \qquad \lambda_n = D_z^{n-1}\left\{e^{nz} f'(z)\right\}_{(z=0)}$$

gilt daher unter der Bedingung

$$mod\,(z e^{-z}) < \frac{1}{e},$$

falls $f(z)$ für alle solche z synektisch bleibt.

Hieraus folgen z. B. die speciellen Formeln

$$z = \frac{1^0}{1} z e^{-z} + \frac{2^1}{1.2} z^2 e^{-2z} + \frac{3^2}{1.2.3} z^3 e^{-3z} + \cdots,$$

$$e^{az} = 1 + \frac{a}{1} z e^{-z} + \frac{a(a+2)}{1.2} z^2 e^{-2z} + \frac{a(a+3)^2}{1.2.3} z^3 e^{-3z} + \frac{a(a+4)^3}{1.2.3.4} z^4 e^{-4z} + \cdots,$$

wobei sich die unter der vorigen Bedingung stattfindende Convergenz der Reihen auf gewöhnliche Weise verificiren lässt. Bei reellen z geht jene Bedingung in $0 \leqq z < 1$ über.

d. Wir betrachten noch den sehr bemerkenswerthen Fall

$$\varphi(z) = \frac{z}{\cos z}, \qquad z_0 = 0.$$

Die Gleichung $\varphi'(z) = 0$ wird jetzt

$$\frac{\cos z + z \sin z}{\cos^2 z} = 0, \quad \text{oder} \quad \cos z + z \sin z = 0$$

welche man, weil $\sin z$ nicht $= 0$ sein kann, durch $\sin z$ dividiren darf. Um die complexen Wurzeln der nunmehrigen Gleichung

$$\cot z + z = 0$$

zu finden, substituiren wir $z = x + iy$ und erhalten dadurch die beiden Gleichungen

68) $$x + \frac{2 \sin 2x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2 \cos 2x} = 0,$$

69) $$y - \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{e^{2y} + e^{-2y} - 2 \cos 2x} = 0,$$

aus denen durch Elimination des gemeinschaftlichen Nenners folgt

$$x(e^{2y} - e^{-2y}) + 2y \sin 2x = 0.$$

Vorausgesetzt, dass weder $x = 0$ noch $y = 0$ ist, giebt die Division mit $4xy$

$$\frac{e^{2y} - e^{-2y}}{4y} + \frac{\sin 2x}{2x} = 0$$

oder nach bekannten Reihen

$$1 + \frac{\sin 2x}{2x} + \frac{(2y)^2}{1.2.3} + \frac{(2y)^4}{1.2 \ldots 5} + \cdots = 0.$$

Diese Gleichung ist aber unmöglich, weil sowohl $1 + \dfrac{\sin 2x}{2x}$ als die nachfolgende Reihe nur positive, die Null übersteigende Werthe annehmen kann; die Gleichungen 68) und 69) besitzen daher keine Auflösungen, bei denen x und y gleichzeitig von Null verschieden sind. Ist nun erstens $y = 0$, so wird aus Nro. 68)

$$x + \cot x = 0,$$

und diese Gleichung hat unendlich viele positive und negative Wurzeln, deren absolute Werthe zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π, $\frac{3}{2}\pi$ und 2π, $\frac{5}{2}\pi$ und 3π etc. enthalten sind; man kann also die Wurzeln unter der Form

$$\pm(\tfrac{1}{2}\pi + \alpha), \quad \pm(\tfrac{3}{2}\pi + \beta), \quad \pm(\tfrac{5}{2}\pi + \gamma), \ldots$$

darstellen, worin α, β, γ, ... gewisse Bögen des ersten Quadranten bezeichnen. Ist zweitens $x = 0$, so folgt aus Nro. 69)

$$y = \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} \quad \text{oder} \quad y = 1 + \frac{2}{e^{2y} - 1},$$

und dieser Gleichung genügt nur der eine Werth $y = 1{,}199678$, so dass

$$z = i\,.\,1{,}199678$$

die einzige imaginäre Wurzel von $z + \cot z = 0$ ist. Die mit R_0, R_1, R_2, .. bezeichneten Werthe von $mod\,\varphi(z)$ sind hiernach

$$\frac{\frac{1}{2}\pi + \alpha}{\sin\alpha}, \quad \frac{\frac{3}{2}\pi + \beta}{\sin\beta}, \quad \frac{\frac{5}{2}\pi + \gamma}{\sin\gamma}, \ldots\ldots$$

und

$$mod\,\frac{i\,.\,1{,}199678}{\cos(i\,.\,1{,}199678)} = \frac{1{,}199\,\ldots}{\frac{1}{2}(e^{1{,}199..} + e^{-1{,}199..})} = 0{,}662742,$$

wobei man gleich bemerkt, dass der letzte Modulus der kleinste ist. Die Reihenentwickelung

$$70) \qquad f(z) = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{1}\left(\frac{z}{\cos z}\right) + \frac{\lambda_2}{1\,.\,2}\left(\frac{z}{\cos z}\right)^2 + \cdots$$

$$\lambda_0 = f(0), \qquad \lambda_n = D_z^{n-1}\,[f'(z)\cos^n z]_{(z=0)}$$

gilt demnach unter der Bedingung

$$mod\left(\frac{z}{\cos z}\right) < 0{,}662742,$$

falls $f(z)$ für derartige z synektisch bleibt.

Die zur Bestimmung von λ_n dienende Differentiation ist u. A. in dem Falle $f(z) = z$ leicht ausführbar, wenn man die auf Seite 261 des ersten Theiles angegebenen Formeln 9) und 10) benutzt. Bei geraden n findet man $\lambda_n = 0$, bei ungeraden n

$$\lambda_n = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{2^{n-1}}\Big\{(n)_0\, n^{n-1} + (n)_1\,(n-2)^{n-1} + (n)_2\,(n-4)^{n-1} + \cdots$$
$$\cdots + (n)_{\frac{1}{2}(n-3)}\, 3^{n-1} + (n)_{\frac{1}{2}(n-1)}\, 1^{n-1}\Big\}$$

mithin

$$\lambda_1 = +\,1,$$
$$\lambda_3 = -\,\tfrac{1}{4}(3^2 + 3\,.\,1^2) = -\,3,$$
$$\lambda_5 = +\,\tfrac{1}{16}(5^4 + 5\,.\,3^4 + 10\,.\,1^4) = +\,65,$$
$$\lambda_7 = -\,\tfrac{1}{64}(7^6 + 7\,.\,5^6 + 21\,.\,3^6 + 35\,.\,1^6) = -\,3787,$$

u. s. w.

die vollständige Entwickelung ist also

$$z = \frac{z}{cos z} - \frac{3}{1.2.3}\left(\frac{z}{cos z}\right)^3 + \frac{65}{1.2..5}\left(\frac{z}{cos z}\right)^5 - \frac{3787}{1.2..7}\left(\frac{z}{cos z}\right)^7 + \cdots$$

$$mod\left(\frac{z}{cos z}\right) < 0,662742.$$

Auf ähnliche Weise ergiebt sich in dem Falle $f(z) = sin z$, dass λ_n bei geraden n verschwindet und bei ungeraden n durch die Formel

$$\lambda_n = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{2^n}\left\{(n+1)_0\,(n+1)^{n-1} + (n+1)_1\,(n-1)^{n-1} + (n+1)_2\,(n-3)^{n-1} + \cdots + (n+1)_{\frac{1}{2}(n-1)}\,2^{n-1}\right\}$$

bestimmt wird; es ist daher

$$sin z = \frac{z}{cos z} - \frac{4}{1.2.3}\left(\frac{z}{cos z}\right)^3 + \frac{96}{1.2..5}\left(\frac{z}{cos z}\right)^5 - \frac{5888}{1.2..7}\left(\frac{z}{cos z}\right)^7 + \cdots$$

Beschränkt man z auf reelle Werthe, so darf $z\,sec\,z$ höchstens $=$ 0,662742 werden, woraus folgt, dass der absolute Werth von z weniger als $0{,}561118 = arc\,32^0\,8'\,58''\,8$ betragen muss.

II. Unter einem anderen Gesichtspunkte betrachtet, enthalten Reihenverwandlungen der vorigen Art zugleich die Lösung eines Problemes, welches die Umkehrung gegebener Functionen genannt wird. Besteht nämlich zwischen den beiden Variabelen u und z eine Gleichung von der Form

$$u = \varphi(z),$$

so ist auch umgekehrt z eine Function von u, etwa

$$z = \chi(u),$$

und es entspringt hieraus die Aufgabe, z durch u auszudrücken, oder allgemeiner, irgend eine vorgeschriebene Function von z, etwa $f(z)$, durch u auszudrücken. In so weit nun $f(z)$ nach Potenzen von u entwickelbar ist, ergiebt sich $f(z)$ unmittelbar aus der Gleichung

$$f(z) = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{1}\varphi(z) + \frac{\lambda_2}{1.2}\varphi(z)^2 + \cdots.$$

und zwar durch Substitution von u für $\varphi(z)$; man hat also

$$f(z) = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{1}u + \frac{\lambda_2}{1.2}u^2 + \frac{\lambda_3}{1.2.3}u^3 + \cdots,$$

wobei die Gültigkeitsgrenzen und Coefficienten ebenso wie früher bestimmt werden.

Hierbei ist noch zu bemerken, dass die Gleichung $u = \varphi(z)$

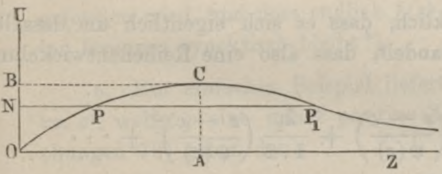
mehrere Umkehrungen haben kann*), dass also entschieden werden muss, welche dieser Umkehrungen durch die obige Reihenentwickelung geliefert wird. Aus der Untersuchung über die Gültigkeitsgrenzen weiss man aber, welche Wurzel der Gleichung $\varphi(z) = 0$ den Anfangswerth des z bildet, man kennt also dasjenige $z = z_0$, welches dem Falle $u = 0$ entspricht, und damit ist z eindeutig bestimmt. (Geometrisch heisst dies: von den möglichen verschiedenen Zweigen des z ist derjenige zu nehmen, welcher durch den Punkt z_0 geht). Dasselbe gilt von der Function $f(z)$, weil diese synektisch sein muss.

a. Beispielsweis betrachten wir die Gleichung

$$u = z e^{-z}$$

und beschränken der Einfachheit wegen u und z auf reelle Werthe. Da u, als Function von z angesehen, für $z = 0$ verschwindet, für $z = 1$ sein Maximum $\frac{1}{e}$ erreicht und für $z = \infty$ gegen die Null convergirt, so entsprechen umgekehrt jedem $u < \frac{1}{e}$ zwei positive z, von denen das eine kleiner, das andere grösser als die Einheit ist.

Fig. 30.



Die nebenstehende Figur (Fig. 30) wird dies veranschaulichen; in ihr ist $OA = 1$, $OB = AC = \frac{1}{e}$, und zu einer gegebenen Ordinate $ON = u$ gehören die beiden Abscissen NP und NP_1. Nach den in I, c. gegebenen Entwickelungen hat man nun für $f(z) = z$, $ze^{-z} = u$,

$$z = \frac{1^0}{1} u + \frac{2^1}{1.2} u^2 + \frac{3^2}{1.2.3} u^3 + \cdots\cdot$$

$$0 \leqq u < \frac{1}{e}$$

wobei $z = 0$ als Anfangswerth des z genommen ist. Die Formel giebt daher dasjenige z, welches für $u = 0$ verschwindet, sie liefert also von den beiden vorhandenen Umkehrungen nur die kleinere $z = NP$.

---

*) Aus der Gleichung z. B.

$$u = \frac{z^2 - 1}{2z}$$

folgen die beiden Umkehrungen

$$z = u + \sqrt{1 + u^2} \quad \text{und} \quad z = u - \sqrt{1 + u^2}.$$

b. Als zweites Beispiel diene die Aufgabe, $\sin z$ aus der Gleichung

$$u = \frac{z}{\cos z}$$

zu berechnen. Nach den in I, d. gegebenen Entwickelungen hat man sofort

$$\sin z = u - \frac{4}{1.2.3} u^3 + \frac{96}{1.2..5} u^5 - \frac{5888}{1.2..7} u^7 + \cdots$$

$$\operatorname{mod} u < 0{,}662742,$$

und dabei ist unter z diejenige Umkehrung zu verstehen, welche für $u = 0$ verschwindet.

III. Mit einer geringen Modification führen die Betrachtungen in I. auch zur Lösung des Problemes, eine Gleichung von der Form

$$z = u\psi(z) + c$$

umzukehren, d. h. aus ihr z, oder allgemeiner $f(z)$, als Function von u herzuleiten. Schreibt man nämlich statt dieser Gleichung die mit ihr identische

$$u = \frac{z - c}{\psi(z)} \quad \text{oder kurz } u = \varphi(z),$$

so erkennt man augenblicklich, dass es sich eigentlich um dasselbe Problem wie in Nro. II. handelt, dass also eine Reihenentwickelung von der Form

$$f(z) = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{1}\left(\frac{z - c}{\psi(z)}\right) + \frac{\lambda_2}{1.2}\left(\frac{z - c}{\psi(z)}\right)^2 + \cdots$$

herzustellen ist. Der Ausdruck

$$\varphi(z) = \frac{z - c}{\psi(z)}$$

verschwindet nun für $z = c$, wobei jedoch vorausgesetzt werden muss, dass $\psi(c)$ nicht $= 0$ sei; es ist daher $z_0 = c$. Wenn ferner

$$\varphi'(z) = \frac{\psi(z) - (z - c)\psi'(z)}{\psi(z)^2}$$

in Null übergehen soll, so muss, falls der Nenner endlich bleibt, die Gleichung

$$\psi(z) = (z - c)\psi'(z)$$

stattfinden, deren Wurzeln Z_0, Z_1, etc. heissen mögen. Die geforderte Entwickelung besteht dann unter der Bedingung, dass

$$\operatorname{mod} \frac{z - c}{\psi(z)}, \quad \text{d. h. } \operatorname{mod} u$$

weniger beträgt, als die kleinste der Grössen

$$mod\,\frac{Z_0 - c}{\psi(Z_0)},\quad mod\,\frac{Z_1 - c}{\psi(Z_1)},\ \text{u. s. w.}$$

Um kurz sein zu können, wollen wir unter dem kleinsten u dasjenige verstehen, welches den kleinsten Modulus besitzt; ausserdem möge zur Ersparung der Anhangsgleichung $z = c$ statt c der Buchstabe v geschrieben werden; man hat dann folgenden Satz: aus der Gleichung

71) $$z = u\psi(z) + v$$

folgt durch Umkehrung

72) $$f(z) = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{1}u + \frac{\lambda_2}{1.2}u^2 + \frac{\lambda_3}{1.2.3}u^3 + \cdots.$$

$$\lambda_0 = f(v),\qquad \lambda_n = D^{n-1}\{\psi(v)^n f'(v)\},$$

und zwar gilt diese Formel unter der dreifachen Voraussetzung, dass erstens $\psi(v)$ weder Null noch unendlich wird, dass zweitens der Modulus von u weniger beträgt als der Modulus des kleinsten u, welches durch Auflösung der beiden Gleichungen

73) $$\psi(z) = (z - v)\psi'(z),\qquad u = \frac{z - v}{\psi(z)}$$

gefunden wird, und dass endlich $f(z)$ innerhalb der hiermit bestimmten Grenzen synektisch bleibt*).

a. Ein einfaches Beispiel liefert die Annahme $f(z) = z$, $\psi(z) = z^p$, wobei p eine ganze positive Zahl bedeuten möge. Die Gleichungen 73) geben dann

$$z = \frac{pv}{p - 1},\qquad u = \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p v^{p-1}}$$

und als Wurzel der algebraischen Gleichung

$$z = uz^p + v$$

erhält man

$$\begin{aligned} z = v + \tfrac{1}{1}(p)_0 uv^p &+ \tfrac{1}{2}(2p)_1 u^2 v^{2p-1} \\ &+ \tfrac{1}{3}(3p)_2 u^3 v^{3p-2} + \cdots, \end{aligned}$$

$$mod\,u < mod\,\frac{(p-1)^{p-1}}{p^p v^{p-1}}.$$

---

*) Die obige Umkehrungsformel findet man, jedoch ohne die zugehörigen Bedingungen, zuerst bei Lagrange (Mémoires de l'Académie de Berlin, an. 1768, p. 275); die Grenzen der Gültigkeit hat auf etwas anderem Wege Cauchy entwickelt (Moigno, Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral, tome I, leçon 18, p. 162).

Für $u = \frac{1}{a}$, $v = \frac{b}{a}$ liegt hierin eine Auflösung der trinomischen Gleichung p-ten Grades

$$z^p - az + b = 0,$$

nämlich

$$z = \frac{b}{a} + \frac{(p)_0}{1}\frac{q^p}{a^{p+1}} + \frac{(2p)_1}{2}\frac{b^{2p-1}}{a^{2p+1}} + \frac{(3p)_2}{3}\frac{b^{3p-2}}{a^{3p+1}} + \cdots,$$

und zwar muss bei reellen a und b der absolute Werth von

$$\frac{b^{p-1}}{a^p} < \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p}$$

sein. Nach der gewöhnlichen Convergenzregel und mit Hülfe der leicht beweisbaren Formel

$$Lim\,\frac{(np+p)_n}{(np)_{n-1}} = \frac{p^p}{(p-1)^{p-1}}, \quad n = \infty,$$

kann man sich auch a posteriori leicht überzeugen, dass die Reihe jenseit der angegebenen Grenze divergirt.

In dem speciellen Falle $p = 2$ wird die obige trinomische Gleichung quadratisch, mithin ihre kleinste Wurzel

$$z = \tfrac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4b});$$

man kommt dann auf eine binomische Entwickelung zurück.

b. Nimmt man in der Gleichung 71)

$$\psi(z) = \tfrac{1}{2}(z^2 - 1)$$

und nachher $f(z) = z$, so lässt sich die Gleichung 71) direct auflösen und es entsteht

74) $$\frac{1 - \sqrt{1 - 2uv + u^2}}{u} = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{1}u + \frac{\lambda_2}{1.2}u^2 + \frac{\lambda_3}{1.2.3}u^3 + \cdots,$$

wobei die Coefficienten durch folgende Formeln bestimmt sind

$$\lambda_0 = v, \qquad \lambda_n = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{d^{n-1}[(v^2-1)^n]}{dv^{n-1}}.$$

Die Gleichungen 73) werden

$$\tfrac{1}{2}(z^2 - 1) = (z - v)z, \qquad u = \frac{z - v}{\tfrac{1}{2}(z^2 - 1)}$$

und liefern unter Voraussetzung eines positiven v die Bedingung

$$mod\, u < mod\,(v - \sqrt{v^2 - 1}).$$

Differenzirt man die Gleichung 74) in Beziehung auf v und setzt nachher

$$\frac{d\lambda_n}{dv} = \frac{\mu_n}{2^n}, \quad u = kt^2, \quad v = \frac{1+k^2}{2k},$$

so entsteht die folgende, unter der Bedingung $mod\, t < 1$ gültige Entwickelung

$$\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$
$$= 1 + \frac{\mu_1 k}{2} t^2 + \frac{\mu_2 k^2}{2.4} t^4 + \frac{\mu_3 k^3}{2.4.6} t^6 + \cdots$$

und darin ist

$$\mu_n = \frac{d^n [(v^2-1)^n]}{dv^n}$$

wenn nach ausgeführter Differentiation $v = \dfrac{1+k^2}{2k}$ gesetzt wird.

c. In mancher Hinsicht bemerkenswerth ist die Auflösung der transcendenten Gleichung

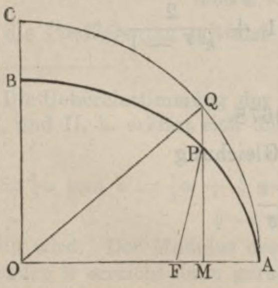
75) $$z = u \sin z + v,$$

welche bei geometrischen und mechanischen Problemen vorkommt *). Die erste der Gleichungen 73) wird hier

76) $$\sin z = (z - v) \cos z \quad \text{oder} \quad z - \tan z = v,$$

welche für $z = x + iy$ und bei reellen v in die beiden Gleichungen zerfällt:

Fig. 31.



*) Soll z. B. in einer Ellipse AOB der Radiusvector FP so gelegt werden, dass der Sector AFP eine gegebene Grösse S hat, so ist $\angle AOQ = \omega$ mittelst der Gleichung

$$\omega - \epsilon \sin \omega = \frac{2S}{ab}$$

zu bestimmen (Theil I, Seite 375, Formel 2). In der Theorie der Planetenbewegung heisst diese Aufgabe das Kepler'sche Problem.

$$x - \frac{2 \sin 2x}{2 \cos 2x + e^{2y} + e^{-2y}} = v,$$

77) $$y - \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{2 \cos 2x + e^{2y} + e^{-2y}} = 0.$$

Man übersieht sofort, dass x und y von v abhängen, und dass ebendeshalb eine vollständige Auflösung der vorigen zwei Gleichungen nur dann möglich ist, wenn v einen gegebenen Zahlwerth hat. Um aber hierbei nicht stehen zu bleiben, wollen wir auf die genaue Angabe des kleinsten Modulus von u verzichten und dagegen untersuchen, wie viel $mod\, u$ wenigstens betragen muss, gleichgültig, welchen Werth v besitzt. Zu diesem Zwecke ertheilen wir der Gleichung 77) die Form

78) $$\cos 2x = \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{2y} - \frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2}$$

und ziehen hieraus

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2} - \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{4y} + \frac{e^{2y} + e^{-2y}}{4}$$

oder nach bekannten Reihen

$$\sin^2 x = (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) \frac{(2y)^2}{1.2} + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{5}) \frac{(2y)^4}{1.2.3.4} + \ldots,$$

worin rechter Hand alle Glieder positiv sind. Diese Gleichung lehrt, dass jedem y unendlich viele x entsprechen, ausgenommen in dem Falle, wo die Summe der Reihe (ganz abgesehen von der linken Seite) mehr als die Einheit beträgt. Weil ferner jene Summe gleichzeitig mit y wächst, so ist der grösstmögliche Werth von y derjenige, bei welchem die erwähnte Summe $= 1$ wird; der Maximalwerth von y, welcher Y heissen möge, bestimmt sich daher durch die Gleichung

$$\tfrac{1}{2} - \frac{e^{2Y} - e^{-2Y}}{4Y} + \frac{e^{2Y} + e^{-2Y}}{4} = 1$$

oder

79) $$Y = \frac{e^{Y} + e^{-Y}}{e^{Y} - e^{-Y}} = 1 + \frac{2}{e^{2Y} - 1}.$$

Wie in I, d. folgt hieraus

$$Y = 1{,}199678.$$

Auf u zurückgehend, können wir die Gleichung

$$u = \frac{z - v}{\sin z}$$

mittelst Nro. 76) einfacher schreiben:

$$u = sec\,z = sec(x + iy)$$
$$= 2\frac{(e^y + e^{-y})\cos x + i(e^y - e^{-y})\sin x}{2\cos 2x + e^{2y} + e^{-2y}};$$

wir erhalten hieraus für den Modulus von u, welcher R heissen möge,

$$R = \frac{2}{\sqrt{2\cos 2x + e^{2y} + e^{-2y}}}$$

oder, unter Zuhülfenahme von Nro. 78),

$$R = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{e^{2y} - e^{-2y}}{4y}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{3}y^2 + \frac{2}{15}y^4 + \cdots}}.$$

Der Nenner dieses Bruches wächst gleichzeitig mit y und wird am grössten für $y = Y$; es ist daher

$$R \geqq \frac{1}{\sqrt{\dfrac{e^{2Y} - e^{-2Y}}{4Y}}},$$

wofür man wegen Nro. 79) schreiben darf

$$R \geqq \frac{1}{\frac{1}{2}(e^Y - e^{-Y})}, \text{ d. i. } R \geqq 0{,}662742.$$

Das kleinste u, welches man durch Auflösung der Gleichungen

$$\sin z = (z - v)\cos z, \qquad u = \frac{z - v}{\sin z}$$

finden könnte, besitzt demnach einen Modulus von wenigstens 0,662742; die gesuchte Reihenentwickelung gilt daher ohne Zweifel, sobald $mod\,u < 0{,}662742$ genommen wird*). Aus der Gleichung

$$z - u\sin z = v$$

folgt nunmehr für jedes reelle v

$$f(z) = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{1}u + \frac{\lambda_2}{1.2}u^2 + \frac{\lambda_3}{1.2.3}u^3 + \cdots,$$
$$mod\,u < 0{,}662742,$$

wobei die Coefficienten mittelst der Formeln

---

*) Die Uebereinstimmung der obigen Bedingung mit den Bedingungen in I, d. und II, b. erklärt sich durch den Umstand, dass die Gleichung

$$z - u\sin z = v$$

für $v = \frac{1}{2}\pi$ und $z = \frac{1}{2}\pi + \zeta$ mit der dortigen Gleichung

$$\zeta - u\cos\zeta = 0$$

identisch wird. Der Modulus des kleinsten, den Bedingungsgleichungen genügenden u erreicht dann gerade die untere Grenze 0,662742.

$$\lambda_0 = f(v), \qquad \lambda_n = D^{n-1}\{f'(v)\sin^n v\}$$

zu bestimmen sind.

Die Ausführung der angedeuteten Differentiationen hat z. B. in dem Falle $f(z) = z$ keine Schwierigkeit; sie giebt

$$\begin{aligned} z = v &+ u\sin v + \tfrac{1}{2}u^2\sin 2v \\ &+ \tfrac{1}{8}u^3(3\sin 3v - \sin v) + \tfrac{1}{6}u^4(2\sin 4v - \sin 2v) \\ &+ \tfrac{1}{384}u^5(125\sin 5v - 81\sin 3v + 2\sin v) + \cdots \end{aligned}$$

und bei reellen u ist $0 \leqq u < 0{,}662742$ zu nehmen *).

---

*) Die Bedingungen für die Convergenz der obigen und einer ähnlichen Reihe sind zuerst von Laplace mittelst eines ziemlich weitläufigen Verfahrens entwickelt worden (Mémoires de l'Académie des sciences, tome VI, an. 1823, p. 61), welches auf einer bei grossen n angenäherten Bestimmung des Werthes von $\lambda_{n+1} : (n\lambda_n)$ beruht. Eine genauere, von der Theorie complexer Variabelen ausgehende Untersuchung hat Cauchy geliefert (Exercices d'Analyse et de Physique mathématique, 1841); sie ist später von Puiseux vervollständigt worden (Liouville, Journal de Mathém. tome XIV).

DIE PERIODISCHEN REIHEN.

Die periodischen Reihen.

I. Einleitende Betrachtungen.

Wenn eine Function der Variabelen z in eine Potenzenreihe verwandelbar ist, wenn demnach innerhalb gewisser Grenzen eine Gleichung von der Form

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots$$

existirt, so bietet die Substitution $z = r\,(\cos u + \sqrt{-1}\sin u)$ ein Mittel, um zwei neue Gleichungen abzuleiten, in denen die vorkommenden Reihen nicht nur die successiven Potenzen von r, sondern auch die Cosinus und Sinus der aufeinander folgenden Multipla von u enthalten. Es ergeben sich nämlich, wenn

$$f(r\cos u + \sqrt{-1}\, r \sin u) = \varphi(r,u) + \sqrt{-1}\,\psi(r,u)$$

gesetzt wird, durch Vergleichung der beiderseitigen reellen und imaginären Bestandtheile die neuen Formeln

$$\varphi(r,u) = c_0 + c_1 r\cos u + c_2 r^2 \cos 2u + c_3 r^3 \cos 3u + \cdots$$
$$\psi(r,u) = c_1 r \sin u + c_2 r^2 \sin 2u + c_3 r^3 \sin 3u + \cdots$$

So erhält man z. B. aus der bekannten Reihe für $l(1-z)$ die Gleichungen

$$-\frac{1}{2}\, l(1 - 2r\cos u + r^2)$$
$$= \frac{1}{1} r\cos u + \frac{1}{2} r^2 \cos 2u + \frac{1}{3} r^3 \cos 3u + \cdots\cdots,$$

$$arctan\left(\frac{r\sin u}{1-r\cos u}\right)$$
$$=\frac{1}{1}r\sin u+\frac{1}{2}r^2\sin 2u+\frac{1}{3}r^3\sin 3u+\cdots,$$

wobei jedoch der absolute Werth von r ein echter Bruch sein muss*).

Gleichungen dieser Formen gestatten eine doppelte Ansicht, jenachdem man nämlich r oder u als die Hauptvariabele ansieht. Im ersten Falle handelt es sich nur um Potenzenreihen, und dann müssen selbstverständlich die Coefficienten derselben nach der für den Mac-Laurin'schen Satz geltenden Regel gebildet sein, also

$$c_n\cos nu=\frac{1}{1.2\ldots n}\cdot\frac{\partial^n\varphi(r,u)}{\partial r^n},$$
$$c_n\sin nu=\frac{1}{1.2\ldots n}\cdot\frac{\partial^n\psi(r,u)}{\partial r^n},$$

wobei nach Ausführung der Differentiationen $r=0$ zu setzen ist. Während man hier auf Bekanntes zurückkommt, bietet dagegen der zweite Fall Gelegenheit zu einer neuen Untersuchung; denn schreibt man zur Vereinfachung

1) $\qquad \varphi(u)=c_0+A_1\cos u+A_2\cos 2u+A_3\cos 3u+\cdots,$

2) $\qquad \psi(u)=B_1\sin u+B_2\sin 2u+B_3\sin 3u+\cdots,$

so kann die Frage nach dem Bildungsgesetze der Coefficienten c_0, A_1, A_2 etc., B_1, B_2 etc. gestellt werden. Dieselbe lässt sich mittelst des leicht beweisbaren Satzes beantworten, dass die bestimmten Integrale

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\cos mu\cos nu\,du=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[\cos(m-n)u+\cos(m+n)u]\,du$$

und

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\sin mu\sin nu\,du=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[\cos(m-n)u-\cos(m+n)u]\,du$$

den gemeinschaftlichen Werth Null besitzen, so lange die beiden ganzen Zahlen m und n von einander verschieden sind, dass sie hingegen für $m=n$ den gemeinschaftlichen Werth 1 erhalten. Multiplicirt man nun die Gleichung 1) mit $\frac{2}{\pi}\cos nu\,du$ und integrirt zwischen den Grenzen $u=0$ und $u=\pi$, so verschwinden rechter

*) Hinsichtlich der Bedingungen, unter denen die Substitution $z=r(\cos u+\sqrt{-1}\sin u)$ erlaubt ist, verweisen wir auf den vorhergehenden Abschnitt.

Hand alle Integrale mit Ausnahme des einen, welches A_n als Factor enthält, und es ist bei umgekehrter Schreibweise

$$3)\qquad A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(u)\cos nu\, du.$$

Für den ersten Coefficienten c_0 findet man ähnlich

$$4)\qquad c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi(u)\, du = \frac{1}{2} A_0.$$

Auf gleiche Weise erhält man aus Nro. 2) durch Multiplication mit $\frac{2}{\pi}\sin nu\, du$ und Integration von $u = 0$ bis $u = \pi$

$$5)\qquad B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \psi(u)\sin nu\, du.$$

Hiernach ist z. B. mit Rücksicht auf das vorhin gegebene Beispiel für $n > 0$

$$\frac{r^n}{n} = -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2} l(1 - 2r\cos u + r^2)\cos nu\, du$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \arctan\left(\frac{r\sin u}{1 - r\cos u}\right)\sin nu\, du.$$

Diese Betrachtungen bedürfen einer wesentlichen Modification, sobald die Existenz der Gleichungen 1) und 2) nicht sicher ist; dieser Fall tritt aber ein, wenn die Functionen φ und ψ nicht erst aus einer Function f mittelst der anfangs erwähnten Substitution abgeleitet, sondern unmittelbar gegeben sind. So lässt sich z. B. schon in dem einfachen Falle $\psi(u) = u$ nicht absehen, ob die Gleichung

$$u = B_1 \sin u + B_2 \sin 2u + B_3 \sin 3u + \cdots$$

überhaupt bestehen kann; gewiss ist sogar, dass die etwaige Gültigkeit derselben auf bestimmte Grenzen eingeschränkt sein muss, weil die Reihe, für sich betrachtet, eine periodische Function von u bildet, welche für $u = v$, $u = 2\pi + v$, $u = 4\pi + v$ etc. dieselben Werthe annimmt, während die linke Seite diese Eigenschaft nicht besitzt. Um alle derartigen Fragen zu entscheiden, wollen wir von den linken Seiten der Gleichungen 1) und 2) abstrahiren und die Summen der vorkommenden Reihen direct aufsuchen, wobei wir den Coefficienten c_0, A_n, B_n die in Nro. 3), 4) und 5) gefundenen Werthe geben. Schreiben wir in den letzten drei Formeln t statt u, so haben wir unmittelbar

$$\frac{1}{2}A_0 + A_1 \cos u + A_2 \cos 2u + \cdots + A_n \cos nu$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^\pi \varphi(t)\,dt + 2\int_0^\pi \varphi(t)\cos u \cos t\,dt + 2\int_0^\pi \varphi(t)\cos 2u \cos 2t\,dt + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + 2\int_0^\pi \varphi(t)\cos nu \cos nt\,dt\right\}$$

Hier können wir alle Integrale in ein einziges zusammenziehen und zugleich jedes doppelte Product zweier Cosinus in eine Summe zweier Cosinus zerlegen; die rechte Seite wird dann

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi(t)\,[1 + \cos(t-u) + \cos 2(t-u) + \cdots + \cos n(t-u)$$

$$+ \cos(t+u) + \cos 2(t+u) + \cdots + \cos n(t+u)]\,dt,$$

und wenn die Reihen der Cosinus mittelst der bekannten Formel *)

$$\cos\omega + \cos 2\omega + \cos 3\omega + \cdots + \cos n\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\omega}{2\sin\frac{1}{2}\omega}$$

summirt werden, so erhält jene rechte Seite die Form

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi(t)\left\{\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-u)}{2\sin\frac{1}{2}(t-u)} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t+u)}{2\sin\frac{1}{2}(t+u)}\right\}dt.$$

Für unendlich wachsende n ist daher

$$\tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos u + A_2\cos 2u + A_3\cos 3u + \cdots$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{Lim\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-u)}{2\sin\frac{1}{2}(t-u)}\varphi(t)\,dt + Lim\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t+u)}{2\sin\frac{1}{2}(t+u)}\varphi(t)\,dt\right\},$$

und auf ganz gleiche Weise findet sich

$$B_1\sin u + B_2\sin 2u + B_3\sin 3u + \cdots$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{Lim\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-u)}{2\sin\frac{1}{2}(t-u)}\psi(t)\,dt - Lim\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t+u)}{2\sin\frac{1}{2}(t+u)}\psi(t)\,dt\right\}.$$

Wie man sieht, kommt die Summirung der Reihen in 1) und 2) auf die Ermittelung der Grenzwerthe zurück, welchen sich zwei Integrale

---

*) Von der Richtigkeit derselben überzeugt man sich leicht dadurch, dass man beide Seiten der Gleichung mit $2\sin\frac{1}{2}\omega$ multiplicirt und linker Hand die Formel

$$2\cos a \sin b = \sin(a+b) - \sin(a-b)$$

für $a = \omega, 2\omega, 3\omega, \ldots n\omega$ und $b = \frac{1}{2}\omega$ in Anwendung bringt.

von ähnlicher Zusammensetzung bei unendlich wachsenden n nähern. Setzt man im ersten Integrale $\frac{1}{2}(t-u)=\theta$, im zweiten $\frac{1}{2}(t+u)=\theta$, so erhalten beide Integrale die gemeinschaftliche Form

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}F(\theta)\,d\theta,$$

und es bleibt demnach unsere Aufgabe, den Grenzwerth zu finden, gegen welchen der vorliegende Ausdruck bei unendlich wachsenden n convergirt. Dieses Problem steht übrigens, wie sich nachher zeigen wird, mit einem anderen und etwas einfacheren in nahem Zusammenhange; wir werden uns daher zunächst mit dem letzteren beschäftigen.

II. Bestimmung von $Lim\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\sin p\theta}{\theta}F(\theta)\,d\theta$ für $p=\infty$.

Wir betrachten zunächst das Integral

$$1)\qquad S_p=\int_0^{\gamma}\frac{\sin p\theta}{\theta}F(\theta)\,d\theta$$

und setzen dabei voraus, dass γ und p beliebige positive Grössen sind, und dass die Function $F(\theta)$ von $\theta=0$ bis $\theta=\gamma$ eindeutig, endlich und stetig bleibt und fortwährend abnimmt, ohne jedoch negativ zu werden.

Mittelst der Substitution $p\theta=x$ ergiebt sich zunächst

$$S_p=\int_0^{p\gamma}\frac{\sin x}{x}\,F\left(\frac{x}{p}\right)dx.$$

Das Product $p\gamma$ kann man in ein Vielfaches von π und in einen Rest zerlegen, der weniger als π beträgt, man darf also

$$p\gamma=q\pi+\varrho,\qquad 0\leqq\varrho<\pi$$

setzen, wo q eine positive ganze Zahl bedeutet, welche, beiläufig bemerkt, gleichzeitig mit der beliebigen positiven Zahl p ins Unendliche wächst. Das Integral

2) $$S_p = \int_0^{q\pi+\varrho} \frac{\sin x}{x} F\left(\frac{x}{p}\right) dx$$

gestattet nun eine Zerlegung nach folgendem Schema

$$\int_0^{q\pi+\varrho} = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} + \cdots + \int_{(q-1)\pi}^{q\pi} + \int_{q\pi}^{q\pi+\varrho}$$

es besteht also aus q Integralen von gleichem Integrationsintervalle und aus einem Restintegrale, welches wir mit R_q bezeichnen wollen. Da $\sin x$ von 0 bis π positiv, von π bis 2π negativ, von 2π bis 3π wieder positiv ist u. s. w., da ferner der Factor $\frac{1}{x} F\left(\frac{x}{p}\right)$ immer positiv bleibt, so hat das erste jener q Integrale einen positiven, das zweite einen negativen Werth und so alternirend weiter; man darf hiernach schreiben

3) $$S_p = U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \cdots + (-1)^{q+1} U_q + R_q,$$

wobei selbstverständlich U_1, U_2, U_3 etc. die absoluten Werthe der einzelnen Integrale bezeichnen. So ist z. B. U_n gleich dem absoluten Werthe von

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x} F\left(\frac{x}{p}\right) dx,$$

oder, wie die Substitution $x = (n-1)\pi + \xi$ zeigt,

$$U_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin \xi}{(n-1)\pi + \xi} F\left(\frac{(n-1)\pi + \xi}{p}\right) d\xi.$$

Vergleicht man hiermit das nächstfolgende Integral

$$U_{n+1} = \int_0^{\pi} \frac{\sin \xi}{n\pi + \xi} F\left(\frac{n\pi + \xi}{p}\right) d\xi$$

und beachtet, dass die Function F abnimmt, ohne negativ zu werden, so erkennt man sofort die Richtigkeit der Ungleichung

$$\frac{\sin \xi}{(n-1)\pi + \xi} F\left(\frac{(n-1)\pi + \xi}{p}\right) > \frac{\sin \xi}{n\pi + \xi} F\left(\frac{n\pi + \xi}{p}\right),$$

woraus folgt

$$U_n > U_{n+1}.$$

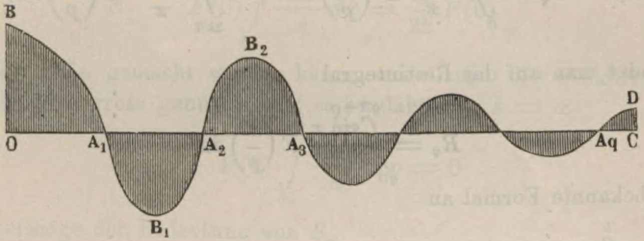
Die Werthe der U bilden hiernach eine fallende Reihe, der Art, dass $U_1 > U_2 > U_3 \cdots$ ist.

Sehr anschaulich werden diese Schlüsse, wenn man sich S_p als die von $x = 0$ bis $x = q\pi + \varrho$ gehende Fläche derjenigen Curve denkt, welche in rechtwinkligen Coordinaten durch die Gleichung

$$y = \frac{\sin x}{x} F\left(\frac{x}{p}\right)$$

bestimmt ist (Fig. 32). Die Curve beginnt mit der Ordinate $OB = F(0)$, durchschneidet die Abscissenachse an den Stellen $OA_1 = \pi$,

Fig. 32.



$OA_2 = 2\pi$, $OA_3 = 3\pi$, $\cdots\cdot$ $OA_q = q\pi$, und bildet demnach eine Reihe von Zügen BA_1, $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3$ etc., welche abwechselnd über und unter der Abscissenachse liegen. Abgesehen vom Vorzeichen ist die Maximalordinate jedes Zuges grösser als die Maximalordinate des nächsten Zuges, so dass die einzelnen Züge sich mehr und mehr der Abscissenachse nähern. Die Grössen U_1, U_2, U_3 etc. sind die absoluten Werthe der Flächen der einzelnen Züge, und zwar beträgt jede solche Fläche mehr als die folgende; das Restintegral R_q bedeutet die über $A_q C = \varrho$ stehende Fläche $A_q CD$.

Wenn in einer, aus beliebig vielen alternirenden Gliedern gebildeten Reihe

$$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \cdots + (-1)^{q+1} U_q$$

jeder Term grösser als der nächstfolgende ist, so beträgt die Summe der Reihe bekanntlich mehr als irgend eine gerade, dagegen weniger als irgend eine ungerade Anzahl von Gliedern; bezeichnet demnach $2k + 1$ eine ungerade Zahl $< q$, so ist nach Nr. 3)

$$\begin{gathered} U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \cdots - U_{2k} \\ < S_p - R_q < \\ U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \cdots + U_{2k+1} \end{gathered}$$

oder, vermöge der Bedeutung der U,

$$\int_0^{2k\pi} \frac{\sin x}{x} F\left(\frac{x}{p}\right) dx < S_p - R_q < \int_0^{(2k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} F\left(\frac{x}{p}\right) dx.$$

Bequemer ist es, statt dieser Ungleichung eine Gleichung zu schreiben, indem man den Satz benutzt, dass irgend eine Ungleichung $A < M < B$ durch die Gleichung $M = A + \varepsilon(B - A)$ ersetzt werden kann, worin ε einen nicht näher bestimmten positiven echten Bruch bezeichnet; man hat daher

$$4)\quad S_p - R_q = \int_0^{2k\pi} \frac{\sin x}{x} F\left(\frac{x}{p}\right) dx + \varepsilon \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} F\left(\frac{x}{p}\right) dx.$$

Wendet man auf das Restintegral

$$R_q = \int_{q\pi}^{q\pi+\varrho} \frac{\sin x}{x} F\left(\frac{x}{p}\right) dx$$

die bekannte Formel an

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a) f(a + \vartheta[b-a]), \qquad 0 < \vartheta < 1,$$

so erhält man

$$R_q = \varrho \frac{\sin(q\pi + \vartheta\varrho)}{q\pi + \vartheta\varrho} F\left(\frac{q\pi + \vartheta\varrho}{p}\right)$$
$$= (-1)^q \frac{\varrho \sin\vartheta\varrho}{q\pi + \vartheta\varrho} F\left(\gamma - \frac{(1-\vartheta)\varrho}{p}\right)$$

und auf gleiche Weise findet man

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} F\left(\frac{x}{p}\right) dx = \frac{\sin\vartheta\pi}{2k+\vartheta} F\left(\frac{2k\pi + \vartheta\pi}{p}\right).$$

Die Gleichung 4) gestaltet sich nun zur folgenden

$$S_p - (-1)^q \frac{\varrho \sin\vartheta\varrho}{q\pi + \vartheta\varrho} F\left(\gamma - \frac{(1-\vartheta)\varrho}{p}\right)$$
$$= \int_0^{2k\pi} \frac{\sin x}{x} F\left(\frac{x}{p}\right) dx + \varepsilon \frac{\sin\vartheta\pi}{2k+\vartheta} F\left(\frac{2k\pi + \vartheta\pi}{p}\right);$$

lässt man hier k constant bleiben, dagegen p, mithin auch q, unendlich wachsen und beachtet, dass $\frac{x}{p} < \frac{2k\pi}{p}$ gegen die Null convergirt, so gelangt man zu der Gleichung

$$S_\infty = F(0)\int\limits_0^{2k\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx + \frac{\varepsilon_k}{2k}\,F(0),$$

wobei das Product der drei echten Brüche

$$\varepsilon, \qquad \frac{2k}{2k+\vartheta}, \qquad \sin\vartheta\pi,$$

kurz mit ε_k bezeichnet worden ist. Aus der vorigen Gleichung erhellt nun unmittelbar, dass die Differenz

$$S_\infty - F(0)\int\limits_0^{2k\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\varepsilon_k}{2k}F(0)$$

beliebig klein gemacht werden kann, wenn man die willkürliche ganze Zahl k gross genug wählt; es ist daher für $k=\infty$

$$S_\infty - F(0)\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = 0$$

oder vermöge der Bedeutung von S_∞

$$Lim\int\limits_0^{\gamma}\frac{\sin p\theta}{\theta}\,F(\theta)\,d\theta = F(0)\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Im Folgenden sei zur Abkürzung

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = K;$$

man kennt zwar diesen Integralwerth aus anderen Untersuchungen, jedoch ist diese Kenntniss vorläufig nicht erforderlich, vielmehr genügt die Bemerkung, dass K einen endlichen Werth hat, wie sich leicht ergiebt, wenn man die vorige Untersuchung für den Fall $F(\theta)=1$ wiederholt und dabei berücksichtigt, dass K einer fallenden Reihe gleichkommt, deren Glieder alternirende Vorzeichen besitzen.

In der bis jetzt entwickelten Formel

$$5)\qquad Lim\int\limits_0^{\gamma}\frac{\sin p\theta}{\theta}\,F(\theta)\,d\theta = K\,F(0)$$

ist die Function $F(\theta)$ an die zu Anfang dieses Abschnittes erwähnten Bedingungen gebunden; es gilt nun, jene Bedingungen so weit als möglich wegzuschaffen.

Wenn die Function $F(\theta)$ bei ihrer continuirlichen Abnahme negative endliche Werthe annimmt, so lässt sich immer eine positive endliche Constante A der Art wählen, dass $A + F(\theta)$ nur positive Werthe erhält. Die Formel 5) ist dann auf die positiv abnehmende Function $A + F(\theta)$ anwendbar und giebt

$$Lim \int_0^\gamma \frac{\sin p\theta}{\theta} [A + F(\theta)] d\theta = K[A + F(0)],$$

oder durch Integration der einzelnen Theile

$$A. \; Lim \int_0^\gamma \frac{\sin p\theta}{\theta} d\theta + Lim \int_0^\gamma \frac{\sin p\theta}{\theta} F(\theta) d\theta = KA + KF(0).$$

Man bemerkt nun leicht, dass die Formel 5) noch für den Fall $F(\theta) = 1$ gilt, dass also

$$Lim \int_0^\gamma \frac{\sin p\theta}{\theta} d\theta = K$$

ist, was man übrigens auch mittelst der Substitution $p\theta = x$ finden kann; die vorhergehende Gleichung reducirt sich daher auf

$$Lim \int_0^\gamma \frac{\sin p\theta}{\theta} F(\theta) d\theta = KF(0),$$

d. h. die Gleichung 5) bleibt auch für solche continuirlich abnehmende $F(\theta)$ richtig, welche das Gebiet des Negativen betreten.

Wenn die Function $F(\theta)$ von $\theta = 0$ bis $\theta = \gamma$ continuirlich zunimmt, ohne jedoch unendlich zu werden, so ist $B - F(\theta)$ eine abnehmende Function, wobei B eine beliebige Constante bezeichnet. Die Formel 5) kann nun auf die Function $B - F(\theta)$ angewendet werden und liefert

$$Lim \int_0^\gamma \frac{\sin p\theta}{\theta} [B - F(\theta)] d\theta = K[B - F(0)].$$

Durch Integration der einzelnen Theile gelangt man analog dem Vorigen zu dem Satze, dass die Formel 5) auch für zunehmende Functionen richtig bleibt, dass sie also überhaupt für solche $F(\theta)$ gilt, welche von $\theta = 0$ bis $\theta = \gamma$ eindeutig, endlich und stetig bleiben und entweder nur abnehmen oder nur wachsen.

Mittelst dieses Satzes lässt sich der Betrag von

$$Lim \int_\alpha^\beta \frac{\sin p\theta}{\theta} F(\theta) d\theta,$$

für $\beta > \alpha > 0$ bestimmen, falls $F(\theta)$ von $\theta = \alpha$ bis $\theta = \beta$ dieselben Eigenschaften besitzt, die soeben für das Intervall $\theta = 0$ bis $\theta = \gamma$ vorausgesetzt wurden. Wenn $F(\theta)$ von $\theta = 0$ bis $\theta = \alpha = OA$ in Fig. 33 einen beliebigen Verlauf FG hat, dagegen von $\theta = \alpha$

Fig. 33.

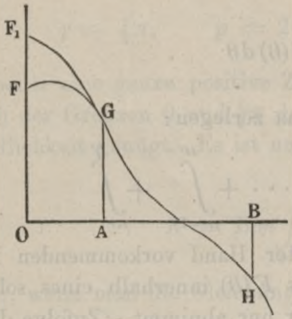
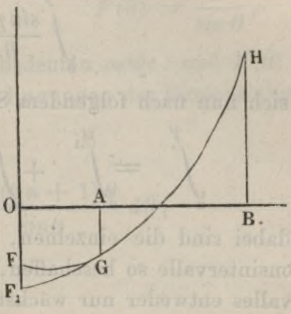


Fig. 34.



bis $\theta = \beta = OB$ continuirlich abnimmt und demnach längs AB durch die fallende Curve GH repräsentirt wird, so kann man sich eine andere Function $F_1(\theta)$ denken, welche auch von $\theta = 0$ bis $\theta = \alpha$ nur abnimmt und von $\theta = \alpha$ bis $\theta = \beta$ mit $F(\theta)$ identisch ist, deren Bild also die immer fallende Curve $F_1 GH$ ist. Ebenso lässt sich einer von $\theta = 0$ bis $\theta = \alpha$ beliebig verlaufenden und von $\theta = \alpha$ bis $\theta = \beta$ zunehmenden Function $F(\theta)$ (in der Fig. 34 der Curve FGH) eine durchaus wachsende Function $F_1(\theta)$ (die Curve $F_1 GH$) substituiren, die von $\theta = \alpha$ bis $\theta = \beta$ mit $F(\theta)$ zusammenfällt. Es ist nun

$$Lim \int_\alpha^\beta \frac{sin p\theta}{\theta} F_1(\theta)\,d\theta = Lim \left\{ \int_0^\beta \frac{sin p\theta}{\theta} F_1(\theta)\,d\theta \right.$$

$$\left. - \int_0^\alpha \frac{sin p\theta}{\theta} F_1(\theta)\,d\theta \right\} = KF_1(0) - KF_1(0) = 0,$$

mithin, wenn im ersten Integrale $F_1(\theta)$ durch die innerhalb des Integrationsintervalles mit $F_1(\theta)$ identische Function $F(\theta)$ ersetzt wird,

$$6)\qquad Lim \int_\alpha^\beta \frac{sin p\theta}{\theta} F(\theta)\,d\theta = 0, \qquad \beta > \alpha > 0.$$

Die Formeln 5) und 6) lassen sich durch folgende Bemerkungen wesentlich erweitern. Wenn die Function $F(\theta)$ von $\theta = 0$ bis $\theta = \gamma$ eindeutig, endlich und stetig bleibt, im Uebrigen aber bald wächst, bald abnimmt, so besitzt sie zwischen 0 und γ etliche Maxima und Minima, welche der Reihe nach an den Stellen μ_1, $\mu_2, \cdots \mu_{r-1}, \mu_r$ eintreten mögen. Das Integral

$$\int_0^{\gamma} \frac{\sin p\,\theta}{\theta} F(\theta)\,d\theta$$

lässt sich nun nach folgendem Schema zerlegen:

$$\int_0^{\gamma} = \int_0^{\mu_1} + \int_{\mu_1}^{\mu_2} + \cdots + \int_{\mu_{r-1}}^{\mu_r} + \int_{\mu_r}^{\gamma}$$

und dabei sind die einzelnen, rechter Hand vorkommenden Integrationsintervalle so beschaffen, dass $F(\theta)$ innerhalb eines solchen Intervalles entweder nur wächst oder nur abnimmt. Zufolge dieses Umstandes convergirt das erste Integral rechter Hand gegen die Grenze $KF(0)$, alle folgenden Integrale dagegen verschwinden bei wachsenden p (nach Formel 6); damit kommt man wieder auf die Gleichung 5) zurück. Durch ganz dieselben Schlüsse überzeugt man sich leicht, dass auch die Formel 6) auf solche Functionen ausgedehnt werden kann, die zwischen α und β bald wachsen, bald abnehmen.

Um noch den Fall einer etwaigen Discontinuität von $F(\theta)$ in Betracht zu ziehen, wollen wir voraussetzen, dass sich $F(\theta)$ an den zwischen 0 und γ liegenden Stellen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_s$ sprungweis ändere, ohne jedoch unendlich zu werden. Jedem solchen λ entsprechen dann zwei Functionswerthe $F(\lambda - 0)$ und $F(\lambda + 0)$, während im Uebrigen zu jedem θ nur ein Functionswerth gehört. Zerlegt man nun das Integral nach folgendem Schema:

$$\int_0^{\gamma} = \int_0^{\lambda_1 - 0} + \int_{\lambda_1 + 0}^{\lambda_2 - 0} + \int_{\lambda_2 + 0}^{\lambda_3 - 0} + \cdots + \int_{\lambda_s + 0}^{\gamma},$$

so ist $F(\theta)$ in jedem der rechts vorkommenden Integrationsintervalle, für sich genommen, eindeutig, endlich und stetig, mithin convergirt das erste Integral rechter Hand gegen den Grenzwerth $KF(0)$, während die folgenden Integrale verschwinden. Damit wird man wieder auf die Formel 5) zurückgeführt. Mittelst ganz derselben Zerlegung lässt sich auch die Formel 6) auf solche Functionen $F(\theta)$ ausdehnen, die zwischen α und β beliebig oft discontinuirlich, aber nicht unendlich werden.

Zur vollständigen Erledigung des Gegenstandes gehört schliesslich die Bestimmung der Constanten K. Da diese weder von p noch von γ, noch von der Natur der Function $F(\theta)$ abhängt, so kann irgend eine Specialisirung von γ, p und $F(\theta)$ zur Ermittelung von K benutzt werden.

Am besten eignet sich hierzu die Wahl

$$\gamma = \tfrac{1}{2}\pi, \qquad p = 2n + 1, \qquad F(\theta) = \frac{\theta}{\sin\theta},$$

wobei n eine ganze positive Zahl bedeuten möge, und $F(\theta)$ innerhalb der Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ den Bedingungen der Eindeutigkeit und Endlichkeit genügt. Es ist nun

$$K = Lim \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}\, d\theta,$$

oder, wenn man die Gleichung

$$7) \quad \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} = 1 + 2[\cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 6\theta + \cdots + \cos 2n\theta]$$

zur Ausführung der Integration benutzt

$$K = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Das Gesammtresultat der vorigen Untersuchung besteht in dem Satze, dass für beliebige positive, unendlich wachsende p die Formeln gelten

$$8) \qquad Lim \int_0^{\gamma} \frac{\sin p\theta}{\theta} F(\theta)\, d\theta = \tfrac{1}{2}\pi F(0), \quad \gamma > 0,$$

$$9) \qquad Lim \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin p\theta}{\theta} F(\theta)\, d\theta = 0, \qquad \beta > \alpha > 0,$$

wenn $F(\theta)$ innerhalb des betreffenden Integrationsintervalles eindeutig und endlich bleibt.

Um hier gleich ein paar Anwendungen zu zeigen, wollen wir die vorige Summenformel 7) allgemeiner zwischen den Grenzen $\theta = 0$ und $\theta = \gamma$ integriren; diess giebt

$$\gamma + \frac{1}{1}\sin 2\gamma + \frac{1}{2}\sin 4\gamma + \cdots + \frac{1}{n}\sin 2n\gamma$$
$$= \int_0^{\gamma} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} d\theta = \int_0^{\gamma} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\theta} \cdot \frac{\theta}{\sin\theta}\, d\theta.$$

Unter der Voraussetzung $\gamma < \pi$ bleibt die Function $\theta : \sin\theta$ endlich von $\theta = 0$ bis $\theta = \gamma$, mithin ist durch Uebergang zur Grenze für unendlich wachsende n

$$\gamma + \tfrac{1}{1}\sin 2\gamma + \tfrac{1}{2}\sin 4\gamma + \tfrac{1}{3}\sin 6\gamma + \cdots = \tfrac{1}{2}\pi,$$
$$0 < \gamma < \pi,$$

oder für $\gamma = \frac{1}{2}u$

$$\tfrac{1}{2}(\pi - u) = \tfrac{1}{1}\sin u + \tfrac{1}{2}\sin 2u + \tfrac{1}{3}\sin 3u + \cdots,$$
$$0 < u < 2\pi.$$

Man gelangt zu einem analogen Resultate, wenn man die leicht beweisbare Gleichung *)

$$\begin{aligned} &2[\sin 2\theta + \sin 4\theta + \sin 6\theta + \cdots + \sin 2n\theta] \\ &= \cot\theta + \sin 2n\theta - \cos 2n\theta \cot\theta \\ &= \cot\theta + \sin 2n\theta - \frac{\sin(2n+1)\theta - \sin(2n-1)\theta}{2\sin\theta}\cot\theta \end{aligned}$$

mit $d\theta$ multiplicirt und zwischen zwei, vorläufig noch nicht näher bestimmten Grenzen $\theta = \alpha$ und $\theta = \beta$ integrirt. Zunächst ergiebt sich

$$\frac{\cos 2\alpha - \cos 2\beta}{1} + \frac{\cos 4\alpha - \cos 4\beta}{2} + \cdots + \frac{\cos 2n\alpha - \cos 2n\beta}{n}$$

$$= l\sin\beta - l\sin\alpha + \frac{\cos 2n\alpha - \cos 2n\beta}{2n}$$

$$-\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{\sin(2n+1)\theta}{\theta}\cdot\frac{\theta}{\sin\theta}\cot\theta\, d\theta + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{\sin(2n-1)\theta}{\theta}\cdot\frac{\theta}{\sin\theta}\cot\theta\, d\theta,$$

und wenn hier $0 < \alpha < \beta < \pi$ genommen wird, so bleibt die Function

$$F(\theta) = \frac{\theta}{\sin\theta}\cot\theta$$

endlich innerhalb des Integrationsintervalles. Nach Formel 9) hat man nun durch Uebergang zur Grenze für unendlich wachsende n

$$\frac{\cos 2\alpha - \cos 2\beta}{1} + \frac{\cos 4\alpha - \cos 4\beta}{2} + \frac{\cos 6\alpha - \cos 6\beta}{3} + \cdots$$

$$= l\sin\beta - l\sin\alpha, \qquad 0 < \alpha < \beta < \pi.$$

Specieller für $\beta = \frac{1}{2}\pi$, $\alpha = \frac{1}{2}u$ und unter Anwendung der bekannten Formel $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.} = l2$ folgt hieraus

$$-l(2\sin\tfrac{1}{2}u) = \tfrac{1}{1}\cos u + \tfrac{1}{2}\cos 2u + \tfrac{1}{3}\cos 3u + \ldots, \qquad 0 < u < \pi.$$

Die beiden erhaltenen Summenformeln geben zu erkennen, dass die auf S. 119 beispielsweis angeführten Reihenentwickelungen auch in dem Grenzfalle $r = 1$ gelten, sobald die (sonst beliebige) Variabele u auf ein bestimmtes Intervall eingeschränkt wird.

*) Wird nämlich beiderseits mit $\sin\theta$ multiplicirt und linker Hand jedes doppelte Product zweier Sinus in die Differenz zweier Cosinus umgesetzt, so entsteht eine identische Gleichung.

III. Bestimmung von $Lim \int_0^{\gamma} \frac{sin m\theta}{sin\theta} f(\theta)\, d\theta$ für $m = \infty$.

Im Folgenden wollen wir die Gleichung 8) auf den Fall

$$F(\theta) = \frac{\theta}{sin\theta} f(\theta)$$

anwenden und dabei voraussetzen, dass $f(\theta)$ eine von $\theta = 0$ bis $\theta = \gamma$ endlich bleibende Function sei. Für $\theta = 0$ erhält $F(\theta)$ den endlichen Werth $F(0) = f(0)$, für $\theta = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$, etc. wird dagegen $F(\theta)$ im Allgemeinen unendlich; um diese Fälle auszuschliessen, müssen wir vorläufig $\gamma < \pi$ voraussetzen und haben dann

$$10)\qquad Lim \int_0^{\gamma} \frac{sin m\theta}{sin\theta} f(\theta)\, d\theta = \tfrac{1}{2}\pi f(0), \qquad 0 < \gamma < \pi.$$

Anders gestaltet sich die Sache für $\gamma = \pi$. Da hier die Gleichung 8) nicht unmittelbar zur Anwendung kommen darf, so benutzen wir erst die Zerlegung

$$\int_0^{\pi} \frac{sin m\theta}{sin\theta} f(\theta)\, d\theta = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{sin m\theta}{sin\theta} f(\theta)\, d\theta + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \frac{sin m\theta}{sin\theta} f(\theta)\, d\theta$$

und substituiren im zweiten Integrale rechter Hand $\theta = \pi - \eta$, wodurch

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \frac{sin m\theta}{sin\theta} f(\theta)\, d\theta = -\, cos m\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{sin m\eta}{sin\eta} f(\pi - \eta)\, d\eta$$

wird. Hiernach ist, wenn wir m als ungerade Zahl voraussetzen und statt η wieder θ schreiben

$$\int_0^{\pi} \frac{sin m\theta}{sin\theta} f(\theta)\, d\theta = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{sin m\theta}{sin\theta} f(\theta)\, d\theta + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{sin m\theta}{sin\theta} f(\pi - \theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{sin m\theta}{sin\theta} [f(\theta) + f(\pi - \theta)]\, d\theta.$$

Das letzte Integral ist ebenso gebildet, als wenn in Nro. 8)

$$\gamma = \tfrac{1}{2}\pi, \qquad F(\theta) = \frac{\theta}{\sin\theta}[f(\theta) + f(\pi - \theta)]$$

gesetzt worden wäre, und da diese Function von $\theta = 0$ bis $\theta = \frac{1}{2}\pi$ endlich bleibt, so folgt

$$11) \qquad Lim \int_0^\pi \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(\theta)\, d\theta = \tfrac{1}{2}\pi\, [f(0) + f(\pi - 0)].$$

Durch die genaue Schreibweise $f(\pi - 0)$ wird hier angedeutet, welchen Werth von $f(\pi)$ man in dem Falle zu nehmen hat, wo etwa $f(\theta)$ für $\theta = \pi$ eine Unterbrechung der Continuität erleidet.

Mittelst der Formel 11) ist leicht zu entscheiden, wie sich die Sache gestaltet, sobald γ ein Vielfaches von π ausmacht, etwa $\gamma = h\pi$. Die Zerlegung des Integrationsintervalles giebt zunächst

$$\int_0^{h\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(\theta)\, d\theta = \int_0^{\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(\theta)\, d\theta + \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(\theta)\, d\theta + \cdots$$

$$\cdots + \int_{(h-1)\pi}^{h\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(\theta)\, d\theta,$$

und wenn wir im ersten Integrale rechter Hand $\theta = \eta$, im zweiten $\theta = \pi + \eta$, im dritten $\theta = 2\pi + \eta$ etc. substituiren, so erhalten wir

$$\int_0^{h\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^\pi \frac{\sin m\eta}{\sin\eta} f(\eta)\, d\eta + \int_0^\pi \frac{\sin m\eta}{\sin\eta} f(\pi + \eta)\, d\eta + \cdots$$

$$\cdots + \int_0^\pi \frac{\sin m\eta}{\sin\eta} f(\overline{h-1}\,\pi + \eta)\, d\eta.$$

Die Integrale rechter Hand lassen sich in ein einziges zusammenziehen, wobei wir wieder θ statt η schreiben wollen. In der so entstehenden Gleichung

$$\int_0^{h\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^\pi \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} [f(\theta) + f(\pi + \theta) + f(2\pi + \theta) + \cdots + f(\overline{h-1}\,\pi + \theta)]\, d\theta$$

ist die rechte Seite ebenso gebildet, als wäre in Nro. 11) statt $f(\theta)$ die endliche Reihe $f(\theta)+f(\pi+\theta)+$ etc. gesetzt worden; der Uebergang zur Grenze für $m=\infty$ liefert demnach

$$12)\ Lim\int_0^{h\pi}\frac{sin\,m\theta}{sin\,\theta}f(\theta)\,d\theta=\pi\Big\{\tfrac{1}{2}f(0)+\frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2}$$
$$+\frac{f(2\pi-0)+f(2\pi+0)}{2}+\cdots+\frac{f(\overline{h-1}\,\pi-0)+f(\overline{h-1}\,\pi+0)}{2}$$
$$+\tfrac{1}{2}f(h\pi-0)\Big\}.$$

Wir haben endlich noch den Fall zu betrachten, wo γ zwischen zwei benachbarten Vielfachen von π liegt, mithin $\gamma=h\pi+\varrho$ und $0<\varrho<\pi$ ist. Unter dieser Voraussetzung zerlegen wir wie folgt

$$\int_0^{h\pi+\varrho}\frac{sin\,m\theta}{sin\,\theta}f(\theta)\,d\theta=\int_0^{h\pi}\frac{sin\,m\theta}{sin\,\theta}f(\theta)\,d\theta+\int_{h\pi}^{h\pi+\varrho}\frac{sin\,m\theta}{sin\,\theta}f(\theta)\,d\theta$$

und substituiren im zweiten Integrale rechter Hand $\theta=h\pi+\eta$, wobei wir zuletzt wieder θ statt η schreiben; diess giebt

$$\int_0^{h\pi+\varrho}\frac{sin\,m\theta}{sin\,\theta}f(\theta)\,d\theta=\int_0^{h\pi}\frac{sin\,m\theta}{sin\,\theta}f(\theta)\,d\theta+\int_0^{\varrho}\frac{sin\,m\theta}{sin\,\theta}f(h\pi+\theta)\,d\theta.$$

Für das erste der rechts verzeichneten Integrale benutzen wir die Formel 12), für das zweite die Formel 10), indem wir das in letzterer vorkommende $f(\theta)$ durch $f(h\pi+\theta)$ ersetzen; wir erhalten so*)

$$13)\ Lim\int_0^{h\pi+\varrho}\frac{sin\,m\theta}{sin\,\theta}f(\theta)\,d\theta=\pi\Big\{\tfrac{1}{2}f(0)+\frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2}$$
$$+\frac{f(2\pi-0)+f(2\pi+0)}{2}+\cdots+\frac{f(h\pi-0)+f(h\pi+0)}{2}\Big\},$$
$$0<\varrho<\pi.$$

Hiernach lässt sich auch der Fall $\gamma=\infty$ behandeln, indem man sich h als unendlich wachsende Zahl denkt, also die Reihen in 12) und 13) ins Unendliche fortsetzt. Wenn diese Reihen divergiren, so hat das Resultat keine Bedeutung, convergiren sie aber, so muss $f(h\pi)$ bei unendlich wachsenden h ins Unendliche abnehmen,

---

*) Die Formeln 10) bis 13) hat zuerst Lejeune-Dirichlet entwickelt in Crelle's Journal Bd. IV, S. 94 und mit mehrfachen Erläuterungen reproducirt in Dove's Repertorium der Physik Bd. I, S. 152. An beiden Orten transformirt der Erfinder das oben betrachtete Integral mittelst derselben Methoden, welche wir auf das einfachere Integral in II angewendet haben; der hier eingeschlagene Weg dürfte jedoch bequemer sein.

und dann ist es gleichgültig, welche von den Formeln 12) und 13) in Anspruch genommen wird. So erhält man z. B. für $f(\theta) = e^{-\theta}$

$$Lim \int_0^\infty \frac{sin\, m\theta}{sin\,\theta} e^{-\theta}\, d\theta$$

$$= \pi[\tfrac{1}{2} + e^{-\pi} + e^{-2\pi} + e^{-3\pi} + \cdots] = \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1}.$$

IV. Summirung periodischer Reihen.

Durch die vorigen Untersuchungen sind wir in den Stand gesetzt, die Summen solcher unendlicher Reihen zu finden, deren allgemeiner Term durch das Integral

$$\int_0^\pi f(t)\cos n\,(t \mp x)\,dt$$

dargestellt wird; zur Abkürzung benutzen wir hierbei folgende Bezeichnungen

$$14)\quad U_n = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi f(t)\,dt + \int_0^\pi f(t)\cos(t-x)\,dt + \int_0^\pi f(t)\cos 2(t-x)\,dt + \cdots$$
$$\cdots + \int_0^\pi f(t)\cos n\,(t-x)\,dt,$$

$$15)\quad V_n = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi f(t)\,dt + \int_0^\pi f(t)\cos(t+x)\,dt + \int_0^\pi f(t)\cos 2\,(t+x)\,dt + \cdots$$
$$\cdots + \int_0^\pi f(t)\cos n\,(t+x)\,dt.$$

Was nun die erste Reihe betrifft, so können wir dieselbe auf folgende Form bringen

$$U_n = \int_0^\pi f(t)\,[\tfrac{1}{2} + cos(t-x) + cos\,2(t-x) + \cdots + cos\,n\,(t-x)]\,dt$$

und erhalten nach einer schon mehrmals benutzten Summenformel

$$U_n = \int_0^\pi f(t)\,\frac{sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{2\,sin\frac{1}{2}(t-x)}\,dt.$$

Statt t führen wir eine neue Variabele ω ein mittelst der Substitution

$\frac{1}{2}(t-x)=\omega$ oder $t=2\omega+x$ und bezeichnen die ungerade Zahl $2n+1$ kurz mit m; es ist dann

$$U_n=\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\frac{\sin m\omega}{\sin\omega}f(2\omega+x)\,d\omega.$$

Dieses Integral lässt sich in die beiden Theile

$$\int_{-\frac{1}{2}x}^{0}\frac{\sin m\omega}{\sin\omega}f(x+2\omega)\,d\omega+\int_{0}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\frac{\sin m\omega}{\sin\omega}f(x+2\omega)\,d\omega$$

zerlegen, und wenn wir im ersten Integrale $\omega=-\theta$, im zweiten $\omega=\theta$ setzen, so wird

$$16)\qquad U_n=\int_{0}^{\frac{1}{2}x}\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}f(x-2\theta)\,d\theta+\int_{0}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}f(x+2\theta)\,d\theta.$$

Mittelst der im vorigen Abschnitte bewiesenen Sätze können jetzt die Grenzwerthe bestimmt werden, gegen welche die beiden Integrale convergiren, sobald n und m unendlich wachsen. Jene Grenzwerthe hängen aber von dem Betrage des x ab, und daher müssen wir hinsichtlich des letzteren bestimmte Voraussetzungen machen. Wir beschränken uns dabei auf drei Fälle, ob nämlich $x=0$, oder zwischen 0 und π enthalten, oder $=\pi$ ist. Im ersten Falle verschwindet das erste Integral wegen der gleichen Integrationsgrenzen, und das zweite convergirt gegen den Werth $\frac{1}{2}\pi f(+0)$. Liegt zweitens x zwischen 0 und π, so hat man gleichzeitig $0<\frac{1}{2}x<\pi$ und $0<\frac{1}{2}(\pi-x)<\pi$, mithin convergirt das erste Integral gegen den Grenzwerth $\frac{1}{2}\pi f(x-0)$, das zweite gegen $\frac{1}{2}\pi f(x+0)$. Endlich für $x=\pi$ verschwindet das zweite Integral in Nro. 16) und das erste convergirt gegen $\frac{1}{2}\pi f(\pi-0)$. Demnach ist

$$17)\qquad \begin{cases}\text{für } x=0, & U_\infty=\frac{1}{2}\pi f(+0),\\ \text{„}\ \ 0<x<\pi, & U_\infty=\pi\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2},\\ \text{„}\ \ x=\pi, & U_\infty=\frac{1}{2}\pi f(\pi-0).\end{cases}$$

Eine ganz ähnliche Behandlung gestattet V_n. Man findet zunächst

$$V_n=\int_{0}^{\pi}f(t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t+x)}{2\sin\frac{1}{2}(t+x)}\,dt$$

und für $\frac{1}{2}(t+x)=\theta$,

$$V_n = \int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(2\theta - x)\, d\theta$$

oder durch Zerlegung

$$V_n = \int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(-x+2\theta)\, d\theta - \int_0^{\frac{1}{2}x} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(-x+2\theta)\, d\theta.$$

Im Falle $x = 0$ verschwindet das zweite Integral von selbst, und das erste convergirt gegen $\frac{1}{2}\pi f(+0)$. Liegt x zwischen 0 und π, so sind $\frac{1}{2}(\pi + x)$ und $\frac{1}{2}x$ gleichzeitig zwischen 0 und π enthalten; dann convergiren beide Integrale gegen einen und denselben Grenzwerth. Endlich für $x = \pi$ convergirt das erste Integral (nach Nro. 11) gegen $\frac{1}{2}\pi f(\pi - 0) + \frac{1}{2}\pi f(-\pi + 0)$, das zweite gegen $\frac{1}{2}\pi f(-\pi + 0)$. Zusammen giebt diess

$$18) \quad \begin{cases} \text{für } x = 0, & V_\infty = \frac{1}{2}\pi f(+0), \\ \text{„ } 0 < x < \pi, & V_\infty = 0, \\ \text{„ } x = \pi, & V_\infty = \frac{1}{2}\pi f(\pi - 0). \end{cases}$$

Addirt man jetzt die Gleichungen 14) und 15) für $n = \infty$, indem man ihre unter Nro. 17) und 18) angegebenen Summen beachtet, so findet man nach beiderseitiger Division mit π, dass die Summe der unendlichen Reihe

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos t\,dt\,.\cos x + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos 2t\,dt\,.\cos 2x + \cdots$$

durch

$$f(+0), \qquad \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, \qquad f(\pi - 0)$$

ausgedrückt wird, jenachdem $x = 0$ oder $0 < x < \pi$ oder $x = \pi$ ist. Dieses Resultat lässt sich, wenn

$$19) \qquad A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos nt\,dt$$

gesetzt wird, zu folgendem Theoreme zusammenfassen:

Wenn die Function $f(x)$ von $x = 0$ bis $x = \pi$ endlich und stetig bleibt, so gilt die Gleichung

$$f(x) = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \cdots$$

für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = \pi$ **inclusive** *beide Grenzen; erleidet aber $f(x)$ innerhalb dieses Intervalles eine Unterbrechung der Continuität, ohne jedoch unendlich zu werden, so ist die Summe der obigen Reihe gleich dem* arithmetischen Mittel aus den beiden Werthen, welche $f(x)$ an der betreffenden Sprungstelle besitzt.

Durch Subtraction der Gleichung 15) von Nro. 14) ergiebt sich auf ganz ähnliche Weise, dass der unendlichen Reihe

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt\,.\sin x + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin 2t\,dt\,.\sin 2x + \cdots$$

die Summen

$$0, \quad \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, \quad 0$$

zukommen, jenachdem $x = 0$, oder $0 < x < \pi$ oder $x = \pi$ ist. Mittelst der Abkürzung

20) $$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin nt\,dt$$

gelangt man jetzt zu dem analogen Satze:

Wenn die Function $f(x)$ von $x = 0$ bis $x = \pi$ endlich und stetig bleibt, so gilt die Gleichung

$$f(x) = B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \cdots$$

für alle zwischen 0 und π liegenden Werthe von x exclusive beide Grenzen; erleidet aber $f(x)$ innerhalb dieses Intervalles eine Unterbrechung der Continuität, ohne jedoch unendlich zu werden, so ist die Summe der obigen Reihe gleich dem arithmetischen Mittel aus den beiden Werthen, welche $f(x)$ an der betreffenden Sprungstelle besitzt.

Zur vollständigen Discussion der vorigen Reihen gehört noch die Ermittelung der Reihensummen für den Fall, dass x ausserhalb des Intervalles 0 bis π liegt. Betrachtet man nun in der Reihe

$$\tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \cdots$$

x als willkührliche Variabele und versteht unter ξ irgend eine zwischen 0 und π liegende Zahl, so bemerkt man leicht, dass jeder einzelne der vorkommenden Cosinus für

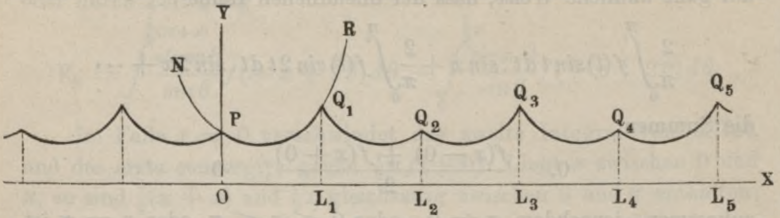
$$x = 2\pi - \xi,\ 2\pi + \xi,\ 4\pi - \xi,\ 4\pi + \xi,\ 6\pi - \xi,\ 6\pi + \xi, \cdots$$

denselben Werth erhält wie für $x = \xi$. Das Nämliche gilt auch von der Reihensumme, welche demnach eine periodische Function von x ist. Für negative x bleibt die Reihensumme dieselbe wie für gleich grosse positive x. Diese Verhältnisse werden sehr anschaulich, wenn man sich die beiden Curven construirt denkt, deren Gleichungen in rechtwinkligen Coordinaten sind $y = f(x)$ und

21) $$Y = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \cdots$$

Die erste Curve NPQ_1R ist willkührlich, (Fig. 35) und es sei darin PQ_1 der Bogen, welcher der Abscisse $OL_1 = \pi$ entspricht. Die

Fig. 35.



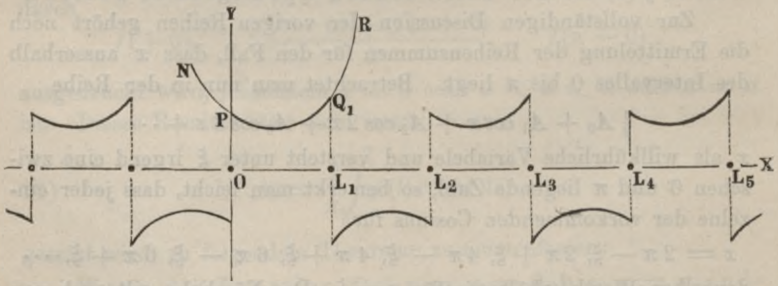
zweite Curve fällt von $x = 0$ bis $x = \pi$ mit der ersten Curve zusammen, für $x > \pi$ sowie für $x < 0$ besteht sie aus einer Reihe von Bögen, die dem Bogen PQ_1 congruent sind. In der Gleichung 21) hat man daher ein Mittel zur Construction einer wellenförmigen Curve, in welcher der von $x = 0$ bis $x = \pi$ reichende Bogen mit dem entsprechenden Bogen irgend einer gegebenen Curve übereinstimmt.

Ganz ähnliche Betrachtungen gelten für die Reihe

$$B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \cdots$$

Auch hier besteht die Curve, welche die Reihensumme darstellt, aus congruenten Bögen, jedoch liegen dieselben abwechselnd über und unter der Abscissenachse (Fig. 36). So oft x gleich einem Vielfachen

Fig. 36.



von π wird, verschwindet die Reihensumme; die zweite Curve hat demnach unendlich viele auf der Abscissenachse liegende isolirte Punkte wie z. B. O, L_1, L_2 u. s. w.

Bevor wir Anwendungen der beiden Theoreme zeigen, wollen wir erst die Frage erörtern, unter welchen Umständen es erlaubt sein würde, die Gleichungen

22) $f(x) = \frac{1}{2}A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \cdots$

23) $f(x) = B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \cdots$

in Beziehung auf x zu differenziren. Die Differentiation der ersten Gleichung giebt

24) $f'(x) = -1 A_1 \sin x - 2 A_2 \sin 2x - 3 A_3 \sin 3x - \cdots,$

und es bedarf nun der Entscheidung, ob diese Gleichung richtig ist oder nicht. Soll aber $f'(x)$ wie eine nach Sinus fortschreitende Reihe entwickelbar sein, so muss erstens $f'(x)$ von $x = 0$ bis $x = \pi$ endlich bleiben und zweitens ist der Coefficient von $\sin nx$ mittelst der Formel

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f'(t) \sin nt \, dt$$

zu bestimmen; die Gleichung 24) würde daher richtig sein, wenn der vorliegende Coefficient $= -nA_n$ wäre. Durch theilweise Integration ergiebt sich leicht

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f'(t) \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi}\left\{f(\pi)\sin n\pi - f(0)\sin 0 - n\int_0^\pi f(t)\cos nt\, dt\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{f(\pi)\sin n\pi - f(0)\sin 0\right\} - nA_n$$

und wenn hier $f(0)$ und $f(\pi)$ endliche Grössen sind, so ergiebt sich in der That, dass der gesuchte Coefficient den Werth $-nA_n$ hat. Die Differentiation der Gleichung 22) ist also erlaubt, wenn $f(x)$ und $f'(x)$ von $x = 0$ bis $x = \pi$ endlich bleiben.

Etwas anders gestaltet sich die Sache für die Gleichung 23), deren Differentialquotient sein würde

25) $f'(x) = 1 B_1 \cos x + 2 B_2 \cos 2x + 3 B_3 \cos 3x + \cdots$

Verwandelt man nämlich $f'(x)$ in eine nach Cosinus fortschreitende Reihe, so hat man als Coefficienten von $\cos nx$ den Ausdruck

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f'(t) \cos nt \, dt = \frac{2}{\pi}\left\{f(\pi)\cos n\pi - f(0) + n\int_0^\pi f(t)\sin nt\, dt\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{f(\pi)\cos n\pi - f(0)\right\} + nB_n,$$

welcher mit dem in Nro. 25) vorkommenden Coefficienten nB_n nicht übereinstimmt, ausgenommen den Fall $f(\pi) = f(0) = 0$. Die Differentiation der Gleichung 23) ist also nur dann erlaubt, wenn $f(x)$ und $f'(x)$ von $x = 0$ bis $x = \pi$ endlich bleiben und wenn ausserdem $f(0) = f(\pi) = 0$ ist.

V. Anwendungen der vorigen Theoreme.

A. Beispiele zu Formel 22).

Für $f(x) = x$ erhält man

$$A_0 = \pi, \quad A_n = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1 - \cos n\pi}{n^2}$$

mithin

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left\{\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right\}.$$

oder

$$26)\qquad \tfrac{1}{4}\pi(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \tfrac{1}{1}\cos x + \tfrac{1}{9}\cos 3x + \tfrac{1}{25}\cos 5x + \cdots$$
$$0 \leqq x \leqq \pi.$$

Die Specialisirungen $x = 0$ und $x = \pi$ führen zu Summenformeln, welche nach §. 50 des ersten Theiles schon bekannt sind.

Die Annahme

$$f(x) = e^{\lambda x} + e^{-\lambda x},$$

worin λ eine beliebige Constante bezeichnen möge, liefert

$$A_0 = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{e^{\lambda\pi} - e^{-\lambda\pi}}{\lambda}, \quad A_n = \frac{2}{\pi}(e^{\lambda\pi} - e^{-\lambda\pi})\frac{(-1)^n\lambda}{n^2 + \lambda^2}$$

und daraus folgt

$$27)\qquad \frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{e^{\lambda\pi} - e^{-\lambda\pi}} = \frac{1}{2\lambda} - \frac{\lambda\cos x}{1^2 + \lambda^2} + \frac{\lambda\cos 2x}{2^2 + \lambda^2} - \frac{\lambda\cos 3x}{3^2 + \lambda^2} + \cdots$$

Da der Ausdruck linker Hand für negative x derselbe ist, wie für gleich grosse positive x, so gilt die Gleichung unter der etwas erweiterten Bedingung $-\pi \leqq x \leqq \pi$.

Für $f(x) = \cos\mu x$, wo μ keine ganze Zahl sein möge, ergiebt sich

$$A_0 = \frac{2\sin\mu\pi}{\mu\pi}, \quad A_n = \frac{2\sin\mu\pi}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}\mu}{n^2 - \mu^2},$$

mithin

$$28)\qquad \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\cos\mu x}{\sin\mu\pi} = \frac{1}{2\mu} + \frac{\mu\cos x}{1^2 - \mu^2} - \frac{\mu\cos 2x}{2^2 - \mu^2} + \frac{\mu\cos 3x}{3^2 - \mu^2} - \cdots,$$

was Dasselbe ist, als wenn man in Nr. 27) $\lambda = \mu\sqrt{-1}$ gesetzt hätte. Auch diese Formel lässt sich auf das Intervall $x = -\pi$ bis $x = +\pi$ ausdehnen. Die speciellen Werthe $x = 0$ und $x = \pi$ führen zu Gleichungen, welche von den im ersten Theile in §. 50 entwickelten Formeln 6) und 3) nicht wesentlich verschieden sind.

B. Beispiele zu Formel 23).

Die Annahme $f(x) = 1$ giebt

$$B_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - \cos n\pi}{n}$$

mithin

29) $$\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{1}\sin x + \tfrac{1}{3}\sin 3x + \tfrac{1}{5}\sin 5x + \cdots,\quad 0 < x < \pi,$$

woraus z. E. für $x = \frac{1}{2}\pi$ die bekannte Leibnitz'sche Reihe folgt.

Nimmt man $f(x) = x$, so erhält man

$$B_n = 2\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

demnach

30) $$\tfrac{1}{2}\,x = \tfrac{1}{1}\sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \cdots.$$

Da die linke Seite für $x = 0$ verschwindet und für negative x die nämlichen, aber dem Zeichen nach entgegengesetzten Werthe annimmt wie für gleich grosse positive x, so lässt sich das Gültigkeitsintervall der Gleichung ausdehnen auf $-\pi < x < +\pi$.

Ersetzt man in der vorliegenden Gleichung x durch $\pi - x$, so gelangt man zu der schon auf S. 132 entwickelten Formel

31) $$\tfrac{1}{2}(\pi - x) = \tfrac{1}{1}\sin x + \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x + \cdots,$$

welche an die Bedingung $0 < x < 2\pi$ gebunden ist. Das arithmetische Mittel der Gleichungen 30) und 31) führt auf Nro 29) zurück.

Durch Substitution von

$$f(x) = e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}$$

erhält man

$$B_n = \frac{2}{\pi}(e^{\lambda\pi} - e^{-\lambda\pi})\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2 + \lambda^2},$$

und hieraus die Gleichung

32) $$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{e^{\lambda\pi} - e^{-\lambda\pi}} = \frac{1\sin x}{1^2 + \lambda^2} - \frac{2\sin 2x}{2^2 + \lambda^2} + \frac{3\sin 3x}{3^2 + \lambda^2} - \cdots,$$

deren Gültigkeit sich leicht auf $-\pi < x < +\pi$ ausdehnen lässt. Dasselbe Resultat folgt aus Nro. 27) durch Differentiation in Beziehung auf x.

Mittelst der Substitution $f(x) = \sin\mu x$, wo μ keine ganze positive Zahl sein möge, findet man

$$B_n = \frac{2\sin\mu\pi}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2 - \mu^2}$$

und demgemäss

33) $$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin\mu x}{\sin\mu\pi} = \frac{1\sin x}{1^2 - \mu^2} - \frac{2\sin 2x}{2^2 - \mu^2} + \frac{3\sin 3x}{3^2 - \mu^2} - \cdots,$$

ein Resultat, dessen Gültigkeit auf die Grenzen $-\pi < x < +\pi$ ausgedehnt werden kann. Man erhält übrigens dieselbe Gleichung aus Nro. 32), wenn $\lambda = \mu\sqrt{-1}$ gesetzt wird.

C. Transformation von A_n.

Für manche Anwendungen der Formel 22) ist eine Transformation von Wichtigkeit, welcher das Integral

$$\int_0^\pi f(t)\cos nt\, dt$$

in dem Falle unterworfen werden kann, wo $f(t)$ eine Function von $\cos t$ darstellt, wo mithin $f(t) = \varphi(\cos t)$ gesetzt werden darf. Man gelangt hierzu auf folgendem Wege.

Bezeichnet wie gewöhnlich $\varphi^{(n)}(z)$ den n-ten Differentialquotienten von $\varphi(z)$, so ist durch theilweise Integration

$$\int \varphi^{(n)}(z)\,\psi(z)\,dz = \varphi^{(n-1)}(z)\,\psi(z) - \int \varphi^{(n-1)}(z)\,\psi'(z)\,dz.$$

Unter der Voraussetzung, dass die Function $\psi(z)$ sowohl für $z = a$ als für $z = b$ verschwindet und dass $\varphi^{(n-1)}(z)$ von $z = a$ bis $z = b$ endlich bleibt, folgt hieraus

$$\int_a^b \varphi^{(n)}(z)\,\psi(z)\,dz = -\int_a^b \varphi^{(n-1)}(z)\,\psi'(z)\,dz.$$

Wendet man rechter Hand wieder dasselbe Verfahren an und setzt voraus, dass $\psi'(a) = 0$, $\psi'(b) = 0$ und $\varphi^{(n-2)}(z)$ innerhalb der Integrationsgrenzen endlich ist, so gelangt man zu der Formel

$$\int_a^b \varphi^{(n)}(z)\,\psi(z)\,dz = +\int_a^b \varphi^{(n-2)}(z)\,\psi''(z)\,dz.$$

Es erhellt von selbst, wie sich dieses Verfahren fortsetzen lässt; die n-malige Anwendung desselben giebt

$$\int_a^b \varphi^{(n)}(z)\,\psi(z)\,dz = (-1)^n \int_a^b \varphi(z)\,\psi^{(n)}(z)\,dz,$$

und zwar müssen dabei $\psi(z)$, $\psi'(z)$, ... $\psi^{(n-1)}(z)$ sowohl für $z = a$ als für $z = b$ verschwinden und $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$, ... $\varphi^{(n-1)}(z)$ innerhalb der Integrationsgrenzen endlich bleiben. Den für $\psi(z)$ angegebenen Bedingungen genügt, wie leicht zu sehen ist, die Function

$$\psi(z) = (1 - z^2)^{n-\frac{1}{2}}$$

wenn $a = -1$, $b = +1$ genommen wird, und es ist daher

$$\int_{-1}^{+1} \varphi^{(n)}(z)(1-z^2)^{n-\frac{1}{2}}dz = (-1)^n \int_{-1}^{+1} \varphi(z) \frac{d^n(1-z^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dz^n} dz.$$

Andererseits hat man (S. 7, Formel 10)

$$\frac{d^{n-1}(1-z^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dz^{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}\, 1.3.5\ldots(2n-1)}{n} \sin(n \arccos z),$$

mithin auch

$$\int_{-1}^{+1} \varphi^{(n)}(z)(1-z^2)^{n-\frac{1}{2}}dz$$

$$= -\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n} \int_{-1}^{+1} \varphi(z) \frac{d \sin(n \arccos z)}{dz} dz,$$

und daraus wird mittelst der Substitution $\arccos z = t$ oder $z = \cos t$,

$$\int_0^\pi \varphi^{(n)}(\cos t) \sin^{2n} t\, dt$$

$$= \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n} \int_0^\pi \varphi(\cos t)\, d(\sin nt)$$

$$= 1.3.5\ldots(2n-1) \int_0^\pi \varphi(\cos t) \cos nt\, dt.$$

Demnach ist umgekehrt

$$34) \quad \int_0^\pi \varphi(\cos t) \cos nt\, dt = \frac{1}{1.3.5\ldots(2n-1)} \int_0^\pi \varphi^{(n)}(\cos t) \sin^{2n} t\, dt,$$

und hierin besteht die abzuleitende Transformation *).

Um ihren Gebrauch an einem Beispiele zu zeigen, wollen wir die Coefficienten in der Reihenentwickelung

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\varkappa\cos x+\varkappa^2}} = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \cdots$$

näher untersuchen; es bedeute hierbei $\varkappa$ einen positiven oder negativen echten Bruch. Die linke Seite hat die Form $\varphi(\cos x)$, und zwar ist

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{1-2\varkappa z+\varkappa^2}},$$

mithin

$$\frac{\varphi^{(n)}(z)}{1.3.5\ldots(2n-1)} = \frac{\varkappa^n}{\sqrt{(1-2\varkappa z+\varkappa^2)^{2n+1}}}$$

*) Sie findet sich zuerst in einer Abhandlung von Jacobi, Crelle's Journal Bd. XV, S. 1.

und nach den bisherigen Formeln

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos nt\,dt}{\sqrt{1-2\varkappa\cos t+\varkappa^2}} = \frac{2\varkappa^n}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin^{2n}t\,dt}{\sqrt{(1-2\varkappa\cos t+\varkappa^2)^{2n+1}}}$$

$$= \frac{2\varkappa^n}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\sin t}{\sqrt{1-2\varkappa\cos t+\varkappa^2}}\right)^{2n} \frac{dt}{\sqrt{1-2\varkappa\cos t+\varkappa^2}}.$$

Behufs einer weiteren Umwandlung benutzen wir die Substitution

$$\frac{\sin t}{\sqrt{1-2\varkappa\cos t+\varkappa^2}} = \sin u,$$

und ziehen aus derselben die beiden Gleichungen

$$\frac{\sqrt{1-2\varkappa\cos t+\varkappa^2}}{1-\varkappa\cos t} = \frac{1}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2 u}},\quad \frac{(1-\varkappa\cos t)\,dt}{1-2\varkappa\cos t+\varkappa^2} = du,$$

deren Product ist

$$\frac{dt}{\sqrt{1-2\varkappa\cos t+\varkappa^2}} = \frac{du}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2 u}}.$$

Die Formel für A_n geht jetzt in die folgende über *)

$$A_n = \frac{2\varkappa^n}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin^{2n}u\,du}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2 u}},$$

statt deren auch geschrieben werden kann

$$A_n = \frac{4\varkappa^n}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^{2n}u\,du}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2 u}}.$$

Zur völligen Entwickelung von A_n kann man sich von hier an unendlicher Reihen bedienen, indem man z. B. den binomischen Satz auf $(1-\varkappa^2\sin^2 u)^{-\frac{1}{2}}$ anwendet.

VI. Erweiterungen der Entwickelungsformeln.

Für manche Anwendungen der allgemeinen Formeln

$$f(x) = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos x + A_2\cos 2x + A_3\cos 3x + \cdots,$$

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos nt\,dt,$$

*) Auf weit mühsamerem Wege gelangt Legendre zu derselben Formel in seinem Traité des fonctions elliptiques, Tome II, page 536, formule 10.

$$f(x) = B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \cdots,$$

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t) \sin nt\, dt$$

ist es ein lästiger Uebelstand, dass die Variabele x auf das Intervall 0 bis π beschränkt bleiben muss, und es verdient deshalb die Frage, ob sich möglicherweise das Gültigkeitsintervall erweitern liesse, eine nähere Untersuchung.

a. Setzt man in der ersten Formel

$$x = \frac{\pi y}{h}, \quad f(x) = f\left(\frac{\pi y}{h}\right) = \varphi(y),$$

wo h eine willkührliche positive Grösse bezeichnet, so erhält man die neue Gleichung

$$\varphi(y) = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos\frac{\pi y}{h} + A_2 \cos\frac{2\pi y}{h} + \cdots,$$

und zwar gilt letztere unter der Bedingung $0 \leqq \frac{\pi y}{h} \leqq \pi$, d. h. $0 \leqq y \leqq h$; man gelangt also zu einer neuen, innerhalb beliebiger positiver Grenzen geltenden Entwickelung. Um auch A_n entsprechend umzuwandeln, benutzen wir die Substitution $t = \frac{\pi u}{h}$; sie giebt

$$A_n = \frac{2}{h}\int_0^h f\left(\frac{\pi u}{h}\right) \cos\frac{n\pi u}{h}\, du = \frac{2}{h}\int_0^h \varphi(u) \cos\frac{n\pi u}{h}\, du.$$

Schreiben wir endlich in den gefundenen Gleichungen wieder f, x, t statt φ, y, u, so haben wir den Satz, dass die Entwickelung

35) $$f(x) = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos\frac{\pi x}{h} + A_2 \cos\frac{2\pi x}{h} + A_3 \cos\frac{3\pi x}{h} + \cdots$$

für alle x von $x = 0$ bis $x = h$ gilt, wenn die Coefficienten nach der Formel

36) $$A_n = \frac{2}{h}\int_0^h f(t) \cos\frac{n\pi t}{h}\, dt$$

bestimmt werden.

Mittelst der nämlichen Substitutionen gelangt man zu dem analogen Satze, dass die Entwickelung

37) $$f(x) = B_1 \sin\frac{\pi x}{h} + B_2 \sin\frac{2\pi x}{h} + B_3 \sin\frac{3\pi x}{h} + \cdots$$

für alle zwischen 0 und h liegende x gilt, wobei die Coefficienten nach der Formel

38) $$B_n = \frac{2}{h}\int_0^h f(t)\sin\frac{n\pi t}{h}\,dt$$

zu bestimmen sind *).

b. Um auch negative Werthe von x in das Bereich der Untersuchung zu ziehen, bemerken wir, dass die Gleichung 35) für negative x gültig bleiben würde, wenn die Function $f(x)$ die Eigenschaft $f(-x) = f(+x)$ hätte, und dass analog die Gleichung 37) ebenfalls bei negativen x ihre Geltung behalten würde, wenn $f(-x) = -f(+x)$ wäre. Bezeichnet nun $F(x)$ eine beliebige Function von x, so besitzt der Ausdruck

$$f(x) = \frac{F(x) + F(-x)}{2}$$

die Eigenschaft $f(-x) = f(x)$ und kann daher für alle, von $x = -h$ bis $x = +h$ reichenden Werthe des x nach Formel 35) entwickelt werden; man hat also

39) $$\frac{F(x) + F(-x)}{2}$$
$$= \tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos\frac{\pi x}{h} + A_2\cos\frac{2\pi x}{h} + A_3\cos\frac{3\pi x}{h} + \cdots,$$
$$-h \leqq x \leqq +h.$$

Darin ist

$$A_n = \frac{1}{h}\int_0^h [F(t) + F(-t)]\cos\frac{n\pi t}{h}\,dt$$
$$= \frac{1}{h}\left\{\int_0^h F(t)\cos\frac{n\pi t}{h}\,dt + \int_0^h F(-t)\cos\frac{n\pi t}{h}\,dt\right\},$$

und wenn man im letzten Integrale statt t die neue Variabele $-t$ einführt, so erhält dieses Integral die Form

$$\int_{-h}^0 F(t)\cos\frac{n\pi t}{h}\,dt,$$

worauf es mit dem vorhergehenden zusammengezogen werden kann; dies giebt

*) Die obigen Entwickelungen hat Lagrange gefunden und in den älteren Abhandlungen der Turiner Akademie mitgetheilt (Miscellanea Taurinensia, T. III, p. 261).

40) $$A_n = \frac{1}{h}\int_{-h}^{+h} F(t)\cos\frac{n\pi t}{h}\,dt.$$

Wir benutzen zweitens die Formel 37) zur Entwickelung des Ausdrucks

$$f(x) = \frac{F(x) - F(-x)}{2},$$

welcher die Eigenschaft $f(-x) = -f(x)$ besitzt und deshalb eine auch für negative x gültige Reihe liefert, nämlich

41) $$\frac{F(x) - F(-x)}{2}$$
$$= B_1 \sin\frac{\pi x}{h} + B_2 \sin\frac{2\pi x}{h} + B_3 \sin\frac{3\pi x}{h} + \cdots$$
$$-h < x < +h.$$

Darin ist

$$B_n = \frac{1}{h}\left\{\int_0^h F(t)\sin\frac{n\pi t}{h}\,dt - \int_0^h F(-t)\sin\frac{n\pi t}{h}\,dt\right\},$$

und wenn man im zweiten Integrale $-t$ an die Stelle von t treten lässt, so wird einfacher

42) $$B_n = \frac{1}{h}\int_{-h}^{+h} F(t)\sin\frac{n\pi t}{h}\,dt.$$

Endlich ergiebt sich durch Addition der Gleichungen 39) u. 41)

43) $$F(x) = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos\frac{\pi x}{h} + A_2\cos\frac{2\pi x}{h} + \cdots$$
$$+ B_1\sin\frac{\pi x}{h} + B_2\sin\frac{2\pi x}{h} + \cdots,$$

und diese Entwickelung gilt für alle zwischen $-h$ und $+h$ liegenden Werthe der Variabelen*).

Als Beispiel diene die Annahme $F(x) = e^x$; man erhält dann

$$\frac{e^x}{e^h - e^{-h}}$$
$$= \frac{1}{2h} - h\left\{\frac{1}{\pi^2 + h^2}\cos\frac{\pi x}{h} - \frac{1}{(2\pi)^2 + h^2}\cos\frac{2\pi x}{h} + \cdots\right\}$$
$$+ \pi\left\{\frac{1}{\pi^2 + h^2}\sin\frac{\pi x}{h} - \frac{2}{(2\pi)^2 + h^2}\sin\frac{2\pi x}{h} + \cdots\right\}.$$

*) Die Combination der Formeln 35) und 37) zur obigen Entwickelung verdankt man Fourier; s. dessen Théorie de la chaleur, Paris 1822.

c. Die bisherigen Untersuchungen lassen sich auch nach einer anderen Seite hin erweitern. Ein Rückblick auf den Ausgangspunkt in Abschnitt IV. zeigt nämlich, dass die dort angewendete Methode der Summirung überhaupt auf solche Reihen passt, deren allgemeiner Term durch das Integral

$$\int_0^\mu f(t)\cos n\,(t \mp x)\,dt$$

gebildet wird, worin μ eine beliebige Grösse bedeutet. In der That handelt es sich hier zuletzt immer nur um Anwendungen der Formeln 10) bis 13), wobei die Fälle zu unterscheiden sind, ob μ ein Vielfaches von π ausmacht oder nicht. Es wird hinreichen, wenn wir den extremen Fall $\mu = \infty$ mit wenigen Worten berühren.

Setzen wir analog dem Früheren

$$U_n = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty f(t)\,dt + \int_0^\infty f(t)\cos(t-x)\,dt + \int_0^\infty f(t)\cos 2\,(t-x)\,dt + \cdots$$
$$\cdots + \int_0^\infty f(t)\cos n\,(t-x)\,dt,$$

$$V_n = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty f(t)\,dt + \int_0^\infty f(t)\cos(t+x)\,dt + \int_0^\infty f(t)\cos 2\,(t+x)\,dt + \cdots$$
$$\cdots + \int_0^\infty f(t)\cos n\,(t+x)\,dt,$$

so erhalten wir zunächst für $2n + 1 = m$ und endliche x

$$U_n = \int_0^{\frac{1}{2}x} \frac{\sin m\,\theta}{\sin\theta} f(x-2\,\theta)\,d\theta + \int_0^\infty \frac{\sin m\,\theta}{\sin\theta} f(x+2\,\theta)\,d\theta.$$

Bei unendlich wachsenden n wird hieraus, falls x zwischen 0 und 2π liegt und $f(x)$ continuirlich bleibt,

$$U_\infty = \pi\{f(x) + f(2\pi + x) + f(4\pi + x) + f(6\pi + x) + \cdots\}$$

Nach ganz demselben Verfahren ergiebt sich

$$V_n = \int_0^\infty \frac{\sin m\,\theta}{\sin\theta} f(-x+2\,\theta)\,d\theta - \int_0^{\frac{1}{2}x} \frac{\sin m\,\theta}{\sin\theta} f(-x+2\,\theta)\,d\theta$$

und für $n = \infty$ bei gleichen Voraussetzungen

$$V_\infty = \pi\{f(2\pi - x) + f(4\pi - x) + f(6\pi - x) + \cdots\}.$$

Verbindet man die gefundenen Resultate durch Addition und Subtraction und setzt zur Abkürzung

44) $$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\cos nt\,dt,$$

45) $$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\sin nt\,dt,$$

so erhält man die folgenden unter der Bedingung $0 < x < 2\pi$ geltenden Gleichungen

46) $$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos x + A_2\cos 2x + A_3\cos 3x + \cdots\\ &= f(x) + f(2\pi - x) + f(2\pi + x) + f(4\pi - x) + f(4\pi + x)\\ &\qquad + f(6\pi - x) + f(6\pi + x) + \cdots,\end{aligned}$$

47) $$\begin{aligned}&B_1\sin x + B_2\sin 2x + B_3\sin 3x + \cdots\\ &= f(x) - f(2\pi - x) + f(2\pi + x) - f(4\pi - x) + f(4\pi + x)\\ &\qquad - f(6\pi - x) + f(6\pi + x) + \cdots,\end{aligned}$$

deren erste auch für $x = 0$ und für $x = 2\pi$ richtig bleibt, während dies bei der zweiten im Allgemeinen nicht der Fall ist.

Hinsichtlich der Beschränkung, welcher x unterworfen ist, bemerken wir noch Folgendes. Die in Nro. 46) linker Hand stehende Reihe ist für $x = \xi$ ganz dieselbe wie für $x = 2\pi + \xi$; die Reihe auf der rechten Seite ist im ersten Falle

$$f(\xi) + f(2\pi - \xi) + f(2\pi + \xi) + f(4\pi - \xi) + \cdots$$

dagegen im zweiten Falle bei etwas anderer Anordnung der Glieder

$$f(-\xi) + f(2\pi - \xi) + f(2\pi + \xi) + f(4\pi - \xi) + \cdots,$$

die Gleichung 46) gilt daher im Allgemeinen nicht für $2\pi < x < 4\pi$. Wohl aber ist dies der Fall, wenn die Function $f(x)$ die Eigenschaft $f(-x) = f(x)$ besitzt, mithin erstreckt sich dann die Gültigkeit der Gleichung 46) von $x = 0$ bis $x = 4\pi$. Hier lässt sich die nämliche Schlussweise wiederholen und es erhellt daraus, dass die genannte Gleichung überhaupt für positive x gilt, sobald jene Eigenschaft stattfindet. Da unter dieser Voraussetzung bei negativen x beide Seiten der Gleichung ungestört bleiben, so ergiebt sich, dass die Gleichung 46) für jedes reelle x gilt, sobald $f(x)$ eine sogenannte gerade Function von x ist. Ganz ähnliche Schlüsse sind auf die Gleichung 47) anwendbar; sie zeigen, dass die genannte Gleichung für alle reellen x richtig bleibt, falls $f(x)$ eine ungerade Function von x, d. h. eine solche Function ist, welcher die Eigenschaft $f(-x) = -f(x)$ zukommt.

Zufolge dieser Bemerkungen lässt sich die Gleichung 46) für jedes x auf die gerade Function

$$\frac{F(x)+F(-x)}{2},$$

ebenso die Gleichung 47) auf die ungerade Function

$$\frac{F(x)-F(-x)}{2}$$

anwenden. Die Coefficienten A_n und B_n werden dann

48) $$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cos nt\,dt\,, \quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(t) \sin nt\,dt$$

und durch Addition der erhaltenen Gleichungen ergiebt sich

49) $$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \cdots \\ &\quad + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \cdots. \\ &= F(x) + F(x-2\pi) + F(x+2\pi) + F(x-4\pi) + F(x+4\pi) \\ &\quad + F(x-6\pi) + F(x+6\pi) + \cdots \end{aligned}$$

Zu dem nämlichen Resultate gelangt man unmittelbar, wenn man die Reihe

$$\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cos(t-x)\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\cos 2(t-x)\,dt + \cdots.$$

nach der in Abschnitt IV. benutzten Methode summirt.

Um ein bemerkenswerthes Beispiel geben zu können, entwickeln wir erst die Werthe einiger bestimmten Integrale und gehen dabei von der Formel

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

aus, die auf Seite 460 des ersten Theiles bewiesen ist. Durch unbestimmte theilweise Integration erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} \int x^{2n} e^{-x^2} dx &= x^{2n-1}\int x e^{-x^2} dx - (2n-1)\int x^{2n-2} dx \int x e^{-x^2} dx \\ &= -\frac{x^{2n-1}}{2} e^{-x^2} + \frac{2n-1}{2}\int x^{2n-2} e^{-x^2} dx\,; \end{aligned}$$

ist nun $2n-1$ positiv, so verschwindet das Product $x^{2n-1}e^{-x^2}$ sowohl für $x=\infty$ als für $x=0$, und es folgt

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{2n-1}{2}\int_0^{\infty} x^{2n-2} e^{-x^2} dx.$$

Hieraus ergiebt sich der Reihe nach für $n = 1, 2,$ u. s. w.

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\int_0^\infty x^4 e^{-x^2} dx = \tfrac{3}{2}\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1\,.\,3}{2^2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

und überhaupt für jedes ganze positive n

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{2^n}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Etwas allgemeiner wird die Formel durch die Substitution $x = at$, wobei a eine positive, die Null übersteigende Constante sein möge; es folgt nämlich

$$\int_0^\infty t^{2n} e^{-a^2t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{2^n a^{2n+1}},\quad a > 0.$$

Hieraus lässt sich der Werth des bestimmten Integrales

$$\int_0^\infty e^{-a^2t^2} \cos 2bt\, dt$$

dadurch ableiten, dass man $\cos 2bt$ nach Potenzen von $2bt$ entwickelt, die einzelnen Reihenglieder integrirt und hierbei auf die Gleichung

$$\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\ldots(2n-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots(2n)} = \frac{1}{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2n)} = \frac{1}{2^n\,.\,1\,.\,2\ldots n}$$

Rücksicht nimmt; man findet

$$\int_0^\infty e^{-a^2t^2} \cos 2bt\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Hiervon machen wir Gebrauch für die Formel 46), indem wir $f(x)$ gleich der geraden Function $e^{-a^2x^2}$ nehmen, wodurch

$$A_n = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{n}{2a}\right)^2}$$

wird. Die entstehende Gleichung lautet

$$50)\quad \frac{1}{a\sqrt{\pi}}\left\{\tfrac{1}{2} + e^{-\left(\frac{1}{2a}\right)^2}\cos x + e^{-\left(\frac{2}{2a}\right)^2}\cos 2x + e^{-\left(\frac{3}{2a}\right)^2}\cos 3x + \cdots\right\}$$
$$= e^{-a^2x^2} + e^{-a^2(2\pi-x)^2} + e^{-a^2(2\pi+x)^2}$$
$$+ e^{-a^2(4\pi-x)^2} + e^{-a^2(4\pi+x)^2} + \cdots.$$

und lässt sich, wenn $a = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$, $x = 2z$ gesetzt und die rechte Seite zur linken gemacht wird, folgendermaassen darstellen

51) $$e^{-\frac{z^2}{\alpha}} + e^{-\frac{(z-\pi)^2}{\alpha}} + e^{-\frac{(z-2\pi)^2}{\alpha}} + e^{-\frac{(z-3\pi)^2}{\alpha}}$$
$$+ e^{-\frac{(z+\pi)^2}{\alpha}} + e^{-\frac{(z+2\pi)^2}{\alpha}} + e^{-\frac{(z+3\pi)^2}{\alpha}} + \cdots$$
$$= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \left\{ 1 + 2e^{-\alpha} \cos 2z + 2e^{-4\alpha} \cos 4z + 2^{-9\alpha} \cos 6z + \cdots \right\}.$$

Versteht man unter n eine ganze Zahl, welche alle die Werthe

$$-\infty \cdots -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \cdots +\infty$$

annimmt, so kann man die vorige Gleichung mittelst zweier Summenzeichen kurz zusammenfassen, nämlich

52) $$\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z+n\pi)^2}{\alpha}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2\alpha} \cos 2nz.$$

Diese Formel ist für die Theorie der elliptischen Functionen von bedeutendem Werthe.

Behufs einer zweiten Anwendung der allgemeinen Summenformeln betrachten wir zunächst das Integral

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{1}{e^{2\pi\tau} - 1} - \frac{1}{2\pi\tau} \right\} \sin \alpha\tau \, d\tau$$
$$= \int_0^\infty \left\{ \frac{\sin \alpha\tau}{e^{2\pi\tau} - 1} \, d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha\tau}{\tau} \, d\tau. \right.$$

Den Werth des Minuenden giebt die Formel 7) in §. 93 des I. Thls., den Werth des Subtrahenten erhält man mittelst der Substitution $\alpha\tau = y$ und nachheriger Anwendung der Formel 27) auf S. 62 des II. Thls.; es ist demnach

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{1}{e^{2\pi\tau} - 1} - \frac{1}{2\pi\tau} \right\} \sin \alpha\tau \, d\tau = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha} \right)$$

und etwas allgemeiner für $\alpha = 2n\pi\varrho$, $\tau = \frac{t}{2\pi\varrho}$,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{e^{\frac{t}{\varrho}} - 1} - \frac{\varrho}{t} \right\} \sin nt \, dt = 2\varrho \left(\frac{1}{e^{2n\pi\varrho} - 1} - \frac{1}{2n\pi\varrho} \right).$$

Wendet man nun die Formel 47) auf den Fall an

$$f(x) = \frac{1}{e^{\frac{x}{\varrho}} - 1} - \frac{\varrho}{x},$$

so ist nach Nro. 45) und dem Vorigen

$$B_n = 2\varrho\left(\frac{1}{e^{2n\pi\varrho} - 1} - \frac{1}{2n\pi\varrho}\right),$$

mithin, wenn zur Abkürzung Summenzeichen benutzt werden, die sich auf die Werthe $n = 1, 2, 3, \ldots$ beziehen,

$$\begin{aligned} 2\varrho \sum \left(\frac{1}{e^{2n\pi\varrho} - 1} - \frac{1}{2n\pi\varrho}\right) \sin nx \\ = \frac{1}{e^{\frac{x}{\varrho}} - 1} - \frac{\varrho}{x} - \sum \left(\frac{1}{e^{\frac{2n\pi - x}{\varrho}} - 1} - \frac{\varrho}{2n\pi - x}\right) \\ + \sum \left(\frac{1}{e^{\frac{2n\pi + x}{\varrho}} - 1} - \frac{\varrho}{2n\pi + x}\right), \end{aligned}$$

wobei $0 < x < 2\pi$ sein muss. Linker Hand kennt man nach Formel 31) auf S. 143 die Summe

$$\sum \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2},$$

rechter Hand ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - \sum \frac{1}{2n\pi - x} + \sum \frac{1}{2n\pi + x} \\ = \frac{1}{x} - \sum \frac{2x}{(2n\pi)^2 - x^2} = \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} x, \end{aligned}$$

also zusammen

$$\begin{aligned} 2\varrho \sum \frac{\sin nx}{e^{2n\pi\varrho} - 1} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \\ = \frac{1}{e^{\frac{x}{\varrho}} - 1} - \sum \frac{1}{e^{\frac{2n\pi - x}{\varrho}} - 1} + \sum \frac{1}{e^{\frac{2n\pi + x}{\varrho}} - 1} - \frac{\varrho}{2} \cot \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Die beiden, auf der rechten Seite vorkommenden Summen lassen sich dadurch transformiren, dass man die Entwickelung

$$\frac{\xi}{1 - \xi} = \xi + \xi^2 + \xi^3 + \ldots, \qquad \xi^2 < 1,$$

sowohl für $\xi = e^{-\frac{2n\pi - x}{\varrho}}$ als für $\xi = e^{-\frac{2n\pi + x}{\varrho}}$ benutzt; es wird dann

$$\sum \frac{1}{e^{\frac{2n\pi - x}{\varrho}} - 1} - \sum \frac{1}{e^{\frac{2n\pi + x}{\varrho}} - 1} = \sum \frac{e^{\frac{nx}{\varrho}} - e^{-\frac{nx}{\varrho}}}{e^{\frac{2n\pi}{\varrho}} - 1}.$$

Beachtet man noch die identische Gleichung

$$\frac{1}{e^{\frac{x}{\varrho}} - 1} = \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{x}{2\varrho}} + e^{-\frac{x}{2\varrho}}}{e^{\frac{x}{2\varrho}} - e^{-\frac{x}{2\varrho}}} - \frac{1}{2},$$

so ist nunmehr

$$\frac{x}{2\pi} + 2\varrho \sum \frac{\sin nx}{e^{2n\pi\varrho} - 1} = -\frac{\varrho}{2} \cot \frac{x}{2}$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{x}{2\varrho}} + e^{-\frac{x}{2\varrho}}}{e^{\frac{x}{2\varrho}} - e^{-\frac{x}{2\varrho}}} - \sum \frac{e^{\frac{nx}{\varrho}} - e^{-\frac{nx}{\varrho}}}{e^{\frac{2n\pi}{\varrho}} - 1}.$$

Dieses Resultat gewinnt an Eleganz, wenn man von den auf S. 265 des I. Thls. eingeführten Bezeichnungen

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = cshp\ y, \qquad \frac{e^y - e^{-y}}{2} = snhp\ y$$

Gebrauch macht, mit $\sqrt{\varrho}$ dividirt und etwas anders ordnet, nämlich

53)
$$\frac{x}{4\pi\sqrt{\varrho}} + \frac{\sqrt{\varrho}}{2} \cot \frac{x}{2} + 2\sqrt{\varrho} \sum \frac{\sin nx}{e^{2n\pi\varrho} - 1}$$
$$= -\frac{x}{4\pi\sqrt{\varrho}} + \frac{1}{2\sqrt{\varrho}}\, cthp \frac{x}{2\varrho} - \frac{2}{\sqrt{\varrho}} \sum \frac{snhp \frac{nx}{\varrho}}{e^{\frac{2n\pi}{\varrho}} - 1}.$$

Bezeichnet man die linke Seite mit $\Phi(x, \varrho)$, so liegt in dieser Gleichung der Satz

$$\Phi(iz, \varrho) = -i\Phi\left(\frac{z}{\varrho}, \frac{1}{\varrho}\right),$$

wodurch die Function des rein imaginären Arguments iz auf eine Function des reellen Arguments $\frac{z}{\varrho}$ zurückgeführt wird.

Differenzirt man die Gleichung 53) nach x und multiplicirt mit $\pi\sqrt{\varrho}$, so entsteht

54) $$\frac{1}{4} - \frac{\pi \varrho}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} + 2\pi\varrho \sum \frac{n \cos nx}{e^{2n\pi\varrho} - 1}$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{\pi}{4\varrho \, snhp^2 \frac{x}{2\varrho}} - \frac{2\pi}{\varrho} \sum \frac{n \, cshp \frac{nx}{\varrho}}{e^{\frac{2n\pi}{\varrho}} - 1},$$

d. i., wenn die linke Seite mit $\Psi(x, \varrho)$ bezeichnet wird,

$$\Psi(iz, \varrho) = -\Psi\left(\frac{z}{\varrho}, \frac{1}{\varrho}\right).$$

Nicht ohne Interesse ist der Fall $x = 0$, für welchen die periodischen Cosinusreihen gültig bleiben. Die Differenz

$$\frac{\varrho}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} - \frac{1}{4\varrho \, snhp^2 \frac{x}{2\varrho}}$$

geht dann in $\frac{1}{12}\left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right)$ über und es wird aus Nro. 54)

55) $$\frac{1}{4} - \frac{\pi}{12}\varrho + 2\pi\varrho \sum \frac{n}{e^{2n\pi\varrho} - 1}$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{\pi}{12\varrho} - \frac{2\pi}{\varrho} \sum \frac{n}{e^{\frac{2n\pi}{\varrho}} - 1},$$

wonach der links stehenden Function die Eigenschaft $F(\varrho) + F\left(\frac{1}{\varrho}\right) = 0$ zukommt.

Bezeichnet man ferner mit s_n die Summe der Theiler von n (z. B. $s_{10} = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$), so kann man der vorigen Gleichung die folgende Gestalt verleihen

56) $$\frac{1}{4} - \frac{\pi\varrho}{12} + 2\pi\varrho \sum s_n e^{-2n\pi\varrho}$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{\pi}{12\varrho} - \frac{2\pi}{\varrho} \sum s_n e^{-\frac{2n\pi}{\varrho}}$$

und daraus ergiebt sich z. B. für $\varrho = 1$

$$\sum \frac{n}{e^{2n\pi} - 1} = \sum s_n e^{-2n\pi} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\pi}\right) = 0{,}00187793.$$

Bei kleinen ϱ convergiren die in Nro. 55) und 56) linker Hand vorkommenden Reihen sehr langsam, die rechts verzeichneten Reihen dagegen so rapid, dass jene Gleichungen als Summenformeln benutzt werden können *).

VII. Die Umkehrung der Functionen.

Bei den bisherigen Entwickelungen wurde vorausgesetzt, dass die Functionen $f(x)$, $F(x)$ und dergleichen explicite gegeben seien; man kann aber noch einen Schritt weiter gehen und gelangt dann zur Lösung der Aufgabe, aus einer Gleichung von der Form

57) $$x = \psi(y)$$

umgekehrt y als Function von x zu entwickeln, oder noch allgemeiner $F(y)$ durch x auszudrücken. Es kann dies auf zweierlei Weise geschehen, je nachdem man hierzu die eine oder andere der Gleichungen 35) und 37) benutzen will.

A. Wenn wir für x das Intervall $x = 0$ bis $x = a > 0$ so wählen, dass die entsprechenden Werthe von y und $F(y)$ reell und endlich sind, so genügt $F(y)$, als Function von x gedacht, den Bedingungen der Formel 35), und es muss daher eine Entwickelung von der Form

58) $$F(y) = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos\frac{\pi x}{a} + A_2 \cos\frac{2\pi x}{a} + \cdots \quad 0 \leqq x \leqq a,$$

möglich sein, wobei es wesentlich darauf ankommt, den Coefficienten

$$A_n = \frac{2}{a}\int_0^a F(y) \cos\frac{n\pi x}{a}\, dx$$

durch die gegebene Function ψ auszudrücken. Mittelst theilweiser Integration erhält man zunächst

*) Diese Resultate hat d. Verf. mitgetheilt in den Sitzungsberichten d. K. S. Gesellsch. d. Wissensch., Juni 1877.

$$\int F(y)\,cos\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

$$= \frac{a}{n\pi}F(y)\,sin\frac{n\pi x}{a} - \frac{a}{n\pi}\int F'(y)\,sin\frac{n\pi x}{a}\,dy$$

$$= \frac{a}{n\pi}F(y)\,sin\frac{n\pi\psi(y)}{a} - \frac{a}{n\pi}\int F'(y)\,sin\frac{n\pi\psi(y)}{a}\,dy,$$

und es handelt sich jetzt um die Bestimmung der für y geltenden Grenzen, welche den Grenzen $x=0$ und $x=a$ entsprechen. Unter der Voraussetzung, dass die Gleichung $\psi(y)=0$ reelle Wurzeln hat, entspricht dem Werthe $x=0$ irgend eine dieser Wurzeln, die β heissen möge. Da ferner a ein beliebiger positiver Werth ist, so kann man ihn als einen der positiven Werthe von $\psi(y)$ ansehen und demgemäss $a=\psi(b)$ setzen, wo b im Allgemeinen willkührlich ist; dem Intervalle $x=0$ bis $x=a$ entspricht dann das Intervall $y=\beta$ bis $y=b$. Jedoch bedarf es hierzu noch einer Bemerkung. Die ursprüngliche Variabele x war eine von $x=0$ bis $x=a$ wachsende Grösse; die Function $\psi(y)$, welche an die Stelle von x getreten ist, muss also dieselbe Eigenschaft besitzen, und dazu gehört, dass $\psi(y)$ von $y=\beta$ bis $y=b$ wächst, wenn $b>\beta$, dagegen abnimmt, wenn $b<\beta$. Durch Einführung der neuen Grenzen und durch Multiplication mit $\frac{2}{a}=\frac{2}{\psi(b)}$ ergiebt sich jetzt, weil das Product

$$F(y)\,sin\,\frac{n\pi x}{a}$$

sowohl für $x=a$ als für $x=0$ verschwindet,

59) $$A_n = -\frac{2}{n\pi}\int_\beta^b F'(y)\,sin\,\frac{n\pi\psi(y)}{\psi(b)}\,dy.$$

Im speciellen Falle $n=0$ giebt dasselbe Verfahren

60) $$\tfrac{1}{2}A_0 = F(b) - \frac{1}{\psi(b)}\int_\beta^b F'(y)\,\psi(y)\,dy.$$

Setzt man in den Formeln 58), 59) und 60) für β der Reihe nach die verschiedenen reellen Wurzeln der Gleichung $\psi(y)=0$ und wählt in jedem Falle das zugehörige b so, dass $\psi(y)$, von $y=\beta$ bis $y=b$ positiv bleibend, entweder nur wächst oder nur abnimmt, so erhält man ebenso viel von einander verschiedene Entwickelungen als es verschiedene β giebt; man findet demnach alle reellen Umkehrungen von $x = \psi(y)$.

Beispielsweis behandeln wir die Aufgabe, aus der Gleichung

$$y e^{-y} = x$$

umgekehrt $F(y) = y$ herzuleiten. Das Product ye^{-y} verschwindet für $y = 0$, erreicht für $y = 1$ sein Maximum $\frac{1}{e}$, und nimmt für $y > 1$ continuirlich bis zu jedem Grade der Kleinheit ab; die Gleichung $y e^{-y} = 0$ hat daher die beiden reellen Wurzeln $y = 0$ und $y = \infty$. Nehmen wir erstens $\beta = 0$, so dürfen wir b nicht grösser als 1 wählen, damit ye^{-y} nur wachse; die Wahl $b = 1$ ist aber die vortheilhafteste, weil dann das Intervall für y so gross als möglich wird. Unter dieser Voraussetzung ergeben sich für die Coefficienten die Formeln

$$\tfrac{1}{2} A_0 = 1 - e \int_0^1 y e^{-y} dy,$$

$$A_n = -\frac{2}{n\pi} \int_0^1 \sin(n\pi e y e^{-y})\, dy,$$

wo die angedeuteten Integrationen mittelst unendlicher Reihen ausführbar sind; als erste Umkehrung der Gleichung $y e^{-y} = x$ hat man

$$y = \tfrac{1}{2} A_0 + A_1 \cos \pi e x + A_2 \cos 2\pi e x + \cdots$$

$$0 \leqq x \leqq \frac{1}{e}.$$

Die zweite Umkehrung, die wir zur besseren Unterscheidung mit Y bezeichnen wollen, ergiebt sich mittelst der Annahme $\beta = \infty$. Damit ye^{-y} von $y = \infty$ bis $y = b$ nur zunehme, darf b nicht kleiner als 1 gewählt werden; der vortheilhafteste Werth ist auch hier $b = 1$. Unterscheiden wir die neuen Coefficienten von den früheren durch andere Buchstaben, so erhalten wir

$$\tfrac{1}{2} \mathfrak{A}_0 = 1 + e \int_1^\infty y e^{-y} dy,$$

$$\mathfrak{A}_n = +\frac{2}{n\pi} \int_1^\infty \sin(n\pi e y e^{-y})\, dy,$$

und für Y die Entwickelung

$$Y = \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 \cos \pi e x + \mathfrak{A}_2 \cos 2\pi e x + \cdots$$

$$0 \leqq x \leqq \frac{1}{e}\cdot$$

Bemerkenswerth ist noch die Differenz der beiden Umkehrungen. Man hat nämlich

$$\mathfrak{A}_n - A_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^\infty \sin(n\pi e y e^{-y})\,dy$$

$$= 2e\left\{\frac{1}{1^2} - \frac{(n\pi e)^2}{3^4} + \frac{(n\pi e)^4}{5^6} - \frac{(n\pi e)^6}{7^8} + \cdots\cdot\right\}$$

mithin, wenn

$$C_n = \frac{1}{1^2} - \frac{(n\pi e)^2}{3^4} + \frac{(n\pi e)^4}{5^6} - \frac{(n\pi e)^6}{7^8} + \cdots$$

gesetzt wird

$$\frac{Y-y}{2e}$$

$$= \tfrac{1}{2}C_0 + C_1 \cos \pi e x + C_2 \cos 2\pi e x + C_3 \cos 3\pi e x + \cdots$$

$$0 \leqq x \leqq \frac{1}{e}\cdot$$

B. Wir kehren wieder zu der allgemeinen Aufgabe zurück, um $F(y)$ in eine nach den Sinus der Vielfachen von x fortschreitende Reihe zu entwickeln, nämlich

$$61)\quad F(y) = B_1 \sin\frac{\pi x}{a} + B_2 \sin\frac{2\pi x}{a} + B_3 \sin\frac{3\pi x}{a} + \cdots$$

$$0 < x < a,$$

wobei

$$B_n = \frac{2}{a}\int_0^a F(y)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

ist. Durch theilweise Integration ergiebt sich zunächst

$$\int F(y)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

$$= -\frac{a}{n\pi}F(y)\cos\frac{n\pi x}{a} + \frac{a}{n\pi}\int F'(y)\cos\frac{n\pi x}{a}\,dy;$$

im letzten Integrale schreiben wir $\psi(y)$ statt x, führen dann die Grenzen $x = 0$, $x = a$ ein, denen wiederum die Grenzen $y = \beta$,

$y = b$ entsprechen mögen, und erhalten nach beiderseitiger Multiplication mit $\frac{2}{a} = \frac{2}{\psi(b)}$

$$B_n = -\frac{2}{n\pi} F(b) \cos n\pi + \frac{2}{n\pi} F(\beta) + \frac{2}{n\pi} \int_\beta^b F'(y) \cos \frac{n\pi\psi(y)}{\psi(b)} dy$$

oder kürzer

$$B_n = \frac{2}{n\pi} F(b)(-1)^{n+1} + \frac{2}{n\pi} F(\beta) + C_n,$$

wo selbstverständlich

$$62) \qquad C_n = \frac{2}{n\pi} \int_\beta^b F'(y) \cos \frac{n\pi\psi(y)}{\psi(b)} dy$$

gesetzt worden ist. Die Gleichung 61) erhält jetzt folgende Gestalt

$$F(y) = \frac{2F(b)}{\pi} \left\{ \tfrac{1}{1} \sin \frac{\pi x}{a} - \tfrac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{a} + \tfrac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{a} - \cdots \right\}$$
$$+ \frac{2F(\beta)}{\pi} \left\{ \tfrac{1}{1} \sin \frac{\pi x}{a} + \tfrac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{a} + \tfrac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{a} + \cdots \right\}$$
$$+ C_1 \sin \frac{\pi x}{a} + C_2 \sin \frac{2\pi x}{a} + C_3 \sin \frac{3\pi x}{a} + \cdots,$$

und darin lassen sich die beiden ersten Reihen mittelst der Formeln

$$\tfrac{1}{1} \sin \omega - \tfrac{1}{2} \sin 2\omega + \tfrac{1}{3} \sin 3\omega - \cdots = \tfrac{1}{2}\omega,$$
$$\tfrac{1}{1} \sin \omega + \tfrac{1}{2} \sin 2\omega + \tfrac{1}{3} \sin 3\omega + \cdots = \tfrac{1}{2}(\pi - \omega),$$
$$0 < \omega < \pi,$$

summiren; das Resultat ist

$$63) \quad F(y) = F(\beta) + \frac{F(b) - F(\beta)}{a} x$$
$$+ C_1 \sin \frac{\pi x}{a} + C_2 \sin \frac{2\pi x}{a} + C_3 \sin \frac{3\pi x}{a} + \cdots$$
$$0 < x < a.$$

Hinsichtlich des β, b und $a = \psi(b)$ gelten hier dieselben Bestimmungen wie früher. Uebrigens liefert die vorstehende Gleichung auch für $x = 0$ und $y = \beta$, sowie für $x = a$ und $y = b$ richtige Ergebnisse; sie darf daher noch an den Grenzen des Gültigkeitsintervalles benutzt werden*).

---

*) Die allgemeinen Entwickelungen mittelst der Formeln 58) bis 63) hat der Verfasser in der kleinen Monographie „Die allgemeine Umkehrung der Functionen" (Halle, 1849) zuerst bekannt gemacht.

Als Beispiel möge die Bestimmung von y aus der Gleichung

$$y - \varepsilon \sin y = x$$

dienen; unter ε sei hierbei ein positiver oder negativer echter Bruch verstanden. Die Gleichung $\psi(y) = 0$ hat im vorliegenden Falle nur die eine Wurzel $y = 0$, also ist $\beta = 0$. Weil ferner $\psi'(y) = 1 - \varepsilon \cos y$ immer positiv bleibt, so wächst $\psi(y)$ continuirlich, mithin darf b beliebig gross genommen werden; der Einfachheit wegen sei $b = \pi$, woraus $a = \pi$ folgt. Wir haben jetzt die Entwickelung

$$y = x + C_1 \sin x + C_2 \sin 2x + C_3 \sin 3x + \cdots$$
$$0 \leqq x \leqq \pi,$$

und für den Coefficienten C_n die Formel

$$C_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \cos(ny - n\varepsilon \sin y)\, dy$$

$$= \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \cos ny \cos(n\varepsilon \sin y)\, dy + \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \sin ny \sin(n\varepsilon \sin y)\, dy.$$

Bei geraden n nimmt das Product $\cos ny \cos(n\varepsilon \sin y)$ im zweiten Quadranten dieselben Werthe an, wie im ersten Quadranten, während das Product $\sin ny \sin(n\varepsilon \sin y)$ in beiden Quadranten gleiche und entgegengesetzte Werthe hat: es ist daher einfacher

$$\text{für gerade } n, \quad C_n = \frac{4}{n\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(n\varepsilon \sin y) \cos ny\, dy.$$

Durch ähnliche Bemerkungen erhält man

$$\text{für ungerade } n, \quad C_n = \frac{4}{n\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(n\varepsilon \sin y) \sin ny\, dy.$$

In beiden Formeln setzen wir $y = \frac{1}{2}\pi - t$ und erhalten

$$C_n = \frac{4}{n\pi} \cos\frac{n\pi}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(n\varepsilon \cos t) \cos nt\, dt, \qquad n \text{ gerade},$$

$$C_n = \frac{4}{n\pi} \sin\frac{n\pi}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(n\varepsilon \cos t) \cos nt\, dt, \qquad n \text{ ungerade}$$

oder, was auf Dasselbe hinauskommt,

$$C_n = \frac{2}{n\pi} \cos\frac{n\pi}{2} \int_0^\pi \cos(n\varepsilon \cos t) \cos nt\, dt, \qquad n \text{ gerade}.$$

$$C_n = \frac{2}{n\pi} \sin\frac{n\pi}{2} \int_0^\pi \sin(n\varepsilon \cos t) \cos nt\, dt, \qquad n \text{ ungerade}.$$

Auf die vorliegenden Integrale lässt sich die Formel 34) anwenden, das eine Mal für $\varphi(\cos t) = \cos(n\varepsilon\cos t)$, das andere Mal für $\varphi(\cos t) = \sin(n\varepsilon\cos t)$; in beiden Fällen erhält man Dasselbe, nämlich

$$C_n = \frac{2}{n\pi} \frac{(n\varepsilon)^n}{1.3.5\ldots(2n-1)} \int_0^\pi \cos(n\varepsilon\cos t) \sin^{2n} t\, dt.$$

Die Ausführung dieser Integration hat keine Schwierigkeit, wenn $\cos(n\varepsilon\cos t)$ nach Potenzen von $n\varepsilon\cos t$ entwickelt wird; man gelangt dabei zu den Integralen von der Form

$$\int_0^\pi \cos^{2k} t \sin^{2n} t\, dt,$$

die sich mittelst der Reductionsformel

$$\int \cos^{2k} t \sin^{2n} t\, dt$$
$$= \frac{\cos^{2k-1} t \sin^{2n+1} t}{2k+2n} + \frac{2k-1}{2k+2n} \int \cos^{2k-2} t \sin^{2n} t\, dt$$

leicht entwickeln lassen. Durch k-malige Anwendung derselben findet sich

$$\int_0^\pi \cos^{2k} t \sin^{2n} t\, dt$$

$$= \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots\ldots 3\,.\,1}{2^k.(k+n)(k+n-1)\ldots(n+2)(n+1)} \int_0^\pi \sin^{2n} t\, dt$$

$$= \frac{1.3\ldots\ldots(2k-1)}{2^k(n+1)(n+2)\ldots(n+k)} \cdot \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots.(2n)}\pi,$$

und daraus folgt für den Coefficienten C_n die nachstehende Formel, in welcher zur Abkürzung $1.2.3\ldots m$ mit m' bezeichnet ist,

$$C_n = \frac{2}{n} \cdot \frac{(\frac{1}{2}n\varepsilon)^n}{n'} \left\{ 1 - \frac{(\frac{1}{2}n\varepsilon)^2}{1'(n+1)} + \frac{(\frac{1}{2}n\varepsilon)^4}{2'(n+1)(n+2)} - \frac{(\frac{1}{2}n\varepsilon)^6}{3'(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \right\}.$$

Es verdient übrigens bemerkt zu werden, dass die Entwickelung

$$y = x + C_1 \sin x + C_2 \sin 2x + C_3 \sin 3x + \cdots$$

auch für $x > \pi$ und $x < 0$ gültig bleibt. Ist nämlich $x > \pi$ aber $< 2\pi$, so kann $x = 2\pi - \xi$ gesetzt werden, wo ξ zwischen 0 und π liegt; dem entsprechend sei $y = 2\pi - \eta$. Die Gleichung

$$y - \varepsilon \sin y = x$$

geht dann über in

$$\eta - \varepsilon \sin \eta = \xi,$$

und es ist daher

$$\eta = \xi + C_1 \sin \xi + C_2 \sin 2\xi + C_3 \sin 3\xi + \cdots;$$

durch Restitution von $\eta = 2\pi - y$ und $\xi = 2\pi - x$ folgt hieraus wieder die vorige Entwickelung. Dieselben Schlüsse gelten, wenn $x = 2\pi + \xi$, $y = 2\pi + \eta$ gesetzt wird, und es erhellt, indem man auf diesem Wege weiter geht, dass die genannte Reihe für alle positiven x gilt. Weil endlich die Gleichung $y - \varepsilon \sin y = x$ und die Reihe für y in der Eigenschaft übereinstimmen, dass gleichen und entgegengesetzten x gleiche und entgegengesetzte y entsprechen, so bleibt jene Entwickelung für alle reellen x richtig *).

VIII. Die Dirichlet'schen Reihen.

Zufolge der in Abschnitt IV. enthaltenen Betrachtungen bildet die Summirung der Reihen von der Form

$$\tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \cdots,$$
$$B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \cdots$$

nur ein einfaches Beispiel für die Regeln, nach welchen der Grenzwerth von

$$\int_0^\beta \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} f(\theta)\, d\theta$$

bei unendlich wachsenden m bestimmt wird (Abschn. III). Die Allgemeinheit dieser Regeln lässt erwarten, dass jene Anwendung keine vereinzelte sein wird, dass vielmehr aus derselben Quelle auch anderweite Reihensummirungen geschöpft werden können. Wie dies in

*) Wie es scheint, hat Poisson in §. 221 seines Lehrbuchs der Mechanik den ersten Versuch gemacht, das Kepler'sche Problem durch periodische Reihen aufzulösen, ohne jedoch die nöthigen Formeln hinreichend zu entwickeln. Das Letztere ist von Bessel geschehen in den Abhandlungen der mathem. Cl. der Berliner Akademie, Jahrg. 1816 — 17. Berlin 1819. S. 49 — 55.

der That möglich ist, wollen wir im Folgenden an einem zweiten Beispiele zeigen; wir stellen uns dabei die Aufgabe, aus der als bekannt vorausgesetzten Summe der endlichen oder unendlichen Reihe

$$C_0 + C_1 \cos x + C_2 \cos 2x + C_3 \cos 3x + \cdots$$

die Summen der beiden neuen Reihen

$$C_0 + C_1 \cos \omega + C_2 \cos 4\omega + C_3 \cos 9\omega + \cdots\cdot,$$

$$C_1 \sin \omega + C_2 \sin 4\omega + C_3 \sin 9\omega + C_4 \sin 16\omega + \cdots\cdot$$

herzuleiten, welche letztere man als Cosinus- und Sinusreihen zweiter Stufe bezeichnen könnte, in so fern hier die Vielfachen von ω eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden *).

Bevor wir uns mit diesem Probleme näher beschäftigen, müssen wir erst einige Bemerkungen über gewisse Integrale vorausschicken.

a. Versteht man unter k eine ganze positive Zahl und unter ϱ eine zwischen 0 und π enthaltene Grösse, so ist, $\sqrt{z}$ im absoluten Sinne genommen,

$$\int_0^{k\pi+\varrho} \frac{\sin z}{\sqrt{z}}\, dz = \int_0^{\pi} \frac{\sin z}{\sqrt{z}}\, dz + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin z}{\sqrt{z}}\, dz + \cdots\cdot$$

$$\cdots + \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin z}{\sqrt{z}}\, dz + \int_{k\pi}^{k\pi+\varrho} \frac{\sin z}{\sqrt{z}}\, dz;$$

im ersten Integrale rechter Hand werde $z = y$ substituirt, im zweiten $z = \pi + y$, im dritten $z = 2\pi + y$ u. s. f., es ergiebt sich dann durch Zusammenziehung derjenigen Integrale, welche die gleichen Grenzen 0 und π erhalten haben,

$$\int_0^{k\pi+\varrho} \frac{\sin z}{\sqrt{z}}\, dz - (-1)^k \int_0^{\varrho} \frac{\sin y}{\sqrt{k\pi + y}}\, dy$$

$$= \int_0^{\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{\pi + y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi + y}} - \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{(k-1)\pi + y}} \right\} \sin y\, dy.$$

Für das zweite Integral linker Hand bemerken wir, dass $\sin y$ immer positiv, mithin

*) Diese Analyse ist eine Schöpfung von Lejeune-Dirichlet; s. Abhandlungen der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrgang 1835, erschienen 1837, oder Crelle's Journal, Bd. 17, S. 57.

$$\frac{1}{\sqrt{k\pi+\varrho}}\int_0^\varrho \sin y\, dy < \int_0^\varrho \frac{\sin y}{\sqrt{k\pi+y}}\, dy < \frac{1}{\sqrt{k\pi}}\int_0^\varrho \sin y\, dy$$

ist; der Werth dieses Integrales convergirt daher bei unendlich wachsenden k gegen die Null. Es ist demnach

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{\sqrt{z}}\, dz = \int_0^\pi \left\{\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{\pi+y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi+y}} - \cdots\right\} \sin y\, dy.$$

Die rechter Hand vorkommende unendliche Reihe convergirt und besitzt eine positive, weniger als $\frac{1}{\sqrt{y}}$ betragende Summe; hieraus folgt

$$0 < \int_0^\infty \frac{\sin z}{\sqrt{z}}\, dz < \int_0^\pi \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\, dy < \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy.$$

Demnach hat das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{\sqrt{z}}\, dz$$

einen zwischen 0 und $2\sqrt{\pi}$ enthaltenen, d. h. einen positiven endlichen Werth.

Betrachten wir zweitens das analoge Integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos z}{\sqrt{z}}\, dz = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{z}}\, dz + \int_{\frac{1}{2}\pi}^\infty \frac{\cos z}{\sqrt{z}}\, dz,$$

so gelten folgende Schlüsse. Im ersten Integrale rechter Hand ist $\cos z$ positiv, mithin

$$0 < \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{z}}\, dz < \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{\sqrt{z}}\, dz;$$

das Integral besitzt demnach einen positiven, zwischen 0 und $\sqrt{2\pi}$ liegenden Werth. Im zweiten Integrale sei $z = \frac{1}{2}\pi + \zeta$; dasselbe verwandelt sich dann in

$$-\int_0^\infty \frac{\sin \zeta}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi + \zeta}}\, d\zeta,$$

und hier zeigen ganz ähnliche Schlüsse wie vorhin, dass der Integralwerth von endlicher Grösse ist.

Nach diesen Bemerkungen zusammen dürfen wir

$$64)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos z}{\sqrt{z}}\,dz = a, \qquad \int_0^\infty \frac{\sin z}{\sqrt{z}}\,dz = b$$

setzen, wo a und b gewisse endliche Grössen sind, deren Werthe wir später gelegentlich bestimmen können.

Für $z = t^2$ gehen die vorstehenden Gleichungen in die folgenden über

$$2\int_0^\infty \cos(t^2)\,dt = a, \quad 2\int_0^\infty \sin(t^2)\,dt = b,$$

wofür geschrieben werden kann

$$\int_{-\infty}^\infty \cos(t^2)\,dt = a, \quad \int_{-\infty}^\infty \sin(t^2)\,dt = b.$$

Substituirt man ferner $t = u + \lambda$, wo λ eine beliebige Constante bezeichnet, so erleiden die Integrationsgrenzen keine Aenderung, und es wird wegen $(u+\lambda)^2 = u^2 + \lambda^2 + 2\lambda u$

$$\int_{-\infty}^\infty \cos(u^2+\lambda^2)\cos 2\lambda u\,du - \int_{-\infty}^\infty \sin(u^2+\lambda^2)\sin 2\lambda u\,du = a,$$

$$\int_{-\infty}^\infty \sin(u^2+\lambda^2)\cos 2\lambda u\,du + \int_{-\infty}^\infty \cos(u^2+\lambda^2)\sin 2\lambda u\,du = b.$$

Zufolge des Umstandes, dass die Functionen $\sin(u^2+\lambda^2)\sin 2\lambda u$ und $\cos(u^2+\lambda^2)\sin 2\lambda u$ die gemeinsame Eigenschaft $\varphi(-u) = -\varphi(u)$ besitzen, verschwinden die beiden Integrale, in denen $\sin 2\lambda u$ vorkommt; das noch Uebrige lässt sich folgendermaassen schreiben:

$$\cos(\lambda^2)\int_{-\infty}^\infty \cos(u^2)\cos 2\lambda u\,du - \sin(\lambda^2)\int_{-\infty}^\infty \sin(u^2)\cos 2\lambda u\,du = a,$$

$$\sin(\lambda^2)\int_{-\infty}^\infty \cos(u^2)\cos 2\lambda u\,du + \cos(\lambda^2)\int_{-\infty}^\infty \sin(u^2)\cos 2\lambda u\,du = b.$$

Hieraus ergeben sich die Werthe der beiden linker Hand stehenden Integrale, nämlich

$$\int_{-\infty}^\infty \cos(u^2)\cos 2\lambda u\,du = a\cos(\lambda^2) + b\sin(\lambda^2),$$

$$\int_{-\infty}^\infty \sin(u^2)\cos 2\lambda u\,du = b\cos(\lambda^2) - a\sin(\lambda^2).$$

Substituiren wir noch

$$u = \frac{x}{2\sqrt{\omega}}, \quad \lambda = n\sqrt{\omega},$$

wo ω und n beliebige Constanten bedeuten, so gelangen wir zu den beiden Formeln

$$65) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) \cos nx\, dx = 2\left[a \cos(n^2\omega) + b \sin(n^2\omega)\right]\sqrt{\omega},$$

$$66) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) \cos nx\, dx = 2\left[b \cos(n^2\omega) - a \sin(n^2\omega)\right]\sqrt{\omega},$$

von denen wir sogleich Gebrauch machen werden.

b. Im Folgenden setzen wir voraus, dass $F(x)$ eine bekannte Function von x sei und dass für alle reellen x eine Gleichung von der Form

$$F(x) = C_0 + C_1 \cos x + C_2 \cos 2x + C_3 \cos 3x + \cdots$$

existire; ferner sei

$$U = C_0 + C_1 \cos\omega + C_2 \cos 4\omega + C_3 \cos 9\omega \cdots,$$

$$V = C_1 \sin\omega + C_2 \sin 4\omega + C_3 \sin 9\omega + C_4 \sin 16\omega + \cdots,$$

wir können dann die unbekannten Summen U und V leicht in bestimmte Integrale verwandeln. Multiplicirt man nämlich die Gleichungen 65) und 66) mit C_n, nimmt dann $n = 0, 1, 2, 3,$ etc. und addirt alle entstehenden Gleichungen, so erhält man augenblicklich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) F(x)\, dx = 2(aU + bV)\sqrt{\omega},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) F(x)\, dx = 2(bU - aV)\sqrt{\omega},$$

woraus U und V selber leicht gefunden werden können. Zufolge der Bemerkung, dass $F(-x) = F(x)$ ist, lassen sich die vorstehenden Gleichungen durch

$$67) \quad \int_{0}^{\infty} \cos\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) F(x)\, dx = (aU + bV)\sqrt{\omega},$$

$$68) \quad \int_{0}^{\infty} \sin\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) F(x)\, dx = (bU - aV)\sqrt{\omega}$$

ersetzen, und in dieser Form wollen wir sie einer genaueren Discussion unterziehen.

c. Das in Nro. 67) vorkommende Integral ist der Grenzwerth, welchem sich der Ausdruck

69)
$$\int_0^{m\pi+\varrho} \cos\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) F(x)\,dx$$
$$= \int_0^{m\pi} \cos\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) F(x)\,dx + \int_{m\pi}^{m\pi+\varrho} \cos\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) F(x)\,dx$$

für unendlich wachsende m nähert, wobei m eine ganze positive Zahl, ϱ einen positiven endlichen Rest bedeutet. Das letzte Integral untersuchen wir zuerst, substituiren darin

$$x = m\pi + \frac{2\omega}{\pi}\theta, \quad \frac{\pi\varrho}{2\omega} = \beta$$

und lösen die trigonometrische Function

$$\cos\left(\frac{m^2\pi^2}{4\omega} + m\theta + \frac{\omega\theta^2}{\pi^2}\right)$$

in die Cosinus und Sinus der drei einzelnen Bogentheile auf; dies giebt

$$\int_{m\pi}^{m\pi+\varrho} F(x)\cos\left(\frac{x^2}{4\omega}\right)dx = \frac{2\omega}{\pi}\cos\frac{m^2\pi^2}{4\omega}\int_0^\beta F\left(m\pi+\frac{2\omega}{\pi}\theta\right)\cos\frac{\omega\theta^2}{\pi^2}\cos m\theta\,d\theta$$
$$-\frac{2\omega}{\pi}\sin\frac{m^2\pi^2}{4\omega}\int_0^\beta F\left(m\pi+\frac{2\omega}{\omega}\theta\right)\sin\frac{\omega\theta^2}{\pi^2}\cos m\theta\,d\theta$$
$$-\frac{2\omega}{\pi}\cos\frac{m^2\pi^2}{4\omega}\int_0^\beta F\left(m\pi+\frac{2\omega}{\pi}\theta\right)\sin\frac{\omega\theta^2}{\pi^2}\sin m\theta\,d\theta$$
$$-\frac{2\omega}{\pi}\sin\frac{m^2\pi^2}{4\omega}\int_0^\beta F\left(m\pi+\frac{2\omega}{\pi}\theta\right)\cos\frac{\omega\theta^2}{\pi^2}\sin m\theta\,d\theta.$$

Vor den rechter Hand verzeichneten Integralen stehen Factoren, welche zwischen $-\frac{2\omega}{\pi}$ und $+\frac{2\omega}{\pi}$ enthalten, also von endlicher Grösse sind; weil ferner $F(x)$, der Voraussetzung zufolge, immer nur endliche Werthe besitzt und die beiden Functionen

$$\cos\frac{\omega\theta^2}{\pi^2} \quad \text{und} \quad \sin\frac{\omega\theta^2}{\pi^2}$$

die Grenzen -1 und $+1$ nicht überschreiten können, so hat man es überhaupt mit Integralen von den Formen

$$\int_0^\beta \varphi(\theta)\cos m\theta\,d\theta \quad \text{und} \quad \int_0^\beta \psi(\theta)\sin m\theta\,d\theta$$

zu thun, worin die Functionen $\varphi(\theta)$ und $\psi(\theta)$ durchaus endliche Werthe behalten. Nach Formel 8) ist nun bei unendlich wachsenden m

$$Lim \int_0^\beta \psi(\theta) \sin m\theta \, d\theta = Lim \int_0^\beta \frac{\sin m\theta}{\theta} \cdot \theta \, \psi(\theta) \, d\theta = 0.$$

Ferner hat man für $\theta = 2\vartheta$

$$\int_0^\beta \varphi(\theta) \cos m\theta \, d\theta = 2 \int_0^{\frac{1}{2}\beta} \varphi(2\vartheta) \cos 2m\vartheta \, d\vartheta$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\beta} \frac{\sin(2m+1)\vartheta}{\sin\vartheta} \varphi(2\vartheta) \, d\vartheta - \int_0^{\frac{1}{2}\beta} \frac{\sin(2m-1)\vartheta}{\sin\vartheta} \varphi(2\vartheta) \, d\vartheta,$$

und da sich die beiden letzten Integrale gleichen endlichen Grenzen nähern, so ist auch

$$Lim \int_0^\beta \varphi(\theta) \cos m\theta \, d\theta = 0.$$

Die vier oben genannten Integrale convergiren demnach gemeinschaftlich gegen die Null, oder es ist

$$Lim \int_{m\pi}^{m\pi+\varrho} F(x) \cos\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) dx = 0$$

und nach Nro. 69)

$$\int_0^\infty \cos\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) F(x) \, dx = Lim \int_0^{m\pi} \cos\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) F(x) \, dx,$$

d. h. man darf ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit die obere Grenze ∞ als ein unendlich Vielfaches von π ansehen, wobei es auch nicht darauf ankommt, ob m gerade oder ungerade ist.

Wir denken uns im Folgenden m als eine Zahl von der Form $4n + 1$ und zerlegen das von $x = 0$ bis $x = (4n+1)\pi$ gehende Integral nach dem Schema

$$70) \quad \int_0^{(4n+1)\pi} = \int_0^\pi + \int_\pi^{3\pi} + \int_{3\pi}^{5\pi} + \cdots + \int_{(4n-1)\pi}^{(4n+1)\pi}$$

Mit Ausnahme des ersten Integrales sind die Integrale rechter Hand von der Form

$$\int_{(2q-1)\pi}^{(2q+1)\pi} cos\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) F(x)\,dx, \qquad q = 1, 2, 3, \ldots 2n;$$

mittelst der Substitution $x = 2q\pi + y$, bei welcher $F(x)$ in $F(2q\pi + y) = F(y)$ übergeht, wird daraus

$$\int_{-\pi}^{+\pi} cos\left(\frac{4q^2\pi^2 + 4q\pi y + y^2}{4\omega}\right) F(y)\,dy.$$

Dieses Integral zerlegen wir wieder in zwei andere, von $-\pi$ bis 0 und von 0 bis $+\pi$ gehende Integrale; im ersten setzen wir $y = -x$, im zweiten $y = x$, und erhalten dann zwei, auf das gleiche Intervall $x = 0$ bis $x = \pi$ ausgedehnte Integrale, welche sich zusammenziehen lassen. Wegen $F(-x) = F(x)$ giebt dies

$$\int_0^{\pi} \left\{ cos\left(\frac{4q^2\pi^2 + x^2 - 4q\pi x}{4\omega}\right) + cos\left(\frac{4q^2\pi^2 + x^2 + 4q\pi x}{4\omega}\right)\right\} F(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} 2F(x)\, cos\left(\frac{4q^2\pi^2 + x^2}{4\omega}\right) cos\frac{q\pi x}{\omega}\,dx.$$

Da jetzt alle in Nro. 70) vorkommenden Integrale gleiche Grenzen besitzen, so können dieselben zu einem einzigen Integrale vereinigt werden; man erhält damit ein Resultat von der Form

71) $$\int_0^{(4n+1)\pi} cos\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) F(x)\,dx = \int_0^{\pi} X F(x)\,dx,$$

worin X folgende Summe bedeutet:

$$X = cos\frac{x^2}{4\omega} + 2\,cos\frac{4\pi^2 + x^2}{4\omega}\,cos\frac{\pi x}{\omega} + 2\,cos\frac{4(2\pi)^2 + x^2}{4\omega}\,cos\frac{2\pi x}{\omega}$$
$$+ \cdots + 2\,cos\frac{4(2n\pi)^2 + x^2}{4\omega}\,cos\frac{2n\pi x}{\omega}.$$

Die Summirung dieser aus $2n + 1$ Gliedern bestehenden Reihe ist im Allgemeinen eine schwere Aufgabe, sie lässt sich aber in dem speciellen Falle leicht bewerkstelligen, wo für ω ein aliquoter Theil der Kreisperipherie gesetzt wird. Bezeichnet nämlich k eine ganze positive Zahl und ist $\omega = \frac{2\pi}{k}$, so verwandelt sich der Ausdruck

$$2\,cos\left(\frac{q^2\pi^2}{\omega} + \frac{x^2}{4\omega}\right) cos\frac{q\pi x}{\omega},$$

welcher irgend einen der Theile von X darstellt, in

$$2\cos\left(\frac{q^2k\pi}{2}+\frac{kx^2}{8\pi}\right)\cos\frac{qkx}{2},$$

wo hinsichtlich der Zahl q zwei Fälle zu unterscheiden sind. Bei geraden q ist q^2 und ebenso q^2k von der Form $4p$, mithin bildet $\frac{1}{2}q^2k\pi$ ein gerades Multiplum von π, folglich ist das vorliegende Product

$$2\cos\frac{kx^2}{8\pi}\cos\frac{qkx}{2}, \qquad q \text{ gerade.}$$

Bei ungeraden q steht q^2 unter der Form $4p+1$ und q^2k unter der Form $4r+k$; aus dem obigen Producte wird dann

$$2\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{kx^2}{8\pi}\right)\cos\frac{qkx}{2}, \quad q \text{ ungerade.}$$

Nach diesen Bemerkungen erhält man

$$\begin{aligned}X &= 2\cos\frac{kx^2}{8\pi}\left\{\frac{1}{2}+\cos kx+\cos 2kx+\cdots+\cos nkx\right\}\\ &\quad+2\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{kx^2}{8\pi}\right)\left\{\cos\frac{kx}{2}+\cos\frac{3kx}{2}+\cdots+\cos\frac{(2n-1)kx}{2}\right\}\\ &= \cos\frac{kx^2}{8\pi}\cdot\frac{\sin(n+\frac{1}{2})kx}{\sin\frac{1}{2}kx}\\ &\quad+\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{kx^2}{8\pi}\right)\left\{\frac{\sin(n+\frac{1}{2})kx}{\sin\frac{1}{2}kx}\cos\tfrac{1}{2}kx-\cos(n+\tfrac{1}{2})kx\right\}\end{aligned}$$

woraus unmittelbar folgt

$$\begin{aligned}\int_0^\pi XF(x)\,dx &= \int_0^\pi\frac{\sin(n+\frac{1}{2})kx}{\sin\frac{1}{2}kx}F(x)\cos\frac{kx^2}{8\pi}\,dx\\ &\quad+\int_0^\pi\frac{\sin(n+\frac{1}{2})kx}{\sin\frac{1}{2}kx}F(x)\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{kx^2}{8\pi}\right)\cos\tfrac{1}{2}kx\,dx\\ &\quad-\int_0^\pi F(x)\cos(n+\tfrac{1}{2})kx\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{kx^2}{8\pi}\right)dx.\end{aligned}$$

Auf der linken Seite benutzen wir die Gleichung 71), rechter Hand substituiren wir $\frac{1}{2}kx=\theta$ und setzen zur Abkürzung $2n+1=m$; es ist dann

$$\int_0^{(4n+1)\pi} F(x)\cos\frac{x^2}{4\omega}\,dx = \frac{2}{k}\int_0^{\frac{1}{2}k\pi}\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}F\left(\frac{2\theta}{k}\right)\cos\frac{\theta^2}{2k\pi}\,d\theta$$

$$+\frac{2}{k}\int_0^{\frac{1}{2}k\pi}\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}F\left(\frac{2\theta}{k}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\theta^2}{2k\pi}\right)\cos\theta\,d\theta$$

$$-\frac{2}{k}\int_0^{\frac{1}{2}k\pi}F\left(\frac{2\theta}{k}\right)\cos m\theta\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\theta^2}{2k\pi}\right)d\theta.$$

Bei unendlich wachsenden n und m convergirt das letzte Integral gegen die Null; die Grenzen, welchen sich die beiden übrigen Integrale auf der rechten Seite nähern, sind mittelst der Formeln 12) und 13) leicht zu ermitteln, und so ergiebt sich

$$\int_0^{\infty} F(x)\cos\frac{x^2}{4\omega}\,dx$$

$$=\frac{2\pi}{k}\left\{\tfrac{1}{2}F(0)+F\left(\frac{2\pi}{k}\right)\cos\frac{1^2\pi}{2k}+F\left(\frac{4\pi}{k}\right)\cos\frac{2^2\pi}{2k}+\cdots\right\}$$

$$+\frac{2\pi}{k}\left\{\tfrac{1}{2}F(0)\cos\frac{k\pi}{2}-F\left(\frac{2\pi}{k}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{1^2\pi}{2k}\right)\right.$$

$$\left.+F\left(\frac{4\pi}{k}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{2^2\pi}{2k}\right)-\cdots\right\}.$$

Hinsichtlich der letzten Glieder der rechts stehenden endlichen Reihen ist noch eine Bemerkung erforderlich. Für gerade $k = 2h$ wird die obere Integrationsgrenze $\frac{1}{2}k\pi = h\pi$, und dann zeigt die Formel 12), dass der letzte Summand den Factor $F\left(\frac{2h\pi}{k}\right)$ nebst dem Coefficienten $\frac{1}{2}$ enthält. Bei ungeraden $k = 2h+1$ wird $\frac{1}{2}k\pi = h\pi + \frac{1}{2}\pi$, und nach Formel 13) kommt im letzten Summanden der Factor $F\left(\frac{2h\pi}{k}\right)$ mit dem Coefficienten 1 vor. Schreibt man wieder ω statt $\frac{2\pi}{k}$ und berücksichtigt die Gleichung 67), so hat man folgendes Resultat

72) $$\frac{aU+bV}{\sqrt{\omega}}$$

$$=\tfrac{1}{2}F(0)+F(\omega)\cos\frac{1^2\omega}{4}+F(2\omega)\cos\frac{2^2\omega}{4}+\cdots$$

$$+\tfrac{1}{2}F(0)\cos\frac{\pi^2}{\omega}-F(\omega)\cos\left(\frac{\pi^2}{\omega}+\frac{1^2\omega}{4}\right)$$

$$+F(2\omega)\cos\left(\frac{\pi^2}{\omega}+\frac{2^2\omega}{4}\right)-\cdots$$

Bei geraden k enthält das letzte Glied jeder Reihe den Factor $F(\frac{1}{2}k\omega) = F(\pi)$ und ist nur zur Hälfte in Rechnung zu bringen; bei ungeraden k schliessen die Reihen mit denjenigen Gliedern, welche den Factor $F(\frac{1}{2}(k-1)\omega) = F(\pi - \frac{1}{2}\omega)$ besitzen.

d. Die im Vorigen auf die Gleichung 67) angewendeten Transformationen gelten fast wörtlich auch für die Gleichung 68). Man überzeugt sich vorerst, dass

$$\int_0^\infty \sin\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) F(x)\,dx = Lim \int_0^{m\pi} \sin\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) F(x)\,dx$$

ist, worin m eine unendlich wachsende ganze Zahl bedeutet; man nimmt ferner $m = 4n+1$, benutzt die Zerlegung nach dem Schema 70) und findet durch dieselben Substitutionen wie vorhin

$$\begin{aligned}\int_0^{(4n+1)\pi} F(x) \sin\frac{x^2}{4\omega}\,dx &= \frac{2}{k}\int_0^{\frac{1}{2}k\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} F\left(\frac{2\theta}{k}\right) \sin\frac{\theta^2}{2k\pi}\,d\theta \\ &+ \frac{2}{k}\int_0^{\frac{1}{2}k\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} F\left(\frac{2\theta}{k}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\theta^2}{2k\pi}\right) \cos\theta\,d\theta \\ &- \frac{2}{k}\int_0^{\frac{1}{2}k\pi} F\left(\frac{2\theta}{k}\right) \cos m\theta \sin\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\theta^2}{2k\pi}\right) d\theta,\end{aligned}$$

wobei rechter Hand $m = 2n+1$ ist. Durch Uebergang zur Grenze für unendlich wachsende n gelangt man schliesslich zu der Gleichung

$$73)\quad \begin{aligned} &\frac{bU - aV}{\sqrt{\omega}} \\ &= F(\omega)\sin\frac{1^2\omega}{4} + F(2\omega)\sin\frac{2^2\omega}{4} + F(3\omega)\sin\frac{3^2\omega}{4} + \cdots \\ &+ \tfrac{1}{2}F(0)\sin\frac{\pi^2}{\omega} - F(\omega)\sin\left(\frac{\pi^2}{\omega} + \frac{1^2\omega}{4}\right) \\ &\qquad + F(2\omega)\sin\left(\frac{\pi^2}{\omega} + \frac{2^2\omega}{4}\right) - \cdots\cdots; \end{aligned}$$

für die letzten Glieder der rechts vorkommenden endlichen Reihen gelten hier die nämlichen Regeln wie bei der Gleichung 72).

Aus den beiden Gleichungen 72) und 73) zusammen können U und V entwickelt werden, was am besten erst in jedem speciellen Falle geschieht.

Wählt man die ursprüngliche, durch $F(x)$ summirte Reihe so, dass sich die Summen U und V direct finden lassen, so führen die Gleichungen 72) und 73) auch zur Kenntniss von a und b. Dies ist z. B. der Fall für $C_0 = 1$, $C_1 = C_2 = C_3 \ldots = 0$; es ist dann (S. 169) $F(x) = 1$, $U = 1$, $V = 0$, mithin nach Nro. 72)

$$\frac{a}{\sqrt{\omega}} = \tfrac{1}{2} + \cos\frac{1^2\omega}{4} + \cos\frac{2^2\omega}{4} + \cos\frac{3^2\omega}{4} + \cdots$$
$$+ \tfrac{1}{2}\cos\frac{\pi^2}{\omega} - \cos\left(\frac{\pi^2}{\omega} + \frac{1^2\omega}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi^2}{\omega} + \frac{2^2\omega}{4}\right) - \cdots$$

und nach Nro. 73)

$$\frac{b}{\sqrt{\omega}} = \sin\frac{1^2\omega}{4} + \sin\frac{2^2\omega}{4} + \sin\frac{3^2\omega}{4} + \cdots$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sin\frac{\pi^2}{\omega} - \sin\left(\frac{\pi^2}{\omega} + \frac{1^2\omega}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi^2}{\omega} + \frac{2^2\omega}{4}\right) - \cdots.$$

Beide Gleichungen müssen für jedes $\omega = \dfrac{2\pi}{k}$ gelten, wobei die ganze positive Zahl k willkürlich bleibt. Im einfachsten Falle $k = 1$, $\omega = 2\pi$ ergiebt sich

$$\frac{a}{\sqrt{2\pi}} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}, \qquad \frac{b}{\sqrt{2\pi}} = \tfrac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}$$

mithin

74) $$a = b = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

e. Ein sehr bemerkenswerthes Beispiel liefert die Annahme

$$F(x) = 1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos(k-1)x$$
$$= \tfrac{1}{2} + \frac{\sin(k - \frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

Für jedes ganze positive h ist dann

$$F(h\omega) = \tfrac{1}{2} + \frac{\sin\left(2h\pi - \frac{h\pi}{k}\right)}{2\sin\frac{h\pi}{k}} = \tfrac{1}{2}\left\{1 - \frac{\sin\frac{h\pi}{k}}{\sin\frac{h\pi}{k}}\right\}$$

d. h. $F(h\omega) = 0$, vorausgesetzt, dass k nicht in h aufgeht. Dieser Ausnahmefall tritt bei den Gleichungen 72) und 73) niemals ein, weil h höchstens $= \frac{1}{2}k$ werden kann; man hat daher wegen $F(0) = k$ und zufolge der Werthe von a und b

$$(U+V)\frac{\sqrt{k}}{2}=\frac{k}{2}\left(1+\cos\frac{k\pi}{2}\right),$$

$$(U-V)\frac{\sqrt{k}}{2}=\frac{k}{2}\sin\frac{k\pi}{2}.$$

Entwickelt man hieraus die Werthe von U und V und erinnert sich der ursprünglichen Bedeutung dieser Grössen, so gelangt man zu den folgenden Reihensummirungen

$$1+\cos\frac{1^2 2\pi}{k}+\cos\frac{2^2 2\pi}{k}+\ldots+\cos\frac{(k-1)^2 2\pi}{k}$$
$$=\tfrac{1}{2}(1+\cos\tfrac{1}{2}k\pi+\sin\tfrac{1}{2}k\pi)\sqrt{k},$$

$$\sin\frac{1^2 2\pi}{k}+\sin\frac{2^2 2\pi}{k}+\ldots+\sin\frac{(k-1)^2 2\pi}{k}$$
$$=\tfrac{1}{2}(1+\cos\tfrac{1}{2}k\pi-\sin\tfrac{1}{2}k\pi)\sqrt{k}.$$

Dieselben sind nicht nur analytisch merkwürdig, sondern auch für die Zahlentheorie von Werth *).

*) Auf anderem Wege ist Gauss zu diesen Summen gelangt in der Abhandlung Summatio quarundarum serierum singularium; comment. recent. societ. Gotting. T. I. Hinsichtlich der damit zusammenhängenden zahlentheoretischen Untersuchungen s. Lejeune-Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von Dedekind, Braunschweig 1863, Supplement I.

$$(U + V)\frac{\sqrt{k}}{2} = \frac{\sqrt{k}}{2}\left(1 + \cos\frac{k\pi}{2}\right),$$

$$(U - V)\frac{\sqrt{k}}{2} = \frac{\sqrt{k}}{2}\sin\frac{k\pi}{2}.$$

Entwickelt man ferner die Werthe von U und V und erinnert sich der ursprünglichen Bedeutung dieser Grössen, so gelangt man zu den folgenden Reihensummirungen:

$$1 + \cos\frac{1^2 2\pi}{k} + \cos\frac{2^2 2\pi}{k} + \cdots + \cos\frac{(k-1)^2 2\pi}{k}$$

$$= \tfrac{1}{2}(1 + \cos\tfrac{1}{2}k\pi + \sin\tfrac{1}{2}k\pi)\sqrt{k},$$

$$\sin\frac{1^2 2\pi}{k} + \sin\frac{2^2 2\pi}{k} + \cdots + \sin\frac{(k-1)^2 2\pi}{k}$$

$$= \tfrac{1}{2}(1 + \cos\tfrac{1}{2}k\pi - \sin\tfrac{1}{2}k\pi)\sqrt{k}.$$

Dieselben sind nicht nur analytisch merkwürdig, sondern auch für die Zahlentheorie von Werth *).

*) Auf anderem Wege ist Gauss zu diesen Summen gelangt in der Abhandlung Summatio quarundam serierum singularium; commentat. recent. societ. Gotting. T. I. Hinsichtlich der hier zusammenhängenden zahlentheoretischen Untersuchungen s. Lejeune-Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von Dedekind, Braunschweig 1863, Supplement I.

DIE

FOURIER'SCHEN INTEGRALE.

Die Fourier'schen Integrale.

I. Einleitende Betrachtungen.

Bei Ansicht der im vorigen Abschnitte (S. 147) bewiesenen Gleichungen

$$f(x) = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos\frac{\pi x}{h} + A_2 \cos\frac{2\pi x}{h} + A_3 \cos\frac{3\pi x}{h} + \cdots,$$

$$A_n = \frac{2}{h}\int_0^h f(t)\cos\frac{n\pi t}{h}\,dt,$$

$$f(x) = B_1 \sin\frac{\pi x}{h} + B_2 \sin\frac{2\pi x}{h} + B_3 \sin\frac{3\pi x}{h} + \cdots,$$

$$B_n = \frac{2}{h}\int_0^h f(t)\sin\frac{n\pi t}{h}\,dt,$$

in denen x zwischen 0 und h enthalten sein muss, liegt der Gedanke nahe, das Gültigkeitsintervall dadurch so viel als möglich zu erweitern, dass man die beliebige positive Grösse h unendlich wachsen lässt. Um zu sehen, wohin dieser Grenzenübergang führt, setzen wir zur Abkürzung für irgend ein u

$$\int_0^h f(t)\cos ut\,dt = \varphi(u), \quad \int_0^h f(t)\sin ut\,dt = \psi(u)$$

ferner $\frac{\pi}{h} = \delta$ also $\frac{1}{h} = \frac{\delta}{\pi}$ und schreiben demgemäss

$$f(x) + \frac{\delta}{\pi}\varphi(0)$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\delta\Big[\varphi(0) + \varphi(\delta)\cos x\delta + \varphi(2\delta)\cos 2x\delta + \cdots\Big]$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\cdot\delta\Big[\psi(\delta)\sin x\delta + \psi(2\delta)\sin 2x\delta + \cdots\Big].$$

Bei unendlich wachsenden h convergirt δ gegen die Null, und es kann in diesem Falle der bekannte Satz

$$1)\quad Lim\Big\{\delta\Big[F(0) + F(\delta) + F(2\delta) + F(3\delta) + \cdots\Big]\Big\} = \int_0^\infty F(u)\,du$$

angewendet werden; man erhält so aus der ersten Gleichung

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \varphi(u)\cos xu\,du$$

und aus der zweiten

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \psi(u)\sin xu\,du$$

Substituirt man noch die Werthe von $\varphi(u)$ und $\psi(u)$, in denen jetzt $h = \infty$ ist, so gelangt man zu den beiden Formeln

$$2)\qquad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xu\,du\int_0^\infty f(t)\cos ut\,dt,$$

$$3)\qquad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin xu\,du\int_0^\infty f(t)\sin ut\,dt,$$

welche die Eigenthümlichkeit darbieten, dass die zweimalige Integration einer willkürlichen Function wieder auf dieselbe Function zurückführt*).

Diesem Gedankengange liegt indessen eine Voraussetzung zu Grunde. Man darf nämlich die Formel 1) nur dann benutzen, wenn die Producte 2δ, 3δ . . ., trotz der unendlichen Abnahme von δ, schliesslich ins Unendliche wachsen; nähern sich dagegen jene Producte einer endlichen Grenze k, so ist auch nicht $u = \infty$ sondern $u = k$ die obere Grenze des Integrales von $F(u)\,du$. Welcher von beiden Fällen hier stattfindet, lässt sich gar nicht entscheiden, weil die Factoren des Productes $n\delta$ von einander unabhängig sind,

*) Die obige Entwickelung wurde zuerst von Fourier gegeben in der Théorie de la chaleur, Paris 1822.

und es können deshalb die Formeln 2) und 3) noch nicht als streng bewiesene gelten. Ferner giebt die vorige Betrachtung keinen Aufschluss über die Werthe der Doppelintegrale in 2) und 3), falls die Integrationsgrenzen für t und u andere als 0 und ∞ sind; es macht sich daher auch nach dieser Richtung hin eine genauere Untersuchung der erhaltenen Doppelintegrale nothwendig.

II. Die Fourier'schen Doppelintegrale.

a. Wir betrachten im Folgenden das nach t und u genommene Doppelintegral

$$1)\qquad P_\mu = \frac{2}{\pi}\int_0^\mu \cos xu\,du \int_a^b f(t)\cos ut\,dt,$$

worin $b > a > 0$ sein möge. Unbeschadet der Allgemeinheit können wir dabei x als positiv ansehen, denn es erhellt unmittelbar, dass P_μ für irgend ein negatives x denselben Werth hat wie für ein gleich grosses positives x. Setzen wir ferner voraus, dass $f(t)$ von $t = a$ bis $t = b$ endlich und stetig bleibe, so sind die Bedingungen erfüllt, unter denen die Reihenfolge der beiden Integrationen umgekehrt werden darf; wir haben daher auch

$$P_\mu = \frac{1}{\pi}\int_a^b f(t)\,dt \int_0^\mu 2\cos tu\cos xu\,du$$

oder nach Ausführung der auf u bezüglichen Integration

$$P_\mu = \frac{1}{\pi}\left\{\int_a^b \frac{\sin\mu\,(t-x)}{t-x} f(t)\,dt + \int_a^b \frac{\sin\mu\,(t+x)}{t+x} f(t)\,dt\right\}.$$

Im ersten Integrale substituiren wir $t - x = \theta$, im zweiten $t + x = \theta$ und erhalten

$$2)\qquad P_\mu = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{a-x}^{b-x} \frac{\sin\mu\theta}{\theta} f(x+\theta)\,d\theta + \int_{a+x}^{b+x} \frac{\sin\mu\theta}{\theta} f(\theta - x)\,d\theta\right\}.$$

Zufolge der Voraussetzungen $b > a > 0$ und $x > 0$ convergirt das zweite Integral bei unendlich wachsenden μ gegen die Null, so dass nur übrig bleibt

$$3)\qquad P_\infty = \frac{1}{\pi} Lim \int_{a-x}^{b-x} \frac{\sin\mu\theta}{\theta} f(x+\theta)\,d\theta.$$

Hinsichtlich des x sind nun fünf Fälle zu unterscheiden, ob nämlich $x < a$, oder $= a$, oder zwischen a und b enthalten, oder $= b$ oder $> b$ ist. Im ersten Falle sind die Integrationsgrenzen $a - x$ und $b - x$ gleichzeitig positiv und von Null verschieden; die Formel 3) giebt dann

$$4)\qquad P_\infty = 0, \qquad 0 \leqq x < a.$$

Für $x = a$ erhält man wegen $b - a > 0$

$$5)\qquad P_\infty = \tfrac{1}{2} f(a), \qquad x = a.$$

Wenn x zwischen a und b liegt, ist die untere Integrationsgrenze negativ, die obere positiv; das Integral lässt sich dann auf folgende Weise zerlegen

$$P_\infty = \frac{1}{\pi} Lim \left\{ \int_{-(x-a)}^{0} \frac{\sin \mu \theta}{\theta} f(x+\theta)\, d\theta + \int_{0}^{b-x} \frac{\sin \mu \theta}{\theta} f(x+\theta)\, d\theta \right\},$$

wobei wir im ersten Integrale $-\theta$ statt θ einführen wollen. Aus der nunmehrigen Gleichung

$$6)\quad P_\infty = \frac{1}{\pi} Lim \left\{ \int_{0}^{x-a} \frac{\sin \mu \theta}{\theta} f(x-\theta)\, d\theta + \int_{0}^{b-x} \frac{\sin \mu \theta}{\theta} f(x+\theta)\, d\theta \right\}$$

folgt

$$7)\qquad P_\infty = f(x), \qquad a < x < b.$$

Für $x = b$ verschwindet das zweite Integral in Nro. 6), und das erste giebt

$$8)\qquad P_\infty = \tfrac{1}{2} f(b), \qquad x = b.$$

Ist endlich $x > b$, so erhält das zweite Integral in Nro. 6) eine negative obere Grenze, welche sich durch Einführung von $-\theta$ statt θ in eine positive Grenze umwandeln lässt; man erhält so

$$P_\infty = \frac{1}{\pi} Lim \left\{ \int_{0}^{x-a} \frac{\sin \mu \theta}{\theta} f(x-\theta)\, d\theta - \int_{0}^{x-b} \frac{\sin \mu \theta}{\theta} f(x-\theta)\, d\theta \right\}$$

d. i.

$$9)\qquad P_\infty = 0, \qquad x > b.$$

Zufolge der ursprünglichen Bedeutung von P_μ, verglichen mit den in Nro. 4), 5), 7), 8) und 9) gefundenen Werthen von P_∞, hat man nun den Satz:

Wenn $b > a > 0$ ist und $f(x)$ endlich und stetig bleibt von $x = a$ bis $x = b$, so gilt die Gleichung

10) $$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xu\, du \int_a^b f(t) \cos ut\, dt$$

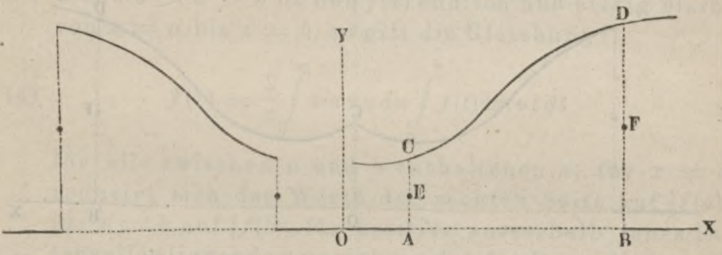
für alle zwischen a und b enthaltenen x; für $x = a$ reducirt sich der Werth der rechten Seite auf $\frac{1}{2}f(a)$, für $x = b$ auf $\frac{1}{2}f(b)$; für positive ausserhalb jenes Intervalles liegende x verschwindet das Doppelintegral.

Man kann sich hiervon leicht ein geometrisches Bild verschaffen, wenn man x als Abscisse, $y = f(x)$ als Gleichung einer gegebenen Curve und

$$Y = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xu\, du \int_a^b f(t) \cos ut\, dt$$

als Gleichung einer zweiten Curve betrachtet. Nehmen wir in Fig. 37

Fig. 37.



$OA = a$, $AC = f(a)$, $AE = \frac{1}{2}f(a)$, $OB = b$, $BD = f(b)$, $BF = \frac{1}{2}f(b)$, so besteht die zweite Curve bei positiven x aus der Strecke OA, dem isolirten Punkte E, dem Bogen CD der gegebenen Curve, dem isolirten Punkte F und der unendlichen Strecke BX Für negative x ist die Curve dieselbe.

In dem Falle $a = 0$ bedarf die vorige Untersuchung einer kleinen Modification, weil sich dann das Intervall 0 bis a auf Null reducirt und daher hinsichtlich des x nur noch vier Fälle zu unterscheiden sind. Die Gleichung 2) wird jetzt

$$P_\mu = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-x}^{b-x} \frac{\sin \mu\theta}{\theta} f(x+\theta)\, d\theta + \int_x^{b+x} \frac{\sin \mu\theta}{\theta} f(\theta - x)\, d\theta\right\}$$

und hier convergirt das zweite Integral nur dann gegen die Null, wenn $x > 0$ ist, während dies früher auch für $x = 0$ der Fall war. Man hat nun für $x = 0$

$$P_\infty = \frac{2}{\pi} Lim \int_0^b \frac{\sin \mu\theta}{\theta} f(\theta)\, d\theta = f(0);$$

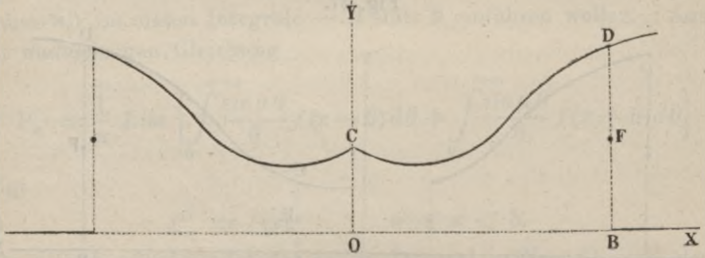
für die übrigen Fälle $0 < x < b$, $x = b$ und $x > b$ findet man dieselben Werthe wie vorhin, mithin lautet der neue Satz:

Wenn $f(x)$ in dem positiven Intervalle von $x = 0$ bis $x = b$ endlich und stetig bleibt, so gilt die Gleichung

11) $$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos xu\, du \int_0^b f(t) \cos ut\, dt$$

für alle zwischen 0 und b enthaltenen x; für $x = 0$ ist der Werth der rechten Seite $= f(0)$, für $x = b$ ist er $= \frac{1}{2} f(b)$; für $x > b$ gleich Null.

Fig. 38.



Diesem Resultate entspricht Fig 38, welche keiner näheren Erläuterung bedürfen wird.

Ihre grösste Ausdehnung erhält die Formel 11) für $b = \infty$, nämlich

12) $$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos xu\, du \int_0^\infty f(t) \cos ut\, dt \qquad 0 \leqq x < \infty.$$

b. Wir betrachten zweitens das analoge Doppelintegral

$$Q_\mu = \frac{2}{\pi} \int_0^\mu \sin xu\, du \int_a^b f(t) \sin ut\, dt$$

unter den Voraussetzungen $b > a > 0$ und $x > 0$, deren letzte sich durch die Bemerkung rechtfertigt, dass gleichen und entgegengesetzten x gleiche und entgegengesetzte Q_μ entsprechen. Die umgekehrte Anordnung der Integrationen giebt

$$Q_\mu = \frac{1}{\pi}\int_a^b f(t)\,dt\int_0^\mu 2\sin tu \sin xu\,du$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\int_a^b \frac{\sin\mu(t-x)}{t-x}f(t)\,dt - \int_a^b \frac{\sin\mu(t+x)}{t+x}f(t)\,dt\right\}$$

oder, wenn im ersten Integrale $t-x=\theta$, im zweiten $t+x=\theta$ gesetzt wird,

$$13)\quad Q_\mu = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{a-x}^{b-x}\frac{\sin\mu\theta}{\theta}f(x+\theta)\,d\theta - \int_{a+x}^{b+x}\frac{\sin\mu\theta}{\theta}f(\theta-x)\,d\theta\right\}.$$

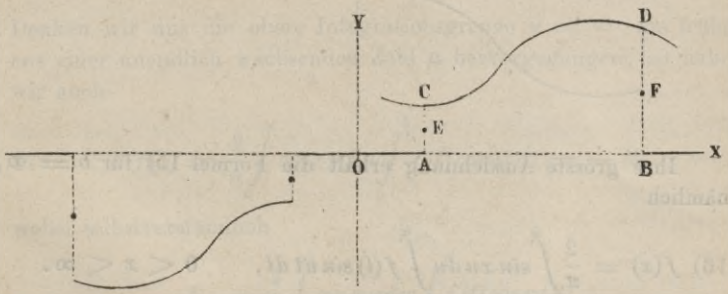
Diese Gleichung unterscheidet sich von Nro. 7) nur im Vorzeichen des zweiten Integrales, und daher sind hier wörtlich die nämlichen Betrachtungen wie dort anwendbar; man gelangt damit zu folgendem Theoreme:

Wenn $b > a > 0$ ist und $f(x)$ endlich und stetig bleibt von $x=a$ bis $x=b$, so gilt die Gleichung

$$14)\qquad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin xu\,du\int_a^b f(t)\sin ut\,dt$$

für alle zwischen a und b enthaltenen x; für $x=a$ reducirt sich der Werth der rechten Seite auf $\frac{1}{2}f(a)$, für $x=b$ auf $\frac{1}{2}f(b)$; für positive ausserhalb jenes Intervalles liegende x verschwindet das Doppelintegral.

Fig. 39.



Dem entsprechend zeigt Fig. 39 die graphische Darstellung der beiden Curven, welche durch die Gleichungen

$$y = f(x) \text{ und } Y = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty sin\, xu\, du \int_a^b f(t)\, sin\, ut\, dt$$

bestimmt sind.

Wie bei der vorigen Untersuchung tritt auch hier eine Modification ein, wenn $a = 0$ und zugleich $x = 0$ ist. Die Formel 13) giebt dann $Q_\infty = 0$, was von Hause aus zu erwarten war; die übrigen Fälle bleiben ungestört und man hat daher den Satz:

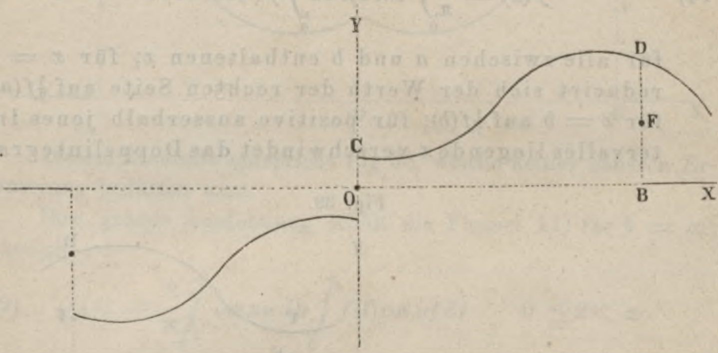
Wenn $f(x)$ in dem positiven Intervalle 0 bis b endlich und stetig bleibt, so gilt die Gleichung

$$15) \qquad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty sin\, xu\, du \int_0^b f(t)\, sin\, ut\, dt$$

für alle zwischen 0 und b enthaltenen x; für $x = 0$ ist der Werth der rechten Seite $= 0$, für $x = b$ ist er $= \frac{1}{2}f(b)$, für $x > b$ gleich Null.

Fig. 40 zeigt die entsprechende graphische Darstellung.

Fig. 40.



Ihre grösste Ausdehnung erhält die Formel 15) für $b = \infty$, nämlich

$$16) \quad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty sin\, xu\, du \int_0^\infty f(t)\, sin\, ut\, dt, \qquad 0 < x < \infty.$$

c. Die in den beiden vorigen Abschnitten entwickelten Formeln sind u. A. an die Voraussetzung gebunden, dass $f(x)$ oder $f(t)$

endlich bleibt innerhalb des für t genommenen Integrationsintervalles, und es entsteht daher die Frage, ob jene Bedingung eine unerlässliche ist, oder ob es nicht Fälle geben kann, wo dieselbe ausser Acht gelassen werden darf. Wir wollen diese Untersuchung für die am meisten benutzten Formeln 11) und 15) vornehmen und dabei den sehr gewöhnlichen Fall betrachten, wo $f(x)$ gleich anfangs für $x = 0$ positiv unendlich wird, im Uebrigen aber, d. h. für $0 < x \leqq b$, endliche Werthe behält. Da unter diesen Umständen keine Rede davon sein kann, die Formeln 11) und 15) für $x = 0$ in Anspruch nehmen zu wollen, so setzen wir $x > 0$ (aber natürlich $x < b$) voraus und denken uns zwischen 0 und x eine willkürliche Zahl ϱ eingeschaltet; wegen $\varrho < x < b$ ist dann

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xu\, du \int_\varrho^b f(t) \cos ut\, dt,$$

und zufolge der Zerlegung

$$\int_\varrho^b = \int_0^b - \int_0^\varrho$$

kann dafür geschrieben werden

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xu\, du \int_0^b f(t) \cos ut\, dt$$
$$- \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xu\, du \int_0^\varrho f(t) \cos ut\, dt.$$

Denken wir uns die obere Integrationsgrenze $u = \infty$ wie früher aus einer unendlich wachsenden Zahl μ hervorgegangen, so haben wir auch

17) $$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xu\, du \int_0^b f(t) \cos ut\, dt = -R_\infty,$$

wobei selbstverständlich

$$R_\mu = \frac{2}{\pi}\int_0^\mu \cos xu\, du \int_0^\varrho f(t) \cos ut\, dt$$

ist. Die Reihenfolge der Integrationen darf man hier nicht ohne Weiteres umkehren, weil das unter den Integralzeichen stehende

Product $f(t) \cos xu \cos ut$ gleich anfangs für $t = 0$ unendlich wird; jedoch kann man sich auf folgende Weise helfen. Wenn die Function $f(t)$ so beschaffen ist, dass $\int f(t)\,dt$ für $t = 0$ einen endlichen Werth behält $\left[\text{wie z. B. in dem Falle } f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\right]$, so besitzt das Integral

$$\int_0^\varrho f(t)\,dt$$

gleichfalls einen endlichen Werth, der für $\varrho = 0$ verschwindet. Wegen

$$\int_0^\varrho f(t)\,dt = \varrho f(\vartheta \varrho), \qquad 0 < \vartheta < 1,$$

gilt dasselbe von dem Producte $\vartheta \varrho f(\vartheta \varrho)$, d. h. bei unendlich abnehmenden δ ist

$$Lim[\delta f(\delta)] = 0.$$

Zufolge dieser Voraussetzung hat das Doppelintegral

$$S = 2\int_0^\mu \cos xu\,du \int_0^\varrho f(t)\,(1 - \cos ut)\,dt$$

jedenfalls einen endlichen Werth, denn das unter den Integralzeichen stehende Product oder der Ausdruck

$$\cos xu \,.\, t f(t) \cdot \frac{1 - \cos ut}{t}$$

wird für $t = 0$ nicht unendlich, sondern $= 0$. Die Grösse S gestattet zwei verschiedene Formen der Darstellung, jenachdem man die angegebene Reihenfolge der Integrationen beibehält oder umkehrt; im ersten Falle hat man

$$S = 2\,\frac{\sin \mu x}{x}\int_0^\varrho f(t)\,dt - \pi R_\mu,$$

und durch die zweite Operation, welche jetzt erlaubt ist, findet sich

$$S = 2\frac{\sin\mu x}{x}\int_0^\varrho f(t)\,dt - \int_0^\varrho \frac{\sin\mu(x-t)}{x-t}f(t)\,dt - \int_0^\varrho \frac{\sin\mu(x+t)}{x+t}f(t)\,dt,$$

mithin durch Vergleichung beider Werthe von S

$$R_\mu = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^\varrho \frac{\sin\mu(x-t)}{x-t}f(t)\,dt + \int_0^\varrho \frac{\sin\mu(x+t)}{x+t}f(t)\,dt\right\}.$$

Wegen $x > \varrho$ und $t < \varrho$ ist nun für jedes μ

$$-\frac{1}{x-\varrho} < \frac{\sin\mu(x-t)}{x-t} < +\frac{1}{x-\varrho},$$

$$-\frac{1}{x} < \frac{\sin\mu(x+t)}{x+t} < +\frac{1}{x},$$

und wenn man ϱ so klein wählt, dass $f(t)$ von $t = 0$ bis $t = \varrho$ positiv bleibt, so darf man diese Ungleichungen, ohne sie zu stören, mit $f(t)\,dt$ multipliciren und integriren. Zufolge der so entstehenden Ungleichungen ist für jedes μ also auch für $\mu = \infty$

$$R_\infty = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\varepsilon_1}{x-\varrho} + \frac{\varepsilon_2}{x}\right)\int_0^\varrho f(t)\,dt,$$

worin ε_1 und ε_2 zwei nicht näher bestimmte positive oder negative echte Brüche bezeichnen. Lässt man endlich ϱ in Null übergehen, so schwindet R_∞ und aus Nro. 17) wird

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xu\,du \int_0^b f(t)\cos ut\,dt, \qquad 0 < x < b;$$

unter der für $f(t)$ angegebenen Bedingung und für $x > 0$ bleibt also die Formel 11) immer noch richtig.

Noch etwas einfacher gestaltet sich die Sache bei der Formel 15). Man hat zunächst, wenn $\varrho < x < b$ ist,

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin xu\,du \int_\varrho^b f(t)\sin ut\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin xu\,du \int_0^b f(t)\sin ut\,dt - R_\infty,$$

worin

$$R_\mu = \frac{2}{\pi}\int_0^\mu \sin xu\,du \int_0^\varrho f(t)\sin ut\,dt$$

gesetzt wurde. Zufolge der für $f(t)$ angegebenen Bedingung behält das unter den Integralzeichen stehende Product

$$\sin xu \,.\, t f(t) \cdot \frac{\sin ut}{t}$$

durchaus endliche Werthe und verschwindet für $t = 0$; man darf deshalb die Anordnung der Integrationen umkehren und erhält durch ähnliche Schlüsse wie vorhin

$$R_\infty = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\varepsilon_1}{x-\varrho} - \frac{\varepsilon_2}{x}\right)\int_0^\varrho f(t)\,dt,$$

woran sich analoge Folgerungen wie früher knüpfen. Die Formeln 11) und 15) sind daher auch auf solche Functionen anwendbar, die für $x = 0$ unendlich werden, sobald das Integral

$$\int_0^\varrho f(t)\,dt$$

bei endlichen ϱ einen endlichen Werth besitzt.

d. Wir wollen noch den Fall betrachten, wo $f(t)$ innerhalb der für t gewählten Integrationsgrenzen Unterbrechungen der Continuität erleidet, ohne dabei unendlich zu werden. Tritt nur eine solche Discontinuität an der zwischen a und b liegenden Stelle $t = x_1$ ein, so haben wir folgende Zerlegung anzuwenden

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xu\,du \int_a^b f(t)\cos ut\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xu\,du \int_a^{x_1-0} f(t)\cos ut\,dt + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xu\,du \int_{x_1+0}^b f(t)\cos ut\,dt.$$

In jedem der Integrale rechter Hand für sich bleibt $f(t)$ continuirlich, und die Werthe der Integrale können nach dem Satze 10) gefunden werden; jedoch sind hierbei drei Fälle zu unterscheiden. Liegt x zwischen a und x_1, so ist der Werth des ersten $= f(x)$, der des zweiten $= 0$. Liegt zweitens x zwischen x_1 und b, so verschwindet das erste Integral, und das andere giebt $f(x)$. Im dritten Falle $x = x_1$ hat das erste Integral den Werth $\frac{1}{2}f(x_1 - 0)$, das zweite den Werth $\frac{1}{2}f(x_1 + 0)$, man erhält also zusammen

$$\tfrac{1}{2}[f(x_1 - 0) + f(x_1 + 0)].$$

Kommen zwei Unterbrechungen der Continuität vor an den zwischen

a und b liegenden Stellen $t = x_1$ und $t = x_2$, so zerlegt man das auf t bezügliche Integral nach dem Schema

$$\int_a^b = \int_a^{x_1-0} + \int_{x_1+0}^{x_2-0} + \int_{x_2+0}^b,$$

und erhält drei Doppelintegrale, deren Werthe nach Nro. 11) einzeln bestimmbar sind. Falls x zwischen a und b liegt, aber weder $= x_1$ noch $= x_2$ ist, findet man als Gesammtwerth $f(x)$; für $x = x_1$ dagegen ergiebt sich

$$\tfrac{1}{2}\,[f(x_1 - 0) + f(x_1 + 0)]$$

und für $x = x_2$:

$$\tfrac{1}{2}\,[f(x_2 - 0) + f(x_2 + 0)].$$

Hieraus ist unmittelbar ersichtlich, wie sich die Sache bei beliebig vielen Unterbrechungen der Continuität verhält.

Genau dieselben Schlüsse sind auf die Formel 14) anwendbar, und man kann daher die allgemeine Regel aufstellen: Erhält x einen solchen individuellen, zwischen a und b liegenden Werth, dass $f(x)$ discontinuirlich aber nicht unendlich wird, so ist nicht $f(x)$ sondern das arithmetische Mittel

$$\tfrac{1}{2}\,[f(x - 0) + f(x + 0)]$$

der gemeinschaftliche Werth der Doppelintegrale in 10) und 14).

Noch wollen wir bemerken, dass die Fälle, wo $f(x)$ an den Grenzen $x = a$ oder $x = b$ discontinuirlich wird, keine Ausnahmen begründen. Das Intervall von a bis b ist nämlich selbstverständlich mit $a + 0$ anzufangen und mit $b - 0$ zu schliessen, und es können daher die Werthe $f(a - 0)$ und $f(b + 0)$ nicht vorkommen. Das Doppelintegral hat im ersten Falle den Werth $\tfrac{1}{2} f(a + 0)$, im zweiten den Werth $\tfrac{1}{2} f(b - 0)$.

e. Bei Ansicht der gefundenen Gleichungen, welche unter den Formen

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \varphi(u)\cos xu\,du, \qquad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \psi(u)\sin xu\,du$$

enthalten sind, liegt es nahe, Differentiationen in Beziehung auf x vorzunehmen und hierdurch neue Gleichungen von den Formen

$$f'(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty u\varphi(u)\sin xu\,du, \quad f'(x) = +\frac{2}{\pi}\int_0^\infty u\psi(u)\cos xu\,du$$

$$f''(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty u^2\varphi(u)\cos xu\,du, \quad f''(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty u^2\psi(u)\sin xu\,du$$

u. s. w.

herzuleiten. Zufolge des Umstandes, dass das Integrationsintervall für u unendlich gross ist, bedürfen aber diese Operationen einer besonderen Untersuchung (Thl. I, §. 92), welche wir in Beziehung auf die am meisten benutzten Formeln 11) und 15) ausführen wollen.

Aus Nro. 11) folgt, wenn ohne Weiteres differenzirt wird,

$$18)\qquad f'(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty u \sin xu\, du \int_0^b f(t)\cos ut\, dt;$$

um diese noch problematische Gleichung zu prüfen, setzen wir in Nro. 15) f' an die Stelle von f, wobei $f'(t)$ von $t = 0$ bis $t = b$ endlich bleiben muss, und transformiren die nunmehrige Gleichung

$$f'(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin xu\, du \int_0^b f'(t)\sin ut\, dt$$

mittelst partieller Integration in Beziehung auf t. Wegen

$$\int_0^b f'(t)\sin ut\, dt = f(b)\sin bu - u\int_0^b f(t)\cos ut\, dt$$

giebt dies

$$f'(x) = \frac{2f(b)}{\pi}\int_0^\infty \sin bu \sin xu\, du - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty u \sin xu\, du \int_0^b f(t)\cos ut\, dt.$$

Der Vergleich mit Nro. 18) zeigt, dass die letztere Formel nur dann richtig ist, wenn die Gleichung

$$f(b)\int_0^\infty \sin bu \sin xu\, du = 0$$

stattfindet. Nun hat aber das vorliegende Integral den völlig unbestimmten Werth

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin\infty}{b-x} - \frac{\sin\infty}{b+x}\right\},$$

es kann folglich das obige Product einzig und allein in dem Falle $f(b) = 0$ verschwinden. Die Differentiation der Gleichung 11) ist daher nur unter der Bedingung $f(b) = 0$ erlaubt.

Aus Nro 15) folgt durch Differentiation die problematische Gleichung

$$19)\qquad f'(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty u \cos xu\, du \int_0^b f(t)\sin ut\, dt.$$

Andererseits ist nach Nro. 11), falls $f'(t)$ endlich bleibt von $t = 0$ bis $t = b$

$$f'(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xu\,du \int_0^b f'(t)\cos ut\,dt$$

und durch theilweise Integration in Beziehung auf t

$$f'(x) = \frac{2f(b)}{\pi}\int_0^\infty \cos bu \cos xu\,du - \frac{2f(0)}{\pi}\int_0^\infty \cos xu\,du$$
$$+ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty u\cos xu\,du\int_0^b f(t)\sin ut\,dt.$$

Der Vergleich mit Nro. 19) zeigt, dass die letztere Formel nur unter den Bedingungen

$$f(b)\int_0^\infty \cos bu\cos xu\,du = 0, \quad f(0)\int_0^\infty \cos xu\,du = 0$$

Geltung hat; wegen der Unbestimmtheit der beiden vorliegenden Integrale gehört dazu $f(b) = 0$ und $f(0) = 0$. Die Differentiation der Gleichung 15) ist also nur dann erlaubt, wenn sowohl $f(b) = 0$ als $f(0) = 0$ ist*).

III. Anwendungen der vorigen Sätze.

a. Wählt man die Function $f(t)$ so, dass sich die Werthe der Integrale

$$\int_a^b f(t)\cos ut\,dt, \quad \int_a^b f(t)\sin ut\,dt$$

angeben lassen, so gehen die betrachteten Doppelintegrale in einfache Integrale nach u über; die Werthe der letzteren folgen dann von selbst aus den Sätzen des vorigen Abschnittes. Für $f(t) = 1$ z. B. liefert das Theorem Nro. 11) die Formeln

$$20)\qquad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xu\sin bu}{u}\,du = 1, \quad \text{für } 0 \leqq x < b,$$

*) Die Untersuchungen dieses Abschnittes sind zuerst vom Verfasser angestellt worden (Analytische Studien, 2. Abtheil., Leipzig 1848); sie erscheinen hier in präciserer Form.

$$21)\qquad \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\cos xu \sin bu}{u}\,du = 0, \qquad \text{für} \qquad x > b,$$

welche aber nicht in Beziehung auf x differenzirt werden dürfen.

b. Aehnlicher Art ist die aus der Substitution $f(x) = e^{-x}$ entspringende Anwendung der Formeln 12) und 16). Man erhält

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos xu}{1+u^2}\,du = \frac{\pi}{2}e^{-x}, \qquad x \geqq 0$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{u \sin xu}{1+u^2}\,du = \frac{\pi}{2}e^{-x}, \qquad x > 0.$$

Die erste Gleichung darf wegen $f(\infty) = e^{-\infty} = 0$ in Beziehung auf x differenzirt werden, wodurch wieder die zweite Gleichung entsteht; weitere Differentiationen sind aber nicht erlaubt *).

Führt man statt u eine neue Variabele ω ein mittelst der Substitution $u = \dfrac{\omega}{\alpha}$ und setzt $x = \alpha\beta$, so gehen die beiden letzten Formeln in die folgenden über

$$22)\qquad \int\limits_0^\infty \frac{\cos \beta\omega}{\alpha^2+\omega^2}\,d\omega = \frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\beta}, \qquad \alpha > 0,\ \beta \geqq 0,$$

$$23)\qquad \int\limits_0^\infty \frac{\omega \sin \beta\omega}{\alpha^2+\omega^2}\,d\omega = \frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta}, \qquad \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

---

*) Die obigen Integrale hat zuerst Laplace entwickelt mittelst eines, nicht hinreichend gerechtfertigten Ueberganges vom Reellen zum Imaginären (Mémoires de l'Académie des Sciences, pour l'année 1782); einen anderen und genaueren Beweis giebt Laplace in seiner Théorie analytique des probabilités, seconde partie, chapitre premier.

Es möge hier gelegentlich bemerkt werden, dass man zwar $\cos xu$. $\sin xu$ und e^{-x} in die gewöhnlichen Reihen verwandeln, also z. B.

$$\int\limits_0^\infty \left\{\frac{xu^2}{1} - \frac{x^3u^4}{1.2.3} + \frac{x^5u^6}{1.2..5} - \cdots\right\}\frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots\right)$$

setzen darf, dass es aber nicht erlaubt ist, die beiderseitigen Coefficienten gleicher Potenzen von x zu identificiren. Aus einer Gleichung zwischen zwei unendlichen Potenzenreihen $a_0 + a_1x + a_2x^2 +$ etc. und $b_0 + b_1x + b_2x^2 +$ etc. folgen nämlich die einzelnen Gleichungen $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, etc. nur unter der Bedingung, dass beide Reihen convergiren; die links durch Integration der einzelnen Glieder entstehende Reihe besitzt aber diese Eigenschaft nicht.

Mittelst der in Thl. I, §. 92 angegebenen Regeln überzeugt man sich leicht, dass diese Gleichungen beliebig vielmal in Beziehung auf α differenzirt werden dürfen, wodurch man zu Integralen von den Formen

$$\int_0^\infty \frac{\cos\beta\omega}{(\alpha^2+\omega^2)^{n+1}}\,d\omega \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{\omega\sin\beta\omega}{(\alpha^2+\omega^2)^{n+1}}\,d\omega$$

gelangt. Um diese Operation allgemein auszuführen, setzen wir für den Augenblick $\alpha^2 = r$ und schreiben statt Nro. 22)

$$\int_0^\infty \frac{\cos\beta\omega}{r+\omega^2}\,d\omega = \frac{\pi}{2\sqrt{r}}e^{-\beta\sqrt{r}} = -\frac{\pi}{\beta}\,\frac{d\left(e^{-\beta\sqrt{r}}\right)}{dr},$$

woraus durch n-malige Differentiation nach r folgt

$$(-1)^n\,1.2\ldots n\int_0^\infty \frac{\cos\beta\omega}{(r+\omega^2)^{n+1}}\,d\omega = -\frac{\pi}{\beta}\,D_r^{n+1}\left(e^{-\beta\sqrt{r}}\right).$$

Der auf der rechten Seite angedeutete Differentialquotient lässt sich mittelst der auf Seite 9 angegebenen allgemeinen Formel für $D^m F(\sqrt{r})$ entwickeln, und wenn nachher beiderseits $r=\alpha^2$ und zur Abkürzung $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n = n'$ gesetzt wird, so ergiebt sich

$$24)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos\beta\omega}{(\alpha^2+\omega^2)^{n+1}}\,d\omega$$

$$= \frac{\pi e^{-\alpha\beta}}{2\alpha . n'}\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^n\left\{1+\frac{(n+1)n}{2}\,\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2.4}\,\frac{1}{(\alpha\beta)^2}+\ldots\ldots\right\}$$

Nach demselben Verfahren erhält man aus Nro. 23)

$$25)\qquad \int_0^\infty \frac{\omega\sin\beta\omega}{(\alpha^2+\omega^2)^{n+1}}\,d\omega$$

$$= \frac{\pi e^{-\alpha\beta}}{2 . n'}\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^n\left\{1+\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{(n+1)\,n(n-1)\,(n-2)}{2.4}\,\frac{1}{(\alpha\beta)^2}+\ldots\ldots\right\}.$$

c. Um mehrere analoge Formeln entwickeln zu können, schicken wir einige Bemerkungen über den sogenannten Integrallogar-

rithmus voraus. Man versteht darunter eine Function, welche durch die Gleichung

26) $$li(z) = \int_0^z \frac{dz}{lz} = \int_0^z \frac{d\xi}{l\xi}$$

definirt wird, oder, was auf Dasselbe hinauskommt, welche die beiden Eigenschaften

27) $$li(0) = 0, \quad \frac{d\,li(z)}{dz} = \frac{1}{lz}$$

besitzt. Bezeichnet im Folgenden x immer eine positive Grösse, so ist für $z = e^{-x}$, $\xi = e^{-\xi}$

28) $$li(e^{-x}) = \int_\infty^x \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi = -\int_x^\infty \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi$$

oder für $\xi = x\eta$

29) $$li(e^{-x}) = -\int_1^\infty \frac{e^{-x\eta}}{\eta} d\eta.$$

Wegen $\eta > 1$ oder $\frac{1}{\eta} < 1$ beträgt der Werth des Integrales weniger als der Werth von

$$\int_1^\infty e^{-x\eta}\, d\eta = \frac{e^{-x}}{x},$$

man kann daher

30) $$li(e^{-x}) = -\,\varrho\,\frac{e^{-x}}{x}$$

setzen, wo ϱ einen nicht näher bestimmten positiven echten Bruch bezeichnet. Aus Nro 28) folgt ferner

$$li(e^{-x}) - li(e^{-n}) = -\int_x^n \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi$$

oder vermöge der bekannten Reihe für $e^{-\xi}$

$$li(e^{-x}) - li(e^{-n}) = lx - \frac{1}{1}\,\frac{x}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{1.2} - \dots$$
$$-\left\{ln - \frac{1}{1}\,\frac{n}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{n^2}{1.2} - \dots\right\}$$

wofür wir kurz schreiben

31) $$li(e^{-x}) - li(e^{-n})$$
$$= C_n + lx - \frac{1}{1}\frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{1.2} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{1.2.3} + \cdots\cdots$$

Hierin ist, wie man gleichfalls mittelst der Exponentialreihe findet,

$$C_n = -ln + \int_0^1 \frac{1 - e^{-nv}}{v} dv$$

oder identisch

$$C_n = \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v} dv - ln - \int_0^1 \frac{e^{-nv} - (1-v)^n}{v} dv.$$

Setzen wir specieller n als ganze positive Zahl voraus, so können wir den Werth des ersten Integrales mittelst der Gleichung

$$\frac{1-(1-v)^n}{v} = \frac{1-(1-v)^n}{1-(1-v)}$$
$$= 1 + (1-v) + (1-v)^2 + (1-v)^3 + \cdots + (1-v)^{n-1}$$

finden und erhalten

$$C_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - ln - \int_0^1 \frac{e^{-nv} - (1-v)^n}{v} dv.$$

Für das noch übrige Integral bemerken wir zunächst, dass bei echt gebrochenen v immer $e^{-v} > 1 - v$ mithin $e^{-nv} > (1-v)^n$, dass folglich der Werth des Integrales positiv ist. Wegen $e^v > 1 + v$ hat man ferner $(1-v)e^v > 1 - v^2$ und

$$1 - [(1-v)e^v]^n < 1 - (1-v^2)^n < nv^2 \text{*)}$$

und durch Multiplication mit e^{-nv}

$$e^{-nv} - (1-v)^n < nv^2 e^{-nv}$$

also auch

$$\int_0^1 \frac{e^{-nv} - (1-v)^n}{v} dv < n \int_0^1 v e^{-nv} dv;$$

hiernach darf man, unter ε einen positiven echten Bruch verstehend,

---

*) Die bekannte, für $\alpha > \beta$ geltende Ungleichung

$$\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} < n\alpha^{n-1} \quad \text{oder} \quad \alpha^n - \beta^n < n\alpha^{n-1}(\alpha - \beta)$$

ist hier auf den Fall $\alpha = 1$, $\beta = 1 - v^2$ angewendet.

$$\int_0^1 \frac{e^{-nv} - (1-v)^n}{v} dv = \varepsilon n \int_0^1 v e^{-nv} dv$$

$$= \varepsilon \left\{ \frac{1}{n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-n} \right\}$$

setzen. Zufolge dieser Bemerkungen ergiebt sich aus Nro. 31)

$$li(e^{-x}) - li(e^{-n}) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - ln - \varepsilon \left\{ \frac{1}{n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-n} \right\}$$

$$+ lx - \frac{1}{1}\frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{1.2} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$

Bei unendlich wachsenden n convergirt $li(e^{-n})$ gegen $li(0) = 0$, und die Differenz

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - ln$$

nähert sich (nach Thl. I, S. 439 und 440) der endlichen Grenze

$$C = 0{,}57721\,56649 \ldots.,$$

mithin bleibt die Gleichung

32) $$li(e^{-x}) = C + lx - \frac{1}{1}\frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{1.2} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{1.2.3} + \cdots,$$

welche für jedes positive x gilt.

Aus Nro. 26) ergiebt sich weiter für $z = e^{+x}$, $\zeta = e^{-\xi}$

$$li(e^{+x}) = -\int_{-x}^{+\infty} \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi;$$

hier erleidet der Quotient $\frac{e^{-\xi}}{\xi}$ innerhalb des Integrationsintervalles eine Unterbrechung der Continuität, und zwar an der Stelle $\xi = 0$; mithin hat das Integral im Allgemeinen keinen bestimmten Werth. Um diese Vieldeutigkeit zu vermeiden, definiren wir $-\,li(e^{+x})$ als den Hauptwerth des obigen Integrales, d. h. wir setzen

$$li(e^{+x}) = -\,Lim \left\{ \int_{-x}^{-\delta} \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi + \int_{+\delta}^{+\infty} \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi \right\},$$

wo δ eine positive, bis zur Null abnehmende Grösse bedeutet. Zerlegen wir noch das Intervall $+\delta$ bis $+\infty$ in die beiden Intervalle $+\delta$ bis $+x$ und $+x$ bis $+\infty$, so ist auch

$$li(e^{+x}) = -\,Lim\left\{\int\limits_{-x}^{-\delta}\frac{e^{-\xi}}{\xi}\,d\xi + \int\limits_{+\delta}^{+x}\frac{e^{-\xi}}{\xi}\,d\xi\right\} - \int\limits_{x}^{\infty}\frac{e^{-\xi}}{\xi}\,d\xi;$$

im ersten Integrale lassen wir $-\xi$ an die Stelle von ξ treten, ziehen darauf beide zwischen $+\delta$ und $+x$ genommene Integrale zusammen und setzen $\delta = 0$; dies giebt

$$li(e^{+x}) = \int\limits_0^x \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{\xi}\,d\xi - \int\limits_x^{\infty}\frac{e^{-\xi}}{\xi}\,d\xi$$

oder auch für $\xi = x\eta$

33) $$li(e^{+x}) = \int\limits_0^1 \frac{e^{x\eta} - e^{-x\eta}}{\eta}\,d\eta - \int\limits_1^{\infty}\frac{e^{-x\eta}}{\eta}\,d\eta.$$

Das erste Integral ist mittelst der Reihe für $e^{x\eta} - e^{-x\eta}$ leicht zu entwickeln, das zweite Integral kennt man nach Nro. 29) und 32); man hat daher

34) $$li(e^{+x}) = C + lx + \frac{1}{1}\,\frac{x}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$

und kann nun auch die Formeln 32) und 34) zu einer einzigen, für jedes reelle x gültigen zusammenziehen, wenn man schreibt

35) $$li(e^x) = C + \tfrac{1}{2}l(x^2) + \frac{1}{1}\,\frac{x}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$

Wir betrachten im Folgenden die Function

$$f(x) = e^{-x}li(e^{+x}) - e^{+x}li(e^{-x}),$$

für welche nach Nro. 29) und 33) gesetzt werden kann

$$f(x) = \int\limits_0^1 \frac{e^{-x(1-\eta)} - e^{-x(1+\eta)}}{\eta}\,d\eta + \int\limits_1^{\infty}\frac{e^{-x(\eta-1)} - e^{-x(\eta+1)}}{\eta}\,d\eta.$$

Aus der letzteren Form ersieht man leicht, dass $f(x)$ für alle positiven x endlich bleibt und dass diese Function sowohl für $x = 0$ als für $x = \infty$ verschwindet*). Es ist nun

---

*) Die obigen Behauptungen lassen sich auch mittelst der Reihen für $li(e^{+x})$ und $li(e^{-x})$ verificiren. Die Gleichung $f(0) = 0$ folgt dann unmittelbar aus der Bemerkung, dass das Product $(e^x - e^{-x})\,lx$ für $x = 0$ verschwindet. Um die zweite Behauptung zu beweisen, untersuchen wir einzeln den Minuenden $e^{-x}li(e^{+x})$ und den Subtrahenden $e^{+x}li(e^{-x})$. Die Reihen für e^x und $li(e^x)$ liefern folgende Gleichung

$$(C + lx)\,\frac{e^x - 1}{x} - li(e^{+x})$$

$$= \left(\frac{C + lx}{2} - \frac{1}{1}\right)\frac{x}{1} + \left(\frac{C + lx}{3} - \frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{1.2} + \left(\frac{C + lx}{4} - \frac{1}{3}\right)\frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$

$$\int_0^\infty f(t) \sin ut\, dt$$

$$= \int_0^\infty \sin ut\, dt \int_0^1 \frac{e^{-t(1-\eta)} - e^{-t(1+\eta)}}{\eta} d\eta$$

$$+ \int_0^\infty \sin ut\, dt \int_1^\infty \frac{e^{-t(\eta-1)} - e^{-t(\eta+1)}}{\eta} d\eta$$

$$= \int_0^1 \frac{d\eta}{\eta} \int_0^\infty [e^{-(1-\eta)t} - e^{-(1+\eta)t}] \sin ut\, dt$$

$$+ \int_1^\infty \frac{d\eta}{\eta} \int_0^\infty [e^{-(\eta-1)t} - e^{-(\eta+1)t}] \sin ut\, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{d\eta}{\eta} \left\{ \frac{u}{u^2 + (1-\eta)^2} - \frac{u}{u^2 + (1+\eta)^2} \right\}$$

$$+ \int_1^\infty \frac{d\eta}{\eta} \left\{ \frac{u}{u^2 + (\eta-1)^2} - \frac{u}{u^2 + (\eta+1)^2} \right\}$$

$$= \frac{u}{1+u^2} \left\{ \frac{1}{u} \arctan\frac{2}{u} + \tfrac{1}{2} l(u^2+4) - lu \right\}$$

$$+ \frac{u}{1+u^2} \left\{ \frac{\pi}{u} - \frac{1}{u} \arctan\frac{2}{u} - \tfrac{1}{2} l(u^2+4) + lu \right\} = \frac{\pi}{1+u^2},$$

---

und wenn hier $C + lx > 2$ d. i. $x > 4{,}2$ genommen wird, so sind alle in Parenthesen stehenden Differenzen positiv; man hat daher

$$li(e^{+x}) < (C + lx) \frac{e^x - 1}{x} \text{ oder } e^{-x} li(e^{+x}) < \frac{C + lx}{x} (1 - e^{-x}).$$

Da andererseits e^{-x} und $li(e^{+x})$ positive Grössen sind, so folgt

$$e^{-x} li(e^{+x}) = \varrho_1 \frac{C + lx}{x} (1 - e^{-x}),$$

wo ϱ_1 einen nicht näher bestimmten positiven echten Bruch bedeutet. Ferner ist nach Nro. 30)

$$e^{+x} li(e^{-x}) = -\varrho_2 \frac{1}{x}, \quad 0 < \varrho_2 < 1,$$

also zusammen, wenn $x > 4{,}2$,

$$f(x) = \varrho_1 \frac{C + lx}{x} (1 - e^{-x}) - \varrho_2 \frac{1}{x},$$

und hieraus ersieht man auf der Stelle, dass $f(x)$ bei unendlich wachsenden x gegen die Null convergirt.

und hieraus ergiebt sich nach Formel 16) und zufolge der Bedeutung von $f(x)$

$$\int_0^\infty \frac{\sin xu}{1+u^2}\,du = \tfrac{1}{2}[e^{-x}\,li(e^{+x}) - e^{+x}\,li(e^{-x})].$$

Da $f(x)$ an den Grenzen der Integration nach t verschwindet, so darf die vorstehende Gleichung differenzirt werden, wodurch entsteht

$$\int_0^\infty \frac{u\cos xu}{1+u^2}\,du = -\tfrac{1}{2}[e^{-x}\,li(e^{+x}) + e^{+x}\,li(e^{-x})].$$

Mittelst der Substitutionen $u = \frac{\omega}{\alpha}$, $x = \alpha\beta$ und unter Voraussetzung eines positiven α erhält man noch

$$36)\quad \int_0^\infty \frac{\sin\beta\omega}{\alpha^2+\omega^2}\,d\omega = \frac{1}{2\alpha}[e^{-\alpha\beta}\,li(e^{+\alpha\beta}) - e^{+\alpha\beta}\,li(e^{-\alpha\beta})],\quad \alpha > 0,$$

$$37)\quad \int_0^\infty \frac{\omega\cos\beta\omega}{\alpha^2+\omega^2}\,d\omega = -\tfrac{1}{2}[e^{-\alpha\beta}\,li(e^{+\alpha\beta}) + e^{+\alpha\beta}\,li(e^{-\alpha\beta})],\quad \alpha > 0,$$

und es sind diese Formeln die Gegenstücke zu Nro. 22) und 23). Sie gewähren wie jene den Vortheil, dass die von zwei Grössen α und β abhängigen Integralwerthe durch Functionen ausgedrückt sind, die nur von der einen Variabelen $\alpha\beta$ abhängen und mittelst immer convergirender Reihen berechnet werden können.

d. Versteht man unter $f(x)$ dieselbe Function wie vorhin, so ist

$$\int_0^\infty f(t)\cos ut\,dt$$

$$= \int_0^\infty \cos ut\,dt \int_0^1 \frac{e^{-t(1-\eta)} - e^{-t(1+\eta)}}{\eta}\,d\eta$$

$$+ \int_0^\infty \cos ut\,dt \int_1^\infty \frac{e^{-t(\eta-1)} - e^{-t(\eta+1)}}{\eta}\,d\eta$$

$$= \int_0^1 \frac{d\eta}{\eta} \int_0^\infty [e^{-(1-\eta)t} - e^{-(1+\eta)t}]\cos ut\,dt$$

$$+ \int_1^\infty \frac{d\eta}{\eta} \int_0^\infty [e^{-(\eta-1)t} - e^{-(\eta+1)t}]\cos ut\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{d\eta}{\eta}\left\{\frac{1-\eta}{u^2+(1-\eta)^2} - \frac{1+\eta}{u^2+(1+\eta)^2}\right\}$$

$$+ \int_1^\infty \frac{d\eta}{\eta}\left\{\frac{\eta-1}{u^2+(\eta-1)^2} - \frac{\eta+1}{u^2+(\eta+1)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{1+u^2}\left\{-u \arctan\frac{2}{u} + \tfrac{1}{2} l(u^2+4) - lu\right\}$$

$$+ \frac{1}{1+u^2}\left\{u \arctan\frac{2}{u} - \tfrac{1}{2} l(u^2+4) - lu\right\} = \frac{2}{1+u^2} l\left(\frac{1}{u}\right);$$

daraus folgt nach Nro. 12) und vermöge der Bedeutung von $f(x)$

$$\int_0^\infty \frac{\cos xu}{1+u^2} l\left(\frac{1}{u}\right) du = \frac{\pi}{4}[e^{-x} li(e^{+x}) - e^{+x} li(e^{-x})]$$

und durch Differentiation in Beziehung auf x

$$\int_0^\infty \frac{u \sin xu}{1+u^2} l\left(\frac{1}{u}\right) du = \frac{\pi}{4}[e^{-x} li(e^{+x}) + e^{+x} li(e^{-x})].$$

Setzt man noch $u = \dfrac{\omega}{\alpha}$, $x = \alpha\beta$ und benutzt die Formeln 22) und 23), so erhält man die etwas allgemeineren Resultate*)

---

*) Dieselben sind zuerst vom Verfasser entwickelt worden in Grunert's Archiv der Mathematik, Bd. V, S. 204. Eine kleine Tafel der Werthe von $li(e^{+x})$ und $li(e^{-x})$ möge hier noch Platz finden:

x	$li(e^{+x})$	$li(e^{-x})$
1	+ 1,8951178	— 0,2193839
2	+ 4,9542344	— 0,0489005
3	+ 9,9338326	— 0,0130484
4	+ 19,6308745	— 0,0037794
5	+ 40,1852754	— 0,0014483
6	+ 85,9897621	— 0,0003601
7	+ 191,5047433	— 0,0001155
8	+ 440,3798995	— 0,0000377
9	+ 1037,8782907	— 0,0000124
10	+ 2492,2289762	— 0,0000042

38) $$\int_0^\infty \frac{\cos\beta\omega}{\alpha^2+\omega^2} l\omega\, d\omega$$

$$= \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta} l\alpha - \frac{\pi}{4\alpha}[e^{-\alpha\beta} li(e^{+\alpha\beta}) - e^{+\alpha\beta} li(e^{-\alpha\beta})], \quad \alpha > 0,$$

39) $$\int_0^\infty \frac{\omega \sin\beta\omega}{\alpha^2+\omega^2} l\omega\, d\omega$$

$$= \frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta} l\alpha - \frac{\pi}{4}[e^{-\alpha\beta} li(e^{+\alpha\beta}) + e^{+\alpha\beta} li(e^{-\alpha\beta})], \quad \alpha > 0.$$

Weitere Anwendungen der Fourier'schen Doppelintegrale wird man in späteren Abschnitten finden.

IV. Erweiterungen der vorigen Sätze.

Zufolge der in Nro. II. angestellten Untersuchungen gilt die Formel

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xu\, du \int_0^b f(t)\cos ut\, dt, \quad b > 0$$

für alle zwischen 0 und b enthaltenen x mit Einschluss von $x = 0$; bei negativen x würde sie nur dann gültig bleiben, wenn zufälligerweise $f(x)$ mit dem rechts stehenden Doppelintegrale in der Eigenschaft $f(-x) = f(x)$ übereinstimmte. Die letztere kommt allgemein dem Ausdrucke

$$f(x) = \frac{F(x) + F(-x)}{2}$$

zu, worin $F(x)$ eine beliebige Function von x bezeichnet; es ist daher für alle zwischen $-b$ und $+b$ enthaltenen x

$$\frac{F(x) + F(-x)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos xu\, du \int_0^b [F(t) + F(-t)] \cos ut\, dt.$$

Im Uebrigen verweisen wir hinsichtlich des Integrallogarithmus auf die Abhandlungen von Soldner (Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendante, München, Lindauer 1809) und Bessel (Königsberger Archiv für Naturwissenschaft u. Mathematik. Heft 1, Seite 7).

Das in Beziehung auf t genommene Integral zerfällt in

$$\int_0^b F(t)\cos ut\,dt + \int_0^b F(-t)\cos ut\,dt,$$

und wenn man im zweiten Summanden $-t$ als neue Variabele ansieht, so erhält man statt der vorliegenden Summe die folgende

$$\int_0^b F(t)\cos ut\,dt + \int_{-b}^0 F(t)\cos ut\,dt = \int_{-b}^b F(t)\cos ut\,dt.$$

Es ist demnach

$$40)\qquad \frac{F(x)+F(-x)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos xu\,du \int_{-b}^b F(t)\cos ut\,dt,$$

$$-b < x < +b.$$

Ganz ähnliche Bemerkungen gelten für die Formel

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin xu\,du \int_0^b f(t)\sin ut\,dt,$$

deren Gültigkeit an die Bedingung $0 < x < b$ gebunden ist; die genannte Formel würde nämlich sowohl für $x = 0$ als für negative x richtig bleiben, wenn $f(0) = 0$ und $f(-x) = -f(x)$ wäre. Beide Eigenschaften besitzt der Ausdruck

$$f(x) = \frac{F(x) - F(-x)}{2},$$

und daher ist für alle zwischen $-b$ und $+b$ enthaltenen x

$$\frac{F(x)-F(-x)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sin xu\,du \int_0^b [F(t) - F(-t)]\sin ut\,dt.$$

Das auf t bezügliche Integral lässt sich auf dieselbe Weise wie vorhin behandeln, wodurch folgende Gleichung entsteht

$$41)\qquad \frac{F(x)-F(-x)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sin xu\,du \int_{-b}^b F(t)\sin ut\,dt,$$

$$-b < x < +b.$$

Durch Addition der Gleichungen 40) und 41) erhält man

$$42) \quad F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty du \int_{-b}^{b} F(t)\cos u(x-t)\,dt, \quad -b < x < +b,$$

wofür auch geschrieben werden kann

$$43) \quad F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty du \int_{-b}^{b} F(t)\cos u(x-t)\,dt, \quad -b < x < +b.$$

Für $x = \pm b$ reduciren sich die Werthe der Doppelintegrale in 40) und 41) auf die Hälften ihrer sonstigen Werthe, es ist daher in diesem Falle nicht $F(b)$, sondern $\frac{1}{2}F(b)$ der Werth des vorliegenden Doppelintegrales. Liegt x ausserhalb des Intervalles $-b$ bis $+b$, so verschwinden alle betrachteten Doppelintegrale. Fälle der Discontinuität sind nach den früher angegebenen Regeln zu beurtheilen.

Die Formeln 42) und 43) erhalten ihre grösste Ausdehnung für $b = \infty$; sie werden dann

$$44) \qquad F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty F(t)\cos u(x-t)\,dt,$$

$$45) \qquad F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty du \int_{-\infty}^\infty F(t)\cos u(x-t)\,dt,$$

und gelten für jedes endliche reelle x.

Es möge endlich noch gezeigt werden, wie sich diese Gleichungen auf Functionen mehrerer Variabelen ausdehnen lassen. Wendet man die Formel 43) auf die Function $\Phi(x_1, x_2)$ in der Weise an, dass man vorläufig nur x_1 als Variabele, dagegen x_2 als Constante betrachtet, so ist für $-b_1 < x_1 < +b_1$

$$\Phi(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_{-b_1}^{b_1} \Phi(t_1, x_2)\cos u_1(x_1 - t_1)\,du_1\,dt_1.$$

Gleichfalls nach Nro. 43) hat man auch, indem man in $\Phi(t_1, x_2)$ die Grösse x_2 als Variabele ansieht und sie zwischen den Grenzen $-b_2$ und $+b_2$ wählt,

$$\Phi(t_1, x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_{-b_2}^{b_2} \Phi(t_1, t_2)\cos u_2(x_2 - t_2)\,du_2\,dt_2.$$

Substituirt man diese Gleichung in die vorhergehende, so erhält man $\Phi(x_1, x_2)$ ausgedrückt durch ein vierfaches Integral, welches der Kürze wegen folgendermaassen geschrieben werden möge:

$$\Phi(x_1,\ x_2)$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\int\int\int \Phi(t_1,t_2)\cos u_1(x_1-t_1)\cos u_2(x_2-t_2)\,du_1\,du_2\,dt_1\,dt_2,$$
$$-\ b_1 < x_1 < +\ b_1, \quad -\ b_2 < x_2 < +\ b_2.$$

Für t_1 gelten die Integrationsgrenzen $-\ b_1$ und $+\ b_1$, für t_2 die Grenzen $-\ b_2$ und $+\ b_2$, für die übrigen Variabelen u_1 und u_2 die Grenzen $-\ \infty$ und $+\ \infty$.

Es wird kaum der Erwähnung bedürfen, dass man auf ganz analoge Weise eine Function dreier Variabelen durch ein sechsfaches Integral und überhaupt eine Function von n Veränderlichen durch ein $(2n)$-faches Integral ausdrücken kann.

DIE

BERNOULLI'SCHEN FUNCTIONEN

UND DIE

HALBCONVERGENTEN REIHEN.

Die Bernoulli'schen Functionen und die halb-convergenten Reihen.

I. Die Bernoulli'schen Functionen.

Schon in den Elementen der Algebra begegnet man der Aufgabe, endliche Reihen von der Form

$$1^p + 2^p + 3^p + \cdots + k^p,$$

worin p und k ganze positive Zahlen bedeuten, zu summiren, auch hat die Lösung des Problemes keine Schwierigkeit, wenn man nach einander die Fälle $p = 1$, $p = 2$, $p = 3$ etc. behandelt und jeden derartigen Fall auf den vorhergehenden zurückführt; eine allgemeine independente Formel kann man aber mittelst dieses Verfahrens nicht finden. Dagegen führt die Differentialrechnung hierzu durch die Bemerkung, dass die Reihe

$$1^p + 2^p + 3^p + \cdots + (k-1)^p$$

entsteht, wenn die Reihe

$$1 + e^v + e^{2v} + e^{3v} + \cdots + e^{(k-1)v}$$

p-mal in Beziehung auf die beliebige Variabele v differenzirt und nachher $v = 0$ gesetzt wird, dass also die Gleichung

$$1^p + 2^p + 3^p + \cdots + (k-1)^p$$

$$= [D^p(1 + e^v + e^{2v} + \cdots + e^{(k-1)v})]_{(0)} = \left\{D^p\left(\frac{e^{kv}-1}{e^v-1}\right)\right\}_{(0)}$$

stattfindet. Um die angedeutete Differentiation auszuführen, zerlegen wir den vorkommenden Quotienten folgendermaassen:

$$\frac{e^{kv}-1}{e^v-1} = \frac{v}{e^v-1} \cdot \frac{e^{kv}-1}{v},$$

bezeichnen den ersten Factor mit $\psi(v)$, den zweiten mit $f(v)$ und machen Gebrauch von der bekannten Regel zur Differentiation der Producte; dies giebt

1) $$1^p + 2^p + 3^p + \cdots + (k-1)^p$$
$$= \psi(0)f^{(p)}(0) + (p)_1\psi'(0)f^{(p-1)}(0) + (p)_2\psi''(0)f^{(p-2)}(0) + \cdots$$

Zur Ermittelung der Werthe von $\psi(0)$, $\psi'(0)$, $\psi''(0)$, etc. benutzen wir die in Theil I, Seite 281 angegebene Reihenentwickelung

$$\frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}}$$
$$= \frac{1}{y} + \frac{2^2 B_1}{1.2} y - \frac{2^4 B_3}{1.2.3.4} y^3 + \frac{2^6 B_5}{1.2..6} y^5 - \cdots$$
$$-\pi < y < +\pi,$$

worin B_1, B_3, B_5 etc. die Bernoulli'schen Zahlen sind. Die linke Seite dieser Gleichung lässt sich unter der Form

$$\frac{e^{2y}+1}{e^{2y}-1} = 1 + \frac{2}{e^{2y}-1}$$

darstellen, und es ist daher, wenn $y = \frac{1}{2}v$ gesetzt, beiderseits mit $\frac{1}{2}v$ multiplicirt, und v zwischen -2π und $+2\pi$ genommen wird,

2) $$\frac{v}{e^v - 1} = 1 - \tfrac{1}{2}v$$
$$+ \frac{B_1}{1.2}v^2 - \frac{B_3}{1.2..4}v^4 + \frac{B_5}{1.2..6}v^6 - \cdots$$

Hieraus folgt

$$\psi(0) = 1, \quad \psi'(0) = -\tfrac{1}{2},$$
$$\psi''(0) = +B_1, \quad \psi^{\mathrm{IV}}(0) = -B_3, \quad \psi^{\mathrm{VI}}(0) = +B_5, \ldots$$
$$\psi'''(0) = 0 \quad , \quad \psi^{\mathrm{V}}(0) = 0 \quad , \quad \psi^{\mathrm{VII}}(0) = 0 \quad , \ldots$$

Zur Bestimmung von $f^{(n)}(0)$ kann man die Gleichung

$$\frac{e^{kv}-1}{v} = \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2}v + \frac{k^3}{1.2.3}v^2 + \cdots$$

benutzen, welche giebt

$$f^{(n)}(0) = \frac{k^{n+1}}{n+1}.$$

Durch Substitution der gefundenen Werthe folgt aus Nro. 1)

$$1^p + 2^p + 3^p + \cdots + (k-1)^p$$
$$= \frac{k^{p+1}}{p+1} - \tfrac{1}{2}k^p + \frac{(p)_2 B_1}{p-1}k^{p-1} - \frac{(p)_4 B_3}{p-3}k^{p-3}$$
$$+ \frac{(p)_6 B_5}{p-5}k^{p-5} - \cdots$$

Da $(p)_p$ der letzte Binomialcoefficient ist, so schliesst die rechts stehende Reihe

$$\text{bei geraden } p \text{ mit } \pm \frac{(p)_p B_{p-1}}{1} k,$$

$$\text{bei ungeraden } p \text{ mit } \pm \frac{(p)_{p-1} B_{p-2}}{2} k^2,$$

sie enthält also keinen von k unabhängigen Term. Der obigen Gleichung kann man auch die folgende Form geben

$$3)\qquad 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + (k-1)^p$$
$$= \frac{k^{p+1}}{p+1} - \tfrac{1}{2}k^p + \tfrac{1}{2}(p)_1 B_1 k^{p-1} - \tfrac{1}{4}(p)_3 B_3 k^{p-3}$$
$$+ \tfrac{1}{6}(p)_5 B_5 k^{p-5} - \cdots$$

und hier bedarf es nur der beiderseitigen Addition von k^p, um die Summe der anfänglich erwähnten Reihe in der üblichen Form zu erhalten *).

An das obige Resultat knüpft sich eine für spätere Untersuchungen sehr wesentliche Bemerkung. Während nämlich die linke Seite von Nro. 3) nur in dem Falle einen bestimmten Sinn hat, wo k eine ganze positive Zahl > 1 bedeutet, ist die rechte Seite einer Verallgemeinerung fähig; man kann darin k durch eine beliebige Variabele z ersetzen und erhält dann einen Ausdruck, welcher, für sich betrachtet, eine ganze rationale Function von z darstellt. Um jedoch nicht eine Function $(p+1)$-ten Grades zu betrachten und um, wie gewöhnlich, der höchsten Potenz von z oder k den Coefficienten 1 zu verschaffen, setzen wir $p = m - 1$ und multipliciren mit m; die Gleichung 3) geht dann in die folgende über

$$4)\qquad m[1^{m-1} + 2^{m-1} + 3^{m-1} + \cdots + (k-1)^{m-1}]$$
$$= k^m - \tfrac{1}{2}m k^{m-1}$$
$$+ (m)_2 B_1 k^{m-2} - (m)_4 B_3 k^{m-4} + (m)_6 B_5 k^{m-6} - \cdots,$$

deren rechte Seite, unabhängig von der linken, einer speciellen Discussion unterzogen werden soll.

Demgemäss definiren wir die Function $\varphi(z, m)$ durch die Gleichung

$$5)\quad \varphi(z, m) = z^m - \tfrac{1}{2}m z^{m-1}$$
$$+ (m)_2 B_1 z^{m-2} - (m)_4 B_3 z^{m-4} + (m)_6 B_5 z^{m-6} - \cdots,$$

worin rechter Hand kein von z freier Term vorkommen darf, und nennen $\varphi(z, m)$ die Bernoulli'sche Function m-ter Ordnung. Beispielsweis sind die acht ersten Functionen dieser Art:

---

*) Diese Summenformel wurde zuerst von Jacob Bernoulli entwickelt in der Ars conjectandi, Basileae 1713 (pag. 97).

$$\varphi(z, 1) = z,$$
$$\varphi(z, 2) = z^2 - z = z(z-1),$$
$$\varphi(z, 3) = z^3 - \tfrac{3}{2}z^2 + \tfrac{1}{2}z = z(z-\tfrac{1}{2})(z-1),$$
$$\varphi(z, 4) = z^4 - 2z^3 + z^2 = z^2(z-1)^2,$$
$$\varphi(z, 5) = z^5 - \tfrac{5}{2}z^4 + \tfrac{5}{3}z^3 - \tfrac{1}{6}z$$
$$= z(z-\tfrac{1}{2})(z-1)(z^2 - z - \tfrac{1}{3}),$$
$$\varphi(z, 6) = z^6 - 3z^5 + \tfrac{5}{2}z^4 - \tfrac{1}{2}z^2$$
$$= z^2(z-1)^2(z^2 - z - \tfrac{1}{2}),$$
$$\varphi(z, 7) = z^7 - \tfrac{7}{2}z^6 + \tfrac{7}{2}z^5 - \tfrac{7}{6}z^3 + \tfrac{1}{6}z$$
$$= z(z-\tfrac{1}{2})(z-1)(z^4 - 2z^3 + z + \tfrac{1}{3}),$$
$$\varphi(z, 8) = z^8 - 4z^7 + \tfrac{14}{3}z^6 - \tfrac{7}{3}z^4 + \tfrac{2}{3}z^2$$
$$= z^2(z-1)^2(z^4 - 2z^3 - \tfrac{1}{3}z^2 + \tfrac{4}{3}z + \tfrac{2}{3}).$$

Statt der Gleichung 5) kann, wie aus dem Früheren unmittelbar hervorgeht, die folgende gesetzt werden

$$6)\qquad \varphi(z, m) = m D_v^{m-1}\left(\frac{e^{zv} - 1}{e^v - 1}\right)_{(0)}$$

oder auch

$$7)\qquad \varphi(z, m) = D_v^{m}\left(v\frac{e^{zv} - 1}{e^v - 1}\right)_{(0)},$$

und mittelst der beiden letzten Gleichungen wollen wir nun die verschiedenen Eigenschaften der **Bernoulli**'schen Functionen entwickeln.

a. Für $z = 0$ reduciren sich die letzten Gleichungen auf

$$8)\qquad \varphi(0, m) = 0;$$

ebenso erhält man für $z = 1$, vorausgesetzt, dass m die Einheit übersteigt,

$$9)\qquad \varphi(1, m) = 0, \qquad m > 1.$$

Jede Bernoulli'sche Function, worin $m > 1$ ist, lässt sich mithin durch $z(z-1)$ ohne Rest dividiren.

Aus Nro. 6) folgt weiter

$$\varphi(y+1, m) - \varphi(y, m) = m D_v^{m-1}\left(\frac{e^{(y+1)v} - e^{yv}}{e^v - 1}\right)_{(0)}$$
$$= m D_v^{m-1}(e^{yv})_{(0)}$$

d. i.

$$\varphi(y+1, m) - \varphi(y, m) = m y^{m-1}.$$

Lässt man der Reihe nach $y+1,\ y+2, \ldots y+k-1$ an die

Stelle von y treten und addirt alle so entstehenden Gleichungen nebst der vorliegenden, so erhält man

10) $$\varphi(y+k, m) - \varphi(y, m)$$
$$= m[y^{m-1} + (y+1)^{m-1} + (y+2)^{m-1} + \cdots + (y+k-1)^{m-1}].$$

Im speciellen Falle $y = 0$ wird hieraus die schon bekannte Gleichung

$$\varphi(k, m) = m[1^{m-1} + 2^{m-1} + \ldots + (k-1)^{m-1}].$$

Der Sinn der Gleichung 10) ist folgender. Wenn der Werth der Variabelen z mehr als die Einheit beträgt, ohne eine ganze Zahl zu sein, so besteht z aus einer ganzen Zahl k und aus einem echt gebrochenen Reste y; die Gleichung 10) oder

11) $$\varphi(k+y, m) = \varphi(y, m) + m[y^{m-1} + (y+1)^{m-1} + \ldots$$
$$\ldots + (y+k-1)^{m-1}]$$

zeigt dann, wie der Fall eines unecht gebrochenen Argumentes (z) auf den Fall eines echt gebrochenen Argumentes zurückgeführt werden kann. Man braucht daher den Gang von $\varphi(z, m)$ nur innerhalb des Intervalles $z = 0$ bis $z = 1$ genauer zu untersuchen.

Aus der identischen Gleichung

$$\frac{e^{(1-z)v} - 1}{e^v - 1} = 1 - \frac{e^{-zv} - 1}{e^{-v} - 1}$$

folgt

$$D_v^m\left(v\frac{e^{(1-z)v} - 1}{e^v - 1}\right)_{(0)} = - D_v^m\left(v\frac{e^{-zv} - 1}{e^{-v} - 1}\right)_{(0)}$$

oder, wenn rechter Hand $v = - w$ gesetzt wird,

$$D_v^m\left(v\frac{e^{(1-z)v} - 1}{e^v - 1}\right)_{(0)} = (-1)^m D_w^m\left(w\frac{e^{zw} - 1}{e^w - 1}\right)_{(0)}$$

d. i. vermöge der Definition in Nro. 7)

12) $$\varphi(1-z, m) = (-1)^m \varphi(z, m).$$

Die Bernoulli'sche Function nimmt also von $z = \frac{1}{2}$ bis $z = 1$ in umgekehrter Reihenfolge dieselben absoluten Werthe an, welche sie von $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$ hatte, und zwar mit dem gleichen oder mit entgegengesetztem Vorzeichen, je nachdem die Function von gerader oder von ungerader Ordnung ist. Die Untersuchung von $\varphi(z, m)$ kann daher auf das Intervall $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$ beschränkt werden.

Für $z = \frac{1}{2}$ und ein ungerades $m = 2n - 1$ giebt die vorige Gleichung

13) $$\varphi(\tfrac{1}{2}, 2n-1) = 0.$$

Um auch für ein gerades $m = 2n$ den Werth von $\varphi(\frac{1}{2}, m)$ zu ermitteln, gehen wir auf die Gleichung 7) zurück; diese liefert

$$\varphi(\tfrac{1}{2}, 2n) = D_v^{2n}\left(v\frac{e^{\frac{1}{2}v}-1}{e^v-1}\right)_{(0)} = 2D_v^{2n}\left(\frac{\frac{1}{2}v}{e^{\frac{1}{2}v}+1}\right)_{(0)}$$

Nun ist identisch

$$\frac{\frac{1}{2}v}{e^{\frac{1}{2}v}+1} = \frac{\frac{1}{2}v}{e^{\frac{1}{2}v}-1} - \frac{v}{e^v-1} = \psi(\tfrac{1}{2}v) - \psi(v)$$

mithin durch $2n$-malige Differentiation

$$D_v^{2n}\left(\frac{\frac{1}{2}v}{e^{\frac{1}{2}v}+1}\right)_{(0)} = \frac{1}{2^{2n}}\psi^{(2n)}(\tfrac{1}{2}v) - \psi^{(2n)}(v)$$

und für $v = 0$, wenn beiderseits der Factor 2 zugesetzt wird,

$$\varphi(\tfrac{1}{2}, 2n) = 2\left(\frac{1}{2^{2n}} - 1\right)\psi^{(2n)}(0).$$

Zufolge des bekannten Werthes $\psi^{(2n)}(0) = (-1)^{n-1}B_{2n-1}$ hat man jetzt

14) $$\varphi(\tfrac{1}{2}, 2n) = (-1)^n \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} B_{2n-1}.$$

Aus der Gleichung 12) folgt noch für $z = \frac{1}{2} + x$

15) $$\varphi(\tfrac{1}{2} - x, m) = (-1)^m \varphi(\tfrac{1}{2} + x, m),$$

und wenn hier x positiv und grösser als $\frac{1}{2}$ genommen wird, so zeigt diese Gleichung, wie der Fall eines negativen Argumentes auf den Fall eines positiven Argumentes zurückgeführt werden kann. Zugleich ersieht man, dass $\varphi(\frac{1}{2} + x, m)$ bei geraden m eine gerade, bei ungeraden m eine ungerade Function von x ist, z. B.

$$\varphi(\tfrac{1}{2} + x, 6) = (x^2 - \tfrac{1}{4})^2(x^2 - \tfrac{3}{4}),$$
$$\varphi(\tfrac{1}{2} + x, 7) = x(x^2 - \tfrac{1}{4})(x^4 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{31}{48}).$$

b. Die Formeln 13) und 14) sind nur specielle Fälle eines allgemeinen Satzes, zu welchem man durch den Versuch gelangt, die endliche Reihe

$$\varphi(z, m) + \varphi\left(z + \frac{1}{k}, m\right) + \varphi\left(z + \frac{2}{k}, m\right) + \cdots + \varphi\left(z + \frac{k-1}{k}, m\right)$$

zu summiren, worin k eine ganze positive Zahl bedeutet. Als Werth dieser Summe findet sich zunächst unter Anwendung von Nro. 7)

$$D_v^m\left\{\left[e^{zv}\left(1 + e^{\frac{v}{k}} + e^{\frac{2v}{k}} + \cdots + e^{\frac{(k-1)v}{k}}\right) - k\right]\psi(v)\right\}_{(0)}$$
$$= D_v^m\left\{v\frac{e^{zv}-1}{e^{\frac{v}{k}}-1} + k\left[\psi\left(\frac{v}{k}\right) - \psi(v)\right]\right\}_{(0)}$$

Die Substitution $v = kw$ verwandelt diesen Ausdruck in

$$\frac{1}{k^{m-1}} D_w^m \left\{ w \frac{e^{kzw} - 1}{e^w - 1} \right\}_{(0)} + k\left(\frac{1}{k^m} - 1\right) \psi^{(m)}(0)$$

und daraus folgt bei geraden m:

$$16)\ \varphi(z,m) + \varphi\left(z+\frac{1}{k}, m\right) + \varphi\left(z+\frac{2}{k}, m\right) + \cdots + \varphi\left(z+\frac{k-1}{k}, m\right)$$
$$= \frac{1}{k^{m-1}}\left[\varphi(kz, m) + (-1)^{\frac{1}{2}m} (k^m - 1) B_{m-1}\right]$$

dagegen bei ungeraden m:

$$17)\ \varphi(z,m) + \varphi\left(z+\frac{1}{k}, m\right) + \varphi\left(z+\frac{2}{k}, m\right) + \cdots + \varphi\left(z+\frac{k-1}{k}, m\right)$$
$$= \frac{1}{k^{m-1}} \varphi(kz, m).$$

Für $z = 0$, $k = 2$ kommt man auf die Formeln 14) und 13) zurück.

c. Um die Eigenschaften der Differentialquotienten von $\varphi(z,m)$ kennen zu lernen, differenziren wir die gebrochene Function

$$\frac{e^{zv} - 1}{e^v - 1}$$

$(m-1)$-mal in Beziehung auf v, einmal in Beziehung auf z, und machen dabei Gebrauch von dem Satze, dass diese Operationen in beliebiger Reihenfolge vorgenommen werden dürfen. Wir erhalten so

$$D_z D_v^{m-1}\left(\frac{e^{zv} - 1}{e^v - 1}\right) = D_v^{m-1} D_z\left(\frac{e^{zv} - 1}{e^v - 1}\right) = D_v^{m-1}\left(\frac{v e^{zv}}{e^v - 1}\right)$$
$$= D_v^{m-1}\left\{v \frac{e^{zv} - 1}{e^v - 1} + \psi(v)\right\}$$

mithin für $v = 0$ und unter Benutzung der Formeln 6) und 7)

$$D_z\left\{\frac{\varphi(z,m)}{m}\right\} = \varphi(z, m-1) + \psi^{(m-1)}(0).$$

Auf die Unterscheidung gerader und ungerader m eingehend, ziehen wir hieraus die Differentialformeln:

$$18)\qquad \frac{d\varphi(z, 2n)}{dz} = 2n\, \varphi(z, 2n-1), \qquad n > 1,$$

$$19)\quad \frac{d\varphi(z, 2n+1)}{dz} = (2n+1)[\varphi(z, 2n) + (-1)^{n-1} B_{2n-1}].$$

Durch Umkehrung derselben ergeben sich die Integralformeln:

$$20)\qquad \int_0^z \varphi(z, 2n-1)\,dz = \frac{\varphi(z, 2n)}{2n}, \quad n > 1,$$

$$21)\qquad \int_0^z \varphi(z, 2n)\,dz = \frac{\varphi(z, 2n+1)}{2n+1} + (-1)^n B_{2n-1} z.$$

Als specielle Fälle derselben verdienen Erwähnung

$$22)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(z, 2n-1)\,dz = (-1)^n \frac{2^{2n}-1}{n\,2^{2n}} B_{2n-1},$$

$$23)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(z, 2n)\,dz = (-1)^n \tfrac{1}{2} B_{2n-1}.$$

d. Die Formeln 18) und 19) geben vollständigen Aufschluss über den Gang der Bernoulli'schen Functionen innerhalb des Intervalles $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$; die betreffende Discussion fangen wir mit dem Falle $m = 2$ an und führen sie mittelst jener Formeln weiter.

Zunächst erhellt unmittelbar, dass die Function

$$\varphi(z, 2) = z(z-1)$$

von $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$ fortwährend abnimmt und negativ bleibt; für $z = \frac{1}{2}$ erreicht sie ihren kleinsten Werth $\varphi(\frac{1}{2}, 2) = -\frac{1}{4}$.

Ferner haben wir nach Formel 19)

$$\tfrac{1}{3}\frac{d\varphi(z, 3)}{dz} = \varphi(z, 2) + B_1;$$

die rechte Seite ist anfangs für $z = 0$ positiv, nimmt dann continuirlich ab und erhält für $z = \frac{1}{2}$ den negativen Werth $-\frac{1}{4} + B_1 = -\frac{1}{12}$, woraus folgt, dass es zwischen $z = 0$ und $z = \frac{1}{2}$ einen, aber nur einen Werth giebt, für welchen der besprochene Ausdruck verschwindet. Diesem Verhalten von $\varphi'(z, 3)$ gemäss wächst anfangs $\varphi(z, 3)$, erreicht zwischen $z = 0$ und $z = \frac{1}{2}$ ein Maximum und nimmt dann wieder ab. Die Zunahme beginnt mit dem Werthe $\varphi(0, 3) = 0$, die Abnahme endigt mit $\varphi(\frac{1}{2}, 3) = 0$, mithin bleibt $\varphi(z, 3)$ positiv von $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$ und hat dazwischen ein Maximum.

Die Formel 18) giebt weiter

$$\tfrac{1}{4}\frac{d\varphi(z, 4)}{dz} = \varphi(z, 3)$$

und da nach dem Vorigen $\varphi(z, 3)$, mithin auch $\varphi'(z, 4)$ positiv bleibt, so wächst $\varphi(z, 4)$ fortwährend innerhalb des betrachteten Intervalles. Das Wachsthum beginnt mit $\varphi(0, 4) = 0$, mithin ist $\varphi(z, 4)$ eine im Gebiete des **Positiven zunehmende** Function, welche für $z = \frac{1}{2}$ ihren grössten Werth $\frac{15}{8} B_3$ erreicht.

In der ferneren Gleichung

$$\frac{1}{5}\frac{d\varphi(z, 5)}{dz} = \varphi(z, 4) - B_3$$

ist die rechte Seite anfangs für $z = 0$ negativ, wird aber wegen des positiv wachsenden $\varphi(z, 4)$ immer grösser und nimmt für $z = \frac{1}{2}$ ihren grössten Werth an, welcher

$$\varphi(\tfrac{1}{2}, 4) - B_3 = \left(1 - \frac{1}{2^3}\right) B_3$$

und zwar positiv ist. Aus diesem Verhalten von $\varphi'(z, 5)$ folgt, dass $\varphi(z, 5)$ erst ab- und nachher wieder zunimmt. Die Abnahme fängt an mit $\varphi(0, 5) = 0$, die Zunahme hört auf mit $\varphi(\frac{1}{2}, 5) = 0$, mithin bleibt $\varphi(z, 5)$ **negativ** von $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$ und besitzt innerhalb dieses Intervalles ein **Minimum**.

Weil nun

$$\frac{1}{6}\frac{d\varphi(z, 6)}{dz} = \varphi(z, 5)$$

ist und die rechte Seite, folglich auch $\varphi'(z, 6)$ negativ bleibt, so nimmt $\varphi(z, 6)$ continuirlich ab, mit dem Werthe $\varphi(0, 6) = 0$ anfangend. Demnach ist $\varphi(z, 6)$ eine im Gebiete des **Negativen abnehmende** Function, ähnlich wie $\varphi(z, 2)$.

Man übersieht augenblicklich den Fortgang dieser einfachen Schlüsse, deren Gesammtergebniss leicht graphisch dargestellt werden kann, wenn man z als Abscisse und $\varphi(z, m)$ als zugehörige senkrecht auf z stehende Ordinate construirt. Für $AC = CB = \frac{1}{2}$ werden nämlich die **Bernoulli**'schen Functionen gerader Ordnung repräsentirt durch

Fig. 41.

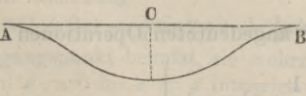


Fig. 42.

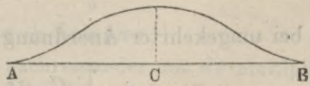


Fig. 41, wenn $m = 2, \quad 6, \quad 10, \quad 14, \ldots 4p - 2,$
Fig. 42, wenn $m = 4, \quad 8, \quad 12, \quad 16, \ldots 4p,$

dagegen die Functionen ungerader Ordnung durch

Fig. 43.

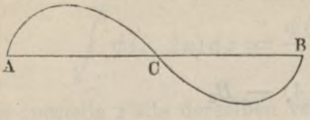


Fig. 44.

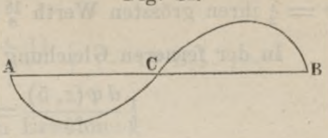


Fig. 43, wenn $m = 3,\ 7,\ 11,\ 15, \ldots .\ 4p-1,$

Fig. 44, wenn $m = 5,\ 9,\ 13,\ 17, \ldots .\ 4p+1.$

Will man diese Curven über $z = AB = 1$ hinaus fortsetzen, so hat man die Formel 11) zu benutzen. Endlich lehrt die Gleichung 15), dass eine durch C senkrecht zu AB gelegte Gerade jede der vollständig gedachten Curven in zwei congruente Theile zerlegt, welche auf gleichen oder entgegengesetzten Seiten der Abscissenachse liegen, jenachdem m gerade oder ungerade ist.

e. Wir wollen noch zeigen, wie sich die Bernoulli'schen Functionen in unendliche Reihen verwandeln lassen, die entweder nach den Cosinus oder nach den Sinus der Vielfachen eines Bogens fortschreiten. In der bekannten, für $0 \leqq z \leqq \lambda$ geltenden Gleichung

$$f(z) = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos\frac{\pi z}{\lambda} + a_2 \cos\frac{2\pi z}{\lambda} + a_3 \cos\frac{3\pi z}{\lambda} + \cdots,$$

$$a_k = \frac{2}{\lambda}\int_0^\lambda f(z) \cos\frac{k\pi z}{\lambda}\, dz$$

setzen wir zu diesem Zwecke $\lambda = 1$, $f(z) = \varphi(z, 2n)$ und erhalten

$$\varphi(z, 2n) = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos\pi z + a_2 \cos 2\pi z + a_3 \cos 3\pi z + \cdots$$

Hierin ist

$$a_k = 2\int_0^1 \varphi(z, 2n) \cos k\pi z\, dz$$

$$= 2\int_0^1 D_v^{2n}\left(v\frac{e^{zv}-1}{e^v-1}\right)_{(0)} \cos k\pi z\, dz$$

und bei umgekehrter Anordnung der angedeuteten Operationen

$$a_k = 2D_v^{2n}\left\{\int_0^1 v\frac{e^{zv}-1}{e^v-1} \cos k\pi z\, dz\right\}_{(0)}$$

$$= 2D_v^{2n}\left\{\psi(v)\int_0^1 (e^{vz}-1) \cos k\pi z\, dz\right\}_{(0)}$$

Daraus ergiebt sich in dem speciellen Falle $k = 0$

$$\tfrac{1}{2}a_0 = D_v^{2n}\left\{\psi(v)\left(\frac{e^v-1}{v}-1\right)\right\}_{(0)}$$

$$= D_v^{2n}\left\{1-\psi(v)\right\}_{(0)} = -\psi^{(2n)}(0) = (-1)^n B_{2n-1};$$

ferner für $k > 0$

$$a_k = 2\,D_v^{2n}\left\{\psi(v)\frac{v(e^v-1)}{k^2\pi^2+v^2}\right\}_{(0)} = 2\,D_v^{2n}\left(\frac{v^2}{k^2\pi^2+v^2}\right)_{(0)}$$

d. i.

$$a_k = 2(-1)^n\frac{1.2.3\ldots(2n)}{k^{2n}\pi^{2n}}, \qquad \text{für gerade } k,$$

$$a_k = 0 \qquad\qquad , \qquad \text{für ungerade } k.$$

Die gesuchte Reihenentwickelung ist hiernach

24) $\varphi(z, 2n) = (-1)^n B_{2n-1}$

$$+(-1)^{n-1}2\frac{1.2..(2n)}{\pi^{2n}}\left\{\frac{\cos 2\pi z}{2^{2n}}+\frac{\cos 4\pi z}{4^{2n}}+\frac{\cos 6\pi z}{6^{2n}}+\cdots\right\}$$

$$0 \leqq z \leqq 1.$$

Auf ähnliche Weise lässt sich $\varphi(z, 2n-1)$ mittelst der allgemeinen, für $0 < z < \lambda$ gültigen Formel

$$f(z) = b_1 \sin\frac{\pi z}{\lambda} + b_2 \sin\frac{2\pi z}{\lambda} + b_3 \sin\frac{3\pi z}{\lambda} + \ldots.$$

$$b_k = \frac{2}{\lambda}\int_0^\lambda f(z)\sin\frac{k\pi z}{\lambda}\,dz$$

entwickeln, kürzer jedoch gelangt man durch Differentiation der Gleichung 24) zu demselben Resultate, nämlich

25) $\varphi(z, 2n-1)$

$$= (-1)^n 2\frac{1..(2n-1)}{\pi^{2n-1}}\left\{\frac{\sin 2\pi z}{2^{2n-1}}+\frac{\sin 4\pi z}{4^{2n-1}}+\frac{\sin 6\pi z}{6^{2n-1}}+\ldots\right\},$$

$$0 < z < 1, \quad n > 1.$$

Uebrigens gilt diese Formel auch für $z = 0$ und für $z = 1$, weil die linke Seite in beiden Fällen zu Null wird *).

---

*) Die Benennung und erste genauere Untersuchung der Function $\varphi(z, m)$ rührt von J. Raabe her, welcher in Crelle's Journ., Bd. 42, S. 348 die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\pi(1-2z) = \tfrac{1}{1}\sin 2\pi z + \tfrac{1}{2}\sin 4\pi z + \tfrac{1}{3}\sin 6\pi z + \ldots.$$

als Ausgangspunkt benutzt, sie mehrmals nach einander mit dz multiplicirt, von $z = 0$ bis $z = z$ integrirt und so auf der linken Seite successiv $\varphi(z, 2)$, $\varphi(z, 3)$ etc. entstehen lässt. Dass diese Functionen Differentialquotienten sind und dass sich demzufolge die ganze Discussion sehr vereinfacht, hat erst der Verfasser gezeigt in der Zeitschrift für Mathematik u. Physik, Bd. I, S. 193.

II. Summirung einer allgemeinen Differenzenreihe.

Unter der Voraussetzung, dass die Functionen $f(u)$, $f'(u)$, $f''(u), \ldots f^{(m+1)}(u)$ innerhalb des Intervalles $u=x$ bis $u=x+h$ endlich und stetig bleiben, liefert bekanntlich der Taylor'sche Satz das Mittel, um $f(x+h)$ durch $f(x), f'(x), f''(x), \ldots f^{(m+1)}(x)$ auszudrücken, oder, was dasselbe ist, das genannte Theorem zeigt den Zusammenhang zwischen der endlichen Differenz $f(x+h)-f(x) = \Delta f(x)$ und den verschiedenen Differentialquotienten von $f(x)$; es ist nämlich nach Thl. I, §. 94

$$\Delta f(x) = \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \cdots\cdots + \frac{h^m}{1.2\ldots m} f^{(m)}(x)$$
$$+ \frac{h^{m+1}}{1.2\ldots m} \int_0^1 (1-t)^m f^{(m+1)}(x+ht)\, dt.$$

Nehmen wir der Reihe nach

$$f(x) = F(x), \quad F'(x), \quad F''(x), \ldots . F^{(2n-1)}(x),$$
$$m = 2n, \quad 2n-1, \quad 2n-2, \ldots . \quad 1 \quad ,$$

so erhalten wir die folgenden $2n$ Gleichungen:

$$\Delta F(x) = \frac{h}{1} F'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) + \cdots\cdots + \frac{h^{2n}}{1.2\ldots(2n)} F^{(2n)}(x)$$
$$+ h^{2n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^{2n}}{1.2\ldots(2n)} F^{(2n+1)}(x+ht)\, dt,$$

$$\Delta F'(x) = \frac{h}{1} F''(x) + \frac{h^2}{1.2} F'''(x) + \cdots\cdot + \frac{h^{2n-1}}{1.2..(2n-1)} F^{(2n)}(x)$$
$$+ h^{2n} \int_0^1 \frac{(1-t)^{2n-1}}{1.2..(2n-1)} F^{(2n+1)}(x+ht)\, dt,$$

$$\Delta F''(x) = \frac{h}{1} F'''(x) + \frac{h^2}{1.2} F^{\mathrm{IV}}(x) + \cdots + \frac{h^{2n-2}}{1.2..(2n-2)} F^{(2n)}(x)$$
$$+ h^{2n-1} \int_0^1 \frac{(1-t)^{2n-2}}{1.2..(2n-2)} F^{(2n+1)}(x+ht)\, dt,$$

. . . .

$$\Delta F^{(2n-1)}(x) = \frac{h}{1} F^{(2n)}(x) + h^2 \int_0^1 \frac{1-t}{1} F^{(2n+1)}(x+ht)\, dt.$$

Die zweite dieser Gleichungen multipliciren wir mit $A_1 h$, die dritte mit $A_2 h^2$, die vierte mit $A_3 h^3$ u. s. w., wobei A_1, A_2, A_3, etc. vorläufig unbestimmte Coefficienten bedeuten mögen; ferner bezeichnen wir zur Abkürzung $1 \,.\, 2 \,\ldots\, m$ mit m' und addiren alle erhaltenen Gleichungen; dies giebt

$$\begin{aligned}
&\varDelta F(x) + A_1 h \varDelta F'(x) + A_2 h^2 \varDelta F''(x) + \cdots \\
&\qquad\qquad \cdots + A_{2n-1} h^{2n-1} \varDelta F^{(2n-1)}(x) = h F'(x) \\
&+ \left(\frac{1}{2'} + \frac{A_1}{1'}\right) h^2 F''(x) \\
&+ \left(\frac{1}{3'} + \frac{A_1}{2'} + \frac{A_2}{1'}\right) h^3 F'''(x) \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
&+ \left(\frac{1}{(2n)'} + \frac{A_1}{(2n-1)'} + \frac{A_2}{(2n-2)'}, + \cdots + \frac{A_{2n-1}}{1'}\right) h^{2n} F^{(2n)}(x) \\
&+ h^{2n+1} \int_0^1 \left\{ \frac{(1-t)^{2n}}{(2n)'} + \frac{A_1 (1-t)^{2n-1}}{(2n-1)'} + \cdots \right. \\
&\qquad\qquad \left. \cdots + \frac{A_{2n-1}(1-t)}{1'} \right\} F^{(2n+1)}(x+ht)\, dt.
\end{aligned}$$

Ueber die noch unbestimmten Coefficienten $A_1, A_2, \ldots A_{2n-1}$ wollen wir jetzt so disponiren, dass die mit $h^2, h^3, \ldots h^{2n}$ multiplicirten Ausdrücke wegfallen, dass also folgende $2n-1$ Gleichungen stattfinden

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2'} + \frac{A_1}{1'} = 0, \\
&\frac{1}{3'} + \frac{A_1}{2'} + \frac{A_2}{1'} = 0, \\
&\frac{1}{4'} + \frac{A_1}{3'} + \frac{A_2}{2'} + \frac{A_3}{1'} = 0, \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\frac{1}{(2n)'} + \frac{A_1}{(2n-1)'} &+ \frac{A_2}{(2n-2)'} + \cdots + \frac{A_{2n-1}}{1'} = 0;
\end{aligned}$$

hieraus ergeben sich der Reihe nach die Werthe

$$A_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad A_2 = \tfrac{1}{12}, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = -\tfrac{1}{720}, \ldots$$

deren Bildungsgesetz wir nachher untersuchen wollen. Die vorige Gleichung vereinfacht sich nun, und wenn zur Abkürzung

26) $$U_{2n} = \frac{(1-t)^{2n}}{(2n)'} + \frac{A_1(1-t)^{2n-1}}{(2n-1)'} + \cdots + \frac{A_{2n-1}(1-t)}{1'}$$

gesetzt wird, so lautet dieselbe

$$\text{27)}\quad \Delta F(x) + A_1 h \Delta F'(x) + A_2 h^2 \Delta F''(x) + \cdots \\ \cdots + A_{2n-1} h^{2n-1} \Delta F^{(2n-1)}(x) \\ = hF'(x) + h^{2n+1} \int_0^1 U_{2n} F^{(2n+1)}(x+ht)\, dt.$$

Für die nähere Kenntniss der Coefficienten A_1, A_2, etc. ist die Bemerkung von Gewicht, dass man bei einer anderen Gelegenheit auf dieselben Bedingungsgleichungen kommt wie vorhin. Versucht man nämlich den Quotienten $v : (e^v - 1)$ in eine nach Potenzen von v fortgehende Reihe zu verwandeln und setzt man demgemäss

$$\frac{v}{e^v - 1} = 1 + C_1 v + C_2 v^2 + C_3 v^3 + \cdots,$$

so liegt es am nächsten, die unbekannten Coefficienten C_1, C_2, etc. dadurch zu bestimmen, dass man die vorstehende Gleichung mit der folgenden

$$e^v - 1 = \frac{1}{1'} v + \frac{1}{2'} v^2 + \frac{1}{3'} v^3 + \cdots$$

multiplicirt und die beiderseitigen Coefficienten von v, v^2, etc. vergleicht. Die Multiplication giebt nun

$$v = v + \left(\frac{1}{2'} + \frac{C_1}{1'}\right) v^2 \\ + \left(\frac{1}{3'} + \frac{C_1}{2'} + \frac{C_2}{1'}\right) v^3 \\ + \left(\frac{1}{4'} + \frac{C_1}{3'} + \frac{C_2}{2'} + \frac{C_3}{1'}\right) v^4 \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

und diese Gleichung kann nur bestehen, wenn die Coefficienten von v^2, v^3, v^4, etc. sämmtlich $= 0$ sind. Für C_1, C_2, etc. erhält man auf diese Weise genau dieselben Bedingungsgleichungen, welchen vorhin A_1, A_2, etc. unterworfen wurden; es folgt hieraus die Identität von C_m und A_m, mithin auch

$$\frac{v}{e^v - 1} = 1 + A_1 v + A_2 v^2 + A_3 v^3 + \cdots$$

Andererseits weiss man, dass zwischen den Grenzen $v = -2\pi$ und $v = +2\pi$ die Gleichung

$$\frac{v}{e^v - 1} = 1 - \tfrac{1}{2} v \\ + \frac{B_1}{2'} v^2 - \frac{B_3}{4'} v^4 + \frac{B_5}{6'} v^6 + \cdots$$

besteht; man hat daher durch Vergleichung beider Reihenentwickelungen

$$A_1 = -\tfrac{1}{2},\quad A_3 = 0,\quad A_5 = 0, \ldots\ldots$$

$$A_2 = +\frac{B_1}{2'},\ A_4 = -\frac{B_3}{4'},\ A_6 = +\frac{B_5}{6'}, \ldots\ldots$$

Die hiermit bestimmten Werthe der Coefficienten A_1, A_2, etc. substituiren wir in die Gleichung 27) und geben letzterer die Form

$$28)\quad hF'(x) = \varDelta F(x) - \tfrac{1}{2}h\varDelta F'(x) + \frac{B_1 h^2}{2'}\varDelta F''(x) - \frac{B_3 h^4}{4'}\varDelta F^{\text{IV}}(x) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n \frac{B_{2n-3}h^{2n-2}}{(2n-2)'}\varDelta F^{(2n-2)}(x) + R_{2n},$$

wobei selbstverständlich

$$R_{2n} = -h^{2n+1}\int_0^1 U_{2n} F^{(2n+1)}(x+ht)\,dt$$

ist; wir haben dann den bemerkenswerthen Satz, dass $F'(x)$ in eine Reihe verwandelt werden kann, die nach den Differenzen $\varDelta F(x)$, $\varDelta F'(x)$, $\varDelta F''(x)$, etc. fortschreitet. Der letzte Summand (R_{2n}) ist der Rest der Reihe, welcher einer näheren Untersuchung bedarf.

Zufolge der Werthe von A_1, A_2, etc. hat man nach Nro. 26)

$$U_{2n} = \frac{(1-t)^{2n}}{(2n)'} - \frac{1}{2}\frac{(1-t)^{2n-1}}{(2n-1)'} + \frac{B_1(1-t)^{2n-2}}{2'(2n-2)'} - \frac{B_3(1-t)^{2n-4}}{4'(2n-4)'} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(-1)^n B_{2n-3}(1-t)^2}{(2n-2)'\,2'}$$

oder nach der gewöhnlichen Bezeichnung der Binomialcoefficienten

$$U_{2n} = \frac{1}{(2n)'}\Big\{(1-t)^{2n} - n\,(1-t)^{2n-1} + (2n)_2 B_1(1-t)^{2n-2} - (2n)_4 B_3(1-t)^{2n-4} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n (2n)_{2n-2} B_{2n-3}(1-t)^2\Big\}.$$

Die eingeklammerte Reihe ist identisch mit der Bernoulli'schen Function $\varphi(1-t, 2n) = \varphi(t, 2n)$; für den Rest gilt demnach die Formel

$$29)\qquad R_{2n} = -\frac{h^{2n+1}}{(2n)'}\int_0^1 \varphi(t, 2n)\,F^{(2n+1)}(x+ht)\,dt.$$

Beiläufig bemerkt, kann man dieselbe dadurch verificiren, dass man rechter Hand $2n$-mal die theilweise Integration anwendet und das Resultat in die Gleichung 28) einsetzt; letztere reducirt sich dann auf die Identität $hF'(x) = hF'(x)$.

Um den Rest R_{2n} in Grenzen einzuschliessen, stellen wir folgende Betrachtung an. Innerhalb des Intervalles $t = 0$ bis $t = 1$ erreiche $F^{(2n+1)}(x + ht)$ seinen kleinsten Werth für $t = a$, seinen grössten Werth für $t = b$; es ist dann

$$F^{(2n+1)}(x + ha) < F^{(2n+1)}(x + ht) < F^{(2n+1)}(x + hb).$$

Diese Ungleichung wird durch Multiplication mit $(-1)^n \varphi(t, 2n)$ nicht gestört, weil dieser Factor positiv bleibt von $t = 0$ bis $t = 1$; multiplicirt man noch mit dt und integrirt zwischen den Grenzen $t = 0$ und $t = 1$, so findet man

$$B_{2n-1} F^{(2n+1)}(x + ha) <$$

$$(-1)^n \int_0^1 \varphi(t, 2n) F^{(2n+1)}(x + ht) dt < B_{2n-1} F^{(2n+1)}(x + hb).$$

Das Product $B_{2n-1} F^{(2n+1)}(x + ht)$ erhält demnach, wenn t von 0 bis 1 geht, einmal (für $x = a$) einen kleineren Werth als der in der Mitte stehende Ausdruck, ein anderes Mal (für $x = b$) einen grösseren Werth; zufolge der vorausgesetzten Continuität von $F^{(2n+1)}(u)$ muss es daher einen zwischen 0 und 1 liegenden Specialwerth $t = \vartheta$ geben, für welchen

$$(-1)^n \int_0^1 \varphi(t, 2n) F^{(2n+1)}(x + ht) dt = B_{2n-1} F^{(2n+1)}(x + h\vartheta)$$

wird. Der Rest gewinnt hierdurch die Form

$$30) \quad R_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{B_{2n-1} h^{2n+1}}{(2n)'} F^{(2n+1)}(x + \vartheta h), \quad 0 < \vartheta < 1,$$

welche in so fern allgemein ist, als $F^{(2n+1)}(u)$ nur den unumgänglichen Bedingungen der Endlichkeit und Stetigkeit zu genügen hat*).

Mittelst theilweiser Integration erhält man aus Nro. 29)

---

*) Die obige Restformel wurde zuerst von Malmstén angegeben in Crelle's Journal, Bd. 35, S. 55. (Leider ist diese schöne Abhandlung durch eine enorme Menge von Druckfehlern verunstaltet.)

$$R_{2n} = \frac{h^{2n}}{(2n)'}\int\limits_0^1 \varphi'(t, 2n)\, F^{(2n)}(x + ht)\, dt$$

$$= \frac{h^{2n}}{(2n-1)'}\int\limits_0^1 \varphi(t, 2n-1)\, F^{(2n)}(x + ht)\, dt;$$

zerlegt man das Integral in zwei von $t = 0$ bis $t = \frac{1}{2}$ und von $t = \frac{1}{2}$ bis $t = 1$ gehende Integrale und lässt im zweiten Integrale $1 - t$ an die Stelle von t treten, so findet man leicht

$$31)\; R_{2n} = \frac{h^{2n}}{(2n-1)'}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \varphi(t, 2n-1)\,[F^{(2n)}(x+ht) - F^{(2n)}(x+h-ht)]\,dt.$$

Hier sind ganz ähnliche Betrachtungen wie vorhin anwendbar; aus ihnen ergiebt sich:

$$(-1)^n \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \varphi(t, 2n-1)\,[F^{(2n)}(x + ht) - F^{(2n)}(x + h - ht)]\,dt$$

$$= (-1)^n\, [F^{(2n)}(x + h\vartheta) - F^{(2n)}(x + h - h\vartheta)] \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \varphi(t, 2n-1)\,dt$$

$$= [F^{(2n)}(x + \vartheta h) - F^{(2n)}(x + h - \vartheta h)]\,\frac{2^{2n} - 1}{n\, 2^{2n}}\, B_{2n-1},\; 0 < \vartheta < \tfrac{1}{2}.$$

Setzt man noch $1 - \vartheta = \theta$, so erhält man die Restformel

$$32)\; R_{2n} = (-1)^{n+1}\,\frac{2^{2n} - 1}{2^{2n-1}}\,\frac{B_{2n-1}\, h^{2n}}{(2n)'}\,[F^{(2n)}(x + \theta h) - F^{(2n)}(x + \vartheta h)],$$

welche gleichfalls allgemein gilt*).

Unter besonderen Voraussetzungen lässt sich diese Formel noch vereinfachen. Wenn nämlich $F^{(2n)}(u)$ von $u = x$ bis $u = x + h$ continuirlich wächst, so ist wegen $0 < \vartheta < \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2} < \theta < 1$

$$0 < F^{(2n)}(x + \theta h) - F^{(2n)}(x + \vartheta h) < F^{(2n)}(x + h) - F^{(2n)}(x);$$

bei continuirlich abnehmenden $F^{(2n)}(u)$ ist umgekehrt

$$0 < F^{(2n)}(x + \vartheta h) - F^{(2n)}(x + \theta h) < F^{(2n)}(x) - F^{(2n)}(x + h),$$

folglich kann in beiden Fällen, d. h. wenn $F^{(2n+1)}(u)$ zwischen $u = x$ und $u = x + h$ sein Vorzeichen nicht wechselt,

---

*) Vom Verfasser angegeben in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 1, S. 193.

$$F^{(2n)}(x+\theta h)-F^{(2n)}(x+\vartheta h)=\beta\,\Delta F^{(2n)}(x)$$

gesetzt werden, wo β einen positiven echten Bruch bezeichnet. Dies giebt

$$R_{2n}=(-1)^{n+1}\frac{(2^{2n}-1)\beta}{2^{2n-1}}\;\frac{B_{2n-1}h^{2n}}{(2n)'}\,\Delta F^{(2n)}(x)$$

oder kürzer

33) $$R_{2n}=(-1)^{n+1}2\varepsilon\frac{B_{2n-1}h^{2n}}{(2n)'}\,\Delta F^{(2n)}(x),\;\;0<\varepsilon<1.$$

Führt man die in Nro. 28) vorkommende Reihe um ein Glied weiter, so dass

34) $$hF'(x)=\Delta F(x)-\tfrac{1}{2}h\,\Delta F'(x)+\frac{B_1h^2}{2'}\Delta F''(x)-\frac{B_3h^4}{4'}\Delta F^{\mathrm{IV}}(x)+\cdots$$
$$\cdots+(-1)^{n+1}\frac{B_{2n-1}h^{2n}}{(2n)'}\Delta F^{(2n)}(x)+R_{2n+2}$$

ist, so hat man

$$(-1)^{n+1}\frac{B_{2n-1}h^{2n}}{(2n)'}\Delta F^{(2n)}(x)+R_{2n+2}=R_{2n},$$

mithin nach Nro. 33), wenn $2\varepsilon-1=\varrho$ gesetzt wird

35) $$R_{2n+2}=(-1)^{n+1}\varrho\,\frac{B_{2n-1}h^{2n}}{(2n)'}\Delta F^{(2n)}(x),$$

und hier liegt ϱ zwischen -1 und $+1$. Um zu entscheiden, in welchen Fällen ϱ positiv und in welchen es negativ ist, entwickeln wir R_{2n+2} mittelst der allgemeinen Formel 30) und erhalten nach Hebung der gemeinschaftlichen Factoren

$$\frac{B_{2n+1}h^3}{(2n+1)(2n+2)}F^{(2n+3)}(x+\vartheta h)=-\varrho\,B_{2n-1}\Delta F^{(2n)}(x)$$

oder

$$\frac{B_{2n+1}h^2}{(2n+1)(2n+2)}F^{(2n+3)}(x+\vartheta h)=-\varrho\,B_{2n-1}\int_0^1F^{(2n+1)}(x+ht)dt.$$

Nach der bei Nro. 33) gemachten Voraussetzung ändert $F^{(2n+1)}(u)$, d. h. jeder Differentialquotient ungerader Ordnung sein Vorzeichen nicht, wenn u von x bis $x+h$ wächst; dasselbe gilt von $F^{(2n+3)}(u)$ oder von $F^{(2n+3)}(x+\vartheta h)$. Besitzen nun $F^{(2n+3)}(u)$ und $F^{(2n+1)}(u)$ gleiche Vorzeichen, so kommt dieses Vorzeichen auch dem rechts stehenden Integrale zu, und dann muss ϱ negativ sein; haben dagegen $F^{(2n+3)}(u)$ und $F^{(2n+1)}(u)$ ungleiche Vorzeichen, so muss aus denselben Gründen ϱ positiv sein. Unter diesen Voraussetzungen bildet demnach der Rest R_{2n+2} einen Bruchtheil des letzten Gliedes der Reihe.

Nimmt man beispielweise $F(u) = e^u$, so haben $F^{(2n+1)}(u)$ und $F^{(2n+3)}(u)$ immer dasselbe, und zwar das positive Zeichen, daher ist ϱ negativ etwa $= -\varepsilon$; nach beiderseitiger Division mit $e^{x+h} - e^x$ erhält man nun aus den Formeln 34) und 35)

$$\frac{h}{e^h - 1} = 1 - \tfrac{1}{2}h + \frac{B_1 h^2}{1.2} - \frac{B_3 h^4}{1.2.3.4} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{n+1}\frac{B_{2n-1}h^{2n}}{1.2\ldots(2n)} + (-1)^n \frac{\varepsilon B_{2n-1}h^{2n}}{1.2\ldots(2n)}.$$

Dies ist eine Verallgemeinerung der Formel 2); die letztere ergiebt sich nämlich, wenn man n unendlich wachsen lässt und h auf das Intervall -2π bis 2π beschränkt, damit der Rest gegen die Null convergirt.

III. Die Summenformel von Mac Laurin.

In der allgemeinen Gleichung 28) oder

$$hF'(x) = \varDelta F(x) - \tfrac{1}{2}h\varDelta F'(x)$$
$$+ \frac{B_1 h^2}{2'}\varDelta F''(x) - \frac{B_3 h^4}{4'}\varDelta F^{\mathrm{IV}}(x) + \ldots$$
$$\cdots + (-1)^n \frac{B_{2n-3}h^{2n-2}}{(2n-2)'}\varDelta F^{(2n-2)}(x) - \frac{h^{2n+1}}{(2n)'}\int_0^1 \varphi(t, 2n)F^{(2n+1)}(x+ht)\,dt$$

nehmen wir der Reihe nach

$$x = a, a+h, a+2h, \ldots a+(q-1)h$$

und addiren alle so entstehenden Gleichungen; dies giebt

$$h[F'(a)+F'(a+h)+F'(a+2h)+\cdots+F'(a+\overline{q-1}\,h)]$$

$$=F(a+qh)-F(a)-\tfrac{1}{2}h[F'(a+qh)-F'(a)]$$

$$+\frac{B_1h^2}{2'}[F''(a+qh)-F''(a)]-\frac{B_3h^4}{4'}[F^{\text{IV}}(a+qh)-F^{\text{IV}}(a)]+\cdots$$

$$\cdots+(-1)^n\frac{B_{2n-3}h^{2n-2}}{(2n-2)'}[F^{(2n-2)}(a+qh)-F^{(2n-2)}(a)]$$

$$-\frac{h^{2n+1}}{(2n)'}\int_0^1 S_{2n}\varphi(t,2n)\,dt,$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde

$$S_{2n}=F^{(2n+1)}(a+ht)+F^{(2n+1)}(a+h+ht)+F^{(2n+1)}(a+2h+ht)+\cdots$$
$$\cdots+F^{(2n+1)}(a+\overline{q-1}\,h+ht).$$

Benutzen wir noch die Substitutionen

$$a+qh=b,\qquad F'(u)=\mathring{f}(u),$$

so erhalten wir die allgemeine Formel

36) $$h[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f(a+\overline{q-1}\,h)]$$

$$=\int_a^b f(u)\,du-\tfrac{1}{2}h[f(b)-f(a)]$$

$$+\frac{B_1h^2}{2'}[f'(b)-f'(a)]-\frac{B_3h^4}{4'}[f'''(b)-f'''(a)]+\cdots$$

$$\cdots+(-1)^n\frac{B_{2n-3}h^{2n-2}}{(2n-2)'}[f^{(2n-3)}(b)-f^{(2n-3)}(a)]$$

$$-\frac{h^{2n+1}}{(2n)'}\int_0^1 S_{2n}\,\varphi(t,2n)\,dt,$$

37) $$S_{2n}=f^{(2n)}(a+ht)+f^{(2n)}(a+h+ht)+f^{(2n)}(a+2h+ht)+\cdots$$
$$\cdots+f^{(2n)}(a+\overline{q-1}\,h+ht),$$

welche nur an die Bedingung gebunden ist, dass $f(u), f'(u), f''(u),\ldots f^{(2n)}(u)$ stetig und endlich bleiben von $u=a$ bis $u=b$.

Wie früher bedarf auch hier das letzte Glied in Nro. 36) einer genaueren Untersuchung, bei der wir uns kurz fassen können, weil sie auf ähnliche Betrachtungen wie in Nro. II. hinauskommt.

Wenn es gelingt, zwei von t unabhängige Grössen M und N zu finden, zwischen denen S_{2n} enthalten ist, d. h. wenn eine Ungleichung von der Form

$$M < S_{2n} < N$$

existirt, so hat man, weil $(-1)^n \varphi(t, 2n)$ von $t = 0$ bis $t = 1$ positiv bleibt,

$$(-1)^n \int_0^1 M\varphi(t,2n)\,dt < (-1)^n \int_0^1 S_{2n}\varphi(t,2n)\,dt < (-1)^n \int_0^1 N\varphi(t,2n)\,dt$$

d. i.

$$B_{2n-1} M < (-1)^n \int_0^1 S_{2n}\,\varphi(t, 2n)\,dt < B_{2n-1} N,$$

und man kann folglich

$$(-1)^n \int_0^1 S_{2n}\,\varphi(t, 2n)\,dt = B_{2n-1}\,[M + \vartheta\,(N - M)]$$

setzen, worin ϑ einen positiven echten Bruch bezeichnet; dies giebt die Formel*)

$$38)\quad h\,[f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(a + \overline{q-1}\,h)]$$

$$= \int_a^b f(u)\,du - \tfrac{1}{2} h\,[f(b) - f(a)]$$

$$+ \frac{B_1 h^2}{2'}\,[f'(b) - f'(a)] - \frac{B_3 h^4}{4'}\,[f'''(b) - f'''(a)] + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^n \frac{B_{2n-3} h^{2n-2}}{(2n-2)'}\,[f^{(2n-3)}(b) - f^{(2n-3)}(a)]$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{B_{2n-1} h^{2n+1}}{(2n)'}\,[M + \vartheta(N - M)].$$

Unter der speciellen Voraussetzung, dass $F^{(2n+1)}(u) = f^{(2n)}(u)$ von $x = a$ bis $x = b$ keinen Zeichenwechsel erleidet, gelangt man zu einem einfacheren Resultate, wenn man von den Gleichungen 34) und 35) ausgeht und die nämlichen Operationen wie vorhin anwendet; man erhält

*) Ohne Berücksichtigung des Restes ist die obige Formel zuerst von Mac Laurin im Treatise on fluxions (Lond. 1742) entwickelt und nachher von Euler in den Instit. calc. differ. P. I, cap. 5 reproducirt worden.

$$h[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f(a+\overline{q-1}\,h)]$$
$$=\int_a^b f(u)\,du-\tfrac{1}{2}h[f(b)-f(a)]$$
$$+\frac{B_1 h^2}{2'}[f'(b)-f'(a)]-\frac{B_3 h^4}{4'}[f'''(b)-f'''(a)]+\cdots$$
$$\cdots+(-1)^{n+1}\frac{B_{2n-1}h^{2n}}{(2n)'}[f^{(2n-1)}(b)-f^{(2n-1)}(a)]$$
$$+(-1)^{n+1}\frac{B_{2n-1}h^{2n}}{(2n)'}\,T,$$

und zwar ist, wenn $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_q$ echte Brüche bezeichnen,

$$\begin{aligned}T=&\ \varrho_1[f^{(2n-1)}(a+h)-f^{(2n-1)}(a)]\\ &+\varrho_2[f^{(2n-1)}(a+2h)-f^{(2n-1)}(a+h)]\\ &+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\varrho_q[f^{(2n-1)}(a+qh)-f^{(2n-1)}(a+\overline{q-1}\,h)].\end{aligned}$$

Die Brüche $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_q$ sind hier gleichzeitig positiv oder negativ, jenachdem $f^{(2n)}(u)$ und $f^{(2n+2)}(u)$ entgegengesetzte oder gleiche Vorzeichen behalten. Für den Fall, dass alle ϱ positiv sind und $f^{(2n-1)}(u)$ wächst, hat man

$$0<\varrho_1[f^{(2n-1)}(a+h)-f^{(2n-1)}(a)]<f^{(2n-1)}(a+h)-f^{(2n-1)}(a)$$
$$0<\varrho_2[f^{(2n-1)}(a+2h)-f^{(2n-1)}(a+h)]<f^{(2n-1)}(a+2h)-f^{(2n-1)}(a+h).$$

u. s. w.

mithin durch Addition

$$0<T<f^{(2n-1)}(a+qh)-f^{(2n-1)}(a);$$

es kann folglich

$$T=\varrho[f^{(2n-1)}(a+qh)-f^{(2n-1)}(a)]=\varrho[f^{(2n-1)}(b)-f^{(2n-1)}(a)]$$

gesetzt werden, wo ϱ einen positiven echten Bruch bezeichnet. Bei positiven $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_q$ und einer abnehmenden Function $f^{(2n-1)}(u)$ geht das Zeichen $<$ in das Zeichen $>$ über, das Endresultat aber bleibt dasselbe. Sind $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_q$ negativ, so gelten für $-T$ die nämlichen Schlüsse wie vorhin für T bei positiven $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_q$, und es gilt daher die obige Formel allgemein, wenn ϱ immer mit demselben Zeichen genommen wird wie die früheren $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ etc. Zufolge dieser Erörterungen hat man die Gleichung

$$39)\quad h[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f(a+\overline{q-1}\,h)]$$

$$=\int_a^b f(u)\,du-\tfrac{1}{2}h[f(b)-f(a)]$$

$$+\frac{B_1 h^2}{2'}[f'(b)-f'(a)]-\frac{B_3 h^4}{4'}[f'''(b)-f'''(a)]+\cdots$$

$$\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\frac{B_{2n-1}h^{2n}}{(2n)'}[f^{(2n-1)}(b)-f^{(2n-1)}(a)]$$

$$+(-1)^{n+1}\varrho\,\frac{B_{2n-1}h^{2n}}{(2n)'}[f^{(2n-1)}(b)-f^{(2n-1)}(a)],$$

worin ϱ einen positiven oder negativen echten Bruch bedeutet, jenachdem $f^{(2n)}(u)$ und $f^{(2n+2)}(u)$ von $u=a$ bis $u=a+qh=b$ entgegengesetzte oder gleiche Vorzeichen behalten.

Die Gleichungen 38) und 39) zeigen den Zusammenhang zwischen der Summe einer endlichen Reihe und einem bestimmten Integrale; sie können daher zur Berechnung des einen dieser Ausdrücke benutzt werden, wenn man den jedesmaligen anderen als bekannt voraussetzt. So folgt z. B. aus Nro. 39), falls $f^{(2n)}(u)$ von $u=a$ bis $u=b$ keinen Zeichenwechsel erleidet,

$$40)\quad \int_a^b f(u)\,du$$

$$=h[\tfrac{1}{2}f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f(b-h)+\tfrac{1}{2}f(b)]$$

$$-\frac{B_1 h^2}{2'}[f'(b)-f'(a)]+\frac{B_3 h^4}{4'}[f'''(b)-f'''(a)]-\cdots$$

$$\cdots+(-1)^n\frac{B_{2n-1}h^{2n}}{(2n)'}[f^{(2n-1)}(b)-f^{(2n-1)}(a)]$$

$$+(-1)^n\varrho\,\frac{B_{2n-1}h^{2n}}{(2n)'}[f^{(2n-1)}(b)-f^{(2n-1)}(a)].$$

Denkt man sich u als Abscisse, $f(u)$ als Ordinate einer Curve, mithin das bestimmte Integral als die über der Strecke $b-a$ stehende Curvenfläche, so bedeutet die erste Zeile rechter Hand die Summe von den Flächen der q Trapeze, welche entstehen, wenn $b-a$ in q gleiche Theile getheilt, durch jeden Theilpunkt eine Ordinate gelegt und der Endpunkt derselben mit dem Endpunkte der nächsten Ordinate geradlinig verbunden wird. Bekanntlich liefert diese Summe einen Näherungswerth der Fläche; die übrigen Glieder in Nro. 40) bilden zusammen die Correction, deren jener Näherungswerth bedarf.

Andererseits können die Formeln 38) und 39) zur Berechnung der links stehenden Summen dienen, und es ist diese Anwendung besonders in dem Falle von Vortheil, wo q eine so grosse Zahl ist, dass die directe Summirung äusserst mühsam werden würde. Hierzu geben wir einige Beispiele.

a. Die Annahme $f(u) = \frac{1}{u}$ liefert

$$f^{(2n)}(u) = \frac{1 \cdot 2 \ldots (2n)}{u^{2n+1}};$$

hier sind $f^{(2n)}(u)$ und $f^{(2n+2)}(u)$ gleichzeitig positiv für $u > 0$, mithin kann die Formel 39) angewendet werden und ist darin ϱ ein negativer echter Bruch. Setzt man $a = 1$, $h = 1$ und vereinigt die beiden letzten Summanden in Nro. 39), wobei der positive echte Bruch $1 + \varrho$ kurz mit ε bezeichnet werden möge, so hat man

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{q}$$

$$= l(q+1) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{q+1} - 1\right] - \frac{B_1}{2}\left[\frac{1}{(q+1)^2} - 1\right] + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n-1}\frac{B_{2n-3}}{2n-2}\left[\frac{1}{(q+1)^{2n-2}} - 1\right]$$

$$+ (-1)^n \frac{\varepsilon B_{2n-1}}{2n}\left[\frac{1}{(q+1)^{2n}} - 1\right].$$

Wir setzen noch $q + 1 = p$, addiren beiderseits $\frac{1}{p}$ und fassen die von p unabhängigen Glieder zu einer Constanten C zusammen; dies giebt

$$41)\quad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p}$$

$$= C + lp + \frac{1}{2p} - \frac{B_1}{2p^2} + \frac{B_3}{4p^4} - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n-1}\frac{B_{2n-3}}{(2n-2)p^{2n-2}} + (-1)^n \frac{\varepsilon B_{2n-1}}{2np^{2n}}.$$

Die Constante bestimmt sich wie in Theil I, S. 439 dadurch, dass man lp beiderseits subtrahirt und zur Grenze für unendlich wachsende p übergeht; es bleibt dann

$$C = Lim\left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p} - lp\right\} = 0{,}5772156649\ldots$$

Aus den bekannten Werthen der Bernoulli'schen Zahlen ($\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, etc.) ersieht man augenblicklich, dass die in Nro. 41) rechter Hand vorkommende Reihe anfangs eine fallende ist; ob diese Eigenschaft auch weiterhin stattfindet, kann man mittelst der Formel (Thl. I, S. 244)

$$\frac{2^{2m-1} B_{2m-1} \pi^{2m}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (2m)} = \frac{1}{1^{2m}} + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \cdots$$

entscheiden, deren rechte Seite kurz s_{2m} heissen möge. Es folgt nämlich

$$B_{2m-1} = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (2m)}{2^{2m-1} \pi^{2m}} s_{2m}$$

und

$$\frac{B_{2m-1}}{2m \,.\, p^{2m}} = \frac{1 \,.\, 2 \ldots (2m-1)}{(2\pi p)^{2m-1}} \cdot \frac{s_{2m}}{\pi p};$$

bei hinreichend grossen m lässt sich der erste Factor rechter Hand beliebig gross machen, während der zweite Factor dem Grenzwerthe $\frac{1}{\pi p}$ zustrebt. Die Reihe in 41) wird daher von einer bestimmten Stelle ab zu einer steigenden und darf deswegen nicht ins Unendliche fortgesetzt werden; vielmehr wird man bei praktischer Rechnung sie nur soweit benutzen als ihre Glieder abnehmen. Derartige Reihen sind gewissermaassen halbconvergent und ohne Discussion des Restes von keinem Werthe.

b. Die Annahme $f(u) = lu$ giebt

$$f^{(2n)}(u) = -\frac{1 \,.\, 2 \ldots (2n-1)}{u^{2n}};$$

hier sind $f^{(2n)}(u)$ und $f^{(2n+2)}(u)$ gleichzeitig negativ, mithin ist in Formel 39) ϱ ein negativer echter Bruch. Für $a = 1$, $h = 1$, $1 + \varrho = \varepsilon$ erhält man jetzt

$$\begin{aligned} & l1 + l2 + l3 + l4 + \cdots + lq \\ = & (q+1)\,l(q+1) - q - \tfrac{1}{2} l(q+1) \\ & + \frac{B_1}{1 \,.\, 2}\left[\frac{1}{q+1} - 1\right] - \frac{B_3}{3 \,.\, 4}\left[\frac{1}{(q+1)^3} - 1\right] + \cdots \\ & \cdots + (-1)^n \frac{B_{2n-3}}{(2n-3)(2n-2)}\left[\frac{1}{(q+1)^{2n-3}} - 1\right] \\ & + (-1)^{n+1} \frac{\varepsilon B_{2n-1}}{(2n-1)(2n)}\left[\frac{1}{(q+1)^{2n-1}} - 1\right]. \end{aligned}$$

Setzt man $q + 1 = p$, addirt beiderseits lp und vereinigt alle von p unabhängigen Summanden zu einer Constanten γ, so hat man auch

$$l(1.2.3\ldots p) = \gamma + (p+\tfrac{1}{2})lp - p$$
$$+ \frac{B_1}{1.2.p} - \frac{B_3}{3.4p^3} + \cdots + (-1)^n \frac{B_{2n-3}}{(2n-3)(2n-2)p^{2n-3}}$$
$$+ (-1)^{n+1} \frac{\varepsilon B_{2n-1}}{(2n-1)2np^{2n-1}}.$$

Die Bestimmung der Constanten γ geschieht auf dieselbe Weise wie in Thl. I, S. 441; es findet sich $\gamma = \frac{1}{2}l(2\pi)$, mithin

$$42)\quad l(1.2.3\ldots p) = \tfrac{1}{2}l(2\pi) + (p+\tfrac{1}{2})lp - p$$
$$+ \frac{B_1}{1.2.p} - \frac{B_3}{3.4.p^3} + \cdots + (-1)^n \frac{B_{2n-3}}{(2n-3)(2n-2)p^{2n-3}}$$
$$+ (-1)^{n+1} \frac{\varepsilon B_{2n-1}}{(2n-1)2np^{2n-1}}$$

Auch diese Reihe ist halbconvergent, kann aber gleichwohl bei grossen p mit Vortheil benutzt werden. Nimmt man z. B. $p = 1000$, $n = 2$ und multiplicirt beiderseits mit dem Modulus 0,4342944819, so erhält man

$$\begin{aligned} log(1.2.3\ldots 1000) = {} & \quad 0,39908\,99341\,790 \\ & + 3001,5 \\ & - 434,29448\,19032\,518 \\ & + \quad 0,00003\,61912\,068 \\ & - \varepsilon . 0,00000\,00000\,012 \end{aligned}$$

mithin für $\varepsilon = 1$ und $\varepsilon = 0$

$$2567,60464\,42221\,328 < log(1.2\ldots 1000) < 2567,60464\,42221\,340,$$

woraus hervorgeht, dass das Product 1 . 2 . . . 1000 mit 2568 Ziffern geschrieben wird, von denen die acht höchsten sind: 40238 726.

c. Nehmen wir $f(u) = u^{-\mu}$, so behalten $f^{(2n)}(u)$ und $f^{(2n+2)}(u)$ gleiche Vorzeichen für $u > 0$; daher ist nach Formel 39), wenn noch $1+\varrho$ gleich dem positiven echten Bruche ε gesetzt wird,

$$h\left\{\frac{1}{a^\mu} + \frac{1}{(a+h)^\mu} + \frac{1}{(a+2h)^\mu} + \cdots + \frac{1}{(a+\overline{q-1}\,h)^\mu}\right\}$$
$$= \frac{1}{\mu-1}\left[\frac{1}{a^{\mu-1}} - \frac{1}{b^{\mu-1}}\right] + \tfrac{1}{2}h\left[\frac{1}{a^\mu} - \frac{1}{b^\mu}\right]$$
$$+ \frac{B_1\mu h^2}{1\,.\,2}\left[\frac{1}{a^{\mu+1}} - \frac{1}{b^{\mu+1}}\right] - \frac{B_3\mu(\mu+1)(\mu+2)h^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\left[\frac{1}{a^{\mu+3}} - \frac{1}{b^{\mu+3}}\right] + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^n \frac{B_{2n-3}\mu(\mu+1)\ldots(\mu+2n-4)h^{2n-2}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,(2n-2)}\left[\frac{1}{a^{\mu+2n-3}} - \frac{1}{b^{\mu+2n-3}}\right]$$
$$+ (-1)^{n+1} \frac{\varepsilon B_{2n-1}\mu(\mu+1)\ldots(\mu+2n-2)h^{2n}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,(2n)}\left[\frac{1}{a^{\mu+2n-1}} - \frac{1}{b^{\mu+2n-1}}\right].$$

Falls $\mu > 1$ ist, was durch $\mu = 1 + \lambda$ ausgedrückt werden möge, lässt sich die Reihe linker Hand ins Unendliche fortsetzen ohne zu divergiren; es wird dann $b = a + qh = \infty$, und demnach bleibt

$$43)\quad \frac{1}{a^{1+\lambda}} + \frac{1}{(a+h)^{1+\lambda}} + \frac{1}{(a+2h)^{1+\lambda}} + \frac{1}{(a+3h)^{1+\lambda}} + \cdots$$
$$= \frac{1}{\lambda a^{\lambda} h} + \frac{1}{2a^{\lambda+1}} + \frac{B_1(\lambda+1)h}{1.2\,a^{\lambda+2}} - \frac{B_3(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)h^3}{1.2.3.4.a^{\lambda+4}} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^n \frac{B_{2n-3}(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+2n-3)h^{2n-3}}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(2n-2)\,a^{\lambda+2n-2}}$$
$$+ (-1)^{n+1} \frac{\varepsilon B_{2n-1}(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+2n-1)h^{2n-1}}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(2n)\,a^{\lambda+2n}}.$$

Diese Transformation einer unendlichen Reihe in eine halbconvergente Reihe bietet einen wesentlichen Vortheil sobald λ klein ist, weil dann die Reihe linker Hand zu langsam convergirt, als dass man ihre Summe direct berechnen könnte. Handelt es sich um die Summirung der Reihe

$$s = \frac{1}{1^{1+\lambda}} + \frac{1}{2^{1+\lambda}} + \frac{1}{3^{1+\lambda}} + \cdots,$$

so thut man am besten, etwa die ersten neun Glieder unmittelbar zu summiren und nachher die Formel 43) für $a = 10$, $h = 1$ zu benutzen; es ist dann

$$s = \frac{1}{1^{1+\lambda}} + \frac{1}{2^{1+\lambda}} + \frac{1}{3^{1+\lambda}} + \cdots + \frac{1}{9^{1+\lambda}}$$
$$+ \frac{1}{10^{\lambda}}\left\{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{20} + \frac{\lambda+1}{1200} - \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)}{7200000}\right.$$
$$\left. + \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+5)}{30240000000} - \cdots\right\},$$

und der Rest beträgt immer einen Bruchtheil desjenigen Terms, welcher auf den zuletzt in Rechnung genommenen folgt. Diese Formel gewährt eine bedeutende Genauigkeit.

Multiplicirt man die Gleichung 43) mit λ und lässt nachher diese Grösse unendlich abnehmen, so gelangt man zu dem bemerkenswerthen Satze, dass das Product

$$\lambda\left\{\frac{1}{a^{1+\lambda}} + \frac{1}{(a+h)^{1+\lambda}} + \frac{1}{(a+2h)^{1+\lambda}} + \cdots\right\}$$

gegen den Grenzwerth $\frac{1}{h}$ convergirt*).

*) Es ist dies eine von Dirichlet bei zahlentheoretischen Untersuchungen gemachte Bemerkung; vergl. Crelle's Journ. Bd. 19, S. 326.

d. Wir wollen noch den, in mancher Hinsicht eigenthümlichen Fall

$$f(u) = \frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{B_1}{1.2} u - \frac{B_3}{1.2..4} u^3 + \frac{B_5}{1.2..6} u^5 - \dots$$

betrachten, wobei die angewendete Reihenentwickelung nur für $u^2 < (2\pi)^2$ Geltung hat. Hier ist

$$f(0) = 0, \ \ f'(0) = \tfrac{1}{2} B_1, \ \ f'''(0) = -\tfrac{1}{4} B_3, \dots .$$

mithin nach Formel 36) für $a = 0$, $b = qh$, und wenn das letzte Integral kurz mit J_{2n} bezeichnet wird,

$$h\left\{\frac{1}{e^h - 1} + \frac{1}{e^{2h} - 1} + \dots + \frac{1}{e^{(q-1)h} - 1}\right\}$$

$$-\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{q-1}\right) + \frac{1}{2}(q-1)h$$

$$= l\left(\frac{1 - e^{-qh}}{qh}\right) + \frac{1}{2} qh - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{e^{qh} - 1} - \frac{1}{q} + \frac{1}{2} h\right)$$

$$+ \frac{B_1 h^2}{2'}[f'(qh) - \tfrac{1}{2} B_1] - \frac{B_3 h^4}{4'}[f'''(qh) + \tfrac{1}{4} B_3] + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^n \frac{B_{2n-3} h^{2n-2}}{(2n-2)'}\left[f^{(2n-3)}(qh) - \frac{(-1)^n}{2n-2} B_{2n-3}\right]$$

$$- \frac{h^{2n+1}}{(2n)'} J_{2n}$$

oder bei etwas anderer Anordnung und nach Division mit h

44) $$\frac{1}{e^h - 1} + \frac{1}{e^{2h} - 1} + \dots + \frac{1}{e^{(q-1)h} - 1}$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{q} - lq\right)\frac{1}{h} - \frac{lh}{h} + \frac{1}{4}$$

$$+ \frac{1}{h} l(1 - e^{-qh}) - \frac{1}{2qh} - \frac{1}{2(e^{qh} - 1)}$$

$$+ \frac{B_1 h}{2'}[f'(qh) - \tfrac{1}{2} B_1] - \frac{B_3 h^3}{4'}[f'''(qh) + \tfrac{1}{4} B_3] + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^n \frac{B_{2n-3} h^{2n-3}}{(2n-2)'}\left[f^{(2n-3)}(qh) - \frac{(-1)^n}{2n-2} B_{2n-3}\right]$$

$$- \frac{h^{2n}}{(2n)'} J_{2n}.$$

Um die Reihe linker Hand ins Unendliche fortsetzen zu können, müssen wir die Werthe aufsuchen, welche $f'(u)$, $f'''(u)$ etc. für

$u = \infty$ annehmen. Differenzirt man aber $f(u)$ mehrmals nacheinander und macht bei jeder Differentiation Gebrauch von der Formel

$$D_u\left\{\frac{1}{(e^u-1)^m}\right\} = -m\left\{\frac{1}{(e^u-1)^m} + \frac{1}{(e^u-1)^{m+1}}\right\},$$

so gelangt man sehr leicht zu der Gleichung

$$f^{(2n-1)}(u) = -\left\{\frac{\alpha_1}{e^u-1} + \frac{\alpha_2}{(e^u-1)^2} + \cdots + \frac{\alpha_{2n}}{(e^u-1)^{2n}} - \frac{(2n-1)'}{u^{2n}}\right\},$$

worin $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n}$ gewisse numerische Coefficienten bedeuten, auf deren Werthe es nicht weiter ankommt. Diese Formel zeigt, dass $f^{(2n-1)}(u)$ bei unendlich wachsenden u die Null zur Grenze hat. Lassen wir jetzt in Nro. 44) q unendlich zunehmen und beachten ausser der vorigen Bemerkung noch die Formel

$$Lim\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{q} - lq\right) = 0{,}577\cdots = C,$$

so gelangen wir zu dem folgenden Resultate

$$45)\quad \frac{1}{e^h-1} + \frac{1}{e^{2h}-1} + \frac{1}{e^{3h}-1} + \cdots$$

$$= \frac{C-lh}{h} + \frac{1}{4} - \frac{(B_1)^2}{2'.2}h - \frac{(B_3)^2}{4'.4}h^3 - \cdots - \frac{(B_{2n-3})^2}{(2n-2)'(2n-2)}h^{2n-3}$$

$$- \frac{J_{2n}}{(2n)'}h^{2n}.$$

Der Rest bedarf hier einer speciellen Untersuchung, weil die Function $f(u)$ im vorliegenden Falle nicht von der Art ist, dass $f^{(2n)}(u)$ von $u = a = 0$ bis $u = b = \infty$ entweder nur wächst oder nur abnimmt. Zufolge der Bedeutung von J_{2n} nämlich

$$J_{2n} = \int_0^1 [f^{(2n)}(ht) + f^{(2n)}(h+ht) + f^{(2n)}(2h+ht) + \cdots]\,\varphi(t, 2n)\,dt$$

kommt diese Untersuchung im Wesentlichen darauf hinaus, zwei endliche Grössen M und N zu finden, zwischen denen die Summe

$$S_{2n} = f^{(2n)}(ht) + f^{(2n)}(h + ht) + f^{(2n)}(2h + ht) + \cdots$$

enthalten ist; wie in Nro. 38) erhält nachher der Rest die Form

$$46)\qquad (-1)^{n+1}\frac{B_{2n-1}h^{2n}}{(2n)'}[M + \vartheta(N - M)].$$

Setzt man, um zunächst $f^{(2n)}(u)$ zu discutiren, in Formel 27) auf S. 142 $x = \pi$, so hat man

$$\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{2}{e^{2\lambda\pi}-1}\right)$$
$$=\frac{1}{2\lambda}+\frac{\lambda}{1^2+\lambda^2}+\frac{\lambda}{2^2+\lambda^2}+\frac{\lambda}{3^2+\lambda^2}+\cdots.$$

und für $2\lambda\pi = u$

$$f(u)=2\left\{\frac{u}{2^2\pi^2+u^2}+\frac{u}{4^2\pi^2+u^2}+\frac{u}{6^2\pi^2+u^2}+\cdots\right\};$$

hieraus folgt durch $2n$-malige Differentiation unter Anwendung der Formel 15) auf S. 277 des ersten Theiles

$$f^{(2n)}(u)=$$
$$2(2n)'\left\{\frac{\cos\left[(2n+1)\arctan\frac{2\pi}{u}\right]}{(2^2\pi^2+u^2)^{n+1/2}}+\frac{\cos\left[(2n+1)\arctan\frac{4\pi}{u}\right]}{(4^2\pi^2+u^2)^{n+1/2}}+\cdots\right\}.$$

Für den absoluten Werth von $f^{(2n)}(u)$, welcher mit $[f^{(2n)}(u)]$ bezeichnet werden möge, ergiebt sich hiernach

$$[f^{(2n)}(u)]<$$
$$2(2n)'\left\{\frac{1}{(2^2\pi^2+u^2)^n}+\frac{1}{(4^2\pi^2+u^2)^n}+\frac{1}{(6^2\pi^2+u^2)^n}+\cdots\right\}.$$

Diese Ungleichung wird stärker, wenn man beachtet, dass immer

$$\frac{1}{(\alpha^2+u^2)^n}<\frac{1}{\alpha^{2n-2}(\alpha^2+u^2)}$$

ist; es ergiebt sich nämlich

$$[f^{(2n)}(u)]<\frac{2(2n)'}{(2\pi)^{2n-2}}\left\{\frac{1}{1^{2n-2}(2^2\pi^2+u^2)}+\frac{1}{2^{2n-2}(4^2\pi^2+u^2)}+\cdots\right\}$$

oder, wenn $4^2\pi^2$, $6^2\pi^2$ etc. durch $2^2\pi^2$ ersetzt werden,

$$[f^{(2n)}(u)]<\frac{2(2n)'}{(2\pi)^{2n-2}}\left\{\frac{1}{1^{2n-2}}+\frac{1}{2^{2n-2}}+\cdots\right\}\frac{1}{2^2\pi^2+u^2}.$$

Bezeichnet man die Summe der eingeklammerten unendlichen Reihe mit s_{2n-2} und versteht unter ε einen nicht näher bestimmten positiven oder negativen echten Bruch, so darf man jetzt

$$f^{(2n)}(u)=\frac{2(2n)'s_{2n-2}}{(2\pi)^{2n-2}}\cdot\frac{\varepsilon}{4\pi^2+u^2}$$

setzen. Hiernach ist

$$S_{2n}=\frac{2(2n)'s_{2n-2}}{(2\pi)^{2n-2}}\left\{\frac{\varepsilon_0}{4\pi^2+(ht)^2}+\frac{\varepsilon_1}{4\pi^2+(h+ht)^2}+\frac{\varepsilon_2}{4\pi^2+(2h+ht)^2}+\cdots\right\}$$

und für den absoluten Werth von S_{2n} folgt daraus

$$[S_{2n}] < \frac{2(2n)' s_{2n-2}}{(2\pi)^{2n-2}} \left\{ \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2 + h^2} + \frac{1}{4\pi^2 + (2h)^2} + \cdots \right\}$$
$$< \frac{2(2n)' s_{2n-2}}{(2\pi)^{2n-2}} \left\{ \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{h^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) \right\}.$$

Wegen der bekannten Summe der reciproken Quadratzahlen hat man jetzt die Ungleichung

$$-\frac{2(2n)' s_{2n-2}}{(2\pi)^{2n-2}} \left(\frac{1}{4\pi^2} + \frac{\pi^2}{6h^2}\right) < S_{2n} < + \frac{2(2n)' s_{2n-2}}{(2\pi)^{2n-2}} \left(\frac{1}{4\pi^2} + \frac{\pi^2}{6h^2}\right),$$

und der Rest stellt sich nach Nro. 46) unter die Form

$$-\varrho \frac{B_{2n-1} s_{2n-2} h^{2n}}{(2\pi)^{2n-2}} \left(\frac{1}{2\pi^2} + \frac{\pi^2}{3h^2}\right) = -\varrho \frac{B_{2n-3} B_{2n-1} h^{2n-2}}{(2n-2)'} \left(\frac{h^2}{4\pi^2} + \frac{\pi^2}{6}\right),$$

worin ϱ einen positiven oder negativen echten Bruch bezeichnet, Lassen wir endlich in Nro. 45) $n+1$ an die Stelle von n treten, so können wir schreiben:

47) $$\frac{1}{e^h - 1} + \frac{1}{e^{2h} - 1} + \frac{1}{e^{3h} - 1} + \cdots$$
$$= \frac{C - lh}{h} + \tfrac{1}{4} - C_1 h - C_3 h^3 - \cdots - C_{2n-1} h^{2n-1} - R_{2n},$$

und zwar gelten hier folgende Werthe

$$C = 0{,}57721\,56649\ldots,$$

$$C_1 = \frac{(B_1)^2}{2'.2} = \frac{1}{144},$$

$$C_3 = \frac{(B_3)^2}{4'.4} = \frac{1}{86\,400},$$

$$C_5 = \frac{(B_5)^2}{6'.6} = \frac{1}{7\,620\,480},$$

$$C_7 = \frac{(B_7)^2}{8'.8} = \frac{1}{290\,304\,000},$$

$$C_9 = \frac{(B_9)^2}{10'.10} = \frac{1}{6\,322\,821\,120},$$

u. s. w.

$$R_{2n} = \varrho \frac{B_{2n-1} B_{2n+1} h^{2n}}{1\,.\,2\,\ldots\,(2n)} \left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{h^2}{4\pi^2}\right).$$

Für $e^{-h} = z$ ergiebt sich noch, wenn z einen positiven echten Bruch bedeutet,

48) $$\frac{z}{1-z} + \frac{z^2}{1-z^2} + \frac{z^3}{1-z^3} + \cdots$$
$$= \frac{C - ll\left(\frac{1}{z}\right)}{l\left(\frac{1}{z}\right)} + \frac{1}{4} - C_1 l\left(\frac{1}{z}\right) - C_3\left[l\left(\frac{1}{z}\right)\right]^3 - \cdots$$
$$\cdots - C_{2n-1}\left[l\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{2n-1} - R_{2n},$$
$$R_{2n} = \varrho\,\frac{B_{2n-1}B_{2n+1}(lz)^{2n}}{1\,.\,2\,\ldots\,(2n)}\left\{\frac{\pi^2}{6} + \frac{(lz)^2}{4\pi^2}\right\}.$$

Diese Formel gewährt einen wesentlichen Vortheil, sobald z wenig kleiner als die Einheit ist; die Reihe linker Hand convergirt nämlich unter dieser Voraussetzung äusserst langsam, während es rechter Hand nur einiger Summanden bedarf, um eine ansehnliche Genauigkeit zu erreichen.*)

---

*) Nach einer von Lambert (Architektonik, S. 507) gemachten Bemerkung kann die unendliche Reihe in Nro. 48) nach Potenzen von z geordnet werden, nämlich
$$z + 2z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 2z^5 + 4z^6 + \cdots,$$
und zwar ist dann der Coefficient von z^m gleich der Anzahl der Theiler von m also u. A. $= 2$, wenn m eine Primzahl ist. Ferner hat Clausen (Crelle's Journal, Bd. 3, S. 95) erwähnt und nachher Scherk (ebendas. Bd. 9, S. 162) bewiesen, dass dieselbe Reihe folgende Form annehmen kann
$$\frac{1+z}{1-z}z + \frac{1+z^2}{1-z^2}z^4 + \frac{1+z^3}{1-z^3}z^9 + \frac{1+z^4}{1-z^4}z^{16} + \cdots,$$
welche bei kleinen z eine leichtere Summirung gestattet. Die obige Transformation, gewissermaassen das Gegenstück der vorigen, ist vom Verfasser angegeben worden in den Sitzungsberichten der K. S. Gesellschaft d. Wissenschaften, Bd. 13 (Jahrg. 1861), S. 120.

DIE GAMMAFUNCTIONEN.

Die Gammafunctionen.

I. Definition und Fundamentaleigenschaften der Gammafunctionen.

Wenn m eine ganze positive Zahl bedeutet, so hat es bekanntlich keine Schwierigkeit, das Product $x^m e^{-x}\,dx$ zu integriren, namentlich wird zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = \infty$ der Integralwerth sehr einfach (Thl. I, S. 413, Nro. 8):

$$\int_0^\infty x^m e^{-x}\,dx = 1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,m.$$

Für andere als ganze positive m lässt sich der Integralwerth nicht in geschlossener Form darstellen, und es liegt dann am nächsten, e^{-x} in die bekannte Potenzenreihe zu verwandeln. Das so erhaltene Resultat

$$\int_0^\xi x^m e^{-x}\,dx$$

$$= \frac{\xi^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{1}\,\frac{\xi^{m+2}}{m+2} + \frac{1}{1\,.\,2}\,\frac{\xi^{m+3}}{m+3} - \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{\xi^{m+4}}{m+4} + \cdots$$

ist nun zwar für jedes endliche ξ gültig, verliert aber bei grossen ξ alle Brauchbarkeit; der Fall $\xi = \infty$ bedarf daher einer besonderen Untersuchung. Mit dieser wollen wir uns im Folgenden beschäftigen und dabei unter Voraussetzung eines beliebigen positiven μ die Abkürzung

1) $$\Gamma(\mu) = \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x}\, dx$$

benutzen*). Nach dieser Definition der Function $\Gamma(\mu)$ ist speciell

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(2) = 1, \quad \Gamma(3) = 1.2, \quad \Gamma(4) = 1.2.3, \ldots$$

wie aus der Anfangs erwähnten Formel hervorgeht.

Um $\Gamma(\mu)$ in zwei Grenzen einzuschliessen, welche frei von Integralzeichen sind, bemerken wir zuerst, dass für jedes positive z die Ungleichung $e^z > 1 + z$ besteht, dass also für beliebige positive x und p

$$e^{\frac{x}{p}} > 1 + \frac{x}{p}$$

ist, woraus folgt

$$e^x > \left(1 + \frac{x}{p}\right)^p, \quad e^{-x} < \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{p}\right)^p}.$$

Da ferner $x^{\mu-1}$ immer positiv bleibt, wenn diese Potenz im absoluten Sinne genommen wird, so hat man

$$0 < \Gamma(\mu) < \int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}\, dx}{\left(1 + \frac{x}{p}\right)^p},$$

oder durch Substitution von $1 + \frac{x}{p} = \frac{1}{y}$

$$0 < \Gamma(\mu) < p^\mu \int_0^1 y^{p-\mu-1} (1-y)^{\mu-1}\, dy.$$

Nimmt man die beliebige positive Grösse $p = \mu + 1 + n$, wo n eine willkürliche ganze positive Zahl bedeutet, so lässt sich die auf

---

*) Ueber das obige und einige verwandte Integrale hat zuerst Euler mehrfache Untersuchungen angestellt; s. Institutiones calculi integralis, Vol. I, sect. 1, cap. VII, IX. und Vol. IV (supplementa), Acta Petropolitanae, T. I, Nova acta Petrop. T. V, Miscellanea Berolinensia, VII, 129, Mélanges de la Société de Turin, T. III. Später haben sich gleichzeitig damit beschäftigt Legendre in seinen Exercices de calcul intégral, Paris 1811, und Gauss in den Commentat. Gotting. rec. T. II, a. 1812. Von Legendre rührt der Name „Euler'sches Integral" und die Bezeichnung $\Gamma(\mu)$ her; Gauss bezeichnet dasselbe Integral mit $\Pi(\mu - 1)$. Jede dieser Bezeichnungen hat etwas für sich, doch scheint die erste allgemeiner angenommen zu sein.

y bezügliche Integration mittelst der Formel 4) auf Seite 412 des ersten Theiles ausführen, und es wird

$$2)\quad 0 < \Gamma(\mu) < (n+\mu+1)^{\mu}\frac{1.2.3\ldots\ldots n}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n)}.$$

Die Formel 1) liefert andererseits, wenn statt der oberen Grenze ∞ die endliche ganze Zahl n gesetzt wird,

$$\Gamma(\mu) > \int_0^n x^{\mu-1}e^{-x}\,dx.$$

Für jedes echt gebrochene positive z ist nun $e^{-z} > 1 - z$, mithin

$$e^{-\frac{x}{n}} > 1 - \frac{x}{n},\quad e^{-x} > \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

und nach dem Vorhergehenden

$$\Gamma(\mu) > \int_0^n x^{\mu-1}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx.$$

Mittelst der Substitution $1 - \dfrac{x}{n} = y$ wird hieraus

$$\Gamma(\mu) > n^{\mu}\int_0^1 y^n(1-y)^{\mu-1}\,dy$$

d. i.

$$3)\quad \Gamma(\mu) > n^{\mu}\frac{1.2.3\ldots.n}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n)}.$$

Die beiden für $\Gamma(\mu)$ gefundenen Ungleichungen gestatten folgende übersichtliche Zusammenstellung

$$\frac{\Gamma(\mu)}{\left(1+\dfrac{\mu+1}{n}\right)^{\mu}} < \frac{1.2.3\ldots\ldots n}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n)}n^{\mu} < \Gamma(\mu),$$

welche durch Uebergang zur Grenze für unendlich wachsende n eine Gleichung liefert, nämlich

$$4)\quad \Gamma(\mu) = Lim\left\{\frac{1.2.3\ldots\ldots n}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n)}n^{\mu}\right\}$$

Um in Zähler und Nenner des rechts stehenden Bruches gleich viel Factoren zu haben, zerlegen wir noch wie folgt

$$\frac{n^{\mu}}{\mu+n} = \frac{n}{\mu+n}\cdot n^{\mu-1}$$

und bemerken, dass der Bruch $n:(\mu+n)$ gegen die Einheit convergirt; es ist dann

$$5)\quad \Gamma(\mu) = Lim\left\{\frac{1}{\mu}\cdot\frac{2}{\mu+1}\cdot\frac{3}{\mu+2}\cdots\frac{n}{\mu+n-1}n^{\mu-1}\right\},$$

wofür auch das unendliche Product

$$6)\quad \Gamma(\mu) = \frac{1^\mu}{\mu}\cdot\frac{2^\mu}{1^{\mu-1}(\mu+1)}\cdot\frac{3^\mu}{2^{\mu-1}(\mu+2)}\cdot\frac{4^\mu}{3^{\mu-1}(\mu+3)}\cdots$$

gesetzt werden kann *).

Entwickelt man nach einer der Formeln 4), 5) oder 6) die beiden Functionen $\Gamma(\lambda)$ und $\Gamma(\lambda+1)$, so gelangt man zu der Relation

$$7)\qquad \Gamma(\lambda+1) = \lambda\,\Gamma(\lambda),$$

die auch aus Nro. 1) durch theilweise Integration hergeleitet werden kann. Nach dieser Relation ist weiter

$$\Gamma(\lambda+2) = (\lambda+1)\,\Gamma(\lambda+1) = (\lambda+1)\,\lambda\,\Gamma(\lambda)$$

und überhaupt für jedes ganze positive q

$$8)\qquad \Gamma(q+\lambda) = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+q-1)\,.\,\Gamma(\lambda).$$

Diese Gleichung dient u. A., um Gammafunctionen unecht gebrochener Argumente auf Gammafunctionen echt gebrochener Argumente zurückzuführen. Ist nämlich μ keine ganze Zahl, so kann man sie in eine ganze Zahl q und in einen echt gebrochenen Rest λ zerlegen; die Formel 8) zeigt dann, wie $\Gamma(\mu) = \Gamma(q+\lambda)$ aus $\Gamma(\lambda)$ herzuleiten ist. Zugleich erhellt, dass eine Tafel der numerischen Werthe von Γ nur das Intervall $\lambda = 0$ bis $\lambda = 1$ zu umfassen braucht.

Berechnet man nach Formel 5) die drei Functionen $\Gamma(\varkappa)$, $\Gamma(\varkappa+\lambda)$ und $\Gamma(\varkappa-\lambda)$, wobei $\varkappa > \lambda > 0$ sein muss, so findet man leicht

$$\frac{[\Gamma(\varkappa)]^2}{\Gamma(\varkappa+\lambda)\,\Gamma(\varkappa-\lambda)} = \left[1-\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}\right]\left[1-\frac{\lambda^2}{(\varkappa+1)^2}\right]\left[1-\frac{\lambda^2}{(\varkappa+2)^2}\right]\cdots;$$

specieller für $\varkappa = 1$ wird $\Gamma(\varkappa) = 1$, und das unendliche Product rechter Hand erhält dann einen bekannten Werth; es ergiebt sich

$$\frac{1}{\Gamma(1+\lambda)\,\Gamma(1-\lambda)} = \frac{\sin\lambda\pi}{\lambda\pi}$$

---

*) Die obigen Productenformeln sind von Gauss in der vorhin erwähnten Abhandlung auf anderem Wege entwickelt worden. Man kann sie auch als Ausgangspunkt d. h. als Definition von $\Gamma(\mu)$ benutzen, und es ist dies in dem Falle von Vortheil, wo man negative oder complexe μ zulassen will, weil das in Nro. 1) angegebene Integral für solche μ nicht immer einen bestimmten Werth hat. Wegen des überaus seltenen Vorkommens dieser Fälle haben wir den historischen Gedankengang beibehalten, und verweisen dafür auf die Abhandlung von H. Hankel in der Zeitschrift für Mathematik und Physik. Bd. IX, S. 1.

oder umgekehrt

$$\Gamma(1+\lambda)\,\Gamma(1-\lambda) = \frac{\lambda\pi}{\sin\lambda\pi}, \qquad 0 < \lambda < 1.$$

Wegen $\Gamma(1+\lambda) = \lambda\,\Gamma(\lambda)$ kann man dafür schreiben

9) $$\Gamma(\lambda)\,\Gamma(1-\lambda) = \frac{\pi}{\sin\lambda\pi}, \qquad 0 < \lambda < 1,$$

und es ist hieraus ersichtlich, wie die Gammafunction eines zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegenden Argumentes auf die Gammafunction eines zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ enthaltenen Argumentes zurückgeführt werden kann. Der specielle Fall $\lambda = \frac{1}{2}$ giebt

10) $$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi},$$

woraus nach Nro. 8) folgt

11) $$\Gamma(q+\tfrac{1}{2}) = \frac{1.3.5\ldots(2q-1)}{2^q}\sqrt{\pi}.$$

Zufolge der ursprünglichen Bedeutung von $\Gamma(\mu)$ ist also

$$\int_0^\infty x^{q-\frac{1}{2}} e^{-x}\,dx = \frac{1.3.5\ldots(2q-1)}{2^q}\sqrt{\pi},$$

welche Formel durch die Substitution $x = z^2$ in die auf Seite 153 entwickelte Formel übergeht.

II. Bestimmte Integrale für $l\,\Gamma(\mu)$.

Da $\Gamma(\mu)$ in Form eines Productes dargestellt werden kann, so liegt es nahe, den Logarithmus von $\Gamma(\mu)$ genauer zu untersuchen. Zu diesem Zwecke schicken wir ein paar Bemerkungen über gewisse bestimmte Integrale voraus.

Wie leicht zu sehen ist, bleibt die Function

$$\varphi(z) = \frac{1}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z}$$

endlich und stetig für alle positiven z, und zwar wächst sie von $\varphi(0) = \frac{1}{2}$ bis $\varphi(\infty) = 1$; hieraus folgt, dass der Werth des Integrales

$$\int_0^\infty \varphi(z)\,e^{-z}\,dz$$

zwischen

$$\int_0^\infty \tfrac{1}{2} e^{-z}\, dz = \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad \int_0^\infty e^{-z}\, dz = 1$$

enthalten, also von endlicher Grösse ist. Er mag künftig mit C bezeichnet werden. Statt der Gleichung

$$12)\qquad \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z}\right) e^{-z}\, dz = C$$

schreiben wir die mit ihr identische

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+z} - e^{-z}\right)\frac{dz}{z} + \int_0^\infty \left(\frac{e^{-z}}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z} + \frac{1}{1+z}\right) dz = C$$

und entwickeln hier das zweite Integral. Bei unbestimmter Integration ist

$$\int \left(\frac{e^{-z}}{1-e^{-z}} - \frac{1}{z} + \frac{1}{1+z}\right) dz = l\left\{\frac{(1-e^{-z})(1+z)}{z}\right\},$$

und da dieser Ausdruck sowohl für $z = \infty$ als für $z = 0$ verschwindet, so reducirt sich die vorige Gleichung auf

$$13)\qquad \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+z} - e^{-z}\right)\frac{dz}{z} = C.$$

Hierin setzen wir das eine Mal $z = ax$, nachher $z = bx$, wo a und b positive nicht verschwindende Constanten bedeuten, und subtrahiren beide so entstehende Gleichungen von einander; wir erhalten dann die neue Gleichung

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+ax} - \frac{1}{1+bx}\right)\frac{dx}{x} - \int_0^\infty (e^{-ax} - e^{-bx})\frac{dx}{x} = 0,$$

worin sich der Werth des ersten Integrales leicht auf gewöhnlichem Wege finden lässt. Wir gelangen damit zu der Formel

$$14)\qquad \int_0^\infty (e^{-ax} - e^{-bx})\frac{dx}{x} = l\left(\frac{b}{a}\right), \qquad a > 0,\ \ b > 0.$$

Hiervon kann man Gebrauch machen, um alle Glieder der endlichen Reihe

$$S = l\left(\frac{1}{\mu}\right) + l\left(\frac{2}{\mu+1}\right) + l\left(\frac{3}{\mu+2}\right) + \cdots + l\left(\frac{n}{\mu+n-1}\right) + (\mu-1)\,l\,n$$

in bestimmte Integrale zu verwandeln; man erhält einen Ausdruck von der Form

$$S = \int_0^\infty U \frac{dx}{x},$$

und zwar ist

$$U = (e^{-\mu x} - e^{-x}) + (e^{-(\mu+1)x} - e^{-2x}) + \cdots$$
$$\cdots + (e^{-(\mu+n-1)x} - e^{-nx}) + (\mu - 1)(e^{-x} - e^{-nx})$$

oder nach der Summenformel für geometrische Progressionen

$$U = (e^{-\mu x} - e^{-x}) \frac{1 - e^{-nx}}{1 - e^{-x}} + (\mu - 1)(e^{-x} - e^{-nx}).$$

Zufolge des ursprünglichen und des nachherigen Werthes von S hat man nun folgende Gleichung

15) $$l\left(\frac{1\,.\,2\,.\,3 \ldots\ldots n}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1)} n^{\mu-1}\right)$$
$$= \int_0^\infty \left\{\frac{e^{-\mu x} - e^{-x}}{1 - e^{-x}} + (\mu - 1)e^{-x}\right\} \frac{dx}{x}$$
$$+ \int_0^\infty \left\{\frac{e^{-x} - e^{-\mu x}}{1 - e^{-x}} - (\mu - 1)\right\} \frac{1}{x} e^{-nx}\, dx.$$

Für das letzte Integral ist die Bemerkung wesentlich, dass die Function

$$\left\{\frac{e^{-x} - e^{-\mu x}}{1 - e^{-x}} - (\mu - 1)\right\} \frac{1}{x} = \frac{1 - e^{-\mu x} - \mu(1 - e^{-x})}{x(1 - e^{-x})}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}(\mu - \mu^2) - \frac{1}{6}(\mu - \mu^3)x + \cdots}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 - \cdots}$$

für alle positiven x endlich und stetig bleibt, dass mithin ihr Minimum A und ihr Maximum B endliche Grössen sind. Demzufolge liegt der Werth des letzten Integrales in Nro. 15) zwischen

$$\int_0^\infty A e^{-nx}\, dx = \frac{A}{n} \quad \text{und} \quad \int_0^\infty B e^{-nx}\, dx = \frac{B}{n},$$

er convergirt daher bei unendlich wachsenden n gegen die Null. Gehen wir jetzt in Nro. 15) zur Grenze für $n = \infty$ über, so erhalten wir die Gleichung

16) $$l\Gamma(\mu) = \int_0^\infty \left\{\frac{e^{-\mu x} - e^{-x}}{1 - e^{-x}} + (\mu - 1)e^{-x}\right\} \frac{dx}{x},$$

welche späteren Untersuchungen als Basis dienen wird.

In dem speciellen Falle $\mu = \frac{1}{2}$ wird die vorige Gleichung zu

$$l(\sqrt{\pi}) = \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-\frac{1}{2}x} - e^{-x}}{1 - e^{-x}} - \tfrac{1}{2} e^{-x} \right\} \frac{dx}{x}$$

oder für $x = 2y$

17) $$\tfrac{1}{2} l\pi = \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{e^y + 1} - \tfrac{1}{2} e^{-2y} \right\} \frac{dy}{y}.$$

Hieraus lässt sich noch eine andere Integralformel herleiten, welche wieder zur Umgestaltung von Nro. 16) dienen kann. Die Function

$$\psi(z) = \left\{ \frac{1}{z} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1 - e^{-z}} \right\} \frac{1}{z},$$

die sich, falls $z^2 < (2\pi)^2$ ist, auch unter der Form

$$\psi(z) = -\tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{720} z^2 - \tfrac{1}{30240} z^4 + \cdots$$

darstellen lässt, bleibt nämlich für alle positiven z endlich und stetig, mithin besitzt das Integral

$$\int_0^\infty \psi(z) e^{-z} dz$$

einen endlichen Werth, den wir vorläufig G nennen wollen. Zu der so gebildeten Gleichung

18) $$\int_0^\infty \left\{ \frac{1}{z} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1 - e^{-z}} \right\} \frac{1}{z} e^{-z} dz = G$$

addiren wir die folgende

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{1 - e^{-z}}{z} - e^{-z} \right\} \frac{dz}{z} = 1,$$

welche aus der unbestimmten Integralformel

$$\int \left\{ \frac{1 - e^{-z}}{z} - e^{-z} \right\} \frac{dz}{z} = - \frac{1 - e^{-z}}{z}$$

unmittelbar hervorgeht, und erhalten

19) $$\int_0^\infty \left\{ \frac{1}{z} - \tfrac{1}{2} e^{-z} - \frac{e^{-z}}{1 - e^{-z}} \right\} \frac{dz}{z} = G + 1 = H,$$

wo H zur Abkürzung dient. Statt z substituiren wir das eine Mal ax, das andere Mal bx, multipliciren die erste so entstandene Gleichung mit a, die zweite mit b, und ziehen das erste Product vom zweiten ab; unter Voraussetzung positiver von Null verschiedener a und b giebt dies

$$20)\quad \int_0^\infty \left\{\frac{a}{e^{ax}-1} - \frac{b}{e^{bx}-1} + \tfrac{1}{2}(ae^{-ax}-be^{-bx})\right\}\frac{dx}{x} = (b-a)H,$$
$$a > 0, \quad b > 0.$$

Die Constante H bestimmt sich durch die Specialisirung $a = 1$, $b = 2$, für welche man erhält

$$H = \int_0^\infty \left\{\frac{1}{e^x-1} - \frac{2}{e^{2x}-1} + \tfrac{1}{2}e^{-x} - e^{-2x}\right\}\frac{dx}{x}$$
$$= \int_0^\infty \left\{\frac{1}{e^x+1} - \tfrac{1}{2}e^{-2x}\right\}\frac{dx}{x} + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty (e^{-x}-e^{-2x})\frac{dx}{x}$$

d. i. nach Nro. 17) und 14)

$$H = \tfrac{1}{2}l\pi + \tfrac{1}{2}l2 = \tfrac{1}{2}l(2\pi).$$

Die Formeln 18), 19) und 20) werden jetzt

$$21)\quad \int_0^\infty \left\{\frac{1}{z} + \tfrac{1}{2} - \frac{1}{1-e^{-z}}\right\}\frac{1}{z}e^{-z}\,dz = \tfrac{1}{2}l(2\pi) - 1,$$

$$22)\quad \int_0^\infty \left\{\frac{1}{z} - \tfrac{1}{2}e^{-z} - \frac{1}{e^z-1}\right\}\frac{dz}{z} = \tfrac{1}{2}l(2\pi),$$

$$23)\quad \int_0^\infty \left\{\frac{a}{e^{ax}-1} - \frac{b}{e^{bx}-1} + \tfrac{1}{2}(ae^{-ax}-be^{-bx})\right\}\frac{dx}{x} = \frac{b-a}{2}l(2\pi),$$
$$a > 0, \quad b > 0.$$

Um die Gleichung 16) mittelst dieser Formeln umzugestalten, schreiben wir statt jener Gleichung die mit ihr identische

$$l\Gamma(\mu) = \int_0^\infty \left\{\frac{1}{x} - \tfrac{1}{2}e^{-x} - \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right\}\frac{dx}{x}$$
$$+ (\mu - \tfrac{1}{2})\int_0^\infty (e^{-x} - e^{-\mu x})\frac{dx}{x}$$
$$+ \int_0^\infty \left\{\mu e^{-\mu x} - \frac{1-e^{-\mu x}}{x}\right\}\frac{dx}{x}$$
$$+ \int_0^\infty \left\{\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right\}\frac{1}{x}e^{-\mu x}\,dx.$$

Nach Nro. 22) ist der Werth des ersten Integrales $= \tfrac{1}{2}l(2\pi)$; der

Werth des zweiten folgt aus Nro. 14) und ist $= l\mu$; das dritte Integral wird mittelst der Formel

$$\int\left\{\mu e^{-\mu x} - \frac{1-e^{-\mu x}}{x}\right\}\frac{dx}{x} = \frac{1-e^{-\mu x}}{x}$$

gefunden und hat den Werth $-\mu$; demnach ist

24) $$l\Gamma(\mu) = \tfrac{1}{2}l(2\pi) + (\mu-\tfrac{1}{2})l\mu - \mu$$
$$+ \int_0^\infty\left\{\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right\}\frac{1}{x}e^{-\mu x}\,dx.$$

Bevor wir die Formeln 16) und 24) weiter entwickeln, schalten wir erst einige Bemerkungen ein, welche die Differentialquotienten

$$\frac{d\Gamma(\mu)}{d\mu} = \Gamma'(\mu) \quad\text{und}\quad \frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu} = \frac{\Gamma'(\mu)}{\Gamma(\mu)}$$

betreffen. Aus Nro. 16) folgt

$$\frac{l\Gamma(\mu+\delta) - l\Gamma(\mu)}{\delta} = \int_0^\infty\left\{e^{-x} - \frac{xe^{-\mu x}}{1-e^{-x}}\cdot\frac{1-e^{-\delta x}}{\delta x}\right\}\frac{dx}{x},$$

und wenn hier die bekannte Ungleichung

$$1 > \frac{1-e^{-\delta x}}{\delta x} > 1 - \tfrac{1}{2}\delta x$$

benutzt wird, so ergiebt sich für den vorigen Differentialquotienten die Ungleichung

$$\int_0^\infty\left\{e^{-x} - \frac{xe^{-\mu x}}{1-e^{-x}}\right\}\frac{dx}{x} < \frac{l\Gamma(\mu+\delta) - l\Gamma(\mu)}{\delta},$$

$$\frac{l\Gamma(\mu+\delta) - l\Gamma(\mu)}{\delta} < \int_0^\infty\left\{e^{-x} - \frac{xe^{-\mu x}}{1-e^{-x}}\right\}\frac{dx}{x} + \tfrac{1}{2}\delta\int_0^\infty\frac{xe^{-\mu x}}{1-e^{-x}}dx.$$

Im letzten Integrale ist $x:(1-e^{-x})$ immer positiv und $< 1 + x$, mithin besitzt das Integral einen endlichen Werth, der einen Bruchtheil von $\dfrac{1}{\mu} + \dfrac{1}{\mu^2}$ ausmacht. Das Product aus δ und dem Integrale convergirt demnach gegen die Null, wenn δ unendlich abnimmt, und dann geht die obige Ungleichung in die folgende Gleichung über

25) $$\frac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu} = \int_0^\infty\left\{e^{-x} - \frac{xe^{-\mu x}}{1-e^{-x}}\right\}\frac{dx}{x}.$$

Ersetzt man sie durch die mit ihr identische

$$\frac{d\,l\,\Gamma(\mu)}{d\mu} = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-\mu x}}{1 - e^{-x}}\,dx - \int_0^\infty \left\{\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x}\right\} e^{-x}\,dx,$$

so hat man auch nach Nro. 12)

$$\frac{d\,l\,\Gamma(\mu)}{d\mu} = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-\mu x}}{1 - e^{-x}}\,dx - C,$$

oder, wenn $e^{-x} = t$ substituirt wird,

26) $$\frac{d\,l\,\Gamma(\mu)}{d\mu} = \int_0^1 \frac{1 - t^{\mu - 1}}{1 - t}\,dt - C,$$

woraus noch folgt

27) $$\Gamma'(\mu) = \Gamma(\mu)\left\{\int_0^1 \frac{1 - t^{\mu-1}}{1 - t}\,dt - C\right\}$$

Diese Formel zeigt, dass $-C$ der specielle Werth ist, den $\Gamma'(\mu)$ für $\mu = 1$ annimmt, und es ist daher

28) $$-C = \Gamma'(1) = Lim \frac{l\,\Gamma(1 + \delta)}{\delta},$$

wo δ wie vorhin eine unendlich abnehmende Grösse bezeichnet.

III. Das Theorem von Gauss.

Setzt man in Formel 16) der Reihe nach

$$\mu = \lambda,\ \ \lambda + \frac{1}{k},\ \ \lambda + \frac{2}{k}, \dots\ \lambda + \frac{k-1}{k}$$

wo k eine ganze positive Zahl bezeichnet, so erhält man durch Addition aller so entstehenden Gleichungen

$$l\left\{\Gamma(\lambda)\,\Gamma\!\left(\lambda + \frac{1}{k}\right)\Gamma\!\left(\lambda + \frac{2}{k}\right)\cdots\Gamma\!\left(\lambda + \frac{k-1}{k}\right)\right\}$$

$$= \int_0^\infty \left\{\frac{e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\frac{x}{k}}} - \frac{k e^{-x}}{1 - e^{-x}} + \left(k\lambda - \frac{k+1}{2}\right)e^{-x}\right\}\frac{dx}{x}$$

oder, wenn man kx an die Stelle von x treten lässt,

$$l\left\{\Gamma(\lambda)\,\Gamma\!\left(\lambda + \frac{1}{k}\right)\Gamma\!\left(\lambda + \frac{2}{k}\right)\cdots\Gamma\!\left(\lambda + \frac{k-1}{k}\right)\right\}$$

$$= \int_0^\infty \left\{\frac{e^{-k\lambda x}}{1 - e^{-x}} - \frac{k e^{-kx}}{1 - e^{-kx}} + \left(k\lambda - \frac{k+1}{2}\right)e^{-kx}\right\}\frac{dx}{x}.$$

Ferner ist nach Nro. 16)

$$l\Gamma(k\lambda)=\int_0^\infty\left\{\frac{e^{-k\lambda x}-e^{-x}}{1-e^{-x}}+(k\lambda-1)e^{-x}\right\}\frac{dx}{x};$$

diese Gleichung ziehen wir von der vorhergehenden ab und geben der Differenz folgende Form

$$l\left\{\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{k}\right)\cdots\Gamma\left(\lambda+\frac{k-1}{k}\right)\right\}-l\Gamma(k\lambda)$$

$$=\int_0^\infty\left\{\frac{1}{e^x-1}-\frac{k}{e^{kx}-1}+\tfrac{1}{2}(e^{-x}-ke^{-kx})\right\}\frac{dx}{x}$$

$$+\left(\tfrac{1}{2}-k\lambda\right)\int_0^\infty(e^{-x}-e^{-kx})\frac{dx}{x}.$$

Nach Formel 23) hat das erste Integral den Werth $\frac{1}{2}(k-1)l(2\pi)$; das zweite Integral ist $=lk$, wie man aus Formel 14) ersieht, und somit ergiebt sich die Gleichung

$$l\left\{\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{k}\right)\cdots\Gamma\left(\lambda+\frac{k-1}{k}\right)\right\}-l\Gamma(k\lambda)$$

$$=\tfrac{1}{2}(k-1)l(2\pi)+\left(\tfrac{1}{2}-k\lambda\right)lk.$$

Geht man von den Logarithmen auf die Logarithmanden zurück, so erhält man das bemerkenswerthe Theorem*)

$$29)\qquad \Gamma(\lambda)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{2}{k}\right)\cdots\Gamma\left(\lambda+\frac{k-1}{k}\right)$$

$$=(2\pi)^{\frac{1}{2}(k-1)}k^{\frac{1}{2}-k\lambda}\,\Gamma(k\lambda).$$

In dem speciellen Falle $\lambda=\dfrac{1}{k}$ wird linker Hand der letzte Factor $=1$ und es bleibt die einfachere Gleichung

---

*) Legendre beweist diesen Satz mit Hülfe unendlicher Reihen, die jedenfalls der Sache fremd sind; s. Traité des fonctions elliptiques, Tome II, p. 439, Nro. 93. Der von Cauchy in den Exercices de Mathématiques, livraison 15, pag. 91 gegebene Beweis gründet sich auf die im Abschnitte IV. vorkommende Formel 37). Lejeune-Dirichlet benutzt in Crelle's Journal, Bd. 15, S. 258 eine Formel für $\dfrac{dl\Gamma(\mu)}{d\mu}$, um erst den nach λ genommenen Differentialquotienten der Gleichung 29) und dann letztere selber zu entwickeln, wobei jedoch vorausgesetzt werden muss, dass man die speciellere Formel 30) schon kenne. Der obige neue Beweis dürfte wohl am einfachsten sein.

30) $$\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(\frac{2}{k}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{k-1}{k}\right)=\sqrt{\frac{(2\pi)^{k-1}}{k}},$$

die sich auch aus der unter Nro. 9) bewiesenen Relation herleiten lässt.

IV. Unendliche Reihen für $l\Gamma(\mu)$.

Um zu einer Reihenentwickelung für $l\Gamma(\mu)$ oder $l\Gamma(1+\mu)$ zu gelangen, kann man verschiedene Wege einschlagen, je nachdem man von der einen oder anderen der Gleichungen 5), 16) und 24) ausgeht.

a. Lässt man in Nro. 5) $\mu+1$ an die Stelle von μ treten und bezeichnet für den Augenblick mit ϱ eine Grösse, welche bei unendlich wachsenden n gegen die Null convergirt, so ist

$$\Gamma(1+\mu)+\varrho=\frac{1}{1+\mu}\cdot\frac{2}{2+\mu}\cdots\cdot\frac{n}{n+\mu}n^{\mu}$$

mithin

$$l\{\Gamma(1+\mu)+\varrho\}=\mu\, ln-l\left(1+\frac{\mu}{1}\right)-l\left(1+\frac{\mu}{2}\right)-\cdots-l\left(1+\frac{\mu}{n}\right).$$

Unter der Voraussetzung, dass μ ein positiver oder negativer echter Bruch ist, können rechter Hand alle negativ genommenen Logarithmen in unendliche Reihen verwandelt werden; dies giebt bei Anordnung nach Potenzen von μ

$$\begin{aligned}l\{\Gamma(1+\mu)+\varrho\}=&-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-ln\right)\mu\\&+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\mu^2\\&-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}\right)\mu^3\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Lassen wir jetzt n ins Unendliche wachsen, so convergirt ϱ gegen die Null, ferner wird

$$Lim\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-ln\right)=c,$$

wo $c=0{,}5772\,1566\,..$ die schon auf Seite 440 des ersten Theils bestimmte Constante ist, ferner gehen die Coefficienten von μ^2, μ^3, etc. in convergirende unendliche Reihen über, für deren Summen wir die Bezeichnung

$$S_p=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots,\qquad p>1$$

in Anwendung bringen wollen. Nach diesen Erörterungen ist

$$31)\quad l\Gamma(1+\mu) = -c\mu + \tfrac{1}{2}S_2\mu^2 - \tfrac{1}{3}S_3\mu^3 + \tfrac{1}{4}S_4\mu^4 - \cdots\cdot \\ -1 < \mu < +1.$$

Dividirt man beiderseits mit μ und lässt dann μ gegen die Null convergiren, so ergiebt sich nach Formel 28) die Gleichung $C = c$; die früher vorläufig durch C bezeichnete Constante ist demnach identisch mit der sogenannten Constante des Integrallogarithmus (vergl. Seite 199).

Aus Nro. 31) folgt weiter

$$l\Gamma(1-\mu) = c\mu + \tfrac{1}{2}S_2\mu^2 + \tfrac{1}{3}S_3\mu^3 + \tfrac{1}{4}S_4\mu^4 + \cdots\cdot \\ -1 < \mu < +1;$$

diese Gleichung subtrahiren wir von der vorhergehenden und berücksichtigen hierbei die Relation

$$\frac{\Gamma(1+\mu)}{\Gamma(1-\mu)} = \frac{[\Gamma(1+\mu)]^2}{\mu\,\Gamma(\mu)\,\Gamma(1-\mu)} = \frac{[\Gamma(1+\mu)]^2 \sin\mu\pi}{\mu\pi},$$

wodurch entsteht

$$l\Gamma(1+\mu) = \tfrac{1}{2}l\left(\frac{\mu\pi}{\sin\mu\pi}\right) - (c\mu + \tfrac{1}{3}S_3\mu^3 + \tfrac{1}{5}S_5\mu^5 + \cdots).$$

Um die Convergenz der Reihe zu erhöhen, addiren wir zur vorigen Gleichung die folgende

$$0 = -\tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right) + \tfrac{1}{1}\mu + \tfrac{1}{3}\mu^3 + \tfrac{1}{5}\mu^5 + \cdots\cdot$$

und erhalten ein Resultat von der Form

$$32)\quad l\Gamma(1+\mu) = \tfrac{1}{2}l\left(\frac{\mu\pi}{\sin\mu\pi}\right) - \tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right) \\ + C_1\mu - C_3\mu^3 - C_5\mu^5 - \cdots,\quad 0 < \mu < 1,$$

worin die mit C_1, C_3, C_5, etc. bezeichneten Coefficienten folgende Werthe haben

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 - C = 0{,}42278\,43351, \\ C_3 &= \tfrac{1}{3}(S_3 - 1) = 0{,}06735\,30105, \\ C_5 &= \tfrac{1}{5}(S_5 - 1) = 0{,}00738\,55510, \\ C_7 &= \tfrac{1}{7}(S_7 - 1) = 0{,}00119\,27539, \\ C_9 &= \tfrac{1}{9}(S_9 - 1) = 0{,}00022\,31548, \\ C_{11} &= \tfrac{1}{11}(S_{11} - 1) = 0{,}00004\,49262, \end{aligned}$$

u. s. w.

Durch beiderseitige Subtraction von $l\mu$ findet man aus Nro. 32) auch

$l\Gamma(\mu)$. Uebrigens kann man wegen Nro. 9) immer $\mu < \frac{1}{2}$ voraussetzen, und dann convergirt die obige Reihe sehr rasch*).

b. Nimmt man die Differenz der beiden Gleichungen

$$l\Gamma(\mu) = \int_0^\infty \left\{\frac{e^{-\mu x} - e^{-x}}{1 - e^{-x}} + (\mu - 1)e^{-x}\right\}\frac{dx}{x},$$

$$l\Gamma(1-\mu) = \int_0^\infty \left\{\frac{e^{-(1-\mu)x} - e^{-x}}{1 - e^{-x}} - \mu e^{-x}\right\}\frac{dx}{x}$$

und beachtet hierbei die Relation

$$l\Gamma(1-\mu) = l\left\{\frac{\pi}{\Gamma(\mu)\sin\mu\pi}\right\},$$

so erhält man die Formel

33) $$2l\Gamma(\mu) - l\pi + l\sin\mu\pi$$
$$= \int_0^\infty \left\{\frac{e^{(\frac{1}{2}-\mu)x} - e^{-(\frac{1}{2}-\mu)x}}{e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}} - (1-2\mu)e^{-x}\right\}\frac{dx}{x},$$

die sich auf folgende Art weiter entwickeln lässt. Für beliebige α und ein zwischen $-\pi$ und $+\pi$ enthaltenes ω gelten bekanntlich die Gleichungen

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{e^{\alpha\omega} - e^{-\alpha\omega}}{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}} = \frac{1\sin\omega}{\alpha^2 + 1^2} - \frac{2\sin 2\omega}{\alpha^2 + 2^2} + \frac{3\sin 3\omega}{\alpha^2 + 3^2} - \cdots,$$

$$\frac{\omega}{2} = \frac{\sin\omega}{1} - \frac{\sin 2\omega}{2} + \frac{\sin 3\omega}{3} - \cdots,$$

für $\alpha = \frac{x}{2\pi}$ und $\omega = (1-2\mu)\pi$ wird hieraus

$$\frac{e^{(\frac{1}{2}-\mu)x} - e^{-(\frac{1}{2}-\mu)x}}{e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}}$$
$$= 4\left\{\frac{2\pi\sin 2\mu\pi}{x^2 + (2\pi)^2} + \frac{4\pi\sin 4\mu\pi}{x^2 + (4\pi)^2} + \frac{6\pi\sin 6\mu\pi}{x^2 + (6\pi)^2} + \cdots\right\},$$

$$1 - 2\mu = 4\left\{\frac{\sin 2\mu\pi}{2\pi} + \frac{\sin 4\mu\pi}{4\pi} + \frac{\sin 6\mu\pi}{6\pi} + \cdots\right\},$$

und diese Gleichungen, welche für beliebige x und echt gebrochene positive μ gelten, können nun zur Entwickelung des Integrales in

---

*) Dieselbe ist auf ganz anderem Wege von Legendre entwickelt worden im Traité des fonctions elliptiques, Tome II, Chap. X, Nro. 90.

Nro. 33) benutzt werden. Man erhält zunächst ein Resultat von der Form

$$34)\qquad \begin{aligned} &2l\Gamma(\mu) - l\pi + l\sin\mu\pi \\ &= 4(b_2\sin 2\mu\pi + b_4\sin 4\mu\pi + b_6\sin 6\mu\pi + \cdots), \end{aligned}$$

worin die Coefficienten b_2, b_4, etc. durch die Gleichung

$$b_{2n} = \int_0^\infty \left\{\frac{2n\pi}{x^2 + (2n\pi)^2} - \frac{e^{-x}}{2n\pi}\right\}\frac{dx}{x}$$

bestimmt sind. Der Werth dieses Integrales ergiebt sich mittelst der Zerlegung

$$b_{2n} = \frac{1}{2n\pi}\left\{\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+x} - \frac{x}{4n^2\pi^2 + x^2}\right)dx + \int_0^\infty\left(\frac{1}{1+x} - e^{-x}\right)\frac{dx}{x}\right\},$$

und zwar ist derselbe zufolge der Formel 13)

$$b_{2n} = \frac{1}{2n\pi}\{l(2n\pi) + C\}.$$

Hiernach erhält man aus Nro. 34) durch Division mit 2

$$\begin{aligned} &l\Gamma(\mu) - \tfrac{1}{2}l\pi + \tfrac{1}{2}l\sin\mu\pi \\ &= \frac{l(2\pi) + C}{\pi}\sin 2\mu\pi + \frac{l(4\pi) + C}{2\pi}\sin 4\mu\pi \\ &\qquad + \frac{l(6\pi) + C}{3\pi}\sin 6\mu\pi + \cdots, \end{aligned}$$

und wenn man noch alle diejenigen Glieder zusammenfasst, welche den gemeinschaftlichen Factor $l\pi + C$ besitzen, so wird schliesslich

$$35)\qquad \begin{aligned} l\Gamma(\mu) &= (1-\mu)l\pi + C(\tfrac{1}{2} - \mu) - \tfrac{1}{2}l\sin\mu\pi \\ &+ \frac{1}{\pi}\left\{\frac{l2}{1}\sin 2\mu\pi + \frac{l4}{2}\sin 4\mu\pi + \frac{l6}{3}\sin 6\mu\pi + \cdots\right\}, \end{aligned}$$

wobei μ zwischen 0 und 1 enthalten sein muss *).

c. Behufs einer weiteren Entwickelung der Formel 24) schicken wir folgende Bemerkung voraus. Die Gleichung 6) auf Seite 280 des ersten Theiles lässt sich schreiben

$$\begin{aligned} &\frac{2}{1 - e^{-2y}} - 1 - \frac{1}{y} \\ &= \frac{2y}{\pi^2 + y^2} + \frac{2y}{(2\pi)^2 + y^2} + \frac{2y}{(3\pi)^2 + y^2} + \cdots. \end{aligned}$$

---

*) Zu derselben Formel ist Kummer auf anderem Wege gelangt in Crelle's Journal, Bd. 35, S. 1.

und giebt, wenn $y = \frac{1}{2}x$ gesetzt und beiderseits mit 2 dividirt wird,

$$\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{2x}{(2\pi)^2 + x^2} + \frac{2x}{(4\pi)^2 + x^2} + \frac{2x}{(6\pi)^2 + x^2} + \cdots$$

Mit Hülfe der identischen Gleichung

$$\frac{x}{a^2+x^2} = \frac{x}{a^2} - \frac{x^3}{a^4} + \frac{x^5}{a^6} - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{a^{2k}} + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{a^{2k}(a^2+x^2)}$$

kann man alle auf der rechten Seite der vorigen Gleichung stehenden Brüche in endliche Potenzenreihen umsetzen, und zwar erhält man

$$\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2S_2}{(2\pi)^2}x - \frac{2S_4}{(2\pi)^4}x^3 + \frac{2S_6}{(2\pi)^6}x^5 - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{k-1}\frac{2S_{2k}}{(2\pi)^{2k}}x^{2k-1} + (-1)^k \frac{2T_{2k}}{(2\pi)^{2k}}x^{2k+1};$$

darin haben $S_2, S_4, \ldots$ dieselbe Bedeutung wie in a, und T_{2k} ist zur Abkürzung benutzt, nämlich

$$T_{2k} = \frac{1}{1^{2k}}\cdot\frac{1}{(2\pi)^2+x^2} + \frac{1}{2^{2k}}\cdot\frac{1}{(4\pi)^2+x^2} + \frac{1}{3^{2k}}\cdot\frac{1}{(6\pi)^2+x^2} + \cdots$$

Man bemerkt augenblicklich, dass T_{2k} positiv und kleiner ist als

$$\frac{1}{1^{2k}}\cdot\frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{2^{2k}}\cdot\frac{1}{(4\pi)^2} + \frac{1}{3^{2k}}\cdot\frac{1}{(6\pi)^2} + \cdots = \frac{S_{2k+2}}{(2\pi)^2},$$

man kann folglich

$$T_{2k} = \frac{\varepsilon S_{2k+2}}{(2\pi)^2}$$

setzen, wo ε einen positiven echten Bruch bezeichnet. Drückt man noch S_2, S_4 etc. durch die Bernoulli'schen Zahlen aus (Thl. I, S. 244, Formel 28), so gelangt man zu folgender, für jedes x gültigen Gleichung

$$\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{B_1 x}{1.2} - \frac{B_3 x^3}{1.2.3.4} + \frac{B_5 x^5}{1.2\ldots6} - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{k-1}\frac{B_{2k-1}x^{2k-1}}{1.2\ldots(2k)} + (-1)^k \frac{\varepsilon B_{2k+1}x^{2k+1}}{1.2\ldots(2k+2)}.$$

Diese lässt sich nun zur Transformation von Nro. 24) benutzen, und zwar ergiebt sich zunächst

$$l\Gamma(\mu) = \tfrac{1}{2}l(2\pi) + (\mu - \tfrac{1}{2})l\mu - \mu$$

$$+ \frac{B_1}{1.2}\int_0^\infty e^{-\mu x}\,dx - \frac{B_3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\int_0^\infty x^2 e^{-\mu x}\,dx + \cdots$$

$$\cdot\cdot + (-1)^{k-1}\frac{B_{2k-1}}{1\,..\,(2k)}\int_0^\infty x^{2k-2}e^{-\mu x}\,dx$$

$$+ (-1)^k \frac{B_{2k+1}}{1\,..\,(2k+2)}\int_0^\infty \varepsilon x^{2k} e^{-\mu x}\,dx.$$

Für die k ersten Integrale liefert die Formel

$$\int_0^\infty x^p e^{-\mu x}\,dx = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,...\,p}{\mu^{p+1}}$$

alle nöthigen Werthe; das letzte Integral ist, wegen $0 < \varepsilon < 1$, zwischen Null und

$$\int_0^\infty x^{2k} e^{-\mu x}\,dx$$

enthalten, und kann folglich einem Bruchtheile dieses Integrales gleichgesetzt werden. Nach diesen Bemerkungen hat man, unter ϱ einen nicht näher bezeichneten positiven echten Bruch verstanden,

36) $$l\Gamma(\mu) = \tfrac{1}{2}l(2\pi) + (\mu - \tfrac{1}{2})l\mu - \mu$$

$$+ \frac{B_1}{1\,.\,2\,.\,\mu} - \frac{B_3}{3\,.\,4\,.\,\mu^3} + \frac{B_5}{5\,.\,6\,.\,\mu^5} - \cdots$$

$$\cdot\cdot + (-1)^{k-1}\frac{B_{2k-1}}{(2k-1)\,2k\,.\,\mu^{2k-1}} + (-1)^k \frac{\varrho\, B_{2k+1}}{(2k+1)\,(2k+2)\,.\,\mu^{2k+1}},$$

woraus sich durch beiderseitige Addition von $l\mu$ noch eine Formel für $l\Gamma(1+\mu)$ herleiten lässt. Uebrigens darf diese Reihe nicht ins Unendliche fortgesetzt werden, weil dann Divergenz eintreten würde; gleichwohl bietet die obige Formel namentlich bei grossen μ wesentliche Vortheile, denn schreibt man kurz

$$l\Gamma(\mu) = \tfrac{1}{2}l(2\pi) + (\mu - \tfrac{1}{2})l\mu - \mu + s,$$

so leuchtet unmittelbar ein, dass unter jener Voraussetzung s sehr wenig beträgt. Aus der vorstehenden Gleichung folgt noch

$$\Gamma(\mu) = \sqrt{\frac{2\pi}{\mu}}\left(\frac{\mu}{e}\right)^\mu e^s,$$

und da s sehr klein ist, so kann man auch setzen

$$37)\qquad \Gamma(\mu) = \sqrt{\frac{2\pi}{\mu}}\left(\frac{\mu}{e}\right)^{\mu}(1+\delta),$$

wo δ gegen die Null convergirt, wenn μ unendlich wächst. Für ganze positive μ gehen diese Formeln in die schon von Stirling angegebenen über.

d. Wir kehren noch einmal zur Formel 24) zurück, um dieselbe auf andere Weise umzugestalten. Durch Substitution von $1 - e^{-x} = t$ verwandelt sich dieselbe in

$$38)\qquad l\Gamma(\mu) = \tfrac{1}{2}l(2\pi) + (\mu - \tfrac{1}{2})l\mu - \mu$$

$$- \int_0^1 \left\{\frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \frac{1}{l(1-t)}\right\}\frac{(1-t)^{\mu-1}}{l(1-t)}\,dt,$$

und hier richten wir die Aufmerksamkeit auf den Factor, womit $(1-t)^{\mu-1}\,dt$ unter dem Integralzeichen verbunden ist. Aus der leicht zu prüfenden Integralformel

$$\int (\tfrac{1}{2} - v)[1 - (1-t)^v]\,dv$$

$$= \tfrac{1}{2}v(1-v) - (\tfrac{1}{2} - v)\frac{(1-t)^v}{l(1-t)} - \frac{(1-t)^v}{[l(1-t)]^2}$$

folgt nun durch Einführung der Grenzen $v = 1$ und $v = 0$

$$\int_0^1 (\tfrac{1}{2} - v)[1 - (1-t)^v]\,dv$$

$$= \left\{1 - \tfrac{1}{2}t + \frac{t}{l(1-t)}\right\}\frac{1}{l(1-t)},$$

ferner durch beiderseitige Division mit t und umgekehrte Anordnung

$$\left\{\frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \frac{1}{l(1-t)}\right\}\frac{1}{l(1-t)}$$

$$= \int_0^1 (\tfrac{1}{2} - v)\frac{1-(1-t)^v}{t}\,dv.$$

Da v positiv ist und t die Einheit nicht überschreitet, so lässt sich $(1-t)^v$ nach dem binomischen Satze entwickeln (Thl. I, S. 214); die Integration der einzelnen Glieder liefert dann ein Resultat von der Form

$$39)\quad \left\{\frac{1}{t}-\frac{1}{2}+\frac{1}{l(1-t)}\right\}\frac{1}{l(1-t)}$$
$$=\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{1\,.\,2}t+\frac{a_3}{1\,.\,2\,.\,3}t^2+\frac{a_4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}t^3+\cdots,$$

worin die Coefficienten a_1, a_2, etc. folgende Werthe haben

$$a_1=\int_0^1(\tfrac{1}{2}-v)\,v\,dv=-\tfrac{1}{12},$$

$$a_2=\int_0^1(\tfrac{1}{2}-v)\,v\,(1-v)\,dv=0,$$

$$a_3=\int_0^1(\tfrac{1}{2}-v)\,v\,(1-v)\,(2-v)\,dv=\tfrac{1}{120},$$

$$a_4=\int_0^1(\tfrac{1}{2}-v)\,v\,(1-v)\,(2-v)\,(3-v)\,dv=\tfrac{1}{30},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$40)\quad a_m=\int_0^1(\tfrac{1}{2}-v)\,v\,(1-v)\,(2-v)\,\ldots\,(m-1-v)\,dv.$$

Durch Substitution von Nro. 39) in Nro. 38) ergiebt sich weiter

$$l\Gamma(\mu)=\tfrac{1}{2}l(2\pi)+(\mu-\tfrac{1}{2})\,l\mu-\mu$$
$$-\int_0^1\left\{\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{1\,.\,2}t+\frac{a_3}{1\,.\,2\,.\,3}t^2+\cdots\right\}(1-t)^{\mu-1}\,dt,$$

und wenn man rechter Hand die einzelnen Theile integrirt, so gelangt man zu der Formel

$$41)\quad l\Gamma(\mu)=\tfrac{1}{2}l(2\pi)+(\mu-\tfrac{1}{2})\,l\mu-\mu$$
$$-\frac{1}{1}\,\frac{a_1}{\mu}-\frac{1}{2}\,\frac{a_2}{\mu(\mu+1)}-\frac{1}{3}\,\frac{a_3}{\mu(\mu+1)(\mu+2)}-\cdots,$$

welche den Vortheil bietet, dass die Reihe für alle positiven μ convergirt, und zwar sehr gut, falls μ einigermaassen gross ist*).

*) Für die Brigg'schen Logarithmen von $\Gamma(\mu)$ hat Legendre im zweiten Bande des Traité des fonct. ellipt. eine ziemlich umfängliche Tafel gegeben, aus welcher einige Werthe hier Platz finden mögen.

V. Unvollständige Gammafunctionen.

Mit dem Namen „unvollständige Gammafunction“ möge im Folgenden das bestimmte Integral

$$\int_0^x x^{\mu-1} e^{-x}\, dx$$

bezeichnet werden, welches für $x = \infty$ in $\Gamma(\mu)$ übergeht. Die Berechnung desselben hat bei kleinen x keine Schwierigkeit, denn man erhält mittelst der Exponentialreihe

$$42) \qquad \int_0^x x^{\mu-1} e^{-x}\, dx$$

$$= x^\mu \left\{ \frac{1}{\mu} - \frac{1}{1}\,\frac{x}{\mu+1} + \frac{1}{1\,.\,2}\,\frac{x^2}{\mu+2} - \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{x^3}{\mu+3} + \cdots \right\}.$$

Für einigermaassen grosse x (wie z. B. schon für $x = 10$) wird aber diese Formel so unbequem, dass man sich nach einer anderen Methode umsehen muss.

Unter der Voraussetzung eines positiven μ ist nun

$$\int_0^x x^{\mu-1} e^{-x}\, dx = \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x}\, dx - \int_x^\infty x^{\mu-1} e^{-x}\, dx,$$

d. h.

μ	$log\, \Gamma(\mu)$	μ	$log\, \Gamma(\mu)$
1,00	0,000 000 0000	1,50	0,947 544 9407 — 1
1,05	0,988 337 8588 — 1	1,55	0,948 837 4414 — 1
1,10	0,978 340 6740 — 1	1,60	0,951 102 0175 — 1
1,15	0,969 900 6960 — 1	1,65	0,954 298 8754 — 1
1,20	0,962 922 5038 — 1	1,70	0,958 391 2457 — 1
1,25	0,957 321 0837 — 1	1,75	0,963 345 0589 — 1
1,30	0,953 020 2772 — 1	1,80	0,969 128 6662 — 1
1,35	0,949 951 5142 — 1	1,85	0,975 712 5966 — 1
1,40	0,948 052 7714 — 1	1,90	0,983 069 3441 — 1
1,45	0,947 267 7075 — 1	1,95	0,991 173 1822 — 1

$$\int_0^x x^{\mu-1} e^{-x} dx = \Gamma(\mu) - \int_x^\infty x^{\mu-1} e^{-x} dx,$$

woraus hervorgeht, dass es nur darauf ankommt, das zweite Integral zu entwickeln. Ist $\mu > 1$, so kann man zunächst die theilweise Integration anwenden, um den Exponenten von x zu verringern; man erhält nämlich

$$\int_x^\infty x^{\mu-1} e^{-x} dx = x^{\mu-1} e^{-x} + (\mu - 1) \int_x^\infty x^{\mu-2} e^{-x} dx.$$

Im Falle $\mu > 2$ lässt sich rechter Hand dasselbe Verfahren wiederholen, und es wird,

$$\int_x^\infty x^{\mu-1} e^{-x} dx$$

$$= [x^{\mu-1} + (\mu-1) x^{\mu-2}] e^{-x} + (\mu-1)(\mu-2) \int_x^\infty x^{\mu-3} e^{-x} dx.$$

Bei ganzen μ kommt man durch hinreichend vielmalige Anwendung dieser Operation auf das Integral

$$\int_x^\infty e^{-x} dx = e^{-x};$$

liegt dagegen μ zwischen zwei ganzen Zahlen q und $q + 1$, so führt die q-malige theilweise Integration auf das Integral

$$\int_x^\infty x^{\mu-1-q} e^{-x} dx,$$

worin $\mu - 1 - q$ ein negativer echter Bruch ist. Um dasselbe weiter zu entwickeln, setzen wir den positiven echten Bruch $q + 1 - \mu = \lambda$, schreiben unter dem Integralzeichen v statt x, so dass

$$\int_x^\infty x^{\mu-1-q} e^{-x} dx = \int_x^\infty \frac{1}{v^\lambda} e^{-v} dv$$

ist, und substituiren rechter Hand $v = x(1 + u)$; es ist dann

$$43) \qquad \int_x^\infty \frac{1}{v^\lambda} e^{-v} dv = x^{1-\lambda} e^{-x} \int_0^\infty \frac{1}{(1+u)^\lambda} e^{-xu} du.$$

Zufolge der Definition

$$\Gamma(\lambda)=\int_0^\infty z^{\lambda-1}e^{-z}dz$$

hat man weiter für $z=at$, wenn a eine positive Constante bezeichnet,

$$\Gamma(\lambda)=a^\lambda\int_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-at}dt \quad \text{oder} \quad \frac{1}{a^\lambda}=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-at}dt,$$

und hiervon lässt sich für $a=1+u$ Gebrauch machen, um die vorige Gleichung zu transformiren, nämlich

$$\int_x^\infty \frac{1}{v^\lambda}e^{-v}dv=\frac{x^{1-\lambda}e^{-x}}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty e^{-xu}du\int_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-(1+u)t}dt.$$

Man überzeugt sich leicht, dass es erlaubt ist, die Reihenfolge der Integrationen nach t und u umzukehren; das Doppelintegral geht dann über in

$$\int_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-t}dt\int_0^\infty e^{-(x+t)u}du=\int_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-t}dt\,\frac{1}{x+t}$$

und es entsteht die Gleichung

$$44)\qquad \int_x^\infty \frac{1}{v^\lambda}e^{-v}dv=\frac{x^{1-\lambda}e^{-x}}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty \frac{t^{\lambda-1}}{x+t}e^{-t}dt.$$

Wir erinnern nun an die in Thl. I, S. 169 bewiesene identische Gleichung

$$\frac{1}{\alpha-\beta}\left\{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)}\right\}$$

$$=\frac{\beta}{\alpha(\alpha+1)}+\frac{\beta(\beta+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}+\dots+\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-2)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)..(\alpha+n-1)};$$

für $\alpha=x$, $\beta=-t$ und durch beiderseitige Addition von $\frac{1}{x}$ ziehen wir daraus

$$45)\qquad \frac{1}{x+t}-(-1)^n\,\frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-\overline{n-1})}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)}\cdot\frac{1}{x+t}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{t}{x(x+1)}+\frac{t(t-1)}{x(x+1)(x+2)}-\dots$$

$$\dots+(-1)^{n-1}\frac{t(t-1)\dots(t-\overline{n-2})}{x(x+1)\dots(x+n-1)},$$

und untersuchen vorerst den Quotienten

$$\frac{t-1}{x+1} \cdot \frac{t-2}{x+2} \cdots \frac{t-\overline{n-1}}{x+n-1}.$$

Unter der Voraussetzung, dass t zwischen den ganzen Zahlen $k-1$ und k liegt, nehmen wir $n > k$ und zerlegen den fraglichen Quotienten in

$$\frac{t-1}{1} \cdots \frac{t-\overline{k-1}}{k-1} \cdot \frac{t-k}{k} \cdots \frac{t-\overline{n-1}}{n-1} \cdot \frac{1}{x+1} \cdots \frac{n-1}{x+n-1}.$$

Die erste Gruppe lässt sich folgendermaassen darstellen

$$\frac{t-k+1}{1} \cdot \frac{t-k+2}{2} \cdots \frac{t-2}{k-2} \cdot \frac{t-1}{k-1};$$

wegen $k-1 < t < k$ sind hier alle Factoren echte Brüche, mithin ist auch das Product ein echter Bruch. Die zweite Gruppe gestattet die Schreibweise

$$(-1)^{n-k}\left(1-\frac{t}{k}\right)\left(1-\frac{t}{k+1}\right) \cdots \left(1-\frac{t}{n-1}\right),$$

welche zeigt, dass dieses Product gleichfalls ein echter Bruch ist. Der absolute Werth des in Nro. 45) erwähnten Quotienten beträgt demnach einen Bruchtheil von

$$\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-1)}{(x+1)(x+2) \ldots (x+n-1)}$$

und es ist folglich, wenn ε_n einen positiven oder negativen echten Bruch bedeutet,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+t} = \frac{1}{x} - \frac{t}{x(x+1)} + \frac{t(t-1)}{x(x+1)(x+2)} - \cdots \\ \cdots + (-1)^{n-1} \frac{t(t-1)(t-2) \ldots (t-\overline{n-2})}{x(x+1)(x+2) \ldots (x+n-1)} \\ + \varepsilon_n \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-1)}{x(x+1)(x+2) \ldots (x+n-1)} \cdot \frac{t}{x+t}. \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck substituiren wir auf der rechten Seite von Nro. 44) und führen zur Abkürzung folgende Bezeichnungen ein

$$46) \quad a_m = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty t(t-1)(t-2) \ldots (t-\overline{m-1})\, t^{\lambda-1} e^{-t} dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty \frac{\varepsilon_n t^\lambda}{x+t} e^{-t} dt;$$

wir erhalten dann

$$\int_x^\infty \frac{1}{v^\lambda} e^{-v} dv = x^{1-\lambda} e^{-x} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{a_1}{x(x+1)} + \frac{a_2}{x(x+1)(x+2)} - \cdots \right.$$

$$\cdots + (-1)^{n-1} \frac{a_{n-1}}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}$$

$$\left. + \frac{1.2\ldots(n-1)b_n}{x(x+1)\ldots(x+n-1)} \right\}.$$

Da ε_n zwischen -1 und $+1$ liegt, weil ferner bei positiven x der Quotient $1:(x+t)$ endlich bleibt, so hat b_n immer nur endliche Werthe. Nimmt man hierzu die Bemerkung, dass für $x > 0$ und unendlich wachsende n

$$Lim \left\{ \frac{1}{x+1} \cdot \frac{2}{x+2} \cdot \cdots \cdot \frac{n-1}{x+n-1} \right\} = 0$$

ist, so folgt weiter

$$Lim \left\{ \frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(n-1)b_n}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)} \right\} = 0,$$

und damit geht die vorige Gleichung über in

$$\text{47)} \quad \int_x^\infty \frac{1}{v^\lambda} e^{-v} dv = \frac{1}{x^\lambda} e^{-x} \left\{ 1 - \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{(x+1)(x+2)} - \cdots \right\}.$$

Die Coefficienten a_1, a_2, etc. sind leicht zu berechnen, wenn man unter dem Integralzeichen die Entwickelung

$$t(t-1)(t-2)(t-3)\ldots(t-\overline{m-1})$$
$$= t^m - C_1 t^{m-1} + C_2 t^{m-2} - \cdots + (-1)^{m-1} C_{m-1} t$$

vornimmt, die einzelnen Glieder integrirt und die Gleichungen

$$\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda, \qquad \frac{\Gamma(\lambda+2)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda(\lambda+1), \text{ etc.}$$

beachtet. Wendet man hierbei die abkürzende Bezeichnung

$$\frac{\Gamma(\lambda+q)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+q-1) = [\lambda]^{q}$$

an, so erhält man

$$\text{48)} \qquad a_m = [\lambda]^{m} - C_1 [\lambda]^{m-1} + C_2 [\lambda]^{m-2} - \cdots\cdots$$

Hiernach sind z. B. die Werthe der fünf ersten Coefficienten

$$a_1 = \lambda,$$
$$a_2 = [\lambda]^{2} - [\lambda]^{1} = \lambda^2,$$
$$a_3 = [\lambda]^{3} - 3[\lambda]^{2} + 2[\lambda]^{1} = \lambda^3 + \lambda,$$
$$a_4 = [\lambda]^{4} - 6[\lambda]^{3} + 11[\lambda]^{2} - 6[\lambda]^{1} = \lambda^4 + 4\lambda^2 - \lambda,$$
$$a_5 = [\lambda]^{5} - 10[\lambda]^{4} + 35[\lambda]^{3} - 50[\lambda]^{2} + 24[\lambda]^{1}$$
$$= \lambda^5 + 10\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda,$$

u. s. w.

Einige bemerkenswerthe specielle Fälle der Gleichung 47) mögen noch Erwähnung finden.

Für $\lambda = 1$ ergiebt sich die Formel

$$\int_x^\infty \frac{1}{v} e^{-v} dv = \frac{1}{x} e^{-x} \left\{ 1 - \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{(x+1)(x+2)} - \cdots \right\},$$

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2,\ a_4 = 4,\ a_5 = 14,\ a_6 = 38, \ldots,$$

welche zur Berechnung des Integrallogarithmus von e^{-x} benutzt werden kann.

Im Falle $\lambda = \frac{1}{2}$ hat man

$$\int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{v}} e^{-v} dv = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} \left\{ 1 - \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{(x+1)(x+2)} - \cdots \right\},$$

$$a_1 = \tfrac{1}{2},\ a_2 = \tfrac{1}{4},\ a_3 = \tfrac{5}{8},\ a_4 = \tfrac{9}{16},\ a_5 = \tfrac{129}{32}, \ldots$$

oder auch, wenn $v = t^2$ und x^2 für x gesetzt wird,

$$\int_x^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2x} e^{-x^2} \left\{ 1 - \frac{a_1}{x^2+1} + \frac{a_2}{(x^2+1)(x^2+2)} - \cdots \right\}.$$

Alle diese Reihen convergiren für jedes positive x, und zwar um so stärker je grösser x ist. Für $x = 3$ z. B. geben die drei ersten Glieder der letzten Reihe

$$\int_3^\infty e^{-t^2} dt = 0{,}00001958,$$

was auf acht Stellen richtig ist.*)

---

*) Die Formel 47) hat der Verf. gefunden s. Zeitschr. f. Mathem. u. Phys., 4. Jahrg., S. 390. Für die Transcendente

$$\int_x^\infty e^{-t^2} dt,$$

welche auch in der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorkommt, hat Kramp eine Tafel gegeben am Ende seiner Analyse des réfractions astronomiques.

VI. Durch Gammafunctionen ausdrückbare Integrale.

Nach den vorigen Untersuchungen und vermöge der Tafel, welche Legendre für $\log\Gamma(\mu)$ berechnet hat, ist die Function $\Gamma(\mu)$ als ebenso bekannt anzusehen, wie z. B. $\log\mu$, $\sin\mu$, $\cos\mu$ etc., daher sind auch bestimmte Integrale als vollständig entwickelt zu betrachten, wenn es gelingt, dieselben auf Gammafunctionen zurückzuführen. Aus der ansehnlichen Menge bestimmter Integrale, welche man auf diese Weise reducirt hat, wollen wir im Folgenden einige der wichtigsten herausheben.

a. Wir betrachten zunächst die Integrale

$$U=\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\cos tx\,dx, \qquad V=\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\sin tx\,dx,$$

in denen t eine willkürliche Constante bezeichnen möge. Beide Integrale lassen sich in ein einziges zusammenfassen; setzt man nämlich $\sqrt{-1}=i$ und

$$W=\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-(1+it)x}\,dx,$$

so ist $W=U-iV$ mithin U der reelle, $-iV$ der rein imaginäre Bestandtheil von W. Man überzeugt sich sehr leicht, dass es hier erlaubt ist, beiderseits in Beziehung auf t zu differenziren und rechter Hand die Differentiation unter dem Integralzeichen vorzunehmen; man erhält so

$$\frac{\partial W}{\partial t}=-i\int_0^\infty x^{\mu}e^{-(1+it)x}\,dx.$$

Ferner giebt die theilweise Integration, $\mu>0$ vorausgesetzt,

$$\frac{\partial W}{\partial t}=-\frac{i\mu}{1+it}\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-(1+it)x}\,dx$$

d. i.

$$\frac{\partial W}{\partial t}=-\frac{i\mu}{1+it}\,W.$$

Aus dieser Differentialgleichung, welche die Sonderung der Variabelen gestattet, findet sich

$$W=\frac{C}{(1+it)^{\mu}},$$

wobei C die Integrationsconstante bezeichnet. Um sie zu bestimmen, braucht man nur in der Gleichung

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-(1+it)x}\, dx = \frac{C}{(1+it)^\mu}$$

$t = 0$ zu nehmen; es bleibt dann $\Gamma(\mu) = C$ mithin

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-(1+it)x}\, dx = \frac{\Gamma(\mu)}{(1+it)^\mu}.$$

Diese Formel wird etwas allgemeiner, wenn man $t = \frac{b}{a}$ und $x = az$ setzt, wo a eine positive von Null verschiedene Constante bedeutet; es ergiebt sich*)

$$\text{49)} \qquad \int_0^\infty z^{\mu-1} e^{-(a+ib)z}\, dz = \frac{\Gamma(\mu)}{(a+ib)^\mu}, \qquad a > 0.$$

Um die reellen und imaginären Theile beiderseits vergleichen zu können, bringen wir $a + ib$ auf die Form $h(\cos\gamma + i\sin\gamma)$, wo

$$h = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \gamma = \arctan\frac{b}{a} + n\pi$$

ist, und haben

---

*) Wenn man die auf S. 58 unter Nro. 24) angegebene Formel

$$(\alpha + i\beta)\int_0^\gamma f[(\alpha + i\beta)\xi]\, d\xi = \int_0^{\alpha\gamma} f(x)\, dx + i\gamma\int_0^\beta f[\gamma(\alpha + i\eta)]\, d\eta$$

als bekannt voraussetzen will, so kann man das obige Resultat auch auf folgende sehr einfache Weise ableiten. Für $f(x) = x^{\mu-1}e^{-x}$ ergiebt sich

$$(\alpha + i\beta)^\mu \int_0^\gamma \xi^{\mu-1} e^{-(\alpha+i\beta)\xi}\, d\xi$$

$$= \int_0^{\alpha\gamma} x^{\mu-1} e^{-x}\, dx + i\gamma^\mu e^{-\alpha\gamma}\int_0^\beta (\alpha + i\eta)^{\mu-1} e^{-i\gamma\eta}\, d\eta;$$

bei positiven α, γ und μ convergirt der Ausdruck $\gamma^\mu e^{-\alpha\gamma}$ gegen die Null, sobald γ ins Unendliche wächst; dasselbe gilt auch von dem Producte aus $\gamma^\mu e^{-\alpha\gamma}$ und dem letzten Integrale, weil dieses immer nur endliche Werthe besitzt. Die so entstehende Gleichung

$$(\alpha + i\beta)^\mu \int_0^\infty \xi^{\mu-1} e^{-(\alpha+i\beta)\xi}\, d\xi = \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x}\, dx$$

ist im Wesentlichen identisch mit Nro. 49).

$$\int_0^\infty z^{\mu-1} e^{-(a+ib)z} dz$$

$$= \Gamma(\mu) \frac{\cos\left[\mu\left(\arctan\frac{b}{a}+n\pi\right)\right] - i\sin\left[\mu\left(\arctan\frac{b}{a}+n\pi\right)\right]}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}\mu}}.$$

Die ganze Zahl n bestimmt sich durch die Specialisirung $a = 1$, $b = 0$, welche zu der Gleichung $1 = \cos\mu n\pi$ führt. Diese kann für beliebige positive μ nur dann bestehen, wenn $n = 0$ ist, und nun ergeben sich durch Vergleichung der reellen und imaginären Partieen die beiden Gleichungen

50) $$\int_0^\infty z^{\mu-1} e^{-az} \cos bz\, dz = \frac{\Gamma(\mu)\cos\left(\mu \arctan\frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}\mu}}$$

51) $$\int_0^\infty z^{\mu-1} e^{-az} \sin bz\, dz = \frac{\Gamma(\mu)\sin\left(\mu \arctan\frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}\mu}}$$

$$\mu > 0, \quad a > 0.$$

Der Fall $a = 0$ ist durch die vorige Herleitung von selbst ausgeschlossen und bedarf deshalb einer besonderen Untersuchung. Wir gehen dabei von der Formel

$$\frac{\Gamma(\lambda)}{a^\lambda} = \int_0^\infty u^{\lambda-1} e^{-au} du$$

aus, welche für alle positiven λ gilt, schreiben z für a, multipliciren die nunmehrige Gleichung

$$\frac{1}{z^\lambda} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty u^{\lambda-1} e^{-zu} du$$

mit $\cos bz\, dz$ und integriren von $z = 0$ bis $z = \infty$; dies giebt zunächst

$$\int_0^\infty \frac{\cos bz}{z^\lambda} dz = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty \cos bz\, dz \int_0^\infty u^{\lambda-1} e^{-zu} du.$$

Kehren wir rechter Hand die Reihenfolge der Integrationen um, so haben wir ferner

$$\int_0^\infty \frac{\cos bz}{z^\lambda}\,dz = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty u^{\lambda-1}\,du\int_0^\infty e^{-uz}\cos bz\,dz$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty u^{\lambda-1}du\,\frac{u}{b^2+u^2},$$

und mittelst der Substitution $u = bv$ wird hieraus, falls $b > 0$ ist,

$$\int_0^\infty \frac{\cos bz}{z^\lambda}\,dz = \frac{b^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty \frac{v^\lambda\,dv}{1+v^2}.$$

Das Integral rechter Hand kennt man zufolge der Formel 2) auf S. 433 des ersten Theiles; es ist also unter der dort angegebenen Bedingung und weil hier λ positiv sein muss,

$$\int_0^\infty \frac{\cos bz}{z^\lambda}\,dz = \frac{\pi b^{\lambda-1}}{2\,\Gamma(\lambda)\cos\frac{1}{2}\lambda\pi}, \qquad 0 < \lambda < 1.$$

Mittelst ganz desselben Verfahrens erhält man

$$\int_0^\infty \frac{\sin bz}{z^\lambda}\,dz = \frac{\pi b^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)\sin\frac{1}{2}\lambda\pi}, \qquad 0 < \lambda < 2.$$

Setzt man endlich in diesen Formeln $\lambda = 1 - \mu$ und beachtet die Relation

$$\Gamma(1-\mu = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\cdot\frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}\mu\pi\cos\frac{1}{2}\mu\pi},$$

so gelangt man zu den beiden Ergebnissen

52) $$\int_0^\infty z^{\mu-1}\cos bz\,dz = \frac{\Gamma(\mu)\cos\frac{1}{2}\mu\pi}{b^\mu}, \qquad 0 < \mu < 1,$$

53) $$\int_0^\infty z^{\mu-1}\sin bz\,dz = \frac{\Gamma(\mu)\sin\frac{1}{2}\mu\pi}{b^\mu}, \quad -1 < \mu < 1,$$

worin b positiv sein muss. Hieraus ersieht man die Beschränkungen welchen μ und b zu unterwerfen sind, wenn die Formeln 50) und 51) für $a = 0$ benutzt werden sollen. Ueberhaupt lassen sich die bisherigen Resultate zu folgendem Satze zusammenfassen: die Formel

$$\int_0^\infty z^{\mu-1}e^{-kz}\,dz = \frac{\Gamma(\mu)}{k^\mu}, \qquad \mu > 0$$

gilt für jedes complexe k, dessen reeller Theil positiv und von Null verschieden ist; im Fall aber der reelle Theil von k gleich Null ist, muss μ ein positiver echter Bruch sein.

Der specielle Fall $\mu = \frac{1}{2}$ giebt

$$\int_0^\infty \frac{\cos bz}{\sqrt{z}}\,dz = \int_0^\infty \frac{\sin bz}{\sqrt{z}}\,dz = \sqrt{\frac{\pi}{2b}},$$

oder, in eine Formel zusammengezogen

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{z}} e^{ibz}\,dz = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{i\frac{1}{4}\pi}.$$

Für $z = y^2$ wird hieraus

$$2\int_0^\infty e^{iby^2}\,dy = \int_{-\infty}^\infty e^{iby^2}\,dy = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\, e^{i\frac{1}{4}\pi}$$

und durch Substitution von $y = w + \dfrac{c}{b}$

$$\text{54)}\qquad \int_{-\infty}^\infty e^{i(bw^2+2cw)}\,dw = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{c^2}{b}\right)}.$$

b. Die Gleichungen 50) und 51) führen zu neuen Resultaten, wenn man beiderseits in Beziehung auf μ differenzirt und dabei die Formel 27) anwendet. Man überzeugt sich leicht, dass linker Hand die Differentiation unter dem Integralzeichen vorgenommen werden darf, und erhält dann, wenn zur Abkürzung

$$h = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \vartheta = \operatorname{arctan}\frac{b}{a}$$

gesetzt wird,

$$\text{55)}\qquad \int_0^\infty z^{\mu-1}\, lz\, e^{-az} \cos bz\,dz$$

$$= \frac{\Gamma(\mu)}{h^\mu}\left\{\left(\int_0^1 \frac{1-t^{\mu-1}}{1-t}\,dt - C - lh\right)\cos\mu\vartheta - \vartheta\sin\mu\vartheta\right\}.$$

$$\text{56)}\qquad \int_0^\infty z^{\mu-1}\, lz\, e^{-az} \sin bz\,dz$$

$$= \frac{\Gamma(\mu)}{h^\mu}\left\{\left(\int_0^1 \frac{1-t^{\mu-1}}{1-t}\,dt - C - lh\right)\sin\mu\vartheta + \vartheta\cos\mu\vartheta\right\}.$$

So ist z. B. nach Nro. 55) für $\mu = \frac{1}{2}$ und $b = 0$ also $h = a$, $\vartheta = 0$,

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{z}}\, lz\, e^{-az}\,dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}}(-2l2 - C - la)$$

oder für $z = u^2$

$$\int_0^\infty e^{-au^2} lu\,du = -\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot \frac{C + 2l2 + la}{4}.$$

Die Gleichungen 55) und 56) könnte man wiederum nach μ differenziren, doch werden die Resultate immer verwickelter.

c. In der Formel

$$\int_0^\infty z^{\mu-1} e^{-hz} dz = \frac{\Gamma(\mu)}{h^\mu},$$

welche für alle positiven μ gilt, falls der reelle Bestandtheil von h positiv und von Null verschieden ist, substituiren wir $z = t^2$ und erhalten

$$57)\qquad \int_0^\infty t^{2\mu-1} e^{-ht^2} dt = \frac{\Gamma(\mu)}{2h^\mu}.$$

Diese Formel lässt sich zur Reduction des Doppelintegrales

$$V = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{2p-1} y^{2q-1} e^{-(ax^2+by^2)} dx\,dy$$

in folgender Weise benutzen. Man erhält zunächst, wenn man die angedeuteten Integrationen mittelst der Formel 57) ausführt,

$$58)\qquad V = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{4a^p b^q}.$$

Transformirt man dagegen V mit Hülfe der Substitutionen

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta,\quad dx\,dy = r\,d\theta\,dr,$$

so findet man

$$V = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^\infty r^{2(p+q)-1} e^{-(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta)r^2} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta\, d\theta\, dr$$

und durch Ausführung der auf r bezüglichen Integration

$$59)\qquad V = \frac{\Gamma(p+q)}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta}{(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta)^{p+q}} d\theta.$$

Aus Nro. 58) und 59) zusammen ergiebt sich die Formel

$$60)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta}{(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta)^{p+q}} d\theta = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{2\,\Gamma(p+q)} \cdot \frac{1}{a^p b^q},$$

welche für alle positiven p und q gilt, wenn die reellen Bestandtheile von a und b positiv und nicht Null sind Das hier vorkommende Integral lässt sich mittelst der Substitution $\cos^2\theta = \xi$ in eine algebraische Form bringen, nämlich

$$61)\qquad \int_0^1 \frac{\xi^{p-1}(1-\xi)^{q-1}\,d\xi}{[a\xi + b(1-\xi)]^{p+q}} = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\cdot\frac{1}{a^p b^q},$$

oder für $a = b + c$, wo nun die reellen Theile von b und $b + c$ positiv sein müssen*),

$$62)\qquad \int_0^1 \frac{\xi^{p-1}(1-\xi)^{q-1}}{(b+c\xi)^{p+q}}d\,\xi = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\cdot\frac{1}{(b+c)^p b^q}.$$

Setzt man in Nro. 61)

$$\frac{\xi}{1-\xi} = \zeta \quad\text{also}\quad \xi = \frac{\zeta}{1+\zeta},\quad 1-\xi = \frac{1}{1+\zeta},$$

so erhält man noch

$$63)\qquad \int_0^\infty \frac{\zeta^{p-1}\,d\zeta}{(a\zeta+b)^{p+q}} = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\cdot\frac{1}{a^p b^q}.$$

Bemerkenswerth ist der specielle Fall $q = 1 - p$, wobei p ein positiver echter Bruch sein möge; man erhält

$$\int_0^\infty \frac{\zeta^{p-1}d\zeta}{a\zeta + b} = \frac{\pi}{\sin p\pi}\cdot\frac{b^{p-1}}{a^p},\qquad 0 < p < 1,$$

und zufolge der hinsichtlich des p gemachten Voraussetzung darf hier der reelle Theil von a auch $= 0$ genommen werden. Setzt man b

---

*) Auf anderem Wege ist Abel zu dieser Formel gelangt in Crelle's Journal, Bd. 2, S. 22, ohne jedoch ihre Gültigkeitsbedingungen näher zu bezeichnen. Man kann übrigens die Formel 61) auch dadurch erhalten, dass man von der Gleichung

$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty x^{p-1}y^{q-1}e^{-(ax+by)}\,dx\,dy = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{a^p b^q}$$

ausgeht und linker Hand die auf S. 460 des ersten Theiles besprochene Substitution

$$x = s(1-t),\quad y = st,\quad dx\,dy = s\,ds\,dt$$

anwendet. Die im Texte gegebene Ableitung wurde nur vorgezogen, weil der Uebergang von rechtwinkligen zu polaren Coordinaten bekannter und geläufiger ist als die letztere Substitution.

Für $a = 1$ und $b = 1$ erhält man eine specielle Formel, deren linke Seite Legendre mit dem Namen Euler'sches Integral erster Art bezeichnet hat.

als reell voraus und $a = \cos\beta + i\sin\beta$, so giebt die Vergleichung der beiderseitigen imaginären Theile

$$\int_0^\infty \frac{\zeta^p\,d\zeta}{b^2 + 2b\zeta\cos\beta + \zeta^2} = \frac{\pi b^{p-1}}{\sin p\pi} \cdot \frac{\sin p\beta}{\sin\beta},$$

$$0 < p < 1, \quad -\tfrac{1}{2}\pi \leqq \beta \leqq +\tfrac{1}{2}\pi.$$

Aus der Vergleichung der reellen Theile findet man leicht unter Rücksicht auf die vorstehende Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{\zeta^{p-1}\,d\zeta}{b^2 + 2b\zeta\cos\beta + \zeta^2} = -\frac{\pi b^{p-2}}{\sin p\pi} \cdot \frac{\sin(p-1)\beta}{\sin\beta}.$$

$$0 < p < 1, \quad -\tfrac{1}{2}\pi \leqq \beta \leqq +\tfrac{1}{2}\pi.$$

Beide Resultate lassen sich zu einer Formel vereinigen, wenn man in der ersten Gleichung $p = \lambda$, in der zweiten $p = \lambda + 1$ setzt; dies giebt

$$64)\qquad \int_0^\infty \frac{\zeta^\lambda\,d\zeta}{b^2 + 2b\zeta\cos\beta + \zeta^2} = \frac{\pi b^{\lambda-1}}{\sin\lambda\pi} \cdot \frac{\sin\lambda\beta}{\sin\beta},$$

$$-1 < \lambda < +1, \quad -\tfrac{1}{2}\pi \leqq \beta \leqq +\tfrac{1}{2}\pi.$$

Für $b = 1$ und $\beta = \frac{1}{2}\pi$ kommt man auf die in Theil I, S. 433 unter Nro 2) angegebene specielle Formel zurück.

Die Gleichung 63) gestattet eine eigenthümliche Transformation, wenn

$$a = \cos\beta + i\sin\beta, \qquad b = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

gesetzt wird, wobei noch

$$\begin{aligned} a\zeta + b &= \cos\alpha + \zeta\cos\beta + i(\sin\alpha + \zeta\sin\beta) \\ &= \varrho(\cos\omega + i\sin\omega), \end{aligned}$$

mithin

$$\varrho = \sqrt{1 + 2\zeta\cos(\alpha - \beta) + \zeta^2} \text{ und } \tan\omega = \frac{\sin\alpha + \zeta\sin\beta}{\cos\alpha + \zeta\cos\beta}$$

sein möge. Durch die Vergleichung der beiderseitigen reellen und imaginären Bestandtheile erhält man die Formeln

$$\int_0^\infty \frac{\zeta^{p-1}\cos(p+q)\omega}{\varrho^{p+q}}\,d\zeta = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\cos(p\beta + q\alpha),$$

$$\int_0^\infty \frac{\zeta^{p-1}\sin(p+q)\omega}{\varrho^{p+q}}\,d\zeta = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\sin(p\beta + q\alpha),$$

welche eine bessere Gestalt annehmen, wenn man ω als neue Variabele betrachtet und demgemäss ζ und ϱ durch ω ausdrückt. Die obige Formel für $\tan\omega$ liefert zu diesem Zwecke

$$\zeta = \frac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin(\beta - \omega)}, \qquad d\zeta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin^2(\beta - \omega)}\, d\omega;$$

mittelst des vorstehenden Werthes von ζ und unter Anwendung der trigonometrischen Relation

$$\sin^2 A + 2 \sin A \sin B \cos(A + B) + \sin^2 B = \sin^2(A + B)$$

erhält man ferner

$$\varrho = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta - \omega)},$$

endlich zeigt die frühere Gleichung für $\tan\omega$, dass den Grenzen $\zeta = 0$ und $\zeta = \infty$ die Grenzen $\omega = \alpha$ und $\omega = \beta$ entsprechen. Nach diesen Bemerkungen findet man

$$65) \qquad \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sin^{p-1}(\omega - \alpha) \sin^{q-1}(\beta - \omega) \cos(p + q)\omega\, d\omega$$
$$= \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)} \sin^{p+q-1}(\beta - \alpha) \cos(p\beta + q\alpha),$$

$$66) \qquad \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sin^{p-1}(\omega - \alpha) \sin^{q-1}(\beta - \omega) \sin(p + q)\omega\, d\omega$$
$$= \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)} \sin^{p+q-1}(\beta - \alpha) \sin(p\beta + q\alpha).$$

Werden hier α und β zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ gewählt, so gelten diese Formeln für alle positiven p und q; nimmt man dagegen $\beta = \frac{1}{2}\pi$, so darf p nur echt gebrochene positive Werthe erhalten*).

d. Um noch eine Anwendung der Formel 63) zu zeigen, erinnern wir an die im ersten Theile auf S. 425 unter Nro 10) angegebene Gleichung

$$\int\limits_0^{\infty} \varphi\left(\frac{u}{\alpha + \beta u + \gamma u^2}\right) \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \int\limits_0^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{\beta + 2\sqrt{\alpha\gamma} + t}\right) \frac{dt}{\sqrt{t}},$$

worin φ eine beliebige Function bezeichnet. Bei der Annahme $\varphi(z) = z^{q + 1/2}$ erhält man rechter Hand ein Integral, welches sich nach Nro. 63) für $p = \frac{1}{2}$, $a = 1$, $b = \beta + 2\sqrt{\alpha\gamma}$ entwickeln lässt, so dass entsteht

---

*) Die Formeln 65) und 66) sind vom Verfasser in der Zeitschr. für Mathem. u. Phys. Bd. 9, S. 356 entwickelt worden. Den speciellen Fall $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2}\pi$ hatte schon früher Kummer nach einem ganz anderen Verfahren behandelt in Crelle's Journal Bd. 17, S. 215.

$$67)\quad \int_0^\infty \frac{u^q\,du}{(\alpha+\beta u+\gamma u^2)^{q+1/2}}=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(q)}{\Gamma(q+\frac{1}{2})}\cdot\frac{1}{\sqrt{\gamma}(\beta+2\sqrt{\alpha\gamma})^q}.$$

Durch mehrmalige Differentiationen in Beziehung auf die Constanten α, β, γ können hieraus noch mehrere Formeln abgeleitet werden, von denen wenigstens zwei Platz finden mögen.

Linker Hand führt die n-malige Differentiation in Beziehung auf α zu dem Ausdrucke

$$(-1)^n(q+\tfrac{1}{2})(q+\tfrac{3}{2})\ldots\left(q+\frac{2n-1}{2}\right)\int_0^\infty\frac{u^q\,du}{(\alpha+\beta u+\gamma u^2)^{q+n+1/2}}$$

$$=(-1)^n\frac{\Gamma(q+\frac{1}{2}+n)}{\Gamma(q+\frac{1}{2})}\int_0^\infty\frac{u^q\,du}{(\alpha+\beta u+\gamma u^2)^{q+n+1/2}};$$

rechter Hand lässt sich die n-malige Differentiation nach α mittelst der allgemeinen Formel für $D^nF(\sqrt{x})$ ausführen (s. S. 9, Nro. 11), wenn

$$F(x)=\frac{1}{(\beta+2\sqrt{\gamma}.x)^q}$$

und nachher $x=\alpha$ gesetzt wird. Benutzt man zur Abkürzung die Zeichen

$$\frac{(n+r-1)\,(n+r-2)\ldots(n-r)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2r)}=C_r,\quad \beta+2\sqrt{\alpha\gamma}=\delta,$$

und beachtet die Gleichungen

$$q=\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q)},\qquad q(q+1)=\frac{\Gamma(q+2)}{\Gamma(q)},\ldots.$$

so erhält man

$$D_\alpha^n(\beta+2\sqrt{\alpha\gamma})^{-q}$$

$$=\frac{(-1)^n}{\Gamma(q)}\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}n}\left\{\frac{\Gamma(q+n)}{\delta^{q+n}}+\frac{C_1}{2\sqrt{\alpha\gamma}}\,\frac{\Gamma(q+n-1)}{\delta^{q+n-1}}\right.$$

$$\left.+\frac{C_2}{(2\sqrt{\alpha\gamma})^2}\,\frac{\Gamma(q+n-2)}{\delta^{q+n-2}}+\cdots\right\}$$

Hiernach ergiebt sich aus Nro. 67), wenn $q+n=p$ gesetzt wird,

$$68)\qquad \int_0^\infty\frac{u^{p-n}\,du}{(\alpha+\beta u+\gamma u^2)^{p+1/2}}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(p+\frac{1}{2})}\sqrt{\frac{\gamma^{n-1}}{\alpha^n}}\left\{\frac{\Gamma(p)}{\delta^p}+\frac{C_1}{2\sqrt{\alpha\gamma}}\,\frac{\Gamma(p-1)}{\delta^{p-1}}+\frac{C_2}{(2\sqrt{\alpha\gamma})^2}\,\frac{\Gamma(p-2)}{\delta^{p-2}}+\ldots\right\},$$

worin p jede beliebige positive Grösse $\geqq n$ bedeuten kann.

Differenzirt man die Gleichung 67) n-mal in Beziehung auf β, so gelangt man zu demselben Resultate, als wenn man q um n vermehrt hätte, was von keiner Bedeutung ist.

Um endlich die Gleichung 67) in Beziehung auf γ zu differenziren, möge man bemerken, dass erstens

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}\,(\beta+2\sqrt{\alpha\gamma})^q}=-\frac{1}{\sqrt{\alpha}\,(q-1)}\cdot D_\gamma\frac{1}{(\beta+2\sqrt{\alpha\gamma})^{q-1}}$$

und dass zweitens $\beta+2\sqrt{\alpha\gamma}$ symmetrisch in Beziehung auf α und γ ist. Differenzirt man jetzt $(n-1)$mal nach γ, so ergiebt sich, wenn wieder $q+n=p$ gesetzt wird,

$$69)\qquad \int_0^\infty \frac{u^{p+n-1}\,du}{(\alpha+\beta u+\gamma u^2)^{p+\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(p+\frac{1}{2})}\sqrt{\frac{\alpha^{n-1}}{\gamma^n}}\left\{\frac{\Gamma(p)}{\delta^p}+\frac{C_1}{2\sqrt{\alpha\gamma}}\frac{\Gamma(p-1)}{\delta^{p-1}}+\frac{C_2}{(2\sqrt{\alpha\gamma})^2}\frac{\Gamma(p-2)}{\delta^{p-2}}+\cdots\right\}.$$

Zu dem nämlichen Resultate gelangt man kürzer dadurch, dass man in Nro 68) $\frac{1}{u}$ an die Stelle von u treten lässt und zugleich die Buchstaben α und γ gegeneinander vertauscht *).

VII. Durch Gammafunctionen summirbare Reihen.

Wenn für alle von $x=0$ bis $x=1$ gehenden x eine Gleichung von der Form

$$70)\qquad F(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots$$

besteht, so kann man daraus mittelst der Formel 61) oder der einfacheren

$$71)\qquad \int_0^1 \vartheta^{p-1}(1-\vartheta)^{q-1}d\vartheta=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

auf folgende Weise neue Reihensummirungen ableiten.

a. In der Gleichung 70) setzen wir $x\vartheta^b$ an die Stelle von x, multipliciren beiderseits mit

$$\vartheta^{a-1}(1-\vartheta)^{q-1}d\vartheta$$

und integriren zwischen den Grenzen $\vartheta=0$ und $\vartheta=1$. Rechter

*) Der Verf. hat die Formeln 68) und 69) ursprünglich auf einem anderen Wege gefunden, s. Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale, Jena 1843.

Hand lassen sich alle Integrale nach Nro. 71) entwickeln, und es entsteht die Gleichung

$$\int_0^1 \vartheta^{a-1}(1-\vartheta)^{q-1}F(x\vartheta^b)\,d\vartheta$$

$$=\frac{A_0\,\Gamma(a)\,\Gamma(q)}{\Gamma(a+q)}+\frac{A_1\,\Gamma(a+b)\,\Gamma(q)}{\Gamma(a+b+q)}x+\frac{A_2\,\Gamma(a+2b)\,\Gamma(q)}{\Gamma(a+2b+q)}x^2+\cdots$$

Unter der Voraussetzung eines ganzen positiven q geht diese Gleichung über in

$$72)\qquad \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^1 \vartheta^{a-1}(1-\vartheta)^{q-1}F(x\vartheta^b)\,d\vartheta$$

$$=\frac{A_0}{a(a+1)\ldots(a+q-1)}+\frac{A_1\,x}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+q-1)}$$
$$+\frac{A_2\,x^2}{(a+2b)(a+2b-1)\ldots(a+2b+q-1)}+\cdots,$$

und hieraus ergiebt sich in allen den Fällen eine Reihensummirung, wo es gelingt, die Integration nach ϑ durch geschlossene Ausdrücke zu bewirken.

So erhält man z. B. für $F(x)=(1+x)^\mu$

$$73)\qquad \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^1 \vartheta^{a-1}(1-\vartheta)^{q-1}(1+x\vartheta^b)^\mu\,d\vartheta$$

$$=\frac{1}{a(a+1)\ldots(a+q-1)}+\frac{(\mu)_1\,x}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+q-1)}$$
$$+\frac{(\mu)_2\,x^2}{(a+2b)(a+2b+1)\ldots(a+2b+q-1)}+\cdots.$$

und hier ist die Integration sehr häufig ausführbar, namentlich wenn a und b ganze Zahlen sind. Der specielle Fall $a=b=1$, $q=3$, $\mu=-1$ giebt z. E.

$$\frac{(1+x)^2}{2x^3}l(1+x)-\frac{1}{2x^2}-\frac{3}{4x}$$
$$=\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}-\frac{x}{2\,.\,3\,.\,4}+\frac{x^2}{3\,.\,4\,.\,5}-\frac{x^3}{4\,.\,5\,.\,6}+\cdots.$$
$$-1<x<+1.$$

Nimmt man in Nro. 73) $b=1$ und $x=-1$, was unter der Voraussetzung eines positiven μ erlaubt ist, so kann man linker Hand wieder die Formel 71) anwenden und erhält

74)
$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(q+\mu)}{\Gamma(q)\,\Gamma(a+q+\mu)}$$
$$=\frac{1}{a(a+1)\ldots(a+q-1)}-\frac{(\mu)_1}{(a+1)(a+2)\ldots(a+q)}$$
$$+\frac{(\mu)_2}{(a+2)(a+3)\ldots(a+q+1)}-\ldots.$$

b. Wir gehen noch einmal auf die Gleichung 70) zurück, setzen darin $x\vartheta$ für x, multipliciren beiderseits mit
$$\vartheta^{b-1}(1-\vartheta)^{c-b-1}d\vartheta$$
und integriren rechter Hand alle Glieder mittelst der Formel 71), wobei wir $\Gamma(b+1)$, $\Gamma(b+2)$, etc. durch $\Gamma(b)$, ebenso $\Gamma(c+1)$ $\Gamma(c+2)$, etc. durch $\Gamma(c)$ ausdrücken. Das Resultat besteht in der Gleichung

75)
$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\int_0^1\vartheta^{b-1}(1-\vartheta)^{c-b-1}F(x\vartheta)\,d\vartheta$$
$$=A_0+\frac{b}{c}A_1x+\frac{b(b+1)}{c(c+1)}A_2x^2+\frac{b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}A_3x^3+\cdots.$$

Hiernach ist z. B., wenn $F(x)=(1-x)^{-a}$ genommen wird,

76)
$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\int_0^1\vartheta^{b-1}(1-\vartheta)^{c-b-1}(1-x\vartheta)^{-a}d\vartheta$$
$$=1+\frac{a\,.\,b}{1\,.\,c}x+\frac{a(a+1)\,.\,b(b+1)}{1\,.\,2\,.\,c(c+1)}x^2$$
$$+\frac{a(a+1)(a+2)\,.\,b(b+1)(b+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,c(c+1)(c+2)}x^3+\cdots.$$

und hier gelingt es nicht selten, die auf der linken Seite angedeutete Integration auszuführen. Im Falle $x=1$, kann dies wieder mittelst der Formel 71) geschehen, und es ergiebt sich

77)
$$\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}$$
$$=1+\frac{a\,.\,b}{1\,.\,c}+\frac{a(a+1)\,.\,b(b+1)}{1\,.\,2\,.\,c(c+1)}+\frac{a(a+1)(a+2)\,.\,b(b+1)(b+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,c(c+1)(c+2)}+\cdots,$$

wobei $c>a+b$ sein muss, damit die Reihe convergire und $\Gamma(c-b-a)$ nicht unendlich werde*).

---

*) Die in Nro. 76) vorkommende Reihe führt den Namen hypergeometrische Reihe; sie wurde genauer zuerst von Gauss untersucht in den Comment. soc. Gotting., Tom. II, a. 1812; wesentliche Ergänzungen hierzu lieferten Kummer, Heine, Riemann u. A.

Wählt man in den hier entwickelten Summenformeln $F(x)$ und die Constanten so, dass die Summe der Reihe schon bekannt ist, so lassen sich die vorigen Gleichungen auch benutzen, um die Werthe mancher bestimmten Integrale zu ermitteln. In Formel 76) z. B. erhält man für $a = -\frac{1}{2}\mu$, $b = +\frac{1}{2}\mu$, $c = \frac{1}{2}$, $x = z^2$ auf der rechten Seite eine Reihe, deren Summe $= \cos(\mu \arcsin z)$ ist (Thl. I, S. 230, Formel 13); setzt man noch $\arcsin z = \alpha$ und $\vartheta = \sin^2\theta$, so gelangt man zu der Integralformel

$$78)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{\mu-1}\theta \cos^{-\mu}\theta\,(1-\sin^2\alpha\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}\mu}\,d\theta$$
$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\mu)\,\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu)}{2\sqrt{\pi}}\cos\mu\alpha,$$

worin μ ein positiver echter Bruch, und α zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthalten sein muss *).

c. Um die Anwendung der Gammafunctionen auf Reihen noch an einem Beispiele ganz anderer Art zu zeigen, wollen wir das Integral

$$79)\qquad U = \int_0^{\infty}\left\{\frac{1}{2x} - \frac{1}{e^x - e^{-x}}\right\} x^{\mu-1}\,dx, \qquad \mu > 0,$$

auf zwei verschiedene Weisen entwickeln.

Ersetzt man zunächst x durch $2x$, so hat man

$$2^{1-\mu}U = \int_0^{\infty}\left\{\frac{1}{2x} - \frac{2}{e^{2x} - e^{-2x}}\right\} x^{\mu-1}\,dx,$$

mithin durch Subtraction

$$(2^{1-\mu}-1)\,U = \int_0^{\infty}\left\{\frac{1}{e^x - e^{-x}} - \frac{2}{e^{2x} - e^{-2x}}\right\} x^{\mu-1}\,dx.$$

Weiter ist nun

$$\frac{1}{e^x - e^{-x}} - \frac{2}{e^{2x} - e^{-2x}} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} - \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$
$$= e^{-x} - e^{-2x} + e^{-3x} - \cdots - (e^{-2x} - e^{-4x} + e^{-6x} - \cdots),$$

mithin durch Substitution in die vorhergehende Gleichung und nach Ausführung der Integrationen

*) Zahlreiche Entwickelungen dieser Art giebt Kummer in Crelle's Journal Bd. 17, S. 210 und S. 288, sowie Bd. 20, S. 1.

$$(2^{1-\mu} - 1)\, U = \Gamma(\mu)\left(\frac{1}{1^\mu} - \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} - \cdots\right)$$
$$- \Gamma(\mu)\left(\frac{1}{2^\mu} - \frac{1}{4^\mu} + \frac{1}{6^\mu} - \cdots\right).$$

Zur Abkürzung möge nun folgende Bezeichnung angewendet werden

80) $$\varphi(\mu) = \frac{1}{1^\mu} - \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} - \frac{1}{4^\mu} + \cdots;$$

man hat dann nach dem Vorigen

81) $$U = \frac{1}{2^{1-\mu} - 1}\left(1 - \frac{1}{2^\mu}\right) \Gamma(\mu)\, \varphi(\mu).$$

Eine andere, nicht für alle positiven μ geltende Entwickelung von U entsteht dadurch, dass man die Formel 27) auf S. 142 für $x = 0$, $\lambda = \frac{x}{\pi}$ anwendet, also in Nro. 79)

$$\frac{1}{2x} - \frac{1}{e^x - e^{-x}} = \frac{x}{\pi^2 + x^2} - \frac{x}{(2\pi)^2 + x^2} + \frac{x}{(3\pi)^2 + x^2} - \cdots$$

setzt und die einzelnen Integralwerthe nach der Formel

$$\int_0^\infty \frac{x^\mu\, dx}{c^2 + x^2} = \frac{\pi}{2 \cos \frac{1}{2}\mu\pi} \cdot \frac{1}{c^{1-\mu}}, \qquad -1 < \mu < +1,$$

bestimmt, welche aus der letzten Formel auf S. 277 mittelst der Substitutionen $\zeta = x^2$, $p = \frac{1}{2}(1 + \mu)$, $a = 1$, $b = c^2$ hervorgeht; dies giebt

$$U = \frac{\pi}{2 \cos \frac{1}{2}\mu\pi}\left\{\frac{1}{\pi^{1-\mu}} - \frac{1}{(2\pi)^{1-\mu}} + \frac{1}{(3\pi)^{1-\mu}} - \cdots\right\}$$
$$= \frac{\pi^\mu}{2 \cos \frac{1}{2}\mu\pi}\, \varphi(1 - \mu).$$

Durch Vergleichung dieses und des unter Nro. 81) verzeichneten Werthes von U gelangt man nun zu der Relation

82) $$\frac{\varphi(1-\mu)}{\varphi(\mu)} = \frac{2^\mu - 1}{2^{1-\mu} - 1} \cdot \frac{2\, \Gamma(\mu) \cos \frac{1}{2}\mu\pi}{(2\pi)^\mu}, \qquad 0 < \mu < 1,$$

welche den Zusammenhang zwischen der Function $\varphi(\mu)$ und ihrer complementären Function $\varphi(1 - \mu)$ aufdeckt. Symmetrischer gestaltet sich die Formel 82), wenn man die Function $\Phi(\mu)$ durch folgende Gleichung definirt

83) $$\Phi(\mu) = (2^\mu - 1)\left(\frac{1}{1^\mu} - \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} - \cdots\right)\sqrt{\frac{\Gamma(\mu)}{(2\pi)^\mu \sin \frac{1}{2}\mu\pi}};$$

es ist dann

84) $$\Phi(1-\mu) = \Phi(\mu).$$

d. Mittelst eines ganz analogen Verfahrens findet man eine der Formel 82) entsprechende Eigenschaft der Reihensumme

85) $$\psi(\mu) = \frac{1}{1^\mu} - \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{5^\mu} - \frac{1}{7^\mu} + \cdots.$$

Wird nämlich in dem Integrale

$$V = \int_0^\infty \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, x^{\mu-1}\, dx$$

die Entwickelung benutzt

$$\frac{1}{e^x + e^{-x}} = e^{-x} - e^{-3x} + e^{-5x} - \cdots,$$

so ergiebt sich

$$V = \Gamma(\mu)\; \psi(\mu);$$

setzt man dagegen

$$\frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{(\frac{1}{2}\pi)^2 + x^2} - \frac{3}{(\frac{3}{2}\pi)^2 + x^2} + \frac{5}{(\frac{5}{2}\pi)^2 + x^2} - \cdots\right\},$$

wie aus der Gleichung 32) auf S. 143 für $x = \frac{1}{2}\pi$ und $\lambda = \frac{2x}{\pi}$ folgt, so erhält man

$$V = \left(\frac{\pi}{2}\right)^\mu \frac{\psi(1-\mu)}{\sin\frac{1}{2}\mu\pi},$$

mithin durch Vergleichung beider Werthe von V

86) $$\frac{\psi(1-\mu)}{\psi(\mu)} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^\mu \Gamma(\mu)\sin\tfrac{1}{2}\mu\pi, \qquad 0 < \mu < 1.$$

Um auch hier eine symmetrische Form herbeizuführen, möge die Function $\Psi(\mu)$ durch die Gleichung

87) $$\Psi(\mu) = \left(\frac{1}{1^\mu} - \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{5^\mu} - \cdots\right)\sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)^\mu \Gamma(\mu)\sin\tfrac{1}{2}\mu\pi}$$

definirt werden; es gilt dann die Relation

88) $$\Psi(1-\mu) = \Psi(\mu),$$

welche dem Ergebnisse Nro. 84) völlig analog ist*).

*) Diese Resultate hat d. V. mitgetheilt in den Sitzungsberichten d. K. S. Gesellsch. d. Wissensch., Juni 1877.

DIE

ELLIPTISCHEN INTEGRALE.

Die elliptischen Integrale.

I. Die Reduction der elliptischen Integrale.

Wenn es sich um die Entwickelung eines Integrales handelt, welches nicht unmittelbar zu den Fundamentalintegralen in §. 65 des ersten Theiles gehört, so ist es immer die erste Sorge, das gegebene Integral mittelst passender Transformationen auf andere und zwar einfachere Integrale zurückzuführen, deren Werthe entweder schon bekannt oder doch leichter zu berechnen sind. Ein Beispiel hierzu liefert das Integral

$$\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{A_0 + A_1 x + A_2 x^2}},$$

worin $F(x)$ eine rationale Function von x bedeuten möge; schafft man mittelst der auf Seite 340 und 341 angegebenen Substitutionen die Wurzel weg, so kommt man auf ein Integral von der Form

$$\int \frac{B_0 + B_1 y + B_2 y^2 + \cdots + B_m y^m}{C_0 + C_1 y + C_2 y^2 + \cdots + C_n y^n}\,dy,$$

dieses lässt sich wieder nach den in Cap. XI. auseinander gesetzten Methoden behandeln, also zuletzt durch Potenzen, Logarithmen und Kreisbögen ausdrücken. Einer ähnlichen Reduction sind nun auch alle die Integrale fähig, welche der Form

$$\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4}}$$

angehören und elliptische Integrale genannt werden, weil die Rectification der Ellipse von einem derartigen Integral abhängt. Es ist zwar nicht möglich, das hier vorkommende Radical wegzuschaffen, wohl aber kann das Integral auf einfachere Integrale derselben Art zurückgeführt werden, welche als die constituirenden Elemente des allgemeineren Integrales zu betrachten sind.

A. Um die genannte Reduction auszuführen, betrachten wir zunächst das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4}},$$

worin $A_0 + A_1 x + \cdots + A_4 x^4$ zur Abkürzung mit X bezeichnet werden möge, und setzen einstweilen voraus, dass A_4 von Null verschieden sei. Die vier Wurzeln der Gleichung $X = 0$ nennen wir a_1, a_2, a_3, a_4; falls sie sämmtlich reell sind, denken wir sie uns der Grösse nach geordnet, nämlich $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$; sind zwei davon reell und die beiden anderen complex, so mögen a_1 und a_2 die beiden complexen Wurzeln sein, welche dann selbstverständlich die Form

$$a_1 = \mu + i\nu, \qquad a_2 = \mu - i\nu$$

besitzen; sind alle Wurzeln complex, so nehmen wir wieder a_1 und a_2 als das eine conjugirte Paar, sodass das andere durch

$$a_3 = \mu_1 + i\nu_1, \qquad a_4 = \mu_1 - i\nu_1$$

ausgedrückt wird. Man hat nun, wenn statt A_4 kürzer A geschrieben wird,

$$\begin{aligned} X &= A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4) \\ &= A[x^2 - (a_1+a_2)x + a_1 a_2][x^2 - (a_3+a_4)x + a_3 a_4] \end{aligned}$$

und zufolge der gemachten Voraussetzungen sind hier die quadratischen Factoren reell.

Zunächst wollen wir den speciellen Fall betrachten, wo

$$a_1 + a_2 = a_3 + a_4$$

ist; der gemeinschaftliche Werth beider Summen heisse dann $2a$. Dem X kann jetzt die Form

$$X = A[(x-a)^2 + a_1 a_2 - a^2][(x-a)^2 + a_3 a_4 - a^2]$$

gegeben werden, worin zur Abkürzung $a^2 - a_1 a_2 = b_1$, $a^2 - a_3 a_4 = b_2$ sein möge. Führt man in der nunmehrigen Gleichung

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{dx}{\sqrt{A[(x-a)^2 - b_1][(x-a)^2 - b_2]}}$$

statt x die neue Variabele $y = x - a$ ein, so erhält man

$$1) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{dy}{\sqrt{A(y^2 - b_1)(y^2 - b_2)}};$$

das ursprüngliche Integral lässt sich demnach auf ein anderes zurückführen, worin nur gerade Potenzen der Integrationsvariabelen vorkommen.

Um auch in dem allgemeinen Falle

$$a_1 + a_2 \gtrless a_3 + a_4$$

zu einer ähnlichen Reduction zu gelangen, gehen wir auf die Gleichung

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{dx}{\sqrt{A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}}$$

zurück und benutzen die Substitution

2) $$x = \frac{p + qy}{1 + y},$$

worin p und q zwei, vorläufig nicht näher bestimmte Constanten bezeichnen. Es ergiebt sich

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{(q-p)\,dy}{\sqrt{A\,U_1\,U_2\,U_3\,U_4}},$$

und zwar sind hierbei die folgenden Abkürzungen eingeführt

$$U_1 = p - a_1 + (q - a_1)y,$$
$$U_2 = p - a_2 + (q - a_2)y,$$
u. s. w.

aus denen folgt

$$U_1\,U_2 = (p-a_1)(p-a_2) + [(p-a_1)(q-a_2) + (p-a_2)(q-a_1)]\,y + (q-a_1)(q-a_2)\,y^2,$$
$$U_3\,U_4 = (p-a_3)(p-a_4) + [(p-a_3)(q-a_4) + (p-a_4)(q-a_3)]\,y + (q-a_3)(q-a_4)\,y^2.$$

Soll nun das Product $U_1\,U_2\,U_3\,U_4$ nur gerade Potenzen von y enthalten, so müssen die in $U_1\,U_2$ und $U_3\,U_4$ vorkommenden Coefficienten von y verschwinden; daraus ergeben sich zur Bestimmung von p und q die zwei Gleichungen

$$pq - \tfrac{1}{2}(a_1 + a_2)(p + q) + a_1 a_2 = 0,$$
$$pq - \tfrac{1}{2}(a_3 + a_4)(p + q) + a_3 a_4 = 0.$$

Setzt man

$$\tfrac{1}{2}(p + q) = s, \quad \tfrac{1}{2}(p - q) = t, \quad \text{mithin } pq = s^2 - t^2,$$

so gehen die vorigen Gleichungen über in

$$t^2 = (s - a_1)(s - a_2), \quad t^2 = (s - a_3)(s - a_4),$$

und man erhält der Reihe nach

3) $$s = \frac{a_1 a_2 - a_3 a_4}{a_1 + a_2 - (a_3 + a_4)},$$

4) $$t = \frac{\sqrt{(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)}}{a_1 + a_2 - (a_3 + a_4)},$$

5) $$p = s + t, \quad q = s - t.$$

Zufolge der Voraussetzungen, welche anfangs hinsichtlich der Wurzeln a_1, a_2, a_3, a_4 gemacht wurden, ist s jederzeit reell; was ferner t betrifft, so müssen drei Fälle unterschieden werden. Bei reellen Wurzeln ist jeder der vier Factoren $a_1 - a_3$, $a_1 - a_4$ etc. negativ, mithin t reell; bei zwei reellen und zwei complexen Wurzeln lassen sich die vier Factoren folgendermaassen gruppiren

$$\begin{aligned}&(a_1 - a_3)(a_2 - a_3) \cdot (a_1 - a_4)(a_2 - a_4)\\ &\qquad = [(\mu - a_3)^2 + \nu^2] \cdot [(\mu - a_4)^2 + \nu^2]\end{aligned}$$

und liefern ein positives Product; endlich bei vier complexen Wurzeln gestatten jene Factoren die Anordnung

$$\begin{aligned}&(a_1 - a_3)(a_2 - a_4) \cdot (a_1 - a_4)(a_2 - a_3)\\ &\qquad = [(\mu - \mu_1)^2 + (\nu - \nu_1)^2] \cdot [(\mu - \mu_1)^2 + (\nu + \nu_1)^2]\end{aligned}$$

und geben wiederum ein positives Product; demnach ist t jederzeit eine reelle Grösse. Hieraus folgen reelle endliche Werthe von p und q; es lässt sich daher die beabsichtigte Transformation unter allen Umständen ausführen, nämlich

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$= \int \frac{(q-p)\,dy}{\sqrt{A[(p-a_1)(p-a_2)+(q-a_1)(q-a_2)y^2][(p-a_3)(p-a_4)+(q-a_3)(q-a_4)y^2]}}.$$

Zur Abkürzung sei noch

6) $$B = A(q - a_1)(q - a_2)(q - a_3)(q - a_4),$$

7) $$b_1 = -\frac{(p - a_1)(p - a_2)}{(q - a_1)(q - a_2)}, \quad b_2 = -\frac{(p - a_3)(p - a_4)}{(q - a_3)(q - a_4)},$$

wobei B, b_1 und b_2 jederzeit reelle Grössen sind; man hat dann die wichtige Reduction

8) $$\begin{aligned}&\int \frac{dx}{\sqrt{A(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)}}\\ &\qquad = (q - p)\int \frac{dy}{\sqrt{B(y^2 - b_1)(y^2 - b_2)}}.\end{aligned}$$

Die weiteren Schritte der Rechnung hängen von den Vorzeichen der Grössen B, b_1, b_2 ab; dabei ist erstens zu unterscheiden, ob B positiv $= +\gamma^2$ oder negativ $= -\gamma^2$ ist, und in jedem dieser Hauptfälle sind dann wieder die drei Unterfälle

$$b_1 = +\alpha^2, \qquad b_2 = +\beta^2,$$
$$b_1 = -\alpha^2, \qquad b_2 = +\beta^2,$$
$$b_1 = -\alpha^2, \qquad b_2 = -\beta^2,$$

möglich. Für den Ausdruck $B(y^2 - b_1)(y^2 - b_2)$, welcher kurz Y heissen möge, ergeben sich hiernach sechs verschiedene Formen, die wir im Folgenden einzeln betrachten.

Ist erstens

$$Y = \gamma^2(y^2 - \alpha^2)(y^2 - \beta^2)$$

und α^2 die kleinere der beiden Grössen α^2 und β^2, so hat das Integral nur dann einen reellen Werth, wenn entweder $y^2 < \alpha^2 < \beta^2$ oder $y^2 > \beta^2 > \alpha^2$ genommen wird. Im ersten Falle substituire man

$$\varkappa = \frac{\alpha}{\beta}, \quad y = \alpha z;$$

dies giebt

$$\int \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{1}{\beta\gamma} \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)}},$$

und zwar sind hier $\varkappa$ und z positive echte Brüche, deren letzter gleichzeitig mit y wächst. Im zweiten Falle setze man

$$\varkappa = \frac{\alpha}{\beta}, \quad y = \frac{\beta}{z},$$

wodurch

$$\int \frac{dy}{\sqrt{Y}} = -\frac{1}{\beta\gamma} \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)}}$$

erhalten wird; auch hier sind $\varkappa$ und z positive echte Brüche, deren letzter abnimmt, wenn y wächst.

Für die zweite Form

$$Y = \gamma^2(y^2 + \alpha^2)(y^2 - \beta^2),$$

wobei selbstverständlich $y^2 > \beta^2$ sein muss, benutze man die Substitutionen

$$\varkappa = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad y = \frac{\beta}{\sqrt{1 - z^2}};$$

es wird dann

$$\int \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{1}{\gamma\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)}},$$

und hier sind $\varkappa$ und z positive echte Brüche, deren letzter gleichzeitig mit y wächst.

Gehört Y unter die dritte Form

$$Y = \gamma^2(y^2 + \alpha^2)(y^2 + \beta^2),$$

so nenne man α^2 die kleinere der beiden Grössen α^2 und β^2, und substituire

$$\varkappa = \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\beta}, \quad y = \frac{\beta\sqrt{1 - z^2}}{z};$$

dies giebt

$$\int \frac{dy}{\sqrt{Y}} = -\frac{1}{\beta\gamma}\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}};$$

wiederum sind $\varkappa$ und z positive echte Brüche, deren letzter abnimmt, wenn y wächst.

Falls Y von der vierten Form ist, nämlich

$$Y = \gamma^2 (y^2 - \alpha^2)(\beta^2 - y^2),$$

heisse α^2 die kleinere der beiden Grössen α^2 und β^2; selbstverständlich muss dann y^2 zwischen α^2 und β^2 liegen. Die Substitutionen

$$\varkappa = \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\beta}, \quad y = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \varkappa^2 z^2}}$$

geben jetzt

$$\int \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{1}{\beta\gamma}\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}},$$

worin $\varkappa$ und z positive echte Brüche sind, deren letzter gleichzeitig mit y wächst.

Für die fünfte Form

$$Y = \gamma^2 (y^2 + \alpha^2)(\beta^2 - y^2)$$

bedient man sich der Substitutionen

$$\varkappa = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad y = \beta\sqrt{1 - z^2};$$

diese geben

$$\int \frac{dy}{\sqrt{Y}} = -\frac{1}{\gamma\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}},$$

worin $\varkappa$ und z wieder echte Brüche sind, deren letzter abnimmt, wenn y wächst.

Was endlich die sechste Form anbelangt, so ist dieselbe von keiner Bedeutung, weil dann das Integral einen rein imaginären Werth hat, welcher auch aus der dritten Form durch Multiplication mit $\sqrt{-1}$ folgt.

Das Resultat der bisherigen Untersuchung besteht in dem Satze, dass das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}}$$

mittelst zweier Substitutionen auf die weit einfachere Form

$$C\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}$$

gebracht werden kann, worin $\varkappa$ und z positive echte Brüche sind.

Noch müssen wir die Modification erwähnen, welche sich für den Fall nöthig macht, wo das Polygon X nur vom dritten Grade ist, also die Reduction des Integrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}}$$

verlangt wird, in welchem bei drei reellen Wurzeln $a_1 < a_2 < a_3$, und im Gegenfalle a_3 die einzige reelle Wurzel sein möge. Es genügt hier die einfache Bemerkung, dass das vorliegende Integral als der Grenzwerth angesehen werden kann, welchem sich der Ausdruck

$$\int \frac{\sqrt{-a_4}\,dx}{\sqrt{A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}}$$

bei unendlich wachsenden a_4 nähert; man braucht demnach nur die Gleichung 8) mit $\sqrt{-a_4}$ zu multipliciren und die Grenzwerthe der Grössen

$$p, \quad q, \quad \frac{-a_4}{B}, \quad b_1, \quad b_2$$

aufzusuchen. Bezeichnen wir den dritten dieser Grenzwerthe mit $\frac{1}{B'}$, so erhalten wir für $a_4 = \infty$ aus Nro. 3), 4) etc.

$$s = a_3, \quad t = -\sqrt{(a_1-a_3)(a_2-a_3)},$$

9) $p = a_3 - \sqrt{(a_1-a_3)(a_2-a_3)}, \quad q = a_3 + \sqrt{(a_1-a_3)(a_2-a_3)},$

10) $$B' = A(q-a_1)(q-a_2)(q-a_3),$$

11) $$b_1 = -\frac{(p-a_1)(p-a_2)}{(q-a_1)(q-a_2)}, \quad b_2 = -\frac{p-a_3}{q-a_3}$$

und aus Nro. 8)

12) $$\int \frac{dx}{\sqrt{A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}} = (q-p)\int \frac{dy}{\sqrt{B'(y^2-b_1)(y^2-b_2)}},$$

wobei zwischen x und y die Gleichung 2) stattfindet. Das rechts-stehende Integral hat dieselbe Form wie das auf y bezügliche Integral in Nro. 8); die weitere Reduction bleibt also für beide Theile die nämliche.

B. Nach diesen Voruntersuchungen ist es nicht schwer, das allgemeine Integral

$$\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4}} = \int \frac{F(x)}{\sqrt{X}}\,dx$$

zu transformiren, worin $F(x)$ eine rationale algebraische Function von x bedeutet. Die Substitution

$$x = \frac{p + qy}{1 + y}$$

giebt zunächst

$$13) \qquad \int \frac{F(x)}{\sqrt{X}}\,dx = (q - p) \int F\left(\frac{p + qy}{1 + y}\right) \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

und zwar ist hier Y wie früher von der Form $B(y^2 - b_1)(y^2 - b_2)$. Ferner ist $F\left(\frac{p + qy}{1 + y}\right)$ wieder eine rationale algebraische Function von y, also von der Form

$$F\left(\frac{p + qy}{1 + y}\right) = \frac{G_0 + G_1 y + G_2 y^2 + G_3 y^3 + G_4 y^4 + \cdots}{H_0 + H_1 y + H_2 y^2 + H_3 y^3 + H_4 y^4 + \cdots}$$
$$= \frac{G_0 + G_2 y^2 + G_4 y^4 + \cdots + (G_1 + G_3 y^2 + \cdots) y}{H_0 + H_2 y^2 + H_4 y^4 + \cdots + (H_1 + H_3 y^2 + \cdots) y}.$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner mit

$$H_0 + H_2 y^2 + H_4 y^4 + \cdots - (H_1 + H_3 y^2 + H_5 y^4 + \cdots) y,$$

so enthält der neue Nenner nur gerade Potenzen von y; in dem neuen Zähler dagegen kommen gerade und ungerade Potenzen vor, die sich wie vorhin sondern lassen. Das Resultat hat demnach folgende Gestalt

$$F\left(\frac{p + qy}{1 + y}\right) = \frac{M_0 + M_2 y^2 + M_4 y^4 + \cdots + (M_1 + M_3 y^2 + M_5 y^4 + \cdots) y}{N_0 + N_2 y^2 + N_4 y^4 + N_6 y^6 + \ldots}$$

oder kurz

$$F\left(\frac{p + qy}{1 + y}\right) = \Phi(y^2) + \Psi(y^2) \cdot y,$$

worin Φ und Ψ rationale gebrochene Functionen bedeuten. Aus der Gleichung 13) wird jetzt vermöge des Werthes von y

14) $$\int \frac{F(x)}{\sqrt{X}}\,dx$$

$$=(q-p)\left\{\int \frac{\Phi(y^2)}{\sqrt{B(y^2-b_1)(y^2-b_2)}}\,dy+\int \frac{\Psi(y^2)}{\sqrt{B(y^2-b_1)(y^2-b_2)}}\,y\,dy\right\},$$

und es sind nun die einzelnen Integrale rechter Hand näher zu untersuchen.

Das letzte Integral geht für $y^2 = z$ über in

$$\frac{1}{2}\int \frac{\Psi(z)}{\sqrt{B(z-b_1)(z-b_2)}}\,dz$$

und kann mittelst der gewöhnlichen Methoden entwickelt, d. h. auf Potenzen, Logarithmen und Kreisbögen zurückgeführt werden, was keiner weiteren Erörterung bedarf.

Anders verhält sich die Sache bei dem ersten Integrale in Nro. 14), für welches je nach den Vorzeichen von B, b_1 und b_2 verschiedene Substitutionen anzuwenden sind. Man bemerkt aber leicht, dass jene Substitutionen unter der gemeinschaftlichen Form

$$y^2 = \frac{\delta + \delta_1 z^2}{\varepsilon + \varepsilon_1 z^2}$$

enthalten sind, und dass folglich die Function

$$\Phi(y^2) = \frac{M_0 + M_2 y^2 + M_4 y^4 + \cdots}{N_0 + N_2 y^2 + N_4 y^4 + \cdots}$$

zu einer rationalen Function von z^2 wird, etwa

$$\Phi\left(\frac{\delta + \delta_1 z^2}{\varepsilon + \varepsilon_1 z^2}\right) = \frac{P_0 + P_2 z^2 + P_4 z^4 + \cdots}{Q_0 + Q_2 z^2 + Q_4 z^4 + \cdots},$$

die wir, der Allgemeinheit wegen, als unecht gebrochene Function voraussetzen wollen. Diese zerfällt durch Division in eine ganze Function $K_0 + K_2 z^2 + K_4 z^4 +$ etc., und in eine echt gebrochene Function, die sich wieder in Partialbrüche von der Form

$$\frac{L}{(1 + \lambda z^2)^n}$$

zerlegen lässt. Da ferner durch die für y angewendete Substitution

$$\frac{dy}{\sqrt{B(y^2 - b_1)(y^2 - b_2)}} = C \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)}}$$

wird, so folgt, dass das Integral

$$\int \frac{F(x)}{\sqrt{X}}\,dx$$

auf drei Gruppen von Integralen zurückkommt; die erste Gruppe enthält Integrale von der Form

15) $$\int \frac{z^m\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}$$

worin m eine gerade Zahl bedeutet; die zweite Gruppe ist aus Integralen von der Form

16) $$\int \frac{dz}{(1+\lambda z^2)^n \sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}$$

zusammengesetzt; in der letzten Gruppe kommen nur solche Integrale vor, die sich durch Potenzen, Logarithmen und Kreisbögen ausdrücken lassen.

Wir haben uns nun noch mit der weiteren Reduction der Integrale 15) und 16) zu beschäftigen. Gewöhnlich ertheilt man denselben durch Substitution von $z = \sin\varphi$ und durch Einführung des abkürzenden Zeichens

$$\varDelta(\varphi) = \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}$$

eine einfachere trigonometrische Form; es sei daher

17) $$U_m = \int \frac{\sin^m\varphi}{\varDelta(\varphi)}\,d\varphi, \quad V_n = \int \frac{d\varphi}{(1+\lambda\sin^2\varphi)^n \varDelta(\varphi)}.$$

C. Durch Differentiation erhält man

$$d\,[\sin^{m-3}\varphi\cos\varphi\,\varDelta(\varphi)]$$

$$= [(m-3)\sin^{m-4}\varphi\cos^2\varphi - \sin^{m-2}\varphi]\,\varDelta(\varphi)\,d\varphi - \frac{\varkappa^2\sin^{m-2}\varphi\cos^2\varphi}{\varDelta(\varphi)}\,d\varphi$$

$$= (m-3)\frac{\sin^{m-4}\varphi}{\varDelta(\varphi)}\,d\varphi - (m-2)(1+\varkappa^2)\frac{\sin^{m-2}\varphi}{\varDelta(\varphi)}\,d\varphi$$

$$+ (m-1)\varkappa^2\frac{\sin^m\varphi}{\varDelta(\varphi)}\,d\varphi,$$

mithin ist umgekehrt durch Integration

18) $$\sin^{m-3}\varphi\cos\varphi\,\varDelta(\varphi)$$

$$= (m-3)\,U_{m-4} - (m-2)(1+\varkappa^2)\,U_{m-2} + (m-1)\varkappa^2\,U_m.$$

Diese Reductionsformel zeigt, wie U_m aus U_{m-2} und U_{m-4} hergeleitet werden kann; für $m = 4, 6, 8$, etc. liefert sie der Reihe nach U_4, U_6, U_8, etc. ausgedrückt durch

$$U_0 = \int \frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi)} \text{ und } U_2 = \int \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\varDelta(\varphi)}.$$

Wegen

$$\frac{\sin^2\varphi}{\varDelta(\varphi)} = \frac{1}{\varkappa^2}\left[\frac{1}{\varDelta(\varphi)} - \varDelta(\varphi)\right]$$

ist noch

$$U_2 = \frac{1}{\varkappa^2}\left\{U_0 - \int \Delta(\varphi)\,d\varphi\right\};$$

die Entwickelung von U_m führt daher auf die beiden Integrale

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} \quad \text{und} \quad \int \Delta(\varphi)\,d\varphi,$$

deren letztes bei der Rectification der Ellipse vorkommt.

D. Bezeichnet man $\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}$ kurz mit R, so erhält man durch Differentiation eine Gleichung von der Form

$$d\left\{\frac{zR}{(1+\lambda z^2)^{n-1}}\right\} = \frac{c_3 z^6 + c_2 z^4 + c_1 z^2 + c_0}{(1+\lambda z^2)^n}\,\frac{dz}{R},$$

worin die Coefficienten c_0, c_1, c_2, c_3 von $\varkappa$, λ und n abhängen. Diesem Ergebnisse kann man leicht die folgende Gestalt verleihen

$$d\left\{\frac{zR}{(1+\lambda z^2)^{n-1}}\right\}$$

$$= \frac{\gamma_3(1+\lambda z^2)^3 + \gamma_2(1+\lambda z^2)^2 + \gamma_1(1+\lambda z^2) + \gamma_0}{(1+\lambda z^2)^n}\,\frac{dz}{R}$$

$$= \gamma_3 \frac{dz}{(1+\lambda z^2)^{n-3}R} + \gamma_2 \frac{dz}{(1+\lambda z^2)^{n-2}R} + \gamma_1 \frac{dz}{(1+\lambda z^2)^{n-1}R}$$

$$+ \gamma_0 \frac{dz}{(1+\lambda z^2)^n R},$$

und zwar sind hier die Werthe der mit γ bezeichneten neuen Coefficienten:

$$\gamma_3 = -(2n-5)\frac{\varkappa^2}{\lambda^2}, \quad \gamma_2 = (2n-4)\left(\frac{1+\varkappa^2}{\lambda} + 3\frac{\varkappa^2}{\lambda^2}\right),$$

$$\gamma_1 = -(2n-3)\left(1 + 2\frac{1+\varkappa^2}{\lambda} + 3\frac{\varkappa^2}{\lambda^2}\right),$$

$$\gamma_0 = (2n-2)\left(1 + \frac{1+\varkappa^2}{\lambda} + \frac{\varkappa^2}{\lambda^2}\right).$$

Durch Integration der vorhergehenden Gleichung und Substitution von $z = \sin\varphi$ gelangt man zu der Reductionsformel

$$\text{19)} \quad \frac{\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta(\varphi)}{(1+\lambda\sin^2\varphi)^{n-1}}$$

$$= \gamma_3 V_{n-3} + \gamma_2 V_{n-2} + \gamma_1 V_{n-1} + \gamma_0 V_n,$$

welche für jedes n gilt. Nimmt man der Reihe nach $n = 2, 3, 4$, etc., so erhält man V_2, V_3, V_4, etc. ausgedrückt durch die drei Integrale

$$V_{-1} = \int \frac{1 + \lambda \sin^2 \varphi}{\Delta(\varphi)} d\varphi, \quad V_0 = \int \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)},$$

$$V_1 = \int \frac{d\varphi}{(1 + \lambda \sin^2 \varphi)\,\Delta(\varphi)};$$

die beiden ersten gehören zu der schon vorhin betrachteten Form, dagegen bildet das letzte Integral ein neues Element.

Das Gesammtresultat der ganzen Untersuchung besteht nun darin, dass die Reduction des allgemeinen elliptischen Integrales

$$\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4}},$$

theils auf Potenzen, Logarithmen und Kreisbögen, theils auf drei specielle elliptische Integrale führt, welche entweder in der algebraischen Form

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}, \quad \int \sqrt{\frac{1-\varkappa^2 z^2}{1-z^2}}\, dz,$$

$$\int \frac{dz}{(1+\lambda z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}$$

oder in der trigonometrischen Form

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}, \quad \int \Delta(\varphi)\, d\varphi, \quad \int \frac{d\varphi}{(1+\lambda \sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi)}$$

dargestellt werden können. Falls die letzteren Integrale zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \varphi$ genommen sind, pflegt man sie elliptische Integrale erster, zweiter und dritter Gattung zu nennen und folgendermaassen zu bezeichnen:

$$F(\varkappa, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}, \quad E(\varkappa, \varphi) = \int_0^{\varphi} \Delta(\varphi)\, d\varphi,$$

$$\Pi_0(\varkappa, \lambda, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+\lambda \sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi)};$$

die obere Grenze φ heisst die Amplitude, $\varkappa$ der Modulus, λ der Parameter des betreffenden Integrales *).

*) Die obige Reduction des allgemeinen elliptischen Integrales ist von Legendre in den fünf ersten Capiteln seines Traité des fonctions elliptiques, Paris 1825, angegeben worden; sie empfiehlt sich durch einfachen und natürlichen Gedankengang. Elegante Modificationen der Legendre'schen Methode verdankt man Richelot in Crelle's Journal, Bd. 34, S. 1, und Weierstrass in Abschn. 13 des Schellbach'schen Werkes: Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunctionen, Berlin 1864. Die allge-

Mittelst der Formeln 18) und 19) überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der nachstehenden Gleichungen, welche wir ihres öfteren Gebrauchs wegen zusammenstellen und in denen statt $\varDelta(\varphi)$, $F(\varkappa, \varphi)$, $E(\varkappa, \varphi)$ kürzer $\varDelta$, F, E gesetzt worden ist.

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi}{\varDelta}\,d\varphi = \frac{F-E}{\varkappa^2},$$

$$\int_0^\varphi \frac{\cos^2\varphi}{\varDelta}\,d\varphi = \frac{E-(1-\varkappa^2)F}{\varkappa^2},$$

$$\int_0^\varphi \frac{\tan^2\varphi}{\varDelta}\,d\varphi = \frac{\varDelta\,.\tan\varphi - E}{1-\varkappa^2},$$

$$\int_0^\varphi \frac{\sec^2\varphi}{\varDelta}\,d\varphi = \frac{\varDelta\,.\tan\varphi + (1-\varkappa^2)F - E}{1-\varkappa^2},$$

$$\int_0^\varphi \frac{1}{\varDelta^3}\,d\varphi = \frac{1}{1-\varkappa^2}\left(E - \frac{\varkappa^2\sin\varphi\cos\varphi}{\varDelta}\right),$$

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi}{\varDelta^3}\,d\varphi = \frac{1}{1-\varkappa^2}\left(\frac{E-(1-\varkappa^2)F}{\varkappa^2} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\varDelta}\right),$$

$$\int_0^\varphi \frac{\cos^2\varphi}{\varDelta^3}\,d\varphi = \frac{F-E}{\varkappa^2} + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\varDelta}.$$

Hieran knüpfen sich noch ein paar bemerkenswerthe Folgerungen. Differenzirt man nämlich das mit $E(\varkappa, \varphi)$ bezeichnete Integral partiell in Beziehung auf $\varkappa$, so erhält man

$$\frac{\partial E}{\partial \varkappa} = -\varkappa\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi}{\varDelta}\,d\varphi,$$

d. i. nach der ersten Formel

$$\frac{\partial E}{\partial \varkappa} = \frac{E-F}{\varkappa}.$$

---

meine Theorie der Transformation, deren Auseinandersetzung hier zu weit führen würde, ist eine Schöpfung Jacobi's; siehe dessen Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, Regiomonti, 1829. Hinsichtlich der Bezeichnung ist zu erwähnen, dass Jacobi unter Π ein etwas anderes Integral versteht als Legendre; es schien daher zweckmässig, das Legendre'sche Integral dritter Gattung mittelst eines Index von dem später vorkommenden Jacobi'schen Integral zu unterscheiden.

Auf gleiche Weise ergiebt sich durch Differentiation von $F(\varkappa, \varphi)$

$$\frac{\partial F}{\partial \varkappa} = \varkappa \int_0^{\varphi} \frac{\sin^2 \varphi}{\Delta^3} d\varphi,$$

d. i. nach der vorletzten Formel

$$\frac{\partial F}{\partial \varkappa} = \frac{1}{1-\varkappa^2}\left(\frac{E-(1-\varkappa^2)F}{\varkappa} - \frac{\varkappa \sin\varphi \cos\varphi}{\Delta}\right).$$

II. Die Landen'sche Substitution für Integrale erster Art.

Wenn man in dem elliptischen Integrale erster Gattung

$$F(p, \tau) = \int_0^{\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{1-p^2 \sin^2 \tau}}$$

statt τ eine neue Variabele ω einführt, welche mit τ durch die Gleichung

$$\tau = \operatorname{arctan} \frac{\sin 2\omega}{p+\cos 2\omega} \quad \text{oder} \quad \tan \tau = \frac{\sin 2\omega}{p + \cos 2\omega}$$

verbunden ist, so erhält man der Reihe nach

$$d\tau = 2\frac{1+p\cos 2\omega}{1+2p\cos 2\omega + p^2} d\omega,$$

$$\sqrt{1-p^2 \sin^2 \tau} = \frac{1+p\cos 2\omega}{\sqrt{1+2p\cos 2\omega+p^2}},$$

mithin durch Division und wegen $\cos 2\omega = 1 - 2\sin^2 \omega$

$$\frac{d\tau}{\sqrt{1-p^2\sin^2\tau}} = \frac{2}{1+p} \frac{d\omega}{\sqrt{1-\frac{4p}{(1+p)^2}\sin^2\omega}}.$$

Der unteren Grenze $\tau = 0$ entspricht $\omega = 0$; ferner wachsen τ und ω gleichzeitig, und wenn daher τ eine obere Grenze erreicht hat, die hier kurz mit τ bezeichnet wurde, so hat ω den durch die Gleichung

$$20) \qquad \tan\tau = \frac{\sin 2\omega}{p+\cos 2\omega} \quad \text{oder} \quad \sin(2\omega - \tau) = p \sin \tau$$

bestimmten Werth angenommen. Aus der vorhergehenden Gleichung folgt jetzt

$$\int_0^\tau \frac{d\tau}{\sqrt{1-p^2 \sin^2\tau}} = \frac{2}{1+p}\int_0^\omega \frac{d\omega}{\sqrt{1-\frac{4p}{(1+p)^2}\sin^2\omega}},$$

d. i. wenn zur Abkürzung

21) $$\frac{2\sqrt{p}}{1+p} = q, \quad \text{mithin } p = \frac{1-\sqrt{1-q^2}}{1+\sqrt{1-q^2}}$$

gesetzt wird,

22) $$F(p,\tau) = \frac{2}{1+p} F(q,\omega),$$

und hierin liegt die Reduction eines elliptischen Integrales auf ein zweites von anderem Modulus und anderer Amplitude.

In Beziehung auf die Grössenverhältnisse zwischen p und q sowie zwischen τ und ω verdient Folgendes bemerkt zu werden. Wegen $p < 1$ ist $(1+p)^2 < 4$ und

$$\frac{4p}{(1+p)^2} > p > p^2, \text{ d. i. } q^2 > p^2 \text{ oder } q > p.$$

Aus Nro. 20) ergiebt sich ferner

$$\sin(2\omega - \tau) < \sin\tau, \text{ also } 2\omega - \tau < \tau \text{ oder } \omega < \tau.$$

Die Gleichung 22) zeigt demnach, wie ein elliptisches Integral auf ein anderes von grösserem Modulus und von kleinerer Amplitude zurückgeführt werden kann. Ertheilt man der Gleichung 22) die umgekehrte Form

23) $$F(q,\omega) = \frac{1+p}{2} F(p,\tau),$$

indem man q und ω als gegeben, p und τ als hieraus abgeleitet ansieht, so sagt die Gleichung 23), dass sich jedes elliptische Integral auf ein anderes von kleinerem Modulus und von grösserer Amplitude reduciren lässt.

Die beiden hiermit gewonnenen Theoreme liefern zwei bemerkenswerthe Methoden zur numerischen Berechnung des Werthes von $F(k,\varphi)$; sie bestehen einfach darin, dass man entweder den einen oder den anderen Satz mehrmals nacheinander auf das gegebene Integral anwendet.

Im ersten Falle berechnet man eine Reihe wachsender Moduli k_1, k_2, etc. und zugleich eine Reihe abnehmender Amplituden φ_1, φ_2, etc. mittelst der Formeln

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad k_2 = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}, \ldots$$

$$sin(2\varphi_1 - \varphi) = k\,sin\,\varphi, \qquad sin(2\varphi_2 - \varphi_1) = k_1\,sin\,\varphi_1, \ldots$$

und hat dann die entsprechenden Gleichungen

$$F(k, \varphi) = \frac{2}{1+k}F(k_1, \varphi_1), \quad F(k_1, \varphi_1) = \frac{2}{1+k_1}F(k_2, \varphi_2), \text{ etc.}$$

Aus diesen zusammen folgt, wenn bis k_n und φ_n gegangen wird,

$$F(k, \varphi) = \frac{2}{1+k}\cdot\frac{2}{1+k_1}\cdot\frac{2}{1+k_2}\cdots\frac{2}{1+k_{n-1}}F(k_n, \varphi_n),$$

oder kürzer

$$F(k, \varphi) = F(k_n, \varphi_n)\sqrt{\frac{k_1\,k_2\,k_3\,..\,k_{n-1}}{k}.\,k_n}$$

Zufolge des Umstandes, dass die Moduli fortwährend wachsen, ohne die Einheit zu überschreiten, muss k_n bei unendlich wachsenden n gegen eine bestimmte Grenze $\leqq 1$ convergiren. Sie bestimmt sich leicht aus der Relation

$$k_{n+1} = \frac{2\sqrt{k_n}}{1+k_n},$$

welche giebt

$$\frac{1-k_{n+1}}{1-k_n} = \frac{1-\sqrt{k_n}}{1+\sqrt{k_n}}\cdot\frac{1}{1+k_n},$$

und wonach auf alle Fälle

$$Lim\frac{1-k_{n+1}}{1-k_n} < 1$$

ist. Zufolge eines bekannten Satzes (Theil I., Seite 208) ist nun $Lim(1-k_n) = 0$ oder $Lim\,k_n = 1$. Weil ferner die Amplituden unausgesetzt abnehmen, ohne negativ zu werden, so muss $Lim\,\varphi_n$ eine bestimmte endliche Grösse Φ sein, welche sich aus der obigen Rechnung von selbst ergiebt. Nach diesen Bemerkungen ist

$$Lim\,F(k_n, \varphi_n) = \int_0^{\Phi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-sin^2\varphi}} = l\,tan(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\Phi)$$

und hierdurch verwandelt sich die vorige Formel für $F(k, \varphi)$ in die folgende

$$F(k, \varphi) = l\,tan(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\Phi)\,.\sqrt{\frac{k_1\,k_2\,k_3\,\ldots}{k}}.$$

Dieselbe gewährt namentlich bei grossen k eine bequeme Rechnung, weil dann schon k_3, k_4 der Grenze 1 ausserordentlich nahe kommen. So ist z. B. für $k = \frac{24}{25}$

$$k = 0{,}96; \quad k_1 = 0{,}999\,7917; \quad k_2 = 0{,}999\,9999;$$

mithin auf sieben Decimalen $k_2 = 1$. Nimmt man ferner $\varphi = \frac{1}{3}\pi$, so erhält man

$$\begin{aligned} & & \varphi &= 60^0\,0'\,0''; \\ 2\varphi_1 - \varphi &= 56^0\,14'\,28''\,30, & \varphi_1 &= 58^0\,7'\,14''\,15; \\ 2\varphi_2 - \varphi_1 &= 58^0\;\;6'\,50'', & \varphi_2 &= 58^0\,6'\,39''\,57; \end{aligned}$$

wegen $k_2 = k_3 \cdots = 1$ bricht hier die Rechnung von selbst ab und giebt

$$\varphi_2 = \Phi = 58^0\,6'\,39''\,57.$$

Es ist folglich

$$F(\tfrac{24}{25}, \tfrac{1}{3}\pi) = l\,tan\,74^0\,3'\,19''\,79 \,.\, \sqrt{\frac{0{,}999\,7917}{0{,}96}} = 1{,}278522.$$

Will man dagegen $F(k, \varphi)$ durch successive Verkleinerung des Modulus und Vergrösserung der Amplitude berechnen, so benutzt man die Formel 23), worin p aus der zweiten Gleichung in Nro. 21), und τ aus der Gleichung 20) zu bestimmen ist. Die letztere nimmt eine für die Praxis bequemere Form an, wenn in der Gleichung

$$tan(\tau - \omega) = \frac{tan\,\tau - tan\,\omega}{1 + tan\,\tau\,tan\,\omega}$$

rechter Hand für $tan\,\tau$ sein Werth gesetzt und Alles durch $sin\,\omega$ und $cos\,\omega$ ausgedrückt wird; es ergiebt sich nämlich

$$tan(\tau - \omega) = \frac{1 - p}{1 + p}\,tan\,\omega = \sqrt{1 - q^2}\,tan\,\omega.$$

Berechnet man nun der Reihe nach die Grössen k_1, k_2, etc. und φ_1, φ_2, etc. nach den Formeln

$$k_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - k^2}}{1 + \sqrt{1 - k^2}}, \quad k_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - k_1^2}}{1 + \sqrt{1 - k_1^2}}, \ldots$$

$$tan(\varphi_1 - \varphi) = \sqrt{1 - k^2}\,tan\,\varphi, \quad tan(\varphi_2 - \varphi_1) = \sqrt{1 - k_1^2}\,tan\,\varphi_1, \ldots$$

so hat man als entsprechende Gleichungen

$$F(k, \varphi) = \frac{1 + k_1}{2} F(k_1, \varphi_1), \quad F(k_1, \varphi_1) = \frac{1 + k_2}{2} F(k_2, \varphi_2), \ldots$$

und es ist folglich, wenn bis k_n und φ_n gegangen wird,

$$F(k, \varphi) = (1 + k_1)(1 + k_2) \ldots (1 + k_n)\,\frac{F(k_n, \varphi_n)}{2^n}.$$

Der Grenzwerth, gegen welchen k_n durch Abnahme convergirt, findet sich durch die Bemerkung, dass

$$\frac{k_{n+1}}{k_n} = \frac{1 - \sqrt{1 - k_n^2}}{k_n(1 + \sqrt{1 - k_n^2})} = \frac{k_n}{(1 + \sqrt{1 - k_n^2})^2}$$

mithin auf alle Fälle

$$Lim \frac{k_{n+1}}{k_n} < 1$$

ist; dies giebt $Lim\, k_n = 0$. Hieraus folgt weiter

$$Lim \frac{F(k_n, \varphi_n)}{2^n} = Lim \int_0^{\varphi_n} \frac{d\varphi}{2^n \sqrt{1 - k_n^2 \sin^2\varphi}}$$

$$= Lim \int_0^{\varphi_n} \frac{d\varphi}{2^n} = Lim \frac{\varphi_n}{2^n};$$

dieser Grenzwerth, welcher sich bei der Berechnung der wachsenden Amplituden von selbst ergeben muss, heisse Φ. Nach den gemachten Bemerkungen hat man nun

$$F(k, \varphi) = \Phi \,.\, (1 + k_1)(1 + k_2)(1 + k_3) \ldots$$

Aus der Gleichung $\tan(\varphi_{n+1} - \varphi_n) = \sqrt{1 - k_n^2}\, \tan\varphi_n$ geht übrigens hervor, dass bei klein gewordenen k_n nahezu $\varphi_{n+1} - \varphi_n = \varphi_n$, also jede folgende Amplitude beiläufig das Doppelte ihrer Vorgängerin sein muss. Genau findet diese Beziehung im Falle $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ statt; es ist dann $\varphi_1 = \pi$, $\varphi_2 = 2\pi$, $\varphi_3 = 4\pi$, ... mithin

$$\Phi = Lim \frac{\varphi_n}{2^n} = \frac{\pi}{2}$$

und

$$F(k, \tfrac{1}{2}\pi) = \tfrac{1}{2}\pi \,.\, (1 + k_1)(1 + k_2)(1 + k_3) \ldots.$$

Der Vergleich mit der vorigen Formel giebt

$$F(k, \tfrac{1}{2}\pi) : F(k, \varphi) = \tfrac{1}{2}\pi : \Phi,$$

und hieraus erhellt die analytische Bedeutung von Φ.

Besonders elegant gestaltet sich diese Berechnungsmethode, wenn man sie auf das Integral

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}} = \frac{1}{a} F\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \varphi\right)$$

anwendet, welches kurz $f(a, b, \varphi)$ heissen möge. Hier ist

$$k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad k_1 = \frac{a - b}{a + b}, \quad 1 + k_1 = \frac{2a}{a + b},$$

$$\tan(\varphi_1 - \varphi) = \frac{b}{a} \tan\varphi,$$

mithin bei einmaliger Transformation

$$f(a, b, \varphi) = \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{a+b} \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 \sin^2 \varphi_1}}$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{\frac{1}{4}(a+b)^2 \cos^2 \varphi_1 + (\sqrt{ab})^2 \sin^2 \varphi_1}},$$

und wenn zur Abkürzung

$$a_1 = \tfrac{1}{2}(a+b), \quad b_1 = \sqrt{ab}$$

gesetzt wird, so gilt die einfache Relation

$$f(a, b, \varphi) = \tfrac{1}{2} f(a_1, b_1\, \varphi_1).$$

Um dieselbe mehrmals nach einander anzuwenden, berechnet man der Reihe nach folgende Grössen

$$\begin{aligned} a_1 &= \tfrac{1}{2}(a + b), & b_1 &= \sqrt{ab}, \\ a_2 &= \tfrac{1}{2}(a_1 + b_1), & b_2 &= \sqrt{a_1 b_1}, \\ a_3 &= \tfrac{1}{2}(a_2 + b_2), & b_3 &= \sqrt{a_2 b_2}, \\ &\cdots & &\cdots \end{aligned}$$

$$\tan(\varphi_1 - \varphi) = \frac{b}{a} \tan \varphi, \qquad \tan(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{b_1}{a_1} \tan \varphi_1,$$

$$\tan(\varphi_3 - \varphi_2) = \frac{b_2}{a_2} \tan \varphi_2, \ldots$$

und erhält, bis a_n, b_n, φ_n gehend,

$$f(a, b, \varphi) = \frac{1}{2^n} f(a_n, b_n, \varphi_n) = \int_0^{\varphi_n} \frac{d\varphi_n}{2^n \sqrt{a_n^2 \cos^2 \varphi_n + b_n^2 \sin^2 \varphi_n}}.$$

Nach dem Früheren ist $Lim\, k_n = 0$, d. h. im vorliegenden Falle

$$Lim \sqrt{1 - \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2} = 0 \text{ mithin } Lim \frac{b_n}{a_n} = 1;$$

die Grössen a_n und b_n convergiren also gegen eine gemeinschaftliche Grenze, welche das arithmetisch-geometrische Mittel aus a und b genannt wird. Bezeichnet man dasselbe mit c, so ist bei unendlich wachsenden n

$$Lim \frac{f(a_n, b_n, \varphi_n)}{2^n} = Lim \int_0^{\varphi_n} \frac{d\varphi}{2^n c} = \frac{1}{c} Lim \frac{\varphi_n}{2^n}$$

und nach dem Vorigen

$$f(a, b, \varphi) = \frac{\Phi}{c},$$

wo Φ wiederum den Grenzwerth des Quotienten $\varphi_n : 2^n$ bedeutet. Im speciellen Falle $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ wird $\Phi = \frac{1}{2}\pi$, mithin

$$f(a, b, \tfrac{1}{2}\pi) = \frac{\frac{1}{2}\pi}{c}.$$

Als Beispiel diene die Berechnung des Integrales

$$\int_0^{\frac{1}{3}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{25^2 \cos^2\varphi + 7^2 \sin^2\varphi}},$$

welches für die auseinandergesetzte Methode insofern ungünstig ist, als a und b bedeutend differiren. Man hat

$$\begin{aligned}
a &= 25{,}0000000, & b &= 7{,}0000000;\\
a_1 &= 16{,}0000000, & b_1 &= 13{,}2287566;\\
a_2 &= 14{,}6143783, & b_2 &= 14{,}5485431;\\
a_3 &= 14{,}5814607, & b_3 &= 14{,}5814235;\\
a_4 &= 14{,}5814421 = & b_4 &= 14{,}5814421 = c;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & & \varphi &= 60^0\,0'\,0'',\\
\varphi_1 - \varphi &= 25^0\,52'\,19''\,87, & \varphi_1 &= 85^0\,52'\,19''\,87,\\
\varphi_2 - \varphi_1 &= 85^0\,0'\,41''\,23, & \varphi_2 &= 170^0\,53'\,1''\,10,\\
\varphi_3 - \varphi_2 &= 170^0\,55'\,26''\,47, & \varphi_3 &= 341^0\,48'\,27''\,57,\\
\varphi_4 - \varphi_3 &= 341^0\,48'\,27''\,72, & \varphi_4 &= 683^0\,36'\,55''\,29,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\varphi_1 &= 42^0\,56'\,9''\,93,\\
\tfrac{1}{4}\varphi_2 &= 42^0\,43'\,15''\,27,\\
\tfrac{1}{8}\varphi_3 &= 42^0\,43'\,33''\,45,\\
\tfrac{1}{16}\varphi_4 &= 42^0\,43'\,33''\,46,
\end{aligned}$$

$$\Phi = arc\,42^0\,43'\,33''\,456 = 0{,}7457087,$$

$$f(25,\,7,\,\tfrac{1}{3}\pi) = \frac{0{,}7457087}{14{,}58144} = 0{,}0511409.$$

Das nach der ersten Methode gerechnete Beispiel liefert hierzu die Probe; es ist nämlich

$$f(25,\,7,\,\tfrac{1}{3}\pi) = \tfrac{1}{25} F(\tfrac{24}{25}, \tfrac{1}{3}\pi) = 0{,}04\,.\,1{,}278522 = 0{,}05114088.$$

Bei denselben Werthen von a und b erhält man für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$

$$f(25,\,7,\,\tfrac{1}{2}\pi) = \frac{\frac{1}{2}\pi}{c} = \frac{1{,}5707963}{14{,}5814421} = 0{,}1077257,$$

woraus sich durch Multiplication mit 25 der Werth von $F(\frac{24}{25}, \frac{1}{2}\pi) = 2{,}6931425$ herleiten lässt.

III. Die Landen'sche Substitution für Integrale zweiter Art.

Die im vorigen Abschnitte erwähnte Substitution

$$\tan\tau = \frac{\sin 2\omega}{p + \cos 2\omega},$$

aus welcher die nachstehenden drei Gleichungen folgen:

$$\cos\tau = \frac{p + \cos 2\omega}{\sqrt{1 + 2p\cos 2\omega + p^2}},$$

$$\sqrt{1 - p^2\sin^2\tau} = \frac{1 + p\cos 2\omega}{\sqrt{1 + 2p\cos 2\omega + p^2}},$$

$$d\tau = \frac{2(1 + p\cos 2\omega)}{1 + 2p\cos 2\omega + p^2}\,d\omega,$$

lässt sich auch auf elliptische Integrale zweiter Art anwenden und führt dann zu gleichfalls bemerkenswerthen Resultaten.

Benutzt man nämlich die angegebene Substitution zur Transformation der rechten Seite folgender Gleichung

$$E(p, \tau) + p\sin\tau = \int_0^\tau \left(\sqrt{1 - p^2\sin^2\tau} + p\cos\tau\right) d\tau,$$

so erhält man

$$E(p, \tau) + p\sin\tau = 2\int_0^\omega \frac{1 + p\cos 2\omega}{\sqrt{1 + 2p\cos 2\omega + p^2}}\,d\omega,$$

$$= \frac{2}{1 + p}\int_0^\omega \frac{1 + p(1 - 2\sin^2\omega)}{\sqrt{1 - q^2\sin^2\omega}}\,d\omega,$$

wobei wie früher

$$q = \frac{2\sqrt{p}}{1 + p}$$

gesetzt worden ist. Für die rechte Seite der vorigen Gleichung kann man schreiben

$$\int_0^\omega \left[(1 + p)\sqrt{1 - q^2\sin^2\omega} + (1 - p)\frac{1}{\sqrt{1 - q^2\sin^2\omega}}\right] d\omega$$

$$= (1 + p)\,E(q, \omega) + (1 - p)\,F(q, \omega),$$

und damit gelangt man zu der Formel

24) $E(p, \tau) + p \sin \tau = (1+p) E(q, \omega) + (1-p) F(q, \omega)$.

Wegen $F(q, \omega) = \frac{1}{2}(1+p) F(p, \tau)$ ist ferner

$$E(p, \tau) + p \sin \tau = (1+p) E(q, \omega) + \tfrac{1}{2}(1-p^2) F(p, \tau)$$

oder

25) $\frac{1}{2}(1-p^2) F(p, \tau) = E(p, \tau) - (1+p) E(q, \omega) + p \sin \tau$,

und hierin liegt der Satz, dass jedes elliptische Integral erster Gattung durch zwei elliptische Integrale zweiter Gattung ausgedrückt werden kann.

Die obigen Formeln gestatten ganz ähnliche Anwendungen wie die früheren einfachen Relationen 22) und 23); man benutzt sie entweder, um den Modulus eines elliptischen Integrales zweiter Art successiv zu vergrössern und zugleich die Amplitude zu verkleinern, oder um den Modulus zu verkleinern und die Amplitude zu vergrössern.

Wir wollen dieses Verfahren an dem allgemeineren Integrale

$$G(p, \tau) = \int_0^\tau \frac{\lambda + \mu \sin^2 \tau}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \tau}} d\tau$$

zeigen, welches aus elliptischen Integralen erster und zweiter Art besteht, falls λ und μ irgendwelche Constanten bedeuten. Transformirt man nämlich die identische Gleichung

$$G(p, \tau) - \frac{\mu}{p} \sin \tau$$

$$= \int_0^\tau \left(\lambda + \mu \frac{p \sin^2 \tau - \cos \tau \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \tau}}{p}\right) \frac{d\tau}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \tau}}$$

mittelst der vorhin erwähnten Substitution und berücksichtigt hierbei die Relation

$$p \sin^2 \tau - \cos \tau \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \tau} = -\cos 2\omega = 2 \sin^2 \omega - 1,$$

so erhält man

$$G(p, \tau) - \frac{\mu}{p} \sin \tau = \frac{2}{1+p} \int_0^\omega \left(\lambda + \mu \frac{2 \sin^2 \omega - 1}{p}\right) \frac{d\omega}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 \omega}}.$$

Durch Einführung der Abkürzungen

26) $$\lambda - \frac{\mu}{p} = \lambda_1, \qquad \frac{2\mu}{p} = \mu_1$$

wird hieraus

$$G(p, \tau) - \tfrac{1}{2}\mu_1 \sin\tau = \frac{2}{1+p}\int_0^\omega \frac{\lambda_1 + \mu_1 \sin^2\omega}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2\omega}}\, d\omega.$$

Das Integral rechter Hand hat wieder die Form von G und möge mit $G_1(q, \omega)$ bezeichnet werden, um gleichzeitig anzudeuten, dass λ_1 und μ_1 an die Stellen von λ und μ getreten sind. Zufolge der Gleichung

$$27)\qquad G(p, \tau) = \frac{2}{1+p}\, G_1(q, \omega) + \tfrac{1}{2}\mu_1 \sin\tau$$

ist nun das Integral G auf ein anderes derselben Art reducirt, welches einen grösseren Modulus q und eine kleinere Amplitude ω besitzt. Wendet man diese Reduction mehrmals nach einander auf das Integral

$$G = \int_0^\varphi \frac{\lambda + \mu \sin^2\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}\, d\varphi$$

an, so erhält man die folgende Reihe der Gleichungen

$$G = \frac{2}{1+k}\, G_1 + \tfrac{1}{2}\mu_1 \sin\varphi,$$

$$G_1 = \frac{2}{1+k_1}\, G_2 + \tfrac{1}{2}\mu_2 \sin\varphi_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und hierin wird man so weit gehen, bis mit hinreichender Genauigkeit $k_n = 1$ gesetzt werden darf. Der Werth von G_n ist dann

$$G_n = \int_0^{\varphi_n} \frac{\lambda_n + \mu_n \sin^2\varphi}{\cos\varphi}\, d\varphi$$

$$= (\lambda_n + \mu_n)\, l \tan(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi_n) - \mu_n \sin\varphi_n,$$

und hieraus lassen sich rückwärts mittelst der obigen Formeln G_{n-1}, $G_{n-2}, \ldots G_1$, G herleiten. Die zur Ausführung dieses Gedankens erforderlichen kleinen Rechnungen übergehen wir, weil die gleich zu erwähnende zweite Methode bequemere Formeln liefert.

Aus den Gleichungen 26) und 27) folgt umgekehrt

$$G_1(q, \omega) = \frac{1+p}{2}\left\{G(p, \tau) - \tfrac{1}{2}\mu_1 \sin\tau\right\},$$

$$\mu = \tfrac{1}{2}\mu_1 p, \qquad \lambda = \lambda_1 + \tfrac{1}{2}\mu_1.$$

Denkt man sich λ_1 und μ_1 gegeben, etwa $\lambda_1 = \alpha$, $\mu_1 = \beta$, und daraus $\lambda = \alpha_1$, $\mu = \beta_1$ hergeleitet, schreibt man ferner G für die nunmehr primitive Function G_1 und ersetzt demnach die abgeleitete Function G durch G_1, so hat man

$$G(q, \omega) = \frac{1+p}{2}\left\{G_1(p, \tau) - \tfrac{1}{2}\beta \sin\tau\right\},$$
$$\alpha_1 = \alpha + \tfrac{1}{2}\beta, \quad \beta_1 = \tfrac{1}{2}\beta p,$$

und damit ist das Integral G auf ein anderes G_1 zurückgeführt, welches einen kleineren Modulus p und eine grössere Amplitude τ besitzt. Diese Relation gestattet eine mehrmalige Anwendung, indem man aus der Gleichung

$$G = \int_0^{\varphi} \frac{\alpha + \beta \sin^2\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}\, d\varphi$$

die folgenden Gleichungen herleitet

$$G = \frac{1+k_1}{2}\,(G_1 - \tfrac{1}{2}\beta \sin\varphi_1),$$
$$G_1 = \frac{1+k_2}{2}\,(G_2 - \tfrac{1}{2}\beta_1 \sin\varphi_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

in denen $k_1, k_2, \ldots$ die abnehmenden Moduli, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ die wachsenden Amplituden und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots$ Grössen bezeichnen, welche durch die Formeln

$$\alpha_1 = \alpha + \tfrac{1}{2}\beta, \qquad \beta_1 = \tfrac{1}{2}\beta k_1,$$
$$\alpha_2 = \alpha_1 + \tfrac{1}{2}\beta_1, \qquad \beta_2 = \tfrac{1}{2}\beta_1 k_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

bestimmt werden. Denkt man sich die vorigen Gleichungen bis G_n fortgesetzt, so lässt sich G durch G_n ausdrücken, und zwar geschieht dies am einfachsten, wenn man jene Gleichungen mit den entsprechenden Factoren

$$1, \quad \frac{1+k_1}{2}, \quad \frac{1+k_1}{2}\cdot\frac{1+k_2}{2}, \ldots$$

multiplicirt und die Producte addirt. Dies giebt

$$G = \frac{1+k_1}{2}\cdot\frac{1+k_2}{2}\cdot\frac{1+k_3}{2}\cdots\frac{1+k_n}{2}\,G_n$$
$$-\tfrac{1}{2}\left\{\frac{1+k_1}{2}\,\beta\sin\varphi_1 + \frac{1+k_1}{2}\cdot\frac{1+k_2}{2}\,\beta_1 \sin\varphi_2 + \cdots\right.$$
$$\left.\cdots + \frac{1+k_1}{2}\cdot\frac{1+k_2}{2}\cdots\frac{1+k_n}{2}\,\beta_{n-1}\sin\varphi_n\right\}$$

und darin ist

$$G_n = \int_0^{\varphi_n} \frac{\alpha_n + \beta_n \sin^2\varphi}{\sqrt{1 - k_n^2 \sin^2\varphi}}\, d\varphi,$$

$$\alpha_n = \alpha + \tfrac{1}{2}\beta\left(1 + \frac{k_1}{2} + \frac{k_1 k_2}{2^2} + \cdots + \frac{k_1 k_2 \ldots k_n}{2^n}\right)$$

$$\beta_n = \beta \frac{k_1 k_2 k_3 \ldots k_n}{2^n}.$$

Wird nun n so gross genommen, dass k_n mit hinreichender Genauigkeit für Null gelten darf, so ist um so mehr $\beta_n = 0$, mithin

$$G_n = \int_0^{\varphi_n} \alpha_n\, d\varphi = \alpha_n \varphi_n,$$

$$\frac{1+k_1}{2} \cdot \frac{1+k_2}{2} \cdot \frac{1+k_3}{2} \ldots \frac{1+k_n}{2} G_n$$
$$= \alpha_n (1+k_1)(1+k_2)(1+k_3) \ldots (1+k_n) \frac{\varphi_n}{2^n},$$

folglich ist genau für $n = \infty$, wenn wie früher $Lim \frac{\varphi_n}{2^n}$ mit Φ bezeichnet und $Lim\, \alpha_n = A$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} G = A\,\Phi (1+k_1)(1+k_2)(1+k_3) \ldots . \\ - \tfrac{1}{2}\beta \left\{ \frac{1+k_1}{2} \sin\varphi_1 + \frac{(1+k_1)(1+k_2)}{2^2} \cdot \frac{k_1}{2} \sin\varphi_2 \right. \\ \left. + \frac{(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)}{2^3} \cdot \frac{k_1 k_2}{2^2} \sin\varphi_3 + \cdots \right\}, \end{aligned}$$

$$A = \alpha + \tfrac{1}{2}\beta\left\{1 + \frac{k_1}{2} + \frac{k_1 k_2}{2^2} + \frac{k_1 k_2 k_3}{2^3} + \ldots\right\}.$$

Zur Abkürzung der für G gefundenen Formel bemerken wir erstens, dass $\Phi(1+k_1)(1+k_2) \ldots = F(k, \varphi)$ ist, und dass zweitens aus den Gleichungen

$$\frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1} = k, \quad \frac{2\sqrt{k_2}}{1+k_2} = k_1, \quad \frac{2\sqrt{k_3}}{1+k_3} = k_2, \ldots .$$

die nachstehenden folgen

$$1 + k_1 = \frac{2\sqrt{k_1}}{k}, \quad 1 + k_2 = \frac{2\sqrt{k_2}}{k_1}, \quad 1 + k_3 = \frac{2\sqrt{k_3}}{k_2}, \ldots$$

Nach allen diesen Bemerkungen zusammen ergiebt sich zur Berechnung von G folgende Vorschrift: man berechne zunächst die abnehmenden Moduli und die wachsenden Amplituden mittelst der Formeln

$$k_1 = \frac{1 - \sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}, \quad k_2 = \frac{1-\sqrt{1-k_1^2}}{1+\sqrt{1-k_1^2}}, \ldots$$

$$tan\,(\varphi_1 - \varphi) = \sqrt{1-k^2}\, tan\,\varphi,\; tan\,(\varphi_2 - \varphi_1) = \sqrt{1-k_1^2}\, tan\,\varphi_1, \ldots$$

so ist schliesslich

$$28)\quad \int\limits_0^{\varphi} \frac{\alpha + \beta\, sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}}\, d\varphi$$

$$= F(k, \varphi)\left\{\alpha + \tfrac{1}{2}\beta\,(1 + \tfrac{1}{2}k_1 + \tfrac{1}{4}k_1 k_2 + \tfrac{1}{8}k_1 k_2 k_3 + \cdots)\right\}$$

$$- \frac{\beta}{k}\left\{\tfrac{1}{2}\sqrt{k_1}\, sin\,\varphi_1 + \tfrac{1}{4}\sqrt{k_1 k_2}\, sin\,\varphi_2 + \tfrac{1}{8}\sqrt{k_1 k_2 k_3}\, sin\,\varphi_3 + \cdots\right\}.$$

Für $\alpha = 1$, $\beta = -k^2$ erhält man sofort eine Formel zur Berechnung von $E(k, \varphi)$, nämlich

$$29)\quad E(k,\varphi) = F(k,\varphi)\left\{1 - \tfrac{1}{2}k^2(1 + \tfrac{1}{2}k_1 + \tfrac{1}{4}k_1 k_2 + \cdots)\right\}$$
$$+ k\left\{\tfrac{1}{2}\sqrt{k_1}\, sin\,\varphi_1 + \tfrac{1}{4}\sqrt{k_1 k_2}\, sin\,\varphi_2 + \cdots\cdots\right\}.$$

Im speciellen Falle $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ wird $\varphi_1 = \pi$, $\varphi_2 = 2\pi$, $\varphi_3 = 4\pi$ etc., mithin einfacher

$$30)\quad E(k, \tfrac{1}{2}\pi) = F(k, \tfrac{1}{2}\pi)\left\{1 - \tfrac{1}{2}k^2(1 + \tfrac{1}{2}k_1 + \tfrac{1}{4}k_1 k_2 + \cdots)\right\}.$$

Nach diesen Vorschriften lässt sich auch das Integral

$$\int\limits_0^{\varphi} \sqrt{a^2 cos^2\varphi + b^2 sin^2\varphi}\, d\varphi = a E\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \varphi\right)$$

berechnen, wobei das arithmetisch-geometrische Mittel zwischen a und b wieder benutzt werden kann. Es sind dann folgende Grössen zu bestimmen

$$a_1 = \tfrac{1}{2}(a+b), \quad b_1 = \sqrt{ab}, \quad k_1 = \frac{\frac{1}{2}(a-b)}{a_1},$$

$$a_2 = \tfrac{1}{2}(a_1+b_1), \quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1}, \quad k_2 = \frac{\frac{1}{2}(a_1-b_1)}{a_2},$$

. . . .

$$tan\,(\varphi_1 - \varphi) = \frac{b}{a}\, tan\,\varphi, \quad tan\,(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{b_1}{a_1}\, tan\,\varphi_1, \ldots\ldots$$

und wenn $Lim\, a_n = Lim\, b_n = c$, $Lim\,(\varphi_n : 2^n) = \Phi$ gesetzt wird, so ergiebt sich

$$31)\quad \int\limits_0^{\varphi} \sqrt{a^2 cos^2 \varphi + b^2 sin^2 \varphi}\, d\varphi$$

$$= \frac{\Phi}{c} \left\{ a^2 - (a-b)\, a_1 \left(1 + \tfrac{1}{2} k_1 + \tfrac{1}{4} k_1 k_2 + \tfrac{1}{8} k_1 k_2 k_3 + \cdots\right)\right\}$$

$$+ \sqrt{2(a-b)\, a_1} \left\{ \tfrac{1}{2} \sqrt{k_1}\, sin\, \varphi_1 + \tfrac{1}{4} \sqrt{k_1 k_2}\, sin\, \varphi_2 + \cdots \right\}$$

und specieller für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$

$$32)\quad \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{a^2 cos^2 \varphi + b^2 sin^2 \varphi}\, d\varphi$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\pi}{c} \left\{ a^2 - (a-b)\, a_1 \left(1 + \tfrac{1}{2} k_1 + \tfrac{1}{4} k_1 k_2 + \tfrac{1}{8} k_1 k_2 k_3 + \cdots\right)\right\}.$$

Beispielweise sei, wie im vorigen Abschnitte, $a = 25$, $b = 7$; aus den dort berechneten Werthen von a_1, b_1, a_2, b_2 etc. erhält man

$$\begin{aligned}
k_1 &= 0{,}5625000, & \tfrac{1}{2} k_1 &= 0{,}2812500,\\
k_2 &= 0{,}0948122, & \tfrac{1}{4} k_1 k_2 &= 0{,}0133330,\\
k_3 &= 0{,}0022575, & \tfrac{1}{8} k_1 k_2 k_3 &= 0{,}0000151,\\
k_4 &= 0{,}0000013, & \tfrac{1}{16} k_1 \ldots k_4 &= 0{,}0000000,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2} \sqrt{k_1}\ \ sin\, \varphi_1 &= +\ 0{,}3740272,\\
\tfrac{1}{4} \sqrt{k_1 k_2}\ \ sin\, \varphi_2 &= +\ 0{,}0091474,\\
\tfrac{1}{8} \sqrt{k_1 k_2 k_3}\ sin\, \varphi_3 &= -\ 0{,}0004282,\\
\tfrac{1}{16} \sqrt{k_1 \ldots k_4}\ sin\, \varphi_4 &= -\ 0{,}0000005,
\end{aligned}$$

$$\int\limits_0^{\frac{1}{3}\pi} \sqrt{25^2 cos^2 \varphi + 7^2 sin^2 \varphi}\ d\varphi = 22{,}081387,$$

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{25^2 cos^2 \varphi + 7^2 sin^2 \varphi}\ d\varphi = 27{,}163662.$$

Dieses Beispiel zeigt, dass, selbst bei ungünstigen Verhältnissen zwischen a und b, die Rectification eines Ellipsenbogens weit leichter nach der vorigen Methode als nach den Formeln auf Seite 387 des ersten Theiles ausgeführt werden kann. Bei den angegebenen Zahlwerthen ist nämlich die numerische Excentricität $\varepsilon = \frac{24}{25}$ wenig von der Einheit verschieden, und in Folge davon convergiren die nach Potenzen von ε fortschreitenden Reihen so langsam, dass man wenigstens 50 Glieder derselben summiren müsste, um 6 richtige Decimalstellen zu erhalten.

Auf die elliptischen Integrale dritter Art lässt sich die Landen'sche Substitution zwar gleichfalls anwenden, führt aber dabei zu complicirten und praktisch nicht brauchbaren Formeln. Die Entwickelung derselben können wir um so eher übergehen, als sich später zeigen wird, dass die Integrale dritter Art, welche Functionen dreier Variabelen darstellen, auf gewisse Functionen zweier Variabelen zurückführbar sind *).

IV. Reihenentwickelungen für die Integrale erster und zweiter Art.

Wir beschäftigen uns zunächst mit der Entwickelung der vollständigen Integrale $F(k, \frac{1}{2}\pi)$, $E(k, \frac{1}{2}\pi)$ und bezeichnen dieselben kurz mit K und E.

a. Entwickelt man in der Gleichung

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

den Factor von $d\varphi$ mittelst des binomischen Satzes und integrirt dann die einzelnen Reihenglieder unter Anwendung der Formel

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots . (2n)} \cdot \frac{\pi}{2},$$

so erhält man augenblicklich

*) Die Arbeiten von John Landen, nach welchem die besprochene Substitution genannt wird, stehen in den Philosophical Transactions von den Jahren 1771 und 1775, sowie in den Mathematical Memoirs vom Jahre 1780. Die successive Transformation der elliptischen Integrale zeigte Lagrange in den Mémoires de l'Académie à Turin, 1784 und 1785, Tome II, woran sich die weitere Ausführung von Legendre im Traité des fonctions elliptiques, Tome I, Chap. XVII. bis XIX. anschliesst. Das arithmetisch-geometrische Mittel hat Gauss eingeführt in der berühmten Abhandlung: Determinatio attractionis etc., Commentat. societ. reg. Gotting. rec. Vol. IV, 1820. Ueber die geometrische Bedeutung der Landen'schen Substitution vergl. Jacobi, Extrait d'une lettre à M. Hermite, Crelle's Journal, Bd. 32, S. 176, sowie Küpper, Démonstration géometrique etc., Crelle's Journ., Bd. 55, S. 89.

$$33)\quad K=\frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2k^4+\left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2k^6+\cdots\right\}.$$

Zur Entwickelung von E kann man entweder auf analoge Weise verfahren oder auch die auf Seite 302 bewiesene Relation

$$\frac{\partial F(k,\varphi)}{\partial k}=\frac{1}{1-k^2}\left\{\frac{E(k,\varphi)-(1-k^2)F(k,\varphi)}{k}-\frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{\varDelta(k,\varphi)}\right\}$$

benutzen, welche für $\varphi=\frac{1}{2}\pi$ übergeht in

$$34)\qquad E=1-k^2)\left(K+k\frac{\partial K}{\partial k}\right).$$

Aus der schon bekannten Reihe für K folgt dann

$$35)\quad E=\frac{\pi}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{k^2}{1}-\left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2\frac{k^4}{3}-\left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2\frac{k^6}{5}-\cdots\right\}.$$

b. Etwas rascher convergirende Reihen erhält man dadurch, dass man erst mittelst der Landen'schen Substitution den Modulus verkleinert und dann die Reihenentwickelung vornimmt. Nun ist, wenn

$$k_1=\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}},\quad \tan(\varphi_1-\varphi)=\sqrt{1-k^2}\tan\varphi$$

gesetzt wird,

$$F(k,\varphi)=\frac{1+k_1}{2}F(k_1,\varphi_1)$$

und für $\varphi=\frac{1}{2}\pi$

$$F(k,\tfrac{1}{2}\pi)=\frac{1+k_1}{2}F(k_1,\pi)=(1+k_1)F(k_1,\tfrac{1}{2}\pi),$$

mithin, wenn $F(k_1,\frac{1}{2}\pi)$ nach Potenzen von k_1 entwickelt wird,

$$36)\quad K=\frac{\pi(1+k_1)}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k_1^2+\left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2k_1^4+\cdots\cdots\right\}.$$

Mit E kann man ähnlich verfahren, doch ist es kürzer, erst die Gleichung 34) so zu transformiren, dass k_1 an die Stelle von k tritt, und dann die Entwickelung in Nro. 36) anzuwenden. Man hat nun

$$E=(1-k^2)\left(K+k\frac{\partial K}{\partial k_1}:\frac{\partial k}{\partial k_1}\right),\quad k=\frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1},$$

ferner durch Substitution des Werthes von k in die Gleichung für E

$$E=\frac{1-k_1}{1+k_1}\left(\frac{1-k_1}{1+k_1}K+2k_1\frac{\partial K}{\partial k_1}\right);$$

hieraus folgt nach Nro. 36)

37 $$E = \frac{\pi(1-k_1)}{2}\left\{1 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^2 + 9\left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 k_1^4 + \cdots\right\},$$

wobei der Coefficient von k_1^{2n} ist:

$$(4n+1)\left(\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,.\,.\,(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,.\,.\,.\,(2n)}\right)^2.$$

Ersetzt man in Nro. 37) den Factor $1 - k_1$ durch $\frac{1-k_1^2}{1+k_1}$ und multiplicirt die Reihe mit $1 - k_1^2$, so wird

38) $$E = \frac{\pi}{2(1+k_1)}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^2 + \left(\frac{1}{2\,.\,4}\right)^2 k_1^4 + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2 k_1^6 + \cdots\right\}.$$

Dies giebt zugleich eine Formel für die Länge des Quadranten einer aus den Halbachsen a und b construirten Ellipse; für

$$k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad k_1 = \frac{a-b}{a+b}$$

und durch beiderseitige Multiplication mit a erhält man nämlich

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{a+b}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\,.\,4}\right)^2\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4 + \cdots\right\}.$$

Um über die praktische Brauchbarkeit dieser Reihen ein Urtheil zu gewinnen, wollen wir wenigstens bei einer derselben untersuchen, wie viel Glieder zur Erreichung einer vorgeschriebenen Genauigkeit berechnet werden müssen. Bezeichnen wir die n ersten Glieder der Reihe in Nro. 33) mit $u_0, u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ und den Rest mit R_n, so haben wir

$$K = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + R_n,$$

$$R_n = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1\,.\,3\,.\,.\,(2n-1)}{2\,.\,.4\,.\,.\,.\,(2n)}\right)^2 k^{2n}\left\{1 + \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 k^2 + \cdots\right\}.$$

Bei einigermaassen bedeutenden n ist nun annäherungsweis (Theil I., Seite 237)

$$\left(\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,.\,.\,(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,.\,.\,.\,(2n)}\right)^2 = \frac{2}{(2n+1)\pi},$$

$$\frac{2n+1}{2n+2} = 1, \qquad \frac{2n+3}{2n+4} = 1, \text{ u. s. w.}$$

also nahezu

$$R_n = \frac{k^{2n}}{2n+1}(1 + k^2 + k^4 + \cdots) = \frac{k^{2n}}{(2n+1)(1-k^2)}.$$

Soll nun die Rechnung auf δ Decimalen genau werden, so muss $R_n < \frac{1}{10^\delta}$ sein, folglich n der Bedingung

$$\frac{(2n+1)(1-k^2)}{k^{2n}} > 10^\delta$$

oder

$$\log(2n+1) + n \,.\, \log\left(\frac{1}{k^2}\right) > \delta + \log\left(\frac{1}{1-k^2}\right)$$

genügen, woraus man n durch Versuche leicht findet. Hiernach ist für $k = \frac{4}{5}$ und bei einer Genauigkeit von 6 Decimalen n so zu wählen, dass

$$\log(2n+1) + n \,.\, 0{,}19382 > 6{,}4437,$$

und hierzu gehört mindestens die Gliederzahl $n = 25$. Aehnliche Betrachtungen gelten für die übrigen Reihen, und man ersieht daraus, dass die vorigen Formeln nur bei kleinen k praktischen Werth besitzen.

c. Um Reihenentwickelungen zu erhalten, die für grosse, d. h. der Einheit nahe kommende k eine leichte Berechnung von K und E gestatten, schicken wir eine Erörterung über gewisse bestimmte Integrale voraus.

In der Gleichung

$$W = \int_0^\infty \frac{l(1+\beta^2 x^2)}{1+\alpha^2 x^2} dx$$

bezeichne W den noch unbekannten Werth des rechts stehenden Integrales; man erhält dann durch beiderseitige Differentiation in Beziehung auf β, welche hier aus nahe liegenden Gründen erlaubt ist,

$$\frac{\partial W}{\partial \beta} = 2\beta \int_0^\infty \frac{x^2\, dx}{(1+\alpha^2 x^2)(1+\beta^2 x^2)} = \frac{\pi}{\alpha(\alpha+\beta)},$$

mithin umgekehrt

$$W = \frac{\pi}{\alpha}\left\{l(\alpha+\beta) + \mathit{Const.}\right\}.$$

Die Constante bestimmt sich durch die Bemerkung, dass W verschwindet, wenn $\beta = 0$ wird; es ist folglich $\mathit{Const.} = -\,l\alpha$ und vermöge der ursprünglichen Bedeutung von W

$$\int_0^\infty \frac{l(1+\beta^2 x^2)}{1+\alpha^2 x^2}\,dx = \frac{\pi}{\alpha}\, l\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right).$$

Durch Substitution von

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \quad \beta = 1, \quad x = \cot\theta$$

folgt weiter

$$39)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l\sin\theta\, d\theta}{1-\varepsilon^2\sin^2\theta} = -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{l(1+\sqrt{1-\varepsilon^2})}{\sqrt{1-\varepsilon^2}},$$

worin selbstverständlich ε ein echter Bruch sein muss. Schreibt man statt dieser Gleichung die mit ihr identische

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l\sin\theta\, d\theta}{1-\varepsilon^2\sin^2\theta} = -\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2 z^2}}\cdot\frac{dz}{1+z},$$

so kann man beide Integrale leicht in convergirende Reihen entwickeln, die nach Potenzen von ε fortschreiten. Die Vergleichung der Coefficienten von ε^{2n} giebt dann

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n}\theta\,.\,l\sin\theta\, d\theta = -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\int_0^1 \frac{z^{2n}}{1+z}\,dz$$

und durch Ausführung der auf z bezüglichen Integration

$$40)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n}\theta\,.\,l\sin\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}\left\{l2 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \cdots + \frac{1}{2n}\right\}.$$

Die Formel 39) lässt sich ferner wegen der identischen Gleichung

$$1+\sqrt{1-\varepsilon^2} = \varepsilon\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}}$$

folgendermaassen darstellen

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l\sin\theta\, d\theta}{1-\varepsilon^2\sin^2\theta} = -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{l\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \frac{\pi}{4}\cdot l\left(\frac{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)$$

oder auch

$$\frac{l\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{l\,sin\theta\,d\theta}{1-\varepsilon^2 sin^2\theta} = -\int_0^1\frac{du}{1-(1-\varepsilon^2)u^2}.$$

Wir setzen hierin $\varepsilon = k\,sin\varphi$, multipliciren beiderseits mit $d\varphi$ und integriren zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{1}{2}\pi$; es ist dann

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{l(k\,sin\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{l\,sin\theta\,d\varphi\,d\theta}{1-k^2 sin^2\varphi\,sin^2\theta}$$

$$= -\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^1\frac{d\varphi\,du}{1-(1-k^2 sin^2\varphi)u^2}.$$

Das erste Integral linker Hand zerfällt in

$$lk\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}} + \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{l\,sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}}$$

$$= K\,.\,lk + \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{l\,sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}};$$

das nächste Doppelintegral wird bei umgekehrter Anordnung der Integrationen zu

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\,sin\theta\,d\theta\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{cos^2\varphi + (1-k^2 sin^2\theta)\,sin^2\varphi}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{l\,sin\theta\,d\theta}{\sqrt{1-k^2 sin^2\theta}},$$

wobei die Formel 9) auf Seite 413 des ersten Theils angewendet worden ist. Im letzten Doppelintegral giebt die umgekehrte Anordnung der Integrationen (abgesehen vom Vorzeichen)

$$\int_0^1 du\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{(1-u^2)\,cos^2\varphi + [1-(1-k^2)u^2]\,sin^2\varphi}$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)[1-(1-k^2)u^2]}} = \frac{\pi}{2}F\left(\sqrt{1-k^2},\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Bezeichnen wir zur Abkürzung $\sqrt{1-k^2}$ mit k' und $F(k', \frac{1}{2}\pi)$ mit K', so haben wir nach allen gemachten Bemerkungen

$$Klk + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l \sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = -\frac{\pi}{2}K'.$$

Die beiden hier vorkommenden Integrale sind gleich, weil auf den Integrationsbuchstaben nichts ankommt; es folgt daher

$$41)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = -\tfrac{1}{2}Klk - \tfrac{1}{4}\pi K',$$

und analog, wenn k' für k gesetzt wird,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}} = -\tfrac{1}{2}K'lk' - \tfrac{1}{4}\pi K.$$

Diese Gleichung ist es, welche bei grossen k also kleinen k' zur Berechnung von K dienen kann. Schreibt man nämlich

$$K = \frac{2}{\pi}K'\,l\left(\frac{1}{k'}\right) - \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{l\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}},$$

so hat man erstens nach Nro. 33)

$$\frac{2}{\pi}K' = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k'^2 + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 k'^4 + \left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2 k'^6 + \cdots;$$

ferner kann man $(1-k'^2\sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}$ mittelst des binomischen Satzes entwickeln und die einzelnen Reihenglieder nach Formel 40) integriren; als Resultat der angedeuteten Operationen findet sich

$$42)\qquad \begin{aligned} K = l\left(\frac{4}{k'}\right) &+ \left(\frac{1}{2}\right)^2\left[l\left(\frac{4}{k'}\right) - 1\right]k'^2 \\ &+ \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2\left[l\left(\frac{4}{k'}\right) - 1 - \frac{2}{3\,.\,4}\right]k'^4 \\ &+ \left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2\left[l\left(\frac{4}{k'}\right) - 1 - \frac{2}{3\,.\,4} - \frac{2}{5\,.\,6}\right]k'^6 \\ &+ \cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Hieraus entspringt folgende Vorschrift. Mittelst der Formeln

$$\alpha_0 = l\left(\frac{4}{k'}\right),\quad \alpha_2 = \alpha_0 - 1,$$

$$\alpha_4 = \alpha_2 - \frac{2}{3\,.\,4},\quad \alpha_6 = \alpha_4 - \frac{2}{5\,.\,6},\quad \alpha_8 = \alpha_6 - \frac{2}{7\,.\,8},\ldots\ldots$$

berechne man successiv die Grössen α_0, α_2, α_4 etc., welche, beiläufig gesagt, gegen die Grenze $l\left(\frac{1}{k'}\right)$ convergiren; nachher hat man

43) $$K = \alpha_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \alpha_2 k'^2 + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 \alpha_4 k'^4 + \cdots\cdots$$

Um die entsprechende Formel für E zu erhalten, transformiren wir erst die Gleichung 34) so, dass k' an die Stelle von k tritt. Nun ist

$$E = (1 - k^2)\left(K + k\frac{\partial K}{\partial k'} : \frac{\partial k}{\partial k'}\right)$$

und daraus wird, wenn für k sein Werth $\sqrt{1 - k'^2}$ gesetzt wird,

$$E = k'^2 K - k'(1 - k'^2)\frac{\partial K}{\partial k'}.$$

Auf die Gleichung 42) angewendet, giebt diese Relation

44) $$\begin{aligned} E = 1 &+ \frac{1}{2}\left[l\left(\frac{4}{k'}\right) - \frac{1}{1\,.\,2}\right]k'^2 \\ &+ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{3}{4}\left[l\left(\frac{4}{k'}\right) - 1 - \frac{1}{3\,.\,4}\right]k'^4 \\ &+ \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 \frac{5}{6}\left[l\left(\frac{4}{k'}\right) - 1 - \frac{2}{3\,.\,4} - \frac{1}{5\,.\,6}\right]k'^6 \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

und daraus entspringt folgende Vorschrift. Mittelst der Formeln

$$\beta_2 = l\left(\frac{4}{k'}\right) - \frac{1}{1\,.\,2},$$

$$\beta_4 = \beta_2 - \frac{1}{1\,.\,2} - \frac{1}{3\,.\,4}, \quad \beta_6 = \beta_4 - \frac{1}{3\,.\,4} - \frac{1}{5\,.\,6}, \ldots\ldots$$

berechne man die Grössen β_2, β_4, etc., welche gegen die Grenze $l\left(\frac{1}{k'}\right)$ convergiren; es ist dann

45) $$\begin{aligned} E = 1 + \frac{1}{2}\beta_2 k'^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{3}{4}\beta_4 k'^4 \\ + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 \frac{5}{6}\beta_6 k'^6 + \cdots\cdots \end{aligned}$$

Beispielweis nehmen wir $k = \frac{24}{25}$, also $k' = \frac{7}{25}$, die Werthe von β_2, β_4, etc. sind in diesem Falle

$\beta_2 = 2{,}1592\,6004$, $\quad \beta_4 = 1{,}5759\,2671$, $\quad \beta_6 = 1{,}4592\,6004$,
$\beta_8 = 1{,}4080\,6956$, $\quad \beta_{10} = 1{,}3791\,0131$, $\quad \beta_{12} = 1{,}3604\,1444$,

und liefern weiter

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 \\
\frac{1}{2}\beta_2 k'^2 &= 0{,}0846\,4299 \\
\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{3}{4}\beta_4 k'^4 &= 0{,}0018\,1622 \\
\left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 \frac{5}{6}\beta_6 k'^6 &= 0{,}0000\,8241 \\
\left(\frac{1\,.\,.\,5}{2\,.\,.\,6}\right)^2 \frac{7}{8}\beta_8 k'^8 &= 0{,}0000\,0455 \\
\left(\frac{1\,.\,.\,7}{2\,.\,.\,8}\right)^2 \frac{9}{10}\beta_{10} k'^{10} &= 0{,}0000\,0027 \\
\left(\frac{1\,.\,.\,9}{2\,.\,.\,10}\right)^2 \frac{11}{12}\beta_{12} k'^{12} &= 0{,}0000\,0002 \\
\hline
E &= 1{,}0865\,4646.
\end{aligned}
$$

Durch Multiplication mit 25 ergiebt sich hieraus die Länge des Quadranten einer aus den Halbachsen 25 und 7 construirten Ellipse $= 27{,}163662$, übereinstimmend mit dem auf Seite 315 gefundenen Zahlwerthe *).

d. Um nun auch die unvollständigen Integrale $F(k, \varphi)$ und $E(k, \varphi)$ in unendliche Reihen zu verwandeln, setzen wir zunächst

$$\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}} = k_1 \quad \text{oder} \quad k = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}$$

und erhalten

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{1+k_1}{\sqrt{1+2k_1\cos 2\varphi + k_1^2}} = (1+k_1)\,(1+k_1 e^{+2i\varphi})^{-\frac{1}{2}}(1+k_1 e^{-2i\varphi})^{-\frac{1}{2}},$$

worin, wie gewöhnlich, $i = \sqrt{-1}$ ist. Die hier vorkommenden Potenzen vom Grade $-\frac{1}{2}$ lassen sich nach dem binomischen Satze in Reihen entwickeln, welche auch dann noch convergiren, wenn man deren Glieder auf ihre absoluten Werthe reducirt. Jene Rei-

*) Die in Abschn. a. entwickelten Reihen finden sich schon in Euler's Werken; die Formeln 42) und 44) sind zuerst von Legendre nach einem nicht hinreichend genauen Verfahren abgeleitet worden in den Mémoires de l'Académie, 1780, pag. 630 und im Traité des fonct. ellipt. Tome I, p. 65. Den obigen Beweis hat der Verfasser gegeben in der Zeitschr. f. Mathem. und Phys. Jahrg. 2, S. 49.

hen dürfen daher ohne Weiteres miteinander multiplicirt werden und liefern ein Product, welches unter Anwendung der Formel

$$\tfrac{1}{2}(e^{i\psi} + e^{-i\psi}) = \cos\psi$$

die folgende Gestalt annimmt

$$46)\qquad \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = a_0 - a_2 \cos 2\varphi + a_4 \cos 4\varphi - a_6 \cos 6\varphi + \cdots$$

Die Coefficienten a_0, a_2, a_4, etc. sind selbst wieder unendliche Reihen, und zwar

$$a_0 = (1 + k_1)\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^2 + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 k_1^4 + \cdots\cdots\right\}$$

$$a_2 = 2(1 + k_1)\left\{\frac{1}{2}k_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{3}{4} k_1^3 + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 \frac{5}{6} k_1^5 + \cdots\right\}$$

u. s. w.

Wie man aus Nro. 36) ersieht, kann man a_0 kürzer durch

$$a_0 = \frac{2}{\pi} K$$

ausdrücken, und es ist daher zu erwarten, dass auch a_2, a_4, etc. auf vollständige elliptische Integrale zurückführbar sein werden. In der That hätte sich schon a_0 rascher aus der Gleichung 46) bestimmen lassen; multiplicirt man nämlich letztere mit $d\varphi$ und integrirt zwischen $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, so bleibt nichts weiter übrig, als

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = a_0 \frac{\pi}{2},$$

woraus für a_0 derselbe Werth wie vorhin folgt. Multiplicirt man ferner die Gleichung 46) mit $2\cos 2\varphi$, zerlegt rechter Hand jedes doppelte Cosinusproduct in die Summe zweier Cosinus, setzt dann noch den Factor $d\varphi$ hinzu und integrirt wie vorhin, so ergiebt sich

$$2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = -\, a_2 \frac{\pi}{2}$$

mithin umgekehrt wegen $\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi$

$$a_2 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2\sin^2\varphi - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}\, d\varphi = \frac{4}{\pi}\left\{2\,\frac{K - E}{k^2} - K\right\}.$$

Ueberhaupt kann man auf ähnliche Weise a_{2n} durch das bestimmte Integral

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos 2n\varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

ausdrücken, jedoch würde die völlige independente Entwickelung desselben ziemlich weitläufig ausfallen. Es ist deswegen besser, die Coefficienten a_4, a_6, etc. auf die vorigen zurückzuführen, wozu folgende Bemerkungen dienen werden.

Durch Differentiation der Gleichung 46) ergiebt sich

$$\frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2\varphi)^3}}$$
$$= 2a_2 \sin 2\varphi - 4a_4 \sin 4\varphi + 6a_6 \sin 6\varphi - \cdots;$$

diese Gleichung multipliciren wir mit

$$\frac{4(1 - k^2\sin^2\varphi)}{k^2} = \frac{2(2 - k^2)}{k^2} + 2\cos 2\varphi$$

und zerlegen rechter Hand die doppelten Producte aus Sinus und Cosinus in Summen je zweier Sinus; wird hierbei zur Abkürzung

$$\frac{2(2 - k^2)}{k^2} = \lambda$$

gesetzt, so ist das gehörig angeordnete Product

$$\begin{aligned}\frac{2\sin 2\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} &= (2\lambda a_2 - 4a_4)\sin 2\varphi \\ &+ (2a_2 - 4\lambda a_4 + 6a_6)\sin 4\varphi \\ &- (4a_4 - 6\lambda a_6 + 8a_8)\sin 6\varphi \\ &+ (6a_6 - 8\lambda a_8 + 10a_{10})\sin 8\varphi \\ &- \cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Andererseits erhält man direct aus Nro. 46) durch Multiplication mit $2\sin 2\varphi$

$$\begin{aligned}\frac{2\sin 2\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} &= (2a_0 - a_4)\sin 2\varphi \\ &+ (a_6 - a_2)\sin 4\varphi - (a_8 - a_4)\sin 6\varphi \\ &+ (a_{10} - a_6)\sin 8\varphi - \cdots\end{aligned}$$

mithin durch Vergleichung der Coefficienten von $\sin 2\varphi$

$$2a_0 - a_4 = 2\lambda a_2 - 4a_4 \quad \text{oder} \quad 3a_4 = 2(\lambda a_2 - a_0)$$

und durch Vergleichung der Coefficienten von $\sin(m-2)\varphi$, wobei m eine gerade Zahl > 4 sein muss,

$$(m-1)a_m = (m-2)\lambda a_{m-2} - (m-3)a_{m-4}.$$

Zur Berechnung der Grössen a_0, a_2, a_4 etc. dienen also folgende Formeln:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} K, \quad a_2 = \lambda a_0 - \frac{8}{\pi k^2} E, \quad a_4 = \frac{2}{3}(\lambda a_2 - a_0),$$

$$a_6 = \frac{4 \lambda a_4 - 3 a_2}{5}, \quad a_8 = \frac{6 \lambda a_6 - 5 a_4}{7}, \text{ u. s. w.}$$

Multiplicirt man nun die Gleichung 46) mit $d\varphi$ und integrirt von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi$, so gelangt man zu der Entwickelung

47) $F(k, \varphi) = a_0 \varphi - \frac{1}{2} a_2 \sin 2\varphi + \frac{1}{4} a_4 \sin 4\varphi - \frac{1}{6} a_6 \sin 6\varphi + \cdots$

Nach einem völlig analogen Verfahren lässt sich $E(k, \varphi)$ in eine Reihe von ähnlicher Form verwandeln. Aus der Gleichung

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{1 + k_1} (1 + k_1 e^{+2i\varphi})^{\frac{1}{2}} (1 + k_1 e^{-2i\varphi})^{\frac{1}{2}}$$

erhält man zunächst mittelst des binomischen Satzes eine Entwickelung von der Form

48) $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = b_0 + b_2 \cos 2\varphi - b_4 \cos 4\varphi + b_6 \cos 6\varphi - \cdots,$

worin sich die beiden ersten Coefficienten wie früher bestimmen lassen. Es ist nämlich

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi = b_0 \frac{\pi}{2} \text{ oder } b_0 = \frac{2}{\pi} E;$$

ferner

$$2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \,.\, \cos 2\varphi \, d\varphi = b_2 \frac{\pi}{2},$$

mithin

$$b_2 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, (1 - 2 \sin^2 \varphi)\, d\varphi$$

und durch Reduction dieses Integrales

$$b_2 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(2 - k^2) E - 2(1 - k^2) K}{3 k^2}.$$

Multiplicirt man ferner den Differentialquotienten der Gleichung 48) mit $\lambda + 2 \cos 2\varphi$, so erhält man linker Hand denselben Ausdruck, als wenn man in Nro. 48) beiderseits den Factor $2 \sin 2\varphi$ zusetzt; die Vergleichung der Coefficienten in den so entstehenden Reihen giebt

$$5 b_4 = 2(\lambda b_2 - b_0)$$

und für jedes gerade $m > 4$

$$(m+1)b_m = (m-2)\lambda b_{m-2} - (m-5)\, b_{m-4}.$$

Zur Berechnung der Grössen b_0, b_2 etc. dienen hiernach folgende Formeln

$$b_0 = \frac{2}{\pi}E, \quad b_2 = \tfrac{1}{3}\left\{\lambda b_0 - \frac{8(1-k^2)}{\pi k^2}K\right\}, \quad b_4 = \tfrac{2}{5}(\lambda b_2 - b_0),$$

$$b_6 = \frac{4\lambda b_4 - 1 b_2}{7}, \quad b_8 = \frac{6\lambda b_6 - 3 b_4}{9}, \text{ u. s. w.}$$

und nun ergiebt sich aus Nro. 48) durch Multiplication mit $d\varphi$ und Integration von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi$

49) $E(k,\varphi) = b_0\varphi + \frac{1}{2}b_2 \sin 2\varphi - \frac{1}{4}b_4 \sin 4\varphi + \frac{1}{6}b_6 \sin 6\varphi - \cdots$

Will man für einen und denselben Modulus gleichzeitig $F(k,\varphi)$ und $E(k,\varphi)$ berechnen, so ist es von Vortheil, die Coefficienten b_0, b_2, etc. aus a_0, a_2, etc. herzuleiten. Die hierzu nöthigen Reductionsformeln ergeben sich dadurch, dass man die durch Differentiation von Nro. 48) erhaltene Gleichung

$$\frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = 2 b_2 \sin 2\varphi - 4 b_4 \sin 4\varphi + \cdots$$

mit der früheren Entwickelung

$$\frac{2\sin 2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = (2a_0 - a_4)\sin 2\varphi - (a_2 - a_6)\sin 4\varphi + \cdots$$

vergleicht, indem man die erste mit 4, die zweite mit k^2 multiplicirt; es findet sich zunächst

$$b_2 = \tfrac{1}{8}k^2(2a_0 - a_4)$$

und für jedes gerade $m > 2$

$$b_m = \frac{k^2}{4m}(a_{m-2} - a_{m+2}).$$

Substituirt man diese Werthe in Nro. 49), so kann das Resultat in folgende Rechnungsvorschrift gekleidet werden: Man bestimme die Grössen c_0, c_2, c_4, etc. mittelst der Formeln

$$c_0 = \frac{2}{\pi}E, \quad c_2 = \frac{2a_0 - a_4}{4},$$

$$c_4 = \frac{a_2 - a_6}{4^2}, \quad c_6 = \frac{a_4 - a_8}{6^2}, \text{ u. s. w.};$$

es ist dann

50) $E(k,\varphi) = c_0\varphi + \frac{1}{4}k^2(c_2 \sin 2\varphi - c_4 \sin 4\varphi + c_6 \sin 6\varphi - \cdots)$

Um zu zeigen, in wie weit diese Formeln praktisch anwendbar sind, wollen wir nach denselben den Fall $k = \frac{24}{25}$, $\varphi = \frac{1}{3}\pi$ behandeln. Es ist dann

$$\lambda = \frac{337}{144}, \quad K = 2{,}6931425, \quad E = 1{,}0865465;$$

$$\begin{array}{llll}
a_0 = & 0{,}6366\,K & = 1{,}71451; & c_0 = 0{,}69172; \\
a_2 = & 1{,}4898\,K - 2{,}7631\,E & = 1{,}01018; & c_2 = 0{,}74899; \\
a_4 = & 1{,}8999\,K - 4{,}3109\,E & = 0{,}43306; & c_4 = 0{,}05034; \\
a_6 = & 2{,}6632\,K - 6{,}4131\,E & = 0{,}20468; & c_6 = 0{,}00922; \\
a_8 = & 3{,}9852\,K - 9{,}7851\,E & = 0{,}10125; & c_8 = 0{,}00239; \\
a_{10} = & 6{,}2188\,K - 15{,}3675\,E & = 0{,}05143; & c_{10} = 0{,}00075; \\
a_{12} = & 9{,}9700\,K - 24{,}6887\,E & = 0{,}02658, & c_{12} = 0{,}00026; \\
a_{14} = & 16{,}276\,K - 40{,}331\,E & = 0{,}01390; & c_{14} = 0{,}00010; \\
a_{16} = & 26{,}910\,K - 66{,}697\,E & = 0{,}00733; & c_{16} = 0{,}00004; \\
a_{18} = & 44{,}911\,K - 111{,}321\,E & = 0{,}00388; & c_{18} = 0{,}00002; \\
a_{20} = & 75{,}495\,K - 187{,}134\,E & = 0{,}00205; & c_{20} = 0{,}00001; \\
a_{22} = & 127{,}63\,K - 316{,}37\,E & = 0{,}00105; & \\
a_{24} = & 216{,}77\,K - 537{,}35\,E & = 0{,}00049; &
\end{array}$$

$$F(\tfrac{24}{25}, \tfrac{1}{3}\pi) = 1{,}27853; \quad E(\tfrac{24}{25}, \tfrac{1}{3}\pi) = 0{,}88326.$$

Die Coefficienten a_0, a_2, etc. sind hier vollständig durch K und E ausgedrückt worden (was für gewöhnlich überflüssig ist), weil dadurch ersichtlich wird, dass der Coefficient a_m die Form $pK - qE$ hat, worin p, q rasch wachsen. Will man daher eine erhebliche Genauigkeit erreichen, so muss man vorher K und E sehr scharf, d. h. auf ungefähr 12 Decimalen bestimmt haben und selbstverständlich weit mehr Reihenglieder berechnen, als hier geschehen ist. Aus diesen Bemerkungen geht zur Genüge hervor, dass die Formeln 47) und 50) nur einen theoretischen Werth besitzen *).

Für die elliptischen Integrale dritter Art lassen sich zwar Reihen von ähnlicher Gestalt entwickeln, jedoch sind die darin vorkommenden Coefficienten von so complicirtem Bau, dass die betreffenden Reihen keinen Nutzen gewähren.

---

*) Die oben abgeleiteten Formeln stimmen im Wesentlichen mit den von Legendre im Traité des fonct. ellipt. Chap. 34 gegebenen überein, nur sind sie hier einfacher dargestellt worden.

V. Das Additionstheorem für die Integrale erster Art.

Aus den Elementen der Integralrechnung weiss man, dass sich die Integrale echt gebrochener rationaler Functionen durch Logarithmen und Kreisbögen ausdrücken lassen, und dass die Integrale irrationaler Functionen, falls letztere nur ein Radical von der Form $\sqrt{a + bx + cx^2}$ enthalten, gleichfalls auf jene einfachen Functionen zurückkommen. Steigt aber die unter der Quadratwurzel stehende Grösse auf den dritten oder vierten Grad, so reichen die früheren Integrationsmittel nicht mehr aus, und die Reduction führt dann auf die drei elliptischen Integrale, welche demnach den Logarithmen und Kreisbögen gewissermaassen verwandt sind und sich in der That bei verschwindendem Modulus auf jene Functionen reduciren. Man kann daher sagen, dass die Logarithmen, die cyclometrischen Functionen und die elliptischen Integrale ihre gemeinsame Quelle in der Integralrechnung haben, denn wenn auch die beiden ersten Functionen nicht schon aus der Algebra und Trigonometrie bekannt wären, so würde man durch die Integralrechnung genöthigt worden sein, Integrale von den Formen

$$\int_1^x \frac{dx}{x}, \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

zu betrachten und irgendwie zu benennen. Für die vorliegenden Functionen gelten nun bekanntlich die Gleichungen

$$lx + ly = l(xy),$$

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right),$$

sie haben also die Eigenschaft gemein, dass zwei mit verschiedenen Argumenten x und y versehene Functionen derselben Art zu einer Function der nämlichen Art vereinigt werden können, deren Argument nach einer bestimmten Regel aus x und y zusammengesetzt ist. Allgemein ausgedrückt, heisst dies, sowohl für $f(x) = lx$ als für $f(x) = \arcsin x$ besteht eine Gleichung von der Form

$$f(x) + f(y) = f(z),$$

worin z auf gewisse Weise von x und y abhängt. Bei der Verwandtschaft zwischen den eben genannten Functionen und den elliptischen Integralen lässt sich erwarten, dass für letztere ähnliche Relationen bestehen werden, und es ist dann zu untersuchen, wie in diesem Falle z von x und y abhängt. Bevor wir dazu übergehen, wollen wir erst die beiden einfachen Fälle $f(x) = lx$ und $f(x) = \arcsin x$ betrachten, um an diesen das nöthige Verfahren auseinander zu setzen.

Wir denken uns die Function $f(x)$ definirt durch die Gleichung

51) $$f(x) = \int_1^x \frac{dx}{x}$$

und stellen die Aufgabe, y so zu bestimmen, dass die Gleichung

52) $$f(x) + f(y) = C$$

erfüllt wird, in welcher C irgend eine Constante bezeichnet. Durch Differentiation folgt zunächst vermöge der Bedeutung von f

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

oder

53) $$y\,dx + x\,dy = 0;$$

mithin ist durch Integration

$$\int y\,dx + \int x\,dy = const.$$

Wendet man auf jedes dieser Integrale die theilweise Integration an, so erhält man

$$2xy - \int (x\,dy + y\,dx) = const.$$

d. i. wegen Nro. 53)

$$2xy = const. \quad \text{oder} \quad xy = c.$$

Dem ursprünglichen Sinne der Aufgabe entspricht also die Lösung

$$f(x) + f\left(\frac{c}{x}\right) = C;$$

im speciellen Falle $x = 1$ verschwindet $f(x)$, daraus folgt $C = f(c)$, mithin ist auch

$$f(x) + f\left(\frac{c}{x}\right) = f(c).$$

Beachtet man noch, dass c und ebenso $\frac{c}{x}$ jeden beliebigen Werth haben kann, so darf man $\frac{c}{x}$ mit irgend einem Buchstaben, also auch mit y bezeichnen, woraus $c = xy$ folgt. Die nunmehrige Gleichung

$$f(x) + f(y) = f(xy)$$

drückt in der That die Fundamentaleigenschaft des Logarithmus aus und ist hier lediglich aus der Integraldefinition in 51) hergeleitet.

Es sei zweitens

$$f(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

und wiederum die Gleichung 52) zu erfüllen; die Differentiation giebt dann

54) $$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

oder

$$\sqrt{1-y^2} \, . \, dx + \sqrt{1-x^2} \, . \, dy = 0,$$

mithin

$$\int \sqrt{1-y^2} \, . \, dx + \int \sqrt{1-x^2} \, . \, dy = const.$$

Bei theilweiser Integration ist ferner

$$\int \sqrt{1-y^2} . dx = \sqrt{1-y^2} . x + \int \frac{xy\,dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$\int \sqrt{1-x^2} . dy = \sqrt{1-x^2} . y + \int \frac{yx\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

mithin durch Addition

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} + \int xy\left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\right) = const.$$

Wegen Nro. 54) verschwindet das Integral und es bleibt einfacher

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = c,$$

womit nun die Bedingung gefunden ist, unter welcher die Relation $f(x) + f(y) = C$ besteht. Für $x = 0$ wird $y = c, f(0) = 0$ und $C = f(c)$ also

$$f(x) + f(y) = f(c).$$

Da c jeden beliebigen Werth haben kann, so kann man schliesslich auch z für c schreiben und sagen, die Gleichung $f(x) + f(y) = f(z)$ gilt unter der Bedingung

$$z = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2},$$

womit das Additionstheorem für $f(x) = arcsin\, x$ analytisch abgeleitet ist.

Dasselbe Verfahren lässt sich auf die Function

55) $$f(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$
in folgender Weise anwenden. Wenn zunächst

56) $$f(x) + f(y) = C$$
sein soll, so giebt die Differentiation

57) $$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0$$
oder

58) $$\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}\,.\,dx + \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\,.\,dy = 0.$$
Diese Gleichung dividiren wir durch $1 - k^2x^2y^2$ und integriren; es ist also

59) $$\int \frac{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{1-k^2x^2y^2}\,dx + \int \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}\,dy = c.$$

Mittelst theilweiser Integration findet sich leicht, wenn zur Abkürzung
$$\frac{xy[2k^2(x^2+y^2)-(1+k^2)(1+k^2x^2y^2)]}{(1-k^2x^2y^2)^2} = P, \quad \frac{2k^2x^2y^2}{(1-k^2x^2y^2)^2} = Q$$
gesetzt wird,
$$\int \frac{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{1-k^2x^2y^2}\,dx = \frac{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{1-k^2x^2y^2}\,x$$
$$-\int \frac{P\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} - \int Q\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}\,dx.$$

Die entsprechende Transformation für das zweite Integral in Nro. 59) ergiebt sich hieraus durch gegenseitige Vertauschung von x und y; dabei ändern sich aber die symmetrischen Functionen P und Q nicht, mithin ist
$$\int \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}\,dy = \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}\,y$$
$$-\int \frac{P\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} - \int Q\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\,dy.$$

Nach Substitution dieser Ausdrücke verwandelt sich die Gleichung 59) in
$$\frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}$$
$$-\int P\left\{\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}\right\}$$
$$-\int Q\left\{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}\,dx + \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\,dy\right\} = c$$

d. i., weil nach Nro. 57) und 58) die beiden Integrale verschwinden,

60) $$\frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}+y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}=c.$$

Diese Gleichung spricht die Bedingung aus, unter welcher $f(x)+f(y)=C$ ist. Für $x=0$ giebt sie $y=c$, und da gleichzeitig $f(0)=0$ ist, so bleibt $C=f(c)$, mithin enthält Nro. 60) die Bedingung für die Existenz der Gleichung

$$f(x)+f(y)=f(c).$$

Schreibt man endlich z statt der willkürlichen Grösse c, so hat man den Satz: Wenn

$$z=\frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}+y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}$$

genommen wird, so ist

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$
$$=\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Für $x=\sin\varphi$, $y=\sin\psi$, $z=\sin\sigma$ erhält dieser Satz folgende Form: Wenn

61) $$\sin\sigma=\frac{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta(\psi)+\sin\psi\cos\varphi\,\Delta(\varphi)}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}$$

genommen wird, so ist

$$F(k,\varphi)+F(k,\psi)=F(k,\sigma).$$

Zufolge dieses sogenannten Additionstheoremes lassen sich zwei mit gleichem Modulus und verschiedenen Amplituden versehene elliptische Integrale erster Art zu einem einzigen Integrale gleicher Art zusammenziehen.

Bei der fundamentalen Bedeutung dieses Theoremes ist vielleicht ein zweiter Beweis desselben nicht überflüssig, welcher darauf hinauskommt, das Integral

62) $$\int_0^\alpha\frac{d\eta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\eta}}=F(k,\alpha)$$

durch Einführung einer neuen Variabelen zu transformiren. Setzt man nämlich

63) $$\cos\beta\cos\eta-\sin\beta\sin\eta\sqrt{1-k^2\sin^2\zeta}=\cos\zeta,$$

so entspricht der unteren Grenze $\eta = 0$ der Werth $\zeta = \beta$, und wenn $\eta = \alpha$ geworden ist, so hat ζ einen Werth γ angenommen, welcher aus der Gleichung

64) $$\cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha\sqrt{1-k^2\sin^2\gamma} = \cos\gamma$$

zu berechnen ist. Um ferner $d\eta$ durch $d\zeta$ auszudrücken, könnte man η aus der Gleichung 63) entwickeln und dann differenziren; rascher führt die Bemerkung zum Ziele, dass die Gleichung 63) auch unter den beiden Formen

65) $$\cos\zeta\cos\beta + \sin\zeta\sin\beta\sqrt{1-k^2\sin^2\eta} = \cos\eta,$$

66) $$\cos\zeta\cos\eta + \sin\zeta\sin\eta\sqrt{1-k^2\sin^2\beta} = \cos\beta$$

dargestellt werden kann. Man überzeugt sich hiervon leicht, wenn man die Gleichungen 63), 65) und 66) rational macht; weil aber dabei die Vorzeichen der Radicale verloren gehen, so bedarf die Richtigkeit dieser Vorzeichen eines besonderen Nachweises. Nun geht die Gleichung 63) für $k = 0$ in $\cos(\beta + \eta) = \cos\zeta$ über, daraus folgt $\cos(\zeta - \beta) = \cos\eta$ und $\cos(\zeta - \eta) = \cos\beta$; dasselbe geben auch die Gleichungen 65) und 66) für $k = 0$, woraus die Richtigkeit der gewählten Vorzeichen erhellt. Durch Differentiation der Gleichung 66) wird nun, wenn wir das vorkommende Radical für den Augenblick mit B bezeichnen,

$$(B\cos\eta\sin\zeta - \sin\eta\cos\zeta)\,d\eta = (\cos\eta\sin\zeta - B\sin\eta\cos\zeta)\,d\zeta,$$

ferner giebt die Substitution des aus Nro. 66) genommenen Werthes von B

$$\frac{\cos\beta\cos\eta - \cos\zeta}{\sin\eta}\,d\eta = \frac{\cos\eta - \cos\beta\cos\zeta}{\sin\zeta}\,d\zeta,$$

d. i. nach Nro. 63) und 65)

$$\sin\beta\sqrt{1-k^2\sin^2\zeta}\,d\eta = \sin\beta\sqrt{1-k^2\sin^2\eta}\,d\zeta$$

oder

$$\frac{d\eta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\eta}} = \frac{d\zeta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\zeta}}.$$

Substituiren wir dies in Nro. 62) oder, was Dasselbe ist, integriren wir die vorstehende Gleichung mit der Rücksicht, dass den Grenzen $\eta = 0$ und $\eta = \alpha$ die Grenzen $\zeta = \beta$ und $\zeta = \gamma$ entsprechen, so erhalten wir

$$\int_0^\alpha \frac{d\eta}{\Delta(\eta)} = \int_\beta^\gamma \frac{d\zeta}{\Delta(\zeta)} = \int_0^\gamma \frac{d\zeta}{\Delta(\zeta)} - \int_0^\beta \frac{d\zeta}{\Delta(\zeta)},$$

d. i. $F(k,\alpha) = F(k,\gamma) - F(k,\beta)$, wobei die Amplituden α, β, γ

an die Gleichung 64) gebunden sind. Indem wir noch φ, ψ, σ für α, β, γ schreiben, erhalten wir den Satz, dass die Gleichung

$$F(k,\varphi) + F(k,\psi) = F(k,\sigma)$$

stattfindet, sobald die Amplituden φ, ψ, σ der Bedingung

67) $$\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta(\sigma) = \cos\sigma$$

genügen, welche dem Früheren analog auch unter den Formen

68) $$\begin{cases} \cos\sigma\cos\varphi + \sin\sigma\sin\varphi\,\Delta(\psi) = \cos\psi, \\ \cos\sigma\cos\psi + \sin\sigma\sin\psi\,\Delta(\varphi) = \cos\varphi \end{cases}$$

dargestellt werden kann. Eliminirt man $\cos\sigma$ aus den beiden letzten Gleichungen, so ergiebt sich

$$\sin\sigma = \frac{\cos^2\varphi - \cos^2\psi}{\cos\varphi\sin\psi\,\Delta(\varphi) - \cos\psi\sin\varphi\,\Delta(\psi)}$$

oder, wenn Zähler und Nenner mit $\cos\varphi\sin\psi\,\Delta(\varphi) + \cos\psi\sin\varphi\,\Delta(\psi)$ multiplicirt werden,

69) $$\sin\sigma = \frac{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta(\psi) + \sin\psi\cos\varphi\,\Delta(\varphi)}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

was mit Nro. 61) übereinstimmt.

Durch Substitution hiervon in eine der Gleichungen 68) erhält man ferner

70) $$\cos\sigma = \frac{\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta(\varphi)\,\Delta(\psi)}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}$$

und aus Nro. 67)

71) $$\Delta(\sigma) = \frac{\Delta(\varphi)\,\Delta(\psi) - k^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi},$$

endlich als Quotient von 69) und 70)

72) $$\tan\sigma = \frac{\tan\varphi\,\Delta(\psi) + \tan\psi\,\Delta(\varphi)}{1 - \tan\varphi\tan\psi\,\Delta(\varphi)\,\Delta(\psi)}.$$

Die letzte Formel bietet die meiste Bequemlichkeit für die numerische Berechnung von σ. Bestimmt man nämlich zwei Hülfswinkel φ' und ψ' mittelst der Formeln $\tan\varphi' = \tan\varphi\,\Delta(\psi)$ und $\tan\psi' = \tan\psi\,\Delta(\varphi)$, so wird sehr einfach $\sigma = \varphi' + \psi'$.

Einen bemerkenswerthen speciellen Fall des Additionstheoremes liefert die Annahme $\sigma = \frac{1}{2}\pi$, nämlich

73) $$\begin{cases} \tan\varphi\tan\psi = \dfrac{1}{\sqrt{1-k^2}} = \dfrac{1}{k'}, \\ F(k,\varphi) + F(k,\psi) = F(k,\frac{1}{2}\pi); \end{cases}$$

die beiden, den Amplituden φ und ψ entsprechenden elliptischen Integrale ergänzen sich dann zum vollständigen Integrale K.

Bevor wir die Folgerungen erörtern, welche sich an die Addition der elliptischen Integrale knüpfen, wollen wir noch einige später brauchbare Combinationen der obigen Formeln entwickeln. Eliminirt man nämlich $cos\,\sigma$ aus Nro. 67) und der zweiten Gleichung in Nro. 68), so erhält man

$$\varDelta(\varphi) = \frac{sin\,\varphi\, cos\,\psi\, \varDelta(\sigma) + cos\,\varphi\, sin\,\psi}{sin\,\sigma},$$

auf gleiche Weise geben Nro. 67) und die erste Gleichung in Nro. 68)

$$\varDelta(\psi) = \frac{sin\,\psi\, cos\,\varphi\, \varDelta(\sigma) + cos\,\psi\, sin\,\varphi}{sin\,\sigma},$$

folglich ist

$$74)\quad \left\{\begin{aligned} \varDelta(\varphi) + \varDelta(\psi) &= \frac{\varDelta(\sigma)+1}{sin\,\sigma}\, sin(\varphi+\psi),\\ \varDelta(\varphi) - \varDelta(\psi) &= \frac{\varDelta(\sigma)-1}{sin\,\sigma}\, sin(\varphi-\psi).\end{aligned}\right.$$

Die Subtraction der elliptischen Integrale ist leicht auf die Addition zurückzuführen, indem man ψ negativ nimmt und die Relation $F(k, -\psi) = -F(k, \psi)$ beachtet. Schreibt man gleichzeitig τ statt σ, so hat man den Satz, dass die Gleichung

$$F(k, \varphi) - F(k, \psi) = F(k, \tau)$$

unter der Bedingung

$$sin\,\tau = \frac{sin\,\varphi\, cos\,\psi\, \varDelta(\psi) - sin\,\psi\, cos\,\varphi\, \varDelta(\varphi)}{1 - k^2 sin^2\varphi\, sin^2\psi}$$

stattfindet. Für die Formeln 70), 71) und 72) treten analoge Veränderungen ein.

Die Multiplication der elliptischen Integrale lässt sich als eine successive Addition derselben auffassen und demgemäss ausführen. Im einfachsten Falle giebt das Additionstheorem, wenn $\psi = \varphi$ genommen und φ_2 für σ gesetzt wird,

$$F(k, \varphi_2) = 2F(k, \varphi),$$

wobei φ_2 aus einer der Formeln

$$sin\,\varphi_2 = \frac{2\, sin\,\varphi\, cos\,\varphi\, \varDelta(\varphi)}{1 - k^2 sin^4\varphi}, \qquad cos\,\varphi_2 = \frac{1 - 2\, sin^2\varphi + k^2 sin^4\varphi}{1 - k^2 sin^4\varphi}$$

zu bestimmen ist. Bezeichnet ferner φ_3 diejenige Amplitude, welche der Gleichung

$$F(k, \varphi_3) = 3F(k, \varphi) = F(k, \varphi_2) + F(k, \varphi)$$

entspricht, so ist

$$sin\,\varphi_3 = \frac{sin\,\varphi_2\, cos\,\varphi\, \varDelta(\varphi) + sin\,\varphi\, cos\,\varphi_2\, \varDelta(\varphi_2)}{1 - k^2 sin^2\varphi_2\, sin^2\varphi}$$

und durch Substitution der vorigen Werthe

$$\sin\varphi_3 = \frac{[4(1-k^2\sin^2\varphi)\cos^2\varphi-(1-k^2\sin^4\varphi)^2]\sin\varphi}{(1-k^2\sin^4\varphi)^2-4k^2(1-k^2\sin^2\varphi)\cos^2\varphi\sin^4\varphi}.$$

Wie man auf diesem Wege weiter gehen kann, erhellt von selbst. Um aber complicirte Ausdrücke zu vermeiden, wollen wir noch eine Abkürzung des Verfahrens erwähnen. Wenn die drei Amplituden φ_{n-1}, φ_n, φ_{n+1} den Gleichungen

$$F(k,\varphi_{n-1}) = (n-1)F(k,\varphi),$$
$$F(k,\varphi_n) = n\,F(k,\varphi),$$
$$F(k,\varphi_{n+1}) = (n+1)F(k,\varphi)$$

genügen sollen, so ist gleichzeitig

$$F(k,\varphi_{n+1}) = F(k,\varphi_n) + F(k,\varphi),$$
$$F(k,\varphi_{n-1}) = F(k,\varphi_n) - F(k,\varphi),$$

und durch Anwendung des Additions-, sowie des Subtractionstheoremes findet man hieraus

$$\sin\varphi_{n+1} + \sin\varphi_{n-1} = \frac{2\,\varDelta(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi_n}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\varphi_n},$$

$$\cos\varphi_{n+1} + \cos\varphi_{n-1} = \frac{2\cos\varphi\cos\varphi_n}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\varphi_n}.$$

Der Quotient beider Gleichungen ist

$$\tan\tfrac{1}{2}(\varphi_{n+1}+\varphi_{n-1}) = \varDelta(\varphi)\tan\varphi_n,$$

und nach dieser Formel lassen sich, wenn man von $\varphi_0 = 0$ und $\varphi_1 = \varphi$ ausgeht, der Reihe nach φ_2, φ_3, φ_4, etc. leicht berechnen.

Die **Division** der elliptischen Integrale folgt aus deren Multiplication, sobald man der Gleichung $F(k,\varphi_m) = m\,F(k,\varphi)$ die umgekehrte Form $F(k,\varphi) = \frac{1}{m}F(k,\varphi_m)$ ertheilt und dabei φ_m als bekannt, φ als unbekannt ansieht. Bezeichnet ψ den gegebenen Werth von φ_m, so entspricht z. B. der Gleichung

$$F(k,\varphi) = \tfrac{1}{2}F(k,\psi)$$

die Bedingung

$$\cos\psi = \frac{1-2\sin^2\varphi+k^2\sin^4\varphi}{1-k^2\sin^4\varphi} = \frac{1-2x^2+k^2x^4}{1-k^2x^4},$$

worin zur Abkürzung die Unbekannte $\sin\varphi = x$ gesetzt worden ist. Wie man sieht, erfordert die Bestimmung von φ immer die Auflösung einer algebraischen Gleichung höheren Grades.

Das Multiplicationstheorem lehrt auch die Bedingung kennen, unter welcher die allgemeinere Gleichung

$$p\,F(k,\varphi) = q\,F(k,\psi)$$

besteht, worin p und q ganze positive Zahlen bedeuten. Denkt man sich nämlich ein drittes elliptisches Integral $F(k,\omega)$ als gemeinschaftlichen Werth beider Seiten der obigen Gleichung, so folgt aus $pF(k,\varphi) = F(k,\omega)$ eine Bedingungsgleichung zwischen φ und ω, andererseits giebt $qF(k,\psi) = F(k,\omega)$ eine Bedingungsgleichung zwischen ψ und ω; endlich führt die Elimination von ω aus den erwähnten beiden Gleichungen zu der gesuchten Relation zwischen φ und ψ.

Das Gesammtresultat dieser Untersuchung besteht in folgendem Satze: Wenn r, s, t, etc. beliebige positive oder negative rationale Zahlen, φ, ψ, χ, etc. gegebene Amplituden bezeichnen, so lässt sich das aus einer endlichen Gliederzahl bestehende Aggregat

$$rF(k,\varphi) + sF(k,\psi) + tF(k,\chi) + \cdots$$

in ein einziges elliptisches Integral zusammenziehen, dessen Modulus wiederum k ist, und dessen Amplitude durch algebraische Operationen aus φ, ψ, χ, etc. abgeleitet werden kann*).

VI. Die Additionstheoreme für Integrale zweiter und dritter Art.

Bei den folgenden Erörterungen setzen wir immer voraus, dass zwischen den drei Amplituden φ, ψ, σ die Gleichung

$$75)\qquad \cos\sigma = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta(\sigma)$$

bestehe, worin σ als eine gegebene Grösse, d. h. als eine willkürliche Constante betrachtet werden möge; nach dem Früheren gelten dann die Gleichungen

$$76)\qquad \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + \frac{d\psi}{\Delta(\psi)} = 0\,, \quad F(k,\varphi) + F(k,\psi) = F(k,\sigma),$$

---

*) Die Differentialgleichung 57), worauf die ganze obige Untersuchung beruht, wurde zuerst von Euler in den Institutiones calculi integralis, Vol. I, Sectio 2, Cap. 6 mittelst eines Verfahrens integrirt, welches der Hauptsache nach mit dem in Thl. I, § 109 benutzten übereinstimmt. Eine andere Methode zeigte Lagrange in der Théorie des fonctions, §. 79. Das hier angewendete sehr elegante Verfahren wurde von Liouville aus den Papieren von Sturm mitgetheilt in den Comptes rendus de l'Académie, 1856, Nro. 21. Hinsichtlich geometrischer Constructionen des Additionstheoremes verweisen wir auf § 81 und 82 der Théorie des fonctions von Lagrange und auf eine Abhandlung von Jacobi in Crelle's Journal, Bd. 3, S. 376, deren Grundgedanke von Richelot in Crelle's Journ., Bd. 38, S. 353 weiter ausgeführt worden ist. Eine vollständige Darstellung der beiden letzten Arbeiten giebt Durège im 11. Abschn. seiner Theorie der elliptischen Functionen.

und es entsteht nun die Frage, ob unter diesen Umständen die Summen $E(k,\varphi) + E(k,\psi)$ und $\Pi_0(k,\varphi) + \Pi_0(k,\psi)$ eine der vorigen ähnliche Zusammenziehung gestatten.

a. Setzen wir zur Abkürzung

$$S = E(k,\varphi) + E(k,\psi),$$

so folgt durch Differentiation

$$dS = \varDelta(\varphi)\,d\varphi + \varDelta(\psi)\,d\psi,$$

und zu dieser Gleichung addiren wir die aus Nro. 76) fliessende Gleichung

$$0 = \varDelta(\psi)\,d\varphi + \varDelta(\varphi)\,d\psi,$$

wodurch entsteht

$$dS = [\varDelta(\varphi) + \varDelta(\psi)]\,(d\varphi + d\psi).$$

Zufolge der ersten Formel in Nro. 74) ist dies soviel wie

$$dS = \frac{\varDelta(\sigma)+1}{\sin\sigma}\sin(\varphi+\psi)\,d(\varphi+\psi)$$

oder, wenn für den Augenblick $\varphi + \psi = \chi$ gesetzt wird,

$$dS = \frac{\varDelta(\sigma)+1}{\sin\sigma}\sin\chi\,d\chi.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$S = \frac{\varDelta(\sigma)+1}{\sin\sigma}(C - \cos\chi) = \frac{\varDelta(\sigma)+1}{\sin\sigma}[C - \cos(\varphi+\psi)].$$

Die Integrationsconstante C bestimmt sich durch die Specialisirung $\varphi = 0$; in diesem Falle wird $\psi = \sigma$, $E(k,\varphi) = 0$, $E(k,\psi) = E(k,\sigma)$ und $S = E(k,\sigma)$, mithin

$$E(k,\sigma) = \frac{\varDelta(\sigma)+1}{\sin\sigma}(C - \cos\sigma)$$

und durch Subtraction dieser Gleichung von der vorigen

$$S - E(k,\sigma) = \frac{\varDelta(\sigma)+1}{\sin\sigma}[\cos\sigma - \cos(\varphi+\psi)]$$

oder

$$S = E(k,\sigma) + \frac{1+\varDelta(\sigma)}{\sin\sigma}(\cos\sigma - \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi).$$

Berücksichtigt man noch, dass wegen Nro. 75) $\cos\sigma - \cos\varphi\cos\psi = -\sin\varphi\sin\psi\,\varDelta(\sigma)$ ist, so erhält man

$$S = E(k,\sigma) + \frac{1-[\varDelta(\sigma)]^2}{\sin\sigma}\sin\varphi\sin\psi$$

oder endlich vermöge der Werthe von S und $\varDelta(\sigma)$

77) $$E(k,\varphi) + E(k,\psi) = E(k,\sigma) + k^2\sin\varphi\sin\psi\sin\sigma.$$

Dies ist das Additionstheorem für die Integrale zweiter Art. Man kann hieraus ganz ähnliche Consequenzen ziehen wie aus dem früheren Additionstheoreme, jedoch sind dieselben nicht so wichtig, dass sie vollständig entwickelt werden müssten; das Bemerkenswerthere davon wird überdies im nächsten Abschnitte vorkommen.

b. Um auch für die elliptischen Integrale dritter Art, welche mit

$$\Pi_0(h,k,\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + h\sin^2\varphi)\varDelta(\varphi)}$$

bezeichnet werden mögen, das entsprechende Additionstheorem zu finden, setzen wir

$$S_0 = \Pi_0(h,k,\varphi) + \Pi_0(h,k,\psi)$$

und erhalten zunächst

$$dS_0 = \frac{d\varphi}{(1 + h\sin^2\varphi)\varDelta(\varphi)} + \frac{d\psi}{(1 + h\sin^2\psi)\varDelta(\psi)},$$

wofür wegen

$$\frac{d\psi}{\varDelta(\psi)} = -\frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi)}$$

geschrieben werden kann

$$dS_0 = \frac{h(\sin^2\psi - \sin^2\varphi)}{(1 + h\sin^2\varphi)(1 + h\sin^2\psi)} \cdot \frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi)}.$$

Andererseits ist, wenn wie früher σ als Constante angesehen wird,

$$\varDelta(\varphi)\,d\varphi + \varDelta(\psi)\,d\psi = k^2 \sin\sigma\, d(\sin\varphi\sin\psi)$$

und unter Benutzung der vorletzten Relation

$$(\sin^2\psi - \sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi)} = \sin\sigma\, d(\sin\varphi\sin\psi)\cdot$$

Für dS_0 ergiebt sich hiernach

$$dS_0 = \frac{h\sin\sigma\, d(\sin\varphi\sin\psi)}{1 + h(\sin^2\varphi + \sin^2\psi) + h^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$\sin^2\varphi + \sin^2\psi = p, \quad \sin\varphi\sin\psi = q$$

gesetzt wird,

$$dS_0 = \frac{h\sin\sigma\, dq}{1 + hp + h^2q^2}.$$

Um noch p durch q auszudrücken, benutzen wir die Gleichung

$$\cos\sigma = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\varDelta(\sigma)$$

und ziehen daraus

$$\begin{aligned}[\cos\sigma + q\varDelta(\sigma)]^2 = \cos^2\varphi\cos^2\psi &= (1 - \sin^2\varphi)(1 - \sin^2\psi)\\ &= 1 - p + q^2\end{aligned}$$

mithin

$$p = 1 + q^2 - [\cos\sigma + q\,\Delta(\sigma)]^2$$
$$= \sin^2\sigma - 2q\cos\sigma\,\Delta(\sigma) + k^2 q^2 \sin^2\sigma.$$

Diesen Werth substituiren wir in die Formel für dS_0 und führen dabei folgende Abkürzungen ein

$$A = 1 + h\sin^2\sigma,\ B = h\,\Delta(\sigma)\cos\sigma,\ C = h(h + k^2\sin^2\sigma),$$
$$M = h\sin\sigma;$$

es wird dann

$$dS_0 = \frac{M\,dq}{A - 2Bq + Cq^2},$$

mithin durch Integration

$$S_0 = \int \frac{M\,dq}{A - 2Bq + Cq^2} + Const.$$

Die Constante bestimmt sich durch die Specialisirung $\varphi = 0$, welche giebt $\psi = \sigma$, $q = 0$, $S_0 = \Pi_0(h, k, \sigma)$ und

$$\Pi_0(h,k,\sigma) = \int\limits_{(q=0)} \frac{M\,dq}{A - 2Bq + Cq^2} + Const.$$

Es ist demnach

$$S_0 - \Pi_0(h,k,\sigma) = \int_0^q \frac{M\,dq}{A - 2Bq + Cq^2}$$

oder zufolge der Werthe von S_0 und q

78) $$\Pi_0(h,k,\varphi) + \Pi_0(h,k,\psi) = \Pi_0(h,k,\sigma) + \int_0^{\sin\varphi\,\sin\psi} \frac{M\,dq}{A - 2Bq + Cq^2}.$$

Hierin besteht das Additionstheorem für die Integrale dritter Art. Es ist dabei die auf q bezügliche Integration nicht ausgeführt worden, weil sie verschiedene Werthe liefert jenachdem $AC - B^2$ positiv, Null oder negativ ist. Zufolge der Bedeutungen von A, B, C müssen hiernach die Fälle unterschieden werden, ob $h(1 + h)(h + k^2)$ > 0, $= 0$ oder < 0 ist, was weiter keine Schwierigkeiten hat.

c. Wir wollen bei dieser Gelegenheit noch den eigenthümlichen Zusammenhang zwischen den Integralen zweiter und dritter Art entwickeln. Bezeichnet φ eine veränderliche, α eine constante Amplitude, und werden die variabelen Amplituden σ und τ mittelst der Formeln

$$\sin\sigma = \frac{\sin\varphi\cos\alpha\,\Delta(\alpha) + \sin\alpha\cos\varphi\,\Delta(\varphi)}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\alpha},$$

$$\sin\tau = \frac{\sin\varphi\cos\alpha\,\Delta(\alpha) - \sin\alpha\cos\varphi\,\Delta(\varphi)}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\alpha}$$

bestimmt, so gelten zufolge der beiden ersten Additionstheoreme die vier Gleichungen:

$$F(\varphi) + F(\alpha) = F(\sigma)\,,\ F(\varphi) - F(\alpha) = F(\tau),$$
$$E(\varphi) + E(\alpha) - E(\sigma) = +\,k^2\sin\varphi\sin\alpha\sin\sigma,$$
$$E(\varphi) - E(\alpha) - E(\tau) = -\,k^2\sin\varphi\sin\alpha\sin\tau.$$

Die Differenz der beiden letzten Gleichungen ist

$$2E(\alpha) - E(\sigma) + E(\tau) = k^2\sin\varphi\sin\alpha\,(\sin\sigma + \sin\tau)$$

oder vermöge der Werthe von $\sin\sigma$ und $\sin\tau$

$$2E(\alpha) - E(\sigma) + E(\tau) = 2\,\frac{k^2\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta(\alpha)\,.\,\sin^2\varphi}{1 - k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}.$$

Diese Gleichung multipliciren wir mit dem Factor

$$\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = \frac{d\sigma}{\Delta(\sigma)} = \frac{d\tau}{\Delta(\tau)}$$

und integriren zwischen den Grenzen 0 und φ, welchen die Grenzen 0 und σ, 0 und τ entsprechen; nach beiderseitiger Division mit 2 erhalten wir

$$E(\alpha)F(\varphi) - \tfrac{1}{2}\int_0^\sigma \frac{E(\sigma)}{\Delta(\sigma)}\,d\sigma + \tfrac{1}{2}\int_0^\tau \frac{E(\tau)}{\Delta(\tau)}\,d\tau$$
$$= \int_0^\varphi \frac{k^2\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta(\alpha)\cdot\sin^2\varphi\,d\varphi}{(1 - k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi)}$$

oder, weil in bestimmten Integralen nichts auf die Bezeichnung der Integrationsvariabelen ankommt,

79) $$E(\alpha)F(\varphi) - \tfrac{1}{2}\int_0^\sigma \frac{E(\varphi)}{\Delta(\varphi)}\,d\varphi + \tfrac{1}{2}\int_0^\tau \frac{E(\varphi)}{\Delta(\varphi)}\,d\varphi$$
$$= \int_0^\varphi \frac{k^2\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta(\alpha)\,.\,\sin^2\varphi\,d\varphi}{(1 - k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi)}.$$

Das Integral rechter Hand ist leicht durch $\Pi_0(h, k, \varphi)$ auszudrücken nämlich

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{(1 - k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi)} = \frac{\Pi_0(h,k,\varphi) - F(k,\varphi)}{k^2\sin^2\alpha},\ h = -k^2\sin^2\alpha,$$

und nunmehr zeigt die Gleichung 79), dass das Integral dritter Gattung auf die Integrale

$$E(k, \alpha), F(k, \varphi) \text{ und } \int_0^\varphi \frac{E(k, \varphi)}{\Delta(k, \varphi)} d\varphi$$

zurückgeführt werden kann, welche immer nur Functionen zweier Variabelen sind. Nach der jetzigen Anschauungsweise betrachtet man nicht mehr $\Pi_0(h, k, \varphi)$ sondern

$$\Pi(h, k, \varphi) = k^2 \sin\alpha \cos\alpha \,\Delta(\alpha) \int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi \, d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi)}$$

als Normalform der elliptischen Integrale dritter Art, wobei $h = -k^2 \sin^2\alpha$, und α der sogenannte Winkel des Parameters ist. Dieser Winkel erhält zwar nur in dem Falle einen reellen Werth, wo h negativ und, seinem absoluten Werthe nach, kleiner als k^2 ist, indessen hindert selbst das Vorkommen imaginärer α den Gebrauch der Formel 79) nicht, weil später gezeigt werden wird, wie elliptische Integrale mit imaginären Amplituden zu behandeln sind.

Vertauscht man in Nro. 79) die Grössen α und φ gegeneinander, so bleibt σ ungeändert, dagegen geht τ in $-\tau$ über, und es wird daher

$$E(\varphi) F(\alpha) - \tfrac{1}{2}\int_0^\sigma \frac{E(\varphi)}{\Delta(\varphi)} d\varphi + \tfrac{1}{2}\int_0^{-\tau} \frac{E(\varphi)}{\Delta(\varphi)} d\varphi$$

$$= \int_0^\alpha \frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi \,\Delta(\varphi) \cdot \sin^2\alpha \, d\alpha}{(1 - k^2 \sin^2\varphi \sin^2\alpha)\,\Delta(\alpha)}.$$

Ferner ist, wenn man in dem von 0 bis $-\tau$ gehenden Integrale $-\varphi$ an die Stelle von φ treten lässt,

$$\int_0^{-\tau} \frac{E(\varphi)}{\Delta(\varphi)} d\varphi = \int_0^{\tau} \frac{-E(-\varphi)}{\Delta(\varphi)} d\varphi = \int_0^{\tau} \frac{E(\varphi)}{\Delta(\varphi)} d\varphi,$$

mithin ergiebt sich als Differenz von Nro. 79) und der vorhergehenden Gleichung

$$E(\alpha) F(\varphi) - E(\varphi) F(\alpha) = \int_0^\varphi \frac{k^2 \sin\alpha \cos\alpha \,\Delta(\alpha) \,.\, \sin^2\varphi \, d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi)}$$

$$- \int_0^\alpha \frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi \,\Delta(\varphi) \,.\, \sin^2\alpha \, d\alpha}{(1 - k^2 \sin^2\varphi \sin^2\alpha)\,\Delta(\alpha)}.$$

Ein elliptisches Integral dritter Gattung lässt sich demnach auf ein anderes zurückführen, worin die ursprüngliche Amplitude als

Parameterwinkel und der frühere Parameterwinkel als Amplitude vorkommt.

Im speciellen Falle $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ wird

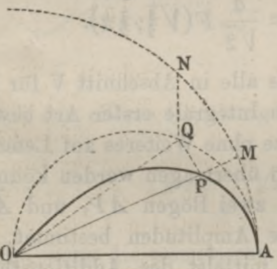
$$80)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{k^2 \sin\alpha \cos\alpha \, \varDelta(\alpha) \, . \, \sin^2\varphi \, d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi)\, \varDelta(\varphi)} = E(\alpha)\, F(\tfrac{1}{2}\pi) - E(\tfrac{1}{2}\pi)\, F(\alpha);$$

das vollständige elliptische Integral dritter Art kann daher auf unvollständige Integrale erster und zweiter Gattung reducirt werden*).

VII. Die Rectification der Lemniscate, Ellipse und Hyperbel.

a. Bezeichnet wie gewöhnlich a die Halbachse OA einer Lemniscate, r den Radiusvector OP eines Lemniscatenpunktes P, endlich θ den Winkel AOP, so ist bekanntlich

Fig. 45.



$$r = a\sqrt{\cos 2\theta};$$

die Länge s des Bogens AP ergiebt sich hieraus

$$s = a \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

$$= a \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - 2\sin^2\theta}},$$

und specieller für die Länge q des Lemniscatenquadranten

$$q = a \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - 2\sin^2\theta}}.$$

Statt des Winkels θ wollen wir einen anderen Winkel einführen, welcher bei der Construction der Curve vorkommt. Beschreibt man nämlich mit OA als Halbmesser aus O einen Kreis, zieht in diesem den Radius OM willkürlich unter dem Winkel $AOM = \theta$, nimmt man ferner $MN = MA$ und fällt von N auf OA eine Senk-

*) Jacobi, Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, pag. 139, §. 49 und §. 50.

rechte, so schneidet letztere den über OA als Durchmesser construirten Halbkreis in einem Punkte Q, für welchen $OQ = a\sqrt{\cos 2\theta}$ ist; der zum Winkel θ gehörende Curvenpunkt P ergiebt sich also dadurch, dass man auf OM die Strecke $OP = OQ$ abträgt. Gleichzeitig ist für den Winkel $AOQ = \varphi$, welcher die Amplitude heissen möge,

$$\sin\varphi = \frac{AQ}{AO} = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a} = \sqrt{2}\,.\,\sin\theta$$

und umgekehrt

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi.$$

Durch Substitution dieses Werthes gehen die Formeln für s und q in die folgenden über:

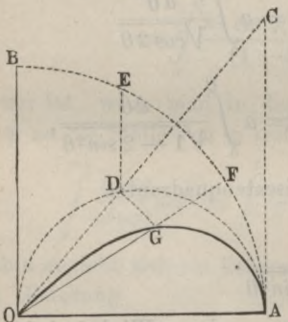
$$s = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}, \quad q = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}$$

oder

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}}F(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \varphi), \quad q = \frac{a}{\sqrt{2}}F(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \tfrac{1}{2}\pi).$$

Hieraus ist unmittelbar ersichtlich, dass alle in Abschnitt V für die elliptischen Integrale erster Art bewiesenen Sätze ohne Weiteres auf Lemniscatenbögen übertragen werden können. Sind z. B. zwei Bögen AP_1 und AP_2 durch ihre Amplituden bestimmt, so lässt sich mittelst des Additionstheoremes die Amplitude desjenigen dritten Bogens AP_3 finden, welcher gleich der Summe der beiden gegebenen Bögen ist; ebenso leicht kann ein gegebener Bogen AP vervielfacht oder in gleiche Theile zerlegt werden. Als bemerkenswerthen speciellen Fall erwähnen wir noch die Halbirung des Quadranten. Soll nämlich $s = \frac{1}{2}q$ oder

Fig. 46.



$$2F(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \varphi) = F(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \tfrac{1}{2}\pi)$$

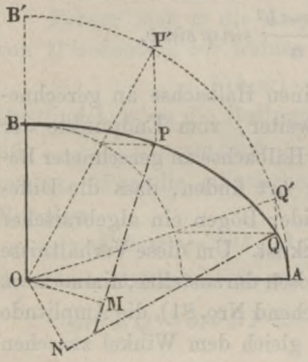
werden, so giebt die Formel 73) für $\psi = \varphi$ und $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$$\tan\varphi = \sqrt[4]{2}.$$

Um hiernach den Mittelpunkt des Lemniscatenquadranten zu construiren, errichtet man im Punkte A senkrecht auf AO die Gerade $AC = \sqrt{AO \,.\, AB}$ und zieht die Hypotenuse OC, welche den über OA beschriebenen Halbkreis in D schneidet; es ist dann $\llcorner AOD$ die Amplitude des gesuchten Punktes. Der letztere ergiebt sich dadurch, dass man $DE \parallel OB$ legt, den Kreisbogen AE in F halbirt und auf dem Radius OF die Strecke $OG = OD$ abträgt.

b. Statt der gewöhnlichen, auf rechtwinklige Coordinaten bezogenen Gleichung einer aus den Halbachsen a und b construirten Ellipse benutzen wir die beiden Gleichungen

Fig. 47.



$$x = a \sin\varphi, \quad y = b \cos\varphi,$$

welche einer bekannten Construction mittelst des um- und eingeschriebenen Kreises entsprechen. Die sogenannte Amplitude φ des Ellipsenpunktes P ist dann der Winkel $B'OP'$, wenn P' denjenigen Punkt des umschriebenen Kreises bedeutet, welcher die nämliche Abscisse wie P besitzt. Für den vom Endpunkte der kleinen Halbachse an gerechneten Ellipsenbogen $BP = s$ folgt nach den obigen Gleichungen

$$s = \int_0^{\varphi} \sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi} \,.\, d\varphi$$

oder, wenn die numerische Excentricität

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = k$$

gesetzt wird,

$$s = a \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} \,.\, d\varphi = a E(k, \varphi).$$

Für den Ellipsenquadranten q ist specieller

$$q = a\, E(k, \tfrac{1}{2}\pi).$$

Mittelst des Additionstheoremes für die Integrale zweiter Art lässt sich nun zu zwei gegebenen Ellipsenbögen BP_1 und BP_2 leicht ein dritter Bogen BP_3 von der Beschaffenheit finden, dass $arc\ BP_1 + arc\ BP_2 - arc\ BP_3$ ein algebraischer Ausdruck ist. Besonders elegant gestaltet sich dieses Ergebniss für den Fall, wo die dritte Amplitude $\sigma = \frac{1}{2}\pi$ genommen wird, wo also die Gleichung

$$81)\qquad tan\,\varphi\, tan\,\psi = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{a}{b}$$

stattfindet; das Additionstheorem in Nro. 77) lautet dann

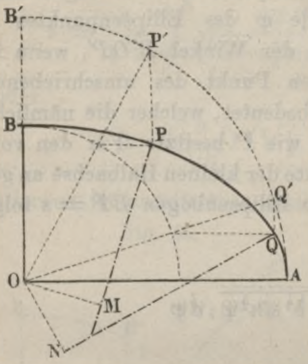
$$E(k,\varphi) - [E(k,\tfrac{1}{2}\pi) - E(k,\psi)] = k^2 \sin\varphi \sin\psi,$$

oder, wenn mit a multiplicirt und $\llcorner\, B'OQ' = \psi$ genommen wird,

$$82)\qquad arc\,BP - arc\,AQ = \frac{a^2-b^2}{a} \sin\varphi \sin\psi.$$

Zu jedem vom Endpunkte der kleinen Halbachse an gerechneten Ellipsenbogen lässt sich also ein zweiter, vom Endpunkte der grossen Halbachse an gerechneter Bogen der Art finden, dass die Differenz beider Bögen ein algebraischer Ausdruck ist. Um diese Verhältnisse geometrisch darzustellen, nimmt man, entsprechend Nro. 81), die Amplitude $B'OQ'$ gleich dem Winkel zwischen OA und der zum Punkte P gehörenden Ellipsennormale MP; die Normalen der Punkte P und Q haben dann gleiche Entfernungen $OM = ON$ vom Mittelpunkte O, und die Gleichung 82) wird

Fig. 48.



$$arc\,BP - arc\,AQ = OM.$$

Setzt man noch specieller $\psi = \varphi$, mithin

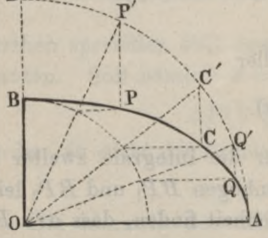
$$tan\,\varphi = \sqrt{\frac{a}{b}},$$

so erreicht OM sein Maximum $a - b$, und die Amplitude φ bestimmt dann einen Punkt C, für welchen

$$arc\,BC - arc\,AC = a - b$$

ist. Der nämliche Punkt wurde bereits auf Seite 150 des ersten Theiles besprochen (P in Fig. 35).

Fig. 49.



Als zweite Anwendung des Additionstheoremes diene die Aufgabe, einen Ellipsenbogen PQ zu bestimmen, welcher der Hälfte des Quadranten gleichkommt. Nennen wir C den vorhin ermittelten Ellipsenpunkt, für welchen

$$arc\,BC - arc\,AC = a - b$$

$$arc\,BC = \tfrac{1}{2}(arc\,ACB + a - b)$$

ist, so gelten für dessen Amplitude $B'OC' = \gamma$ die Formeln

$$tan\gamma = \sqrt{\frac{a}{b}},\quad sin\gamma = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}},\quad cos\gamma = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}},\quad \varDelta(\gamma) = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Ferner mag φ die Amplitude von P, ebenso ψ die Amplitude von Q bedeuten; wir wählen diese Winkel so, dass die Gleichung

$$F(k,\psi) - F(k,\varphi) = F(k,\gamma)$$

stattfindet, wozu die Bedingung

83) $$cos\varphi\,cos\psi + sin\varphi\,sin\psi\,\varDelta(\gamma) = cos\gamma$$

gehört. Für die elliptischen Integrale zweiter Art gilt dann die Relation

$$E(k,\psi) - E(k,\varphi) = E(k,\gamma) - k^2\,sin\varphi\,sin\psi\,sin\gamma$$

d. i. nach Multiplication mit a

$$arc\,BQ - arc\,BP = arc\,BC - \frac{a^2-b^2}{a}\,sin\varphi\,sin\psi\,sin\gamma$$

oder wegen des vorhin angegebenen Werthes von $arc\,BC$

$$arc\,PQ = \tfrac{1}{2}\,arc\,ACB + (a-b)\left\{\tfrac{1}{2} - \frac{a+b}{a}\,sin\varphi\,sin\psi\,sin\gamma\right\}.$$

Soll der Bogen PQ die Hälfte des Quadranten ausmachen, so muss

84) $$\frac{a+b}{a}\,sin\varphi\,sin\psi\,sin\gamma = \tfrac{1}{2}$$

sein, und nun führen die Gleichungen 83) und 84) zur Bestimmung der Amplituden φ und ψ. Die letztere Gleichung giebt zufolge des Werthes von $sin\gamma$

$$sin\varphi\,sin\psi = \tfrac{1}{2}\,sin\gamma;$$

nach Substitution hiervon erhält man aus Nro. 83)

$$cos\varphi\,cos\psi = \tfrac{1}{2}\,cos\gamma,$$

mithin

$$cos(\psi-\varphi) = cos\tfrac{1}{4}\pi\,cos(\gamma - \tfrac{1}{4}\pi),$$

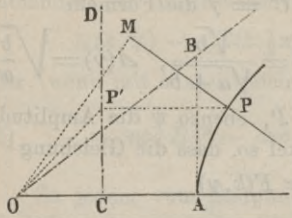
$$cos(\psi+\varphi) = cos\tfrac{1}{4}\pi\,cos(\gamma + \tfrac{1}{4}\pi).$$

c. Von einer Hyperbel sei $OA = a$ die Haupt-, $AB = b$ die Nebenhalbachse, $OB = \sqrt{a^2+b^2}$ die lineare Excentricität und CD eine Gerade, welche in der Entfernung

$$OC = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

parallel zu AB gelegt ist; bezeichnet ferner P' die Projection von P auf CD, endlich φ den Winkel AOP', so hat man für die Ordinate des Punktes P

Fig. 50.



$$y = \frac{b^2 \tan\varphi}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

und für die Abscisse findet sich mittelst der Gleichung der Curve

$$x = \frac{a}{\cos\varphi}\sqrt{1-\frac{a^2\sin^2\varphi}{a^2+b^2}}.$$

Setzt man noch zur Abkürzung

$$\sqrt{a^2+b^2} = c, \qquad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = k,$$

so wird der Hyperbelbogen $AP = s$ durch die Formel

$$s = \frac{b^2}{c}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

ausgedrückt, wofür zu schreiben ist

85) $$s = \frac{b^2}{c}F(k,\varphi) - c\,E(k,\varphi) + c\,\Delta(\varphi)\tan\varphi.$$

Ein hyperbolischer Bogen lässt sich also mittelst der elliptischen Integrale erster und zweiter Art rectificiren. Es verdient hierbei bemerkt zu werden, dass das Product $c\,\Delta(\varphi)\tan\varphi$ die Entfernung des Coordinatenanfanges von der zum Hyperbelpunkte P gehörenden Normale MP darstellt; für $OM = p$ ist daher

$$p - s = c\,E(k,\varphi) - \frac{b^2}{c}F(k,\varphi)$$

oder, wenn Alles durch a und k ausgedrückt wird,

$$p - s = a\,\frac{E(k,\varphi)-(1-k^2)\,F(k,\varphi)}{k}.$$

Dem unendlich entfernten Hyperbelpunkte entspricht der Werth $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, und OM fällt dann mit der Asymptote zusammen; als Differenz zwischen dem ins Unendliche fortgesetzten Hyperbelzweige AP und der zugehörigen Asymptote ergiebt sich jetzt die endliche Grösse

$$Lim(p-s) = a\,\frac{E-(1-k^2)K}{k}$$

d. i. vermöge der Werthe von E und K

$$Lim(p-s) = \tfrac{1}{2}\pi a\left\{\frac{k}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{k^3}{4}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{k^5}{6}+\cdots\right\},$$

welches Resultat übereinstimmt mit Formel 11) auf Seite 389 des ersten Theiles.

Sind φ, ψ, σ die Amplituden dreier Hyperbelbögen AP, AQ, AR, so folgt nach Nro. 85)

$$arc\,AP + arc\,AQ - arc\,AR = \frac{b^2}{c}\left\{F(\varphi) + F(\psi) - F(\sigma)\right\}$$
$$- c\left\{E(\varphi) + E(\psi) - E(\sigma)\right\}$$
$$+ c\{\varDelta(\varphi)\tan\varphi + \varDelta(\psi)\tan\psi - \varDelta(\sigma)\tan\sigma\};$$

im Fall φ, ψ, σ der Gleichung

$$\cos\sigma\cos\psi + \sin\sigma\sin\psi\,\varDelta(\varphi) = \cos\varphi$$

genügen, wird einfacher

$$arc\,AP - arc\,QR$$
$$= c[\varDelta(\varphi)\tan\varphi + \varDelta(\psi)\tan\psi - \varDelta(\sigma)\tan\sigma - k^2\sin\varphi\sin\psi\sin\sigma].$$

Zu jedem, vom Scheitel an gerechneten Hyperbelbogen lässt sich demnach ein zweiter Bogen construiren, der von dem ersten um eine algebraische Grösse differirt. Denkt man sich φ als gegeben, ψ und σ dagegen mittelst der Gleichungen

$$\cos\sigma\cos\psi + \sin\sigma\sin\psi\,\varDelta(\varphi) = \cos\varphi$$
$$\varDelta(\varphi)\tan\varphi + \varDelta(\psi)\tan\psi - \varDelta(\sigma)\tan\sigma = k^2\sin\varphi\sin\psi\sin\sigma$$

bestimmt, so ergiebt sich specieller $arc\,QR = arc\,AP$. Ueberhaupt können aus der Relation zwischen drei Hyperbelbögen ähnliche Consequenzen gezogen werden wie aus der Relation zwischen drei Ellipsenbögen, nur sind die Resultate weniger einfach.

Schliesslich möge noch die Vergleichung eines Hyperbelbogens mit zwei Ellipsenbögen Platz finden. Wenn k_1 und φ_1 mittelst der Formeln

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \qquad \sin(2\varphi_1 - \varphi) = k\sin\varphi$$

bestimmt werden, so ist zufolge der Landen'schen Transformation (Formel 25)

$$(1-k^2)\,F(k,\varphi) = 2\{E(k,\varphi) - (1+k)\,E(k_1,\varphi_1) + k\sin\varphi\},$$

und andererseits nach Nro. 85)

$$s = a\,\frac{(1-k^2)\,F(k,\varphi) - E(k,\varphi) + \varDelta(\varphi)\tan\varphi}{k};$$

aus beiden Gleichungen folgt durch Elimination von $F(k,\varphi)$

$$86)\quad s = \frac{a}{k}\left\{E(k,\varphi) - 2(1+k)\,E(k_1,\varphi_1) + \varDelta(\varphi)\tan\varphi + 2k\sin\varphi\right\}.$$

Der Hyperbelbogen s lässt sich also durch die Bögen zweier Ellipsen ausdrücken, deren erste die Halbachsen

$$\frac{a}{k} = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ und } b$$

und deren zweite die Halbachsen

$$\frac{2a(1+k)}{k} = 2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right) \text{ und } \frac{2a(1-k)}{k} = 2\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)$$

besitzt; die Amplituden der Ellipsenbögen sind φ und φ_1*).

VIII. Die Complanation der centrischen Flächen zweiten Grades.

Die Gleichungen der drei aus den Halbachsen a, b, c, construirten centrischen Flächen zweiten Grades mögen sein

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

wofür in solchen Fällen, bei denen es keiner Unterscheidung der einzelnen Flächen bedarf, kürzer

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

geschrieben werden soll. Hieraus folgt

$$z = \sqrt{\frac{1 - Ax^2 - By^2}{C}},$$

und wenn man diesen Werth in die allgemeine Complanationsformel

$$S = \int\!\!\int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \cdot dx\,dy$$

substituirt, so entsteht

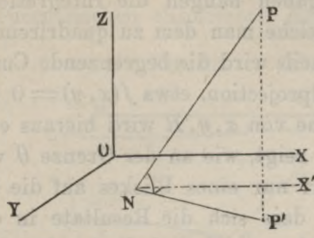
$$S = \int\!\!\int \sqrt{\frac{C - A(C-A)x^2 - B(C-B)y^2}{C(1 - Ax^2 - By^2)}}\, dx\,dy.$$

---

*) Die Vergleichung der Lemniscaten-, Ellipsen- und Hyperbelbögen ist eine Schöpfung von Fagnano Conte de Fagnani; s. Metodo per misurare la lemniscata in dem Giornale de letterati d'Italia, Venezia 1718, ferner desselben Verfassers Produzione mathematiche, T. II, p. 317 und 336 sowie Nova acta eruditorum a. 1766. Vielfache Untersuchungen dieser Art lieferten Euler in den Comment. novi Petropolit. T. VI, T. VII (pag. 3 und p. 128), T. XII und Legendre im Traité des fonct. ellipt. Die Formel 86) fand John Landen, s. Philosophical Transactions 1775.

Das hier vorkommende Radical bedeutet geometrisch die Secante des Winkels zwischen der Berührungsebene im Punkte xyz und der Horizontalebene xy oder auch die Cosecante des Winkels PNP', welchen die Normale im Punkte xyz mit der xy-Ebene einschliesst; dieser Neigungswinkel möge ω heissen und künftig als neue Variabele gelten. Es bezeichne ferner θ den Winkel $P'NX'$, welchen die Horizontalprojection der Normale mit der x-Achse bildet; wir betrachten denselben gleichfalls als neue Variabele. Zufolge der Bedeutungen von ω und θ finden zwischen diesen Winkeln und den Coordinaten x, y folgende Beziehungen statt:

Fig. 51.



$$sin^2\,\omega = \frac{C(1 - Ax^2 - By^2)}{C - A(C-A)x^2 - B(C-B)y^2}, \quad tan\,\theta = \frac{By}{Ax}$$

aus denen x und y leicht als Functionen von ω und θ darzustellen sind. Wird nämlich zur Abkürzung

$$R^2 = \frac{C}{AB} \cdot \frac{cos^2\,\omega}{BC\,cos^2\,\omega\,cos^2\,\theta + CA\,cos^2\,\omega\,sin^2\,\theta + AB\,sin^2\,\omega}$$

gesetzt, so ergiebt sich

$$x = BR\,cos\,\theta, \qquad y = AR\,sin\,\theta.$$

Die bisherige Complanationsformel

$$S = \int\int \frac{1}{sin\,\omega}\,dx\,dy$$

geht nun durch Einführung von ω und θ statt x und y in die folgende über:

$$S = \int\int \frac{1}{sin\,\omega}\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}\right) d\omega\,d\theta,$$

worin für x und y die vorhin angegebenen Werthe zu substituiren sind. Zufolge der Bemerkung, dass R von ω und θ abhängt, erhält man zunächst

$$\frac{\partial x}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}$$

$$= AB\frac{\partial R}{\partial \omega}cos\,\theta\left(\frac{\partial R}{\partial \theta}sin\,\theta + R\,cos\,\theta\right) - AB\frac{\partial R}{\partial \omega}sin\,\theta\left(\frac{\partial R}{\partial \theta}cos\,\theta - R\,sin\,\theta\right)$$

$$= AB.R\frac{\partial R}{\partial \omega} = \tfrac{1}{2}AB\frac{\partial (R^2)}{\partial \omega}$$

$$= -\frac{ABC\,sin\,\omega\,cos\,\omega}{(BC\,cos^2\,\omega\,cos^2\,\theta + CA\,cos^2\,\omega\,sin^2\,\theta + AB\,sin^2\,\omega)^2},$$

und damit gelangt man zu der rationalen Formel*)

$$87)\quad S = -ABC\int\int\frac{\cos\omega\,d\omega\,d\theta}{(BC\cos^2\omega\cos^2\theta + CA\cos^2\omega\sin^2\theta + AB\sin^2\omega)^2}.$$

Wie bei allen derartigen Aufgaben hängen die Integrationsgrenzen von der Begrenzung ab, welche man dem zu quadrirenden Flächenstücke geben will. Meistentheils wird die begrenzende Curve durch die Gleichung ihrer Horizontalprojection, etwa $f(x,y)=0$ bestimmt; nach Substitution der Werthe von x, y, R wird hieraus eine Gleichung zwischen ω und θ, welche zeigt, wie an der Grenze θ von ω oder ω von θ abhängt. Es bedarf nur eines Blickes auf die betreffenden Formeln, um einzusehen, dass sich die Resultate in der Regel sehr complicirt gestalten werden, und deshalb beschränken wir uns vorläufig auf den einfachsten d. h. auf denjenigen Fall, wo das obige Doppelintegral vier constante Grenzen besitzt. Hierzu dient folgende Betrachtung.

Geht man auf der Fläche von einem Punkte xyz aus, dessen Normale unter dem Winkel ω gegen die xy-Ebene geneigt ist, so kann man noch unendlich viel andere Flächenpunkte finden, deren Normalen den nämlichen Winkel ω mit der Horizontalebene einschliessen. Alle derartigen Punkte bilden in stetiger Folge eine auf der Fläche liegende krumme Linie, welche die Curve der isoklinen Normalen für den Neigungswinkel ω heissen mag. Die Gleichung ihrer Horizontalprojection ergiebt sich aus der Formel

$$\sin^2\omega = \frac{C(1 - Ax^2 - By^2)}{C - A(C-A)x^2 - B(C-B)y^2},$$

wenn man ω als Constante betrachtet und demgemäss schreibt

$$88)\qquad \frac{A(A\tan^2\omega + C)}{C}\,x^2 + \frac{B(B\tan^2\omega + C)}{C}\,y^2 = 1.$$

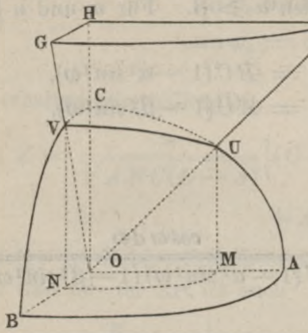
Es ist leicht zu sehen, dass dieser Gleichung immer eine Ellipse entspricht. Bei dem Ellipsoide erhellt dies unmittelbar, bei den Hyperboloiden ist durch die Natur der jedesmaligen Fläche ω auf ein gewisses Intervall beschränkt, und in Folge dieses Umstandes werden die Coefficienten von x^2 und y^2 positiv. Zu dem nämlichen Resultate führt die nicht überflüssige Bemerkung, dass die vorliegende Gleichung auch entsteht, wenn z aus den Gleichungen

*) Die Winkel ω und θ hat Jacobi eingeführt (Crelle's Journal Bd. X S. 110), jedoch nur um die Formel für die Oberfläche des ganzen Ellipsoides einfacher als Legendre zu beweisen. Dass sich aber noch andere (im Texte folgende) merkwürdige Sätze an die Formel 87) knüpfen, scheinen Jacobi und seine Nachfolger übersehen zu haben.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$
$$A^2x^2 + B^2y^2 - (C\cot\omega)^2 z^2 = 0$$

eliminirt wird. Jede Curve isokliner Normalen lässt sich demnach als Durchschnitt der gegebenen Fläche zweiten Grades mit einem concentrischen elliptischen Kegel ansehen, und daraus folgt, dass der Durchschnitt, wenn er überhaupt existirt, eine elliptische Horizontalprojection haben muss.

Fig. 52.



Aendert man in Nro. 88) den Winkel ω um eine beliebig kleine Grösse, so erhält man auf der Fläche eine zweite Curve isokliner Normalen; diese schneidet die erste nicht, weil die Horizontalprojectionen beider Curven keinen gemeinschaftlichen Punkt besitzen. Eine unendlich kleine Aenderung von ω führt demnach zu einem unendlich schmalen Streifen, welcher sich bandförmig um die Fläche legt. Lässt man endlich ω von einem gegebenen Anfangswerthe ω_0 bis zu einem gleichfalls gegebenen Endwerthe ω_1 stetig fortschreiten, so entsteht eine Zone, deren Flächeninhalt Z mittelst der Formel 87) durch Einführung der Grenzen $\omega = \omega_0$, $\omega = \omega_1$ und $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$ gefunden wird; es ist daher

$$89)\quad Z = -ABC \int_{\omega_0}^{\omega_1}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\omega\, d\omega\, d\theta}{(BC\cos^2\omega\cos^2\theta + CA\cos^2\omega\sin^2\theta + AB\sin^2\omega)^2}.$$

Die auf θ bezügliche Integration hat keine Schwierigkeit, wenn man $\sin^2\omega$ durch $\sin^2\omega(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$ ersetzt und für den Augenblick die Abkürzungen

$$m = B(C\cos^2\omega + A\sin^2\omega), \qquad n = A(C\cos^2\omega + B\sin^2\omega)$$

benutzt; es ergiebt sich zunächst

$$Z = ABC \int_{\omega_1}^{\omega_0} \cos\omega\, d\omega \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(m\cos^2\theta + n\sin^2\theta)^2}$$

und nach bekannten Methoden (z. B. mittelst der Substitution $\tan\theta = t$)

$$Z = \pi ABC \int_{\omega_1}^{\omega_0} \left\{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right\} \frac{\cos\omega}{\sqrt{mn}}\, d\omega.$$

Zum Zwecke weiterer Reduction nehmen wir bei dem Ellipsoide

$a > b > c$, bei den Hyperboloiden $b > a$, durch welche Voraussetzungen die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt wird. Ferner sei

90) $$\alpha = \sqrt{1 - \frac{A}{C}}, \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{B}{C}};$$

die Grössen α und β sind dann immer reell und bedeuten geometrisch die numerischen Excentricitäten der beiden Verticalspuren der Fläche; gleichzeitig ist in allen Fällen $\alpha > \beta$. Für m und n haben wir jetzt

$$m = B[C - (C - A)\sin^2\omega] = BC(1 - \alpha^2 \sin^2\omega),$$
$$n = A[C - (C - B)\sin^2\omega] = AC(1 - \beta^2 \sin^2\omega),$$

mithin

$$\frac{C\sqrt{AB}}{\pi} Z =$$
$$\int_{\omega_1}^{\omega_0} \left\{\frac{A}{1 - \alpha^2 \sin^2\omega} + \frac{B}{1 - \beta^2 \sin^2\omega}\right\} \frac{\cos\omega \, d\omega}{\sqrt{(1 - \alpha^2 \sin^2\omega)(1 - \beta^2 \sin^2\omega)}}.$$

Mittelst der Substitutionen

91) $$\sin\omega = u, \quad \sin\omega_0 = u_0, \quad \sin\omega_1 = u_1$$

vereinfacht sich diese Formel und wird

$$Z = \frac{\pi}{C\sqrt{AB}} \int_{u_1}^{u_0} \left\{\frac{A}{1 - \alpha^2 u^2} + \frac{B}{1 - \beta^2 u^2}\right\} \frac{du}{\sqrt{(1 - \alpha^2 u^2)(1 - \beta^2 u^2)}}.$$

Um endlich Z durch elliptische Integrale auszudrücken, setzen wir

92) $$\varkappa = \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{C - B}{C - A}} \quad \text{und} \quad u = \frac{\sin\varphi}{\alpha};$$

es ist dann

$$\int_0^u \left\{\frac{A}{1 - \alpha^2 u^2} + \frac{B}{1 - \beta^2 u^2}\right\} \frac{du}{\sqrt{(1 - \alpha^2 u^2)(1 - \beta^2 u^2)}}$$
$$= \frac{1}{\alpha} \int_0^\varphi \left\{\frac{A}{\cos^2\varphi} + \frac{B}{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}\right\} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa \ \sin^2\varphi}}$$
$$= \frac{A}{\alpha(1 - \varkappa^2)} \left\{(1 - \varkappa^2) F(\varkappa, \varphi) - E(\varkappa, \varphi) + \varDelta(\varkappa, \varphi) \tan\varphi\right\}$$
$$+ \frac{B}{\alpha(1 - \varkappa^2)} \left\{E(\varkappa, \varphi) - \frac{\varkappa^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\varDelta(\varkappa, \varphi)}\right\}$$
$$= \sqrt{\frac{C}{C - A}} \left\{AF(\varkappa, \varphi) + (C - A)E(\varkappa, \varphi) + \frac{A - (C - B)\cos^2\varphi}{\varDelta(\varkappa, \varphi)} \tan\varphi\right\}.$$

Benutzen wir noch die Abkürzung

$$93)\qquad G(\varkappa,\varphi)=\frac{A-(C-B)\cos^2\varphi}{\Delta(\varkappa,\varphi)}\tan\varphi$$

und bestimmen, entsprechend Nro. 92), die Grenzen von φ mittelst der Gleichungen

$$94)\qquad \begin{aligned}\sin\varphi_0&=\alpha u_0=\alpha\sin\omega_0,\\ \sin\varphi_1&=\alpha u_1=\alpha\sin\omega_1,\end{aligned}$$

so erhalten wir schliesslich

$$95)\ Z=\frac{\pi}{\sqrt{ABC(C-A)}}\Big\{(C-A)[E(\varphi_0)-E(\varphi_1)] \\ +A[F(\varphi_0)-F(\varphi_1)]+G(\varphi_0)-G(\varphi_1)\Big\}.$$

Zufolge des Subtractionstheoremes für die elliptischen Integrale erster und zweiter Art ist auch

$$Z=\frac{\pi}{\sqrt{ABC(C-A)}}\Big\{(C-A)E(\tau)+AF(\tau)+G(\varphi_0)-G(\varphi_1) \\ -\varkappa^2(C-A)\sin\tau\sin\varphi_0\sin\varphi_1\Big\},$$

worin τ durch die Formel

$$\sin\tau=\frac{\sin\varphi_0\cos\varphi_1\,\Delta(\varphi_1)-\sin\varphi_1\cos\varphi_0\,\Delta(\varphi_0)}{1-\varkappa^2\sin^2\varphi_0\sin^2\varphi_1}$$

bestimmt wird. Das Resultat der bisherigen Untersuchung besteht nun in dem Satze, dass sich auf jeder centrischen Fläche zweiten Grades unendlich viel Zonen construiren lassen, deren Complanation mittelst elliptischer Integrale erster und zweiter Art ausführbar ist. Jede derartige Zone wird von zwei Curven isokliner Normalen begrenzt; die Horizontalprojectionen der letzteren Curven sind Ellipsen, für welche die Gleichungen gelten

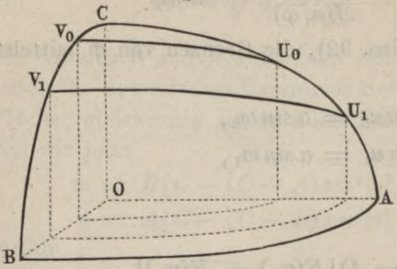
$$96)\qquad \begin{cases}\dfrac{A(A\tan^2\omega_0+C)}{C}x^2+\dfrac{B(B\tan^2\omega_0+C)}{C}y^2=1,\\[2ex] \dfrac{A(A\tan^2\omega_1+C)}{C}x^2+\dfrac{B(B\tan^2\omega_1+C)}{C}y^2=1\end{cases}$$

An diesen allgemeinen Satz wollen wir noch die speciellen Folgerungen knüpfen, welche sich auf die einzelnen centrischen Flächen zweiten Grades beziehen.

a. Bei dem Ellipsoide können ω_0 und ω_1 alle möglichen

Werthe haben und es darf immer $\omega_0 > \omega_1$ vorausgesetzt werden, damit die erste Ellipse innerhalb der zweiten liegt, wie dies die Figur 53 zeigt, in welcher $U_0 V_0 V_1 U_1$ einen Quadranten der Zone Z darstellt. Für $\omega_0 = \frac{1}{2}\pi$ zieht sich die Curve $U_0 V_0 \ldots$ auf den Punkt C zusammen, und die Zone wird zu einer Kappe $C U_1 V_1 \ldots$, deren Fläche Z_1 heissen möge. Aus Nro. 94) folgt dann $\sin\varphi_0 = \alpha$ oder, wenn wir diesen besonderen Werth von φ_0 mit σ bezeichnen,

Fig. 53.



$$97)\qquad \sin\sigma = \alpha = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a},$$

und nach Nro. 95) ist

$$98)\quad Z_1 = \frac{\pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}}\Big\{(a^2 - c^2)[E(\sigma) - E(\varphi_1)] + c^2[F(\sigma) - F(\varphi_1)] + a^2 c^2 [G(\sigma) - G(\varphi_1)]\Big\}.$$

Wenn zweitens in der allgemeinen Formel $\omega_1 = 0$ gesetzt wird, so fällt die untere Curve $U_1 V_1 \ldots$ mit der Horizontalspur des Ellipsoides zusammen und es entsteht eine von den Curven $AB \ldots$ und $U_0 V_0 \ldots$ begrenzte Zone, deren Fläche Z_0 heissen möge; die Formeln 94) und 95) geben als Werth derselben

$$99)\quad Z_0 = \frac{\pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}}\Big\{(a^2 - c^2) E(\varphi_0) + c^2 F(\varphi_0) + a^2 c^2 G(\varphi_0)\Big\}.$$

Für $\omega_0 = \frac{1}{2}\pi$ also $\varphi_0 = \sigma$ geht diese Zone in das Halbellipsoid über; es ist demnach, wenn Ω die Gesammtoberfläche des Ellipsoides bezeichnet,

$$\Omega = \frac{2\pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}}\Big\{(a^2 - c^2) E(\sigma) + c^2 F(\sigma) + a^2 c^2 G(\sigma)\Big\}$$

oder, zufolge der Werthe von $\sin\sigma$ und $G(\sigma)$,

$$100)\qquad \Omega = 2\pi c\Big\{b E(\sigma) \tan\sigma + b F(\sigma) \cot\sigma + c\Big\}.$$

Aus den Gleichungen 98) und 99) ergiebt sich weiter

$$Z_0 - Z_1 = \frac{\pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}} \Big\{ (a^2 - c^2)[E(\varphi_0) + E(\varphi_1) - E(\sigma)] + c^2[F(\varphi_0) + F(\varphi_1) - F(\sigma)] + a^2c^2[G(\varphi_0) + G(\varphi_1) - G(\sigma)] \Big\},$$

und wenn hier ω_0 und ω_1 so gewählt werden, dass φ_0 und φ_1 der Gleichung

$$\cos\sigma = \cos\varphi_0 \cos\varphi_1 - \sin\varphi_0 \sin\varphi_1 \varDelta(\sigma)$$

genügen, so wird einfacher

$$Z_0 - Z_1 = \frac{\pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}} \Big\{ (a^2 - c^2)\varkappa^2 \sin\varphi_0 \sin\varphi_1 \sin\sigma + a^2c^2[G(\varphi_0) + G(\varphi_1) - G(\sigma)] \Big\}.$$

Um das hiermit gewonnene Resultat besser übersehen zu können, vermeiden wir alle Abkürzungen, drücken $\sin\varphi_0$, $\cos\varphi_0$, etc. durch ω_0, ω_1 aus, und gelangen damit zu dem Satze: Wenn die Neigungswinkel ω_0 und ω_1 der Bedingung

101) $$b\sqrt{(a^2\cos^2\omega_0 + c^2\sin^2\omega_0)(a^2\cos^2\omega_1 + c^2\sin^2\omega_1)} = c\Big\{ab + (a^2 - c^2)\sin\omega_0 \sin\omega_1\Big\}$$

genügen, so ist

102) $$Z_0 - Z_1 = \pi\Bigg\{\frac{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}{ab}\sin\omega_0\sin\omega_1 - c^2 + \frac{[c^4 - (a^2 - c^2)(b^2 - c^2)\cos^2\omega_0]\sin\omega_0}{\sqrt{(a^2\cos^2\omega_0 + c^2\sin^2\omega_0)(b^2\cos^2\omega_0 + c^2\sin^2\omega_0)}} + \frac{[c^4 - (a^2 - c^2)(b^2 - c^2)\cos^2\omega_1]\sin\omega_1}{\sqrt{(a^2\cos^2\omega_1 + c^2\sin^2\omega_1)(b^2\cos^2\omega_1 + c^2\sin^2\omega_1)}}\Bigg\}.$$

Auf dem dreiachsigen Ellipsoide lassen sich demnach unendlich viel zusammengehörende Zonen und Kappen angeben, deren Flächeninhalte um algebraische Ausdrücke differiren.

Sehr einfach gestaltet sich die Sache in dem speciellen Falle $\omega_0 = \omega_1$, d. h. wenn nur eine Curve isokliner Normalen vorhanden ist, welche die Fläche des Halbellipsoides in eine Kappe Z_1 und in die Zone Z_0 theilt. Aus Nro. 101) folgt dann für ω die Formel

$$\tan\omega = \sqrt{\frac{ab}{(a + b + c)c}}$$

und aus Nro. 102) die Relation

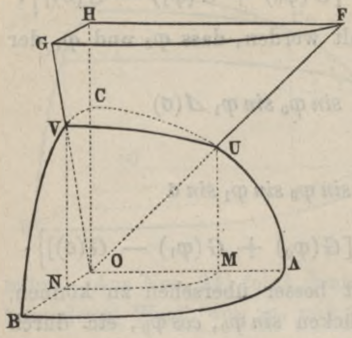
$$Z_1 - Z_0 = \pi\Big\{ab - \frac{(a^2 + b^2)c}{a + b}\Big\}.$$

Die Curve der isoklinen Normalen ist in diesem Falle der Durchschnitt des Ellipsoides mit einem aus den Dimensionen

$$FH = \frac{a^2}{c}, \quad GH = \frac{b^2}{c},$$

$$OH = \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}$$

Fig. 54.



construirten elliptischen Kegel (Fig. 54); die Halbachsen ihrer Horizontalprojection sind

$$OM = a\sqrt{\frac{a(a+b+c)}{(a+b)(a+c)}},$$

$$ON = b\sqrt{\frac{b(a+b+c)}{(b+c)(b+a)}}.$$

Es wird wohl kaum der Bemerkung bedürfen, dass diese Sätze die stereometrischen Correlate zu den Fagnano'schen Theoremen über die Ellipse bilden.

b. Für die Hyperboloide gelten ganz ähnliche Entwickelungen, welche indessen keine so einfachen Specialisirungen zulassen, weil ω_0 und ω_1 bestimmte Grenzen nicht überschreiten dürfen. Jedoch werden folgende Bemerkungen von Interesse sein.

Bei dem einfachen Hyperboloide kann man $\omega_0 = 0$ und

$$tan^2\omega_1 = -\frac{C}{A+B} \quad \text{oder} \quad tan\,\omega_1 = \frac{ab}{c\sqrt{a^2+b^2}}$$

nehmen; die erste Curve der isoklinen Normalen fällt dann mit der Horizontalspur der Fläche zusammen, und die zweite hat einen mit dem Radius $\sqrt{a^2+b^2}$ beschriebenen Kreis zur Horizontalprojection. Ferner wird $\varphi_0 = 0$,

$$sin\,\varphi_1 = \frac{b\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}} \quad \text{oder} \quad tan\,\varphi_1 = \frac{b\sqrt{a^2+c^2}}{ac},$$

und nach Substitution dieser Werthe erhält man Z aus Nro. 95).

Bei dem getheilten Hyperboloide empfiehlt sich die Wahl $\omega_0 = \frac{1}{2}\pi$, wodurch die Zone in eine Kappe übergeht, und als specieller Fall

$$tan\,\omega_1 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}.$$

Die Horizontalprojection der Curve isokliner Normalen ist jetzt eine Ellipse mit den Halbachsen $\frac{a^2}{b}$ und $\frac{b^2}{a}$, welche der grösste und kleinste Krümmungshalbmesser einer aus den Halbachsen a und b construirten Ellipse sind.

c. Nachdem wir im Vorhergehenden solche Zonen bestimmt haben, deren Oberflächen durch unvollständige elliptische Integrale ausdrückbar sind, wollen wir noch untersuchen, ob sich auch Zonen finden lassen, deren Complanation auf vollständige elliptische Integrale führt. Zu diesem Zwecke geben wir der Formel 87) die folgende Gestalt:

$$S = -\frac{AB}{C}\int\int \frac{\cos\omega\, d\theta\, d\omega}{[B\cos^2\theta + A\sin^2\theta - (B\alpha^2\cos^2\theta + A\beta^2\sin^2\theta)\sin^2\omega]^2}$$

und setzen zur Abkürzung

$$\text{103)}\qquad \begin{cases} p = B\cos^2\theta + A\sin^2\theta, \\ q = B\alpha^2\cos^2\theta + A\beta^2\sin^2\theta. \end{cases}$$

Da es sich um eine Zone handelt, muss θ von 0 bis 2π ausgedehnt werden, während die Grenzen für ω von der Natur der Begrenzung der Zone abhängen. Diese Begrenzung lassen wir vorläufig unbestimmt und bezeichnen mit ω_0 und ω_1 die Integrationsgrenzen für ω, welche selbstverständlich gewisse, später zu bestimmende Functionen von θ sind. Hiernach ist der Flächeninhalt Z der Zone

$$Z = \frac{AB}{C}\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\omega_1}^{\omega_0} \frac{\cos\omega\, d\omega}{(p - q\sin^2\omega)^2}$$

oder, wenn $\sin\omega = u$ und dem entsprechend $\sin\omega_0 = u_0$, $\sin\omega_1 = u_1$ gesetzt wird,

$$Z = \frac{AB}{C}\int_0^{2\pi} d\theta \int_{u_1}^{u_0} \frac{du}{(p - qu^2)^2}.$$

Dieses Integral zerlegen wir auf folgende Weise:

$$Z = \frac{AB}{C}\int_0^{2\pi} d\theta \left\{\int_0^{u_0} \frac{du}{(p - qu^2)^2} - \int_0^{u_1} \frac{du}{(p - qu^2)^2}\right\}$$

und substituiren im Minuenden $u = u_0 t$, im Subtrahenden $u = u_1 t$, wodurch die auf die neue Variabele t bezüglichen Integrale die gleichen Grenzen 0 und 1 erhalten und wieder zusammengezogen werden können, nämlich

$$Z = \frac{AB}{C}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left[\frac{u_0}{(p - qu_0^2 t^2)^2} - \frac{u_1}{(p - qu_1^2 t^2)^2}\right] dt.$$

Für die Integrationsgrenzen u_0 und u_1 treffen wir nun eine solche Wahl, dass das vorliegende Doppelintegral in ein Product zweier einfachen Integrale übergeht; dieser Fall tritt nämlich ein, wenn

104) $$u_0 = \lambda_0 \sqrt{\frac{p}{q}}, \quad u_1 = \lambda_1 \sqrt{\frac{p}{q}}$$

gesetzt wird, wo λ_0 und λ_1 beliebige Constanten bezeichnen. Dies giebt

$$Z = \frac{AB}{C} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{p\sqrt{pq}} \int_0^1 \left[\frac{\lambda_0}{(1-\lambda_0^2 t^2)^2} - \frac{\lambda_1}{(1-\lambda_1^2 t^2)^2}\right] dt;$$

der Werth des auf t bezüglichen Integrales heisse zur Abkürzung $\frac{1}{2}M$; es ist dann

105) $$M = \frac{\lambda_0}{1-\lambda_0^2} - \frac{\lambda_1}{1-\lambda_1^2} + \tfrac{1}{2} l\left(\frac{1+\lambda_0}{1+\lambda_1} \cdot \frac{1-\lambda_1}{1-\lambda_0}\right)$$

und nach dem Vorigen

$$Z = \frac{ABM}{2C} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{p\sqrt{pq}} = \frac{2ABM}{C} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{p\sqrt{pq}}.$$

Um dieses Integral zu reduciren, benutzen wir die Substitution

$$\tan\theta = \sqrt{\frac{B}{A}} \tan\varphi,$$

welche giebt

$$p = \frac{AB}{A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi}, \quad q = \frac{AB(\alpha^2\cos^2\varphi + \beta^2\sin^2\varphi)}{A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi},$$

$$d\theta = \frac{\sqrt{AB}\,.\,d\varphi}{A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi},$$

$$Z = \frac{2M}{C\sqrt{AB}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi}{\sqrt{\alpha^2\cos^2\varphi + \beta^2\sin^2\varphi}} d\varphi;$$

unter dem Integralzeichen setzen wir noch $A = C(1-\alpha^2)$, $B = C(1-\beta^2)$ und erhalten so

$$Z = \frac{2M}{\sqrt{AB}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1-(\alpha^2\cos^2\varphi + \beta^2\sin^2\varphi)}{\sqrt{\alpha^2\cos^2\varphi + \beta^2\sin^2\varphi}} d\varphi$$

oder

106) $$Z = \frac{2M}{\sqrt{AB}} \left\{\frac{1}{\alpha} F(\varkappa, \tfrac{1}{2}\pi) - \alpha E(\varkappa, \tfrac{1}{2}\pi)\right\},$$

worin der Modulus $\varkappa$ durch die Formel

$$\varkappa = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha} = \sqrt{\frac{B - A}{C - A}}$$

bestimmt wird. **Auf jeder centrischen Fläche zweiten Grades lassen sich demnach unendlich viele Zonen angeben, deren Complanation mittelst vollständiger elliptischer Integrale erster und zweiter Art ausführbar ist.** Eine derartige Zone wird von zwei Curven begrenzt, welche durch die Bedingungen in 104) oder

$$107)\quad \begin{cases} \sin\omega_0 = \lambda_0 \sqrt{\dfrac{B\cos^2\theta + A\sin^2\theta}{B\alpha^2\cos^2\theta + A\beta^2\sin^2\theta}}, \\ \sin\omega_1 = \lambda_1 \sqrt{\dfrac{B\cos^2\theta + A\sin^2\theta}{B\alpha^2\cos^2\theta + A\beta^2\sin^2\theta}} \end{cases}$$

bestimmt sind. Die Gleichungen der Horizontalprojectionen beider Curven ergeben sich hieraus mittelst der Substitutionen

$$\sin\omega = \sqrt{\frac{1 - Ax^2 - By^2}{1 - A\alpha^2x^2 - B\beta^2y^2}}, \quad \tan\theta = \frac{By}{Ax},$$

sie lauten:

$$(Ax^2 + By^2)(A\alpha^2x^2 + B\beta^2y^2) = \frac{A(\alpha^2 - \lambda_0^2)}{1 - \lambda_0^2}x^2 + \frac{B(\beta^2 - \lambda_0^2)}{1 - \lambda_0^2}y^2,$$

$$(Ax^2 + By^2)(A\alpha^2x^2 + B\beta^2y^2) = \frac{A(\alpha^2 - \lambda_1^2)}{1 - \lambda_1^2}x^2 + \frac{B(\beta^2 - \lambda_1^2)}{1 - \lambda_1^2}y^2.$$

Für die Construction der betreffenden Curven vierten Grades würden übrigens Polarcoordinaten bequemer sein; setzt man zu diesem Zwecke in der ersten Gleichung

$$x = r_0\cos\chi, \quad y = r_0\sin\chi, \quad \frac{A(\alpha^2 - \lambda_0^2)}{1 - \lambda_0^2} = A_0, \quad \frac{B(\beta^2 - \lambda_0^2)}{1 - \lambda_0^2} = B_0$$

und benutzt für die zweite Gleichung eine analoge Bezeichnung, so findet sich

$$r_0^2 = \frac{A_0\cos^2\chi + B_0\sin^2\chi}{(A\cos^2\chi + B\sin^2\chi)(A\alpha^2\cos^2\chi + B\beta^2\sin^2\chi)},$$

$$r_1^2 = \frac{A_1\cos^2\chi + B_1\sin^2\chi}{(A\cos^2\chi + B\sin^2\chi)(A\alpha^2\cos^2\chi + B\beta^2\sin^2\chi)}.$$

Bei dem Ellipsoide müssen r_0 und r_1 kleiner sein als der Radiusvector

$$r = \frac{1}{\sqrt{A\cos^2\chi + B\sin^2\chi}},$$

welcher in der Horizontalspur der Fläche zum Winkel χ gehört; es folgen hieraus die Bedingungen $0 < \lambda_0 < \beta$ und $0 < \lambda_1 < \beta$ Bei dem einfachen Hyperboloide müssen r_0 und r_1 mehr als r betragen, wozu nur gehört, dass λ_0 und λ_1 positive echte Brüche sind. Bei dem getheilten Hyperboloide können r_0 und r_1 irgend welche reelle Werthe haben; dies erfordert negative A_0, B_0, A_1, B_1, welche entstehen, wenn $1 < \lambda_0 < \beta$ und zugleich $1 < \lambda_1 < \beta$ genommen wird*).

IX. Die Complanation gewisser Fusspunktflächen.

Wie bei den Untersuchungen des vorigen Abschnittes sei

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

die Gleichung einer centrischen Fläche zweiten Grades; die Berührungsebene im Punkte xyz hat dann zur Gleichung

$$Ax\xi + By\eta + Cz\zeta = 1,$$

worin ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten der genannten Ebene bezeichnen. Eine Senkrechte vom Coordinatenanfange (dem Mittelpunkte der Fläche) auf die Tangentialebene schneidet letztere in einem Punkte, dessen Coordinaten ξ, η, ζ, bekannten Formeln zufolge, sind

$$\xi = \frac{Ax}{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2},$$

$$\eta = \frac{By}{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2},$$

$$\zeta = \frac{Cz}{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}.$$

Die Punkte $\xi\eta\zeta$ bilden in ihrer stetigen Folge die sogenannte Fusspunktfläche zur ursprünglichen Fläche; als Gleichung der neuen Fläche erhält man durch Elimination von x, y, z

108) $$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2 = \frac{\xi^2}{A} + \frac{\eta^2}{B} + \frac{\zeta^2}{C}.$$

---

*) Die Complanation des dreiachsigen Ellipsoides mittelst elliptischer Integrale ist zuerst von Legendre gezeigt worden im Traité des fonctions elliptiques, Tome I, p. 350 bis 360. Alle übrigen Resultate des Abschnittes VIII hat der Verfasser (zum Theil mittelst anderer Methoden) entwickelt; s. Sitzungsberichte der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften aus dem Jahre 1862 (Leipzig 1863), S. 23, und Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. IX, S. 205.

Um dieselbe in Polarcoordinaten auszudrücken, nennen wir r den Radiusvector des Punktes $\xi\eta\zeta$, ferner ψ den Neigungswinkel von r gegen die Horizontalebene $\xi\eta$, endlich χ den Winkel, welchen die Horizontalprojection von r mit der Achse der ξ einschliesst; es ist dann

$$\xi = r\cos\psi\cos\chi, \quad \eta = r\cos\psi\sin\chi, \quad \zeta = r\sin\psi,$$

und die Gleichung der Fusspunktfläche wird

$$109)\qquad r^2 = \frac{\cos^2\psi\cos^2\chi}{A} + \frac{\cos^2\psi\sin^2\chi}{B} + \frac{\sin^2\psi}{C}.$$

Zur Complanation der besprochenen Fläche benutzen wir die Formel 6) auf Seite 474 des ersten Theiles, welche wir dem vorliegenden Coordinatensysteme dadurch anpassen, dass wir erst die Achsen der x und z gegen einander vertauschen, dann $\theta = \frac{1}{2}\pi - \psi$, $\omega = \frac{1}{2}\pi - \chi$ und r unter das Wurzelzeichen setzen. Die betreffende Formel lautet jetzt

$$S = \int\int\sqrt{\left[r^4 + \left(r\frac{\partial r}{\partial\psi}\right)^2\right]\cos^2\psi + \left(r\frac{\partial r}{\partial\chi}\right)^2}\,.\,d\chi\,d\psi,$$

und liefert zufolge des vorigen Werthes von r^2

$$S = \int\int\sqrt{\frac{\cos^2\psi\cos^2\chi}{A^2} + \frac{\cos^2\psi\sin^2\chi}{B^2} + \frac{\sin^2\psi}{C^2}}\,.\,\cos\psi\,d\chi\,d\psi.$$

Schreibt man $1 - \cos^2\psi$ statt $\sin^2\psi$ und setzt zur Abkürzung

$$P = \frac{C^2}{A^2}\cos^2\chi + \frac{C^2}{B^2}\sin^2\chi - 1,$$

so hat man einfacher

$$S = \frac{1}{C}\int\int\sqrt{1 + P\cos^2\psi}\,.\,\cos\psi\,d\chi\,d\psi.$$

Das auf ψ bezügliche Integral gewinnt eine bessere Form, wenn man die Substitution

$$110)\qquad \frac{\sin^2\psi}{1 + P\cos^2\psi} = t^2$$

anwendet, aus welcher folgt

$$\cos\psi = \sqrt{\frac{1 - t^2}{1 + Pt^2}}, \qquad \sin\psi = \sqrt{\frac{1 + P}{1 + Pt^2}}\cdot t,$$

$$\sqrt{1 + P\cos^2\psi} = \sqrt{\frac{1 + P}{1 + Pt^2}}, \quad \cos\psi\,d\psi = \sqrt{\frac{1 + P}{(1 + Pt^2)^3}}\cdot dt;$$

es wird nämlich rational

$$S = \frac{1}{C}\int\int\frac{1 + P}{(1 + Pt^2)^2}\,d\chi\,dt,$$

oder zufolge des Werthes von P

$$S = A^2 B^2 C \int\int \frac{(B^2 \cos^2\chi + A^2 \sin^2\chi)\, d\chi\, dt}{[A^2 B^2 (1-t^2) + C^2 t^2 (B^2 \cos^2\chi + A^2 \sin^2\chi)]^2}.$$

Eine weitere Vereinfachung bewirkt die Substitution

111) $$\tan\chi = \frac{B}{A} \tan\theta,$$

welche giebt

$$B^2 \cos^2\chi + A^2 \sin^2\chi = \frac{A^2 B^2}{A^2 \cos^2\theta + B^2 \sin^2\theta},$$

$$d\chi = \frac{A B\, d\theta}{A^2 \cos^2\theta + B^2 \sin^2\theta},$$

$$S = ABC \int\int \frac{d\theta\, dt}{[(A^2 \cos^2\theta + B^2 \sin^2\theta)(1-t^2) + C^2 t^2]^2}.$$

Setzt man schliesslich

112) $$t = \sin\omega,$$

so erhält man

$$S = ABC \int\int \frac{\cos\omega\, d\omega\, d\theta}{(A^2 \cos^2\omega \cos^2\theta + B^2 \cos^2\omega \sin^2\theta + C^2 \sin^2\omega)^2}.$$

Dieses Integral hat dieselbe Form, wie das Integral in Nro. 87), welches zur Complanation der centrischen Flächen zweiter Ordnung diente; es liegt daher eine Vergleichung beider Integrale nahe. Denken wir uns zu diesem Zwecke ausser der Fläche zweiten Grades, deren Fusspunktfläche construirt worden ist, noch eine, durch die Gleichung

$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 = 1$$

bestimmte Fläche zweiten Grades, so gilt für letztere die Formel

$$S' = - \int\int \frac{A'B'C' \cos\omega\, d\omega\, d\theta}{(B'C' \cos^2\omega \cos^2\theta + C'A' \cos^2\omega \sin^2\theta + A'B' \sin^2\omega)^2}.$$

Es wird nun $S' = S$, wenn erstens A', B', C' mittelst der Proportion

$$A' : B' : C' = \frac{1}{A^2} : \frac{1}{B^2} : \frac{1}{C^2}$$

bestimmt, und wenn zweitens die Integrationsgrenzen in beiden Doppelintegralen zur Coincidenz gebracht werden. Die erste Bedingung verlangt positive A', B', C'; die neue Fläche zweiten Grades ist daher ein Ellipsoid, dessen Halbachsen a', b', c' sich verhalten wie $A^2 : B^2 : C^2$, d. h. umgekehrt wie die Quadrate der Halbachsen der ursprünglichen Fläche, so dass einfach

$$a' = \frac{bc}{a}, \quad b' = \frac{ca}{b}, \quad c' = \frac{ab}{c}$$

gesetzt werden kann. Um die zweite Bedingung zu erfüllen, leitet man aus den ursprüglich gegebenen Grenzen für ψ und χ die neuen Grenzen für ω und θ mittelst der Formeln 110), 112) und 111) ab, nämlich

113) $$\sin^2\omega = \frac{A^2B^2\sin^2\psi}{B^2C^2\cos^2\psi\cos^2\chi + C^2A^2\cos^2\psi\sin^2\chi + A^2B^2\sin^2\psi},$$

114) $$\tan\theta = \frac{A}{B}\tan\chi.$$

Jedem irgendwie begrenzten Stücke der Fusspunktfläche (108) entspricht demnach ein gleichgrosses Stück der Oberfläche des Ellipsoides mit den Halbachsen a', b', c'.

Lassen wir beispielweis in dem Ellipsoide θ von 0 bis 2π und ω von einem constanten Werthe ω_0 bis zu einem zweiten Werthe $\omega_1 < \omega_0$ gehen, so ist in der Fusspunktfläche χ von 0 bis 2π auszudehnen, und an den Grenzen gelten zwei Gleichungen, die aus Nro. 113) entspringen, wenn erst ω_1 und dann ω_0 für ω geschrieben wird. Für den Fall, dass die Fusspunktfläche aus einem Ellipsoide hergeleitet wird, sind diese Gleichungen

$$\sin^2\omega_1 = \frac{c^4\sin^2\psi}{a^4\cos^2\psi\cos^2\chi + b^4\cos^2\psi\sin^2\chi + c^4\sin^2\psi},$$

$$\sin^2\omega_0 = \frac{c^4\sin^2\psi}{a^4\cos^2\psi\cos^2\chi + b^4\cos^2\psi\sin^2\chi + c^4\sin^2\psi}$$

oder in rechtwinkligen Coordinaten

$$\sin^2\omega_1 = \frac{c^4\zeta^2}{a^4\xi^2 + b^4\eta^2 + c^4\zeta^2},$$

$$\sin^2\omega_0 = \frac{c^4\zeta^2}{a^4\xi^2 + b^4\eta^2 + c^4\zeta^2}.$$

Hierin liegt folgender Satz: Der Durchschnitt der Fusspunktfläche

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2 = a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2$$

mit den beiden elliptischen Kegeln

$$a^4\xi^2 + b^4\eta^2 = c^4\cot^2\omega_1\,\zeta^2$$
$$a^4\xi^2 + b^4\eta^2 = c^4\cot^2\omega_0\,\zeta^2$$

giebt eine Zone, welche denselben Flächeninhalt besitzt wie diejenige Zone des aus den Halbachsen a', b', c' construirten Ellipsoides, deren Begrenzungslinien die Curven isokliner Normalen mit den Neigungswinkeln ω_1 und

ω_0 sind. Um bei dieser Complanation die früheren Formeln ungeändert benutzen zu können, ist $a < b < c$ anzunehmen, wodurch $a' > b' > c'$ wird; die Formeln 97) bis 102) gelten dann unmittelbar, wenn in denselben a, b, c durch a', b', c' ersetzt werden.

Für $\omega_1 = 0$, $\omega_0 = \frac{1}{2}\pi$ geht die Zone der Fusspunktfläche in die halbe Fusspunktfläche über und die ellipsoidische Zone wird zum Halbellipsoide; die ganze Fusspunktfläche besitzt demnach denselben Flächeninhalt wie das Ellipsoid aus den Halbachsen a', b', c'.

Construirt man auf dem Ellipsoide die eine Curve isokliner Normalen, welche durch die Formel

$$tan\,\omega = \sqrt{\frac{a'b'}{(a'+b'+c')c'}}$$

bestimmt ist, so zerfällt das Halbellipsoid in eine Kappe und in eine Zone, deren Flächeninhalte um den algebraischen Ausdruck

$$\pi\left\{a'b' - \frac{(a'^2+b'^2)c'}{a'+b'}\right\}$$

differiren; hieraus folgt der entsprechende Satz, dass die halbe Fusspunktfläche von dem Kegel

$$a^4\xi^2 + b^4\eta^2 = (b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)\zeta^2$$

gleichfalls in eine Zone und in eine Kappe zerlegt wird, deren Flächendifferenz durch

$$\pi\left\{c^2 - \frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}\right\}$$

dargestellt wird.

Auf dem Ellipsoide $a'b'c'$ lassen sich ferner Zonen angeben, deren Flächen durch vollständige elliptische Integrale ausdrückbar sind. Hierzu gehört, dass θ von 0 bis 2π ausgedehnt wird, und dass an den Grenzen für ω die Gleichungen 107) oder hier

$$sin^2\omega_0 = \frac{\lambda_0^2\, C'(B'cos^2\theta + A'sin^2\theta)}{B'(C'-A')cos^2\theta + A'(C'-B')sin^2\theta},$$

$$sin^2\omega_1 = \frac{\lambda_1^2\, C'(B'cos^2\theta + A'sin^2\theta)}{B'(C'-A')cos^2\theta + A'(C'-B')sin^2\theta}$$

stattfinden. Den Grenzen $\theta = 0$ und $\theta = 2\pi$ entsprechen wieder die Grenzen $\chi = 0$ und $\chi = 2\pi$; ferner ist, wenn man A', B', C' durch A, B, C und θ durch χ ausdrückt,

$$sin^2\omega_0 = \frac{\lambda_0^2 A^2B^2}{(A^2-C^2)B^2cos^2\chi + (B^2-C^2)A^2sin^2\chi},$$

$$sin^2\omega_1 = \frac{\lambda_1^2 A^2B^2}{(A^2-C^2)B^2cos^2\chi + (B^2-C^2)A^2sin^2\chi}$$

Nimmt man hierzu die Gleichung 113), indem man erst ω_0, nachher ω_1 für ω schreibt, setzt dann für A^2, B^2, C^2 ihre Werthe und benutzt die Abkürzungen

$$\frac{\lambda_0^2}{1-\lambda_0^2}=\mu_0^2, \qquad \frac{\lambda_1^2}{1-\lambda_1^2}=\mu_1^2,$$

so gelangt man zu folgenden auf die Grenzen bezüglichen Gleichungen:

$$sin^2\psi=\frac{\mu_0^2(a^4cos^2\chi+b^4sin^2\chi)}{(c^4-a^4)cos^2\chi+(c^4-b^4)sin^2\chi},$$

$$sin^2\psi=\frac{\mu_1^2(a^4cos^2\chi+b^4sin^2\chi)}{(c^4-a^4)cos^2\chi+(c^4-b^4)sin^2\chi}.$$

In rechtwinkligen Coordinaten sind dieselben

$$\frac{\zeta^2}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}=\frac{\mu_0^2(a^4\xi^2+b^4\eta^2)}{(c^4-a^4)\xi^2+(c^4-b^4)\eta^2},$$

$$\frac{\zeta^2}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}=\frac{\mu_1^2(a^4\xi^2+b^4\eta^2)}{(c^4-a^4)\xi^2+(c^4-b^4)\eta^2}$$

und repräsentiren zwei Kegel vierten Grades. Letztere schneiden aus der Fusspunktfläche eine Zone heraus, deren Flächeninhalt durch vollständige elliptische Integrale bestimmt wird *).

---

*) Den speciellen Satz von der Complanation der ganzen Fusspunktfläche des Ellipsoides hat Tortolini gefunden, Crelle's Journal, Bd. 31, S. 17. Alle übrigen Resultate des Abschn. IX sind vom Verfasser entwickelt worden, theils in den Sitzungsberichten der K. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Jahrg. 1862, S. 51, theils in der Zeitschr. f. Mathematik u. Physik, Bd. IX, S. 205.

DIE

ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN.

Die elliptischen Functionen.

I. Definition und reelle Periodicität der elliptischen Functionen.

Nach einer schon früher gemachten Bemerkung würde eine systematische und von geometrischen Rücksichten freie Ausbildung der Analysis zwar später als gewöhnlich, aber ebenso sicher zu den goniometrischen und cyclometrischen Functionen geführt haben. Die letzteren hätte man in diesem Falle als Integralwerthe definirt, nämlich

$$Arcsin\, z = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}, \quad Arctan\, z = \int_0^z \frac{dz}{1 + z^2}, \text{ etc.}$$

und nachher durch Umkehrung der Gleichungen

$$Arcsin\, z = u, \quad Arctan\, z = v, \text{ etc.}$$

die goniometrischen Functionen

$$z = sin\, u, \quad z = tan\, v, \text{ etc.}$$

aus ihnen hergeleitet. Auch die reelle Periodicität von $sin\, u$, $tan\, v$, etc. würde sich dann auf rein analytischem Wege ergeben haben, und zwar mittelst des Satzes, dass die vorhin erwähnten Integrale im Allgemeinen unendlich vieldeutig sind (S. 72 bis 77). Angesichts der ausserordentlichen Leichtigkeit und Bequemlichkeit, womit sich die goniometrischen Functionen bei vielen analytischen Untersuchungen verwenden lassen, liegt es nahe, auch die elliptischen Integrale umzukehren, also diejenigen Functionen zu betrachten, welche entstehen, wenn man sich Gleichungen wie

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = u, \quad \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+k^2z^2)}} = v, \text{ etc.}$$

nach z aufgelöst denkt. Diese Umkehrungen der elliptischen Integrale mögen elliptische Functionen heissen *); sie sind gewissermassen höhere goniometrische Functionen und gehen in speciellen Fällen (z. B. für $k = 0$ oder $k = 1$) in die goniometrischen Functionen über.

Wir betrachten zunächst das einfachste elliptische Integral

1) $$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = u \quad \text{oder} \quad F(k, \varphi) = u$$

und denken uns hierbei den Modulus k und den Integralwerth u als gegeben, φ dagegen als Function von u und nebenbei von k. Um dafür eine sprechende Bezeichnung zu erhalten, möge daran erinnert sein, dass linker Hand φ die Amplitude des Integrales, also auch die Amplitude von u bedeutet; man benutzt daher den Ausdruck „Amplitude von" als Functionszeichen und schreibt abgekürzt

2) $$\varphi = am\, u, \quad (mod. = k)$$

oder

3) $$\varphi = am(u, k),$$

wobei die Angabe des Modulus wegbleiben kann, wenn der Werth desselben von selbst bekannt ist. In den zwei speciellen Fällen $k = 0$ und $k = 1$ lässt sich die Function $am(u, k)$ leicht durch gewöhnliche Functionen ausdrücken. Für $k = 0$ wird nämlich aus Nro. 1) $\varphi = u$ und aus Nro. 3) $\varphi = am(u, 0)$, mithin

$$am(u, 0) = u.$$

Für $k = 1$ giebt die Gleichung 1)

$$l\tan(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi) = u \quad \text{oder} \quad \varphi = 2\arctan e^u + 2m\pi - \tfrac{1}{2}\pi,$$

und die Gleichung 3) $\varphi = am(u, 1)$, mithin

$$am(u, 1) = 2\arctan e^u + (m - \tfrac{1}{2})\pi,$$

wo m eine gerade Zahl bedeutet. Dieselbe bestimmt sich durch die Bemerkung, dass φ und u gleichzeitig wachsen, und zwar φ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$, wenn u von 0 bis ∞ geht; bei positiven u liegt demnach φ zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, mithin ist $m = 0$.

Wir kehren nun zu den allgemeinen Gleichungen 1) und 3) zu-

---

*) Wir folgen hier der zweckmässigen Nomenclatur Jacobi's, während Legendre $F(k, \varphi)$, $E(k, \varphi)$, $\Pi(k, \varphi)$ elliptische Functionen nennt, was offenbar weniger bezeichnend ist, als der Ausdruck elliptische Integrale.

rück und denken uns darin die Amplitude φ von beliebiger Grösse, nämlich als das m-fache des Quadranten $\frac{1}{2}\pi$ plus einem Reste ϱ, der kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ ist. Hierbei sind gerade und ungerade m zu unterscheiden. Im ersten Falle $m = 2n$ geht die Gleichung $\varphi = m \cdot \frac{1}{2}\pi + \varrho$ in $\varphi = n\pi + \varrho$ über und es ist dann

$$4)\qquad \int\limits_0^{n\pi+\varrho} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = \int\limits_0^{n\pi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + \int\limits_{n\pi}^{n\pi+\varrho} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}.$$

Das erste Integral rechter Hand lässt sich nach dem Schema

$$\int\limits_0^{n\pi} = \int\limits_0^{\pi} + \int\limits_{\pi}^{2\pi} + \int\limits_{2\pi}^{3\pi} + \cdots + \int\limits_{(n-1)\pi}^{n\pi}$$

in n einzelne Integrale zerlegen, und wenn man hier folgende Substitutionen vornimmt:

im ersten Integrale $\varphi = \psi$,
„ zweiten „ $\varphi = \pi + \psi$,
„ dritten „ $\varphi = 2\pi + \psi$,
. . . .
im n-ten Integrale $\varphi = (n-1)\pi + \psi$,

so erhalten alle jene Integrale die nämliche Form und es wird

$$\int\limits_0^{n\pi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = n \int\limits_0^{\pi} \frac{d\psi}{\Delta(\psi)}$$

oder auch, weil $\Delta(\psi)$ von $\psi = \frac{1}{2}\pi$ bis $\psi = \pi$ dieselben Werthe hat, wie von $\psi = 0$ bis $\psi = \frac{1}{2}\pi$,

$$5)\qquad \int\limits_0^{n\pi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = 2n \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi}{\Delta(\psi)} = 2nK,$$

wobei zur Abkürzung $F(k, \frac{1}{2}\pi) = K$ gesetzt worden ist. Ferner geht das letzte Integral in Nro. 4) durch Substitution von $\varphi = n\pi + \psi$ über in

$$6)\qquad \int\limits_{n\pi}^{n\pi+\varrho} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = \int\limits_0^{\varrho} \frac{d\psi}{\Delta(\psi)},$$

nach Nro. 4), 5) und 6) zusammen ist also

$$7)\qquad \int\limits_0^{n\pi+\varrho} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = 2nK + \int\limits_0^{\varrho} \frac{d\psi}{\Delta(\psi)}.$$

Bei ungeraden $m = 2n - 1$ wird die Gleichung $\varphi = m \cdot \frac{1}{2}\pi + \varrho$

zu $\varphi = n\pi - (\frac{1}{2}\pi - \varrho)$ oder kürzer $\varphi = n\pi - \sigma$, wo σ wieder ein Bogen des ersten Quadranten ist. Man hat nun

$$\int_0^{n\pi-\sigma}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = \int_0^{n\pi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} - \int_{n\pi-\sigma}^{n\pi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = 2nK - \int_{n\pi-\sigma}^{n\pi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}$$

und wenn man im letzten Integrale $\varphi = n\pi - \psi$ setzt, so wird

8) $$\int_0^{n\pi-\sigma}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = 2nK - \int_0^{\sigma}\frac{d\psi}{\Delta(\psi)}.$$

Die Gleichungen 7) und 8) lassen sich zu der einen Relation

9) $$\int_0^{n\pi\pm\chi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = 2nK \pm \int_0^{\chi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}$$

zusammenfassen, welche zeigt, wie ein Integral mit beliebiger Amplitude durch das vollständige Integral K und durch ein unvollständiges Integral ausgedrückt wird, dessen Amplitude χ zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegt.

Es bedarf nur einer anderen Schreibweise der Gleichung 9), um zu einer Fundamentaleigenschaft der Function $am\,u$ zu gelangen. Setzt man nämlich

$$\int_0^{\chi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = u, \quad \int_0^{n\pi\pm\chi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = v,$$

so ist einerseits nach Nro. 9)

$$v = 2nK \pm u.$$

Andererseits folgt durch Umkehrung der vorhergehenden Gleichungen

$$\chi = am\,u, \quad n\pi \pm \chi = am\,v,$$

und wenn man die Werthe von χ und v in die letzte Gleichung substituirt, so gelangt man bei umgekehrter Anordnung beider Seiten zu der Formel

10) $$am(2nK \pm u) = n\pi \pm am\,u.$$

Es sei ferner

$$\int_0^{\omega}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = w \text{ mithin } \omega = am\,w,$$

man findet dann sehr leicht

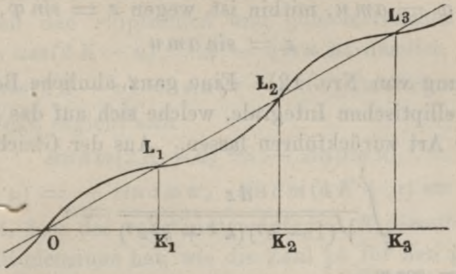
$$\int_0^{-\omega}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = -w \text{ und } -\omega = am(-w)$$

d. i. durch Vergleichung beider Ergebnisse

11) $$am(-w) = -am\,w.$$

Mittelst der gewonnenen Formeln kann man sich von dem Laufe der Function $am\,u$ ein Bild machen, falls u auf reelle Werthe

Fig. 55.



beschränkt wird. Construirt man nämlich u als Abscisse, $\varphi = am\,u$ als Ordinate, so gehören zu den Abscissen (Fig. 55)

$$0, \quad OK_1 = K, \quad OK_2 = 2K, \quad OK_3 = 3K, \ldots.$$

die Ordinaten

$$0, \quad K_1L_1 = \frac{\pi}{2}, \quad K_2L_2 = 2\frac{\pi}{2}, \quad K_3L_3 = 3\frac{\pi}{2}, \ldots,$$

die Punkte $L_1, L_2, L_3, \ldots$ liegen demnach in einer durch den Coordinatenanfang gehenden Geraden. Ist ferner für irgend einen Punkt P die Abscisse $= u$, die Ordinate $= am\,u$ und τ der Winkel zwischen der Tangente in P und der Abscissenachse, so hat man

$$tan\,\tau = \frac{d\,am\,u}{du} = \frac{d\varphi}{d\varphi : \sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}} = \sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}$$

mithin im Coordinatenanfange $tan\,\tau = 1$, und nachher, wenn P nach L_1 gelangt ist, $tan\,\tau = \sqrt{1-k^2}$; der Winkel τ fängt also mit 45^0 an und vermindert sich bis $arctan\,k'$. Wegen $am(2K-u) = \pi - am\,u$ ist der Bogen L_1L_2 congruent dem Bogen OL_1, aber von entgegengesetzter Lage; aus $am(2K+u) = \pi + am\,u$ folgt weiter, dass der Bogen L_2L_3 dem Bogen OL_1 in gleicher Lage congruent ist, u. s. f. ins Unendliche nach beiden Seiten hin.

Die Umkehrung des elliptischen Integrales

12) $$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = u$$

ergiebt sich nun leicht aus dem Vorhergehenden. Für $z = \sin\varphi$ wird nämlich die Gleichung zur folgenden:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = u;$$

diese liefert $\varphi = am\,u$, mithin ist, wegen $z = \sin\varphi$,

13) $$z = \sin am\,u$$

die Umkehrung von Nro. 12). Eine ganz ähnliche Behandlung gestatten alle elliptischen Integrale, welche sich auf das elliptische Integral erster Art zurückführen lassen. Aus der Gleichung z. B.

14 $$\int_z^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}} = v$$

folgt für $z = \cos\varphi$

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = v, \quad \varphi = am\,v$$

und nach dem Vorigen

15) $$z = \cos am\,v.$$

Ebenso liefert die Gleichung

16) $$\int_z^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-k'^2)}} = w,$$

welche für $z = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}$ in

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = w$$

übergeht, die Umkehrung

17) $$z = \sqrt{1 - k^2\sin^2 am\,w} = \Delta am\,w.$$

Die hier aufgeführten drei Functionen der Amplitude sind die wichtigsten unter denjenigen Functionen, welche durch Umkehrung der elliptischen Integrale erster Art entstehen; sie bilden eine Gruppe, welche in der Theorie der elliptischen Functionen ungefähr dieselbe Stelle einnimmt, wie der Sinus und Cosinus unter den goniometrischen Functionen. Man erkennt dies leicht aus den betreffenden Differentialformeln; die Gleichung

$$d\,am\,u = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,.\,du = \Delta am\,u\,.\,du$$

liefert nämlich

$$18)\qquad \left\{\begin{aligned} d\,sin\,am\,u &= \ cos\,am\,u\,\Delta\,am\,u\,.\,du,\\ d\,cos\,am\,u &= -\ sin\,am\,u\,\Delta\,am\,u\,.\,du,\\ d\,\Delta\,am\,u &= -\ k^2 sin\,am\,u\,cos\,am\,u\,.\,du.\end{aligned}\right.$$

Auch hinsichtlich der Periodicität findet eine nahe Verwandtschaft zwischen den elliptischen und goniometrischen Functionen statt. Wegen $am(2K-u) = \pi - am\,u$ ist nämlich

$$sin\,am(2K-u) = sin(\pi - am\,u) = sin\,am\,u;$$

auf gleiche Weise ergiebt sich

$$sin\,am(2K+u) = -\ sin\,am\,u,$$

$$sin\,am(4K-u) = -\ sin\,am\,u,\quad sin\,am(4K+u) = +\ sin\,am\,u,$$

woraus erhellt, dass das vollständige Integral K dieselbe Bedeutung für den Amplitudensinus hat, wie die Zahl $\frac{1}{2}\pi$ für den gewöhnlichen Sinus. Beachtet man noch die Relation $am(-v) = -\ am\,v$, so gelangt man leicht zu folgenden Formeln:

$$19)\ sin\,am(u\pm 2K) = -sin\,am\,u,\quad cos\,am(u\pm 2K) = -\ cos\,am\,u,$$
$$\Delta\,am(u\pm 2K) = \Delta\,am\,u,$$

$$20)\ \ sin\,am(u\pm 4K) = sin\,am\,u,\quad cos\,am(u\pm 4K) = cos\,am\,u,$$
$$\Delta\,am(u\pm 4K) = \Delta\,am\,u.$$

Die elliptischen Functionen bleiben demnach ungestört, wenn die Variabele um $4K$ wächst, d. h. sie besitzen eine reelle Periode, deren Index $= 4K$ ist. In dem speciellen Falle $k = 0$ wird $K = \frac{1}{2}\pi$, $sin\,am\,u = sin\,u$, $cos\,am\,u = cos\,u$, $\Delta\,am\,u = 1$, und dann enthalten die Formeln 20) den bekannten Satz von der reellen Periodicität der Functionen $sin\,u$ und $cos\,u$. Nimmt man dagegen $k = 1$, so wird $K = \infty$; aus Nro. 12) und 13) ergiebt sich

$$sin\,am(u, 1) = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = \frac{e^{2u} - 1}{e^{2u} + 1},$$

und in der That besitzt dieser Ausdruck keine reelle Periode mehr. Erinnert man sich aber, dass zufolge der Gleichung

$$e^{2(u\pm\pi\sqrt{-1})} = e^{2u}$$

die Exponentialgrösse e^{2u} als eine periodische Function anzusehen ist, deren Periode den imaginären Index $\pi\sqrt{-1}$ besitzt, so erkennt man auch in $sin\,am(u, 1)$ eine periodische Function mit dem Index $\pi\sqrt{-1}$. Ob diese Eigenschaft von $sin\,am\,u$ nur in dem speciellen Falle $k = 1$ oder auch für andere Moduli besteht, das bedarf einer näheren Untersuchung.

II. Die doppelte Periodicität des Amplitudensinus.

Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Integrale

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

setzen dabei z als beliebige complexe Variabele voraus und untersuchen die verschiedenen Werthe, welche das Integral auf verschiedenen Integrationswegen erhält (vergl. Seite 73). Zur Abkürzung sei hierbei

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

und, wo es nöthig ist, möge der absolute Werth von $f(z)$ mit $[f(z)]$ bezeichnet werden.

Dem Anfangswerthe $z = 0$ entspricht $f(0) = \pm 1$; um die hierin liegende Doppeldeutigkeit zu vermeiden, nehmen wir $f(0) = + 1$. Da ferner

$$f(z) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-z}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k} - z}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k} + z}}$$

ist, so besitzt $f(z)$ vier ausgezeichnete Punkte

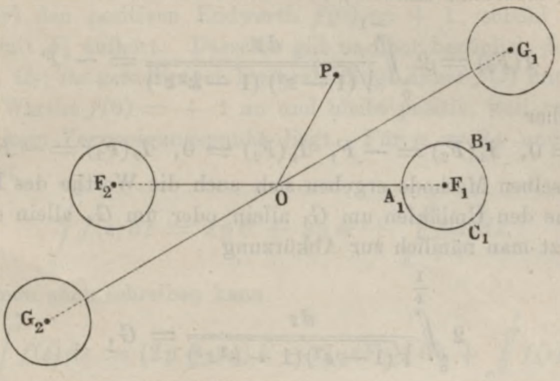
$$z = +1, \quad z = -1, \quad z = +\frac{1}{k}, \quad z = -\frac{1}{k},$$

in welchen $f(z)$ unendlich wird; diese Punkte sind gleichzeitig Verzweigungspunkte, deren Umkreisung einen jedesmaligen Vorzeichenwechsel von $f(z)$ zur Folge hat. Die beiden ersten Punkte liegen auf der Abscissenachse in den Entfernungen $OF_1 = +1$ und $OF_2 = -1$, die beiden anderen liegen auf oder ausserhalb der x-Achse, jenachdem k reell oder complex ist; der Allgemeinheit wegen setzen wir das Letztere voraus und denken uns demgemäss G_1 und G_2 als Repräsentanten von $+\frac{1}{k}$ und $-\frac{1}{k}$ (Fig. 56). Lassen wir nun die Variabele z von O aus eine geschlossene Curve durchlaufen, welche nur den Punkt F_1 einmal umkreist, und nennen wir $I(F_1)$ den entsprechenden Werth von $\int f(z)\,dz$, so ist, wie auf S. 77 und 78

$$I(F_1) = I(OA_1) + I(A_1B_1C_1A_1) + I(A_1O).$$

Im zweiten Integrale setzen wir $z = 1 - re^{i\theta}$, wo r den Halbmesser des Kreises $A_1B_1C_1A_1$ bedeutet, und bemerken noch, dass $f(z)$ auf dem Rückwege von A_1O das entgegengesetzte Zeichen hat wie auf dem Hinwege OA_1; wir haben dann

Fig. 56.



$$I(F_1) = \int_0^{1-r} f(z)\,dz - ir\int_0^{2\pi} f(1 - re^{i\theta})\,e^{i\theta}\,d\theta + \int_{1-r}^{0} \{-[f(z)]\}\,dz.$$

Das auf den Kreis bezogene Integral ist

$$ir\int_0^{2\pi} f(1 - re^{i\theta})\,e^{i\theta}\,d\theta$$

$$= i\sqrt{r}\int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{1}{2}i\theta}\,d\theta}{\sqrt{(2 - re^{i\theta})(1 - k + kre^{i\theta})(1 + k - kre^{i\theta})}}$$

und geht für $r = 0$ gleichfalls in Null über; es bleibt daher

$$I(F_1) = \int_0^1 f(z)\,dz - \int_1^0 f(z)\,dz = 2\int_0^1 f(z)\,dz$$

$$= 2\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}} = F,$$

wobei F zur Abkürzung dient. Bei einem zweiten Umlaufe um F_1 gelten wieder dieselben Schlüsse, nur ändert sich das Vorzeichen, weil jetzt $f(z)$ mit dem Endwerthe -1 anfängt und mit dem Endwerthe $+1$ nach O zurückkehrt; für den zweiten Umlauf gilt also der Integralwerth $-F$. Bezeichnet überhaupt $I_n(F_1)$ den Werth, welchen das Integral nach n Umkreisungen des Punktes F_1 allein erhält, so ist

$$I_2(F_1) = 0, \quad I_3(F_1) = F, \quad I_4(F_1) = 0, \quad I_5(F_1) = F \text{ u. s. f.}$$

Mittelst ganz analoger Betrachtungen gelangt man zu den Werthen, welche das Integral annimmt, wenn man, von O ausgehend, den Punkt F_2 mehrmals umläuft; es findet sich zunächst

$$I(F_2) = 2 \int_0^{-1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = -F$$

und nachher

$$I_2(F_2) = 0, \quad I_3(F_2) = -F, \quad I_4(F_2) = 0, \quad I_5(F_2) = -F \text{ u. s. w.}$$

Nach derselben Methode ergeben sich auch die Werthe des Integrales, welche den Umläufen um G_1 allein oder um G_2 allein entsprechen; setzt man nämlich zur Abkürzung

$$2 \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = G,$$

so erhält man

$$I_1(G_1) = G, \quad I_2(G_1) = 0, \quad I_3(G_1) = G, \quad I_4(G_1) = 0, \text{ u. s. w.}$$

$$I_1(G_2) = -G, \quad I_2(G_2) = 0, \quad I_3(G_2) = -G, \quad I_4(G_2) = 0, \text{ u. s. w.}$$

Der allgemeinste Integrationsweg von O nach irgend einem Punkte P, welcher die complexe Zahl $z = x + iy$ repräsentirt, besteht nun aus beliebig vielen Umläufen um die vier Verzweigungspunkte und aus dem geradlinigen Wege von O nach P. Jene Umläufe, in irgend welcher Ordnung genommen, liefern zufolge der ihnen entsprechenden Werthe einen Ausdruck von der Form $\mu F + \nu G$, worin μ und ν ganze Zahlen bedeuten, die positiv, Null oder negativ sein können. Der allgemeine Werth des Integrales ist daher

$$21) \qquad \int_0^z f(z)\,dz = \mu F + \nu G + \int_0^z \{\pm [f(z)]\}\,dz,$$

und zwar bestimmt sich im geradlinigen Integrale das Vorzeichen von $f(z)$ durch den Endwerth, womit $f(z)$ nach jenen Umläufen in O ankommt. Um hierüber zu entscheiden, untersuchen wir die folgenden allein möglichen vier Fälle

μ gerade, ν gerade,
μ ungerade, ν ungerade,
μ gerade, ν ungerade,
μ ungerade, ν gerade.

Der erste Fall tritt ein, wenn man mehrmals F_1, dann F_2, wieder F_1 und F_2 etc. umgeht, aber mit Umkreisungen des Punktes F_2 aufhört, dann ebenso mit G_1 und G_2 (oder mit G_2 und G_1) verfährt und schliesslich den geraden Weg OP geht. Nun ist $f(z)$ positiv längs OF_1, negativ von F_1 bis F_2, positiv von F_2 bis O, und so oft auch diese Hin- und Hergänge wiederholt werden mögen, so erhält doch $f(z)$ den positiven Endwerth $f(0) = +1$, sobald man nur immer mit F_2 aufhört. Dasselbe gilt nachher bezüglich der Punkte G_1 und G_2; im geradlinigen Integrale fängt daher $f(z)$ mit dem positiven Werthe $f(0) = +1$ an und bleibt positiv, weil zwischen O und P kein Verzweigungspunkt liegt. Für $\mu = 2p$ und $\nu = 2q$ ist daher

$$\int_0^z f(z)\,dz = 2pF + 2qG + \int\!\!\!\!\!\!/_0^z f(z)\,dz,$$

wofür man auch schreiben kann

$$22)\quad \int_0^z f(z)\,dz = (2p+2q)F - 2q(F-G) + \int\!\!\!\!\!\!/_0^z f(z)\,dz.$$

Der zweite Fall entsteht, wenn man mehrmals F_1, F_2, F_1, F_2 etc. umkreist, aber mit Umkreisungen des Punktes F_1 aufhört und nachher ebenso mit G_1 und G_2 verfährt. Nach den Umgängen um F_1, $F_2, F_1, F_2, \ldots . F_1$ kommt $f(z)$ mit dem negativen Zeichen in O an; den weiteren Umläufen um $G_1, G_2, G_1, G_2, \ldots . G_1$ entsprechen ebenso viele Zeichenwechsel, nach dem letzten Umlaufe ist daher $f(z)$ wieder positiv und bleibt es längs OP. Für $\mu = 2p - 1$ und $\nu = 2q + 1$ hat man also

$$\int_0^z f(z)\,dz = (2p-1)F + (2q+1)G + \int\!\!\!\!\!\!/_0^z f(z)\,dz$$

oder auch

$$23)\quad \int_0^z f(z)\,dz = (2p+2q)F - (2q+1)(F-G) + \int\!\!\!\!\!\!/_0^z f(z)\,dz.$$

Wie man sieht, lassen sich die Gleichungen 22) und 23), welche den beiden ersten Fällen entsprechen, zu der folgenden einen Gleichung zusammenfassen

$$24)\quad \int_0^z f(z)\,dz = 2mF + n(F-G) + \int\!\!\!\!\!\!/_0^z f(z)\,dz,$$

worin m und n ganze Zahlen sind.

Der dritte Fall tritt bei folgender Anordnung der Umläufe ein

$$F_1,\ F_2,\ F_1,\ F_2,\ \ldots\ F_2,$$
$$G_1,\ G_2,\ G_1,\ G_2,\ \ldots\ G_2,\ G_1;$$

nach dem letzten Umlaufe um F_2 ist $f(z)$ positiv, nach dem letzten Umlaufe um G_1 negativ; man hat daher für $\mu = 2p$ und $\nu = 2q + 1$

$$\int_0^z f(z)\,dz = 2pF + (2q+1)\,G - \int\!\!\!\!/_0^z f(z)\,dz$$

oder

$$25)\quad \int_0^z f(z)\,dz = (2p+2q+1)F - (2q+1)(F-G) - \int\!\!\!\!/_0^z f(z)\,dz.$$

Dem letzten Falle endlich entspricht folgende Anordnung der Umläufe:

$$F_1,\ F_2,\ F_1,\ F_2,\ \ldots\ F_2,\ F_1,$$
$$G_1,\ G_2,\ G_1,\ G_2,\ \ldots\ G_2;$$

nach dem letzten Umlaufe um F_1 ist $f(z)$ negativ, nach dem letzten Umlaufe um G_2 gleichfalls; für $\mu = 2p + 1$, $\nu = 2q$ hat man folglich

$$\int_0^z f(z)\,dz = (2p+1)F + 2q\,G - \int\!\!\!\!/_0^z f(z)\,dz$$

oder

$$26)\quad \int_0^z f(z)\,dz = (2p+2q+1)F - 2q(F-G) - \int\!\!\!\!/_0^z f(z)\,dz.$$

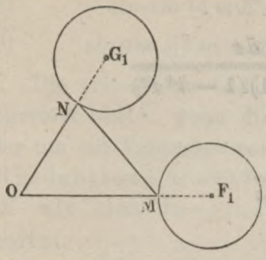
Auch die Gleichungen 25) und 26) lassen sich unter einer gemeinschaftlichen Form darstellen, nämlich

$$27)\quad \int_0^z f(z)\,dz = (2m+1)F + n(F-G) - \int\!\!\!\!/_0^z f(z)\,dz,$$

worin m und n ganze Zahlen bedeuten. Alle die verschiedenen Werthe, welche $\int f(z)\,dz$ auf verschiedenen Integrationswegen bekommen kann, sind demnach in den beiden Formeln 24) und 27) enthalten.

Es handelt sich nun um die Berechnung der beiden Integrale F und $F - G$. Das erste bietet keine Schwierigkeit, namentlich wenn k als reeller echter Bruch vorausgesetzt wird, wie dies später geschehen soll. Was ferner den Ausdruck $F - G$ anbelangt, so ist er der Werth, welchen $\int f(z)\,dz$ erhält, wenn die Punkte F_1 und G_1 nach einander umlaufen werden (Fig. 57). Diesem Wege lässt sich

Fig. 57.



folgender andere substituiren: man gehe geradlinig von O nach einem nahe vor F_1 liegenden Punkte M, beschreibe mit $F_1 M$ als Radius einen Kreis um F_1, gehe dann in gerader Linie von M nach einem nahe vor G_1 liegenden Punkte N, beschreibe wieder mit $G_1 N$ als Radius einen Kreis um G_1 und kehre dann auf der Geraden NO nach O zurück, wobei man statt des letzten geradlinigen Weges NO auch die gebrochene Linie NMO wählen kann, weil innerhalb des Dreiecks OMN kein ausgezeichneter Punkt liegt. Die Vorzeichen von $f(z)$ sind auf den hier vorkommenden Geraden

längs	$\overline{OM}$,	$\overline{MN}$,	$\overline{NM}$,	$\overline{MO}$,
	positiv,	negativ,	positiv,	positiv,

es ist also für $F_1 M = G_1 N = r$

$$F - G = \int_0^{1-r} f(z)\,dz + \text{Kreisintegral} + \int_{1-r}^{\frac{1}{k}-r} \{-[f(z)]\}\,dz$$

$$+ \text{Kreisintegral} + \int_{\frac{1}{k}-r}^{1-r} \{+[f(z)]\}\,dz + \int_{1-r}^{0} \{+[f(z)]\}\,dz,$$

wobei das erste geradlinige Integral sich gegen das letzte hebt und das zweite geradlinige Integral dem dritten gleich ist. Lässt man r in Null übergehen, so verschwinden die beiden Kreisintegrale und es bleibt

$$F - G = -2\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}.$$

Wir setzen nun k als reellen positiven echten Bruch voraus. Es ist dann reell

$$F = 2\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} = 2K.$$

Dagegen ist $F - G$ rein imaginär, weil innerhalb der Grenzen 1 und $\frac{1}{k}$ der erste Factor $1 - z^2$ negativ, der zweite $1 - k^2 z^2$ positiv bleibt; diese Bemerkung liefert

$$F - G = -\frac{2}{i}\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2 z^2)}}$$

oder, wenn $1 - k^2 = k'^2$ und

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 - k'^2 x^2}}$$

gesetzt wird,

$$F - G = 2i\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2 x^2)}} = 2iK',$$

wo K' das vollständige elliptische Integral für den Modulus k' bezeichnet.

Die Formeln 24) und 27) werden jetzt

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} = 4mK + i\,.\,2nK'$$

$$+ \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}},$$

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} = (4m+2)K + i\,.\,2nK'$$

$$- \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}};$$

wir schreiben dafür kürzer

$$W = 4mK + i\,.\,2nK' + w,$$
$$W = (4m+2)K + i\,.\,2nK' - w,$$

indem wir unter W den allgemeinen Werth des Integrales und unter w den Werth des geradlinigen Integrales verstehen. Da die obere Grenze z in beiden Integralen dieselbe ist, so erhält man als Umkehrungen von

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} = W \quad \text{und} \quad \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} = w$$

die beiden Gleichungen $z = \sin am\, W$ und $z = \sin am\, w$ mithin

$$\sin am\, W = \sin am\, w$$

und zufolge der vorherigen Relationen zwischen W und w

28) $$\sin am\,(4\,mK + i\,.\,2\,nK' + w) = \sin am\, w,$$

29) $$\sin am\,([4\,m + 2]\,K + i\,.\,2\,nK' - w) = \sin am\, w.$$

Die erste dieser Gleichungen zeigt, dass die Function $\sin am\, w$ ungestört bleibt, wenn die Variabele w um ein Vielfaches von $4\,K$ oder um ein Vielfaches von $i\,.\,2\,K'$ zunimmt, dass also der Amplitudensinus sowohl eine reelle Periode mit dem Index $4\,K$ als eine imaginäre Periode mit dem Index $i\,.\,2\,K'$ besitzt.

Im speciellen Falle $k = 0$ wird $K = \frac{1}{2}\pi$, $K' = \infty$, $\sin am\,(w, 0) = \sin w$; die imaginäre Periode fällt dann weg und es bleibt nur die reelle Periode $2\,\pi$ übrig, welche der Function $\sin w$ in der That zukommt. Der entgegengesetzte Fall $k = 1$ giebt $K = \infty$, $K' = \frac{1}{2}\,\pi$

$$\sin am\,(w, 1) = \frac{e^{2w} - 1}{e^{2w} + 1},$$

und diese Function besitzt nur die imaginäre Periode $i\pi$.

An die vorige Untersuchung knüpfen wir noch die Entwickelung einiger Fundamentalformeln für $\sin am\, w$ und bemerken dabei im Voraus, dass wir im Folgenden das Integral

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = w$$

jederzeit geradlinig nehmen, weil sich nach den Formeln 28) und 29) jeder andere Integrationsweg auf die Gerade von 0 bis z zurückführen lässt.

Ersetzt man in der Gleichung

$$K - w = \int_z^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

z durch eine neue Variabele y mittelst der Substitution

$$z = \sqrt{\frac{1 - y^2}{1 - k^2 y^2}} \quad \text{oder} \quad y = \sqrt{\frac{1 - z^2}{1 - k^2 z^2}},$$

so erhält man

$$K - w = \int_0^{\sqrt{(1-z^2):(1-k^2z^2)}} \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}},$$

mithin umgekehrt

$$\sqrt{\frac{1 - z^2}{1 - k^2 z^2}} = \sin am\,(K - w)$$

oder vermöge der ursprünglichen Gleichung $z = \sin am\, w$

30) $$\sin am\,(K - w) = \frac{\cos am\, w}{\varDelta am\, w}.$$

Diese Formel entspricht der goniometrischen Relation $\sin(\frac{1}{2}\pi - w) = \cos w$, in welche sie für $k = 0$ übergeht*).

Ist die obere Grenze rein imaginär, etwa $z = i\eta$, mithin

31) $$\int_0^{i\eta} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} = w,\ i\eta = \sin am\, w,$$

so sind alle auf dem Integrationswege vorkommenden z von der Form iy; die Substitution $z = iy$ giebt dann

$$i \int_0^{\eta} \frac{dy}{\sqrt{(1 + y^2)(1 + k^2 y^2)}} = w.$$

Mittelst der ferneren Substitution $y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ wird hieraus

$$i \int_0^{\frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k'^2 x^2)}} = w,$$

oder, wenn das Integral für sich mit v bezeichnet wird,

$$w = iv, \quad \frac{\eta}{\sqrt{1 + \eta^2}} = \sin am\,(v, k'), \quad \eta = tg\, am\,(v, k').$$

Aus der zweiten Gleichung in 31) wird nun durch Substitution der Werthe von w und η

32) $$\sin am\,(iv) = i\, tg\, am\,(v, k').$$

Will man die obere Grenze des Integrales w grösser als die Einheit nehmen, so hat man zu beachten, dass $\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}$

---

*) Jacobi nennt $am\,(K - w)$ die Coamplitude von w und schreibt demgemäss

$$\sin coam\, w = \frac{\cos am\, w}{\varDelta am\, w};$$

jedoch wird diese Bezeichnung wenig gebraucht, weil sie keine wesentliche Abkürzung gewährt.

von $z = 1$ bis $z = \frac{1}{k}$ imaginär ist, für $z > \frac{1}{k}$ dagegen wieder reell wird; es sind daher die beiden Fälle zu unterscheiden, ob die genannte Integrationsgrenze zwischen 1 und $\frac{1}{k}$ oder über $\frac{1}{k}$ hinaus liegt.

Um den ersten Fall zu erörtern, sei

33) $$\int_0^{\frac{1}{\xi}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = w, \quad \frac{1}{\xi} = \sin am\, w$$

und dabei $k < \xi < 1$. Der geradlinige Integrationsweg führt hier durch den Verzweigungspunkt $x = +1$ hindurch, was sich vermeiden lässt, wenn man diesen Punkt in einem Halbkreise umgeht. Man findet leicht, dass das auf den Halbkreis bezogene Integral gleichzeitig mit dem Radius des Halbkreises verschwindet, dass also übrig bleibt

$$w = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + \int_1^{\frac{1}{\xi}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

d. i.

$$w = K + \frac{1}{i}\int_1^{\frac{1}{\xi}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}.$$

Mittelst der Substitution $z = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2x^2}}$ erhält man weiter

$$w = K + \frac{1}{i}\int_0^{\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{k'}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}$$

oder, wenn man das Integral für sich mit v bezeichnet,

$$w = K + \frac{v}{i}, \quad \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{k'} = \sin am(v, k'), \quad \xi = \varDelta\, am(v, k').$$

Zufolge der Werthe von ξ und w wird nun aus der zweiten Gleichung in 33)

$$\sin am\left(K + \frac{v}{i}\right) = \frac{1}{\varDelta\, am(v, k')}$$

oder wenn man $-v$ an die Stelle von v treten lässt,

34) $$\sin am(K+iv) = \frac{1}{\varDelta am(v,k')}.$$

Um den zweiten der vorhin erwähnten Fälle zu discutiren, betrachten wir das Integral

35) $$\int_0^{\frac{1}{k\xi}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = w, \quad \frac{1}{k\xi} = \sin am w$$

unter Voraussetzung eines positiven echt gebrochenen ξ. Der geradlinige Integrationsweg führt hier durch die beiden Verzweigungspunkte $x = +1$ und $x = +\frac{1}{k}$, die man wieder in Halbkreisen umgehen kann. Bei verschwindenden Radien erhalten die auf die Halbkreise bezogenen Integrale den gemeinschaftlichen Grenzwerth Null, und es bleibt

$$w = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + \frac{1}{i}\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}$$
$$+ \int_{\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k\xi}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(k^2z^2-1)}}.$$

Das erste Integral hat den Werth K; im zweiten setzen wir wie vorhin $z = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2x^2}}$, im dritten $z = \frac{1}{kx}$, wodurch entsteht

$$w = K + \frac{1}{i}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}} + \int_\xi^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

d. i.

$$w = K + \frac{1}{i}K' + K - \int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Nennen wir u den Werth des letzten Integrales, so haben wir die Gleichungen

$$w = 2K - u - iK', \qquad \xi = \sin am u,$$

und durch Substitution derselben in Nro. 35) erhalten wir

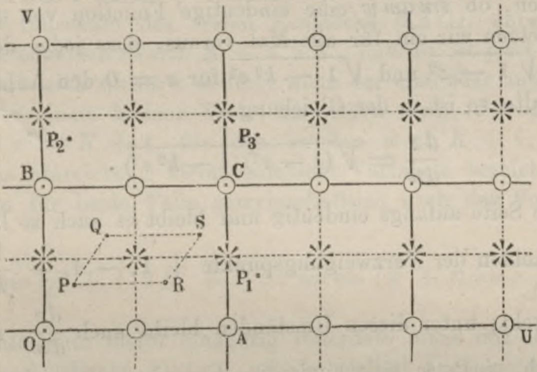
$$\sin am(2K - u - iK') = \frac{1}{k \sin am u}.$$

Ersetzt man $u - 2K$ durch u, und beachtet, dass jederzeit $\sin am(-w) = -\sin am\, w$ ist, so wird schliesslich

36) $$\sin am\,(u + iK') = \frac{1}{k \sin am\, u}.$$

Nach diesen Untersuchungen kann man von der doppelten Periodicität des Amplitudensinus leicht ein Bild entwerfen und darin noch die besonders wichtigen Stellen angeben, wo $\sin am\, w$ entweder zu Null oder unendlich wird. Man denke sich nämlich die Ebene uv durch Parallelen zu den Achsen der u und der v in unendlich viele congruente Rechtecke getheilt, von denen jedes die Breite $4K$ und die Höhe $2K'$ besitzt (Fig. 58); das erste dieser Rechtecke sei $OACB$ mit den Seiten $OA = 4K$ und $OB = 2K'$ auf den posi-

Fig. 58.



tiven Theilen der Coordinatenachsen, endlich repräsentire in diesem Rechtecke der willkürliche Punkt P die complexe Zahl $w = u + iv$. Der Werth, welchen der Amplitudensinus in P hat, kehrt nun wieder, sobald w um ein Vielfaches von $4K$, oder um ein Vielfaches von $i.2K'$, oder um beide Vielfache zugleich geändert wird; in allen den Punkten P_1, P_2, etc., welche in den übrigen Rechtecken ebenso liegen wie P im ersten Rechtecke, erhält demnach $\sin am\, w$ dieselben Werthe wie in P. Beachtet man ferner unter den Voraussetzungen $0 < u < 2K$ und $0 < v < K'$ die vier Punkte

P als Repräsentant von $u + iv$,
Q „ „ „ $2K - u + i(2K' - v)$,
R „ „ „ $2K + u + iv$,
S „ „ „ $4K - u + i(2K' - v)$,

so lehren die Formeln 29) und 28), dass der Amplitudensinus in allen vier Punkten denselben absoluten Werth hat, dass er aber in

P und Q positiv, in R und S negativ ist, dass also die vier Viertheile des Rechtecks $OACB$ für die Function $\sin am\, w$ dasselbe sind, was die vier Quadranten für $\sin u$. Innerhalb des Rechtecks $OACB$ wird ferner $\sin am\, w = 0$ in den sechs Punkten

$$\begin{array}{ccc} 0, & 2K, & 4K, \\ i.2K', & 2K + i.2K', & 4K + i.2K', \end{array}$$

welche in der Figur durch Nullen bezeichnet sind. Endlich zeigen die Formeln 36), 29) und 28), dass innerhalb des ersten Rechtecks $\sin am\, w$ unendlich wird an den drei Stellen

$$iK', \qquad 2K + iK', \qquad 4K + iK',$$

welche durch Asterisken hervorgehoben sind.

Mittelst der vorigen Formeln lässt sich die wichtige Frage entscheiden, ob $\sin am\, w$ eine eindeutige Function von w ist oder nicht. Setzen wir ein für alle Mal voraus, dass jedes der beiden Radicale $\sqrt{1 - z^2}$ und $\sqrt{1 - k^2 z^2}$ für $z = 0$ den Anfangswerth $+ 1$ erhalte, so ist in der Gleichung

$$\frac{dz}{dw} = \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}\,\cdot$$

die rechte Seite anfangs eindeutig und bleibt es auch so lange, als z durch keinen der Verzweigungspunkte $+ 1, - 1, + \frac{1}{k}, - \frac{1}{k}$, hindurchgeht; unter diesen Umständen bleibt auch $\frac{dz}{dw}$, mithin z selber d. h. $\sin am\, w$ eine eindeutige Function. Bezeichnet z. B. t eine complexe Variabele, deren Modulus weniger als die Einheit beträgt, so ist $\sin am\, t$ sicher eindeutig innerhalb des mit dem Radius $mod\, t$ beschriebenen Kreises. Zufolge der Bestimmung, welche über die Anfangswerthe der oben genannten Radicale getroffen wurde sind nun bei hinreichend kleinen t

$$\cos am\, t = \sqrt{1 - \sin^2 am\, t} = 1 - \tfrac{1}{2} \sin^2 am\, t + \cdots$$

$$\varDelta am\, t = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 am\, t} = 1 - \tfrac{1}{2} k^2 \sin^2 am\, t + \cdots$$

gleichfalls eindeutige Functionen von t.

Beiläufig bemerkt, kann man für sehr kleine z und w die Formen der drei elliptischen Functionen leicht angeben. Es ist nämlich unter dieser Voraussetzung

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - (1 + k^2) z^2}} = \int_0^z \{1 + \tfrac{1}{2}(1 + k^2) z^2 + \cdots\}\, dz$$

oder

$$w = z + \tfrac{1}{6}(1 + k^2)z^3 + \cdots$$
$$-\tfrac{1}{6}(1 + k^2)w^3 = \quad -\tfrac{1}{6}(1 + k^2)z^3 - \cdots,$$

mithin

$$w - \tfrac{1}{6}(1 + k^2)w^3 = z + \cdots\cdot,$$

also, wenn $z = sin\,am\,w$ und zu besserer Unterscheidung t für w gesetzt wird,

$$sin\,am\,t = t - \tfrac{1}{6}(1 + k^2)t^3 + \cdots$$

Daraus findet sich noch

$$cos\,am\,t = 1 - \tfrac{1}{2}t^2 + \cdots\cdot$$
$$\varDelta\,am\,t = 1 - \tfrac{1}{2}k^2t^2 + \cdots$$

Geht nun z durch $+1$ hindurch, wird also $sin\,am\,w = 1$, so erhält w innerhalb des ersten Rechtecks $OACB$ entweder den Werth K oder den Werth $K + i.2K'$, und es ist jetzt zu untersuchen, wie sich $sin\,am\,w$ ändert, wenn der eine oder andere dieser Punkte in einem kleinen Kreise umgangen wird. Für den ersten Fall sei $w = K + t$, für den zweiten $w = K + i.2K' + t$, wo t eine hinreichend kleine complexe Variabele bezeichnet; man hat dann für beide Fälle gemeinschaftlich nach den Formeln 28) und 30)

$$sin\,am\,(K + i.2K' + t) = sin\,am\,(K + t) = \frac{cos\,am\,t}{\varDelta\,am\,t}.$$

Die rechte Seite bleibt eindeutig innerhalb eines mit dem Radius $mod\,t$ beschriebenen Kreises, mithin verliert auch $sin\,am\,w$ seine Eindeutigkeit nicht in der Nachbarschaft von $z = +1$. Ganz ähnlich gestaltet sich die Sache im Falle $z = -1$, welchem innerhalb des Rechtecks $OACB$ die Werthe $w = 3K$ und $w = 3K + i.2K'$ entsprechen; es wird nämlich

$$sin\,am\,(3K + i.2K' + t) = sin\,am\,(3K + t) = -\frac{cos\,am\,t}{\varDelta\,am\,t},$$

mithin $sin\,am\,w$ wieder eindeutig.

Wie man aus Nr. 36) ersieht, gehört innerhalb des Rechtecks $OACB$ zu $z = +\dfrac{1}{k}$ der Werth $w = K + iK'$; dabei ist

$$sin\,am\,(K + iK' + t) = \frac{1}{k\,sin\,am\,(K + t)} = \frac{\varDelta\,am\,t}{k\,cos\,am\,t},$$

folglich $sin\,am\,w$ eindeutig an der bezeichneten Stelle. Ebenso verhält sich die Sache für $z = -\frac{1}{k}$ d. h. $w = 3K + iK'$, wie man leicht finden wird.

Hiermit ist bewiesen, dass die Function $\sin am\, w$ innerhalb des ersten Rechtecks $OACB$ eindeutig bleibt; wegen ihrer Periodicität folgt daraus, dass sie für jedes complexe w eindeutig ist.

III. Die doppelte Periodicität von $\cos am\, w$ und $\Delta am\, w$.

a. Mittelst der im vorigen Abschnitte benutzten Principien kann man auch das Integral

$$\int_z^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}} = w$$

discutiren und hieraus die Eigenschaften der inversen Function $z = \cos am\, w$ herleiten; kürzer ist es aber, die genannte Function durch die Gleichung

$$\cos am\, w = \sqrt{1 - \sin^2 am\, w}$$

zu definiren und dabei festzusetzen, dass der Anfangswerth $\cos am\, 0 = +1$ genommen werden soll.

Da $\sqrt{1-z^2}$ keine eindeutige Function von z ist und in der That sein Vorzeichen wechselt, sobald einer der Punkte $z = +1$ und $z = -1$ umgangen wird, so ist auch $\cos am\, w$, als Function von $\sin am\, w$ betrachtet, nicht monodrom; hieraus folgt aber keineswegs, dass $\cos am\, w$, als Function von w angesehen, mehrdeutig sein müsse. Sollte nun diese Mehrdeutigkeit existiren, so müssen diejenigen Punkte, an welchen $\sin am\, w = \pm 1$ wird, die Verzweigungspunkte von $\cos am\, w$ sein; letztere wären demnach, wenn wir uns einstweilen auf das Rechteck $OACB$ (Fig. 58) beschränken,

$$K, \qquad K + i.2K', \qquad 3K, \qquad 3K + i.2K';$$

es bedarf also einer Untersuchung darüber, wie sich die Function $\cos am\, w$ verhält, wenn man einen dieser Punkte mittelst eines Kreises umgeht. Man hat nun erstens

$$cos\,am\,(K-t) = \sqrt{1 - sin^2 am\,(K-t)};$$

aus $sin\,am\,(2K-w) = sin\,am\,w$ folgt ferner für $w = K + t$

37) $$sin\,am\,(K-t) = sin\,am\,(K+t),$$

und da $sin\,am\,(K-t)$ für hinreichend kleine t synektisch bleibt, so muss sich $sin\,am\,(K-t)$ in eine nach Potenzen von t fortschreitende Reihe verwandeln lassen, welche mit $sin\,am\,K = 1$ anfängt und zufolge der Relation 37) nur gerade Potenzen von t enthalten kann, nämlich

$$sin\,am\,(K-t) = 1 - \alpha t^2 + \beta t^4 - \cdots;$$

hieraus ergiebt sich

$$cos\,am\,(K-t) = t\sqrt{2\alpha - (\alpha^2 + 2\beta)t^2 + \cdots},$$

und wenn man das eine Mal $t = re^{i\theta}$, das andere Mal $t = re^{i(2\pi+\theta)}$ setzt, d. h. wenn man den Punkt K in einem Kreise umgeht, so erhält man in beiden Fällen denselben Werth von $cos\,am\,w$. Der fragliche Punkt ist also kein Verzweigungspunkt. Für den zweiten der oben genannten vier Punkte hat man

$$cos\,am\,(K + i.2K' - t) = \sqrt{1 - sin^2 am\,(K + i.2K' - t)}$$
$$= \sqrt{1 - sin^2 am\,(K-t)} = t\sqrt{2\alpha - (\alpha^2 + 2\beta)t^2 + \cdots},$$

mithin verhält sich die Sache ebenso wie vorhin; dasselbe gilt nicht nur für die übrigen zwei Punkte, sondern auch für die correspondirenden Punkte der übrigen Rechtecke, an welchen die Werthe von $sin^2 am\,w$ periodisch wiederkehren. Die Function $cos\,am\,w$ ist also durchaus eindeutig.

Aus der Definition des Amplitudencosinus geht ferner hervor, dass $cos\,am\,(-w) = \pm\, cos\,am\,w$ sein muss, wo es noch einer Entscheidung über das Vorzeichen bedarf. Hierzu dient der specielle Fall $w = 0$, welcher zeigt, dass wenigstens für unendlich kleine w nur das obere Zeichen genommen werden kann. Da aber $cos\,am\,w$ durchaus eindeutig bleibt, so gilt diese Entscheidung auch für alle übrigen w; der Amplitudencosinus ist demnach eine gerade Function.

Um die Perioden derselben zu ermitteln, erinnern wir wieder an die Formel 37), welche giebt

$$cos\,am\,(K+t) = \pm\, cos\,am\,(K-t).$$

Das Vorzeichen der rechten Seite bestimmt sich durch die Entwickelung

$$cos\,am\,(K-t) = t\sqrt{2\alpha - (\alpha^2 + 2\beta)t^2 + \cdots},$$

deren rechte Seite bei negativen t gleichfalls negativ wird; man hat daher

$$cosam\,(K+t) = -\,cosam\,(K-t)$$

und für $t = K + w$

$$cosam\,(2K+w) = -\,cosam w,$$

endlich, wenn man $2K + w$ an die Stelle von w treten lässt,

$$cosam\,(4K+w) = cosam w.$$

Die eine Periode von $cosam w$ ist also reell und vom Index $4K$.

Man hat ferner

$$cosam\,(iK'+t) = \sqrt{1 - sin^2 am\,(iK'+t)} = \sqrt{1 - \frac{1}{k^2 sin^2 am t}}$$

$$= i\,\frac{\sqrt{1 - k^2 sin^2 am t}}{k\ sinam t};$$

daraus folgt wegen der Eindeutigkeit der linken Seite

$$cosam\,(iK'+t) = -\,cosam\,(iK'-t)$$

und für $t = iK' + w$

$$cosam\,(i.2K' + w) = -\,cosam w.$$

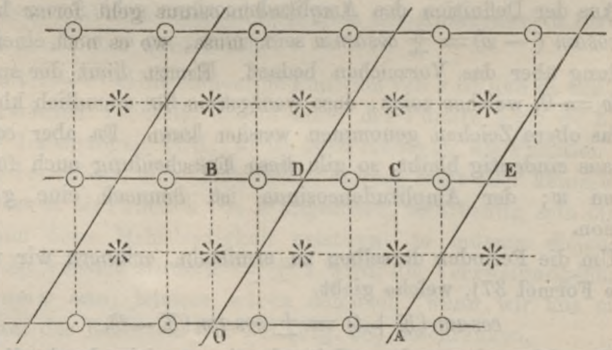
Lässt man noch $2K + w$ an die Stelle von w treten, so wird

$$cosam\,(2K + i.2K' + w) = cosam w,$$

mithin besitzt der Amplitudencosinus eine zweite Periode mit dem Index $2K + i.2K'$.

Die beiden Perioden werden anschaulich, wenn man in Fig. 59 wie früher $OA = 4K$, $OB = 2K'$ nimmt, den Coordinatenanfang

Fig. 59.



mit dem Mittelpunkte D von BC verbindet, aus OA und OD ein Parallelogramm construirt und schliesslich die ganze Ebene durch Parallelen zu OA und OD in congruente Parallelogramme zerlegt. Irgend einem in $OAED$ liegenden Punkte P, welcher $u + iv$ repräsentirt, entsprechen dann in den übrigen Parallelogrammen Punkte als Repräsentanten von

$$4mK + n(2K + i.2K') + u + iv$$
$$= (4m + 2n)K + u + i(2nK' + v),$$

an welchen $\cos am\, w$ denselben Werth wie in P erlangt. Innerhalb des ersten Parallelogrammes wird $\cos am\, w$ viermal $= 0$ nämlich an den Stellen

$$K, \quad 3K, \quad 3K + i.2K', \quad 5K + i.2K',$$

welche mit Nullen bezeichnet sind; ferner wird $\cos am\, w$ zweimal unendlich in den Punkten

$$2K + i.K', \qquad 4K + iK'.$$

b. Die Function $\Delta am\, w$ definiren wir durch die Gleichung

$$\Delta am\, w = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 am\, w}$$

und setzen dabei als Anfangswerth $\Delta am 0 = +1$ voraus.

Da sich die Function an denjenigen Stellen verzweigen kann, wo $k \sin am\, w = \pm 1$ wird, d. h. zunächst in den Punkten

$$K + iK', \qquad 3K + iK',$$

so muss untersucht werden, wie sich $\Delta am\, w$ verhält, wenn man diese Punkte in Kreisen umgeht. Es ist nun

$$\Delta am(K + iK' + t) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 am\,(K + iK' + t)}$$
$$= \sqrt{1 - \frac{1}{\sin^2 am\,(K + t)}}$$

oder nach der für $\sin am\,(K + t)$ angegebenen Reihenentwickelung

$$\Delta am\,(K + iK' + t) = \frac{t\sqrt{-2\alpha + (\alpha^2 + 2\beta)t^2 - \cdots}}{1 - \alpha t^2 + \beta t^4 - \cdots};$$

für $t = re^{i\theta}$ und $t = re^{i(2\pi + \theta)}$ erhält die rechte Seite dieselben Werthe, also findet an der Stelle $K + iK'$ keine Verzweigung statt. Die nämlichen Schlüsse gelten mit einer geringen Modification auch für den Punkt $3K + iK'$, und ebenso für alle übrigen Punkte, in welchen $k \sin am\, w = \pm 1$ wird; hieraus folgt, dass $\Delta am\, w$ eine durchaus eindeutige Function ist.

Zufolge der Definition von $\Delta am\, w$ können $\Delta am(-w)$ und $\Delta am\, w$ höchstens im Vorzeichen differiren; man entscheidet hierüber leicht mittelst der Specialisirung $w = 0$, welche zeigt, dass die beiden Functionen gleiche Vorzeichen haben, dass also $\Delta am\, w$ eine gerade Function ist.

Nach den vorigen Formeln hat man

$$\Delta am\,(K + iK' + t) = -\Delta am\,(K + iK' - t)$$

mithin für $t = K + u - iK'$

38) $$\Delta am\,(2K + u) = -\,\Delta am\,(i.2K' - u).$$

Andererseits ist

$$\Delta am\,(iK' + t) = \sqrt{1 - k^2 sin^2 am\,(iK' + t)}$$
$$= \sqrt{1 - \frac{1}{sin^2\,am\,t}} = \frac{\sqrt{sin^2\,am\,t - 1}}{sin\,am\,t}$$

also

$$\Delta am\,(iK' + t) = -\,\Delta am\,(iK' - t),$$

und, wenn $t = iK' + w$ gesetzt wird,

39) $$\Delta am\,(i.2K' + w) = -\,\Delta am w.$$

Da hiernach auch $\Delta am(i.2K' - u) = -\,\Delta am u$ ist, so erhält man aus Nro. 38)

$$\Delta am\,(2K + u) = \Delta am u;$$

die reelle Periode der Function $\Delta am w$ hat also den Index $2K$.

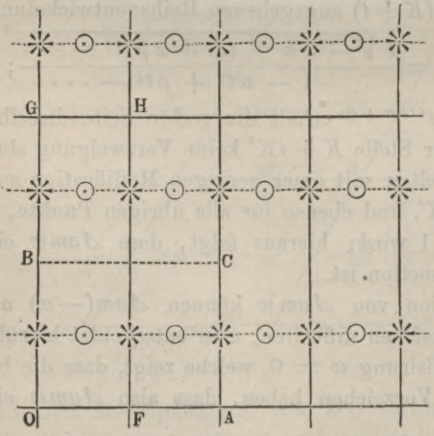
Ferner ergiebt sich aus Nro. 39), wenn man w durch $i.2K' + w$ ersetzt,

$$\Delta am\,(i.4K' + w) = \Delta am w,$$

wonach eine rein imaginäre Periode mit dem Index $i.4K'$ vorhanden ist.

Nimmt man in Fig. 60 $OA = 4K$, $OB = 2K'$, $OF = 2K$, $OG = 4K'$, und theilt die Ebene in Rechtecke, welche dem Rechtecke $OFHG$ congruent sind, so erhält $\Delta am w$ in jedem Rechtecke periodisch die Werthe, welche in dem ersten derartigen Rechtecke vorkamen. Für letzteres ist noch zu bemerken, dass $\Delta am w$ darin zweimal zu Null wird, nämlich an den mit 0 bezeichneten Stellen $K + iK'$, $K + i.3K'$, und dass ferner $\Delta am w$ viermal unendlich wird, nämlich in den Punkten

Fig. 60.



$$iK',\quad 2K+iK',\quad 3.iK',\quad 2K+3.iK',$$

die wie gewöhnlich bezeichnet sind.

IV. Das Additionstheorem.

In der Lehre von den elliptischen Integralen (S. 334) wurde gezeigt, dass die Gleichung

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

$$= \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

statt findet, sobald die Grössen x, y, z der Bedingung genügen

40) $$z = \frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}.$$

Der Beweis dieses Fundamentaltheoremes beruhte auf identischen Transformationen und bleibt daher ungeändert, wenn man sich unter den oberen Integralgrenzen x, y, z complexe Zahlen vorstellt und die Vieldeutigkeit der Integrale dadurch vermeidet, dass man die Integrationswege geradlinig nimmt. Bezeichnet man nun die obigen drei Integrale der Reihe nach mit u, v, w, so ist einfach

$$u+v=w,$$

ferner

$$x = \sin am\, u,\quad y=\sin am\, v,\quad z=\sin am\, w,$$

d. i.

$$z = \sin am\,(u+v),$$

und nach Substitution dieser Werthe von x, y, z geht die erwähnte Bedingungsgleichung in die folgende über:

41) $$\sin am(u+v) = \frac{\sin am\, u \cos am\, v\, \Delta am\, v + \sin am\, v \cos am\, u\, \Delta am\, u}{1-k^2\sin^2 am\, u\, \sin^2 am\, v}.$$

Diese entspricht der goniometrischen Formel für $\sin(u+v)$ und verwandelt sich in letztere für $k=0$. Lässt man $-v$ an die Stelle von v treten, so ändert nur $\sin am\, v$ sein Vorzeichen, und es wird dann der zweite Theil des Zählers negativ.

Aus der Gleichung 40) erhält man leicht

$$\sqrt{1-z^2} = \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} - xy\sqrt{(1-k^2x^2)(1-k^2y^2)}}{1-k^2x^2y^2},$$

d. i., zufolge der Werthe von x, y, z,

42) $$\cos am(u+v) = \frac{\cos am u \cos am v - \sin am u \sin am v\, \Delta am u\, \Delta am v}{1 - k^2 \sin^2 am u \sin^2 am v};$$

bei negativen v ändert der zweite Theil des Zählers sein Vorzeichen.

Die Formel 40) giebt ferner

$$\sqrt{1 - k^2 z^2} = \frac{\sqrt{(1-k^2 x^2)(1-k^2 y^2)} - k^2 xy \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}{1 - k^2 x^2 y^2},$$

mithin

43) $$\Delta am(u+v) = \frac{\Delta am u\, \Delta am v - k^2 \sin am u \cos am u \sin am v \cos am v}{1 - k^2 \sin^2 am u \sin^2 am v};$$

für negative v wird der zweite Theil des Zählers positiv.

Lässt man iv an die Stelle von v treten und beachtet die Formeln

$$\sin am(iv) = i \operatorname{tng} am(v,k'),\quad \cos am(iv) = \frac{1}{\cos am(v,k')},$$
$$\Delta am(iv) = \frac{\Delta am(v,k')}{\cos am(v,k')},$$

so werden die Gleichungen 41), 42) und 43) zu den folgenden:

$$\sin am(u+iv) =$$
$$\frac{\sin am u\, \Delta am(v,k') + i \cos am u\, \Delta am u \sin am(v,k') \cos am(v,k')}{\cos^2 am(v,k') + k^2 \sin^2 am u \sin^2 am(v,k')},$$

$$\cos am(u+iv) =$$
$$\frac{\cos am u \cos am(v,k') - i \sin am u\, \Delta am u \sin am(v,k')\, \Delta am(v,k')}{\cos^2 am(v,k') + k^2 \sin^2 am u \sin^2 am(v,k')},$$

$$\Delta am(u+iv) =$$
$$\frac{\Delta am u\, \Delta am(v,k') \cos am(v,k') - i k^2 \sin am u \cos am u \sin am(v,k')}{\cos^2 am(v,k') + k^2 \sin^2 am u \sin^2 am(v,k')}.$$

Aus diesen Fundamentalformeln ergeben sich zahlreiche Relationen, welche den verschiedenen goniometrischen Formeln analog gebildet sind, und ebenso wie letztere durch blosse algebraische Combinationen der Grundformeln abgeleitet werden können. So ist z. B. für $v = u$

$$\sin am 2u = \frac{2 \sin am u \cos am u\, \Delta am u}{1 - k^2 \sin^4 am u},$$

$$\cos am 2u = \frac{1 - 2 \sin^2 am u + k^2 \sin^4 am u}{1 - k^2 \sin^4 am u},$$

$$\Delta am 2u = \frac{1 - 2k^2 \sin^2 am u + k^2 \sin^4 am u}{1 - k^2 \sin^4 am u}.$$

Im speciellen Falle $u = \frac{1}{2}K$, $am\, 2u = am\, K = \frac{1}{2}\pi$ kennt man die Werthe der linken Seiten und erhält dann umgekehrt

$$sin\,am\,\frac{K}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+k'}},\quad cos\,am\,\frac{K}{2} = \sqrt{\frac{k'}{1+k'}},\quad \Delta\,am\,\frac{K}{2} = \sqrt{k'}.$$

Auf gleiche Weise findet sich

$$sin\,am\,\frac{iK'}{2} = \frac{i}{\sqrt{k}},\quad cos\,am\,\frac{iK'}{2} = \sqrt{\frac{1+k}{k}},\ \Delta\,am\,\frac{iK'}{2} = \sqrt{1+k},$$

woraus dann weiter folgt

$$sin\,am\left(\frac{K}{2} \pm iK'\right) = \frac{1}{\sqrt{1-k'}},\quad cos\,am\left(\frac{K}{2} \pm iK'\right) = \mp i\sqrt{\frac{k'}{1-k'}},$$

$$\Delta\,am\left(\frac{K}{2} \pm iK'\right) = \mp i\sqrt{k'};$$

$$sin\,am\left(K \pm \frac{iK'}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}},\quad cos\,am\left(K \pm \frac{iK'}{2}\right) = \mp i\sqrt{\frac{1-k}{k}},$$

$$\Delta\,am\left(K \pm \frac{iK'}{2}\right) = \sqrt{1-k};$$

$$sin\,am\left(\frac{K \pm iK'}{2}\right) = \sqrt{1 \pm i\frac{k'}{k}},\quad cos\,am\left(\frac{K \pm iK'}{2}\right) = (1 \mp i)\sqrt{\frac{k'}{2k}},$$

$$\Delta\,am\left(\frac{K \pm iK'}{2}\right) = k'\sqrt{1 \mp i\frac{k}{k'}}.$$

Setzt man zur Abkürzung $am\,u = \varphi$, $am\ v = \psi$, $am(u+v) = \sigma$, $am(u-v) = \tau$, so gelangt man leicht zu den Formeln

$$sin\,\sigma + sin\,\tau = \frac{2\,sin\,\varphi\,cos\,\psi\,\Delta\,\psi}{1 - k^2\,sin^2\varphi\,sin^2\psi},$$

$$sin\,\sigma - sin\,\tau = \frac{2\,sin\,\psi\,cos\,\varphi\,\Delta\,\varphi}{1 - k^2\,sin^2\varphi\,sin^2\psi},$$

$$cos\,\sigma + cos\,\tau = \frac{2\,cos\,\varphi\,cos\,\psi}{1 - k^2\,sin^2\varphi\,sin^2\psi},$$

$$cos\,\sigma - cos\,\tau = -\frac{2\,sin\,\varphi\,sin\,\psi\,\Delta\,\varphi\,\Delta\,\psi}{1 - k^2\,sin^2\varphi\,sin^2\psi},$$

$$\Delta\,\sigma + \Delta\,\tau = \frac{2\,\Delta\,\varphi\,\Delta\,\psi}{1 - k^2\,sin^2\varphi\,sin^2\psi},$$

$$\Delta\,\sigma - \Delta\,\tau = -\frac{2k^2\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi\,sin\,\psi\,cos\,\psi}{1 - k^2\,sin^2\varphi\,sin^2\psi},$$

$$sin\,\sigma\,sin\,\tau = \frac{sin^2\varphi - sin^2\psi}{1 - k^2\,sin^2\varphi\,sin^2\psi},$$

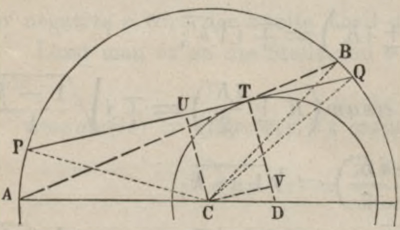
$$cos\,\sigma\,cos\,\tau = \frac{cos^2\varphi - sin^2\psi\,\Delta^2\varphi}{1 - k^2\,sin^2\varphi\,sin^2\psi},$$

$$\varDelta\sigma\,\varDelta\tau = \frac{\varDelta^2\varphi - k^2\cos^2\varphi\sin^2\psi}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}.$$

Bei der Leichtigkeit solcher Combinationen dürfte eine grössere Anhäufung von Formeln überflüssig sein.

Bevor wir diesen Gegenstand verlassen, wollen wir noch zeigen, wie die Addition und Multiplication elliptischer Integrale mittelst einer geometrischen Construction ausgeführt werden kann. Es seien zwei Kreise gegeben, von denen der eine den anderen umschliessen möge (Fig. 61); der grössere Kreis habe C zum Mittelpunkte und $AC = R$ zum Halbmesser; der Mittelpunkt des kleineren Kreises sei D, der Halbmesser $DT = r$; endlich bezeichne $CD = h$ die Centrale beider Kreise. Von irgend einem Punkte P des äusseren Kreises ziehe man eine Gerade, welche den inneren Kreis in T berührt und den ersten Kreis zum zweiten Male in Q schneidet; der Peripheriewinkel über dem Bogen AP heisse ω, der über dem Bogen APQ stehende Peripheriewinkel σ; es ist dann $\angle ACP = 2\omega$, $\angle ACQ = 2\sigma$, ferner, wenn CU senkrecht zu PQ und CV parallel zu PQ gelegt wird,

Fig. 61.



$$\angle PCU = \sigma - \omega, \qquad \angle ACU = \sigma + \omega,$$
$$\angle ACV = \tfrac{1}{2}\pi + \sigma + \omega, \quad \angle DCV = \tfrac{1}{2}\pi - (\sigma + \omega).$$

Aus der Gleichung $DT = CU + DV$ folgt nun

$$r = R\cos(\sigma - \omega) + h\cos(\sigma + \omega)$$

oder

44) $$r = (R + h)\cos\sigma\cos\omega + (R - h)\sin\sigma\sin\omega.$$

Lässt man speciell P mit A zusammenfallen, so wird $\omega = 0$ und 2σ geht in den constanten Winkel ACB über, welcher 2α heissen möge; für diesen ist

$$r = (R + h)\cos\alpha,$$

woraus folgt

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{(R+h)^2 - r^2}}{R + h}, \quad \sqrt{1 - \frac{4Rh}{(R+h)^2 - r^2}\sin^2\alpha} = \frac{R - h}{R + h}.$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$k^2 = \frac{4\,Rh}{(R+h)^2 - r^2},$$

dividiren ferner die Gleichung 44) durch $R + h$ und substituiren die Werthe

$$\frac{r}{R+h} = \cos\alpha, \quad \frac{R-h}{R+h} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\alpha};$$

wir erhalten dann die Relation

$$\cos\alpha = \cos\sigma\cos\omega + \sin\sigma\sin\omega\sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha},$$

welche nichts Anderes ist als die Bedingung für die Existenz der Gleichung

$$F(k,\sigma) - F(k,\omega) = F(k,\alpha)$$

oder

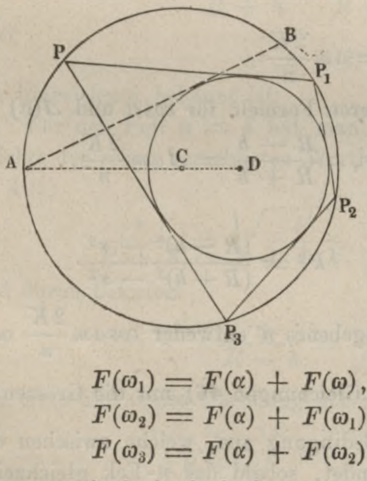
$$F(k,\sigma) = F(k,\alpha) + F(k,\omega).$$

Hieraus entspringt, wenn k, α und ω gegeben sind, folgende Construction von σ. Man wähle R willkürlich, bestimme hieraus

$$h = R\frac{1 - \sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}}{1 + \sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}}, \quad r = (R+h)\cos\alpha,$$

zeichne die beiden Kreise, nehme $\angle\, ACP = 2\,\omega$ und ziehe die Tangente PTQ; die Hälfte des Winkels ACQ ist dann σ.

Fig. 62.



Diese Construction lässt sich mehrmals nach einander anwenden, indem man, wie Fig. 62 zeigt, der Reihe nach die Tangenten PP_1, P_1P_2, P_2P_3 u. s. w. zieht und die Winkel ACP, ACP_1, ACP_2 etc., welche nach derselben Drehungsrichtung weiter zu zählen sind, mit $2\,\omega$, $2\,\omega_1$, $2\,\omega_2$ etc. bezeichnet; es wird nämlich

$$\begin{aligned} F(\omega_1) &= F(\alpha) + F(\omega), \\ F(\omega_2) &= F(\alpha) + F(\omega_1) = 2F(\alpha) + F(\omega), \\ F(\omega_3) &= F(\alpha) + F(\omega_2) = 3F(\alpha) + F(\omega), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und überhaupt

45) $$F(\omega_n) = nF(\alpha) + F(\omega).$$

Im speciellen Falle $\omega = 0$, d. h. wenn man das successive Tangentenziehen nicht mit P sondern mit A anfängt, wird $F(\omega_n) = nF(\alpha)$, wodurch das Multiplicationsproblem seine constructive Lösung erhält.

Von besonderem Interesse ist die Frage, unter welchen Umständen die gebrochene Linie $PP_1P_2\ldots$ in sich zurückkehrt, also zu einem Polygon wird, was entweder nach einmaligem oder erst nach mehrmaligem Umlaufe um den kleineren Kreis geschehen kann. Beschränken wir uns auf den ersten als den einfachsten Fall, und setzen wir voraus, dass das Polygon n Seiten erhalten solle, so muss der Endpunkt P_n mit dem Anfangspunkte P coincidiren (bei dem Vierecke der Figur P_4 mit P); die Bedingung ist also

$$\angle ACP_n = 2\pi + \angle ACP \quad \text{oder} \quad \omega_n = \pi + \omega,$$

wodurch die Gleichung 45) übergeht in

$$F(\pi + \omega) = nF(\alpha) + F(\omega).$$

Wegen $F(\pi + \omega) = 2K + F(\omega)$ hebt sich beiderseits $F(\omega)$ und es bleibt die von ω unabhängige Gleichung übrig

$$2K = nF(\alpha).$$

Geometrisch heisst dies: wenn die Radien nebst der Centrale beider Kreise der vorliegenden Bedingung genügen, so schliesst sich das Polygon, wie auch der Anfangspunkt P gewählt werden möge. Aus der obigen Gleichung folgt

$$\alpha = am\frac{2K}{n}$$

und es ist daher nach den früheren Formeln für $\cos\alpha$ und $\Delta(\alpha)$

46) $$\frac{r}{R+h} = \cos am\frac{2K}{n}, \quad \frac{R-h}{R+h} = \Delta am\frac{2K}{n},$$

worin

$$k^2 = \frac{4Rh}{(R+h)^2 - r^2}, \quad k'^2 = \frac{(R-h)^2 - r^2}{(R+h)^2 - r^2}.$$

Berechnet man für ein gegebenes n entweder $\cos am\frac{2K}{n}$ oder $\Delta am\frac{2K}{n}$, so enthält jede der Gleichungen 46) nur die Grössen R, r und h; sie drückt also die Bedingung aus, welche zwischen den drei genannten Grössen stattfindet, sobald das n-Eck gleichzeitig ein Sehnen- und ein Tangentenvieleck ist.

Für das Dreieck gestaltet sich die Rechnung folgendermaassen. Aus der allgemeinen Formel für die Addition, nämlich

$$\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta(\sigma) = \cos\sigma$$

oder

$$\cos am\, u \cos am\, v - \sin am\, u \sin am\, v\, \Delta\, am(u+v)$$
$$= \cos am(u+v)$$

erhält man zunächst für $u = v = \frac{2}{3}K$

$$\cos^2 am \tfrac{2}{3}K - \sin^2 am \tfrac{2}{3}K\, \Delta\, am \tfrac{4}{3}K = \cos am \tfrac{4}{3}K;$$

weil ferner $\frac{4}{3}K = 2K - \frac{2}{3}K$ und

$$\Delta\, am(2K - w) = \Delta\, am\, w, \quad \cos am(2K - w) = -\cos am\, w$$

ist, so hat man auch

$$\cos^2 am \tfrac{2}{3}K - \sin^2 am \tfrac{2}{3}K\, \Delta\, am \tfrac{2}{3}K = -\cos am \tfrac{2}{3}K.$$

Schafft man alle Grössen auf die linke Seite und drückt den Sinus durch den Cosinus aus, so findet man leicht

$$(1 + \cos am \tfrac{2}{3}K)[\cos am \tfrac{2}{3}K - (1 - \cos am \tfrac{2}{3}K)\, \Delta\, am \tfrac{2}{3}K] = 0,$$

und hier kann man den ersten Factor streichen, weil er von Null verschieden ist. Die übrig bleibende Gleichung lässt sich in der Form darstellen

$$\cos am \tfrac{2}{3}K + \frac{\cos am \frac{2}{3}K}{\Delta\, am \frac{2}{3}K} = 1,$$

und diese giebt nach Substitution der Werthe aus Nro. 46)

$$\frac{r}{R+h} + \frac{r}{R-h} = 1$$

oder

$$h^2 = R(R - 2r),$$

wie hinreichend bekannt ist.

Für den Fall $n = 4$ hat man sehr einfach aus Nro. 46) und zufolge der schon berechneten Werthe von $\cos am \frac{1}{2}K$ und $\Delta\, am \frac{1}{2}K$ (S. 401)

$$\frac{r}{R+h} = \sqrt{\frac{k'}{1+k'}}, \quad \frac{R-h}{R+h} = \sqrt{k'}$$

und durch Division

$$\frac{r}{R-h} = \frac{1}{\sqrt{1+k'}}.$$

Die erste und dritte Gleichung geben

$$\left(\frac{r}{R+h}\right)^2 + \left(\frac{r}{R-h}\right)^2 = 1$$

oder

$$2(R^2 + h^2)r^2 = (R^2 - h^2)^2.$$

Beim Fünfeck erhält man durch eine ähnliche Rechnung wie beim Dreieck

$$r(R+h)\sqrt{2R}$$
$$= r(R+h)\sqrt{R-h-r} + (R-h)(R+h+r)\sqrt{R+h-r};$$
für Polygone von noch mehr Seiten werden die Formeln sehr verwickelt *).

V. Potenzenreihen und Reihenquotienten für die elliptischen Functionen.

A. Nach den Untersuchungen in Abschnitt II. wird die Function $\sin am\, w$ zum ersten Male unendlich für $w = iK'$, sie bleibt daher synektisch innerhalb eines mit dem Radius K' um den Coordinatenanfang beschriebenen Kreises. Zufolge des auf complexe Variabelen ausgedehnten Satzes von Mac Laurin (S. 89) lässt sich nun $\sin am\, w$ in eine nach Potenzen von w fortschreitende und convergirende Reihe verwandeln, falls der Modulus von w weniger als K' beträgt. Wegen $\sin am(-w) = -\sin am\, w$ kann diese Reihe nur ungerade Potenzen von w enthalten, mithin ist

$$\sin am\, w$$
$$= \left(\frac{d \sin am\, w}{dw}\right)_0 \frac{w}{1} + \left(\frac{d^3 \sin am\, w}{dw^3}\right)_0 \frac{w^3}{1\,.\,2\,.\,.\,3}$$
$$+ \left(\frac{d^5 \sin am\, w}{dw^5}\right)_0 \frac{w^5}{1\,.\,2\,.\,.\,5} + \cdots$$

Die angedeuteten Differentiationen lassen sich mittelst der Formeln

$$\frac{d \sin am\, w}{dw} = + \cos am\, w\, \Delta am\, w,$$

$$\frac{d \cos am\, w}{dw} = - \sin am\, w\, \Delta am\, w,$$

$$\frac{d \Delta am\, w}{dw} = - k^2 \sin am\, w \cos am\, w$$

---

*) Die Formel für das Dreieck findet sich zuerst bei Euler (Nov. comm. Petropol. XI, pag. 114); für die Fälle $n = 4, 5, 6, 7, 8$ hat Nicol. Fuss die geometrische Ableitung der Relationen gegeben (Nova acta Petropol. XIII, a. 1798, pag. 166 bis 189). Den Zusammenhang dieser Aufgabe und der Theorie der elliptischen Functionen zeigte Jacobi in der Abhandlung „Ueber die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie" (Crelle's Journal, Bd. III, S. 376), womit eine denselben Gegenstand betreffende Abhandlung von Richelot (Crelle's Journ. Bd. XXXVIII, S. 353) zu vergleichen ist.

der Reihe nach ausführen, z. B.

$$\frac{d^2 \sin am\, w}{dw^2} = -(1+k^2)\sin am\, w + 2k^2 \sin^3 am\, w,$$

$$\frac{d^3 \sin am\, w}{dw^3} = [-(1+k^2) + 6k^2 \sin^2 am\, w] \cos am\, w\, \Delta am\, w,$$

u. s. w.

und geben für $w = 0$ die Coefficienten der Reihe. Noch einfacher ist es,

$$\sin am\, w = A_1 w + A_3 w^3 + A_5 w^5 + \cdots$$

zu setzen, diesen Ausdruck in die Formel für $\frac{d^2 \sin am\, w}{dw^2}$ zu substituiren und nachher die beiderseitigen Coefficienten von w, w^3 etc. zu vergleichen. Das Resultat ist

$$47)\quad \sin am\, w = w - \frac{1+k^2}{1.2.3} w^3 + \frac{1+14k^2+k^4}{1.2.3.4.5} w^5 - \frac{1+135k^2+135k^4+k^6}{1.2.3.4.5.6.7} w^7 + \frac{1+1228k^2+5478k^4+1228k^6+k^8}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} w^9 - \cdots$$

$$\mathrm{mod}\, w < K'.$$

Für $k = 0$ wird $\sin am\, w = \sin w$, $K' = \infty$, und die Reihe identisch mit der bekannten immer convergirenden Sinusreihe; für $k = 1$ und $K' = \frac{1}{2}\pi$ kommt man auf die Formel 11), S. 281 in Thl. I., zurück.

Da die Function $\cos am\, w$ gleichfalls synektisch bleibt innerhalb eines mit dem Radius K' um den Coordinatenanfang beschriebenen Kreises, so existirt auch für $\cos am\, w$ eine Potenzenreihe, die aber wegen $\cos am(-w) = \cos am\, w$ nur gerade Potenzen von w enthalten kann. Ihre Coefficienten leitet man am einfachsten aus den Coefficienten der vorigen Reihe dadurch her, dass man die Relation

$$\sin^2 am\, w + \cos^2 am\, w = 1$$

anwendet. Man erhält auf diesem Wege

$$48)\quad \cos am\, w = 1 - \frac{1}{1.2} w^2 + \frac{1+4k^2}{1.2.3.4} w^4 - \frac{1+44k^2+16k^4}{1.2.3.4.5.6} w^6 + \frac{1+408k^2+912k^4+64k^6}{1.2.3.4.5.6.7.8} w^8 - \cdots,$$

$$\mathrm{mod}\, w < K'.$$

Auch für die Function $\Delta am w$, die innerhalb eines mit dem Radius K' um den Coordinatenanfang beschriebenen Kreises synektisch bleibt, gilt eine nach geraden Potenzen von w fortschreitende Entwickelung. Mittelst der Relation

$$k^2 \sin^2 am w + \Delta^2 am w = 1$$

findet man leicht

$$\begin{aligned} 49)\quad \Delta am w = 1 &- \frac{k^2}{1.2} w^2 + \frac{k^2(4+k^2)}{1.2.3.4} w^4 \\ &- \frac{k^2(16+44k^2+k^4)}{1.2.3.4.5.6} w^6 \\ &+ \frac{k^2(64+912k^2+408k^4+k^6)}{1.2.3.4.5.6.7.8} w^8 - \dots, \\ &\qquad mod\, w < K'. \end{aligned}$$

Durch Differentiation oder Integration in Beziehung auf w lassen sich aus den vorigen Reihenformeln noch beliebig viele anderweite Entwickelungen herleiten, z. B.

$$50)\quad \cos am w\, \Delta am w = 1 - \frac{1+k^2}{1.2} w^2 + \frac{1+14k^2+k^4}{1.2.3.4} w^4 - \dots\dots;$$

$$51)\quad \sin am w\, \Delta am w = w - \frac{1+4k^2}{1.2.3} w^3 + \frac{1+44k^2+16k^4}{1.2.3.4.5} w^5 - \dots,$$

$$52)\quad \sin am w \cos am w = w - \frac{4+k^2}{1.2.3} w^3 + \frac{16+44k^2+k^4}{1.2.3.4.5} w^5 - \dots\dots,$$

wobei immer $mod\, w < K'$ sein muss. Aus der Bemerkung, dass

$$\frac{d\, am w}{dw} = \Delta am w, \text{ mithin } am w = \int_0^w \Delta am w\, dw$$

ist, ergiebt sich noch

$$\begin{aligned} 53)\quad am w = w &- \frac{k^2}{1.2.3} w^3 + \frac{k^2(4+k^2)}{1.2.3.4.5} w^5 \\ &- \frac{k^2(16+44k^2+k^4)}{1.2.3.4.5.6.7} w^7 \\ &+ \frac{k^2(64+912k^2+408k^4+k^6)}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} w^9 - \dots \\ &\qquad mod\, w < K'. \end{aligned}$$

Wie man mittelst dieser Fundamentalformeln zusammengesetztere Functionen, z. B. $\sin^2 am\, w$, $tng\, am\, w$ und dergleichen ebenfalls in Potenzenreihen verwandeln kann, ist leicht genug einzusehen, und es wird daher das folgende eine Beispiel genügen.

Die Function

$$f(w) = \frac{w}{\sin am\, w}$$

erhält für $w = 0$ den Werth $f(0) = 1$, sie bleibt ferner synektisch von $w = 0$ bis dahin, wo $\sin am\, w$ zum ersten Male verschwindet. Nun wird $\sin am\, w = 0$ sowohl für $w = 2K$ als für $w = i\,.\,2K'$; die Reihenentwickelung gilt daher, wenn $K < K'$ ist, unter der Bedingung $mod\, w < 2K$; im Gegenfalle $K' < K$ muss $mod\, w < 2K'$ genommen werden. Beide Fälle sind leicht zu trennen. Ist nämlich $k^2 < \frac{1}{2}$ oder $2k^2 < 1$, so folgt $k^2 < k'^2$, $\varDelta(k, \varphi) > \varDelta(k', \varphi)$,

$$\frac{1}{\varDelta(k, \varphi)} < \frac{1}{\varDelta(k', \varphi)} \text{ und } K < K';$$

für $k^2 > \frac{1}{2}$ ergiebt sich durch analoge Schlüsse $K' < K$. Die obige Function besitzt noch die Eigenschaft $f(-w) = f(w)$ ist also eine gerade Function und giebt folglich eine Reihenentwickelung von der Form

$$\frac{w}{\sin am\, w} = 1 + a_2 w^2 + a_4 w^4 + a_6 w^6 + \cdots\cdots$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit Nro. 47) und vergleicht dann beiderseits die Coefficienten von w^2, w^4, w^6 etc., so erhält man der Reihe nach die Werthe von a_2, a_4, a_6 etc., und gelangt schliesslich zu folgendem Resultate:

$$54)\quad \frac{1}{\sin am\, w} = \frac{1}{w} + \frac{1 + k^2}{1\,.\,2\,.\,3} w + \frac{7 - 22k^2 + 7k^4}{3\,.\,1\,.\,2\,..\,5} w^3 + \frac{31 - 15k^2 - 15k^4 + 31k^6}{3\,.\,1\,.\,2\,....\,7} w^5 + \cdots\cdots$$

wobei die Bedingungen

$$\text{für } k < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad mod\, w < 2K,$$

$$\text{„ } k > \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad mod\, w < 2K'$$

einzuhalten sind. Im speciellen Falle $k = 0$ kommt man auf die Formel für $\csc w$ zurück (Thl. I, S. 245, Nr. 31), im Falle $k = 1$ ergiebt sich die Gleichung 10) auf S. 281 im ersten Theile *).

*) Die obigen Potenzenreihen sind zuerst von **Jacobi** entwickelt worden, jedoch ohne Bestimmung der Gültigkeitsgrenzen (Fundam. nova theor.

B. Ein zweites Mittel zur expliciten Darstellung der elliptischen Functionen bieten die Quotienten zweier Potenzenreihen; man gelangt hierzu auf folgendem Wege.

Aus der unbestimmten Integration

$$\int\left(k^2 z^2 - \frac{1}{z^2}\right)\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \frac{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}{z}$$

erhält man sehr leicht

$$\int\limits_z^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \int\limits_z^1 \left(k^2z^2 - \frac{1}{z^2}\right)\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = lz$$

und für $z = sin\,am\,w$

$$\int\limits_w^K dw \int\limits_w^K \left(k^2 sin^2 am\,w - \frac{1}{sin^2 am\,w}\right) dw = l\,sin\,am\,w.$$

Ferner ist

$$\int\limits_w^K k^2 sin^2 am\,w\,dw = \int\limits_0^K k^2 sin^2 am\,w\,dw - \int\limits_0^w k^2 sin^2 am\,w\,dw$$

$$= K - E - \int\limits_0^w k^2 sin^2 am\,w\,dw,$$

wobei man den Werth $K - E$ mittelst der Substitution $am\,w = \varphi$ findet, und es ergiebt sich weiter

$$\int\limits_w^K dw \int\limits_w^K k^2 sin^2 am\,w\,dw$$

$$= (K-E)(K-w) - \int\limits_w^K dw \int\limits_0^w k^2 sin^2 am\,w\,dw$$

$$= (K-E)(K-w) - \int\limits_0^K dw \int\limits_0^w k^2 sin^2 am\,w\,dw$$

$$+ \int\limits_0^w dw \int\limits_0^w k^2 sin^2 am\,w\,dw.$$

---

funct. ellipt. pag. 114). Hermite behauptet in seiner „Uebersicht der Theorie der elliptischen Functionen“, übersetzt von Natani, S. 46, dass die Reihenentwickelungen für $sin\,am\,w$, $cos\,am\,w$ und $\Delta am\,w$ an die Bedingung $-1 < w < +1$ gebunden seien; dies ist ein Irrthum, wie schon die Fälle $k = 0$ und $k = 1$ beweisen.

Das erste Doppelintegral rechter Hand besitzt einen constanten Werth G, auf den es vorläufig nicht ankommt; wir rechnen ihn mit $(K-E)(K-w)$ zusammen, indem wir setzen

$$(K-E)K - G = a, \quad K - E = -b,$$

und erhalten somit

$$55)\qquad l\, sin\, am\, w = a + bw + \int_0^w dw \int_0^w k^2 sin^2 am\, w\, dw$$
$$- \int_w^K dw \int_w^K \frac{dw}{sin^2 am\, w}.$$

Geht man zweitens von der Integralformel aus

$$\int \left(k^2 z^2 - \frac{1-k^2 z^2}{1-z^2}\right) \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} = -\frac{z\sqrt{1-k^2 z^2}}{\sqrt{1-z^2}},$$

so gelangt man leicht zu der Gleichung

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} \int_0^z \left(k^2 z^2 - \frac{1-k^2 z^2}{1-z^2}\right) \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}$$
$$= l\sqrt{1-z^2},$$

die sich für $z = sin\, am\, w$ in die folgende verwandelt

$$56)\qquad l\, cos\, am\, w = \int_0^w dw \int_0^w k^2 sin^2 am\, w\, dw - \int_0^w dw \int_0^w \frac{\Delta^2 am\, w}{cos^2 am\, w} dw.$$

Drittens führt die Integralformel

$$\int \left(z^2 - \frac{1-z^2}{1-k^2 z^2}\right) \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} = -\frac{z\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-k^2 z^2}}$$

zu der Gleichung

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} \int_0^z \left(k^2 z^2 - \frac{k^2(1-z^2)}{1-k^2 z^2}\right) \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}$$
$$= l\sqrt{1-k^2 z^2},$$

und daraus wird für $z = sin\, am\, w$

$$57)\qquad l\, \Delta\, am\, w = \int_0^w dw \int_0^w k^2 sin^2 am\, w\, dw - \int_0^w dw \int_0^w \frac{k^2 cos^2 am\, w}{\Delta^2 am\, w} dw$$

Setzt man zur Abkürzung

$$p = a + bw - \int_w^K dw \int_w^K \frac{dw}{sin^2 am\, w},$$

$$q = -\int_0^w dw \int_0^w \frac{\Delta^2 am\, w}{cos^2 am\, w} dw, \quad r = -\int_0^w dw \int_0^w \frac{k^2 cos^2 am\, w}{\Delta^2 am\, w} dw,$$

$$s = -\int_0^w dw \int_0^w k^2 sin^2 am\, w\, dw,$$

so erhält man aus den Formeln 55), 56), 57) die folgenden:

58) $$sin\, am\, w = \frac{e^p}{e^s}, \quad cos\, am\, w = \frac{e^q}{e^s}, \quad \Delta\, am\, w = \frac{e^r}{e^s},$$

und demnach lassen sich die drei hauptsächlichsten elliptischen Functionen als gebrochene Functionen von gleichem Nenner ansehen. Den letzteren untersuchen wir zunächst.

Ist der Integrationsweg des w so beschaffen, dass $sin^2 am\, w$ längs desselben synektisch bleibt, so bildet aus nahe liegenden Gründen s gleichfalls eine synektische Function von w; dasselbe gilt dann hinsichtlich des e^s. Führt dagegen der Integrationsweg durch solche Punkte hindurch, in welchen $sin^2 am w$ unendlich wird, so kann man diesen Integrationsweg durch einen Weg der ersten Art ersetzen, sobald man noch diejenigen Integralwerthe hinzufügt, welche den Umkreisungen der vorkommenden Ausnahmepunkte entsprechen. Es zerfällt dann s in einen synektischen und in einen asynektischen Theil, wobei es vornehmlich auf den letzteren ankommt. Es wird nun $sin^2 am\, w$ unendlich für

$$w = 2mK + i(2n+1)K',$$

wo m und n beliebige ganze Zahlen bedeuten; bezeichnen wir diesen Werth kurz mit c und denken uns den betreffenden Ausnahmepunkt mittelst eines Contours von beliebiger Kleinheit umgangen, so ist für alle Punkte dieses Contours w von der Form $w = c + x + iy = c + z$ mithin

$$k^2 sin^2 am\, w = k^2 sin^2 am(c+z) = k^2 sin^2 am(iK' + z)$$
$$= \frac{1}{sin^2 am\, z}.$$

Bei hinreichender Kleinheit des Contours bleibt $mod\, z$ innerhalb der Grenzen, welche zum Bestehen der Gleichung 54) erforderlich sind, und es folgt dann

$$k^2 sin^2 am\, w = \frac{1}{z^2} + \frac{1+k^2}{3} + \frac{1-k^2+k^4}{15} z^2 + \cdots.$$

oder vermöge des Werthes von z

$$k^2 \sin^2 am\, w = \frac{1}{(w-c)^2} + \frac{1+k^2}{3} + \frac{1-k^2+k^4}{15}(w-c)^2 + \cdots$$

Daraus ergiebt sich ein Resultat von der Form

$$\int_0^w dw \int_0^w k^2 \sin^2 am\, w\, dw = -\, l(c-w) + W,$$

worin W die Summe einer convergirenden und für $w=c$ verschwindenden Reihe darstellt. Denkt man sich diese Rechnung für alle vorkommenden Ausnahmepunkte c_1, c_2, etc. ausgeführt und nennt man $f(w)$ den synektischen Theil von s, so erhält man

$$s = f(w) + l(c_1 - w) + l(c_2 - w) + \cdots \\ - W_1 - W_2 - W_3 - \cdots\cdots$$

und

$$e^s = (c_1 - w)(c_2 - w) \ldots e^{f(w) - W_1 - W_2 - \ldots}$$

Obgleich nun s nicht synektisch ist und sowohl für $w = c_1$ als $w = c_2$ etc. logarithmisch-unendlich wird, so ist doch e^s eine synektische Function, da sie gerade an den genannten Stellen verschwindet. Hieraus folgt, dass e^s für alle w in eine nach aufsteigenden Potenzen von w fortschreitende Reihe entwickelt werden kann.

Wie man bemerkt haben wird, liegt der Nerv der vorigen Schlussweise in dem Umstande, dass die Function $k^2 \sin^2 am\, w$ in der Nähe eines solchen Specialwerthes $w = c$, für welchen sie unendlich wird, die Form

$$\frac{1}{(w-c)^2} + \alpha + \beta w^2 + \gamma w^4 + \cdots$$

annimmt oder, kürzer ausgedrückt, dass $k^2 \sin^2 am\, w$ für $w = c$ ein Unendlichgrosses von derselben Ordnung wie $\dfrac{1}{(w-c)^2}$ wird. Die nämliche Eigenschaft kommt auch den folgenden drei Functionen zu

$$\frac{1}{\sin^2 am\, w}, \quad \frac{\Delta^2 am\, w}{\cos^2 am\, w}, \quad \frac{k^2 \cos^2 am\, w}{\Delta^2 am\, w},$$

nur sind hier die Werthe von c andere als vorhin; die Folgerung bleibt aber dieselbe, d. h. p, q, r werden logarithmisch-unendlich, e^p, e^q, e^r bleiben synektisch und können daher in Potenzenreihen verwandelt werden.

Die Bestimmung der Reihencoefficienten hat keine Schwierigkeit. Man findet zunächst aus Nro. 47)

$$\sin^2 am\, w = w^2 - \frac{1+k^2}{3} w^4 + \frac{2+13k^2+2k^4}{5\,.\,9} w^6 - \cdots,$$

ferner durch zweimalige Integration

$$s = -\frac{k^2}{3\,.\,4}w^4 + \frac{k^2+k^4}{3\,.\,5\,.\,6}w^6 - \frac{2k^2+13k^4+2k^6}{5\,.\,7\,.\,8\,.\,9}w^8 + \cdots,$$

endlich mittelst der Exponentialreihe

$$e^s = 1 + \frac{s}{1} + \frac{s^2}{1\,.\,2} + \frac{s^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{k^2}{3\,.\,4}w^4 + \frac{k^2+k^4}{3\,.\,5\,.\,6}w^6 - \frac{8k^2+17k^4+8k^6}{4\,.\,5\,.\,7\,.\,8\,.\,9}w^8 + \cdots$$

Aus Nro. 58) geht ferner hervor, dass die Entwickelungen von e^p, e^q, e^r entstehen, wenn e^s der Reihe nach mit den Entwickelungen von $\sin am\, w$, $\cos am\, w$, $\Delta am\, w$ multiplicirt wird; die Resultate sind dann folgende. Statt der Gleichungen 58) schreiben wir

59) $$\sin am\, w = \frac{w - \lambda_3 w^3 + \lambda_5 w^5 - \cdots}{1 - \varkappa_4 w^4 + \varkappa_6 w^6 - \cdots},$$

60) $$\cos am\, w = \frac{1 - \mu_2 w^2 + \mu_4 w^4 - \cdots}{1 - \varkappa_4 w^4 + \varkappa_6 w^6 - \cdots},$$

61) $$\Delta am\, w = \frac{1 - \nu_2 w^2 + \nu_4 w^4 - \cdots}{1 - \varkappa_4 w^4 + \varkappa_6 w^6 - \cdots},$$

und in diesen für alle w geltenden Formeln bestimmen sich die Coefficienten durch die nachstehenden Gleichungen, in denen zur Abkürzung $1\,.\,2\,.\,3\ldots m$ mit m' bezeichnet ist

$$4'\varkappa_4 = 2k^2,$$
$$6'\varkappa_6 = 8(k^2+k^4),$$
$$8'\varkappa_8 = 32(k^2+k^6) + 68k^6,$$
$$10'\varkappa_{10} = 128(k^2+k^8) + 480(k^4+k^6),$$
$$12'\varkappa_{12} = 512(k^2+k^{10}) + 3008(k^4+k^8) + 5400k^6$$

. . . .

$$3'\lambda_3 = 1 + k^2,$$
$$5'\lambda_5 = 1 + k^4 + 4k^2,$$
$$7'\lambda_7 = 1 + k^6 + 9(k^2+k^4),$$
$$9'\lambda_9 = 1 + k^8 + 16(k^2+k^6) - 6k^4,$$
$$11'\lambda_{11} = 1 + k^{10} + 25(k^2+k^8) - 494(k^4+k^6),$$

. . . .

$$2'\mu_2 = 1,$$
$$4'\mu_4 = 1 + 2k^2,$$
$$6'\mu_6 = 1 + 6k^2 + 8k^4,$$
$$8'\mu_8 = 1 + 12k^2 + 60k^4 + 32k^6,$$
$$10'\mu_{10} = 1 + 20k^2 + 348k^4 + 448k^6 + 128k^8,$$
$$12'\mu_{12} = 1 + 30k^2 + 2372k^4 + 4600k^6 + 2880k^8 + 512k^{10}$$

. . . .

$$\begin{aligned}
2'\nu_2 &= k^2,\\
4'\nu_4 &= 2k^2 + k^4,\\
6'\nu_6 &= 8k^2 + 6k^4 + k^6,\\
8'\nu_8 &= 32k^2 + 60k^4 + 12k^6 + k^8,\\
10'\nu_{10} &= 128k^2 + 448k^4 + 348k^6 + 20k^8 + k^{10},\\
12'\nu_{12} &= 512k^2 + 2880k^4 + 4600k^6 + 2372k^8 + 30k^{10} + k^{12},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Nimmt man speciell $k = 1$, so wird

$$sin\,am\,(w, 1) = \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}},\quad cos\,am\,(w, 1) = \Delta\,am\,(w, 1) = \frac{2}{e^w + e^{-w}},$$

$$e^q = e^{-\frac{1}{2}w^2},\quad e^s = \tfrac{1}{2}(e^w + e^{-w})\,e^{-\frac{1}{2}w^2}$$

und nach der zweiten Formel in Nro. 58)

$$cos\,am\,(w, 1) = \frac{e^{-\frac{1}{2}w^2}}{\frac{1}{2}(e^w + e^{-w})\,e^{-\frac{1}{2}w^2}},$$

was mit der Reihenentwickelung in Nro. 60) übereinstimmt *).

VI. Periodische Reihen und Partialbrüche für die einfachsten elliptischen Functionen.

Wie man aus der Untersuchung über die periodischen Reihen weiss (S. 144, VI.), lässt sich jede zwischen $u = 0$ und $u = h$ endlich bleibende Function einer reellen Variabelen u in jeder der Formen

$$\tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos\frac{\pi u}{h} + A_2\cos\frac{2\pi u}{h} + A_3\cos\frac{3\pi u}{h} + \cdots,$$

$$B_1\sin\frac{\pi u}{h} + B_2\sin\frac{2\pi u}{h} + B_3\sin\frac{3\pi u}{h} + \cdots$$

darstellen, falls u auf das Intervall 0 bis h eingeschränkt wird. Für sich betrachtet, bleibt die erste Reihe ungestört, wenn man u durch $-u$ oder durch $u + 2h$, $u + 4h$, $u + 6h$, etc. ersetzt; sie

---

*) Die Darstellung von $sin\,am\,w$, $cos\,am\,w$, $\Delta\,am\,w$ als Quotienten von Potenzenreihen ist zuerst von Weierstrass in Crelle's Journal, Bd. 52, S. 357 gegeben worden, wobei die Functionen e^s, e^p, e^q, e^r mit $Al\,(w)$, $Al\,(w)_1$, $Al\,(w)_2$, $Al\,(w)_3$ bezeichnet und Abel'sche Functionen genannt sind.

bildet also eine gerade periodische Function von u mit der Periode $2h$. Ist nun zufälligerweise die Function, welche man in die erste Reihe verwandeln will, selber eine gerade periodische Function mit der Periode $2h$, so gilt jene Reihenentwickelung nicht nur von $u=0$ bis $u=h$, sondern für jedes reelle u. Aus ganz ähnlichen Schlüssen geht hervor, dass eine ungerade periodische Function mit dem Index $2h$ für alle reellen u in eine Reihe der zweiten Art verwandelt werden kann. Da nun die elliptischen Functionen reelle Perioden besitzen, so erscheinen die obigen Reihen als sehr geeignete Mittel, um jene Functionen wenigstens für alle reellen Werthe von u darzustellen; man würde z. B. für $h = 2K$ den Amplitudencosinus in eine Reihe von Cosinus, den Amplitudensinus in eine Reihe von Sinus entwickeln können. Die einzige hierbei zu überwindende Schwierigkeit betrifft die Bestimmung der Coefficienten A_n und B_n; ist nämlich $F(u)$ die gegebene elliptische Function, so kommt es darauf an, die Werthe der Integrale

$$\int_0^{2K} F(u) \cos \frac{n\pi u}{2K} du \text{ und } \int_0^{2K} F(u) \sin \frac{n\pi u}{2K} du$$

oder auch den Werth des einen Integrales

$$\int_0^{2K} F(u) e^{i\mu u} du, \qquad \mu = \frac{n\pi}{2K}$$

zu entwickeln. Wie dies geschehen kann, wollen wir sogleich zeigen.

Es bedeute w eine complexe Variabele $= u + iv$, ferner sei $F(w)$ eine eindeutige Function von w, die innerhalb eines aus den Seiten $2K$ und $2K'$ construirten Rechtecks nur zweimal, nämlich für $w = iK'$ und für $w = 2K + iK'$, unendlich wird, und die noch folgende Eigenschaften besitzt

$$F(w + 2K) = \varepsilon_1 F(w), \qquad F(w + i.2K') = \varepsilon_2 F(w),$$

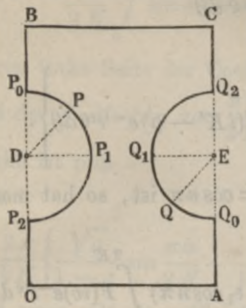
worin ε_1 und ε_2 positive oder negative reelle Einheiten bezeichnen. Nach diesen Voraussetzungen betrachten wir das Integral

$$\int F(w) e^{i\mu w} dw$$

und nehmen als Integrationsweg die Peripherie des aus den Seiten $OA = 2K$, $OB = 2K'$ construirten Rechtecks $OACB$, wobei wir die Ausnahmepunkte D und E, welche die Werthe iK' und

$2K + iK'$ repräsentiren, in Halbkreisen umgehen (Fig. 63). Zufolge der Ausschliessung von D und E ist der Werth des Integrales $= 0$ oder

Fig. 63.



$$I(OA)+I(AQ_0)+I(Q_0Q_1Q_2)+I(Q_2C)$$
$$+I(CB)+I(BP_0)+I(P_0P_1P_2)+I(P_2O) = 0.$$

Nehmen wir die Radien der Halbkreise gleich, $DP = EQ = r$, lassen sie gegen die Null convergiren und setzen zur Abkürzung

$$Lim\,\{I(P_0P_1P_2) + I(Q_0Q_1Q_2)\} = S,$$

so bleibt durch Zusammenziehung von $I(AQ_0)$ und $I(Q_2C)$, sowie von $I(BP_0)$ und $I(P_2O)$

$$I(OA) + I(AC) + I(CB) + I(BO) + S = 0.$$

Im ersten Integrale substituiren wir $w = u$, im zweiten $w = 2K + iv$, im dritten $w = u + i.2K'$, im vierten $w = iv$; dies giebt

$$\int_0^{2K} F(u)e^{i\mu u}du + ie^{i.2\mu K}\int_0^{2K'} F(2K+iv)e^{-\mu v}dv$$
$$-e^{-2\mu K'}\int_0^{2K} F(u+i.2K')e^{i\mu u}du - i\int_0^{2K'} F(iv)e^{-\mu v}dv + S = 0$$

oder zufolge der Eigenschaften von F

$$(1-\varepsilon_2 e^{-2\mu K'})\int_0^{2K} F(u)e^{i\mu u}du + i(\varepsilon_1 e^{i.2\mu K}-1)\int_0^{2K'} F(iv)e^{-\mu v}dv$$
$$+ S = 0.$$

Die Grösse S ergiebt sich, wenn man in $I(P_0P_1P_2)$ den Winkel $P_1DP = \theta$ mithin $w = iK' + re^{i\theta}$, im zweiten Halbkreisintegrale $\angle\, Q_1EQ = \theta$ mithin $w = 2K + iK' - re^{i\theta}$ substituirt und zur Abkürzung $re^{i\theta} = \varrho$ setzt; es ist dann

$$I(P_0P_1P_2) + I(Q_0Q_1Q_2)$$
$$= i\int_{\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{1}{2}\pi} F(iK'+\varrho)\,e^{i\mu(iK'+\varrho)}\,\varrho\,d\theta$$
$$- i\int_{\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{1}{2}\pi} F(2K+iK'-\varrho)e^{i\mu(2K+iK'-\varrho)}\,\varrho\,d\theta$$

und bei unendlich abnehmenden ϱ wegen $F(2K+w)=\varepsilon_1 F(w)$

$$S = Lim\left\{-ie^{-\mu K'}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\varrho F(iK'+\varrho)e^{i\mu\varrho}\,d\theta\right.$$

$$\left.+\,i\varepsilon_1 e^{-\mu K'+i.2\mu K}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\varrho F(iK'-\varrho)e^{-i\mu\varrho}d\theta\right\}.$$

Beachtet man noch, dass $e^{i.2\mu K}=e^{i.n\pi}=\cos n\pi$ ist, so hat man schliesslich folgende Gleichung

$$62)\quad (1-\varepsilon_2 e^{-2\mu K'})\int_0^{2K}F(u)e^{i\mu u}du - i(1-\varepsilon_1\cos n\pi)\int_0^{2K'}F(iv)e^{-\mu v}dv$$

$$= ie^{-\mu K'}Lim\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\varrho[F(iK'+\varrho)e^{i\mu\varrho}-\varepsilon_1\cos n\pi F(iK'-\varrho)e^{-i\mu\varrho}]d\theta,$$

die sofort zur Kenntniss der gesuchten Integrale führt, wie sich gleich zeigen wird.

a. Wir nehmen zuerst $F(w)=\sin am\, w$; es ist dann

$$\varepsilon_1=-1,\quad \varepsilon_2=+1,\quad F(iv)=i\,tng\,am(v,k'),$$

$$Lim[\varrho F(iK'+\varrho)] = Lim\left[\frac{\varrho}{k\sin am\,\varrho}\right]=\frac{1}{k},$$

$$Lim[\varrho F(iK'-\varrho)] = Lim\left[\frac{-\varrho}{k\sin am\,\varrho}\right]=-\frac{1}{k},$$

und damit geht die Gleichung 62) in die folgende über

$$(1-e^{-2\mu K'})\int_0^{2K}\sin am\,u\, e^{i\mu u}du+(1+\cos n\pi)\int_0^{2K'}tng\,am(v,k')e^{-\mu v}dv$$

$$= i\frac{\pi(1-\cos n\pi)}{k}e^{-\mu K'}.$$

Durch Vergleichung der beiderseitigen imaginären Theile und durch Substitution des Werthes von μ ergiebt sich weiter

$$\left(1-e^{-\frac{n\pi K'}{K}}\right)\int_0^{2K}\sin am\,u\sin\frac{n\pi u}{2K}du=\frac{\pi(1-\cos n\pi)}{k}e^{-\frac{n\pi K'}{2K}},$$

und wenn man noch die Abkürzung

$$e^{-\frac{\pi K'}{K}}=q$$

einführt, so erhält man leicht die Gleichung

$$\frac{2}{2K}\int\limits_0^{2K} \sin am\, u \sin \frac{n\pi u}{2K}\, du = \frac{\pi(1-\cos n\pi)}{kK}\cdot\frac{\sqrt{q^n}}{1-q^n},$$

deren linke Seite der Coefficient B_n ist, falls $\sin am\, u$ nach den Sinus der Vielfachen von $\frac{\pi u}{2K}$ entwickelt werden soll. Die gesuchte Reihe ist nun

63)
$$\sin am\, u$$
$$= \frac{2\pi}{kK}\left\{\frac{\sqrt{q}}{1-q}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{\sqrt{q^3}}{1-q^3}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \frac{\sqrt{q^5}}{1-q^5}\sin\frac{5\pi u}{2K} + \cdots\right\},$$

und zwar gilt diese Gleichung für jedes reelle u.

Lässt man $K-u$ an die Stelle von u treten, so erhält man noch

64)
$$\frac{\cos am\, u}{\varDelta am\, u}$$
$$= \frac{2\pi}{kK}\left\{\frac{\sqrt{q}}{1-q}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{\sqrt{q^3}}{1-q^3}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{\sqrt{q^5}}{1-q^5}\cos\frac{5\pi u}{2K} - \cdots\right\}.$$

b. Es sei ferner $F(w) = \cos am\, w$, mithin

$$\varepsilon_1 = -1,\quad \varepsilon_2 = -1,\quad F(iv) = \sec am(v,k'),$$

$$Lim[\varrho F(iK'+\varrho)] = Lim\left\{-\frac{i\varDelta am\varrho}{k}\cdot\frac{\varrho}{\sin am\varrho}\right\} = -\frac{i}{k},$$

$$Lim[\varrho F(iK'-\varrho)] = Lim\left\{+\frac{i\varDelta am\varrho}{k}\cdot\frac{\varrho}{\sin am\varrho}\right\} = +\frac{i}{k};$$

die allgemeine Formel 62) wird dann zur folgenden:

$$(1+e^{-2\mu K'})\int\limits_0^{2K}\cos am\, u\, e^{i\mu u}du - i(1+\cos n\pi)\int\limits_0^{2K'}\sec am(v,k')e^{-\mu v}dv$$
$$= \frac{\pi(1-\cos n\pi)}{k}e^{-\mu K'}.$$

Durch Vergleichung der beiderseitigen reellen Theile erhält man

$$\frac{2}{2K}\int\limits_0^{2K}\cos am\, u\cos\frac{n\pi u}{2K}du = \frac{\pi(1-\cos n\pi)}{kK}\cdot\frac{\sqrt{q^n}}{1+q^n},$$

womit der Coefficient A_n für die Entwickelung von $\cos am\, u$ nach den Cosinus der Vielfachen von $\frac{\pi u}{2K}$ bestimmt ist. Man hat demnach folgende Reihenformel

65)
$$\cos am\,u$$
$$=\frac{2\pi}{kK}\left\{\frac{\sqrt{q}}{1+q}\cos\frac{\pi u}{2K}+\frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\cos\frac{3\pi u}{2K}+\frac{\sqrt{q^5}}{1+q^5}\cos\frac{5\pi u}{2K}+\cdots\right\},$$
die für alle reellen u gültig bleibt.

Ersetzt man u durch $K-u$, so erhält man noch

66)
$$k'\frac{\sin am\,u}{\Delta\,am\,u}$$
$$=\frac{2\pi}{kK}\left\{\frac{\sqrt{q}}{1+q}\sin\frac{\pi u}{2K}-\frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\sin\frac{3\pi u}{2K}+\frac{\sqrt{q^5}}{1+q^5}\sin\frac{5\pi u}{2K}-\cdots\right\}$$

c. Wir nehmen drittens $F(w)=\Delta\,am\,w$, also
$$\varepsilon_1=+1,\quad \varepsilon_2=-1,\quad F(iv)=\frac{\Delta\,am(v,k')}{\cos am(v,k')},$$
$$Lim\,[\varrho F(iK'+\varrho)]=Lim\left\{-i\cos am\,\varrho\cdot\frac{\varrho}{\sin am\,\varrho}\right\}=-i,$$
$$Lim\,[\varrho F(iK'-\varrho)]=Lim\left\{+i\cos am\,\varrho\cdot\frac{\varrho}{\sin am\,\varrho}\right\}=+i;$$
die allgemeine Gleichung 62) gestaltet sich dann folgendermaassen:
$$(1+e^{-2\mu K'})\int_0^{2K}\Delta\,am\,u\,e^{i\mu u}du-i(1-\cos n\pi)\int_0^{2K'}\frac{\Delta\,am(v,k')}{\cos am(v,k')}e^{-\mu v}dv$$
$$=\pi\,(1+\cos n\pi)\,e^{-\mu K'}.$$
Die Vergleichung der reellen Theile giebt
$$\frac{2}{2K}\int_0^{2K}\Delta\,am\,u\cos\frac{n\pi u}{2K}du=\frac{\pi(1+\cos n\pi)}{K}\cdot\frac{\sqrt{q^n}}{1+q^n},$$
und daraus folgt die allgemein gültige Reihenentwickelung

67)
$$\Delta\,am\,u$$
$$=\frac{\pi}{2K}+\frac{2\pi}{K}\left\{\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K}+\frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{2\pi u}{K}+\cdots\cdot\right\}.$$
Ferner ist, wenn $K-u$ an die Stelle von u gesetzt wird,

68)
$$\frac{k'}{\Delta\,am\,u}$$
$$=\frac{\pi}{2K}-\frac{2\pi}{K}\left\{\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K}-\frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{2\pi u}{K}+\cdots\cdot\right\}.$$

Mittelst der Relation

$$am\,u = \int_0^u \varDelta\, am\,u\,du$$

erhält man noch aus Nro. 67).

69)
$$am\,u$$
$$= \frac{\pi u}{2K} + 2\left\{\tfrac{1}{1}\cdot\frac{q}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \cdots\cdots\right\}.$$

d. Die gerade Function $F(w) = \sin^2 am\,w$ lässt sich gleichfalls nach der bisherigen Methode entwickeln, wenn gesetzt wird

$$\sin^2 am\,u$$
$$= \tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos\frac{\pi u}{2K} + A_2\cos\frac{2\pi u}{2K} + A_3\cos\frac{3\pi u}{2K} + \cdots$$

Zunächst hat man

$$\tfrac{1}{2}A_0 = \frac{1}{2K}\int_0^{2K}\sin^2 am\,u\,du$$

oder unter Anwendung der Substitution $am\,u = \varphi$

$$\tfrac{1}{2}A_0 = \frac{1}{2K}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\varphi}{\varDelta(\varphi)}\,d\varphi = \frac{K-E}{k^2 K}.$$

Aus der Relation $\sin^2 am\,(2K-u) = \sin^2 am\,u$ ergiebt sich leicht $A_1 = A_3 = A_5 \ldots = 0$, bei der Bestimmung von A_n kann deshalb n als gerade Zahl vorausgesetzt werden. Es ist nun

$$\varepsilon_1 = +1,\quad \varepsilon_2 = +1,\quad F(iv) = -\,tng^2\,am\,(v,k'),$$
$$Lim\left\{\varrho\left[F(iK'+\varrho)e^{i\mu\varrho} - \varepsilon_1\cos n\pi\,F(iK'-\varrho)e^{-i\mu\varrho}\right]\right\}$$
$$= Lim\,\frac{\varrho\,(e^{i\mu\varrho}-e^{-i\mu\varrho})}{k^2\sin^2 am\,\varrho} = \frac{2i}{k^2}\,Lim\left\{\left(\frac{\varrho}{\sin am\,\varrho}\right)^2\frac{\sin\mu\varrho}{\varrho}\right\}$$
$$= \frac{2i}{k^2}\,\mu = i\,\frac{n\pi}{k^2K},$$

mithin geht die allgemeine Formel 62) über in

$$(1-e^{-2\mu K'})\int_0^{2K}\sin^2 am\,u\,e^{i\mu u}\,du = -\,\frac{n\pi^2}{k^2K}\,e^{-\mu K'}.$$

Die Vergleichung der reellen Theile liefert

$$\frac{2}{2K}\int_0^{2K}\sin^2 am\,u\cos\frac{n\pi u}{2K}\,du = -\left(\frac{\pi}{kK}\right)^2\frac{n\,q^{\frac{1}{2}n}}{1-q^n}$$

und damit ist A_n bestimmt. Für $n = 2, 4, 6 \ldots$ wird nun

70)
$$\sin^2 am\, u$$
$$=\frac{K-E}{k^2 K}-2\left(\frac{\pi}{kK}\right)^2\left\{\frac{1q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{K}+\frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{2\pi u}{K}+\cdots\right\},$$
und zwar gilt diese Gleichung für alle reellen u.

Bevor wir uns mit weiteren Reihen dieser Art beschäftigen, wollen wir einen Blick auf die Substitutionen werfen, mittelst deren sich aus jeder Entwickelung irgend einer elliptischen Function die Entwickelungen anderer elliptischer Functionen herleiten lassen. Eine solche Substitution ist im Vorigen schon angewendet worden; sie besteht darin, dass man $K-u$ an die Stelle von u treten lässt; andere Substitutionen beruhen auf folgenden Bemerkungen.

Das Integral
$$u=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{k'^2+k^2\sin^2\varphi}}$$
lässt sich auf zwei verschiedene Arten in die Normalform elliptischer Integrale erster Art bringen; man setzt nämlich entweder
$$k'u=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{ik}{k'}\right)^2\sin^2\varphi}},\quad \text{mithin } \varphi=am\left(k'u,\frac{ik}{k'}\right),$$
oder man benutzt die Substitution
$$\sin\varphi=\frac{k'\sin\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}},\qquad d\varphi=\frac{k'd\psi}{1-k^2\sin^2\psi},$$
welche giebt
$$u=\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}},\qquad \text{mithin } \psi=am\,(u,k).$$

Zufolge der Gleichung zwischen φ und ψ ist nun
$$\sin am\left(k'u,\frac{ik}{k'}\right)=\frac{k'\sin am\, u}{\varDelta\, am\, u},$$
und hieraus folgen analoge Formeln für die übrigen elliptischen Functionen. Im speciellen Falle $\varphi=\frac{1}{2}\pi$ wird $\psi=\frac{1}{2}\pi$, und die Vergleichung der beiden Werthe von u giebt
$$F\left(\frac{ik}{k'},\frac{\pi}{2}\right)=k'F\left(k,\frac{\pi}{2}\right).$$
Ferner ist unmittelbar

$$F\left[\sqrt{1-\left(\frac{ik}{k'}\right)^2},\ \frac{\pi}{2}\right]=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{k'\,d\varphi}{\sqrt{k'^2-\sin^2\varphi}}$$

oder für $\sin\varphi = z$

$$F\left[\sqrt{1-\left(\frac{ik}{k'}\right)^2},\ \frac{\pi}{2}\right]=k'\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2-z^2)}}$$

$$=k'\left\{\int_0^{k'}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2-z^2)}}+\frac{1}{i}\int_{k'}^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-k'^2)}}\right\}.$$

Substituirt man im ersten Integrale rechter Hand $z = k'\sin\tau$, im zweiten $z=\sqrt{1-k^2\sin^2\omega}$, so erhält man leicht

$$F\left[\sqrt{1-\left(\frac{ik}{k'}\right)^2},\ \frac{\pi}{2}\right]=k'(K'-iK).$$

Diese Bemerkungen lassen sich folgendermaassen zusammenfassen: Ersetzt man

$$k \text{ durch } \frac{ik}{k'} \text{ und zugleich } u \text{ durch } k'u,$$

so verwandeln sich

$$K \text{ in } k'K, \qquad K' \text{ in } k'(K'-iK)$$

$$e^{-\frac{\pi K'}{K}} = q \text{ in } e^{-\frac{\pi(K'-iK)}{K}} = -q$$

$$\sin am\, u \text{ in } \frac{k'\sin am\, u}{\Delta am\, u},\quad \cos am\, u \text{ in } \frac{\cos am\, u}{\Delta am\, u},$$

$$\Delta am\, u \text{ in } \frac{1}{\Delta am\, u}.$$

Nach dieser Regel erhält man z. B. durch blosse Aenderung des Vorzeichens von q aus der Reihe für $\sin am\, u$ die Reihe für $\dfrac{k'\sin am\, u}{\Delta am\, u}$, welche letztere in die Reihe für $\cos am\, u$ übergeht, wenn u durch $K-u$ ersetzt wird (vergl. Nro. 63, 66 und 65).

Ein zweites Mittel zur Ableitung neuer Reihen bietet die Landen'sche Substitution. Sind nämlich die Amplituden φ und ψ durch die Gleichung

$$\tan\varphi=\frac{\sin 2\psi}{h+\cos 2\psi}$$

verbunden, statt deren auch gesetzt werden kann

$$\cos\varphi = \frac{1}{1+h} \cdot \frac{1 + h - 2\sin^2\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{h}}{1+h}\right)^2 \sin^2\psi}},$$

$$\sin\varphi = \frac{2}{1+h} \cdot \frac{\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{h}}{1+h}\right)^2 \sin^2\psi}},$$

so besteht die Relation

71) $$F(h,\varphi) = \frac{2}{1+h} F\left(\frac{2\sqrt{h}}{1+h}, \psi\right).$$

Es sei nun ferner

$$\frac{2\sqrt{h}}{1+h} = k, \text{ mithin } h = \frac{1-k'}{1+k'};$$

die vorigen drei Gleichungen gehen dann in folgende über:

$$\cos\varphi = \frac{1-(1+k')\sin^2\psi}{\Delta(k,\psi)}, \quad \sin\varphi = \frac{(1+k')\sin\psi\cos\psi}{\Delta(k,\psi)},$$

$$F(k,\psi) = \frac{1}{1+k'} F\left(\frac{1-k'}{1+k'}, \varphi\right),$$

deren letzte wir in der kurzen Form

$$u = \frac{1}{1+k'} v$$

darstellen. Hiernach ist

$$\psi = am(u,k), \quad \varphi = am\left(v, \frac{1-k'}{1+k'}\right) = am\left((1+k')u, \frac{1-k'}{1+k'}\right),$$

und wenn man diese Werthe in die Formeln für $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ substituirt, so erhält man

$$\cos am\left((1+k')u, \frac{1-k'}{1+k'}\right) = \frac{1-(1+k')\sin^2 am\, u}{\Delta\, am\, u},$$

$$\sin am\left((1+k')u, \frac{1-k'}{1+k'}\right) = \frac{(1+k')\sin am\, u \cos am\, u}{\Delta\, am\, u}.$$

Im speciellen Falle $\psi = \frac{1}{2}\pi$ wird $\varphi = \pi$ und

$$F(k, \tfrac{1}{2}\pi) = \frac{1}{1+k'} F\left(\frac{1-k'}{1+k'}, \pi\right) = \frac{2}{1+k'} F\left(\frac{1-k'}{1+k'}, \frac{\pi}{2}\right)$$

sowie

$$F\left(\frac{1-k'}{1+k'}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1+k'}{2} F\left(k, \frac{\pi}{2}\right).$$

Ferner ist identisch

$$F\left[\sqrt{1-\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^2}, \frac{\pi}{2}\right] = F\left(\frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}, \frac{\pi}{2}\right);$$

nach Nro. 71) ergiebt sich für $h = k'$, $\varphi = 2\psi = \pi$, dass die rechte Seite der vorstehenden Gleichung mit $(1+k')F(k', \frac{1}{2}\pi)$ übereinkommt; man hat daher

$$F\left[\sqrt{1-\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^2},\ \frac{\pi}{2}\right] = (1+k')F\left(k', \frac{\pi}{2}\right).$$

Diese Bemerkungen zusammengenommen liefern folgenden Satz: Ersetzt man

$$k \text{ durch } \frac{1-k'}{1+k'} \text{ und zugleich } u \text{ durch } (1+k')u,$$

so verwandelt sich

$$K \text{ in } \tfrac{1}{2}(1+k')\,K, \qquad K' \text{ in } (1+k')\,K',$$

$$q \text{ in } q^2,$$

$$sin\,am\,u \text{ in } \frac{(1+k')\,sin\,am\,u\,cos\,am\,u}{\varDelta\,am\,u},$$

$$cos\,am\,u \text{ in } \frac{1-(1+k')\,sin^2 am\,u}{\varDelta\,am\,u}.$$

Nach dieser Regel erhält man z. B. aus der Reihe für $sin\,am\,u$ die neue Entwickelung

$$\frac{sin\,am\,u\,cos\,am\,u}{\varDelta\,am\,u}$$

$$= \frac{4\pi}{k^2K}\left\{\frac{q}{1-q^2}\,sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^3}{1-q^6}\,sin\frac{3\pi u}{K} + \frac{q^5}{1-q^{10}}\,sin\frac{5\pi u}{K} + \cdots\right\},$$

auf welche wir im nächsten Abschnitte zurückkommen werden.

Es dürfte kaum nöthig sein zu bemerken, dass alle gegebenen Reihenentwickelungen auf verschiedene Weise specialisirt werden können, indem man $u = 0$ oder $= K$ oder $= \frac{1}{2}K$ setzt. Die so entstehenden besonderen Formeln enthalten meistens Beziehungen zwischen den vier Grössen k, k', K und q; nur die Gleichung 70) macht hiervon eine Ausnahme und liefert z. B. für $u = 0$ eine Formel, welche sich zur Berechnung von E benutzen liesse.

Noch müssen wir eine wichtige Transformation erwähnen, welcher die bisherigen Reihen unterworfen werden können; sie besteht einfach darin, dass man jeden einzelnen Term mittelst der Formel

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots\cdot, \quad r^2 < 1$$

entwickelt und in der so gebildeten Doppelreihe die vertical unter einander stehenden Terme zusammenfasst. Schreibt man z. B. statt Nro. 63) etwas bequemer

$$\frac{kK}{2\pi} \sin am \frac{2Kx}{\pi}$$
$$= \sqrt{q}\left\{\frac{\sin x}{1-q} + \frac{q \sin 3x}{1-q^3} + \frac{q^2 \sin 5x}{1-q^5} + \cdots\right\},$$

so ist auch

$$\frac{kK}{2K} \sin am \frac{2Kx}{\pi}$$
$$\begin{aligned} = \sqrt{q}\,\{ & \sin x + q \sin x + q^2 \sin x + q^3 \sin x + \cdots \\ & + q \sin 3x + q^4 \sin 3x + q^7 \sin 3x + q^{10} \sin 3x + \cdots \\ & + q^2 \sin 5x + q^7 \sin 5x + q^{12} \sin 5x + q^{17} \sin 5x + \cdots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \end{aligned}$$

und indem man alle Verticalreihen mittelst der Formel

$$\sin x + p \sin 3x + p^2 \sin 5x + \cdots = \frac{(1+p)\sin x}{1 - 2p \cos 2x + p^2}$$

summirt, gelangt man zu folgendem Resultate:

$$72) \qquad \frac{kK}{2\pi} \sin am \frac{2Kx}{\pi}$$
$$= \sin x \left\{\frac{(1+q)\sqrt{q}}{1 - 2q \cos 2x + q^2} + \frac{(1+q^3)\sqrt{q^3}}{1 - 2q^3 \cos 2x + q^6} + \frac{(1+q^5)\sqrt{q^5}}{1 - 2q^5 \cos 2x + q^{10}} + \cdots\right\}.$$

Aus der Formel 65) oder der nicht wesentlich von ihr verschiedenen

$$\frac{kK}{2\pi} \cos am \frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{q}\left\{\frac{\cos x}{1+q} + \frac{q \cos 3x}{1+q^3} + \frac{q^2 \cos 5x}{1+q^5} + \cdots\right\}$$

erhält man nach demselben Verfahren

$$73) \qquad \frac{kK}{2\pi} \cos am \frac{2Kx}{\pi}$$
$$= \cos x \left\{\frac{(1-q)\sqrt{q}}{1 - 2q \cos 2x + q^2} - \frac{(1-q^3)\sqrt{q^3}}{1 - 2q^3 \cos 2x + q^6} + \frac{(1-q^5)\sqrt{q^5}}{1 - 2q^5 \cos 2x + q^{10}} - \cdots\right\}.$$

Schreibt man statt der Gleichung 67) die folgende:

$$\frac{K}{2\pi} \Delta am \frac{2Kx}{\pi} - \frac{1}{4} = \frac{q \cos 2x}{1+q^2} + \frac{q^2 \cos 4x}{1+q^4} + \frac{q^3 \cos 6x}{1+q^6} + \cdots,$$

so erhält man

$$74)\qquad \frac{K}{2\pi}\,\Delta\, am\frac{2Kx}{\pi}-\frac{1}{4}$$
$$=\frac{q\cos 2x-q^2}{1-2q\cos 2x+q^2}-\frac{q^3\cos 2x-q^6}{1-2q^3\cos 2x+q^6}+\frac{q^5\cos 2x-q^{10}}{1-2q^5\cos 2x+q^{10}}-\cdots$$

Im speciellen Falle $x=0$ wird

$$\frac{K}{2\pi}-\frac{1}{4}=\frac{q}{1-q}-\frac{q^3}{1-q^3}+\frac{q^5}{1-q^5}-\cdots.$$

Die halbe Differenz beider Gleichungen ist

$$75)\qquad \frac{K}{4\pi}\left(1-\Delta\, am\frac{2Kx}{\pi}\right)$$
$$=\sin^2 x\left\{\frac{\frac{1+q}{1-q}q}{1-2q\cos 2x+q^2}-\frac{\frac{1+q^3}{1-q^3}q^3}{1-2q^3\cos 2x+q^6}+\cdots\right\}.$$

Auf gleiche Weise findet man aus Nro. 70)

$$76)\qquad 1-k^2\sin^2 am\frac{2Kx}{\pi}=$$
$$\frac{E}{K}+\frac{2\pi^2}{K^2}\left\{\frac{q(1+q^2)\cos 2x-2q^2}{(1-2q\cos 2x+q^2)^2}+\frac{q^3(1+q^6)\cos 4x-2q^6}{(1-2q^3\cos 2x+q^6)^2}+\cdots\right\}.$$

Das Charakteristische an den Formeln 72) bis 76) ist, dass die elliptischen Functionen gewissermaassen in Partialbrüche zerlegt werden können, die in Beziehung auf q echte Brüche sind. Man kann sich hiernach die elliptischen Functionen als eine Art gebrochener Functionen vorstellen, und in wie weit dies richtig ist, wird der nächste Abschnitt zeigen.

VII. Periodische Reihen für zusammengesetzte elliptische Functionen. Unendliche Producte.

Das im vorigen Abschnitte zur Entwickelung des Integrales

$$\int F(w)\,e^{i\mu w}\,dw,\qquad \mu=\frac{n\pi}{2K}$$

benutzte Verfahren lässt sich mit einer geringen Modification auch in dem Falle anwenden, wo die Function $F(w)$ nicht rein doppelt periodisch, sondern aus einer doppelt periodischen und einer anderen Function zusammengesetzt ist. Als Integrationsweg der complexen Variabelen w nehmen wir wieder den Umfang des aus den Seiten $2K$ und $2K'$ construirten Rechtecks; von der Function $F(w)$ setzen wir voraus, dass sie eindeutig bleibe, jedoch auf der Peripherie jenes Rechtecks mehrmals unendlich werde und dass sie folgende zwei Eigenschaften besitze

$$F(w+2K) = \varepsilon_1 F(w), \quad F(w+i.2K') = \varepsilon_2 F(w) + f(w),$$

wobei $f(w)$ eine neue bekannte Function bedeutet. Die Integration längs des angegebenen Weges liefert dann folgende Gleichung:

$$77)\quad (1-\varepsilon_2 e^{-2\mu K'})\int_0^{2K} F(u) e^{i\mu u} du - e^{-2\mu K'}\int_0^{2K} f(u) e^{i\mu u} du$$
$$+ i(\varepsilon_1 e^{i.2\mu K} - 1)\int_0^{2K'} F(iv) e^{-\mu v} dv + S = 0,$$

und darin bezeichnet S die Summe aller der Integrale, welche dadurch entstehen, dass man die Ausnahmepunkte in unendlich kleinen Halbkreisen oder Viertelkreisen umgeht. Die Berechnung von S geschieht auf dieselbe Weise, wie im vorigen Abschnitte bei nur zwei Ausnahmepunkten. Wir geben im Folgenden einige Anwendungen dieses einfachen Princips.

a. Die Function $\dfrac{1}{\sin am\, w}$ wird unendlich an den Stellen 0, $2K$, $i.2K'$ und $2K + i.2K'$; sie lässt sich daher nicht unmittelbar in eine Reihe von Sinus oder Cosinus verwandeln. Dagegen bleibt die ungerade Function

$$F(w) = \frac{1}{\sin am\, w} - \frac{\pi}{2K \sin \dfrac{\pi w}{2K}}$$

endlich für alle reellen w von 0 bis $2K$, sie verschwindet sowohl für $w = 0$ als für $w = 2K$ und hat nur die beiden Ausnahmepunkte $i.2K'$ und $2K + i.2K'$; man kann daher setzen

$$F(u) = B_1 \sin\frac{\pi u}{2K} + B_2 \sin\frac{2\pi u}{2K} + B_3 \sin\frac{3\pi u}{2K} + \cdots.$$

Aus der Gleichung $F(2K-u) = F(u)$ folgt sehr leicht, dass B_2, B_4, B_6 etc. gleich Null sind, dass also bei der Bestimmung von

$$B_n = \frac{2}{2K}\int_0^{2K} F(u) \sin\frac{n\pi u}{2K} du$$

nur ungerade n berücksichtigt zu werden brauchen. Es ist ferner

$$F(w+2K) = -F(w), \qquad \varepsilon_1 = -1$$

$$F(w+i.2K') = F(w) + \frac{\pi}{2K}\left\{\frac{1}{\sin\frac{\pi w}{2K}} - \frac{1}{\sin\frac{\pi(w+i.2K')}{2K}}\right\},$$

mithin, wenn zur Abkürzung

$$\frac{\pi K'}{K} = \alpha$$

gesetzt wird,

$$F(w+i.2K') = F(w) + f(w), \quad \varepsilon_2 = 1,$$

$$f(w) = \frac{\pi}{2K}\left\{\frac{1}{\sin\frac{\pi w}{2K}} - \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi w}{2K}+i\alpha\right)}\right\}.$$

Wegen des ungeraden n hat man ferner

$$\varepsilon_1 e^{i.2\mu K} - 1 = -\cos n\pi - 1 = 0$$

und daher vereinfacht sich die Gleichung 77) zur folgenden:

$$78)\quad (1-q^n)\int_0^{2K} F(u)\, e^{i\mu u} du - q^n \int_0^{2K} f(u)\, e^{i\mu u} du + S = 0.$$

Zunächst betrachten wir das Integral, worin $f(u)$ vorkommt und substituiren statt u die neue Variabele $\frac{2K}{\pi}x$; vermöge der Werthe von $f(u)$ und μ giebt dies

$$\int_0^{2K} f(u)\, e^{i\mu u} du = \int_0^{\pi}\left\{\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin(x+i\alpha)}\right\} e^{inx} dx,$$

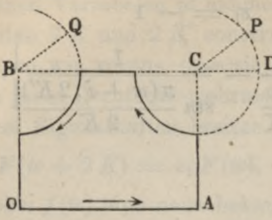
oder wenn $\sin(x+i\alpha)$ durch Exponentialgrössen ausgedrückt und die Gleichung $e^{-\alpha} = q$ beachtet wird,

$$\int_0^{2K} f(u)\, e^{i\mu u} du = \int_0^{\pi} \frac{e^{inx}}{\sin x} dx + 2i\int_0^{\pi} \frac{q e^{ix}}{1-q^2 e^{2ix}} e^{inx} dx.$$

Das zweite Integral rechter Hand lässt sich leicht in eine nach Potenzen von q fortschreitende Reihe verwandeln, deren Glieder wegen des ungeraden n sämmtlich verschwinden; es bleibt daher

$$\int_0^{2K} f(u)\, e^{i\mu u} du = \int_0^{\pi} \frac{e^{inx}}{\sin x} dx.$$

Fig. 64.



Um ferner S zu finden, umgehen wir die Ausnahmepunkte C und B in Viertelkreisen, wobei in Fig. 64 $OA = 2K$, $OB = 2K'$, $CP = BQ = r$, $\angle PCD = \angle QBD = \theta$ und zur Abkürzung $re^{i\theta} = \varrho$ sein möge. Es ist dann S der Grenzwerth von

$$i\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{-\pi} F(2K+2iK'+\varrho)\,e^{i\mu(2K+2iK'+\varrho)}\,\varrho\,d\theta$$
$$+ i\int_{0}^{-\frac{1}{2}\pi} F(2iK'+\varrho)\,e^{i\mu(2iK'+\varrho)}\,\varrho\,d\theta$$
$$= iq^n\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{-\pi} \varrho\,[F(\varrho)+f(\varrho)]\,e^{i\mu\varrho}\,d\theta$$
$$+ iq^n\int_{0}^{-\frac{1}{2}\pi} \varrho\,[F(\varrho)+f(\varrho)]\,e^{i\mu\varrho}\,d\theta,$$

und hieraus folgt wegen $F(0) = 0$ und $Lim\,[\varrho f(\varrho)] = 1$

$$S = -\,i\pi q^n.$$

Nach diesen Bestimmungen geht die Gleichung 78) über in

$$(1-q^n)\int_0^{2K} F(u)\,e^{i\mu u}\,du - q^n\int_0^{\pi}\frac{e^{inx}}{\sin x}\,dx - i\pi q^n = 0$$

und liefert durch Herausnahme des imaginären Theiles

$$\int_0^{2K} F(u)\sin\frac{n\pi u}{2K}\,du = \frac{q^n}{1-q^n}\left\{\pi + \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx\right\}.$$

Das letzte Integral findet sich durch die Bemerkung, dass bei ungeraden n

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = 1 + 2\,[\cos 2x + \cos 4x + \cdots + \cos(n-1)x]$$

ist; man erhält

$$\int_0^{2K} F(u)\sin\frac{n\pi u}{2K}\,du = \frac{2\pi q^n}{1-q^n},\qquad B_n = \frac{2\pi}{K}\cdot\frac{q^n}{1-q^n}.$$

Die gesuchte Reihenentwickelung ist hiernach

79) $$\frac{1}{\sin am u} - \frac{\pi}{2K \sin \frac{\pi u}{2K}}$$

$$= \frac{2\pi}{K}\left\{\frac{q}{1-q}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{q^3}{1-q^3}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \frac{q^5}{1-q^5}\sin\frac{5\pi u}{2K} + \cdots\right\}.$$

Mittelst Substitution von $K - u$ für u zieht man hieraus

80) $$\frac{\Delta am u}{\cos am u} - \frac{\pi}{2K \cos \frac{\pi u}{2K}}$$

$$= \frac{2\pi}{K}\left\{\frac{q}{1-q}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1-q^3}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{q^5}{1-q^5}\cos\frac{5\pi u}{2K} - \cdots\right\}.$$

Ersetzt man ferner u durch $k'u$, K durch $k'K$, q durch $-q$ (S. 423) und multiplicirt mit $-k'$, so erhält man noch

81) $$\frac{\pi}{2K \cos \frac{\pi u}{2K}} - \frac{k'}{\cos am u}$$

$$= \frac{2\pi}{K}\left\{\frac{q}{1+q}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{q^3}{1+q^3}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{q^5}{1+q^5}\cos\frac{5\pi u}{2K} - \cdots\right\}.$$

b. Zu einer ähnlichen Rechnung führt die Annahme

$$F(w) = \cot am w - \frac{\pi}{2K}\cot\frac{\pi w}{2K}.$$

Diese Function verschwindet für $w = 0$ sowie für $w = 2K$ und bleibt endlich für alle reellen zwischen 0 und $2K$ liegenden w; sie ist deshalb in eine Reihe von Sinus verwandelbar, nämlich

$$F(u) = B_1 \sin\frac{\pi u}{2K} + B_2 \sin\frac{2\pi u}{2K} + B_3 \sin\frac{3\pi u}{2K} + \cdots.$$

Aus der Eigenschaft $F(2K-u) = -F(u)$ folgt zunächst $B_1 = B_3 = B_5 \ldots = 0$; es sind daher bei der Bestimmung von

$$B_n = \frac{2}{2K}\int_0^{2K} F(u) \sin\frac{n\pi u}{2K}\, du$$

nur gerade n zu berücksichtigen. Die Function $F(w)$ wird ferner unendlich an den Stellen $w = i.2K'$ und $w = 2K + i.2K'$; endlich ist unter Beibehaltung der vorigen Bezeichnungen

$$F(w + 2K) = F(w), \qquad \varepsilon_1 = +1,$$
$$F(w + i.2K') = -F(w) + f(w), \qquad \varepsilon_2 = -1,$$

$$f(w) = -\frac{\pi}{2K}\left\{cot\frac{\pi w}{2K} + cot\left(\frac{\pi w}{2K} + i\alpha\right)\right\}.$$

Zufolge dieser Bemerkungen reducirt sich die Gleichung 77) auf

$$82)\quad (1+q^n)\int_0^{2K} F(u)\, e^{i\mu u}\, du - q^n \int_0^{2K} f(u)\, e^{i\mu u}\, du + S = 0.$$

Hierin ist, wie sich mittelst der Substitution $u = \frac{2K}{\pi}x$ findet

$$\int_0^{2K} f(u)\, e^{i\mu u}\, du = -\int_0^{\pi}\left\{cot\, x + cot(x+i\alpha)\right\} e^{inx}\, dx$$

$$= -\int_0^{\pi} e^{inx}\, cot\, x\, dx - i\int_0^{\pi}\frac{1+q^2e^{2ix}}{1-q^2e^{2ix}}\, e^{inx}\, dx,$$

oder weil bei geraden n das letzte Integral verschwindet,

$$\int_0^{2K} f(u)\, e^{i\mu u}\, du = -\int_0^{\pi} e^{inx}\, cot\, x\, dx.$$

Ferner ist S der Grenzwerth von

$$i\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{-\pi} F(2K + 2iK' + \varrho)\, e^{i\mu(2K+2iK'+\varrho)}\, \varrho\, d\theta$$

$$+\, i\int_0^{-\frac{1}{2}\pi} F(2iK' + \varrho)\, e^{i\mu(2iK'+\varrho)}\, \varrho\, d\theta$$

$$= iq^n\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{-\pi} \varrho[-F(\varrho) + f(\varrho)]\, e^{i\mu\varrho}\, d\theta + iq^n\int_0^{-\frac{1}{2}\pi} \varrho[-F(\varrho) + f(\varrho)]\, e^{i\mu\varrho}\, d\theta;$$

wegen $F(0) = 0$ und $Lim[\varrho f(\varrho)] = -1$ giebt dies

$$S = i\pi q^n.$$

Durch Aussonderung des imaginären Theiles erhält man jetzt aus Nro. 82)

$$\int_0^{2K} F(u)\, sin\frac{n\pi u}{2K}\, du = -\frac{q^n}{1+q^n}\left\{\pi + \int_0^{\pi}\frac{sin\, nx\, cos\, x}{sin\, x}\, dx\right\}.$$

Zur Kenntniss des letzten Integrales führt die Gleichung

$$\frac{sin\, nx\, cos\, x}{sin\, x}$$

$$= 1 + 2\,[cos\, 2x + cos\, 4x + \cdots + cos\,(n-2)x] + cos\, nx,$$

und schliesslich wird

$$B_n = -\frac{2\pi}{K} \cdot \frac{q^n}{1+q^n}.$$

Die gesuchte Entwickelung ist demnach

$$83)\qquad \frac{\pi}{2K} \cot\frac{\pi u}{2K} - \cot am\, u$$

$$= \frac{2\pi}{K}\left\{\frac{q^2}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^4}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{q^6}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} + \cdots\right\}.$$

Lässt man $K - u$ an die Stelle von u treten, so erhält man noch

$$84)\qquad \frac{\pi}{2K}\tan\frac{\pi u}{2K} - k'\, tng\, am\, u$$

$$= \frac{2\pi}{K}\left\{\frac{q^2}{1+q^2}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{q^4}{1+q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{q^6}{1+q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} - \cdots\right\}.$$

c. Zu einer ähnlichen, durch ihre Folgen aber viel wichtigeren Entwickelung führt die Annahme

$$F(w) = \cot am\, w\, \varDelta\, am\, w - \frac{\pi}{2K}\cot\frac{\pi w}{2K}.$$

Die vorliegende ungerade Function verschwindet sowohl für $w = 0$ als für $w = 2K$, und kann daher in eine Reihe von Sinus verwandelt werden. Aus letzterer fallen wegen $F(2K - u) = -F(u)$ die Coefficienten B_1, B_3, B_5, etc. weg, und es kann daher bei der Bestimmung von B_n der Index n als gerade Zahl vorausgesetzt werden. Die Function $F(w)$ wird viermal unendlich an den Stellen

$$iK',\quad 2iK',\quad 2K + iK',\quad 2K + 2iK'$$

und besitzt noch die Eigenschaften

$$F(w + 2K) = F(w), \qquad \varepsilon_1 = 1,$$

$$F(w + 2iK') = F(w) + f(w), \qquad \varepsilon_2 = 1,$$

$$f(w) = \frac{\pi}{2K}\left\{\cot\frac{\pi w}{2K} - \cot\left(\frac{\pi w}{2K} + i\alpha\right)\right\}.$$

Zufolge dieser Bemerkungen reducirt sich die Gleichung 77) auf

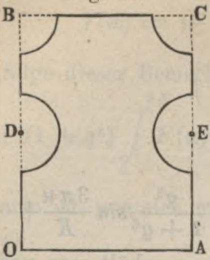
$$85)\qquad (1 - q^n)\int_0^{2K} F(u)\, e^{i\mu u}\, du - q^n \int_0^{2K} f(u)\, e^{i\mu u}\, du + S = 0.$$

Mittelst derselben Substitutionen wie bisher findet man

$$\int_0^{2K} f(u)\, e^{i\mu u}\, du = \int_0^{\pi}\{\cot x - \cot(x + i\alpha)\}\, e^{inx}\, dx$$

d. i. wegen des geraden n

Fig. 65.



$$\int_0^{2K} f(u)\, e^{i\mu u}\, du = \int_0^{\pi} e^{inx} \cot x\, dx.$$

Um S zu bestimmen, umgeht man die Ausnahmepunkte E, C, B, D in Halbkreisen und Viertelkreisen wie dies Fig. 65 zeigt; S ist dann der Grenzwerth folgender Summe:

$$i \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{3}{2}\pi} \varrho F(2K + iK' + \varrho)\, e^{i\mu(2K + iK' + \varrho)}\, d\theta$$

$$+\, i \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{-\pi} \varrho F(2K + 2iK' + \varrho)\, e^{i\mu(2K + 2iK' + \varrho)}\, d\theta$$

$$+\, i \int_{0}^{-\frac{1}{2}\pi} \varrho F(2iK' + \varrho)\, e^{i\mu(2iK' + \varrho)}\, d\theta + i \int_{+\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{1}{2}\pi} \varrho F(iK' + \varrho)\, e^{i\mu(iK' + \varrho)}\, d\theta,$$

d. i. vermöge der Bedeutungen von μ, n und q

$$S = i\pi q^{\frac{1}{2}n} - i\frac{\pi}{2} q^n - i\frac{\pi}{2} q^n + i\pi q^{\frac{1}{2}n}$$

oder

$$S = i\pi\left(2q^{\frac{1}{2}n} - q^n\right).$$

Der imaginäre Bestandtheil der Gleichung 85) giebt

$$(1 - q^n)\int_0^{2K} F(u) \sin\frac{n\pi u}{2K}\, du - q^n \int_0^{\pi} \frac{\sin nx \cos x}{\sin x}\, dx + \cdot\, (2q^{\frac{1}{2}n} - q^n) = 0,$$

und da der Werth des auf x bezüglichen Integrales $= \pi$ ist, so bleibt

$$\int_0^{2K} F(u) \sin\frac{n\pi u}{2K}\, du = -\, 2\pi \frac{q^{\frac{1}{2}n}}{1 + q^{\frac{1}{2}n}}.$$

Hieraus entspringt folgende Reihenentwickelung:

$$86) \qquad \cot am\, u\, \varDelta am\, u - \frac{\pi}{2K} \cot\frac{\pi u}{2K}$$

$$= -\frac{2\pi}{K}\left\{\frac{q}{1+q} \sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1+q^2} \sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{q^3}{1+q^3} \sin\frac{3\pi u}{K} + \cdots\right\}.$$

Lässt man $K-u$ an die Stelle von u treten, so erhält man noch

87)
$$\frac{k'^2 \, tng\, am\, u}{\varDelta\, am\, u} - \frac{\pi}{2K} tng \frac{\pi u}{2K}$$
$$= -\frac{2\pi}{K}\left\{\frac{q}{1+q} sin \frac{\pi u}{K} - \frac{q^2}{1+q^2} sin \frac{2\pi u}{K} + \frac{q^3}{1+q^3} sin \frac{3\pi u}{K} - \cdots\right\}.$$

d. Eine ganz ähnliche Behandlung gestattet die ungerade Function

$$F(w) = tng\, am\, w\, \varDelta\, am\, w - \frac{\pi}{2K} tng \frac{\pi w}{2K},$$

welche für $w = 0$ sowie für $w = 2K$ verschwindet und an den drei Stellen

$$2K + iK', \quad K + 2iK', \quad iK'$$

unendlich wird. Die Ausführung der betreffenden Rechnung überlassen wir dem Leser, weil sich die resultirende Entwickelung rascher dadurch findet, dass man in Nro. 87) die Grössen

$$k, \quad k', \quad u, \quad K, \quad q, \quad \frac{tng\, am\, u}{\varDelta\, am\, u}$$

$$\text{durch } \frac{ik}{k'}, \quad \frac{1}{k'}, \quad k'u, \quad k'K, \quad -q, \quad k' tng\, am\, u\, \varDelta\, am\, u$$

ersetzt; dies giebt

88)
$$tng\, am\, u\, \varDelta\, am\, u - \frac{\pi}{2K} tng \frac{\pi u}{2K}$$
$$= \frac{2\pi}{K}\left\{\frac{q}{1-q} sin \frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1+q^2} sin \frac{2\pi u}{K} + \frac{q^3}{1-q^3} sin \frac{3\pi u}{K} + \cdots\right\},$$

worin die Glieder der eingeklammerten Reihe unter der Form

$$\frac{q^m}{1+(-1)^m q^m} sin \frac{m\pi u}{K}$$

enthalten sind.

In dem speciellen Falle $u = \frac{1}{2}K$ wird die Gleichung 88) zur folgenden schon auf S. 427 erwähnten Summenformel:

$$\frac{2K}{\pi} - 1 = 4\left\{\frac{q}{1-q} - \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} - \cdots\right\},$$

die in so fern von Interesse ist als sie zeigt, wie zu einem gegebenen q das entsprechende K berechnet werden kann.

Um gleich eine analoge Relation zu erhalten, differenziren wir die Gleichung 88) nach u und nehmen in der entstehenden Formel

$$1 - k^2 \sin^2 am\, u + k'^2 tng^2 am\, u - \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \sec^2 \frac{\pi u}{2K}$$

$$= \frac{2\pi^2}{K^2}\left\{\frac{1q}{1-q}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^2}{1+q^2}\cos\frac{2\pi u}{K} + \frac{3q^3}{1-q^3}\cos\frac{3\pi u}{K} + \cdots\right\}$$

$u = 0$; es wird dann

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - 1$$

$$= 8\left\{\frac{q}{1-q} + \frac{2q^2}{1+q^2} + \frac{3q^3}{1-q^3} + \frac{4q^4}{1+q^4} + \cdots\right\}.$$

Lässt man in Nro. 88) $K - u$ an die Stelle von u treten, so erhält man

89)
$$\frac{\cot am\, u}{\Delta\, am u} - \frac{\pi}{2K}\cot\frac{\pi u}{2K}$$

$$= \frac{2\pi}{K}\left\{\frac{q}{1-q}\sin\frac{\pi u}{K} - \frac{q^2}{1+q^2}\sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{q^3}{1-q^3}\sin\frac{3\pi u}{K} - \cdots\right\}.$$

Endlich ist noch die Differenz der Gleichungen 89) und 86) bemerkenswerth, nämlich

90)
$$\frac{k^2 \sin am\, u \cos am\, u}{\Delta\, am u}$$

$$= \frac{4\pi}{K}\left\{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} + \frac{q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{K} + \cdots\right\},$$

wie auf anderem Wege im vorigen Abschnitte S. 425 gefunden wurde.

e. Die Gleichungen 86), 88), 90) erlangen eine besondere Wichtigkeit durch den Umstand, dass aus ihnen Reihen für die Logarithmen von $\sin am u$, $\cos am u$ und $\Delta\, am u$ hergeleitet werden können, denn es ist, wie man durch Differentiation sogleich prüft,

$$\int \cot am\, u\, \Delta\, am\, u\, du = l \sin am u,$$

$$-\int tng\, am u\, \Delta\, am u\, du = l \cos am u,$$

$$-\int \frac{k^2 \sin am u \cos am u}{\Delta\, am u}\, du = l\, \Delta\, am u.$$

Multiplicirt man demgemäss die Gleichung 86) mit du und integrirt zwischen den Grenzen $u = 0$ und $u = u$, so erhält man

$$l\left(\frac{\sin am u}{\sin\frac{\pi u}{2K}}\right) = 2\left\{\frac{1}{1}\cdot\frac{q}{1+q}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{1+q^2}\cos\frac{2\pi u}{K} + \cdots\right\}$$

$$- 2\left\{\frac{1}{1}\cdot\frac{q}{1+q} + \frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{1+q^2} + \cdots\cdots\right\}$$

oder, wenn der von u unabhängige Theil der rechten Seite mit C bezeichnet wird,

$$l\sin am u - l\sin\frac{\pi u}{2K}$$
$$= C + 2\left\{\frac{1}{1}\cdot\frac{q}{1+q}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{1+q^2}\cos\frac{2\pi u}{K} + \cdots\right\}.$$

Um die Constante C zu bestimmen multipliciren wir diese Gleichung mit du und integriren zwischen $u = 0$ und $u = K$; dies giebt

$$\int_0^K l\sin am u\, du - \int_0^K l\sin\frac{\pi u}{2K}\, du = CK.$$

Im ersten Integrale setzen wir $am u = \varphi$, im zweiten $\frac{\pi u}{2K} = \psi$ und erhalten

$$C = \frac{1}{K}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{l\sin\varphi}{\Delta(\varphi)}d\varphi - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} l\sin\psi\, d\psi$$

d. i. nach Formel **41)** auf S. 322 und nach Formel 39) auf S. 320 (für $\varepsilon = 0$)

$$C = -\tfrac{1}{2}lk - \frac{\pi}{4}\cdot\frac{K'}{K} + l2 = l\left(\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\right).$$

Dies giebt folgende Reihenentwickelung

$$91)\qquad l\sin am u - l\sin\frac{\pi u}{2K}$$
$$= l\left(\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\right) + 2\left\{\frac{1}{1}\cdot\frac{q}{1+q}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{1+q^2}\cos\frac{2\pi u}{K} + \cdots\right\}.$$

Auf ganz ähnlichem Wege lassen sich Reihen für $l\cos am u$ und $l\Delta am u$ finden, man gelangt aber kürzer zu denselben, wenn man in der vorigen Gleichung die Grössen

$$k,\quad u,\quad K,\quad q,\quad \sin am u$$
$$\text{durch } \frac{ik}{k'},\quad k'u,\quad k'K,\quad -q,\quad \frac{k'\sin am u}{\Delta am u}$$

ersetzt; man erhält zunächst

$$92)\qquad l\left(\frac{\sin am u}{\Delta am u}\right) - l\sin\frac{\pi u}{2K}$$
$$= l\left(\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{kk'}}\right) - 2\left\{\frac{1}{1}\cdot\frac{q}{1-q}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{1+q^2}\cos\frac{2\pi u}{K} + \cdots\right\}.$$

Lässt man hier $K - u$ an die Stelle von u treten, so folgt

93)
$$l\,cos\,am\,u - l\,cos\,\frac{\pi u}{2K}$$
$$= l\left(\frac{2\sqrt{k'}\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\right) + 2\left\{\frac{1}{1}\cdot\frac{q}{1-q}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{1+q^2}\cos\frac{2\pi u}{K} + \cdots\right\}.$$

Endlich ergiebt sich als Differenz der Gleichungen 91) und 92)

94)
$$l\,\varDelta\,am\,u$$
$$= \tfrac{1}{2}lk' + 4\left\{\frac{1}{1}\cdot\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{3}\cdot\frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{K} + \cdots\right\}.$$

f. Alle diese Reihen lassen sich ebenso wie die Reihen des vorigen Abschnittes nach Potenzen von q ordnen und dadurch auf eine andere Form bringen. So ist z. B. nach Nr. 91), wenn $\frac{\pi u}{2K} = x$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} l\,sin\,am\,\frac{2Kx}{\pi} = l\left(\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\sin x\right) & \\ + 2\left\{q - q^2 + q^3 - q^4 + \cdots\right\}&\frac{\cos 2x}{1} \\ + 2\left\{q^2 - q^4 + q^6 - q^8 + \cdots\right\}&\frac{\cos 4x}{2} \\ + 2\left\{q^3 - q^6 + q^9 - q^{12} + \cdots\right\}&\frac{\cos 6x}{3} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&, \end{aligned}$$

und hier lassen sich alle Verticalreihen mittelst der Formel

$$\tfrac{1}{1}r\cos 2x + \tfrac{1}{2}r^2\cos 4x + \tfrac{1}{3}r^3\cos 6x + \cdots$$
$$= -\tfrac{1}{2}l(1 - 2r\cos 2x + r^2)$$

summiren, wodurch entsteht

$$\begin{aligned} l\,sin\,am\,\frac{2Kx}{\pi} &= l\left(\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\sin x\right) \\ &- l(1 - 2q\cos 2x + q^2) + l(1 - 2q^2\cos 2x + q^4) \\ &- l(1 - 2q^3\cos 2x + q^6) + l(1 - 2q^4\cos 2x + q^8) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Daraus folgt der wichtige Satz, dass der Amplitudensinus in ein unendliches Product verwandelt werden kann, nämlich

95) $$\sin am \frac{2Kx}{\pi}$$
$$= \frac{2\sqrt[4]{q}\sin x}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)\ldots\ldots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)\ldots\ldots}.$$

Nach ganz demselben Verfahren erhält man aus Nr. 93)

96) $$\cos am \frac{2Kx}{\pi}$$
$$= \frac{2\sqrt{k'}\sqrt[4]{q}\cos x}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(1+2q^2\cos 2x+q^4)(1+2q^4\cos 2x+q^8)\ldots.}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)\ldots.}$$

und aus Nr. 94)

97) $$\varDelta\, am \frac{2Kx}{\pi}$$
$$= \sqrt{k'} \cdot \frac{(1+2q\cos 2x+q^2)(1+2q^3\cos 2x+q^6)\ldots.}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)\ldots.}.$$

Zufolge der letzten drei Formeln kann man die elliptischen Functionen $\sin am\, u$, $\cos am\, u$ und $\varDelta\, am\, u$ gewissermaassen als gebrochene Functionen ansehen, welche einen gemeinschaftlichen Nenner besitzen.*) Diesen Gedanken werden wir im nächsten Abschnitte weiter verfolgen; vorher mögen aber einige specielle Fälle der letzten Gleichungen Platz finden.

Dividirt man beide Seiten von Nr. 95) durch $\sin x$ und lässt nachher x gegen die Null convergiren, so erhält man

$$\frac{\sqrt{k}}{\pi\sqrt[4]{q}} K = \left[\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots.}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots.}\right]^2;$$

ferner wird aus Nr. 96) für $x=0$

$$\frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{k'}\sqrt[4]{q}} = \left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots.}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots.}\right]^2;$$

der Quotient dieser beiden Gleichungen ist

---

*) Die periodischen Reihen, Partialbrüche und Producte für die elliptischen Functionen sind von Abel (in den ersten vier Bänden des Crelle'schen Journals) und gleichzeitig von Jacobi (ebendas. und in den Fundam. nov. theoriae funct. ellipt.) mittelst ganz anderer Methoden entwickelt worden. Eine directe Herleitung der betreffenden Reihen hat der Verfasser wohl zuerst versucht (Abhandlungen der K. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., Bd. IV., S. 395), jedoch war dieselbe nicht völlig frei von Einwürfen, weil die Theorie der Functionen complexer Variabelen überhaupt damals noch keineswegs die gegenwärtige Ausbildung erlangt hatte.

$$\frac{2\sqrt{k'}}{\pi}K = \left[\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\dots}{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\dots}\right]^2.$$

Hieran knüpft sich noch die Formel

$$\frac{2\,k'}{\pi}K = \left[\frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\dots}\right]^2,$$

die sich als richtig ausweist, wenn man in ihr

$$k \text{ durch } \frac{1-k'}{1+k'}, \qquad k' \text{ durch } \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}, \qquad K \text{ durch } \tfrac{1}{2}(1+k')K$$

und q durch q^2 ersetzt, worauf die letzte Formel mit der vorgehenden identisch wird.

VIII. Die Jacobi'sche Function für reelle Variabele.

Denkt man sich die Multiplicationen ausgeführt, welche sowohl in den Zählern als in dem gemeinschaftlichen Nenner der letzten drei Formeln angedeutet sind, so erhält man vier unendliche Reihen, die nach Potenzen von q fortschreiten; das Bildungsgesetz dieser Reihen zu ermitteln, ist die nächste Aufgabe.

Bezeichnen x und p ganz beliebige Grössen, und ist die Function $f(x)$ definirt durch die Gleichung

$$f(x) = (1+x)(1+px)(1+p^2x)\dots(1+p^{m-1}x)$$

so erhellt unmittelbar, dass $f(x)$ in eine Potenzenreihe verwandelt, dass also gesetzt werden kann

$$f(x) = 1 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_mx^m,$$

worin die Coefficienten $A_1, A_2, \dots A_m$ nur von p abhängen. Zufolge der ursprünglichen Bedeutung von $f(x)$ besteht nun die Relation

$$(1+p^my)f(y) = (1+y)f(py),$$

mithin ist auch nach der zweiten Form von $f(x)$

$$\begin{aligned}(1+p^my)&[1 + A_1y + A_2y^2 + \dots + A_my^m]\\ &= (1+y)[1 + A_1py + A_2p^2y^2 + \dots + A_mp^my^m],\end{aligned}$$

und wenn man hier die angedeuteten Multiplicationen ausführt, so erhält man durch Vergleichung der beiderseitigen Coefficienten von y, y^2, y^3, etc.

$$\begin{aligned}(1-p)A_1 &= 1-p^m,\\ (1-p^2)A_2 &= p(1-p^{m-1})A_1,\\ (1-p^3)A_3 &= p^2(1-p^{m-2})A_2,\\ &\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Diese Gleichungen liefern der Reihe nach A_1, A_2, A_3, etc., und zwar ist für ein ganzes positives k

$$A_k = p^{\frac{1}{2}k(k-1)} \cdot \frac{(1-p^m)(1-p^{m-1})\ldots\ldots(1-p^{m-(k-1)})}{(1-p)(1-p^2)\ldots\ldots(1-p^k)}.$$

In der hiermit völlig bestimmten Entwickelung

$$(1+x)(1+px)(1+p^2x)\ldots\ldots(1+p^{m-1}x)$$
$$= 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots\ldots + A_m x^m$$

substituiren wir

$$p = q^2, \qquad m = 2n, \qquad x = \frac{z}{q^{2n-1}}$$

und zerlegen das links stehende Product in zwei Producte, von denen das eine die ersten n, das andere die letzten n Factoren enthält; dies giebt

$$\left(1+\frac{z}{q^{2n-1}}\right)\left(1+\frac{z}{q^{2n-3}}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{z}{q^3}\right)\left(1+\frac{z}{q}\right)$$
$$\times (1+qz)(1+q^3z)\ldots\ldots(1+q^{2n-3}z)(1+q^{2n-1}z)$$
$$= 1 + A_1\frac{z}{q^{2n-1}} + A_2\frac{z^2}{q^{2(2n-1)}} + \ldots\ldots + A_{2n}\frac{z^{2n}}{q^{2n(2n-1)}}.$$

Sowohl das Product als die Reihe ordnen wir von der Mitte nach den beiden Enden zu und schreiben

$$98)\quad (1+qz)\left(1+\frac{z}{q}\right)(1+q^3z)\left(1+\frac{z}{q^3}\right)\ldots(1+q^{2n-1}z)\left(1+\frac{z}{q^{2n-1}}\right)$$
$$= \frac{A_n}{q^{n(2n-1)}}z^n + \left\{\frac{A_{n-1}}{q^{(n-1)(2n-1)}}z^{n-1} + \frac{A_{n+1}}{q^{(n+1)(2n-1)}}z^{n+1}\right\}$$
$$+ \left\{\frac{A_{n-2}}{q^{(n-2)(2n-1)}}z^{n-2} + \frac{A_{n+2}}{q^{(n+2)(2n-1)}}z^{n+2}\right\}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Setzt man auch in der Formel für A_k die Werthe $p = q^2$, $m = 2n$ ein und nimmt einmal $k = n - h$, das andere Mal $k = n + h$, so erhält man A_{n-h}, A_{n+h} und daraus

$$\frac{A_{n-h}}{q^{(n-h)(2n-1)}}$$
$$= \frac{1}{q^{(n-h)(n+h)}} \cdot \frac{(1-q^{4n})(1-q^{4n-2})\ldots\ldots(1-q^{2n+2h+2})}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots\ldots(1-q^{2n-2h})};$$

$$\frac{A_{n+h}}{q^{(n+h)(2n-1)}}$$
$$= \frac{1}{q^{(n-h)(n+h)}} \cdot \frac{(1-q^{4n})(1-q^{4n-2})\ldots\ldots(1-q^{2n-2h+2})}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots\ldots(1-q^{2n+2h})}.$$

Die erste Formel enthält im Zähler und im Nenner $n - h$ binomische Factoren, die zweite enthält deren $n + h$; durch Division ergiebt sich das Verhältniss

$$\frac{A_{n+h}}{q^{(n+h)(2n-1)}} : \frac{A_{n-h}}{q^{(n-h)(2n-1)}}$$

$$= \frac{(1 - q^{2n+2h})(1 - q^{2n+2h-2}) \dots (1 - q^{2n-2h+4})(1 - q^{2n-2h+2})}{(1 - q^{2n-2h+2})(1 - q^{2n-2h+4}) \dots (1 - q^{2n+2h-2})(1 - q^{2n+2h})},$$

welches der Einheit gleichkommt, weil der Nenner aus den in umgekehrter Reihenfolge genommenen Factoren des Zählers besteht. Es sei nun zur Abkürzung

$$a_h = q^{h^2} \cdot \frac{(1 - q^{4n})(1 - q^{4n-2}) \dots (1 - q^{2n-2h+2})}{(1 - q^2)(1 - q^4) \dots (1 - q^{2n+2h})};$$

es ist dann

$$\frac{A_{n-h}}{q^{(n-h)(2n-1)}} = \frac{A_{n+h}}{q^{(n+h)(2n-1)}} = q^{-n^2} a_h,$$

und aus der Gleichung 98) wird die folgende:

$$(1 + qz)\left(1 + \frac{z}{q}\right)(1 + q^3 z)\left(1 + \frac{z}{q^3}\right) \dots (1 + q^{2n-1} z)\left(1 + \frac{z}{q^{2n-1}}\right)$$

$$= q^{-n^2} z^n \left\{ a_0 + a_1 \left(\frac{1}{z} + z\right) + a_2 \left(\frac{1}{z^2} + z^2\right) + \dots \right.$$

$$\left. \dots + a_n \left(\frac{1}{z^n} + z^n\right) \right\}.$$

Benutzt man linker Hand für den zweiten, vierten, sechsten etc. Factor die identische Gleichung

$$1 + \frac{z}{q^m} = \frac{z}{q^m}\left(1 + \frac{q^m}{z}\right),$$

so hebt sich beiderseits der Factor $q^{-n^2} z^n$, und das Uebrige gestattet folgende Darstellung:

$$(1 + qz)\left(1 + \frac{q}{z}\right)(1 + q^3 z)\left(1 + \frac{q^3}{z}\right) \dots (1 + q^{2n-1} z)\left(1 + \frac{q^{2n-1}}{z}\right)$$

$$= a_0 \left\{ 1 + b_1 \left(z + \frac{1}{z}\right) + b_2 \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \dots \right.$$

$$\left. \dots + b_n \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) \right\},$$

und zwar ist

$$a_0 = \frac{(1 - q^{4n})(1 - q^{4n-2}) \dots (1 - q^{2n+2})}{(1 - q^2)(1 - q^4) \dots (1 - q^{2n})},$$

$$\frac{a_h}{a_0} = q^{h^2} \cdot \frac{(1 - q^{2n})(1 - q^{2n-2}) \dots (1 - q^{2n-2h+2})}{(1 - q^{2n+2})(1 - q^{2n+4}) \dots (1 - q^{2n+2h})}.$$

Diese Formeln vereinfachen sich bedeutend, wenn man die bisher willkürliche Zahl n in's Unendliche wachsen lässt und gleichzeitig voraussetzt, dass q oder, falls q eine complexe Zahl sein sollte, der Modulus von q ein echter Bruch ist; es wird nämlich

$$Lim\, a_0 = \frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots\ldots},$$
$$Lim\, b_h = q^{h^2}.$$

Unter Einführung des abkürzenden Zeichens

$$Q = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots.$$

ergiebt sich nun

$$(1+qz)\left(1+\frac{q}{z}\right)(1+q^3z)\left(1+\frac{q^3}{z}\right)(1+q^5z)\left(1+\frac{q^5}{z}\right)\ldots$$
$$=\frac{1}{Q}\left\{1+q\left(z+\frac{1}{z}\right)+q^4\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+q^9\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+\ldots.\right\},$$

oder, wenn $-z$ für z gesetzt wird,

$$(1-qz)\left(1-\frac{q}{z}\right)(1-q^3z)\left(1-\frac{q^3}{z}\right)(1-q^5z)\left(1-\frac{q^5}{z}\right)\ldots.$$
$$=\frac{1}{Q}\left\{1-q\left(z+\frac{1}{z}\right)+q^4\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)-q^9\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+\ldots.\right\}.$$

Lässt man qz^2 an die Stelle von z treten und multiplicirt beiderseits mit $z\sqrt[4]{q}$, so gelangt man noch zur Gleichung

$$\sqrt[4]{q}\left(z-\frac{1}{z}\right)\cdot(1-q^2z^2)\left(1-\frac{q^2}{z^2}\right)(1-q^4z^2)\left(1-\frac{q^4}{z^2}\right)\ldots..$$
$$=\frac{1}{Q}\left\{\sqrt[4]{q}\left(z-\frac{1}{z}\right)-\sqrt[4]{q^9}\left(z^3-\frac{1}{z^3}\right)+\sqrt[4]{q^{25}}\left(z^5-\frac{1}{z^5}\right)-\ldots.\right\}.$$

Durch Substitution von $z=e^{2ix}$ verwandelt sich die erste dieser beiden Entwickelungen in

$$99)\quad (1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots.$$
$$=\frac{1}{Q}\left\{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\ldots..\right\};$$

die zweite geht für $z=e^{ix}$ über in

$$100)\quad \sqrt[4]{q}\,\sin x\,(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)\ldots..$$
$$=\frac{1}{Q}\left\{\sqrt[4]{q}\,\sin x-\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-\ldots..\right\},$$

und diese beiden Gleichungen sind es, welche zu einer neuen Darstellung der elliptischen Functionen dienen.

Geht man nämlich auf die Formel 95) zurück und entwickelt das im Zähler stehende Product nach Nr. 100) und das Product im Nenner nach Nr. 99), so erhält man zunächst

$$sin\,am\frac{2Kx}{\pi}=\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{2\sqrt[4]{q}\,sin\,x-2\sqrt[4]{q^9}\,sin\,3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\,sin\,5x-\cdots}{1-2q\,cos\,2x+2q^4\,cos\,4x-2q^9\,cos\,6x+\cdots\cdots}.$$

Auf analoge Weise lässt sich die Gleichung 96) transformiren, deren Zähler nach Formel 100) entwickelt werden kann, wenn in letzterer $\frac{1}{2}\pi - x$ für x gesetzt wird, dies giebt

$$cos\,am\frac{2Kx}{\pi}=\sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot\frac{2\sqrt[4]{q}\,cos\,x+2\sqrt[4]{q^9}\,cos\,3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\,cos\,5x+\cdots}{1-2q\,cos\,2x+2q^4\,cos\,4x-2q^9\,cos\,6x+\cdots\cdots}$$

Endlich gelangt man zur Entwickelung des Zählers von Nr. 97), wenn man in Formel 99) $\frac{1}{2}\pi - x$ an die Stelle von x treten lässt, nämlich

$$\varDelta\,am\,\frac{2Kx}{\pi}=\sqrt{k'}\cdot\frac{1+2q\,cos\,2x+2q^4\,cos\,4x+2q^9\,cos\,6x+\cdots}{1-2q\,cos\,2x+2q^4\,cos\,4x-2q^9\,cos\,6x+\cdots}.$$

Wir setzen nun $2Kx = \pi u$ und führen zwei neue transcendente Functionen $\Theta(u)$ und $H(u)$ ein, die wir durch folgende Gleichungen definiren:

101) $$\Theta(u)=1-2q\,cos\frac{\pi u}{K}+2q^4\,cos\frac{2\pi u}{K}-2q^9\,cos\frac{3\pi u}{K}+\cdots\cdots,$$

102) $$H(u)=2\sqrt[4]{q}\,sin\frac{\pi u}{2K}-2\sqrt[4]{q^9}\,sin\frac{3\pi u}{2K}+2\sqrt[4]{q^{25}}\,sin\frac{5\pi u}{2K}-\cdots;$$

die vorigen drei Formeln gestatten dann eine sehr einfache Darstellung, nämlich

103) $$\begin{cases} sin\,am\,u=\dfrac{1}{\sqrt{k}}\cdot\dfrac{H(u)}{\Theta(u)}, \\[2ex] cos\,am\,u=\sqrt{\dfrac{k'}{k}}\cdot\dfrac{H(u+K)}{\Theta(u)}, \\[2ex] \varDelta\,am\,u=\sqrt{k'}\cdot\dfrac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)}. \end{cases}$$

Die elliptischen Functionen erster Art lassen sich demnach in Form von Quotienten durch zwei einfach periodische Functionen ausdrücken, die man elliptische Transcendenten genannt hat. Zufolge der Gleichung

$$(k\,sin\,am\,u)^2+(\varDelta\,am\,u)^2=1$$

besteht übrigens zwischen Θ und H die Relation

$$k\,[H(u)]^2+k'\,[\Theta(u+K)]^2=[\Theta(u)]^2$$

oder

$$H(u) = \sqrt{\frac{[\Theta(u)]^2 - k'[\Theta(u+K)]^2}{k}},$$

welche zeigt, dass H aus Θ hergeleitet werden kann. Im Grunde genommen reduciren sich also die elliptischen Functionen erster Art auf die eine Transcendente Θ, welche man die Jacobi'sche Function zu nennen pflegt.

Nicht ohne Interesse sind die speciellen Werthe $\Theta(0)$ und $\Theta(K)$, die man auf folgendem Wege findet. Aus Nr. 99) folgt für $x = 0$ und unter Beachtung des Werthes von Q

$$(1-q)^2(1-q^3)^2(1-q^5)^2 \ldots = \frac{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots},$$

wobei der Zähler rechter Hand $= \Theta(0)$ ist. Durch beiderseitige Division mit dem Producte aus $1-q$, $1-q^3$, $1-q^5$, etc. ergiebt sich weiter

$$(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots = \frac{\Theta(0)}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots};$$

setzt man noch beiderseits die Factoren $1-q^2$, $1-q^4$, $1-q^6$, etc. zu, so wird

$$\begin{aligned}&(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots\ldots\\ &= \Theta(0)\frac{1-q^2}{1-q}\cdot\frac{1-q^4}{1-q^2}\cdot\frac{1-q^6}{1-q^3}\cdot\frac{1-q^8}{1-q^4}\ldots\ldots\\ &= \Theta(0)(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots\ldots,\end{aligned}$$

mithin ist

$$\Theta(0) = \frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots\ldots}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots\ldots}.$$

Der Werth dieses Productes wurde bereits auf S. 440 gefunden; man hat demnach

104) $$\Theta(0) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}.$$

Aus der letzten Formel in Nr. 103) folgt weiter für $u = 0$ eine Gleichung zwischen $\Theta(K)$ und $\Theta(0)$, welche unter Benutzung von Nr. 104) giebt

105) $$\Theta(K) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}.$$

Die beiden ersten Formeln in Nr. 103) liefern noch für $u = 0$

106) $$H(0) = 0; \qquad H(K) = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}}.$$

Hieran knüpfen sich mehrere wichtige Bemerkungen hinsichtlich der numerischen Berechnung der elliptischen Functionen und Integrale. Aus der letzten Formel in Nr. 103) folgt nämlich für $u=0$

107) $$\sqrt{k'}=\frac{\Theta(0)}{\Theta(K)},$$

d. i. vermöge der Reihe für $\Theta(u)$

$$\sqrt{k'}=\frac{1-2q+2q^4-2q^9+\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+\cdots},$$

und diese Formel liefert unmittelbar k', mithin auch k, falls q gegeben ist. Umgekehrt lässt sich hieraus auch q finden, wenn man k oder k' kennt. Es folgt nämlich

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}=\frac{q+q^9+q^{25}+q^{49}+\cdots}{1+2q^4+2q^{16}+2q^{36}+\cdots}$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}=\lambda$$

gesetzt und der rechts stehende Bruch nach Potenzen von q entwickelt wird,

$$\lambda=q-2q^5+5q^9-10q^{13}+18q^{17}-\cdots$$

Durch mehrfache Potenzirung findet man weiter

$$\begin{aligned}
\lambda^5 &= q^5-10q^9+65q^{13}-330q^{17}+\cdots\\
\lambda^9 &= q^9-18q^{13}+189q^{17}-\cdots\\
\lambda^{13} &= q^{13}-26q^{17}+\cdots\\
\lambda^{17} &= \phantom{q^5-10q^9-18q^{13}-26}q^{17}-\cdots\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot
\end{aligned}$$

Bildet man die Summe

$$\begin{aligned}
&\lambda+a_1\lambda^5+a_2\lambda^9+a_3\lambda^{13}+\cdots\\
&=q+(a_1-2)q^5+(a_2-10a_1+5)q^9+\cdots\cdots
\end{aligned}$$

und bestimmt die Coefficienten a_1, a_2, a_3, etc. so, dass die Coefficienten von q^5, q^9, q^{13}, etc. verschwinden, so erhält man bei umgekehrter Anordnung

$$q=\lambda+2\lambda^5+15\lambda^9+150\lambda^{13}+1707\lambda^{17}+\cdots.$$

Diese Reihe convergirt sehr gut, denn selbst bei dem ziemlich grossen Modulus

$$k=\frac{\sqrt{80}}{9}=0{,}99381,\ k'=\frac{1}{9},\ \lambda=\frac{1}{4}$$

wird der fünfte Term

$$1707\,\lambda^{17} = 0{,}000\,0001$$

so klein, dass mit ihm die Rechnung abbricht, falls man sich auf die übliche Genauigkeit von sieben Decimalen beschränkt. Meistentheils wird aber die Sache viel einfacher, z. B. für

$$k = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}8660254, \quad k' = \frac{1}{2}$$

erhält man

$$\lambda = \frac{3}{2} - \sqrt{2} = 0{,}08578644$$

$$2\,\lambda^5 = 0{,}00000929$$

$$q = 0{,}08579573,$$

und ebenso reichen für $k < 0{,}866$ immer zwei Glieder aus. Uebrigens hat man bereits Tafeln, welche für jedes k das zugehörige q liefern; eine kleinere Tafel dieser Art ist die folgende, worin $k = \sin\alpha$ gesetzt ist und der Hülfswinkel α von Grad zu Grad fortschreitet*).

*) Eine von 6 und 6 Minuten fortschreitende Tafel giebt Jacobi in dem Aufsatze „Zur Theorie der elliptischen Functionen", Crelle's Journ. Bd. XXVI, S. 93, der überhaupt viele praktische Bemerkungen über die numerische Berechnung elliptischer Functionen enthält.

α	k	$\log q$	α	k	$\log q$	α	k	$\log q$
1^0	0,01745	5,27966	31^0	0,51504	8,28456	61^0	0,87462	8,95200
2^0	0,03490	5,88178	32^0	0,52992	8,31367	62^0	0,88295	8,97045
3^0	0,05234	6,23408	33^0	0,54464	8,34199	63^0	0,89101	8,98885
4^0	0,06976	6,48411	34^0	0,55919	8;36957	64^0	0,89879	9,00720
5^0	0,08716	6,67813	35^0	0,57358	8,39646	65^0	0,90631	9,02553
6^0	0,10453	6,83673	36^0	0,58779	8,42271	66^0	0,91355	9,04385
7^0	0,12187	6,97091	37^0	0,60182	8,44835	67^0	0,92050	9,06218
8^0	0,13917	7,08723	38^0	0,61566	8,47342	68^0	0,92718	9,08055
9^0	0,15643	7,18991	39^0	0,62932	8,49796	69^0	0,93358	9.09897
10^0	0,17365	7,28185	40^0	0,64279	8,52199	70^0	0,93969	9,11748
11^0	0,19081	7,36510	41^0	0,65606	8,54555	71^0	0,94552	9,13609
12^0	0,20791	7,44119	42^0	0,66913	8,56867	72^0	0,95106	9,15484
13^0	0,22495	7,51128	43^0	0,68200	8,59137	73^0	0,95630	9,17376
14^0	0,24192	7,57625	44^0	0,69466	8,61368	74^0	0,96126	9,19289
15^0	0,25882	7,63683	45^0	0,70711	8,63563	75^0	0,96593	9,21228
16^0	0.27564	7,69359	46^0	0,71934	8,65722	76^0	0,97030	9,23196
17^0	0,29237	7,74699	47^0	0,73135	8,67848	77^0	0,97437	9,25202
18^0	0,30902	7,79743	48^0	0,74314	8,69944	78^0	0,97815	9,27250
19^0	0,32557	7,84524	49^0	0,75471	8,72011	79^0	0,98163	9.29351
20^0	0,34202	7,89068	50^0	0,76604	8,74052	80^0	0,98481	9,31515
21^0	0,35837	7,93400	51^0	0,77715	8,76068	81^0	0,98769	9,33756
22^0	0,37461	7,97540	52^0	0,78801	8,78059	82^0	0,99027	9,36091
23^0	0,39073	8,01505	53^0	0,79864	8,80030	83^0	0,99255	9,38545
24^0	0,40674	8,05311	54^0	0,80902	8,81979	84^0	0,99452	9,41152
25^0	0,42262	8,08971	55^0	0,81915	8,83912	85^0	0,99619	9,43962
26^0	0,43837	8,12498	56^0	0,82904	8,85826	86^0	0,99756	9,47054
27^0	0,45399	8,15901	57^0	0,83867	8,87726	87^0	0,99863	9,50569
28^0	0,46947	8.19190	58^0	0,84805	8,89611	88^0	0,99939	9.54798
29^0	0,48481	8,22374	59^0	0,85717	8,91484	89^0	0,99985	9,60564
30^0	0,50000	8,25461	60^0	0,86603	8,93347	90^0	1,00000	10,00000

Aus dieser Tafel ist ersichtlich, dass q von $k = 0$ bis $k = 0{,}999$, welchem Werthe $q = 0{,}353$ entspricht, sehr langsam wächst und erst nachher der Grenze 1 rasch zueilt. Ist $\alpha < 70^0$, d. h. $k < 0{,}94$, so folgt $q < 0{,}1311$ und dann hat q^9 keinen Einfluss auf die siebente Decimale; alle Formeln, in denen die Jacobi'sche Function vorkommt, werden dann äusserst einfach.

Hat man q berechnet, so findet sich K mittelst der Formel 105), indem man für $\Theta(K)$ die betreffende Reihe setzt, nämlich

$$K = \tfrac{1}{2}\pi\,(1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots)^2.$$

So ist z. B. für $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $q = 0{,}08579573$

$$\begin{array}{r|l} 1 + 2q = 1{,}17159146 & K = \tfrac{1}{2}\pi(1{,}17169983)^2 \\ 2q^4 = 0{,}00010837 & \quad = 2{,}156515. \end{array}$$

Um ferner die einem gegebenen u entsprechende Amplitude φ zu berechnen, macht man Gebrauch von der dritten Formel in Nr. 103), nämlich

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = \sqrt{k'}\,\frac{1 + 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} + \cdots}{1 - 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} - \cdots},$$

aus welcher man leicht $\sin\varphi$ und φ findet. Ist z. B. gegeben

$$F(\tfrac{1}{2}\sqrt{3},\ \varphi) = 5{,}208881,$$

so gelten zunächst die vorhin bestimmten Werthe

$$q = 0{,}0857957, \qquad K = 2{,}156515,$$

ferner ist

$$\frac{\pi u}{K} = 7{,}588251 = 2\pi + arc\, 74^0\, 46'\, 29''\, 25,$$

und nun giebt die erwähnte Formel

$$\sqrt{1 - \tfrac{3}{4}\sin^2\varphi} = 0{,}7738482, \quad \sin\varphi = \pm\, 0{,}7313537.$$

Da der gegebene Werth $u = 5{,}2\ldots$ zwischen $2K = 4{,}3\ldots$ und $3K = 7{,}4\ldots$ liegt, so muss die zugehörige Amplitude zwischen 2.90^0 und 3.90^0 enthalten sein, mithin

$$\varphi = 180^0 + 47^0 = 227^0.$$

Auch die umgekehrte Aufgabe, bei gegebener Amplitude φ den Werth des elliptischen Integrales $u = F(k, \varphi)$ zu berechnen, findet durch die zuletzt erwähnte Formel eine neue Lösung. Wird nämlich zur Abkürzung

$$\frac{\pi u}{K} = v$$

gesetzt, so ist

$$\frac{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{k'}} = \frac{1 + 2q\cos v + 2q^4\cos 2v + \cdots}{1 - 2q\cos v + 2q^4\cos 2v - \cdots},$$

und hieraus folgt sehr leicht

$$\frac{1}{2q} \cdot \frac{\sqrt{1-k^2 sin^2 \varphi} - \sqrt{k'}}{\sqrt{1-k^2 sin^2 \varphi} + \sqrt{k'}} = \frac{cos\, v + q^8 cos\, 3\, v + q^{24} cos\, 5\, v + \cdots}{1 + 2\, q^4 cos\, 2\, v + 2\, q^{16} cos\, 4\, v + \cdots},$$

worin zur Abkürzung die bekannte Grösse

$$\frac{1}{2q} \cdot \frac{\sqrt{1-k^2 sin^2 \varphi} - \sqrt{k'}}{\sqrt{1-k^2 sin^2 \varphi} + \sqrt{k'}} = \Omega$$

sein möge. Die vorhergehende Gleichung liefert nun

$$cos\, v = \Omega\, (1 + 2 q^4 cos\, 2 v + 2 q^{16} cos\, 4\, v + \cdots\cdot)$$
$$- q^8 cos\, 3\, v - q^{24} cos\, 5\, v - \cdots\cdots\cdot,$$

und es ist dies eine transcendente Gleichung, aus welcher v berechnet werden muss. Zufolge des Umstandes, dass q^4, q^8, etc. sehr kleine Brüche sind, findet man leicht einen ersten Näherungswerth v_1 von v, indem man einfach

$$cos\, v_1 = \Omega$$

nimmt; die weitere Annäherung geschieht dann mittelst der vorigen Gleichung selbst, nämlich

$$cos\, v_2 = \Omega\, (1 + 2 q^4 cos\, 2\, v_1 + \cdots) - q^8 cos\, 3\, v_1 - \cdots\cdot,$$
$$cos\, v_3 = \Omega\, (1 + 2 q^4 cos\, 2\, v_2 + \cdots) - q^8 cos\, 3\, v_2 - \cdots\cdot,$$

u. s. w.

Aus v ergiebt sich dann

$$u = \frac{Kv}{\pi}.$$

Beispielweis sei $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\varphi = 47^0$, also wie vorhin

$$k' = \tfrac{1}{2},\ q = 0{,}0857957,\quad K = 2{,}156515;$$

der Werth von Ω ist in diesem Falle 0,2626382, mithin

$$cos\, v_1 = 0{,}2626382, \qquad v_1 = 74^0 46' 24'',$$
$$cos\, v_2 = 0{,}2626137, \qquad v_2 = 74^0 46' 29'' 25$$

und da bereits v_3 mit v_2 übereinstimmt, so wird

$$v = 74^0 46' 29'' 25 = 1{,}3050663$$

$$u = \frac{Kv}{\pi} = 0{,}89585.$$

Vermehrt man die Amplitude um 180^0, so wächst der Integralwerth um $2K = 4{,}31303$; der Amplitude 227^0 entspricht also der Integralwerth 5,20888 wie im vorhergehenden Beispiele.

IX. Die Thetafunctionen.

Die Formeln des vorigen Abschnittes gelten zufolge ihrer Herleitung nur für reelle Werthe der Variabelen u, und es muss daher durch eine besondere Untersuchung entschieden werden, in wie weit jene Resultate auch bei complexen Werthen der Variabelen richtig bleiben. Betrachtet man zunächst die Entwickelungen von $\sin am\, u$, $\cos am\, u$ etc. in Reihen von den Formen

$$a_1 \sin\frac{\pi u}{2K} + a_3 \sin\frac{3\pi u}{2K} + a_5 \sin\frac{5\pi u}{2K} + \cdots,$$

$$b_1 \cos\frac{\pi u}{2K} + b_3 \cos\frac{3\pi u}{2K} + b_5 \cos\frac{5\pi u}{2K} + \cdots,$$

so bemerkt man leicht, dass diese Reihen bei complexen u meistentheils divergent werden, dass also für solche u jene Entwickelungen nicht mehr allgemein gelten. Anders verhält es sich mit den Entwickelungen von $\Theta(u)$ und $H(u)$, denn wie man aus §. 40, Thl. I. ersieht, convergiren die Reihen in 101) und 102) für jedes complexe u, wofern nur q ein reeller echter Bruch ist. Die vorzunehmende Untersuchung wird sich daher zunächst auf die Functionen Θ und H erstrecken, für welche die Gleichungen 101) und 102) als allgemeine Definitionen gelten können. Ferner wollen wir diese Analyse vollkommen unabhängig von der bisherigen Theorie der elliptischen Functionen durchführen. Wir verstehen daher im Folgenden unter ϱ eine beliebige reelle positive Constante, unter z eine complexe Variabele und setzen

$$108)\quad \begin{cases} \vartheta(z) = 1 - 2e^{-\varrho}\cos 2z + 2e^{-4\varrho}\cos 4z - 2e^{-9\varrho}\cos 6z + \cdots \\ \vartheta_1(z) = 2\sqrt[4]{e^{-\varrho}}\sin z - 2\sqrt[4]{e^{-9\varrho}}\sin 3z + 2\sqrt[4]{e^{-25\varrho}}\sin 5z - \cdots \\ \vartheta_2(z) = 2\sqrt[4]{e^{-\varrho}}\cos z + 2\sqrt[4]{e^{-9\varrho}}\cos 3z + 2\sqrt[4]{e^{-25\varrho}}\cos 5z + \cdots \\ \vartheta_3(z) = 1 + 2e^{-\varrho}\cos 2z + 2e^{-4\varrho}\cos 4z + 2e^{-9\varrho}\cos 6z + \cdots \end{cases}$$

a. Zwischen den hiermit definirten vier Functionen bestehen, wie man augenblicklich bemerkt, die folgenden vier Relationen

$$109)\quad \begin{cases} \vartheta(z) = \vartheta_3(\tfrac{1}{2}\pi - z), \quad \vartheta_3(z) = \vartheta(\tfrac{1}{2}\pi - z), \\ \vartheta_1(z) = \vartheta_2(\tfrac{1}{2}\pi - z), \quad \vartheta_2(z) = \vartheta_1(\tfrac{1}{2}\pi - z). \end{cases}$$

Ferner ist, wenn m eine ganze Zahl bezeichnet,

$$110)\quad \begin{cases} \vartheta(z + m\pi) = \vartheta(z), \quad \vartheta_3(z + m\pi) = \vartheta_3(z), \\ \vartheta_1(z + m\pi) = (-1)^m \vartheta_1(z), \; \vartheta_2(z + m\pi) = (-1)^m \vartheta_2(z). \end{cases}$$

Die Functionen ϑ und ϑ_3 haben also die reelle Periode π, die beiden übrigen besitzen die Periode 2π.

Drückt man in Nro. 108) die Cosinus und Sinus durch Exponentialgrössen aus und benutzt zur Abkürzung Summenzeichen, so kann man jene vier Gleichungen folgendermaassen darstellen:

$$111)\quad \begin{cases} \vartheta(z) = \Sigma(-1)^s e^{-s^2\varrho - i.2sz}, \\ \vartheta_1(z) = i\Sigma(-1)^s e^{-(s+\frac{1}{2})^2\varrho - i(2s+1)z}, \\ \vartheta_2(z) = \Sigma e^{-(s+\frac{1}{2})^2\varrho - i(2s+1)z}, \\ \vartheta_3(z) = \Sigma e^{-s^2\varrho - i.2sz}, \end{cases}$$

und zwar beziehen sich hier die Summenzeichen auf alle ganzen positiven und negativen Werthe von s. Es ist nun identisch

$$i\Sigma(-1)^s e^{-(s+\frac{1}{2})^2\varrho} e^{-i(2s+1)z} = ie^{-\frac{1}{4}\varrho - iz}\Sigma(-1)^s e^{-s^2\varrho - i.2s(z-\frac{1}{2}i\varrho)},$$

d. i.

$$\vartheta_1(z) = ie^{-\frac{1}{4}\varrho - iz}\vartheta(z - \tfrac{1}{2}i\varrho);$$

behandelt man auf gleiche Weise die übrigen Thetafunctionen, so gelangt man zu den vier Formeln

$$112)\quad \begin{cases} \vartheta(z) = ie^{-\frac{1}{4}\varrho - iz}\vartheta_1(z - \frac{1}{2}i\varrho), \\ \vartheta_1(z) = ie^{-\frac{1}{4}\varrho - iz}\vartheta(z - \frac{1}{2}i\varrho), \\ \vartheta_2(z) = e^{-\frac{1}{4}\varrho - iz}\vartheta_3(z - \frac{1}{2}i\varrho), \\ \vartheta_3(z) = e^{-\frac{1}{4}\varrho - iz}\vartheta_2(z - \frac{1}{2}i\varrho), \end{cases}$$

aus denen, wenn $z + \frac{1}{2}i\varrho$ für z gesetzt wird, die folgenden hervorgehen:

$$113)\quad \begin{cases} \vartheta(z + \frac{1}{2}i\varrho) = ie^{\frac{1}{4}\varrho - iz}\vartheta_1(z), \\ \vartheta_1(z + \frac{1}{2}i\varrho) = ie^{\frac{1}{4}\varrho - iz}\vartheta(z), \\ \vartheta_2(z + \frac{1}{2}i\varrho) = e^{\frac{1}{4}\varrho - iz}\vartheta_3(z), \\ \vartheta_3(z + \frac{1}{2}i\varrho) = e^{\frac{1}{4}\varrho - iz}\vartheta_2(z). \end{cases}$$

Lässt man mehrmals nach einander $z + \frac{1}{2}i\varrho$ an die Stelle von z treten, so erhält man leicht für ein ganzes positives n

$$\begin{aligned} \vartheta(z + in\varrho) &= (-1)^n e^{n^2\varrho - i.2nz}\vartheta(z), \\ \vartheta_1(z + in\varrho) &= (-1)^n e^{n^2\varrho - i.2nz}\vartheta_1(z), \\ \vartheta_2(z + in\varrho) &= e^{n^2\varrho - i.2nz}\vartheta_2(z), \\ \vartheta_3(z + in\varrho) &= e^{n^2\varrho - i.2nz}\vartheta_3(z), \end{aligned}$$

und ferner nach Nro. 110), wenn $z + m\pi$ für z gesetzt wird,

$$114)\quad \begin{cases} \vartheta(z + m\pi + in\varrho) = (-1)^n e^{n^2\varrho - i.2nz}\vartheta(z), \\ \vartheta_1(z + m\pi + in\varrho) = (-1)^{m+n} e^{n^2\varrho - i.2nz}\vartheta_1(z), \\ \vartheta_2(z + m\pi + in\varrho) = (-1)^m e^{n^2\varrho - i.2nz}\vartheta_2(z), \\ \vartheta_3(z + m\pi + in\varrho) = e^{n^2\varrho - i.2nz}\vartheta_3(z). \end{cases}$$

Hieraus geht hervor, dass die Thetafunctionen für sich nur einfach periodisch sind, dass aber der Quotient zweier Thetafunctionen zwei Perioden besitzt, von denen die eine den reellen Index π oder 2π, die andere den imaginären Index $i\varrho$ oder $2i\varrho$ hat. Diese Bemerkung werden wir nachher weiter verfolgen.

b. Um die vier Reihen, welche zur Definition der Thetafunctionen dienten, in eine andere Form zu bringen, erinnern wir an die Formel 52) auf S. 154, nämlich

$$115)\qquad \Sigma e^{-\frac{(s\pi+z)^2}{\varrho}} = \sqrt{\frac{\varrho}{\pi}}\, \Sigma e^{-s^2\varrho} \cos 2sz.$$

An diese knüpft sich zunächst eine verwandte Formel. Es ist nämlich, wie durch Entwickelung der angedeuteten Summen sofort erhellt,

$$\Sigma(-1)^s e^{-\frac{(s\pi+z)^2}{\varrho}} = 2\Sigma e^{-\frac{(2s\pi+z)^2}{\varrho}} - \Sigma e^{-\frac{(s\pi+z)^2}{\varrho}}$$
$$= 2\Sigma e^{-\frac{(s\pi+\frac{1}{2}z)^2}{\frac{1}{4}\varrho}} - \Sigma e^{-\frac{(s\pi+z)^2}{\varrho}},$$

mithin, wenn man die Summen rechter Hand nach Nro. 115) transformirt,

$$\Sigma(-1)^s e^{-\frac{(s\pi+z)^2}{\varrho}} = \sqrt{\frac{\varrho}{\pi}} \left\{ \Sigma e^{-\frac{1}{4}s^2\varrho} \cos sz - \Sigma e^{-s^2\varrho} \cos 2sz \right\}.$$

Die Entwickelung der Summen rechter Hand giebt einfacher

$$116)\ \Sigma(-1)^s e^{-\frac{(s\pi+z)^2}{\varrho}} = \sqrt{\frac{\varrho}{\pi}}\, \Sigma e^{-(s+\frac{1}{2})^2\varrho} \cos(2s+1)z.$$

Man bemerkt nun augenblicklich, dass die Formeln 115) und 116) identisch mit den folgenden sind:

$$\Sigma e^{-\frac{(s\pi+z)^2}{\varrho}} = \sqrt{\frac{\varrho}{\pi}} \cdot \vartheta_3(z),$$

$$\Sigma(-1)^s e^{-\frac{(s\pi+z)^2}{\varrho}} = \sqrt{\frac{\varrho}{\pi}} \cdot \vartheta_2(z),$$

wobei ohne Aenderung der rechten Seiten $-z$ für z geschrieben werden darf. Lässt man noch $\frac{1}{2}\pi - z$ an die Stelle von z treten und beachtet die Relationen in 109), so gelangt man zu folgenden neuen Darstellungen der Thetafunctionen:

$$117)\quad \left\{\begin{aligned}
\vartheta(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{\varrho}}\,\Sigma e^{-\frac{1}{\varrho}[(s+\frac{1}{2})\pi - z]^2},\\
\vartheta_1(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{\varrho}}\,\Sigma(-1)^s e^{-\frac{1}{\varrho}[(s+\frac{1}{2})\pi - z]^2},\\
\vartheta_2(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{\varrho}}\,\Sigma(-1)^s e^{-\frac{1}{\varrho}(s\pi - z)^2},\\
\vartheta_3(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{\varrho}}\,\Sigma e^{-\frac{1}{\varrho}(s\pi - z)^2}.
\end{aligned}\right.$$

Diese Formeln sind insofern wichtig, als mit ihrer Hülfe die Thetafunctionen einer imaginären Variabelen durch Thetafunctionen einer reellen Variabelen ausgedrückt werden können. Aus der ersten Gleichung in Nro. 111) folgt nämlich, wenn iz an die Stelle von z tritt,

$$\vartheta(iz) = \Sigma(-1)^s e^{-s^2\varrho + 2sz} = e^{\frac{z^2}{\varrho}}\,\Sigma(-1)^s e^{-\frac{(s\varrho - z)^2}{\varrho}};$$

führt man rechter Hand statt ϱ und z zwei neue Grössen ϱ' und z' ein mittelst der Gleichungen

$$118)\qquad \varrho\varrho' = \pi^2, \qquad \frac{z}{\pi} = \frac{z'}{\varrho'},$$

so wird

$$\frac{z^2}{\varrho} = \frac{z'^2}{\varrho'}, \quad \frac{(s\varrho - z)^2}{\varrho} = \frac{(s\pi - z')^2}{\varrho'},$$

mithin geht die Formel für $\vartheta(iz)$ in die folgende über:

$$\vartheta(iz) = e^{\frac{z'^2}{\varrho'}}\,\Sigma(-1)^s e^{-\frac{(s\pi - z')^2}{\varrho'}}.$$

Andererseits erhält man aus der dritten Formel in Nro. 117), wenn man ϱ' für ϱ, z' für z schreibt und andeutet, dass ϑ_2 gleichzeitig von ϱ' und z' abhängt,

$$\vartheta_2(\varrho', z') = \sqrt{\frac{\pi}{\varrho'}}\,\Sigma(-1)^s e^{-\frac{1}{\varrho'}(s\pi - z')^2};$$

Hier kommt dieselbe Summe vor wie in der Formel für $\vartheta(iz)$, man gelangt also zu einer Relation zwischen $\vartheta(iz)$ und $\vartheta_2(\varrho', z')$. Ueberhaupt ergeben sich auf diesem Wege folgende vier Relationen:

$$
119) \left\{
\begin{aligned}
\vartheta(\varrho,\, iz) &= \sqrt{\frac{\varrho'}{\pi}}\, e^{\frac{z'^2}{\varrho'}}\, \vartheta_2(\varrho',\, z'),\\
\vartheta_1(\varrho,\, iz) &= i\sqrt{\frac{\varrho'}{\pi}}\, e^{\frac{z'^2}{\varrho'}}\, \vartheta_1(\varrho',\, z'),\\
\vartheta_2(\varrho,\, iz) &= \sqrt{\frac{\varrho'}{\pi}}\, e^{\frac{z'^2}{\varrho'}}\, \vartheta(\varrho',\, z'),\\
\vartheta_3(\varrho,\, iz) &= \sqrt{\frac{\varrho'}{\pi}}\, e^{\frac{z'^2}{\varrho'}}\, \vartheta_3(\varrho',\, z'),
\end{aligned}
\right.
$$

und diese zeigen in der That, wie sich die Thetafunctionen imaginärer Argumente auf Thetafunctionen reeller Argumente zurückführen lassen.

Die Gleichungen 109), 113) und 119) können übrigens benutzt werden, um aus einer Eigenschaft einer der vier Thetafunctionen die analogen Eigenschaften der übrigen Thetafunctionen herzuleiten. Setzt man z. B. in einer Formel, welche $\vartheta(z)$ enthält, statt z der Reihe nach $z + \frac{1}{2} i\varrho$, iz, $\frac{1}{2}\pi - z$, so gelangt man zu drei neuen Formeln, die statt ϑ die anderen Functionen ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 enthalten. Eine Anwendung dieses Principes wird man sogleich sehen.

c. Nach der vierten Formel in 111) wollen wir die Functionen $\vartheta_3(x)$ und $\vartheta_3(y)$ bilden und sie mit einander multipliciren. Für die erste Reihe bezeichne, wie in 111), s den Buchstaben, auf welchen sich die Summirung bezieht; für die zweite Reihe wählen wir t statt s und haben dann

$$
\begin{aligned}
\vartheta_3(x)\,.\,\vartheta_3(y) &= \Sigma e^{-s^2\varrho - i.2sx}\,.\,\Sigma e^{-t^2\varrho - i.2ty}\\
&= \Sigma\Sigma e^{-(s^2+t^2)\varrho - i.2(sx+ty)},
\end{aligned}
$$

worin s und t alle positiven und negativen ganzen Zahlwerthe durchlaufen müssen. Hierbei sind folgende vier Fälle möglich

s gerade	und	t gerade,
s ungerade	„	t ungerade,
s gerade	„	t ungerade,
s ungerade	„	t gerade;

die zwei ersten Fälle ziehen wir in den einen Hauptfall zusammen, wo s und t gleichartig sind, die beiden übrigen Fälle bilden zusammen den Hauptfall ungleichartiger s und t. Dem entsprechend zerlegen wir die auf alle s und t bezügliche Doppelsumme in zwei Doppelsummen, deren erste die gleichartigen, und deren zweite die ungleichartigen s und t enthält, wofür wir kurz schreiben

$$\vartheta_3(x)\,.\,\vartheta_3(y) = P + Q.$$

Bei gleichartigen s und t sind $\frac{1}{2}(s+t)$ und $\frac{1}{2}(s-t)$ gleichzeitig ganze positive oder negative Zahlen, die alle möglichen Werthe haben können; wir setzen dann

$$\tfrac{1}{2}(s+t)=m, \qquad \tfrac{1}{2}(s-t)=n,$$

woraus folgt

$$s=m+n,\ t=m-n,\ s^2+t^2=2(m^2+n^2).$$

Die mit P bezeichnete Doppelsumme gestaltet sich jetzt folgendermaassen

$$P=\Sigma\Sigma e^{-2(m^2+n^2)\varrho-i.2[m(x+y)+n(x-y)]}$$
$$=\Sigma e^{-m^2.2\varrho-i.2m(x+y)}.\Sigma e^{-n^2.2\varrho-i.2n(x-y)}$$

und zufolge der Definition von ϑ_3 ist

$$P=\vartheta_3(2\varrho,x+y).\vartheta_3(2\varrho,x-y).$$

Bei ungleichartigen s und t hat man

$$\tfrac{1}{2}(s+t)=p+\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}(s-t)=q+\tfrac{1}{2},$$

wo p und q alle möglichen positiven und negativen ganzen Zahlen bedeuten; es folgt dann

$$s=p+q+1,\ t=p-q,\ s^2+t^2=2[(p+\tfrac{1}{2})^2+(q+\tfrac{1}{2})^2],$$

mithin

$$Q=\Sigma\Sigma e^{-2[(p+1/2)^2+(q+1/2)^2]\varrho-i.2[(p+1/2)(x+y)+(q+1/2)(x-y)]}$$
$$=\Sigma e^{-2(p+1/2)^2\varrho-i(2p+1)(x+y)}.\Sigma e^{-2(q+1/2)^2\varrho-i(2q+1)(x-y)},$$

d. i. vermöge der Definition von ϑ_2

$$Q=\vartheta_2(2\varrho,x+y).\vartheta_2(2\varrho,x-y).$$

Durch Substitution der Werthe von P und Q geht nun die frühere Formel für $\vartheta_3(x).\vartheta_3(y)$ in die folgende über:

$$120)\quad \vartheta_3(x).\vartheta_3(y)=\vartheta_3(2\varrho,x+y).\vartheta_3(2\varrho,x-y)$$
$$+\vartheta_2(2\varrho,x+y).\vartheta_2(2\varrho,x-y).$$

Ersetzt man hier x durch $\frac{1}{2}\pi-x$ und zugleich y durch $\frac{1}{2}\pi-y$, so erhält man leicht durch Anwendung der Formeln 109) und 110)

$$121)\quad \vartheta(x).\vartheta(y)=\vartheta_3(2\varrho,x+y).\vartheta_3(2\varrho,x-y)$$
$$-\vartheta_2(2\varrho,x+y).\vartheta_2(2\varrho,x-y).$$

Ferner ist nach 112)

$$\vartheta_3(\varrho,z-\tfrac{1}{2}i\varrho)=e^{1/4\varrho+iz}\vartheta_2(\varrho,z),$$

und wenn man 2ϱ an die Stelle von ϱ treten lässt,

$$\vartheta_3(2\varrho,z-i\varrho)=e^{1/2\varrho+iz}\vartheta_2(2\varrho,z).$$

Auf gleiche Weise erhält man

$$\vartheta_2(2\varrho,z-i\varrho)=e^{1/2\varrho+iz}\vartheta_3(2\varrho,z).$$

Vertauscht man nun in Nro. 120) x mit $x-\frac{1}{2}i\varrho$ und y gegen $y-\frac{1}{2}i\varrho$, so erhält man nach Hebung der Exponentialgrössen

$$122)\quad \vartheta_2(x)\,.\,\vartheta_2(y) = \vartheta_3(2\varrho,\, x+y)\,.\,\vartheta_2(2\varrho, x-y) \\ + \vartheta_2(2\varrho,\, x+y)\,.\,\vartheta_3(2\varrho,\, x-y).$$

Lässt man hier wieder $\frac{1}{2}\pi - x$ an die Stelle von x und $\frac{1}{2}\pi - y$ an die von y treten, so wird noch

$$123)\quad \vartheta_1(x)\,.\,\vartheta_1(y) = \vartheta_3(2\varrho,\, x+y)\,.\,\vartheta_2(2\varrho,\, x-y) \\ - \vartheta_2(2\varrho,\, x+y)\,.\,\vartheta_3(2\varrho,\, x-y).$$

Die vier Gleichungen 120) . . . 123) bilden die Quelle sehr vieler zwischen den Thetafunctionen stattfindender Beziehungen, von denen wir einige der wichtigsten ableiten wollen.

d. In den vier Fundamentalformeln sei $y = x$ und zur Abkürzung

$$\vartheta_2(2\varrho,\, 0) = \alpha_2, \quad \vartheta_3(2\varrho,\, 0) = \alpha_3,$$
$$\vartheta_2(2\varrho,\, 2x) = \xi_2, \quad \vartheta_3(2\varrho,\, 2x) = \xi_3;$$

es entstehen dann folgende specielle Relationen

$$[\vartheta(x)]^2 = \alpha_3\,\xi_3 - \alpha_2\,\xi_2,$$
$$[\vartheta_1(x)]^2 = \alpha_2\,\xi_3 - \alpha_3\,\xi_2,$$
$$[\vartheta_2(x)]^2 = \alpha_2\,\xi_3 + \alpha_3\,\xi_2,$$
$$[\vartheta_3(x)]^2 = \alpha_3\,\xi_3 + \alpha_2\,\xi_2.$$

Entwickelt man ξ_2 und ξ_3 aus zweien dieser Gleichungen und substituirt die erhaltenen Werthe in die beiden übrigen Gleichungen, so gelangt man zu Relationen zwischen den Quadraten von je drei Thetafunctionen, namentlich ergiebt sich, wenn man ξ_2 und ξ_3 den beiden ersten Gleichungen entnimmt,

$$\frac{2\,\alpha_3\,\alpha_2}{\alpha_3^2 + \alpha_2^2}\,[\vartheta(x)]^2 = [\vartheta_1(x)]^2 + \frac{\alpha_3^2 - \alpha_2^2}{\alpha_3^2 + \alpha_2^2}\,[\vartheta_2(x)]^2,$$

$$[\vartheta(x)]^2 = \frac{2\,\alpha_3\,\alpha_2}{\alpha_3^2 + \alpha_2^2}\,[\vartheta_1(x)]^2 + \frac{\alpha_3^2 - \alpha_2^2}{\alpha_3^2 + \alpha_2^2}\,[\vartheta_3(x)]^2.$$

Wie man aus den Formeln 108) ersieht, sind α_3 und α_2 reelle positive Zahlen, auch lehren die vorstehenden Gleichungen, auf den Fall $x = 0$ angewandt, dass $\alpha_3^2 - \alpha_2^2$ positiv ist. Zur Abkürzung setzen wir noch

$$\frac{2\,\alpha_3\,\alpha_2}{\alpha_3^2 + \alpha_2^2} = k,$$

wo k ein positiver echter Bruch ist; es wird dann

$$\frac{\alpha_3^2 - \alpha_2^2}{\alpha_3^2 + \alpha_2^2} = \sqrt{1 - k^2} = k',$$

wobei die Wurzel positiv genommen werden muss. Die vorigen Relationen gestalten sich jetzt folgendermaassen:

124) $$\begin{cases} k[\vartheta(x)]^2 = [\vartheta_1(x)]^2 + k'[\vartheta_2(x)]^2, \\ [\vartheta(x)]^2 = k[\vartheta_1(x)]^2 + k'[\vartheta_3(x)]^2. \end{cases}$$

Für $x = 0$ erhält man specieller wegen $\vartheta_1(0) = 0$

125) $$k = \left[\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}\right]^2, \quad k' = \left[\frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)}\right]^2.$$

e. In Nro. 123) setzen wir $\frac{1}{2}\varrho$ für ϱ, $x = z + \frac{1}{2}u$, $y = \frac{1}{2}u$; es ist dann

$$\vartheta_3(z+u).\vartheta_2(z) - \vartheta_2(z+u).\vartheta_3(z) = \vartheta_1(\tfrac{1}{2}\varrho, z + \tfrac{1}{2}u).\vartheta_1(\tfrac{1}{2}\varrho, \tfrac{1}{2}u)$$

und durch Division mit $-u.\vartheta_3(z).\vartheta_3(z+u)$

$$\frac{1}{u}\left\{\frac{\vartheta_2(z+u)}{\vartheta_3(z+u)} - \frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_3(z)}\right\} = -\frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}\varrho, z+\frac{1}{2}u)}{\vartheta_3(z).\vartheta_3(z+u)} \cdot \frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}\varrho, \frac{1}{2}u)}{u}.$$

Lassen wir nun u gegen die Null convergiren, so geht die linke Seite über in den nach z genommenen Differentialquotienten von $\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_3(z)}$; rechter Hand sei

$$Lim\,\frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}\varrho, \frac{1}{2}u)}{u} = \lambda,$$

mithin λ eine von z unabhängige Grösse; es wird dann

$$\frac{d\left\{\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_3(z)}\right\}}{dz} = -\lambda\,\frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}\varrho, z)}{[\vartheta_3(z)]^2}.$$

Um den rechts vorkommenden Zähler etwas anders auszudrücken, nehmen wir in Nro. 122) $y = 0$ und erhalten

$$\vartheta_2(x).\vartheta_2(0) = 2\vartheta_3(2\varrho, x).\vartheta_2(2\varrho, x)$$

oder wenn $\frac{1}{2}\varrho$ für ϱ und $x = \frac{1}{2}\pi - z$ gesetzt wird,

$$\vartheta_1(\tfrac{1}{2}\varrho, z) = \frac{2\vartheta(z).\vartheta_1(z)}{\vartheta_2(\frac{1}{2}\varrho, 0)}.$$

Nach Substitution dieses Werthes geht die vorige Differentialformel in die folgende über:

$$\frac{d\left\{\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_3(z)}\right\}}{dz} = -\mu\,\frac{\vartheta(z).\vartheta_1(z)}{[\vartheta_3(z)]^2},$$

wobei μ eine neue Constante bezeichnet. Lässt man noch $\frac{1}{2}\pi - z$ an die Stelle von z treten, so erhält man

126) $$\frac{d\left\{\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)}\right\}}{dz} = \mu\,\frac{\vartheta_2(z).\vartheta_3(z)}{[\vartheta(z)]^2}.$$

Analoge Differentialformeln bestehen für die Quotienten $\vartheta_2(z):\vartheta(z)$ und $\vartheta_3(z):\vartheta(z)$; sie können entweder auf einem ähnlichen Wege oder kürzer mittelst der Gleichungen 124) entwickelt werden, indem man letztere durch $[\vartheta(x)]^2$ dividirt und nachher differenzirt.

X. Die doppelt-periodischen Functionen.

Die vorigen Untersuchungen führen mit Leichtigkeit zu den Haupteigenschaften der beiden Functionen $\Theta(w)$ und $H(w)$, welche für jedes complexe w durch folgende Gleichungen definirt sind:

$$\Theta(w)=1-2e^{-\varrho}\cos\frac{\pi w}{K}+2e^{-4\varrho}\cos\frac{2\pi w}{K}-2e^{-9\varrho}\cos\frac{3\pi w}{K}+\cdots,$$

$$H(w)=2\sqrt[4]{e^{-\varrho}}\sin\frac{\pi w}{2K}-2\sqrt[4]{e^{-9\varrho}}\sin\frac{3\pi w}{2K}+2\sqrt[4]{e^{-25\varrho}}\sin\frac{5\pi w}{2K}-\cdots,$$

in denen man sich unter ϱ und K beliebige reelle und positive Constanten denken kann. Es ist zunächst

$$\vartheta\left(\frac{\pi w}{2K}\right)=\Theta(w),\quad \vartheta_1\left(\frac{\pi w}{2K}\right)=H(w),$$

ferner wegen $\vartheta_2(z)=\vartheta_1(z+\frac{1}{2}\pi)$ und $\vartheta_3(z)=\vartheta(z+\frac{1}{2}\pi)$

$$\vartheta_2\left(\frac{\pi w}{2K}\right)=H(w+K),\ \vartheta_3\left(\frac{\pi w}{2K}\right)=\Theta(w+K).$$

Aus den Formeln in 110) ergiebt sich nun, wenn man $\dfrac{\pi w}{2K}$ an die Stelle von z treten lässt,

127) $\Theta(w+2mK)=\Theta(w),\ H(w+2mK)=(-1)^m H(w).$

Nach demselben Verfahren erhält man aus Nro. 113), wenn man gleichzeitig

$$\varrho=\frac{\pi K'}{K}$$

setzt, wo K' eine zweite positive Constante bezeichnet,

$$128)\quad \begin{cases} \Theta(w+iK')=ie^{\frac{\pi}{4K}(K'-2iw)}H(w), \\ H(w+iK')=ie^{\frac{\pi}{4K}(K'-2iw)}\Theta(w). \end{cases}$$

Ferner geben die Formeln 114)

$$
129)\quad\begin{cases}
\Theta(w+2mK+i.2nK')=(-1)^n e^{\frac{\pi}{K}(n^2K-inw)}\,\Theta(w),\\
H(w+2mK+i.2nK')=(-1)^{m+n} e^{\frac{\pi}{K}(n^2K'-inw)}\,H(w),\\
H(w+[2m+1]K+i.2nK')=(-1)^m e^{\frac{\pi}{K}(n^2K'-inw)}\,H(w+K),\\
\Theta(w+[2m+1]K+i.2nK')=e^{\frac{\pi}{K}(n^2K'-inw)}\,\Theta(w+K).
\end{cases}
$$

Zufolge des vorigen Werthes von ϱ ist nach Nro. 118)

$$\varrho'=\frac{\pi K}{K'},\quad z'=\frac{\pi w}{2K'},$$

es entstehen also ϱ' und z' einfach dadurch, dass man K und K' gegen einander vertauscht. Bezeichnet man die entsprechenden Reihen

$$1-2e^{-\varrho'}\cos\frac{\pi w}{K'}+2e^{-4\varrho'}\cos\frac{2\pi w}{K'}-\cdots$$

$$2\sqrt[4]{e^{-\varrho'}}\sin\frac{\pi w}{2K'}-2\sqrt[4]{e^{-9\varrho'}}\sin\frac{3\pi w}{2K'}+\cdots$$

mit $\Theta(K',w)$ und $H(K',w)$, so gelangt man zu folgender Umgestaltung der Formeln 119):

$$
130)\quad\begin{cases}
\Theta(iw)=\sqrt{\dfrac{K}{K'}}\,e^{\frac{\pi w^2}{4KK'}}\,H(K',w+K'),\\
H(iw)=i\sqrt{\dfrac{K}{K'}}\,e^{\frac{\pi w^2}{4KK'}}\,H(K',w),\\
H(iw+K)=\sqrt{\dfrac{K}{K'}}\,e^{\frac{\pi w^2}{4KK'}}\,\Theta(K',w),\\
\Theta(iw+K)=\sqrt{\dfrac{K}{K'}}\,e^{\frac{\pi w^2}{4KK'}}\,\Theta(K',w+K').
\end{cases}
$$

Die mit k und $k'=\sqrt{1-k^2}$ bezeichneten positiven echten Brüche, welche in Nro. 125) vorkommen, werden nun durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$131)\qquad k=\left[\frac{H(K)}{\Theta(K)}\right]^2,\quad k'=\left[\frac{\Theta(0)}{\Theta(K)}\right]^2,$$

und die Relationen in Nro. 124) lauten jetzt, wenn $x=\dfrac{\pi w}{2K}$ gesetzt wird,

$$
132)\quad\begin{cases}
k[\Theta(w)]^2=[H(w)]^2+k'[H(w+K)]^2,\\
[\Theta(w)]^2=k[H(w)]^2+k'[\Theta(w+K)]^2.
\end{cases}
$$

Endlich geht die Differentialformel Nro. 126) für

$$z = \frac{\pi w}{2K} \text{ und } \varepsilon = \frac{\pi \mu}{2K}$$

in die folgende über:

$$133) \qquad \frac{d\left[\frac{H(w)}{\Theta(w)}\right]}{dw} = \varepsilon \frac{H(w+K).\Theta(w+K)}{[\Theta(w)]^2},$$

wobei ε eine noch zu bestimmende Constante bezeichnet.

Nach Aufstellung der Fundamentalformeln für Θ und H betrachten wir unter der Voraussetzung beliebiger complexer w die folgenden drei neuen Functionen:

$$134) \quad \begin{cases} f(w) = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{H(w)}{\Theta(w)}, \\ f_1(w) = \sqrt{\frac{k'}{k}} \cdot \frac{H(w+K)}{\Theta(w)}, \\ f_2(w) = \sqrt{k'} \cdot \frac{\Theta(w+K)}{\Theta(w)}. \end{cases}$$

Als nächstliegende Eigenschaften derselben ergeben sich u. A. durch Benutzung von Nro. 127)

$$135) \quad f(-w) = -f(w), \quad f_1(-w) = f_1(w), \quad f_2(-w) = f_2(w),$$

$$136) \quad \begin{cases} f(w+K) = \frac{f_1(w)}{f_2(w)}, \quad f_1(w+K) = -k'\frac{f(w)}{f_2(w)}, \\ f_2(w+K) = \frac{k'}{f_2(w)}, \end{cases}$$

ferner aus Nro. 128) und Nro. 127)

$$137) \quad \begin{cases} f(w+iK') = \frac{1}{k\,f(w)}, \\ f_1(w+iK') = -i\frac{f_2(w)}{k\,f(w)}, \quad f_2(w+iK') = -i\frac{f_1(w)}{f(w)} \end{cases}$$

und allgemeiner aus Nro. 129)

$$138) \quad \begin{cases} f(w+2mK+i.2nK') = (-1)^m f(w), \\ f_1(w+2mK+i.2nK') = (-1)^{m-n} f_1(w), \\ f_2(w+2mK+i.2nK') = (-1)^n f_2(w). \end{cases}$$

Diese Formeln zeigen unmittelbar die doppelte Periodicität der Functionen $f(w)$, $f_1(w)$ und $f_2(w)$. Bei geraden m wird nämlich die rechte Seite der ersten Gleichung $= f(w)$, mithin besitzt $f(w)$ die reelle Periode $4K$ und die rein imaginäre Periode $i.2K'$. In der zweiten Gleichung wird die rechte Seite $= f_1(w)$ sowohl wenn m gerade und $n = 0$, als auch wenn $m = n$ ist; $f_1(w)$ hat demnach die reelle Periode $4K$ und die complexe Periode $2K + i.2K'$. Endlich erkennt man aus der letzten Gleichung, dass $f_2(w)$ die reelle Periode $2K$ und die rein imaginäre Periode $i.4K'$ besitzt.

Bezeichnen wir mit $f(K', w)$, $f_1(K', w)$, $f_2(K', w)$ diejenigen Functionen, welche aus $f(w), f_1(w), f_2(w)$ durch Vertauschung von K gegen K' hervorgehen, so erhalten wir mittelst der Formeln 130)

139) $$\left\{\begin{aligned} f(iw) &= i\frac{f(K', w)}{f_1(K', w)}, \\ f_1(iw) = \frac{1}{f_1(K', w)}, &\quad f_2(iw) = \frac{f_2(K', w)}{f_1(K', w)}, \end{aligned}\right.$$

hierin liegt die Reduction der Functionen imaginärer Argumente auf Functionen reeller Argumente.

Die Gleichungen 132) geben nach Division mit $[\Theta(w)]^2$

140) $$\left\{\begin{aligned} [f(w)]^2 + [f_1(w)]^2 &= 1, \\ k^2[f(w)]^2 + [f_2(w)]^2 &= 1, \end{aligned}\right.$$

woraus man, beiläufig bemerkt, noch die Folgerung

141) $$[f_2(w)]^2 - k^2[f_1(w)]^2 = k'^2$$

ziehen kann.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Formel 133), weil sie zu einer Differentialgleichung zwischen w und $f(w)$ führt. Man hat zunächst

$$\frac{df(w)}{dw} = \varepsilon f_1(w) . f_2(w),$$

und wenn man $f_1(w)$ und $f_2(w)$ mittelst der Gleichungen 140) durch $f(w)$ ausdrückt, so gelangt man zu der Differentialgleichung

$$\frac{df(w)}{dw} = \varepsilon \sqrt{1 - [f(w)]^2} . \sqrt{1 - k^2[f(w)]^2}$$

oder, wenn zur Abkürzung

142) $$f(w) = z$$

gesetzt wird,

$$\frac{dz}{dw} = \varepsilon \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung giebt

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z)^2 (1 - k^2 z^2)}} = \varepsilon w + Const.$$

und da z gleichzeitig mit w verschwindet, so ist

143) $$\varepsilon w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Zur Bestimmung der Constanten ε nehmen wir speciell $w = K$, woraus folgt $z = f(K)$ und unter Rücksicht auf Nro. 131)

$$z = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{H(K)}{\Theta(K)} = 1;$$

es ist daher

144) $$\varepsilon = \frac{1}{K} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Sind nun die beiden Constanten K und K' willkürlich gewählt, so kennt man $\varrho = \frac{\pi K'}{K}$, mithin lassen sich für jedes w die Functionen $\Theta(w)$ und $H(w)$ durch Summirung der gleichgeltenden Reihen berechnen; die Formeln 131) und 144) liefern dann k und ε, so dass alle vorkommenden Grössen eine genaue Bestimmung erhalten.

Statt von den Constanten K und K' auszugehen, kann man auch zwei andere der vorhandenen Constanten beliebig wählen. Das Vortheilhafteste in dieser Beziehung ist, den positiven echten Bruch k als willkürliche Grösse zu betrachten und dem K folgenden Werth zu geben:

144a) $$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}};$$

es wird dann $\varepsilon = 1$ und nach Nro. 143)

145) $$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Die Function $z = f(w)$ ist dann diejenige Function, welche durch Umkehrung der vorliegenden Gleichung entsteht.

Um noch K' zu bestimmen, nehmen wir die erste der Formeln 137) für $w = K$ in Anspruch; sie giebt

$$f(K + iK') = \frac{1}{k\, f(K)} = \frac{1}{k}.$$

Da hiernach die Werthe $w = K + iK'$ und $z = \frac{1}{k}$ einander entsprechen, so ist nach 145)

$$K + iK' = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

und durch Subtraction der Gleichung 144)

$$iK' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

oder auch

$$K' = -\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}.$$

Die Anwendung der Substitution

$$z = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2\zeta^2}}, \quad \text{wo } k' = \sqrt{1-k^2}$$

giebt hier

146) $$K' = \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k'^2\zeta^2)}},$$

wonach K' ebenso aus k' entsteht wie K aus k.

Am Schlusse dieser Analyse wird es wohl kaum der Bemerkung bedürfen, dass die Functionen $f(w)$, $f_1(w)$, $f_2(w)$ mit den früher untersuchten elliptischen Functionen *sin am w*, *cos am w*, *Δ am w* identisch sind. Man kann also auch von den Thetafunctionen aus den Eingang in die Theorie der elliptischen Functionen gewinnen. Bei der bestechenden Einfachheit dieses Gedankenganges dürfen wir aber nicht verschweigen, dass derselbe immer noch eine empfindliche Lücke übrig lässt. Da nämlich in Nro. 145) die Variabele z im Allgemeinen complex ist, so muss zur Vermeidung einer möglichen Vieldeutigkeit des Integrales entweder ein ganz bestimmter Integrationsweg als nothwendig nachgewiesen oder der Einfluss gezeigt werden, den verschiedene Integrationswege auf den Integralwerth ausüben. Die Theorie der Thetafunctionen erfüllt keine dieser beiden Forderungen und bedarf daher immer der Ergänzung durch die in Abschnitt II, S. 380 ausgeführten Untersuchungen *).

*) Den Gedankengang der Abschnitte IX. und X. pflegte Jacobi in seinen Vorlesungen zu befolgen; eine ausführliche Theorie der Thetafunctionen findet man in dem Werke „Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunctionen. Von Prof. Dr. Schellbach. Berlin 1864."

XI. Die elliptischen Functionen zweiter und dritter Art.

Sowie die drei hauptsächlichsten elliptischen Functionen erster Art dadurch aus $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\Delta(\varphi)$ entstehen, dass an die Stelle von φ die Umkehrung des Integrales

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}$$

d. h. $\varphi = am\,u$ gesetzt wird, ebenso hat man aus den elliptischen Integralen zweiter und dritter Art, nämlich aus $E(\varphi)$ und $\Pi(\varphi)$, mittelst derselben Substitution die neuen Amplitudenfunctionen $E(am\,u)$, $\Pi(am\,u)$ gebildet und elliptische Functionen zweiter bezüglich dritter Art genannt. Demnach ist für alle elliptischen Functionen u die unabhängige Variabele.

a. Wird nun in der Gleichung

$$E(\varphi) = \int_0^\varphi \Delta(\varphi)\,d\varphi$$

die Substitution $\varphi = am\,u$ vorgenommen, woraus $d\varphi = \Delta\,am\,u\,du$ folgt, so entsteht

$$147)\quad E(am\,u) = \int_0^u (\Delta\,am\,u)^2\,du = \int_0^u (1 - k^2 \sin^2 am\,u)\,du;$$

hiernach reducirt sich die Untersuchung von $E(am\,u)$ im Wesentlichen auf die Untersuchung von $\int \sin^2 am\,u\,du$.

Um zunächst die Reihenentwickelung von $E(am\,u)$ zu erledigen, benutzen wir die auf S. 422 abgeleitete Formel

$$\sin^2 am\,u = \frac{K-E}{k^2K} - \frac{2\pi^2}{k^2K^2}\left\{\frac{1q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{2\pi u}{K} + \cdots\right\}$$

oder

$$1 - k^2 \sin^2 am\,u$$

$$= \frac{E}{K} + \frac{2\pi^2}{K^2}\left\{\frac{1q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{2\pi u}{K} + \frac{3q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{K} + \cdots\right\};$$

durch Multiplication mit du und Integration zwischen den Grenzen $u = 0$ und $u = u$ folgt hieraus

148) $$E(am u) = \frac{E}{K}u + \frac{2\pi}{K}\left\{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \cdots\right\}$$

Den periodischen Theil dieser Reihe werden wir später als eine neue Function von u ansehen und mit $Z(u)$ bezeichnen; es ist hiernach

149) $$Z(u) = \frac{2\pi}{K}\left\{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} + \cdots\right\}$$

und

150) $$E(am u) = \frac{E}{K}u + Z(u).$$

b. Nach der von C. G. Jacobi eingeführten Bezeichnung versteht man unter dem elliptischen Integrale dritter Art das folgende

$$\Pi(\varphi, \alpha, k) = \int_0^{\varphi} \frac{k^2 \sin\alpha \cos\alpha\, \varDelta(k,\alpha) \sin^2\varphi}{1 - k^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\varDelta(k,\varphi)},$$

wobei der Bogen α auch eine complexe Zahl sein darf. Setzt man hierin wie bisher $\varphi = am u$ und denkt sich auch α als Amplitude, etwa $\alpha = am a$, so entsteht die Definitionsgleichung

$$\Pi(am u, am a, k) = \int_0^u \frac{k^2 \sin am a \cos am a\, \varDelta am a \sin^2 am u}{1 - k^2 \sin^2 am a \sin^2 am u}\, du.$$

Zur Abkürzung möge die linke Seite künftig mit dem einfacheren Symbole $\Pi(u, a)$ bezeichnet werden.

Aus der gegebenen Definition folgt zunächst

151) $$\frac{d\Pi(u,a)}{du} = \frac{k^2 \sin am a \cos am a\, \varDelta am a \sin^2 am u}{1 - k^2 \sin^2 am a \sin^2 am u}$$

und durch nochmalige Differentiation

$$\frac{d^2\Pi(u,a)}{du^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}k^2 \cdot \frac{2 \sin am u \cos am a\, \varDelta am a}{1 - k^2 \sin^2 am u \sin^2 am a} \cdot \frac{2 \sin am a \cos am u\, \varDelta am u}{1 - k^2 \sin^2 am u \sin^2 am a}.$$

Mittelst der auf S. 401 angegebenen Formeln für $\sin\sigma + \sin\tau$ und $\sin\sigma - \sin\tau$ findet man sehr leicht, dass die vorliegende Gleichung mit der folgenden identisch ist

$$\frac{d^2\Pi(u,a)}{du^2} =$$

$$\tfrac{1}{2}k^2 [\sin am(u+a) + \sin am(u-a)][\sin am(u+a) - \sin am(u-a)],$$

welche zurückkommt auf

152) $$\frac{d^2\Pi(u,a)}{du^2} = \tfrac{1}{2}k^2 [\sin^2 am(u+a) - \sin^2 am(u-a)].$$

Benutzt man hier die für alle reellen u gültige Entwickelung von $\sin^2 am\, u$, indem man u das eine Mal durch $u + a$, das andere Mal durch $u - a$ ersetzt, so hat man weiter

$$\frac{d^2 \Pi(u,a)}{du^2} = \frac{\pi^2}{K^2} \Sigma \frac{n q^n}{1-q^{2n}} \left\{ \cos \frac{n\pi(u-a)}{K} - \cos \frac{n\pi(u+a)}{K} \right\},$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Durch Multiplication mit du und Integration folgt hieraus, wenn gleichzeitig beachtet wird, dass $\dfrac{d\Pi(u,a)}{du}$ für $u = 0$ verschwindet (Nro. 151),

$$\frac{d\Pi(u,a)}{du} = \frac{\pi}{K} \Sigma \frac{q^n}{1-q^{2n}} \left\{ \sin \frac{n\pi(u-a)}{K} - \sin \frac{n\pi(u+a)}{K} \right\}$$
$$+ \frac{2\pi}{K} \Sigma \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin \frac{n\pi a}{K}.$$

Nochmalige Integration zwischen den Grenzen $u = 0$ und $u = u$ giebt

$$\Pi(u,a) = -\Sigma \frac{q^n}{n(1-q^{2n})} \left\{ \cos \frac{n\pi(u-a)}{K} - \cos \frac{n\pi(u+a)}{K} \right\}$$
$$+ u \frac{2\pi}{K} \Sigma \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin \frac{n\pi a}{K},$$

wobei der letzte Summand $= u Z(a)$ ist. Man hat demnach die folgende für alle reellen u gültige Reihenentwickelung:

153) $$\Pi(u,a) = u Z(a) - \tfrac{1}{1} \cdot \frac{q}{1-q^2} \left\{ \cos \frac{\pi(u-a)}{K} - \cos \frac{\pi(u+a)}{K} \right\}$$
$$- \tfrac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{1-q^4} \cos \left\{ \frac{2\pi(u-a)}{K} - \cos \frac{2\pi(u+a)}{K} \right\}$$
$$- \ldots \ldots \ldots$$

oder auch

$$\Pi(u,a) = u Z(a) - \tfrac{1}{1} \cdot \frac{2q}{1-q^2} \sin \frac{\pi a}{K} \sin \frac{\pi u}{K}$$
$$- \tfrac{1}{2} \cdot \frac{2q^2}{1-q^4} \sin \frac{2\pi a}{K} \sin \frac{2\pi u}{K} - \ldots.$$

c. Statt der Gleichung 153) kann einfacher geschrieben werden

154) $$\Pi(u,a) = u Z(a) + f(u+a) - f(u-a),$$

wobei die Function $f(w)$ selbstverständlich folgende Bedeutung hat:

$$f(w) = \tfrac{1}{1} \cdot \frac{q}{1-q^2} \cos \frac{\pi w}{K} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{1-q^4} \cos \frac{2\pi w}{K} + \ldots.$$

Entwickelt man hier die einzelnen Glieder mittelst der Formel

$$\frac{q^n}{1-q^{2n}} = q^n + q^{3n} + q^{5n} + q^{7n} + \cdots,$$

so erhält man durch andere Anordnung der entstehenden Doppelreihe

$$\begin{aligned} f(w) = & \tfrac{1}{1} q \cos\frac{\pi w}{K} + \tfrac{1}{2} q^2 \cos\frac{2\pi w}{K} + \tfrac{1}{3} q^3 \cos\frac{3\pi w}{K} + \cdots \\ & + \tfrac{1}{1} q^3 \cos\frac{\pi w}{K} + \tfrac{1}{2} q^6 \cos\frac{2\pi w}{K} + \tfrac{1}{3} q^9 \cos\frac{3\pi w}{K} + \cdots \\ & + \tfrac{1}{1} q^5 \cos\frac{\pi w}{K} + \tfrac{1}{2} q^{10} \cos\frac{2\pi w}{K} + \tfrac{1}{3} q^{15} \cos\frac{3\pi w}{K} + \cdots \\ & + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{aligned}$$

d. i. nach einer bekannten Formel

$$f(w) = -\tfrac{1}{2} l \left\{ \left(1 - 2q\cos\frac{\pi w}{K} + q^2\right)\left(1 - 2q^3\cos\frac{\pi w}{K} + q^6\right) \left(1 - 2q^5\cos\frac{\pi w}{K} + q^{10}\right) \cdots \right\}.$$

Zufolge der in Abschnitt VIII. gegebenen Entwickelungen ist weiter, wenn zur Abkürzung

$$P = \frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots}$$

gesetzt wird,

$$f(w) = -\tfrac{1}{2} l \left\{ P\left(1 - 2q\cos\frac{\pi w}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi w}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi w}{K} + \cdots\right)\right\}$$

d. h. sehr einfach

$$f(w) = -\tfrac{1}{2} l\,[P.\,\Theta(w)].$$

Hiernach geht die Gleichung 154) in die folgende über

$$155)\qquad \Pi(u,a) = u\,Z(a) + \tfrac{1}{2} l \left\{\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}\right\},$$

aus welcher erhellt, dass die Function Π auf die beiden Functionen Θ und Z zurückgeführt werden kann.

d. Die Gültigkeit der vorliegenden Formel ist, ihrer Herleitung nach, vorläufig auf reelle u und a beschränkt; es bedarf daher noch einer besonderen Untersuchung, ob man jene Relation auch für complexe u und a in Anspruch nehmen darf. Wir erinnern zu diesem Zwecke an die auf S. 456 und 457 bewiesenen Formeln

$$\vartheta(x)\vartheta(y) = \vartheta_3(2\varrho, x+y)\vartheta_3(2\varrho, x-y) - \vartheta_2(2\varrho, x+y)\vartheta_2(2\varrho, x-y),$$

$$\vartheta_1(x)\vartheta_1(y) = \vartheta_3(2\varrho, x+y)\vartheta_2(2\varrho, x-y) - \vartheta_2(2\varrho, x+y)\vartheta_3(2\varrho, x-y),$$

in denen zur Abkürzung sein möge

$$\vartheta_3(2\varrho, x+y) = s_3,\quad \vartheta_3(2\varrho, x-y) = t_3,$$
$$\vartheta_2(2\varrho, x+y) = s_2,\quad \vartheta_2(2\varrho, x-y) = t_2;$$

es ist dann unmittelbar

$$\vartheta(x)\,\vartheta(y) = s_3 t_3 - s_2 t_2,$$
$$\vartheta_1(x)\,\vartheta_1(y) = s_3 t_2 - s_2 t_3.$$

Setzt man dagegen in der ersten der vorigen Gleichungen $y = 0$ und lässt das eine Mal $x + y$, das andere Mal $x - y$ an die Stelle von x treten, so hat man folgende zwei Relationen

$$\vartheta(0)\,\vartheta(x+y) = s_3^2 - s_2^2,$$
$$\vartheta(0)\,\vartheta(x-y) = t_3^2 - t_2^2.$$

Zufolge der identischen Gleichung

$$(s_3 t_3 - s_2 t_2)^2 - (s_3 t_2 - s_2 t_3)^2 = (s_3^2 - s_2^2)(t_3^2 - t_2^2)$$

ergiebt sich nun sofort

$$[\vartheta(x)\,\vartheta(y)]^2 - [\vartheta_1(x)\,\vartheta_1(y)]^2 = [\vartheta(0)]^2\,\vartheta(x+y)\,\vartheta(x-y)$$

oder, wenn $x = \dfrac{\pi u}{2K}$ und $y = \dfrac{\pi v}{2K}$ gesetzt wird,

$$[\Theta(u)\,\Theta(v)]^2 - [H(u)\,H(v)]^2 = [\Theta(0)]^2\,\Theta(u+v)\,\Theta(u-v).$$

Dividirt man beide Seiten dieser Gleichung durch $[\Theta(u)\,\Theta(v)]^2$ und beachtet die Gleichung

$$\frac{H(w)}{\Theta(w)} = \sqrt{k}\,\sin am\, w,$$

so erhält man

$$1 - k^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\, v = \frac{[\Theta(0)]^2\,\Theta(u+v)\,\Theta(u-v)}{[\Theta(u)\,\Theta(v)]^2}.$$

Von beiden Seiten dieser Gleichung nehmen wir die natürlichen Logarithmen und differenziren in Beziehung auf v; der Differentialquotient ist

$$\frac{k^2 \sin^2 am\, u \sin am\, v \cos am\, v\, \Delta\, am\, v}{1 - k^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\, v}$$
$$= \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} + \tfrac{1}{2}\,\frac{\Theta'(u-v)}{\Theta(u-v)} - \tfrac{1}{2}\,\frac{\Theta'(u+v)}{\Theta(u+v)}.$$

Endlich setzen wir $v = a$, multipliciren mit du und integriren zwischen den Grenzen $u = 0$ und $u = u$; linker Hand kommt dann $\Pi(u, a)$ zum Vorschein, und es wird überhaupt

156) $$\Pi(u, a) = u\,\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \tfrac{1}{2}\, l \left\{\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}\right\}.$$

Diese Formel lehrt zweierlei. Aus der Vergleichung mit Nro. 155) folgt nämlich einerseits, dass für jedes reelle a

$$Z(a) = \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}$$

sein muss. Um zu verallgemeinern, definiren wir für jedes complexe w die Function $Z(w)$ durch die Gleichung

157) $$Z(w) = \frac{\Theta'(w)}{\Theta(w)},$$

wonach $Z(w)$ eine vollkommen eindeutige Function ist. Dividirt man die Gleichung 156) mit a, geht nachher zur Grenze für verschwindende a über und setzt vorläufig

$$Lim \frac{\Theta'(a)}{a\,\Theta(a)} = \lambda,$$

so erhält man leicht

$$\int_0^u k^2 \sin^2 am u\, du = \lambda u - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},$$

mithin

158) $$\int_0^u (1 - k^2 \sin^2 am u)\, du = (1-\lambda) u + \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}.$$

In dieser für jedes complexe u gültigen Gleichung ist die linke Seite $= E(am u)$, wofür kurz $E(u)$ geschrieben werden möge; rechter Hand bestimmt sich der Factor $1 - \lambda$ dadurch, dass man u zu einer reellen Grösse specialisirt und die Gleichungen 157) und 150) beachtet. Man findet $1 - \lambda = \frac{E}{K}$ und nunmehr aus Nro. 158)

159) $$E(u) = \frac{E}{K} u + Z(u).$$

Damit ist die frühere nur für reelle u gültige Formel 150) auf complexe Variabele ausgedehnt.

Zweitens erhält man aus Nro. 156)

160) $$\Pi(u, a) = u\, Z(a) + \tfrac{1}{2} l \left\{ \frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)} \right\}$$

und dies ist die Verallgemeinerung der Formel 155).

Die drei Gleichungen 157), 159) und 160), verbunden mit den Formeln auf S. 444, führen nun zu dem wichtigen Ergebnisse, dass alle elliptischen Functionen durch die Jacobi'sche Transcendente Θ ausgedrückt werden können.

Als gelegentliche Folgerungen hiervon mögen zwei schon früher bewiesene Sätze aufs Neue abgeleitet werden. Die Formel 160) giebt wegen $\Theta(-w) = \Theta(w)$

$$\Pi(u,a) - \Pi(a,u) = u\,Z(a) - a\,Z(u)$$

oder, wenn man nach Nro. 159) die Function Z durch E ausdrückt,

$$\Pi(u,a) - \Pi(a,u) = u\,E(a) - a\,E(u);$$

dies ist der auf S. 344 erwähnte Satz über die Vertauschung von Amplitude und Parameter.

Man hat ferner nach Nro. 159) und 157)

$$\frac{1}{2}\int\limits_{u-a}^{u+a} E(w)\,dw = \frac{1}{2}\int\limits_{u-a}^{u+a}\left\{\frac{E}{K}\,w + \frac{\Theta'(w)}{\Theta(w)}\right\}dw$$

$$= \frac{E}{K}\,au + \frac{1}{2}l\left\{\frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)}\right\}$$

andererseits aus Nro. 159) und 160)

$$u\,E(a) - \Pi(u,a) = \frac{E}{K}\,au + \frac{1}{2}l\left\{\frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)}\right\},$$

mithin, weil die rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen übereinstimmen,

$$u\,E(a) - \frac{1}{2}\int\limits_{u-a}^{u+a} E(w)\,dw = \Pi(u,a);$$

diese Formel ist identisch mit Nro. 79) auf S. 343.

e. Aus den bekannten Eigenschaften von $\Theta(w)$ lassen sich nun die entsprechenden Eigenschaften von $Z(w)$ und $\Pi(w,a)$ ohne Mühe herleiten.

Nimmt man z. B. die Logarithmen von beiden Seiten der Gleichung

$$\Theta(iv) = \sqrt{\frac{K}{K'}}\,e^{\frac{\pi v^2}{4KK'}}\,H(v+K',k')$$

oder der mit ihr identischen

$$\Theta(iv) = \sqrt{\frac{k'K}{kK'}}\,e^{\frac{\pi v^2}{4KK'}}\,\Theta(v,k')\cos am(v,k'),$$

und differenzirt nachher unter Rücksicht auf Nro. 157), so erhält man augenblicklich

161) $$iZ(iv) = Z(v,k') + \frac{\pi v}{2KK'} - tng\,am(v,k')\,\varDelta\,am(v,k'),$$

womit das Z eines imaginären Argumentes auf das Z eines reellen Argumentes zurückgeführt ist.

Von der Formel

$$\Theta(K+iv) = \sqrt{\frac{K}{kK'}}\,e^{\frac{\pi v^2}{4KK'}}\,\Theta(v,k')\,\varDelta\,am(v,k')$$

ausgehend, findet man nach demselben Verfahren

162) $$iZ(K+iv)=Z(v,k')+\frac{\pi v}{2KK'}-\frac{k'^2 \sin am(u,k') \cos am u,k')}{\varDelta\, am(u,k')}.$$

Ebenso leitet man aus der Formel

$$\Theta(u+iK')=\frac{i\sqrt{k}}{\sqrt[4]{q}}\, e^{-\frac{i\pi u}{2K}}\,\Theta(u) \sin am u$$

die folgende ab:

163) $$Z(u+iK')=Z(u)-\frac{i\pi}{2K}+\cot am u\, \varDelta\, am u,$$

welcher noch die der Relation

$$\Theta(u+2iK')=-\frac{1}{q}\, e^{-\frac{i\pi u}{K}}\,\Theta(u)$$

entsprechende Formel

164) $$Z(u+2iK')=Z(u)-i\frac{\pi}{K}$$

beigefügt werden mag.

Lässt man in Nro. 160) an die Stelle von a der Reihe nach ib, $K+ib$, $a+iK'$ treten und benutzt die Formeln 161), 162) und 163), so gelangt man zu folgenden Resultaten:

165) $$i\Pi(u,ib)=u\left\{Z(b,k')+\frac{\pi b}{2KK'}-tng\, am(b,k')\,\varDelta\, am(b,k')\right\}$$
$$+\frac{i}{2}l\left\{\frac{\Theta(u-ib)}{\Theta(u+ib)}\right\},$$

166) $$i\Pi(u,K+ib)=u\left\{Z(b,k')+\frac{\pi b}{2KK'}-\frac{k'^2 \sin am(b,k') \cos am(b,k')}{\varDelta\, am(b,k')}\right\}$$
$$+\frac{i}{2}l\left\{\frac{\Theta(u-K-ib)}{\Theta(u+K+ib)}\right\},$$

167) $$\Pi(u,a+iK')=u\left\{Z(a)-i\frac{\pi}{2K}+\cot am a\, \varDelta\, am a\right\}$$
$$+\tfrac{1}{2}l\left\{\frac{\Theta(u-a-iK')}{\Theta(u+a+iK')}\right\}.$$

Analoge Formeln lassen sich auch für die Fälle aufstellen, wo in Nro. 160) iv oder $K+iv$ oder $u+iK'$ an die Stelle von u tritt; da es aber jederzeit möglich ist, Amplitude und Parameter gegen einander zu vertauschen, so bedarf es für jene Fälle keiner besonderen Formeln.

f. Schliesslich wollen wir noch zeigen, wie das Legendre'sche Integral dritter Art

168) $$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi)}$$

$$= \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} - h\int_0^{\varphi} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi)}$$

für jedes h auf die Function Π zurückgeführt, also auch numerisch berechnet werden kann. In allen Fällen sei hierbei

169) $$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = u, \text{ mithin } \varphi = am\,u,$$

ferner

$$h = -k^2 \sin^2 am\,c,$$

woraus folgt

170) $$\sin am\,c = \frac{\sqrt{-h}}{k} \quad \text{und} \quad c = \int_0^{\frac{\sqrt{-h}}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}};$$

die Gleichung 168) wird dann im Allgemeinen

171) $$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi)} = u + \frac{tng\,am\,c}{\Delta\,am\,c}\,\Pi(u,c).$$

Um dieselbe in gebrauchfertiger Gestalt zu haben, müssen wir bei reellen h vier Fälle unterscheiden, nämlich

$$\left.\begin{array}{l} -k^2 < h < 0, \\ -1 < h < -k^2, \\ -\infty < h < -1, \end{array}\right\} \text{negative } h,$$
$$0 < h < +\infty, \quad \text{positive } h.$$

Im ersten Falle ist die obere Grenze des unter Nro. 170) verzeichneten Integrales reell und < 1 mithin c eine reelle Zahl, welche wir a nennen wollen; es gelten dann unmittelbar die Formeln

172) $$\left\{\begin{array}{l} -k^2 < h < 0;\ a = \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{-h}}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \\ \Pi_0(\varphi) = u + \dfrac{tng\,am\,a}{\Delta\,am\,a}\,\Pi(u,a). \end{array}\right.$$

Im zweiten Falle liegt die obere Integrationsgrenze $\dfrac{\sqrt{-h}}{k}$ zwischen 1 und $\frac{1}{k}$, und dann lässt sich das für c angegebene Integral ebenso behandeln wie das Integral Nro. 33) auf S. 389. Für c erhält man einen Ausdruck von der Form $K - ib = 2K - (K + ib)$; führt man denselben in Nro. 171) ein und beachtet, dass, der ursprünglichen Bedeutung von Π gemäss, $\Pi(u, 2K - \gamma) = -\Pi(u, \gamma)$ ist, so gelangt man zu den Formeln:

173) $$\left\{\begin{aligned} & -1 < h < -k^2, \quad b = \int_0^{\frac{1}{k'}\sqrt{1+\frac{k^2}{h}}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}, \\ & \Pi_0(\varphi) = u + \frac{\varDelta\, am(b,k')}{k'^2 \sin am(b,k') \cos am(b,k')} i\Pi(u, K + ib). \end{aligned}\right.$$

Im dritten Falle ist die obere Grenze $\frac{\sqrt{-h}}{k}$ zwischen $\frac{1}{k}$ und $+\infty$ enthalten, und dann lässt sich das für c angegebene Integral ebenso transformiren wie das Integral Nro. 35) auf S. 390, wodurch man für c einen Werth von der Form $2K - a - iK'$ erhält. Nach diesen Bemerkungen ergiebt sich

174) $$\left\{\begin{aligned} & -\infty < h < -1, \quad a = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{-h}}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \\ & \Pi_0(\varphi) = u + \frac{tng\, am\, a}{\varDelta\, am\, a} \Pi(u, a + iK'). \end{aligned}\right.$$

Im letzten Falle ist $\frac{\sqrt{-h}}{k}$ rein imaginär. und dann hat man das Integral in Nro. 170) ebenso zu behandeln, wie es früher auf S. 388 mit dem Integrale Nro. 31) geschah. Für c erhält man einen Ausdruck von der Form ib und überhaupt

175) $$\left\{\begin{aligned} & 0 < h < +\infty, \quad b = \int_0^{\sqrt{\frac{h}{h+k^2}}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}, \\ & \Pi_0(\varphi) = u + \frac{\sin am(b,k') \cos am(b,k')}{\varDelta\, am(b,k')} i\Pi(u, ib). \end{aligned}\right.$$

Die Formeln 170) und 171) behalten auch bei complexen h ihre Gültigkeit, nur bedarf es dann einer besonderen Untersuchung über die Bestimmung der Grösse c aus der Gleichung

$$\sin am\, c = \frac{\sqrt{-h}}{k}.$$

Es sei nun

176) $$h = m + in, \quad c = a + ib,$$

wo m und n gegebene, a und b unbekannte Grössen bezeichnen; die obige Gleichung ist dann identisch mit

$$\sin am(a + ib) = \frac{\sqrt{-m - in}}{k},$$

und daraus folgt

$$\cos am(a + ib) = \frac{\sqrt{k^2 + m + in}}{k}, \quad \Delta am(a + ib) = \sqrt{1 + m + in}.$$

Die rechten Seiten dieser drei Gleichungen sind aus bekannten Grössen zusammengesetzt und können daher auf die Form $r e^{i\vartheta}$ gebracht werden; setzen wir demnach

177) $$\left\{\begin{aligned} \sqrt{-m - in} &= r(\cos\vartheta + i \sin\vartheta), \\ \sqrt{k^2 + m + in} &= r_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1), \\ \sqrt{1 + m + in} &= r_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2), \end{aligned}\right.$$

so können wir im Folgenden r, r_1, r_2, ϑ, ϑ_1, ϑ_2 als bekannte reelle Grössen ansehen, und haben die drei Gleichungen

$$\sin am(a + ib) = \frac{r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)}{k},$$

$$\cos am(a + ib) = \frac{r_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)}{k}$$

$$\Delta am(a + ib) = r_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2),$$

denen noch folgende entsprechen:

$$\sin am(a - ib) = \frac{r(\cos\vartheta - i\sin\vartheta)}{k},$$

$$\cos am(a - ib) = \frac{r_1(\cos\vartheta_1 - i\sin\vartheta_1)}{k},$$

$$\Delta am(a - ib) = r_2(\cos\vartheta_2 - i\sin\vartheta_2).$$

Wendet man nun die bekannten Formeln für $\sin am(u + v)$ und $\sin am(u - v)$ (S. 399, Nro. 41) auf den Fall $u = a + ib, v = a - ib$ an, so erhält man mittelst der angegebenen Werthe von $\sin am(a + ib)$ u. s. w.

$$sin\,am(2\,a) = \frac{2\,r\,r_1\,r_2}{k^2 - r^4}\,cos(\vartheta - \vartheta_1 - \vartheta_2),$$

$$sin\,am(2\,ib) = i\,\frac{2\,r\,r_1\,r_2}{k^2 - r^4}\,sin(\vartheta - \vartheta_1 - \vartheta_2);$$

auf gleiche Weise findet man aus den Formeln für $cos\,am(u + v)$ und $cos\,am(u - v)$ (S. 400, Nro. 42)

$$cos\,am(2\,a) = \frac{r_1^2 - (r\,r_2)^2}{k^2 - r^4},$$

$$cos\,am(2\,ib) = \frac{r_1^2 + (r\,r_2)^2}{k^2 - r^4}.$$

Hiernach ist

$$tng\,am(2\,a) = \frac{2\,r\,r_1\,r_2}{r_1^2 - (r\,r_2)^2}\,cos(\vartheta - \vartheta_1 - \vartheta_2),$$

$$tng\,am(i\,.\,2\,b) = i\,\frac{2\,r\,r_1\,r_2}{r_1^2 + (r\,r_2)^2}\,sin(\vartheta - \vartheta_1 - \vartheta_2).$$

Zur Vereinfachung dieser Formeln benutzen wir einen Hülfswinkel γ, welcher durch die Gleichung

178) $$tng\,\gamma = \frac{r\,r_2}{r_1}$$

bestimmt sein möge; es ist dann

$$\frac{2\,r\,r_1\,r_2}{r_1^2 - (r\,r_2)^2} = tng\,2\,\gamma, \quad \frac{2\,r\,r_1\,r_2}{r_1^2 + (r\,r_2)^2} = sin\,2\,\gamma.$$

Substituirt man diese Werthe in die vorhergehenden Gleichungen und beachtet die Relation $tng\,am(i\,.\,2\,b) = i\,sin\,am(2\,b, k')$, so gelangt man zu den beiden Formeln

179) $$tng\,am(2\,a) = tng\,2\,\gamma\,.\,cos(\vartheta - \vartheta_1 - \vartheta_2),$$

180) $$sin\,am(2\,b, k') = sin\,2\,\gamma\,.\,sin(\vartheta - \vartheta_1 - \vartheta_2),$$

wodurch die Bestimmung von a, b und $c = a + ib$ erreicht ist *).

---

*) Dass sich die elliptischen Integrale zweiter und dritter Art gleichfalls auf die Function Θ zurückführen lassen, hat Jacobi zuerst gezeigt in den Fundam. n. theor. funct. ellipt. (§. 47 bis 60); als Ausgangspunkt dient hierbei (wie auf S. 465) die Entwickelung von $sin^2\,am\,u$, zu welcher Jacobi auf etwas beschwerlichem Wege, nämlich durch Quadrirung der Entwickelung von $sin\,am\,u$, gelangt. Die zuletzt gegebene Bestimmung der Grössen a und b, in welcher gleichzeitig der Beweis liegt, dass sich jede complexe Zahl unter der Form $sin\,am(a + ib)$ darstellen lässt, wurde von Richelot geliefert in Crelle's Journal Bd. 45, S. 225.

DIE VIELFACHEN INTEGRALE.

Die vielfachen Integrale.

I. Reduction durch successive Substitutionen.

Wie bei den doppelten und dreifachen Integralen, so ist auch bei mehrfachen Integralen die Einführung neuer Variabelen das nächstliegende und gewöhnlich auch wirksamste Mittel, um möglichst viele der postulirten Integrationen zu vollziehen. Die zu diesem Zwecke nöthigen Substitutionen können entweder nach einander oder gleichzeitig vorgenommen werden, und wenn es auch für das Endresultat gleichgültig ist, ob man den einen oder anderen Modus wählt, so ist doch die Art der Rechnung nicht dieselbe für beide Fälle; im Gegentheil empfiehlt sich nicht selten die successive Substitution durch geringeren Rechnungsaufwand, grössere Uebersichtlichkeit und leichtere Bestimmung der Integrationsgrenzen für die neuen Variabelen. Einige Beispiele von möglichst allgemeinen Formen werden das Verfahren hinreichend charakterisiren.

A. Wir beschäftigen uns zunächst mit dem dreifachen Integrale

$$1)\quad W = \int\int\int \frac{x^{m-1}\, y^{n-1}\, z^{p-1}\,(1-x-y-z)^{q-1}}{(\varrho+\alpha x+\beta y+\gamma z)^{m+n+p+q}}\, dx\, dy\, dz,$$

worin sich die Integrationen auf alle diejenigen positiven x, y, z beziehen mögen, welche der Bedingung

$$0 \leqq x+y+z \leqq 1$$

genügen. Werden hiernach die Integrationsgrenzen bestimmt, so ist

$$W = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{x^{m-1}\, y^{n-1}\, z^{p-1}\,(1-x-y-z)^{q-1}}{(\varrho+\alpha x+\beta y+\gamma z)^{m+n+p+q}}\, dx\, dy\, dz.$$

Um alle oberen Integrationsgrenzen in 1 überzuführen, machen wir Gebrauch von der sehr einfachen Bemerkung, dass das Integral

$$\int_0^h f(t)\,dt$$

mittelst der Substitution $t = hu$ auf die Form

$$h\int_0^1 f(hu)\,du$$

gebracht werden kann; demgemäss setzen wir successive

$$z = (1-x-y)\,w, \qquad y = (1-x)\,v.$$

Nach der ersten Substitution ergiebt sich

$$W = \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^1 \frac{x^{m-1}\,y^{n-1}(1-x-y)^{p+q-1}w^{p-1}(1-w)^{q-1}}{[\varrho+\alpha x+\beta y+\gamma(1-x-y)\,w]^{m+n+p+q}}\,dx\,dy\,dw,$$

nach der zweiten

$$W = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x)^{n+p+q-1}v^{n-1}(1-v)^{p+q-1}w^{p-1}(1-w)^{q-1}}{[\varrho+\alpha x+(1-x)\{\beta v+\gamma(1-v)\,w\}]^{m+n+p+q}}\,dx\,dv\,dw,$$

und da jetzt alle Integrationsgrenzen absolute Constanten sind, so darf die Reihenfolge der Integrationen beliebig abgeändert werden. Die auf x bezügliche Integration lässt sich nun mittelst der auf S. 277 bewiesenen Formel Nro. 62) ausführen, welche durch die etwas bequemere

$$2)\qquad \int_0^1 \frac{t^{\mu-1}(1-t)^{\nu-1}\,dt}{[\varrho+At+B(1-t)]^{\mu+\nu}} = \frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)}\cdot\frac{1}{(\varrho+A)^{\mu}\,(\varrho+B)^{\nu}}$$

ersetzt werden möge; für $t = x$, $\mu = m$, $\nu = n+p+q$ folgt nämlich

$$W = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n+p+q)}{\Gamma(m+n+p+q)}$$

$$\cdot\frac{1}{(\varrho+\alpha)^m}\int_0^1\int_0^1 \frac{v^{n-1}(1-v)^{p+q-1}\,w^{p-1}(1-w)^{q-1}}{[\varrho+\beta v+\gamma w(1-v)]^{n+p+q}}\,dv\,dw;$$

hier kann man wieder mittelst der Formel 2) nach v integriren und erhält

$$W =$$

$$\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)\,\Gamma(p+q)}{\Gamma(m+n+p+q)}\cdot\frac{1}{(\varrho+\alpha)^m\,(\varrho+\beta)^n}\int\limits_0^1\frac{w^{p-1}\,(1-w)^{q-1}}{(\varrho+\gamma w)^{p+q}}\,dw,$$

endlich giebt die nochmalige Anwendung der Formel 2)

$$W = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)\,\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(m+n+p+q)}\cdot\frac{1}{(\varrho+\alpha)^m(\varrho+\beta)^n\,(\varrho+\gamma)^p\,\varrho^q}.$$

Wie dieses Verfahren auch bei einer grösseren Zahl von Variabelen anwendbar ist, dürfte unmittelbar einleuchten. Bezeichnet man die letzte der Grössen m, n, p, etc. mit k, so gilt überhaupt der Satz: unter der Voraussetzung, dass x, y, z, . . . alle positiven mit der Bedingung

$$0 \leqq x + y + z + \cdots \leqq 1$$

verträglichen Werthe erhalten, ist

$$3)\qquad \int\!\!\int\cdots\frac{(1-x-y-\cdots)^{k-1}\,x^{m-1}\,y^{n-1}\ldots}{(\varrho+\alpha x+\beta y+\cdots)^{k+m+n+\cdots}}\,dx\,dy\ldots$$

$$=\frac{\Gamma(k)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(k+m+n+\cdots)}\cdot\frac{1}{\varrho^k(\varrho+\alpha)^m\,(\varrho+\beta)^n\ldots}.$$

Aus den Bemerkungen, welche früher über die in Formel 62) auf S. 277 vorkommenden Constanten gemacht wurden, ersieht man leicht, dass k, m, n, etc. reelle, positive die Null übersteigende Zahlen, und dass ϱ, $\varrho + \alpha$, $\varrho + \beta$, etc. entweder positive oder solche complexe Zahlen sein müssen, deren reelle Bestandtheile positiv und von Null verschieden sind.

Das Vorkommen einer Reihe willkürlicher Constanten ϱ, α, β, etc. bietet den Vortheil, aus der Gleichung 3) beliebig viele ähnliche Formeln ableiten zu können; man erhält letztere, wenn man die Gleichung 3) in Beziehung auf die eine oder andere jener Constanten mehrmals differenzirt oder integrirt. Die Differentiation nach ϱ z. B. führt unter Beachtung der Formeln

$$\frac{dU}{d\varrho} = U\,\frac{dlU}{d\varrho},\quad \mu\,\Gamma(\mu) = \Gamma(1+\mu)$$

zu folgendem Resultate:

$$4)\qquad \int\!\!\int\cdots\frac{(1-x-y-\cdot\cdot)^{k-1}\,x^{m-1}\,y^{n-1}\ldots}{(\varrho+\alpha x+\beta y+\cdots)^{1+k+m+n+\cdot\cdot}}\,dx\,dy\ldots$$

$$=\frac{\Gamma(k)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(1+k+m+n\,.\,.)}\left\{\frac{k}{\varrho}+\frac{m}{\varrho+\alpha}+\frac{n}{\varrho+\beta}+\cdots\right\}\frac{1}{\varrho^k(\varrho+\alpha)^m(\varrho+\beta)^n\ldots},$$

und überhaupt kann man durch eine h-malige Differentiation nach ϱ den Werth des Integrales

$$\int\int\cdot\cdot\frac{(1-x-y-\cdot\cdot)^{k-1}x^{m-1}y^{n-1}\dots}{(\varrho+\alpha x+\beta y+\cdot\cdot)^{h+k+m+n+\cdot\cdot}}\,dx\,dy\dots$$

vollständig entwickeln.

Lässt man in Nro. 3) $\varrho+t$ an die Stelle von ϱ treten, multiplicirt beiderseits mit $t^{h-1}dt$ und integrirt von $t=0$ bis $t=\infty$, so kommt linker Hand zu den bisherigen Integrationen noch folgende hinzu

$$\int_0^\infty\frac{t^{h-1}dt}{(t+\varrho+\alpha x+\cdot\cdot)^{k+m+\cdot\cdot}}$$
$$=\frac{\Gamma(h)\,\Gamma(k-h+m+\cdot\cdot)}{\Gamma(k+m+n+\cdot\cdot)}\cdot\frac{1}{(\varrho+\alpha x+\cdot\cdot)^{k-h+m+\cdot\cdot}},$$

deren Werth hier nach Formel 63) auf S. 277 entwickelt ist. Auf der rechten Seite von Nro. 3) erhält man, abgesehen von den constanten Factoren, das Integral

$$\int_0^\infty\frac{t^{h-1}dt}{(t+\varrho)^k(t+\varrho+\alpha)^m(t+\varrho+\beta)^n\dots}=\int_\varrho^\infty\frac{(u-\varrho)^{h-1}du}{u^k(u+\alpha)^m(u+\beta)^n\dots},$$

worin $t=u-\varrho$ gesetzt wurde. Nach diesen Bemerkungen ergiebt sich

$$5)\quad\int\int\cdot\cdot\frac{(1-x-y-\cdot\cdot)^{k-1}x^{m-1}y^{n-1}\dots}{(\varrho+\alpha x+\beta y+\cdot\cdot)^{k-h+m+n+\cdot\cdot}}\,dx\,dy\,\cdot\cdot$$
$$=\frac{\Gamma(k)\,\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)\,\dots}{\Gamma(h)\,\Gamma(k-h+m+n+\cdot\cdot)}\int_\varrho^\infty\frac{(u-\varrho)^{h-1}\,du}{u^k(u+\alpha)^m(u+\beta)^n\dots},$$

wo h jede positive Zahl $< k+m+n+\cdots$ sein darf.

Die bisherigen Formeln können durch Aenderung von x, y, z, etc. etwas verallgemeinert werden. Ersetzt man z. B. x, y, z, etc. durch $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$, etc. und gleichzeitig α, β, γ, etc. durch $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, etc., so beziehen sich nunmehr die Integrationen auf alle der Bedingung

$$0\leqq\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}+\cdots\leqq 1$$

genügenden positiven x, y, z, etc., und dann wird aus Nro. 3)

$$6)\quad \int\int\cdots\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}-\cdots\right)^{k-1}\cdot\frac{x^{m-1}y^{n-1}\cdots dx\,dy\ldots}{(\varrho+\alpha x+\beta y+\cdots)^{k+m+n+\cdots}}$$

$$=\frac{\Gamma(k)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(k+m+n+\cdots)}\cdot\frac{a^m b^n\ldots.}{\varrho^k(\varrho+a\alpha)^m(\varrho+b\beta)^n\ldots.}$$

und aus Nro. 5)

$$7)\quad \int\int\cdots\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}-\cdots\right)^{k-1}\cdot\frac{x^{m-1}y^{n-1}\ldots dx\,dy\ldots}{(\varrho+\alpha x+\beta y+\cdots)^{k-h+m+n+\cdots}}$$

$$=\frac{\Gamma(k)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)\ldots a^m b^n\ldots}{\Gamma(h)\,\Gamma(k-h+m+n+\cdots)}\int\limits_{\varrho}^{\infty}\frac{(u-\varrho)^{h-1}\,du}{u^k(u+a\alpha)^m(u+b\beta)^n\ldots}.$$

Ersetzt man in Nro. 3) und Nro. 5) x, y, etc. durch $\left(\frac{x}{a}\right)^2$, $\left(\frac{y}{b}\right)^2$, etc., gleichzeitig α, β, etc. durch $a^2\alpha$, $b^2\beta$, etc. und m, n, etc. durch $\frac{1}{2}m$, $\frac{1}{2}n$, etc., so beziehen sich die nunmehrigen Integrationen auf alle die Bedingung

$$0\leqq\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2+\cdots\leqq 1$$

erfüllenden positiven x, y, z, etc., und dann entstehen die folgenden Formeln, in denen i die Anzahl der Integrationen bedeutet,

$$8)\quad \int\int\cdots\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\cdots\right)^{k-1}\cdot\frac{x^{m-1}y^{n-1}\ldots dx\,dy\ldots}{(\varrho+\alpha x^2+\beta y^2+\cdots)^{k+1/2(m+n+\cdots)}}$$

$$=\frac{\Gamma(k)\,\Gamma(\frac{1}{2}m)\,\Gamma(\frac{1}{2}n)\ldots.}{2^i\,\Gamma[k+\frac{1}{2}(m+n+\cdots)]}\cdot\frac{a^m b^n\ldots.}{\varrho^k(\varrho+a^2\alpha)^{1/2 m}(\varrho+b^2\beta)^{1/2 n}\ldots},$$

$$9)\quad \int\int\cdots\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\cdots\right)^{k-1}\cdot\frac{x^{m-1}y^{n-1}\ldots dx\,dy\ldots}{(\varrho+\alpha x^2+\beta y^2+\cdots)^{k-h+1/2(m+n+\cdots)}}$$

$$=\frac{\Gamma(k)\,\Gamma(\frac{1}{2}m)\,\Gamma(\frac{1}{2}n)\ldots a^m b^n\ldots}{2^i\,\Gamma(h)\,\Gamma[k-h+\frac{1}{2}(m+n+\cdots)]}\int\limits_{\varrho}^{\infty}\frac{(u-\varrho)^{h-1}\,du}{u^k(u+a^2\alpha)^{1/2 m}(u+b^2\beta)^{1/2 n}\ldots}.$$

Beispielweis erhält man für $i=3$, $k=1$, $m=n=p=1$ aus Nro. 8)

$$10)\quad \int\int\int\frac{dx\,dy\,dz}{(\varrho+\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{abc}{\varrho\sqrt{(\varrho+a^2\alpha)(\varrho+b^2\beta)(\varrho+c^2\gamma)}}$$

und aus Nro. 9), wenn $\frac{5}{2}-h=q$ gesetzt wird,

11) $$\int\int\int \frac{dx\,dy\,dz}{(\varrho + \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2)^q}$$
$$= \frac{\sqrt{\pi^3}\,abc}{8\,\Gamma(q)\,\Gamma(\frac{5}{2} - q)} \int_\varrho^\infty \frac{(u - \varrho)^{3/2 - q}\,du}{u\sqrt{(u + a^2\alpha)(u + b^2\beta)(u + c^2\gamma)}}.$$

Hiernach lässt sich die Masse von dem Octanten eines dreiachsigen Ellipsoides bestimmen, innerhalb dessen die Dichtigkeit an der Stelle xyz durch den Ausdruck

$$\frac{1}{(\varrho + \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2)^p}$$

gegeben ist. Für $p = \frac{5}{2}$ führt nämlich die Formel 10) unmittelbar zur gesuchten Massenbestimmung; für $0 < p < \frac{5}{2}$ ist die Formel 11) ebenso direct anwendbar. Im Falle $p > \frac{5}{2}$ lässt sich p in eine ganze Zahl n und in einen zwischen 0 und $\frac{5}{2}$ enthaltenen Rest q zerlegen; man benutzt dann zunächst die Formel 11) und differenzirt nachher $(n - 1)$ mal nach ϱ, wobei es unter Umständen gerathen ist, vor der Differentiation $u = \varrho v$ zu substituiren.

In den Formeln 3), 4), 5) kann man noch etwas allgemeiner die Grössen

$$x, \quad y, \ldots \quad \alpha, \quad \beta, \ldots \quad m \quad n, \ldots$$

durch $$\left(\frac{x}{a}\right)^{\mathfrak{m}}, \quad \left(\frac{y}{b}\right)^{\mathfrak{n}}, \ldots \quad a^{\mathfrak{m}}\alpha, \quad b^{\mathfrak{n}}\beta, \ldots \quad \frac{m}{\mathfrak{m}}, \quad \frac{n}{\mathfrak{n}}, \ldots$$

ersetzen; man gelangt damit zu Formeln, worin sich die Integrationen auf alle der Bedingung

$$0 \leqq \left(\frac{x}{a}\right)^{\mathfrak{m}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\mathfrak{n}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\mathfrak{p}} + \cdots \leqq 1$$

genügenden positiven x, y, z, etc. beziehen *).

B. Um zu einer wesentlichen Verallgemeinerung der vorigen Resultate zu gelangen, setzen wir voraus, dass der Werth irgend eines vielfachen Integrales

$$\int\int\int \ldots f(x, y, z, \ldots)\,dx\,dy\,dz \ldots$$

bekannt sei, worin die Variabelen alle mit der Bedingung

---

*) Die besonderen für $k = 1$, $\varrho = 1$, $\alpha = \beta = \gamma \, . \, . = 0$ aus Nro. 3), 6), 8) etc. entstehenden Resultate hat Lejeune Dirichlet in den Abhandlungen der Berliner Akademie v. J. 1839 (erschienen 1841) S. 61 nach einem anderen Verfahren entwickelt, welches später auseinandergesetzt werden soll. Für $a = b = c \ldots = 1$, $k = 1/2$, $m = n \ldots = 1$ folgt aus Nro. 9) eine specielle von Jacobi in Crelle's Journal Bd. XII, S. 60 (Nro. 15) angegebene Formel. Die obigen allgemeineren Formeln dürften neu sein.

$$0 \leqq \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + \cdots \leqq 1$$

verträglichen positiven Werthe annehmen sollen; der Integralwerth hängt dann u. A. von a, b, c, etc. ab, und es sei z. B. bei drei Veränderlichen

12) $$F(a, b, c) = \int\int\int f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Hinsichtlich der Function F bemerken wir im voraus, dass sie für $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ verschwindet, denn nimmt man erst $b = c = a$, so ist

$$F(a, a, a) = \int_0^a \int_0^{a-x} \int_0^{a-x-y} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

und daraus ergiebt sich jene Behauptung sofort für $a = 0$.

Im Folgenden mögen α, β, γ positive echte Brüche bedeuten, ferner sei zur Abkürzung

$$\sigma = (1 - \alpha)\, x + (1 - \beta)\, y + (1 - \gamma)\, z,$$

endlich bezeichne $\varphi(u)$ eine beliebige Function von u, $\varphi'(u)$ ihren Differentialquotienten. Handelt es sich nun um die Reduction des vierfachen Integrales

$$V = \int\int\int\int f(x, y, z)\, \varphi'\left(\frac{t}{\sigma + t}\right) \frac{\sigma}{(\sigma + t)^2}\, dx\, dy\, dz\, dt,$$

worin die Variabelen alle positiven der Bedingung

13) $$0 \leqq x + y + z + t \leqq 1$$

genügenden Werthe erhalten sollen, so hat man die doppelte Wahl, entweder mit der Integration in Beziehung auf t oder mit den Integrationen nach x, y, z anzufangen. Für den ersten Fall ist

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \int_0^{1-x-y-z} \varphi'\left(\frac{t}{\sigma + t}\right) \frac{\sigma\, dt}{(\sigma + t)^2}$$

und bei Ausführung der auf t bezüglichen Integration

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \left\{\varphi\left(\frac{1 - x - y - z}{1 - \alpha x - \beta y - \gamma z}\right) - \varphi(0)\right\}.$$

Die noch übrigen Integrationsgrenzen entsprechen der Bedingung

$$0 \leqq x + y + z \leqq 1,$$

man hat daher durch Integration der einzelnen Theile und unter Anwendung von Formel 12)

$$14)\quad V = \int\int\int f(x,y,z)\,\varphi\left(\frac{1-x-y-z}{1-\alpha x-\beta y-\gamma z}\right) dx\,dy\,dz - F(1,1,1)\,\varphi(0)$$

$$0 \leqq x + y + z \leqq 1.$$

Will man dagegen zuerst nach x, y, z integriren, so ist es zweckmässig, erst die Substitution

$$15)\qquad \frac{t}{\sigma + t} = u, \quad \frac{\sigma\, dt}{(\sigma + t)^2} = du$$

vorzunehmen und dann zu schreiben

$$V = \int \varphi'(u)\,du \int\int\int f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Da nach den gemachten Voraussetzungen σ und t positiv sind, so erhält u nur positive echt gebrochene Werthe inclusive $u = 0$ und $u = 1$, wie die Fälle $t = 0$ und $\sigma = 0$ zu erkennen geben; die Grenzen für u sind demnach $u = 0$ und $u = 1$. Um ferner die Grenzen für x, y, z zu bestimmen, setzen wir den aus Nro. 15) genommenen Werth

$$t = \frac{\sigma u}{1-u} = \frac{(1-\alpha)\,ux + (1-\beta)\,uy + (1-\gamma)\,uz}{1-u}$$

in die Integrationsbedingung 13) ein und erhalten

$$0 \leqq \frac{(1-\alpha u)\,x + (1-\beta u)\,y + (1-\gamma u)\,z}{1-u} \leqq 1.$$

Nach diesen Bemerkungen ist

$$V = \int_0^1 \varphi'(u)\,du \int\int\int f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$0 \leqq \frac{x}{\frac{1-u}{1-\alpha u}} + \frac{y}{\frac{1-u}{1-\beta u}} + \frac{z}{\frac{1-u}{1-\gamma u}} \leqq 1,$$

und hier ergiebt sich unmittelbar zufolge der Bedeutung von $F(a,b,c)$ in Nro. 12)

$$V = \int_0^1 \varphi'(u)\,du \,.\, F\left(\frac{1-u}{1-\alpha u}, \frac{1-u}{1-\beta u}, \frac{1-u}{1-\gamma u}\right).$$

Durch theilweise Integration unter Rücksicht auf die Gleichung $F(0,0,0) = 0$ findet man weiter

$$V = -F(1,1,1)\,\varphi(0) - \int_0^1 F'\left(\frac{1-u}{1-\alpha u}, \frac{1-u}{1-\beta u}, \frac{1-u}{1-\gamma u}\right) \cdot \varphi(u)\,du,$$

woraus durch Vergleichung mit Nro. 14) die Reduction eines neuen dreifachen Integrales folgt. Man übersieht auf der Stelle, wie sich diese Betrachtungen gleichförmig auf beliebig viele Variabele ausdehnen lassen und dass man damit zu folgendem Satze gelangt: Wenn für positive x, y, z, etc. der Werth des Integrales

$$16)\qquad \int\int\int \cdot\cdot f(x,y,z,\ldots)\,dx\,dy\,dz\ldots = F(a,b,c,\ldots),$$
$$0 \leqq \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + \cdots \leqq 1$$

bekannt ist, so gilt die allgemeinere Formel

$$17)\quad \int\int\int \cdot\cdot f(x,y,z,\ldots)\,\varphi\left(\frac{1-x-y-z-\cdots\cdots}{1-\alpha x-\beta y-\gamma z-\cdot\cdot}\right) dx\,dy\,dz\ldots$$
$$= -\int_0^1 F'\left(\frac{1-u}{1-\alpha u}, \frac{1-u}{1-\beta u}, \frac{1-u}{1-\gamma u}, \cdot\cdot\right)\varphi(u)\,du,$$
$$0 \leqq x+y+z+\cdots \leqq 1.$$

Hieran knüpft sich ein zweites Resultat. An die Stelle einer beliebigen Function $\varphi(s)$ kann man immer eine andere Function setzen, welche innerhalb eines gegebenen positiven Intervalles $s=\lambda_0$ bis $s=\lambda_1$ mit $\varphi(s)$ identisch ist, dagegen für alle ausserhalb jenes Intervalles liegenden positiven s verschwindet. Das Mittel hierzu bieten die Fourier'schen Theoreme; schreibt man nämlich statt $\varphi(s)$ die folgende neue Function von s

$$\psi(s) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos s\,\omega\,d\omega \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \varphi(\tau)\cos\omega\,\tau\,d\tau,$$

so ist in der That für alle s innerhalb des genannten Intervalles $\psi(s)=\varphi(s)$, und für alle s ausserhalb jenes Intervalles $\psi(s)=0$. Diese Bemerkung lässt sich in Formel 17) zweimal anwenden, links für

$$s = \frac{1-x-y-z-\cdots}{1-\alpha x-\beta y-\gamma z-\cdots},$$

rechts für $s=u$. Betrachtet man jedes Integral als Summe seiner Elemente, so erhalten linker Hand alle diejenigen Summanden, welche die Bedingung

$$18)\qquad \lambda_0 < \frac{1-x-y-z-\cdots}{1-\alpha x-\beta y-\gamma z-\cdot\cdot} < \lambda_1$$

nicht erfüllen, den Factor Null, mithin bleiben nur noch die der vorstehenden Bedingung genügenden Elemente übrig, d. h. die Integrationen erstrecken sich bloss auf alle der obigen Ungleichung entsprechenden x, y, z, etc. Rechter Hand fallen analog die Elemente weg, welche ausserhalb des Intervalles λ_0 bis λ_1 liegen, mithin geht die Integration nur von $u = \lambda_0$ bis $u = \lambda_1$. Beachtet man noch, dass die Ungleichung 18) in zwei Ungleichungen zerlegt werden kann, so hat man folgenden Satz: Aus der Formel 16) folgt, wenn λ_0 und λ_1 positive echte Brüche bedeuten

$$19) \quad \int\int\int \cdot\cdot f(x, y, z, \cdot\cdot)\, \varphi\left(\frac{1 - x - y - z - \cdot\cdot}{1 - \alpha x - \beta y - \gamma z - \cdot\cdot}\right) dx\, dy\, dz \ldots$$

$$= -\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} F'\left(\frac{1-u}{1-\alpha u}, \frac{1-u}{1-\beta u}, \frac{1-u}{1-\gamma u}, \cdot\cdot\right) \varphi(u)\, du$$

$$(1 - \alpha\lambda_0)x + (1 - \beta\lambda_0)y + (1 - \gamma\lambda_0)z + \cdots < 1 - \lambda_0,$$
$$(1 - \alpha\lambda_1)x + (1 - \beta\lambda_1)y + (1 - \gamma\lambda_1)z + \cdots > 1 - \lambda_1;$$

für $\lambda_0 = 0$ und $\lambda_1 = 1$ wird daraus wieder die Formel 17).

Ein sehr einfaches Beispiel hierzu liefert die Annahme

$$F(a, b) = \int\int \frac{dx\, dy}{\sqrt{xy}};$$

die Formel 6) giebt dann für $k = 1$, $\varrho = 1$, $\alpha = \beta = 0$, $m = n = \frac{1}{2}$

$$F(a, b) = \pi\sqrt{ab},$$

mithin ist

$$F\left(\frac{1-u}{1-\alpha u}, \frac{1-u}{1-\beta u}\right) = \frac{\pi(1-u)}{\sqrt{(1-\alpha u)(1-\beta u)}},$$

$$F'\left(\frac{1-u}{1-\alpha u}, \frac{1-u}{1-\beta u}\right) = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha u} + \frac{1-\beta}{1-\beta u}\right)\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha u)(1-\beta u)}},$$

und nach Nro. 19) hat man für den Fall $\varphi(u) = u^{-\frac{1}{2}}$

$$\int\int \sqrt{\frac{1 - \alpha x - \beta y}{1 - x - y}} \cdot \frac{dx\, dy}{\sqrt{xy}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left\{\frac{1-\alpha}{1-\alpha u} + \frac{1-\beta}{1-\beta u}\right\} \frac{du}{\sqrt{u(1-\alpha u)(1-\beta u)}},$$

$$(1-\alpha\lambda_0)x + (1-\beta\lambda_0)y < 1 - \lambda_0,\ (1-\alpha\lambda_1)x + (1-\beta\lambda_1)y > 1 - \lambda_1.$$

Ersetzt man die Grössen

$$x, \quad y, \quad u, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \lambda_0, \quad \lambda_1,$$

durch $\quad \dfrac{x^2}{a^2}, \quad \dfrac{y^2}{b^2}, \quad u^2, \quad \alpha^2, \quad \beta^2, \quad \lambda_0^2, \quad \lambda_1^2,$

so gelangt man zu der Formel

$$\int\int\sqrt{\left\{\frac{1-\frac{\alpha^2x^2}{a^2}-\frac{\beta^2y^2}{b^2}}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right\}}\,dx\,dy$$

$$=\tfrac{1}{4}\pi ab\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda_1}\left\{\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2u^2}+\frac{1-\beta^2}{1-\beta^2u^2}\right\}\frac{du}{\sqrt{(1-\alpha^2u^2)(1-\beta^2u^2)}},$$

$$(1-\alpha^2\lambda_0^2)\frac{x^2}{a^2}+(1-\beta^2\lambda_0^2)\frac{y^2}{b^2}<1-\lambda_0^2,$$

$$(1-\alpha^2\lambda_1^2)\frac{x^2}{a^2}+(1-\beta^2\lambda_1^2)\frac{y^2}{b^2}>1-\lambda_1^2,$$

welche in dem Falle, wo

$$\alpha^2=1-\frac{c^2}{a^2},\quad \beta^2=1-\frac{c^2}{b^2}$$

genommen wird, zur Complanation einer ellipsoidischen Viertelzone führt. Dieses Resultat stimmt mit der Formel für $\frac{1}{4}Z$ auf S. 356 überein, und zwar ist $\lambda_0=u_1$, $\lambda_1=u_0$.

Weit allgemeinere Formeln ergeben sich, wenn man in Nro. 19)

$$f(x,y,z,..)=\frac{x^{m-1}y^{n-1}z^{p-1}\dots}{(\varrho+\alpha'x+\beta'y+\gamma'z+\cdots)^{1+m+n+\cdots}}$$

setzt und die Formel 6) benutzt; es ist dann

$$F(a,b,c,..)=\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)\dots}{\Gamma(1+m+n+\cdots)}\cdot\frac{a^m b^n\dots.}{\varrho\,(\varrho+a\alpha')^m(\varrho+b\beta')^n\dots}$$

Führt man die Abkürzungen ein

$$\varrho+\alpha'=\alpha_1,\qquad \varrho+\beta'=\beta_1,\;\dots..$$
$$\alpha\varrho+\alpha'=\alpha_2,\quad \beta\varrho+\beta'=\beta_2,\;\dots..$$

so hat man

$$F\left(\frac{1-u}{1-\alpha u},\;\frac{1-u}{1-\beta u},\;\frac{1-u}{1-\gamma u},\dots\right)$$

$$=\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)\dots}{\Gamma(1+m+n+\cdots)}\cdot\frac{(1-u)^{m+n+p+\cdots}}{\varrho\,(\alpha_1-\alpha_2u)^m(\beta_1-\beta_2u)^n(\gamma_1-\gamma_2u)^p\dots},$$

wovon der Differentialquotient leicht mittelst der Formel

$$\frac{dv}{du}=v\cdot\frac{d\,l\,v}{du}$$

entwickelt werden kann; damit gelangt man zu folgendem Resultate:

$$20)\quad \int\int\cdots\varphi\left(\frac{1-x-y-\cdots}{1-\alpha x-\beta y-\cdots}\right)\frac{x^{m-1}y^{n-1}\ldots dx\,dy\ldots.}{(\varrho+\alpha' x+\beta' y+\cdots)^{1+m+n+\cdots}}$$

$$=\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(1+m+n+\cdots)}\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\frac{V(1-u)^{m+n+\cdots-1}\,\varphi(u)\,du}{(\alpha_1-\alpha_2 u)^m\,(\beta_1-\beta_2 u)^n\ldots.},$$

$$V=m\,\frac{1-\alpha}{\alpha_1-\alpha_2 u}+n\,\frac{1-\beta}{\beta_1-\beta_2 u}+\cdots,$$

worin die Integrationsbedingungen für x, y, etc. dieselben sind wie in Nro. 19). Selbstverständlich lässt sich auch diese Formel noch etwas erweitern, wenn x, y, etc. durch $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$ etc. oder allgemeiner durch $\left(\frac{x}{a}\right)^{\mathrm{m}}$, $\left(\frac{y}{b}\right)^{\mathrm{n}}$ etc. ersetzt werden.

Für $\varrho=1$, $\alpha=\alpha'=\beta=\beta'\ldots=0$ entsteht eine specielle Formel, die sich mittelst der Substitutionen $u=1-v$, $\varphi(1-v)=\psi(v)$, $1-\lambda_0=\varkappa_1$, $1-\lambda_1=\varkappa_0$ folgendermaassen darstellen lässt:

$$21)\quad \int\int\ldots x^{m-1}y^{n-1}\ldots\psi(x+y+\cdots)\,dx\,dy\ldots$$

$$=\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(m+n+\cdots)}\int_{\varkappa_0}^{\varkappa_1}v^{m+n+\cdots-1}\,\psi(v)\,dv,$$

$$\varkappa_0<x+y+z+\cdots<\varkappa_1.$$

Setzt man bei zwei Variabelen m und n als echte Brüche voraus, die sich zur Einheit ergänzen, und nimmt man weiter $\varkappa_0=0$, $\varkappa_1=\varkappa$, $\psi(v)=\Psi'(v)$, so erhält man noch die Formel

$$\int_0^{\varkappa}\int_0^{\varkappa-x}x^{m-1}y^{-m}\,\Psi'(x+y)\,dx\,dy=\frac{\pi}{\sin m\pi}\,[\Psi(\varkappa)-\Psi(0)],$$

welche mittelst der Substitutionen $x=\varkappa-\xi$, $y=\xi-\eta$, $\Psi(\varkappa-\eta)=\varphi(\eta)$ übergeht in

$$22)\quad \int_0^{\varkappa}(\varkappa-\xi)^{m-1}\,d\xi\int_0^{\xi}\frac{\varphi'(\eta)\,d\eta}{(\xi-\eta)^m}=\frac{\pi}{\sin m\pi}[\varphi(\varkappa)-\varphi(0)].$$

Daraus lässt sich, wenn $\psi(\xi)$ den Werth des ersten (nach η genommen) Integrales bezeichnet, folgender Satz machen: Sind zwei Functionen φ und ψ so von einander abhängig, dass

$$23)\quad \int_0^{\xi}\frac{\varphi'(\eta)\,d\eta}{(\xi-\eta)^m}=\psi(\xi),\qquad 0<m<1,$$

so erhält man umgekehrt φ ausgedrückt durch ψ mittelst der Formel *)

24) $$\varphi(\varkappa)-\varphi(0)=\frac{\sin m\pi}{\pi}\int_0^{\varkappa}(\varkappa-\xi)^{m-1}\,\psi(\xi)\,d\xi.$$

C. Wegen einer nachherigen Anwendung betrachten wir zunächst das einfache Integral

$$\int_0^{2\pi}\psi(a\cos\theta+b\sin\theta)\,d\theta.$$

Setzt man

$$a=h\cos\gamma,\qquad b=h\sin\gamma,\qquad h=\sqrt{a^2+b^2},$$

so wird jenes Integral zum folgenden:

$$\int_0^{2\pi}\psi\,[h\cos(\theta-\gamma)]\,d\theta=\int_{-\gamma}^{2\pi-\gamma}\psi(h\cos\eta)\,d\eta,$$

wobei $\theta-\gamma=\eta$ substituirt wurde. Das auf η bezügliche Integral lässt sich nach dem Schema

---

*) Die Resultate unter Nro. 19) und 20) dürften neu sein. Für $\varrho=1$, $\alpha'=\beta'\ldots=0$, $\lambda_0=0$, $\lambda_1=1$ entsteht aus Nro. 20) eine specielle von Catalan in Liouville's Journal de Mathématiques angegebene Formel; älter ist die von Liouville herrührende Formel 21). Den in Nro. 23) und 24) liegenden Satz hat Abel gefunden (Crelle's Journal, Bd. I, S. 153) und daran folgende dynamische Betrachtung geknüpft. Wenn sich ein Punkt nur in Folge der Schwere auf einer vertical gestellten Plancurve herabbewegt, bei welcher zwischen der Abscisse x und dem Bogen s die Gleichung $s=\varphi(x)$ besteht, so entspricht der Fallhöhe h die Fallzeit

$$t=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^h\frac{\varphi'(x)\,dx}{\sqrt{h-x}};$$

man erhält demnach t ausgedrückt durch h. Verlangt man umgekehrt die Curve, für welche t eine gegebene Function von h ist, etwa $t=\psi(h)$, so muss s durch x ausgedrückt werden und dann giebt die Formel 24)

$$\varphi(x)-\varphi(0)=\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\int_0^x\frac{\psi(h)\,dh}{\sqrt{x-h}},$$

woraus auch die Gleichung der gesuchten Curve, nämlich

$$y=\int\sqrt{[\varphi'(x)]^2-1}\,.\,dx$$

hergeleitet werden kann.

$$\int\limits_{-\gamma}^{2\pi-\gamma} = \int\limits_{-\gamma}^{0} + \int\limits_{0}^{\pi} + \int\limits_{\pi}^{2\pi} - \int\limits_{2\pi-\gamma}^{2\pi}$$

zerlegen, und wenn man rechter Hand im ersten Integrale $\eta = -\zeta$, im zweiten $\eta = +\zeta$, im dritten und vierten $\eta = 2\pi - \zeta$ setzt, so hebt sich das erste Integral gegen das vierte, und das zweite wird gleich dem dritten. Nach diesen Bemerkungen ist, wenn der Gleichförmigkeit wegen θ für ζ geschrieben wird,

$$25)\quad \int\limits_0^{2\pi} \psi(a\cos\theta + b\sin\theta)\, d\theta = 2\int\limits_0^{\pi} \psi\left(\sqrt{a^2+b^2}.\cos\theta\right) d\theta.$$

Wir beschäftigen uns ferner mit der Transformation des Doppelintegrales

$$S = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(k^2+u^2+v^2)\,\varphi(\varkappa+\lambda u+\mu v)\, du\, dv.$$

Die Einführung zweier neuen Variabelen r und θ mittelst der Gleichungen $u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$ giebt

$$S = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{2\pi} f(k^2+r^2)\,\varphi(\varkappa+\lambda r\cos\theta+\mu r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta;$$

hier lässt sich die Formel 25) für $\psi(z) = \varphi(\varkappa+z)$, $a = \lambda r$, $b = \mu r$ anwenden, und es ist daher

$$S = 2\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\pi} f(k^2+r^2)\,\varphi\left(\varkappa+\sqrt{\lambda^2+\mu^2}.r\cos\theta\right) r\, dr\, d\theta.$$

Kehrt man in dieser Formel zu den ursprünglichen Variabelen u und v zurück und stellt die erste und letzte Form von S zusammen, so hat man

$$26)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(k^2+u^2+v^2)\,\varphi(\varkappa+\lambda u+\mu v)\, du\, dv \\ &= 2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty} f(k^2+u^2+v^2)\,\varphi\left(\varkappa+\sqrt{\lambda^2+\mu^2}.u\right) du\, dv. \end{aligned}\right.$$

Der Vortheil, welcher bei dieser Transformation erreicht worden ist, besteht darin, dass rechter Hand die Function φ nur die eine Variabele u enthält, während auf der linken Seite u und v in φ vorkommen.

Hiernach lässt sich nun auch das dreifache Integral

$$T = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x^2+y^2+z^2)\,\varphi(\alpha x+\beta y+\gamma z)\,dx\,dy\,dz$$

wesentlich reduciren. Wendet man zuerst die Formel 26) auf das nach y und z genommene Doppelintegral an, indem man

$$k = x,\ u = y,\ v = z,\ \varkappa = \alpha x,\ \lambda = \beta,\ \mu = \gamma$$

setzt, so hat man zunächst

$$T = 2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f(x^2+y^2+z^2)\,\varphi\left(\alpha x+\sqrt{\beta^2+\gamma^2}\,.\,y\right)dx\,dy\,dz;$$

ferner ist die Formel 26) wieder auf das nach x und y genommene Doppelintegral anwendbar mittelst der Substitutionen

$$k = z,\ u = x,\ v = y,\ \varkappa = 0,\ \lambda = \alpha,\ \mu = \sqrt{\beta^2+\gamma^2},$$

und es ergiebt sich

$$T = 4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f(x^2+y^2+z^2)\,\varphi\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\,.\,x\right)dx\,dy\,dz,$$

wo nun die Function φ nur die eine Variabele x enthält, während sie ursprünglich x, y, z enthielt.

Man übersieht augenblicklich, wie sich dieses einfache Verfahren auch bei mehr als drei Variabelen ausführen lässt; bezeichnet überhaupt n die Anzahl der Variabelen, und wird zur Abkürzung

27) $$\varrho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\cdots}$$

gesetzt, so entsteht die Gleichung

28) $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdot\cdot f(x^2+y^2+z^2+\cdot\cdot)\,\varphi(\alpha x+\beta y+\gamma z+\cdot\cdot)\,dx\,dy\,dz\,..$$

$$= 2^{n-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\cdot\cdot f(x^2+y^2+z^2+\cdot\cdot)\,\varphi(\varrho x)\,dx\,dy\,dz\ldots$$

Hier ist noch eine bedeutende Reduction möglich. Nach Formel 21) hat man nämlich in etwas anderen Buchstaben

$$\int\int\cdot\cdot\,\eta^{p-1}\zeta^{q-1}\cdot\cdot F(\eta+\zeta+\cdot\cdot)\,d\eta\,d\zeta\,\cdot\cdot$$

$$= \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)\cdot\cdot}{\Gamma(p+q+\cdot\cdot)}\int_0^h v^{p+q+\cdot\cdot-1}\,F(v)\,dv,$$

worin sich die Integrationen auf alle positiven, der Bedingung

$$0 < \eta + \zeta + \cdots < h$$

genügenden η, ζ, etc. beziehen. Nimmt man hier $p = q \ldots = \frac{1}{2}$, $h = \infty$, substituirt ferner

$$\eta = y^2, \zeta = z^2, \ldots., \quad v = y^2$$

und setzt $n - 1$ Variabele voraus, so erhält man die Formel

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \cdot\cdot F(y^2 + z^2 + \cdot\cdot)\, dy\, dz \cdot\cdot$$

$$= \frac{\pi^{1/2(n-1)}}{2^{n-2}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\infty y^{n-2} F(y^2)\, dy,$$

welche auf das nach $y, z, \ldots$ genommene $(n-1)$fache Integral in Nro. 28) anwendbar ist, wenn $F(t) = f(x^2 + t)$ gesetzt wird. Nach diesen Bemerkungen ergiebt sich

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \cdot\cdot f(x^2 + y^2 + z^2 + \cdot\cdot)\, \varphi(\alpha x + \beta y + \gamma z + \cdot\cdot)\, dx\, dy\, dz \cdot\cdot$$

$$= \frac{2\pi^{1/2(n-1)}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty f(x^2 + y^2)\, \varphi(\varrho x)\, y^{n-2}\, dx\, dy.$$

Um diese Formel noch etwas zu verallgemeinern, lassen wir linker Hand $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$, etc. an die Stellen von x, y, z, etc. und gleichzeitig $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, etc. für α, β, γ, etc. eintreten; es wird dann

$$29)\quad \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \cdot\cdot f\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \cdot\cdot\right) \varphi(\alpha x + \beta y + \gamma z + \cdot\cdot)\, dx\, dy\, dz \cdot\cdot$$

$$= \frac{2\pi^{1/2(n-1)}\, a\, b\, c \cdot\cdot}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty f(x^2 + y^2)\, \varphi(\varrho x)\, y^{n-2}\, dx\, dy,$$

$$\varrho = \sqrt{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 + \cdot\cdot}$$

Denkt man sich anstatt $f(s)$ eine andere Function von s gesetzt, welche für $s < 1$ mit $f(s)$ identisch ist und für $s > 1$ verschwindet, so fallen aus dem Integrale linker Hand alle Elemente weg, bei denen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} +$ etc. mehr als die Einheit beträgt, und daher beziehen sich die Integrationen nur noch auf alle positiven und negativen, die Bedingung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \text{etc.} < 1$ erfüllenden x, y, etc. Ebenso verschwinden rechter Hand alle Integralelemente, bei denen $x^2 + y^2 > 1$ wird, und daher erstrecken sich die Integrationen nur über die positiven und negativen x, sowie über die positiven y, welche $x^2 + y^2 < 1$ lassen, woraus die Integrationsgrenzen $x = -1$ und $x = +1$, $y = 0$ und $y = +\sqrt{1 - x^2}$ folgen. Nach diesen Bemerkungen zusammen ist

$$30)\quad \int\int\int \cdot\cdot f\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \cdot\cdot\right) \varphi(\alpha x + \beta y + \gamma z + \cdot\cdot)\, dx\, dy\, dz \ldots$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{1}{2}(n-1)}\, a\, b\, c \ldots}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x^2 + y^2)\, \varphi(\varrho x)\, y^{n-2}\, dx\, dy,$$

$$0 < \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 + \cdot\cdot < 1.$$

Im speciellen Falle $n = 3$ giebt dies, wenn $f(s) = F'(s)$ gesetzt wird,

$$31)\quad \int\int\int F'\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) \varphi(\alpha x + \beta y + \gamma z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \pi a b c \int_{-1}^{+1} [F(1) - F(x^2)]\, \varphi(\varrho x)\, dx.$$

Nimmt man $F(s) = s$, $a = b = c$, und substituirt rechter Hand $x = \frac{u}{c}$, so erhält man unter der Bedingung

$$0 < x^2 + y^2 + z^2 < c^2$$

$$\int\int\int \varphi(\alpha x + \beta y + \gamma z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \pi \int_{-c}^{c} (c^2 - u^2)\, \varphi\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \,.\, u\right) du$$

oder für $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta\cos\omega$, $z = r\sin\theta\sin\omega$

$$\int_0^c \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha r\cos\theta + \beta r\sin\theta\cos\omega + \gamma r\sin\theta\sin\omega)\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\omega$$

$$= \pi \int_{-c}^{c} (c^2 - u^2)\, \varphi\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \,.\, u\right) du.$$

Differenzirt man in Beziehung auf c und setzt nachher $c = 1$, so erhält man noch

$$32)\quad \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta\cos\omega + \gamma\sin\theta\sin\omega)\sin\theta\, d\theta\, d\omega$$
$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \varphi\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\,.u\right) du.$$

Zu einer ähnlichen und allgemeineren Formel gelangt man, wenn man in Nro. 30) $f(s) = 1$, $a = b = c \ldots$ setzt und für x, y, etc. ganz analoge Substitutionen anwendet.

Lässt man zweitens in der Gleichung 29) an die Stelle von $\varphi(\sigma)$ eine andere Function treten, welche mit $\varphi(\sigma)$ identisch oder gleich Null ist, jenachdem σ innerhalb oder ausserhalb eines gegebenen Intervalles σ_0 bis σ_1 liegt, so beziehen sich linker Hand die Integrationen nur auf alle die positiven und negativen x, y, z, etc., für welche $\sigma_0 < \alpha x + \beta y +$ etc. $< \sigma_1$ ist; ebenso fallen rechts alle Integralelemente weg, welche der Bedingung $\sigma_0 < \varrho x < \sigma_1$ oder $\frac{\sigma_0}{\varrho} < x < \frac{\sigma_1}{\varrho}$ nicht genügen. Diese Schlüsse führen zu der Formel

$$33)\quad \int\int\int \ldots f\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\cdots\right)\varphi(\alpha x+\beta y+\gamma z+\cdots)\, dx\, dy\, dz \ldots$$
$$= \frac{2\pi^{\frac{1}{2}(n-1)}\, a b c \ldots}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{\frac{\sigma_0}{\varrho}}^{\frac{\sigma_1}{\varrho}} \int_0^{\infty} f(x^2+y^2)\,\varphi(\varrho x)\, y^{n-2}\, dx\, dy,$$
$$\sigma_0 < \alpha x + \beta y + \gamma z + \cdots < \sigma_1.$$

Wenn endlich die beiden in Nro. 30) und 33) vorkommenden Integrationsbedingungen gleichzeitig erfüllt werden sollen, so sind rechter Hand die für x und y gefundenen Bedingungen

$$-1 < x < +1, \qquad 0 < y < \sqrt{1-x^2},$$
$$\frac{\sigma_0}{\varrho} < x < \frac{\sigma_1}{\varrho}, \qquad 0 < y < \infty$$

ebenfalls gleichzeitig einzuhalten. Dies geschieht hinsichtlich des y, wenn diese Variabele auf das kleinere der beiden Intervalle, also auf $0 < y < \sqrt{1-x^2}$ beschränkt wird; bei x dagegen muss man erst unterscheiden, ob die beiden Grössen $\frac{\sigma_0}{\varrho}$ und $\frac{\sigma_1}{\varrho}$ innerhalb des Intervalles -1 bis $+1$ liegen, oder ob nur eine oder ob keine derselben zwischen -1 und $+1$ enthalten ist, und nachher wählt man für x das kleinere der beiden oben angegebenen Intervalle. Für solche positiven und negativen x, welche den Bedingungen

$$34)\quad \begin{cases} 0 < \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 + \cdots < 1 \\ \sigma_0 < \alpha x + \beta y + \gamma z + \cdots < \sigma_1 \end{cases}$$

gleichzeitig genügen sollen, erhält man demnach

$$35)\quad \int\int\int \cdot\cdot f\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\cdot\cdot\right)\varphi(\alpha x+\beta y+\gamma z+\cdot\cdot)\,dx\,dy\,dz\,..$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{1}{2}(n-1)}abc\,..}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{x_0}^{x_1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x^2+y^2)\,\varphi(\varrho x)\,y^{n-2}\,dx\,dy,$$

und darin sind die Werthe der Integrationsgrenzen x_0, x_1 folgende

$$\text{für } -1 < \frac{\sigma_0}{\varrho} < \frac{\sigma_1}{\varrho} < +1,\quad x_0 = \frac{\sigma_0}{\varrho},\quad x_1 = \frac{\sigma_1}{\varrho},$$

$$\text{„}\ -1 > \frac{\sigma_0}{\varrho},\quad \frac{\sigma_1}{\varrho} < +1,\quad x_0 = -1,\quad x_1 = \frac{\sigma_1}{\varrho},$$

$$\text{„}\ -1 < \frac{\sigma_0}{\varrho},\quad \frac{\sigma_1}{\varrho} > +1,\quad x_0 = \frac{\sigma_0}{\varrho},\quad x_1 = +1,$$

$$\text{„}\ -1 > \frac{\sigma_0}{\varrho},\quad \frac{\sigma_1}{\varrho} > +1,\quad x_0 = -1,\quad x_1 = +1.$$

In dem sehr speciellen Falle $f(s) = \varphi(\sigma) = 1$, $n = 3$ giebt diese Formel das Volumen derjenigen Zone eines Ellipsoides, welche zwischen den beiden Parallelebenen

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \sigma_0 \text{ und } \alpha x + \beta y + \gamma z = \sigma_1$$

enthalten ist.

Es verdient noch bemerkt zu werden, dass die Transformationen, welche mit den Integralen S und T vorgenommen wurden und zur Formel 29) führten, wörtlich dieselben bleiben, wenn man an die Stelle von $f(s)\,\varphi(\sigma)$ eine neue Function $F(s, \sigma)$ treten lässt; im Folgenden muss man voraussetzen, dass einmal $F(s, \sigma)$ für alle der Bedingung $0 < s < 1$ nicht genügenden s verschwindet, und dass sich andererseits $F(s, \sigma)$ bei solchen σ annullirt, welche ausserhalb des Intervalles σ_0 bis σ_1 liegen; die Endformeln sind dann wieder dieselben und enthalten $F(s, \sigma)$ statt $f(s)\,\varphi(\sigma)$ *).

*) Die Formeln 29), 30), 33) und 35) sind vom Verf. entwickelt worden in den Sitzungsberichten der Königl. Sächs. Ges. der Wissensch., Jahrg. 1857,

II. Reduction durch simultane Substitutionen.

Wenn es darauf ankommt, die in einem mehrfachen Integrale enthaltenen Variabelen x, y, z, etc. gleichzeitig durch neue Variabelen ξ, η, ζ, etc. zu ersetzen, welche mit den früheren durch gegebene Gleichungen verbunden sind, so ist man, wie sich nachher zeigen wird, genöthigt, eine Reihe von Gleichungen ersten Grades zwischen beliebig vielen Unbekannten aufzulösen. Wir schicken daher eine Erörterung über dieses Problem voraus.

Bildet man aus n verschiedenen Grössen $a, b, c, \ldots g, h$ die Differenzen zwischen jeder Grösse und allen ihren Vorgängern, nämlich

$$\begin{gathered} b-a, \\ c-a,\ c-b, \\ d-a,\ d-b,\ d-c, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ h-a,\ h-b, \ldots\ldots\ldots\ h-g, \end{gathered}$$

so besitzt das Product sämmtlicher Differenzen

$$P_n = (b-a)(c-a)(c-b)\ldots\ldots(h-a)(h-b)\ldots(h-g)$$

die Eigenschaft, dass es jedesmal zu Null wird, sobald man für eine der Grössen eine der übrigen setzt, z. B. a statt b oder g statt c. Der Grund dieses Verschwindens liegt einfach darin, dass bei jeder solchen Substitution einer der Factoren von P_n in Null übergeht. Selbstverständlich kommt die genannte Eigenschaft von P_n auch dem entwickelten Producte zu, z. B. für $n = 3$ dem Aggregate

$$P_3 = bc^2 - b^2c + ca^2 - c^2a + ab^2 - a^2b,$$

und zwar geschieht das Verschwinden von P_n dann so, dass sich zu jedem Summanden ein anderer findet, welcher ihm gleich und entgegengesetzt ist.

Aus dem entwickelten Producte bilden wir einen neuen Ausdruck, indem wir jeden Potenzexponenten in einen gleichgrossen

---

S. 67. Dass man $f(s)\varphi(\sigma)$ durch $F(s,\sigma)$ ersetzen darf, hat Genocchi bemerkt, *Annali di science matematiche et fisiche, compilati da B. Tortolini*, T. VIII, p. 284. Viel älter ist die Formel 32), welche sich zuerst auf p. 128 von Poisson's Abhandlung *Sur l'intégration de quelques équations etc.* in den *Mémoires de l'académie de Paris, année* 1818 (erschienen 1820) findet; sie wurde später von Heine auf eine beliebige Zahl von Variabelen ausgedehnt, Crelle's Journal, Bd. 61, S. 356.

Index verwandeln, wodurch z. B. $a^3 b^2 c^7$ in $a_3 b_2 c_7$ und analog $b^3 c^5 = a^0 b^3 c^5$ in $a_0 b_3 c_5$ übergeht; diesen neuen Ausdruck nennen wir Q_n. Hiernach liefert z. B. $P_2 = a^0 b^1 - a^1 b^0$ den Werth

$$Q_2 = a_0 b_1 - a_1 b_0,$$

ebenso leicht erhält man

$$Q_3 = a_0 b_1 c_2 - a_0 b_2 c_1 + b_0 c_1 a_2 - b_0 c_2 a_1 + c_0 a_1 b_2 - c_0 a_2 b_1;$$

überhaupt ist Q_n eine gewisse Function der n^2 Grössen

$$\begin{array}{cccccc} a_0, & b_0, & c_0, & \ldots & g_0, & h_0, \\ a_1, & b_1, & c_1, & \ldots & g_1, & h_1, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{n-1}, & b_{n-1}, & c_{n-1}, & \ldots & g_{n-1}, & h_{n-1} \end{array}$$

und heisst die Determinante derselben. Man bezeichnet sie entweder kurz mittelst eines Summenzeichens

$$Q_n = \Sigma (\pm a_0 b_1 c_2 \ . \ . \ . \ g_{n-2} h_{n-1})$$

oder ausführlicher durch

$$Q_n = \begin{vmatrix} a_0, & b_0, & \ldots & h_0 \\ a_1, & b_1, & \ldots & h_1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n-1}, & b_{n-1}, & \ldots & h_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Die Determinante Q_n besteht aus $1 . 2 \ldots n$ theils positiven theils negativen Gliedern, deren jedes von der Form $a_p b_q \ldots h_s$ ist; die Indices $p, q, \ldots s$ werden durch alle möglichen Vertauschungen der Zahlen $0, 1, 2, \ldots (n-1)$ gebildet, und dabei erhält der betreffende Summand das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem seine Indices durch eine gerade oder durch eine ungerade Anzahl von Vertauschungen entstanden sind.

Es erhellt nun leicht, dass sich die Haupteigenschaft von P_n unmittelbar auf Q_n übertragen lässt. Wurde nämlich einer der Buchstaben $a, b, \ldots h$ durch einen der übrigen ersetzt, so verschwand das entwickelte Product P_n, weil jeder Summand desselben durch einen gleichen und entgegengesetzten Summanden aufgehoben wurde; die Verwandlung der Exponenten in Indices stört weder die Gleichheit noch die Vorzeichen solcher Summanden, mithin verschwindet Q_n unter denselben Umständen wie P_n. Dieser Satz lässt sich auch in Gleichungen darstellen, wenn man die Determinante entweder nach den a oder nach den b u. s. w. anordnet. Bezeichnen wir mit $A_0 a_0$ die Summe aller Glieder, welche den gemeinschaftlichen Factor a_0 besitzen, ebenso mit $A_1 a_1$ die Summe aller den

Factor a_1 enthaltenden Glieder u. s. w., so können wir Q_n folgendermaassen darstellen

$$Q_n = A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \cdots + A_{n-1} a_{n-1},$$

und dann gelten nach dem Vorigen die $n - 1$ Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= A_0 b_0 + A_1 b_1 + A_2 b_2 + \cdots + A_{n-1} b_{n-1}, \\ 0 &= A_0 c_0 + A_1 c_1 + A_2 c_2 + \cdots + A_{n-1} c_{n-1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 &= A_0 h_0 + A_1 h_1 + A_2 h_2 + \cdots + A_{n-1} h_{n-1}. \end{aligned}$$

Mittelst dieser Relationen gelangt man rasch zur Auflösung des folgenden Systemes von n linearen Gleichungen zwischen den n Unbekannten $X, Y, Z, \ldots W$:

$$36)\quad \begin{cases} a_0 X + b_0 Y + c_0 Z + \cdots + h_0 W = k_0, \\ a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + \cdots + h_1 W = k_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1} X + b_{n-1} Y + c_{n-1} Z + \cdots + h_{n-1} W = k_{n-1}. \end{cases}$$

Man multiplicire nämlich die erste Gleichung mit A_0, die zweite mit A_1, die dritte mit A_2 u. s. w.; die Summe aller Producte ist dann

$$\begin{aligned} &(A_0 a_0 + A_1 a_1 + \cdots + A_{n-1} a_{n-1}) X \\ +&(A_0 b_0 + A_1 b_1 + \cdots + A_{n-1} b_{n-1}) Y \\ +&(A_0 c_0 + A_1 c_1 + \cdots + A_{n-1} c_{n-1}) Z \\ +&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +&(A_0 h_0 + A_1 h_1 + \cdots + A_{n-1} h_{n-1}) W \\ =&\ A_0 k_0 + A_1 k_1 + \cdots + A_{n-1} k_{n-1}. \end{aligned}$$

Der Coefficient von X ist die Determinante Q_n; die Coefficienten von $Y, Z, \ldots W$ sind zufolge der obenerwähnten Relationen gleich Null, mithin enthält die Gleichung nur die eine Unbekannte X. Auf der rechten Seite steht gleichfalls eine Determinante, welche sich von Q_n dadurch unterscheidet, dass k an der Stelle von a steht. Nach diesen Bemerkungen ergiebt sich

$$37)\quad X = \frac{\Sigma\,(\pm\, k_0 b_1 c_2 \ldots h_{n-1})}{\Sigma\,(\pm\, a_0 b_1 c_2 \ldots h_{n-1})}.$$

Zur Bestimmung von Y dient dasselbe Verfahren, wobei man Q_n erst unter der Form $B_0 b_0 + B_1 b_1 +$ etc. darstellt, die Gleichungen 36) mit B_0, B_1, etc. multiplicirt und die Producte addirt; man erhält

$$Y = \frac{\Sigma\,(\pm\, a_0 k_1 c_2 \ldots h_{n-1})}{\Sigma\,(\pm\, a_0 b_1 c_2 \ldots h_{n-1})}.$$

Auf gleiche Weise findet sich

$$Z = \frac{\Sigma\,(\pm\, a_0\, b_1\, k_2\, \ldots\, h_{n-1})}{\Sigma\,(\pm\, a_0\, b_1\, c_2\, \ldots\, h_{n-1})}$$

u. s. w. bis zuletzt

$$W = \frac{\Sigma\,(\pm\, a_0\, b_1\, c_2\, \ldots\, g_{n-2}\, k_{n-1})}{\Sigma\,(\pm\, a_0\, b_1\, c_2\, \ldots\, g_{n-2}\, h_{n-1})}.$$

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir das n-fache Integral

38) $$S = \int\int \ldots F(t, s, \ldots y, x)\, dt\, ds \ldots dy\, dx,$$

dessen Integrationen in der Reihenfolge x, y, ... s, t zu vollziehen sind, und beschäftigen uns mit der Aufgabe, an die Stelle der bisherigen Variabelen n neue Veränderliche ξ, η, ... σ, τ einzuführen, welche mit jenen durch die Gleichungen

39) $$x = f_0(\xi, \eta, \ldots \tau), \quad y = f_1(\xi, \eta, \ldots \tau), \quad z = f_2(\xi, \eta, \ldots \tau), \ldots$$
$$t = f_{n-1}(\xi, \eta, \ldots \tau)$$

verbunden sind. Nennen wir $\Phi(\tau, \ldots \eta, \xi)$ die neue Function von ξ, η, ... τ, in welche $F(t, \ldots y, x)$ nach Substitution der gegebenen Werthe übergeht, und setzen wir ferner

$$dt\, ds \ldots dy\, dx = \Omega\, dt\, d\sigma \ldots d\eta\, d\xi,$$

so erhalten wir

40) $$S = \int\int \ldots \Phi(\tau, \sigma, \ldots \eta, \xi)\, \Omega\, d\tau\, d\sigma \ldots d\eta\, d\xi;$$

im Wesentlichen kommt also das Problem auf die Bestimmung der Unbekannten Ω zurück.

Da sich die erste der früheren Integrationen auf x bezieht, so sind zunächst y, z, ... t als Constanten anzusehen, und die n Gleichungen 39) enthalten demnach die $n+1$ Variabelen $x, \xi, \eta, \zeta, \ldots \tau$; die Differentiation giebt daher, wenn die partiellen Differentialquotienten $\frac{df}{d\xi}$, $\frac{df}{d\eta}$, etc. kurz mit $D_\xi f$, $D_\eta f$, etc. bezeichnet werden,

$$\begin{aligned}
dx &= D_\xi f_0 \,.\, d\xi + D_\eta f_0 \,.\, d\eta + \cdots + D_\tau f_0 \,.\, d\tau \\
0 &= D_\xi f_1 \,.\, d\xi + D_\eta f_1 \,.\, d\eta + \cdots + D_\tau f_1 \,.\, d\tau, \\
0 &= D_\xi f_2 \,.\, d\xi + D_\eta f_2 \,.\, d\eta + \cdots + D_\tau f_2 \,.\, d\tau, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= D_\xi f_{n-1} \,.\, d\xi + D_\eta f_{n-1} \,.\, d\eta + \cdots + D_\tau f_{n-1} \,.\, d\tau.
\end{aligned}$$

Um mittelst dieser n Gleichungen den Zusammenhang zwischen dx und $d\xi$ zu finden, benutzen wir die durch Formel 37) gegebene Auflösung der Gleichungen 36), indem wir als Unbekannte ansehen $X = d\xi$, $Y = d\eta$, etc. und $k_0 = dx$, $k_1 = k_2 \ldots = 0$ nehmen.

Wegen der letzteren besonderen Werthe ist $\Sigma\,(\pm\,k_0 b_1 c_2 \ldots h_{n-1}) = k_0 \Sigma (\pm\, b_1 c_2 \ldots h_{n-1})$, mithin

$$d\xi = \frac{\Sigma\,(\pm\,D_\eta f_1 \cdot D_\zeta f_2 \ldots D_\tau f_{n-1})}{\Sigma\,(\pm\,D_\xi f_0 \cdot D_\eta f_1 \cdot D_\zeta f_2 \ldots D_\tau f_{n-1})}\, dx$$

und umgekehrt

$$dx = \frac{\Sigma\,(\pm\,D_\xi f_0 \cdot D_\eta f_1 \cdot D_\zeta f_2 \ldots D_\tau f_{n-1})}{\Sigma\,(\pm\,D_\eta f_1 \cdot D_\zeta f_2 \ldots D_\tau f_{n-1})}\, d\xi.$$

Denken wir uns diesen Werth eingesetzt und in dem einen vielfachen Integrale die Integration nach x, im anderen die auf ξ bezügliche Integration ausgeführt, so sind zusammen noch die Variabelen $y, z, \ldots t$ und $\eta, \zeta, \ldots \tau$ vorhanden, unter denen aber, wegen der jetzt folgenden auf y bezüglichen Integration, $z, \ldots t$ als Constanten gelten. Differenziren wir nun die $n-1$ Gleichungen $y = f_1$, $z = f_2, \ldots t = f_{n-1}$ in Beziehung auf die in Frage kommenden Variabelen, so haben wir die $n-1$ Gleichungen

$$\begin{aligned}
dy &= D_\eta f_1 \,.\, d\eta + D_\zeta f_1 \,.\, d\zeta + \cdots + D_\tau f_1 \,.\, d\tau,\\
0 &= D_\eta f_2 \,.\, d\eta + D_\zeta f_2 \,.\, d\zeta + \cdots + D_\tau f_2 \,.\, d\tau,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0 &= D_\eta f_{n-1} \,.\, d\eta + D_\zeta f_{n-1} \,.\, d\zeta + \cdots + D_\tau f_{n-1} \,.\, d\tau;
\end{aligned}$$

aus diesen ergiebt sich durch ähnliche Schlüsse wie vorhin

$$dy = \frac{\Sigma\,(\pm\,D_\eta f_1 \,.\, D_\zeta f_2 \ldots D_\tau f_{n-1})}{\Sigma\,(\pm\,D_\zeta f_2 \ldots\ldots D_\tau f_{n-1})}\, d\eta.$$

Nunmehr sind noch die Variabelen $z, \zeta, \varrho \ldots \tau$ vorhanden, in Beziehung auf welche die Gleichungen $z = f_2, \ldots t = f_{n-1}$ differenzirt werden müssen; die Entwickelung von dz liefert

$$dz = \frac{\Sigma\,(\pm\,D_\zeta f_2 \,.\, D_\varrho f_3 \ldots D_\tau f_{n-1})}{\Sigma\,(\pm\,D_\varrho f_3 \ldots D_\tau f_{n-1})}\, dz.$$

Auf diese Weise fortgehend erhält man als vorletzte Gleichung

$$ds = \frac{\Sigma\,(\pm\,D_\sigma f_{n-2} \,.\, D_\tau f_{n-1})}{\Sigma\,(\pm\,D_\tau f_{n-1})}\, d\sigma,$$

worin $\Sigma\,(\pm\,D_\tau f_{n-1}) = D_\tau f_{n-1}$ ist, und als letzte Gleichung, wo nur $t = f_{n-1}$ zu differenziren bleibt,

$$dt = D_\tau f_{n-1} \,.\, d\tau.$$

Multiplicirt man die für $dx, dy, \ldots dt$ gefundenen Werthe und beachtet, dass der Nenner jedes solchen Werthes gleich dem Zähler des folgenden Werthes ist, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
&dt\, ds \ldots dy\, dx\\
&= \Sigma\,(\pm\,D_\xi f_0 \,.\, D_\eta f_1 \ldots D_\tau f_{n-1})\, d\tau\, d\sigma \ldots d\eta\, d\xi.
\end{aligned}$$

Endlich wollen wir $f_0, f_1, \dots f_{n-1}$ ganz vermeiden, indem wir dafür wieder $x, y, \dots t$ schreiben; es ist dann

$$\Omega = \Sigma(\pm D_\xi x \,.\, D_\eta y \,.\, D_\zeta z \dots D_\tau t),$$

oder ausführlicher dargestellt

$$41)\qquad \Omega = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi}, & \frac{\partial x}{\partial \eta}, & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \dots & \frac{\partial x}{\partial \tau} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi}, & \frac{\partial y}{\partial \eta}, & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \dots & \frac{\partial y}{\partial \tau} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi}, & \frac{\partial z}{\partial \eta}, & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \dots & \frac{\partial z}{\partial \tau} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial t}{\partial \xi}, & \frac{\partial t}{\partial \eta}, & \frac{\partial t}{\partial \zeta} \dots & \frac{\partial t}{\partial \tau} \end{vmatrix}$$

Der Factor Ω ist demnach die Determinante aus den n^2 partiellen Differentialquotienten von x, y, z, etc., genommen nach ξ, η, ζ etc.; man pflegt sie die Functionaldeterminante des gegebenen Gleichungensystemes (39) zu nennen.

Bei zwei Variabelen wird

$$\Omega = \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta},$$

und bei dreien

$$\Omega = \frac{\partial x}{\partial \xi}\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \zeta}\right) + \frac{\partial y}{\partial \xi}\left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \zeta}\right) + \frac{\partial z}{\partial \xi}\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \zeta}\right),$$

wie schon in Thl. I. bewiesen worden ist *).

Um hiervon eine Anwendung zu geben, setzen wir zunächst zwei Variabele x, y voraus, welche mit zwei neuen Variabelen u und v durch die beiden Gleichungen

$$42)\qquad \frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{u^2 - h^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{v^2} + \frac{y^2}{v^2 - h^2} = 1,$$

---

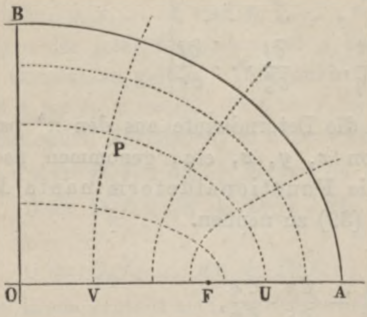
*) Die Transformation eines Doppelintegrales hat Euler gezeigt in den *Nov. Comment. Petropol.* XIV (1759), I, pag. 72; für das dreifache Integral gab Lagrange die Bestimmung von Ω in den *Mém. de l'Académie de Berlin*, 1773, p. 125. Die Theorie der Determinanten und deren Anwendung auf die Transformation vielfacher Integrale ist von Jacobi begründet worden; s. Crelle's Journal, Bd. III, S. 253; IV, 321; X, 101; XII, 1; XXII, 285 u. 319.

oder

43) $$x = \frac{uv}{h}, \qquad y = \frac{\sqrt{(u^2 - h^2)(h^2 - v^2)}}{h}$$

verbunden sein mögen. Betrachten wir für den Augenblick u und v als Constanten und nehmen $u > h > v$, so repräsentirt die erste der Gleichungen 42) eine Ellipse mit den Halbachsen u und $\sqrt{u^2 - h^2}$, die zweite eine Hyperbel mit den Halbachsen v, $\sqrt{h^2 - v^2}$; beide Curven haben dieselbe lineare Excentricität $h = OF$ (Fig. 66), mithin gemeinschaftliche Brennpunkte. Einem mit dem Minimalwerthe $u = h$ anfangenden und continuirlich wachsenden u entspricht eine Schaar confocaler Ellipsen, deren kleinste eine Gerade von der Länge $2h$, und deren grösste ein mit dem Radius $u = \infty$ beschriebener Kreis ist. Einem von $v = h$ bis $v = 0$ abnehmenden v entspricht eine Schaar confocaler Hyperbeln, deren erste mit der x-Achse, und deren letzte mit der y-Achse zusammenfällt.

Fig. 66.



Hieraus ist ersichtlich, dass jeder durch die rechtwinkeligen Coordinaten x und y bestimmte Punkt P auch als Durchschnitt einer Ellipse UP und einer Hyperbel VP angesehen werden darf, wobei $OU = u$, $OV = v$ ist. Nachdem hiermit die geometrische Bedeutung der neuen Variabelen u und v, welche **elliptische Coordinaten in der Ebene** heissen, festgestellt ist, hat es keine Schwierigkeit, die Grösse

$$\Omega = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}$$

mittelst der Formeln 43) zu berechnen; man erhält schliesslich

44) $$\int\int F(x, y)\, dx\, dy$$
$$= -\int\int F\left(\frac{uv}{h}, \frac{\sqrt{(u^2 - h^2)(h^2 - v^2)}}{h}\right) \frac{(u^2 - v^2)\, du\, dv}{\sqrt{(u^2 - h^2)(h^2 - v^2)}}.$$

Beispielsweis sei das Integral linker Hand folgendes:

$$\int\int \frac{dx\, dy}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}};$$

darin mögen sich die Integrationen auf alle diejenigen positiven Werthe von x und y beziehen, für welche das im Nenner stehende Radical reell bleibt, d. h. geometrisch, der Spielraum des Punktes xy sei die Fläche eines aus den Halbachsen $OA = a$ und $OB = b$ construirten Ellipsenquadranten. Nimmt man $h = \sqrt{a^2 - b^2}$ oder $b^2 = a^2 - h^2$, so gehört diese Ellipse zu den vorhin erwähnten confocalen Ellipsen, und dann muss u von h bis a wachsen, v von h bis 0 abnehmen; die Formel 44) giebt jetzt

$$\int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}}$$

$$= ab \int_h^a \int_0^h \frac{(u^2 - v^2)\,du\,dv}{\sqrt{(a^2-u^2)(a^2-v^2)(u^2-h^2)(h^2-v^2)}}.$$

Der Werth des linker Hand stehenden Integrales findet sich mittelst der Substitutionen $x = a\varrho \cos\theta$, $y = b\varrho \sin\theta$ und ist $= \frac{1}{2}\pi ab$; man hat demnach

$$\int_h^a \int_0^h \frac{(u^2 - v^2)\,du\,dv}{\sqrt{(a^2-u^2)(a^2-v^2)(u^2-h^2)(h^2-v^2)}} = \frac{\pi}{2},$$

wo nun a und $h < a$ beliebige reelle Grössen bedeuten. Setzt man noch $a = 1$, $h =$ einem echten Bruch $\varkappa$, ferner $\sqrt{1-\varkappa^2} = \varkappa'$ und substituirt

$$u = \sqrt{1 - \varkappa'^2 \sin^2\psi}, \quad v = \varkappa \sin\varphi,$$

so gelangt man zu der Gleichung

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(1-\varkappa^2\sin^2\varphi) + (1-\varkappa'^2\sin^2\psi) - 1}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)(1-\varkappa'^2\sin^2\psi)}}\,d\varphi\,d\psi = \frac{\pi}{2},$$

und aus dieser folgt durch Integration der einzelnen Theile

$$EK' + E'K - KK' = \tfrac{1}{2}\pi,$$

wobei die abgekürzte Bezeichnung für die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung angewendet ist *).

---

*) Die obige Eigenschaft von E, K, E', K' findet sich zuerst bei Legendre im *Traité des fonctions elliptiques,* T. I, p. 61. Man kann sie leicht

Als stereometrisches Gegenstück zum Vorigen mögen noch die elliptischen Coordinaten im Raume betrachtet werden. Finden nämlich zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z und den neuen Variabelen u, v, w die folgenden drei Gleichungen statt

$$45)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{u^2}+\dfrac{y^2}{u^2-h^2}+\dfrac{z^2}{u^2-k^2}=1, \\[2mm] \dfrac{x^2}{v^2}+\dfrac{y^2}{v^2-h^2}+\dfrac{z^2}{v^2-k^2}=1, \\[2mm] \dfrac{x^2}{w^2}+\dfrac{y^2}{w^2-h^2}+\dfrac{z^2}{w^2-k^2}=1, \end{cases}$$

so ist der Punkt xyz der Durchschnitt von drei Flächen zweiter Ordnung. Unter den Voraussetzungen

$$k > h,$$

$$u > k, \qquad k > v > h, \qquad h > w$$

ist die erste Fläche ein Ellipsoid, die zweite ein einfaches Hyperboloid, welches sich in der Richtung der z erstreckt, die dritte ein getheiltes Hyperboloid, das in der Richtung der x unendlich fortgeht; alle drei Flächen haben dieselben linearen Excentricitäten $h, k, \sqrt{k^2-h^2}$ und sind demnach confocal. Lässt man u von seinem Minimalwerthe k an wachsen, so entsteht eine Schaar von Ellipsoiden, deren erstes ein elliptisch begrenzter Theil der xy-Ebene und deren letztes eine unendlich grosse Kugel ist. Einem von k bis h abnehmenden v entspricht ferner eine Schaar einfacher Hyperboloide; das erste derselben fällt mit der xy-Ebene, das letzte mit der xz-Ebene zusammen. Lässt man endlich w von h bis 0 abnehmen, so entsteht eine Schaar getheilter Hyperboloide, deren erstes in die xz-Ebene und deren letztes in die yz-Ebene fällt.

Aus den Gleichungen zwischen x, y, z und u, v, w erhält man

$$46)\qquad x=\frac{uvw}{hk},$$

$$y=\frac{\sqrt{(u^2-h^2)(v^2-h^2)(h^2-w^2)}}{h\sqrt{k^2-h^2}}, \quad z=\frac{\sqrt{(u^2-k^2)(k^2-v^2)(k^2-w^2)}}{k\sqrt{k^2-h^2}},$$

wobei zur Abkürzung sein möge:

---

dadurch verificiren, dass man beiderseits in Beziehung auf $\varkappa$ differenzirt und hierbei die auf S. 301 und 302 angegebenen Formeln für $\dfrac{dE}{d\varkappa}$, $\dfrac{dF}{d\varkappa}$ nebst der Gleichung $\varkappa\, d\varkappa = -\varkappa'\, d\varkappa'$ benutzt.

$$47)\quad \begin{cases} \sqrt{u^2-h^2}=u_1, & \sqrt{u^2-k^2}=u_2, \\ \sqrt{v^2-h^2}=v_1, & \sqrt{k^2-v^2}=v_2, \\ \sqrt{h^2-w^2}=w_1, & \sqrt{k^2-w^2}=w_2. \end{cases}$$

Durch Berechnung der Functionaldeterminante gelangt man nun zu folgender Transformation

$$48)\quad \int\int\int F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$
$$=\int\int\int \Phi(u,v,w)\,\frac{(u^2-v^2)(u^2-w^2)(v^2-w^2)}{u_1u_2v_1v_2w_1w_2}\,du\,dv\,dw.$$

Als Beispiel diene der einfache Fall $F(x, y, z) = 1$, wobei die Integrationen auf alle positiven der Bedingung

$$0<\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2<1$$

genügenden x, y, z ausgedehnt werden sollen; das Integral linker Hand bedeutet dann das Volumen von dem Octanten eines aus den Halbachsen a, b, c construirten Ellipsoides, besitzt also den Werth $\frac{1}{6}\pi abc$. Nimmt man rechter Hand $h=\sqrt{a^2-b^2}$, $k=\sqrt{a^2-c^2}$ oder

$$b=\sqrt{a^2-h^2}, \qquad c=\sqrt{a^2-k^2},$$

so gehört dieses Ellipsoid zu der vorhin erwähnten Schaar confocaler Ellipsoide, und es ist dann u von k bis a, v von k bis h, w von h bis 0 auszudehnen; dies giebt folgende Formel

$$\int_k^a\int_h^k\int_0^h \frac{(u^2-v^2)(u^2-w^2)(v^2-w^2)}{u_1u_2v_1v_2w_1w_2}\,du\,dv\,dw$$
$$=\tfrac{1}{6}\pi a\sqrt{(a^2-h^2)(a^2-k^2)}.$$

Bemerkenswerth ist noch der Grenzfall des soeben erörterten Coordinatensystems, d. h. derjenige Fall, bei welchem die Ellipsoide in Kugeln, und die Hyperboloide in ihre Asymptotenkegel übergehen. Setzt man nämlich $u=r$, $v=\varepsilon s$, $w=\varepsilon t$, εh für h sowie εk für k und lässt schliesslich ε zu Null werden, so verwandeln sich die Gleichungen 45) in folgende

$$49)\quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2=r^2 \\ \dfrac{x^2}{s^2}+\dfrac{y^2}{s^2-h^2}+\dfrac{z^2}{s^2-k^2}=0, \\ \dfrac{x^2}{t^2}+\dfrac{y^2}{t^2-h^2}+\dfrac{z^2}{t^2-k^2}=0, \end{cases}$$

und nun ist der Punkt xyz der Durchschnitt einer Kugel mit zwei elliptischen Kegeln, wobei analog dem Früheren

$$r > 0, \qquad k > h, \quad k > s > h, \qquad h > t$$

sein muss. Statt der Formeln 46) erhält man

$$50)\qquad x = \frac{rst}{hk},$$

$$y = \frac{r\sqrt{(s^2 - h^2)(h^2 - t^2)}}{h\sqrt{k^2 - h^2}}, \qquad z = \frac{r\sqrt{(k^2 - s^2)(k^2 - t^2)}}{k\sqrt{k^2 - h^2}},$$

und wenn zur Abkürzung

$$51)\qquad \begin{cases} s_1 = \sqrt{s^2 - h^2}, & s_2 = \sqrt{k^2 - s^2}, \\ t_1 = \sqrt{h^2 - t^2}, & t_2 = \sqrt{k^2 - t^2} \end{cases}$$

gesetzt wird, so geht die Gleichung 48) in nachstehende über

$$52)\qquad \int\int\int F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$
$$= \int\int\int \Phi\,(r, s, t)\, \frac{r^2(s^2 - t^2)}{s_1 s_2 t_1 t_2}\, dr\, ds\, dt.$$

Diese Transformation lässt sich noch in einer anderen Form darstellen. Substituirt man nämlich

$$\frac{\sqrt{k^2 - h^2}}{k} = \lambda, \qquad \frac{h}{k} = \lambda', \qquad (\lambda^2 + \lambda'^2 = 1),$$
$$s = k\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\varphi}, \qquad t = k\lambda' \sin\psi,$$

so sind die Werthe von x, y, z

$$53)\qquad x = r\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\varphi}\,.\,\sin\psi, \qquad y = r\cos\varphi\cos\psi,$$
$$z = r\sin\varphi\sqrt{1 - \lambda'^2 \sin^2\psi}$$

und aus Nro. 52) wird

$$54)\qquad \int\int\int F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$
$$= -\int\int\int \Phi\,(r, \varphi, \psi)\, \frac{r^2(1 - \lambda^2\sin^2\varphi - \lambda'^2\sin^2\psi)}{\sqrt{(1 - \lambda^2\sin^2\varphi)(1 - \lambda'^2\sin^2\psi)}}\, dr\, d\varphi\, d\psi.$$

Im Falle $\lambda = 1$, $\lambda' = 0$, $\psi = \frac{1}{2}\pi - \chi$ geht dieses System der elliptischen Kugelcoordinaten in das System der gewöhnlichen Polarcoordinaten im Raume über*).

---

*) Die elliptischen Coordinaten sind hauptsächlich von Lamé eingeführt und zur Lösung von Aufgaben aus der Wärmetheorie benutzt worden; s. Liouville's Journal Bd. II, S. 147 (*Mémoire sur les surfaces isothermes*),

III. Reduction vielfacher Integrale auf Producte aus einfachen Integralen.

Wenn bei einem mehrfachen Integrale

$$\int\int\int\cdot\cdot f(x,y,z,..)\,dx\,dy\,dz\,\ldots$$

die Function $f(x,y,z,\ldots)$ in ein Product von Functionen der einzelnen Variabelen zerlegt werden kann, etwa

$$f(x,y,z,\ldots)=\varphi(x)\,\psi(y)\,\chi(z)\ldots,$$

und wenn gleichzeitig alle Integrationsgrenzen absolute Constanten sind, so reducirt sich das mehrfache Integral von selbst auf ein Product einfacher Integrale, nämlich

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1}\cdot\cdot\,\varphi(x)\,\psi(y)\,\chi(z)\,\ldots\,dx\,dy\,dz\,\ldots$$

$$=\left[\int_{x_0}^{x_1}\varphi(x)\,dx\right]\left[\int_{y_0}^{y_1}\psi(y)\,dy\right]\left[\int_{z_0}^{z_1}\chi(z)\,dz\right]\ldots.$$

und damit ist die Hauptschwierigkeit überwunden, weil es Mittel genug zur numerischen Berechnung einfacher Integrale giebt. Freilich wird eine derartige Sonderung der Variabelen meistens nicht direct ausführbar sein, wohl aber glückt es in vielen Fällen, durch Zusatz eines passenden Factors, der selber ein Integral ist, sie ausführbar zu machen. Die hierzu verwendbaren Mittel wird das folgende Beispiel zeigen.

Das zu reducirende Integral sei

$$P=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdot\cdot\frac{\cos\left[\lambda\left(x^2+y^2+z^2+\cdots\right)\right]dx\,dy\,dz\,\ldots}{\sqrt{(ax-\alpha)^2+(by-\beta)^2+(cz-\gamma)^2+\cdots}}.$$

Bei der Unmöglichkeit, den Cosinus auf die vorhin erwähnte Art in Factoren zu zerlegen, ist es schon ein Vortheil, wenn man statt des gegebenen Integrales das folgende betrachtet:

Bd. IV, S. 100 (*Sur l'équilibre des températures etc.*) und die beiden Werke: *Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes, Paris* 1857, und *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications, Paris* 1859.

55) $$R = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdot\cdot \frac{e^{i\lambda(x^2+y^2+z^2+\cdots)}\,dx\,dy\,dz\,..}{\sqrt{(ax-\alpha)^2+(by-\beta)^2+(cz-\gamma)^2+\cdots}},$$

von welchem P der reelle Bestandtheil ist, denn hier kann bereits die Exponentialgrösse in Factoren aufgelöst werden. Um ferner den unbequemen Nenner wegzuschaffen, erinnern wir an die auf S. 275 bewiesene Formel

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}}\,e^{iku}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{k}}\,e^{\frac{1}{4}i\pi}$$

oder

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{1}{4}i\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}}\,e^{iku}\,du$$

und benutzen dieselbe für $k = (ax-\alpha)^2 + (by-\beta)^2 + \cdots$. Setzen wir überhaupt zur Abkürzung

$$s = x^2 + y^2 + z^2 + \cdots,$$
$$r^2 = (ax-\alpha)^2 + (by-\beta)^2 + (cz-\gamma)^2 + \cdots,$$

so können wir R unter folgender Form darstellen:

$$R = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots e^{i\lambda s}\,dx\,dy\cdots\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{1}{4}i\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}}\,e^{ir^2u}\,du.$$

Versparen wir die auf u bezügliche Integration bis zuletzt, so ist

56) $$R = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{1}{4}i\pi}\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdot\cdot\, e^{i(\lambda s+ur^2)}\,dx\,dy\ldots$$

In dem vielfachen Integrale nach x, y, etc. kann nun die Sonderung der Variabelen ausgeführt werden. Zufolge der Werthe von s und r^2 hat man nämlich

$$\begin{aligned}\lambda s + ur^2 = {} & (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\cdots)\,u \\ & + (a^2u+\lambda)\,x^2 - 2\,a\alpha u x \\ & + (b^2u+\lambda)\,y^2 - 2\,b\beta u y \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots,\end{aligned}$$

mithin zerfällt das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdot\cdot\, e^{i(\lambda s+ur^2)}\,dx\,dy\ldots$$

in das Product aus folgenden Factoren:

$$e^{i(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\cdots)u},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i[(a^2u+\lambda)x^2-2a\alpha ux]}\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i[(b^2u+\lambda)y^2-2b\beta uy]}\,dy,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Die Werthe der einfachen Integrale nach x, y, etc. findet man mittelst der Formel 54) auf S. 275; vereinigt man hierauf alle Factoren, setzt zur Abkürzung

$$v=\frac{\alpha^2\lambda u}{a^2u+\lambda}+\frac{\beta^2\lambda u}{b^2u+\lambda}+\frac{\gamma^2\lambda u}{c^2u+\lambda}+\cdots$$

und bezeichnet mit n die Anzahl der Variabelen x, y, z, etc., so gelangt man zu dem Ergebnisse, dass das nach x, y, etc. genommene Integral gleich ist

$$\frac{\sqrt{\pi^n}\,e^{\frac{1}{4}in\pi+iv}}{\sqrt{(a^2u+\lambda)(b^2u+\lambda)(c^2u+\lambda)\ldots}}.$$

Hieraus folgt nach Nro. 56)

$$R=\sqrt{\pi^{n-1}}\,e^{\frac{1}{4}i(n-1)\pi}\int_0^\infty\frac{e^{iv}\,du}{\sqrt{u\,(a^2u+\lambda)(b^2u+\lambda)\ldots}}.$$

Durch Einführung einer neuen Variabelen t mittelst der Substitution

$$u=\frac{\lambda}{t}$$

erhält man noch, wenn zur Abkürzung

57) $$T=\frac{\alpha^2}{a^2+t}+\frac{\beta^2}{b^2+t}+\frac{\gamma^2}{c^2+t}+\cdots$$

gesetzt wird,

58) $$R=\sqrt{\frac{\pi^{n-1}}{\lambda^{n-1}}}\,e^{\frac{1}{4}i(n-1)\pi}\int_0^\infty\frac{t^{\frac{1}{2}(n-3)}\,e^{i\lambda T}\,dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)\ldots}}.$$

Schliesslich kann man in Nro. 55) und 58) die reellen und die imaginären Theile vergleichen; die Resultate sind dann

59)
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\frac{\cos[\lambda(x^2+y^2+\cdots)]\,dx\,dy\cdots}{\sqrt{(ax-\alpha)^2+(by-\beta)^2+\cdots}}$$
$$=\sqrt{\frac{\pi^{n-1}}{\lambda^{n-1}}}\int_0^\infty\frac{t^{1/2(n-3)}\cos[\frac{1}{4}(n-1)\pi+\lambda T]\,dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)\ldots}},$$

60)
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\frac{\sin[\lambda(x^2+y^2+\cdots)]\,dx\,dy\ldots}{\sqrt{(ax-\alpha)^2+(by-\beta)^2+\cdots}}$$
$$=\sqrt{\frac{\pi^{n-1}}{\lambda^{n-1}}}\int_0^\infty\frac{t^{1/2(n-3)}\sin[\frac{1}{4}(n-1)\pi+\lambda T]\,dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)\ldots}}.$$

Aus diesem Beispiele dürfte hinreichend ersichtlich sein, wie sich das anfangs erwähnte Princip auf vielfache Integrale anwenden lässt, wenn die gegebenen Integrationsgrenzen absolute Constanten sind. Bei den meisten Integralen, die zur Lösung mechanischer, physikalischer und anderer Probleme gebraucht werden, ist aber diese Bedingung nicht erfüllt, vielmehr bestimmen sich die Integrationsgrenzen gewöhnlich durch Ungleichungen wie $0 < x + y + \cdots < 1$ oder $0 < x^2 + y^2 + \cdots < 1$ u. dgl. In solchen Fällen muss man zunächst dem vielfachen Integrale absolut constante Grenzen verschaffen entweder durch Substitution neuer Variabelen oder auf einem anderen Wege, den wir sogleich zeigen wollen.

In dem vielfachen Integrale
$$U=\int\int\int\ldots f(x,y,z,\ldots)\,dx\,dy\,dz\ldots$$
mögen sich die Integrationen auf alle diejenigen $x, y, z, \ldots$ beziehen, welche der Bedingung

61) $$0<\varphi(x,y,z,\ldots)<1$$

genügen, und es seien mittelst letzterer die Integrationsgrenzen x_0 und x_1 für x, y_0 und y_1 für y etc. bestimmt worden. Zufolge der summatorischen Bedeutung jedes Integrales kann man jetzt
$$U=\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\ldots f(x,y,\ldots)\,dx\,dy\ldots$$
als Theil eines anderen und ähnlichen Integrales
$$V=\int_{X_0}^{X_1}\int_{Y_0}^{Y_1}\ldots f(x,y,\ldots)\,dx\,dy\ldots$$

ansehen, dessen Integrationsintervalle weiter sind als die entsprechenden Intervalle in U, d. h.

$$X_0 < x_0 < x_1 < X_1, \quad Y_0 < y_0 < y_1 < Y_1, \text{ u. s. w.},$$

denn in der That enthält V dieselben Elemente wie U und ausserdem unendlich viele andere Elemente, welche der Bedingung 61) nicht genügen. Könnte man diese überschüssigen Elemente aus V wegschaffen, so würde sich V in U verwandeln. Zu einer solchen Elimination eignet sich nun das Integral

$$62) \qquad \varepsilon = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega\cos s\omega}{\omega}\,d\omega,$$

dessen Werth nach den Formeln 20) und 21) auf S. 195 und 196 ist

$$\varepsilon = 1, \qquad \text{für } 0 < s < 1,$$
$$\varepsilon = 0, \qquad \text{für } \quad s > 1.$$

Setzt man nämlich $s = \varphi(x, y, z, \ldots)$ und betrachtet das neue Integral

$$W = \int_{X_0}^{X_1}\int_{Y_0}^{Y_1} \ldots \varepsilon\, f(x, y, \ldots)\, dx\, dy \ldots$$

als Summe seiner Elemente, so werden alle Elemente, welche der Bedingung 61) nicht genügen, durch das Verschwinden von ε ausgeschieden, und die übrig bleibenden Elemente von W sind, wegen $\varepsilon = 1$, dieselben wie die entsprechenden Elemente in U, d. h. es ist $W = U$. Mit anderen Worten, statt des Integrales U, welches an die Bedingung 61) gebunden ist, kann man das neue Integral

$$\frac{2}{\pi}\int\int \cdots \int_0^\infty \frac{\sin\omega\cos s\omega}{\omega} f(x, y, \ldots)\, dx\, dy \ldots d\omega$$

setzen und darin die auf $x, y, \ldots$ bezüglichen Integrationsgrenzen beliebig erweitern, etwa von 0 bis 1 oder von 0 bis ∞ u. dgl.

Dieselbe Bemerkung passt auch auf das allgemeinere Integral

$$S = \int\int \ldots F[\varphi(x, y, \ldots)] f(x, y, \ldots)\, dx\, dy \ldots,$$

dessen Integrationsgrenzen durch die Bedingung

$$\lambda_0 < \varphi(x, y, \ldots) < \lambda_1$$

bestimmt sein mögen. Unter der Voraussetzung positiver λ_0, λ_1 und für

$$\varphi(x, y, \ldots) = s > 0$$

ist nämlich der Werth des Doppelintegrales

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \cos s\omega\, d\omega \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda_1} F(\theta) \cos\omega\theta\, d\theta$$

$= F(s)$ oder $= 0$, jenachdem s zwischen λ_0 und λ_1 liegt oder nicht; man hat also

$$S = \frac{2}{\pi}\int\int ..f(x,y,..)\,dx\,dy \int\limits_0^\infty \cos s\omega\, d\omega \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda_1} F(\theta)\cos\omega\theta\, d\theta$$

und zugleich darf man die Integrationsgrenzen für x, y, etc. beliebig ausdehnen, weil das als Factor zugesetzte Doppelintegral alle der Integrationsbedingung $\lambda_0 < s < \lambda_1$ nicht genügende Elemente ausscheidet. Ein Beispiel mag diese Methode erläutern.

In dem dreifachen Integrale

$$S = \int\int\int F\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}}$$

mögen sich die Integrationen auf alle positiven und negativen, der Bedingung

$$0 < \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1$$

genügenden Werthe von x, y, z beziehen; wir setzen zunächst, um Brüche zu vermeiden, ax, by, cz für x, y, z und haben dann

$$S = abc\int\int\int \frac{F(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{(ax-\alpha)^2 + (by-\beta)^2 + (cz-\gamma)^2}}$$
$$0 < x^2 + y^2 + z^2 < 1,$$

wobei wir die Abkürzungen

$$s = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$r^2 = (ax-\alpha)^2 + (by-\beta)^2 + (cz-\gamma)^2$$

benutzen wollen. Nach den vorhin angestellten Erörterungen können wir S durch das folgende fünffache Integral

$$S = \frac{2abc}{\pi}\int\int\int \frac{dx\,dy\,dz}{r}\int\limits_0^\infty \cos s\omega\, d\omega \int\limits_0^1 F(\theta)\cos\omega\theta\, d\theta$$

ersetzen und hierin die auf x, y, z bezüglichen Integrationen zwischen beliebig erweiterten Grenzen, also auch zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$, vornehmen; dies giebt, wenn gleichzeitig die Reihenfolge der Integrationen geändert wird,

$$S = \frac{2\,abc}{\pi}\int_0^\infty dw \int_0^1 F(\theta)\cos\omega\theta\, d\theta \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega s}{r}\,dx\,dy\,dz.$$

Das dreifache Integral nach x, y, z findet sich aus Nro. 59) für $n = 3$, $\lambda = \omega$, mithin ist

$$S = -2\,abc\int_0^\infty d\omega \int_0^1 F(\theta)\cos\omega\theta\, d\theta \cdot \frac{1}{\omega}\int_0^\infty \frac{\sin\omega T\, dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}},$$

worin T den Werth hat

$$T = \frac{\alpha^2}{a^2+t} + \frac{\beta^2}{b^2+t} + \frac{\gamma^2}{c^2+t}.$$

Vergleicht man die erste und letzte Form von S, so hat man bei etwas anderer Reihenfolge der Integrationen

$$64)\quad \int\!\!\int\!\!\int F\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}$$

$$= -2\,abc\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}\int_0^\infty \frac{\sin T\omega}{\omega}\,d\omega\int_0^1 F(\theta)\cos\omega\theta\, d\theta.$$

Hieran knüpft sich ein weiteres Resultat. Durch Differentiation in Beziehung auf α, welches rechter Hand nur in T vorkommt, entsteht nämlich die neue Gleichung

$$65)\quad \int\!\!\int\!\!\int F\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{(\alpha-x)\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{[(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2]^3}}$$

$$= 4\,abc\,\alpha\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)^3(b^2+t)(c^2+t)}}\int_0^\infty \cos T\omega\, d\omega\int_0^1 F(\theta)\cos\omega\theta\, d\theta,$$

und man übersieht auf der Stelle, dass der Werth des Doppelintegrales

$$U = \int_0^\infty \cos T\omega\, d\omega \int_0^1 F(\theta)\cos\omega\theta\, d\theta$$

mittelst des Fourier'schen Satzes gefunden werden kann, und zwar $= \frac{1}{2}\pi F(T)$ oder Null ist, jenachdem T weniger oder mehr als die Einheit beträgt. Um dies beurtheilen zu können, unterscheiden wir die beiden Fälle

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} < 1$$

und

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} > 1.$$

Im ersten Falle ist wegen des immer positiven t

$$\frac{\alpha^2}{a^2 + t} + \frac{\beta^2}{b^2 + t} + \frac{\gamma^2}{c^2 + t} < 1,$$

d. h. $T < 1$, mithin $U = \frac{1}{2}\pi F(T)$ und nach Nro. 65)

$$66)\quad \int\int\int F\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{(\alpha - x)\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{[(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2]^3}}$$

$$= 2\pi abc\alpha \int\limits_0^\infty \frac{F(T)\,dt}{\sqrt{(a^2+t)^3\,(b^2+t)\,(c^2+t)}}.$$

Im zweiten Falle ist anfangs, d. h. für $t = 0$ und überhaupt für hinreichend kleine t immer noch $T > 1$. Während aber t das Intervall 0 bis ∞ durchläuft, nimmt T fortwährend ab und convergirt gegen die Null; es giebt daher eine Stelle, bis zu welcher $T > 1$ ist und über welche hinaus $T < 1$ wird und bleibt. Diese Stelle bestimmt sich durch Auflösung der Gleichung $T = 1$, d. h. der cubischen Gleichung

$$\frac{\alpha^2}{a^2 + t} + \frac{\beta^2}{b^2 + t} + \frac{\gamma^2}{c^2 + t} = 1,$$

welche, dem Gesagten zufolge, nur eine reelle positive Wurzel haben kann. Nennen wir letztere τ, so ist

$$\begin{array}{lll} \text{für } t < \tau, & T > 1, & U = 0, \\ \text{für } t > \tau, & T < 1, & U = \frac{1}{2}\pi F(T). \end{array}$$

Um diese verschiedenen t zu sondern, braucht man nur das auf t bezügliche Integral auf der rechten Seite von Nro. 65) in zwei Integrale von $t = 0$ bis $t = \tau$ und von $t = \tau$ bis $t = \infty$ zu zerlegen. Im ersten Integrale ist dann $t < \tau$ mithin $U = 0$, und folglich verschwindet das Integral; es bleibt nur

$$67)\quad \int\int\int F\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{(\alpha - x)\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{[(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2]^3}}$$

$$= 2\pi abc\alpha \int\limits_\tau^\infty \frac{F(T)\,dt}{\sqrt{(a^2+t)^3\,(b^2+t)\,(c^2+t)}}.$$

Den Grenzfall

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 1$$

kann man zu jedem der beiden Hauptfälle rechnen; es ist dann $\tau = 0$, und die Formeln 66) und 67) werden identisch.

Aehnliche Resultate ergeben sich, wenn man die Gleichung 64) in Beziehung auf β oder γ differenzirt; sie sind von Werth für die Berechnung der Anziehung, welche ein mit Masse erfülltes Ellipsoid auf einen irgendwie liegenden materiellen Punkt ausübt *).

---

*) Die Integration mittelst des sogenannten Discontinuitätsfactors ε (Nr. 62) ist von Lejeune-Dirichlet gezeigt worden in den Abhandlungen der Berliner Akademie v. J. 1839 (erschienen 1841), S. 61; dass man die Fourier'schen Doppelintegrale als allgemeinere Discontinuitätsfactoren verwenden kann, dürfte der Verf. zuerst bemerkt haben (Analytische Studien, Bd. II, §. 23).

DIE INTEGRATION

DER LINEAREN

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

ZWEITER ORDNUNG.

Die Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Vorläufige Erörterungen.

Bei mechanischen und physikalischen Problemen wird nicht selten die Integration von Differentialgleichungen erforderlich, welche unter der Form

1) $$(a_2 + b_2 x) \frac{d^2 y}{d x^2} + (a_1 + b_1 x) \frac{d y}{d x} + (a_0 + b_0 x) y = 0$$

enthalten und daher als lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu bezeichnen sind. Wie diese Integration unter allen Umständen ausgeführt werden kann, wollen wir im Folgenden zeigen.

Um gleich diejenigen Fälle zu erledigen, bei denen man mit den gewöhnlichsten Hülfsmitteln ausreicht, discutiren wir vorerst die naheliegende Frage, unter welchen Umständen die Differentialgleichung 1) ein particuläres Integral von der Form

2) $$y = e^{\lambda x}$$

besitzt, wo λ eine noch zu bestimmende Constante bezeichnet. Die Substitution des genannten Ausdrucks giebt nun

$$(a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) + (b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0) x = 0,$$

was für jedes x richtig ist, wenn die Gleichungen

3) $$\begin{cases} a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0, \\ b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0 = 0 \end{cases}$$

zusammen bestehen. Diese Coexistenz findet erstens statt, sobald die vorliegenden Gleichungen zwei gemeinschaftliche Wurzeln haben; dann würde sich aber die zweite Gleichung nur durch einen gemeinschaftlichen Factor k von der ersten unterscheiden, d. h.

$$b_2 = k a_2,\ \ b_1 = k a_1,\ \ b_0 = k a_0$$

sein, und statt der Differentialgleichung 1) hätte man die einfachere

$$a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0\, y = 0,$$

deren vollständiges Integral bekanntlich ist

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

$$\lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{(a_1)^2 - 4 a_0 a_2}}{2 a_2},\ \ \lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{(a_1)^2 - 4 a_0 a_2}}{2 a_2}.$$

Die Gleichungen 3) können aber auch zusammen bestehen, wenn sie nur eine gemeinschaftliche Wurzel besitzen und diese für λ genommen wird. Eine solche gemeinschaftliche Wurzel ist vorhanden, sobald die Coefficienten $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ derjenigen Gleichung genügen, welche durch Elimination von λ aus den Gleichungen 3) entsteht, nämlich

4) $$(a_0 b_1 - a_1 b_0)(a_1 b_2 - a_2 b_1) = (a_0 b_2 - a_2 b_0)^2;$$

diese ist gleichzeitig die gesuchte Bedingung, unter welcher $y = e^{\lambda x}$ ein particuläres Integral der Differentialgleichung 1) darstellt.

Um hieraus das allgemeine Integral abzuleiten, setzen wir

5) $$y = e^{\lambda x} z,$$

wo λ die vorige Bedeutung hat und z eine neue abhängige Variabele bezeichnet. Wir erhalten jetzt

$$\left.\begin{aligned}(a_2 + b_2 x)\frac{d^2 z}{dx^2} + [2\lambda(a_2 + b_2 x) + (a_1 + b_1 x)]\frac{dz}{dx}\\ + [(a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0) + (b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0)x]\,z\end{aligned}\right\} = 0;$$

hier verschwindet der Coefficient von z, und wenn

$$\frac{dz}{dx} = z',\quad \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{dz'}{dx}$$

gesetzt wird, so giebt die Trennung der Variabelen

6) $$\frac{dz'}{z'} = -\left[2\lambda + \frac{a_1 + b_1 x}{a_2 + b_2 x}\right] dx.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung ist sehr einfach, erfordert aber die Unterscheidung der beiden Fälle $b_2 = 0$ und $b_2 \lesseqgtr 0$.

Für $b_2 = 0$ erhält man aus No. 6)

$$\begin{aligned} l z' &= -\left(2\lambda + \frac{a_1}{a_2}\right)x - \frac{b_1}{2a_2}x^2 + C\\ &= -(2\lambda + \varkappa)x - \mu x^2 + C,\end{aligned}$$

worin $\varkappa$ und μ unmittelbar verständliche Abkürzungen sind; weiter ist

$$z' = C_1\, e^{-(2\lambda + \varkappa)x - \mu x^2},$$

daraus findet sich z und nachher

$$7)\qquad y = e^{\lambda x}\left[C_0 + C_1 \int e^{-(\varkappa + 2\lambda)x - \mu x^2} dx\right],$$

$$\varkappa = \frac{a_1}{a_2},\quad \mu = \frac{b_1}{2\, a_2}.$$

Wegen $b_2 = 0$ ist zufolge der zweiten Gleichung in Nro. 3)

$$\lambda = -\frac{b_0}{b_1}$$

und die Bedingungsgleichung 4) lautet einfacher

$$(a_0 b_1 - a_1 b_0)\, b_1 + a_2 b_0^2 = 0.$$

Wenn zweitens b_2 einen von Null differirenden Werth besitzt, so liefert die Gleichung 6)

$$l\, z' = -\left(2\lambda + \frac{b_1}{b_2}\right) x + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{(b_2)^3}\, l\,(a_2 + b_2 x) + C$$

und schliesslich

$$8)\qquad y = e^{\lambda x}\left[C_0 + C_1 \int e^{-(\varkappa + 2\lambda)x} (a_2 + b_2 x)^{\mu}\, dx\right]$$

$$\varkappa = \frac{b_1}{b_2},\quad \mu = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{(b_2)^3};$$

dabei ist λ die gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen 3).

Wie man sieht, kann das allgemeine Integral der Differentialgleichung 1) immer entwickelt werden, wenn die Bedingung 4) erfüllt ist; im Folgenden setzen wir daher voraus, dass die Gleichung 4) nicht stattfinde.

Transformationen der allgemeinen Differentialgleichung.

Bevor wir an die Integration der allgemeinen Gleichung 1) gehen, wollen wir erst zeigen, wie letztere durch Transformationen vereinfacht und auf eine gewisse Normalform zurückgeführt werden kann. Der leichteren Uebersicht wegen unterscheiden wir drei Hauptfälle, ob nämlich $b_2 = b_1 = 0$, oder nur $b_2 = 0$, oder ob $b_2 \gtrless 0$ ist; dieser Unterscheidung liegt die Bemerkung zu Grunde, dass der Ausdruck $b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0$ entweder constant oder linear oder höchstens quadratisch sein kann.

A. Erster Hauptfall: $b_2 = b_1 = 0$, mithin

9) $$a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + (a_0 + b_0 x)\, y = 0.$$

Setzt man

$$y = e^{\lambda x} \eta,$$

wo λ vorläufig noch unbestimmt bleiben mag, so ergiebt sich

10) $$a_2 \frac{d^2 \eta}{dx^2} + (2 a_2 \lambda + a_1) \frac{d\eta}{dx} + (a_1 \lambda + a_0 + b_0 x)\, \eta = 0.$$

Diese Gleichung wird einfacher, wenn man

11) $$\lambda = -\frac{a_1}{2 a_2}$$

nimmt und mit a_2, welches keinenfalls Null ist, dividirt; sie erhält nämlich die Form

12) $$\begin{cases} \dfrac{d^2 \eta}{dx^2} + (\alpha + \beta x)\, \eta = 0, \\ \alpha = \dfrac{2 a_0 a_2 - (a_1)^2}{(a_2)^3}, \quad \beta = \dfrac{b_0}{a_2}. \end{cases}$$

Hier sind wieder zwei verschiedene Transformationen möglich.

Führt man nämlich statt x eine neue unabhängige Variabele ξ ein mit Hülfe der Gleichung

13) $$x = \delta + \varepsilon \xi,$$

so geht die Differentialgleichung über in

$$\frac{d^2 \eta}{d \xi^2} + [(\alpha + \beta \delta)\, \varepsilon^2 + \beta \varepsilon^3 \xi]\, \eta = 0$$

und für

14) $$\delta = -\frac{\alpha}{\beta}, \qquad \varepsilon = \frac{1}{\sqrt[3]{\beta}}$$

wird daraus

15) $$\frac{d^2 \eta}{d \xi^2} + \xi \eta = 0.$$

Hätte man das Integral dieser Differentialgleichung gefunden, etwa

15*) $$\eta = f(\xi),$$

so würde

$$\xi = \frac{x - \delta}{\varepsilon} = \frac{\alpha + \beta x}{\sqrt[3]{\beta^2}}$$

zu substituiren sein; das Integral von Nro. 12) wäre dann

12*) $$\eta = f\left(\frac{\alpha + \beta x}{\sqrt[3]{\beta^2}}\right)$$

und das Integral von Nro. 9)

9*) $$y = e^{\lambda x} f\left(\frac{\alpha + \beta x}{\sqrt[3]{\beta^2}}\right),$$

worin für α, β und λ die angegebenen Werthe gelten.

Setzt man in Nro. 12) allgemeiner

16) $$x = -\frac{\alpha}{\beta} + \varkappa \xi^n,$$

so hat man durch Differentiation in Beziehung auf die neue Variabele ξ

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{d\eta}{dx} \cdot \frac{dx}{d\xi} = \frac{d\eta}{dx} \cdot \varkappa n \xi^{n-1},$$

und umgekehrt

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{\xi^{1-n}}{\varkappa n} \cdot \frac{d\eta}{d\xi};$$

nochmalige Differentiation der vorhergehenden Gleichung giebt

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{d\eta}{dx} \varkappa n\,(n-1)\,\xi^{n-2} + \varkappa n \xi^{n-1} \frac{d\left(\frac{d\eta}{dx}\right)}{dx} \cdot \frac{dx}{d\xi}$$
$$= \frac{n-1}{\xi} \cdot \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{d^2\eta}{dx^2} \varkappa^2 n^2 \xi^{2n-2}$$

und umgekehrt

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{\xi^{2-2n}}{\varkappa^2 n^2} \cdot \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \frac{(1-n)\,\xi^{1-2n}}{\varkappa^2 n^2} \cdot \frac{d\eta}{d\xi}.$$

Nach Substitution dieses Ausdruckes und des Werthes von x verwandelt sich die Gleichung 12) in nachstehende:

$$\xi \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + (1-n) \frac{d\eta}{d\xi} + n^2 \beta \varkappa^3 \xi^{3n-1} \eta = 0,$$

welche linear wird für $n = \frac{2}{3}$, nämlich:

17) $$\xi \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \frac{1}{3} \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{4}{9} \beta \varkappa^3 \xi \eta = 0.$$

Setzt man weiter

18) $$\eta = e^{\varrho \xi} \zeta,$$

so erhält man für die Unbekannte ζ die Differentialgleichung

$$\xi \frac{d^2\zeta}{d\xi^2} + \left(\tfrac{1}{3} + 2\varrho\xi\right) \frac{d\zeta}{d\xi} + \left[\tfrac{1}{3}\varrho + \left(\varrho^2 + \tfrac{4}{9}\beta\varkappa^3\right)\xi\right] \zeta = 0,$$

und wenn hier

19) $$\varrho = \tfrac{1}{2}, \quad \varkappa = -\sqrt[3]{\frac{9}{16\beta}}$$

genommen wird, so ergiebt sich

20) $$\xi \frac{d^2\zeta}{d\xi^2} + (\tfrac{1}{3} + \xi)\frac{d\zeta}{d\xi} + \tfrac{1}{6}\zeta = 0.$$

Diese Differentialgleichung steht unter der Form

21) $$\begin{cases} \xi \dfrac{d^2\zeta}{d\xi^2} + (p + q + \xi)\dfrac{d\zeta}{d\xi} + p\zeta = 0, \\ p = q = \tfrac{1}{6}, \end{cases}$$

und es ist dies insofern bemerkenswerth, als sich nachher zeigen wird, dass die Gleichung 21) als Normalform der allgemeinen Differentialgleichung 1) gelten kann.

Nennen wir das Integral von Nro. 20)

20*) $$\zeta = F(\xi),$$

so haben wir für Nro. 17)

17*) $$\eta = e^{\frac{1}{2}\xi} F(\xi),$$

und erhalten hieraus das Integral von 12), indem wir, gemäss Nro. 16)

$$\xi = \left[-\sqrt[3]{\frac{16\beta}{9}} \cdot \frac{\alpha + \beta x}{\beta}\right]^{3/2}$$

substituiren; zur Abkürzung sei hier

22) $$\mu = -\alpha\sqrt[3]{\frac{4}{9\beta^2}}, \quad \nu = -\sqrt[3]{\frac{4\beta}{9}},$$

dann wird $\xi = 2(\mu + \nu x)^{3/2}$, und das Integral von Nro. 12) ist

12*) $$\eta = e^{\sqrt{(\mu+\nu x)^3}} F[2\sqrt{(\mu + \nu x)^3}],$$

sowie endlich das Integral von Nro. 9)

9*) $$y = e^{\lambda x + \sqrt{(\mu+\nu x)^3}} F[2\sqrt{(\mu + \nu x)^3}],$$

worin λ, μ, ν durch a_0, a_1, a_2 und b_2 auszudrücken sind.

B. Zweiter Hauptfall: $b_2 = 0$, $b_1 \gtrless 0$, also

23) $$a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + (a_1 + b_1 x)\frac{dy}{dx} + (a_0 + b_0 x)\, y = 0.$$

Mit Hülfe der Substitution

24) $$y = e^{\lambda x}\eta,$$

worin λ vorläufig unbestimmt bleibt, gelangt man zu der neuen Differentialgleichung

$$a_2 \frac{d^2\eta}{dx^2} + (2a_2\lambda + a_1 + b_1 x)\frac{d\eta}{dx}$$
$$+ [a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 + (b_1\lambda + b_0)x]\,\eta = 0,$$

welche sich vereinfacht, wenn

$$25)\quad \begin{cases} \lambda = -\dfrac{b_0}{b_1}, \\ \alpha_1 = \dfrac{2\,a_2\,\lambda + a_1}{a_2} = \dfrac{a_1\,b_1 - 2\,a_2\,b_0}{a_2\,b_1},\ \beta_1 = \dfrac{b_1}{a_2}, \\ \alpha_0 = \dfrac{a_2\,\lambda^2 + a_1\,\lambda + a_0}{a_2} = \dfrac{a_2\,(b_0)^2 - a_1\,b_0\,b_1 + a_0\,(b_1)^2}{a_2\,(b_1)^2} \end{cases}$$

gesetzt wird; man erhält nämlich

$$26)\quad \frac{d^2\eta}{dx^2} + (\alpha_1 + \beta_1\,x)\,\frac{d\eta}{dx} + \alpha_0\,\eta = 0.$$

Statt x möge eine neue unabhängige Variabele ξ mittelst der Gleichung

$$27)\quad x = \delta + \varepsilon\,\sqrt{\xi}$$

eingeführt werden. Man findet zunächst

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{2\,\sqrt{\xi}}{\varepsilon}\cdot\frac{d\eta}{d\xi},\ \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{2}{\varepsilon^2}\left[2\,\xi\,\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \frac{d\eta}{d\xi}\right],$$

und durch Substitution dieser Ausdrücke

$$\xi\,\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\left(\alpha_1 + \beta_1\,\delta + \beta_1\,\varepsilon\sqrt{\xi}\right)\sqrt{\xi}\right]\frac{d\eta}{d\xi} + \tfrac{1}{4}\,\alpha_0\,\varepsilon^2\,\eta = 0.$$

Um die vorliegende Gleichung zu vereinfachen, nehmen wir

$$28)\quad \delta = -\frac{\alpha_1}{\beta_1},\ \varepsilon = \sqrt{\frac{2}{\beta_1}},$$

und erhalten

$$\xi\,\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + (\tfrac{1}{2} + \xi)\,\frac{d\eta}{d\xi} + \frac{\alpha_0}{2\,\beta_1}\,\eta = 0,$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt,

$$29)\quad \begin{cases} \xi\,\dfrac{d^2\eta}{d\xi^2} + (p + q + \xi)\,\dfrac{d\eta}{d\xi} + p\,\eta = 0, \\ p = \dfrac{\alpha_0}{2\,\beta_1},\quad q = \tfrac{1}{2} - p = \dfrac{\beta_1 - \alpha_0}{2\,\beta_1}. \end{cases}$$

In dem speciellen Falle $\beta_1 = 0$ ist diese Transformation unausführbar, aber auch nicht nöthig; da nämlich β_1 nur dann verschwinden kann, wenn $b_1 = 0$ ist, so hätte man es mit einer Differentialgleichung der ersten Form 9) zu thun.

Vorausgesetzt, dass man das Integral der Differentialgleichung 29) in der Form

$$29^*)\quad \eta = F\,(\xi)$$

darstellen kann, ist nun das Integral von Nro. 26)

26*) $$\eta = F\left[\left(\frac{x-\delta}{\varepsilon}\right)^2\right] = F\left[\frac{(\alpha_1+\beta_1 x)^2}{2\beta_1}\right],$$

und das Integral von Nro. 23)

23*) $$y = e^{\lambda x} F\left[\frac{(\alpha_1+\beta_1 x)^2}{2\beta_1}\right],$$

wobei α_1, β_1 und λ die in Nro. 25) angegebenen Werthe besitzen.

C. Dritter Hauptfall: Es verschwinde b_2 nicht, und daher sei die Differentialgleichung von der allgemeinen Form

30) $$(a_2 + b_2 x)\frac{d^2 y}{dx^2} + (a_1 + b_1 x)\frac{dy}{dx} + (a_0 + b_0)\, y = 0.$$

Wie früher benutzen wir zunächst die Substitution

31) $$y = e^{\lambda x}\eta,$$

und erhalten für η die Differentialgleichung

$$\left.\begin{aligned}&(a_2+b_2 x)\frac{d^2\eta}{dx^2} + [2a_2\lambda + a_1 + (2b_2\lambda + b_1)x]\frac{d\eta}{dx}\\ &\quad + [a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 + (b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0)x]\,\eta\end{aligned}\right\} = 0.$$

Für λ setzen wir eine Wurzel der Gleichung

32) $$b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0 = 0,$$

und führen folgende Abkürzungen ein:

33) $$\begin{cases}\alpha_2 = a_2,\;\; \beta_2 = b_2,\;\; \alpha_1 = 2a_2\lambda + a_1,\;\; \beta_1 = 2b_2\lambda + b_1,\\ \qquad\qquad \alpha_0 = a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0;\end{cases}$$

wir haben dann einfacher

34) $$(\alpha_2 + \beta_2 x)\frac{d^2\eta}{dx^2} + (\alpha_1 + \beta_1 x)\frac{d\eta}{dx} + \alpha_0\eta = 0.$$

Die weiteren Schritte der Rechnung sind davon abhängig, ob die Gleichung 32) gleiche oder verschiedene Wurzeln besitzt.

a. Im ersten Falle hat man

35) $$b_0 = \frac{(b_1)^2}{4b_2},\;\; \lambda = -\frac{b_1}{2b_2},\;\; \beta_1 = 0,$$

und daher die einfachere Form

36) $$(\alpha_2 + \beta_2 x)\frac{d^2\eta}{dx^2} + \alpha_1\frac{d\eta}{dx} + \alpha_0\eta = 0,$$

worin $\beta_2 = b_2$ von Null verschieden ist. Die Substitution

37) $$x = -\frac{\alpha_2}{\beta_2} + \tfrac{1}{2}\varepsilon\xi^2$$

giebt nun

$$\alpha_2 + \beta_2 x = \tfrac{1}{2}\beta_2 \varepsilon \xi^2, \quad \frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{\varepsilon\xi}\cdot\frac{d\eta}{d\xi},$$

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{1}{\varepsilon^2\xi^3}\left[\xi\,\frac{d^2\eta}{d\xi^2} - \frac{d\eta}{d\xi}\right],$$

und daher wird die Differentialgleichung 36) zur folgenden

$$\xi\,\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \left(\frac{2\,\alpha_1}{\beta_2} - 1\right)\frac{d\eta}{d\xi} + \frac{2\,\alpha_0\,\varepsilon}{\beta_2}\,\xi\eta = 0.$$

Wir setzen weiter

38) $$\eta = e^{\frac{1}{2}\xi}\,\zeta,$$

und erhalten für ζ die neue Differentialgleichung

$$\xi\,\frac{d^2\zeta}{d\xi^2} + \left[\frac{2\,\alpha_1}{\beta_2} - 1 + \xi\right]\frac{d\zeta}{d\xi} + \left[\frac{\alpha_1}{\beta_2} - \tfrac{1}{2} + \left(\frac{2\,\alpha_0\,\varepsilon}{\beta_2} + \tfrac{1}{4}\right)\xi\right]\zeta = 0;$$

diese wird einfacher durch die Annahme

39) $$\varepsilon = -\frac{\beta_2}{8\,\alpha_0}$$

und stellt sich unter folgende, bereits erwähnte Form:

40) $$\begin{cases} \xi\,\dfrac{d^2\zeta}{d\xi^2} + (p+q+\xi)\,\dfrac{d\zeta}{d\xi} + p\,\zeta = 0, \\[2ex] p = q = \dfrac{\alpha_1}{\beta_2} - \tfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Aus dem Integral der vorigen Gleichung, welches wieder

40*) $$\zeta = F(\xi)$$

heissen möge, erhält man das Integral von 36) mit Hülfe der Gleichungen

$$\eta = e^{\frac{1}{2}\xi}F(\xi), \quad \xi = \sqrt{\frac{2\,(\alpha_2 + \beta_2 x)}{\beta_2\,\varepsilon}} = \frac{2\sqrt{-4\,\alpha_0\,(\alpha_2 + \beta_2 x)}}{\beta_2},$$

wobei zur Abkürzung

41) $$\mu = -\frac{4\,\alpha_0\,\alpha_2}{(\beta_2)^2}, \quad \nu = -\frac{4\,\alpha_0}{\beta_2}$$

sein möge; das Integral von 36) ist dann

36*) $$\eta = e^{\sqrt{\mu+\nu x}}\,F\left(2\sqrt{\mu+\nu x}\right),$$

mithin das Integral von 30)

30*) $$y = e^{\lambda x + \sqrt{\mu+\nu x}}\,F\left(2\sqrt{\mu+\nu x}\right).$$

Drückt man λ, μ, ν, p durch die Coefficienten der Gleichung 30) aus, so gelten folgende Werthe:

$$b_0 = \frac{(b_1)^2}{4\,b_2}, \quad \lambda = -\frac{b_1}{2\,b_2},$$

$$\mu = - a_2 \frac{4 a_0 (b_2)^2 - 2 a_1 b_1 b_2 + a_2 (b_1)^2}{(b_2)^4},$$

$$\nu = - \frac{4 a_0 (b_2)^2 - 2 a_1 b_1 b_2 + a_2 (b_1)^2}{(b_2)^3},$$

$$p = q = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{(b_2)^2} - \tfrac{1}{2}.$$

b. In dem allgemeinen Falle, wo die quadratische Gleichung 32) verschiedene Wurzeln besitzt, wird die Sache am einfachsten. Durch Substitution von

42) $$x = - \frac{\alpha_2}{\beta_2} + \varkappa \xi$$

erhält man nämlich aus Nro. 34)

$$\xi \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \left[\frac{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}{(\beta_2)^2} + \frac{\beta_1 \varkappa}{\beta_2} \xi\right] \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{\alpha_0 \varkappa}{\beta_2} \eta = 0,$$

und da hier β_1 nicht Null ist, so lässt sich die Gleichung mittelst der Annahme

43) $$\varkappa = \frac{\beta_2}{\beta_1}$$

vereinfachen. Das Resultat ist von der Form

44) $$\begin{cases} \xi \dfrac{d^2\eta}{d\xi^2} + (p + q + \xi) \dfrac{d\eta}{d\xi} + p\eta = 0, \\ p = \dfrac{\alpha_0}{\beta_1}, \qquad q = \dfrac{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}{(\beta_2)^2} - \dfrac{\alpha_0}{\beta_1}. \end{cases}$$

Nach Nro. 42) und 43) hat man

$$\xi = \frac{\alpha_2 + \beta_2 x}{\beta_2 \varkappa} = \frac{\beta_1 (\alpha_2 + \beta_2 x)}{(\beta_2)^2},$$

und wenn daher das Integral von Nro. 44) mit

44*) $$\eta = F(\xi)$$

bezeichnet wird, so ist das Integral von Nro. 34)

34*) $$\eta = F\left[\frac{\beta_1 (\alpha_2 + \beta_2 x)}{(\beta_2)^2}\right],$$

und das Integral von Nro. 30)

30*) $$y = e^{\lambda x} F\left[\frac{\beta_1 (\alpha_2 + \beta_2 x)}{(\beta_2)^2}\right],$$

wobei λ, α_2 und β_2 durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung auszudrücken sind.

Die Nebeneinanderstellung der letzten Formen (21, 29, 40, 44), wozu die vorigen Umwandlungen führten, zeigt augenblicklich die Richtigkeit des Satzes: Die Differentialgleichung

$$(a_2 + b_2 x) \frac{d^2 y}{d x^2} + (a_1 + b_1 x) \frac{dy}{dx} + (a_0 + b_0 x)\, y = 0$$

kann durch gehörige Substitutionen immer auf die Normalform

45) $$\xi \frac{d^2 \varphi}{d \xi^2} + (p + q + \xi) \frac{d\varphi}{d\xi} + p\varphi = 0$$

gebracht werden. Mit dieser haben wir uns nur noch zu beschäftigen, und zwar wollen wir zunächst einige Eigenschaften von ihr entwickeln, welche für die nachherigen Integrationen von Wichtigkeit sind.

Vorbereitung der Integration.

Durch Substitution von

46) $$\varphi = e^{-\xi} \psi$$

geht die Gleichung 45) in die folgende über:

$$\xi \frac{d^2\psi}{d \xi^2} + (q + p - \xi) \frac{d\psi}{d\xi} - q\psi = 0,$$

und daraus wird für $\xi = -\xi_1$

47) $$\xi_1 \frac{d^2 \psi}{d \xi_1^2} + (q + p + \xi_1) \frac{d\psi}{d\xi_1} + q\psi = 0;$$

dies ist, wie man sieht, dasselbe, als hätte man q und p gegen einander vertauscht. Bezeichnet man das Integral von Nro. 45) mit $\varphi = F(p, q, \xi)$, so muss das Integral von 47) mit $\psi = F(q, p, \xi_1)$ bezeichnet werden, und die Gleichung 46) giebt dann

$$F(p, q, \xi) = e^{-\xi} F(q, p, \xi_1) = e^{-\xi} F(q, p, -\xi),$$

oder auch

48) $$F(p, q, -\xi) = e^{+\xi} F(q, p, +\xi),$$

und umgekehrt

49) $$F(q, p, +\xi) = e^{-\xi} F(p, q, -\xi).$$

Die Formel 48) zeigt, dass der Fall eines negativen ξ auf den Fall eines positiven ξ zurückgeführt und daher ξ immer positiv genommen werden kann; aus Nro. 49) ersieht man den Effect der gegenseitigen Vertauschung von p und q.

Setzt man in der Gleichung 45)

$$\varphi = \xi^r \omega,$$

so ergiebt sich nach Division mit ξ^{r-1}

$$\xi^2 \frac{d^2 \omega}{d \xi^2} + \xi(2r + p + q + \xi) \frac{d\omega}{d\xi} + [r(r + p + q - 1) + (r + p)\xi]\,\omega = 0;$$

die linke Seite wird durch ξ theilbar, sobald r den Werth

$$r = 1 - p - q$$

erhält; es bleibt

$$\xi \frac{d^2 \omega}{d \xi^2} + (2 - p - q + \xi) \frac{d \omega}{d \xi} + (1 - q)\, \omega = 0,$$

und dies ist dasselbe, als wäre in Nro. 45) $1 - q$ für p und zugleich $1 - p$ für q gesetzt worden. Man hat zufolge dieser Bemerkung $\omega = F(1 - q, 1 - p, \xi)$ und wegen $\varphi = \xi^r \omega$

50) $$F(p, q, \xi) = \xi^{1-p-q} F(1 - q, 1 - p, \xi),$$

oder auch

51) $$F(-p, -q, \xi) = \xi^{1+p+q} F(1 + q, 1 + p, \xi);$$

diese Formel zeigt, wie der Fall negativer p und q auf den Fall positiver p und q zurückgeführt werden kann.

Bemerkenswerth ist noch, dass eine mehrmalige Differentiation der Gleichung 45) wieder eine Gleichung von derselben Form giebt. Durch m-malige Differentiation erhält man nämlich

$$\xi \frac{d^{m+2} \varphi}{d \xi^{m+2}} + (m + p + q + \xi) \frac{d^{m+1} \varphi}{d \xi^{m+1}} + (m + p) \frac{d^m \varphi}{d \xi^m} = 0,$$

und wenn

$$\frac{d^m \varphi}{d \xi^m} = \Theta$$

gesetzt wird, so folgt weiter

$$\xi \frac{d^2 \Theta}{d \xi^2} + (m + p + q + \xi) \frac{d \Theta}{d \xi} + (m + p)\, \Theta = 0,$$

und dies ist das Nämliche, als wenn in Nro. 45) $p + m$ für p gesetzt worden wäre. Man hat daher $\Theta = F(p + m, q, \xi)$ und nach dem Vorigen

52) $$F(p + m, q, \xi) = \frac{d^m F(p, q, \xi)}{d \xi^m}.$$

Differenzirt man auch die Gleichung 47) n-mal in Beziehung auf ξ_1, so gelangt man ebenso leicht zu der Formel

$$F(q + n, p, \xi_1) = \frac{d^n F(q, p, \xi_1)}{d \xi_1{}^n},$$

oder

$$e^{\xi} F(p, q + n, \xi) = \frac{d^n [e^{\xi} F(p, q, \xi)]}{(- d \xi)^n},$$

und es ist daher

53) $$F(p, q + n, \xi) = (-1)^n e^{-\xi} \frac{d^n [e^{+\xi} F(p, q, \xi)]}{d \xi^n}.$$

Bei Ausführung der angedeuteten Differentiation erhält man $F(p, q+n, \xi)$ ausgedrückt durch $F(p, q, \xi)$, $F(p+1, q, \xi)$, $F(p+2, q, \xi)$ u. s. w.

Mit Hülfe der vorigen Relationen lässt sich zeigen, dass die Function $F(p, q, \xi)$ immer gefunden werden kann, wenn sie für positive echt gebrochene p und q bekannt ist. Wir betrachten nämlich folgende vier Fälle.

a. Es mögen p und q positive unechte Brüche sein; wir setzen dann

$$p = m + r, \quad q = n + s,$$

wo m und n ganze positive Zahlen, r und s positive echte Brüche bezeichnen, die auch Null sein können. Nach Formel 52) haben wir jetzt, indem wir die mehrmalige Differentiation durch D^m andeuten,

$$F(m+r, n+s, \xi) = D^m F(r, n+s, \xi);$$

wenden wir noch rechter Hand die Formel 53) an, so wird

$$54) \quad F(m+r, n+s, \xi) = (-1)^n D^m \left[e^{-\xi} D^n \{e^{+\xi} F(r, s, \xi)\}\right].$$

b. Bei gleichzeitig negativen p und q setzen wir ähnlich wie vorhin

$$p = -(m-1+r), \quad q = -(n-1+s),$$

und erhalten zunächst aus Nro. 51)

$$F(-m+1-r, -n+1-s, \xi) = \xi^{m+n+r+s-1} F(n+s, m+r, \xi);$$

nach Formel 54) giebt dies

$$55) \quad \begin{cases} F(-m+1-r, -n+1-s, \xi) \\ = (-1)^m \xi^{m+n+r+s-1} D^n \left[e^{-\xi} D^m \{e^{+\xi} F(s, r, \xi)\}\right]. \end{cases}$$

c. Wenn p positiv, q negativ ist, so sei

$$p = m + r, \quad q = -n + s;$$

indem man der Reihe nach die Formeln 52) und 51) anwendet, gelangt man zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} F(m+r, -n+s, \xi) &= D^m F(r, -n+s, \xi) \\ &= D^m [\xi^{1-r+n-s} F(n+1-s, 1-r, \xi)], \end{aligned}$$

d. i.

$$56) \quad F(m+r, -n+s, \xi) = D^m [\xi^{n+1-r-s} D^n F(1-s, 1-r, \xi)].$$

d. Bei negativen p und positiven q setzen wir

$$p = -m + r, \quad q = n + s,$$

und benutzen der Reihe nach die Formeln 53) und 51); dies giebt

$$\begin{aligned} F(-m+r, n+s, \xi) &= (-1)^n e^{-\xi} D^n [e^{+\xi} F(-m+r, s, \xi)] \\ &= (-1)^n e^{-\xi} D^n [e^{\xi} \xi^{1+m-r-s} F(1-s, m+1-r, \xi)], \end{aligned}$$

und bei nochmaliger Anwendung von Formel 53)

57) $$\begin{cases} F\,(-m+r,\, n+s, \xi) \\ = (-1)^{m+n} e^{-\xi} D^n \left[\xi^{m+1-r-s} D^m \{e^{+\xi} F\,(1-s, 1-r, \xi)\}\right]. \end{cases}$$

Da r und s, mithin auch $1 - r$ und $1 - s$ positive echte Brüche sind, so hat man den Satz: Das Integral der Differentialgleichung

$$\xi \frac{d^2 \varphi}{d \xi^2} + (p + q + \xi) \frac{d \varphi}{d \xi} + p \varphi = 0$$

lässt sich immer auf das Integral der ähnlich geformten Differentialgleichung

$$\xi \frac{d^2 \varphi_1}{d \xi^2} + (p_1 + q_1 + \xi) \frac{d \varphi_1}{d \xi} + p_1 \varphi_1 = 0$$

zurückführen, worin p_1 und q_1 positive echte Brüche sind.

Integration unter speciellen Voraussetzungen.

Die Integration der Gleichung 45) ist sehr leicht, wenn entweder p oder q verschwindet. Für $p = 0$ hat man nämlich, wenn $\frac{d\varphi}{d\xi}$ mit φ' bezeichnet wird,

$$\frac{d \varphi'}{\varphi'} = -\left(\frac{q}{\xi} + 1\right) d\xi,$$

und daraus findet sich

58) $$\varphi = C \int \xi^{-q} e^{-\xi} d\xi + C_1.$$

Wenn $q = 0$ ist, vertauscht man p und q gegen einander, d. h. man integrirt die Gleichung 47) und erhält nachher

59) $$\varphi = e^{-\xi} \left[C \int \xi^{-p} e^{+\xi} d\xi + C_1\right].$$

Unter welchen Umständen p oder q verschwinden, sieht man leicht aus den früher angegebenen Werthen dieser Constanten, und daher möge nur für den allgemeinen Fall (C, b auf S. 530) eine Bemerkung folgen. Nach Formel 44) wird $p = 0$, wenn $a_0 = 0$, d. h. wenn

60) $$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0,$$

und da λ durch die Gleichung

61) $$b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0 = 0$$

bestimmt war, so kann das Verschwinden von p nur eintreten, sobald beide quadratische Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel λ besitzen, wozu die Bedingung

62) $$(a_0 b_1 - a_1 b_0)\,(a_1 b_2 - a_2 b_1) = (a_0 b_2 - a_2 b_0)^2$$

gehört, und wenn für λ diese gemeinschaftliche Wurzel λ_1 genommen wird. Damit kommt man auf den S. 522 erörterten Fall zurück. Es verschwindet ferner q unter der Bedingung

$$(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)\,\beta_1 - \alpha_0\,(\beta_2)^2 = 0,$$

welche nach Substitution der Werthe von $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ übergeht in

63) $$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\,(2\,b_2 \lambda + b_1) - (b_2)^2\,(a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) = 0.$$

Durch Elimination von λ aus 61) und 63) gelangt man wieder zur Bedingungsgleichung 62); es ist daher wiederum erforderlich, dass die Gleichungen 60) und 61) eine gemeinschaftliche Wurzel λ_1 besitzen, nur darf man nicht diese für λ nehmen und muss folglich die andere Wurzel der Bestimmungsgleichung 61) für λ setzen. In der That überzeugt man sich *a posteriori* sehr leicht, dass der Werth

$$\lambda = -\lambda_1 - \frac{b_1}{b_2}$$

die Gleichung 63) befriedigt.

Wir betrachten nun den etwas allgemeineren Fall, wo eine der Grössen p und q eine ganze positive Zahl ist. Bei ganzen positiven $p = m$ erhält man mittelst der Formeln 52) und 58)

$$\begin{aligned} F(m, q, \xi) &= D^m F(0, q, \xi) \\ &= D^m \left[C \int \xi^{-q} e^{-\xi} d\xi + C_1 \right] = C D^{m-1} (\xi^{-q} e^{-\xi}); \end{aligned}$$

dies ist aber nur ein particuläres Integral, und daher bedarf die Methode einer kleinen Modification. Denken wir uns $\varphi = F(m, q, \xi)$ als $m$ten Differentialquotienten einer anderen Unbekannten ω und substituiren demgemäss

$$\varphi = \frac{d^m \omega}{d\xi^m} = D^m \omega$$

in die Gleichung

64) $$\xi \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} + (m + q + \xi) \frac{d\varphi}{d\xi} + m\varphi = 0,$$

so gelangen wir zu der neuen Differentialgleichung

$$\xi D^{m+2} \omega + (m + q + \xi) D^{m+1} \omega + m D^m \omega = 0,$$

welche übereinkommt mit

$$D^m [\xi D^2 \omega + (q + \xi) D\omega] = 0.$$

Dieser Gleichung genügt ein ω, für welches

$$\xi D^2 \omega + (q + \xi) D \omega = C$$

wird oder, weil $D\omega = \omega'$ ist,

$$\frac{d\omega'}{d\xi} + \left(\frac{q}{\xi} + 1\right) \omega' = \frac{C}{\xi}.$$

Nach einem sehr bekannten Verfahren findet man als Integral dieser Differentialgleichung

$$\omega' = \xi^{-q} e^{-\xi} \left[C \int \xi^{q-1} e^{+\xi} d\xi + C_1 \right],$$

und wegen $\varphi = D^m \omega = D^{m-1} \omega'$ hat man schliesslich

65) $$\varphi = C D^{m-1} \left[\xi^{-q} e^{-\xi} \int \xi^{q-1} e^{+\xi} d\xi \right] + C_1 D^{m-1} [\xi^{-q} e^{-\xi}]$$

als vollständiges Integral von Nro. 64).

Bei positiven q und ξ lässt sich dieser Ausdruck in eine andere Form bringen, bei welcher die angedeuteten Differentiationen ausführbar werden. Es ist nämlich

$$\int \xi^{q-1} e^{+\xi} d\xi = \int_0^\xi t^{q-1} e^{+t} dt + C_0,$$

$$\frac{1}{\xi^q} = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^\infty u^{q-1} e^{-\xi u} du,$$

mithin durch Substitution dieser Ausdrücke und bei Aenderung der Constanten C_1

$$\varphi = C D^{m-1} \left[\xi^{-q} e^{-\xi} \int_0^\xi t^{q-1} e^{+t} dt \right] + C_2 D^{m-1} \left[e^{-\xi} \int_0^\infty u^{q-1} e^{-\xi u} du \right].$$

Im ersten Integrale setzen wir $t = \xi(1-u)$ und erhalten

$$D^{m-1} \left[\xi^{-q} e^{-\xi} \int_0^\xi t^{q-1} e^{+t} dt \right] = D^{m-1} \int_0^1 (1-u)^{q-1} e^{-\xi u} du$$

$$= (-1)^{m-1} \int_0^1 u^{m-1} (1-u)^{q-1} e^{-\xi u} du;$$

im zweiten Integrale ist

$$D^{m-1} \left[e^{-\xi} \int_0^\infty u^{q-1} e^{-\xi u} du \right] = D^{m-1} \int_0^\infty u^{q-1} e^{-\xi(1+u)} du$$

$$= (-1)^{m-1} \int_0^\infty (1+u)^{m-1} u^{q-1} e^{-\xi(1+u)} du,$$

mithin ergiebt sich, wenn der Factor $(-1)^{m-1}$ in die willkürlichen Constanten eingerechnet wird,

66) $$\varphi = C_1 \int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{q-1} e^{-\xi u}\, du + C_2 e^{-\xi} \int_0^\infty (1+u)^{m-1} u^{q-1} e^{-\xi u}\, du.$$

Ist zweitens q eine ganze Zahl $= + n$, mithin die gegebene Differentialgleichung

67) $$\xi \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + (p + n + \xi)\frac{d\varphi}{d\xi} + p\varphi = 0,$$

so vertauscht man zuerst p und q gegeneinander wie in Nro. 47) und integrirt die Gleichung

$$\xi_1 \frac{d^2\psi}{d\xi_1^2} + (n + p + \xi_1)\frac{d\psi}{d\xi_1} + n\psi = 0$$

auf dieselbe Weise wie vorhin die Gleichung 64); dies giebt

$$\psi = C D^{n-1}\left[\xi_1{}^{-p} e^{-\xi_1} \int \xi_1{}^{p-1} e^{+\xi_1}\, d\xi_1\right] + C_1 D^{n-1}[\xi_1{}^{-p} e^{-\xi_1}].$$

Wegen $\xi_1 = -\xi$ und vermöge Formel 46) folgt hieraus bei Aenderung der Constanten

68) $$\varphi = C e^{-\xi} D^{n-1}\left[\xi^{-p} e^{+\xi} \int \xi^{p-1} e^{-\xi}\, d\xi\right] + C_1 e^{-\xi} D^{n-1}[\xi^{-p} e^{+\xi}].$$

Bei positiven p und ξ lässt sich dieser Ausdruck auf ähnliche Weise umwandeln, wie es vorhin mit dem unter Nro. 65) angegebenen Werthe von φ geschehen ist. Man hat nämlich einerseits

$$\int \xi^{p-1} e^{-\xi}\, d\xi = \int_0^\xi u^{p-1} e^{-u}\, du + C_0$$

und mit Hülfe der Substitution $u = \xi v$

$$\xi^{-p} e^{+\xi} \int \xi^{p-1} e^{-\xi}\, d\xi = \int_0^1 v^{p-1} e^{+\xi(1-v)}\, dv + \text{etc.};$$

andererseits ist

$$\begin{aligned}
\xi^{-p} e^{+\xi} &= \frac{e^\xi}{\Gamma(p)} \int_0^\infty v^{p-1} e^{-\xi v}\, dv \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)}\left[\int_0^1 v^{p-1} e^{\xi(1-v)}\, dv + \int_1^\infty v^{p-1} e^{-\xi(v-1)}\, dv\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)}\left[\int_0^1 v^{p-1} e^{\xi(1-v)}\, dv + \int_0^\infty (1+u)^{p-1} e^{-\xi u}\, du\right];
\end{aligned}$$

nach Substitution dieser Werthe in Nro. 68) werden die angedeuteten Differentiationen ausführbar und man erhält

$$69)\quad \varphi = C_1 \int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{n-1} e^{-\xi v} dv + C_2 e^{-\xi} \int_0^\infty (1+u)^{p-1} u^{n-1} e^{-\xi u} du.$$

Auch in dem Falle, wo p oder q eine negative ganze Zahl ist, können ähnliche Methoden angewendet werden, doch wollen wir uns bei diesen Details nicht aufhalten.

Allgemeine Integration.

Durch die Formeln 66) und 69) wird man auf die Vermuthung geführt, dass der Werth von φ, wenigstens in manchen Fällen, aus zwei bestimmten Integralen zusammengesetzt ist, in welchen die unabhängige Variabele (ξ) der Differentialgleichung die Rolle einer Constanten spielt. Dies bedarf einer genaueren Untersuchung.

Zu diesem Zwecke betrachten wir erstens den Ausdruck

$$70)\qquad M = \int_0^1 u^{p-1} (1-u)^{q-1} e^{-\xi u} du.$$

Durch zweimalige Differentiation in Beziehung auf ξ erhalten wir

$$\frac{dM}{d\xi} = -\int_0^1 u^p (1-u)^{q-1} e^{-\xi u} du,$$

$$\frac{d^2 M}{d\xi^2} = +\int_0^1 u^{p+1} (1-u)^{q-1} e^{-\xi u} du,$$

und es ist daher

$$71)\qquad \xi \frac{d^2 M}{d\xi^2} + (p+q+\xi)\frac{dM}{d\xi} + pM$$

$$= \int_0^1 [p(1-u) - qu] u^{p-1} (1-u)^{q-1} e^{-\xi u} du - \xi \int_0^1 u^p (1-u)^q e^{-\xi u} du.$$

Wendet man auf das zweite Integral die theilweise Integration an, so hat man weiter

$$\xi \int u^p (1-u)^q e^{-\xi u} du$$

$$= -u^p (1-u)^q e^{-\xi u} + \int [p(1-u) - qu] u^{p-1} (1-u)^{q-1} e^{-\xi u} du;$$

vorausgesetzt nun, dass p und q gleichzeitig positiv und von Null verschieden sind, verschwindet $u^p\,(1-u)^q$ sowohl für $u=1$ als für $u=0$, und es ist daher

$$\xi\int_0^1 u^p(1-u)^q e^{-\xi u}\,du = \int_0^1 [p(1-u)-qu]\,u^{p-1}(1-u)^{q-1}e^{-\xi u}\,du.$$

Nach Einführung dieses Werthes reducirt sich die rechte Seite der Gleichung 71) auf Null, und man ersieht hieraus, dass M ein particuläres Integral der Gleichung

$$\xi\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}+(p+q+\xi)\frac{d\varphi}{d\xi}+p\varphi=0$$

darstellt. Uebrigens kann dasselbe leicht in eine nach Potenzen von ξ fortschreitende Reihe verwandelt werden. Man braucht zu diesem Zwecke nur $e^{-\xi u}$ durch die bekannte Reihe zu ersetzen und die einzelnen Glieder zu integriren; für $p+q=s$ erhält man

72) $$M=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(s)}\left[1-\frac{p}{s}\frac{\xi}{1}+\frac{p(p+1)}{s(s+1)}\frac{\xi^2}{1.2}-\frac{p(p+1)(p+2)}{s(s+1)(s+2)}\frac{\xi^3}{1.2.3}+\cdots\right].$$

Wir betrachten zweitens den Ausdruck

73) $$N=\int_0^\infty(1+u)^{p-1}u^{q-1}e^{-\xi(1+u)}\,du.$$

Durch eine der vorigen sehr ähnliche Rechnung ergiebt sich die Gleichung

74) $$\xi\frac{d^2N}{d\xi^2}+(p+q+\xi)\frac{dN}{d\xi}+pN$$

$$=-\int_0^\infty[pu+q\,(1+u)]\,(1+u)^{p-1}u^{q-1}e^{-\xi(1+u)}\,du$$

$$+\,\xi\int_0^\infty(1+u)^p u^q e^{-\xi(1+u)}\,du,$$

wobei das zweite Integral mittelst theilweiser Integration folgendermaassen umgestaltet werden kann:

$$\xi\int(1+u)^p u^q e^{-\xi(1+u)}\,du$$
$$=-\,(1+u)^p u^q e^{-\xi(1+u)}$$
$$+\int[pu+q\,(1+u)]\,(1+u)^{p-1}u^{q-1}e^{-\xi(1+u)}\,du.$$

Ist nun q positiv und ξ positiv oder eine complexe Zahl mit positivem reellen Bestandtheile, so verschwindet $u^q e^{-\xi(1+u)}$ sowohl für $u = 0$ als für $u = \infty$, und daher bleibt

$$\xi \int_0^\infty (1+u)^p u^q e^{-\xi(1+u)}\, du$$

$$= \int_0^\infty [pu + q\,(1+u)]\,(1-u)^{p-1} u^{q-1} e^{-\xi(1+u)}\, du;$$

nach Substitution dieses Ausdrucks reducirt sich die rechte Seite der Gleichung 74) auf Null, und folglich ist N gleichfalls ein particuläres Integral der besprochenen Differentialgleichung.

Das mit N bezeichnete Integral lässt sich nicht unmittelbar in eine nach steigenden Potenzen von ξ fortschreitende Reihe verwandeln, wohl aber kann es leicht in eine sogenannte halbconvergente Reihe umgesetzt werden, und es liegt hierin keine Gefahr, wenn man den Rest dieser Reihe anzugeben weiss. Nach dem binomischen Satze ist nämlich allgemein, wenn ϑ einen positiven echten Bruch bezeichnet,

$$(1+u)^{p-1} = 1 + \frac{p-1}{1}\,u + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}\,u^2 + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots + \frac{(p-1)(p-2)\ldots.(p-\overline{n-1})}{1.2\ldots..(n-1)}\,u^{n-1}$$

$$+ \frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-n)}{1.2\ldots..n} \cdot \frac{u^n}{(1+\vartheta u)^{n+1-p}};$$

substituirt man dies in Nro. 73), so kann man die n ersten Glieder leicht integriren und hat dann noch den Rest

$$\frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-n)}{1.2\ldots..n} \int_0^\infty \frac{u^{q+n-1}}{(1+\vartheta u)^{n+1-p}}\, e^{-\xi u}\, du$$

hinzuzufügen. Der Werth des hierin vorkommenden Integrales ist positiv und zugleich, wenn $n > p - 1$ genommen wird, kleiner als der Werth von

$$\int_0^\infty u^{q+n-1} e^{-\xi u}\, du = \frac{\Gamma(q+n)}{\xi^{q+n}};$$

er kann daher mit $\varrho\,\Gamma(q+n)\,\xi^{-q-n}$ bezeichnet werden, wo ϱ zwischen 0 und 1 enthalten ist. Nach diesen Bemerkungen zusammen erhält man ohne Mühe

$$75)\quad N = \frac{\Gamma(q)\,e^{-\xi}}{\xi^q}\left[1 + \frac{(p-1)q}{1\,\xi} + \frac{(p-1)(p-2)q(q+1)}{1.2\,\xi^2} + \cdots\right.$$
$$\cdots + \frac{(p-1)\ldots(p-\overline{n-1})q(q+1)\ldots(q+n-2)}{1.2\ldots(n-1)\,\xi^{n-1}}$$
$$\left. + \varrho\,\frac{(p-1)\ldots(p-n)q(q+1)\ldots(q+n-1)}{1.2\ldots n\,\xi^n}\right].$$

Wie man sieht, beträgt der Rest der Reihe, sobald letztere Zeichenwechsel erhalten hat, immer einen aliquoten Theil desjenigen Terms, der bei weiterer Fortsetzung folgen würde. Hiermit ist gleichzeitig der Beweis geliefert, dass N immer einen bestimmten angebbaren Werth besitzt.

Nachdem man zwei particuläre Integrale der zu integrirenden Differentialgleichung kennen gelernt hat, von welchen das erste für $p > 0$ und $q > 0$, das zweite für $q > 0$ und $\xi > 0$ gilt, ist es sehr leicht, unter allen Umständen das allgemeine Integral anzugeben. Wir müssen dabei auf folgende vier Fälle eingehen.

a. Bei positiven p und q sind beide particuläre Integrale brauchbar, wofern ξ, oder sein reeller Bestandtheil, positiv ist; man hat daher für $\xi > 0$

$$76)\quad \varphi = C_1 \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1} e^{-\xi u}\,du$$
$$+ C_2 e^{-\xi} \int_0^\infty (1+u)^{p-1} u^{q-1} e^{-\xi u}\,du.$$

Bei negativen ξ macht man von der Formel

$$F(p, q, \xi) = e^{-\xi} F(q, p, -\xi)$$

Gebrauch, wo nun $-\xi$ positiv ist; indem man $F(q, p, -\xi)$ nach Nro. 76) bildet, erhält man zunächst

$$\varphi = C_1 e^{-\xi} \int_0^1 u^{q-1}(1-u)^{p-1} e^{\xi u}\,du + C_2 \int_0^\infty (1+u)^{q-1} u^{p-1} e^{\xi u}\,du,$$

oder auch, wenn man im ersten Integrale $1 - u$ an die Stelle von u treten lässt,

$$77)\quad \varphi = C_1 \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1} e^{-\xi u}\,du + C_2 \int_0^\infty u^{p-1}(1+u)^{q-1} e^{\xi u}\,du.$$

b. Der Fall gleichzeitig negativer p und q ist mittelst der Formel

$$F(p, q, \xi) = \xi^{1-p-q} F(1-q, 1-p, \xi)$$

leicht auf den vorigen Fall zurückzuführen und man hat dann $F(1-q, 1-p, \xi)$ nach Nro. 76) oder nach Nro. 77) zu bilden, indem man p durch $1-q$, und q durch $1-p$ ersetzt. Dies giebt für positive ξ:

$$78)\quad \varphi = \xi^{1-p-q}\left[C_1 \int_0^1 (1-u)^{-p} u^{-q} e^{-\xi u}\, du + C_2 e^{-\xi} \int_0^\infty u^{-p}(1+u)^{-q} e^{-\xi u}\, du\right],$$

dagegen für negative ξ:

$$79)\quad \varphi = \xi^{1-p-q}\left[C_1 \int_0^1 (1-u)^{-p} u^{-q} e^{-\xi u}\, du + C_2 \int_0^\infty (1+u)^{-p} u^{-q} e^{\xi u}\, du\right].$$

c. Wenn p positiv, q negativ ist, so zerlege man p in eine ganze positive Zahl m und den positiven echten Bruch r; man hat dann nach Formel 52)

$$\varphi = F(m+r, q, \xi) = D^m F(r, q, \xi),$$

und nach Nro. 50)

$$80)\quad \varphi = D^m\left[\xi^{1-r-q} F(1-r, 1-q, \xi)\right].$$

Hier sind $1-r$ und $1-q$ gleichzeitig positiv und daher ist bei positiven ξ einzusetzen:

$$81)\quad F(1-r, 1-q, \xi) = C_1 \int_0^1 u^{-r}(1-u)^{-q} e^{-\xi u}\, du + C_2 e^{-\xi} \int_0^\infty (1+u)^{-r} u^{-q} e^{-\xi u}\, du,$$

und bei negativen ξ:

$$82)\quad F(1-r, 1-q, \xi) = C_1 \int_0^1 u^{-r}(1-u)^{-q} e^{-\xi u}\, du + C_2 \int_0^\infty u^{-r}(1+u)^{-q} e^{\xi u}\, du.$$

d. Im Fall p negativ, q positiv ist, zerlegt man q in die ganze positive Zahl n und den positiven echten Bruch s; dies giebt nach Formel 53)

$$\varphi = F(p, n+s, \xi) = (-1)^n e^{-\xi} D^n [e^{\xi} F(p, s, \xi)],$$

und nach Formel 50)

$$83) \qquad \varphi = e^{-\xi} D^n [e^{\xi} \xi^{1-p-s} F(1-s, 1-p, \xi)],$$

wobei der Factor $(-1)^n$ weggelassen wurde, weil er sich in die willkürlichen Constanten C_1 und C_2 einrechnen lässt. Da nun $1-s$ und $1-p$ positiv sind, so gilt in der Formel 83) bei positiven ξ der Werth:

$$84) \quad F(1-s, 1-p, \xi) = C_1 \int_0^1 u^{-s} (1-u)^{-p} e^{-\xi u} du \\ + C_2 e^{-\xi} \int_0^\infty (1+u)^{-s} u^{-p} e^{-\xi u} du,$$

und bei negativen ξ:

$$85) \quad F(1-s, 1-p, \xi) = C_1 \int_0^1 u^{-s} (1-u)^{-p} e^{-\xi u} du \\ + C_2 \int_0^\infty u^{-s} (1+u)^{-p} e^{\xi u} du.$$

Die Formeln 76) bis 85) sind vollkommen brauchbar, so lange ξ eine reelle Grösse oder eine complexe Variabele ist, deren reeller Bestandtheil nicht verschwindet; sie verlieren dagegen ihre Allgemeingültigkeit bei rein imaginären ξ. Aus den mit M und N angestellten Proberechnungen geht nämlich hervor, dass zwar M unter allen Umständen ein particuläres Integral der betrachteten Differentialgleichung darstellt, dass hingegen N bei rein imaginären ξ keinen angebbaren Werth hat, weil

$$(1+\infty)^p \infty^q e^{-\infty\sqrt{-1}}$$

eine unbestimmte Grösse ist. Der Fall eines rein imaginären ξ kann aber vorkommen, nämlich dann, wenn die Differentialgleichung

$$\xi \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + (p+q+\xi) \frac{d\varphi}{d\xi} + p\varphi = 0$$

nicht von Hause aus gegeben, sondern durch Transformation hergeleitet worden ist. Handelt es sich z.B. um die Differentialgleichung

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + 2bx \frac{dy}{dx} + (a + b^2x) y = 0,$$

so müssen zunächst die unter C, a auf S. 528 erwähnten Umwandlungen vorgenommen werden, und dabei erhält man

$$\alpha_2 = 0,\ \ \beta_2 = 1,\ \ \alpha_1 = 0,\ \ \beta_1 = 0,\ \ \alpha_0 = b^2,$$

$$\lambda = -b,\ \ \mu = 0,\ \ \nu = -4b^2,\ \ p = q = -\tfrac{1}{2},$$

$$\xi \frac{d^2\zeta}{d\xi^2} + (-1+\xi)\frac{d\zeta}{d\xi} - \tfrac{1}{2}\zeta = 0,$$

$$\xi = 2\sqrt{\mu + \nu x} = 4b\sqrt{-x},$$

$$y = e^{-bx+2b\sqrt{-x}}\,F\left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 4b\sqrt{-x}\right);$$

in der That entspricht hier einem positiven x ein rein imaginäres ξ. Unter diesen Umständen wird es nöthig, ganz allgemeine Formeln aufzustellen, wobei man sich aber auf die reducirte Differentialgleichung beschränken kann.

Wenn p und q positive echte Brüche sind, die wir mit r und s bezeichnen wollen, so ist

$$\varphi = f(r, s, \xi) = \int_0^1 u^{r-1}(1-u)^{s-1}e^{-\xi u}\,du$$

ein allgemein richtiges particuläres Integral der Differentialgleichung

86) $$\xi\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + (r+s+\xi)\frac{d\varphi}{d\xi} + r\varphi = 0;$$

es kommt also nur darauf an, ein zweites particuläres Integral zu finden. Nun führt aber die Substitution

$$\varphi = \xi^{1-r-s}\,\omega$$

zu der neuen Differentialgleichung

$$\xi\frac{d^2\omega}{d\xi^2} + (2-s-r+\xi)\frac{d\omega}{d\xi} + (1-s)\,\omega = 0,$$

in dieser sind $1-s$ und $1-r$ wiederum positive echte Brüche, mithin genügt ihr der Ausdruck $\omega = f(1-s, 1-r, \xi)$ und folglich wird die Gleichung 86) auch erfüllt durch

$$\varphi = \xi^{1-r-s}f(1-s, 1-r, \xi).$$

Im Allgemeinen ist dieser Ausdruck verschieden von $f(r, s, \xi)$ und stellt demnach ein zweites particuläres Integral von 86) dar; hieraus folgt als allgemeines Integral

$$\varphi = C_1 f(r, s, \xi) + C_2\,\xi^{1-r-s}f(1-s, 1-r, \xi),$$

d. h.

$$87)\quad \varphi = C_1 \int_0^1 u^{r-1}(1-u)^{s-1} e^{-\xi u}\,du \\ + C_2 \xi^{1-r-s} \int_0^1 u^{-s}(1-u)^{-r} e^{-\xi u}\,du.$$

Diese Formel bedarf einer Modification, wenn $r + s = 1$, denn es werden dann beide Particularintegrale einander gleich und summiren sich zu einem nur particulären Integrale. Um diesen Ausnahmefall zu erledigen, setzen wir vorläufig $r + s = 1 - \delta$ und bezeichnen für den Augenblick die beiden in Nro. 87) vorkommenden particulären Integrale mit φ_1 und φ_2, so dass

$$\varphi = C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2;$$

bei Aenderung der Constanten lässt sich dafür schreiben

$$\varphi = C' \varphi_1 + C'' \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\delta},$$

d. i. vermöge der Werthe von φ_1 und φ_2

$$\varphi = C' \int_0^1 u^{r-1}(1-u)^{s-1} e^{-\xi u}\,du \\ + C'' \int_0^1 u^{r-1}(1-u)^{s-1} e^{-\xi u}\, \frac{[\xi u(1-u)]^{\delta} - 1}{\delta}\,du,$$

wobei im zweiten particulären Integrale (φ_2)

$$-r = s - 1 + \delta, \quad -s = r - 1 + \delta$$

gesetzt wurde. Durch Uebergang zur Grenze für verschwindende δ ergiebt sich unter der Bedingung $r + s = 1$

$$88)\quad \varphi = C' \int_0^1 u^{r-1}(1-u)^{s-1} e^{-\xi u}\,du \\ + C'' \int_0^1 u^{r-1}(1-u)^{s-1} e^{-\xi u}\, l\,[\xi u(1-u)]\,du.$$

Für echt gebrochene positive r und s ist also das Integral von Nro. 86) entweder durch Nro. 87) oder durch Nro. 88) bestimmt, je nachdem $r + s$ von der Einheit differirt oder nicht; wir bezeichnen dasselbe mit $\varphi = F(r, s, \xi)$.

Die Reductionsformeln 54) bis 57) erledigen nun sogleich alle übrigen Fälle, wobei immer m und n ganze positive Zahlen, r und s positive echte Brüche bedeuten mögen; man hat nur für $F(r, s, \xi)$

den vorhin angegebenen Werth oder den analog gebildeten Werth von $F(1-s, 1-r, \xi)$ zu substituiren.

Für die vorhin erwähnte Differentialgleichung

$$\xi \frac{d^2 \zeta}{d \xi^2} + (-1+\xi) \frac{d\zeta}{d\xi} - \tfrac{1}{2}\zeta = 0$$

ist z. B.

$$\zeta = F(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \xi),$$

mithin nach Formel 55), wobei $m = n = 1$, $r = s = \frac{1}{2}$,

$$\zeta = -\xi^2 D\left[e^{-\xi} D\left\{e^{+\xi} F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \xi)\right\}\right];$$

wegen $r + s = 1$ hat man nach Nro. 88)

$$F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \xi) = C' \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} e^{-\xi u} du + C'' \int_0^1 \frac{l[\xi u(1-u)]}{\sqrt{u(1-u)}} e^{-\xi u} du.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in die vorige Gleichung, so erhält man durch Ausführung der angedeuteten Differentiationen

$$\zeta = C'\xi^2 \int_0^1 \sqrt{u(1-u)}\, e^{-\xi u} du + C'' \int_0^1 \frac{1-\xi(1-2u)}{\sqrt{u(1-u)}} e^{-\xi u} du$$

$$+ C''\xi^2 \int_0^1 \sqrt{u(1-u)}\, e^{-\xi u} l[\xi u(1-u)]\, du.$$

Das Gesammtresultat dieser Untersuchungen lässt sich in wenig Worte zusammenfassen: Durch die früher angegebenen Transformationen wird die ursprüngliche Differentialgleichung 1) auf ihre einfachste Form 45) gebracht; zufolge der Relationen 54) bis 57) dürfen die in der reducirten Differentialgleichung vorkommenden Coefficienten als positive echte Brüche angesehen werden; für diesen Fall liefert entweder die Formel 87) oder die Formel 88) das nöthige allgemeine Integral, und somit lässt sich auch die allgemeine Differentialgleichung unter allen Umständen integriren *).

*) Die Reduction auf die Normalform hat Weiler gezeigt (Crelle's Journ. Bd. 51); der Gedanke, Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale zu integriren, rührt von Euler her (Instit. calc. integr. Vol. II, Cap. X u. XI) und ist dann von Laplace (Acad. 1782), Scherk, Jacobi, Lobatto (Crelle's Journ. Bd. 10 u. 17), Pelzval und Winckler (Wiener Akad. 1852, 1873) weiter ausgeführt worden.