THEORIE

DER

TRANSFORMATIONSGRUPPEN

ERSTER ABSCHNITT

UNTER MITWIRKUNG VON Dr. FRIEDRICH ENGEL

BEARBEITET

VON

SOPHUS LIE,

PROFESSOR DER GEOMETRIE AN DER UNIVERSITÄT LEIPZIG

LEIPZIG

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1888

Vorrede.

In der neueren Mathematik gewinnt ein Begriff immer mehr an Bedeutung und tritt immer mehr in den Vordergrund, der *Gruppenbegriff.*

Von den verschiedenen Kategorien von Gruppen, welche man jetzt unterscheidet, sind am frühesten die Gruppen der Substitutionentheorie, die auch *endliche discontinuirliche Gruppen* heissen, in den Kreis der mathematischen Untersuchungen gezogen worden. Seit den Entdeckungen *Galois'* ist der Begriff „Substitutionengruppe" der wichtigste Begriff in der Theorie der algebraischen Gleichungen; man erinnere sich nur an die Untersuchungen von *Galois'* Nachfolgern, besonders an die des Herrn *C. Jordan.* — In neuerer Zeit werden auch *unendliche discontinuirliche Gruppen* in Betracht gezogen. Es haben andererseits seit 1876 mehrere Mathematiker, namentlich die Herren *F. Klein, Poincaré* und *Picard* die Theorie der endlichen und der unendlichen discontinuirlichen Gruppen mit grossem Erfolge für die Functionentheorie verwerthet.

Von den discontinuirlichen wesentlich verschieden sind die Gruppen, welche in dem vorliegenden Werke als *endliche continuirliche Gruppen* bezeichnet werden. Dieselben sind dadurch ausgezeichnet, dass ihre analytischen Ausdrücke gewisse willkürliche Parameter enthalten. Als bekannte Beispiele derartiger Gruppen führe ich an den Inbegriff aller Bewegungen sowie den Inbegriff aller projectiven Transformationen des Raumes. Andere ebenfalls allgemein bekannte Beispiele sind: der Inbegriff aller Rotationen um einen Punkt und die Gesammtheit aller projectiven Transformationen, welche eine Fläche zweiten Grades in sich überführen.

Die eben angeführten und noch verschiedene andere endliche continuirliche Gruppen, welche sich in ähnlicher Weise definiren lassen, hat man in der Geometrie schon längst betrachtet, doch ohne dass gruppentheoretische Gesichtspunkte die massgebenden waren. Wenn ich nicht irre, sind Herrn *C. Jordan's* Untersuchungen über Gruppen von Bewegungen die ersten hierher gehörigen Arbeiten, in denen der Gruppenbegriff eine hervorragende Rolle spielt. Doch tragen auch seine soeben genannten Untersuchungen einen ganz speciellen Charakter, indem sie sich nur auf eine bestimmte Gruppe beziehen. Allgemeine Untersuchungen über endliche continuirliche Gruppen sind meines Wissens zuerst von mir angestellt worden.

Das Werk, dessen ersten Theil ich hiermit veröffentliche und bei dessen Abfassung mir Herr Dr. *Engel* getreulich beigestanden hat, giebt eine systematische Darstellung ausgedehnter Untersuchungen, welche ich seit dem Jahre 1873 über endliche continuirliche Gruppen angestellt habe; es liefert eine Zusammenfassung und Ergänzung zahlreicher, meistens in Christiania erschienener Abhandlungen, in denen ich diese meine Untersuchungen auseinandergesetzt, theilweise auch nur ihre Ergebnisse mitgetheilt habe. Da nun die betreffenden Untersuchungen zu mehreren anderen Gebieten der Mathematik in engen Beziehungen stehen und da es wünschenswerth ist, diese Beziehungen sich klar zu machen, so wird es angemessen sein, wenn ich kurz angebe, in welcher Weise ich ursprünglich zur Begründung einer allgemeinen Theorie der endlichen continuirlichen Gruppen geführt worden bin.

Geometrische Untersuchungen waren es, die mich in den Jahren 1869—71 zur Betrachtung von endlichen continuirlichen Gruppen veranlassten. Freilich beschränkte ich mich zunächst darauf, gewisse wichtige continuirliche Gruppen durch geeignete analytische Umformungen — durch algebraische oder transcendente Berührungstransformationen — in andere bekannte Gruppen überzuführen; insofern trugen die betreffenden Arbeiten einen speciellen Charakter. Aber ich möchte hervorheben, dass ich schon im Jahre 1871 eine allgemeine, allerdings naheliegende Definition des Gruppenbegriffs gab, welche sowohl die continuirlichen als die nichtcontinuirlichen Gruppen von Transformationen umfasste. Bei derselben Gelegenheit stellte ich ausdrücklich das Problem auf, alle discontinuirlichen und alle continuirlichen Gruppen zu bestimmen, deren Transformationen durch *lineare* Gleichungen definirt werden. Später haben bekanntlich mehrere Mathematiker die Bestimmung aller *discontinuirlichen* linearen Gruppen in zwei und drei homogenen Veränderlichen mit Erfolg in Angriff genommen, und ich selbst habe alle *continuirlichen* linearen Gruppen in zwei, drei, der Hauptsache nach auch in vier homogenen Veränderlichen bestimmt.

Allgemeinerer Natur waren meine ebenfalls 1869 begonnenen Untersuchungen über Differentialgleichungen, die eine continuirliche Gruppe gestatten.

Ich bemerkte, *dass die meisten gewöhnlichen Differentialgleichungen,* *deren Integration durch die älteren Integrationsmethoden geleistet wird, bei gewissen leicht angebbaren Schaaren von Transformationen invariant bleiben, und dass jene Integrationsmethoden in der Verwerthung dieser Eigenschaft der betreffenden Differentialgleichungen bestehen.* Mit anderen Worten: ich sah, dass der Begriff der Differentialinvariante einer endlichen continuirlichen Gruppe im Grunde, wenn auch nur *implicite* und *in specieller Form*, in jedem Lehrbuche über die gewöhnlichen Differentialgleichungen vorkommt. Nachdem ich so eine Reihe von älteren Integrationsmethoden unter einen allgemeinen Gesichtspunkt gebracht hatte, stellte ich mir naturgemäss die Aufgabe, für alle gewöhnlichen Differentialgleichungen, die bekannte endliche oder infinitesimale Transformationen zulassen, eine allgemeine Integrationstheorie zu entwickeln. Dabei war es von vornherein klar, dass die betreffenden Transformationen in jedem einzelnen Falle eine Gruppe erzeugen mussten.

Die eben gekennzeichnete Aufgabe habe ich mir selbständig gestellt und habe sie selbständig erledigt. Während ich damit beschäftigt war, stand ich in einem lebhaften Verkehr mit meinem Freunde Herrn Professor *Felix Klein*. Dieser hatte sich seinerseits eine Aufgabe gestellt, welche allerdings von der meinigen verschieden war, aber doch wesentliche Analogien mit derselben darbot. Er betrachtete nämlich überhaupt geometrische und analytische Gebilde, die eine *discontinuirliche* Gruppe gestatten und wollte insbesondere die Theorie der discontinuirlichen Gruppen von *linearen* Transformationen für die Gleichungstheorie verwerthen. So sicher es nun auch ist, dass unsere eingehenden mündlichen und brieflichen Aussprachen über die uns beschäftigenden verwandten Gegenstände auf uns beide von Einfluss gewesen sind, so bin ich doch ausser Stande, den Umfang dieser gegenseitigen Einflüsse genauer festzustellen; denn bei unserem Verkehr handelte es sich weniger um bestimmte Sätze als um allgemeine Gesichtspunkte.

In den Jahren 1872 und 1873 beschäftigte ich mich mit partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Dabei bemerkte ich, dass die von *Lagrange*, *Pfaff*, *Cauchy* und *Jacobi* herrührende Integrationstheorie dieser Gleichungen sich als eine *Transformationstheorie* auffassen lässt. Die Aufgabe, eine derartige Gleichung zu integriren, deckt sich nämlich mit der Aufgabe, alle infinitesimalen Berührungstransformationen zu finden, welche die betreffende Gleichung invariant lassen. Es beruht dies darauf, dass der *Poisson*sche Klammerausdruck sich geradezu als das Symbol einer infinitesimalen Berührungstransformation deuten lässt. Auf diese Weise wurde ich nun überhaupt zu allgemeinen Untersuchungen über infinitesimale Transformationen geführt und erkannte, dass mehrere Hauptformeln in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung bei Zugrundelegung des Begriffs der infinitesimalen Transformation eine bemerkenswerthe begriffliche Auffassung zulassen. *Es gelang mir ferner durch Benutzung des Klammersymbols die infinitesimalen Transformationen, welche eine endliche continuirliche Gruppe erzeugen, in äusserst einfacher Weise zu charakterisiren.*

Jetzt konnte es meiner Aufmerksamkeit nicht entgehen, dass alle endlichen continuirlichen Gruppen in einer Veränderlichen sich durch geeignete Wahl des Coordinatensystems in projective Gruppen umwandeln lassen, sowie *dass in n Veränderlichen alle continuirlichen Gruppen, die eine gegebene Anzahl von Parametern enthalten, jedenfalls durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen bestimmt werden können.*

Mit diesen in den Jahren 1873 und 1874 gemachten Entdeckungen war nach meiner Auffassung die Grundlage für eine ganz neue Theorie gewonnen, für die Theorie der endlichen continuirlichen Transformationsgruppen. Die Weiterentwickelung dieser Theorie und die Verwerthung derselben für Integralrechnung und Geometrie haben mich seitdem fast ohne Unterbrechung beschäftigt.

Die Theorie der endlichen continuirlichen Transformationsgruppen ist mit der Substitutionentheorie nahe verwandt, muss aber nichtsdestoweniger als ein selbständiges Gebiet betrachtet werden. Nur theilweise lassen sich die Begriffe und Sätze der Substitutionentheorie auf meine Transformationstheorie übertragen, und in den Fällen, wo die Uebertragung gelingt, liegt sie keineswegs immer so auf der Hand, dass sie als selbstverständlich bezeichnet werden könnte. Gewiss sind die Begriffe, mit denen die Substitutionentheorie arbeitet, elementarer als die in der Transformationstheorie benutzten; aber jedenfalls mir persönlich erscheinen die Verknüpfungsgesetze der betreffenden Begriffe in der Transformationstheorie einfacher und übersichtlicher als in der Substitutionentheorie.

Es ist an dieser Stelle nicht möglich, alle Beziehungen zwischen meiner Transformationstheorie und verwandten Gebieten anzugeben. Doch soll hier wenigstens noch hervorgehoben werden, dass die in diesem Werke dargestellten Theorien mit der gewöhnlichen Invariantentheorie, wie sie von den Herren *Cayley* und *Sylvester*, *Aronhold* und *Hermite*, *Clebsch* und *Gordan* und von ihren Nachfolgern entwickelt worden ist, mannigfache Berührungspunkte darbieten. Unzweifelhaft eignen sich die vollkommenen Methoden der Invariantentheorie sehr gut zur Behandlung vieler wichtiger Probleme meiner allgemeinen Transformationstheorie; andererseits wird aber auch die letztere für die Invariantentheorie neue Gesichtspunkte liefern.

Der hiermit erscheinende erste Theil meines Werkes über Transformationsgruppen bildet an sich ein abgeschlossenes Ganze. Er enthält den ersten Abschnitt der Theorie und entwickelt die allgemeinen Eigenschaften der endlichen continuirlichen Gruppen. Ein später erscheinender zweiter Theil wird noch zwei Abschnitte enthalten: Der eine wird die allgemeine Theorie der endlichen Gruppen von Berührungstransformationen geben, der andere eine ausführliche Theorie der endlichen continuirlichen Gruppen in einer, zwei und drei Veränderlichen. Dazu kommen dann noch verschiedene allgemeine Untersuchungen über Gruppen in n Veränderlichen, unter Anderem eine gruppentheoretische Untersuchung des von *Riemann* und Herrn *v. Helmholtz* behandelten Problems der Grundlagen der Geometrie.

Schon längst war es meine Absicht, ein ausführliches Werk über die endlichen continuirlichen Gruppen zu veröffentlichen, doch wurde mir die Ausführung dieser Absicht dadurch sehr erschwert, dass ich keine der bekannteren Cultursprachen vollständig beherrsche. So war es mir denn sehr willkommen, dass ich im Herbste 1884 den Beistand des Herrn Dr. *Engel* gewann, der sich schon vorher mit meinen Untersuchungen über Transformationsgruppen bekannt gemacht hatte. Herr *Engel* hat sich nicht darauf beschränkt, mir sprachlich und stilistisch mit unermüdlichem Eifer und in der grössten Ausdehnung beizustehen; er hat mich in der That oft bei der Durcharbeitung und Vereinfachung der zur Begründung meiner Resultate erforderlichen analytischen oder synthetischen Entwickelungen unterstützt. Er hat überdies mehrere werthvolle selbständige Untersuchungen über continuirliche Gruppen angestellt; dieselben werden im Folgenden einige Male verwerthet, was an den betreffenden Stellen bemerkt ist.

Die in diesem Werke eingeführten neuen Begriffe und die darin dargestellten neuen Theorien sind mit wenigen Ausnahmen, die immer ausdrücklich hervorgehoben werden, mein Eigenthum. Die von *Jacobi* und *Clebsch* herrührende Theorie der vollständigen Systeme, der von Herrn *Darboux* für einen wichtigen Fall bemerkte und von Herrn *A. Mayer* in voller Allgemeinheit entwickelte Zusammenhang zwischen *integrabeln* simultanen Systemen von partiellen und totalen Differentialgleichungen und endlich *Cauchy's* Reduction eines simultanen Systems linearer Differentialgleichungen auf eine kanonische Form sind die einzigen von anderen Forschern herrührenden Theorien, die im Folgenden ausführlich reproducirt werden. — Dagegen hat Herr *Engel*, wie aus dem oben Gesagten hervorgeht, einen wesentlichen Antheil an der Form, in welcher meine Theorien hier hervortreten, wenngleich die für dieses Werk eigenthümliche Terminologie fast ohne Ausnahme von mir herrührt.

In einer Reihe von Arbeiten habe ich bereits versucht, die Bedeutung meiner Transformationstheorie für die *Integralrechnung* auseinanderzusetzen. Hoffentlich wird es mir in nicht zu ferner Zukunft möglich sein, eine systematisch durchgeführte Darstellung auch dieser Untersuchungen zu veröffentlichen.

Ich kann die allgemeinen Vorbemerkungen nicht schliessen, ohne meiner Freude darüber Ausdruck zu geben, dass die Herren *Poincaré* und *Picard*, deren Untersuchungen über discontinuirliche Gruppen für die Functionentheorie so förderlich gewesen sind, im Laufe der letzten Jahre auch meine Theorie der endlichen continuirlichen Gruppen für die Functionentheorie verwerthet haben. Ich freue mich dessen, denn es ist immer schwer, für eine neue mathematische Richtung die Aufmerksamkeit der Mathematiker zu gewinnen. Meine Hoffnung, dass die Theorie der Transformationsgruppen sich Bahn brechen wird, beruht zu einem wesentlichen Theil darauf, dass dieselbe neue Gesichtspunkte und neue Methoden liefert, welche für mehrere Gebiete der Mathematik nützlich sein werden.

Noch einige Winke für den Leser des vorliegenden ersten Abschnitts.

Zu einer strengen Begründung der Theorie sind eine Reihe von Entwickelungen erforderlich, welche beim erstmaligen Lesen am besten übergangen werden; sie sind daher durch kleineren Druck gekennzeichnet. Ebenso mehrere Entwickelungen, welche zwar an und für sich wichtig, aber doch für das Verständniss des Ganzen nicht von besonderer Bedeutung sind, welche daher ebenfalls zunächst übergangen werden können. Da aber nicht in allen derartigen Fällen kleinerer Druck angewendet ist, so will ich noch bemerken, dass auch die Auseinandersetzungen auf Seite 124—133, 172—183 (das ganze Kapitel 10), 310—327 (das Kapitel 18), 363—366, 395—401 weggelassen werden können, ohne dass dadurch das Verständniss des Folgenden wesentlich benachtheiligt wird.

Leipzig, im Mai 1888.

Sophus Lie.

Inhalt des ersten Abschnitts.

Druckfehler und Berichtigungen.

S. 6, Z. 18 v. o.: statt $\frac{\partial F_i}{\partial x_k}$ zu lesen $\frac{\partial x_i'}{\partial x_k}$.

S. 7, Z. 16 und 18 v. u.: statt x', y' zu lesen $x' - a$, $y' - b$.

S. 58, Z. 8 v. o.: statt $\eta_\nu(y_1 \cdots y_n)$ zu lesen $\eta_\nu(y_1 \cdots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_\nu}$.

S. 81, Z. 11 bis 5 v. u.: statt „Hier wollen wir . . . Interesse“ zu lesen: Hier wollen wir darauf aufmerksam machen, dass die *eingliedrigen Gruppen* in der Theorie der Transformationsgruppen dieselbe Rolle spielen wie die *von einer einzelnen Substitution erzeugten Gruppen* in der Substitutionentheorie.

S. 91, Z. 7 v. o.: statt $x_1 \cdots x_q$ zu lesen $x_1 \cdots x_{n-q}$.

S. 95, nach Z. 8 v. o. wird zugefügt: Die obige einfache Verification der *speciellen* Jacobischen Identität dürfte zuerst von *Engel* gegeben sein.

S. 148, Z. 15 v. o.: statt $A_j(f)$ zu lesen $A_j(F)$.

S. 150, Z. 5 v. o.: statt $A_k(A_j(F)) - A_j(A_k(F)) -$ zu lesen:

$$A_k(A_j(F)) - A_j(A_k(F)) = .$$

S 158 in dem Columnentitel: statt Kap. 7 zu lesen: Kap. 9.

S. 270. Nach dem Satze 12 wird hinzugefügt: In diesem Satze hat r_1 natürlich dieselbe Bedeutung wie auf S. 266; ebenso r_2, r_3 u. s. w.

S. 274, Z. 18 v. o. ist $\frac{r(r-1)}{1 \cdot 2}$ zu streichen.

S. 416 bis S. 419: ist überall statt $y_\mu' = f_\mu$ zu lesen: $y_\mu' = \mathfrak{f}_\mu$.

Einleitung.

Sind die Veränderlichen $x_1' \cdots x_n'$ als Functionen von $x_1 \cdots x_n$ bestimmt durch n nach $x_1 \cdots x_n$ auflösbare Gleichungen:

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n),$$

so sagt man, dass diese Gleichungen eine Transformation zwischen den Veränderlichen x und x' darstellen. Mit solchen Transformationen haben wir es im Folgenden zu thun; wo nicht ausdrücklich anders bemerkt wird, werden wir uns dabei auf den Fall beschränken, dass die f_i *analytische Functionen* ihrer Argumente sind. Da aber ein nicht geringer Theil unserer Resultate von dieser Voraussetzung unabhängig ist, so werden wir auch gelegentlich andeuten, wie sich verschiedene Entwickelungen bei Berücksichtigung von Functionen allgemeinerer Art gestalten.

Wenn die Functionen $f_i(x_1 \cdots x_n)$ analytisch und innerhalb eines gemeinsamen Bereiches definirt sind, so kann man nach den bekannten Untersuchungen von Cauchy, Weierstrass, Briot und Bouquet stets in der Mannigfaltigkeit aller reellen und complexen Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$ einen solchen Bereich (x) abgränzen, dass alle Functionen f_i in der ganzen Ausdehnung dieses Bereiches eindeutig sind, sowie dass sie sich in der Umgebung jedes dem Bereiche (x) angehörigen Werthsystems $x_1^0 \cdots x_n^0$ regulär verhalten, das heisst, sich daselbst in gewöhnliche Potenzreihen von $x_1 - x_1^0, \cdots x_n - x_n^0$ mit lauter ganzen positiven Potenzen entwickeln lassen.

Für die Auflösbarkeit der Gleichungen $x_i' = f_i(x)$ ist eine einzige Bedingung nothwendig und hinreichend, die nämlich, dass die Functionaldeterminante

$$\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

nicht identisch verschwinden darf. Ist diese Forderung erfüllt, so kann der vorhin definirte Bereich (x) insbesondere so gewählt werden, dass die Functionaldeterminante für keines seiner Werthsysteme den Werth Null annimmt. Lässt man unter dieser Voraussetzung die x nach und nach alle Werthsysteme im Bereiche (x) annehmen, so bestimmen die Gleichungen $x_i' = f_i(x)$ im Gebiete der x' einen Bereich von solcher Beschaffenheit, dass $x_1 \cdots x_n$ als Functionen von $x_1' \cdots x_n'$ in der Umgebung jedes Werthsystemes $x_1'^0 \cdots x_n'^0$ dieses neuen Bereiches sich regulär verhalten und also in gewöhnliche Potenzreihen von $x_1' - x_1'^0, \cdots x_n' - x_n'^0$ entwickelt werden können. Daraus folgt bekanntlich nicht, dass die x_i in der ganzen Ausdehnung des neuen Bereiches eindeutige Functionen von $x_1' \cdots x_n'$ sind; es ist aber möglich, den oben definirten Bereich (x) wenn nöthig so einzuengen, dass zwei verschiedene Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$ des Bereiches (x) stets auch zwei verschiedene Werthsysteme $x_1' = f_1(x), \cdots x_n' = f_n(x)$ liefern. Ist dies geschehen, so werden auch $x_1 \cdots x_n$ in dem ganzen entsprechenden Bereiche der x' eindeutige Functionen von $x_1' \cdots x_n'$.

Die Gleichungen $x_i' = f_i(x)$ stellen dann zwischen dem Bereiche im Gebiete der x und dem im Gebiete der x' eine eindeutig umkehrbare Beziehung her; jedem Werthsysteme des einen Bereiches ordnen sie ein und nur ein Werthsystem des andern zu und umgekehrt.

Werden die Gleichungen $x_i' = f_i(x)$ nach den x aufgelöst, so stellen die hervorgehenden Gleichungen

$$x_k = F_k(x_1' \cdots x_n') \quad (k = 1 \cdots n)$$

ihrerseits wieder eine Transformation dar. Die Beziehung zwischen dieser Transformation und der ursprünglichen ist offenbar eine gegenseitige; man sagt dementsprechend: die beiden Transformationen sind zu einander *invers*. Aus dieser Definition folgt augenscheinlich:

Führt man zuerst die Transformation

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n)$$

aus und sodann die zu derselben inverse Transformation

$$x_i'' = F_i(x_1' \cdots x_n') \quad (i = 1 \cdots n),$$

so erhält man die identische Transformation

$$x_i'' = x_i \quad (i = 1 \cdots n).$$

Hierin liegt die eigentliche Definition des Begriffs zweier zu einander inverser Transformationen.

Führt man überhaupt zwei beliebige Transformationen

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n), \; x_i'' = g_i(x_1' \cdots x_n') \quad (i = 1 \cdots n)$$

nach einander aus, so erhält man eine neue Transformation, nämlich die folgende:

$$x_i'' = g_i(f_1(x) \cdots f_n(x)) \quad (i = 1 \cdots n).$$

Im Allgemeinen ändert sich natürlich diese neue Transformation, wenn man die Reihenfolge jener beiden ersten Transformationen ändert; doch kann es auch vorkommen, dass die Reihenfolge jener beiden Transformationen gleichgültig ist. Dieser besondere Fall tritt ein, wenn identisch ist:

$$g_i(f_1(x) \cdots f_n(x)) \equiv f_i(g_1(x) \cdots g_n(x)) \quad (i = 1 \cdots n);$$

wir sagen dann nach dem Vorgange der Substitutionentheorie: *die beiden Transformationen*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n)$$

und

$$x_i' = g_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n)$$

sind mit einander vertauschbar. —

*Eine endliche oder unendliche Schaar von Transformationen zwischen den x und den x' heisst eine Gruppe von Transformationen oder eine Transformationsgruppe, wenn je zwei Transformationen der Schaar nach einander ausgeführt eine Transformation ergeben, welche wiederum der Schaar angehört.**)

Eine Transformationsgruppe heisst *discontinuirlich*, wenn sie aus einer discreten Anzahl von Transformationen besteht, diese Anzahl möge nun endlich oder unendlich sein. Zwei Transformationen einer solchen Gruppe sind endlich von einander verschieden. Die discontinuirlichen Gruppen gehören in das Gebiet der *Substitutionentheorie*, im Folgenden bleiben sie daher ausser Betracht.

Den discontinuirlichen stehen die *continuirlichen* Transformationsgruppen gegenüber, welche immer unendlich viele Transformationen enthalten. Eine Transformationsgruppe heisst *continuirlich*, wenn es möglich ist, zu jeder der Gruppe angehörigen Transformation gewisse andere Transformationen der Gruppe anzugeben, welche von der betreffenden Transformation nur unendlich wenig verschieden sind, wenn es dagegen nicht möglich ist, den ganzen in der Gruppe enthaltenen Inbegriff von Transformationen in einzelne discrete Schaaren zu zerlegen.

Unter den continuirlichen Transformationsgruppen betrachten wir nun wieder zwei getrennte Kategorieen, welche wir in der Benennung als *endliche continuirliche* und als *unendliche continuirliche* Gruppen unterscheiden. Für beide Kategorieen können wir zunächst nur vorläufige Definitionen geben, die erst später präcis gefasst werden sollen.

Eine *endliche continuirliche Transformationsgruppe* wird dargestellt durch *ein* System von n Gleichungen

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n),$$

wobei die f_i analytische Functionen der Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ und der willkürlichen Parameter $a_1 \cdots a_r$ bedeuten. Da wir es mit einer

*) Sophus Lie, Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania 1871, S. 243. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen 1872. Lie, Göttinger Nachrichten 1874, 3. Decbr.

Gruppe zu thun haben, so müssen zwei Transformationen

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$$
$$x_i'' = f_i(x_1' \cdots x_n', b_1 \cdots b_r)$$

der Gruppe nach einander ausgeführt eine Transformation ergeben, welche der Gruppe angehört, welche also die Form hat:

$$x_i'' = f_i(f_1(x, a) \cdots f_n(x, a), b_1 \cdots b_r) = f_i(x_1 \cdots x_n, c_1 \cdots c_r).$$

Die c_k sind hier natürlich von den x unabhängig und also Functionen von den a und b allein.

Beispiele. Eine bekannte Gruppe dieser Art ist die folgende:

$$x' = \frac{x + a_1}{a_2 x + a_3},$$

welche drei Parameter a_1, a_2, a_3 enthält. Führt man die beiden Transformationen

$$x' = \frac{x + a_1}{a_2 x + a_3}, \quad x'' = \frac{x' + b_1}{b_2 x' + b_3}$$

nach einander aus, so erhält man:

$$x'' = \frac{x + c_1}{c_2 x + c_3},$$

wo c_1, c_2, c_3 als Functionen von den a und b durch die Relationen

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1 a_3}{1 + b_1 a_2}, \quad c_2 = \frac{b_2 + a_2 b_3}{1 + b_1 a_2}, \quad c_3 = \frac{b_2 a_1 + b_3 a_3}{1 + b_1 a_2}$$

definirt sind.

Nicht minder bekannt ist die Gruppe:

$$x_i' = \sum_1^n {}^k a_{ik} x_k \quad (i = 1 \cdots n)$$

mit den n^2 Parametern a_{ik}. Setzt man hier

$$x_\nu'' = \sum_1^n {}^i b_{\nu i} x_i' \quad (\nu = 1 \cdots n),$$

so ergiebt sich:

$$x_\nu'' = \sum_{ik}^{1 \ldots n} b_{\nu i} a_{ik} x_k = \sum_1^n {}^k c_{\nu k} x_k,$$

wo die $c_{\nu k}$ durch die Gleichungen

$$c_{\nu k} = \sum_1^n {}^i b_{\nu i} a_{ik} \quad (\nu, k = 1 \cdots n)$$

bestimmt sind. —

Um zu einer brauchbaren Definition einer unendlichen continuirlichen Gruppe zu gelangen, wollen wir zunächst die Definition der endlichen continuirlichen Gruppen etwas umgestalten. Wir benutzen dabei einen Satz aus der Theorie der Differentialgleichungen, auf den wir übrigens später ausführlicher zurückkommen werden (vgl. Kap. 10).

Die Gleichungen

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\, a_1 \cdots a_r) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

mögen irgend eine endliche continuirliche Gruppe darstellen. Nach dem betreffenden Satze ist es dann möglich, die Functionen f_i, soweit sie von den x abhängen, durch ein System von Differentialgleichungen zu definiren. Zu dem Ende hat man nur die Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ hinreichend oft nach $x_1 \cdots x_n$ zu differentiiren und dann alle Gleichungen aufzustellen, welche sich durch Elimination von $a_1 \cdots a_r$ ergeben. Ist man bei der Differentiation hinreichend weit gegangen, so erhält man bei der Elimination der a ein System von Differentialgleichungen für $x_1' \cdots x_n'$, dessen allgemeinstes Lösungensystem die ursprünglichen Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ mit den r willkürlichen Constanten $a_1 \cdots a_r$ darstellen. Da nun die Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ nach Voraussetzung eine Gruppe definiren, so ergiebt sich, dass das betreffende System von Differentialgleichungen die folgende bemerkenswerthe Eigenschaft besitzt: ist $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\, b_1 \cdots b_r)$ ein Lösungensystem desselben und $x_i' = f_i(x, a)$ ein zweites, so ist auch

$$x_i' = f_i(f_1(x, a) \cdots f_n(x, a),\, b_1 \cdots b_r) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

ein Lösungensystem.

Wir sehen also, dass sich die Gleichungen einer jeden endlichen continuirlichen Transformationsgruppe durch ein System von Differentialgleichungen definiren lassen, welches gewisse besondere Eigenschaften besitzt. Erstens kann aus zwei Lösungensystemen der betreffenden Differentialgleichungen stets in der vorhin angegebenen Weise ein drittes Lösungensystem abgeleitet werden: darin liegt, dass wir es mit einer Gruppe zu thun haben. Zweitens hängt das allgemeinste Lösungensystem der betreffenden Differentialgleichungen nur von einer endlichen Anzahl willkürlicher Constanten ab: dieser Umstand sagt aus, dass unsere Gruppe endlich ist.

Nehmen wir nun an: es ist eine Schaar von Transformationen $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n)$ durch ein System von Differentialgleichungen von der Form:

$$W_k\left(x_1' \cdots x_n',\, \frac{\partial x_1'}{\partial x_1} \cdots,\, \frac{\partial^2 x_1'}{\partial x_1^2} \cdots\right) = 0 \qquad (k = 1, 2 \cdots)$$

definirt. Nehmen wir ferner an, dass dieses System von Differentialgleichungen zwar die erste der beiden erwähnten Eigenschaften besitzt, nicht aber die zweite; dass also mit $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n)$ und $x_i' = g_i(x_1 \cdots x_n)$ stets auch $x_i' = g_i(f_1(x) \cdots f_n(x))$ ein Lösungensystem dieser Differentialgleichungen ist, dass aber das allgemeinste Lösungensystem derselben nicht blos von einer endlichen Anzahl willkürlicher Constanten abhängt, sondern von willkürlichen Elementen höherer Art, wie zum Beispiel von willkürlichen Functionen. Dann bildet der Inbegriff von allen Transformationen, welche den betreffenden Differentialgleichungen genügen, offenbar wiederum eine Gruppe und zwar im Allgemeinen eine continuirliche, aber nicht mehr eine endliche, sondern eine, die wir als *unendliche continuirliche* bezeichnen.

Wir geben gleich einige einfache Beispiele von unendlichen continuirlichen Transformationsgruppen.

Wenn die Differentialgleichungen, welche die betreffende unendliche Gruppe definiren, auf die identische Gleichung $0 = 0$ zusammenschrumpfen, so lauten die Transformationen der Gruppe:

$$x_i' = \Pi_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n),$$

wobei die Π_i willkürliche analytische Functionen ihrer Argumente bezeichnen.

Auch die Gleichungen

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_k} = 0 \quad (i \neq k;\ i, k = 1 \cdots n)$$

definiren eine unendliche Gruppe, nämlich die folgende:

$$x_i' = \Pi_i(x_i) \quad (i = 1 \cdots n),$$

wo die Π_i wiederum vollkommen willkürlich sind.

Zu bemerken ist übrigens, dass der Begriff einer unendlichen continuirlichen Gruppe sich noch allgemeiner fassen lässt als hier geschehen. Man könnte überhaupt jede continuirliche Gruppe, welche nicht endlich ist, als eine unendliche continuirliche bezeichnen. Diese Definition deckt sich aber mit der oben gegebenen nicht.

So stellen zum Beispiel die Gleichungen

$$x' = F(x), \quad y' = F(y),$$

in denen F beide Male dieselbe willkürliche Function seines Argumentes bedeutet, eine Gruppe dar. Diese Gruppe ist continuirlich, denn alle ihre Transformationen werden durch ein einziges Gleichungensystem dargestellt; sie ist ausserdem offenbar nicht endlich. Folglich wäre sie eine unendliche continuirliche Gruppe, wenn wir diesen Begriff in dem vorhin angegebenen weiteren Sinne fassten. Auf der anderen Seite ist es aber nicht möglich, die Schaar der Transformationen

$$x' = F(x), \quad y' = F(y)$$

durch Differentialgleichungen zu definiren, welche von willkürlichen Elementen frei sind. Folglich passt die zuerst aufgestellte Definition einer unendlichen continuirlichen Gruppe auf diesen Fall nicht. Wir finden es indess zweckmässig, nur solche unendliche continuirliche Gruppen zu betrachten, die sich durch Differentialgleichungen definiren lassen und legen daher stets unsere erste, engere Definition zu Grunde.

Wir wollen nicht unterlassen hervorzuheben, dass der Begriff „Transformationsgruppe“ durch die Unterscheidung von discontinuirlichen und continuirlichen Gruppen noch keineswegs erschöpft ist. Es giebt vielmehr Transformationsgruppen, welche sich unter keine dieser beiden Classen unterordnen, welche aber doch mit jeder von beiden Classen etwas gemeinsames haben. Auch mit Gruppen dieser Art müssen wir uns im Folgenden wenigstens gelegentlich beschäftigen. Vorläufig mögen zwei Beispiele genügen.

Der Inbegriff aller Coordinatentransformationen einer Ebene, bei welchen man von einem gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinatensysteme zu einem andern übergeht, bildet eine Gruppe, die weder continuirlich noch discontinuirlich ist. Die betreffende Gruppe enthält nämlich zwei getrennte Kategorieen von Transformationen, zwischen denen ein continuirlicher Uebergang nicht möglich ist: erstens solche Transformationen, bei welchen das alte und das neue Coordinatensystem consentiren und zweitens solche, bei welchen diese beiden Systeme dissentiren.

Die ersten haben die Form:

$$x' = x \cos\alpha - y \sin\alpha, \quad y' = x \sin\alpha + y \cos\alpha,$$

der analytische Ausdruck der andern lautet:

$$x' = x \cos\alpha + y \sin\alpha, \quad y' = x \sin\alpha - y \cos\alpha.$$

Jedes dieser Gleichungensysteme stellt eine continuirliche Schaar von Transformationen dar, also ist die Gruppe nicht discontinuirlich; sie ist aber auch nicht continuirlich, denn erst beide Gleichungensysteme zusammengenommen liefern alle Transformationen der Gruppe; die Transformationen der Gruppe zerfallen also in zwei discrete Schaaren. Denkt man sich die Ebene x, y im gewöhnlichen Raume und nimmt z als dritte rechtwinklige Coordinate hinzu, so kann man sich den Inbegriff jener Coordinatentransformationen der Ebene $z = 0$ als den Inbegriff gewisser Bewegungen des Raumes denken, derjenigen nämlich, bei welchen die Ebene $z = 0$ ihre Lage behält. Diese Bewegungen scheiden sich entsprechend in zwei Klassen, in solche, welche die Ebene nur in sich verschieben und in solche, welche sie umlegen.

Als zweites Beispiel einer derartigen Gruppe möge hier noch der Inbegriff aller projectiven und dualistischen Transformationen der Ebene angeführt werden.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen über den Begriff Transformationsgruppe überhaupt wenden wir uns zur Betrachtung der endlichen continuirlichen Transformationsgruppen, welche den Gegenstand der folgenden Untersuchungen bilden. Diese Untersuchungen zerfallen in drei Abschnitte. Der *erste* Abschnitt handelt über endliche continuirliche Gruppen im Allgemeinen. Der *zweite* handelt über solche endliche continuirliche Gruppen, deren Transformationen sogenannte *Berührungstransformationen* sind. Im *dritten* Abschnitte endlich werden gewisse allgemeine Probleme der Gruppentheorie für kleine Zahlen der Veränderlichen im Einzelnen durchgeführt.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Eigenschaften der endlichen continuirlichen Transformationsgruppen.

Kapitel 1.

Definition der endlichen continuirlichen Transformationsgruppen.

Unsere erste Aufgabe ist es jetzt, den in der Einleitung aufgestellten Begriff der endlichen continuirlichen Gruppen schärfer zu begränzen.

§ 1.

Zunächst eine Hülfsuntersuchung über continuirliche Schaaren von Transformationen im Allgemeinen.

Die Gleichungen

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

mögen eine beliebige Schaar von Transformationen darstellen, also zunächst nicht gerade nothwendig eine Gruppe. Die f_i seien analytische Functionen sowohl der Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ als der Parameter $a_1 \cdots a_r$; es versteht sich von selbst, dass die Functionaldeterminante

$$\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

nicht identisch verschwinden darf.

Ertheilen wir den Parametern $a_1 \cdots a_r$ nach und nach alle möglichen Werthe innerhalb eines gewissen Bereiches, so erhalten wir alle Transformationen, welche von den obigen Gleichungen dargestellt werden. Nun giebt es im Ganzen ∞^r verschiedene Werthsysteme $a_1 \cdots a_r$; wie viele verschiedene Transformationen $x_i' = f_i(x, a)$ entsprechen diesen ∞^r Werthsystemen?

Theoretisch bietet die Beantwortung dieser Frage keine besondere Schwierigkeit. Wir denken uns einfach die f_i nach Potenzen von $x_1 - x_1^0, \cdots x_n - x_n^0$ entwickelt, unter $x_1^0 \cdots x_n^0$ irgend ein Werthsystem der x verstanden, in dessen Umgebung sich alle f_i regulär verhalten. Sodann denken wir uns die Coefficienten in diesen Entwickelungen der Reihe nach aufgeschrieben:

$$\mathfrak{A}_k(a_1 \cdots a_r) \quad (k = 1, 2 \cdots),$$

wo natürlich die $\mathfrak{A}$ analytische Functionen der Parameter $a_1 \cdots a_r$ sind. Es kommt jetzt blos darauf an, zu untersuchen, wieviele von einander unabhängige unter den sämmtlichen Functioneu $\mathfrak{A}_k$ vorhanden sind.

Finden sich nämlich gerade r von einander unabhängige Functionen unter den $\mathfrak{A}_k$ vor, so entsprechen den ∞^r verschiedenen Werthsystemen $a_1 \cdots a_r$ augenscheinlich gerade ∞^r verschiedene Werthsysteme $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2 \cdots$ und also auch gerade ∞^r verschiedene Transformationen $x_i' = f_i(x, a)$.

Anders, wenn es unter den Functionen $\mathfrak{A}_k$ nicht r, sondern weniger, zum Beispiel blos $r - m$ von einander unabhängige Functionen giebt. In diesem Falle lassen sich alle $\mathfrak{A}_k$ durch $r - m$ unter ihnen ausdrücken, etwa durch $\mathfrak{A}_1' \cdots \mathfrak{A}_{r-m}'$, welche natürlich von einander unabhängig sein müssen; durchlaufen daher $a_1 \cdots a_r$ ihre ∞^r verschiedenen Werthe, so hat das genau dieselbe Wirkung, als wenn $\mathfrak{A}_1' \cdots \mathfrak{A}_{r-m}'$ gerade ∞^{r-m} verschiedene Werthsysteme durchlaufen. Folglich entsprechen den ∞^r Werthsystemen $a_1 \cdots a_r$ gerade ∞^{r-m} verschiedene Werthsysteme $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2 \cdots$ und also auch gerade ∞^{r-m} verschiedene Transformationen $x_i' = f_i(x, a)$. Am deutlichsten kommt dies zum Ausdruck, wenn wir beachten, dass auch die Functionen f_i die Parameter $a_1 \cdots a_r$ nur in den Verbindungen $\mathfrak{A}_1' \cdots \mathfrak{A}_{r-m}'$ enthalten, dass sie also die Form haben:

$$f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) = \bar{f}_i(x_1 \cdots x_n, \mathfrak{A}_1' \cdots \mathfrak{A}_{r-m}') \quad (i = 1 \cdots n).$$

Daraus geht nämlich hervor, dass wir geradezu $\mathfrak{A}_1' \cdots \mathfrak{A}_{r-m}'$ an Stelle von $a_1 \cdots a_r$ als neue Parameter einführen können, so dass sich die Anzahl der willkürlichen Parameter, welche in den Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ vorkommen, von r auf $r - m$ erniedrigt. Dann aber ist klar, dass die Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ nicht ∞^r, sondern nur ∞^{r-m} verschiedene Transformationen darstellen.

Wir wollen nun die folgende Ausdrucksweise einführen:

In den Gleichungen:

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

sind die r Parameter $a_1 \cdots a_r$ alle w e s e n t l i c h, *wenn diese Gleichungen ∞^r verschiedene Transformationen zwischen den x und den x' darstellen oder was dasselbe ist, wenn es unmöglich ist, solche von einander unabhängige Functionen von $a_1 \cdots a_r$ als neue Parameter einzuführen, dass nachher die Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ nicht mehr r, sondern blos eine geringere Anzahl von willkürlichen Parametern enthalten.*

Sind die Parameter $a_1 \cdots a_r$ in den Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ nicht wesentlich, so können die f_i, wie oben gezeigt wurde, die Form

$\bar{f}_i(x_1 \cdots x_n, \mathfrak{A}_1'(a) \cdots \mathfrak{A}_{r-m}'(a))$ erhalten, wo die Zahl m mindestens gleich eins ist. Wir bemerken, dass es dann unter allen Umständen wenigstens eine lineare partielle Differentialgleichung von der besonderen Form:

$$\sum_1^r {}^k \chi_k(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_k} = 0$$

giebt, welche $\mathfrak{A}_1' \cdots \mathfrak{A}_{r-m}'$ und also auch $f_1 \cdots f_n$ identisch befriedigen. Diese Eigenschaft ist für den in Rede stehenden Fall charakteristisch. Gesetzt nämlich umgekehrt, die Functionen $f_1 \cdots f_n$ befriedigen alle eine lineare partielle Differentialgleichung von der eben besprochenen Form. Nun ist bekannt, dass diese Gleichung $r-1$ unabhängige Lösungen $\psi_1(a) \cdots \psi_{r-1}(a)$ besitzt, welche nur von $a_1 \cdots a_r$ abhängen und dass jede andere Lösung, soweit sie von den a abhängt, eine Function von $\psi_1 \cdots \psi_{r-1}$ allein ist. Folglich kann jedes f_i auf die Form $\mathfrak{f}_i(x_1 \cdots x_n, \psi_1(a) \cdots \psi_{r-1}(a))$ gebracht werden, womit bewiesen ist, dass die Parameter $a_1 \cdots a_r$ in den Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ nicht wesentlich sind.

Wir können daher sagen:

Satz 1. *In den Transformationsgleichungen*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

sind die r Parameter $a_1 \cdots a_r$ dann und nur dann alle wesentlich, wenn es keine von $x_1 \cdots x_n$ freie lineare partielle Differentialgleichung

$$\sum_1^r {}^k \chi_k(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_k} = 0$$

giebt, welcher die n Functionen $f_1 \cdots f_n$ sämmtlich genügen.

Das Kriterium, welches in dem vorstehenden Satze ausgesprochen ist, hat übrigens nicht blos theoretischen Werth; es ist auch praktisch brauchbar, wenn entschieden werden soll, ob die Parameter $a_1 \cdots a_r$ von vorgelegten Transformationsgleichungen $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ wesentlich sind oder nicht. Wir wollen kurz auseinandersetzen, wie diese Untersuchung durchgeführt werden kann.

Zunächst bilden wir die n Gleichungen

$$(1) \qquad \sum_1^r {}^k \chi_k(a_1 \cdots a_r) \cdot \frac{\partial}{\partial a_k} f_i(x, a) = 0 \quad (i = 1 \cdots n)$$

und ertheilen in denselben den x irgend welche bestimmte, aber allgemeine Werthe $x_1' \cdots x_n'$. Auf diese Weise ergeben sich zur Bestimmung von $\chi_1 \cdots \chi_r$ n lineare homogene Gleichungen, unter denen etwa $r' \leqq r$ von einander unabhängige sein mögen. Ist $r' = r$, so müssen $\chi_1 \cdots \chi_r$ identisch verschwinden und die r Parameter $a_1 \cdots a_r$ sind daher wesentlich. Ist

$r' < r$, so ertheilen wir den x gewisse andere allgemeine, von den x' verschiedene Werthe $x_1'' \cdots x_n''$ und erhalten so weitere Gleichungen zur Bestimmung der χ. Unter diesen neuen Gleichungen werden gewisse, etwa r'' von einander und von den obigen r' unabhängige vorhanden sein; dann ist natürlich $r' + r'' \leqq r$; ist $r' + r'' = r$, so verschwinden alle χ und die Parameter $a_1 \cdots a_r$ sind wesentlich; ist $r' + r'' < r$, so müssen wir den x wiederum gewisse allgemeine Werthe $x_1''' \cdots x_n'''$ ertheilen, neue Gleichungen zur Bestimmung der χ ableiten und so fort.

Wir können annehmen, dass wir auf die angegebene Weise nach einander $r' + r'' + \cdots + r^{(q-1)} \leqq r$ von einander unabhängige Gleichungen zur Bestimmung der χ finden und dass keine der $q - 1$ Zahlen $r', r'' \cdots r^{(q-1)}$ verschwindet. Dagegen möge $r^{(q)}$ gleich Null sein, so dass also die Gleichungen (1) bei ganz beliebiger Wahl der x stets eine Folge der gefundenen $r' + r'' + \cdots + r^{(q-1)}$ Gleichungen sind. In diesem Falle verschwinden daher auch alle Zahlen $r^{(q+1)}, r^{(q+2)} \cdots$, also erhalten wir zur Bestimmung der χ eben nur jene $r' + r'' + \cdots + r^{(q-1)}$ Gleichungen. Ist nun $r' + \cdots + r^{(q-1)} = r$, so sind alle $\chi \equiv 0$ und die Parameter $a_1 \cdots a_r$ sind wesentlich; ist dagegen $r' + \cdots + r^{(q-1)} < r$, so lassen sich die χ als Functionen von $a_1 \cdots a_r$ bestimmen und die r Parameter $a_1 \cdots a_r$ sind nicht wesentlich.

Damit ist gezeigt, dass in jedem einzelnen Falle die Beantwortung der Frage, ob die Parameter $a_1 \cdots a_r$ wesentlich sind oder nicht, durch eine endliche Anzahl ausführbarer Operationen geleistet werden kann.

§ 2.

In den Transformationsgleichungen

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, \, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

seien jetzt die Parameter $a_1 \cdots a_r$ alle wesentlich.

Da die f_i analytische Functionen ihrer Argumente sind, so können wir uns in dem Gebiete aller Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$ und in dem Gebiete aller Werthsysteme $a_1 \cdots a_r$ je einen Bereich (x) bezüglich (a) derart auswählen, dass folgendes stattfindet:

Erstens. Die $f_i(x, a)$ sind in der ganzen Ausdehnung der beiden Bereiche (x) und (a) eindeutige Functionen der $n + r$ Veränderlichen $x_1 \cdots x_n, \, a_1 \cdots a_r$.

Zweitens. Die $f_i(x, a)$ verhalten sich in der Umgebung jedes Werthsystems $x_1^0 \cdots x_n^0, \, a_1^0 \cdots a_r^0$ regulär, sind also in gewöhnliche Potenzreihen von $x_1 - x_1^0, \cdots x_n - x_n^0, \, a_1 - a_1^0, \cdots a_r - a_r^0$ entwickelbar, sobald $x_1^0 \cdots x_n^0$ beliebig im Gebiete (x), $a_1^0 \cdots a_r^0$ beliebig im Gebiete (a) liegt.

Drittens. Die Functionaldeterminante

$$\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

verschwindet für keine Combination von Werthsystemen x_i bezüglich a_k der beiden Bereiche (x) und (a).

Viertens. Ertheilt man in den Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ den Parametern a_k irgend welche Werthe a_k^0 im Gebiete (a), so liefern die Gleichungen

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1^0 \cdots a_r^0) \quad (i = 1 \cdots n)$$

zu zwei verschiedenen Werthsystemen $x_1 \cdots x_n$ des Bereiches (x) auch stets zwei verschiedene Werthsysteme $x_1' \cdots x_n'$.

Setzen wir voraus, dass die Bereiche (x) und (a) so gewählt sind, dass alle diese vier Bedingungen erfüllt sind. Ertheilen wir dann in den Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ den Veränderlichen x_i alle möglichen Werthe in (x) und den Parametern a_k alle möglichen Werthe in (a), so durchlaufen die x_i' in ihrem Gebiete einen gewissen Bereich, den wir symbolisch durch die Gleichung $x' = f\big((x)(a)\big)$ bezeichnen können. Dieser neue Bereich hat folgende Eigenschaften:

Erstens. Ist $a_1^0 \cdots a_r^0$ irgend ein Werthsystem von (a) und $x_1'^0 \cdots x_n'^0$ irgend ein Werthsystem des Unterbereiches $x' = f\big((x)a^0\big)$, so lassen sich $x_1 \cdots x_n$ in der Umgebung des Werthsystems $x_i'^0$, a_k^0 in gewöhnliche Potenzreihen von $x_1' - x_1'^0, \cdots x_n' - x_n'^0, a_1 - a_1^0, \cdots a_r - a_r^0$ entwickeln.

Zweitens. Ertheilt man den a_k feste Werthe a_k^0 im Bereiche (a), so werden in den Gleichungen

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1^0 \cdots a_r^0) \quad (i = 1 \cdots n)$$

die Grössen $x_1 \cdots x_n$ eindeutige Functionen von $x_1' \cdots x_n'$, die sich in der ganzen Ausdehnung des Bereiches $x' = f\big((x)a^0\big)$ regulär verhalten.

Nunmehr wollen wir die besondere Voraussetzung hinzufügen, dass die ∞^r verschiedenen Transformationen, welche durch die Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ dargestellt werden, eine Transformationsgruppe bilden. Diese Gruppe ist dann offenbar eine continuirliche und endliche; um die Anzahl ihrer Transformationen kurz andeuten zu können, werden wir sagen, dass die Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ mit den r wesentlichen Parametern $a_1 \cdots a_r$ eine *r-gliedrige Transformationsgruppe* darstellen.

Nach unserer in der Einleitung aufgestellten Definition einer endlichen continuirlichen Gruppe müssen die Gleichungen

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$$
$$x_i'' = f_i(x_1' \cdots x_n', b_1 \cdots b_r)$$

bei Elimination der x' ein Gleichungensystem von derselben Form ergeben, etwa:

$$x_i'' = f_i(x_1 \cdots x_n, c_1 \cdots c_r),$$

wo die c nur von den a und den b abhängen.

Hier ist zu bemerken, dass wir über das Verhalten der Functionen $f_i(x, a)$ nur innerhalb der Bereiche (x) und (a) Festsetzungen getroffen haben.

Folglich ist es uns nur dann erlaubt, die Ausdrücke $x_\nu' = f_\nu(x, a)$ in die Gleichungen $x_i'' = f_i(x', b)$ einzusetzen, wenn das Werthsystem

$x_1' \cdots x_n'$ in dem Bereiche (x) liegt. Wir sehen uns deshalb genöthigt, zu den bisher getroffenen Festsetzungen über die Bereiche (x) und (a) noch die folgende Annahme hinzuzufügen: es soll möglich sein, innerhalb der Bereiche (x) und (a) je einen Unterbereich $((x))$ und $((a))$ von solcher Beschaffenheit anzugeben, dass die x_i' immer im Bereiche (x) bleiben, wenn die x_i beliebig in $((x))$, die a_k beliebig in $((a))$ laufen; wir drücken dies kurz so aus: es soll der Bereich $x' = f(((x))((a)))$ ganz in den Bereich (x) hineinfallen.

Wählen wir nach diesen Festsetzungen $x_1 \cdots x_n$ im Bereiche $((x))$ und $a_1 \cdots a_r$ im Bereiche $((a))$, so können wir in dem Ausdruck $f_i(x_1' \cdots x_n', b_1 \ldots b_r)$ wirklich die Substitution $x_k' = f_k(x, a)$ ausführen; das heisst, wenn $x_1^0 \cdots x_n^0$ irgend ein Werthsystem im Bereiche $((x))$ bedeutet, so lässt sich der Ausdruck

$$f_i(f_1(x, a) \cdots f_n(x, a), b_1 \cdots b_r)$$

in der Umgebung des Werthsystems x_k^0 in eine gewöhnliche Potenzreihe von $x_1 - x_1^0, \cdots x_n - x_n^0$ entwickeln; die Coefficienten dieser Potenzreihe sind Functionen von $a_1 \cdots a_r, b_1 \cdots b_r$ und verhalten sich regulär, wenn die a_k beliebig in $((a))$ die b_k beliebig in (a) gewählt werden.

Es lässt sich nun zeigen, dass die Grössen $c_1 \cdots c_r$ ganz bestimmte und zwar *analytische* Functionen von $a_1 \cdots a_r, b_1 \cdots b_r$ sind. Um dies nachzuweisen, betrachten wir die Gleichungen

$$f_i(f_1(x, a) \cdots f_n(x, a), b_1 \cdots b_r) = f_i(x_1 \cdots x_n, c_1 \cdots c_r),$$

welche sich bei gegebenen a und b durch geeignete Wahl der c identisch befriedigen lassen müssen. Wir entwickeln auf beiden Seiten nach Potenzen von $x_1 - x_1^0, \cdots x_n - x_n^0$ und vergleichen die Coefficienten; dann erhalten wir eine im allgemeinen unendliche Reihe von Gleichungen zur Bestimmung von $c_1 \cdots c_r$:

$$\mathfrak{A}_k(c_1 \cdots c_r) = \Psi_k(a_1 \cdots a_r, b_1 \cdots b_r) \quad (k = 1, 2 \cdots).$$

Zunächst ist klar, dass diese Gleichungen keine Relationen zwischen den a und b allein zur Folge haben können, dass sich die c nicht aus ihnen eliminiren lassen: die a sind ja innerhalb gewisser Bereiche vollkommen willkürlich und die b desgleichen. Ferner ist klar, dass die gefundenen Gleichungen zwischen den a, b, c mit einander verträglich sind, denn nach Voraussetzung lassen sich zu jedem Werthsysteme $a_1 \cdots a_r, b_1 \cdots b_r$ entsprechende Werthe der c angeben. Endlich ist leicht zu sehen, dass die gefundenen Gleichungen zur Bestimmung aller c ausreichen. Nach Voraussetzung sind ja die Parameter $a_1 \cdots a_r$ in den Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ alle wesentlich; wir schliessen daher im Hinblick auf die Entwickelungen des vorigen Paragraphen, dass sich unter den Functionen $\mathfrak{A}_1(c), \mathfrak{A}_2(c) \cdots$ gerade r von einander unabhängige befinden. Folglich ist die Auflösung nach $c_1 \cdots c_r$ möglich und es ergeben sich für die c_k ganz bestimmte analytische Functionen der a und b:

$$c_k = \varphi_k(a_1 \cdots a_r, b_1 \cdots b_r) \quad (k = 1 \cdots r).$$

Werden diese Ausdrücke für $c_1 \cdots c_r$ in die Gleichungen

$$(2) \quad f_i(f_1(x, a) \cdots f_n(x, a), b_1 \cdots b_r) = f_i(x_1 \cdots x_n, c_1 \cdots c_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

eingesetzt, so ergeben sich lauter Identitäten, da ja die Grössen x_i, a_k, b_k von einander unabhängig sind.

Wir können und wollen annehmen, dass der Bereich $((a))$ so gewählt ist, dass alle $\varphi_k(a, b)$ sich regulär verhalten, wenn die a sowohl als die b ganz beliebig in $((a))$ laufen. Ausserdem müssen wir aber noch darauf Rücksicht nehmen, dass in den Gleichungen

$$x_i'' = f_i(x', b) = f_i(x, c)$$

die c den Bereich (a) nicht verlassen dürfen. Daher werden wir noch ausdrücklich die besondere Voraussetzung machen: es soll das Werthsystem $c_k = \varphi_k(a, b)$ stets in den Bereich (a) fallen, sobald die a und die b in dem Bereiche $((a))$ liegen.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so verhalten sich die Functionen

$$f_i(x_1 \cdots x_n, \varphi_1(a, b) \cdots \varphi_r(a, b))$$

für alle Werthsysteme x_i, a_k, b_k der Bereiche $((x))$ bezüglich $((a))$ regulär. Setzen wir daher in (2) für die c_k die $\varphi_k(a, b)$ ein, so gelten die entstehenden Identitäten für alle eben besprochenen Werthsysteme x_i, a_k, b_k.

Aus dem Gleichungensysteme (1) wollen wir jetzt zwei andere, ähnlich gestaltete herleiten, welche uns über die Beschaffenheit der Functionen $\varphi_k(a, b)$ näheren Aufschluss geben werden.

Zunächst denken wir uns $x_1 \cdots x_n$ aus den Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ als Functionen der x' und der a bestimmt und die erhaltenen Werthe: $x_i = F_i(x', a)$ in (2) eingesetzt. Auf diese Weise finden wir das eine der beiden versprochenen Gleichungensysteme, nämlich das folgende:

$$(3) \quad f_i(x_1' \cdots x_n', b_1 \cdots b_r) = f_i(F_1(x', a) \cdots F_n(x', a), c_1 \cdots c_r)$$
$$(i = 1 \cdots n).$$

Das andere ergiebt sich einfach durch Auflösung der Gleichungen (2) nach $f_1(x, a) \cdots f_n(x, a)$. Es lautet:

$$(4) \quad f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) = F_i(f_1(x, c) \cdots f_n(x, c), b_1 \cdots b_r)$$
$$(i = 1 \cdots n).$$

Die neuen Gleichungen (3) und (4) werden natürlich gerade so wie die Gleichungen (2), aus denen sie hergeleitet sind, bei der Substitution $c_k = \varphi_k(a, b)$ zu lauter Identitäten, denn die Grössen x_i', a_k, b_k sind ebensowenig wie die x_i, a_k, b_k durch Relationen mit einander verknüpft.

Nunmehr behandeln wir die Gleichungen (3) und (4) ähnlich wie früher die Gleichungen (2). Wir entwickeln zunächst die beiden Seiten von (3) in der Umgebung eines geeigneten Werthsystemes $x_\nu'^0$ in eine gewöhnliche Potenzreihe der $x_\nu' - x_\nu'^0$ und vergleichen die Coefficienten; dann erhalten wir eine Reihe von Gleichungen von der folgenden Form:

$$(5) \qquad \mathfrak{A}_k(b_1 \cdots b_r) = Y_k(a_1 \cdots a_r,\ c_1 \cdots c_r) \quad (k = 1, 2 \cdots).$$

Ferner entwickeln wir die beiden Seiten von (4) in der Umgebung von x_ν^0 in eine gewöhnliche Potenzreihe der $x_\nu - x_\nu^0$ und vergleichen wieder die Coefficienten. Auf diese Weise erhalten wir eine Reihe neuer Gleichungen von der Form

$$(6) \qquad \mathfrak{A}_k(a_1 \cdots a_r) = \Omega_k(b_1 \cdots b_r,\ c_1 \cdots c_r) \quad (k = 1, 2 \cdots).$$

Die Functionen $\mathfrak{A}_k(a_1 \cdots a_r)$ und ebenso die $\mathfrak{A}_k(b_1 \cdots b_r)$ sind hier nach dem Früheren so beschaffen, dass sich unter ihnen gerade je r von einander unabhängige befinden. Da nun ihrer Herleitung zufolge sowohl die Gleichungen (5) als die Gleichungen (6) bei der Substitution $c_1 = \varphi_1(a, b), \cdots c_r = \varphi_r(a, b)$ zu Identitäten werden, so ergiebt sich, dass jedes dieser Gleichungensysteme mit dem System $c_k = \varphi_k(a, b)$ äquivalent ist. Aus der Form der Gleichungen (5) und (6) erhellt aber, dass dieselben sich bezüglich nach den b_k und den a_k auflösen lassen; folglich können die Gleichungen $c_k = \varphi_k(a, b)$ sowohl nach den b_k als nach den a_k aufgelöst werden:

$$b_k = \psi_k(a_1 \cdots a_r,\ c_1 \cdots c_r) \quad (k = 1 \cdots r)$$
$$a_k = \chi_k(b_1 \cdots b_r,\ c_1 \cdots c_r) \quad (k = 1 \cdots r).$$

Also gilt das

Theorem 1. *Stellen die Gleichungen*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

mit den r wesentlichen Parametern $a_1 \cdots a_r$ eine r-gliedrige Gruppe dar, ergeben also zwei Transformationen

$$\left.\begin{aligned} x_i' &= f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \\ x_i'' &= f_i(x_1' \cdots x_n',\ b_1 \cdots b_r) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1 \cdots n)$$

nach einander ausgeführt eine Transformation

$$x_i'' = f_i(f_1(x, a) \cdots f_n(x, a),\ b_1 \cdots b_r) = f_i(x_1 \cdots x_n,\ c_1 \cdots c_r),$$

wo die c_k sich folgendermassen durch die a und die b ausdrücken:

$$c_k = \varphi_k(a_1 \cdots a_r,\ b_1 \cdots b_r) \quad (k = 1 \cdots r),$$

so sind diese Gleichungen sowohl nach $a_1 \cdots a_r$ als nach $b_1 \cdots b_r$

auflösbar, anders ausgesprochen: es verschwindet keine der beiden Functionaldeterminanten

$$\sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial \varphi_r}{\partial a_r}, \quad \sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_1} \cdots \frac{\partial \varphi_r}{\partial b_r}$$

*identisch.**)

Wir wollen uns den Bereich $((a))$ so gewählt denken, dass die erwähnten Functionaldeterminanten beide stets von Null verschieden sind, wenn sowohl die a als die b beliebig in $((a))$ laufen.

Bilden die ∞^r Transformationen

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

eine r-gliedrige Gruppe, so bilden auch die ∞^r durch Auflösung nach $x_1 \ldots x_n$ entstehenden Transformationen

$$x_i = F_i(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

eine r-gliedrige Gruppe.

In der That, unter der gemachten Voraussetzung bestehen Relationen von der Form

$$x_i' = f_i(x, a), \quad x_i'' = f_i(x', b), \quad x_i'' = f_i(x, c),$$

wobei $c_k = \varphi_k(a, b)$ ist. Durch Auflösung ergeben sich hieraus die Gleichungen:

$$x_i = F_i(x', a), \quad x_i' = F_i(x'', b), \quad x_i = F_i(x'', c),$$

wobei wiederum $c_k = \varphi_k(a, b)$. Wenn daher die beiden Transformationen

$$x_i' = F_i(x_1'' \cdots x_n'', b_1 \cdots b_r)$$
$$x_i = F_i(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r)$$

nach einander ausgeführt werden, so ergiebt sich die Transformation:

$$x_i = F_i(F_1(x'', b) \cdots F_n(x'', b), a_1 \cdots a_r)$$
$$= F_i(x_1'' \cdots x_n'', c_1 \cdots c_r),$$

welche ebenfalls der Schaar $x_i = F_i(x', a)$ angehört.

Damit ist die aufgestellte Behauptung bewiesen. Es gilt also das

Theorem 2. *Stellen die Gleichungen*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

mit den r wesentlichen Parametern $a_1 \ldots a_r$ eine r-gliedrige Transformationsgruppe dar, so gilt dasselbe auch von den aufgelösten Gleichungen

$$x_i = F_i(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n).$$

---

*) Lie, Archiv for Mathematik og Naturv. Bd. 1, Christiania 1876.

Aus diesem Theorem lässt sich unter anderem schliessen, dass die Auflösbarkeit der Gleichungen $c_k = \varphi_k(a, b)$ nach den a selbstverständlich ist, sobald man ihre Auflösbarkeit nach den b nachgewiesen hat.

Das Theorem 2 wird im Folgenden nicht benutzt, da die Voraussetzungen, welche wir bei der Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$ über die Bereiche gemacht haben, für die Gruppe $x_i = F_i(x', a)$ nicht in derselben Weise erfüllt zu sein brauchen. Gleichwohl ist das Theorem von Interesse, da es verschiedene Zusammenhänge aufdeckt.

§ 3.

Wir haben bisher immer vorausgesetzt, dass in den Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ einer r-gliedrigen Gruppe die f_i analytische Functionen von $x_1 \cdots x_n$, $a_1 \cdots a_r$ sind. Man könnte nun diese Voraussetzung durch eine weniger allgemeine ersetzen. Man könnte zum Beispiel annehmen, dass die Functionen f_i sowohl in den x als in den a rational sind und dass auch umgekehrt aus den Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ sich $x_1 \cdots x_n$ als rationale Functionen von $x_1' \cdots x_n'$ und $a_1 \cdots a_r$ bestimmen. Die Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$ würde dann aus eindeutigen und eindeutig umkehrbaren Transformationen bestehen oder, wie man zu sagen pflegt, aus Cremona'schen Transformationen.

Es ist durchaus nicht unsere Absicht diesen besonderen Fall ausführlich zu behandeln; doch scheint es nicht unangebracht, einen Augenblick bei demselben zu verweilen. Wir können da nämlich einige wichtige Schlüsse ziehen, welche allerdings nicht ohne Weiteres auf den allgemeinen Fall übertragbar sind, aber doch für die Behandlung des letzteren verschiedene Fingerzeige geben.

Denken wir uns also eine Gruppe von Cremona'schen Transformationen vorgelegt:

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n),$$

wo, nach der oben gemachten Voraussetzung, die Parameter $a_1 \cdots a_r$ sowohl in den Transformationsgleichungen selbst als auch in deren Auflösungen nach $x_1 \cdots x_n$ rational eingehen.

Dann vereinfachen sich zunächst die Entwickelungen des § 2 ganz beträchtlich. Vor allen Dingen fällt die Nothwendigkeit weg, die Veränderlichen x_i, a_k, b_k auf gewisse Bereiche zu beschränken, da die auftretenden Functionen für das ganze Gebiet *aller* Werthsysteme x_i, a_k, b_k definirt sind. Ferner ergiebt sich sofort, dass die $c_k = \varphi_k(a, b)$ algebraische Functionen von $a_1 \cdots a_r$, $b_1 \cdots b_r$ werden.

Aber noch mehr. In den Gleichungen

$$a_k = \chi_k(b_1 \cdots b_r, c_1 \cdots c_r) \quad (k = 1 \cdots r),$$

welche aus $c_k = \varphi_k(a, b)$ durch Auflösung nach $a_1 \cdots a_r$ entstehen, dürfen wir ohne Weiteres die Substitution $c_k = b_k$ machen. Wird dabei $\chi_k(b_1 \cdots b_r,\ b_1 \cdots b_r) = a_k^0$, so liefern die beiden Transformationen

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1^0 \cdots a_r^0)$$
$$x_i'' = f_i(x_1' \cdots x_n',\ b_1 \cdots b_r)$$

nach einander ausgeführt die Transformation

$$x_i'' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ b_1 \cdots b_r).$$

Nun bestimmen unter den gemachten Voraussetzungen die Gleichungen $x_i'' = f_i(x, b)$ die Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ als rationale Functionen von $x_1'' \cdots x_n''$, $b_1 \cdots b_r$ und die Gleichungen $x_i'' = f_i(x', b)$ liefern für $x_1' \cdots x_n'$ dieselben rationalen Functionen der x_i'', b_k. Folglich ergiebt sich aus den Gleichungen:

$$x_i'' = f_i(x_1' \cdots x_n',\ b_1 \cdots b_r) = f_i(x_1 \cdots x_n,\ b_1 \cdots b_r)$$

sofort $x_1' = x_1, \cdots x_n' = x_n$, womit bewiesen ist, dass zu den Parameterwerthen $a_1^0 \cdots a_r^0$ die identische Transformation gehört. Mit andern Worten: *Jede der besprochenen Gruppen von Cremona'schen Transformationen enthält die identische Transformation.* Die Parameter a_k^0 sind natürlich von den b unabhängig.

Aus den Gleichungen $c_k = \varphi_k(a, b)$ können wir aber auch die folgenden ableiten:

$$b_k = \psi_k(a_1 \cdots a_r,\ c_1 \cdots c_r)$$

und dürfen hierin die Substitution $c_k = a_k^0$ machen, woraus

$$\psi_k(a_1 \cdots a_r,\ a_1^0 \cdots a_r^0) = \bar{a}_k$$

folgen möge. Demnach gehört zu jedem Werthsystem $a_1 \cdots a_r$ ein Werthsystem $\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r$ von solcher Beschaffenheit, dass die beiden Transformationen

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r)$$
$$x_i'' = f_i(x_1' \cdots x_n',\ \bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r)$$

nach einander ausgeführt die Transformation

$$x_i'' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1^0 \cdots a_r^0) \equiv x_i$$

das heisst die identische Transformation ergeben. *Also ordnen sich die Transformationen der besprochenen Gruppen von Cremona'schen Transformationen paarweise als inverse zusammen.*

Beispiel. Eine derartige Gruppe von Cremona'schen Transformationen ist die in der Einleitung erwähnte dreigliedrige Gruppe:

$$x' = \frac{x + a_1}{a_2 x + a_3},$$

welche aus allen projectiven Transformationen einer einfachen Mannigfaltigkeit besteht.

Die Gleichungen $c_k = \varphi_k(a, b)$ haben, wie wir wissen, für diese Gruppe die Form:

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1 a_3}{1 + b_1 a_2}, \quad c_2 = \frac{b_2 + a_2 b_3}{1 + b_1 a_2}, \quad c_3 = \frac{b_2 a_1 + b_3 a_3}{1 + b_1 a_2}.$$

Lösen wir nach a_1, a_2, a_3 auf und setzen sodann $c_k = b_k$, so finden wir: $a_1^0 = 0$, $a_2^0 = 0$, $a_3^0 = 1$, das sind also die Parameterwerthe, zu denen die identische Transformation gehört. Lösen wir andererseits die obigen Gleichungen nach b_1, b_2, b_3 auf und setzen sodann $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = 1$, so finden wir als Parameter der zu a_1, a_2, a_3 inversen Transformation die folgenden: $\frac{-a_1}{a_3}, \frac{-a_2}{a_3}, \frac{1}{a_3}$.

Soviel über die Gruppen von Cremona'schen Transformationen. Wenden wir uns jetzt wieder zur Betrachtung des allgemeinen Falles, dass die $f_i(x, a)$ analytische Functionen ihrer Argumente sind.

Nach Theorem 1 wissen wir auch dann, dass die Gleichungen $c_k = \varphi_k(a, b)$ sowohl nach $a_1 \cdots a_r$ als nach $b_1 \cdots b_r$ auflösbar sind. Allein die damals gemachten Voraussetzungen reichen jedenfalls nicht ohne Weiteres hin, um zu entscheiden, ob die Forderung $c_k = b_k$ befriedigt werden kann. Von den φ_k wissen wir ja nur, dass sie sich für alle im Bereich $((a))$ gelegenen Werthsysteme a_k, b_k regulär verhalten und dass dabei das Werthsystem $c_k = \varphi_k(a, b)$ stets in den Bereich (a) fällt. Nichts aber wissen wir darüber, ob es Werthsysteme c_k giebt, welche im Bereich $((a))$ liegen und noch weniger, ob für ein solches Werthsystem $c_k = b_k$ werden kann.

Aber selbst wenn $c_k = b_k$ werden kann, wenn also zu gewissen Parameterwerthen a_k^0 im Bereiche $((a))$ die identische Transformation gehört, selbst dann steht die Frage noch offen, ob c_k den Werth a_k^0 annehmen kann, ob es also möglich ist, die Gleichungen $a_k^0 = \varphi_k(a, b)$ zu befriedigen.

Es lässt sich nicht a priori einsehen, dass jede endliche continuirliche Gruppe die identische Transformation enthält. Aber selbst wenn die identische Transformation in einer vorgelegten Gruppe auftritt, so folgt daraus noch nicht ohne Weiteres, dass die Transformationen dieser Gruppe sich paarweise als inverse zusammenordnen.

§ 4.

In den n Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ seien die Gleichungen

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$$

einer r-gliedrigen Gruppe vorgelegt. Es giebt dann verschiedene

Mittel, um aus diesen Gleichungen andere Gleichungen herzuleiten, welche wiederum eine r-gliedrige Gruppe darstellen.

Einmal können wir an Stelle der a irgend r unabhängige Functionen:

$$\bar{a}_k = \beta_k(a_1 \cdots a_r) \quad (k = 1 \cdots r)$$

derselben als neue Parameter einführen. Durch Auflösung nach $a_1 \cdots a_r$ möge sich ergeben:

$$a_k = \gamma_k(\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r) \quad (k = 1 \cdots r)$$

und bei Substitution dieser Werthe möge sein:

$$f_i(x_1 \cdots x_n, \ a_1 \cdots a_r) = \mathfrak{f}_i(x_1 \cdots x_n, \ \bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r).$$

Setzen wir dann noch:

$$\beta_k(b_1 \cdots b_r) = \bar{b}_k, \quad \beta_k(c_1 \cdots c_r) = \bar{c}_k \quad (k = 1 \cdots r),$$

so nimmt die Bedingungsgleichung

$$f_i(f_1(x, a) \cdots f_n(x, a), \ b_1 \cdots b_r) = f_i(x_1 \cdots x_n, \ c_1 \cdots c_r)$$

ohne Weiteres die Form an:

$$\mathfrak{f}_i(\mathfrak{f}_1(x, \bar{a}) \cdots \mathfrak{f}_n(x, \bar{a}), \ \bar{b}_1 \cdots \bar{b}_r) = \mathfrak{f}_i(x_1 \cdots x_n, \ \bar{c}_1 \cdots \bar{c}_r),$$

woraus hervorgeht, dass die Gleichungen

$$x_i' = \mathfrak{f}_i(x_1 \cdots x_n, \ \bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

mit den r wesentlichen Parametern $\bar{a}_1 \dots \bar{a}_r$ ebenfalls eine r-gliedrige Gruppe darstellen.

Die Gleichungen dieser neuen Gruppe sind allerdings von denen der ursprünglichen Gruppe verschieden, offenbar stellen aber diese Gleichungen genau dieselben Transformationen dar, wie die ursprünglichen Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$. Folglich ist die neue Gruppe im Grunde mit der alten identisch.

Andererseits können wir auch an Stelle der x neue unabhängige Veränderliche $y_1 \cdots y_n$ einführen:

$$y_i = \omega_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n),$$

oder aufgelöst:

$$x_i = w_i(y_1 \cdots y_n) \quad (i = 1 \cdots n).$$

Wir haben alsdann zu setzen:

$$x_i' = w_i(y_1' \cdots y_n') = w_i', \quad x_i'' = w_i(y_1'' \cdots y_n'') = w_i''$$

und erhalten daher an Stelle der Transformationsgleichungen

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, \ a_1 \cdots a_r)$$

die folgenden:

$$w_i(y_1' \cdots y_n') = f_i(w_1 \cdots w_n, \ a_1 \cdots a_r)$$

oder durch Auflösung:

$$y_i' = \omega_i(f_1(w, a) \cdots f_n(w, a)) = \mathfrak{F}_i(y_1 \cdots y_n, \ a_1 \cdots a_r).$$

Es ist leicht nachzuweisen, dass die Gleichungen

$$y_i' = \mathfrak{F}_i(y_1 \cdots y_n,\ a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

mit den r wesentlichen Parametern $a_1 \cdots a_r$ wiederum eine r-gliedrige Gruppe darstellen. In der That, die bekannte Gleichung

$$f_i(f_1(x, a) \cdots f_n(x, a),\ b_1 \cdots b_r) = f_i(x_1 \cdots x_n,\ c_1 \cdots c_r)$$

geht bei Einführung der neuen Veränderlichen über in:

$$f_i(f(w, a),\ b) = f_i(w_1 \cdots w_n,\ c_1 \cdots c_r),$$

was sich auch schreiben lässt:

$$f_i(w_1' \cdots w_n',\ b_1 \cdots b_r) = f_i(w_1 \cdots w_n,\ c_1 \cdots c_r) = w_i'';$$

hieraus aber ergiebt sich durch Auflösung nach $y_1'' \cdots y_n''$:

$$y_\nu'' = \omega_\nu(f_1(w', b) \cdots f_n(w', b)) = \omega_\nu(f_1(w, c) \cdots f_n(w, c))$$

oder was dasselbe ist:

$$y_\nu'' = \mathfrak{F}_\nu(y_1' \cdots y_n',\ b_1 \cdots b_r) = \mathfrak{F}_\nu(y_1 \cdots y_n,\ c_1 \cdots c_r);$$

das heisst, es besteht die Gleichung

$$\mathfrak{F}_\nu(\mathfrak{F}_1(y, a) \cdots \mathfrak{F}_n(y, a),\ b_1 \cdots b_r) = \mathfrak{F}_\nu(y_1 \cdots y_n,\ c_1 \cdots c_r),$$

womit eben bewiesen ist, dass die Gleichungen $y_i' = \mathfrak{F}_i(y, a)$ eine Gruppe darstellen.

Endlich können wir natürlich auch in eine vorgelegte Gruppe zu gleicher Zeit neue Parameter und neue Veränderliche einführen; es ist klar, dass wir auf diese Weise ebenfalls aus der ursprünglichen eine neue Gruppe erhalten.

Wir stellen nun die folgende Definition auf:

Definition. *Zwei r-gliedrige Gruppen*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$
$$y_i' = \mathfrak{f}_i(y_1 \cdots y_n,\ b_1 \cdots b_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

in gleichvielen Veränderlichen sind mit einander ***ähnlich***, *sobald sich die eine bei Einführung geeigneter neuer Veränderlicher und geeigneter neuer Parameter in die andere verwandelt.*

Es giebt offenbar unbegränzt viele Gruppen, die mit einer vorgelegten ähnlich sind; aber alle diese unbegränzt vielen Gruppen sind zugleich mit der vorgelegten bekannt. Deshalb können wir, wie es im Folgenden auch geschehen soll, zwei mit einander ähnliche Gruppen als nicht wesentlich von einander verschieden betrachten.

Wir haben oben von Einführung neuer Parameter und neuer Veränderlicher gesprochen, ohne auf die Voraussetzungen einzugehen, unter denen wir behaupten können, dass hierbei alle für uns wesentlichen Eigenschaften des Gleichungensystems $x_i' = f_i(x, a)$ bewahrt bleiben. Ueber diesen Punkt jetzt noch einige Worte.

Soll es erlaubt sein, in die Gruppe $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ an Stelle der a die neuen Parameter $\bar{a}_k = \beta_k(a_1 \cdots a_r)$ einzuführen, so müssen die $\bar{a}_k$ in dem ganzen früher definirten Bereich (a) eindeutige Functionen der a sein und sich daselbst überall regulär verhalten; die Functionaldeterminante $\sum \pm \frac{\partial \beta_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial \beta_r}{\partial a_r}$ darf in dem Bereich (a) nirgends verschwinden, und endlich müssen zu zwei verschiedenen Werthsystemen $a_1 \cdots a_r$ dieses Bereiches auch stets zwei verschiedene Werthsysteme $\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r$ gehören. Mit anderen Worten: es muss sich im Gebiete der $\bar{a}_k$ ein Bereich $(\bar{a})$ abgränzen lassen, auf dessen Werthsysteme die Werthsysteme des Bereiches (a) durch die Gleichungen $\bar{a}_k = \beta_k(a_1 \cdots a_r)$ eineindeutig abgebildet werden.

Soll andererseits die Einführung der neuen Veränderlichen $y_i = \omega_i(x_1 \cdots x_n)$ gestattet sein, so müssen die y eindeutige und reguläre Functionen der x sein für alle Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$, welche bei Feststellung der Gruppeneigenschaft der Gleichungen $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ in Betracht gekommen sind; innerhalb dieses Gebietes darf die Functionaldeterminante $\sum \pm \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \omega_n}{\partial x_n}$ nirgends verschwinden und endlich müssen zu zwei verschiedenen Werthsystemen $x_1 \cdots x_n$ dieses Gebietes stets zwei verschiedene Werthsysteme $y_1 \cdots y_n$ gehören. Das betreffende Gebiet von Werthsystemen der x muss also auf ein gewisses Gebiet von Werthsystemen der y eineindeutig abgebildet werden.

Würde man in die Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$ neue Parameter oder neue Veränderliche einführen, ohne dass die eben auseinandergesetzten Forderungen erfüllt wären, so wäre es jedenfalls denkbar, dass wichtige Eigenschaften der Gruppe, ja die Gruppeneigenschaft selbst verloren gingen; eine Gruppe mit der identischen Transformation könnte sich in eine verwandeln, welche die identische Transformation nicht enthält, und dergleichen.

Unter Umständen kommt es jedoch blos darauf an, die Schaar der Transformationen $x_i' = f_i(x, a)$ in der Umgebung einer einzelnen Stelle $a_1 \cdots a_r$ oder $x_1 \cdots x_n$ zu untersuchen. Diese Untersuchung wird oft dadurch erleichtert, dass man neue Veränderliche oder neue Parameter einführt, welche in der *Umgebung der betreffenden Stelle* die früher genannten Forderungen erfüllen.

In einem solchen Falle braucht man daher gar nicht auf die Frage einzugehen, ob die betreffenden Forderungen in der ganzen Ausdehnung der Bereiche (x) bezüglich (a) erfüllt sind.

§ 5.

Bisher waren für uns die Begriffe Transformation und Transformationsgruppe von rein analytischer Natur. Dieselben sind jedoch einer anschaulichen Auffassung fähig, wenn der Begriff des n-fach ausgedehnten Raumes eingeführt wird.

Deuten wir nämlich $x_1 \cdots x_n$ als Punktcoordinaten eines solchen Raumes, so erscheint eine Transformation $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n)$ als eine

Punkttransformation; dieselbe lässt sich daher auffassen als eine *Operation*, welche darin besteht, dass alle Punkte x_i gleichzeitig in die neuen Lagen x_i' übergeführt werden. Man drückt das auch so aus: die betreffende Transformation ist eine Operation, bei welcher die Punkte des Raumes $x_1 \cdots x_n$ unter einander vertauscht werden.

Haben wir nun eine Schaar von ∞^r Transformationen

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r),$$

welche eine r-gliedrige Gruppe bilden, so entspricht dieser Schaar eine Schaar von ∞^r Operationen, bei welchen die Punkte des Raumes $x_1 \cdots x_n$ unter einander vertauscht werden. Offenbar ergeben je zwei dieser ∞^r Operationen nach einander ausgeführt stets eine Operation, welche wieder der Schaar angehört.

Wenn wir daher überhaupt eine derartige Schaar von Operationen als eine Operationsgruppe oder kurzweg als eine Gruppe bezeichnen, so können wir sagen, dass *jede vorgelegte r-gliedrige Transformationsgruppe sich als analytische Darstellung einer gewissen Gruppe von ∞^r Vertauschungen der Punkte $x_1 \cdots x_n$ auffassen lässt.*

Ist umgekehrt eine Gruppe von ∞^r Vertauschungen der Punkte $x_1 \cdots x_n$ vorgelegt und ist es möglich, diese Vertauschungen durch *analytische* Transformationsgleichungen darzustellen, so bilden die entsprechenden ∞^r Transformationen natürlich eine Transformationsgruppe.

Denkt man sich nun eine bestimmte Operationsgruppe gegeben und ausserdem eine analytische Darstellung derselben, also eine Transformationsgruppe, so hat diese Darstellung zwei offenbare Zufälligkeiten an sich.

Die erste Zufälligkeit ist die Wahl der Parameter $a_1 \cdots a_r$. Es leuchtet ein, dass es auf die Operationsgruppe an sich gar keinen Einfluss hat, wenn wir an Stelle der a die neuen Parameter $\bar{a}_k = \beta_k(a_1 \cdots a_r)$ einführen. Nur der analytische Ausdruck für die Operationsgruppe wird dabei ein anderer; dieser Ausdruck stellt daher nach wie vor eine Transformationsgruppe dar.

Die zweite Zufälligkeit in der analytischen Darstellung unserer Operationsgruppe ist die Wahl des Coordinatensystems in dem Raume $x_1 \cdots x_n$. Jede Vertauschung der Punkte $x_1 \cdots x_n$ ist von der Wahl des Coordinatensystems, auf welches man die Punkte bezieht, vollständig unabhängig; nur die analytische Darstellung der Vertauschung ändert sich mit dem betreffenden Coordinatensystem. Dasselbe gilt natürlich von jeder Gruppe von Vertauschungen. Hieraus geht hervor, dass man aus einer Transformationsgruppe bei Einführung neuer Veränderlicher, das heisst also bei einem Wechsel des Coordinatensystems wieder eine Transformationsgruppe erhält; denn die Transformationsgleichungen, welche man bei Einführung der neuen Veränderlichen bekommt, stellen genau dieselbe Operationsgruppe dar, welche von der ursprünglichen Transformationsgruppe dargestellt wird; sie bilden daher ihrerseits eine Transformationsgruppe.

Hiermit sind die analytischen Ueberlegungen des vorigen Paragraphen begrifflich erklärt. Namentlich ist jetzt ersichtlich, warum zwei ähnliche Transformationsgruppen als nicht wesentlich verschieden gelten können; deshalb nämlich, weil sie beide ein und dieselbe Gruppe von Operationen analytisch darstellen.

Kapitel 2.

Ableitung grundlegender Differentialgleichungen.

Aus der früher gegebenen Definition einer endlichen continuirlichen Gruppe $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r)$ wollen wir jetzt gewisse Differentialgleichungen ableiten, welchen die Functionen f_i genügen.

§ 6.

Durch Verbindung der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x_i' &= f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \\ x_i'' &= f_i(x_1' \cdots x_n',\ b_1 \cdots b_r) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1 \cdots n)$$

ergiebt sich, wie wir wissen, ein drittes Gleichungensystem von entsprechender Form:

$$x_i'' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ c_1 \cdots c_r) \quad (i = 1 \cdots n),$$

wo die c_k bestimmte und zwar analytische Functionen der a und b allein sind. Analytisch drückt sich das aus durch die n Bedingungsgleichungen

$$(1) \qquad f_i(x_1' \cdots x_n',\ b_1 \cdots b_r) = f_i(x_1 \cdots x_n,\ c_1 \cdots c_r) \quad (i = 1 \cdots n).$$

Setzen wir in denselben $x_i' = f_i(x, a)$, $c_k = \varphi_k(a, b)$, so erhalten wir lauter Identitäten, denn die $n + 2r$ Veränderlichen x_i, a_k, b_k sind ja von einander unabhängig.

Aehnliches gilt natürlich von jeder Relation zwischen den sechs Variabelnsystemen x_i, x_i', x_i'', a_k, b_k, c_k: drückt man in der betreffenden Relation alles durch drei von einander unabhängige unter diesen Variabelnsystemen aus, so erhält man stets eine Identität.

Nach unsern Festsetzungen gelten die Bedingungsgleichungen (1), wenn die x im Bereiche $((x))$, die a und die b im Bereiche $((a))$ liegen, während die x_i' und die c_k gemäss den Gleichungen

$$x_i' = f_i(x, a), \quad c_k = \varphi_k(a, b)$$

innerhalb gewisser Theile der Gebiete (x) bezüglich (a) bleiben.

Von den Gleichungen (1) werden wir zunächst ausgehen. Wir betrachten in denselben bis auf weiteres $x_1 \cdots x_n$, $a_1 \cdots a_r$ und $c_1 \cdots c_r$ als unabhängige Veränderliche, dagegen die x' und die b vermöge der Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$, $c_k = \varphi_k(a, b)$ als Functionen der unabhängigen Veränderlichen.

Unter Zugrundelegung dieser Auffassung wollen wir jetzt die Gleichungen (1) partiell nach a_k differentiiren; wir schreiben dabei der Kürze wegen f_i' für $f_i(x', b)$ und finden:

$$\frac{\partial f_i'}{\partial x_1'}\frac{\partial x_1'}{\partial a_k} + \cdots + \frac{\partial f_i'}{\partial x_n'}\frac{\partial x_n'}{\partial a_k} + \frac{\partial f_i'}{\partial b_1}\frac{\partial b_1}{\partial a_k} + \cdots + \frac{\partial f_i'}{\partial b_r}\frac{\partial b_r}{\partial a_k} = 0$$

$$(i = 1 \cdots n, \; k = 1 \cdots r).$$

Da aber die Functionaldeterminante

$$\sum \pm \frac{\partial f_1'}{\partial x_1'} \cdots \frac{\partial f_n'}{\partial x_n'}$$

nicht identisch verschwindet, so können wir die eben erhaltenen Gleichungen nach $\frac{\partial x_1'}{\partial a_k} \cdots \frac{\partial x_n'}{\partial a_k}$ auflösen und bekommen:

$$\frac{\partial x_\nu'}{\partial a_k} = \Phi_{1\nu}(x', b)\frac{\partial b_1}{\partial a_k} + \cdots + \Phi_{r\nu}(x', b)\frac{\partial b_r}{\partial a_k} \tag{2}$$

$$(\nu = 1 \cdots n, \; k = 1 \cdots r),$$

wo die Φ von dem Index k unabhängig sind.

Was ihre Gestalt anbelangt, so sind die $\Phi\,(x', b)$ Quotienten je zweier Functionaldeterminanten, welche sich für alle Werthsysteme x_i' und b_k innerhalb (x) bezüglich (a) regulär verhalten. Da ausserdem der allen Φ gemeinsame Nenner $\sum \pm \frac{\partial f_1'}{\partial x_1'} \cdots \frac{\partial f_n'}{\partial x_n'}$ in dem betreffenden Bereich nirgends verschwindet, so verhalten sich auch die $\Phi(x', b)$ selbst für jedes der besprochenen Werthsysteme x_i', b_k regulär, ja sie sind sogar in diesem ganzen Bereich eindeutig.

Aber wohlbemerkt: der Bereich, in welchem die Functionen $\Phi(x', b)$ definirt sind, ist jedenfalls nicht ohne Weiteres auch der Gültigkeitsbereich der Gleichungen (2). Diese letzteren sind ja unter der Voraussetzung abgeleitet, dass $x_1 \cdots x_n$ in $((x))$, $a_1 \cdots a_r$ und $b_1 \cdots b_r$ in $((a))$ und dementsprechend $x_1' \cdots x_n'$ im Bereiche $x' = f(((x))\,((a)))$ liegen. Ob diese Voraussetzungen sich durch andere, weniger einschränkende ersetzen lassen, wissen wir zunächst nicht.

Die in (2) vorkommenden Differentialquotienten der b nach den a lassen sich mit Hülfe der Gleichungen $c_\mu = \varphi_\mu(a, b)$ als Functionen von $a_1 \cdots a_r, b_1 \cdots b_r$ darstellen. Wenn wir nämlich diese Gleichungen partiell nach den a_k differentiiren, indem wir wie früher die a und die c als unabhängige Veränderliche, dagegen die b als Funktionen der a und c betrachten, so kommt:

$$\sum_1^r{}^\pi \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial b_\pi} \frac{\partial b_\pi}{\partial a_k} + \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial a_k} = 0 \quad (\mu, k = 1 \cdots r),$$

also erhalten wir durch Auflösung:

$$\frac{\partial b_\pi}{\partial a_k} = - \frac{\sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_1} \cdots \frac{\partial \varphi_{\pi-1}}{\partial b_{\pi-1}} \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial a_k} \frac{\partial \varphi_{\pi+1}}{\partial b_{\pi+1}} \cdots \frac{\partial \varphi_r}{\partial b_r}}{\sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_1} \cdots \frac{\partial \varphi_r}{\partial b_r}} = \Psi_{\pi k}(a_1 \cdots a_r, b_1 \cdots b_r).$$

Wenn diese Werthe in die Gleichungen (2) eingesetzt werden, so ergiebt sich:

$$(2') \quad \frac{\partial x_\nu'}{\partial a_k} = \sum_1^r{}^j \Psi_{jk}(a, b) \cdot \Phi_{j\nu}(x', b) \quad (\nu = 1 \cdots n, k = 1 \cdots r).$$

Diese Gleichungen sind äusserst wichtig, wie wir später sehen werden.

Wegen der früher gemachten Voraussetzungen verhalten sich die Functionen $\Psi(a, b)$ regulär, wenn die a_k und die b_k beliebig im Bereiche $((a))$ liegen. Daher wird die Determinante

$$\sum \pm \frac{\partial b_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial b_r}{\partial a_r} = \sum \pm \Psi_{11} \cdots \Psi_{rr}$$

für keines der betreffenden Werthsysteme a_k, b_k unendlich.

Bisher sahen wir $a_1 \cdots a_r$ zusammen mit $x_1 \cdots x_n$ und $c_1 \cdots c_r$ als die unabhängigen Veränderlichen an, wir können aber ebensogut $b_1 \cdots b_r$ mit $x_1 \cdots x_n$ und $c_1 \cdots c_r$ als solche wählen. Bei Zugrundelegung der letzteren Auffassung müssen wir $a_1 \cdots a_r$ und $x_1' \cdots x_n'$ vermöge der Gleichungen $c_k = \varphi_k(a, b)$, $x_i' = f_i(x, a)$ als Functionen der betreffenden unabhängigen Veränderlichen betrachten. Dies wollen wir für einen Augenblick thun, um die Gleichungen (2) in übersichtlicher Weise nach den $\Phi_{j\nu}$ aufzulösen. Zu dem Ende multipliciren wir die soeben genannten Gleichungen mit $\frac{\partial a_k}{\partial b_\pi}$ und summiren nach k von $1 \cdots r$, dann ergiebt sich:

$$\sum_1^r{}^k \frac{\partial x_\nu'}{\partial a_k} \frac{\partial a_k}{\partial b_\pi} = \sum_1^r{}^\mu \Phi_{\mu\nu}(x', b) \frac{\partial b_\mu}{\partial b_\pi} = \Phi_{\pi\nu}(x', b),$$

wofür wir schreiben können:

$$(3)\quad \Phi_{\pi\nu}(x', b) = \sum_1^r {}^k \frac{\partial x_\nu'}{\partial a_k}\frac{\partial a_k}{\partial b_\pi} = \frac{\partial x_\nu'}{\partial b_\pi} \quad (\pi = 1 \cdots r,\ \nu = 1 \cdots n).$$

Das sind die gewünschten Auflösungen der Gleichungen (2). Wir können übrigens die Gleichungen $\frac{\partial x_\nu'}{\partial b_\pi} = \Phi_{\pi\nu}(x', b)$ auch direkt aus den Gleichungen $f_i(x', b) = f_i(x, c)$ ableiten: indem wir fortwährend die b_k, x_i, c_k als unabhängige Veränderliche betrachten, nach b_π partiell differentiiren:

$$\sum_1^n {}^\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu'} f_i(x', b)\, \frac{\partial x_\nu'}{\partial b_\pi} + \frac{\partial}{\partial b_\pi} f_i(x', b) = 0$$

und endlich die erhaltenen Gleichungen nach den $\frac{\partial x_\nu'}{\partial b_\pi}$ auflösen.

Wie früher die $\frac{\partial b_\pi}{\partial a_k}$, so wollen wir jetzt auch die Differentialquotienten $\frac{\partial a_k}{\partial b_\pi}$ als Functionen von $a_1 \cdots a_r$, $b_1 \cdots b_r$ darstellen. Es ist ja

$$\sum_1^r {}^k \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial a_k}\frac{\partial a_k}{\partial b_\pi} + \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial b_\pi} = 0 \quad (\mu,\ \pi = 1 \cdots r),$$

also ergiebt sich:

$$\frac{\partial a_k}{\partial b_\pi} = -\frac{\sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial \varphi_{k-1}}{\partial a_{k-1}} \frac{\partial \varphi_k}{\partial b_\pi} \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial a_{k+1}} \cdots \frac{\partial \varphi_r}{\partial a_r}}{\sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial \varphi_r}{\partial a_r}} = A_{\pi k}(a_1 \cdots a_r,\ b_1 \cdots b_r).$$

Wenn wir diese Werthe in (3) einsetzen, so erhalten wir die Gleichungen

$$(3')\quad \Phi_{\pi\nu}(x', b) = \sum_1^r {}^k A_{\pi k}(a, b)\, \frac{\partial x_\nu'}{\partial a_k} \quad (\nu = 1 \cdots n,\ k = 1 \cdots r),$$

die wir natürlich auch direkt durch Auflösung der Gleichungen (2′) erhalten können.

Die $A(a, b)$ verhalten sich ebenso wie die oben vorkommenden $\Psi(a, b)$ regulär für alle Werthsysteme a_k und b_k im Bereiche $((a))$. Folglich wird auch die Determinante

$$\sum \pm \frac{\partial a_1}{\partial b_1} \cdots \frac{\partial a_r}{\partial b_r} = \sum \pm A_{11} \cdots A_{rr}$$

für keines dieser Werthsysteme a_k, b_k unendlich. Aus der bekannten Relation

$$\sum \pm \frac{\partial a_1}{\partial b_1} \cdots \frac{\partial a_r}{\partial b_r} \cdot \sum \pm \frac{\partial b_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial b_r}{\partial a_r} = 1$$

ergiebt sich daher, dass auch keine der beiden Determinanten $\Sigma \pm \Psi_{11} \cdots \Psi_{rr}$ und $\Sigma \pm A_{11} \cdots A_{rr}$ für eines der in Rede stehenden Werthsysteme a_k, b_k verschwindet.

§ 7.

Die Gleichungen

$$(1) \qquad f_i(x_1' \cdots x_n',\, b_1 \cdots b_r) = f_i(x_1 \cdots x_n,\, c_1 \cdots c_r),$$

von denen wir ausgingen, wurden zu Identitäten, wenn wir für die x_i' und c_k bezüglich die Ausdrücke $f_i(x, a)$ und $\varphi_k(a, b)$ einsetzten. Dasselbe gilt natürlich von den Gleichungen (2′) und (3′), denn die Veränderlichen x_i, a_k, b_k sind ja von einander unabhängig.

Nun aber kommen die c_k in keinem dieser beiden Gleichungensysteme vor, also verwandeln sich (2′) und (3′) schon dann in Identitäten, wenn wir x_i' durch $f_i(x, a)$ ersetzen. Mit andern Worten: die Gleichungen (2′) und (3′) sind gewisse Differentialgleichungen für $x_1' \cdots x_n'$ betrachtet als Functionen von $a_1 \cdots a_r$, $x_1 \cdots x_n$. Bei der Substitution $x_i' = f_i(x, a)$ werden diese Differentialgleichungen identisch befriedigt und zwar unabhängig von den Werthen der Grössen $b_1 \cdots b_r$. Diese letzteren spielen in Folge dessen in den Differentialgleichungen (2′) und (3′) nur die Rolle von willkürlichen Constanten. Wenn wir daher in den Gleichungen (2′) und (3′) den Grössen $b_1 \cdots b_r$ irgend welche erlaubte aber feste Werthe $\omega_1 \cdots \omega_r$ ertheilen, so stellen diese Gleichungen immer noch Differentialgleichungen dar, welche bei der Substitution $x_i' = f_i(x, a)$ identisch erfüllt sind. Diese neuen Differentialgleichungen haben aber den Vortheil, dass sie nur die Veränderlichen $x_1' \cdots x_n'$, $a_1 \cdots a_r$ und die Differentialquotienten $\frac{\partial x_\nu'}{\partial a_k}$ enthalten, dagegen von willkürlichen Constanten frei sind.

Um die betreffenden Differentialgleichungen bequemer schreiben zu können, führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$(4) \qquad \begin{cases} \Phi_{\pi\nu}(x_1' \cdots x_n',\, \omega_1 \cdots \omega_r) = \xi_{\pi\nu}(x_1' \cdots x_n') \\ \Psi_{jk}(a_1 \cdots a_r,\; \omega_1 \cdots \omega_r) = \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \\ A_{jk}(a_1 \cdots a_r,\; \omega_1 \cdots \omega_r) = \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) \\ \qquad (\nu = 1 \cdots n;\ \pi, j, k = 1 \cdots r). \end{cases}$$

Aus (2′) erhalten wir dann bei der Substitution $b_k = \omega_k$ das nachstehende System von Differentialgleichungen:

$$(5)\quad \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r {}^j\, \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') \quad (i = 1 \cdots n,\ k = 1 \cdots r)$$

und aus (3′) das mit (5) äquivalente System:

$$(6)\quad \xi_{ki}(x_1' \cdots x_n') = \sum_1^r {}^j\, \alpha_{kj}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial x_i'}{\partial a_j} \quad (i = 1 \cdots n,\ k = 1 \cdots r).$$

Zwischen den hier vorkommenden Functionen $\psi_{jk}(a)$ und $\alpha_{kj}(a)$ bestehen augenscheinlich die Beziehungen:

$$\sum_1^r {}^k\, \alpha_{jk}(a) \cdot \psi_{\pi k}(a) = \varepsilon_{j\pi}$$

$$\sum_1^r {}^k\, \psi_{kj}(a) \cdot \alpha_{k\pi}(a) = \varepsilon_{j\pi}$$

$$\sum \pm \psi_{11} \cdots \psi_{rr} \cdot \sum \alpha_{11} \cdots \alpha_{rr} = 1,$$

wo $\varepsilon_{j\pi}$ verschwindet, wenn π verschieden von j ist, während ε_{jj} den Werth 1 hat.

Es versteht sich von selbst, dass das Werthsystem $b_k = \omega_k$ im Bereiche $((a))$ liegen muss.

Die Differentialgleichungen (5) und (6) ihrerseits sind zunächst abgeleitet unter der Voraussetzung, dass die x_i im Bereiche $((x))$, die a_k im Bereiche $((a))$ sich befinden, wobei dann die $x_i' = f_i(x, a)$ gewisse Werthe innerhalb des Bereiches (x) annehmen. Später aber werden wir zeigen, dass die in (5) und (6) vorkommenden Functionen sich in einem grösseren Bereiche definiren lassen, woraus wir dann schliessen können, dass auch der Gültigkeitsbereich jener Gleichungen ein grösserer ist.

Uebrigens liegt es schon in dem Früheren, dass wenigstens die Functionen $\xi_{ji}(x')$ in dem ganzen Bereich (x) und nicht blos in dem vorhin angegebenen kleineren Bereiche definirt sind. Die $\xi_{ji}(x')$ verhalten sich überdies für alle Werthsysteme $x_1' \ldots x_n'$ im Bereiche (x) regulär, sie sind sogar in diesem ganzen Bereiche eindeutig aus dem einfachen Grunde, weil dies alles von den $\Phi_{ji}(x', b)$ gilt, aus denen die $\xi_{ji}(x')$ durch die Substitution $b_k = \omega_k$ entstanden sind. Später werden wir jedoch sehen, dass die $\xi_{ji}(x')$ sich in einem noch grösseren Bereiche durch analytische Fortsetzung definiren lassen.

Hervorzuheben ist ausserdem, dass die Functionen $\psi_{jk}(a)$ und $\alpha_{jk}(a)$ sich für alle Werthsysteme a_k im Bereiche $((a))$ regulär verhalten, sowie dass keine der beiden Determinanten

$$\sum \pm \psi_{11} \cdots \psi_{rr}, \quad \sum \pm \alpha_{11} \cdots \alpha_{rr}$$

für eines dieser Werthsysteme verschwindet.

Aus den Gleichungen (6) lässt sich noch eine Folgerung ziehen, welche sich späterhin als wichtig erweist: die rn Ausdrücke $\xi_{ki}(x')$ sind in dem Sinne von einander unabhängig, dass es unmöglich ist, die n Gleichungen

$$\sum_1^r {}^k e_k \xi_{ki}(x_1' \cdots x_n') = 0 \quad (i = 1 \cdots n)$$

durch solche Grössen $e_1 \cdots e_r$ zu befriedigen, welche weder sämmtlich verschwinden, noch die Veränderlichen $x_1' \cdots x_n'$ enthalten.

Nehmen wir nämlich an, dass $e_1 \cdots e_r$ solche von $x_1' \cdots x_n'$ unabhängige Grössen sind, welche die obigen Gleichungen befriedigen, so erhalten wir wegen (6) die folgenden n Gleichungen:

$$\sum_{kj}^{1 \ldots r} e_k \alpha_{kj}(a) \frac{\partial x_i'}{\partial a_j} = 0 \quad (i = 1 \cdots n),$$

welche bei der Substitution $x_i' = f_i(x, a)$ zu Identitäten werden. Die n Functionen $f_i(x, a)$ genügen demnach sämmtlich der linearen partiellen Differentialgleichung

$$\sum_{kj}^{1 \ldots r} e_k \alpha_{kj}(a) \frac{\partial f}{\partial a_j} = 0,$$

deren Coefficienten unter den gemachten Voraussetzungen blos von $a_1 \cdots a_r$, nicht aber von $x_1 \cdots x_n$ abhängen. Nach Kap. 1 Satz 1 ist das unmöglich, da die Parameter $a_1 \cdots a_r$ in den Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ wesentlich sind. Folglich muss die betreffende Differentialgleichung an und für sich eine Identität sein, es muss für jedes j werden:

$$\sum_1^r {}^k e_k \alpha_{kj}(a) = 0 \quad (j = 1 \cdots r);$$

da aber die Determinante der $\alpha_{kj}(a)$ nicht identisch verschwindet, so ergiebt sich sofort $e_1 = e_2 = \cdots = e_r = 0$, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Die wichtigsten der im Vorstehenden gewonnenen Ergebnisse fassen wir jetzt zusammen, wie folgt:

Theorem 3. *Stellen die n Gleichungen*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

eine endliche continuirliche Gruppe dar, deren Parameter $a_1 \cdots a_r$ sämmtlich wesentlich sind, so genügen $x_1' \cdots x_n'$, als

Functionen von $a_1 \cdots a_r$, $x_1 \cdots x_n$ betrachtet, gewissen Differentialgleichungen von der Form:

$$(5) \quad \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r {}^j \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') \quad (i = 1 \cdots n,\ k = 1 \cdots r),$$

die sich auch schreiben lassen:

$$(6) \quad \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') = \sum_1^r {}^k \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} \quad (i = 1 \cdots n,\ j = 1 \cdots r).$$

Hier verschwindet weder die Determinante der $\psi_{jk}(a)$ noch diejenige der $\alpha_{jk}(a)$ identisch; ausserdem ist es unmöglich, r solche von $x_1' \cdots x_n'$ unabhängige und nicht sämmtlich verschwindende Grössen $e_1 \cdots e_r$ anzugeben, dass die n Ausdrücke

$$e_1 \xi_{1i}(x') + \cdots + e_r \xi_{ri}(x') \quad (i = 1 \cdots n)$$

*gleichzeitig verschwinden.**)

Dieses Theorem bildet die Grundlage der folgenden Untersuchungen. Dasselbe gilt, wie gesagt, für alle endlichen continuirlichen Gruppen. Namentlich muss hervorgehoben werden, dass es bei dem Beweise dieses Theorems gar nicht in Betracht gekommen ist, ob die betreffende Gruppe die identische und inverse Transformationen enthält, oder ob sie dies nicht thut. Wir haben eben beim Beweise keine anderen Voraussetzungen benutzt, als die in § 2 gemachten.

Beispiel. Wir betrachten wieder die Gruppe:

$$x' = \frac{x + a_1}{a_2 x + a_3}.$$

Hier ist:

$$\frac{\partial x'}{\partial a_1} = \frac{1}{a_2 x + a_3}, \quad \frac{\partial x'}{\partial a_2} = -\frac{x(x + a_1)}{(a_2 x + a_3)^2}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial a_3} = -\frac{x + a_1}{(a_2 x + a_3)^2},$$

also wird, wie man sich leicht überzeugt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x'}{\partial a_1} &= \frac{1}{a_3 - a_1 a_2} - \frac{a_2}{a_3 - a_1 a_2} x' \\
\frac{\partial x'}{\partial a_2} &= \qquad\qquad\quad \frac{a_1}{a_3 - a_1 a_2} x' - \frac{a_3}{a_3 - a_1 a_2} x'^2 \\
\frac{\partial x'}{\partial a_3} &= \qquad\qquad - \frac{1}{a_3 - a_1 a_2} x' + \frac{a_2}{a_3 - a_1 a_2} x'^2.
\end{aligned}$$

---

*) Lie, Archiv for Math. og Naturv. Bd. 1, Christiania 1876.

Den Behauptungen des Theorems 3 ist daher Genüge geleistet, wenn wir setzen:

$$\xi_{11}(x') = 1, \quad \xi_{21}(x') = x', \quad \xi_{31}(x') = x'^2.$$

§ 8.

Wir gehen jetzt dazu über, den oben versprochenen Nachweis zu führen, dass sich der Bereich, in welchem die Functionen ξ_{ji} und ψ_{jk} definirt sind, erweitern lässt. Allerdings müssen wir bemerken, dass die betreffenden Entwickelungen für das Folgende genau genommen nicht unentbehrlich sind.

Von den Functionen $\xi_{ji}(x)$ und $\psi_{jk}(a)$ steht bisher folgendes fest: die $\xi_{ji}(x)$ verhalten sich regulär in dem ganzen Bereiche (x) und von den $\psi_{jk}(a)$ gilt dasselbe im Bereiche $((a))$. Wir werden jetzt zeigen, dass es möglich ist, sowohl die $\xi(x)$ als die $\psi(a)$ auch noch ausserhalb der betreffenden Bereiche analytisch fortzusetzen. Gleichzeitig wird es sich zeigen, dass auch die Gleichungen (5):

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r {}_j \, \psi_{jk}(a) \cdot \xi_{ji}(x')$$

in einem grösseren Bereiche gelten, als wir es bisher wissen; vorläufig ist ja das Bestehen dieser Gleichungen nur dann sicher, wenn die x_i in $((x))$, die a_k in $((a))$ laufen und die x_i' dementsprechend aus $x_i' = f_i(x, a)$ bestimmt werden.

Die Gleichungen (5) stellen die Differentialquotienten $\frac{\partial x_i'}{\partial a_k}$ als Functionen der von einander unabhängigen Veränderlichen $x_1' \cdots x_n'$, $a_1 \cdots a_r$ dar. Eine andere Darstellung der $\frac{\partial x_i'}{\partial a_k}$ durch die x' und die a finden wir auf die folgende Weise:

In der Gleichung

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \frac{\partial}{\partial a_k} f_i(x, a)$$

ist der Ausdruck rechter Hand wohl definirt und verhält sich regulär, wenn die x beliebig in dem ganzen Bereiche (x) laufen und die a beliebig in dem ganzen Bereiche (a). Nun lassen sich nach Voraussetzung die Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ nach $x_1 \cdots x_n$ auflösen: $x_\nu = F_\nu(x', a)$, wo die F_ν sich in der Umgebung eines jeden Werthsystems $\bar{x}_i'$, $\bar{a}_k$ regulär verhalten, vorausgesetzt, dass $\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r$ im Bereiche (a) liegt und dass $\bar{x}_i' = f_i(\bar{x}, \bar{a})$ ist, wo $\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n$ dem Bereiche (x) angehört. Machen wir daher in den Ausdrücken $\frac{\partial}{\partial a_k} f_i(x, a)$ die Substitution $x_\nu = F_\nu(x', a)$, so erhalten wir:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \frac{\partial}{\partial a_k} f_i(x, a) = \Omega_{ki}(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r) \qquad (i = 1 \cdots n, \; k = 1 \cdots r),$$

wo die Ω_{ki} ihrerseits sich in der Umgebung eines jeden Werthsystems $\bar{x}_i'$, $\bar{a}_k$ von der oben angegebenen Beschaffenheit regulär verhalten.

Für später ist noch die Bemerkung von Wichtigkeit, dass es keine von $x_1' \cdots x_n'$ unabhängigen Functionen $\chi_1(a) \cdots \chi_r(a)$ von $a_1 \cdots a_r$ giebt, welche die n Gleichungen

$$\sum_1^r {}_k\, \chi_k(a_1 \cdots a_r) \cdot \Omega_{ki}(x', a) = 0 \quad (i = 1 \cdots n)$$

befriedigen; dies ist einfach dadurch ausgeschlossen, dass es keine lineare partielle Differentialgleichung von der Form

$$\sum_1^r {}_k\, \chi_k(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_k} = 0$$

giebt, welcher alle n Functionen $f_1(x, a) \cdots f_n(x, a)$ genügen. Dagegen ist es sehr gut denkbar, dass für einzelne specielle Werthsysteme der a_k zum Beispiel für ein Werthsystem $a_1^0 \cdots a_r^0$ Relationen von der Form

$$\sum_1^r {}_k\, l_k\, \Omega_{ki}(x', a^0) = 0 \quad (i = 1 \cdots n)$$

bestehen, in denen die Grössen $l_1 \cdots l_r$ von dem Index i und von den Veränderlichen $x_1' \cdots x_n'$ unabhängig sind.

Innerhalb ihres gemeinsamen Gültigkeitsbereiches müssen natürlich unsere beiden Darstellungen von $\frac{\partial x_i'}{\partial a_k}$ zusammenfallen. Also ist identisch

$$(7) \qquad \Omega_{ki}(x', a) = \sum_1^r {}_j\, \psi_{jk}(a) \cdot \xi_{ji}(x') \quad (i = 1 \cdots n,\ k = 1 \cdots r),$$

sobald die a_k in $((a))$ liegen und $x_\nu' = f_\nu(x, a)$ ist, wo die x dem Bereiche $((x))$ angehören. Diese Identitäten werden uns gleich sehr nützlich sein.

Zunächst gehen wir darauf aus, den Bereich zu erweitern, in welchem die $\xi(x')$ definirt sind. Zu dem Ende setzen wir:

$$(8) \qquad \Xi_i = \sum_1^r {}_k\, C_k\, \Omega_{ki}(x', a) \quad (i = 1 \cdots n)$$

unter den C_k willkürliche, von den x' unabhängige Grössen verstanden. Auf die Gleichungen (8) wenden wir einen Satz aus der Theorie der Differentialgleichungen an, den wir schon einmal erwähnt haben (vgl. die Einl. S. 5, siehe auch Kap. 10). Nach demselben ist es möglich, gewisse von $C_1 \cdots C_r$ freie Differentialgleichungen anzugeben, welchen $\Xi_1 \cdots \Xi_n$ als Functionen von $x_1' \cdots x_n'$ genügen und deren allgemeinste Lösungen eben die obigen Werthe der Ξ darstellen, wenn man $C_1 \cdots C_r$ als Integrationsconstanten auffasst. Wir erhalten diese Differentialgleichungen, wenn wir aus (8) bis zu einer gewissen, etwa bis zur m^{ten} Ordnung alle Differentialquotienten der Ξ nach $x_1' \cdots x_n'$ berechnen und sodann alle durch Elimination der C_k entstehenden Gleichungen aufstellen. Die Zahl m ist dabei so zu wählen, dass das erhaltene System von Differentialgleichungen nach allen

Differentialquotienten m^{ter} Ordnung von $\Xi_1 \cdots \Xi_n$ auflösbar ist, nicht aber schon nach allen $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Wir erhalten hierdurch ein System von linearen partiellen Differentialgleichungen, welches die Ausdrücke $\Xi_1 \cdots \Xi_n$ definirt. Denken wir uns jetzt dieses System nach so vielen Differentialquotienten der Ξ aufgelöst, als es Gleichungen enthält. Die Coefficienten in den aufgelösten Differentialgleichungen sind dann offenbar rationale Functionen der $\Omega_{ki}(x', a)$ und ihrer Differentialquotienten erster bis m^{ter} Ordnung nach $x_1' \cdots x_n'$. Jeder dieser Coefficienten ist daher Quotient zweier Functionen von $x_1' \cdots x_n'$, $a_1 \cdots a_r$, welche sich beide regulär verhalten, wenn die a_k beliebig in (a) laufen und die x_i' den Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ genügen, wo die x beliebig in (x) laufen. Wir schliessen daraus, dass jeder solche Coefficient sich wenigstens im Allgemeinen für die betreffenden Werthsysteme a_k, x_i' regulär verhält und dass er sich über den ganzen Bereich dieser Werthsysteme analytisch fortsetzen lässt.

Erinnern wir uns jetzt der Identitäten (7). Dieselben zeigen, dass die Gleichungen (8) sich auch schreiben lassen:

$$(8') \qquad \Xi_i = \sum_1^r {}_j \left(\sum_1^r {}_k C_k \psi_{jk}(a) \right) \xi_{ji}(x') \qquad (i = 1 \cdots n),$$

wenigstens so lange als die a_k in $((a))$ liegen und $x_i' = f_i(x, a)$ ist, wo die x_ν in $((x))$ liegen. Wenn wir uns daher auf diese Werthsysteme x_i', a_k beschränken, so können wir zur Ableitung der besprochenen Differentialgleichungen für $\Xi_1 \cdots \Xi_n$ ebensogut die Gleichungen (8') anwenden wie die Gleichungen (8); beide Male erhalten wir identisch dieselben Differentialgleichungen.

Nun lässt sich leicht einsehen, dass die aus (8') abgeleiteten Differentialgleichungen für $\Xi_1 \cdots \Xi_n$ von $a_1 \cdots a_r$ frei sind. Nämlich die Gleichungen (8') stellen in dem bewussten Gebiete der x_i', a_k das allgemeinste Lösungensystem dieser Differentialgleichungen dar, wenn wir $C_1 \cdots C_r$ als Integrationsconstanten betrachten. Setzen wir aber

$$\sum_1^r {}_k C_k \psi_{jk}(a) = C_j' \qquad (j = 1 \cdots r)$$

und berücksichtigen, dass die Determinante der $\psi_{jk}(a)$ nicht identisch verschwindet, so stellen offenbar auch die Gleichungen

$$(8'') \qquad \Xi_i = \sum_1^r {}_j C_j' \xi_{ji}(x') \qquad (i = 1 \cdots n)$$

mit den r Integrationsconstanten $C_1' \cdots C_r'$ das allgemeinste Lösungensystem unserer Differentialgleichungen dar. Aus den Gleichungen (8'') müssen wir daher ebensogut wie aus (8') die Differentialgleichungen für $\Xi_1 \cdots \Xi_n$ ableiten können. Wenn wir aber das thun, wenn wir die Gleichungen (8'') differentiiren und die C' wegschaffen, so erhalten wir Differentialgleichungen, deren Coefficienten von $a_1 \cdots a_r$ frei sind und nur von $x_1' \cdots x_n'$ abhängen. Dasselbe muss natürlich bei den aus (8') bezüglich (8) abgeleiteten Differentialgleichungen der Fall sein, wenigstens für alle x_i' im Bereiche $x' = f(((x))\,((a)))$.

Betrachten wir jetzt in den aufgelösten Differentialgleichungen, welche aus (8) abgeleitet sind, irgend einen Coefficienten $E(x_1' \cdots x_n',\ a_1 \cdots a_r)$. Derselbe lässt sich, wie wir wissen, über den ganzen Bereich (a), $x' = f((x)\,(a))$ analytisch fortsetzen. Aber soeben haben wir gesehen, dass dieser Coefficient von $a_1 \cdots a_r$ unabhängig ist, so lange die a_k in $((a))$ liegen und die x_i' in $x' = f(((x))\,((a)))$. In diesem letzteren Bereiche verschwinden daher die r Differentialquotienten $\frac{\partial E}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial E}{\partial a_r}$ identisch. Da nun diese Differentialquotienten sich ebenso wie E selbst über den ganzen Bereich (a), $x' = f((x)\,(a))$ analytisch fortsetzen lassen, so verschwinden sie in diesem ganzen Bereiche identisch; das heisst E und überhaupt alle Coefficienten der aus (8) abgeleiteten aufgelösten Differentialgleichungen sind in dem ganzen Bereiche (a), $x' = f((x)\,(a))$ von den a_k frei und also Functionen von $x_1' \cdots x_n'$ allein. Natürlich lassen sich diese Coefficienten über den ganzen Bereich $x' = f((x)\,(a))$ analytisch fortsetzen und verhalten sich in diesem Bereiche im Allgemeinen regulär.

Wir wissen, dass das allgemeinste Lösungensystem der Differentialgleichungen für $\Xi_1 \cdots \Xi_n$ gerade r willkürliche Constanten enthält. Dieses allgemeinste Lösungensystem lässt sich aus r particulären Lösungensystemen $\Xi_{k1} \cdots \Xi_{kn}$ $(k = 1 \cdots r)$ linear ableiten, sobald dieselben ein sogenanntes Fundamentalsystem bilden, das heisst, so bald es unmöglich ist r von $x_1' \cdots x_n'$ unabhängige Grössen $h_1 \cdots h_r$ anzugeben, welche, ohne sämmtlich zu verschwinden, die n Gleichungen

$$\sum_1^r {}_k\, h_k\, \Xi_{ki} = 0 \qquad (i = 1 \cdots n)$$

identisch befriedigen,

Nun können wir für jedes Werthsystem x_i' des Bereiches $x' = f((x)\,(a))$ ein solches Fundamentalsystem von Lösungensystemen angeben, dessen Functionen sich sämmtlich in der Umgebung des betreffenden Werthsystems x_i' regulär verhalten. Denn ist $\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r$ ein Werthsystem von allgemeiner Lage in (a), so stellen die Ausdrücke $\Omega_{k1} \cdots \Omega_{kn}$ $(k = 1 \cdots r)$ ein solches Fundamentalsystem dar. Die Gleichungen

$$\Xi_i = \sum_1^r {}_k\, C_k\, \Omega_{ki}(x',\ \bar{a}) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

mit den willkürlichen Constanten $C_1 \cdots C_r$ bestimmen daher das allgemeinste Lösungensystem. Dabei verhalten sich alle $\Omega_{ki}(x',\ \bar{a})$ in der Umgebung jedes Werthsystems $x_i' = f_i(x,\ \bar{a})$ regulär, wenn man $x_1 \cdots x_n$ irgendwo im Bereiche (x) wählt. Nehmen wir noch hinzu, dass sich die Coefficienten unserer Differentialgleichungen über den ganzen Bereich $x' = f((x)\,(a))$ analytisch fortsetzen lassen, so erkennen wir, dass wir von irgend einem bestimmten Fundamentalsysteme von Lösungensystemen, etwa von dem obigen ausgehen und dasselbe über den ganzen Bereich $x' = f((x)\,(a))$ analytisch fortsetzen können. Diese analytischen Fortsetzungen verhalten sich selbstverständlich an jeder Stelle dieses Bereiches regulär und stellen ausserdem stets ein Fundamentalsystem dar. Wählen wir insbesondere das Werthsystem $\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r$ im Bereiche $((a))$, so können wir die Identitäten (7) benutzen, um zu erkennen, dass sich die $\xi_{ji}(x')$ über den ganzen Bereich $x' = f((x)(a))$ fortsetzen lassen. Wir bekommen nämlich:

$$\sum_1^r {}_j\, \psi_{jk}(\bar{a}) \cdot \xi_{ji}(x') = \Omega_{ki}(x', \bar{a}) \qquad (i = 1 \cdots n,\ k = 1 \cdots r),$$

und da $\Sigma \pm \psi_{11}(\bar{a}) \cdots \psi_{rr}(\bar{a})$ unter den gemachten Voraussetzungen sicher von Null verschieden ist, so erhalten wir die $\xi_{ji}(x')$ ausgedrückt als lineare homogene Functionen der $\Omega_{ki}(x', \bar{a})$ mit constanten Coefficienten. Diese Ausdrücke der $\xi_{ji}(x')$ lassen sich, weil dies mit den $\Omega_{ki}(x', \bar{a})$ der Fall ist, über den ganzen Bereich $x' = f((x)(a))$ analytisch fortsetzen, verhalten sich dabei an jeder Stelle dieses Bereiches regulär und stellen überall ein Fundamentalsystem von Lösungensystemen dar.

Damit ist der erste Theil unserer Aufgabe erledigt; der Bereich, in welchem die $\xi_{ji}(x')$ definirt sind, ist erweitert. Uebrig bleibt uns noch das entsprechende bei den $\psi_{jk}(a)$ durchzuführen.

Zu dem Ende überlegen wir, wie folgt:

Die $\xi_{ji}(x')$ bilden an jeder Stelle x_i' ein System von r Lösungensystemen und zwar ein Fundamentalsystem. Die $\Omega_{ki}(x', a)$ stellen für jedes Werthsystem $\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r$ r particuläre Lösungensysteme dar, allerdings für specielle Werthsysteme $a_1^0 \cdots a_r^0$ möglicherweise kein Fundamentalsystem. Jedenfalls lässt sich jedes Lösungensystem $\Omega_{k1}(x', \bar{a}) \cdots \Omega_{kn}(x', \bar{a})$ aus dem Fundamentalsysteme der $\xi_{ji}(x')$ linear ableiten:

$$\Omega_{ki}(x', \bar{a}) = \sum_1^r {}_j\, h_{jk}\, \xi_{ji}(x') \qquad (k = 1 \cdots r,\ i = 1 \cdots n),$$

wobei die h_{jk} vollkommen bestimmte Constanten sind, sobald man $\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r$ fest gewählt hat. Genügen nämlich sowohl die Grössen h_{jk} als die Grössen h'_{jk} den eben geschriebenen Gleichungen, so ergiebt sich:

$$\sum_1^r {}_j\, (h'_{jk} - h_{jk}) \cdot \xi_{ji}(x') = 0 \qquad (k = 1 \cdots r,\ i = 1 \cdots n),$$

also ist $h'_{jk} = h_{jk}$ wegen der bekannten Eigenschaften der $\xi_{ji}(x')$.

Die betreffenden Werthe der h_{jk} hängen natürlich von den $\bar{a}_k$ ab, oder, wenn wir a_k für $\bar{a}_k$ schreiben: die h_{jk} werden gewisse Functionen der a. Um diese Functionen zu bestimmen, entwickeln wir in den Gleichungen

$$\Omega_{ki}(x', a) = \sum_1^r {}_j\, h_{jk}(a) \cdot \xi_{ji}(x')$$

beide Seiten nach Potenzen von $x_\nu' - x_\nu'^0$, wo $x_\nu'^0 = f_\nu(x^0, \bar{a})$ ist und x_i^0 im Bereiche (x), $\bar{a}_k$ im Bereiche (a) liegt. Sodann vergleichen wir auf beiden Seiten die Coefficienten und erhalten eine Reihe von linearen Gleichungen

$$\omega_{ki\mu}(a) = \sum_1^r {}_j\, l_{ji\mu} \cdot h_{jk}(a) \qquad (k = 1 \cdots r,\ i = 1 \cdots n,\ \mu = 1, 2 \cdots)$$

zur Bestimmung der $h_{jk}(a)$. Diese Gleichungen müssen nach dem Vorangehenden die $h_{jk}(a)$ vollständig bestimmen, können sie aber auch nicht überbestimmen, weil zu jedem Werthsystem der a_k sicher ein Werthsystem der h_{jk} gehört. Da nun die $l_{ji\mu}$ numerische Constanten sind und die $\omega_{ki\mu}(a)$ gewöhnliche Potenzreihen der $a_k - \bar{a}_k$, so werden auch die h_{jk} gewöhnliche Potenzreihen der $a_k - \bar{a}_k$ und das in der Umgebung eines jeden Werthsystems $\bar{a}_k$ des Bereiches (a).

Hierin liegt, dass sich die $h_{jk}(a)$ über den ganzen Bereich (a) analytisch fortsetzen lassen und sich daselbst überall regulär verhalten. Da nun innerhalb des Bereiches $((a))$ die $h_{jk}(a)$ augenscheinlich mit den $\psi_{jk}(a)$ identisch sind [vgl. (7)], so sind nunmehr auch die $\psi_{jk}(a)$ für den ganzen Bereich (a) definirt. Dabei ist es übrigens nicht ausgeschlossen, dass die Determinante $\Sigma \pm \psi_{11} \cdots \psi_{rr}$ für einzelne Werthsysteme des Bereiches (a) verschwindet; hieraus würde dann folgen, dass die früher besprochenen Functionen $\alpha_{kj}(a)$ sich nicht für alle Werthsysteme des Bereiches (a) regulär verhalten.

Nunmehr ist die Aufgabe gelöst, welche wir uns im Anfange des gegenwärtigen Paragraphen gestellt haben. Die Bereiche, in welchen die Functionen $\xi_{ji}(x')$ und $\psi_{jk}(a)$ definirt sind, haben wir erweitert. Damit ist nun zugleich auch der Gültigkeitsbereich der Gleichungen (5) erweitert; wir können sagen:

Die Gleichungen $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r)$ unserer r-gliedrigen Gruppe genügen den Differentialgleichungen (5)

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r {}_j\, \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') \qquad (i = 1 \cdots n,\ k = 1 \cdots r),$$

wenn $x_1 \cdots x_n$ ein beliebiges Werthsystem des Bereiches (x) und $a_1 \cdots a_r$ ein beliebiges Werthsystem des Bereiches (a) bezeichnet.

§ 9.

Zu den bisher gefundenen Differentialgleichungen wollen wir jetzt noch gewisse neue ableiten.

Wir benutzen dabei die in § 6 aufgestellten Gleichungen (3):

$$(3) \quad \frac{\partial x_i'}{\partial b_\pi} = \sum_1^r {}_k\, \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} \frac{\partial a_k}{\partial b_\pi} = \Phi_{\pi i}(x', b) \qquad (i = 1 \cdots n,\ \pi = 1 \cdots r),$$

bei deren Ableitung wir uns $b_1 \cdots b_r$, $x_1 \cdots x_n$, $c_1 \cdots c_r$ als unabhängige Veränderliche dachten, während wir die a_k und die x_i' auf Grund der Gleichungen $c_k = \varphi_k(a, b)$, $x_i' = f_i(x, a)$ als Functionen von $b_1 \cdots b_r$, $x_1 \cdots x_n$, $c_1 \cdots c_r$ betrachteten.

In die Gleichungen (3) setzen wir nun zunächst für die $\dfrac{\partial x_i'}{\partial a_k}$ ihre

Werthe aus (5) ein und für die Differentialquotienten $\frac{\partial a_k}{\partial b_\pi}$ die auf S. 30 gefundenen Ausdrücke $A_{\pi k}(a, b)$, dann erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial b_\pi} = \sum_1^r {}_j\, \xi_{ji}(x') \sum_1^r {}_k\, A_{\pi k}(a, b) \cdot \psi_{jk}(a),$$

oder, wenn wir setzen:

$$\sum_1^r {}_k\, A_{\pi k}(a, b) \cdot \psi_{jk}(a) = \vartheta_{j\pi}(a_1 \cdots a_r, b_1 \cdots b_r),$$

die nachstehenden:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial b_\pi} = \sum_1^r {}_j\, \vartheta_{j\pi}(a, b) \cdot \xi_{ji}(x').$$

Nun gaben die Gleichungen (3) noch einen zweiten Ausdruck für $\frac{\partial x_i'}{\partial b_\pi}$, nämlich $\Phi_{\pi i}(x', b)$; es gelten also auch die Gleichungen:

$$\sum_1^r {}_j\, \vartheta_{j\pi}(a, b) \cdot \xi_{ji}(x') = \Phi_{\pi i}(x', b).$$

Da aber die $n + 2r$ Veränderlichen x_i', a_k, b_k von einander unabhängig sind, so können diese Gleichungen nicht anders bestehen, als wenn sie in den x_i', a_k und b_k identisch sind. Bezeichnen daher $a_1 \cdots a_r$ und $\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r$ zwei beliebige Werthsysteme der a, so ist identisch:

$$\sum_1^r {}_j\, (\vartheta_{j\pi}(\bar{a}, b) - \vartheta_{j\pi}(a, b)) \cdot \xi_{ji}(x') = 0.$$

Daraus aber folgt sofort: $\vartheta_{j\pi}(\bar{a}, b) \equiv \vartheta_{j\pi}(a, b)$, das heisst: die $\vartheta_{j\pi}(a, b)$ sind von den a frei und hängen blos von den b ab.

Unsere Differentialgleichungen für $x_1' \cdots x_n'$ haben in Folge dessen die Form:

$$(9) \qquad \frac{\partial x_i'}{\partial b_\pi} = \sum_1^r {}_j\, \vartheta_{j\pi}(b) \cdot \xi_{ji}(x') \qquad (i = 1 \cdots n,\ \pi = 1 \cdots r).$$

Hier verschwindet selbstverständlich die Determinante der $\vartheta_{j\pi}(b)$ nicht identisch,

Ihrer Ableitung entsprechend gelten die Gleichungen (9) sicher dann, wenn sich die x_i im Bereiche $((x))$ befinden, die a_k und b_k im Bereiche $((a))$ und endlich x_i' im Bereiche $x' = f(((x))\,((a)))$, das heisst also in einem gewissen Theile des Bereiches (x). Allein es lässt sich zeigen, dass die

Functionen, welche in (9) vorkommen, in einem grösseren Bereiche definirt sind; damit erweitert sich dann auch der Gültigkeitsbereich von (9) selbst.

Um die aufgestellte Behauptung zu beweisen, gehen wir von den Identitäten

$$(10) \quad \sum_1^r {}_j\, \xi_{ji}(x') \cdot \vartheta_{j\pi}(b) = \Phi_{\pi i}(x', b) \quad (i = 1 \cdots n,\ \pi = 1 \cdots r)$$

aus, welche wir schon oben benutzten. Dieselben gelten allerdings zunächst nur in dem vorhin besprochenen Bereiche; allein wir wissen, dass die Functionen $\xi_{ji}(x')$, $\Phi_{\pi i}(x', b)$ für alle Combinationen von Werthsystemen x_i' in (x), b_k in (a) nicht allein definirt sind, sondern sich auch regulär verhalten, ja, dass sie in diesem ganzen Gebiete eindeutig sind. Wenn wir dies berücksichtigen, so können wir aus den obigen Identitäten eine Definition der $\vartheta_{j\pi}(b)$ herleiten, welche nicht blos im Bereiche $((a))$, sondern in dem ganzen Bereiche (a) gilt.

Wir denken uns nämlich beide Seiten der obigen Identität nach Potenzen von $x_1' - x_1'^0, \cdots x_n' - x_n'^0$ entwickelt, unter $x_i'^0$ irgend ein Werthsystem im Bereiche $x' = f\big(((x))\ ((a))\big)$ verstanden. Sodann vergleichen wir die Entwickelungscoefficienten auf beiden Seiten und erhalten so eine im Allgemeinen unendliche Reihe von linearen Gleichungen

$$(11) \qquad \sum_1^r {}_j\, l_{j\mu}\, \vartheta_{j\pi}(b) = \chi_{\pi\mu}(b) \quad (\pi = 1 \cdots r,\ \mu = 1, 2 \cdots),$$

zur Bestimmung der $\vartheta_{j\pi}$. Die Grössen $l_{j\mu}$ sind dabei numerische Constanten, die $\chi_{\pi\mu}(b)$ gewisse Functionen, die sich an jeder Stelle des Bereiches (a) regulär verhalten.

Zunächst ist klar, dass die eben gefundenen Gleichungen einander nicht widersprechen können; denn wenn $b_1 \cdots b_r$ beliebig im Bereiche $((a))$ laufen, bestehen die Identitäten (10) und daraus folgt, dass auch die Gleichungen (11) von den betreffenden Functionen $\vartheta_{j\pi}(b)$ identisch befriedigt werden; also sind diese Gleichungen mit einander verträglich.

Ferner lässt sich zeigen, dass die Gleichungen (11) die $\vartheta_{j\pi}(b)$ vollkommen bestimmen. Im entgegengesetzten Falle müssten sich nämlich zwei verschiedene Functionensysteme $\vartheta_{j\pi}(b)$ und $\bar{\vartheta}_{j\pi}(b)$ angeben lassen, welche (11) und mithin auch (10) identisch befriedigten. Daraus würde dann folgen

$$\sum_1^r {}_j\, \big(\bar{\vartheta}_{j\pi}(b) - \vartheta_{j\pi}(b)\big) \cdot \xi_{ji}(x') \equiv 0 \quad (i = 1 \cdots n,\ \pi = 1 \cdots r),$$

also müssten nach Theorem 3 S. 34 alle Ausdrücke $\bar{\vartheta}_{j\pi} - \vartheta_{j\pi}$ verschwinden. Das aber ist ein Widerspruch.

Folglich bestimmen die Gleichungen (11) die $\vartheta_{j\pi}$ in eindeutiger Weise als lineare homogene Functionen der $\chi_{\pi\mu}$ mit constanten Coefficienten, und damit ist bewiesen, dass die $\vartheta_{j\pi}(b)$ sich in dem ganzen Bereiche (a) analytisch fortsetzen lassen und sich in der Umgebung jedes Werthsystemes $b_1 \cdots b_r$ dieses Bereiches regulär verhalten. Nach einem bekannten Satze der Functionentheorie gelten daher die Identitäten (10) für alle Werthsysteme x_i' in (x), b_k in (a). Nun aber gelten die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial x_i'}{\partial b_\pi} = \Phi_{\pi i}(x', b) \quad (i = 1 \cdots n,\ \pi = 1 \cdots r)$$

für alle diese Werthsysteme x_i', b_k, das zeigt ihre auf Seite 30 angegebene Herleitung. Also ergiebt sich, dass auch die Differentialgleichungen (9) gelten, wenn die x_i' beliebig in (x), die b_k beliebig in (a) laufen.

Indem wir jetzt die Ergebnisse des vorstehenden § 9 noch einmal zusammenfassen, finden wir es bequem, in den Gleichungen (9) statt der x_i' die x_i und statt der b_k die a_k einzusetzen. Dann können wir sagen:

Theorem 4. *Betrachtet man in den Gleichungen*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

einer Gruppe mit den r wesentlichen Parametern $a_1 \cdots a_r$ die x_i als Functionen von $a_1 \cdots a_r$ und $x_1' \cdots x_n'$, so bestehen Differentialgleichungen von der Form:

$$(9') \quad \frac{\partial x_i}{\partial a_k} = \sum_1^r{}_j\, \vartheta_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n,\ k = 1 \cdots r).$$

Das Theorem 4 liesse sich einfacher durch Verbindung der beiden Theoreme 2 und 3 ableiten. Die hier benutzte Beweismethode ist aus verschiedenen Gründen vorzuziehen, unter andern auch deswegen, weil sie zeigt, dass die in Theorem 4 besprochenen Functionen $\xi_{ji}(x)$ mit den in Theorem 3 vorkommenden Functionen $\xi_{ji}(x')$ identisch sind.

Wir fügen noch hinzu:

In den Differentialgleichungen (9′) dürfen die x_i beliebige Werthe im Bereiche (x) annehmen, die a_k beliebige Werthe im Bereiche (a).

Beispiel. Bei der Gruppe

$$x' = \frac{x + a_1}{a_2 x + a_3}$$

ergiebt sich:

$$\frac{\partial x}{\partial a_1} = -\frac{a_3}{a_3 - a_1 a_2} - \frac{a_2}{a_3 - a_1 a_2}\, x$$

$$\frac{\partial x}{\partial a_2} = \frac{a_1}{a_3 - a_1 a_2}\, x + \frac{1}{a_3 - a_1 a_2}\, x^2$$

$$\frac{\partial x}{\partial a_3} = \frac{a_1}{a_3 - a_1 a_2} + \frac{1}{a_3 - a_1 a_2}\, x.$$

Das steht in Uebereinstimmung mit dem Früheren:

$$\xi_{11}(x) = 1, \quad \xi_{21}(x) = x, \quad \xi_{31}(x) = x^2.$$

§ 10.

Endlich wollen wir noch aus den Gleichungen (5) und (9′) zusammengenommen gewisse neue Gleichungen herleiten.

Wir differentiiren die Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ partiell nach a_k, indem wir die x vermöge dieser Gleichungen als Functionen der a und der x' betrachten; das giebt:

$$0 = \sum_1^n {}^\nu \frac{\partial f_i}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial a_k} + \frac{\partial f_i}{\partial a_k},$$

also, wenn wir aus (9′) die Werthe der $\frac{\partial x_\nu}{\partial a_k}$ und aus (5) die der $\frac{\partial f_i}{\partial a_k} = \frac{\partial x_i'}{\partial a_k}$ einsetzen:

$$0 = \sum_1^n {}^\nu \left\{ \sum_1^r {}^j \vartheta_{jk}(a)\, \xi_{j\nu}(x) \right\} \frac{\partial f_i}{\partial x_\nu} + \sum_1^r {}^j \psi_{jk}(a)\, \xi_{ji}(f).$$

Offenbar bestehen die zuletzt geschriebenen Gleichungen identisch; denn $x_1 \cdots x_n$, $a_1 \cdots a_r$ sind ja von einander unabhängig. Wir können daher auch sagen, dass $x_1' \cdots x_n'$ betrachtet als Functionen von $x_1 \cdots x_n$ und $a_1 \cdots a_r$ den Differentialgleichungen

$$\sum_1^n {}^\nu \left\{ \sum_1^r {}^j \vartheta_{jk}(a)\, \xi_{j\nu}(x) \right\} \frac{\partial x_i'}{\partial x_\nu} + \sum_1^r {}^j \psi_{jk}(a)\, \xi_{ji}(x') = 0$$

$$(i = 1 \cdots n,\ k = 1 \cdots r)$$

genügen.

Es ist möglich diese Differentialgleichungen in den Veränderlichen x und x' symmetrisch zu schreiben. Zu diesem Zwecke wollen wir unter $F(x_1' \cdots x_n')$ eine nicht weiter bestimmte Function von $x_1' \cdots x_n'$ verstehen, wollen die obenstehende Gleichung mit $\frac{\partial F}{\partial x_i'}$ multipliciren und nach i von $1 \cdots n$ summiren; mit Benutzung der evidenten Relation:

$$\sum_1^n {}^i \frac{\partial F}{\partial x_i'} \frac{\partial x_i'}{\partial x_\nu} = \frac{\partial F}{\partial x_\nu}$$

erhalten wir dann die r Gleichungen:

$$(12) \quad \sum_1^r {}^j \vartheta_{jk}(a) \sum_1^n {}^\nu \xi_{j\nu}(x) \frac{\partial F}{\partial x_\nu} + \sum_1^r {}^j \psi_{jk}(a) \sum_1^n {}^\nu \xi_{j\nu}(x') \frac{\partial F}{\partial x_\nu'} = 0$$

$$(k = 1 \cdots r).$$

Also können wir sagen:

Theorem 5. *Stellen die Gleichungen*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

mit den r wesentlichen Parametern $a_1 \cdots a_r$ *eine r-gliedrige Transformationsgruppe dar, ist ferner* $F(x_1' \cdots x_n')$ *eine beliebige Function von* $x_1' \cdots x_n'$, *bedeuten endlich die* $\xi_{j\nu}(x)$, $\psi_{jk}(a)$, $\vartheta_{jk}(a)$ *dieselben Functionen ihrer Argumente wie in den beiden Theoremen 3 und 4, so werden die r Relationen*

$$(12) \qquad \sum_1^r{}_j\, \vartheta_{jk}(a) \sum_1^n{}_\nu\, \xi_{j\nu}(x) \frac{\partial F}{\partial x_\nu} + \sum_1^r{}_j\, \psi_{jk}(a) \sum_1^n{}_\nu\, \xi_{j\nu}(x') \frac{\partial F}{\partial x_\nu'} = 0$$

$$(k = 1 \cdots r)$$

bei der Substitution $x_1' = f_1(x, a), \cdots x_n' = f_n(x, a)$ *zu Identitäten.*

Was den Gültigkeitsbereich der Gleichungen (12) anbetrifft, so ist folgendes zu bemerken:

Die Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$, vermöge deren (12) identisch besteht, gelten, sobald die x_i in (x), die a_k in (a) liegen, woraus sich dann die zugehörigen Werthe der x_i' bestimmen. Da nun die Coefficienten der Gleichungen (12) ebenfalls definirt sind und sich regulär verhalten, wenn die x_i in (x), die a_k in (a) liegen und die x_i' im Bereiche $x' = f((x)(a))$, so schliessen wir, dass die Gleichungen (12) selbst für alle diese Werthsysteme x_i, a_k, x_i' Geltung haben.

Kapitel 3.

Eingliedrige Gruppen und infinitesimale Transformationen.

Die allgemeinen Entwickelungen des vorigen Kapitels wollen wir jetzt zunächst auf den besonders einfachen Fall $r = 1$ anwenden, das heisst auf die eingliedrigen Gruppen. Dabei finden wir Gelegenheit, den wichtigen Begriff der infinitesimalen Transformation einzuführen.*)

§ 11.

Es seien

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a) \quad (i = 1 \cdots n)$$

die Gleichungen einer eingliedrigen Gruppe. Nach dem Theoreme 3, Seite 33 genügen dann $x_1' \cdots x_n'$, betrachtet als Functionen von a, dem folgenden simultanen Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$(1) \qquad \frac{dx_i'}{da} = \psi(a) \cdot \xi_i(x_1' \cdots x_n') \quad (i = 1 \cdots n).$$

---

*) Lie, Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania 1872, 1873. Archiv for Mathematik og Naturv., Christiania 1876.

Was den Gültigkeitsbereich dieser Differentialgleichungen betrifft, so verweisen wir auf das in § 8 Gesagte. Nur den Umstand wollen wir noch besonders hervorheben, dass die Function $\psi(a)$ sich in dem ganzen früher besprochenen Bereiche (a) regulär verhält, und dass sie wenigstens im Bereiche $((a))$ nirgends verschwindet.

Sehen wir $x_1 \cdots x_n$ als willkürliche Constanten an, so stellen die Gleichungen $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a)$ ein System Integralgleichungen des simultanen Systemes (1) dar und zwar ein vollständiges System Integralgleichungen, weil sie nach den Integrationsconstanten $x_1 \cdots x_n$ auflösbar sind. Vollständige Systeme von Integralgleichungen giebt es allerdings unbegränzt viele, allein wenn man irgend eines kennt, etwa:

$$x_i' = V_i(C_1 \cdots C_n, a) \quad (i = 1 \cdots n)$$

mit den n Integrationsconstanten $C_1 \cdots C_n$, so ist es immer möglich für $C_1 \cdots C_n$ solche Functionen von $x_1 \cdots x_n$ einzusetzen, dass $V_i(C, a) \equiv f_i(x, a)$ wird. Um die C in der verlangten Weise zu bestimmen, braucht man nur die Form der Functionen $f_i(x, a)$ für irgend einen bestimmten Werth a^0 von a zu kennen und hat alsdann die Gleichungen

$$V_i(C_1 \cdots C_n, a^0) = f_i(x_1 \cdots x_n, a^0) \quad (i = 1 \cdots n)$$

nach $C_1 \ldots C_n$ aufzulösen.

Hieraus erhellt, dass die Differentialgleichungen (1) an und für sich genommen unsere Gruppe noch nicht vollständig bestimmen. Sind aber die Differentialgleichungen (1) vorgelegt und ist ausserdem noch diejenige Transformation $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a^0)$ unserer Gruppe bekannt, welche zu einem gegebenen Werthe a^0 von a gehört, so kann man die Gleichungen der eingliedrigen Gruppe finden, sobald man das simultane System (1) vollständig integrirt hat.

Diesen Umstand können wir benutzen, um verschiedene Darstellungsformen unserer eingliedrigen Gruppe abzuleiten, indem wir die verschiedenen Formen eines vollständigen Systems von Integralgleichungen anwenden. Der Einfachheit wegen wollen wir dabei zunächst die Voraussetzung machen, dass unter den Transformationen unserer Gruppe, welche zum Bereiche $((a))$ gehören, die identische Transformation enthalten ist. Es sei also $f_i(x_1 \cdots x_n, a^0) \equiv x_i$, wo a^0 eine bestimmte Stelle im Bereiche $((a))$ bezeichnet.

Jedes vollständige System Integralgleichungen von (1) können wir uns auf die Form

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \Omega_i(x_1' \cdots x_n') = C_i \qquad (i = 1 \cdots n-1) \\ & \Omega_n(x_1' \cdots x_n') - \int_{a_0}^{a} \psi(a)\, da = C_n \end{aligned} \right.$$

gebracht denken, wo die Functionen $\Omega_1 \cdots \Omega_n$ von einander unabhängig sind und wo $C_1 \cdots C_n$ die Integrationsconstanten bezeichnen. Um nun die Gleichungen unserer Gruppe zu erhalten, haben wir nur $C_1 \cdots C_n$ derart als Functionen von $x_1 \cdots x_n$ zu bestimmen, dass dem Werthe a^0 von a die identische Transformation $x_i' = x_i$ entspricht, das heisst, wir haben $C_1 = \Omega_1(x), \cdots C_n = \Omega_n(x)$ zu setzen. Auf diese Weise finden wir die Gleichungen

$$\Omega_i(x_1' \cdots x_n') = \Omega_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n-1)$$

$$\Omega_n(x_1' \cdots x_n') - \int_{a^0}^{a} \psi(a)\, da = \Omega_n(x_1 \cdots x_n),$$

welche nur eine andere Form der Gleichungen $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a)$ sind.

Es liegt nahe, an Stelle von a den neuen Parameter

$$t = \int_{a_0}^{a} \psi(a)\, da$$

einzuführen. Nach dem im Anfange dieses Paragraphen Gesagten verhält sich hier nicht blos t als Function von a in der Umgebung von a^0 regulär, sondern es verhält sich auch a als Function von t in der Umgebung von $t = 0$ regulär. Die Beziehung zwischen a und t ist daher in einer gewissen Umgebung von $a = a^0$ bezüglich $t = 0$ eindeutig umkehrbar. *In dieser Umgebung stellen die Gleichungen*

$$(3) \qquad \begin{cases} \Omega_i(x_1' \cdots x_n') = \Omega_i(x_1 \cdots x_n) & (i = 1 \cdots n-1) \\ \Omega_n(x_1' \cdots x_n') - t = \Omega_n(x_1 \cdots x_n) \end{cases}$$

unsere eingliedrige Gruppe mit der identischen Transformation dar.

Uebrigens kann man die zuletzt geschriebenen Gleichungen auch direkt aus dem simultanen Systeme

$$(4) \qquad \frac{dx_i'}{dt} = \xi_i(x_1' \cdots x_n') \quad (i = 1 \cdots n)$$

ableiten. Man braucht nur aus demselben $x_1' \cdots x_n'$ derart als Functionen von t zu bestimmen, dass bei der Substitution $t = 0$ sich ergiebt: $x_1' = x_1, \cdots x_n' = x_n$, dann erhält man ein Gleichungensystem, welches mit (3) äquivalent ist. Natürlich kann man auch umgekehrt aus (3) durch Differentiation nach t das simultane System (4) ableiten.

Betrachten wir jetzt die Gleichungen (3) einmal an und für sich, ohne Rücksicht auf ihre Herleitung aus den Gleichungen $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a)$. Denken wir uns also in (3) die Functionen $\Omega_1 \cdots \Omega_n$ als *beliebig gewählte Functionen* ihrer Argumente und nur der Beschränkung unterworfen, dass sie unabhängig von einander sein sollen.

Wenn wir dann die Grösse t alle möglichen Werthe annehmen lassen, so stellen die Gleichungen (3) eine Schaar von ∞^1 Transformationen dar. Führen wir zwei Transformationen dieser Schaar nach einander aus, so erhalten wir offenbar stets eine Transformation, welche gleichfalls der Schaar angehört. Also bilden die ∞^1 Transformationen (3) immer eine Gruppe.

Von dieser Gruppe ist folgendes zu sagen: Führt man zwei ihrer Transformationen mit den Parametern t_1 bezüglich t_2 nach einander aus, so erhält man eine Transformation mit dem Parameter $t_1 + t_2$. Also sind je zwei Transformationen der Gruppe mit einander *vertauschbar*. Die identische Transformation gehört zu dem Parameter $t = 0$; genügen daher die Parameter t_1 und t_2 zweier Transformationen der Gruppe der Bedingung $t_1 + t_2 = 0$, so sind die betreffenden Transformationen invers zu einander. Man erkennt somit, dass die Transformationen der Gruppe (3) sich paarweise als *inverse* zusammenordnen.

Wir bemerken ferner, dass jedes simultane System von der Form (4) ein Gleichungensystem von der Form (3) liefert, welche Functionen von $x_1' \ldots x_n'$ auch die ξ_i sein mögen. Folglich können wir sagen, dass *jedes simultane System von der Form* (4) *eine ganz bestimmte eingliedrige Gruppe liefert, welche die identische Transformation enthält.* Nachher, wenn wir erst den Begriff der infinitesimalen Transformation eingeführt haben, werden wir diese Thatsache kürzer und besser aussprechen können.

Doch kehren wir zu der Gruppe $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a)$ mit der identischen Transformation $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a^0) \equiv x_i$ zurück. Auf diese können wir sofort alles übertragen, was wir über die Gruppe (3) gesagt haben, vorausgesetzt nur, dass wir uns auf eine gewisse Umgebung von $t = 0$ oder, was dasselbe ist, von $a = a^0$ beschränken. In der betreffenden Umgebung von $t = 0$ können wir ja immer t_1 und t_2 so wählen, dass sowohl $t_1 + t_2$ als auch $-t_1$ in dieser Umgebung liegen. In Folge dessen gilt auch von der Gruppe $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a)$, dass ihre Transformationen, wenigstens in einer gewissen Umgebung der identischen Transformation, mit einander vertauschbar sind und sich paarweise als inverse zusammenordnen.

Die Form (3), auf welche die Transformationen $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a)$ in der Umgebung von a^0 gebracht werden können, legt es nahe, statt der x die folgenden neuen Veränderlichen einzuführen:

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = y_1, \cdots \Omega_n(x_1 \cdots x_n) = y_n.$$

In den neuen Veränderlichen $y_1 \ldots y_n$ bekommen wir dann die eingliedrige Gruppe

$$y_1' = y_1, \cdots y_{n-1}' = y_{n-1}, y_n' = y_n + t,$$

welche nach der in § 4 eingeführten Bezeichnung mit der Gruppe $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a)$ ähnlich ist. Betrachten wir hier $y_1 \cdots y_n$ als gewöhnliche Cartesische Coordinaten eines n-fach ausgedehnten Raumes und wenden die im dreifachen Raume gebräuchliche Ausdrucksweise an, so können wir sagen, dass die eingliedrige Gruppe in $y_1 \dots y_n$ aus *Translationen* des betreffenden n-fach ausgedehnten Raumes besteht. —

Fassen wir jetzt die bisherigen Ergebnisse noch einmal zusammen, bevor wir weitergehen:

Theorem 6. *Enthält eine eingliedrige Gruppe*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a) \quad (i = 1 \cdots n)$$

die identische Transformation, so sind ihre Transformationen unter einander vertauschbar und ordnen sich paarweise als inverse zusammen. Jede eingliedrige Gruppe dieser Art ist mit einer Gruppe von Translationen

$$y_1' = y_1, \cdots y_{n-1}' = y_{n-1}, y_n' = y_n + t$$

ähnlich.

Beispiel. Die Gleichungen

$$x_1' = a x_1, \quad x_2' = a^2 x_2$$

mit dem Parameter a stellen eine eingliedrige Gruppe dar, welche die identische Transformation enthält, nämlich für $a = 1$. Die Differentialgleichungen (1) haben hier die Form:

$$\frac{dx_1'}{da} = \frac{1}{a} x_1', \qquad \frac{dx_2'}{da} = \frac{1}{a} 2x_2'.$$

Wünscht man daher nach den oben auseinandergesetzten Regeln die vorliegende eingliedrige Gruppe in eine Gruppe von Translationen überzuführen, so hat man zunächst a^0 gleich 1 zu wählen und findet:

$$t = \int_1^a \frac{da}{a} = la;$$

sodann hat man das simultane System

$$\frac{dx_1'}{x_1'} = \frac{dx_2'}{2x_2'} = dt$$

unter Zugrundelegung der Anfangsbedingung: $x_1' = x_1$, $x_2' = x_2$ für $t = 0$ zu integriren, dann ergeben sich die Gleichungen der Gruppe in der Form:

$$\frac{x_2'}{x_1'^2} = \frac{x_2}{x_1^2}, \quad lx_1' = lx_1 + t.$$

Wählt man daher als neue Veränderliche die folgenden:

$$y_1 = \frac{x_2}{x_1^2}, \quad y_2 = l x_1,$$

so erhält die Gruppe die gewünschte kanonische Form:

$$y_1' = y_1, \quad y_2' = y_2 + t,$$

oder, wenn man vorzieht, den ursprünglichen Parameter a beizubehalten:

$$y_1' = y_1, \quad y_2' = y_2 + la.$$

Bisher setzten wir voraus, dass unsere Gruppe im Bereiche $(\!(a)\!)$ die identische Transformation enthielt. Lassen wir es von jetzt ab unentschieden, ob die identische Transformation auftritt oder nicht. Dann gestaltet sich Verschiedenes etwas anders.

Ist $\bar{a}$ irgend eine Stelle im Bereiche $(\!(a)\!)$, so lassen sich die Gleichungen $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a)$ unserer Gruppe in der folgenden Form darstellen:

$$\Omega_i(x_1' \cdots x_n') = \Omega_i\big(f_1(x_1 \cdots x_n, \bar{a}) \cdots f_n(x_1 \cdots x_n, \bar{a})\big)$$
$$(i = 1 \cdots n-1)$$

$$\Omega_n(x_1' \cdots x_n') - \int_{\bar{a}}^{a} \psi(a)\, da = \Omega_n\big(f_1(x_1 \cdots x_n, \bar{a}) \cdots f_n(x_1 \cdots x_n, \bar{a})\big).$$

Setzen wir nun

$$\int_{\bar{a}}^{a} \psi(a)\, da = \tau,$$

und beschränken uns auf eine gewisse Umgebung von $\bar{a}$, so können wir uns jede Transformation unserer Gruppe in der Umgebung von $\bar{a}$ dadurch entstanden denken, dass zuerst die Transformation

$$\bar{x}_i = f_i(x_1 \cdots x_n, \bar{a}) \quad (i = 1 \cdots n)$$

und nachher eine Transformation von der Form:

$$(5) \qquad \begin{cases} \Omega_i(x_1' \cdots x_n') = \Omega_i(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n) & (i = 1 \cdots n-1) \\ \Omega_n(x_1' \cdots x_n') - \tau = \Omega_n(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n) \end{cases}$$

ausgeführt worden ist. Also zuerst eine Transformation der Gruppe $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a)$ selbst und nachher eine Transformation einer eingliedrigen Gruppe, welche sicher die identische Transformation enthält.

Auch dieses Ergebniss werden wir kürzer und schärfer aussprechen können, sobald wir den Begriff der infinitesimalen Transformation eingeführt haben. Zu diesem Begriffe führt uns eine etwas eingehendere Betrachtung derjenigen eingliedrigen Gruppen, welche die identische Transformation enthalten.

§ 12.

Vorhin sahen wir, dass die Gleichungen einer jeden eingliedrigen Gruppe mit der identischen Transformation durch Integration eines ganz bestimmten simultanen Systems

$$(4) \qquad \frac{dx_i'}{dt} = \xi_i(x_1' \cdots x_n') \qquad (i = 1 \cdots n)$$

erhalten werden können. Wenn dieses simultane System unter Zugrundelegung der Anfangsbedingung: $x_1' = x_1, \cdots x_n' = x_n$ für $t = 0$ integrirt wird, so sind die hervorgehenden Gleichungen

$$(3) \qquad \begin{cases} \Omega_i(x_1' \cdots x_n') = \Omega_i(x_1 \cdots x_n) & (i = 1 \cdots n-1) \\ \Omega_n(x_1' \cdots x_n') = \Omega_n(x_1 \cdots x_n) + t \end{cases}$$

eine Form der Gruppe. Auf der anderen Seite ergab sich auch, dass jedes simultane System von der Form (4) zu einer ganz bestimmten eingliedrigen Gruppe in der soeben geschilderten Beziehung steht.

Diesen Umstand wollen wir benutzen, um eine neue Darstellung jeder eingliedrigen Gruppe mit identischer Transformation abzuleiten.

Wir können ja die Integration des simultanen Systems (4) auch mit Hülfe von Potenzreihen bewerkstelligen; das heisst, wir können $x_1' \cdots x_n'$ in solche gewöhnliche Potenzreihen von t entwickeln, dass sowohl das simultane System (4) identisch befriedigt wird, als auch die Anfangsbedingung: $x_i' = x_i$ für $t = 0$. Die bewussten Reihenentwickelungen lauten:

$$(6) \quad x_i' = x_i + \frac{t}{1} \xi_i(x_1 \cdots x_n) + \frac{t^2}{1 \cdot 2} \sum_1^n{}_k \, \xi_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n).$$

Das ist daher die allgemeine Form einer eingliedrigen Gruppe mit der identischen Transformation.

Um das Bildungsgesetz der obigen Reihen deutlicher hervortreten zu lassen, wollen wir eine Abkürzung einführen; wir wollen nämlich setzen:

$$\sum_1^n{}_i \, \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1 \cdots x_n) = X(f)$$

unter f eine ganz beliebige Function von $x_1 \cdots x_n$ verstanden. Dann können wir die Gleichungen (6) schreiben:

$$(6') \qquad x_i' = x_i + \frac{t}{1} \xi_i + \frac{t^2}{1 \cdot 2} X(\xi_i) + \frac{t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} X(X(\xi_i)) + \cdots$$

oder, wenn wir wollen, auch so:

$$(6'') \quad x_i' = x_i + \frac{t}{1} X(x_i) + \frac{t^2}{1 \cdot 2} X(X(x_i)) + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n),$$

wo jetzt das Bildungsgesetz vollkommen durchsichtig ist.

Die n Gleichungen (6″) lassen sich in eine einzige zusammenziehen. Statt nämlich für jede einzelne der Veränderlichen $x_1' \cdots x_n'$ die Reihenentwickelung nach Potenzen von t anzugeben, können wir einfach die allgemeine Reihenentwickelung für eine beliebige Function von $x_1' \cdots x_n'$ angeben; wenn wir dann dieser Function nach einander die Werthe x_1', $x_2' \cdots x_n'$ ertheilen, bekommen wir alle n Gleichungen (6″) zurück.

Somit handelt es sich nur darum, den Ausdruck $f(x_1' \cdots x_n')$ nach Potenzen von t zu entwickeln, wobei $x_1' \cdots x_n'$ durch die Gleichungen (6″) definirt sind und daher dem simultanen Systeme (4) genügen.

Die verlangte Reihenentwickelung hat die Gestalt:

$$f(x_1' \cdots x_n') = f' = (f')_{t=0} + \frac{t}{1}\left(\frac{df'}{dt}\right)_{t=0} + \cdots;$$

berechnen wir daher zunächst die Differentialquotienten $\frac{df'}{dt}, \frac{d^2f'}{dt^2} \cdots$. Es ist:

$$\frac{df'}{dt} = \sum_1^n {}_i \frac{\partial f'}{\partial x_i'}\frac{dx_i'}{dt} = \sum_1^n {}_i\, \xi_i(x_1' \cdots x_n')\frac{\partial f'}{\partial x_i'}.$$

Schreiben wir hier ξ_i' für $\xi_i(x')$ und $X'(f')$ für $\sum \xi_i' \frac{\partial f}{\partial x_i'}$, so haben wir:

$$\frac{df'}{dt} = \sum_1^n {}_i\, \xi_i' \frac{\partial f'}{\partial x_i'} = X'(f'),$$

$$\frac{d^2f'}{dt^2} = X'\left(\sum_1^n {}_i\, \xi_i' \frac{\partial f'}{\partial x_i'}\right) = X'(X'(f'))$$

und so weiter. Bei der Substitution $t = 0$ verwandeln sich nun $x_1' \cdots x_n'$ bezüglich in $x_1 \cdots x_n$, ferner f' in f, $X'(f')$ in $X(f)$ und so fort, kurz wir erhalten die Reihenentwickelung:

$$(7)\quad f(x_1' \cdots x_n') = f(x_1 \cdots x_n) + \frac{t}{1}\cdot X(f) + \frac{t^2}{1\cdot 2}\cdot X(X(f)) + \cdots.$$

In dieser einen Gleichung sind die n Gleichungen (6″) offenbar sämmtlich enthalten. *Folglich kann auch diese eine Gleichung* (7) *als der allgemeine Ausdruck einer eingliedrigen Gruppe mit der identischen Transformation betrachtet werden.*

Zuweilen ist es wünschenswerth eine Function von $x_1 \cdots x_n$ durch $x_1' \ldots x_n'$ und durch t auszudrücken. Auch hierfür lässt sich eine allgemeine Formel angeben. Bei Betrachtung der Gleichungen (3), welche auch eine Form unserer eingliedrigen Gruppe (6″) oder (7) sind, haben wir ja gesehen, dass die Transformation mit dem Parameter $-t$ zu der Transformation mit dem Parameter $+t$ invers ist. Wenn wir daher in den Gleichungen (6'') die Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ bezüglich mit $x_1' \cdots x_n'$ vertauschen und ausserdem noch t durch $-t$ ersetzen, so erhalten wir die Auflösungen dieser Gleichungen nach $x_1 \cdots x_n$. Diese Auflösung können wir offenbar ebenfalls in eine einzige Gleichung zusammenziehen: wir brauchen blos das angegebene Verfahren auf die Gleichung (7) anwenden. Wir erhalten dann die Gleichung:

$$(7_a)\quad f(x_1 \cdots x_n) = f(x_1' \cdots x_n') - \frac{t}{1} \cdot X'(f') + \frac{t^2}{1\,.\,2} \cdot X'(X'(f')) - \cdots,$$

welche eine beliebige Function der x_i durch die x_i' und durch t ausdrückt.

§ 13.

Unter den ∞^1 Transformationen der eingliedrigen Gruppe (6) oder (7) spielt diejenige eine ausgezeichnete Rolle, deren Parameter t einen unendlich kleinen Werth hat, etwa den Werth δt. Diese *„unendlich kleine“* oder *„infinitesimale“* Transformation der Gruppe wollen wir jetzt etwas näher betrachten.

Wenn wir nur die erste Potenz von δt berücksichtigen, die zweite und alle höheren dagegen vernachlässigen, so erhalten wir aus (6') die gewünschte infinitesimale Transformation in der Form:

$$(8)\qquad x_i' = x_i + \xi_i(x_1 \cdots x_n)\,\delta t \qquad (i = 1 \cdots n);$$

benutzen wir dagegen die Gleichung (7), so erhalten wir die letzten n Gleichungen zusammengefasst in der einen:

$$f' = f + X(f) \cdot \delta t$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$f(x_1' \cdots x_n') = f(x_1 \cdots x_n) + \delta t \cdot \sum_1^n {}_i\, \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Es ist bequem, für die Differenz $x_i' - x_i$, das heisst also für den Ausdruck $\xi_i \delta t$ einen eigenen Namen einzuführen. Wir wollen $\xi_i \delta t$ als den *„Zuwachs“* oder das *„Increment“* zuweilen auch als die *„Variation“* von x_i bezeichnen und dafür schreiben: δx_i. Dann können wir die infinitesimale Transformation auch in der Form

$$\delta x_1 = \xi_1 \delta t, \cdots \delta x_n = \xi_n \delta t$$

darstellen.

Entsprechend werden wir natürlich die Differenz $f' - f$ oder den Ausdruck $X(f)\delta t$ als den Zuwachs oder die Variation der Function $f(x_1 \cdots x_n)$ bezeichnen und schreiben:

$$f' - f = X(f) \cdot \delta t = \delta f.$$

Es leuchtet ein, dass der Ausdruck

$$X(f) = \sum_1^n \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

ganz allein schon die infinitesimale Transformation $\delta x_i = \xi_i \delta t$ vollständig bestimmt, wenn man unter $f(x_1 \cdots x_n)$ eine unbestimmte Function seiner Argumente versteht. Mit $X(f)$ sind ja gleichzeitig alle n Functionen $\xi_1 \cdots \xi_n$ einzeln gegeben.

Wir werden deshalb den Ausdruck $X(f) = \frac{\delta f}{\delta t}$ *als Symbol der infinitesimalen Transformation* (8) *einführen,* ja wir werden geradezu von der *„infinitesimalen Transformation* $X(f)$*“ reden.* Doch wollen wir gleich jetzt darauf aufmerksam machen, dass das Symbol der infinitesimalen Transformation (8) im Grunde nur bis auf einen willkürlich bleibenden constanten Factor bestimmt ist. Wenn wir nämlich den Ausdruck $X(f)$ mit irgend einer endlichen Constanten c multipliciren, so ist auch der hervorgehende Ausdruck $cX(f)$ als Symbol der infinitesimalen Transformation (8) zu betrachten. Es macht ja nach dem Begriffe einer unendlich kleinen Grösse keinen Unterschied, wenn wir in den Gleichungen (8) die unendlich kleine Grösse δt durch $c\,\delta t$ ersetzen.

Die Einführung des Symbols $X(f)$ für die infinitesimale Transformation (8) bietet vielfache Vortheile. *Erstens* ist es sehr bequem, dass die n Gleichungen $x_i' = x_i + \xi_i \delta t$ der Transformation durch den einen Ausdruck $X(f)$ ersetzt sind. *Zweitens* ist es bequem, dass wir es in dem Symbol $X(f)$ nur mit einer Reihe von Veränderlichen zu thun haben, nicht mit den beiden Reihen: $x_1 \cdots x_n$ und $x_1' \cdots x_n'$. Endlich *drittens* vermittelt das Symbol $X(f)$ den Zusammenhang zwischen infinitesimalen Transformationen und linearen partiellen Differentialgleichungen; denn in der Theorie der letzteren spielen ja solche Ausdrücke wie $X(f)$ eine grosse Rolle. Auf diesen Zusammenhang gehen wir später ausführlich ein (vgl. Kap. 6).

Die vorstehenden Entwickelungen zeigen, dass eine eingliedrige Gruppe mit der identischen Transformation stets eine ganz bestimmte infinitesimale Transformation $x_i' = x_i + \xi_i \delta t$ oder kurz $X(f)$ enthält. Es ist aber auch klar, dass umgekehrt die betreffende eingliedrige Gruppe vollkommen bestimmt ist, sobald man ihre infinitesimale Transformation kennt. Die infinitesimale Transformation $x_i' = x_i + \xi_i \delta t$ ist ja sozusagen nur eine andere Schreibweise des simultanen Systems (4), aus welchem die Gleichungen (6) der eingliedrigen Gruppe abgeleitet sind.

Da also jede eingliedrige Gruppe mit der identischen Transformation durch ihre infinitesimale Transformation vollständig bestimmt ist, so werden wir der Bequemlichkeit halber die folgende Ausdrucksweise einführen:

Jede Transformation der eingliedrigen Gruppe

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1}\,\xi_i + \frac{t^2}{1\,.\,2}\,X(\xi_i) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n)$$

wird erhalten durch unendlichmalige Wiederholung der infinitesimalen Transformation

$$x_i' = x_i + \xi_i \delta t \quad \text{oder} \quad X(f) = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Oder noch kürzer:

Die betreffende eingliedrige Gruppe ist von ihrer infinitesimalen Transformation erzeugt.

Im Gegensatz zu der infinitesimalen Transformation $X(f)$ bezeichnen wir die Gleichungen

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1}\,\xi_i + \frac{t^2}{1 \cdot 2}\,X(\xi_i) + \cdots$$

als die *endlichen* Gleichungen der betreffenden eingliedrigen Gruppe.

Nunmehr können wir den früher gefundenen Zusammenhang zwischen dem simultanen Systeme (4) und der eingliedrigen Gruppe (6″) kurz aussprechen wie folgt:

Satz 1. *Jede eingliedrige Gruppe, welche die identische Transformation enthält, ist von einer ganz bestimmten infinitesimalen Transformation erzeugt.*

Und umgekehrt:

Satz 2. *Jede infinitesimale Transformation erzeugt eine ganz bestimmte eingliedrige Gruppe.*

Was wir am Schlusse von § 11 über beliebige eingliedrige Gruppen mit oder ohne identische Transformation sagten, das können wir jetzt folgendermassen fassen:

Theorem 7. *Zu jeder eingliedrigen Gruppe*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\, a) \quad (i = 1 \cdots n)$$

gehört eine ganz bestimmte infinitesimale Transformation

$$x_i' = x_i + \xi_i(x_1 \cdots x_n)\delta t \quad (i = 1 \cdots n) \quad \textit{oder} \quad X(f) = \sum_1^n{}^i\, \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

von der folgenden Beschaffenheit: ist $\bar{x}_i = f_i(x_1 \cdots x_n,\, \bar{a})$ irgend eine Transformation der eingliedrigen Gruppe, so kann jede Transformation $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\, a)$, deren Parameter a in einer gewissen Umgebung von $\bar{a}$ liegt, dadurch erhalten werden, dass *man zuerst die Transformation*

$$\bar{x}_i = f_i(x_1 \cdots x_n, \bar{a}) \quad (i = 1 \cdots n)$$

ausführt und nachher eine geeignete Transformation

$$x_i' = \bar{x}_i + \frac{t}{1} \cdot \xi_i(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n)$$

der von $X(f)$ erzeugten eingliedrigen Gruppe.

§ 14.

Wir wissen, dass jede eingliedrige Gruppe mit der identischen Transformation durch ihre infinitesimale Transformation

$$x_i' = x_i + \xi_i(x_1 \cdots x_n)\delta t \quad (i = 1 \cdots n)$$

und also auch durch das Symbol

$$X(f) = \sum_1^n {}^i\, \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

vollständig bestimmt ist.

Bleibt aber der Zusammenhang zwischen dem Symbol $X(f)$ und der betreffenden eingliedrigen Gruppe bestehen, wenn statt der x neue unabhängige Veränderliche

$$y_i = \varphi_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n)$$

eingeführt werden?

Bei der betreffenden Variabelnänderung nimmt $X(f)$ die Form an:

$$X(f) = \sum_1^n {}^i\, \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_1^n {}^i\, \xi_i \sum_1^n {}^\nu \frac{\partial f}{\partial y_\nu} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i}$$

oder:

$$X(f) = \sum_1^n {}^\nu\, X(y_\nu) \frac{\partial f}{\partial y_\nu}.$$

Denken wir uns hier die Coefficienten

$$X(y_\nu) = \sum_1^n {}^i\, \xi_i \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i}$$

durch $y_1 \ldots y_n$ ausgedrückt: $X(y_\nu) = \eta_\nu(y_1 \cdots y_n)$, und setzen

$$\sum_1^n {}^\nu\, \eta_\nu(y_1 \cdots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_\nu} = Y(f),$$

so erhalten wir:

$$X(f) = Y(f),$$

wo das f auf der rechten Seite diejenige Function von $y_1 \cdots y_n$ bezeichnet, in welche $f(x_1 \cdots x_n)$ bei Einführung der y übergeht.

Wir sehen somit, dass der Ausdruck $X(f)$ sich bei Einführung der neuen Veränderlichen in das Symbol einer neuen infinitesimalen Transformation verwandelt, nämlich in das Symbol der folgenden:

$$y_\nu' = y_\nu + \eta_\nu(y_1 \cdots y_n)\delta t \quad (\nu = 1 \cdots n).$$

Auf der andern Seite aber verwandelt sich die von $X(f)$ erzeugte eingliedrige Gruppe (7)

$$f(x_1' \cdots x_n') = f(x_1 \cdots x_n) + \frac{t}{1} \cdot X(f) + \frac{t^2}{1 \cdot 2} X(X(f)) + \cdots$$

in eine gewisse eingliedrige Gruppe in den Veränderlichen $y_1 \cdots y_n$, deren analytischen Ausdruck wir sofort hinschreiben können. Erhält nämlich bei Einführung der neuen Veränderlichen $y_i = \varphi_i(x_1 \cdots x_n)$ die Function $f(x_1 \cdots x_n)$ die Form:

$$f(x_1 \cdots x_n) = F(y_1 \cdots y_n)$$

und dementsprechend $f(x_1' \cdots x_n')$ bei Einführung der $y_i' = \varphi_i(x_1' \cdots x_n')$ die Form

$$f(x_1' \cdots x_n') = F(y_1' \cdots y_n'),$$

so wird:

$$X(f) = Y(F), \quad X(X(f)) = Y(Y(F)) \cdots;$$

also geht (7) über in:

$$F(y_1' \cdots y_n') = F(y_1 \cdots y_n) + \frac{t}{1} \cdot Y(F) + \frac{t^2}{1 \cdot 2} Y(Y(F)) + \cdots,$$

wo nun F ebensogut wie früher f eine beliebige Function seiner Argumente bezeichnet. Diese letzte Gleichung ist aber nichts anderes als der analytische Ausdruck derjenigen eingliedrigen Gruppe, welche von der infinitesimalen Transformation $Y(f)$ erzeügt wird.

Folglich ist der Zusammenhang zwischen einer eingliedrigen Gruppe und dem Symbol ihrer infinitesimalen Transformation unabhängig von der Wahl der Veränderlichen. Mit andern Worten: unser Symbol für die infinitesimale Transformation einer eingliedrigen Gruppe geht bei Einführung neuer Veränderlicher in das Symbol für die infinitesimale Transformation der transformirten eingliedrigen Gruppe über.

Hiermit ist gezeigt, dass das Symbol $X(f)$ der infinitesimalen Transformation einer eingliedrigen Gruppe auch bei Variabelnänderung die endlichen Gleichungen dieser Gruppe vollständig ersetzt, dass wir bei Einführung neuer Veränderlicher blos das Symbol $X(f)$ ins Auge zu fassen brauchen und nicht die endlichen Gleichungen der Gruppe.

Uebrigens zeigt die oben durchgeführte Rechnung noch mehr; aus derselben geht nämlich hervor, dass der folgende Satz gilt:

Satz 3. *Erhält das Symbol*

$$X(f) = \sum_1^n {}^i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

der infinitesimalen Transformation

$$x_i' = x_i + \xi_i \delta t \quad (i = 1 \cdots n)$$

bei Einführung der neuen unabhängigen Veränderlichen

$$y_i = \varphi_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n)$$

die Form

$$X(f) = \sum_1^n {}^i X(y_\nu) \frac{\partial f}{\partial y_\nu} = \sum_1^n {}^\nu \eta_\nu(y_1 \cdots y_n) = Y(f),$$

so bekommt die von $X(f)$ erzeugte endliche Transformation:

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1} \cdot \xi_i + \frac{t^2}{1.2} X(\xi_i) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n)$$

in den neuen Veränderlichen die Gestalt:

$$y_i' = y_i + \frac{t}{1} \cdot \eta_i + \frac{t^2}{1.2} Y(\eta_i) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n),$$

wobei der Parameter t beide Male denselben Zahlenwerth besitzt.

§ 15.

Der Begriff der infinitesimalen Transformation und ebenso derjenige der eingliedrigen Gruppe gewinnt eine gewisse Anschaulichkeit, wenn man einige geometrische und mechanische Vorstellungen zu Hülfe nimmt.

In der infinitesimalen Transformation

$$x_i' = x_i + \xi_i(x_1 \cdots x_n)\delta t \quad (i = 1 \cdots n)$$

oder:

$$X(f) = \sum_1^n {}^i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

fassen wir die Veränderlichen x als Cartesische Coordinaten eines n-fach ausgedehnten Raumes auf. Dann lässt sich die Transformation offenbar so deuten, dass jeder Punkt mit den Coordinaten $x_1 \cdots x_n$ in einen unendlich benachbarten mit den Coordinaten $x_1' \cdots x_n'$ übergeführt wird. *Also ordnet die Transformation jedem Punkte, für welchen nicht alle ξ_i verschwinden, eine gewisse Fortschreitungsrichtung zu und längs dieser Fortschreitungsrichtung eine gewisse unendlich kleine Strecke;* die Fortschreitungsrichtung ist bestimmt durch die Proportion: $\xi_1(x) : \xi_2(x) : \cdots : \xi_n(x)$; die unendlich kleine Strecke hat die Länge: $\sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2} \cdot \delta t$. Sind in einem Punkte $x_1 \ldots x_n$ alle ξ gleich

Null, so wird demselben von der infinitesimalen Transformation keine Fortschreitungsrichtung zugeordnet.

Denken wir uns den ganzen Raum von einer compressibeln Flüssigkeit erfüllt, so können wir die infinitesimale Transformation $X(f)$ einfach als eine unendlich kleine Bewegung dieser Flüssigkeit deuten, und δt als den unendlich kleinen Zeitabschnitt, während dessen die Bewegung vor sich geht. Die Grössen $\xi_1(x) \cdots \xi_n(x)$ sind dann offenbar die Componenten der Geschwindigkeit desjenigen Flüssigkeitstheilchens, welches sich gerade im Punkte $x_1 \cdots x_n$ befindet.

Die endlichen Transformationen der eingliedrigen Gruppe $X(f)$ entstehen, wie wir uns oben ausdrückten, durch unendlichmalige Wiederholung der infinitesimalen Transformation $x_i' = x_i + \xi_i \delta t$. Um zu einer endlichen Transformation zu gelangen, müssen wir uns daher die unendlich kleine Bewegung, welche die infinitesimale Transformation darstellt, während unendlich vieler Zeitabschnitte δt wiederholt denken, mit andern Worten wir müssen die Bewegung der Flüssigkeitstheilchen während eines endlichen Zeitabschnittes verfolgen. Hierzu ist es nöthig, die Differentialgleichungen dieser Bewegung zu integriren, das heisst also das simultane System:

$$\frac{dx_1'}{\xi_1(x')} = \cdots = \frac{dx_n'}{\xi_n(x')} = dt.$$

Ein Flüssigkeitstheilchen, das sich zur Zeit $t = 0$ im Punkte $x_1 \cdots x_n$ befindet, wird nach Verlauf der Zeit t im Punkte $x_1' \cdots x_n'$ angelangt sein; also muss die Integration so ausgeführt werden, dass für $t = 0$ wird: $x_i' = x_i$. Wirklich fanden wir früher gerade auf diese Weise die allgemeine Form einer endlichen Transformation unserer Gruppe.

Die Bewegung unserer Flüssigkeit ist eine sogenannte stationäre, denn die Geschwindigkeitscomponenten $\frac{dx_i'}{dt}$ sind von t frei. Daraus folgt, dass in ein und demselben Punkte zu jeder Zeit der Bewegungsvorgang derselbe ist; dass also der gesammte Bewegungsvorgang stets denselben Verlauf nimmt, zu welcher Zeit man auch anfängt, ihn zu beobachten. Im Grunde liegt hierin schon der Beweis dafür, dass die von der infinitesimalen Transformation $X(f)$ erzeugten endlichen Transformationen eine Gruppe bilden.

Fassen wir ein bestimmtes Flüssigkeitstheilchen ins Auge, etwa das, welches zur Zeit $t = 0$ sich im Punkte $x_1^0 \cdots x_n^0$ befindet, so sehen wir, dass sich dasselbe auf einer Curve bewegt, die durch den Punkt $x_1^0 \cdots x_n^0$ hindurchgeht. Der ganze Raum wird also in lauter Curven von solcher Beschaffenheit zerlegt, dass jedes Theilchen auf der Curve bleibt, auf der es sich einmal befindet. Wir wollen diese Curven als die *Bahncurven der infinitesimalen Transformation* $X(f)$ bezeichnen. Solcher Bahncurven giebt es offenbar ∞^{n-1} verschiedene.

Es ist leicht, für einen gegebenen Punkt $x_1^0 \cdots x_n^0$ die Gleichungen der hindurchgehenden Bahncurve aufzustellen. Die *Bahncurve ist ja nichts anderes als der Ort aller Punkte, in welche der Punkt* $x_1^0 \cdots x_n^0$ *übergeht, wenn die* ∞^1 *Transformationen*

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1}\,\xi_i(x) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n)$$

der eingliedrigen Gruppe auf ihn ausgeführt werden. Also stellen die Gleichungen

$$x_i' = x_i^0 + \frac{t}{1}\,\xi_i(x^0) + \frac{t^2}{1\,.\,2}\,(X(\xi_i))_{x=x^0} + \cdots \quad (i = 1 \cdots n)$$

die betreffende Bahncurve dar, wenn man t als unabhängige Veränderliche betrachtet.

Will man die betreffende Bahncurve durch Gleichungen zwischen $x_1' \cdots x_n'$ allein darstellen, so hat man nur t zu eliminiren. Bequemer ist es aber, von der Form (3) auszugehen, auf welche die eingliedrige Gruppe $X(f)$ gebracht werden kann. Die Gleichungen der durch $x_1^0 \cdots x_n^0$ gehenden Bahncurve werden dann offenbar:

$$\Omega_i(x_1' \cdots x_n') = \Omega_i(x_1^0 \cdots x_n^0) \quad (i = 1 \cdots n-1).$$

Hieraus geht hervor, dass die Schaar aller ∞^{n-1} Bahncurven durch die Gleichungen

$$\Omega_1(x_1' \cdots x_n') = C_1, \quad \cdots \Omega_{n-1}(x_1' \cdots x_n') = C_{n-1}$$

mit den $n-1$ willkürlichen Parametern $C_1 \cdots C_{n-1}$ dargestellt wird.

§ 16.

Es seien r infinitesimale Transformationen in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ vorgelegt:

$$X_k(f) = \sum_1^n {}^i\, \xi_{ki}\,(x_1 \cdots x_n)\,\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r).$$

Wir multipliciren jeden der Ausdrücke $X_k(f)$ mit einer beliebig gewählten, von $x_1 \cdots x_n$ unabhängigen Grösse λ_k und addiren alles zusammen, dann bekommen wir einen Ausdruck von der Gestalt:

$$\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f),$$

welcher natürlich wieder eine infinitesimale Transformation darstellt. Dieses Verfahren zur Ableitung neuer infinitesimaler Transformationen aus gegebenen wird im Folgenden so häufig angewendet, dass es zweckmässig erscheint, für dasselbe eine eigene Bezeichnung einzuführen.

Wir wollen deshalb in Zukunft sagen, dass *die infinitesimale Transformation* $\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$ *aus den r infinitesimalen Transformationen* $X_1(f) \cdots X_r(f)$ *linear abgeleitet ist.*

Es kann nun vorkommen, dass unter den infinitesimalen Transformationen $X_1(f) \cdots X_r(f)$ einige vorhanden sind, die sich aus den übrigen linear ableiten lassen. Dies tritt augenscheinlich dann und nur dann ein, wenn es unter den aus $X_1(f) \cdots X_r(f)$ linear abgeleiteten infinitesimalen Transformationen solche giebt, die identisch verschwinden, anders ausgedrückt: wenn es r Constanten $e_1 \cdots e_r$ giebt, welche die Gleichung

$$e_1 X_1(f) + \cdots + e_r X_r(f) = 0$$

befriedigen, ohne sämmtlich gleich Null zu sein.

Um die Sprache zu erleichtern, wollen wir die folgende Ausdrucksweise einführen:

Die r infinitesimalen Transformationen

$$X_k(f) = \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

heissen unabhängig von einander, wenn die Gleichung

$$e_1 X_1(f) + \cdots + e_r X_r(f) = 0,$$

in welcher $e_1 \cdots e_r$ *von den x unabhängige Grössen bezeichnen, nur dadurch befriedigt werden kann, dass* $e_1 \cdots e_r$ *sämmtlich gleich Null gesetzt werden.*

Oder etwas kürzer:

Die r infinitesimalen Transformationen $X_1(f) \cdots X_r(f)$ *heissen unabhängig von einander, wenn keine derselben sich aus den übrigen linear ableiten lässt.*

Kann dagegen die Relation

$$e_1 X_1(f) + \cdots + e_r X_r(f) = 0$$

durch constante, nicht sämmtlich verschwindende Werthe der Grössen e_k erfüllt werden, so sind die infinitesimalen Transformationen $X_1(f) \cdots X_r(f)$ nicht von einander unabhängig, es giebt aber darunter eine gewisse Anzahl von einander unabhängige Transformationen, etwa $X_1(f) \cdots X_m(f)$ $(m < r)$, während sich $X_{m+1}(f) \cdots X_r(f)$ aus $X_1(f) \cdots X_m(f)$ linear ableiten lassen. Offenbar kann dann der Inbegriff aller infinitesimalen Transformationen $\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$ schon aus $X_1(f) \cdots X_m(f)$ allein linear abgeleitet werden.

Jede infinitesimale Transformation

$$\lambda_1 \cdot X_1(f) + \cdots + \lambda_r \cdot X_r(f) = C(f)$$

erzeugt, wie wir wissen, eine eingliedrige Gruppe, die eingliedrige

Gruppe $C(f)$, deren endliche Transformationen die Form haben:

$$\bar{x}_i = x_i + \frac{t}{1} C(x_i) + \frac{t^2}{1\cdot 2} C(C(x_i)) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n).$$

Denken wir uns hierin die Grössen $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ als willkürliche Parameter, und lassen wir diese Parameter alle möglichen Werthe annehmen, so erhalten wir eine ganze *Schaar von eingliedrigen Gruppen.* Die endlichen Transformationen dieser Schaar von eingliedrigen Gruppen werden durch die oben geschriebenen Gleichungen mit den $r+1$ Parametern $\lambda_1 \cdots \lambda_r, t$ dargestellt; da aber diese $r+1$ Parameter nur in den r Verbindungen $\lambda_1 t, \cdots \lambda_r t$ vorkommen, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit das t gleich 1 setzen und erhalten daher als analytische Darstellung der betreffenden Transformationen die Gleichungen:

$$(9) \qquad \bar{x}_i = x_i + \sum_1^r {}_k\, \lambda_k \xi_{ki} + \sum_{kj}^{1\ldots r} \frac{\lambda_k \lambda_j}{1\cdot 2} X_k(\xi_{ji}) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n)$$

mit den r Parametern $\lambda_1 \cdots \lambda_r$.

Wie viele verschiedene Transformationen werden nun durch diese Gleichungen dargestellt? oder was dasselbe ist: wie viele unter den r Parametern $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ sind wesentlich?

Sind die r infinitesimalen Transformationen $X_1(f) \cdots X_r(f)$ nicht von einander unabhängig, so sind auch die r Parameter $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ in den Gleichungen (9) nicht alle wesentlich. Es seien nämlich etwa blos $X_1(f) \cdots X_m(f)$ $(m < r)$ von einander unabhängig, während $X_{m+1}(f) \cdots X_r(f)$ sich linear aus $X_1(f) \cdots X_m(f)$ ableiten lassen:

$$X_{m+j}(f) = \sum_1^m {}_\mu\, c_{j\mu} X_\mu(f) \quad (j = 1 \cdots r - m).$$

Dann haben wir

$$C(f) = \sum_1^r {}_k\, \lambda_k X_k(f) = \sum_1^m {}_\mu \left\{ \lambda_\mu + \sum_1^{r-m} {}_j\, \lambda_{m+j} \cdot c_{j\mu} \right\} \cdot X_\mu(f),$$

also schrumpft die Zahl der willkürlichen Parameter in dem Ausdrucke $C(f)$ auf m zusammen und damit zugleich auch die Zahl der willkürlichen Parameter in (9).

Wenn somit unter den r infinitesimalen Transformationen

$$X_1(f) \cdots X_r(f)$$

nur m von einander unabhängige vorhanden sind, so sind in den Gleichungen (9) von den r Parametern $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ höchstens m wesentlich.

Wir wollen daher von jetzt ab voraussetzen, dass die infinitesimalen Transformationen $X_1(f) \cdots X_r(f)$ von einander unabhängig sind.

Unter dieser Voraussetzung sind nun die Parameter $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ in den Transformationsgleichungen (9) wirklich wesentlich; das werden wir jetzt beweisen.

Es ist jedoch zweckmässig, einen gewissen einfachen Fall für sich zu erledigen, den Fall nämlich, dass die Zahl r nicht grösser als n ist und dass dabei nicht alle r-reihigen Determinanten der Matrix

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} \xi_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1} & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{rn} \end{vmatrix}$$

identisch verschwinden. In diesem besonderen Falle verschwinden sicher nicht alle r-reihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \overline{x}_1}{\partial \lambda_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \overline{x}_n}{\partial \lambda_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \overline{x}_1}{\partial \lambda_r} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \overline{x}_n}{\partial \lambda_r} \end{vmatrix}$$

identisch; denn für das specielle Werthsystem $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$ geht diese Matrix in die oben geschriebene über, deren r-reihige Determinanten nach Voraussetzung nicht alle identisch Null sind.

Wenn wir daher die Parameter $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ aus den Gleichungen (9) eliminiren, so erhalten wir gerade $n - r$ und nicht mehr von einander unabhängige Relationen zwischen den x und den $\overline{x}$ allein. Daraus aber geht hervor, dass die Parameter $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ unter den gemachten besonderen Voraussetzungen wirklich wesentlich sind; denn wären sie es nicht, liesse sich also ihre Zahl durch Einführung von geeigneten neuen Parametern reduciren, so würden sich aus den Gleichungen (9) sicher mehr als $n - r$ von den Parametern freie Gleichungen herleiten lassen, was ausgeschlossen ist.

Nunmehr zur Betrachtung des allgemeinen Falles, der sich auf den eben erledigten besonderen zurückführen lässt.

Zu diesem Zwecke schreiben wir uns die Transformationen (9) r verschiedene Male auf und zwar in r verschiedenen Systemen von Veränderlichen:

$$x_1^{(\mu)} \cdots x_n^{(\mu)} \qquad (\mu = 1 \cdots r),$$

wir betrachten also die Schaar der Transformationen:

$$(11) \qquad \overline{x}_i^{\mu} = x_i^{(\mu)} + \sum_1^r {}_k \, \lambda_k \cdot \xi_{ki}^{(\mu)} + \sum_{kj}^{1 \ldots r} \frac{\lambda_k \lambda_j}{1 \cdot 2} \cdot X_k^{(\mu)}(\xi_{ji}^{(\mu)}) + \cdots$$

$$(i = 1 \cdots n, \ \mu = 1 \cdots r),$$

in welchen

$$\xi_{ki}(x_1^{(\mu)} \cdots x_n^{(\mu)}) = \xi_{ki}^{(\mu)}, \quad \sum_1^n{}_\nu \xi_{k\nu}^{(\mu)} \frac{\partial f}{\partial x_\nu^{(\mu)}} = X_k^{(\mu)}(f)$$

gesetzt ist.

Die Schaar der Transformationen (11) enthält offenbar genau so viel wesentliche Parameter als die Schaar (9).

Wenn es uns nun gelingt nachzuweisen, dass nicht alle r-reihigen Determinanten der Matrix

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} \xi'_{11} & \cdot & \cdot & \xi'_{1n} & \xi''_{11} & \cdot & \cdot & \xi''_{1n} & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{11}^{(r)} & \cdot & \cdot & \xi_{1n}^{(r)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi'_{r1} & \cdot & \cdot & \xi'_{rn} & \xi''_{r1} & \cdot & \cdot & \xi''_{rn} & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{r1}^{(r)} & \cdot & \cdot & \xi_{rn}^{(r)} \end{vmatrix}$$

identisch verschwinden, so ist damit gezeigt, dass die Schaar der Transformationen (11) sich unter den vorhin besprochenen speciellen Fall unterordnet und dass ihre r Parameter $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ sämmtlich wesentlich sind. Daraus folgt dann sofort, dass auch die r Parameter $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ in den Gleichungen (9) wesentlich sind.

Wir können uns offenbar auf den Fall beschränken, dass alle r-reihigen Determinanten der Matrix (10) identisch Null sind. Verschwänden nun auch alle r-reihigen Determinanten der Matrix (12) identisch, so könnten die nr linearen Gleichungen

$$(13) \qquad \vartheta_1 \cdot \xi_{1i}^{(\mu)} + \cdots + \vartheta_r \cdot \xi_{ri}^{(\mu)} = 0 \qquad (i = 1 \cdots n,\ \mu = 1 \cdots r)$$

durch r nicht sämmtlich verschwindende Functionen $\vartheta_1 \cdots \vartheta_r$ der nr Veränderlichen $x_i^{(\mu)}$ befriedigt werden. Es lässt sich zeigen, dass dies unmöglich ist.

Wir wählen $\mu = 1$ und erhalten so aus (13) für $\vartheta_1 \cdots \vartheta_r$ die n Gleichungen

$$(14) \qquad \vartheta_1 \cdot \xi_{1i}^{(1)} + \cdots + \vartheta_r \cdot \xi_{ri}^{(1)} = 0 \qquad (i = 1 \cdots n),$$

welche sicher nicht alle identisch bestehen. Dann ist zunächst klar, dass nicht jede der n analogen Gleichungen

$$(15) \qquad \vartheta_1 \cdot \xi_{1i}^{(2)} + \cdots + \vartheta_r \cdot \xi_{ri}^{(2)} = 0 \qquad (i = 1 \cdots n)$$

eine Folge von (14) sein kann; sonst liessen sich ja die Gleichungen (15) durch Functionen $\vartheta_1 \cdots \vartheta_r$ befriedigen, welche von $x_1^{(2)} \cdots x_n^{(2)}$ frei sind, und es wären daher die r infinitesimalen Transformationen $X_1^{(2)}(f) \cdots X_r^{(2)}(f)$ nicht von einander unabhängig. Mithin liefern (14) und (15) zusammengenommen mindestens zwei unabhängige Gleichungen für $\vartheta_1 \cdots \vartheta_r$. So kann man fortfahren und erkennt schliesslich, dass es unter den nr Gleichungen (13) gerade r von einander unabhängige giebt, dass also aus (13) folgt: $\vartheta_1 = 0, \cdots \vartheta_r = 0$.

Damit ist bewiesen, dass nicht alle r-reihigen Determinanten der Matrix (12) identisch Null sind. Wir können daher ohne Weiteres das folgende Theorem aussprechen:

Theorem 8. *Sind die r infinitesimalen Transformationen*

$$X_k(f) = \sum_1^n {}^i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

von einander unabhängig, sind ferner $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ willkürliche Parameter, so bildet der Inbegriff aller eingliedrigen Gruppen $\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$ eine Schaar von Transformationen:

$$\bar{x}_i = x_i + \sum_1^r {}^k\, \lambda_k \xi_{ki} + \sum_{kj}^{1 \ldots r} \frac{\lambda_k \lambda_j}{1 \cdot 2} X_k(\xi_{ji}) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n),$$

in welcher die r Parameter $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ sämmtlich wesentlich sind, also eine Schaar von ∞^r verschiedenen Transformationen.

Im Grunde haben wir aber mehr bewiesen, als in diesem Theoreme ausgesprochen ist. Wir haben allerdings vorausgesetzt, dass die Gleichungen (9) die endlichen Transformationen einer Schaar von eingliedrigen Gruppen darstellen, aber wir haben diese Voraussetzung nur insoweit benutzt, als durch dieselbe in (9) die Glieder erster Ordnung in $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ bestimmt sind. Welche Form die Glieder von zweiter und höherer Ordnung in $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ haben, das ist bei unserer Untersuchung über die Schaar der Transformationen (9) gar nicht benutzt worden. Unser Ergebniss, dass die Parameter $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ in den Gleichungen (9) wesentlich sind, bleibt daher bestehen, auch wenn über die Beschaffenheit der Glieder von zweiter und höherer Ordnung in $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ gar keine Voraussetzung gemacht wird. Das Theorem 8 lässt sich demnach verallgemeinern, wie folgt:

Satz 4. *Enthält eine Schaar von Transformationen die r willkürlichen Parameter $e_1 \cdots e_r$ und besitzen ihre Gleichungen, wenn sie nach Potenzen von $e_1 \cdots e_r$ entwickelt werden, die Form:*

$$x_i' = x_i + \sum_1^r {}^k\, e_k \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n),$$

wo die weggelassenen Glieder in $e_1 \cdots e_r$ von zweiter und höherer Ordnung sind, haben endlich die Functionen $\xi_{ki}(x)$ die Eigenschaft, dass die r aus ihnen gebildeten infinitesimalen Transformationen

$$X_k(f) = \sum_1^n {}^i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

von einander unabhängig sind, so stellen jene Transformationsgleichungen ∞^r *verschiedene Transformationen dar oder was dasselbe ist: die r Parameter* $e_1 \cdots e_r$ *sind wesentlich.*

Späterer Anwendungen wegen möge hier noch der folgende Satz seine Stelle finden; derselbe folgt direkt daraus, dass in der Matrix (12) nicht alle r-reihigen Determinanten verschwinden.

Satz 5. *Sind die r infinitesimalen Transformationen*

$$X_k(f) = \sum_1^n {}^i \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

von einander unabhängig, sind ferner

$$x_1^{(\mu)} \cdots x_n^{(\mu)} \quad (\mu = 1 \cdots r)$$

r verschiedene Systeme von je n Veränderlichen, wird endlich zur Abkürzung gesetzt:

$$X_k^{(\mu)}(f) = \sum_1^n {}^i \xi_{ki}(x_1^{(\mu)} \cdots x_n^{(\mu)}) \frac{\partial f}{\partial x_i^{(\mu)}},$$

so erfüllen die r infinitesimalen Transformationen

$$W_k(f) = \sum_1^r {}^\mu X_k^{(\mu)}(f) \quad (k = 1 \cdots r)$$

in den nr Veränderlichen $x_i^{(\mu)}$ keine Relation von der Form

$$\sum_1^r {}^k \chi_k(x_1' \cdots x_n' \cdots\cdots x_1^{(r)} \cdots x_n^{(r)}) \cdot W_k(f) = 0.$$

Kapitel 4.

Die Erzeugung der r-gliedrigen Gruppen durch eingliedrige Gruppen.

Stellen die Gleichungen

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n) \tag{1}$$

eine r-gliedrige Gruppe dar, so bestehen nach Theorem 3, Seite 33 gewisse Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r {}^j \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') \tag{2}$$

$$(i = 1 \cdots n,\ k = 1 \cdots r),$$

welche bei der Substitution $x_1' = f_1(x, a), \cdots x_n' = f_n(x, a)$ zu Identitäten werden. Dabei haben die Functionen $\psi_{jk}(a)$ die Eigenschaft, dass ihre Determinante nicht identisch verschwindet. Die $\xi_{ji}(x')$ ihrerseits sind so beschaffen, dass es keine von $x_1' \cdots x_n'$ unabhängigen Grössen $e_1 \cdots e_r$ giebt, welche die n Gleichungen

$$\sum_1^r {}^j e_j \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') = 0 \quad (i = 1 \cdots n)$$

befriedigen, ohne sämmtlich zu verschwinden. Diese Eigenschaft der $\xi_{ji}(x')$ können wir nach der auf S. 61 eingeführten Ausdrucksweise kürzer so ausdrücken: *die r infinitesimalen Transformationen*

$$X_k(f) = \sum_1^n {}^i \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

sind von einander unabhängig. Es lässt sich daher jetzt das Theorem 3, S. 33 kurz so aussprechen:

Satz 1. *Zu jeder r-gliedrigen Gruppe $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ stehen r unabhängige infinitesimale Transformationen*

$$X_k(f) = \sum_1^n {}^i \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

in solcher Beziehung, dass Relationen von der Form

$$(2) \qquad \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r {}^j \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n')$$

bestehen, welche sich nach den ξ_{ji} auflösen lassen:

$$\xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') = \sum_1^r {}^k \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial x_i'}{\partial a_k}.$$

Geradeso wie bei den eingliedrigen Gruppen können wir nun auch bei den r-gliedrigen verfahren. Wir können die Differentialgleichungen (2) benutzen, um aus denselben durch Integration eine andere Darstellung der r-gliedrigen Gruppe herzuleiten und auf diese Weise allgemeine Eigenschaften der r-gliedrigen Gruppen zu finden.

Es empfiehlt sich jedoch, dass wir uns zunächst auf einen etwas allgemeineren Standpunkt stellen. Die Eigenschaften, welche wir auf dem angegebenen Wege finden würden, kommen nämlich auch gewissen Gleichungensystemen von der Form (1) zu, welche keine Gruppen darstellen.

§ 17.

Wir wollen bis auf Weiteres von der Forderung absehen, dass die Gleichungen $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ eine r-gliedrige Gruppe darstellen sollen. Vielmehr wollen wir von den Gleichungen (1) blos voraussetzen: *erstens*, dass sie eine Schaar von ∞^r verschiedenen Transformationen darstellen, dass also die r Parameter $a_1 \cdots a_r$ sämmtlich wesentlich sind, und *zweitens*, dass sie Differentialgleichungen von der besonderen Form (2) befriedigen.

Zunächst werden wir zeigen, dass auch unter den jetzigen allgemeineren Voraussetzungen die Functionen $\psi_{jk}(a)$ und $\xi_{ji}(x')$ die oben angegebenen Eigenschaften besitzen.

Verschwände nämlich die Determinante der $\psi_{jk}(a)$ identisch, so liessen sich die $\xi_{ji}(x')$ aus den Gleichungen (2) wegschaffen und wir erhielten n Gleichungen von der Form:

$$\sum_1^r \chi_k(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = 0 \quad (i = 1 \cdots n),$$

wo die χ_k nicht von dem Index i abhingen. Das aber ist nach dem Satze 1, S. 13 unmöglich, weil die Parameter $a_1 \cdots a_r$ in den Gleichungen (1) alle wesentlich sind. Folglich ist die Determinante der $\psi_{jk}(a)$ nicht identisch Null, so dass die Gleichungen (2) nach den $\xi_{ji}(x')$ auflösbar sind und ergeben:

$$(3) \quad \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') = \sum_1^r {}_k\, \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} \quad (j = 1 \cdots r,\ i = 1 \cdots n).$$

Verhalten sich die Functionen $\psi_{jk}(a)$ in der Umgebung irgend eines Werthsystems $a_1^0 \cdots a_r^0$ regulär und ist die Determinante $\Sigma \pm \psi_{11} \cdots \psi_{rr}$ auch für $a_k = a_k^0$ von Null verschieden, so verhalten sich auch die $\alpha_{jk}(a)$ in der Umgebung von $a_1^0 \cdots a_r^0$ regulär und ihre Determinante verschwindet ebenfalls für $a_k = a_k^0$ nicht. Wir werden im Folgenden annehmen, dass das Werthsystem $a_k = a_k^0$ so gewählt ist, dass die $\psi_{jk}(a)$ und folglich auch die $\alpha_{jk}(a)$ die soeben besprochenen Eigenschaften besitzen.

Es bliebe noch übrig nachzuweisen, dass es nicht möglich ist, die n Gleichungen

$$\sum_1^r {}_j\, e_j \xi_{ji}(x') = 0 \quad (i = 1 \cdots n)$$

durch r von den x' unabhängige Grössen $e_1 \cdots e_r$ zu befriedigen, welche nicht sämmtlich verschwinden. Doch würde dieser Beweis auf eine Wiederholung dessen hinauskommen, was wir in Kap. 2, S. 33 gesagt haben, wir wollen uns deshalb nicht dabei aufhalten.

Jedenfalls steht fest, dass die $\psi_{jk}(a)$ und die $\xi_{ji}(x')$ die oben angegebenen Eigenschaften auch jetzt noch besitzen.

Wir werden jetzt nachweisen, dass die Schaar $x_i' = f_i(x, a)$ vollständig bestimmt ist, wenn erstens die Differentialgleichungen (2) gegeben sind, denen diese Schaar genügt, und wenn ausserdem noch diejenige Transformation der Schaar bekannt ist, welche den Werthen $a_1^0 \cdots a_r^0$ der Parameter a_k entspricht.

Von grossem Vortheil ist es bei dieser Untersuchung, dass wir keinerlei Ueberlegungen über die Integrabilität der Differentialgleichungen (2) oder (3) anzustellen brauchen. Denn wir kennen ja schon ein System Lösungen dieser Differentialgleichungen, nämlich die $x_i' = f_i(x, a)$.

Indem wir nun die Differentialgleichungen (2) unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $x_i' = f_i(x, a^0)$ durch eine specielle Methode integriren, werden wir für die x_i' *ganz bestimmte* Functionen der x_i und der a_k erhalten. Es ist dann selbstverständlich, dass diese Functionen mit den Functionen $f_i(x, a)$ identisch sind.

Bei der Ausführung dieser Operationen finden wir aber noch mehr; wir erkennen nämlich, dass die Schaar der Transformationen $x_i' = f_i(x, a)$ durch Einführung neuer Parameter an Stelle der a_k auf eine bemerkenswerthe Form gebracht werden kann, aus welcher sich wichtige Schlüsse über die Beschaffenheit der Schaar ziehen lassen.

Zur Durchführung der verlangten Integration bedienen wir uns eines Kunstgriffes. Wir multipliciren (3) mit λ_j, summiren nach j von 1 bis r und erhalten so die Gleichungen

$$(4) \qquad \sum_1^r {}_k \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} \sum_1^r {}_j \lambda_j \alpha_{jk}(a) = \sum_1^r {}_j \lambda_j \xi_{ji}(x') \qquad (i = 1 \cdots n).$$

Jetzt bestimmen wir $a_1 \cdots a_r$ aus dem simultanen Systeme

$$(5) \qquad \frac{d a_k}{dt} = \sum_1^r {}_j \lambda_j \alpha_{jk}(a) \qquad (k = 1 \cdots r)$$

als Functionen einer Hülfsveränderlichen t und der Grössen $\lambda_1 \cdots \lambda_r$, indem wir die Anfangsbedingung $a_k = a_k^0$ für $t = 0$ hinzufügen. Dabei erhalten wir gewisse Reihenentwickelungen

$$(6) \qquad a_k = a_k^0 + \frac{t}{1} \sum_1^r {}_j \lambda_j \alpha_{jk}(a^0) + \cdots \qquad (k = 1 \cdots r),$$

auf deren einfaches Bildungsgesetz wir nicht näher einzugehen brauchen. Doch wollen wir bemerken, dass die λ_j darin nur in den Verbindungen $w_1 = \lambda_1 t, \cdots w_r = \lambda_r t$ vorkommen. Daraus folgt nämlich, dass die a_k auch als Functionen der neuen Veränderlichen $w_1 \cdots w_r$ angesehen werden können. Da ausserdem unter den gemachten Voraussetzungen die Determinante $\Sigma \pm \alpha_{11}(a^0) \cdots \alpha_{rr}(a^0)$ nicht verschwindet, so sind die a_k unabhängige Functionen der w_k, und es sind auch umgekehrt $w_1 \cdots w_r$ als Functionen von $a_1 \cdots a_r$ darstellbar und verhalten sich als solche in der Umgebung von $a_1^0 \cdots a_r^0$ regulär. Zwischen $a_1 \cdots a_r$ und $w_1 \cdots w_r$ besteht demnach in einer gewissen Umgebung von $a_1^0 \cdots a_r^0$ bezüglich $w_1 = 0 \cdots w_r = 0$ eine eindeutig umkehrbare Beziehung. Wenn wir uns daher auf solche Transformationen $x_i' = f_i(x, a)$ beschränken, deren Parameter in einer gewissen Umgebung von a_k^0 liegen, so dürfen wir ohne Weiteres an Stelle der a_k die w_k als Parameter einführen.

Wir werden übrigens die a_k im Folgenden meistens als Functionen der Hülfsveränderlichen t und der Grössen $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ betrachten. Indem wir diese Werthe von $a_1 \cdots a_r$ in die Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ einsetzen, erhalten wir auch $x_1' \cdots x_n'$ dargestellt als Functionen von t und von $\lambda_1 \cdots \lambda_r$. Es ist nun sehr leicht, gewisse Differentialgleichungen anzugeben, denen $x_1' \cdots x_n'$ als Functionen von t genügen. Wir haben ja:

$$\frac{dx_i'}{dt} = \sum_1^r {}_k \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} \frac{da_k}{dt}$$

und wenn wir das simultane System (5) benutzen, dem die a_k genügen, kommt:

$$\frac{dx_i'}{dt} = \sum_1^r {}_k \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} \cdot \sum_1^r {}_j \lambda_j \alpha_{jk}(a).$$

Mit Hülfe der Gleichungen (4) können wir jetzt $a_1 \cdots a_r$ ganz wegschaffen und finden

$$\frac{dx_i'}{dt} = \sum_1^r {}_j \lambda_j \xi_{ji}(x') \quad (i = 1 \cdots n). \tag{7}$$

Wenn wir also in den Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ die Grössen $a_1 \cdots a_r$ in der bekannten Weise durch t und $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ ausdrücken, so erhalten wir für $x_1' \cdots x_n'$ gewisse Functionen von t, welche das simultane System gewöhnlicher Differentialgleichungen (7) befriedigen. Ausser diesen Differentialgleichungen befriedigen die x_i' natürlich noch gewisse Anfangsbedingungen; für a_k^0 verwandelten sich ja die $f_i(x, a)$ in $f_i(x, a^0)$, da nun die a_k für $t = 0$ die Werthe a_k^0 annehmen, so kommen die betreffenden Anfangsbedingungen auf das folgende hinaus: es wird $x_i' = f_i(x, a^0)$ für $t = 0$.

Zusammen mit den angegebenen Anfangsbedingungen bestimmen die Differentialgleichungen (7) offenbar die x_i' vollständig. Um die betreffenden Ausdrücke für die x_i' angeben zu können, brauchen wir blos irgend ein vollständiges System Integralgleichungen des simultanen Systems (7). Ist

$$\Omega_i(x_1' \cdots x_n', \lambda_1 t, \cdots \lambda_r t) = C_i \quad (i = 1 \cdots n)$$

ein solches, so ergiebt die Anfangsbedingung $x_i' = f_i(x, a^0)$ für $t = 0$ sofort die Werthe der C_i, also bekommen wir zur Bestimmung der x_i' die Gleichungen:

$$(8) \quad \Omega_i(x_1' \cdots x_n', \lambda_1 t, \cdots \lambda_r t) = \Omega_i(f_1(x, a^0) \cdots f_n(x, a^0), 0 \cdots 0)$$
$$(i = 1 \cdots n).$$

Durch Auflösung erhalten wir hieraus für $x_1' \cdots x_n'$ *ganz bestimmte Functionen* von $x_1 \cdots x_n$, $\lambda_1 t = w_1, \cdots \lambda_r t = w_r$:

$$(8') \qquad x_i' = V_i(x_1 \cdots x_n, \lambda_1 t, \cdots \lambda_r t) \quad (i = 1 \cdots n).$$

Also sind die V_i diejenigen Functionen, in welche sich die $f_i(x, a)$ verwandeln, wenn wir $a_1 \cdots a_r$ in der bekannten Weise durch $\lambda_1 t, \cdots \lambda_r t$ ausdrücken. Ersetzen wir daher umgekehrt in den V_i die $\lambda_k t = w_k$ durch ihre Werthe als Functionen von $a_1 \cdots a_r$, so verwandeln sich die Gleichungen $x_i' = V_i$ wieder in die ursprünglichen Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$.

Die Gleichungen (8′) sind somit nur eine andere Form der Gleichungen (1) und da die Beziehung zwischen $a_1 \cdots a_r$ und $w_1 = \lambda_1 t, \cdots w_r = \lambda_r t$ in einer gewissen Umgebung von $a_1^0 \cdots a_r^0$ bezüglich von $t = 0$ eindeutig umkehrbar ist, so sind die Gleichungen (8′) in einer gewissen Umgebung von $t = 0$ vollständig mit den Gleichungen (1) äquivalent, anders ausgedrückt: die Gleichungen (8′) stellen alle Transformationen (1) dar, deren Parameter $a_1 \cdots a_r$ in einer gewissen Umgebung von $a_1^0 \cdots a_r^0$ liegen.

Nun aber kann, wie aus den mit (8′) äquivalenten Gleichungen (8) hervorgeht, jede Transformation (8′) erhalten werden, wenn man zwei gewisse Transformationen nach einander ausführt: *erstens* die Transformation

$$\bar{x}_i = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1^0 \cdots a_r^0) \quad (i = 1 \cdots n),$$

also diejenige Transformation der Schaar (1), welche die Parameter $a_1^0 \cdots a_r^0$ besitzt; ferner *zweitens* die Transformation

$$\Omega_i(x_1' \cdots x_n', \lambda_1 t, \cdots \lambda_r t) = \Omega_i(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n, 0 \cdots 0) \quad (i = 1 \cdots n).$$

Nehmen wir noch hinzu, dass diese letzten Gleichungen das simultane System (7) und ausserdem noch die Anfangsbedingungen: $x_i' = \bar{x}_i$ für $t = 0$ befriedigen, so erkennen wir, dass die Gleichungen

$$\Omega_i(x', \lambda t) = \Omega_i(\bar{x}, 0)$$

nichts anderes darstellen, als die Transformationen einer gewissen eingliedrigen Gruppe, eben derjenigen, welche durch das simultane System (7) bestimmt ist. Die infinitesimale Transformation, von welcher die betreffende eingliedrige Gruppe erzeugt ist, hat offenbar die Gestalt:

$$(9) \qquad \sum_1^n {}^i \left\{ \sum_1^r {}^j \lambda_j \xi_{ji}(x) \right\} \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Damit ist eine allgemeine Eigenschaft gefunden, die allen Schaaren von ∞^r Transformationen $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ gemeinsam ist, welche Differentialgleichungen von der Form (2) befriedigen. Wir können diese Eigenschaft folgendermassen aussprechen:

Theorem 9. *Sind in den Transformationsgleichungen*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

die r Parameter $a_1 \dots a_r$ sämmtlich wesentlich und bestehen ausserdem gewisse Differentialgleichungen von der Form:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r {}^j \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') \quad (i = 1 \cdots n,\ k = 1 \cdots r),$$

welche bei der Substitution $x_1' = f_1(x, a), \cdots x_n' = f_n(x, a)$ zu Identitäten werden, so kann jede Transformation $x_i' = f_i(x, a)$, deren Parameter $a_1 \cdots a_r$ in einer gewissen Umgebung von $a_1^0 \cdots a_r^0$ liegen, dadurch erhalten werden, dass man zuerst die Transformation

$$\bar{x}_i = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1^0 \cdots a_r^0) \quad (i = 1 \cdots n)$$

ausführt und sodann eine gewisse Transformation

$$x_i' = \omega_i(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n)$$

einer eingliedrigen Gruppe, deren infinitesimale Transformation die Form

$$\sum_1^r {}^k \lambda_k \sum_1^n {}^i \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

hat, unter $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ gewisse Constanten verstanden.

In diesem Theorem bedeutet $a_1^0 \cdots a_r^0$ ein beliebiges Werthsystem, für welches sich die ψ_{jk} regulär verhalten, während ihre Determinante nicht verschwindet.

Beispiel. Es ist ganz nützlich, an einem Beispiele zu zeigen, dass Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ mit r wesentlichen Parametern $a_1 \dots a_r$ sehr wohl Differentialgleichungen von der Form (2) erfüllen können, ohne eine Gruppe darzustellen.

Die ∞^2 Transformationen

$$x_1' = x_1 + x_2 + a_1, \quad x_2' = x_1 - x_2 + a_2$$

bilden offenbar keine zweigliedrige Gruppe; wir finden aber:

$$\frac{\partial x_1'}{\partial a_1} = 1, \quad \frac{\partial x_1'}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial x_2'}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial x_2'}{\partial a_2} = 1,$$

also genügen unsere ∞^2 Transformationen dennoch Differentialgleichungen von der Form (2), wenn wir nämlich den Functionen $\xi_{ji}(x')$, $\psi_{jk}(a)$ die Werthe ertheilen:

$$\xi_{11} = 1, \quad \xi_{12} = 0, \quad \xi_{21} = 0, \quad \xi_{22} = 1.$$
$$\psi_{11} = 1, \quad \psi_{21} = 0, \quad \psi_{12} = 0, \quad \psi_{22} = 1.$$

§ 18.

Wenden wir nunmehr die vorstehenden allgemeinen Entwickelungen auf den besonderen Fall an, dass die ∞^r Transformationen $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ eine r-gliedrige Gruppe bilden.

Stellen die Gleichungen (1) eine r-gliedrige Gruppe dar, so bestehen nach Theorem 3 immer Differentialgleichungen von der Form (2); wir brauchen also diese Forderung nicht besonders auszusprechen.

Weiter bemerken wir, dass alle infinitesimalen Transformationen von der Form (9) sich aus den r folgenden:

$$X_k(f) = \sum_1^n{}^i \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

linear ableiten lassen, denn in dem Ausdrucke

$$\sum_1^r{}^k \lambda_k X_k(f)$$

sind alle infinitesimalen Transformationen (9) enthalten. Die infinitesimalen Transformationen $X_1(f) \cdots X_r(f)$ sind dabei, wie wir schon in der Einleitung dieses Kapitels betont haben, von einander unabhängig.

Demnach können wir über beliebige r-gliedrige Gruppen das folgende Theorem aussprechen:

Theorem 10. *Zu jeder r-gliedrigen Gruppe*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

gehören r unabhängige infinitesimale Transformationen

$$X_k(f) = \overset{n}{\underset{1}{}}{}^i \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r),$$

welche zu den endlichen Transformationen der Gruppe in folgender Beziehung stehen: ist $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1^0 \cdots a_r^0)$ *irgend* *eine Transformation der Gruppe, so kann jede Transformation $x_i' = f_i(x, a)$, deren Parameter in einer gewissen Umgebung von $a_1^0 \cdots a_r^0$ liegen, dadurch erhalten werden, dass man zuerst die Transformation $\bar{x}_i = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1^0 \cdots a_r^0)$ ausführt und sodann eine gewisse Transformation $x_i' = \omega_i(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n)$ einer eingliedrigen Gruppe, deren infinitesimale Transformation die Form $\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$ besitzt, wo $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ gewisse passend gewählte Constanten bedeuten.*

Wissen wir nicht blos, dass die Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ eine r-gliedrige Gruppe darstellen, sondern auch, dass diese Gruppe die identische Transformation enthält, und endlich noch, dass die Parameter a_k^0 der identischen Transformation ein Werthsystem im Bereiche $((a_k))$ darstellen, so können wir noch mehr aussagen. Wählen wir nämlich als Transformation $\bar{x}_i = f_i(x, a^0)$ insbesondere die identische, so erkennen wir sofort, dass die Transformationen unserer Gruppe keine andern sind, als die Transformationen derjenigen eingliedrigen Gruppen, welche von den infinitesimalen Transformationen

$$\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$$

erzeugt werden. Setzen wir daher zur Abkürzung

$$\sum_1^r {}^k\, \lambda_k X_k(f) = C(f),$$

so stellen die Gleichungen

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1} C(x_i) + \frac{t^2}{1\,.\,2} C(C(x_i)) + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

die ∞^r Transformationen der Gruppe dar. Dass hier $r + 1$ Parameter: $\lambda_1 \cdots \lambda_r$, t auftreten, ist blos scheinbar, denn dieselben kommen ja nur in den r Verbindungen $\lambda_1 t, \cdots \lambda_r t$ vor. Wir können daher ruhig t gleich 1 setzen. Erinnern wir uns ausserdem der in Kapitel 3, S. 52, Gl. (7) gegebenen Darstellung einer eingliedrigen Gruppe durch eine einzige Gleichung, so erkennen wir, dass sich die Gleichungen unserer r-gliedrigen Gruppe in die einzige Gleichung

$$f(x_1' \cdots x_n') = f(x_1 \cdots x_n) + C(f) + \frac{1}{1\,.\,2} C(C(f)) + \cdots$$

zusammenfassen lassen. Dass es möglich ist, die Transformationen der Gruppe paarweise als inverse zusammenzuordnen, bedarf kaum der Erwähnung.

Die vorstehenden Ergebnisse über die r-gliedrigen Gruppen mit identischer Transformation können wir kurz folgendermassen aussprechen:

Theorem 11. *Enthält eine r-gliedrige Gruppe*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

die identische Transformation, so lassen sich ihre ∞^r Transformationen derart in ∞^{r-1} Schaaren von je ∞^1 anordnen, dass jede dieser ∞^{r-1} Schaaren aus allen Transformationen einer eingliedrigen Gruppe mit der identischen Transformation besteht. Um diese eingliedrigen Gruppen zu finden, bilde man die bekannten Gleichungen

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r {}^j\, \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') \quad (i = 1 \cdots n,\ k = 1 \cdots r),$$

welche bei der Substitution $x_i' = f_i(x, a)$ identisch befriedigt werden, man setze ferner

$$\sum_1^n {}^i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = X_k(f) \quad (k = 1 \cdots r),$$

dann stellt der Ausdruck

$$\sum_1^r {}^k\, \lambda_k X_k(f)$$

mit den r willkürlichen Parametern $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ die infinitesimalen Transformationen jener ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen dar, und die endlichen Transformationen derselben haben die Form

$$x_i' = x_i + \sum_1^r {}^k\, \lambda_k \xi_{ki}(x) + \sum_{kj}^{1 \ldots r} \frac{\lambda_k \lambda_j}{1 \cdot 2} X_k(\xi_{ji}) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n).$$

Der Inbegriff aller dieser endlichen Transformationen ist identisch mit dem Inbegriff aller Transformationen der Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$. Die Transformationen dieser Gruppe lassen sich überdies paarweise als inverse zusammenordnen.

§ 19.

Enthält überhaupt eine r-gliedrige Gruppe alle Transformationen einer eingliedrigen Gruppe und ist diese eingliedrige Gruppe in dem früher besprochenen Sinne von der infinitesimalen Transformation $X(f)$ erzeugt, so sagen wir, dass die r-gliedrige Gruppe *die infinitesimale Transformation $X(f)$ enthält.* Nun haben wir eben gesehen, dass jede r-gliedrige Gruppe mit der identischen Transformation auf die Form

$$f(x_1' \cdots x_n') = f(x_1 \cdots x_n) + \sum_1^r {}^k \lambda_k X_k(f)$$
$$+ \frac{1}{1\,.\,2} \sum_{kj}^{1\ldots r} \lambda_k \lambda_j \cdot X_k(X_j(f)) + \cdots$$

gebracht werden kann, wo $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ willkürliche Constanten bedeuten, während mit $X_1(f) \ldots X_r(f)$ von einander unabhängige infinitesimale Transformationen bezeichnet werden. Also können wir sagen, *dass jede solche r-gliedrige Gruppe r unabhängige infinitesimale Transformationen enthält.*

Die Vermuthung liegt sehr nahe, dass eine r-gliedrige Gruppe nicht mehr als r unabhängige infinitesimale Transformationen enthalten kann.

Um über diesen Punkt ins Klare zu kommen, wollen wir uns direkt die Frage vorlegen, wann die infinitesimale Transformation

$$Y(f) = \sum_1^n {}^i \eta_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

in der r-gliedrigen Gruppe mit den r unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1(f) \ldots X_r(f)$ enthalten ist.

Gehört $Y(f)$ der betreffenden r-gliedrigen Gruppe an, so gilt dies auch von allen Transformationen

$$x_i' = x_i + \frac{\tau}{1} \eta_i(x) + \frac{\tau^2}{1\,.\,2} Y(\eta_i) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n)$$

der von $Y(f)$ erzeugten eingliedrigen Gruppe. Führen wir daher zuerst eine beliebige Transformation dieser eingliedrigen Gruppe aus und sodann eine beliebige Transformation

$$x_i'' = x_i' + \sum_1^r {}^k \lambda_k \xi_{ki}' + \sum_{kj}^{1\ldots r} \frac{\lambda_k \lambda_j}{1\,.\,2} X_j'(\xi_{ki}') + \cdots$$

der r-gliedrigen Gruppe, so müssen wir eine Transformation erhalten, welche ebenfalls der r-gliedrigen Gruppe angehört. Durch Ausrechnung finden wir, dass diese neue Transformation die Form hat:

$$x_i'' = x_i + \tau\, \eta_i(x) + \sum_1^r {}^k \lambda_k \xi_{ki}(x) + \cdots \quad (i = 1 \cdots n),$$

wo alle weggelassenen Glieder in $\lambda_1 \ldots \lambda_r$, τ von zweiter und höherer Ordnung sind. Diese Transformation muss also bei beliebigen $\lambda_1 \cdots \lambda_r$, τ der r-gliedrigen Gruppe angehören. Wären nun die $r+1$ infinitesimalen Transformationen $X_1(f) \cdots X_r(f)$, $Y(f)$ von einander unabhängig, so würden nach dem Satze 4 in Kap. 3, S. 65 die zuletzt geschriebenen Gleichungen ∞^{r+1} verschiedene Transformationen darstellen; das ist aber unmöglich, denn die r-gliedrige Gruppe enthält ja überhaupt blos ∞^r Transformationen. Folglich sind $X_1(f) \cdots X_r(f)$, $Y(f)$ nicht von einander unabhängig, da aber $X_1(f) \cdots X_r(f)$ es sind, so muss $Y(f)$ sich linear aus $X_1(f) \cdots X_r(f)$ ableiten lassen, also die Form haben:

$$Y(f) = \sum_1^r {}^k\, l_k X_k(f),$$

wo $l_1 \cdots l_r$ geeignete Constanten bedeuten. Das heisst, es gilt der

Satz 2. *Enthält eine r-gliedrige Gruppe die identische Transformation, so enthält sie r unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1(f) \cdots X_r(f)$, und jede in ihr enthaltene infinitesimale Transformation besitzt die Form $\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$, wo $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ Constanten bedeuten.*

Oben sahen wir sogar, dass *jede* infinitesimale Transformation von der Form $\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$ der Gruppe angehört; wir werden daher künftig den Ausdruck $\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$ *mit den r willkürlichen Constanten $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ als die allgemeine infinitesimale Transformation der betreffenden r-gliedrigen Gruppe bezeichnen.*

Aus den vorstehenden Betrachtungen ergiebt sich auch noch der folgende zwar specielle, aber doch wichtige

Satz 3. *Enthält eine r-gliedrige Gruppe die $m \leqq r$ von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1(f) \cdots X_m(f)$, so enthält sie auch jede infinitesimale Transformation von der folgenden Gestalt: $\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_m X_m(f)$, wo $\lambda_1 \cdots \lambda_m$ vollkommen willkürliche Constanten bezeichnen.*

Die bisherigen Untersuchungen geben allerdings die Mittel, um die infinitesimalen Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$ mit der identischen Transformation zu bestimmen. Es ist aber möglich, schneller zum Ziele zu kommen.

Die identische Transformation unserer Gruppe gehöre zu den Parametern: $a_1^0 \cdots a_r^0$ und zwar möge $a_1^0 \cdots a_r^0$ im Bereiche $((a))$ liegen, sodass also die Determinante $\Sigma \pm \psi_{11}(a^0) \cdots \psi_{rr}(a^0)$ sicher von Null verschieden ist. Nun haben wir:

$$\sum_1^r {}^j\, \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}(f_1(x, a) \cdots f_n(x, a)) \equiv \frac{\partial}{\partial a_k} f_i(x, a),$$

also wenn $a_k = a_k^0$ gesetzt wird:

$$\sum_1^r {}^j\, \psi_{jk}(a^0) \cdot \xi_{ji}(x_1 \cdots x_n) \equiv \left[\frac{\partial}{\partial a_k} f_i(x, a)\right]_{a=a^0}.$$

Diese Gleichung multipliciren wir mit $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ und summiren nach i von 1 bis n, dann ergiebt sich:

$$\sum_1^r {}^j \psi_{jk}(a^0) \cdot X_j(f) = \sum_1^n {}^i \left[\frac{\partial}{\partial a_k} f_i(x, a)\right]_{a=a^0} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r).$$

Da nun $X_1(f) \cdots X_r(f)$ unabhängige infinitesimale Transformationen sind, da ausserdem die Determinante der $\psi_{jk}(a^0)$ von Null verschieden ist, so stellen die rechten Seiten der letzten Gleichungen r unabhängige infinitesimale Transformationen unserer Gruppe dar.

Noch etwas einfacher ist das folgende Verfahren.

Man setze $a_k = a_k^0 + \delta t_k$ unter $\delta t_1 \cdots \delta t_r$ beliebige unendlich kleine Grössen verstanden. Dann ergiebt sich:

$$\begin{aligned} x_i' &= f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1^0 + \delta t_1, \cdots a_r^0 + \delta t_r) \\ &= x_i + \sum_1^r {}^k \left[\frac{\partial}{\partial a_k} f_i(x, a)\right]_{a=a^0} \cdot \delta t_k + \cdots, \end{aligned}$$

wo die weggelassenen Glieder von der zweiten und von höherer Ordnung in den δt_k sind. Hier zeigt es sich unmittelbar, dass unsere Gruppe die r infinitesimalen Transformationen

$$x_i' = x_i + \left[\frac{\partial}{\partial a_k} f_i(x, a)\right]_{a=a^0} \cdot \delta t_k \quad (i = 1 \cdots n)$$
$$(k = 1 \cdots r)$$

enthält. Ob allerdings diese r infinitesimalen Transformationen von einander unabhängig sind, das bedarf in jedem einzelnen Falle noch einer besonderen Untersuchung, wenn man nicht von vornherein weiss, dass die Determinante der ψ für $a_k = a_k^0$ nicht verschwindet.

Beispiel. Betrachten wir wiederum die allgemeine projective Gruppe

$$x' = \frac{x + a_1}{a_2 x + a_3}$$

der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit.

Die infinitesimalen Transformationen dieser Gruppe ergeben sich sehr einfach nach der soeben entwickelten Methode. Es ist ja: $a_1^0 = 0,\ a_2^0 = 0,\ a_3^0 = 1$, also bekommen wir:

$$x' = \frac{x + \delta t_1}{x \cdot \delta t_2 + 1 + \delta t_3} = x + \delta t_1 - x \cdot \delta t_3 - x^2 \cdot \delta t_2 + \cdots,$$

das heisst unsere Gruppe enthält die drei von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$X_1(f) = \frac{df}{dx}, \quad X_2(f) = x\frac{df}{dx}, \quad X_3(f) = x^2\frac{df}{dx}.$$

Die allgemeine infinitesimale Transformation unserer Gruppe hat die Form:

$$(\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2)\frac{df}{dx},$$

ihre endlichen Transformationen erhalten wir daher durch Integration der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{dx'}{\lambda_1 + \lambda_2 x' + \lambda_3 x'^2} = dt$$

unter Hinzufügung der Anfangsbedingung: $x' = x$ für $t = 0$.

Um diese Integration durchzuführen, bringen wir die Differentialgleichung auf die Form:

$$\frac{dx'}{x' - \alpha} - \frac{dx'}{x' - \beta} = \gamma \cdot dt,$$

indem wir setzen:

$$\lambda_1 = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha - \beta},\quad \lambda_2 = -\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}\cdot\gamma,\quad \lambda_3 = \frac{\gamma}{\alpha - \beta},$$

also:

$$2\alpha = -\frac{\lambda_2}{\lambda_3} + \frac{\sqrt{\lambda_2^2 - 4\lambda_1\lambda_3}}{\lambda_3},\quad 2\beta = -\frac{\lambda_2}{\lambda_3} - \frac{\sqrt{\lambda_2^2 - 4\lambda_1\lambda_3}}{\lambda_3}$$

$$\gamma = \sqrt{\lambda_2^2 - 4\lambda_1\lambda_3}.$$

Durch Integration finden wir:

$$l(x' - \alpha) - l(x' - \beta) = \gamma t + l(x - \alpha) - l(x - \beta)$$

oder:

$$\frac{x' - \alpha}{x' - \beta} = e^{\gamma t}\cdot\frac{x - \alpha}{x - \beta},$$

und es hat jetzt gar keine Schwierigkeit α, β, γ durch λ_1, λ_2, λ_3 auszudrücken, um auf diese Weise die ∞^3 Transformationen unserer dreigliedrigen Gruppe in ∞^2 eingliedrige Gruppen angeordnet zu bekommen, gerade wie es das Theorem 11 ausspricht.

Eine bekannte einfache Form unserer Gruppe ergiebt sich übrigens, wenn man die beiden Parameter α und β beibehält, für $e^{\gamma t}$ dagegen den neuen Parameter $\bar{\gamma}$ einführt; dann erscheint unsere Gruppe in der Form:

$$\frac{x' - \alpha}{x' - \beta} = \bar{\gamma}\cdot\frac{x - \alpha}{x - \beta}.$$

§ 20.

Wenn $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r)$ eine beliebige r-gliedrige Gruppe ist, so bestehen nach dem Theoreme 5, Kap. 2, S. 45 für jede Function $f(x_1 \cdots x_n)$ gewisse Relationen:

$$(10)\qquad \sum_1^r{}^j\, \vartheta_{jk}(a)\cdot\sum_1^n{}^i\, \xi_{ji}(x)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^r{}^j\, \psi_{jk}(a)\cdot\sum_1^n{}^i\, \xi_{ji}(x')\frac{\partial f}{\partial x_i'} = 0$$

$$(k = 1 \cdots r),$$

die bei der Substitution $x_i' = f_i(x, a)$ zu Identitäten werden.

Bei Anwendung der Abkürzungen

$$X_k(f) = \sum_1^n {}^i\, \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

$$X_k'(f) = \sum_1^n {}^i\, \xi_{ki}(x') \frac{\partial f}{\partial x_i'}$$

können wir die obigen Relationen schreiben:

$$(10') \quad \sum_1^r {}^j\, \vartheta_{jk}(a) \cdot X_j(f) + \sum_1^r {}^j\, \psi_{jk}(a) \cdot X_j'(f) = 0 \quad (k = 1 \cdots r).$$

Erinnern wir uns ferner, dass die Determinante der $\vartheta_{jk}(a)$ ebensowenig identisch verschwindet wie die der $\psi_{jk}(a)$, so erkennen wir, dass sich $X_1'(f) \cdots X_r'(f)$ linear durch $X_1(f) \cdots X_r(f)$ ausdrücken lassen und umgekehrt. Es besteht daher eine Relation von der Form

$$\sum_1^r {}^k\, e_k \cdot X_k(f) = \sum_1^r {}^k\, e_k' \cdot X_k'(f);$$

dabei können entweder die e_k willkürlich gewählt werden, während die e_k' Functionen der e_k und der a werden, oder es können die e_k' willkürlich gewählt werden, während die e_k Functionen der e_k' und der a werden.

Um die Beziehung zwischen den e_k' und den e_k wirklich zu ermitteln, multipliciren wir (10') mit λ_k und summiren nach k von $1 \cdots r$:

$$\sum_1^r {}^j \left\{ \sum_1^r {}^k\, \lambda_k\, \vartheta_{jk}(a) \right\} \cdot X_j(f) + \sum_1^r {}^j \left\{ \sum_1^r {}^k\, \lambda_k \psi_{jk}(a) \right\} \cdot X_j'(f) = 0.$$

Ueber die Multiplicatoren $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ können wir offenbar so verfügen, dass

$$\sum_1^r {}^k\, \lambda_k\, \vartheta_{jk}(a) = e_j, \qquad \sum_1^r {}^k\, \lambda_k\, \psi_{jk}(a) = -\, e_j'$$

wird. Aus der zweiten Reihe dieser Gleichungen können wir sehr leicht $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ bestimmen, wenn wir die in Kap. 2, S. 31 definirten Functionen $\alpha_{kj}(a)$ benutzen. Dann finden wir nämlich:

$$\lambda_k = -\sum_1^r {}^j\, \alpha_{jk}(a) \cdot e_j'$$

und daraus folgt:

$$e_j = -\sum_1^r {}^\pi \left\{ \sum_1^r {}^k\, \vartheta_{jk}(a) \cdot \alpha_{\pi k}(a) \right\} \cdot e_\pi' \quad (j = 1 \cdots r).$$

Diese Gleichungen lassen sich natürlich auch nach $e_1' \dots e_r'$ auflösen.

Wir haben demnach den folgenden

Satz 4. *Stellen die Gleichungen $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r)$ eine r-gliedrige Gruppe dar und enthält diese Gruppe die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen*

$$X_k(f) = \sum_1^n {}^i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r),$$

so bewahrt die allgemeine infinitesimale Transformation

$$e_1 X_1(f) + \cdots + e_r X_r(f)$$

bei Einführung der neuen Veränderlichen $x_i' = f_i(x, a)$ insofern ihre Form, als für jedes Werthsystem $e_1 \cdots e_r$ eine Relation von der Form

$$\sum_1^r {}^k\, e_k \cdot X_k(f) = \sum_1^r {}^k\, e_k' \cdot X_k'(f)$$

besteht; dabei sind $e_1' \cdots e_r'$ unabhängige lineare homogene Functionen von $e_1 \cdots e_r$ mit Coefficienten, die Functionen von $a_1 \cdots a_r$ sind.

Endlich noch eine allgemeine Bemerkung über den Begriff der eingliedrigen Gruppe.

Begriffe und Sätze der Theorie der continuirlichen Transformationsgruppen haben oft ihr Analogon in der *Substitutionentheorie**), das heisst in der Theorie der discontinuirlichen Gruppen. Im Verlaufe unserer Untersuchungen werden wir diese Analogien nicht jedesmal besonders hervorheben, doch werden wir an dieselben öfters dadurch erinnern, dass wir die Bezeichnungen der Substitutionentheorie in die Theorie der Transformationsgruppen übertragen, was soweit als möglich geschehen soll.

Hier wollen wir darauf aufmerksam machen, dass die *eingliedrigen Gruppen* in der Theorie der Transformationsgruppen wesentlich dieselbe Rolle spielen wie die *Cyklen* in der Substitutionentheorie. Allerdings kann eine r-gliedrige Gruppe auch *discontinuirliche* Schaaren von Transformationen enthalten, die Cyklen im Sinne der Substitutionentheorie sind. Für uns haben aber derartige Schaaren von Transformationen wenig oder gar kein Interesse.

Wir werden die eingliedrigen Gruppen oder ihre infinitesimalen Transformationen gewissermassen als die Elemente der r-gliedrigen Gruppen betrachten. Bei Untersuchungen über r-gliedrige Gruppen

*) C. Jordan, Traité des substitutions, Paris 1870.

ist es fast unter allen Umständen vortheilhaft zunächst die Aufmerksamkeit auf die infinitesimalen Transformationen der betreffenden Gruppe zu richten, und dieselben als Untersuchungsgegenstand zu wählen.

Kapitel 5.

Die vollständigen Systeme.

Die Integrationstheorie einer einzelnen linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$X(f) = \sum_1^n {}_i\, \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

oder des äquivalenten simultanen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \cdots = \frac{dx_n}{\xi_n}$$

setzen wir als bekannt voraus; doch stellen wir ohne Beweis als Einleitung einige darauf bezügliche Sätze zusammen. Auf diese Sätze gestützt, werden wir in aller Kürze die Integrationstheorie simultaner linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung ableiten. Diese im Wesentlichen von Jacobi und Clebsch herrührende Theorie werden wir dann im nächsten Kapitel in ein neues Licht setzen, indem wir den Zusammenhang zwischen den Begriffen „lineare partielle Differentialgleichung" und „infinitesimale Transformation" näher auseinandersetzen, einen Zusammenhang, den wir schon früher erwähnt haben (Kap. 3, S. 54).

§ 21.

Es mögen $\xi_1 \cdots \xi_n$ sich regulär verhalten in der Umgebung eines bestimmten Werthsystems $x_1^0 \cdots x_n^0$, ausserdem sei noch $\xi_n(x_1^0 \cdots x_n^0)$ von Null verschieden. Unter diesen Voraussetzungen kann man $x_1 \cdots x_{n-1}$ derart als analytische Functionen von x_n bestimmen, dass bei Substitution dieser Functionen das simultane System

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{\xi_1}{\xi_n}, \cdots \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{\xi_{n-1}}{\xi_n}$$

identisch befriedigt wird, und dass ausserdem $x_1 \cdots x_{n-1}$ für $x_n = x_n^0$ gewisse vorgeschriebene *Anfangswerthe* $x_1' \cdots x_{n-1}'$ annehmen. Diese Anfangswerthe sind als die Integrationsconstanten aufzufassen.

Die Gleichungen, welche $x_1 \cdots x_{n-1}$ in der betreffenden Weise als Functionen von x_n darstellen, heissen *die vollständigen Integral-*

gleichungen des simultanen Systems; sie können die Form erhalten

$$x_k = x_k' + (x_n^0 - x_n) \cdot \mathfrak{P}_k (x_1' - x_1^0, \cdots x_{n-1}' - x_{n-1}^0, x_n^0 - x_n)$$
$$(k = 1 \cdots n-1),$$

wo die $\mathfrak{P}_k$ gewöhnliche Potenzreihen ihrer Argumente bedeuten. Vertauscht man $x_1 \cdots x_{n-1}, x_n$ mit bezüglich $x_1' \cdots x_{n-1}', x_n^0$, so erhält man die Integralgleichungen wieder, nur nach den Anfangswerthen $x_1' \cdots x_{n-1}'$ aufgelöst:

$$x_k' = x_k + (x_n - x_n^0) \cdot \mathfrak{P}_k (x_1 - x_1^0, \cdots x_n - x_n^0) = \omega_k (x_1 \cdots x_n)$$
$$(k = 1 \cdots n-1).$$

Hier sind die Functionen ω_k sogenannte *Integralfunctionen* des simultanen Systems, denn die Differentiale dieser Functionen:

$$d\omega_k = \sum_1^n {}_i \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} dx_i \qquad (k = 1 \cdots n-1)$$

verschwinden sämmtlich vermöge des simultanen Systems identisch, und jede Function von dieser Beschaffenheit heisst eine Integralfunction des simultanen Systems. Jede solche Integralfunction ist aber zugleich eine Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung $X(f) = 0$, also sind $\omega_1 \cdots \omega_{n-1}$ Lösungen von $X(f) = 0$ und zwar offenbar unabhängige. In einer gewissen Umgebung von $x_1^0 \cdots x_n^0$ verhalten sich diese Lösungen regulär; ausserdem reduciren sie sich für $x_n = x_n^0$ auf bezüglich $x_1 \cdots x_{n-1}$; deshalb heissen sie die *Hauptlösungen der Gleichung $X(f) = 0$ in Bezug auf $x_n = x_n^0$.*

Kennt man überhaupt $n-1$ unabhängige Lösungen

$$\psi_1 (x_1 \cdots x_n) \cdots \psi_{n-1} (x_1 \cdots x_n)$$

der Gleichung $X(f) = 0$, so hat die allgemeinste Lösung derselben die Form $\Omega (\psi_1 \cdots \psi_{n-1})$, wo Ω eine willkürliche analytische Function seiner Argumente bezeichnet.

§ 22.

Genügt eine Function $\psi (x_1 \cdots x_n)$ den beiden Gleichungen

$$X_1(f) = 0, \quad X_2(f) = 0,$$

so befriedigt sie natürlich auch die beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$X_1 (X_2(f)) = 0, \quad X_2 (X_1(f)) = 0$$

und in Folge dessen auch die Gleichung

$$X_1 (X_2(f)) - X_2 (X_1(f)) = 0,$$

welche sich aus den beiden zuletzt geschriebenen durch Subtraction ergiebt.

Ist nun

$$X_k(f) = \sum_1^n {}^i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

so ergiebt sich:

$$X_1(X_2(f)) - X_2(X_1(f)) = \sum_1^n {}^i \{X_1(\xi_{2i}) - X_2(\xi_{1i})\} \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

weil alle Glieder wegfallen, welche Differentialquotienten zweiter Ordnung enthalten. Also gilt der

Satz 1. *Genügt eine Function $\psi(x_1 \cdots x_n)$ den beiden Differentialgleichungen erster Ordnung:*

$$X_k(f) = \sum_1^n {}^i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (k = 1, 2),$$

so genügt sie auch der Gleichung

$$X_1(X_2(f)) - X_2(X_1(f)) = \sum_1^n {}^i \{X_1(\xi_{2i}) - X_2(\xi_{1i})\} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

welche ebenfalls von erster Ordnung ist.

Von grosser Wichtigkeit ist es zu wissen, wie der Ausdruck $X_1(X_2(f)) - X_2(X_1(f))$ sich verhält, wenn an Stelle von $x_1 \cdots x_n$ neue unabhängige Veränderliche $y_1 \cdots y_n$ eingeführt werden.

Nehmen wir an, dass sich bei Einführung der y ergiebt:

$$X_k(f) = \sum_1^n {}^i\, X_k(y_i) \frac{\partial f}{\partial y_i} = \sum_1^n {}^i\, \eta_{ki}(y_1 \cdots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_i} = Y_k(f) \quad (k = 1, 2).$$

Da f hier eine ganz beliebige Function von $x_1 \cdots x_n$ bedeutet, so können wir $X_1(f)$ oder $X_2(f)$ an Stelle von f einsetzen, wir haben daher:

$$X_1(X_2(f)) = Y_1(X_2(f)) = Y_1(Y_2(f))$$
$$X_2(X_1(f)) = Y_2(X_1(f)) = Y_2(Y_1(f)),$$

folglich wird:

$$X_1(X_2(f)) - X_2(X_1(f)) = Y_1(Y_2(f)) - Y_2(Y_1(f)).$$

Also haben wir den

Satz 2. *Gehen die Ausdrücke $X_1(f)$ und $X_2(f)$ bei Einführung neuer unabhängiger Veränderlicher über in $Y_1(f)$ bezüglich $Y_2(f)$, so geht der Ausdruck $X_1(X_2(f)) - X_2(X_1(f))$ über in $Y_1(Y_2(f)) - Y_2(Y_1(f))$.*

Diese Eigenschaft des Ausdruckes $X_1(X_2(f)) - X_2(X_1(f))$ wird im Verlaufe unserer Untersuchungen häufig benutzt werden. Dieselbe lässt sich kürzer so aussprechen: *der Ausdruck $X_1(X_2(f)) - X_2(X_1(f))$ verhält sich bei Einführung neuer Veränderlicher invariant.*

Betrachten wir jetzt q Gleichungen

$$(1) \qquad X_1(f) = 0, \cdots X_q(f) = 0$$

und fragen wir nach ihren etwaigen gemeinsamen Lösungen.

Es ist denkbar, dass zwischen den Ausdrücken $X_k(f)$ Relationen von der Form

$$(2) \qquad \sum_1^q {}^k \chi_k(x_1 \cdots x_n) \cdot X_k(f) \equiv 0$$

bestehen. Wäre dies der Fall, so würden gewisse unter unseren Gleichungen eine Folge der übrigen sein und könnten bei der Erledigung des aufgestellten Problems ohne Weiteres weggelassen werden. Demnach ist es ganz berechtigt, wenn wir die Voraussetzung machen, dass keine Relation von der Form (2) besteht, dass also die Gleichungen (1) nach q von den Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ auflösbar sind. In diesem Sinne ist es zu verstehen, wenn wir die *Gleichungen* (1) kurz als von einander *unabhängig* bezeichnen. —

Nach dem, was oben über zwei Gleichungen $X_1(f) = 0$ und $X_2(f) = 0$ gesagt wurde, ist es klar, dass die etwaigen gemeinsamen Lösungen unserer q Gleichungen auch alle Gleichungen von der Form

$$X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f)) = 0$$

befriedigen. Da können nun zwei Fälle eintreten.

Erstens können die auf diese Weise erhaltenen Gleichungen eine Folge der früheren sein, indem für jedes i und $k \leqq q$ eine Relation von der folgenden Form besteht:

$$X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f))$$
$$= \chi_{ik1}(x_1 \cdots x_n) X_1(f) + \cdots + \chi_{ikq}(x_1 \cdots x_n) X_q(f).$$

Mit Clebsch sagen wir alsdann, *dass die q von einander unabhängigen Gleichungen $X_1(f) = 0 \cdots X_q(f) = 0$ ein q-gliedriges vollständiges System bilden.*

Im Allgemeinen wird jedoch der zweite mögliche Fall eintreten; es werden sich unter den neugebildeten Gleichungen

$$X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f)) = 0$$

eine gewisse Anzahl finden, welche von einander und von den q vorgelegten unabhängig sind. Wir fügen dieselben, etwa

$$X_{q+1}(f) = 0, \cdots X_{q+s}(f) = 0$$

zu den q ursprünglichen hinzu und behandeln jetzt die erhaltenen $q + s$ Gleichungen genau so wie früher die q gegebenen. So fahren wir fort; da wir aber nicht auf mehr als n von einander unabhängige

Gleichungen $X_i(f) = 0$ kommen können, müssen wir schliesslich zu einem vollständigen Systeme gelangen, welches aus n oder weniger unabhängigen Gleichungen besteht. Wir haben daher den Satz:

Satz 3. *Die Bestimmung der gemeinsamen Lösungen von q gegebenen linearen partiellen Differentialgleichungen 1. O. $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ lässt sich stets durch Differentiationen und Eliminationen auf die Integration eines vollständigen Systems zurückführen.*

Nehmen wir jetzt an, dass $X_1(f) = 0, \cdots X_q(f) = 0$ ein q-gliedriges vollständiges System bilden. Offenbar dürfen diese Gleichungen durch q andere

$$Y_k(f) = \sum_1^q{}_j\, \psi_{kj}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_j(f) = 0 \quad (k = 1 \cdots q)$$

ersetzt werden. Erforderlich ist dabei nur, dass die Determinante der ψ_{kj} nicht identisch verschwindet, damit sich auch die $X_j(f)$ linear durch die $Y_k(f)$ ausdrücken. Augenscheinlich bestehen alsdann Relationen von der Form:

$$Y_i(Y_k(f)) - Y_k(Y_i(f)) = \sum_1^q{}_j\, \omega_{ikj}(x_1 \cdots x_n) \cdot Y_j(f); \tag{3}$$

es bilden also auch die Gleichungen $Y_k(f) = 0$ ein q-gliedriges vollständiges System und sind daher mit den Gleichungen $X_k(f) = 0$ vollständig äquivalent.

Wie zuerst von Clebsch hervorgehoben worden ist, kann man über die ψ_{kj} immer so verfügen, dass alle ω_{ikj} verschwinden. Um dies am einfachsten zu erreichen, wählen wir mit A. Mayer die ψ_{kj} derart, dass die $Y_k(f) = 0$ nach q von den Differentialquotienten, etwa nach $\frac{\partial f}{\partial x_n} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{n-q+1}}$ aufgelöst erscheinen:

$$Y_k(f) = \frac{\partial f}{\partial x_{n-q+k}} + \sum_1^{n-q}{}_i\, \eta_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (k = 1 \cdots q). \tag{4}$$

Die Ausdrücke $Y_i(Y_k(f)) - Y_k(Y_i(f))$ werden dann sämmtlich von $\frac{\partial f}{\partial x_{n-q+1}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}$ frei, folglich können sie die Form $\sum_j \omega_{ikj}\, Y_j(f)$ nur dann haben, wenn alle ω_{ikj} verschwinden. Also:

Satz 4. *Löst man ein q-gliedriges vollständiges System*

$$X_1(f) = 0 \cdots X_q(f) = 0$$

nach q von den Differentialquotienten auf, so stehen die hervorgehenden Gleichungen

$$(4) \qquad Y_k(f) = \frac{\partial f}{\partial x_{n-q+k}} + \sum_1^{n-q} {}_i\, \eta_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (k = 1 \cdots q)$$

paarweise in der Beziehung

$$(5) \qquad Y_i(Y_k(f)) - Y_k(Y_i(f)) = 0.$$

§ 23.

Wir denken uns ein vorgelegtes q-gliedriges vollständiges System auf die eben besprochene Form

$$(4) \qquad Y_k(f) = \frac{\partial f}{\partial x_{n-q+k}} + \sum_1^{n-q} {}_i\, \eta_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (k = 1 \cdots q)$$

gebracht. Es wird sich zeigen, dass dieses System $n - q$ unabhängige Lösungen besitzt, zu deren Bestimmung es genügt, q einzelne lineare partielle Differentialgleichungen nach einander zu integriren.

Zuerst integriren wir die Differentialgleichung

$$Y_q(f) = \frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_1^{n-q} {}_i\, \eta_{qi} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

von deren $n - 1$ unabhängigen Lösungen $x_1' \cdots x_{n-1}'$ die folgenden $q - 1$, nämlich:

$$x_{n-q+1}' = x_{n-q+1}, \cdots x_{n-1}' = x_{n-1}$$

sofort bekannt sind. Werden die $n - 1$ Ausdrücke $x_1' \cdots x_{n-1}'$ nebst der von ihnen unabhängigen Grösse x_n als neue Veränderliche eingeführt, so erhält unser vollständiges System die Gestalt:

$$Y_q(f) = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \quad Y_k(f) = \frac{\partial f}{\partial x_{n-q+k}'} + \sum_1^{n-q} {}_i\, \eta_{ki}' \frac{\partial f}{\partial x_i'} = 0$$
$$(k = 1 \cdots q - 1).$$

Da nun die Ausdrücke $Y_i(Y_k(f)) - Y_k(Y_i(f))$ sich bei Einführung neuer Veränderlicher invariant verhalten (vgl. Satz 2 dieses Kapitels), so müssen sie auch jetzt wieder verschwinden, woraus folgt, dass alle η_{ki}' Functionen von $x_1' \cdots x_{n-1}'$ allein, von x_n aber frei sind. Das ursprüngliche Integrationsproblem ist somit darauf zurückgeführt, die gemeinsamen Lösungen der $q - 1$ Gleichungen

$$Y_k'(f) = \frac{\partial f}{\partial x_{n-q+k}'} + \sum_1^{n-q} {}_i\, \eta_{ki}'(x_1' \cdots x_{n-1}') \frac{\partial f}{\partial x_i'} = 0$$
$$(k = 1 \cdots q - 1)$$

zu ermitteln, und zwar stehen diese Gleichungen, welche nur $n - 1$ unabhängige Veränderliche, nämlich $x_1' \cdots x_{n-1}'$, enthalten, wiederum paarweise in der Beziehung: $Y_i'(Y_k'(f)) - Y_k'(Y_i'(f)) = 0.$

Dieses Ergebniss formuliren wir folgendermassen:

Satz 5. *Die gemeinsamen Lösungen der Gleichungen eines q-gliedrigen vollständigen Systems in n Veränderlichen lassen sich auch definiren als die gemeinsamen Lösungen der Gleichungen eines $(q-1)$-gliedrigen vollständigen Systems in $n-1$ Veränderlichen. Um dieses neue vollständige System aufstellen zu können, hat man blos eine einzige lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung in $n-q+1$ Veränderlichen zu integriren.*

Das neue vollständige System erscheint wieder in aufgelöster Form; wir können daher unser obiges Verfahren sogleich wieder aufnehmen und erhalten durch im Ganzen $(q-1)$-malige Anwendung desselben Folgendes:

Satz 6. *Die gemeinsamen Lösungen der Gleichungen eines q-gliedrigen vollständigen Systems in n Veränderlichen lassen sich auch definiren als die Lösungen einer einzigen linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung in $n-q+1$ Veränderlichen. Um diese eine Gleichung aufstellen zu können, genügt es nach einander $q-1$ einzelne Gleichungen dieser Art zu integriren.*

Hieraus folgt ohne Weiteres:

Satz 7. *Ein q-gliedriges vollständiges System in n unabhängigen Veränderlichen besitzt stets $n-q$ unabhängige Lösungen.*

Umgekehrt gilt aber auch:

Satz 8. *Haben q unabhängige lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung*

$$X_1(f)=0, \cdots X_q(f)=0$$

in n unabhängigen Veränderlichen gerade $n-q$ unabhängige Lösungen gemein, so bilden sie ein q-gliedriges vollständiges System.

Zum Beweise bemerken wir, dass die Gleichungen

$$X_1(f)=0, \cdots X_q(f)=0$$

nach dem Früheren ein vollständiges System mit q oder mehr Gliedern bestimmen; enthielte nun dieses vollständige System mehr als q unabhängige Gleichungen, so besässe es nicht $n-q$, sondern nur eine geringere Zahl von unabhängigen Lösungen; unter den Voraussetzungen des Satzes ist es daher q-gliedrig, das heisst es wird von den Gleichungen $X_1(f)=0, \cdots X_q(f)=0$ selbst gebildet. —

Sind irgend $n-q$ unabhängige Functionen $\omega_1 \cdots \omega_{n-q}$ von $x_1 \cdots x_n$ vorgelegt, so kann man immer q unabhängige lineare partielle Differentialgleichungen aufstellen, welche von allen ω identisch befriedigt werden. Setzen wir nämlich voraus, dass die Determinante

$$\sum \pm \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \omega_{n-q}}{\partial x_{n-q}}$$

nicht identisch verschwindet, was wir ohne Beschränkung thun können, so sind die q Gleichungen

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdot & \frac{\partial f}{\partial x_{n-q}} & \frac{\partial f}{\partial x_{n-q+k}} \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} & \cdot & \frac{\partial \omega_1}{\partial x_{n-q}} & \frac{\partial \omega_1}{\partial x_{n-q+k}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \omega_{n-q}}{\partial x_1} & \cdot & \frac{\partial \omega_{n-q}}{\partial x_{n-q}} & \frac{\partial \omega_{n-q}}{\partial x_{n-q+k}} \end{vmatrix} = 0$$

$$(k = 1 \cdots q)$$

derartige Differentialgleichungen; denn bei der Substitution $f = \omega_j$ werden sie zu Identitäten und von einander unabhängig sind sie auch, wie ihre Form zeigt. Nach dem letzten Satze bilden diese Gleichungen ein q-gliedriges vollständiges System. Also:

Satz 9. *Sind $n - q$ unabhängige Functionen von n Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ vorgelegt, so giebt es in $x_1 \cdots x_n$ immer ein bestimmtes q-gliedriges vollständiges System, von welchem diese Functionen ein System Lösungen sind.*

§ 24.

Für unsere Zwecke genügt es aber nicht, die Existenz der Lösungen eines vollständigen Systems nachgewiesen zu haben, es ist vielmehr nöthig, auch auf die analytische Beschaffenheit dieser Lösungen etwas näher einzugehen.

Zu diesem Behufe werden wir annehmen, dass in dem vorgelegten q-gliedrigen vollständigen Systeme:

$$Y_k(f) = \frac{\partial f}{\partial x_{n-q+k}} + \sum_1^{n-q} {}_i\, \eta_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (k = 1 \cdots q)$$

die analytischen Functionen η_{ki} sich in der Umgebung von

$$x_1 = \cdots = x_n = 0$$

regulär verhalten. Als Grössen $x_1' \cdots x_{n-1}'$ wählen wir jetzt unter den Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_1^{n-q} {}_i\, \eta_{qi} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

die früher definirten Hauptlösungen dieser Gleichung in Bezug auf $x_n = 0$. Wir wissen, dass diese Hauptlösungen $x_1' \cdots x_{n-1}'$ in einer gewissen Umgebung von $x_1 = \cdots = x_n = 0$ gewöhnliche Potenzreihen nach $x_1 \cdots x_n$ sind, und dass sie sich für $x_n = 0$ auf bezüglich $x_1 \cdots x_{n-1}$ reduciren. Die bereits oben erwähnten Lösungen

$$x'_{n-q+1} = x_{n-q+1}, \cdots x'_{n-1} = x_{n-1}$$

sind demnach Hauptlösungen.

Umgekehrt sind nach den Bemerkungen in § 21 auch $x_1 \cdots x_{n-1}$ analytische Functionen von $x_1' \cdots x'_{n-1}, x_n$ und verhalten sich in der Umgebung des Werthsystems $x_1' = \cdots = x'_{n-1} = x_n = 0$ regulär. Da nun in dem neuen vollständigen Systeme $Y_k'(f) = 0$ die Coefficienten η'_{ki} in einer gewissen Umgebung von $x_1 = \cdots = x_n = 0$ sich als Functionen von $x_1 \cdots x_n$ regulär verhalten, werden sie auch gewöhnliche Potenzreihen nach $x_1' \cdots x'_{n-1}, x_n$ in einer gewissen Umgebung von $x_1' = 0, \cdots x'_{n-1} = 0$, $x_n = 0$ und zwar werden sie, wie wir wissen, von x_n frei.

Wir bestimmen jetzt die Hauptlösungen der Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x'_{n-1}} + \sum_1^{n-q} {}^i \, \eta'_{q-1,i} \frac{\partial f}{\partial x_i'} = 0$$

in Bezug auf $x'_{n-1} = 0$. Dieselben, $x_1'' \cdots x''_{n-2}$ mögen sie heissen, verhalten sich als Functionen von $x_1' \cdots x'_{n-1}$ regulär in der Umgebung von $x_1' = \cdots = x'_{n-1} = 0$ und sind daher auch als Functionen von $x_1 \cdots x_n$ regulär in der Umgebung von $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Bei der Substitution $x'_{n-1} = 0$ reduciren sich $x_1'' \cdots x''_{n-2}$ auf $x_1' \cdots x'_{n-2}$, folglich bei der Substitution $x_{n-1} = x_n = 0$ auf $x_1 \cdots x_{n-2}$. Die Coefficienten des nächsten $(q-2)$-gliedrigen vollständigen Systems werden natürlich gewöhnliche Potenzreihen von $x_1'' \cdots x''_{n-2}$.

Nach q-maliger Wiederholung dieser Ueberlegungen erhalten wir endlich $n-q$ unabhängige Lösungen: $x_1^{(q)} \cdots x_{n-q}^{(q)}$ unseres vollständigen Systems. Dieselben sind gewöhnliche Potenzreihen nach den $x_i^{(q-1)}$ in einer gewissen Umgebung von $x_1^{(q-1)} = \cdots = x_{n-q+1}^{(q-1)} = 0$ und ebensolche Reihen nach den x_i in einer gewissen Umgebung von $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Für $x_{n-q+1}^{(q-1)} = 0$ reduciren sich $x_1^{(q)} \cdots x_{n-q}^{(q)}$ auf bezüglich $x_1^{(q-1)} \cdots x_{n-q}^{(q-1)}$ und daher für $x_{n-q+1} = \cdots = x_n = 0$ auf $x_1 \cdots x_{n-q}$. Es ist also:

$$x_i^{(q)} = x_i + \mathfrak{P}_i(x_1 \cdots x_n). \quad (i = 1 \cdots n-q),$$

wo die $\mathfrak{P}_i$ für $x_{n-q+1} = \cdots = x_n = 0$ sämmtlich verschwinden.

Wir nennen die Lösungen $x_1^{(q)} \cdots x_{n-q}^{(q)}$ unseres vollständigen Systems seine *Hauptlösungen in Bezug auf* $x_{n-q+1} = 0, \cdots x_n = 0$.

Das gewonnene Ergebniss sprechen wir in etwas allgemeinerer Form aus, indem wir an Stelle des speciellen Werthsystems

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

ein allgemeines: $x_1^0 \cdots x_n^0$ einführen. Dann können wir sagen:

Theorem 12. *Jedes q-gliedrige vollständige System*

$$\frac{\partial f}{\partial x_{n-q+k}} + \sum_1^{n-q} {}_i\, \eta_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (k = 1 \cdots q),$$

dessen Coefficienten η_{ki} sich in der Umgebung von $x_1 = x_1^0, \cdots x_n = x_n^0$ regulär verhalten, besitzt $n - q$ unabhängige Lösungen $x_1^{(q)} \cdots x_{n-q}^{(q)}$, welche sich in einer gewissen Umgebung von $x_1 = x_1^0, \cdots x_n = x_n^0$ regulär verhalten und sich ausserdem bei der Substitution $x_{n-q+1} = x_{n-q+1}^0, \cdots x_n = x_n^0$ auf bezüglich $x_1 \cdots x_q$ reduciren.

In dieser präcisen Fassung ist der Hauptsatz aus der Theorie der vollständigen Systeme weder von Jacobi noch von Clebsch aufgestellt worden. Implicite ist derselbe indess in den bekannten Untersuchungen enthalten, welche von Cauchy, Weierstrass, Briot und Bouquet, Kowalevsky und Darboux herrühren und welche die Frage nach der Existenz von Lösungen gegebener Differentialgleichungen behandeln.

§ 25.

Die Theorie einer einzelnen linearen partiellen Differentialgleichung

$$X(f) = \sum_1^n {}_i\, \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

steht, wie schon gesagt, in dem engsten Zusammenhange mit der Theorie des simultanen Systems

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \cdots = \frac{dx_n}{\xi_n}.$$

Etwas ganz analoges findet nun auch bei Systemen von linearen partiellen Differentialgleichungen statt.*)

Es seien q unabhängige lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung vorgelegt, welche aber kein vollständiges System zu bilden brauchen. Der Einfachheit wegen denken wir uns die Gleichungen nach q von den Differentialquotienten aufgelöst:

$$(4') \quad Y_k(f) = \frac{\partial f}{\partial x_{n-q+k}} + \sum_1^{n-q} {}_i\, \eta_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (k = 1 \cdots q).$$

Ist $\omega(x_1 \cdots x_n)$ eine gemeinsame Lösung dieser Gleichungen, so ist

*) Diesen Zusammenhang hat zuerst Boole entwickelt. Vgl. auch A. Mayer, Ueber unbeschränkt integrable Differentialgleichungen, Math. Ann. Bd. V.

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_{n-q+k}} \equiv - \sum_1^{n-q} {}^i \eta_{ki} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots q);$$

also wird:

$$d\omega = \sum_1^{n-q} {}^i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \left\{ dx_i - \sum_1^q {}^k \eta_{ki} dx_{n-q+k} \right\}.$$

Das Differential $d\omega$ verschwindet somit vermöge der $n-q$ totalen Differentialgleichungen

(6) $$dx_i = \sum_1^q {}^k \eta_{ki}\, dx_{n-q+k} = 0 \quad (i = 1 \cdots n-q)$$

identisch. Jede Function von dieser Beschaffenheit nennt man aber eine Integralfunction dieses Systems von totalen Differentialgleichungen. Folglich können wir sagen:

Jede gemeinsame Lösung der q linearen partiellen Differentialgleichungen (4′) *ist eine Integralfunction des Systems von $n-q$ totalen Differentialgleichungen* (6).

Umgekehrt ist aber auch jede Integralfunction des Systems (6) *eine gemeinsame Lösung der Gleichungen* (4′).

Ist nämlich $w(x_1 \cdots x_n)$ eine Integralfunction von (6), so verschwindet der Ausdruck

$$dw = \sum_1^n {}^i \frac{\partial w}{\partial x_i} dx_i$$

vermöge (6) identisch, das heisst es ist:

$$\sum_1^q {}^k \left\{ \frac{\partial w}{\partial x_{n-q+k}} + \sum_1^{n-q} {}^i \eta_{ki} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\} dx_{n-q+k} \equiv 0,$$

woraus erhellt, dass w die Gleichungen (4) identisch befriedigt.

Nun aber ist die Integration des Systemes (6) gleichbedeutend mit der Auffindung aller seiner Integralfunctionen; denn was heisst es, das System (6) integriren? Bekanntlich nichts anderes, als alle möglichen Functionen $\varrho_1 \cdots \varrho_{n-q}$ von $x_1 \cdots x_n$ bestimmen, welche den Ausdruck

$$\sum_1^{n-q} {}^i \varrho_i (x_1 \cdots x_n) \left\{ dx_i - \sum_1^q {}^k \eta_{ki}\, dx_{n-q+k} \right\}$$

zu einem vollständigen Differential machen, also zu dem Differential einer Integralfunction.

Mit anderen Worten:

Die Integration des Systems von q linearen partiellen Differentialgleichungen (4′) *ist geleistet, wenn das System der $n-q$ totalen Differentialgleichungen* (6) *integrirt ist und umgekehrt.*

Dieser Zusammenhang zwischen den beiden Systemen (4′) und (6) setzt natürlich voraus, dass sie Lösungen bezüglich Integralfunctionen besitzen; doch besteht ein gewisser Zusammenhang auch dann noch, wenn es keine gemeinsamen Lösungen von (4′) und also auch keine Integralfunctionen von (6) giebt. Darüber bei einer anderen Gelegenheit (Kap. 6, S. 105).

Da die Gleichungen (4′) höchstens $n-q$ unabhängige Lösungen gemein haben, so besitzt das System (6) höchstens $n-q$ unabhängige Integralfunctionen. Besitzt es deren gerade $n-q$ unabhängige, so heisst das System (6) *unbeschränkt integrabel,* dieser Fall tritt also nur dann ein, wenn die q Gleichungen (4′) ein q-gliedriges vollständiges System bilden.

Nehmen wir an, das System (6) ist unbeschränkt integrabel, oder was dasselbe ist, es verschwinden alle Ausdrücke $Y_k(Y_j(f))-Y_j(Y_k(f))$ identisch. Denken wir uns ferner die $n-q$ Hauptlösungen

$$\omega_1(x_1\cdots x_n)\cdots\omega_{n-q}(x_1\cdots x_n)$$

des vollständigen Systems (4′) in Bezug auf

$$x_{n-q+1}=x^0_{n-q+1},\cdots x_n=x_n{}^0$$

bestimmt. Dann heissen die Gleichungen

$$\omega_1(x_1\cdots x_n)=a_1,\cdots\omega_{n-q}(x_1\cdots x_n)=a_{n-q}$$

mit den $n-q$ willkürlichen Constanten $a_1\cdots a_{n-q}$ die vollständigen Integralgleichungen des Systems (6). Diese Integralgleichungen sind offenbar nach $x_1\cdots x_{n-q}$ auflösbar, da sich ja $\omega_1\cdots\omega_{n-q}$ für

$$x_{n-q+1}=x^0_{n-q+1},\cdots x_n=x_n{}^0$$

auf bezüglich $x_1\cdots x_{n-q}$ reduciren. Wir erhalten daher:

$$x_i=\psi_i(x_{n-q+1}\cdots x_n,\ a_1\cdots a_{n-q})\qquad(i=1\cdots n-q).$$

Es lässt sich leicht einsehen, dass die Gleichungen (6) bei der Substitution $x_1=\psi_1,\cdots x_{n-q}=\psi_{n-q}$ zu Identitäten werden. Zunächst haben wir nämlich

$$x_i-\psi_i(x_{n-q+1}\cdots x_n,\ \omega_1\cdots\omega_{n-q})\equiv 0\qquad(i=1\cdots n-q);$$

setzen wir daher $x_i-\psi_i$ in $Y_k(f)$ für f ein, so bekommen wir natürlich wieder einen identisch verschwindenden Ausdruck, und da alle $Y_k(\omega_1)\cdots Y_k(\omega_{n-q})$ identisch Null sind, so ergiebt sich:

$$\eta_{ki}(x_1\cdots x_n)-\frac{\partial}{\partial x_{n-q+k}}\psi_i(x_{n-q+1}\cdots x_n,\ \omega_1\cdots\omega_{n-q})\equiv 0$$

$$(k=1\cdots q,\ i=1\cdots n-q).$$

Machen wir hierin die Substitution $x_1 = \psi_1, \cdots x_{n-q} = \psi_{n-q}$, so kommt

$$\eta_{ki}(\psi_1 \cdots \psi_{n-q}, x_{n-q+1} \cdots x_n) - \frac{\partial}{\partial x_{n-q+k}} \psi_i(x_{n-q+1} \cdots x_n, a_1 \cdots a_{n-q}) \equiv 0.$$

Das multipliciren wir mit dx_{n-q+k} und summiren nach k von 1 bis q, dann erkennen wir, dass wirklich der Ausdruck

$$dx_i - \sum_1^q {}^k \eta_{ki}(x_1 \cdots x_n) dx_{n-q+k}$$

bei der Substitution $x_1 = \psi_1, \cdots x_{n-q} = \psi_{n-q}$ identisch verschwindet. Nehmen wir noch hinzu, dass wir aus den Gleichungen $\omega_i = a_i$ die a_i stets so bestimmen können, dass für $x_{n-q+1} = x_{n-q+1}^0, \cdots x_n = x_n^0$ die Veränderlichen $x_1 \cdots x_{n-q}$ vorgeschriebene Anfangswerthe $\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_{n-q}$ annehmen, so können wir sagen:

Ist das System der totalen Differentialgleichungen (6) *unbeschränkt integrabel, so ist es stets möglich* $x_1 \cdots x_{n-q}$ *derart als analytische Functionen von* $x_{n-q+1} \cdots x_n$ *zu bestimmen, dass das System* (6) *identisch befriedigt wird und dass* $x_1 \cdots x_{n-q}$ *für* $x_{n-q+1} = x_{n-q+1}^0, \cdots x_n = x_n^0$ *vorgeschriebene Anfangswerthe annehmen.*

§ 26.

Der Bequemlichkeit wegen führen wir für die Zukunft einige Abkürzungen ein.

Zunächst soll die Klammer um das f in $X(f)$ von jetzt ab häufig weggelassen werden.

Da ferner Ausdrücke von der Form $X(Y(f)) - Y(X(f))$ im Folgenden immer häufiger auftreten, wollen wir schreiben:

$$X(Y(f)) - Y(X(f)) = XYf - YXf = (XY);$$

auch werden wir uns nicht selten der Redeweise bedienen: der Ausdruck oder die infinitesimale Transformation (XY) sei durch *„Zusammensetzung"* oder *„Combination"* von Xf und Yf entstanden.

An dieser Stelle mag auch noch die folgende Bemerkung ihren Platz finden:

Zwischen drei beliebigen Ausdrücken Xf, Yf, Zf besteht immer die folgende Identität:

$$((XY)Z) + ((YZ)X) + ((ZX)Y) \equiv 0. \tag{7}$$

Dieselbe ist ein besonderer Fall der sogenannten Jacobi'schen Identität, welche wir später kennen lernen. Hier wollen wir uns damit begnügen, die Richtigkeit der speciellen Identität (7) zu verificiren; an der betreffenden späteren Stelle (vgl. Abschnitt 2) soll auch auf den Sinn der Jacobi'schen Identität eingegangen werden.

Man hat offenbar:

$$((XY)Z) \equiv XYZf - YXZf - ZXYf + ZYXf;$$

vertauscht man hierin Xf, Yf, Zf cyklisch mit einander und addirt die drei erhaltenen Relationen zusammen, so hebt sich auf der rechten Seite alles weg und man bekommt ohne weiteres die oben angegebene Identität.

Diese specielle Jacobi'sche Identität erweist sich bei allen Untersuchungen über Transformationsgruppen als ausserordentlich wichtig.

Kapitel 6.

Neue Auffassung der Lösungen eines vollständigen Systems.

Wenn wir in den Entwickelungen des vorigen Kapitels die Ausdrücke $X(f)$ als Symbole infinitesimaler Transformationen auffassen, oder, was dasselbe ist, als Symbole eingliedriger Gruppen, so bekommt alles daselbst Gesagte einen neuen Sinn. Deuten wir andererseits die Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ als Punktcoordinaten in einem Raume von n Dimensionen, so erhalten die damaligen Ergebnisse auch eine gewisse Anschaulichkeit.

Dies beides im Einzelnen zu zeigen und sodann in Verbindung zu bringen, ist die Aufgabe des gegenwärtigen Kapitels; dazu macht sich aber die Einführung verschiedener neuer Begriffe nothwendig.*)

§ 27.

Es sei $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n)$ eine Transformation in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, und $\Phi(x_1 \cdots x_n)$ sei irgend eine Function; ist nun zufällig diese Function so beschaffen, dass die Relation

$$\Phi(f_1(x) \cdots f_n(x)) = \Phi(x_1 \cdots x_n)$$

identisch besteht, so sagen wir: *die Function $\Phi(x_1 \cdots x_n)$ gestattet die Transformation $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n)$* oder *sie lässt dieselbe zu*; wir drücken uns auch so aus: *die Function $\Phi(x_1 \cdots x_n)$ bleibt bei der besprochenen Transformation invariant, sie verhält sich derselben gegenüber als Invariante.*

Gestattet eine Function $\Phi(x_1 \cdots x_n)$ alle ∞^r Transformationen $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r)$ einer r-gliedrigen Gruppe, so sagen wir,

---

*) Die in diesem Kapitel gegebenen Begriffsbildungen sind von Lie entwickelt in den Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania 1872, 1873, 1874 und 19. Februar 1875. Vgl. auch Math. Ann. Bd. VIII, IX und XI.

dass *sie bei dieser Gruppe invariant bleibt*, dass *sie diese Gruppe gestattet;* wir nennen dabei Φ eine *absolute Invariante* oder kurz eine *Invariante* der Gruppe.

Hier beschränken wir uns auf eingliedrige Gruppen. Es sei also die eingliedrige Gruppe

$$X(f) = \sum_1^n {}^i \, \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

vorgelegt, deren endliche Transformationen die Form

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1} \xi_i + \frac{t^2}{1 \cdot 2} X(\xi_i) + \cdots (i = 1 \cdots n)$$

haben. Wir fragen nach allen Invarianten dieser Gruppe.

Soll $\Phi(x_1 \cdots x_n)$ eine solche Invariante sein, so muss für jedes t die Gleichung

$$\Phi(x_1 + t\xi_1 + \cdots, \cdots x_n + t\xi_n + \cdots) = \Phi(x_1 \cdots x_n)$$

identisch bestehen. Entwickeln wir hier die linke Seite nach der allgemeinen Formel (7) in Kapitel 3, S. 52 in eine Reihe nach Potenzen von t, so erhalten wir die Bedingung:

$$\Phi(x_1 \cdots x_n) + \frac{t}{1} \cdot X(\Phi) + \frac{t^2}{1 \cdot 2} X(X(\Phi)) + \cdots \equiv \Phi(x_1 \cdots x_n)$$

für jedes t. Hieraus ergiebt sich sofort, dass der Ausdruck $X(\Phi)$ identisch verschwinden muss, wenn Φ unsere eingliedrige Gruppe gestatten soll; also haben wir damit ein *nothwendiges* Kriterium für die Invarianz der Function Φ bei der eingliedrigen Gruppe $X(f)$.

Der Ausdruck $X(\Phi)$ bestimmt, wie wir früher gesehen haben, (vgl. Seite 53) den Zuwachs, welchen die Function Φ bei der infinitesimalen Transformation $X(f)$ erhält. Da nun dieser Zuwachs $\delta\Phi = X(\Phi)\delta t$ zugleich mit $X(\Phi)$ verschwindet, so liegt es nahe die folgende Redeweise einzuführen: *wenn der Ausdruck $X(\Phi)$ identisch verschwindet, so sagen wir, dass die Function Φ die infinitesimale Transformation $X(f)$ gestattet.*

Unser obiges Resultat lässt sich daher auch so aussprechen: *Soll eine Function Φ von $x_1 \cdots x_n$ alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe $X(f)$ gestatten, so ist es eine nothwendige Bedingung, dass sie die infinitesimale Transformation $X(f)$ der betreffenden Gruppe gestattet.*

Es ist aber leicht zu sehen, dass diese nothwendige Bedingung zugleich hinreichend ist. Mit $X(\Phi)$ verschwinden ja auch alle Ausdrücke $X(X(\Phi))$, $X(X(X(\Phi)))$ u. s. w. identisch, also reducirt sich die Gleichung

$$\Phi(x_1' \cdots x_n') = \Phi(x_1 \cdots x_n) + \frac{t}{1} X(\Phi) + \cdots$$

für jeden Werth von t auf $\Phi(x') = \Phi(x)$, womit bewiesen ist, dass die Function $\Phi(x)$ alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe $X(f)$ gestattet. Da nun die Functionen $\Phi(x_1 \cdots x_n)$, für welche der Ausdruck $X(\Phi)$ identisch verschwindet, nichts anderes sind, als die Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung $X(f) = 0$, so können wir das folgende Theorem aussprechen:

Theorem 13. *Die Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung*

$$X(f) = \sum_1^n {}^i \, \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

sind Invarianten und zwar die einzigen Invarianten der eingliedrigen Gruppe $X(f)$.

Es darf freilich nicht vergessen werden, dass die Invarianten der eingliedrigen Gruppe $X(f)$ zugleich auch die Invarianten einer jeden eingliedrigen Gruppe

$$\varrho(x_1 \cdots x_n) \sum_1^n {}^i \, \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = \varrho \, X(f)$$

sind, welche Function seiner Argumente auch ϱ sein mag. Das folgt einfach daraus, dass man die Gleichung $X(f) = 0$, welche die betreffenden Invarianten definirt, mit jeder beliebigen Function ϱ von $x_1 \cdots x_n$ multipliciren kann. Wir können diesen Umstand auch so ausdrücken: wenn eine Function von $x_1 \cdots x_n$ die infinitesimale Transformation $X(f)$ zulässt, so gestattet sie zugleich jede infinitesimale Transformation $\varrho(x_1 \cdots x_n) \cdot X(f)$.

Man sieht, dass die Begriffe: eingliedrige Gruppe $X(f)$ und infinitesimale Transformation $X(f)$ specieller sind als der Begriff: lineare partielle Differentialgleichung $X(f) = 0$.

Unsere frühere Bemerkung, dass die gemeinsamen Lösungen zweier Gleichungen $X_i(f) = 0$ und $X_k(f) = 0$ gleichzeitig die dritte Gleichung $X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f)) = 0$ befriedigen, können wir jetzt auf Grund unserer obigen Entwickelungen folgendermassen aussprechen:

Satz 1. *Gestattet eine Function von $x_1 \cdots x_n$ die beiden infinitesimalen Transformationen $X_i(f)$ und $X_k(f)$ in diesen Veränderlichen, so gestattet sie auch die infinitesimale Transformation $X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f)$.*

Anders ausgedrückt:

Satz 2. *Gestattet eine Function von $x_1 \cdots x_n$ die beiden eingliedrigen Gruppen $X_i(f)$ und $X_k(f)$, so gestattet sie auch die eingliedrige Gruppe $X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f))$.*

Sind $\psi_1 \cdots \psi_{n-q}$ ein System unabhängiger Lösungen des q-gliedrigen vollständigen Systems $X_1(f) = 0, \cdots X_q(f) = 0$, ist also $\Omega(\psi_1 \cdots \psi_{n-q})$ die allgemeine Form einer Lösung dieses vollständigen Systems, so gestattet $\Omega(\psi_1 \cdots \psi_{n-q})$ überhaupt jede infinitesimale Transformation von der Gestalt

$$(1) \qquad \chi_1(x_1 \cdots x_n) \cdot X_1(f) + \cdots + \chi_q(x_1 \cdots x_n) \cdot X_q(f),$$

wie man auch die Functionen $\chi_1 \cdots \chi_q$ wählen mag. Es ist sogar klar, dass es ausser den eben geschriebenen keine infinitesimalen Transformationen giebt, bei welchen alle Functionen von der Form $\Omega(\psi_1 \cdots \psi_{n-q})$ invariant bleiben; denn wir wissen, dass das q-gliedrige vollständige System $X_1(f) = 0, \cdots X_q(f) = 0$ durch seine Lösungen $\psi_1 \cdots \psi_{n-q}$ bestimmt ist.

Die Functionen Ω gestatten natürlich auch alle endlichen Transformationen der eingliedrigen Gruppen (1). Man kann übrigens alle endlichen Transformationen angeben, bei welchen sämmtliche Functionen $\Omega(\psi_1 \cdots \psi_{n-q})$ gleichzeitig invariant bleiben. Die Form dieser Transformationen ist offenbar

$$\psi_k(x_1' \cdots x_n') = \psi_k(x_1 \cdots x_n) \quad (k = 1 \cdots n - q)$$
$$\mathfrak{U}_j(x_1' \cdots x_n', x_1 \cdots x_n) = 0 \quad (j = 1 \cdots q),$$

wo die $\mathfrak{U}_j$ der Bedingung unterworfen sind, dass eine wirkliche Transformation entstehen muss. Ueberdies müssen die x_k' wie die x_k innerhalb gewisser Bereiche bleiben.

Wir wollen sagen, dass *das Gleichungensystem*

$$\pi_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \; \cdots \pi_m(x_1 \cdots x_n) = 0$$

die Transformation $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n)$ gestattet, wenn das Gleichungensystem

$$\pi_1(x_1' \cdots x_n') = 0, \; \cdots \pi_m(x_1' \cdots x_n') = 0$$

bei der Substitution $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n)$ mit $\pi_1(x) = 0, \cdots \pi_m(x) = 0$ äquivalent wird, wenn also jedes Werthsystem $x_1 \cdots x_n$, welches den m Gleichungen $\pi_\mu(x) = 0$ genügt, auch die m Gleichungen

$$\pi_1(f_1(x) \cdots f_n(x)) = 0, \; \cdots \pi_m(f_1(x) \cdots f_n(x)) = 0$$

befriedigt.

Bei Einführung dieser Definition ist es nicht einmal nöthig vorauszusetzen, dass die m Gleichungen $\pi_1 = 0, \cdots \pi_m = 0$ von einander unabhängig sind, doch werden wir im Folgenden immer diese Voraussetzung machen, wo nicht das Gegentheil ausdrücklich zugelassen wird. —

Aus dem Früheren ergiebt sich nunmehr sofort der

Satz 3. *Sind $W_1, W_2 \cdots W_m$ $(m \leq n - q)$ beliebige unabhängige Lösungen des q-gliedrigen vollständigen Systems $X_1(f) = 0, \cdots X_q(f) = 0$ in den n unabhängigen Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$; sind ferner $a_1 \cdots a_m$ irgend* *welche willkürlich gewählte Constanten, so gestattet das Gleichungensystem*

$$W_1 = a_1, \cdots W_m = a_m$$

eine jede eingliedrige Gruppe von der Form

$$\sum_1^q \chi_k(x_1 \cdots x_n) \cdot X_k(f),$$

unter $\chi_1 \cdots \chi_q$ *beliebige Functionen ihrer Argumente verstanden.*

§ 28.

Im vorigen Paragraphen haben wir die Integrationstheorie der linearen partiellen Differentialgleichungen dadurch in ein neues Licht gesetzt, dass wir die infinitesimalen Transformationen und die eingliedrigen Gruppen damit in Verbindung brachten. Jetzt wollen wir einen andern Weg einschlagen, wir wollen versuchen, diese Integrationstheorie und was damit zusammenhängt durch Mannigfaltigkeitsbetrachtungen der anschaulichen Auffassung zugänglich zu machen.

Wenn wir $x_1 \cdots x_n$ als Coordinaten in einem n-fach ausgedehnten Raume R_n deuten, so bekommt das simultane System

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \cdots = \frac{dx_n}{\xi_n}$$

einen gewissen anschaulichen Sinn; es ordnet nämlich jedem Punkte $x_1 \cdots x_n$ des R_n eine gewisse Richtung zu.

Die Integralgleichungen des simultanen Systems bestimmen $n-1$ von den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ also etwa $x_1 \cdots x_{n-1}$ als Functionen der n^{ten}: x_n und der Anfangswerthe $\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n$; folglich stellen diese Integralgleichungen bei bestimmt gewählten Anfangswerthen eine bestimmte einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit dar, welche wir als eine *Integralcurve* des simultanen Systems bezeichnen. *Jede solche Integralcurve berührt in jedem ihrer Punkte die dem Punkte zugeordnete Richtung.*

Es giebt im Ganzen ∞^{n-1} verschiedene Integralcurven unseres simultanen Systems und zwar geht durch jeden Punke des R_n im Allgemeinen eine.

Sind $\psi_1 \cdots \psi_{n-1}$ unabhängige Integralfunctionen des simultanen Systems, so werden die sämmtlichen Integralcurven auch durch die $n-1$ Gleichungen

$$\psi_k(x_1 \cdots x_n) = C_k \quad (k = 1 \cdots n-1)$$

mit den $n-1$ willkürlichen Constanten $C_1 \cdots C_{n-1}$ dargestellt. Setzt man eine beliebige Integralfunction $\Omega(\psi_1 \cdots \psi_{n-1})$ gleich einer willkürlichen Constanten:

$$\Omega(\psi_1 \cdots \psi_{n-1}) = A,$$

so erhält man die Gleichung von ∞^1 $(n-1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, welche sämmtlich von Integralcurven erzeugt sind, und zwar jede einzelne von ∞^{n-2} verschiedenen Integralcurven. Setzt man endlich überhaupt $m \leqq n-1$ unabhängige Integralfunctionen $\Omega_1 \cdots \Omega_m$ gleich willkürlichen Constanten:

$$\Omega_\mu(\psi_1 \cdots \psi_{n-1}) = A_\mu \quad (\mu = 1 \cdots m),$$

so bekommt man den analytischen Ausdruck einer Schaar von ∞^m $(n-m)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, von denen jede aus ∞^{n-m-1} Integralcurven besteht.

Die Integralfunctionen unseres simultanen Systems sind zugleich die Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung

$$\sum_1^n {}_i\, \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = X(f) = 0.$$

Die Integralcurven des simultanen Systems nennen wir zuweilen auch die *Charakteristiken der linearen partiellen Differentialgleichung* $X(f) = 0$, indem wir eine von Monge für $n = 3$ eingeführte Benennung wieder aufnehmen. Mit Benutzung dieser Ausdrucksweise können wir auch sagen: jede Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung $X(f) = 0$ stellt, gleich Constans gesetzt, eine Schaar von ∞^1 Mannigfaltigkeiten dar, die aus je ∞^{n-2} Charakteristiken von $X(f) = 0$ bestehen.

Denken wir uns jetzt zwei lineare partielle Differentialgleichungen vorgelegt, etwa $X_1(f) = 0$ und $X_2(f) = 0$.

Es ist möglich, dass beide Gleichungen gemeinsame Charakteristiken haben. Dieser Fall tritt ein, wenn eine Identität von der Form

$$\chi_1(x_1 \cdots x_n) \cdot X_1(f) + \chi_2(x_1 \cdots x_n) \cdot X_2(f) \equiv 0$$

besteht, ohne dass χ_1 und χ_2 beide verschwinden. Natürlich befriedigt alsdann jede Lösung von $X_1(f) = 0$ auch $X_2(f) = 0$ und umgekehrt.

Haben die beiden Gleichungen $X_1(f) = 0$ und $X_2(f) = 0$ verschiedene Charakteristiken, so haben sie nicht sämmtliche Lösungen gemein; es fragt sich dann, ob sie überhaupt Lösungen gemein haben, oder, wie wir es jetzt ausdrücken können: ob die Charakteristiken von $X_1(f) = 0$ sich in Mannigfaltigkeiten zusammenfassen lassen, welche aus Charakteristiken von $X_2(f) = 0$ bestehen.

Diese Frage lässt sich direkt beantworten, wenn man die Charakteristiken der beiden Gleichungen kennt; doch wollen wir uns dabei nicht aufhalten. Wir werden im Folgenden uns darauf beschränken, die früher durch analytische Methoden abgeleiteten Resultate in der Sprache der Mannigfaltigkeitslehre auszudrücken.

Es mögen die q von einander unabhängigen Gleichungen

$$X_1(f) = 0, \cdots X_q(f) = 0$$

ein q-gliedriges vollständiges System bilden; $\psi_1 \cdots \psi_{n-q}$ seien unabhängige Lösungen desselben. Dann stellen die Gleichungen

$$\psi_1(x_1 \cdots x_n) = C_1, \cdots \psi_{n-q}(x_1 \cdots x_n) = C_{n-q}$$

mit den $n-q$ willkürlichen Constanten C_k eine Schaar von ∞^{n-q} q-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten dar, von denen jede aus je ∞^{q-1} Charakteristiken jeder einzelnen unter den q Gleichungen $X_1(f) = 0, \cdots X_q(f) = 0$ besteht. Wir bezeichnen diese ∞^{n-q} Mannigfaltigkeiten als *die charakteristischen Mannigfaltigkeiten des vollständigen Systems.*

Setzt man irgend $n-q-m$ unabhängige Functionen von $\psi_1 \cdots \psi_{n-q}$ willkürlichen Constanten gleich:

$$\Omega_1(\psi_1 \cdots \psi_{n-q}) = A_1, \cdots \Omega_{n-q-m}(\psi_1 \cdots \psi_{n-q}) = A_{n-q-m},$$

so erhält man den analytischen Ausdruck einer Schaar von ∞^{n-q-m} $(q+m)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, von denen jede einzelne aus ∞^m charakteristischen Mannigfaltigkeiten besteht.

Die Gleichungen der ∞^{n-q} charakteristischen Mannigfaltigkeiten zeigen, dass jeder Punkt des R_n einer und nur einer charakteristischen Mannigfaltigkeit angehört. Folglich können wir sagen, dass *der ganze R_n in ∞^{n-q} q-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten zerlegt ist, dass also unser vollständiges System eine Zerlegung des Raumes bestimmt.*

Umgekehrt lässt sich jede Zerlegung des R_n in ∞^{n-q} q-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten:

$$\varphi_1(x_1 \cdots x_n) = A_1, \cdots \varphi_{n-q}(x_1 \cdots x_n) = A_{n-q}$$

durch ein q-gliedriges vollständiges System definiren; denn $\varphi_1 \cdots \varphi_{n-q}$ sind nothwendig unabhängige Functionen, also giebt es nach Satz 9, S. 89 ein q-gliedriges vollständiges System, dessen allgemeinste Lösung eine willkürliche Function von $\varphi_1 \cdots \varphi_{n-q}$ ist; dieses vollständige System definirt dann die betreffende Zerlegung.

Eine einzelne lineare partielle Differentialgleichung $X(f) = 0$ ordnete jedem Punkte des R_n eine gewisse Richtung zu. Hat man mehrere solche Gleichungen, etwa die folgenden, welche ganz beliebig gewählt sein mögen:

$$X_k(f) = \sum_1^n{}^i \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (k = 1 \cdots q),$$

so ordnet jede derselben jedem Punkte des Raumes je eine Fortschreitungsrichtung zu. Zum Beispiele sind die zum Punkte $x_1^0 \cdots x_n^0$ gehörigen q Richtungen durch die Gleichungen

$$\delta x_1^0 : \delta x_2^0 : \cdots : \delta x_n^0 = \xi_{k1}(x^0) : \xi_{k2}(x^0) : \cdots : \xi_{kn}(x^0)$$
$$(k = 1 \cdots q)$$

bestimmt. Wir nennen diese q *Richtungen in dem gewählten Punkte* $x_1^0 \cdots x_n^0$ *von einander unabhängig*, wenn sich keine derselben aus den übrigen linear ableiten lässt, das heisst: wenn es nicht möglich ist q Zahlen $\lambda_1 \cdots \lambda_q$ anzugeben, die nicht sämmtlich verschwinden und doch die n Gleichungen

$$\lambda_1 \xi_{1i}^0 + \cdots + \lambda_q \xi_{qi}^0 = 0 \quad (i = 1 \cdots n)$$

befriedigen.

Hieraus folgt, dass die q Gleichungen $X_1(f) = 0, \cdots X_q(f) = 0$ *jedem Punkte* allgemeiner Lage q unabhängige Richtungen zuordnen, wenn sie selbst von einander unabhängig sind, wenn also die Gleichung

$$\sum_1^q {}_k \chi_k(x_1 \cdots x_n) \cdot X_k(f) = 0$$

nur durch $\chi_1 = 0, \cdots \chi_q = 0$ identisch befriedigt werden kann.

Will man sich geometrisch veranschaulichen, was unter „unabhängigen Richtungen" zu verstehen ist, so wird man am besten im gewöhnlichen, dreifach ausgedehnten Raume R_3 den Anfang machen; da liegt es geradezu auf der Hand. In einem Punkte des R_3 heissen zwei Richtungen von einander unabhängig, wenn sie überhaupt verschieden sind; drei Richtungen sind unabhängig, wenn sie nicht in dieselbe Ebene durch den Punkt fallen; mehr als drei von einander unabhängige Richtungen giebt es in einem Punkte des R_3 überhaupt nicht.

Dementsprechend sind q Richtungen in einem Punkte des R_n dann und nur dann von einander unabhängig, wenn dieselben zusammengenommen in keiner ebenen Mannigfaltigkeit durch diesen Punkt enthalten sind, welche weniger als q Dimensionen hat.

Jede etwaige gemeinsame Lösung der q Gleichungen

$$X_1(f) = 0, \cdots X_q(f) = 0$$

befriedigt auch alle Gleichungen von der Form

$$(2) \qquad \sum_1^q {}_k \chi_k(x_1 \cdots x_n) \cdot X_k(f) = 0.$$

Der Inbegriff aller dieser Gleichungen ordnet nun einem jeden Punkte des R_n eine ganze Schaar von Richtungen zu. Setzen wir voraus, dass die Gleichungen $X_1(f) = 0, \cdots X_q(f) = 0$ von einander unabhängig sind, so beschränken wir die Allgemeinheit der Untersuchung nicht; wir erhalten dann durch die Gleichungen (2) zu jedem Punkte

$x_1 \cdots x_n$ eine Schaar von ∞^{q-1} verschiedenen Richtungen zugeordnet. Man erkennt leicht, dass diese ∞^{q-1} Richtungen in jedem Punkte ein ebenes Bündel bilden und also eine ebene q-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit durch diesen Punkt bestimmen, nämlich die kleinste ebene Mannigfaltigkeit durch den Punkt, welche die q unabhängigen Richtungen der q Gleichungen $X_1(f) = 0, \cdots X_q(f) = 0$ enthält.

Jede etwaige gemeinsame Lösung der Gleichungen

$$X_1(f) = 0, \cdots X_q(f) = 0$$

befriedigt auch die sämmtlichen Gleichungen von der Form

$$X_k(X_j(f)) - X_j(X_k(f)) = 0.$$

Auch diese Gleichungen ordnen einem jeden Punkte $x_1 \cdots x_n$ gewisse Richtungen zu, im Allgemeinen werden aber die betreffenden Richtungen nur ausnahmsweise dem vorhin besprochenen Bündel von ∞^{q-1} Richtungen im Punkte $x_1 \cdots x_n$ angehören. Nur in einem Falle gehört in jedem Punkte des Raumes jede der von den Gleichungen

$$X_k(X_j(f)) - X_j(X_k(f)) = 0$$

zugeordneten Richtungen dem bewussten Bündel an, dann nämlich, wenn für jedes k und j eine Relation von der Form

$$X_k(X_j(f)) - X_j(X_k(f)) = \sum_1^q {}_s\, \omega_{kjs}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_s(f)$$

besteht, das heisst, wenn die Gleichungen $X_1(f) = 0, \cdots X_q(f) = 0$ zufällig ein q-gliedriges vollständiges System bilden. —

Wir können das Bündel von Richtungen, welches durch die Gleichungen $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ in jedem Punkte $x_1 \cdots x_n$ bestimmt ist, auch durch die Gleichungen

$$\delta x_1 : \cdots : \delta x_n = \sum_1^q {}_k\, \chi_k(x) \cdot \xi_{k1}(x) : \cdots : \sum_1^q {}_k\, \chi_k(x) \cdot \xi_{kn}(x)$$

definiren. Wenn wir hieraus die willkürlichen Functionen $\chi_1 \cdots \chi_q$ wegschaffen oder, was dasselbe ist, wenn wir alle $(q+1)$-reihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & \cdot\ \cdot & dx_n \\ \xi_{11} & \xi_{12} & \cdot\ \cdot & \xi_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \xi_{q1} & \xi_{q2} & \cdot\ \cdot & \xi_{qn} \end{vmatrix}$$

gleich Null setzen, so erhalten wir ein System von $n - q$ unabhängigen totalen Differentialgleichungen. Dieses System ordnet zu jedem Punkte

$x_1 \cdots x_n$ genau dasselbe ebene Bündel von ∞^{q-1} Richtungen hinzu wie die Gleichungen (2). Folglich ist auch umgekehrt durch das eben besprochene System totaler Differentialgleichungen der Inbegriff der linearen partiellen Differentialgleichungen (2) vollständig bestimmt.

Besonders bequem werden die Formeln, wenn man die q Gleichungen $X_1(f) = 0, \cdots X_q(f) = 0$ durch q andere ersetzt, welche nach q von den Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ aufgelöst sind, etwa durch die q folgenden

$$Y_k(f) = \frac{\partial f}{\partial x_{n-q+k}} + \sum_1^{n-q} \eta_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (k = 1 \cdots q).$$

Der Inbegriff aller Gleichungen (2) ist äquivalent mit dem Inbegriff aller Gleichungen:

$$\sum_1^q {}_k\, \chi_k(x_1 \cdots x_n) \cdot Y_k(f) = 0;$$

also werden die Richtungen, welche dem Punkte $x_1 \cdots x_n$ zugeordnet sind, auch durch die Gleichungen

$$dx_1 : \cdots : dx_{n-q} : dx_{n-q+1} : \cdots : dx_n =$$

$$= \sum_1^q {}_k\, \chi_k \eta_{k1} : \cdots : \sum_1^q {}_k\, \chi_k \eta_{k,n-q} : \chi_1 : \cdots : \chi_q$$

dargestellt. Wenn wir daher $\chi_1 \cdots \chi_q$ wegschaffen, erhalten wir das folgende System von totalen Differentialgleichungen:

$$(3) \qquad dx_i - \sum_1^q {}_k\, \eta_{ki}(x) \cdot dx_{n-q+k} = 0 \quad (i = 1 \cdots n - q).$$

Dass zwischen dem Systeme der linearen partiellen Differentialgleichungen $Y_1(f) = 0, \cdots Y_q(f) = 0$ und dem obigen Systeme von totalen Differentialgleichungen ein Zusammenhang besteht, haben wir schon im vorigen Kapitel, S. 91 bis 93 gesehen. Nur beschränkten wir uns damals auf den speciellen Fall, dass die q Gleichungen

$$Y_1(f) = 0, \cdots Y_q(f) = 0$$

gemeinsame Lösungen besassen, und wir wiesen nach, dass die Bestimmung dieser gemeinsamen Lösungen auf die Integration der obigen totalen Differentialgleichungen zurückkommt und umgekehrt.

Bei den vorhin durchgeführten Entwickelungen dagegen ist von Integrabilität der betreffenden Systeme von Differentialgleichungen keine Rede gewesen. Der Zusammenhang zwischen dem Systeme der linearen partiellen Differentialgleichungen $Y_1(f) = 0, \cdots Y_q(f) = 0$ und dem Systeme der totalen Differentialgleichungen (3) ist demnach von der Integrabilität dieser beiden Systeme vollständig unabhängig; dieser Zusammenhang beruht eben darauf, dass beide Systeme einem und demselben Punkte ein und dasselbe ebene Bündel von ∞^{q-1} Richtungen zuordnen.

Zum Schlusse noch die folgende Bemerkung, welche zwar selbstverständlich erscheint, aber doch gemacht werden muss: bilden die q Gleichungen $X_1f = 0, \cdots X_qf = 0$ ein q-gliedriges vollständiges System, so berührt in jedem Punkte $x_1 \cdots x_n$ die hindurchgehende charakteristische Mannigfaltigkeit des vollständigen Systems jede einzelne der ∞^{q-1} Richtungen, welche alle Gleichungen von der Form (2) diesem Punkte zuordnen.

§ 29.

Es ist endlich zweckmässig, die Mannigfaltigkeitsbetrachtungen des vorigen Paragraphen mit den Entwickelungen von § 27 in Verbindung zu bringen. Darüber jedoch nur einige Andeutungen.

Jede Transformation $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n)$ lässt sich deuten als eine Operation, welche die Punkte des R_n unter einander vertauscht, indem sie jeden Punkt $x_1 \cdots x_n$ in die neue Lage $x_1' = f_1(x), \cdots x_n' = f_n(x)$ überführt. (Kap. 1, S. 25 und 26).

Ein System von m unabhängigen Gleichungen

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \quad \cdots \Omega_m(x_1 \cdots x_n) = 0$$

stellt eine $(n-m)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit des R_n dar. Wir sagen, dass diese Mannigfaltigkeit die Transformation $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n)$ gestattet, wenn das Gleichungensystem $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_m = 0$ dies thut. Nach § 27 ist das der Fall, wenn jedes Werthsystem $x_1 \cdots x_n$, welches die Gleichungen $\Omega_1(x) = 0, \cdots \Omega_m(x) = 0$ befriedigt, zugleich den Gleichungen

$$\Omega_1(f_1(x) \cdots f_n(x)) = 0, \quad \cdots \Omega_m(f_1(x) \cdots f_n(x)) = 0$$

genügt. Daher können wir uns auch so ausdrücken:

Die Mannigfaltigkeit

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \quad \cdots \Omega_m(x_1 \cdots x_n) = 0$$

gestattet die Transformation

$$x_1' = f_1(x_1 \cdots x_n), \quad \cdots x_n' = f_n(x_1 \cdots x_n),$$

wenn jeder Punkt $x_1 \cdots x_n$ der Mannigfaltigkeit bei dieser Transformation in einen Punkt $x_1' \cdots x_n'$ übergeht, welcher ebenfalls der Mannigfaltigkeit angehört.

In Kapitel 3, S. 59 und 60 haben wir gesehen, dass durch jeden Punkt $x_1 \cdots x_n$ von allgemeiner Lage in R_n eine Bahncurve der infinitesimalen Transformation

$$X(f) = \sum_1^n {}^i\, \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

hindurchgeht. Wir definirten diese Bahncurve als den Inbegriff aller Lagen, welche der Punkt $x_1 \cdots x_n$ bei allen ∞^1 Transformationen der eingliedrigen Gruppe $X(f)$ annimmt; der Punkt $x_1 \cdots x_n$ konnte dabei auf der betreffenden Bahncurve ganz beliebig gewählt werden. Hieraus geht hervor, dass jeder Punkt $x_1 \cdots x_n$ bei jeder Transformation der eingliedrigen Gruppe $X(f)$ auf der hindurchgehenden Bahncurve bleibt, dass also *jede Bahncurve der infinitesimalen Transformation $X(f)$ bei den ∞^1 Transformationen der eingliedrigen Gruppe $X(f)$ invariant bleibt. Das gleiche gilt natürlich von jeder Mannigfaltigkeit, die aus Bahncurven besteht.*

Die Bahncurven der infinitesimalen Transformation $X(f)$ sind aber nichts anderes als die Integralcurven des simultanen Systems

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \cdots = \frac{dx_n}{\xi_n}$$

und daraus folgt wieder, dass die oben besprochenen Charakteristiken der linearen partiellen Differentialgleichung $X(f) = 0$ mit den Bahncurven der infinitesimalen Transformation $X(f)$ zusammenfallen.

Schon früher (Kap. 3, S. 58) haben wir hervorgehoben, dass eine infinitesimale Transformation Xf jedem Punkte $x_1 \cdots x_n$ von allgemeiner Lage eine gewisse Fortschreitungsrichtung zuordnet, diejenige nämlich, welche die hindurchgehende Bahncurve berührt. Offenbar fällt diese Fortschreitungsrichtung mit der Richtung zusammen, welche die Gleichung $Xf = 0$ dem betreffenden Punkte zuordnet.

Mehrere, etwa q infinitesimale Transformationen

$$X_k f = \sum_1^n {}^i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \cdots q)$$

bestimmen in jedem Punkte $x_1 \cdots x_n$ von allgemeiner Lage q verschiedene Fortschreitungsrichtungen; in Uebereinstimmung mit dem Früheren nennen wir diese letzteren von einander unabhängig, wenn die Gleichungen $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ von einander unabhängig sind.

Hieraus ergiebt sich sofort, dass die q infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_q f$ jedem Punkte von allgemeiner Lage gerade $h \leq q$ unabhängige Fortschreitungsrichtungen zuordnen, wenn zwar alle $(h+1)$-reihigen nicht aber alle h-reihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \cdot & \cdot & \xi_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{q1} & \cdot & \cdot & \xi_{qn} \end{vmatrix}$$

identisch verschwinden. —

Was wir sonst noch hier zu sagen haben, mag in einem Satze zusammengefasst werden:

Satz 4. *Sind die q infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_q f$ des n-fach ausgedehnten Raumes $x_1 \cdots x_n$ so beschaffen, dass die q Gleichungen $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ von einander unabhängig sind, so ordnen $X_1 f \cdots X_q f$ jedem Punkte $x_1 \cdots x_n$ von allgemeiner Lage q unabhängige Fortschreitungsrichtungen zu; bilden überdies die Gleichungen $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ ein q-gliedriges vollständiges System, so bestimmen $X_1 f \cdots X_q f$ eine Zerlegung des Raumes in ∞^{n-q} q-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten, die charakteristischen Mannigfaltigkeiten des vollständigen Systems. Jede dieser Mannigfaltigkeiten wird in jedem ihrer Punkte von den Richtungen, welche $X_1 f \cdots X_q f$ dem Punkte zuordnen, berührt; jede kann erzeugt werden aus ∞^{q-1} Bahncurven einer jeden infinitesimalen Transformation von der Form*

$$\chi_1(x_1 \cdots x_n) \cdot X_1 f + \cdots + \chi_q(x_1 \cdots x_n) \cdot X_q f,$$

unter $\chi_1 \cdots \chi_q$ vollkommen willkürliche Functionen ihrer Argumente verstanden; endlich gestattet jede der besprochenen Mannigfaltigkeiten alle Transformationen einer jeden eingliedrigen Gruppe

$$\chi_1 \cdot X_1 f + \cdots + \chi_q \cdot X_q f.$$

Kapitel 7.

Bestimmung aller Gleichungensysteme, welche gegebene infinitesimale Transformationen gestatten.

Zunächst werden wir definiren, was der Ausdruck bedeuten soll: das Gleichungensystem

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Omega_{n-m}(x_1 \cdots x_n) = 0$$

gestattet die infinitesimale Transformation $X(f)$. Sodann erledigen wir das äusserst wichtige Problem, alle Gleichungensysteme zu bestimmen, welche gegebene infinitesimale Transformationen gestatten.*)

Vorher wollen wir jedoch noch Folgendes bemerken:

Wir betrachten natürlich nur solche Gleichungensysteme

$$\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0,$$

welche wirklich von gewissen Werthsystemen $x_1 \cdots x_n$ befriedigt werden; dabei beschränken wir uns *stets* auf solche Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$, in

*) Vgl. Lie, Gesellsch. der Wiss. zu Christiania 1872—74, wie auch Math. Ann. Bd. XI, Bd. XXIV, S. 542—544.

deren Umgebung sich die Functionen $\Omega_1 \cdots \Omega_{n-m}$ regulär verhalten. Ausserdem wollen wir *ein für alle Male* festsetzen: wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich zugelassen wird, soll jedes Gleichungensystem $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$, welches wir betrachten, so beschaffen sein, dass nicht alle $(n-m)$-reihigen Determinanten der Matrix

$$(1) \qquad \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} & \cdot\ \cdot & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \Omega_{n-m}}{\partial x_1} & \cdot\ \cdot & \frac{\partial \Omega_{n-m}}{\partial x_n} \end{array} \right|$$

vermöge $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ verschwinden. Es ist erlaubt, diese Voraussetzung zu machen; denn ein Gleichungensystem, welches die verlangte Eigenschaft noch nicht besitzt, kann immer auf eine solche Form gebracht werden, dass es der gestellten Forderung genügt.

§ 30.

In den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ sei eine infinitesimale Transformation

$$Xf = \sum_1^n {}_i\, \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

vorgelegt. Bei Untersuchungen, welche sich auf dieselbe beziehen, *werden wir uns immer auf solche Werthsysteme beschränken, für welche die ξ_i sich regulär verhalten.*

Soll ein Gleichungensystem $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ alle endlichen Transformationen

$$x_i' = x_i + e \cdot Xx_i + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

der eingliedrigen Gruppe Xf gestatten, so muss das Gleichungensystem

$$\Omega_k(x_1 + e \cdot Xx_1 + \cdots, \cdots x_n + e \cdot Xx_n + \cdots) = 0$$
$$(k = 1 \cdots n-m)$$

oder, was dasselbe ist, das System:

$$\Omega_k + e \cdot X\Omega_k + \cdots = 0 \qquad (k = 1 \cdots n-m)$$

für alle Werthe von e mit dem Gleichungensysteme

$$\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$$

äquivalent sein. Hierzu ist offenbar *nothwendig*, dass alle $X\Omega_k$ für die Werthsysteme von $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ verschwinden, dass also das Increment $X\Omega_k\, \delta t$, welches Ω_k bei der infinitesimalen Transformation $x_i' = x_i + \xi_i\, \delta t$ erhält, vermöge $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ verschwindet.

Diese Ueberlegungen führen uns darauf, die folgende Definition aufzustellen:

Ein Gleichungensystem

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Omega_{n-m}(x_1 \cdots x_n) = 0$$

gestattet die infinitesimale Transformation Xf, sobald alle $n - m$ Ausdrücke $X\Omega_k$ vermöge des Gleichungensystems verschwinden.

Bei Zugrundelegung dieser Definition gilt dann offenbar der

Satz 1. *Soll ein Gleichungensystem alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe Xf gestatten, so muss es jedenfalls die infinitesimale Transformation Xf gestatten.*

Ausserdem erkennen wir sofort, *dass ein Gleichungensystem, welches die infinitesimale Transformation Xf gestattet, zugleich jede infinitesimale Transformation von der Form $\chi(x_1 \cdots x_n) \cdot Xf$ zulässt, vorausgesetzt natürlich, dass die Function χ sich für die in Betracht kommenden Werthsysteme des Gleichungensystems regulär verhält.*

Man kann ohne Schwierigkeit einsehen, dass die obige Definition von der Wahl der Veränderlichen unabhängig ist, dass also jedes Gleichungensystem $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$, welches die infinitesimale Transformation Xf in dem oben angegebenen Sinne gestattet, dies noch thut, wenn neue unabhängige Veränderliche $y_1 \cdots y_n$ an Stelle der x eingeführt werden. Dass dies wirklich der Fall ist, folgt unmittelbar aus dem Verhalten des Symbols Xf bei Einführung neuer Veränderlicher. Dabei wird, wie immer, vorausgesetzt, dass die y gewöhnliche Potenzreihen in den x und die x gewöhnliche Potenzreihen in den y werden für alle in Betracht kommenden Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$, $y_1 \cdots y_n$.

Es bleibt noch nachzuweisen, dass die oben aufgestellte Definition auch von der Form des Gleichungensystems $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ unabhängig ist. Erst wenn wir das bewiesen haben, ist die Berechtigung der Definition wirklich dargethan.

Um nun diesen Nachweis führen zu können, geben wir zunächst einige allgemeine Entwickelungen, die auch an und für sich schon von Wichtigkeit sind und später mehrfach Verwendung finden werden.

Es gestatte das Gleichungensystem $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ die infinitesimale Transformation Xf. Da nicht alle m-gliedrigen Determinanten der Matrix (1) vermöge $\Omega_1 = 0 \cdots \Omega_{n-m} = 0$ verschwinden, so können wir annehmen, dass die Determinante

$$\sum \pm \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \Omega_{n-m}}{\partial x_{n-m}}$$

zu den nicht verschwindenden gehört. Dann ist es möglich, die Gleichungen $\Omega_k = 0$ nach $x_1 \cdots x_m$ aufzulösen, was natürlich ein mit dem Systeme $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ analytisch äquivalentes Gleichungensystem

$$x_1 = \varphi_1(x_{n-m+1} \cdots x_n), \cdots x_{n-m} = \varphi_{n-m}(x_{n-m+1} \cdots x_n)$$

liefert. Wenn wir daher die Substitution $x_1 = \varphi_1, \cdots x_{n-m} = \varphi_{n-m}$ durch das Zeichen [] andeuten, so haben wir:

$$[\Omega_1] \equiv 0, \cdots [\Omega_{n-m}] \equiv 0;$$

dass ferner das Gleichungensystem $\Omega_1 = 0 \cdots \Omega_{n-m} = 0$ die infinitesimale Transformation Xf gestattet, wird durch die Identitäten

$$[X\Omega_1] \equiv 0, \cdots [X\Omega_{n-m}] \equiv 0$$

ausgedrückt.

Es sei jetzt $\Phi(x_1 \cdots x_n)$ eine beliebige Function, welche sich für die in Betracht kommenden Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$ regulär verhält. Dann ergiebt sich:

$$[X\Phi] = \sum_1^n {}^i [Xx_i] \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right]$$

und andrerseits

$$[X[\Phi]] = \sum_1^{n-m} {}^k [X\varphi_k] \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\right] + \sum_1^m {}^\mu [Xx_{n-m+\mu}] \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-m+\mu}}\right],$$

also wird:

$$(2) \qquad [X\Phi] = [X[\Phi]] + \sum_1^{n-m} {}^k [X(x_k - \varphi_k)] \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\right].$$

Setzen wir hier der Reihe nach die Functionen $\Omega_1 \cdots \Omega_{n-m}$ an Stelle von Φ ein und berücksichtigen, dass $[\Omega_j]$ und also auch $X[\Omega_j]$, sowie $[X[\Omega_j]]$ identisch verschwinden, so finden wir:

$$[X\Omega_j] = \sum_1^{n-m} {}^k [X(x_k - \varphi_k)] \left[\frac{\partial \Omega_j}{\partial x_k}\right]$$
$$(j = 1 \cdots n-m).$$

Da nun $[X\Omega_j]$ ebenfalls identisch verschwindet, während die Determinante

$$\sum \pm \left[\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}\right] \cdots \left[\frac{\partial \Omega_{n-m}}{\partial x_{n-m}}\right]$$

dies nicht thut, so folgt:

$$[X(x_k - \varphi_k)] \equiv 0 \quad (k = 1 \cdots n-m),$$

also nimmt die Gleichung (2) die Form an:

$$(3) \qquad [X\Phi] \equiv [X[\Phi]].$$

Diese für jede Function $\Phi(x_1 \cdots x_n)$ gültige Formel wird uns später sehr nützlich sein. Hier brauchen wir sie nur für den besonderen Fall, dass Φ vermöge $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ verschwindet; dann ist $[\Phi]$ identisch Null und ebenso $[X[\Phi]]$; unsere Formel zeigt daher, dass auch $[X\Phi]$ identisch verschwindet. In Worten können wir dieses Ergebniss folgendermassen ausdrücken:

Satz 2. *Gestattet das Gleichungensystem*

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Omega_{n-m}(x_1 \cdots x_n) = 0$$

die infinitesimale Transformation

$$Xf = \sum_1^n \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

und ist $V(x_1 \cdots x_n)$ eine Function, welche vermöge dieses Gleichungensystems verschwindet, so verschwindet auch die Function XV vermöge $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$.

Ist nun $V_1 = 0, \cdots V_{n-m} = 0$ ein beliebiges mit

$$\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$$

analytisch äquivalentes Gleichungensystem, so verschwinden nach dem eben ausgesprochenen Satze alle $n - m$ Ausdrücke XV_k vermöge $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ und also auch vermöge $V_1 = 0, \cdots V_{n-m} = 0$; mit andern Worten: auch das Gleichungensystem $V_1 = 0, \cdots V_{n-m} = 0$ gestattet die infinitesimale Transformation Xf.

Damit ist endlich nachgewiesen, dass unsere obige Definition für die Invarianz eines Gleichungensystems bei einer infinitesimalen Transformation auch von der Form dieses Gleichungensystems unabhängig ist. Die Einführung dieser Definition ist deshalb ganz naturgemäss.

Wir wissen, dass ein Gleichungensystem nur dann alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe Xf gestatten kann, wenn es die infinitesimale Transformation Xf gestattet. Diese nothwendige Bedingung ist aber zugleich hinreichend; es lässt sich nämlich nachweisen, dass jedes Gleichungensystem, welches die infinitesimale Transformation Xf gestattet, überhaupt alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe Xf zulässt.

In der That, das Gleichungensystem $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ gestatte die infinitesimale Transformation Xf; ferner sei wie oben $x_1 = \varphi_1, \cdots x_{n-m} = \varphi_{n-m}$ eine aufgelöste Form des Gleichungensystems $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$; endlich möge die Substitution $x_\mu = \varphi_\mu$ wieder durch das Zeichen [ ] angedeutet werden.

Unter diesen Voraussetzungen ist zunächst $[\Omega_k] \equiv 0$, ferner

$[X\Omega_k] \equiv 0$ und aus dem soeben aufgestellten Satze 2 ergiebt sich weiter:

$$[XX\Omega_k] \equiv 0, \quad [XXX\Omega_k] \equiv 0 \cdots.$$

Folglich verschwindet die unendliche Reihe

$$\Omega_k + \frac{e}{1} X\Omega_k + \frac{e^2}{1 \cdot 2} XX\Omega_k + \cdots$$

bei der Substitution $x_\mu = \varphi_\mu$ identisch, welchen Werth auch der Parameter e haben mag. Das Gleichungensystem

$$\Omega_k + e \cdot X\Omega_k + \cdots \quad (k = 1 \cdots n - m)$$

wird also bei beliebigem e von den Werthsystemen des Gleichungensystems $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ befriedigt, was nach dem früher Gesagten nichts anderes heisst als: das Gleichungensystem

$$\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$$

gestattet alle Transformationen

$$x_i' = x_i + e \cdot Xx_i + \cdots \quad (i = 1 \cdots n)$$

der eingliedrigen Gruppe Xf.

Damit ist die oben aufgestellte Behauptung bewiesen; wir haben demnach das

Theorem 14. *Das Gleichungensystem*

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Omega_{n-m}(x_1 \cdots x_n) = 0$$

gestattet dann und nur dann alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe Xf, wenn es die infinitesimale Transformation Xf gestattet, das heisst, wenn alle $n - m$ Ausdrücke $X\Omega_k$ vermöge $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ verschwinden.

Dieses Theorem ist bewiesen unter der Voraussetzung, die wir immer machen, wo nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt wird, unter der Voraussetzung nämlich, das nicht alle $(n - m)$-reihigen Determinanten der Matrix (1) vermöge $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ verschwinden. Ausserdem müssen sich, wie schon gesagt, sowohl die Ω_k als die ξ_i für die in Betracht kommenden Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$ regulär verhalten.

Es lässt sich leicht einsehen, dass das Theorem 14 nicht mehr gültig bleibt, wenn jene Voraussetzung über die Determinanten der Matrix (1) nicht erfüllt ist. Betrachten wir nämlich zum Beispiel das Gleichungensystem

$$\Omega_1 = x_1^2 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = x_{n-m}^2 = 0,$$

vermöge dessen alle $(n - m)$-reihigen Determinanten der Matrix (1) verschwinden. Wir finden bei demselben: $X\Omega_k = x_k \cdot Xx_k$, also verschwinden hier die $X\Omega_k$ sämmtlich vermöge $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$, welche Form auch Xf haben mag. Wäre demnach das Theorem 14 auch jetzt noch richtig, so müsste das Gleichungensystem

$$x_1^2 = 0, \cdots x_{n-m}^2 = 0$$

jede beliebige eingliedrige Gruppe Xf gestatten, was natürlich nicht der Fall ist.

Wir schliessen hieraus Folgendes: Wenn das Gleichungensystem $\Omega_1 = 0 \cdots \Omega_{n-m} = 0$ alle $(n-m)$-reihigen Determinanten der Matrix (1) zum Verschwinden bringt, so ist das Verschwinden aller $X\Omega_k$ vermöge $\Omega_1 = 0 \cdots \Omega_{n-m} = 0$ zwar nothwendig, damit dieses Gleichungensystem die eingliedrige Gruppe Xf gestattet, jedoch nicht hinreichend.

Nun aber führen allgemeine Untersuchungen öfters auf Gleichungensysteme, bei denen man kein Mittel hat, um zu entscheiden, ob jene mehrfach erwähnte Forderung erfüllt ist. Woran soll man dann erkennen, ob das betreffende Gleichungensystem eine vorgelegte eingliedrige Gruppe gestattet oder nicht?

In derartigen Fällen leistet ein Kriterium, welches wir jetzt entwickeln wollen, häufig gute Dienste.

Es sei

$$\Delta_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Delta_s(x_1 \cdots x_n) = 0$$

ein Gleichungensystem. Wir setzen voraus, dass die Functionen $\Delta_1 \cdots \Delta_s$ sich innerhalb eines gewissen Bereiches B in der Umgebung derjenigen Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$, welche dem Gleichungensysteme genügen, regulär verhalten. Dagegen setzen wir nichts über das Verhalten der Functionaldeterminanten der Δ voraus; wir verlangen nicht einmal, dass unsere s Gleichungen von einander unabhängig sind, die Zahl s kann also unter Umständen auch grösser sein als n.

Ferner sei

$$Xf = \sum_1^n{}^i \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

eine infinitesimale Transformation, und es mögen unter den Werthsystemen $x_1 \cdots x_n$, für welche sich $\xi_1 \cdots \xi_n$ regulär verhalten, solche vorhanden sein, welche die Gleichungen $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_s = 0$ befriedigen und überdies dem Bereiche B angehören.

Wenn nun unter diesen Voraussetzungen die s Ausdrücke $X\Delta_\sigma$ sich folgendermassen darstellen lassen:

$$X\Delta_\sigma \equiv \sum_1^s{}^\tau \varrho_{\sigma\tau}(x_1 \cdots x_n) \cdot \Delta_\tau(x_1 \cdots x_n) \quad (\sigma = 1 \cdots s),$$

und wenn sich dabei alle $\varrho_{\sigma\tau}$ für die betreffenden Werthsysteme von

$$\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_s = 0$$

regulär verhalten, so gestattet unser Gleichungensystem jede Transformation

$$x_i' = x_i + \frac{e}{1} \cdot Xx_i + \cdots \quad (i = 1 \cdots n)$$

der eingliedrigen Gruppe Xf.

Der Beweis hierfür ist sehr einfach. Wir haben:

$$\Delta_\sigma(x_1' \cdots x_n') = \Delta_\sigma(x_1 \cdots x_n) + \frac{e}{1} \cdot X\Delta_\sigma + \cdots;$$

es ergiebt sich aber:

$$XX\Delta_\sigma \equiv \sum_1^s {}^\tau \left\{ X\varrho_{\sigma\tau} + \sum_1^s {}^\pi \varrho_{\sigma\pi}\varrho_{\pi\tau} \right\} \cdot \Delta_\tau,$$

wo die Coefficienten der Δ auf der rechten Seite sich wiederum für die Werthsysteme von $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_s = 0$ regulär verhalten. In gleicher Weise drücken sich die $XXX\Delta_\sigma$ linear durch $\Delta_1 \cdots \Delta_s$ aus und so fort. Kurz wir finden:

$$\Delta_\sigma(x_1' \cdots x_n') = \sum_1^s {}^\tau \psi_{\sigma\tau}(x_1 \cdots x_n, e) \cdot \Delta_\tau(x) \quad (\sigma = 1 \cdots s),$$

wo die $\psi_{\sigma\tau}$ gewöhnliche Potenzreihen von e sind und sich ausserdem für die Werthsysteme von $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_s = 0$ regulär verhalten. Hieraus geht hervor, dass jedes Werthsystem $x_1 \cdots x_n$, welches den Gleichungen $\Delta_1(x) = 0, \cdots \Delta_s(x) = 0$ genügt, auch die Gleichungen

$$\Delta_\sigma\left(x_1 + \frac{e}{1} \cdot Xx_1 + \cdots, \cdots x_n + \frac{e}{1} \cdot Xx_n + \cdots\right) = 0 \quad (\sigma = 1 \cdots s)$$

befriedigt, dass also das Gleichungensystem $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_s = 0$ wirklich die eingliedrige Gruppe Xf gestattet.

Demnach haben wir den

Satz 3. *Ist in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ ein Gleichungensystem*

$$\Delta_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Delta_s(x_1 \cdots x_n) = 0$$

vorgelegt, von dem nicht feststeht, ob seine Gleichungen von einander unabhängig sind und noch weniger, ob die s-reihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Delta_1}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial \Delta_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \Delta_s}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial \Delta_s}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

sämmtlich vermöge $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_s = 0$ verschwinden oder nicht, so gestattet dieses Gleichungensystem sicher dann alle Transformationen der *eingliedrigen Gruppe Xf, wenn die s Ausdrücke $X\Delta_\sigma$ in der Form*

$$X\Delta_\sigma \equiv \sum_1^s {}^\tau \varrho_{\sigma\tau}(x_1 \cdots x_n) \cdot \Delta_\tau \quad (\sigma = 1 \cdots s)$$

dargestellt werden können, und wenn sich dabei die $\varrho_{\sigma\tau}$ für diejenigen Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$ regulär verhalten, welche das Gleichungensystem $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_s = 0$ befriedigen.

§ 31.

Im vorigen Paragraphen haben wir gezeigt, dass die Bestimmung aller Gleichungensysteme, welche die eingliedrige Gruppe Xf gestatten, darauf hinauskommt, alle Gleichungensysteme zu bestimmen, welche die infinitesimale Transformation Xf gestatten. Es entsteht daher die Frage nach allen Gleichungensystemen $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ $(m \leqq n)$, welche die infinitesimale Transformation

$$Xf = \sum_1^n {}^i \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

gestatten.

Diese Frage soll im gegenwärtigen Paragraphen ihre Beantwortung finden.

Es müssen zwei Fälle unterschieden werden, entweder nämlich verschwinden nicht alle n Functionen $\xi_1 \cdots \xi_n$ vermöge

$$\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0,$$

oder die Gleichungen $\xi_1 = 0, \cdots \xi_n = 0$ sind eine Folge von

$$\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0.$$

Behandeln wir zunächst den ersten Fall.

Es möge etwa ξ_n nicht vermöge $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ verschwinden. Dann gestattet das betreffende Gleichungensystem auch die infinitesimale Transformation

$$Yf = \frac{1}{\xi_n} Xf = \frac{\xi_1}{\xi_n}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\xi_{n-1}}{\xi_n}\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Ist nun $x_1^0 \cdots x_n^0$ ein Werthsystem, welches den Gleichungen $\Omega_k = 0$ genügt und ξ_n nicht zum Verschwinden bringt, so denken wir uns die Hauptlösungen von $Xf = 0$ oder, was dasselbe ist, von $Yf = 0$ in Bezug auf $x_n = x_n^0$ bestimmt; diese Hauptlösungen, welche $y_1 \cdots y_{n-1}$ heissen mögen, verhalten sich in der Umgebung von $x_1^0 \cdots x_n^0$ regulär und sind von x_n unabhängig. Wenn wir daher an Stelle der x die neuen unabhängigen Veränderlichen $y_1 \cdots y_{n-1}$, $y_n = x_n$ einführen, so ist das eine erlaubte Transformation. Dabei erhält Yf die Form $\frac{\partial f}{\partial y_n}$, und das Gleichungensystem $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ geht in ein neues:

$$\overline{\Omega}_1(y_1 \cdots y_n) = 0, \cdots \overline{\Omega}_{n-m}(y_1 \cdots y_n) = 0$$

über, welches nun die infinitesimale Transformation $\frac{\partial f}{\partial y_n}$ gestattet.

Hieraus geht hervor, dass das Gleichungensystem $\overline{\Omega}_k = 0$ nicht nach y_n auflösbar ist. Wäre es nämlich nach y_n auflösbar und ergäbe sich etwa $y_n - \psi(y_1 \cdots y_{n-1}) = 0$, so müsste der Ausdruck

$$Y(y_n - \psi) = \frac{\partial}{\partial y_n}(y_n - \psi) = 1$$

vermöge $\overline{\Omega}_1 = 0, \cdots \overline{\Omega}_{n-m} = 0$ verschwinden, was widersinnig ist. Folglich kann y_n in den Gleichungen $\overline{\Omega}_k = 0$ höchstens formell vorkommen, das heisst, wir können diese Gleichungen unter allen Umständen auf eine solche Form bringen, dass sie Relationen zwischen $y_1 \cdots y_{n-1}$ allein darstellen. Dabei ist die Form dieser Relationen keiner weiteren Beschränkung unterworfen.

Kehren wir jetzt zu den ursprünglichen Veränderlichen zurück, so erkennen wir sofort, dass das Gleichungensystem $\Omega_k = 0$ sich durch Relationen zwischen $n - 1$ unabhängigen Lösungen $y_1 \cdots y_{n-1}$ der Gleichung $Xf = 0$ ausdrücken lässt. Dieses Ergebniss ist offenbar unabhängig von der Voraussetzung, dass gerade ξ_n nicht vermöge $\Omega_k = 0$ verschwinden sollte; wir sehen also, dass jedes Gleichungensystem, welches die infinitesimale Transformation Xf gestattet und $\xi_1 \cdots \xi_n$ nicht zum Verschwinden bringt, durch Relationen zwischen Lösungen von $Xf = 0$ dargestellt wird. Andererseits wissen wir, dass ganz beliebige Relationen zwischen den Lösungen von $Xf = 0$ ein Gleichungensystem darstellen, welches nicht blos die infinitesimale Transformation Xf, sondern alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe Xf gestattet (Kap. 6, Satz 3, S. 98). Mithin bestätigt sich das früher bewiesene Resultat, dass unser Gleichungensystem $\Omega_k = 0$ die eingliedrige Gruppe Xf gestattet.

Wir kommen nunmehr zu dem zweiten der oben unterschiedenen beiden Fälle; derselbe kann natürlich nur dann eintreten, wenn es überhaupt Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$ giebt, für welche alle n Functionen ξ_i verschwinden.

Ist $x_1^0 \cdots x_n^0$ irgend ein Werthsystem, für welches alle ξ_i verschwinden, so reduciren sich die Transformationen

$$x_i' = x_i + \frac{e}{1}\xi_i + \frac{e^2}{1 \cdot 2} X\xi_i + \cdots \quad (i = 1 \cdots n)$$

unserer eingliedrigen Gruppe bei der Substitution $x_i = x_i^0$ auf

$$x_1' = x_1^0, \cdots x_n = x_n^0,$$

was wir so ausdrücken: das Werthsystem $x_1^0 \cdots x_n^0$ bleibt bei allen Transformationen der eingliedrigen Gruppe Xf invariant. Hierin liegt, dass jedes Gleichungensystem von der Form

$$\xi_1 = 0, \cdots \xi_n = 0, \quad \psi_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \quad \psi_2(x_1 \cdots x_n) = 0 \cdots,$$

welches überhaupt von Werthsystemen $x_1 \cdots x_n$ befriedigt wird, alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe Xf gestattet. In dieser Form sind aber alle Gleichungensysteme enthalten, welche $\xi_1 \cdots \xi_n$ zum Verschwinden bringen; folglich ist damit auch der zweite der früher unterschiedenen Fälle erledigt.

Die gewonnenen Ergebnisse fassen wir zusammen in dem

Theorem 15. *Es giebt zwei Arten von solchen Gleichungensystemen, welche die infinitesimale Transformation*

$$Xf = \sum_1^n \xi_i(x_1 \cdots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

und also überhaupt alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe Xf gestatten. Die Gleichungensysteme der ersten Art werden durch ganz beliebige Relationen zwischen den Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung $Xf = 0$ dargestellt. Die Gleichungensysteme der zweiten Art haben die Form:

$$\xi_1 = 0, \cdots \xi_n = 0, \quad \psi_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \quad \psi_2(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots,$$

wobei die ψ vollkommen willkürlich sind, nur muss es natürlich Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$ geben, welche die betreffenden Gleichungen befriedigen.

Wir knüpfen hieran noch eine kurze Bemerkung.

Es seien $C_1 \cdots C_{n-m}$ willkürliche Constanten, ferner seien $\Omega_1 \cdots \Omega_{n-m}$ Functionen der x, dagegen von den C frei; endlich möge jedes Gleichungensystem von der Form

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = C_1, \cdots \Omega_{n-m}(x_1 \cdots x_n) = C_{n-m}$$

die von den C freie infinitesimale Transformation Xf gestatten. Unter diesen Voraussetzungen müssen die $n - m$ Ausdrücke $X\Omega_k$ vermöge

$$\Omega_1 = C_1, \cdots \Omega_{n-m} = C_{n-m}$$

verschwinden und zwar für alle Werthe der C. Da aber die $X\Omega_k$ alle von den C frei sind, so ist das nur möglich, wenn die $X\Omega_k$ identisch verschwinden, das heisst, wenn die Ω_k Lösungen der Gleichung $Xf = 0$ sind. Also gilt der

Satz 4. *Stellen die Gleichungen*

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = C_1, \cdots \Omega_{n-m}(x_1 \cdots x_n) = C_{n-m}$$

mit den willkürlichen Constanten $C_1 \cdots C_{n-m}$ ein Gleichungensystem dar, welches die infinitesimale Transformation Xf gestattet, so sind $\Omega_1 \cdots \Omega_{n-m}$ Lösungen der von den C freien Differentialgleichung $Xf = 0$.

§ 32.

Nunmehr seien q beliebige infinitesimale Transformationen

$$X_k f = \sum_1^n {}^i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots q)$$

vorgelegt und gesucht die Gleichungensysteme $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0 \cdots$, welche alle diese infinitesimalen Transformationen gestatten. Wir beschränken uns dabei wie immer auf Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$, für welche sich alle ξ_{ki} regulär verhalten.

Zunächst ist klar, dass jedes der gesuchten Gleichungensysteme auch alle infinitesimalen Transformationen von der Form

$$\sum_1^q {}^k\, \chi_k(x_1 \cdots x_n) \cdot X_k f$$

gestattet, vorausgesetzt, dass sich $\chi_1 \cdots \chi_q$ für die Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$, welche dem Gleichungensysteme genügen, regulär verhalten. Aus dem vorigen Paragraphen ersehen wir überdies, dass jedes solche Gleichungensystem auch alle endlichen Transformationen derjenigen eingliedrigen Gruppen gestattet, welche von den besprochenen infinitesimalen Transformationen erzeugt werden.

Ferner erinnern wir an Kap. 6, Satz 1, S. 97. Wir sahen damals, dass jede Function von $x_1 \cdots x_n$, welche die beiden infinitesimalen Transformationen $X_1 f$ und $X_2 f$ gestattet, auch die Transformation $X_1 X_2 f - X_2 X_1 f$ zulässt. Genau dasselbe gilt auch von jedem Gleichungensysteme, welches die beiden infinitesimalen Transformationen $X_1 f$ und $X_2 f$ zulässt.

In der That, das Gleichungensystem

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - m)$$

gestatte die beiden infinitesimalen Transformationen $X_1 f$ und $X_2 f$, es mögen also alle Ausdrücke $X_1 \Omega_j$ und $X_2 \Omega_j$ vermöge des Systems $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ verschwinden. Dann gilt dasselbe nach Satz 2, S. 111 auch von allen Ausdrücken $X_1 X_2 \Omega_j$ und $X_2 X_1 \Omega_j$, folglich verschwindet auch jedes $X_1 X_2 \Omega_j - X_2 X_1 \Omega_j$ vermöge des Gleichungensystems $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$. Damit haben wir aber den

Satz 5. *Gestattet ein Gleichungensystem*

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Omega_{n-m}(x_1 \cdots x_n) = 0$$

die beiden infinitesimalen Transformationen $X_1 f$ und $X_2 f$, so gestattet es auch die infinitesimale Transformation $X_1 X_2 f - X_2 X_1 f$.

Diesen Satz benutzen wir jetzt in ähnlicher Weise wie seiner Zeit den Satz 1, S. 84, als es sich darum handelte, die gemeinsamen

Lösungen von q gegebenen Gleichungen $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ zu bestimmen. Damals führten wir das gestellte Problem auf die Bestimmung der Lösungen eines vollständigen Systems zurück. Jetzt verfahren wir folgendermassen.

Wir bilden alle infinitesimalen Transformationen

$$X_k X_j f - X_j X_k f = (X_k X_j)$$

und untersuchen, ob die linearen partiellen Differentialgleichungen $(X_k X_j) = 0$ eine Folge von $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ sind. Ist dies nicht der Fall, so fügen wir zu den infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_q f$ alle Transformationen $(X_k X_j)$ hinzu*), was erlaubt ist, da jedes Gleichungensystem, welches $X_1 f \cdots X_q f$ gestattet, auch $(X_k X_j)$ zulässt. Nunmehr behandeln wir die infinitesimalen Transformationen

$$X_1 f \cdots X_q f, \ (X_k X_j) \quad (k, j = 1 \cdots q)$$

zusammengenommen gerade so wie vorher $X_1 f \cdots X_q f$ allein, das heisst, wir bilden alle infinitesimalen Transformationen

$$((X_k X_j) X_l), \quad ((X_k X_j)(X_h X_l))$$

und untersuchen, ob diese Ausdrücke gleich Null gesetzt Gleichungen ergeben, welche aus $X_k f = 0$, $(X_k X_j) = 0$ $(k, j = 1 \cdots q)$ folgen. Wenn dies nicht der Fall ist, fügen wir alle gefundenen infinitesimalen Transformationen zu $X_k f$, $(X_k X_j)$ $(k, j = 1 \cdots q)$ hinzu.

Auf diese Weise fahren wir fort und müssen so schliesslich eine Reihe von infinitesimalen Transformationen:

$$X_1 f \cdots X_q f, \ X_{q+1} f \cdots X_{q'} f \quad (q' \geqq q)$$

erhalten, welche so beschaffen sind, dass jede Gleichung

$$(X_k X_j) = 0 \quad (k, j = 1 \cdots q')$$

eine Folge von $X_1 f = 0, \cdots X_{q'} f = 0$ ist. Die Gleichungen

$$X_1 f = 0, \cdots X_{q'} f = 0$$

bestimmen alsdann ein vollständiges System mit q' oder weniger Gliedern. Also haben wir das

Theorem 16. *Die Aufgabe, alle Gleichungensysteme zu bestimmen, welche q gegebene infinitesimale Transformationen $X_1 f \cdots X_q f$ gestatten, lässt sich immer darauf zurückführen alle Gleichungensysteme zu bestimmen, welche ausser $X_1 f \cdots X_q f$ noch gewisse weitere infinitesimale Transformationen*

$$X_{q+1} f \cdots X_{q'} f \quad (q' \geqq q)$$

gestatten, wo nunmehr die Gleichungen

$$X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0, \ X_{q+1} f = 0, \cdots X_{q'} f = 0$$

---

*) In der Praxis wird man im Allgemeinen nicht alle infinitesimalen Transformationen $(X_k X_j)$ hinzufügen, sondern nur gewisse unter ihnen.

ein vollständiges System bestimmen, welches ebensoviel Glieder hat, als es unter diesen Gleichungen unabhängige giebt.

Wir können uns demnach von jetzt ab auf das folgende speciellere Problem beschränken:

Gegeben sind in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ q infinitesimale Transformationen

$$X_k f = \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \cdots q)$$

von solcher Beschaffenheit, dass unter den q Gleichungen

$$X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$$

gerade $p \leqq q$ von einander unabhängige vorhanden sind, und dass irgend p unabhängige unter diesen q Gleichungen ein p-gliedriges vollständiges System bilden, welchem $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ sämmtlich angehören. Gesucht werden alle Gleichungensysteme in $x_1 \cdots x_n$, welche die infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_q f$ gestatten.

Es ist klar, dass wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen dürfen, dass $X_1 f \cdots X_q f$ als *infinitesimale Transformationen* von einander unabhängig sind. Ferner bemerken wir, dass unter den Voraussetzungen des Problems die $(p+1)$-reihigen Determinanten der Matrix

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \xi_{11} & \cdot & \cdot & \xi_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{q1} & \cdot & \cdot & \xi_{qn} \end{vmatrix}$$

alle identisch verschwinden, während nicht alle p-reihigen dies thun.

Der erste Schritt zur Erledigung unseres Problems ist der, dass wir die Gleichungensysteme, welche die q infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_q f$ gestatten, in zwei getrennte Classen eintheilen; als Eintheilungsgrund nehmen wir dabei das Verhalten der p-reihigen Determinanten von (4).

In die erste Classe rechnen wir alle Gleichungensysteme, vermöge deren nicht alle p-reihigen Determinanten der Matrix (4) *verschwinden.*

In die zweite Classe rechnen wir alle Gleichungensysteme, vermöge deren die bewussten p-reihigen Determinanten sämmtlich verschwinden.

Diese beiden Classen untersuchen wir jetzt der Reihe nach.

§ 33.

Unter den q Gleichungen $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ wählen wir irgend p von einander unabhängige aus; es seien etwa $X_1 f = 0, \cdots X_p f = 0$ solche, so dass also nicht alle p-reihigen Determinanten der Matrix

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} \xi_{11} & \cdot & \cdot & \xi_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{p1} & \cdot & \cdot & \xi_{pn} \end{vmatrix}$$

identisch verschwinden. Wir suchen nun von den Gleichungensystemen $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ der ersten Art diejenigen, welche die Unabhängigkeit der Gleichungen $X_1 f = 0, \cdots X_p f = 0$ nicht aufheben, welche somit nicht alle p-reihigen Determinanten der Matrix (5) zum Verschwinden bringen. Dabei wollen wir zunächst die specielle Voraussetzung machen, dass eine bestimmte p-reihige Determinante der Matrix (5), etwa die folgende,

$$D = \begin{vmatrix} \xi_{1,\,n-p+1} & \cdot & \xi_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{p,\,n-p+1} & \cdot & \xi_{pn} \end{vmatrix}$$

weder identisch noch auch vermöge $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ verschwindet.

Unter den gemachten Voraussetzungen bestehen Identitäten von der Form

$$X_{p+j} f \equiv \sum_1^p {}^\pi \chi_{j\pi}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_\pi f \quad (j = 1 \cdots q-p).$$

Zur Bestimmung der Functionen $\chi_{j\pi}$ haben wir dabei die Gleichungen:

$$\sum_1^p {}^\pi \xi_{\pi\nu} \cdot \chi_{j\pi} = \xi_{p+j,\,\nu} \quad (\nu = 1 \cdots n,\ j = 1 \cdots q-p);$$

da nun die Determinante D nicht vermöge $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ verschwindet, so erkennen wir, dass die $\chi_{j\pi}$ sich für die Werthsysteme von $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ regulär verhalten, dass wir also unter den gemachten Voraussetzungen die infinitesimalen Transformationen $X_{p+1} f \cdots X_q f$ weglassen können; denn gestattet das Gleichungensystem $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m}$ die Transformationen $X_1 f \cdots X_p f$, so gestattet es auch sofort $X_{p+1} f \cdots X_q f$.

Die infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_p f$ ersetzen wir jetzt durch p andere von der besonderen Form:

$$Y_\pi f = \frac{\partial f}{\partial x_{n-p+\pi}} + \sum_1^{n-p} {}^i \eta_{\pi i}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (\pi = 1 \cdots p).$$

Wir dürfen dies, denn zur Bestimmung von $Y_1 f \cdots Y_p f$ erhalten wir die Gleichungen

$$\sum_1^p {}^\pi \xi_{j,\,n-p+\pi} \cdot Y_\pi f = X_j f \quad (j = 1 \cdots p),$$

welche auflösbar sind, und für die $Y_\pi f$ Ausdrücke von der Form

$$Y_\pi f = \sum_1^p {}_j\, \varrho_{\pi j}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_j f \qquad (\pi = 1 \cdots p)$$

liefern, deren Coefficienten $\varrho_{\pi j}$ sich für die Werthsysteme von

$$\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$$

regulär verhalten. Gestattet daher das Gleichungensystem $\Omega_k = 0$ die infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_p f$, so gestattet es auch $Y_1 f \cdots Y_p f$ und umgekehrt.

Es sei $x_1^0 \cdots x_n^0$ irgend ein Werthsystem, welches die Gleichungen $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m}$ befriedigt und die Determinante D nicht zum Verschwinden bringt. Dann verhalten sich die $\eta_{\pi i}$ in der Umgebung von $x_1^0 \cdots x_n^0$ regulär. Nun bilden die Gleichungen $Y_1 f = 0, \cdots Y_p f = 0$ ebenso wie die Gleichungen $X_1 f = 0, \cdots X_p f = 0$ ein p-gliedriges vollständiges System, sie besitzen daher nach Theorem 12, S. 91 $n - p$ Hauptlösungen $y_1 \cdots y_{n-p}$, welche sich in der Umgebung von $x_1^0 \cdots x_n^0$ regulär verhalten und sich für $x_{n-p+1} = x_{n-p+1}^0, \cdots x_n = x_n^0$ auf bezüglich $x_1 \cdots x_{n-p}$ reduciren.

Setzen wir daher noch $y_{n-p+1} = x_{n-p+1}, \cdots y_n = x_n$, so können wir $y_1 \cdots y_n$ an Stelle der x als neue Veränderliche einführen. Dabei erhalten die infinitesimalen Transformationen $Y_\pi f$ die Form:

$$Y_1 f = \frac{\partial f}{\partial y_{n-p+1}}, \cdots Y_p f = \frac{\partial f}{\partial y_n};$$

das Gleichungensystem $\Omega_k = 0$ aber geht über in:

$$\overline{\Omega_1}(y_1 \cdots y_n) = 0, \cdots \overline{\Omega}_{n-m}(y_1 \cdots y_n) = 0,$$

und dieses neue Gleichungensystem muss nun die infinitesimalen Transformationen $\frac{\partial f}{\partial y_{n-p+1}}, \cdots \frac{\partial f}{\partial y_n}$ gestatten. Hieraus folgt, dass die Gleichungen $\overline{\Omega}_k = 0$ nach keiner von den Veränderlichen $y_{n-p+1} \cdots y_n$ auflösbar sind, dass sie also diese Veränderlichen höchstens scheinbar enthalten und sich unter allen Umständen so umformen lassen, dass sie Relationen zwischen $y_1 \cdots y_{n-p}$ allein darstellen.

Kehren wir jetzt zu den ursprünglichen Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ zurück, so sehen wir, dass die Gleichungen $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ nichts anderes sind als Relationen zwischen den Lösungen des vollständigen Systems $Y_1 f = 0, \cdots Y_p f = 0$ oder, was dasselbe, des vollständigen Systems $X_1 f = 0, \cdots X_p f = 0$. Dieses Ergebniss ist überdies unabhängig von der Voraussetzung, dass gerade die Determinante D nicht vermöge $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ verschwinden sollte; es gilt immer dann, wenn die p-reihigen Determinanten der Matrix (5) nicht sämmtlich vermöge $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ verschwinden.

Also können wir das folgende Theorem aussprechen:

Theorem 17. *Liefern die q infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_q f$ in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ gleich Null gesetzt gerade $p \leqq q$ unabhängige Gleichungen, etwa $X_1 f = 0, \cdots X_p f = 0$, und bilden diese letzteren ein p-gliedriges vollständiges System, so wird jedes Gleichungensystem*

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Omega_{n-m}(x_1 \cdots x_n) = 0,$$

welches die q infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_q f$ gestattet, jedoch die Unabhängigkeit der Gleichungen

$$X_1 f = 0, \cdots X_p f = 0$$

nicht aufhebt, durch Relationen zwischen den Lösungen des p-gliedrigen vollständigen Systems $X_1 f = 0, \cdots X_p f = 0$ dargestellt.

Durch dieses Theorem ist die Bestimmung aller Gleichungensysteme geleistet, welche unserer ersten Classe angehören. An Stelle von $X_1 f = 0, \cdots X_p f = 0$ brauchen wir nur der Reihe nach alle Systeme von p unabhängigen unter den q Gleichungen $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ einzusetzen.

§ 34.

Wir kommen jetzt zu der zweiten Classe der Gleichungensysteme, welche die infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_q f$ gestatten; zu den Gleichungensystemen nämlich, welche alle p-reihigen Determinanten der Matrix (4) zum Verschwinden bringen.

Hier müssen sogleich eine Reihe von Unterfällen unterschieden werden. Nämlich das Gleichungensystem

$$\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$$

kann ja möglicherweise ausser den p-reihigen Determinanten der Matrix (4) *auch noch alle* $(p-1)$*-reihigen, ja alle* $(p-2)$*-reihigen u. s. w. zum Verschwinden bringen.*

Wir sehen also, dass zu jedem der gesuchten Gleichungensysteme eine bestimmte ganze Zahl $h < p$ gehört von der Beschaffenheit, dass das betreffende Gleichungensystem alle p-reihigen, alle $(p-1)$-reihigen, $\cdots$ alle $(h+1)$-reihigen Determinanten der Matrix (4) zum Verschwinden bringt, nicht aber alle h-reihigen. Demnach müssen wir die verschiedenen möglichen Werthe von h, also: $1, 2 \cdots p-1$ einzeln durchgehen und zu jedem dieser Werthe die zugehörigen Gleichungensysteme aufstellen, welche $X_1 f \cdots X_q f$ gestatten.

Es sei h irgend eine der Zahlen $1, 2 \cdots p-1$. Ein Gleichungensystem, welches alle $(h+1)$-reihigen Determinanten der Matrix (4) zum Verschwinden bringt, nicht aber alle h-reihigen, enthält jedenfalls alle Gleichungen, welche sich durch Nullsetzen sämmtlicher $(h+1)$-reihigen Determinanten $\Delta_1 \cdots \Delta_s$ von (4) ergeben. Sollten nun die Gleichungen $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_s = 0$ gar nicht durch solche Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$ befriedigt werden können, für welche sich die $\xi_{ki}(x)$ regulär verhalten, oder sollten die Gleichungen $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_s = 0$ auch alle h-reihigen Determinanten von (4) zum Verschwinden bringen, so wäre das ein Zeichen, dass zu der gewählten Zahl h gar kein Gleichungensystem von der verlangten Beschaffenheit gehört. Nehmen wir daher an, dass keiner dieser beiden Fälle eintritt.

Zunächst wird zu untersuchen sein, ob das Gleichungensystem $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_s = 0$ reducibel ist. Wenn dies der Fall ist, so muss jedes irreducible Gleichungensystem für sich betrachtet werden, welches sich aus $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_s = 0$ ergiebt, und welches nicht alle h-reihigen Determinanten von (4) zum Verschwinden bringt.

Es sei $W_1 = 0, \cdots W_l = 0$ eines der gefundenen irreducibeln Gleichungensysteme, und es sei dasselbe bereits auf eine solche Form gebracht, dass nicht alle l-reihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial W_1}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial W_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial W_l}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial W_l}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

vermöge $W_1 = 0, \cdots W_l = 0$ verschwinden. Wir müssen dann suchen, alle Gleichungensysteme zu bestimmen, welche $X_1 f \cdots X_q f$ gestatten, welche die Gleichungen $W_1 = 0, \cdots W_l = 0$ enthalten und dabei nicht alle h-reihigen Determinanten von (4) zum Verschwinden bringen. Wenn wir das für jedes einzelne der aus $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_s = 0$ erhaltenen irreducibeln Gleichungensysteme ausführen, so finden wir alle Gleichungensysteme, welche $X_1 f \cdots X_q f$ gestatten und zu der Zahl h gehören.

Im Allgemeinen wird das Gleichungensystem $W_1 = 0, \cdots W_l = 0$ an und für sich die infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_q f$ nicht gestatten. Zu einem Gleichungensysteme, welches $W_1 = 0, \cdots W_l = 0$ enthält und ausserdem noch $X_1 f \cdots X_q f$ gestattet, gehören daher jedenfalls noch alle Gleichungen

$$X_k W_\lambda = 0, \quad X_j X_k W_\lambda = 0 \qquad (k, j = 1 \cdots q, \ \lambda = 1 \cdots l)$$

und so weiter. Diese Gleichungen bilden wir und untersuchen, ob sie unter einander oder mit $W_1 = 0, \cdots W_l = 0$ in Widerspruch stehen, und ob sie etwa alle h-reihigen Determinanten von (4) zum Verschwinden bringen. Ist eins von beiden der Fall, so giebt es kein

Gleichungensystem von der verlangten Beschaffenheit, tritt keins von beiden ein, so stellen die unabhängigen unter den Gleichungen

$$W_\lambda = 0, \quad X_k W_\lambda = 0, \quad X_j X_k W_\lambda = 0 \qquad (\lambda = 1 \cdots l;\ j, k = 1 \cdots q)$$

ein Gleichungensystem dar, welches $X_1 f \cdots X_q f$ gestattet. In diesem Gleichungensysteme, welches natürlich reducibel sein kann, stecken alle Gleichungensysteme, welche $X_1 f \cdots X_q f$ gestatten und die Gleichungen $W_1 = 0, \cdots W_l = 0$ enthalten, welche dagegen kein kleineres Gleichungensystem von derselben Beschaffenheit umfassen.

Die betreffenden Gleichungensysteme sind offenbar die *kleinsten* Gleichungensysteme, welche $X_1 f \cdots X_q f$ gestatten und dabei alle $(h+1)$-reihigen, nicht aber alle h-reihigen Determinanten von (4) zum Verschwinden bringen.

Es sei nun

$$(6) \qquad W_1 = 0, \cdots W_{n-m} = 0 \qquad (n - m \geqq l)$$

eines der gefundenen irreducibeln Gleichungensysteme; dann wird es sich noch darum handeln, zu demselben in allgemeinster Weise solche neue Gleichungen hinzuzufügen, dass man ein Gleichungensystem erhält, welches $X_1 f \cdots X_q f$ gestattet, aber nicht alle h-reihigen Determinanten von (4) zum Verschwinden bringt.

Da nicht alle h-reihigen Determinanten von (4) vermöge

$$(6) \qquad W_1 = 0, \cdots W_{n-m} = 0$$

verschwinden, können wir annehmen, dass etwa die Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \xi_{1,\,n-h+1} & \cdot & \xi_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{h,\,n-h+1} & \cdot & \xi_{hn} \end{vmatrix}$$

zu den nicht verschwindenden gehört und können uns die Aufgabe stellen, alle Gleichungensysteme zu bestimmen, welche $X_1 f \cdots X_q f$ gestatten und dabei $\varDelta$ nicht gleich Null machen. Wenn wir diese Aufgabe für jede einzelne h-reihige Determinante von (4) durchführen, welche nicht schon vermöge (6) verschwindet, so erhalten wir offenbar alle die gesuchten Gleichungensysteme, welche $W_1 = 0, \cdots W_{n-m} = 0$ umfassen.

Die Unabhängigkeit der Gleichungen $X_1 f = 0, \cdots X_h f = 0$ wird unter den gemachten Voraussetzungen von $W_1 = 0, \cdots W_{n-m} = 0$ nicht aufgehoben, dafür bestehen aber für die Werthsysteme von (6) gewisse Relationen von der Form:

$$X_{h+j} f = \sum_1^h {}_k\, \psi_{jk}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_k f \qquad (j = 1 \cdots q - h),$$

wo die ψ_{jk} aus den Gleichungen

$$\xi_{h+j,\nu} = \sum_1^h{}_k \psi_{jk}\, \xi_{k\nu} \quad (j = 1 \cdots q - h;\ \nu = 1 \cdots n)$$

zu bestimmen sind. Da alle $(h+1)$-reihigen Determinanten von (4) vermöge (6) verschwinden, während Δ dies nicht thut, so sind die Functionen ψ_{jk} vollkommen bestimmt und verhalten sich regulär für die Werthsysteme von (6). Wir dürfen daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit die infinitesimalen Transformationen $X_{h+1}f \cdots X_q f$ weglassen; denn jedes Gleichungensystem, welches die Gleichungen (6) enthält, dabei die Determinante Δ nicht zum Verschwinden bringt und endlich $X_1 f \cdots X_h f$ gestattet, lässt ohne Weiteres auch $X_{h+1}f \cdots X_q f$ zu.

Es lässt sich leicht einsehen, dass sich aus den Gleichungen (6) keine Relation zwischen $x_{n-h+1} \cdots x_n$ allein herleiten lässt. Ergäbe sich nämlich eine solche, etwa:

$$x_n - \omega(x_{n-h+1} \cdots x_{n-1}) = 0,$$

so müssten die h Ausdrücke:

$$X_k(x_n - \omega) = \xi_{kn} - \sum_1^{h-1}{}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_{n-h+j}} \cdot \xi_{k,\,n-h+j} \quad (k = 1 \cdots h)$$

vermöge (6) verschwinden; das aber ist unmöglich, denn Δ verschwindet nicht vermöge (6). Wir ziehen hieraus den Schluss, dass die Zahl $n - m$ jedenfalls nicht grösser ist als $n - h$ und dass die Gleichungen (6) sich nach $n - m$ von den Veränderlichen $x_1 \cdots x_{n-h}$ auflösen lassen, etwa nach $x_1 \cdots x_{n-m}$:

$$(7) \quad x_k = \varphi_k(x_{n-m+1} \cdots x_n) \quad (k = 1 \cdots n - m) \quad (n - m \leqq n - h).$$

Durch diese Gleichungen können wir daher das System (6) ersetzen.

Jedes Gleichungensystem, welches die Gleichungen (6) bezüglich (7) enthält, lässt sich offenbar auf eine solche Form bringen, dass es ausser den Gleichungen (7) nur noch eine Anzahl Relationen

$$V_j(x_{n-m+1} \cdots x_n) = 0 \quad (j = 1, 2 \cdots)$$

zwischen $x_{n-m+1} \cdots x_n$ allein enthält. Soll nun das betreffende Gleichungensystem die infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_h f$ gestatten, so müssen alle Ausdrücke $X_k V_j$ vermöge (7) und $V_1 = 0, \cdots$ verschwinden; oder, wenn wir die Substitution $x_1 = \varphi_1, \cdots x_{n-m} = \varphi_{n-m}$ wieder durch das Zeichen [ ] andeuten: es müssen die Ausdrücke

$$[X_k V_j] = \sum_1^m{}_\mu [\xi_{k,\,n-m+\mu}] \frac{\partial V_j}{\partial x_{n-m+\mu}}$$

vermöge $V_1 = 0, \cdots$ verschwinden. Das aber können wir auch so ausdrücken: das Gleichungensystem $V_1 = 0, \cdots$ in den Veränderlichen

$x_{n-m+1} \cdots x_n$ muss die h verkürzten infinitesimalen Transformationen

$$\overline{X}_k f = \sum_1^m {}^{\mu} [\xi_{k,\, n-m+\mu}] \frac{\partial f}{\partial x_{n-m+\mu}} \quad (k = 1 \cdots h)$$

in diesen Veränderlichen gestatten. Ausserdem darf das Gleichungensystem $V_1 = 0, \cdots$ natürlich die Determinante $[\varDelta]$ nicht zum Verschwinden bringen.

Umgekehrt giebt jedes Gleichungensystem $V_1 = 0, \cdots$, welches die eben besprochenen Eigenschaften besitzt, zusammen mit (7) ein Gleichungensystem, welches $\varDelta$ nicht Null macht, und ausserdem $X_1 f \cdots X_h f$ sowie auch $X_{h+1} f \cdots X_q f$ gestattet.

Somit ist unser ursprüngliches Problem auf das einfachere zurückgeführt, alle Gleichungensysteme in $m < n$ Veränderlichen zu bestimmen, welche die $h \leqq m$ infinitesimalen Transformationen $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_h f$ gestatten und dabei die Determinante

$$\sum \pm [\xi_{1,\, n-h+1}] \cdots [\xi_{h,\, n-h+h}]$$

nicht Null machen.

Wir fassen das bisherige zusammen in dem

Theorem 18. *Sind die q infinitesimalen Transformationen*

$$X_k f = \sum_1^n {}^{i} \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots q)$$

so beschaffen, dass alle $(p+1)$-reihigen, nicht aber alle p-reihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \cdot & \cdot & \xi_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{q1} & \cdot & \cdot & \xi_{qn} \end{vmatrix}$$

identisch verschwinden und dass irgend p unabhängige von den Gleichungen $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ ein p-gliedriges vollständiges System bilden, so findet man folgendermassen alle Gleichungensysteme in $x_1 \cdots x_n$, welche $X_1 f \cdots X_q f$ gestatten und dabei alle $(h+1)$-reihigen nicht aber alle h-reihigen Determinanten der obigen Matrix zum Verschwinden bringen: Man suche zunächst durch Determinantenbildung die kleinsten Gleichungensysteme, für welche alle $(h+1)$-reihigen nicht aber alle h-reihigen Determinanten der Matrix verschwinden. Giebt es Gleichungensysteme dieser Art und ist $W_1 = 0, \cdots W_l = 0$ ein solches, so bilde man die Gleichungen $X_k W_i = 0$, $X_j X_k W_i = 0, \cdots$ und bestimme auf diese Weise die etwa vorhandenen kleinsten Gleichungensysteme, welche $W_1 = 0, \cdots W_l = 0$ umfassen, $X_1 f \cdots X_q f$

gestatten und nicht alle h-reihigen Determinanten der Matrix Null machen; ist $W_1 = 0, \cdots W_{n-m} = 0$ $(n - m \geqq l)$ *ein solches Gleichungensystem, welches etwa die Determinante*

$$\varDelta = \sum \pm \xi_{1, n-h+1} \cdots \xi_{h, n-h+h}$$

nicht zum Verschwinden bringt, so ist $h \leqq m$, *und die Gleichungen* $W_1 = 0, \cdots W_{n-m} = 0$ *lassen sich nach* $n - m$ *von den Veränderlichen* $x_1 \cdots x_{n-h}$ *auflösen, etwa wie folgt:*

$$x_k = \varphi_k(x_{n-m+1} \cdots x_n) \quad (k = 1 \cdots n - m).$$

Endlich bestimme man in den m *Veränderlichen* $x_{n-m+1} \cdots x_n$ *alle Gleichungensysteme, welche die* h *verkürzten infinitesimalen Transformationen*

$$\overline{X}_k f = \sum_1^m {}^{\mu}\, \xi_{k, n-m+\mu}(\varphi_1 \cdots \varphi_{n-m}, \; x_{n-m+1} \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_{n-m+\mu}}$$

$$= \sum_1^m {}^{\mu}\, [\xi_{k, n-m+\mu}] \frac{\partial f}{\partial x_{n-m+\mu}} \qquad (k = 1 \cdots h)$$

gestatten und die Determinante

$$[\varDelta] = \sum \pm [\xi_{1, n-h+1}] \cdots [\xi_{h, n-h+h}]$$

nicht zum Verschwinden bringen. Jedes dieser Gleichungensysteme stellt bei Hinzufügung von $x_1 = \varphi_1, \cdots x_{n-m} = \varphi_{n-m}$ *ein Gleichungensystem von der verlangten Beschaffenheit dar. Wenn man die angegebenen Entwickelungen für alle möglichen Fälle durchführt, so erhält man alle Gleichungensysteme von der verlangten Beschaffenheit.*

Es kommt öfters vor, dass man schon ein Gleichungensystem $U_1 = 0$, $U_2 = 0 \cdots U_{n-s} = 0$ kennt, welches die infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_q f$ gestattet und welches alle $(h+1)$-reihigen Determinanten der Matrix (4) zum Verschwinden bringt, von den h-reihigen dagegen etwa die Determinante $\varDelta$ nicht. Dann kann man nach allen Gleichungensystemen fragen, welche die Gleichungen $U_1 = 0 \cdots U_{n-s} = 0$ umfassen, $X_1 f \cdots X_q f$ gestatten und ebenfalls $\varDelta$ nicht zum Verschwinden bringen.

Die Bestimmung aller dieser Gleichungensysteme lässt sich gerade so durchführen, wie oben in dem speciellen Fall, wo das kleinste Gleichungensystem $W_1 = 0 \cdots W_{n-m} = 0$ von der betreffenden Beschaffenheit bekannt war und alle Gleichungensysteme gesucht wurden, welche $X_1 f \cdots X_q f$ gestatten, das System $W_1 = 0 \cdots W_{n-m} = 0$ umfassen und $\varDelta$ nicht zum Verschwinden bringen.

Geradeso wie oben beweist man nämlich zunächst, dass $h \leqq s$ und dass die Gleichungen $U_1 = 0, \cdots U_{n-s} = 0$ sich nach $n - s$ von den Veränderlichen $x_1 \cdots x_{n-h}$ auflösen lassen, etwa wie folgt:

$$x_k = \psi_k(x_{n-s+1} \cdots x_n) \quad (k = 1 \cdots n - s).$$

Um nun die gesuchten Gleichungensysteme zu finden, bilde man die h verkürzten infinitesimalen Transformationen

$$\widehat{X}_k f = \sum_1^s {}^\sigma \xi_{k,\, n-s+\sigma}(\psi_1 \cdots \psi_{n-s},\; x_{n-s+1} \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_{n-s+\sigma}}$$

$$= \sum_1^s {}^\sigma \widehat{\xi}_{k,\, n-s+\sigma} \frac{\partial f}{\partial x_{n-s+\sigma}} \qquad (k = 1 \cdots h)$$

und bestimme nunmehr in den s Veränderlichen $x_{n-s+1} \cdots x_n$ alle Gleichungensysteme, welche $\widehat{X}_1 f \cdots \widehat{X}_h f$ gestatten und die Determinante

$$\widehat{\varDelta} = \sum \pm \widehat{\xi}_{1,\, n-h+1} \cdots \widehat{\xi}_{h,\, n-h+h}$$

nicht zum Verschwinden bringen. Fügt man dieselben der Reihe nach zu den Gleichungen $x_1 - \psi_1 = 0, \cdots x_{n-s} - \psi_{n-s} = 0$ hinzu, so erhält man alle Gleichungensysteme von der verlangten Beschaffenheit.

Es ist nicht nöthig, das eben Gesagte näher zu begründen.

§ 35.

Das zu Anfang von § 32 gestellte Problem ist nunmehr im Grunde erledigt. Es ist ja nach dem letzten Theoreme darauf zurückgeführt, alle Gleichungensysteme in den m Veränderlichen $x_{n-m+1} \cdots x_n$ zu bestimmen, welche die h infinitesimalen Transformationen $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_h f$ gestatten. Das ist aber ein Problem von derselben Art, wie das ursprüngliche, nur vereinfacht insofern, als die Zahl m der Veränderlichen kleiner ist als n.

Auf dieses reducirte Problem sind nun dieselben Betrachtungen anzuwenden wie auf das ursprüngliche. Das heisst also: wenn die Gleichungen $\overline{X}_1 f = 0, \cdots \overline{X}_h f = 0$ nicht an und für sich ein h-gliedriges vollständiges System bilden, so hat man für $k, j = 1 \cdots h$ die infinitesimalen Transformationen $(\overline{X}_k \overline{X}_j)$ aufzustellen und zu untersuchen, ob die unabhängigen unter den Gleichungen $\overline{X}_k f = 0$, $(\overline{X}_k \overline{X}_j) = 0$ ein vollständiges System bilden und so weiter, kurz ebenso wie bei dem ursprünglichen Probleme. Nur der Unterschied findet gegen früher statt, dass von vornherein blos solche Gleichungensysteme gesucht werden, welche die Unabhängigkeit der Gleichungen

$$\overline{X}_1 f = 0, \cdots \overline{X}_h f = 0$$

nicht aufheben, und insbesondere die Determinante $[\varDelta]$ nicht zum Verschwinden bringen.

Gerade wie oben das ursprüngliche, lässt sich jetzt das reducirte Problem theilweise erledigen, theilweise auf ein ähnliches in noch weniger Veränderlichen zurückführen und so fort. Kurz man sieht, dass die vollständige Erledigung des ursprünglichen Problems durch eine endliche Anzahl von Schritten erreicht werden kann.

Wir brauchen darauf nicht weiter einzugehen, wollen aber einen besonders wichtigen speciellen Fall etwas näher betrachten.

Das Gleichungensystem

$$(7') \quad x_1 - \varphi_1(x_{n-m+1} \cdots x_n) = 0, \cdots x_{n-m} - \varphi_{n-m}(x_1 \cdots x_n) = 0$$

sei wie oben so beschaffen, dass es die infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_q f$ gestattet und alle $(h+1)$-reihigen Determinanten der Matrix (4) zum Verschwinden bringt, während es die Determinante $\varDelta$ nicht gleich Null macht. Dagegen wollen wir unter dem Gleichungensysteme (7′) *nicht eben das kleinste*, sondern *ein ganz beliebiges* von der betreffenden Beschaffenheit verstehen.

Unter den Gleichungen $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ bildeten irgend p von einander unabhängige, also etwa $X_1 f = 0, \cdots X_p f = 0$ ein p-gliedriges vollständiges System; es bestanden daher jedenfalls Relationen von der Form:

$$(X_k X_j) = \sum_1^q {}^\sigma\, \omega_{kj\sigma}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_\sigma f \quad (k, j = 1 \cdots q).$$

Für die Werthsysteme von (7′) bleiben blos die h Gleichungen

$$X_1 f = 0, \cdots X_h f = 0$$

von einander unabhängig, dagegen lassen sich $X_{h+1} f \cdots X_q f$ in der Form

$$X_{h+j} f = \sum_1^h {}^\tau\, \psi_{j\tau}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_\tau f \quad (j = 1 \cdots q - h)$$

darstellen, wo die ψ_{jk} sich für die betreffenden Werthsysteme regulär verhalten.

Wir wollen nun die besondere Voraussetzung machen, dass auch die Coefficienten ω_{kjs} sich sämmtlich für die Werthsysteme von (7) regulär verhalten; dann gelten augenscheinlich für die betreffenden Werthsysteme Gleichungen von der Form:

$$(X_k X_j) = \sum_1^h {}^\sigma \left\{ \omega_{kj\sigma} + \sum_1^{q-h} {}^\tau\, \omega_{kjh+\tau} \cdot \psi_{\tau\sigma} \right\} \cdot X_\sigma f.$$

In diesem speciellen Falle lassen sich mit einem Schlage alle Gleichungensysteme angeben, welche die Gleichungen (7′) umfassen, $X_1 f \cdots X_q f$ gestatten und Δ nicht zum Verschwinden bringen. Das soll jetzt gezeigt werden.

Für alle Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$, welche den Gleichungen (7′) genügen, bestehen Relationen von der Form

$$(X_k X_j) = \sum_1^h {}^\sigma\, w_{kj\sigma}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_\sigma f \quad (k, j = 1 \cdots h).$$

Die $w_{kj\sigma}$ verhalten sich hierbei regulär und ebenso die Functionen $[w_{kjs}]$, wenn wir durch das Zeichen [ ] wie früher die Substitution

$$x_1 = \varphi_1, \cdots x_{n-m} = \varphi_{n-m}$$

andeuten.

Die obigen Relationen zerlegen wir in die folgenden:

$$X_k \xi_{j\nu} - X_j \xi_{k\nu} = \sum_1^h {}^s\, w_{kjs}(x_1 \cdots x_n) \cdot \xi_{s\nu}$$
$$(k, j = 1 \cdots h;\ \nu = 1 \cdots n),$$

welche natürlich bei der Substitution [ ] identisch bestehen, sodass wir haben:

$$(8) \qquad [X_k \xi_{j\nu}] - [X_j \xi_{k\nu}] \equiv \sum_1^h {}^s\, [w_{kjs}] \cdot [\xi_{s\nu}].$$

Nun aber gestattet das Gleichungensystem $x_k - \varphi_k = 0$ die infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_h f$, es gilt also die auf S. 110 ab geleitete Relation (3):

$$[X_k \Phi] \equiv [X_k [\Phi]],$$

in welcher $\Phi(x_1 \cdots x_n)$ eine ganz beliebige Function seiner Argumente bedeutet. Diese Relation können wir etwas anders schreiben, wenn wir uns der infinitesimalen Transformationen

$$\overline{X}_k f = \sum_1^m {}^\mu\, [\xi_{k,\, n-m+\mu}] \frac{\partial f}{\partial x_{n-m+\mu}} \quad (k = 1 \cdots h)$$

erinnern; es ist ja offenbar

$$[X_k [\Phi]] \equiv \overline{X}_k [\Phi],$$

also haben wir

$$[X_k \Phi] \equiv \overline{X}_k [\Phi].$$

Hieraus folgt, dass die Identitäten (8) ersetzt werden können durch die folgenden:

$$\overline{X}_k [\xi_{j\nu}] - \overline{X}_j [\xi_{k\nu}] \equiv \sum_1^h {}^s\, [w_{kjs}] \cdot [\xi_{s\nu}].$$

Mit andern Worten, es bestehen Identitäten von der Form

$$(\overline{X}_k \overline{X}_j) = \overline{X}_k \overline{X}_j f - \overline{X}_j \overline{X}_k f \equiv \sum_1^h {}_s [w_{kjs}] \cdot \overline{X}_s f,$$

das heisst, die Gleichungen $\overline{X}_1 f = 0, \cdots \overline{X}_h f = 0$ bilden ein h-gliedriges vollständiges System in den m unabhängigen Veränderlichen $x_{n-m+1} \cdots x_n$.

Erinnern wir uns jetzt der Bemerkungen, welche wir an das Theorem 18 angeschlossen haben. Dieselben zeigen, dass unser oben aufgestelltes Problem darauf hinauskommt, alle Gleichungensysteme in $x_{n-m+1} \cdots x_n$ zu bestimmen, welche $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_h f$ gestatten und die Unabhängigkeit der Gleichungen $\overline{X}_1 f = 0, \cdots \overline{X}_h f = 0$ nicht aufheben. Da aber in unserem Falle die Gleichungen $\overline{X}_1 f = 0, \cdots \overline{X}_h f = 0$ ein h-gliedriges vollständiges System bilden, so können wir sofort das Theorem 17 anwenden. Wir ersehen daraus, dass die gesuchten Gleichungensysteme in $x_{n-m+1} \cdots x_n$ durch Relationen zwischen den Lösungen des vollständigen Systemes $\overline{X}_1 f = 0, \cdots \overline{X}_h f = 0$ dargestellt werden.

Fügen wir daher beliebige Relationen zwischen den Lösungen dieses h-gliedrigen vollständigen Systemes zu den Gleichungen $x_k = \varphi_k$ hinzu, so erhalten wir die allgemeine Form eines Gleichungensystems, welches die infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_q f$ gestattet, die Gleichungen $x_k = \varphi_k$ umfasst und $\varDelta$ nicht zum Verschwinden bringt.

Es scheint überflüssig, das hiermit erhaltene Resultat in seiner vollen Allgemeinheit als Satz zu formuliren. Dagegen ist es für das Folgende nützlich, das nachstehende Theorem, welches der besonderen Annahme $q = p = h$ entspricht, ausdrücklich aufzustellen.

Theorem 19. *Gestattet ein System von $n - m$ unabhängigen Gleichungen in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ die h infinitesimalen Transformationen*

$$X_k f = \sum_1^n {}_i \, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \cdots h)$$

und verschwindet dabei die Determinante

$$\varDelta = \sum \pm \xi_{1,\, n-h+1} \cdots \xi_{h,\, n-h+h}$$

weder identisch noch vermöge des Gleichungensystems, so ist $h \leq m$ und das Gleichungensystem lässt sich nach $n - m$ von den Veränderlichen $x_1 \cdots x_{n-h}$ auflösen, etwa wie folgt:

$$x_1 = \varphi_1(x_{n-m+1} \cdots x_n), \cdots x_{n-m} = \varphi_{n-m}(x_{n-m+1} \cdots x_n).$$

Lassen sich nun für die Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$ *dieses Gleichungensystems alle Ausdrücke* $(X_k X_j)$ *in der Form*

$$(X_k X_j) = \sum_1^h {}^s\, w_{kjs}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_s f \quad (k,\ j = 1 \cdots h)$$

darstellen, wo die w_{kjs} *sich für die betreffenden Werthsysteme regulär verhalten, so findet man folgendermassen alle Gleichungensysteme, welche die Gleichungen*

$$x_1 - \varphi_1 = 0, \cdots x_{n-m} - \varphi_{n-m} = 0$$

umfassen, die infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_h f$ *gestatten und die Determinante* Δ *nicht zum Verschwinden bringen: man stelle die* h *verkürzten infinitesimalen Transformationen*

$$\overline{X}_k f = \sum_1^m {}^\mu\, \xi_{k,\, n-m+\mu}(\varphi_1 \cdots \varphi_{n-m},\ x_{n-m+1} \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_{n-m+\mu}}$$
$$(k = 1 \cdots h)$$

auf; dann bilden die h *von einander unabhängigen Gleichungen* $\overline{X}_1 f = 0, \cdots \overline{X}_h f = 0$ *ein* h*-gliedriges vollständiges System in den unabhängigen Veränderlichen* $x_{n-m+1} \cdots x_n$; *sind*

$$u_1(x_{n-m+1} \cdots x_n) \cdots u_{m-h}(x_{n-m+1} \cdots x_n)$$

unabhängige Lösungen dieses vollständigen Systems, so ist:

$$x_1 - \varphi_1 = 0, \cdots x_{n-m} - \varphi_{n-m} = 0, \quad \Phi_i(u_1 \cdots u_{n-m}) = 0 \quad (i = 1, 2 \cdots)$$

die allgemeine Form der verlangten Gleichungensysteme; unter den Φ_i *sind dabei beliebige Functionen ihrer Argumente zu verstehen.*

§ 36.

Auch die analytischen Entwickelungen des gegenwärtigen Kapitels erhalten eine gewisse Anschaulichkeit und namentlich eine grössere Durchsichtigkeit, wenn man die Vorstellungen und Begriffsbildungen der Mannigfaltigkeitslehre auf sie anwendet. Das wollen wir jetzt thun. Das Folgende steht also zu den §§ 30 bis 35 genau in demselben Verhältniss wie Kapitel 6 zu Kapitel 5.

Jedes Gleichungensystem in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ stellt eine Mannigfaltigkeit des n-fach ausgedehnten Raumes R_n dar. Gestattet das Gleichungensystem die eingliedrige Gruppe Xf, so thut nach der früher eingeführten Ausdrucksweise die betreffende Mannigfaltigkeit dasselbe; gehört also ein Punkt $x_1 \cdots x_n$ der Mannigfaltigkeit an, so liegen in derselben auch alle Punkte, in welche $x_1 \cdots x_n$ bei den sämmtlichen Transformationen der eingliedrigen Gruppe Xf übergeht.

Ist nun $x_1^0 \cdots x_n^0$ irgend ein Punkt des Raumes, so können zwei Fälle eintreten: entweder verschwinden $\xi_1 \cdots \xi_n$ nicht sämmtlich für $x_i = x_i^0$, oder die Grössen $\xi_1(x^0) \cdots \xi_n(x^0)$ sind alle gleich Null. Im ersten Falle nimmt der Punkt $x_1^0 \cdots x_n^0$ bei den ∞^1 Transformationen der eingliedrigen Gruppe Xf unendlich viele Lagen an, deren Inbegriff, wie wir wissen, bei der eingliedrigen Gruppe Xf invariant bleibt und eine Bahncurve der infinitesimalen Transformation Xf bildet. Im zweiten Falle behält $x_1^0 \cdots x_n^0$ bei allen Transformationen der eingliedrigen Gruppe Xf seine Lage; die Bahncurve durch $x_1^0 \cdots x_n^0$ schrumpft also auf diesen Punkt selbst zusammen.

Gestattet daher eine Mannigfaltigkeit die eingliedrige Gruppe Xf und besteht sie im Allgemeinen aus solchen Punkten, für welche $\xi_1 \cdots \xi_n$ nicht sämmtlich verschwinden, so ist sie von Bahncurven der infinitesimalen Transformation Xf erzeugt. Besteht dagegen die betreffende Mannigfaltigkeit aus lauter Punkten, für welche $\xi_1 \cdots \xi_n$ sämmtlich verschwinden, so behält jeder Punkt der Mannigfaltigkeit bei allen Transformationen der eingliedrigen Gruppe Xf seine Lage. Offenbar gestattet dann auch jede in dieser Mannigfaltigkeit enthaltene kleinere Mannigfaltigkeit die eingliedrige Gruppe Xf.

Hiermit ist der begriffliche Inhalt des Theorems 15 klar gestellt ja, im Grunde können die vorstehenden Betrachtungen geradezu als ein neuer Beweis des Theorems 15 angesehen werden.

Noch haben wir zu erklären, was es begrifflich heisst, dass ein Gleichungensystem $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ die infinitesimale Transformation Xf gestattet.

Zu dem Zwecke erinnern wir daran, dass die infinitesimale Transformation Xf jedem Punkte $x_1 \cdots x_n$, in dem nicht alle ξ verschwinden, die ganz bestimmte Fortschreitungsrichtung

$$\delta x_1 : \cdots : \delta x_n = \xi_1 : \cdots : \xi_n$$

zuordnet, während sie einem Punkte, für welchen $\xi_1 = \cdots = \xi_n = 0$ ist, keine Fortschreitungsrichtung zuordnet. Wir können daher sagen:

Das Gleichungensystem $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ gestattet die infinitesimale Transformation Xf, wenn diese letztere jedem Punkte der Mannigfaltigkeit $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ entweder gar keine oder eine solche Fortschreitungsrichtung $\delta x_1 : \cdots : \delta x_n$ zuordnet, welche die $n - m$ Gleichungen

$$\frac{\partial \Omega_k}{\partial x_1}\delta x_1 + \cdots + \frac{\partial \Omega_k}{\partial x_n}\delta x_n = 0 \quad (k = 1 \cdots n - m)$$

befriedigt, welche also die Mannigfaltigkeit berührt.

Diese Definition ist augenscheinlich sowohl von der Wahl der Veränderlichen als von der Form des Gleichungensystemes

$$\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$$

unabhängig.

Das Theorem 14 kann jetzt die folgende anschauliche Fassung erhalten: *Ordnet die infinitesimale Transformation Xf jedem Punkte einer Mannigfaltigkeit entweder gar keine Fortschreitungsrichtung zu oder eine, welche die Mannigfaltigkeit berührt, so gestattet die Mannigfaltigkeit alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe Xf.*

Führen wir schliesslich noch die Redeweise ein: „die *Mannigfaltigkeit* $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-m} = 0$ gestattet die infinitesimale Transformation Xf“, so können wir Theorem 14 auch folgendermassen aussprechen:

Eine Mannigfaltigkeit gestattet dann und nur dann alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe Xf, wenn sie die infinitesimale Transformation Xf gestattet.

In den §§ 32 und 34 gaben wir eine Classification aller Gleichungensysteme, welche die q infinitesimalen Transformationen $X_1f \cdots X_qf$ gestatten. Dabei gingen wir aus von dem Verhalten der Determinanten der Matrix (4):

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \cdot & \cdot & \xi_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{q1} & \cdot & \cdot & \xi_{qn} \end{vmatrix}.$$

Wir setzten voraus, dass alle $(p+1)$-reihigen Determinanten dieser Matrix identisch verschwanden, die p-reihigen dagegen nicht. In ein und dieselbe Classe rechneten wir dann alle Gleichungensysteme, vermöge deren sämmtliche $(h+1)$-reihigen, nicht aber alle h-reihigen Determinanten der Matrix verschwanden; die Zahl h konnte dabei die $p+1$ verschiedenen Werthe: $p, p-1, \cdots 2, 1, 0$ haben.

Schon in Kap. 6 haben wir bemerkt, dass unter den soeben gemachten Voraussetzungen die q infinitesimalen Transformationen

$$X_1f \cdots X_qf$$

jedem Punkte $x_1 \cdots x_n$ von allgemeiner Lage gerade p unabhängige Fortschreitungsrichtungen zuordnen. Es leuchtet ein, dass in entsprechender Weise einem Punkte $x_1 \cdots x_n$ von $X_1f \cdots X_qf$ gerade h unabhängige Fortschreitungsrichtungen zugeordnet werden, wenn die h-reihigen Determinanten der obigen Matrix für den betreffenden Punkt nicht alle verschwinden, während dagegen alle $(h+1)$-reihigen den Werth Null annehmen. Da nun jedes Gleichungensystem, welches die infinitesimalen Transformationen $X_1f \cdots X_qf$ gestattet, eine Mannigfaltigkeit mit derselben Eigenschaft darstellt, so liefert unsere damalige

Classification der Gleichungensysteme sofort eine Classification der Mannigfaltigkeiten. Von den Mannigfaltigkeiten, welche $X_1f \cdots X_qf$ gestatten, rechnen wir nämlich immer diejenigen in eine Classe, deren Punkten die infinitesimalen Transformationen $X_1f \cdots X_qf$ die gleiche Zahl $h \leqq p$ von unabhängigen Fortschreitungsrichtungen zuordnen.

Gestattet eine Mannigfaltigkeit die infinitesimalen Transformationen $X_1f \cdots X_qf$, so wird sie in jedem ihrer Punkte von den Fortschreitungsrichtungen berührt, welche $X_1f \cdots X_qf$ dem Punkte zuordnen. Wenn nun $X_1f \cdots X_qf$ in jedem Punkte der Mannigfaltigkeit gerade h unabhängige Richtungen bestimmen, so muss die Mannigfaltigkeit offenbar mindestens h Dimensionen haben. Also können wir den Satz aussprechen:

Satz 6. *Ordnen die q infinitesimalen Transformationen $X_1f \cdots X_qf$ einem speciellen Punkte $x_1^0 \cdots x_n^0$ gerade h unabhängige Fortschreitungsrichtungen zu, so giebt es jedenfalls keine Mannigfaltigkeit von weniger als h Dimensionen, welche den Punkt $x_1^0 \cdots x_n^0$ enthält und die q infinitesimalen Transformationen $X_1f \cdots X_qf$ gestattet.*

Dieser Satz ist im Grunde nur eine andere Formulirung eines früheren Resultates. In § 34 betrachteten wir ja die Gleichungensysteme, welche $X_1f \cdots X_qf$ gestatten und dabei unter den q Gleichungen $X_1f = 0, \cdots X_qf = 0$ nur h von einander unabhängige übrig lassen. Dabei sahen wir, dass ein solches Gleichungensystem höchstens aus $n - h$ unabhängigen Gleichungen besteht, dass es also eine Mannigfaltigkeit von wenigstens h Dimensionen darstellt.

Kapitel 8.

Vollständige Systeme, die alle Transformationen einer eingliedrigen Gruppe gestatten.

Führt man in ein q-gliedriges vollständiges System

$$X_k f = \sum_1^n {}^i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (k = 1 \cdots q)$$

neue unabhängige Veränderliche $x_1' = F_1(x_1 \cdots x_n), \cdots x_n' = F_n$ ein, so erhält man, wie schon früher bemerkt wurde (vgl. Kap. 5, S. 87), in $x_1' \cdots x_n'$ wieder ein q-gliedriges vollständiges System. Im allgemeinen hat dieses neue vollständige System natürlich eine andere Form als das ursprüngliche; doch kann es auch vorkommen, dass die beiden vollständigen Systeme sich in der Form nicht wesentlich von einander unterscheiden, indem Relationen von der Gestalt

$$X_k f = \sum_1^q {}^j \psi_{kj}(x_1' \cdots x_n') \cdot \sum_1^n {}^i \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') \frac{\partial f}{\partial x_i'} \qquad (k = 1 \cdots q)$$

bestehen, wo natürlich die Determinante der ψ_{kj} nicht identisch verschwindet. In diesem Falle sagen wir: *das vollständige System*

$$X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$$

gestattet die Transformation $x_i' = F_i(x_1 \cdots x_n)$, oder: *es bleibt bei dieser Transformation invariant.*

Wenden wir die abgekürzten Bezeichnungen an:

$$\xi_{ki}(x_1' \cdots x_n') = \xi_{ki}',$$

$$\sum_1^n {}^i \xi_{ki}' \frac{\partial f}{\partial x_i'} = X_k' f,$$

so können wir die folgende Definition aufstellen:

Das q-gliedrige vollständige System

$$X_k f = \sum_1^n {}^i \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (k = 1 \cdots q)$$

gestattet die Transformation $x_i' = F_i(x_1 \cdots x_n)$ *dann und nur dann, wenn für jedes k eine Relation von der Form*

$$(1) \qquad X_k f = \sum_1^q {}^j \psi_{kj}(x_1' \cdots x_n') \cdot X_j' f$$

*besteht.**)

Den Sinn dieser wichtigen Definition wird ein einfaches Beispiel am besten verdeutlichen.

Die beiden Gleichungen

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$$

in den drei Veränderlichen x_1, x_2, x_3 bilden ein zweigliedriges vollständiges System. Führen wir nun die neuen Veränderlichen

$$x_1' = x_1 + x_2, \quad x_2' = x_1 - x_2, \quad x_3' = x_3$$

an Stelle der x ein, so erhalten wir das neue vollständige System:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1'} + \frac{\partial f}{\partial x_2'} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1'} - \frac{\partial f}{\partial x_2'} = 0,$$

---

*) Lie, Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania, Februar 1875.

welches mit dem Systeme $\frac{\partial f}{\partial x_1'} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_2'} = 0$ äquivalent ist. Es bestehen Relationen von der Form

$$X_1 f = X_1' f + X_2' f, \quad X_2 f = X_1' f - X_2' f,$$

also gestattet das vollständige System $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$ die Transformation: $x_1' = x_1 + x_2$, $x_2' = x_1 - x_2$.

§ 37.

Das q-gliedrige vollständige System $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ gestatte die Transformation $x_i' = F_i(x_1 \cdots x_n)$, es mögen also für jedes f Relationen von der Form (1) bestehen. Ist nun $\varphi(x_1 \cdots x_n)$ eine Lösung des vollständigen Systems, so verschwindet die rechte Seite von (1) bei der Substitution $f = \varphi(x_1' \cdots x_n')$ identisch, die linke Seite thut daher dasselbe bei der Substitution $f = \varphi(F_1(x) \cdots F_n(x))$; folglich ist $\varphi(F_1(x) \cdots F_n(x))$ gleichzeitig mit $\varphi(x)$ eine Lösung, oder wie wir es ausdrücken können: die Transformation $x_i' = F_i(x)$ führt jede Lösung des vollständigen Systems $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ in eine Lösung desselben vollständigen Systems über.

Umgekehrt gilt aber auch Folgendes: wird jede Lösung des q-gliedrigen vollständigen Systems $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ von einer Transformation $x_i' = F_i(x_1 \cdots x_n)$ in eine Lösung übergeführt, so gestattet das vollständige System die betreffende Transformation. Die Gleichungen $X_1' f = 0, \cdots X_q' f = 0$ verwandeln sich ja bei Einführung der Veränderlichen x_i statt der x_i' in ein q-gliedriges vollständiges System, welches alle Lösungen mit dem q-gliedrigen Systeme $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ gemein hat; daraus aber folgt, dass Relationen von der Form (1) bestehen, dass also das vollständige System $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ wirklich die Transformation $x_i' = F_i(x)$ gestattet.

Aus alledem ergiebt sich, dass *ein q-gliedriges vollständiges System dann und nur dann die Transformation $x_i' = F_i(x_1 \cdots x_n)$ gestattet, wenn diese Transformation jede Lösung des vollständigen Systems in eine Lösung überführt. Natürlich ist dazu nur erforderlich, dass die Transformation irgend $n - q$ unabhängige Lösungen des Systems in Lösungen überführt.*

Es entspricht ganz dem in Kapitel 6 und 7 befolgten Gedankengange, wenn wir uns jetzt die Frage stellen: woran lässt sich erkennen, dass ein q-gliedriges vollständiges System $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe Yf gestattet? Allerdings gehört diese Frage eigentlich zu den allgemeinen Untersuchungen über Differentialgleichungen, welche eingliedrige Gruppen gestatten, sie soll deshalb auch in einem späteren Kapitel dieses Abschnittes, in dem Kapitel über Differentialinvarianten noch einmal aufgenommen und auf Grund der dort entwickelten allgemeinen Theorie erledigt werden. Aber wir brauchen schon vorher Kriterien, an denen wir erkennen können, ob ein vorgelegtes vollständiges System alle Transformationen einer vorgelegten eingliedrigen Gruppe gestattet oder nicht. Deshalb wollen wir solche Kriterien bereits jetzt, mit etwas einfacheren Hülfsmitteln, ableiten.

Irgend $n-q$ unabhängige Lösungen des q-gliedrigen vollständigen Systems $X_1f=0, \cdots X_qf=0$ mögen mit $\varphi_1 \cdots \varphi_{n-q}$ bezeichnet werden. Soll nun das vollständige System alle Transformationen

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1}\cdot Yx_i + \frac{t^2}{1\cdot 2}\cdot YYx_i + \cdots \qquad (i=1\cdots n)$$

der eingliedrigen Gruppe Yf gestatten, so müssen auch die $n-q$ unabhängigen Functionen

$$\varphi_k(x + t\cdot Yx + \cdots) = \varphi_k(x) + \frac{t}{1}\cdot Y\varphi_k + \frac{t^2}{1\cdot 2}\cdot YY\varphi_k + \cdots$$
$$(k=1\cdots n-q)$$

Lösungen des Systems sein und zwar für jeden Werth von t. Wir schliessen hieraus, dass jedenfalls die $n-q$ Ausdrücke $Y\varphi_k$ Lösungen des Systems sind, dass also $n-q$ Relationen von der Form

$$(2) \qquad Y\varphi_k = \omega_k(\varphi_1 \cdots \varphi_{n-q}) \qquad (k=1\cdots n-q)$$

bestehen müssen. Diese Bedingung ist nothwendig; sie ist aber zugleich auch hinreichend, denn ist sie erfüllt, so werden auch alle $YY\varphi_k$, $YYY\varphi_k$, $\cdots$ Functionen von $\varphi_1 \cdots \varphi_{n-q}$ allein, die Ausdrücke $\varphi_k(x + t\cdot Yx + \cdots)$ werden daher Lösungen des vollständigen Systems, und daraus folgt, dass dieses System wirklich alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe Yf gestattet.

Also gilt der

Satz 1. *Ein q-gliedriges vollständiges System $X_1f=0, \cdots X_qf=0$ mit den $n-q$ unabhängigen Lösungen $\varphi_1 \cdots \varphi_{n-q}$ gestattet dann und nur dann alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe*

$$Yf = \sum_1^n{}_i\, \eta_i(x_1 \cdots x_n)\,\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

wenn $n-q$ Relationen von der Form

$$(2) \qquad Y\varphi_k = \omega_k(\varphi_1 \cdots \varphi_{n-q}) \qquad (k=1\cdots n-q)$$

bestehen.

Das hiermit gewonnene Kriterium ist natürlich nur dann praktisch anwendbar, wenn das vollständige System bereits integrirt ist. Es lässt sich aber sehr leicht aus diesem Kriterium ein anderes ableiten, welches nicht voraussetzt, dass man die Lösungen des vollständigen Systems kennt.

Setzt man in der Identität

$$X_k(Y(f)) - Y(X_k(f)) \equiv \sum_1^n {}_i (X_k \eta_i - Y \xi_{ki}) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

an Stelle von f irgend eine Lösung φ des vollständigen Systems, so ergiebt sich:

$$X_k(Y(\varphi)) \equiv \sum_1^n {}_i (X_k \eta_i - Y \xi_{ki}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Gestattet nun das vollständige System alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe Yf, so ist nach dem Obigen auch $Y(\varphi)$ eine Lösung des Systems, es verschwindet also die linke Seite der letzten Gleichung identisch; die rechte Seite thut natürlich dasselbe, mithin befriedigt jede Lösung des vollständigen Systems auch die q Gleichungen

$$\sum_1^n {}_i (X_k \eta_i - Y \xi_{ki}) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0;$$

daraus aber folgt, dass q Identitäten von der Form

$$\sum_1^n {}_i (X_k \eta_i - Y \xi_{ki}) \frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv \sum_1^q {}_j \chi_{kj}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_j f \qquad (k = 1 \cdots q)$$

bestehen.

Setzen wir andererseits voraus, dass Identitäten von dieser Form bestehen und verstehen wir wiederum unter φ irgend eine Lösung des vollständigen Systems. Dann ergiebt sich sofort, dass die q Ausdrücke $X_k(Y(f)) - Y(X_k(f))$ bei der Substitution $f = \varphi$ identisch verschwinden; daraus aber folgt: $X_k(Y(\varphi)) \equiv 0$, das heisst $Y\varphi$ ist eine Lösung des Systems, es bestehen also $n - q$ Relationen von der Form

(2) $$Y\varphi_k = \omega_k(\varphi_1 \cdots \varphi_{n-q}) \qquad (k = 1 \cdots n-q)$$

und die zeigen, dass das vollständige System alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe Yf gestattet.

Damit haben wir das

Theorem 20.*) *Ein q-gliedriges vollständiges System*

$$X_k f = \sum_1^n {}_i \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (k = 1 \cdots q)$$

---

*) Lie, Gesellschaft d. W. zu Christiania, 1874.

in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ *gestattet dann und nur dann alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe*

$$Yf = \sum_1^n{}_i\, \eta_i(x_1 \cdots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

wenn alle $X_k(Y(f)) - Y(X_k(f))$ *sich linear durch* $X_1 f \cdots X_q f$ *ausdrücken:*

$$(3) \qquad (X_k Y) = X_k(Y(f)) - Y(X_k(f)) = \sum_1^q{}_j\, \chi_{kj}(x_1 \cdots x_n)\cdot X_j f$$
$$(k = 1 \cdots q)$$

Das Bestehen von Relationen von der Form (3) ist also nothwendig und hinreichend, damit das vollständige System $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe Yf gestattet. Aus verschiedenen Gründen erscheint es wünschenswerth, wenigstens die *Nothwendigkeit* der Relationen (3) auch noch durch eine direkte Methode nachzuweisen. Das wollen wir jetzt thun.

Die Transformationen der eingliedrigen Gruppe Yf haben die Form

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1}\cdot\eta_i + \frac{t^2}{1\,.\,2}\cdot Y\eta_i + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n).$$

Führen wir nun vermöge dieser Formel in die Ausdrücke $X_k f$ die neuen Veränderlichen $x_1' \cdots x_n'$ an Stelle der x ein, so bekommen wir:

$$X_k f = \sum_1^n{}_i\, X_k x_i' \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i'}.$$

Hier sind die $X_k x_i'$ noch durch $x_1' \cdots x_n'$ auszudrücken. Bei Vernachlässigung der zweiten und der höheren Potenzen von t ergiebt sich zunächst

$$(4) \qquad X_k x_i' = X_k x_i + t\cdot X_k \eta_i + \cdots.$$

Ferner ist (vgl. Kap. 3, Gl. 7a, S. 53):

$$X_k x_i = \xi_{ki}(x) = \xi_{ki}' - \frac{t}{1}\cdot Y'\xi_{ki}' + \cdots$$

$$t\cdot X_k \eta_i = t\cdot X_k'\eta_i' - \cdots.$$

Also wird

$$X_k x_i' = \xi_{ki}' + t(X_k'\eta_i' - Y'\xi_{ki}') + \cdots,$$

und endlich

$$(5) \qquad X_k f = X_k' f + \frac{t}{1}(X_k' Y' f - Y' X_k' f) + \cdots,$$

wo die weggelassenen Glieder von der zweiten oder von höherer Ordnung in t sind.

Soll nun das vollständige System $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe Yf gestatten, so muss das System der q Gleichungen

$$X_k f + \frac{t}{1}(X_k Y) + \cdots = 0 \quad (k = 1 \cdots q)$$

mit $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ äquivalent sein und zwar für jeden Werth von t. Folglich müssen sich jedenfalls die Coefficienten von t linear durch $X_1 f \cdots X_q f$ ausdrücken lassen, das heisst es müssen Relationen von der Form (3):

$$X_k(Y(f)) - Y(X_k(f)) = (X_k Y) = \sum_1^q \chi_{kj}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_j f \quad (k = 1 \cdots q)$$

bestehen.

Damit ist direkt gezeigt, dass das Bestehen dieser Relationen nothwendig ist; dass es auch hinreichend ist, wollen wir nicht noch einmal beweisen, sondern begnügen uns mit dem Gesagten.

Wie wir von Gleichungensystemen

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = 0, \cdots \Omega_{n-m}(x_1 \cdots x_n) = 0$$

reden, welche eine infinitesimale Transformation Yf gestatten, geradeso können wir auch von vollständigen Systemen reden, welche dies thun. Wir werden sagen: *das q-gliedrige vollständige System $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ gestattet die infinitesimale Transformation Yf, wenn Relationen von der Form* (3) *bestehen.*

Mit Benutzung dieser Redeweise können wir das Theorem 20 auch so aussprechen:

Das q-gliedrige vollständige System $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ gestattet dann und nur dann alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe Yf, wenn es die infinitesimale Transformation Yf gestattet.

Gestattet ein vollständiges System alle Transformationen einer eingliedrigen Gruppe, so sagen wir auch kurz, *dass es diese eingliedrige Gruppe gestattet.*

Die Bedingungen des Theorems 20 sind insbesondere erfüllt, wenn Yf die Form hat

$$Yf = \sum_1^q {}_j\, \varrho_j(x_1 \cdots x_n) \cdot X_j f,$$

unter den ϱ_j beliebige Functionen der x verstanden. Dann bestehen ja immer Relationen von der Form (3) und es ist ausserdem noch $Y\varphi_j \equiv 0$. Das stimmt mit den Entwickelungen des Kap. 6, S. 98, nach denen jede Lösung $\Omega(\varphi_1 \cdots \varphi_{n-q})$ des vollständigen Systems

$X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ bei den Transformationen aller eingliedrigen Gruppen von der Form $\Sigma \varrho_j X_j f$ invariant bleibt.

Genügt andererseits eine infinitesimale Transformation Yf, welche nicht die Form $\Sigma \varrho_j(x) \cdot X_j f$ hat, den Bedingungen des Theorems 20, so lassen die endlichen Transformationen der eingliedrigen Gruppe keineswegs jede einzelne Lösung des vollständigen Systems invariant, wohl aber den Inbegriff aller dieser Lösungen.

Unter den infinitesimalen Transformationen, welche ein vorgelegtes vollständiges System $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ zulässt, sind diejenigen von der Form $\Sigma \varrho_j(x) \cdot X_j f$ zugleich mit dem vollständigen System gegeben und deshalb als trivial zu betrachten. Dagegen können die übrigen infinitesimalen Transformationen, welche das System gestattet, im Allgemeinen nicht angegeben werden, bevor man das System integrirt hat.

Wenn das vollständige System $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ die infinitesimale Transformation Yf gestattet, so geht, wie wir oben gesehen haben, jede Lösung $\Omega(\varphi_1 \cdots \varphi_{n-q})$ des vollständigen Systems bei jeder Transformation

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1} \cdot Y x_i + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

der eingliedrigen Gruppe Yf in eine Lösung über. Deuten wir daher die x und die x' als Punktcoordinaten eines n-fach ausgedehnten Raumes und die eben geschriebenen Transformationen als Operationen, bei welchen der Punkt $x_1 \cdots x_n$ die neue Lage $x_1' \cdots x_n'$ annimmt, erinnern wir uns ausserdem, dass die Gleichungen $\varphi_1 = a_1, \cdots \varphi_{n-q} = a_{n-q}$ mit den Constanten $a_1 \cdots a_{n-q}$ eine charakteristische Mannigfaltigkeit des vollständigen Systems $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ darstellen (vgl. Kap. 6, S. 101), so erkennen wir sofort, dass die Transformationen der eingliedrigen Gruppe Yf jede charakteristische Mannigfaltigkeit des vollständigen Systems in eine charakteristische Mannigfaltigkeit überführen. *Die charakteristischen Mannigfaltigkeiten unseres vollständigen Systems werden also von den Transformationen der eingliedrigen Gruppe Yf unter einander vertauscht, sie bilden, wie wir es ausdrücken wollen, eine bei der eingliedrigen Gruppe Yf invariante Schaar.* Da die erwähnten charakteristischen Mannigfaltigkeiten nach Kap. 6, S. 101 eine Zerlegung des Raumes bestimmen, so können wir auch sagen, dass diese *Zerlegung bei der eingliedrigen Gruppe Yf invariant bleibt.*

§ 38.

Noch einige einfache Sätze über vollständige Systeme, welche eingliedrige Gruppen gestatten:

Satz 2. *Gestattet ein q-gliedriges vollständiges System jede Transformation der beiden eingliedrigen Gruppen Yf und Zf, so gestattet es auch jede Transformation der eingliedrigen Gruppe $Y(Z(f)) - Z(Y(f)) = (YZ)$.*

Es seien $X_k f = 0$ die Gleichungen des vollständigen Systems. Bildet man dann die Jacobi'sche Identität

$$((YZ)X_k) + ((ZX_k)Y) + ((X_k Y)Z) = 0$$

und berücksichtigt, dass (YX_k) und (ZX_k) sich nach der Voraussetzung des Satzes linear durch $X_1 f \cdots X_q f$ ausdrücken, so erkennt man, dass ein gleiches auch von $((YZ)X_k)$ gilt. Damit ist aber der Satz bewiesen.

Satz 3. *Bilden die Gleichungen $A_1 f = 0, \cdots A_q f = 0$ ein vollständiges System und ebenso die Gleichungen $B_1 f = 0, \cdots B_s f = 0$, so bildet ein vollständiges System auch der Inbegriff aller etwaigen Gleichungen $Cf = 0$, welche jenen beiden vollständigen Systemen in dem Sinne gemeinsam sind, dass Relationen von der Form*

$$Cf = \sum_1^q {}^j\, \alpha_j (x_1 \cdots x_n) \cdot A_j f = \sum_1^s {}^k\, \beta_k (x_1 \cdots x_n) \cdot B_k f$$

bestehen. Gestatten die vollständigen Systeme $A_k f = 0$ und $B_k f = 0$ beide eine gewisse eingliedrige Gruppe Xf, so lässt auch das vollständige System der Gleichungen $Cf = 0$ diese Gruppe zu.

Beweis. Es mögen sich unter den Gleichungen $Cf = 0$ gerade m und nicht mehr von einander unabhängige auswählen lassen, etwa:

$$C_1 f = 0, \cdots C_m f = 0.$$

Dann bestehen für jedes $\mu = 1 \cdots m$ Relationen von der Form:

$$C_\mu f = \sum_1^q {}^j\, \alpha_{\mu j} (x) \cdot A_j f = \sum_1^s {}^k\, \beta_{\mu k} (x) \cdot B_k f;$$

folglich kann auch jedes $C_\mu(C_\nu(f)) - C_\nu(C_\mu(f)) = (C_\mu C_\nu)$ sowohl durch die Af als durch die Bf linear ausgedrückt werden, das heisst jedes $(C_\mu C_\nu)$ drückt sich linear durch $C_1 f \cdots C_m f$ aus. Damit ist der erste Theil unseres Satzes bewiesen. Weiter drückt sich jedes (XC_μ) sowohl durch die Af als durch die Bf aus, es bestehen daher Relationen von der Form

$$(XC_\mu) = \sum_1^m {}^\nu\, \gamma_{\mu\nu} (x_1 \cdots x_n) \cdot C_\nu f \quad (\mu = 1 \cdots m).$$

Hierin liegt der zweite Theil des Satzes.

Sind zwei vollständige Systeme $A_1 f = 0, \cdots A_q f = 0$ und $B_1 f = 0, \cdots B_s f = 0$ vorgelegt, so werden alle etwaigen gemeinsamen Lösungen beider Systeme ebenfalls durch ein vollständiges System definirt, welches man nach Anleitung von Kap. 5, S. 85 aus den Gleichungen

$$A_1 f = 0, \cdots A_q f = 0, \quad B_1 f = 0, \cdots B_s f = 0$$

herleiten kann. Dabei gilt der

Satz 4. *Gestatten die vollständigen Systeme* $A_1 f = 0, \cdots A_q f = 0$ *und* $B_1 f = 0, \cdots B_s f = 0$ *beide die eingliedrige Gruppe* Xf, *so lässt auch das vollständige System, welches die gemeinsamen Lösungen der sämmtlichen Gleichungen* $A_k f = 0$ *und* $B_k f = 0$ *definirt, die eingliedrige Gruppe* Xf *zu.*

Beweis. Die Identität

$$((A_j B_k) X) + ((B_k X) A_j) + ((X A_j) B_k) = 0$$

zeigt, dass alle $((A_j B_k) X)$ sich linear durch die Af, die Bf und die (AB) ausdrücken. Ergeben daher bereits die Gleichungen $(A_j B_k) = 0$ zusammen mit den $Af = 0$ und den $Bf = 0$ ein vollständiges System, so ist die Behauptung unseres Satzes erwiesen. Andernfalls behandle man das System der Gleichungen $Af = 0$, $Bf = 0$, $(AB) = 0$ geradeso wie eben das System der Gleichungen $Af = 0$, $Bf = 0$, das heisst man bilde aus irgend zweien der Ausdrücke Af, Bf, (AB) mit Hinzunahme von Xf die Jacobi'sche Identität und so fort.

Die Sätze 3 und 4 erhalten einen einfachen begrifflichen Sinn, wenn $x_1 \cdots x_n$ als Punktcoordinaten eines Raumes R_n gedeutet werden.

Wir erinnern zunächst daran, dass die ∞^{n-q} q-fach ausgedehnten charakteristischen Mannigfaltigkeiten M_q des vollständigen Systems $A_1 f = 0, \cdots A_q f = 0$ eine Schaar bilden, welche bei der eingliedrigen Gruppe Xf invariant bleibt. Ferner bemerken wir, dass auch die ∞^{n-s} s-fach ausgedehnten charakteristischen Mannigfaltigkeiten M_s des vollständigen Systems $B_1 f = 0, \cdots B_s f = 0$ eine solche *invariante Schaar* bilden.

Nehmen wir an, dass die Zahl s mindestens gleich q ist. Dann wird jede M_s allgemeiner Lage von denjenigen M_q, von welchen sie überhaupt geschnitten wird, in eine Schaar von ∞^{s-q+h} $(q-h)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten zerlegt, unter h eine bestimmte der Zahlen $0, 1 \cdots q$ verstanden. Auf diese Weise wird also der ganze R_n in eine Schaar von ∞^{n-q+h} $(q-h)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten zerlegt. Natürlich bleibt der Inbegriff dieser Mannigfaltigkeiten bei der eingliedrigen Gruppe Xf invariant, denn es ist ja der

Schnitt des Inbegriffs aller M_q mit dem Inbegriff aller M_s, und diese beiden Inbegriffe sind, wie schon gesagt, bei der Gruppe Xf invariant.

Die eben besprochenen $(q-h)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten sind nichts anderes als die charakteristischen Mannigfaltigkeiten des vollständigen Systems der $Cf=0$, welches in Satz 3 vorkommt, dieses vollständige System ist unter den gemachten Voraussetzungen $(q-h)$-gliedrig.

Auf der andern Seite kann man nach den kleinsten Mannigfaltigkeiten fragen, welche sowohl aus M_q als aus M_s bestehen. Giebt es derartige Mannigfaltigkeiten, so bleibt natürlich ihr Inbegriff bei der eingliedrigen Gruppe Xf invariant; sie sind die charakteristischen Mannigfaltigkeiten desjenigen vollständigen Systems, welches in dem Satze 4 definirt wird.

Kapitel 9.

Charakteristische Beziehungen zwischen den infinitesimalen Transformationen einer Gruppe.

In Kapitel 2 und in Kapitel 4 (Satz 1, S. 67) ist gezeigt worden, dass zu jeder r-gliedrigen Gruppe r unabhängige infinitesimale Transformationen gehören, welche zu der betreffenden Gruppe in einer eigenthümlichen Beziehung stehen. Jetzt wollen wir zunächst gewisse wichtige Relationen ableiten, welche zwischen derartigen infinitesimalen Transformationen bestehen. Sodann werden wir den ebenso wichtigen Satz beweisen, dass r unabhängige infinitesimale Transformationen, welche die betreffenden Relationen befriedigen, stets eine r-gliedrige Gruppe mit der identischen Transformation bestimmen.

§ 39.

Statt eine r-gliedrige Gruppe zu betrachten, wollen wir uns vorerst wieder auf den etwas allgemeineren Standpunkt stellen, dass wir eine Schaar von ∞^r verschiedenen Transformationen

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \qquad {\scriptstyle (i=1\cdots n)}$$

betrachten, welche Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r {}_j\, \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n')$$
$${\scriptstyle (i=1\cdots n,\ k=1\cdots r)}$$

befriedigen. Wir wissen dann (vgl. Kap. 4, S. 68), dass die r infinitesimalen Transformationen

$$X_k'(f) = \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki}(x') \frac{\partial f}{\partial x_i'} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

von einander unabhängig sind, und dass die Determinante der $\psi_{jk}(a)$ nicht identisch verschwindet; folglich können wir, wie schon früher, die obigen Differentialgleichungen auch schreiben:

$$\xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') = \sum_1^r {}_k\, \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} \tag{1}$$

$$(i = 1 \cdots n,\ j = 1 \cdots r),$$

Hier verschwindet natürlich die Determinante der α_{jk} nicht identisch.

Denken wir uns andererseits die Gleichungen

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r)$$

nach $x_1 \cdots x_n$ aufgelöst:

$$x_i = F_i(x_1' \cdots x_n',\ a_1 \cdots a_r) \qquad (i = 1 \cdots n),$$

so können wir sehr leicht gewisse Differentialgleichungen ableiten, welchen $F_1 \cdots F_n$ genügen. Wir differentiiren einfach die Identitäten

$$F_i(f_1(x, a) \cdots f_n(x, a),\ a_1 \cdots a_r) \equiv x_i$$

nach a_k; dann haben wir:

$$\sum_1^n {}_\nu\, \frac{\partial F_i(x', a)}{\partial x_\nu'} \frac{\partial f_\nu(x, a)}{\partial a_k} + \frac{\partial F_i(x', a)}{\partial a_k} \equiv 0,$$

vorausgesetzt, dass überall $x_\nu' = f_\nu(x, a)$ gesetzt wird. Diese Identität multipliciren wir mit $\alpha_{jk}(a)$ und summiren nach k von 1 bis r, dann erhalten wir wegen

$$\sum_1^r {}_k\, \alpha_{jk}(a) \frac{\partial f_\nu(x, a)}{\partial a_k} \equiv \xi_{j\nu}(f_1 \cdots f_n)$$

die folgende Gleichung:

$$\sum_1^n {}_\nu\, \xi_{j\nu}(x_1' \cdots x_n') \frac{\partial F_i}{\partial x_\nu'} + \sum_1^r {}_k\, \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial F_i}{\partial a_k} = 0$$

$$(j = 1 \cdots r,\ i = 1 \cdots n).$$

Ihrer Ableitung gemäss bestehen diese Gleichungen identisch, wenn man darin die Substitution $x_\nu' = f_\nu(x, a)$ macht; da sie aber $x_1 \cdots x_n$ gar nicht enthalten, so müssen sie schon an und für sich identisch bestehen, das heisst: $F_1 \cdots F_n$ sind sämmtlich Lösungen der folgenden linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$\Omega_j(F) = \sum_1^n {}_\nu\, \xi_{j\nu}(x') \frac{\partial F}{\partial x_\nu'} + \sum_1^r {}_\mu\, \alpha_{j\mu}(a) \frac{\partial F}{\partial a_\mu} = 0 \tag{2}$$

$$(j = 1 \cdots r).$$

Diese r Gleichungen enthalten $n+r$ Veränderliche, nämlich $x_1' \cdots x_n'$ und $a_1 \cdots a_r$; sie sind ausserdem von einander unabhängig, denn die Determinante der α_{kj} verschwindet nicht identisch und es ist daher eine Auflösung nach den r Differentialquotienten $\frac{\partial F}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial F}{\partial a_r}$ möglich. Auf der andern Seite haben aber die Gleichungen (2) n unabhängige Lösungen gemein, eben die Functionen $F_1(x', a) \cdots F_n(x', a)$, deren Functionaldeterminante nach den x':

$$\sum \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1'} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n'} = \frac{1}{\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}}$$

nicht identisch verschwindet, weil die Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ nach Voraussetzung Transformationen darstellen. Folglich treffen die Voraussetzungen des Satzes 8 in Kap. 5, S. 88 bei den Gleichungen (2) zu, das heisst, diese Gleichungen bilden ein r-gliedriges vollständiges System.

Setzen wir

$$\sum_1^r {}_k \, \alpha_{jk}(a) \frac{\partial F}{\partial a_k} = A_j(f)$$

und ferner

$$\sum_1^n {}_\nu \, \xi_{j\nu}(x') \frac{\partial F}{\partial x_\nu'} = X_j'(F),$$

entsprechend den früher gebrauchten Bezeichnungen, so erhalten die Gleichungen (2) die Gestalt:

$$\Omega_j(F) = X_j'(F) + A_j(F) = 0 \qquad (j = 1 \cdots r).$$

Dass sie ein r-gliedriges vollständiges System bilden, findet, wie wir wissen, seinen Ausdruck darin, dass gewisse Gleichungen von der Form

$$\Omega_k(\Omega_j(F)) - \Omega_j(\Omega_k(F)) = \sum_1^r {}_s \, \vartheta_{kjs}(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r) \cdot \Omega_s(F)$$
$$(k, j = 1 \cdots r)$$

identisch bestehen, welche Function von $x_1' \cdots x_n'$, $a_1 \cdots a_r$ auch F sein mag. Da sich diese Identitäten auch schreiben lassen:

$$X_k'(X_j'(F)) - X_j'(X_k'(F)) + A_k(A_j(F)) - A_j(A_k(F)) =$$
$$= \sum_1^r {}_s \, \vartheta_{kjs} X_s'(F) + \sum_1^r {}_s \, \vartheta_{kjs} A_s(F),$$

so können wir sie sofort in je zwei zerlegen:

$$(3) \quad \begin{cases} X_k'(X_j'(F)) - X_j'(X_k'(F)) = \sum_1^r {}_s\, \vartheta_{kjs} X_s'(F) \\ A_k(A_j(F)) - A_j(A_k(F)) = \sum_1^r {}_s\, \vartheta_{kjs} A_s(F) \end{cases}$$

und hier lässt sich die zweite Reihe noch weiter zerlegen in:

$$A_k(\alpha_{j\mu}) - A_j(\alpha_{k\mu}) = \sum_1^r {}_s\, \vartheta_{kjs}\alpha_{s\mu} \qquad (k, j, \mu = 1 \cdots r).$$

Weil nun die Determinante der $\alpha_{s\mu}$ nicht identisch verschwindet, so sind die ϑ_{kjs} durch diese letzten Bedingungen vollständig bestimmt und es zeigt sich, dass die ϑ_{kjs} nur von $a_1 \cdots a_r$ abhängen können, während sie jedenfalls von $x_1' \cdots x_n'$ frei sind. Allein es lässt sich nachweisen, dass die ϑ_{kjs} auch von $a_1 \cdots a_r$ frei sind. Denn betrachten wir in der ersten Reihe der Identitäten (3) das F als eine beliebige Function von $x_1' \cdots x_n'$ allein, so erhalten wir durch Differentiation nach a_μ die folgende identische Gleichung:

$$0 = \sum_1^r {}_s\, \frac{\partial \vartheta_{kjs}}{\partial a_\mu} X_s'(F) \qquad k, j, \mu = 1 \cdots r).$$

Da aber $X_1'(F) \cdots X_r'(F)$ unabhängige infinitesimale Transformationen sind, da ausserdem die $\frac{\partial \vartheta_{kjs}}{\partial a_\mu}$ von $x_1' \cdots x_n'$ nicht abhängen, so müssen alle $\frac{\partial \vartheta_{kjs}}{\partial a_\mu}$ identisch verschwinden; das heisst, die ϑ_{kjs} sind auch von $a_1 \cdots a_r$ frei, sie sind numerische Constanten.

Also haben wir das

Theorem 21. *Genügt eine Schaar von ∞^r Transformationen:*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

gewissen Differentialgleichungen von der besonderen Form

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r {}_j\, \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') \qquad (i = 1 \cdots n, k = 1 \cdots r)$$

und schreibt man, was immer möglich ist, diese Differentialgleichungen in der Form:

$$\xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') = \sum_1^r {}_k\, \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} \qquad (j = 1 \cdots r, i = 1 \cdots n),$$

so bestehen zwischen den $2r$ von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen

$$X_j'(F) = \sum_1^n {}_i\, \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') \frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (j = 1 \cdots r)$$

$$A_j(F) = \sum_1^r {}_\mu\, \alpha_{j\mu}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial F}{\partial a_\mu} \qquad (j = 1 \cdots r)$$

Relationen von der Gestalt:

$$(4) \qquad \begin{cases} X_k'(X_j'(F)) - X_j'(X_k'(F)) = \sum_1^r {}_s\, c_{kjs} X_s'(F) \\[2ex] A_k(A_j(F)) - A_j(A_k(F)) - \sum_1^r {}_s\, c_{kjs} A_s(F) \end{cases}$$

$$(k, j = 1 \cdots r),$$

wo die c_{kjs} numerische Constanten bedeuten. Die r nach $\frac{\partial F}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial F}{\partial a_r}$ auflösbaren Gleichungen

$$X_j'(F) + A_j(F) = 0 \qquad (j = 1 \cdots r)$$

bilden in Folge dessen ein r-gliedriges vollständiges System in den $n + r$ Veränderlichen $x_1' \cdots x_n'$, $a_1 \cdots a_r$; löst man die n Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ nach $x_1 \cdots x_n$ auf:

$$x_i = F_i(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r) \qquad (i = 1 \cdots n),$$

so sind $F_1(x', a) \cdots F_n(x', a)$ unabhängige Lösungen dieses vollständigen Systems.

Dieses Theorem lässt sich nun unmittelbar auf alle r-gliedrigen Gruppen anwenden, gleichgültig, ob dieselben die identische Transformation enthalten oder nicht.

Angewandt auf den Fall einer r-gliedrigen Gruppe mit der identischen Transformation giebt uns das Theorem gewisse Relationen, welche zwischen den infinitesimalen Transformationen dieser Gruppe bestehen. Wir erhalten so das wichtige

Theorem 22. *Enthält eine r-gliedrige Gruppe in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen*

$$X_k(f) = \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \cdots r),$$

so bestehen zwischen diesen infinitesimalen Transformationen paarweise Beziehungen von der Form:

$$X_k(X_j(f)) - X_j(X_k(f)) = \sum_1^r {}_s\, c_{kjs} X_s(f),$$

*wo die c_{kjs} numerische Constanten bedeuten.**)

*) Lie, Math. Ann. Bd. 8, S. 303; Göttinger Nachr. 1874.

Hieraus ergiebt sich insbesondere der folgende wichtige

Satz 1. *Enthält eine endliche continuirliche Gruppe die beiden infinitesimalen Transformationen*

$$X(f) = \sum_1^n {}^i\, \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad Y(f) = \sum_1^n {}^i\, \eta_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

so enthält sie auch die infinitesimale Transformation

$$X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

§ 40.

Denken wir uns jetzt umgekehrt r unabhängige infinitesimale Transformationen

$$X_j'(F) = \sum_1^n {}^i\, \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') \frac{\partial F}{\partial x_i'} \qquad (j=1 \cdots r)$$

in $x_1' \cdots x_n'$ vorgelegt, welche paarweise in Beziehungen von der Form

$$X_k'(X_j'(F)) - X_j'(X_k'(F)) = \sum_1^r {}^s\, c_{kjs} X_s'(F)$$

stehen, wo die c_{kjs} numerische Constanten sind. Denken wir uns ausserdem r infinitesimale Transformationen

$$A_j(F) = \sum_1^r {}^\mu\, \alpha_{j\mu}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial F}{\partial a_\mu} \qquad (j=1 \cdots r)$$

in $a_1 \cdots a_r$ gegeben, die paarweise Relationen von der analogen Form

$$A_k(A_j(F)) - A_j(A_k(F)) = \sum_1^r {}^s\, c_{kjs} A_s(F)$$

mit denselben c_{kjs} erfüllen und deren Determinante $\Sigma \pm \alpha_{11}(a) \cdots \alpha_{rr}(a)$ nicht identisch verschwindet. Wir werden zeigen, dass die infinitesimalen Transformationen $X_1'(F) \cdots X_r'(F)$ unter diesen Voraussetzungen eine ganz bestimmte r-gliedrige Gruppe mit der identischen Transformation erzeugen.

Zu dem Ende bilden wir die Gleichungen

$$\Omega_j(F) = X_j'(F) + A_j(F) = 0 \qquad (j=1 \cdots r),$$

welche unter den gemachten Voraussetzungen ein r-gliedriges vollständiges System bilden; es bestehen ja Relationen von der Form

$$\Omega_k(\Omega_j(F)) - \Omega_j(\Omega_k(F)) = \sum_1^r {}^s\, c_{kjs} \Omega_s(F)$$

und ausserdem sind die Gleichungen $\Omega_1(F) = 0, \cdots \Omega_r(F) = 0$ nach

$\frac{\partial F}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial F}{\partial a_r}$ auflösbar. Es sei nun $a_1^0 \cdots a_r^0$ ein Werthsystem der a, in dessen Umgebung sich die $\alpha_{jk}(a)$ regulär verhalten und für welches die Determinante $\Sigma \pm \alpha_{11}(a^0) \cdots \alpha_{rr}(a^0)$ von Null verschieden ist. Dann besitzt nach Theorem 12, Kap. 5, S. 91 das vollständige System $\Omega_j(F) = 0$ n Lösungen $F_1(x', a) \cdots F_n(x', a)$, welche sich für $a_k = a_k^0$ auf bezüglich $x_1' \cdots x_n'$ reduciren; es sind das die sogenannten Hauptlösungen des vollständigen Systems in Bezug auf $a_k = a_k^0$. Diese Hauptlösungen denken wir uns aufgestellt, bilden die n Gleichungen

$$x_i = F_i(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

und lösen dieselben nach $x_1' \cdots x_n'$ auf, was immer möglich ist, da $F_1 \cdots F_n$ offenbar in Bezug auf $x_1' \cdots x_n'$ von einander unabhängig sind. Die so erhaltenen Gleichungen

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

stellen, wie wir jetzt zeigen werden, eine r-gliedrige Gruppe dar und zwar natürlich eine Gruppe mit der identischen Transformation; denn für $a_k = a_k^0$ ergiebt sich $x_i' = x_i$.

Wir haben zunächst identisch:

$$(5) \qquad \sum_1^n {}_\nu\, \xi_{j\nu}(x') \frac{\partial F_i}{\partial x_\nu'} + \sum_1^r {}_\mu\, \alpha_{j\mu}(a) \frac{\partial F_i}{\partial a_\mu} = 0$$
$$(j = 1 \cdots r,\ i = 1 \cdots n).$$

Auf der anderen Seite ergiebt sich aus $x_i = F_i(x', a)$ durch Differentiation nach a_μ die Gleichung:

$$0 = \sum_1^n {}_\nu\, \frac{\partial F_i}{\partial x_\nu'} \frac{\partial x_\nu'}{\partial a_\mu} + \frac{\partial F_i}{\partial a_\mu} \qquad (i = 1 \cdots n,\ \mu = 1 \cdots r),$$

welche bei der Substitution $x_\nu' = f_\nu(x, a)$ zur Identität wird. Diese Gleichung multipliciren wir mit $\alpha_{j\mu}(a)$ und summiren nach μ von $1 \cdots r$, dann erhalten wir eine Gleichung, welche durch Benutzung von (5) übergeht in:

$$\sum_1^n {}_\nu\, \frac{\partial F_i}{\partial x_\nu'} \left(\sum_1^r {}_\mu\, \alpha_{j\mu}(a) \frac{\partial x_\nu'}{\partial a_\mu} - \xi_{j\nu}(x') \right) = 0 \qquad (i = 1 \cdots n,\ j = 1 \cdots r).$$

Da aber die Determinante $\sum \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1'} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n'}$ nicht identisch verschwindet, so bekommen wir:

$$\sum_1^r {}_\mu\, \alpha_{j\mu}(a) \frac{\partial x_\nu'}{\partial a_\mu} = \xi_{j\nu}(x'),$$

ein System, das wir wiederum nach den $\frac{\partial x_\nu'}{\partial a_\mu}$ auflösen können, denn die Determinante der $\alpha_{j\mu}(a)$ verschwindet ja nicht. Also ergiebt sich schliesslich, dass Gleichungen von der Form:

$$\frac{\partial x_\nu'}{\partial a_\mu} = \sum_1^r {}^j \psi_{j\mu}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{j\nu}(x_1' \cdots x_n') \tag{6}$$
$$(\nu = 1 \cdots n,\ \mu = 1 \cdots r)$$

bestehen, welche natürlich bei der Substitution $x_\nu' = f_\nu(x, a)$ zu Identitäten werden.

Nunmehr hat der Nachweis, dass die Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ eine r-gliedrige Gruppe darstellen, gar keine Schwierigkeit.

Zunächst nämlich ist leicht zu sehen, dass die Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ ∞^r verschiedene Transformationen darstellen, dass also die Parameter $a_1 \cdots a_r$ sämmtlich wesentlich sind. Andernfalls müssten nämlich (vgl. Satz 1 in Kap. 1, S. 13) alle Functionen $f_1(x, a) \cdots f_n(x, a)$ eine lineare partielle Differentialgleichung von der Form

$$\sum_1^r {}^k \chi_k(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_k} = 0$$

befriedigen, wo die χ_k von $x_1 \cdots x_n$ frei wären. Wir hätten dann wegen (6):

$$\sum_{k,j}^{1 \cdots r} \chi_k(a) \cdot \psi_{jk}(a) \cdot \xi_{j\nu}(f_1 \cdots f_n) \equiv 0 \qquad (\nu = 1 \cdots n),$$

also, da $X_1'(F) \cdots X_r'(F)$ unabhängige infinitesimale Transformationen sind:

$$\sum_1^r {}^k \chi_k(a) \cdot \psi_{jk}(a) = 0 \qquad (j = 1 \cdots r);$$

hieraus aber folgte sofort: $\chi_1(a) = 0, \cdots \chi_r(a) = 0$, weil die Determinante der $\psi_{jk}(a)$ nicht identisch verschwindet.

Also stellen die Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ wirklich eine Schaar von ∞^r verschiedenen Transformationen dar. Nun aber genügt diese Schaar gewissen Differentialgleichungen von der besonderen Form (6); wir können daher sofort das Theorem 9 des Kap. 4, S. 72 anwenden. Nach demselben gilt folgendes: Ist $\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r$ ein Werthsystem der a, für welches die $\psi_{jk}(a)$ sich regulär verhalten und die Determinante $\Sigma \pm \psi_{11}(\bar{a}) \cdots \psi_{rr}(\bar{a})$ nicht verschwindet, so wird jede Transformation $x_i' = f_i(x, a)$, deren Parameter $a_1 \cdots a_r$ in einer gewissen Umgebung von $\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r$ liegen, dadurch erhalten, dass man zuerst die Transformation

$$\bar{x}_i = f_i(x_1 \cdots x_n,\ \bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

ausführt und dann eine Transformation

$$x_i' = \bar{x}_i + \sum_1^r {}_k \lambda_k \xi_{ki}(\bar{x}) + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

einer eingliedrigen Gruppe $\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$, unter $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ geeignete Constanten verstanden. Setzen wir insbesondere $\bar{a}_k = a_k^0$, so ergiebt sich $\bar{x}_i = x_i$, also sehen wir zunächst, dass die Schaar der ∞^r Transformationen $x_i' = f_i(x, a)$ in einer gewissen Umgebung von $a_1^0 \cdots a_r^0$ mit der Schaar der Transformationen

$$(7) \qquad x_i' = x_i + \sum_1^r {}_k \lambda_k \xi_{ki}(x) + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

zusammenfällt.

Wählen wir daher andererseits $\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r$ beliebig in einer gewissen Umgebung von $a_1^0 \cdots a_r^0$, so gehört jederzeit die Transformation $\bar{x}_i = f_i(x, \bar{a})$ der Schaar (7) an. Führen wir aber zuerst die Transformation $\bar{x}_i = f_i(x, \bar{a})$ aus und sodann eine geeignete Transformation

$$x_i' = \bar{x}_i + \sum_1^r {}_k \lambda_k \xi_{ki}(\bar{x}) + \cdots$$

der Schaar (7), so erhalten wir nach dem oben Gesagten eine Transformation $x_i' = f_i(x, a)$, wo $a_1 \cdots a_r$ alle Werthe in einer gewissen Umgebung von $\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r$ annehmen können. Wählen wir insbesondere, was immer möglich ist, $a_1 \cdots a_r$ in der vorhin erwähnten Umgebung von $a_1^0 \cdots a_r^0$, so gehört auch die Transformation $x_i' = f_i(x, a)$ wieder der Schaar (7) an; also sehen wir, dass zwei Transformationen der Schaar (7) nach einander ausgeführt wieder eine Transformation dieser Schaar ergeben. Folglich bildet diese Schaar und natürlich auch die mit ihr identische Schaar $x_i' = f_i(x, a)$ eine r-gliedrige Gruppe, eine Gruppe, welche die identische Transformation enthält und deren Transformationen sich paarweise als inverse zusammenordnen.

Das gewonnene Ergebniss sprechen wir folgendermassen aus:

Theorem 23. *Erfüllen r unabhängige infinitesimale Transformationen*

$$X_k'(f) = \sum_1^n {}_i \xi_{ki}(x_1' \cdots x_n') \frac{\partial f}{\partial x_i'} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

in den Veränderlichen $x_1' \cdots x_n'$ paarweise Bedingungen von der Form

$$X_k'(X_j'(f)) - X_j'(X_k'(f)) = \sum_1^r {}_s c_{kjs} X_s'(f),$$

genügen ferner r unabhängige infinitesimale Transformationen

$$A_k(f) = \sum_1^r {}_\mu \alpha_{k\mu}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_\mu} \qquad (k=1\cdots r)$$

in den Veränderlichen $a_1 \cdots a_r$ *den entsprechenden Bedingungen*

$$A_k(A_j(f)) - A_j(A_k(f)) = \sum_1^r {}_s c_{kjs} A_s(f)$$

mit denselben c_{kjs} *und verschwindet ausserdem die Determinante* $\Sigma \pm \alpha_{11}(a) \cdots \alpha_{rr}(a)$ *nicht identisch, so erhält man auf die folgende Weise die Gleichungen einer r-gliedrigen Gruppe: Man bilde das r-gliedrige vollständige System*

$$X_k'(f) + A_k(f) = 0 \qquad (k=1\cdots r)$$

und bestimme seine Hauptlösungen in Bezug auf ein passendes Werthsystem $a_k = a_k^0$. *Sind* $x_i = F_i(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r)$ *diese Hauptlösungen, so stellen die durch Auflösung entstehenden Gleichungen* $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ *eine r-gliedrige continuirliche Transformationsgruppe dar. Diese Gruppe enthält die identische Transformation und zu einer jeden ihrer Transformationen auch noch die inverse; sie ist erzeugt von den* ∞^{r-1} *infinitesimalen Transformationen:*

$$\lambda_1 X_1'(f) + \cdots + \lambda_r X_r'(f),$$

wo $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ *willkürliche Constanten bedeuten. Durch Einführung neuer Parameter an Stelle der* a_k *lassen sich daher die Gleichungen der Gruppe auf die Form bringen:*

$$x_i' = x_i + \sum_1^r {}_k \lambda_k \xi_{ki}(x) + \sum_{kj}^{1\cdots r} \frac{\lambda_k \lambda_j}{1\cdot 2} X_j(\xi_{ki}) + \cdots \qquad (i=1\cdots n).$$

Offenbar stellen die in diesem Theorem vorkommenden Gleichungen $x_i = F_i(x', a)$ selbst eine Gruppe dar und zwar eben die Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$.

§ 41.

Die Voraussetzungen, welche in dem wichtigen Theorem 23 gemacht sind, lassen sich wesentlich vereinfachen.

Das Theorem sagt aus, dass die $2r$ infinitesimalen Transformationen $X_k(f)$ und $A_k(f)$ eine gewisse r-gliedrige Gruppe in den x bestimmen; zugleich aber giebt es eine Darstellung dieser Gruppe, welche von den $A_k(f)$ vollkommen unabhängig ist; die betreffende Gruppe ist ja nach dem citirten Theoreme identisch mit der Schaar der ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen $\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$, und diese Schaar ist schon durch die $X_k(f)$ allein vollständig bestimmt. Dieser Umstand führt uns auf die Vermuthung, dass die Schaar der ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen $\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$ stets dann eine r-gliedrige Gruppe bildet, wenn die unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1(f) \cdots X_r(f)$ paarweise in Beziehungen von der Form

$$(8) \qquad X_k(X_j(f)) - X_j(X_k(f)) = (X_k X_j) = \sum_1^r {}_s\, c_{kjs} X_s(f)$$

stehen. Nach dem Theoreme 22 ist diese Bedingung nothwendig, damit die ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen $\Sigma \lambda_k X_k(f)$ eine r-gliedrige Gruppe bilden. Unsere Vermuthung kommt also darauf hinaus, dass diese nothwendige Bedingung auch hinreichend ist.

Diese Vermuthung würde zur Gewissheit, wenn es uns gelänge zu jedem Systeme $X_k(f)$ von der besprochenen Beschaffenheit r unabhängige infinitesimale Transformationen

$$A_k(f) = \sum_1^r {}_\mu\, \alpha_{k\mu}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_\mu} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

in $a_1 \cdots a_r$ herzustellen, welche die entsprechenden Relationen

$$A_k(A_j(f)) - A_j(A_k(f)) = \sum_1^r {}_s\, c_{kjs} A_s(f)$$

befriedigen, während jedoch die Determinante $\Sigma \pm \alpha_{11} \cdots \alpha_{rr}$ nicht identisch verschwindet, oder anders ausgedrückt, während keine Relation von der Form

$$\sum_1^r {}_k\, \chi_k(a_1 \cdots a_r) \cdot A_k(f) = 0$$

identisch besteht.

Mit Hülfe des Satzes 5 in Kap. 3, S. 66 gelingt es uns nun in der That immer, ein solches System von infinitesimalen Transformationen $A_k(f)$ herzustellen. Wir setzen wie damals

$$X_k^{(\mu)}(f) = \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki}(x_1^{(\mu)} \cdots x_n^{(\mu)}) \frac{\partial f}{\partial x_i^{(\mu)}}$$

und bilden die r infinitesimalen Transformationen

$$W_k(f) = \sum_1^r {}_\mu\, X_k^{(\mu)}(f).$$

Diese besitzen dann nach dem angeführten Satze die Eigenschaft, dass keine Relation von der Form

$$\sum_1^r {}_k \psi_k(x_1' \cdots x_n', x_1'' \cdots x_n'', \cdots x_1^{(r)} \cdots x_n^{(r)}) \cdot W_k(f) = 0$$

besteht. Da nun ausserdem

$$W_k(W_j(f)) - W_j(W_k(f)) = \sum_1^{r'} {}_s c_{kjs} W_s(f)$$

ist, so bilden die r von einander unabhängigen Gleichungen

$$W_1(f) = 0, \cdots W_r(f) = 0$$

ein r-gliedriges vollständiges System in den rn Veränderlichen $x_1' \cdots x_n' \cdots x_1^{(r)} \cdots x_n^{(r)}$. Dieses vollständige System besitzt $r(n-1)$ unabhängige Lösungen, die $u_1, u_2 \cdots u_{rn-r}$ heissen mögen. Wählen wir daher r von einander und von $u_1 \cdots u_{rn-r}$ unabhängige Functionen $y_1 \cdots y_r$ der rn Grössen $x_i^{(\mu)}$ aus, so können wir die y und die u als neue unabhängige Veränderliche an Stelle der $x_i^{(\mu)}$ einführen. Dabei erhalten wir:

$$W_k(f) = \sum_1^r {}_\pi W_k(y_\pi) \frac{\partial f}{\partial y_\pi} + \sum_1^{rn-r} {}_\tau W_k(u_\tau) \frac{\partial f}{\partial u_\tau},$$

oder, da alle $W_k(u_\tau)$ identisch verschwinden:

$$W_k(f) = \sum_1^r {}_\pi \omega_{k\pi}(y_1 \cdots y_r, u_1 \cdots u_{rn-r}) \frac{\partial f}{\partial y_\pi},$$

wo $W_1(f) \cdots W_r(f)$ durch keine Relation von der Form

$$\sum_1^r {}_k \varphi_k(y_1 \cdots y_r, u_1 \cdots u_{rn-r}) \cdot W_k(f) = 0$$

verknüpft sind. Diese Eigenschaft der $W_k(f)$ bleibt natürlich auch dann noch bestehen, wenn wir den u_τ geeignete feste Werthe u_τ^0 ertheilen. Setzen wir dann $\omega_{k\pi}(y, u^0) = \omega_{k\pi}^0(y)$, so stehen die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen

$$V_k(f) = \sum_1^r {}_\pi \omega_{k\pi}^0(y_1 \cdots y_r) \frac{\partial f}{\partial y_\pi}$$

in den r unabhängigen Veränderlichen $y_1 \cdots y_r$ paarweise in der Beziehung

$$V_k(V_j(f)) - V_j(V_k(f)) = \sum_1^r {}_s c_{kjs} V_s(f)$$

und sind ausserdem durch keine Relation von der Form

$$\sum_1^r {}_k \varphi_k(y_1 \cdots y_r) \cdot V_k(f) = 0$$

verknüpft. Folglich sind die $V_k(f)$ infinitesimale Transformationen von der verlangten Beschaffenheit. Auf die $2r$ infinitesimalen Transformationen $X_1(f) \cdots X_r(f)$, $V_1(f) \cdots V_r(f)$ können wir daher sofort das Theorem 23, S. 154 anwenden und haben damit bewiesen, dass die ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen $\Sigma \lambda_k X_k(f)$ eine r-gliedrige Gruppe bilden. Also gilt das

Theorem 24. *Stehen r unabhängige infinitesimale Transformationen*

$$X_k(f) = \sum_1^n {}_i \, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

paarweise in der Beziehung

$$(8) \qquad X_k(X_j(f)) - X_j(X_k(f)) = (X_k X_j) = \sum_1^r {}_s \, c_{kjs} X_s(f),$$

wo die c_{kjs} Constanten sind, so bildet der Inbegriff der ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen

$$\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$$

*eine r-gliedrige continuirliche Gruppe, welche die identische Transformation enthält und deren Transformationen sich paarweise als inverse zusammenordnen.**)

Wenn wir r unabhängige infinitesimale Transformationen

$$X_1(f) \cdots X_r(f)$$

haben, welche den Voraussetzungen des vorstehenden Theorems entsprechen, so werden wir in Zukunft sagen, dass $X_1(f) \cdots X_r(f)$ eine r-gliedrige Gruppe erzeugen, ja *wir werden auch geradezu von der r-gliedrigen Gruppe $X_1(f) \cdots X_r(f)$ reden.*

§ 42.

Es sei $X_1(f) \cdots X_r(f)$ eine r-gliedrige Gruppe in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ und $Y_1(f) \cdots Y_m(f)$ eine m-gliedrige Gruppe in denselben Veränderlichen. Die Relationen zwischen den $X_k(f)$, bezüglich den $Y_\mu(f)$ mögen die Form haben:

$$X_k(X_j(f)) - X_j(X_k(f)) = \sum_1^r {}_s \, c_{kjs} X_s(f) = (X_k X_j)$$

$$Y_\mu(Y_\nu(f)) - Y_\nu(Y_\mu(f)) = \sum_1^m {}_s \, c'_{\mu\nu s} Y_s(f) = (Y_\mu Y_\nu)$$

$$(k, j = 1 \cdots r; \quad \mu, \nu = 1 \cdots m).$$

*) Lie, Math. Annalen Bd. 8, S. 303, 1874; Göttinger Nachrichten, 1874, S. 533 und 540; Archiv for Math. og Naturv. Christiania 1878.

Nun kann es vorkommen, dass diese beiden Gruppen gewisse infinitesimale Transformationen gemein haben. Nehmen wir an, dass sie deren gerade l unabhängige gemein haben, etwa:

$$Z_\lambda(f) = \sum_1^r {}^k g_{\lambda k} X_k(f) = \sum_1^m {}^\mu h_{\lambda\mu} Y_\mu(f) \quad (\lambda = 1 \cdots l),$$

wo die $g_{\lambda k}$ und die $h_{\lambda\mu}$ Constanten bezeichnen. Jede andere in beiden Gruppen enthaltene infinitesimale Transformation lässt sich dann linear aus $Z_1(f) \cdots Z_l(f)$ ableiten. Bilden wir aber die Ausdrücke

$$Z_\lambda(Z_\nu(f)) - Z_\nu(Z_\lambda(f)) = (Z_\lambda\, Z_\nu),$$

so erkennen wir, dass dieselben sich sowohl aus $X_1(f) \cdots X_r(f)$ als auch aus $Y_1(f) \cdots Y_m(f)$ linear ableiten lassen, dass sie also den beiden Gruppen gemeinsam sind. Folglich bestehen Relationen von der Form:

$$Z_\lambda(Z_\nu(f)) - Z_\nu(Z_\lambda(f)) = (Z_\lambda\, Z_\nu) = \sum_1^l {}^s d_{\lambda\nu s} Z_s(f),$$

das heisst $Z_1(f) \cdots Z_m(f)$ erzeugen eine m-gliedrige Gruppe.

Damit haben wir den

Satz 2. *Haben die beiden continuirlichen Gruppen: $X_1(f) \cdots X_r(f)$ und $Y_1(f) \cdots Y_m(f)$ in denselben Veränderlichen gerade l und nicht mehr unabhängige infinitesimale Transformationen gemein, so erzeugen diese Transformationen ihrerseits eine l-gliedrige continuirliche Gruppe.*

§ 43.

Stellen die Gleichungen $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\, a_1 \cdots a_r)$ eine Schaar von ∞^r Transformationen dar und befriedigen sie ausserdem Differentialgleichungen von der besonderen Form

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r {}^j \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') \quad (i = 1 \cdots n,\ k = 1 \cdots r),$$

so sind die r infinitesimalen Transformationen

$$X_k(f) = \sum_1^n {}^i \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r),$$

wie wir wissen, von einander unabhängig, und ausserdem nach Theorem 21, S. 149 durch Relationen von der Form

$$X_k(X_j(f) - X_j(X_k(f)) = (X_k\, X_j) = \sum_1^r {}^s c_{kjs} \cdot X_s(f)$$

verknüpft. Die Schaar der ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen

$$\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$$

bildet daher eine r-gliedrige Gruppe mit der identischen Transformation. Folglich können wir das Theorem 9, S. 72 auch so aussprechen:

Theorem 25. *Genügt eine Schaar von ∞^r Transformationen*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

gewissen Differentialgleichungen von der Form:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r {}_j \, \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') \qquad (i = 1 \cdots n,\ k = 1 \cdots r),$$

und ist $a_1^0 \cdots a_r^0$ ein Werthsystem der a, für welches die $\psi_{jk}(a)$ sich regulär verhalten und ausserdem die Determinante

$$\Sigma \pm \psi_{11}(a) \cdots \psi_{rr}(a)$$

von Null verschieden ist, so kann man sich jede Transformation $x_i' = f_i(x, a)$, deren Parameter $a_1 \cdots a_r$ in einer gewissen Umgebung von $a_1^0 \cdots a_r^0$ liegen, dadurch entstanden denken, dass zuerst die Transformation $\bar{x}_i = f_i(x, a^0)$ ausgeführt worden ist und sodann eine ganz bestimmte Transformation

$$x_i' = \bar{x}_i + \sum_1^r {}_k \, \lambda_k \xi_{ki}(\bar{x}) + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

derjenigen r-gliedrigen Gruppe, welche unter den gemachten Voraussetzungen von den r unabhängigen infinitesimalen Transformationen

$$X_k(f) = \sum_1^n {}_i \, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

erzeugt wird.

Das vorstehende Theorem ist besonders dann von Interesse, wenn die Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ eine r-gliedrige Gruppe darstellen, welche die identische Transformation wenigstens im Bereiche $((a))$ nicht enthält. Wir werden für diesen Fall noch einige wichtige Schlüsse daraus ziehen.

Es sei also $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ eine r-gliedrige Gruppe ohne die identische Transformation, und es mögen

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$$
$$x_i'' = f_i(x_1' \cdots x_n', b_1 \cdots b_r)$$

nach einander ausgeführt die Transformation

$$x_i'' = f_i(x_1 \cdots x_n, c_1 \cdots c_r) = f_i(x_1 \cdots x_n, \varphi_1(a, b) \cdots \varphi_r(a, b))$$

ergeben. Dabei liegen, wenn wir die alten Bezeichnungen anwenden, $x_1 \cdots x_n$ beliebig im Bereiche $((x))$, $a_1 \cdots a_r$ und $b_1 \cdots b_r$ im Bereiche $((a))$, während die Lage der x_i', x_i'' und c_k durch die angegebenen Gleichungen bestimmt ist. Ausserdem bestehen noch Differentialgleichungen von der besonderen Form

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r {}^j \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n')$$

$$(i = 1 \cdots n,\ k = 1 \cdots r).$$

Im Folgenden möge nun $a_1^0 \cdots a_r^0$ und ebenso $b_1^0 \cdots b_r^0$ eine bestimmte Stelle des Bereiches $((a))$ bezeichnen und $\varphi_k(a^0, b^0)$ möge gleich c_k^0 sein. Dagegen wollen wir unter $\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r$ eine beliebige Stelle im Bereiche (a) verstehen, sodass also die Gleichungen

$$\bar{x}_i = f_i(x_1 \cdots x_n,\ \bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r)$$

eine jede Transformation der vorgelegten Gruppe darstellen können.

Jede Transformation von der Form $\bar{x}_i = f_i(x, \bar{a})$ kann dadurch erhalten werden, dass man zuerst die Transformation $x_i' = f_i(x, a^0)$ ausführt und nachher eine gewisse zweite Transformation. Um diese letztere zu finden, lösen wir die Gleichungen $x_i' = f_i(x, a^0)$ nach $x_1 \cdots x_n$ auf:

$$x_i = F_i(x_1' \cdots x_n',\ a_1^0 \cdots a_r^0)$$

und setzen diese Werthe der x_i in $\bar{x}_i = f_i(x, \bar{a})$ ein. So erhalten wir für die gesuchte Transformation einen Ausdruck von der Form:

$$(9) \qquad \bar{x}_i = \Phi_i(x_1' \cdots x_n',\ \bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r) \qquad (i = 1 \cdots n);$$

wir schreiben darin die a_k^0 nicht mit, weil wir dieselben als numerische Constanten betrachten wollen.

Die Transformation (9) ist definirt für alle Werthsysteme $\bar{a}_k$ des Bereiches (a) und ihr Ausdruck lässt sich über den ganzen Bereich dieser Werthsysteme analytisch fortsetzen; das folgt aus den Voraussetzungen, die wir seinerzeit über die Beschaffenheit der Functionen f_i und F_i gemacht haben.

Wir behaupten nun, dass die Transformationen der Schaar $\bar{x}_i = \Phi_i(x', \bar{a})$ für gewisse Werthe der Parameter $\bar{a}_k$ der ursprünglich vorgelegten Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$ angehören, während sie dagegen für gewisse andere Werthe der $\bar{a}_k$ der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ mit der identischen Transformation angehören.

Den ersten Theil der eben aufgestellten Behauptung beweisen wir folgendermassen. Wir wissen, dass die beiden Transformationen

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1^0 \cdots a_r^0), \quad \bar{x}_i = f_i(x_1' \cdots x_n',\ b_1 \cdots b_r)$$

nach einander ausgeführt die Transformation $\bar{x}_i = f_i(x, c)$ ergeben, wo $c_k = \varphi_k(a^0, b)$ ist; für $b_1 \cdots b_r$ dürfen wir dabei jedes beliebige Werthsystem des Bereiches $((a))$ setzen, während das Werthsystem $c_1 \cdots c_r$ alsdann im Bereich (a) liegt und zwar in einer gewissen Umgebung von $c_1^0 \cdots c_r^0$. Nach dem Früheren ergiebt sich aber die Transformation $\bar{x}_i = f_i(x, c)$ auch dann, wenn wir die beiden Transformationen

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1^0 \cdots a_r^0), \quad \bar{x}_i = \Phi_i(x_1' \cdots x_n',\ \bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r)$$

nach einander ausführen und dabei $\bar{a}_k = c_k$ wählen. Folglich wird die Transformation $\bar{x}_i = \Phi_i(x', \bar{a})$ bei der Substitution $\bar{a}_k = \varphi_k(a^0, b)$ mit der Transformation $\bar{x}_i = f_i(x', b)$ identisch, das heisst *alle Transformationen $\bar{x}_i = \Phi_i(x', \bar{a})$, deren Parameter $\bar{a}_k$ in einer gewissen, durch die Gleichung $\bar{a}_k = \varphi_k(a^0, b)$ definirten Umgebung von $c_1^0 \cdots c_r^0$ liegen, gehören der vorgelegten Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$ an.*

Um den zweiten Theil unserer obigen Behauptung zu beweisen, erinnern wir an das Theorem 25. Wenn $\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r$ in einer gewissen Umgebung von $a_1^0 \cdots a_r^0$ liegen, so kann nach diesem Theoreme die Transformation $\bar{x}_i = f_i(x, \bar{a})$ dadurch erhalten werden, dass man zuerst die Transformation

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1^0 \cdots a_r^0)$$

ausführt und sodann eine ganz bestimmte Transformation

$$\bar{x}_i = x_i' + \sum_1^r {}^k \lambda_k \xi_{ki}(x') + \cdots \tag{10}$$

derjenigen r-gliedrigen Gruppe, welche von den r unabhängigen infinitesimalen Transformationen

$$X_k(f) = \sum_1^n {}^i \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

erzeugt wird. Von früherher (vgl. Kap. 4, S. 71) wissen wir ausserdem noch, dass man die betreffende Transformation (10) findet, wenn man $\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r$ in geeigneter Weise als unabhängige Functionen von $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ wählt und dann durch Auflösung $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ als Functionen von $\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r$ bestimmt. Auf der andern Seite erhalten wir aber die Transformation $\bar{x}_i = f_i(x, \bar{a})$ auch dann, wenn wir zuerst die Transformation $x_i' = f_i(x, a^0)$ und nachher die Transformation $\bar{x}_i = \Phi_i(x', \bar{a})$ ausführen. Folglich gehört die Transformation $\bar{x}_i = \Phi_i(x', \bar{a})$ der von $X_1 f \cdots X_r f$ erzeugten Gruppe an, sobald das Werthsystem $\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r$ in einer gewissen Umgebung von $a_1^0 \cdots a_r^0$ liegt. Anders ausgedrückt: die Gleichungen $\bar{x}_i = \Phi_i(x', \bar{a})$ gehen in die Gleichungen (10) über, wenn $\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r$ durch die vorhin besprochenen Functionen von $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ ersetzt werden.

Unsere oben aufgestellte Behauptung ist hiermit vollständig bewiesen.

Die Transformationsgleichungen $\bar{x}_i = \Phi_i(x', \bar{a})$ besitzen also die folgende wichtige Eigenschaft: werden an Stelle der $\bar{a}_k$ vermöge der Gleichungen $\bar{a}_k = \varphi_k(a^0, b)$ die neuen Parameter $b_1 \cdots b_r$ eingeführt, so nehmen die Gleichungen $\bar{x}_i = \Phi_i(x', \bar{a})$ für gewisse Bereiche der Veränderlichen die Form $\bar{x}_i = f_i(x', b)$ an; werden dagegen an Stelle der $\bar{a}_k$ die neuen Parameter $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ eingeführt, so verwandeln sich die Gleichungen $\bar{x}_i = \Phi_i(x', \bar{a})$ für gewisse Bereiche in:

$$x_i = x_i' + \sum_1^r {}^k \lambda_k \xi_{ki}(x') + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n).$$

Hierin liegt eine wichtige Eigenschaft der ursprünglich vorgelegten Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$. Wenn wir nämlich in die Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ vermittelst $\bar{a}_k = \varphi_k(a^0, a)$ die neuen Parameter $\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r$ an Stelle der a_k einführen, so erhalten wir ein System von Transformationsgleichungen $x_i' = \Phi_i(x, \bar{a})$, welches bei Hinzunahme seiner analytischen Fortsetzungen eine Schaar von Transformationen darstellt, der alle Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe mit der identischen Transformation angehören.

Wir können das auch so ausdrücken:

Theorem 26. *Jede r-gliedrige Gruppe* $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$, *welche nicht von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen erzeugt ist, kann in folgender Weise aus einer r-gliedrigen Gruppe mit r unabhängigen infinitesimalen Transformationen abgeleitet werden: Man stelle zunächst die Differentialgleichungen*

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r {}^j \psi_{jk}(a) \cdot \xi_{ji}(x') \qquad (i = 1 \cdots n,\ k = 1 \cdots r)$$

auf, welche von den Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ *befriedigt werden, sodann setze man:*

$$\sum_1^n {}^i \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} = X_k(f) \qquad (k = 1 \cdots r)$$

und bilde die endlichen Gleichungen

$$x_i' = x_i + \sum_1^r {}^k \lambda_k \xi_{ki}(x) + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

derjenigen r-gliedrigen Gruppe mit der identischen Transformation, welche von den r unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ *erzeugt wird. Alsdann ist es möglich in diese endlichen Gleichungen an Stelle von* $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ *solche neue Parameter* $\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r$ *einzuführen, dass die hervorgehenden Transformationsgleichungen*

$$x_i' = \Phi_i(x_1 \cdots x_n,\ \bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

bei analytischer Fortsetzung eine Schaar von ∞^r *Transformationen darstellen, welche alle* ∞^r *Transformationen der Gruppe*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r)$$

umfasst.

§ 44.

Es lässt sich ohne Schwierigkeit nachweisen, dass wirklich Gruppen existiren, welche die identische Transformation nicht enthalten, deren Transformationen sich auch nicht paarweise als inverse zusammenordnen.

Die Gleichung

$$x' = ax$$

mit dem willkürlichen Parameter a stellt eine eingliedrige Gruppe dar. Führt man zwei Transformationen

$$x' = ax, \quad x'' = bx'$$

dieser Gruppe nach einander aus, so erhält man die Transformation:

$$x'' = abx,$$

welche ebenfalls der Gruppe angehört. Hieraus geht hervor, dass die Schaar aller Transformationen von der Form $x' = ax$, in welchen der absolute Betrag von a kleiner ist als 1, ebenfalls eine Gruppe bildet. Offenbar enthält diese Schaar weder die identische Transformation, noch ordnen sich ihre Transformationen paarweise als inverse zusammen.

Liesse sich daher ein analytischer Ausdruck angeben, welcher nur diejenigen Transformationen von der Form $x' = ax$ darstellt, bei welchen der absolute Betrag von a kleiner ist als 1, so hätten wir damit eine endliche continuirliche Gruppe ohne die identische Transformation und ohne inverse Transformationen.

Ein analytischer Ausdruck von der verlangten Beschaffenheit lässt sich nun wirklich angeben.

Es ist bekannt, dass die Function

$$\sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{a^\nu}{1 - a^{2\nu}}$$

sich in der Umgebung von $a = 0$ in eine gewöhnliche Potenzreihe von a entwickeln lässt, welche convergirt, solange der absolute Betrag $|a|$ von a kleiner ist als 1. Die betreffende Potenzreihe hat die Form:

$$\sum_1^\infty{}^{\mu} k_\mu a^\mu = \omega(a),$$

wobei die k_μ ganze Zahlen bezeichnen, welche von dem Index μ abhängen. Deuten wir daher die complexen Werthe von a als Punkte einer Ebene, so ist $\omega(a)$ als analytische Function von a definirt innerhalb des Kreises, welcher mit dem Radius 1 um den Punkt $a = 0$ beschrieben werden kann.

Es ist ferner bekannt, dass die Function $\omega(a)$ für solche Werthe a, deren absoluter Betrag gleich 1 ist, keine Bedeutung mehr hat, dass der besprochene Kreis um den Punkt $a = 0$ die natürliche Grenze von $\omega(a)$ bildet, über welche hinaus sich diese Function nicht analytisch fortsetzen lässt.

Wir setzen nun $\omega(a) = \lambda$, ferner sei $|a^0| < 1$ und $\omega(a^0) = \lambda^0$; dann können wir die Gleichung $\omega(a) = \lambda$ nach a auflösen, das heisst, wir können a derart als gewöhnliche Potenzreihe von $\lambda - \lambda^0$ darstellen, dass für $\lambda = \lambda^0$ sich ergiebt: $a = a^0$ und dass die Gleichung $\omega(a) = \lambda$ bei Substitution des Ausdruckes für a identisch befriedigt wird.

Es möge sein $a = \chi(\lambda)$; dann ist $\chi(\lambda)$ eine analytische Function, die nur solche Werthe annimmt, deren absolute Beträge kleiner als 1 sind; das gilt nicht blos für das eben gefundene Functionenelement, welches in der Umgebung von $\lambda = \lambda^0$ durch eine gewöhnliche Potenzreihe von $\lambda - \lambda^0$ dargestellt wird, das gilt vielmehr auch für jede analytische Fortsetzung dieses Functionenelements.

Setzen wir daher

$$x' = \chi(\lambda) \cdot x,$$

so erhalten wir den gewünschten analytischen Ausdruck für alle Transformationen $x' = ax$, in welchen $|a|$ kleiner ist als 1. Haben wir nun:

$$x' = \chi(\lambda_1) \cdot x, \quad x'' = \chi(\lambda_2) \cdot x',$$

so ergiebt sich:

$$x'' = \chi(\lambda_1)\chi(\lambda_2) \cdot x;$$

diese Gleichung aber lässt sich immer auf die Form

$$x'' = \chi(\lambda_3) \cdot x$$

bringen: es ist ja $|\chi(\lambda_1)\chi(\lambda_2)| < 1$; setzen wir also $\chi(\lambda_1)\cdot\chi(\lambda_2) = \alpha$, so bekommen wir einfach: $\lambda_3 = \omega(\alpha)$.

Hiermit ist bewiesen, dass die Gleichung $x' = \chi(\lambda)\cdot x$ mit dem willkürlichen Parameter λ eine Gruppe darstellt. Diese Gruppe ist continuirlich und endlich, sie enthält aber die identische Transformation nicht, auch ordnen sich ihre Transformationen nicht paarweise als inverse zusammen. Unser Zweck: der Nachweis, dass es Gruppen dieser Art giebt, ist demnach erreicht. Es ist überdies leicht zu sehen, dass man in ähnlicher Weise beliebig viele Gruppen von dieser Beschaffenheit bilden kann.

Anmerkung. In seinen ersten Untersuchungen über endliche continuirliche Transformationsgruppen versuchte Lie zu beweisen, dass *jede* r-gliedrige Gruppe die identische Transformation sowie r unabhängige infinitesimale Transformationen enthielte und von den letzteren erzeugt würde (vgl. insbesondere die beiden Abhandlungen im Archiv for Math. og Naturvid., Bd. 1, Christiania 1876). Bald jedoch erkannte er, dass bei seinem Beweise implicite gewisse Voraussetzungen über die Beschaffenheit der auftretenden Functionen gemacht waren; er beschränkte sich in Folge dessen ausdrücklich auf solche Gruppen, deren Transformationen sich paarweise als inverse zusammenordnen und zeigte, dass jedenfalls für solche Gruppen der bewusste Satz gültig ist (Math. Ann. Bd. 16, S. 441 ff.).

Später, im Jahre 1884, gelang es Engel, eine endliche continuirliche Gruppe zu bilden, welche die identische Transformation nicht enthält und deren Transformationen sich nicht paarweise als inverse zusammenordnen; es war die im vorstehenden Paragraphen aufgestellte Gruppe.

Endlich fand Lie, dass die Gleichungen einer *jeden* endlichen continuirlichen Gruppe mit r Parametern sich jedenfalls durch Einführung neuer Parameter und analytische Fortsetzung aus den Gleichungen einer r-gliedrigen Gruppe ableiten lassen, welche die identische Transformation und r unabhängige infinitesimale Transformationen enthält, während ihre endlichen Transformationen sich paarweise als inverse zusammenordnen (Theorem 26).

§ 45.

In Kapitel 4, S. 75 fanden wir, dass jede r-gliedrige Gruppe, welche r unabhängige infinitesimale Transformationen enthält, die Eigenschaft besitzt, dass sich ihre endlichen Transformationen paarweise als inverse zusammenordnen. Andererseits ist am Schlusse des vorangehenden Paragraphen erwähnt worden, dass dieser Satz sich umkehren lässt, dass also jede r-gliedrige Gruppe, deren Transformationen sich paarweise als inverse zusammenordnen, die identische Transformation enthält und von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen erzeugt wird. Wir werden angeben, wie sich die Richtigkeit dieser Behauptung einsehen lässt.

Die Gleichungen

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, \; a_1 \cdots a_r) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

mit den r wesentlichen Parametern $a_1 \cdots a_r$ mögen eine r-gliedrige Gruppe mit paarweise inversen Transformationen darstellen. Durch Auflösung nach $x_1 \cdots x_n$ möge sich ergeben:

$$x_i = F_i(x_1' \cdots x_n', \; a_1 \cdots a_r) \qquad (i = 1 \cdots n).$$

Wenn das Werthsystem $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r$ in einer gewissen Umgebung von $\varepsilon_1 = 0, \cdots \varepsilon_r = 0$ liegt, so können wir offenbar die beiden Transformationen

$$x_i = F_i(x_1' \cdots x_n', \; a_1 \cdots a_r)$$
$$x_i'' = f_i\,(x_1 \cdots x_n, \; a_1 + \varepsilon_1, \cdots a_r + \varepsilon_r)$$

nach einander ausführen und erhalten dann eine Transformation:

$$x_i'' = f_i\bigl(F_1(x', a) \cdots F_n(x', a), \; a_1 + \varepsilon_1, \cdots a_r + \varepsilon_r\bigr),$$

welche ebenfalls unserer Gruppe angehört und welche sich nach Potenzen von $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r$ entwickeln lässt:

$$(11) \qquad x_i'' = x_i' + \sum_1^r{}_k \, \varepsilon_k \left[\frac{\partial f_i(x, a)}{\partial a_k}\right]_{x = F(x', a)} + \cdots.$$

Setzen wir hier alle ε_k gleich Null, so erhalten wir die identische Transformation, welche demnach in unserer Gruppe vorkommt. Wählen wir andererseits die ε_k alle unendlich klein, so erhalten wir Transformationen unserer Gruppe, die von der identischen Transformation unendlich wenig verschieden sind.

Zur Abkürzung setzen wir

$$(12) \qquad \left[\frac{\partial f_i(x, a)}{\partial a_k}\right]_{x = F(x', a)} = \eta_{ki}(x', a),$$

sodass also die Transformationen (11) die Form

$$x_i'' = x_i' + \sum_1^r{}_k \, \varepsilon_k \, \eta_{ki}(x', a) + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

erhalten.

Sodann bilden wir in den Veränderlichen $x_1' \cdots x_n'$ die r infinitesimalen Transformationen

$$Y_k' f = \sum_1^n{}_i \, \eta_{ki}(x', a) \frac{\partial f}{\partial x_k'} \qquad (k = 1 \cdots r),$$

welche für unbestimmte Werthe der a_k sicher von einander unabhängig sind. Im entgegengesetzten Falle gäbe es nämlich r nicht sämmtlich verschwindende Grössen $\varrho_1 \cdots \varrho_r$, welche die Gleichung

$$\sum_1^r{}_k \, \varrho_k \, Y_k' f = 0$$

identisch befriedigten und dabei nicht von $x_1' \cdots x_n'$ abhingen; daraus würden dann die n Relationen

$$\sum_1^r{}_k \, \varrho_k \, \eta_{ki}(x', a) = 0 \qquad (i = 1 \cdots n)$$

folgen und diese ihrerseits würden bei der Substitution $x_i' = f_i(x, a)$ übergehen in:

$$\sum_1^r {}_k \varrho_k \frac{\partial f_i(x, a)}{\partial a_k} = 0 \qquad (i = 1 \cdots n);$$

solche Relationen können aber nicht bestehen, weil die Parameter $a_1 \cdots a_r$ nach Voraussetzung in den Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ wesentlich sind (vgl. Kap. 1, S. 13).

Wir schliessen daraus, dass $Y_1'f \cdots Y_r'f$ auch dann noch von einander unabhängig bleiben, wenn für $a_1 \cdots a_r$ ein bestimmtes Werthsystem von allgemeiner Lage eingesetzt wird. Ist $\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r$ ein solches Werthsystem, so wollen wir schreiben:

$$\eta_{ki}(x', \bar{a}) = \xi_{ki}(x');$$

dann sind also auch die r infinitesimalen Transformationen

$$X_k' f = \sum_1^n {}_i \xi_{ki}(x') \frac{\partial f}{\partial x_i'} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

von einander unabhängig. Es bleibt übrig zu zeigen, dass unsere Gruppe von den r infinitesimalen Transformationen $X_k' f$ erzeugt ist.

Wir führen zwei Transformationen unserer Gruppe nach einander aus, nämlich erstens die Transformation:

$$x_i'' = x_i' + \sum_1^r {}_k \varepsilon_k \eta_{ki}(x', a) + \cdots$$

und zweitens die Transformation:

$$x_i''' = x_i'' + \sum_1^r {}_k \vartheta_k \eta_{ki}(x'', \bar{a}) + \cdots$$

$$= x_i'' + \sum_1^r {}_k \vartheta_k \xi_{ki}(x'') \quad + \cdots$$

Berücksichtigen wir wie bisher blos die Glieder erster Ordnung, so erhalten wir auf die angegebene Weise die Transformation:

$$x_i''' = x_i' + \sum_1^r {}_k \varepsilon_k \eta_{ki}(x', a) + \sum_1^r \vartheta_k \xi_{ki}(x') + \cdots,$$

welche natürlich unserer Gruppe angehört und zwar innerhalb gewisser Bereiche für alle Werthe der Parameter a, ε, ϑ.

Gäbe es nun unter den infinitesimalen Transformationen $Y_1'f \cdots Y_r'f$ auch nur eine einzige, welche von $X_1'f \cdots X_r'f$ unabhängig wäre, so würden die zuletzt geschriebenen Gleichungen nach Kap. 3, Satz 4, S. 65 mindestens ∞^{r+1} verschiedene Transformationen darstellen, während doch unsere Gruppe nur ∞^r verschiedene Transformationen enthält. Folglich muss sich jede der infinitesimalen Transformationen $Y_k'f$ aus $X_1'f \cdots X_r'f$ linear ableiten lassen, welche Werthe auch die a haben mögen. Durch ähnliche Betrachtungen wie in Kap. 2, S. 39 erkennt man nunmehr, dass r Identitäten von der Form

$$Y_k' f \equiv \sum_1^r {}_j\, \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot X_j' f \qquad (k = 1 \cdots r)$$

bestehen, wo die ψ_{jk} sich in einer gewissen Umgebung von $a_k = \bar{a}_k$ regulär verhalten; ausserdem verschwindet natürlich die Determinante der ψ_{jk} nicht identisch, sonst wären ja $Y_1' f \cdots Y_r' f$ gar keine unabhängigen infinitesimalen Transformationen.

Nunmehr ist klar, dass die $\eta_{ki}(x', a)$ sich folgendermassen durch die $\xi_{ji}(x')$ ausdrücken:

$$\eta_{ki}(x', a) \equiv \sum_1^r {}_j\, \psi_{jk}(a) \cdot \xi_{ji}(x').$$

Erinnern wir uns endlich der Gleichungen (12), welche die Functionen $\eta_{ki}(x', a)$ definiren, so erkennen wir, dass die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r {}_j\, \psi_{jk}(a) \cdot \xi_{ji}(x') \tag{13}$$

$$(i = 1 \cdots n,\ k = 1 \cdots r)$$

bei der Substitution $x_i' = f_i(x, a)$ identisch befriedigt werden.

Damit ist direkt nachgewiesen, dass jede Gruppe mit paarweise inversen Transformationen gewissen Differentialgleichungen von der charakteristischen Form (13) genügt; es ist also insofern der Ausgangspunkt für die Entwickelungen der Kapitel 3 und 4 gewonnen.

Wäre es nun möglich nachzuweisen, dass die Determinante der $\psi_{jk}(a)$ für die Parameterwerthe $a_1^0 \cdots a_r^0$ der identischen Transformation einen von Null verschiedenen Werth hat, so würde aus den eben angeführten Entwickelungen folgen, dass die Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$ von den r infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ erzeugt ist. Nun aber lässt es sich der Natur der Sache nach nicht beweisen, dass die Determinante $\Sigma \pm \psi_{11}(a^0) \cdots \psi_{rr}(a^0)$ von Null verschieden ist. Diesen Uebelstand kann man folgendermassen vermeiden:

Man weiss, dass die Gleichungen

$$x_i' = x_i + \sum_1^r {}_k\, \varepsilon_k \xi_{ki}(x) + \cdots \tag{14}$$

$$(i = 1 \cdots n)$$

Transformationen der Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$ darstellen, sobald die ε_k in einer gewissen Umgebung von $\varepsilon_1 = 0, \cdots \varepsilon_r = 0$ liegen; man kann überdies zeigen, dass man in dieser Weise *alle* Transformationen $x_i' = f_i(x, a)$ erhält, deren Parameter a_k in einer gewissen Umgebung von $a_1^0 \cdots a_r^0$ liegen. Indem man nun die Gleichungen (14) zu Grunde legt, erkennt man leicht, dass die x' aufgefasst als Functionen der ε und der x Differentialgleichungen von der Form:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial \varepsilon_k} = \sum_1^r {}_j\, \chi_{jk}(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r) \cdot \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') \qquad (i = 1 \cdots n,\ k = 1 \cdots r)$$

befriedigen, wo nun die Determinante der $\chi(\varepsilon)$ für $\varepsilon_1 = 0, \cdots \varepsilon_r = 0$ nicht verschwindet. In dieser Weise kommt man schliesslich zu dem folgenden Resultat:

Jede r-gliedrige Gruppe mit paarweise inversen Transformationen enthält die identische Transformation und ausserdem r unabhängige infinitesimale Transformationen, von welchen letzteren sie erzeugt wird.

§ 46.

Es seien r unabhängige infinitesimale Transformationen

$$X_k f = \sum_1^n {}_\nu\, \xi_{k\nu}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

vorgelegt, welche paarweise Relationen von der Form

$$(8) \qquad X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f)) = (X_i\, X_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} X_s(f) \qquad (i, k = 1 \cdots r)$$

mit gewissen Constanten c_{iks} befriedigen, sodass also nach Theorem 24, S. 158 der Inbegriff aller eingliedrigen Gruppen von der Form

$$\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$$

eine r-gliedrige Gruppe bildet. Wir werden zeigen, dass die Constanten c_{iks} in den obigen Relationen ihrerseits durch gewisse Gleichungen verknüpft sind.

Zunächst haben wir $(X_i\, X_k) = -(X_k\, X_i)$, woraus sich sofort ergiebt: $c_{iks} = -c_{kis}$. Noch andere Relationen finden wir, wenn die Zahl r grösser ist als 2. In diesem Falle besteht nämlich (Kap. 5, § 26, S. 94) zwischen je dreien $X_i f$, $X_k f$, $X_j f$ der r infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ die Jacobische Identität:

$$((X_i\, X_k)\, X_j) + ((X_k\, X_j)\, X_i) + ((X_j\, X_i)\, X_k) = 0 \qquad (i, k, j = 1 \cdots r).$$

Hieraus erhalten wir mit Benutzung der obenstehenden Relationen (8) zunächst:

$$\sum_1^r {}_s \left\{ c_{iks}(X_s\, X_j) + c_{kjs}(X_s\, X_i) + c_{jis}(X_s\, X_k) \right\} = 0$$

und bei nochmaliger Anwendung jener Relationen:

$$\sum_{s\tau}^{1 \cdots r} \left\{ c_{iks}\, c_{sj\tau} + c_{kjs}\, c_{si\tau} + c_{jis}\, c_{sk\tau} \right\} X_\tau f = 0.$$

Da aber die infinitesimalen Transformationen $X_\tau f$ von einander unabhängig sind, so zerlegt sich diese Gleichung in die r folgenden:

$$(15) \qquad \sum_1^r {}_s \left\{ c_{iks}\, c_{sj\tau} + c_{kjs}\, c_{si\tau} + c_{jis}\, c_{sk\tau} \right\} = 0 \qquad (\tau = 1 \cdots r).$$

Also gilt das

Theorem 27.*) *Sind r unabhängige infinitesimale Transformationen* $X_1(f) \cdots X_r(f)$ *so beschaffen, dass sie paarweise Relationen von der Form*

$$X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f)) = (X_i X_k) = \sum_1^r {}_s c_{iks} X_s(f) \qquad (i, k = 1 \cdots r) \tag{8}$$

mit gewissen Constanten c_{iks} *befriedigen, so dass also der Inbegriff aller* ∞^{r-1} *eingliedrigen Gruppen von der Form*

$$\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$$

eine r-gliedrige Gruppe bildet, so bestehen zwischen den Constanten c_{iks} *die nachstehenden Relationen:*

$$\left\{\begin{aligned} & c_{ik\tau} + c_{ki\tau} = 0 \\ & \sum_1^r {}_s \left\{ c_{iks} c_{sj\tau} + c_{kjs} c_{si\tau} + c_{jis} c_{sk\tau} \right\} = 0 \\ & \qquad (i, k, j, \tau = 1 \cdots r). \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Die Gleichungen (16) sind von der Zahl der Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ in den infinitesimalen Transformationen $X_1(f) \cdots X_r(f)$ vollständig unabhängig. Aus dem vorstehenden Satze können wir daher noch Folgendes schliessen:

Selbst wenn die Zahl n der unabhängigen Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ ganz beliebig wählbar ist, lassen sich doch nicht zu jedem Systeme von Constanten c_{iks} $(i, k, s = 1 \cdots r)$ r unabhängige infinitesimale Transformationen

$$X_k(f) = \sum_1^n {}_\nu \xi_{k\nu}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

angeben, welche paarweise die Relationen

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_s c_{iks} X_s(f) \qquad (i, k = 1 \cdots r)$$

befriedigen. Zur Existenz derartiger infinitesimaler Transformationen ist vielmehr das Bestehen der Gleichungen (16) nothwendig; aber es ist auch hinreichend, wie wir später sehen werden.

Wo nicht das Gegentheil besonders bemerkt wird, beschränken wir uns bei allen folgenden Untersuchungen auf solche r-gliedrige Gruppen, welche r unabhängige infinitesimale Transformationen

*) Lie, Archiv for Math. og Naturv. Bd. 1, S. 192, Christiania 1876.

$$X_k f = \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

enthalten und folglich von denselben erzeugt sind. Dabei berücksichtigen wir stets nur solche Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$, für welche sich alle ξ_{ki} regulär verhalten.

Ferner heben wir nochmals hervor, dass wir in Zukunft eine r-gliedrige Gruppe mit den unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ oft kurz als die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ bezeichnen. Unter den verschiedenen Formen, welche die endlichen Gleichungen der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ erhalten können, bezeichnen wir die folgende:

$$x_i' = x_i + \sum_1^r {}_k\, e_k \xi_{ki}(x) + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

als eine ***kanonische*** *Form der Gruppe.*

Kapitel 10.

Systeme von partiellen Differentialgleichungen, deren allgemeinste Lösungen nur von einer endlichen Anzahl willkürlicher Constanten abhängen.

In den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $z_1 \cdots z_m$ denken wir uns ein System von partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung vorgelegt. Ausser $x_1 \cdots x_n$, $z_1 \cdots z_m$ möge dasselbe nur Differentialquotienten von $z_1 \cdots z_m$ nach $x_1 \cdots x_n$ enthalten, sodass wir also $x_1 \cdots x_n$ als von einander unabhängig zu betrachten haben, während $z_1 \cdots z_m$ derart als Functionen von $x_1 \cdots x_n$ zu bestimmen sind, dass das System identisch befriedigt wird.

Unser System von Differentialgleichungen soll nun keineswegs ganz beliebig sein, sondern es soll gewisse besondere Eigenschaften besitzen. Wir wollen annehmen, dass es in der Form, in welcher es vorliegt, die folgenden Bedingungen erfüllt:

Erstens. Wenn s die Ordnung der höchsten in dem Systeme vorkommenden Differentialquotienten ist, so sollen sich vermöge der Gleichungen des Systems durch *Auflösung* sämmtliche Differentialquotienten s-ter Ordnung von $z_1 \cdots z_m$ nach $x_1 \cdots x_n$ durch die Differentialquotienten erster bis $(s - 1)$-ter Ordnung und durch $z_1 \cdots z_m$, $x_1 \cdots x_n$ ausdrücken lassen. Dagegen soll es nicht möglich sein auf diese Weise sämmtliche Differentialquotienten $(s-1)$-ter Ordnung durch die von niederer Ordnung und durch $z_1 \cdots z_m$, $x_1 \cdots x_n$ auszudrücken.

Zweitens. Durch einmalige Differentiation des vorgelegten Systems nach den einzelnen Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ und durch Combination der erhaltenen Gleichungen sollen sich nur solche Relationen zwischen $x_1 \cdots x_n$, $z_1 \cdots z_m$ und den Differentialquotienten erster bis $(s-1)$-ter Ordnung ergeben, welche bereits aus dem vorgelegten Systeme folgen.

Diese speciellen Voraussetzungen über die Form des vorgelegten Gleichungensystems machen wir nur der Bequemlichkeit wegen. Selbstverständlich lassen sich die folgenden Betrachtungen überhaupt auf jedes System von partiellen Differentialgleichungen anwenden, welches durch Differentiationen und Eliminationen die eben beschriebene Form erhalten kann.

Aus der bekannten Theorie der totalen Differentialgleichungen ergiebt sich jetzt ohne Schwierigkeit, dass jedes System von Differentialgleichungen, welches die vorhin besprochenen Eigenschaften besitzt, integrabel ist und dass die allgemeinsten Functionen $z_1 \cdots z_m$ von $x_1 \cdots x_n$, welche dem Systeme genügen, nur von einer endlichen Anzahl willkürlicher Constanten abhängen.

Wir wollen nun diesen Satz in etwas anderer Weise begründen, indem wir das besprochene Integrationsproblem auf das Problem zurückführen, Gleichungensysteme zu finden, welche eine Anzahl von gegebenen infinitesimalen Transformationen gestatten; das letztere Problem können wir ja auf Grund der Entwickelungen des Kapitels 7 sofort erledigen.

Andererseits werden wir auch noch zeigen, dass der besprochene Satz sich umkehren lässt: wir werden beweisen, dass jedes Gleichungensystem

$$z_\mu = Z_\mu(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \qquad (\mu = 1 \cdots m),$$

welches eine endliche Anzahl r von willkürlichen Parametern a_k enthält, das allgemeinste Lösungensystem eines gewissen Systems von partiellen Differentialgleichungen darstellt.

Für uns ist dieser zweite Satz der wichtigere; ihn haben wir ja schon an früheren Stellen benutzt (vgl. die Einleitung S. 5, sowie Kap. 2, S. 36) und werden ihn auch im nächsten Kapitel wieder verwenden.

Deshalb schien es wünschenswerth, beide Sätze selbständig abzuleiten, ohne die Theorie der totalen Differentialgleichungen hereinzuziehen.

§ 47.

Die Zahl der Differentialquotienten k-ter Ordnung von $z_1 \cdots z_m$ nach $x_1 \cdots x_n$ möge mit ε_k bezeichnet werden. Für die Differentialquotienten k-ter Ordnung selbst führen wir die Bezeichnung $p_i^{(k)}$ ein, wo i die Werthe $1, 2 \cdots \varepsilon_k$ zu durchlaufen hat; doch behalten wir uns vor, an Stelle von $p_1^{(0)} \cdots p_{\varepsilon_0}^{(0)}$ einfach $z_1 \cdots z_m$ zu schreiben. Endlich setzen wir noch

$$\frac{\partial p_i^{(k)}}{\partial x_j} = p_{ij}^{(k)},$$

sodass also $p_{ij}^{(k)}$ einen der ε_{k+1} Differentialquotienten $(k+1)$-ter Ordnung bedeutet.

Nach diesen Festsetzungen können wir das zu untersuchende System von Differentialgleichungen folgendermassen schreiben:

$$(1) \quad \begin{cases} W_1(x, z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}) = 0, \cdots W_q(x, z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}) = 0, \\ p_{ij}^{(s-1)} = P_{ij}(x, z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}) \quad {\scriptstyle (i = 1 \cdots \varepsilon_{s-1},\, j = 1 \cdots n)}. \end{cases}$$

Die Gleichungen $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ setzen wir hier als von einander unabhängig voraus. Die $n\,\varepsilon_{s-1}$ Gleichungen $p_{ij}^{(s-1)} = P_{ij}$ sind allerdings von den $W = 0$ unabhängig aber nicht unter einander, weil nämlich die $n\,\varepsilon_{s-1}$ Ausdrücke $p_{ij}^{(s-1)}$ nicht lauter verschiedene Differentialquotienten s-ter Ordnung darstellen. Aber für das Folgende ist die obige Schreibweise bequemer, als wenn wir das Gleichungensystem (1) in der Form:

$$W_1 = 0, \cdots W_q = 0, \; p_i^{(s)} = P_i(x, z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}) \quad {\scriptstyle (i = 1 \cdots \varepsilon_s)}$$

geschrieben hätten.

Unser Gleichungensystem (1) hat nun nach Voraussetzung die Eigenschaft, bei einmaliger Differentiation nach den x keine neuen Relationen zwischen den $x, z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}$ zu liefern. Alle Relationen zwischen den $x, z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}$, welche sich bei einmaliger Differentiation von (1) ergeben, müssen also eine Folge von $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ sein.

Offenbar finden wir die betreffenden Relationen, wenn wir (1) nach jeder der n Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ differentiiren und sodann alle Differentialquotienten von $(s+1)$-ter Ordnung wegschaffen und alle von s-ter Ordnung durch ihre Werthe aus (1) ersetzen.

Durch Differentiation von $W_k = 0$ und nachherige Elimination der Differentialquotienten s-ter Ordnung bekommen wir die Gleichungen

$$\frac{\partial W_k}{\partial x_\nu} + \sum_1^m {}^i p_{i\nu}^{(0)} \frac{\partial W_k}{\partial z_i} + \sum_1^{\varepsilon_1} {}^i p_{i\nu}^{(1)} \frac{\partial W_k}{\partial p_i^{(1)}} + \cdots +$$
$$+ \sum_1^{\varepsilon_{s-2}} {}^i p_{i\nu}^{(s-2)} \frac{\partial W_k}{\partial p_i^{(s-2)}} + \sum_1^{\varepsilon_{s-1}} {}^i P_{i\nu} \frac{\partial W_k}{\partial p_i^{(s-1)}} = 0$$
$$(k = 1 \cdots q, \ \nu = 1 \cdots n).$$

Dieselben sind nach dem Obigen eine Folge von $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$. Mit andern Worten: *das Gleichungensystem* $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ *in den Veränderlichen* $x, z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}$ *gestattet die* n *infinitesimalen Transformationen:*

$$(2)\quad \begin{cases} \Omega_\nu f = \dfrac{\partial f}{\partial x_\nu} + \displaystyle\sum_1^m {}^i p_{i\nu}^{(0)} \frac{\partial f}{\partial z_i} + \cdots + \\ \qquad + \displaystyle\sum_1^{\varepsilon_{s-2}} {}^i p_{i\nu}^{(s-2)} \frac{\partial f}{\partial p_i^{(s-2)}} + \sum_1^{\varepsilon_{s-1}} {}^i P_{i\nu} \frac{\partial f}{\partial p_i^{(s-1)}} \\ \qquad (\nu = 1 \cdots n) \end{cases}$$

in denselben Veränderlichen (vgl. Kap. 7, S. 109).

Differentiirt man andererseits die Gleichungen $p_{ij}^{(s-1)} = P_{ij}$ nach x_ν und eliminirt sodann alle Differentialquotienten s-ter Ordnung, so bekommt man:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} p_{ij}^{(s-1)} = \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \, \partial x_j} p_i^{(s-1)} = \Omega_\nu (P_{ij}).$$

Aus diesen Gleichungen sind jetzt noch alle Differentialquotienten $(s+1)$-ter Ordnung wegzuschaffen. Man erkennt leicht, dass sich dabei nur die folgenden Relationen ergeben:

$$(3)\qquad \Omega_\nu (P_{ij}) - \Omega_j (P_{i\nu}) = 0$$
$$(\nu, j = 1 \cdots n, \ i = 1 \cdots \varepsilon_{s-1}),$$

welche also ebenfalls eine Folge von $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ sein müssen.

Hiermit sind die in der Einleitung geforderten Eigenschaften des Systems (1) analytisch formulirt.

Denken wir uns jetzt irgend ein Lösungensystem

$$z_1 = \varphi_1 (x_1 \cdots x_n), \ \cdots \ z_m = \varphi_m (x_1 \cdots x_n)$$

der Differentialgleichungen (1) vorgelegt. Durch Differentiation desselben erhalten wir die $p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}, p^{(s)}$ als Functionen von $x_1 \cdots x_n$ dargestellt:

$$p_{i_1}^{(1)} = \varphi_{i_1}^{(1)} (x_1 \cdots x_n), \ \cdots \ p_{i_{s-1}}^{(s-1)} = \varphi_{i_{s-1}}^{(s-1)} (x_1 \cdots x_n), \ p_{i_{s-1}\nu}^{(s-1)} = \frac{\partial \varphi_{i_{s-1}}^{(s-1)}}{\partial x_\nu}$$
$$(i_k = 1, 2 \cdots \varepsilon_k, \ \nu = 1 \cdots n),$$

und wenn wir diese Ausdrücke sowie die Ausdrücke für $z_1 \cdots z_m$ in die Gleichungen (1) einsetzen, so bekommen wir natürlich lauter Identitäten. Hieraus geht hervor, dass die Gleichungen $W_1 = 0$, $\cdots W_q = 0$ ihrerseits bei der Substitution

$$(4) \quad z_\mu = \varphi_\mu(x_1 \cdots x_n),\ p_{i_1}^{(1)} = \varphi_{i_1}^{(1)}(x_1 \cdots x_n), \cdots p_{i_{s-1}}^{(s-1)} = \varphi_{i_{s-1}}^{(s-1)}(x_1 \cdots x_n)$$
$$(\mu = 1 \cdots m,\ i_k = 1 \cdots \varepsilon_k)$$

sich in Identitäten verwandeln; das können wir offenbar auch folgendermassen ausdrücken: das Gleichungensystem (4) umfasst die Gleichungen $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$.

Wir behaupten ferner, dass das Gleichungensystem (4) die oben besprochenen infinitesimalen Transformationen $\Omega_1 f \cdots \Omega_n f$ gestattet.

In der That, es verschwinden zunächst alle Ausdrücke

$$\Omega_\nu(z_\mu - \varphi_\mu) = p_{\mu\nu}^{(0)} - \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu},$$

$$\Omega_\nu(p_{i_1}^{(1)} - \varphi_{i_1}^{(1)}) = p_{i_1\nu}^{(1)} - \frac{\partial \varphi_{i_1}^{(1)}}{\partial x_\nu},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Omega_\nu\left(p_{i_{s-2}}^{(s-2)} - \varphi_{i_{s-2}}^{(s-2)}\right) = p_{i_{s-2}\nu}^{(s-2)} - \frac{\partial \varphi_{i_{s-2}}^{(s-2)}}{\partial x_\nu}$$

vermöge (4), denn die Gleichungen (4) sind ja aus $z_\mu - \varphi_\mu = 0$ durch Differentiation nach $x_1 \cdots x_n$ hervorgegangen. Aber auch die Ausdrücke

$$\Omega_\nu\left(p_{i_{s-1}}^{(s-1)} - \varphi_{i_{s-1}}^{(s-1)}\right) = P_{i_{s-1}\nu} - \frac{\partial \varphi_{i_{s-1}}^{(s-1)}}{\partial x_\nu}$$

verschwinden vermöge (4), denn die Gleichungen

$$p_{i_{s-1}\nu}^{(s-1)} = P_{i_{s-1}\nu}$$

werden ja, wie schon oben gesagt, durch die Substitution

$$z_\mu = \varphi_\mu,\ p_{i_1}^{(1)} = \varphi_{i_1}^{(1)}, \cdots p_{i_{s-1}}^{(s-1)} = \varphi_{i_{s-1}}^{(s-1)},\ p_{i_{s-1}\nu}^{(s-1)} = \frac{\partial \varphi_{i_{s-1}}^{(s-1)}}{\partial x_\nu}$$

identisch befriedigt.

Damit ist die oben aufgestellte Behauptung bewiesen.

Denken wir uns jetzt umgekehrt ein Gleichungensystem von der Form (4) vorgelegt, über welches wir weiter Nichts wissen, als dass es die infinitesimalen Transformationen $\Omega_1 f \cdots \Omega_n f$ gestattet und die Gleichungen $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ umfasst.

Offenbar entstehen die betreffenden Gleichungen (4) alle aus den Gleichungen $z_\mu = \varphi_\mu$ durch Differentiation nach $x_1 \cdots x_n$. Da ausserdem unter den gemachten Voraussetzungen die Gleichungen

$$\Omega_\nu\left(p_{i_{s-1}}^{(s-1)} - \varphi_{i_{s-1}}^{(s-1)}\right) = P_{i_{s-1}\nu} - \frac{\partial \varphi_{i_{s-1}}^{(s-1)}}{\partial x_\nu} = 0$$

eine Folge von (4) sind und die Gleichungen $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ ebenfalls, so wird das Gleichungensystem (1) identisch befriedigt, wenn man die Substitution (4) darauf ausführt und sodann noch $p_{iv}^{(s-1)} = \frac{\partial \varphi_i^{(s-1)}}{\partial x_\nu}$ setzt. Also stellen die Gleichungen $z_\mu = \varphi_\mu$ ein Lösungensystem der Differentialgleichungen (1) dar.

Wir ersehen hieraus: jedes Lösungensystem $z_\mu = \varphi_\mu$ der Differentialgleichungen (1) liefert ein ganz bestimmtes Gleichungensystem von der Form (4), welches die infinitesimalen Transformationen $\Omega_1 f \cdots \Omega_n f$ gestattet und die Gleichungen $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ umfasst; umgekehrt liefert jedes Gleichungensystem von der Form (4), welches die eben angegebenen Eigenschaften besitzt, ein ganz bestimmtes Lösungensystem der Differentialgleichungen (1). *Folglich ist das Problem, alle Lösungensysteme der Differentialgleichungen* (1) *zu bestimmen, äquivalent mit dem Problem, alle Gleichungensysteme von der Form* (4) *zu bestimmen, welche die infinitesimalen Transformationen* $\Omega_1 f \cdots \Omega_n f$ *gestatten und ausserdem die Gleichungen* $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ *umfassen. Kennt man die allgemeinste Lösung des einen dieser beiden Probleme, so ist zugleich die allgemeinste Lösung des andern gegeben.*

Dieses neue Problem können wir aber auf Grund der Entwickelungen in Kap. 7, S. 118 ff. erledigen.

Nach Kapitel 7, Satz 5, S. 118 gestattet jedes der gesuchten Gleichungensysteme mit $\Omega_1 f \cdots \Omega_n f$ zugleich auch alle infinitesimalen Transformationen von der Form $\Omega_\nu(\Omega_j(f)) - \Omega_j(\Omega_\nu(f))$. Durch Ausrechnung ergiebt sich:

$$\Omega_\nu(\Omega_j(f)) - \Omega_j(\Omega_\nu(f)) = \sum_1^{\varepsilon_{s-1}} {}^i \left\{ \Omega_\nu(P_{ij}) - \Omega_j(P_{i\nu}) \right\} \frac{\partial f}{\partial p_i^{(s-1)}} \quad (\nu, j = 1 \cdots n),$$

denn die Ausdrücke

$$\Omega_\nu(p_{ij}^{(k)}) - \Omega_j(p_{i\nu}^{(k)})$$

verschwinden sämmtlich identisch, so lange k kleiner ist als $s-1$. Nun aber haben wir oben gesehen, dass die Gleichungen (3):

$$\Omega_\nu(P_{ij}) - \Omega_j(P_{i\nu}) = 0$$

eine Folge von $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ sind. Folglich bestehen für die Werthsysteme $x, z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}$ des Gleichungensystems $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ Relationen von der Form:

$$\Omega_\nu(\Omega_j(f)) - \Omega_j(\Omega_\nu(f)) = \sum_1^n {}^\tau \omega_{\nu j \tau}(x, z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}) \cdot \Omega_\tau f \quad (\nu, j = 1 \cdots n)$$

wo die Functionen $\omega_{\nu j \tau}$ alle gleich Null sind und sich also für die Werthsysteme von $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ sicher regulär verhalten.

Ausserdem ist noch hervorzuheben, dass unter den n-reihigen Determinanten der Matrix:

$$\left|\begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & \cdot & 0 & p_{11}^{(0)} & \cdot & p_{\varepsilon_{s-2}1}^{(s-2)} & P_{11} & \cdot & P_{\varepsilon_{s-1}1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & p_{1n}^{(0)} & \cdot & p_{\varepsilon_{s-2}n}^{(s-2)} & P_{1n} & \cdot & P_{\varepsilon_{s-1}n} \end{array}\right|$$

eine den Werth 1 besitzt und demnach von keinem der gesuchten Gleichungensysteme zum Verschwinden gebracht werden kann.

Wir sehen hieraus, dass wir den speciellen Fall vor uns haben, dessen Erledigung durch das Theorem 19 in Kap. 7, S. 132 gegeben ist. Mit Hülfe dieses Theorems können wir überhaupt alle Gleichungensysteme aufstellen, welche $\Omega_1 f \cdots \Omega_n f$ gestatten und die Gleichungen $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ umfassen. Es hat keine Schwierigkeit darunter diejenigen Gleichungensysteme anzugeben, welche die Form (4) erhalten können.

Aus einem Gleichungensysteme, welches die infinitesimalen Transformationen $\Omega_1 f \cdots \Omega_n f$ gestattet, lässt sich niemals eine Relation zwischen den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ allein ableiten. Das ergiebt sich aus dem angezogenen Theoreme und lässt sich auch leicht direkt einsehen. Es ist demnach möglich, die Gleichungen $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ nach q unter den $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{s-1}$ Grössen $z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}$ aufzulösen. Wenn wir das thun, bekommen wir q von den $\Sigma \varepsilon_k$ Veränderlichen $z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}$ durch die $\Sigma \varepsilon_k - q$ übrigen und durch $x_1 \cdots x_n$ ausgedrückt.

Nach diesen Vorbereitungen können wir die verkürzten infinitesimalen Transformationen bilden, von welchen in jenem Theoreme die Rede ist. Wir erhalten dieselben, wenn wir aus $\Omega_1 f \cdots \Omega_n f$ alle Glieder mit Differentialquotienten von f nach jenen q unter den Veränderlichen $z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}$ weglassen und sodann in den übrig bleibenden Gliedern jene q Veränderlichen durch ihre Ausdrücke als Functionen der $\Sigma \varepsilon_k - q$ übrigen und der x ersetzen.

Die so erhaltenen n verkürzten infinitesimalen Transformationen, welche $\overline{\Omega}_1 f \cdots \overline{\Omega}_n f$ heissen mögen, enthalten $n - q + \Sigma \varepsilon_k$ unabhängige Veränderliche und stehen ausserdem nach jenem Theoreme paarweise in der Beziehung:

$$\overline{\Omega}_\nu(\overline{\Omega}_j(f)) - \overline{\Omega}_j(\overline{\Omega}_\nu(f)) \equiv 0 \qquad (\nu, j = 1 \cdots n).$$

Folglich bilden die n von einander unabhängigen Gleichungen $\overline{\Omega}_1 f = 0, \cdots \overline{\Omega}_n f = 0$ ein n-gliedriges vollständiges System mit $\Sigma \varepsilon_k - q$ unabhängigen Lösungen: $u_1, u_2 \cdots u_{\Sigma \varepsilon_k - q}$. Sind diese Lösungen bestimmt, so lassen sich sofort alle Gleichungensysteme angeben, welche die infinitesimalen Transformationen $\Omega_1 f \cdots \Omega_n f$ gestatten und die Gleichungen $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ umfassen. Die allgemeine Form eines derartigen Gleichungensystems ist: $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ mit beliebigen hinzutretenden Relationen zwischen den $\Sigma \varepsilon_k - q$ Lösungen u.

Nun aber kommt es uns nicht auf alle Gleichungensysteme dieser Art an, sondern nur auf diejenigen, welche auf die Form (4) gebracht werden können. Jedes Gleichungensystem von dieser Beschaffenheit enthält gerade $\Sigma \varepsilon_k$ unabhängige Gleichungen, es kann daher die Form erhalten:

$$W_1 = 0, \cdots W_q = 0, \; u_1 = a_1, \cdots u_{\Sigma \varepsilon_k - q} = a_{\Sigma \varepsilon_k - q}, \tag{5}$$

wo die a Constanten bezeichnen. Aber jedes Gleichungensystem von der eben angegebenen Form lässt sich nach den $\Sigma \varepsilon_k$ Veränderlichen $z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}$ auflösen, denn es gestattet die infinitesimalen Transformationen $\Omega_1 f \cdots \Omega_n f$ und kann daher keine Relation zwischen $x_1 \cdots x_n$ allein zur Folge haben. Führen wir die betreffende Auflösung aus, so bekommen wir ein Gleichungensystem

$$(5') \quad \begin{cases} z_\mu = Z_\mu (x_1 \cdots x_n, a_1, a_2 \cdots), \; p_{i_1}^{(1)} = \Pi_{i_1}^{(1)} (x_1 \cdots x_n, a_1, a_2 \cdots), \\ \qquad \cdots p_{i_{s-1}}^{(s-1)} = \Pi_{i_{s-1}} (x_1 \cdots x_n, a_1, a_2 \cdots) \\ \qquad\qquad (\mu = 1 \cdots m; \; i_k = 1 \cdots \varepsilon_k), \end{cases}$$

welches allen gestellten Forderungen genügt: es gestattet die infinitesimalen Transformationen $\Omega_1 f \cdots \Omega_n f$, es umfasst die Gleichungen $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ und es besitzt die Form (4). Wenn wir nunmehr die $\Sigma \varepsilon_k - q$ Constanten a als willkürliche Constanten betrachten, so haben wir offenbar das allgemeinste Gleichungensystem von der verlangten Beschaffenheit.

Hieraus folgt nach dem früher Gesagten, dass die Gleichungen

$$z_\mu = Z_\mu (x_1 \cdots x_n, a_1, a_2 \cdots) \quad (\mu = 1 \cdots m) \tag{6}$$

ein Lösungensystem der Differentialgleichungen (1) darstellen und zwar das allgemeinste Lösungensystem. Wir behaupten nun, dass in diesem Lösungensysteme die $\Sigma \varepsilon_k - q$ willkürlichen Constanten a sämmtlich wesentlich sind.

Zum Beweise unserer Behauptung erinnern wir daran, dass die Gleichungen (5′) aus den Gleichungen $z_\mu = Z_\mu$ durch Differentiation nach $x_1 \cdots x_n$ erhalten werden können, vorausgesetzt, dass die $p^{(1)}, p^{(2)} \cdots$ wieder als Differentialquotienten der z nach den x aufgefasst werden. Wären nun die $\Sigma \varepsilon_k - q$ Parameter a in den Gleichungen (6) nicht wesentlich, so liesse sich die Zahl der Parameter durch Einführung geeigneter Functionen von ihnen erniedrigen. Damit würde aber nach dem Vorhergehenden zugleich die Anzahl der Parameter in den Gleichungen (5') erniedrigt, was unmöglich ist; denn die Gleichungen (5') lassen sich auf die Form (5) bringen, woraus unmittelbar hervorgeht, dass die Parameter a in (5') sämmtlich wesentlich sind. Das ist ein Widerspruch, also ist die vorhin gemachte Voraussetzung falsch und die Parameter a sind auch in den Gleichungen (6) sämmtlich wesentlich.

Wir können daher den Satz aussprechen:

Satz 1. *Besitzt ein System von partiellen Differentialgleichungen s-ter Ordnung von der Form:*

$$F_\sigma\left(x_1 \cdots x_n,\ z_1 \cdots z_m,\ \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2} \cdots \frac{\partial^s z_m}{\partial x_n^s}\right) = 0 \qquad (\sigma = 1, 2 \cdots)$$

die Eigenschaft, dass alle Differentialquotienten s-ter Ordnung der z nach den x durch die Differentialquotienten niedrigerer Ordnung, durch $z_1 \cdots z_m$ und $x_1 \cdots x_n$ ausgedrückt werden können, während das entsprechende jedenfalls nicht für alle Differentialquotienten $(s-1)$-ter Ordnung gilt, liefert ausserdem das System bei einmaliger Differentiation nach den x nur solche Relationen zwischen $x_1 \cdots x_n$, $z_1 \cdots z_m$ und den Differentialquotienten erster bis $(s-1)$-ter Ordnung, welche aus dem Systeme selbst folgen, so enthält das allgemeinste Lösungensystem

$$z_\mu = \varphi_\mu(x_1 \cdots x_n) \qquad (\mu = 1 \cdots m)$$

des betreffenden Systems von Differentialgleichungen nur eine endliche Anzahl von willkürlichen Constanten. Die Zahl dieser willkürlichen Constanten ist gleich $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{s-1} - q$, wo mit ε_k die Zahl der Differentialquotienten k-ter Ordnung von $z_1 \cdots z_m$ nach $x_1 \cdots x_n$ bezeichnet ist und mit q die Anzahl der unabhängigen Relationen, welche das betreffende System zwischen $x_1 \cdots x_n$, $z_1 \cdots z_m$ und den Differentialquotienten erster bis $(s-1)$-ter Ordnung liefert. Das allgemeinste Lösungensystem $z_\mu = \varphi_\mu$ selbst findet man durch Integration eines n-gliedrigen vollständigen Systems in $n - q + \varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_{s-1}$ unabhängigen Veränderlichen.

Beim Beweise des vorstehenden Satzes dachten wir uns die Gleichungen $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ nach q von den Grössen $z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}$ aufgelöst. An und für sich ist es ja vollständig gleichgültig, nach welchen unter diesen Grössen aufgelöst wird; da nun aber die Gleichungen $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ Differentialgleichungen sind und die $p^{(1)}, p^{(2)} \cdots$ Differentialquotienten bezeichnen, so ist es zweckmässig, die besprochene Auflösung in einer besonderen Weise durchzuführen, welche wir jetzt auseinandersetzen wollen.

Zunächst eliminiren wir aus den Gleichungen $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ alle Differentialquotienten $p_1^{(1)}, p^{(2)} \cdots p^{(s-1)}$; dann erhalten wir etwa

ν_0 unabhängige Gleichungen zwischen den x und z allein und können daher ν_0 von den z als Functionen der $\varepsilon_0 - \nu_0 = m - \nu_0$ übrigen und der x darstellen.

Die Ausdrücke für diese ν_0 Grössen z setzen wir in die Gleichungen $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ ein, welche sich nunmehr auf $q - \nu_0$ von einander unabhängige reduciren. Aus diesen $q - \nu_0$ Gleichungen schaffen wir sodann alle Differentialquotienten $p^{(2)} \cdots p^{(s-1)}$ fort und bekommen so etwa ν_1 von einander unabhängige Gleichungen, vermittelst deren wir ν_1 von den Grössen $p^{(1)}$ durch die $\varepsilon_1 - \nu_1$ übrigen, durch jene $\varepsilon_0 - \nu_0$ von den z und durch $x_1 \cdots x_n$ ausdrücken können.

Wenn wir in der beschriebenen Weise fortfahren, so wird schliesslich das Gleichungensystem $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ aufgelöst und zwar nach je ν_k von den ε_k Differentialquotienten $p^{(k)}$, unter k eine beliebige unter den Zahlen $0, 1, 2 \cdots s - 1$ verstanden. Dabei sind jedesmal die betreffenden ν_k unter den $p^{(k)}$ ausgedrückt durch die $\varepsilon_k - \nu_k$ übrigen, durch gewisse von den Differentialquotienten niedrigerer Ordnung: $p^{(k-1)} \cdots p^{(1)}, p^{(0)}$ und durch die x. Die Summe $\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_{s-1}$ hat natürlich den Werth q. Endlich lässt sich zeigen, dass ν_k stets kleiner ist als ε_k. Zunächst ist nämlich ν_{s-1} sicher kleiner als ε_{s-1}, weil wir vorausgesetzt haben, dass sich aus unserem Systeme von Differentialgleichungen nicht alle Differentialquotienten $(s - 1)$-ter Ordnung durch diejenigen niedrigerer Ordnung und durch die x ausdrücken lassen. Wäre aber irgend eine andere der Zahlen ν_k gleich ε_k, so hätten wir:

$$p_i^{(k)} = F_i(x_1\, z,\, p^{(1)} \cdots p^{(k-1)}) \qquad (i = 1, 2 \cdots \varepsilon_k);$$

da nun das Gleichungensystem $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ die infinitesimalen Transformationen $\Omega_1 f \cdots \Omega_n f$ gestattet, so müssten auch alle Gleichungen

$$p_{i\nu}^{(k)} = \Omega_\nu(F_i) \qquad (i = 1 \cdots \varepsilon_k;\ \nu = 1 \cdots n)$$

eine Folge von $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ sein, es wäre also auch $\nu_{k+1} = \varepsilon_{k+1}$, ebenso $\nu_{k+2} = \varepsilon_{k+2}, \cdots \nu_{s-1} = \varepsilon_{s-1}$, was nach dem vorhin Gesagten unmöglich ist.

Haben wir einmal die Gleichungen $W_1 = 0, \cdots W_q = 0$ aufgelöst, so ist damit zugleich auch das System der Differentialgleichungen (1) in einer ganz bestimmten Weise aufgelöst, nämlich nach je ν_k von den ε_k Differentialquotienten k-ter Ordnung, unter k eine beliebige der Zahlen $0, 1, 2 \cdots s$ verstanden. Dabei ist ν_k immer kleiner als ε_k, nur ν_s ist gleich ε_s. Die ν_k Differentialquotienten k-ter Ordnung sind jedesmal ausgedrückt durch die $\varepsilon_k - \nu_k$ übrigen von k-ter, durch die von niedrigerer Ordnung und durch die x.

Kennt man alle Zahlen ε_k und ν_k, so kann man unmittelbar die Anzahl der willkürlichen Constanten in dem allgemeinsten Lösungensystem der Differentialgleichungen (1) angeben. Diese Anzahl ist ja nach dem obigen Satze gleich:

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{s-1} - q = (\varepsilon_0 - \nu_0) + (\varepsilon_1 - \nu_1) + \cdots + (\varepsilon_{s-1} - \nu_{s-1}).$$

§ 48.

Es sei jetzt umgekehrt ein Gleichungensystem von der Form

$$z_\mu = Z_\mu\,(x_1 \cdots x_n,\; a_1 \cdots a_r) \qquad (\mu = 1 \cdots m) \tag{7}$$

vorgelegt, in welchem $x_1 \cdots x_n$ als unabhängige Veränderliche aufzufassen sind und $a_1 \cdots a_r$ als willkürliche Parameter. Die r Parameter $a_1 \cdots a_r$, deren Zahl endlich ist, mögen sämmtlich wesentlich sein.

Wir werden zeigen, dass es ein von $a_1 \cdots a_r$ freies System von partiellen Differentialgleichungen giebt, dessen allgemeinste Lösungen eben durch die Gleichungen (7) dargestellt werden.

Indem wir die Gleichungen (7) nach $x_1 \cdots x_n$ differentiiren, erhalten wir der Reihe nach Gleichungen von der Form:

$$p_i^{(1)} = Z_i^{(1)}\,(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \qquad (i = 1 \cdots \varepsilon_1) \tag{7_1}$$

$$p_i^{(2)} = Z_i^{(2)}\,(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \qquad (i = 1 \cdots \varepsilon_2) \tag{7_2}$$

und so weiter.

Nun lassen sich vermittelst der Gleichungen (7) eine gewisse Anzahl, etwa μ_0, von den a durch die $r - \mu_0$ übrigen, durch die x und die z ausdrücken. Nehmen wir die Gleichungen (7) und (7_1) zusammen, so können wir $\mu_0 + \mu_1$ von den a durch die $r - \mu_0 - \mu_1$ übrigen, durch die $p^{(1)}$, z und die x ausdrücken. Nehmen wir überhaupt die Gleichungen (7), $(7_1) \cdots (7_k)$ zusammen, so können wir $\mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_k$ von den Grössen a durch die $r - \mu_0 - \cdots - \mu_k$ übrigen und durch die $p^{(k)}, p^{(k-1)} \cdots p^{(1)}, z, x$ ausdrücken. Hierbei sind $\mu_0, \mu_1 \cdots$ vollkommen bestimmte positive ganze Zahlen.

Die Summe $\mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_k$ ist natürlich höchstens gleich r; ferner ist die Zahl μ_0 jedenfalls verschieden von Null, weil wir r grösser als Null voraussetzen können. Folglich muss es eine endliche ganze Zahl $s \geqq 1$ geben von solcher Beschaffenheit, dass zwar $\mu_0, \mu_1 \cdots \mu_{s-1}$ sämmtlich von Null verschieden sind, dass aber die Zahl μ_s verschwindet. Werden dann aus den Gleichungen (7), $(7_1) \cdots (7_{s-1})$ die bewussten von den Grössen $a_1 \cdots a_r$ bestimmt und deren Werthe in die Gleichungen (7_s) eingesetzt, so ergeben sich lauter von $a_1 \cdots a_r$ freie Gleichungen;

denn im entgegengesetzten Falle liessen sich aus den Gleichungen (7), $(7_1) \cdots (7_s)$ mehr als $\mu_0 + \cdots + \mu_{s-1}$ von den Grössen a bestimmen, es wäre also $\mu_s > 0$, was nach dem Obigen nicht der Fall ist.

Wir erhalten demnach aus den Gleichungen (7), $(7_1) \cdots (7_s)$ durch Elimination von $a_1 \cdots a_r$ folgende Gleichungen:

erstens ε_s Gleichungen, welche alle ε_s Differentialquotienten $p^{(s)}$ durch die $p^{(s-1)} \cdots p^{(1)}, z, x$ ausdrücken und

zweitens noch $\varepsilon_0 - \mu_0 + \varepsilon_1 - \mu_1 + \cdots + \varepsilon_{s-1} - \mu_{s-1}$ von einander unabhängige Gleichungen zwischen den x, z, $p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}$.

Es ist leicht zu sehen, dass das so gefundene System von Differentialgleichungen s-ter Ordnung alle Eigenschaften besitzt, welche in Satz 1, S. 179 den Differentialgleichungen $F_\sigma\left(x, z, \frac{\partial z}{\partial x} \cdots\right) = 0$ zugeschrieben werden.

In der That alle ε_s Differentialquotienten s-ter Ordnung sind Functionen derjenigen von niedrigerer Ordnung und der x; für die Differentialquotienten $(s-1)$-ter Ordnung gilt jedoch das entsprechende nicht, weil nämlich die oben besprochene Zahl μ_{s-1} von Null verschieden ist. Endlich ergeben sich auch durch Differentiation nach den x und durch Combination der erhaltenen Gleichungen nur solche Relationen zwischen den $x, z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}$, welche aus den obigen folgen. Die Gleichungen (7), $(7_1) \cdots (7_{s-1})$ und die daraus folgenden sind ja die einzigen endlichen Relationen, durch welche die Grössen $a_1 \cdots a_r, x, z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}$ verknüpft sind; wenn wir daher die a eliminiren, so erhalten wir die einzigen endlichen Relationen, welche zwischen den $x, z, p^{(1)} \cdots p^{(s-1)}$ bestehen, nämlich die oben erwähnten $\varepsilon_0 - \mu_0 + \cdots + \varepsilon_{s-1} - \mu_{s-1}$ Relationen.

Auf unser System von Differentialgleichungen s-ter Ordnung lässt sich also der schon erwähnte Satz 1, S. 179 ohne Weiteres anwenden. Die damals definirten Zahlen ν_k sind gleich $\varepsilon_k - \mu_k$ und die damals definirte Zahl q hat daher im gegenwärtigen Falle den Werth

$$\varepsilon_0 - \mu_0 + \cdots + \varepsilon_{s-1} - \mu_{s-1},$$

folglich enthält das allgemeinste Lösungensystem unserer Differentialgleichungen gerade $\mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_{s-1}$ willkürliche Constanten. Da nun andererseits die Gleichungen (7) auch ein Lösungensystem unserer Differentialgleichungen darstellen und zwar eines mit den r wesentlichen Parametern $a_1 \cdots a_r$ als willkürlichen Constanten, so muss die Zahl $\mu_0 + \cdots + \mu_{s-1}$, welche höchstens gleich r ist, gerade gleich r sein. Mit anderen Worten: das Gleichungensystem (7) stellt das allgemeinste Lösungensystem unserer Differentialgleichungen dar.

Wir haben somit den

Satz 2. *Sind $z_1 \cdots z_m$ gegebene Functionen der Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ und einer endlichen Anzahl von Parametern $a_1 \cdots a_r$:*

$$z_\mu = Z_\mu (x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \qquad (\mu = 1 \cdots m),$$

so giebt es stets ein integrables System von partiellen Differentialgleichungen, welches die z als Functionen der x bestimmt und dessen allgemeinste Lösungen eben durch die Gleichungen $z_\mu = Z_\mu (x, a)$ dargestellt werden.

Verbinden wir diesen Satz mit dem Satze 1, S. 179, so erhalten wir sofort den

Satz 3. *Ist ein integrables System von partiellen Differentialgleichungen*

$$F_\sigma\left(x_1 \cdots x_n, z_1 \cdots z_m, \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2} \cdots\right) = 0 \qquad (\sigma = 1, 2 \cdots)$$

so beschaffen, dass seine allgemeinsten Lösungen nur von einer endlichen Anzahl willkürlicher Constanten abhängen, so lässt es sich stets durch Differentiationen und Eliminationen auf eine Form bringen, welche die folgenden beiden Eigenschaften besitzt: Erstens sind alle Differentialquotienten von einer gewissen, etwa von der s-ten Ordnung durch die von niedrigerer Ordnung und durch $z_1 \cdots z_m, x_1 \cdots x_n$ ausgedrückt, während das entsprechende jedenfalls nicht für alle Differentialquotienten $(s-1)$-ter Ordnung gilt. Zweitens ergeben sich durch einmalige Differentiation nach den x nur solche Relationen zwischen den x, z und den Differentialquotienten erster bis $(s-1)$-ter Ordnung, welche aus den schon vorhandenen Gleichungen folgen.

Die Entwickelungen des gegenwärtigen § liefern überdies eine einfache Methode zur Beantwortung der Frage, wieviele unter den Parametern $a_1 \cdots a_r$ eines vorgelegten Gleichungensystems

$$z_\mu = Z_\mu (x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \qquad (\mu = 1 \cdots m)$$

wesentlich sind.

Um diese Frage beantworten zu können, brauchen wir nämlich blos die oben definirten ganzen Zahlen $\mu_0, \mu_1 \cdots \mu_{s-1}$ zu berechnen; die Summe $\mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_{s-1}$ giebt dann die Zahl der wesentlichen unter den Parametern $a_1 \cdots a_r$ an; denn die Gleichungen $z_\mu = Z_\mu (x, a)$ stellen die allgemeinsten Lösungen eines Systems von Differentialgleichungen dar, dessen allgemeinste Lösungen nach den obigen Entwickelungen gerade $\mu_0 + \cdots + \mu_{s-1}$ wesentliche Parameter enthalten.

Kapitel 11.

Die Definitionsgleichungen für die infinitesimalen Transformationen einer Gruppe.

In Kapitel 9 haben wir die Auffindung aller r-gliedrigen Gruppen zurückgeführt auf die Bestimmung aller Systeme von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$, welche Relationen von der Form

$$X_i X_k f - X_k X_i f = (X_i X_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} X_s f$$

mit gewissen Constanten c_{iks} befriedigen. Erst später werden wir Mittel finden, dieses reducirte Problem zu behandeln; vorläufig müssen wir uns darauf beschränken, Systeme $X_1 f \cdots X_r f$ von der betreffenden Beschaffenheit als gegeben anzunehmen und ihre Eigenschaften zu untersuchen.

Im gegenwärtigen Kapitel machen wir zunächst eine Anwendung der Entwickelungen des vorhergehenden Kapitels; wir schliessen aus denselben, dass die allgemeine infinitesimale Transformation

$$e_1 \cdot X_1 f + \cdots + e_r \cdot X_r f$$

einer vorgelegten r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ durch gewisse lineare partielle Differentialgleichungen definirt werden kann, welche wir die „Definitionsgleichungen" der Gruppe nennen. Daraus werden dann weitere Schlüsse gezogen*).

§ 49.

Es seien r unabhängige infinitesimale Transformationen

$$X_k f = \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

vorgelegt, die eine r-gliedrige Gruppe erzeugen. Die allgemeine infinitesimale Transformation dieser Gruppe hat dann die Form

$$\sum_1^n {}_i\, \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_1^n {}_i \sum_1^r {}_k\, e_k\, \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

wobei die e_k willkürliche Constanten bezeichnen. Für die ξ_i ergeben sich hieraus die Ausdrücke

---

*) Lie, Archiv for Mathematik og Naturvidenskab Bd. 3, Christiania 1878 und Bd. 8, 1883; Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania 1883, Nr. 12.

$$(1)\qquad \xi_i = \sum_1^r {}^k\, e_k \cdot \xi_{ki}(x) \qquad (i = 1 \cdots n),$$

in welchen die $\xi_{ki}(x)$ gegebene Functionen von $x_1 \cdots x_n$ sind.

Nach dem Satze 2 des vorigen Kapitels sind nun die eben geschriebenen Ausdrücke $\xi_1 \cdots \xi_n$ das allgemeinste Lösungensystem eines gewissen Systems von partiellen Differentialgleichungen, welches von den willkürlichen Constanten $e_1 \cdots e_r$ frei ist. Um dieses System aufzustellen, verfahren wir nach Anleitung von § 48; wir differentiiren die Gleichungen (1) nach jeder der n Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, die erhaltenen Gleichungen differentiiren wir ebenfalls nach $x_1 \cdots x_n$ und so fort. Wenn wir dann alle Differentialquotienten der ξ bis zu einer gewissen, in § 48 näher bezeichneten Ordnung berechnet haben, schaffen wir aus den gefundenen Gleichungen die willkürlichen Constanten $e_1 \cdots e_r$ weg und bekommen auf diese Weise das gewünschte System von Differentialgleichungen, dessen allgemeinste Lösungen eben die Ausdrücke $\xi_1 \cdots \xi_n$ sind.

Wir können es immer so einrichten, dass alle Gleichungen des besprochenen Systems in den ξ_i und deren Differentialquotienten linear und homogen sind; aus zwei beliebigen Lösungensystemen

$$\xi_{k\nu},\ \xi_{j\nu} \qquad (\nu = 1 \cdots n)$$

der betreffenden Differentialgleichungen lässt sich ja stets ein anderes Lösungensystem $e_k \xi_{k\nu} + e_j \xi_{j\nu}$ mit zwei willkürlichen Constanten e_k und e_j herleiten.

Das System der Differentialgleichungen, welches $\xi_1 \cdots \xi_n$ definirt, hat demnach die Form

$$\sum_1^n {}^\nu A_{\mu\nu}(x_1 \cdots x_n) \cdot \xi_\nu + \sum_{\nu,\pi}^{1 \cdots n} B_{\mu\nu\pi}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\pi} + \cdots = 0$$
$$(\mu = 1, 2 \cdots),$$

wo die $A, B \cdots$ von den willkürlichen Constanten $e_1 \cdots e_r$ frei sind.

Wir nennen diese Differentialgleichungen kurzweg die *Definitionsgleichungen der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$, weil sie den Inbegriff aller infinitesimalen Transformationen dieser Gruppe und somit die Gruppe selbst vollständig definiren.*

Gleich an dieser Stelle mag das Gesagte durch ein Paar Beispiele erläutert werden.

In der allgemeinen infinitesimalen Transformation

$$\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

der sechsgliedrigen linearen Gruppe:

$$x_1' = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3$$
$$x_2' = a_4 x_1 + a_5 x_2 + a_6$$

haben ξ_1 und ξ_2 die Werthe:

$$\xi_1 = e_1 + e_2 x_1 + e_3 x_2, \quad \xi_2 = e_4 + e_5 x_1 + e_6 x_2.$$

Hieraus ergeben sich als Definitionsgleichungen der Gruppe die folgenden:

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^{\,2}} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2^{\,2}} = 0$$
$$\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1^{\,2}} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_2^{\,2}} = 0.$$

Die bekannte achtgliedrige Gruppe:

$$x_1' = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3}{a_7 x_1 + a_8 x_2 + 1}, \quad x_2' = \frac{a_4 x_1 + a_5 x_2 + a_6}{a_7 x_1 + a_8 x_2 + 1}$$

aller projectiven Transformationen der Ebene diene als zweites Beispiel. Ihre allgemeine infinitesimale Transformation:

$$\xi_1 = e_1 + e_2 x_1 + e_3 x_2 + e_7 x_1^{\,2} + e_8 x_1 x_2$$
$$\xi_2 = e_4 + e_5 x_1 + e_6 x_2 + e_7 x_1 x_2 + e_8 x_2^{\,2}$$

wird durch vier Relationen zwischen den Differentialquotienten zweiter Ordnung der ξ definirt, nämlich durch:

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^{\,2}} - 2\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_2^{\,2}} - 2\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2^{\,2}} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1^{\,2}} = 0.$$

Bei nochmaliger Differentiation findet man, dass alle Differentialquotienten dritter Ordnung von ξ_1 und ξ_2 verschwinden.

§ 50.

Wann definirt nun umgekehrt ein System von linearen homogenen Differentialgleichungen

$$\sum_1^n {}_\nu A_{\mu\nu}(x) \cdot \xi_\nu + \sum_{\nu,\pi}^{1\cdots n} B_{\mu\nu\pi}(x) \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\pi} + \cdots = 0 \qquad (\mu = 1, 2 \cdots)$$

die allgemeine infinitesimale Transformation einer endlichen continuirlichen Gruppe?

Erste Bedingung ist natürlich, dass die allgemeinsten Lösungen $\xi_1 \cdots \xi_n$ des Systems nur von einer endlichen Anzahl willkürlicher Constanten abhängen. Diese Bedingung sei erfüllt. Dann ist es nach dem vorigen Kapitel, Satz 3, Seite 183 stets möglich, das System durch Differentiationen und Eliminationen auf eine gewisse besondere Form zu bringen, bei welcher sich alle Differentialquotienten der höchsten, etwa der s-ten Ordnung durch diejenigen von niedrigerer

Ordnung und durch $x_1 \cdots x_n$ ausdrücken lassen, während das entsprechende jedenfalls nicht für alle Differentialquotienten $(s-1)$-ter Ordnung gilt; wo ausserdem noch einmalige Differentiation nach den x keine neuen Relationen zwischen $x_1 \cdots x_n$, $\xi_1 \cdots \xi_n$ und den Differentialquotienten erster bis $(s-1)$-ter Ordnung der ξ liefert. Wir setzen voraus, dass das System diese Form erhalten hat und denken uns dasselbe in der auf S. 180 angegebenen Weise aufgelöst; wir erhalten dann für $k = 0, 1 \cdots s$ jedes Mal eine gewisse Anzahl, etwa ν_k der ε_k Differentialquotienten k-ter Ordnung der ξ dargestellt als lineare homogene Functionen der übrigen von k-ter und gewisser von $(k-1)$-ter, $\cdots$ erster, nullter Ordnung, mit Coefficienten, die nur von $x_1 \cdots x_n$ abhängen, dabei ist $\nu_s = \varepsilon_s$, sonst aber ν_k stets kleiner als ε_k.

Wie im vorigen Kapitel, S. 181 gezeigt worden ist, enthält unter den gemachten Voraussetzungen das allgemeinste Lösungensystem $\xi_1 \cdots \xi_n$ unserer Differentialgleichungen gerade

$$(\varepsilon_0 - \nu_0) + (\varepsilon_1 - \nu_1) + \cdots + (\varepsilon_{s-1} - \nu_{s-1}) = r$$

willkürliche Constanten; aus r particulären Lösungensystemen $\xi_{1i} \cdots \xi_{ri}$ lässt sich dieses allgemeinste Lösungensystem mit Hülfe von r Integrationsconstanten $e_1 \cdots e_r$ folgendermassen herleiten:

$$\xi_i = \sum_1^r {}^k \, e_k \, \xi_{ki} \qquad (i = 1 \cdots n),$$

nur müssen dabei die betreffenden particulären Lösungensysteme so beschaffen sein, dass die r Ausdrücke

$$\sum_1^n {}^i \, \xi_{1i} \frac{\partial f}{\partial x_i}, \cdots \sum_1^n {}^i \, \xi_{ri} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

ebensoviele unabhängige infinitesimale Transformationen darstellen.

Soll nun $\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$ die allgemeine infinitesimale Transformation einer r-gliedrigen Gruppe sein, so ist nach Theorem 24, S. 158 eine Bedingung nothwendig und hinreichend: es müssen nämlich, wenn $\xi_{k1} \cdots \xi_{kn}$ und $\xi_{j1} \cdots \xi_{jn}$ zwei particuläre Lösungensysteme sind, stets auch die Ausdrücke

$$\sum_1^n {}^\nu \left(\xi_{k\nu} \frac{\partial \xi_{ji}}{\partial x_\nu} - \xi_{j\nu} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_\nu} \right) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

ein Lösungensystem darstellen. Damit haben wir das

Theorem 28. *Sind $\xi_1 \cdots \xi_n$ als Functionen von $x_1 \cdots x_n$ durch gewisse lineare und homogene, partielle Differentialgleichungen*

$$\sum_1^n{}_\nu A_{\mu\nu}(x)\cdot\xi_\nu+\sum_{\nu,\pi}^{1\cdots n}B_{\mu\nu\pi}(x)\frac{\partial\xi_\nu}{\partial x_\pi}+\cdots=0\qquad(\mu=1,2\cdots)$$

bestimmt, so stellt der Ausdruck $\xi_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\cdots+\xi_n\frac{\partial f}{\partial x_n}$ *dann und nur dann die allgemeine infinitesimale Transformation einer endlichen continuirlichen Gruppe dar, wenn erstens das allgemeinste Lösungensystem jener Differentialgleichungen nur von einer endlichen Anzahl willkürlicher Constanten abhängt und wenn zweitens aus je zwei particulären Lösungensystemen* $\xi_{k1}\cdots\xi_{kn}$ *und* $\xi_{j1}\cdots\xi_{jn}$ *durch Bildung der n Ausdrücke*

$$\sum_1^n{}_\nu\left(\xi_{k\nu}\frac{\partial\xi_{ji}}{\partial x_\nu}-\xi_{j\nu}\frac{\partial\xi_{ki}}{\partial x_\nu}\right)\qquad(i=1\cdots n)$$

immer ein neues Lösungensystem erhalten wird.

Ist $\xi_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\cdots+\xi_n\frac{\partial f}{\partial x_n}$ wirklich die allgemeine infinitesimale Transformation einer endlichen Gruppe, so sind die obigen Differentialgleichungen natürlich die Definitionsgleichungen dieser Gruppe.

Sind die Definitionsgleichungen einer endlichen Gruppe gegeben, so lassen sich die vorhin besprochenen Zahlen $\nu_0, \nu_1\cdots\nu_{s-1}$ durch Differentiationen und Eliminationen bestimmen; die Zahl

$$r=(\varepsilon_0-\nu_0)+(\varepsilon_1-\nu_1)+\cdots+(\varepsilon_{s-1}-\nu_{s-1})$$

giebt dann an, wieviel Parameter die Gruppe enthält.

So ist in dem ersten der beiden früheren Beispiele

$$s=2,\ \nu_0=0,\ \nu_1=0,\ \varepsilon_0=2,\ \varepsilon_1=4,$$

mithin $r=6$. In dem zweiten Beispiel ist

$$s=3,\ \nu_0=0,\ \nu_1=0,\ \nu_2=4,\ \varepsilon_0=2,\ \varepsilon_1=4,\ \varepsilon_2=6,$$

folglich $r=8$.

§ 51.

Es seien jetzt wieder:

$$X_kf=\sum_1^n{}_i\,\xi_{ki}(x_1\cdots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i}\qquad(k=1\cdots r)$$

unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe. Wir denken uns die Definitionsgleichungen dieser Gruppe aufgestellt und auf die oben besprochene Form gebracht, also aufgelöst nach je ν_k von den ε_k Differentialquotienten k-ter Ordnung der ξ $(k=0,1\cdots s)$; dabei ist, wie früher gesagt, ν_k stets $<\varepsilon_k$, ausgenommen im Falle $k=s$, wo $\nu_s=\varepsilon_s$.

Die Coefficienten in den aufgelösten Definitionsgleichungen werden augenscheinlich *rationale* Functionen von den ξ mit ihren Differentialquotienten erster bis s-ter Ordnung. Da wir uns nun (vgl. S. 171) grundsätzlich auf solche Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$ beschränken, für welche sich alle ξ_{ki} regulär verhalten, so werden sich die gedachten Coefficienten im Allgemeinen ebenfalls für die in Betracht kommenden Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$ regulär verhalten, aber offenbar nur im Allgemeinen, es kann sehr gut Punkte $x_1 \cdots x_n$ geben, in denen sich zwar alle ξ_{ki}, nicht aber alle Coefficienten der aufgelösten Definitionsgleichungen regulär verhalten. Auf diesen Unterschied zwischen den verschiedenen Punkten $x_1 \cdots x_n$ muss im Folgenden überall Rücksicht genommen werden.

Es sei $x_1^0 \cdots x_n^0$ *ein Punkt, für den sich alle Coefficienten in den aufgelösten Definitionsgleichungen regulär verhalten;* dann werden $\xi_1 \cdots \xi_n$ in einer gewissen Umgebung von $x_1^0 \cdots x_n^0$ gewöhnliche Potenzreihen nach den $x_k - x_k^0$:

$$\xi_i = g_i^0 + \sum_1^n {}_\nu\, g'_{i\nu}(x_\nu - x_\nu^0) + \sum_{\nu\pi}^{1\cdots n} g''_{i\nu\pi}(x_\nu - x_\nu^0)(x_\pi - x_\pi^0) + \cdots,$$

wo immer die Glieder von derselben Ordnung vereinigt zu denken sind. Die Coefficienten $g^0, g' \cdots$ müssen dabei derart bestimmt werden, dass die vorgelegten Differentialgleichungen bei Einsetzung der Reihenentwickelungen für $\xi_1 \cdots \xi_n$ identisch befriedigt werden.

Wenn wir uns erinnern, dass unsere Gruppe r-gliedrig ist, so erkennen wir sofort, dass im Ganzen r von den Coefficienten $g^0, g' \cdots$ unbestimmt bleiben, dass also gewisse unter den Anfangswerthen, welche die ξ und ihre Differentialquotienten für $x_1 = x_1^0, \cdots x_n = x_n^0$ annehmen, willkürlich wählbar sind. Da nun unsere Differentialgleichungen zeigen, dass alle Differentialquotienten s-ter und höherer Ordnung durch $x_1 \cdots x_n$ und die Differentialquotienten nullter bis $(s-1)$-ter Ordnung ausdrückbar sind, so müssen gerade unter den Anfangswerthen $g^0, g', g'' \cdots g^{(s-1)}$ gewisse r willkürlich wählbar sein, oder, was auf dasselbe hinauskommt: es müssen die eben erwähnten $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{s-1}$ Anfangswerthe durch gewisse $\Sigma \varepsilon_k - r$ unabhängige Relationen verknüpft sein. Diese Relationen wollen wir jetzt aufstellen.

Unser System von Differentialgleichungen liefert alle Relationen, welche bei *beliebigen* x zwischen den ξ und ihren Differentialquotienten erster bis $(s-1)$-ter Ordnung bestehen. Wenn wir daher in unseren Differentialgleichungen die Substitution $x_i = x_i^0$ machen, so erhalten wir gewisse Relationen, durch welche die Anfangswerthe $g^0, g' \cdots g^{(s-1)}$ verknüpft sind. Es ergeben sich auf diese Weise ν_0 lineare homogene Relationen zwischen den g^0 allein, ferner ν_1 Relationen zwischen den g' und gewissen g^0, überhaupt ν_k Relationen zwischen den $g^{(k)}$ und gewissen $g^{(k-1)} \cdot \cdot g', g^0$. Die betreffenden Relationen sind aufgelöst und zwar nach ν_0 von den g^0, ν_1 von den g' und so weiter, es sind also im Ganzen $\Sigma \nu_k = \Sigma \varepsilon_k - r$ unabhängige Relationen. Da nun nach dem oben Gesagten zwischen $g^0, g' \cdots g^{(s-1)}$ nicht mehr als $\Sigma \varepsilon_k - r$ unabhängige Relationen bestehen, so haben wir hiermit alle Relationen gefunden, durch welche diese $\Sigma \varepsilon_k$ Anfangswerthe verknüpft sind; zugleich erhalten wir $\nu_0 + \cdots + \nu_{s-1}$ von den Grössen $g^0 \cdots g^{(s-1)}$ dargestellt als *lineare homogene* Functionen der $\Sigma(\varepsilon_k - \nu_k) = r$ übrigen, welche vollkommen willkürlich bleiben.

Wir benutzen die vorstehenden Bemerkungen, um aus ihnen über die Beschaffenheit der particulären Lösungensysteme unserer Differentialgleichungen einige wichtige Schlüsse zu ziehen.

Zunächst lässt sich beweisen, dass es kein particuläres Lösungensystem $\xi_1 \cdots \xi_n$ giebt, dessen Reihenentwickelungen nach den $x_i - x_i^0$ mit Gliedern s-ter oder noch höherer Ordnung anfangen. In den Reihenentwickelungen eines solchen Lösungensystems wären nämlich die Coefficienten $g^0, g' \cdots g^{(s-1)}$ alle gleich Null, folglich müssten auch alle $g^{(s)}, g^{(s+1)} \cdots$ verschwinden und das Lösungensystem reducirte sich somit auf: $\xi_1 = 0, \cdots \xi_n = 0$. Die vorgelegten Differentialgleichungen befriedigt dieses Lösungensystem allerdings, allein dasselbe liefert uns keine infinitesimale Transformation unserer Gruppe und ist daher unbrauchbar.

Dafür giebt es aber eine gewisse Anzahl von particulären Lösungensystemen $\xi_1 \cdots \xi_n$, deren Reihenentwickelungen mit Gliedern von niedrigerer als der s-ten, sagen wir mit Gliedern k-ter Ordnung beginnen. Die Coefficienten $g^0, g' \cdots g^{(k-1)}$ können ja alle gleich Null gewählt werden; die zwischen denselben bestehenden Relationen sind dann alle befriedigt, und es bleiben nur noch ν_k Relationen zwischen den $g^{(k)}$, ν_{k+1} Relationen zwischen den $g^{(k+1)}$ und gewissen $g^{(k)}, \cdots$ endlich ν_{s-1} Relationen zwischen den $g^{(s-1)}$ und gewissen $g^{(s-2)} \cdots g^{(k)}$. Demnach sind im Ganzen noch $(\varepsilon_k - \nu_k) + \cdots + (\varepsilon_{s-1} - \nu_{s-1})$ von den Constanten $g^{(k)} \cdots g^{(s-1)}$ willkürlich wählbar, und wenn man über diese Constanten so verfügt, dass nicht alle ε_k Grössen $g^{(k)}$ verschwinden, so erhält man stets ein particuläres Lösungensystem $\xi_1 \cdots \xi_n$, dessen Reihenentwickelungen nach den $x_i - x_i^0$ Glieder k-ter Ordnung enthalten, aber keine von niedrigerer Ordnung.

Ist $\xi_1 \cdots \xi_n$ ein particuläres Lösungensystem unserer Differentialgleichungen, so gehört die infinitesimale Transformation

$$\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

unserer Gruppe an. Aus dem vorhin Gesagten geht also hervor, dass diese Gruppe stets infinitesimale Transformationen enthält, deren Reihenentwickelungen nach den $x_i - x_i^0$ mit Gliedern k-ter Ordnung beginnen, sobald nur k eine der Zahlen $0, 1, 2 \cdots s - 1$ ist. Dagegen giebt es in der Gruppe keine infinitesimalen Transformationen, deren Reihenentwickelungen mit Gliedern s-ter oder höherer Ordnung anfangen. Das alles ist natürlich nur unter der Voraussetzung erwiesen, dass die Coefficienten der aufgelösten Definitionsgleichungen sich im Punkte $x_1^0 \cdots x_n^0$ regulär verhalten.

Um wenigstens einigermassen dem Bedürfniss nach Kürze des Ausdrucks Rechnung zu tragen, wollen wir in Zukunft sagen: *eine infinitesimale Transformation ist von der k-ten Ordnung in den $x_i - x_i^0$, wenn ihre Reihenentwickelung nach den $x_i - x_i^0$ mit Gliedern k-ter Ordnung beginnt.* Dann können wir die obigen Ergebnisse auch so aussprechen:

Ist $x_1^0 \cdots x_n^0$ ein Punkt, für welchen sich die Coefficienten in den aufgelösten Definitionsgleichungen der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ regulär verhalten, so enthält die Gruppe gewisse infinitesimale Transformationen von nullter Ordnung in den $x_i - x_i^0$, gewisse von erster Ordnung, überhaupt gewisse von k-ter Ordnung, wo k eine beliebige unter den Zahlen $0, 1 \cdots s - 1$ bedeutet; dagegen enthält die Gruppe keine infinitesimalen Transformationen von s-ter oder höherer Ordnung in den $x_i - x_i^0$.

Es ist klar, dass zwei infinitesimale Transformationen von verschiedener Ordnung in den $x_i - x_i^0$ stets von einander unabhängig sind. Ueberhaupt ist bei der Untersuchung, ob mehrere vorgelegte infinitesimale Transformationen von einander unabhängig sind oder nicht, vielfach schon die Betrachtung der Glieder niedrigster Ordnung in den Reihenentwickelungen derselben entscheidend; bestimmen nämlich die Glieder niedrigster Ordnung an und für sich genommen unabhängige infinitesimale Transformationen, so sind auch die vorgelegten infinitesimalen Transformationen von einander unabhängig.

Der allgemeine Ausdruck einer infinitesimalen Transformation, welche unserer Gruppe angehört und in den $x_i - x_i^0$ von der k-ten Ordnung ist, enthält, wie wir wissen, $(\varepsilon_k - \nu_k) + \cdots + (\varepsilon_{s-1} - \nu_{s-1}) = \varrho_k$ willkürliche und wesentliche Constanten, nämlich die $\varepsilon_k - \nu_k$ willkürlich wählbaren unter den $g^{(k)}$, die $\varepsilon_{k+1} - \nu_{k+1}$ willkürlichen unter den $g^{(k+1)}$ und so weiter; dabei ist jedoch die Willkürlichkeit jener $\varepsilon_k - \nu_k$ Grössen $g^{(k)}$ insofern beschränkt, als nicht alle $g^{(k)}$ gleichzeitig verschwinden dürfen. Hieraus geht hervor, dass sich zwar ϱ_k unabhängige infinitesimale Transformationen unserer Gruppe angeben lassen, welche in den $x_i - x_i^0$ von der k-ten Ordnung sind; allein es ist leicht zu sehen, dass sich aus diesen ϱ_k infinitesimalen Transformationen im Ganzen ϱ_{k+1} unabhängige linear ableiten lassen, welche in den $x_i - x_i^0$ von der $(k+1)$-ten oder von noch höherer Ordnung sind. Der allgemeine Ausdruck einer infinitesimalen Transformation, welche aus jenen ϱ_k unabhängigen linear abgeleitet ist, enthält ja genau dieselben willkürlichen Constanten, wie der allgemeine Ausdruck einer infinitesimalen Transformation von k-ter Ordnung in den $x_i - x_i^0$, nur mit dem Unterschiede, dass in dem ersten Ausdrucke alle $\varepsilon_k - \nu_k$ verfügbaren $g^{(k)}$ gleich Null gesetzt werden können, wobei sich stets eine infinitesimale Transformation $(k+1)$-ter oder höherer Ordnung ergiebt. Folglich giebt es unter jenen ϱ_k infinitesimalen Transformationen k-ter Ordnung nur $\varrho_{k+1} - \varrho_k = \varepsilon_k - \nu_k$ von einander unabhängige, aus denen sich keine infinitesimale Transformation von $(k+1)$-ter oder höherer Ordnung in den $x_i - x_i^0$ linear ableiten lässt.

Die bisherigen Ergebnisse fassen wir zusammen in dem

Theorem 29. *Zu jeder r-gliedrigen Gruppe $X_1f \cdots X_rf$ in n Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ gehört eine bestimmte ganze Zahl $s \geqq 1$ von solcher Beschaffenheit, dass die Gruppe in der Umgebung eines jeden Punktes x_i^0, für den sich die Coefficienten der aufgelösten Definitionsgleichungen regulär verhalten, gewisse infinitesimale Transformationen von nullter, von erster, $\cdots$ von $(s-1)$-ter Ordnung in den $x_i - x_i^0$ enthält, dagegen keine von s-ter oder höherer Ordnung. Insbesondere kann man stets r solche unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe auswählen, dass darunter für jeden der s Werthe $0, 1 \cdots s-1$ der Zahl k gerade $\varepsilon_k - \nu_k$ solche von einander unabhängige infinitesimale Transformationen von k-ter Ordnung in den $x_i - x_i^0$ vorhanden sind, aus denen sich keine infinitesimale Transformation von $(k+1)$-ter oder höherer Ordnung linear ableiten lässt. Dabei bestimmt sich die Zahl ν_k aus den Definitionsgleichungen der allgemeinen infinitesimalen Transformation $\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$ der Gruppe, und ε_k, welches stets grösser ist als ν_k, bedeutet die Anzahl aller Differentialquotienten k-ter Ordnung von $\xi_1 \cdots \xi_n$ nach $x_1 \cdots x_n$.*

Beispiel. Die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_2^2} = 0$$

haben wir schon früher erwähnt, als die Definitionsgleichungen der sechsgliedrigen linearen Gruppe:

$$x_1' = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3, \quad x_2' = a_4 x_1 + a_5 x_2 + a_6.$$

Diese Definitionsgleichungen liegen schon in der aufgelösten Form vor; alle darin auftretenden Coefficienten sind gleich Null, verhalten sich also überall regulär. Unter den infinitesimalen Transformationen der Gruppe können wir die nachstehenden sechs von einander unabhängigen auswählen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, (x_1 - x_1^0)\frac{\partial f}{\partial x_1}, (x_2 - x_2^0)\frac{\partial f}{\partial x_1}, (x_1 - x_1^0)\frac{\partial f}{\partial x_2}, (x_2 - x_2^0)\frac{\partial f}{\partial x_2};$$

die beiden ersten derselben sind von nullter, die vier letzten von erster Ordnung in den $x_i - x_i^0$.

Bei der Rechnung mit infinitesimalen Transformationen spielen Ausdrücke von der Form

$$X(Y(f)) - Y(X(f)) = (XY)$$

eine wichtige Rolle. Sind daher Xf und Yf in der Umgebung des Punktes x_i^0 nach Potenzen der $x_i - x_i^0$ entwickelt, so liegt die Frage nahe, wie sich die Transformation (XY) in diesem Punkte verhält.

Es möge die Reihenentwickelung von Xf mit Gliedern μ-ter Ordnung beginnen, die von Yf mit solchen ν-ter, es möge also sein:

$$Xf = \sum_1^n {}^k (\xi_k^{(\mu)} + \cdots) \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad Yf = \sum_1^n {}^j (\eta_j^{(\nu)} + \cdots) \frac{\partial f}{\partial x_j},$$

wo die $\xi^{(\mu)}$ und die $\eta^{(\nu)}$ homogene Functionen von μ-ter bezüglich ν-ter Ordnung in den $x_i - x_i^0$ bedeuten, während die Glieder höherer Ordnung in den $x_i - x_i^0$ weggelassen sind. Die Reihenentwickelung für (XY) wird unter diesen Voraussetzungen, bei alleiniger Berücksichtigung der Glieder niedrigster Ordnung, folgende:

$$(XY) = \sum_1^n {}^j \left\{ \sum_1^n {}^k \left(\xi_k^{(\mu)} \frac{\partial \eta_j^{(\nu)}}{\partial x_k} - \eta_k^{(\nu)} \frac{\partial \xi_j^{(\mu)}}{\partial x_k} \right) + \cdots \right\} \frac{\partial f}{x_j}.$$

Also sind die Glieder niedrigster Ordnung in (XY) von der Ordnung $\mu + \nu - 1$ und rühren einzig und allein von den Gliedern μ-ter bezüglich ν-ter Ordnung in Xf bezüglich Yf her:

Theorem 30. *Sind Xf und Yf zwei infinitesimale Transformationen, deren Reihenentwickelungen nach Potenzen von $x_1 - x_1^0, \cdots x_n - x_n^0$ mit Gliedern von μ-ter bezüglich ν-ter Ordnung beginnen, so beginnt die Reihenentwickelung der infinitesimalen Transformation $XYf - YXf = (XY)$ mit Gliedern*

($\mu + \nu - 1$)-ter Ordnung, welche durch die Glieder μ-ter bezüglich ν-ter Ordnung in Xf und Yf vollkommen bestimmt sind. Verschwinden diese Glieder ($\mu + \nu - 1$)-ter Ordnung, so lässt sich über die Reihenentwickelung von (XY) nur so viel sagen, dass dieselbe mit Gliedern von ($\mu + \nu$)-ter oder noch höherer Ordnung anfängt.

Sind die Zahlen μ und ν beide grösser als Eins, so ist die Zahl $\mu + \nu - 1$ grösser als jede von beiden. Diese Bemerkung ist beim Rechnen mit infinitesimalen Transformationen verschiedener Ordnung häufig von grossem Nutzen.

Bei der Ableitung des Theoremes 30 ist keineswegs vorausgesetzt, dass die beiden infinitesimalen Transformationen Xf und Yf einer Gruppe angehören; die einzige Voraussetzung ist, dass sowohl Xf als Yf sich nach Potenzen der $x_k - x_k^0$ entwickeln lassen.

§ 52.

Die Definitionsgleichungen einer r-gliedrigen Gruppe seien in der früher besprochenen Form vorgelegt, also aufgelöst nach je ν_k von den ε_k Differentialquotienten k-ter Ordnung von $\xi_1 \cdots \xi_n$. Ferner sei x_i^0 ein Punkt, in welchem sich die Coefficienten der aufgelösten Definitionsgleichungen regulär verhalten.

Unter diesen Voraussetzungen können wir die infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe in gewöhnliche Potenzreihen der $x_i - x_i^0$ entwickeln. Wir wissen sogar, dass unsere Gruppe eine ganz bestimmte Anzahl, nämlich $\varepsilon_0 - \nu_0$ unabhängige infinitesimale Transformationen enthält, welche in den $x_i - x_i^0$ von der nullten Ordnung sind, und aus denen sich keine infinitesimale Transformation erster oder höherer Ordnung linear ableiten lässt; ferner enthält die Gruppe eine ganz bestimmte Anzahl, nämlich $\varepsilon_1 - \nu_1$, von solchen unabhängigen infinitesimalen Transformationen erster Ordnung in den $x_i - x_i^0$, aus denen sich keine von zweiter oder höherer Ordnung linear ableiten lässt und so weiter.

Kurz unsere Gruppe ordnet jedem Punkte von der angegebenen Beschaffenheit eine Reihe von s ganzen Zahlen $\varepsilon_0 - \nu_0, \varepsilon_1 - \nu_1, \cdots \varepsilon_{s-1} - \nu_{s-1}$ zu und diese ganzen Zahlen sind für alle derartigen Punkte dieselben.

Es kann nun auch Punkte $\bar{x}_i$ von specieller Lage geben, also solche, in deren Umgebung sich die Coefficienten der aufgelösten Definitionsgleichungen nicht mehr regulär verhalten, während sich dagegen alle infinitesimalen Transformationen der Gruppe in gewöhnliche Potenzreihen der $x_i - \bar{x}_i$ entwickeln lassen. Ist $\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n$ ein bestimmter Punkt dieser Art, so giebt es natürlich in unserer Gruppe eine ganz bestimmte Anzahl von solchen infinitesimalen Transformationen nullter Ordnung in den $x_i - \overline{x}_i$, aus denen sich keine infinitesimale Transformation von höherer Ordnung linear ableiten lässt und so weiter.

Folglich ordnet unsere Gruppe auch jedem Punkte von specieller Lage eine bestimmte, offenbar endliche Reihe von ganzen Zahlen zu; häufig werden zwei verschiedenen Punkten von specieller Lage auch zwei verschiedene Reihen von ganzen Zahlen zugeordnet sein.

Ein Beispiel wird am besten die Sache klar machen.

Die Definitionsgleichungen der zweigliedrigen Gruppe p_1, $x_2^2 p_1$ lauten in der aufgelösten Form:

$$\xi_2 = 0, \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2^2} = \frac{1}{x_2} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_2^2} = 0.$$

Die darin vorkommenden Coefficienten verhalten sich für alle im Endlichen gelegenen Punkte x_1, x_2 regulär, nur nicht für die Punkte der Geraden $x_2 = 0$.

Betrachten wir zunächst einen Punkt x_1^0, x_2^0 mit nicht verschwindendem x_2^0. Wir haben $s = 2$, ferner $\varepsilon_0 = 2$, $\varepsilon_1 = 4$, $\nu_0 = 1$, $\nu_1 = 3$, also sind dem Punkte x_1^0, x_2^0 die beiden Zahlen 1, 1 zugeordnet. Alle infinitesimalen Transformationen der Gruppe lassen sich aus den beiden

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \left(x_2 - x_2^0 + \frac{1}{2 x_2^0}(x_2 - x_2^0)^2\right) \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

linear ableiten, unter denen die erste in den $x_i - x_i^0$ von der nullten Ordnung ist, die zweite von der ersten.

Anders in einem Punkte $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2 = 0$.

Einem solchen ordnet die Gruppe die drei Zahlen 1, 0, 1 zu, denn unter ihren infinitesimalen Transformationen giebt es keine von erster Ordnung in den $x_i - \overline{x}_i$, dafür aber eine von zweiter, also von s-ter Ordnung, nämlich: $x_2^2 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}$. —

Ist $x_1^0 \cdots x_n^0$ ein Punkt, für welchen sich die Coefficienten der aufgelösten Definitionsgleichungen regulär verhalten, so enthält die Gruppe nach Theorem 29 sicher infinitesimale Transformationen von nullter, solche von erster, $\cdots$ von $(s-1)$-ter Ordnung in den $x_i - x_i^0$, aber keine von s-ter oder höherer Ordnung. Unser soeben besprochenes Beispiel zeigt nun, dass für einen Punkt $\overline{x}_i$, in welchem sich die bewussten Coefficienten nicht alle regulär verhalten, kein derartiger allgemeiner Satz mehr gilt: die Gruppe kann sehr gut infinitesimale

Transformationen von s-ter Ordnung in den $x_i - \bar{x}_i$ enthalten, vielleicht auch solche von höherer Ordnung; andererseits kann es für einzelne Zahlen $k < s$ vorkommen, dass die Gruppe überhaupt keine infinitesimale Transformation von k-ter Ordnung in den $x_i - \bar{x}_i$ enthält.

Bedeutet $x_1^0 \cdots x_n^0$ einen beliebigen Punkt, in welchem sich alle ξ regulär verhalten, so lassen sich, wie schon gesagt, die infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe nach ihrer Ordnung in den $x_i - x_i^0$ classificiren. Von grosser Wichtigkeit ist es, dass diese Classification erhalten bleibt, wenn an Stelle der x neue Veränderliche $y_1 \cdots y_n$ eingeführt werden. Selbstverständlich muss die betreffende Variabelnänderung in der Umgebung der Stelle $x_1^0 \cdots x_n^0$ folgende Eigenschaften besitzen: es müssen **erstens** $y_1 \cdots y_n$ gewöhnliche Potenzreihen der $x_i - x_i^0$ sein:

$$(2) \qquad y_k = y_k^0 + \sum_1^n {}_i\, a_{ki}(x_i - x_i^0) + \cdots \qquad (k = 1 \cdots n),$$

und es müssen **zweitens** auch $x_1 \cdots x_n$ als gewöhnliche Potenzreihen der $y_k - y_k^0$ darstellbar sein und zwar so, dass jedes x_i für $y_1 = y_1^0, \cdots y_n = y_n^0$ den Werth x_i^0 annimmt. Ist die erste dieser beiden Forderungen erfüllt, so ist es die zweite bekanntlich stets dann, wenn die Determinante $\Sigma \pm a_{11} \cdots a_{nn}$ von Null verschieden ist.

Um nun zu beweisen, dass die besprochene Classification beim Uebergang zu den Veränderlichen $y_1 \cdots y_n$ erhalten bleibt, brauchen wir blos zu zeigen, dass jede infinitesimale Transformation von μ-ter Ordnung in den $x_i - x_i^0$ sich bei Einführung der neuen Veränderlichen y in eine infinitesimale Transformation von der μ-ten Ordnung in den $y_k - y_k^0$ verwandelt. Das aber hat keine Schwierigkeit.

Die allgemeine Form einer infinitesimalen Transformation von der μ-ten Ordnung in den $x_i - x_i^0$ ist:

$$Xf = \sum_1^n {}_j\, (\xi_j^{(\mu)} + \cdots) \frac{\partial f}{\partial x_j};$$

darin bedeuten $\xi_1^{(\mu)} \cdots \xi_n^{(\mu)}$ ganze rationale Functionen von $x_1 - x_1^0, \cdots x_n - x_n^0$, welche homogen von der μ-ten Ordnung sind und nicht sämmtlich verschwinden; die Glieder $(\mu + 1)$-ter und höherer Ordnung sind weggelassen.

Bei Einführung von $y_1 \cdots y_n$ ergiebt sich:

$$Xf = \sum_1^n {}_k\, X y_k \frac{\partial f}{\partial y_k};$$

hier sind die Xy_k zunächst gewöhnliche Potenzreihen in den $x_i - x_i^0$:

$$Xy_k = \sum_1^n {}_j\, a_{kj}\, \xi_j^{(\mu)} + \cdots$$

und beginnen mit Gliedern μ-ter Ordnung. Diese Glieder μ-ter Ordnung verschwinden nicht sämmtlich, denn sonst wäre:

$$\sum_1^n {}_j\, a_{kj}\, \xi_j^{(\mu)} = 0 \qquad (k = 1 \cdots n),$$

was unmöglich ist, weil die Determinante $\Sigma \pm a_{11} \cdots a_{nn}$ von Null verschieden ist und weil $\xi_1^{(\mu)} \cdots \xi_n^{(\mu)}$ nicht sämmtlich verschwinden. Drücken wir nun in $Xy_1 \cdots Xy_n$ die x_i durch die y_i aus, so erhalten wir n gewöhnliche Potenzreihen in den $y_i - y_i^0$. Diese Potenzreihen beginnen ebenfalls mit Gliedern μ-ter Ordnung, welche nicht sämmtlich verschwinden. Man erhält ja die betreffenden Glieder μ-ter Ordnung, wenn man in den n Ausdrücken

$$\sum_1^n {}_j\, a_{kj}\, \xi_j^{(\mu)} \qquad (k = 1 \cdots n)$$

vermöge der Gleichungen

$$y_k = y_k^0 + \sum_1^n {}_i\, a_{ki} (x_i - x_i^0) \qquad (k = 1 \cdots n)$$

die x durch die y ersetzt; da aber die angegebenen n Ausdrücke nicht sämmtlich verschwinden, so verschwinden sie auch nach Einführung der y nicht sämmtlich.

Folglich geht die infinitesimale Transformation Xf bei Einführung der y in eine infinitesimale Transformation über, welche in den $y_i - y_i^0$ von der μ-ten Ordnung ist. Das aber war zu beweisen.

Wir haben somit den

Satz 1. *Führt man in eine infinitesimale Transformation Xf, welche in $x_1 - x_1^0, \cdots x_n - x_n^0$ von der μ-ten Ordnung ist, neue Veränderliche $y_1 \cdots y_n$ ein:*

$$y_k = y_k^0 + \sum_1^n {}_i\, a_{ki} (x_i - x_i^0) + \sum_{ij}^{1 \cdots n} a_{kij} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) + \cdots$$
$$(k = 1 \cdots n)$$

und ist dabei die Determinante $\Sigma \pm a_{11} \cdots a_{nn}$ von Null verschieden, so verwandelt sich Xf in eine infinitesimale Transformation von der μ-ten Ordnung in $y_1 - y_1^0, \cdots y_n - y_n^0$.

Hieraus ergiebt sich sofort der etwas speciellere

Satz 2. *Enthält eine r-gliedrige Gruppe in der Umgebung des Punktes $x_1^0 \cdots x_n^0$ gerade τ_μ solche unabhängige infinitesimale Transformationen von μ-ter Ordnung in den $x_i - x_i^0$, aus welchen sich keine von höherer Ordnung linear ableiten lässt, und werden in diese Gruppe die neuen Veränderlichen*

$$y_k = y_k^0 + \sum_1^n {}_i\, a_{ki}(x_i - x_i^0) + \cdots \qquad (k=1\cdots n)$$

eingeführt, wobei die Determinante $\Sigma \pm a_{11} \cdots a_{nn}$ von Null verschieden ist, so enthält die neue Gruppe, welche man auf diese Weise findet, ihrerseits in der Umgebung des Punktes y_k^0 gerade τ_μ solche unabhängige infinitesimale Transformationen von μ-ter Ordnung in den $y_k - y_k^0$, aus welchen sich keine von höherer Ordnung linear ableiten lässt.

Man sieht also: die Reihe der ganzen Zahlen, welche die ursprüngliche Gruppe dem Punkte $x_1^0 \cdots x_n^0$ zuordnet, ist identisch mit der Reihe von ganzen Zahlen, welche dem Punkte $y_1^0 \cdots y_n^0$ von der neuen Gruppe zugeordnet wird.

§ 53.

Kennt man die Definitionsgleichungen einer r-gliedrigen Gruppe, und hat man dieselben in der früher besprochenen Weise aufgelöst, so kann man, wie wir gesehen haben, die oben definirten Zahlen $\varepsilon_k - v_k$ sofort angeben. Für jeden Punkt $x_1^0 \cdots x_n^0$, in welchem sich die Coefficienten der aufgelösten Definitionsgleichungen regulär verhalten, kennt man damit zugleich die Zahl aller unabhängigen infinitesimalen Transformationen der Gruppe, welche in den $x_i - x_i^0$ von der k-ten Ordnung sind und dabei die Eigenschaft besitzen, dass sich aus ihnen keine infinitesimale Transformation von $(k+1)$-ter oder höherer Ordnung linear ableiten lässt.

Man kann natürlich die betreffenden Zahlen auch für solche Punkte $x_1^0 \cdots x_n^0$ berechnen, in denen sich die Coefficienten der aufgelösten Definitionsgleichungen nicht alle regulär verhalten. Es genügt dazu schon die Kenntniss der Definitionsgleichungen, doch ist es ungleich bequemer, wenn bereits irgend r unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ vorgelegt sind, was wir im Folgenden annehmen werden. Dann verfährt man folgendermassen:

Man bestimmt zunächst, wie viele unabhängige infinitesimale Transformationen von k-ter und höherer Ordnung in den $x_i - x_i^0$ die Gruppe enthält. Zu dem Ende entwickelt man die allgemeine infinitesimale Transformation

$$e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$$

nach Potenzen der $x_i - x_i^0$ und setzt sodann in den n Ausdrücken

$$e_1 \xi_{1i} + \cdots + e_r \xi_{ri} \qquad (i = 1 \cdots n)$$

die Coefficienten aller Glieder nullter, erster, $\cdots (k-1)$-ter Ordnung gleich Null. Auf diese Weise erhält man eine Anzahl von linearen homogenen Gleichungen zwischen $e_1 \cdots e_r$; wie viele unabhängige unter diesen Gleichungen vorhanden sind, entscheidet man leicht durch Berechnung gewisser Determinanten; ergiebt sich, dass $r - \omega_k$ die Anzahl der unabhängigen Gleichungen, so folgt daraus, dass die Gruppe gerade ω_k unabhängige infinitesimale Transformationen von k-ter oder höherer Ordnung in den $x_i - x_i^0$ enthält. Offenbar ist dann $\omega_k - \omega_{k+1}$ die Anzahl der unabhängigen infinitesimalen Transformationen k-ter Ordnung, aus denen sich keine Transformation von höherer Ordnung linear ableiten lässt.

Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, dass die eben angedeuteten Operationen auch bei jedem Punkte $x_1^0 \cdots x_n^0$ anwendbar bleiben, für den sich die Coefficienten der aufgelösten Definitionsgleichungen regulär verhalten.

Etwas genauer wollen wir uns mit denjenigen infinitesimalen Transformationen $\Sigma e_j \cdot X_j f$ der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ beschäftigen, deren Reihenentwickelungen nach den $x_i - x_i^0$ nur Glieder erster und höherer, aber kein Glied nullter Ordnung enthalten. Wir werden zunächst untersuchen, wieviele unabhängige infinitesimale Transformationen von dieser Beschaffenheit es giebt und dann zeigen, wie man dieselben in einfacher Weise aufstellt. Unter $x_1^0 \cdots x_n^0$ verstehen wir dabei einen ganz beliebigen aber bestimmten Punkt.

Die in Rede stehenden infinitesimalen Transformationen sind offenbar dadurch charakterisirt, dass sie selbst, sowie die von ihnen erzeugte eingliedrige Gruppe den Punkt $x_i = x_i^0$ in Ruhe lassen (vgl. Kap. 7, S. 134) oder, was dasselbe ist, dadurch, dass sie unter den infinitesimalen Transformationen $\Sigma e_j \cdot X_j f$ die einzigen sind, welche dem Punkte $x_i = x_i^0$ keine Richtung zuordnen.

Analytisch wird die allgemeinste Transformation $\Sigma e_j \cdot X_j f$ von der betreffenden Beschaffenheit durch die Gleichungen:

$$e_1 \cdot \xi_{1i}(x_1^0 \cdots x_n^0) + \cdots + e_r \cdot \xi_{ri}(x_1^0 \cdots x_n^0) = 0 \qquad (i = 1 \cdots n)$$

bestimmt. Verschwinden nun in der Matrix

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \xi_{11}(x^0) & \cdot & \cdot & \xi_{1n}(x^0) \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x^0) & \cdot & \cdot & \xi_{rn}(x^0) \end{vmatrix}$$

alle $(h+1)$-reihigen Determinanten, nicht aber alle h-reihigen, so lassen sich h von den Grössen $e_1 \cdots e_r$ als lineare homogene Functionen der $r - h$ übrigen darstellen, welche vollkommen willkürlich bleiben. Demnach erhalten wir das folgende einfache aber wichtige Resultat:

Satz 3. *Verschwinden in der Matrix*

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{rn}(x) \end{vmatrix}$$

für $x_1 = x_1^0, \cdots x_n = x_n^0$ *alle* $(h+1)$-*reihigen Determinanten, nicht aber alle* h-*reihigen, so enthält die* r-*gliedrige Gruppe*

$$X_k f = \sum_1^n {}^i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

gerade $r - h$ *unabhängige infinitesimale Transformationen, welche, nach Potenzen von* $x_1 - x_1^0, \cdots x_n - x_n^0$ *entwickelt, kein Glied nullter Ordnung enthalten, welche mit andern Worten den Punkt* $x_1^0 \cdots x_n^0$ *in Ruhe lassen.*

Aus dem Gesagten ergiebt sich zugleich noch der folgende

Satz 4. *Wenn man alle* $(h+1)$-*reihigen Determinanten der Matrix*

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{rn}(x) \end{vmatrix}$$

gleich Null setzt, so bestimmen die hervorgehenden Gleichungen den Ort aller Punkte $x_1 \cdots x_n$, *welche wenigstens* $r - h$ *unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe* $X_1 f \cdots X_r f$ *gestatten; diejenigen unter den gefundenen Punkten, welche nicht auch alle* h-*reihigen Determinanten der Matrix zum Verschwinden bringen, gestatten gerade* $r - h$ *unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe.*

Wir haben früher (S. 135) hervorgehoben, dass die infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ einem bestimmten Punkte $x_1 \cdots x_n$ gerade h unabhängige Richtungen zuordnen, wenn alle Determinanten $(h+1)$-ten Grades der Matrix (3) verschwinden, während dagegen nicht alle Determinanten h-ten Grades dies thun. Wir ersehen daraus, dass die gefundenen Resultate sich auch folgendermassen ausdrücken lassen:

Satz 5. *Enthält eine* r-*gliedrige Gruppe* $X_1 f \cdots X_r f$ *des Raumes* $x_1 \cdots x_n$ *gerade* $r - h$ *unabhängige infinitesimale Transformationen, welche einen bestimmten Punkt* $x_1^0 \cdots x_n^0$ *in Ruhe lassen, so ordnen die infinitesimalen Transformationen der Gruppe diesem Punkte gerade* h *unabhängige Richtungen zu.*

Jetzt gehen wir einen Schritt weiter, zur wirklichen Aufstellung aller infinitesimalen Transformationen $\Sigma e_j \cdot X_j f$, welche einen bestimmten Punkt $x_1^0 \cdots x_n^0$ in Ruhe lassen.

Wir wollen annehmen, dass in der Matrix (3) alle $(h+1)$-reihigen, nicht aber alle h-reihigen Determinanten verschwinden und dass insbesondere in der kleineren Matrix

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x^0) & \cdot & \cdot & \xi_{1n}(x^0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{h1}(x^0) & \cdot & \cdot & \xi_{hn}(x^0) \end{vmatrix}$$

nicht alle h-reihigen Determinanten gleich Null sind.

Unter diesen Voraussetzungen giebt es offenbar keine infinitesimale Transformation von der Form $e_1 \cdot X_1 f + \cdots + e_h \cdot X_h f$, welche den Punkt $x_1^0 \cdots x_n^0$ in Ruhe lässt; dagegen thun das die $r-h$ infinitesimalen Transformationen

$$X_{h+k} f + \lambda_{k1} \cdot X_1 f + \cdots + \lambda_{kh} \cdot X_h f \qquad (k=1 \cdots r-h),$$

sobald man die Constanten λ in geeigneter Weise wählt, was augenscheinlich nur in einer einzigen Weise möglich ist. Hiermit sind $r-h$ unabhängige infinitesimale Transformationen gefunden, deren Reihenentwickelungen keine Glieder nullter Ordnung enthalten; aus diesen $r-h$ lässt sich natürlich jede andere Transformation von derselben Beschaffenheit linear ableiten. Hieraus folgt, dass es unter den infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe, welche in den $x_i - x_i^0$ von nullter Ordnung sind, nur h unabhängige giebt, aus denen sich keine Transformation von erster oder höherer Ordnung linear ableiten lässt; offenbar sind $X_1 f \cdots X_h f$ Transformationen nullter Ordnung von dieser Beschaffenheit; dieselben ordnen daher dem Punkt $x_1^0 \cdots x_n^0$ gerade h unabhängige Richtungen zu.

Wir haben hiermit den

Satz 6. *Sind die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen*

$$X_k f = \sum_1^n {}_i \, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k=1 \cdots r)$$

einer r-gliedrigen Gruppe des Raumes $x_1 \cdots x_n$ so beschaffen, dass für $x_1 = x_1^0, \cdots x_n = x_n^0$ alle $(h+1)$-reihigen, nicht aber alle h-reihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{rn}(x) \end{vmatrix}$$

verschwinden und werden insbesondere nicht alle h-reihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{h1}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{hn}(x) \end{vmatrix}$$

für $x_i = x_i^0$ *gleich Null, so sind zunächst alle infinitesimalen Transformationen*

$$e_1 \cdot X_1 f + \cdots + e_h \cdot X_h f$$

von der nullten Ordnung in den $x_i - x_i^0$ *und ordnen dem Punkte* $x_1^0 \cdots x_n^0$ *gerade h unabhängige Richtungen zu, ferner kann man die* $h(r-h)$ *Constanten* λ_{kj} *stets, aber nur in einer einzigen Weise so wählen, dass in den* $r-h$ *unabhängigen infinitesimalen Transformationen*

$$X_{h+k} f + \lambda_{k1} \cdot X_1 f + \cdots + \lambda_{kh} \cdot X_h f \qquad (k=1 \cdots r-h)$$

alle Glieder von der nullten Ordnung in den $x_i - x_i^0$ *fehlen; aus diesen* $r-h$ *infinitesimalen Transformationen lassen sich alsdann alle infinitesimalen Transformationen der Gruppe* $X_1 f \cdots X_r f$ *linear ableiten, welche in den* $x_i - x_i^0$ *von der ersten oder von höherer Ordnung sind.*

Es ist für das Folgende nützlich, diesen Satz in einer etwas specielleren Form auszusprechen.

Wir wollen annehmen, dass alle $(q+1)$-reihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{rn}(x) \end{vmatrix} \tag{4}$$

identisch verschwinden, dass dies aber nicht mit allen q-reihigen der Fall ist und dass insbesondere nicht alle q-reihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{q1}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{qn}(x) \end{vmatrix} \tag{5}$$

identisch Null sind.

Unter diesen Voraussetzungen ist es unmöglich, q nicht sämmtlich verschwindende Functionen $\chi_1(x) \cdots \chi_q(x)$ anzugeben, welche den Ausdruck $\chi_1(x) \cdot X_1 f + \cdots + \chi_q(x) \cdot X_q f$ identisch gleich Null machen. Dagegen lassen sich $q(r-q)$ Functionen $\varphi_{jk}(x)$ so bestimmen, dass die $r-q$ Gleichungen

$$X_{q+j} f = \varphi_{j1}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_1 f + \cdots + \varphi_{jq}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_q f$$
$$(j=1 \cdots r-q)$$

identisch befriedigt werden; jedes φ_{jk} wird nämlich gleich einem Quotienten, dessen Zähler eine gewisse q-reihige Determinante der Matrix

(4) ist, und dessen Nenner eine nicht identisch verschwindende q-reihige Determinante der Matrix (5) bildet (vgl. die ähnlichen Entwickelungen Kap. 7, S. 121).

Es sei nun $x_1^0 \cdots x_n^0$ ein Punkt von allgemeiner Lage, genauer gesagt ein Punkt, für den nicht alle q-reihigen Determinanten von (5) verschwinden. Dann sind die Ausdrücke $\varphi_{jk}(x^0)$ endliche bestimmte Constanten, und es gehören dabei die $r - q$ infinitesimalen Transformationen

$$X_{q+j}f - \varphi_{j1}(x^0) \cdot X_1 f - \cdots - \varphi_{jq}(x^0) \cdot X_q f \quad (j=1\cdots r-q)$$

unserer Gruppe an. Diese infinitesimalen Transformationen sind offenbar von einander unabhängig und besitzen überdies die Eigenschaft, dass in ihren Reihenentwickelungen nach den $x_i - x_i^0$ alle Glieder nullter Ordnung fehlen. Nach Satz 3, S. 200 muss sich daher jede infinitesimale Transformation unserer Gruppe, deren Reihenentwickelung nach den $x_i - x_i^0$ nur Glieder erster und höherer Ordnung enthält, aus den eben gefundenen $r - q$ infinitesimalen Transformationen linear ableiten lassen.

Es gilt also der

Satz 7. *Sind von den infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ einer r-gliedrigen Gruppe die ersten q durch keine lineare Relation von der Form*

$$\chi_1(x_1 \cdots x_n) \cdot X_1 f + \cdots + \chi_q(x_1 \cdots x_n) \cdot X_q f = 0$$

verknüpft, während $X_{q+1}f \cdots X_r f$ sich linear durch $X_1 f \cdots X_q f$ ausdrücken lassen:

$$X_{q+j}f \equiv \sum_1^q {}^k \, \varphi_{jk}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_k f \quad (j=1\cdots r-q),$$

so enthält die Gruppe in der Umgebung jedes Punktes $x_1^0 \cdots x_n^0$ von allgemeiner Lage gerade q unabhängige infinitesimale Transformationen, zum Beispiel $X_1 f \cdots X_q f$, welche in den $x_i - x_i^0$ von der nullten Ordnung sind, und aus denen sich keine infinitesimale Transformation von erster oder höherer Ordnung in den $x_i - x_i^0$ linear ableiten lässt. Dagegen enthält die Gruppe in der Umgebung von x_i^0 gerade $r - q$ unabhängige infinitesimale Transformationen, etwa

$$X_{q+j}f - \sum_1^q {}^k \, \varphi_{jk}(x_1^0 \cdots x_n^0) \cdot X_k f \quad (j=1\cdots r-q),$$

welche keine Glieder von nullter Ordnung in den $x_i - x_i^0$ enthalten und welche daher den Punkt $x_1^0 \cdots x_n^0$ in Ruhe lassen.

Was in diesem Satze unter einem Punkte von allgemeiner Lage zu verstehen ist, haben wir oben genauer angegeben.

Kapitel 12.

Bestimmung aller Untergruppen einer r-gliedrigen Gruppe.

Sind alle Transformationen einer ϱ-gliedrigen Gruppe in einer Gruppe mit mehr als ϱ, etwa mit r Parametern enthalten, so heisst die ϱ-gliedrige Gruppe eine *Untergruppe* der r-gliedrigen.

Ein Beispiel von Untergruppen einer r-gliedrigen Gruppe geben uns schon die Entwickelungen des Kapitels 4; dieselben zeigen nämlich, das jede r-gliedrige Gruppe ∞^{r-1} eingliedrige Untergruppen enthält. In dem gegenwärtigen Kapitel werden wir zunächst einige allerdings specielle Methoden entwickeln, welche Untergruppen einer vorgelegten Gruppe aufzufinden gestatten. Sodann legen wir uns die Frage vor, wie zu verfahren ist, um alle Untergruppen einer vorgelegten Gruppe zu bestimmen. Wir erhalten dabei das wichtige Resultat, dass die Bestimmung aller continuirlichen Untergruppen einer r-gliedrigen Gruppe stets durch Auflösung von *algebraischen* Gleichungen geleistet werden kann.

§ 54.

Im vorigen Kapitel dachten wir uns die infinitesimalen Transformationen einer vorgelegten r-gliedrigen Gruppe nach Potenzen der $x_i - x_i^0$ entwickelt, unter x_i^0 ein Werthsystem verstanden, für welches sich alle diese Transformationen regulär verhalten. Für die infinitesimalen Transformationen der Gruppe ergab sich auf diese Weise eine Eintheilung, welche uns jetzt auf die Existenz gewisser Untergruppen führen wird. Allerdings finden die Betrachtungen dieses Paragraphen nur auf solche Gruppen Anwendung, welche jedenfalls für gewisse Punkte x_i^0 nicht blos infinitesimale Transformationen von nullter, sondern auch solche von höherer Ordnung in den $x_i - x_i^0$ enthalten.

In der Umgebung des Punktes $x_1^0 \cdots x_n^0$ enthalte eine r-gliedrige Gruppe des Raumes $x_1 \cdots x_n$ gerade ω_k unabhängige infinitesimale Transformationen

$$Y_1 f \cdots Y_{\omega_k} f,$$

deren Reihenentwickelungen nach den $x_i - x_i^0$ mit Gliedern k-ter oder höherer Ordnung anfangen.

Wir wollen annehmen, dass $k \geqq 1$ ist. Combiniren wir alsdann zwei infinitesimale Transformationen $Y_i f$ und $Y_j f$ mit einander, so erhalten wir (Theorem 30, S. 193) eine infinitesimale Transformation $(Y_i\, Y_j)$ von $(2\,k - 1)$-ter oder höherer Ordnung, also mindestens von der Ordnung k. Demnach muss sich $(Y_i Y_j)$ aus den Yf linear ableiten lassen:

$$(Y_i Y_j) = \sum_1^{\omega_k} {}^\nu \, d_{ij\nu} \cdot Y_\nu f$$

oder, was dasselbe ist: $Y_1 f \cdots Y_{\omega_k} f$ erzeugen eine ω_k-gliedrige Untergruppe der vorgelegten Gruppe. Es gilt also der

Satz 1. *Enthält eine r-gliedrige Gruppe des Raumes $x_1 \cdots x_n$ in der Umgebung von $x_1^0 \cdots x_n^0$ gerade ω_k unabhängige infinitesimale Transformationen von k-ter oder höherer Ordnung und ist dabei $k \geqq 1$, so erzeugen diese ω_k infinitesimalen Transformationen eine ω_k-gliedrige Untergruppe der betreffenden Gruppe.*

Ist der Punkt $x_1^0 \cdots x_n^0$ so beschaffen, dass sich für ihn die Coefficienten der aufgelösten Definitionsgleichungen der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ regulär verhalten, so hat ω_1 den Werth

$$(\varepsilon_k - \nu_k) + \cdots (\varepsilon_{s-1} - \nu_{s-1})$$

(vgl. Kapitel 11, S. 192).

Besonders wichtig ist der Fall $k = 1$, bei diesem wollen wir daher noch etwas verweilen.

Sind

$$X_j f = \sum_1^n {}^i \, \xi_{ji}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (j = 1 \cdots r)$$

unabhängige infinitesimale Transformationen der r-gliedrigen Gruppe, so findet man nach Kapitel 11, S. 199 die Zahl ω_1 durch Untersuchung der Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x^0) & \cdot & \cdot & \xi_{1n}(x^0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x^0) & \cdot & \cdot & \xi_{rn}(x^0) \end{vmatrix}$$

Wir erinnern uns ferner (vgl. S. 199), dass alle infinitesimalen Transformationen der Gruppe, welche nur Glieder von erster oder höherer Ordnung in den $x_i - x_i^0$ enthalten, dadurch charakterisirt sind, dass sie den Punkt $x_1^0 \cdots x_n^0$ in Ruhe lassen. Ist daher $k = 1$, so können wir den obigen Satz auch so aussprechen:

Satz 2. *Giebt es in einer Gruppe des Raumes $x_1 \cdots x_n$ gerade ω_1 unabhängige infinitesimale Transformationen, welche einen bestimmten Punkt $x_1^0 \cdots x_n^0$ invariant lassen, so erzeugen dieselben eine ω_1-gliedrige Untergruppe der betreffenden Gruppe.*

Es ist klar, dass es in den Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ nicht mehr als n unabhängige infinitesimale Transformationen giebt, welche in den $x_i - x_i^0$ von der nullten Ordnung sind, und aus denen sich keine infinitesimale Transformation von erster oder höherer Ordnung linear ableiten lässt. Wir schliessen daraus, dass jede r-gliedrige Gruppe in $n < r$ Veränderlichen mindestens $r - n$ unabhängige infinitesimale Transformationen enthält, die in den $x_i - x_i^0$ von der ersten oder von höherer Ordnung sind. Also haben wir den

Satz 3. *Jede r-gliedrige Gruppe in $n < r$ Veränderlichen enthält Untergruppen mit mindestens $r - n$ Parametern.*

Aus dem Satze 7 des vorigen Kapitels (S. 203) erhalten wir schliesslich noch für Punkte $x_1^0 \cdots x_n^0$ von allgemeiner Lage den

Satz 4. *Sind die infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_q f \cdots X_r f$ einer r-gliedrigen Gruppe des Raumes $x_1 \cdots x_n$ so beschaffen, dass $X_1 f \cdots X_q f$ durch keine lineare Relation von der Form*

$$\chi_1(x_1 \cdots x_n) \cdot X_1 f + \cdots + \chi_q(x_1 \cdots x_n) \cdot X_q f \equiv 0$$

verknüpft sind, während dagegen $X_{q+1} f \cdots X_r f$ sich linear durch $X_1 f \cdots X_q f$ ausdrücken lassen:

$$X_{q+j} f \equiv \varphi_{j1}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_1 f + \cdots + \varphi_{jq}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_q f$$
$$(j = 1 \cdots r - q),$$

ist ausserdem $x_1^0 \cdots x_n^0$ ein Punkt von allgemeiner Lage, so sind die $r - q$ unabhängigen infinitesimalen Transformationen

$$X_{q+j} f - \sum_1^q {}^{\mu}\, \varphi_{j\mu}(x_1^0 \cdots x_n^0) \cdot X_\mu f \qquad (j = 1 \cdots r - q)$$

alle von der ersten oder von höherer Ordnung in den $x_i - x_i^0$ und erzeugen eine $(r - q)$-gliedrige Untergruppe, deren Transformationen dadurch charakterisirt sind, dass sie den Punkt $x_1^0 \cdots x_n^0$ invariant lassen.

Unter einem Punkte von allgemeiner Lage verstehen wir hier wie auf S. 203 einen solchen, welcher nicht alle q-reihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{q1}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{qn}(x) \end{vmatrix}$$

zum Verschwinden bringt.

§ 55.

Wir wollen hier gleich noch auf eine andere etwas allgemeinere Methode aufmerksam machen, welche oft in sehr einfacher Weise zur Bestimmung gewisser Untergruppen einer gegebenen Gruppe führt. Diese Methode beruht auf dem folgenden

Theorem 31. *Enthält die r-gliedrige Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ solche infinitesimale Transformationen, bei denen ein vorgelegtes Gleichungsystem*

$$\Omega_i (x_1 \cdots x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2 \cdots)$$

invariant bleibt, und lässt sich jede in der Gruppe enthaltene infinitesimale Transformation von dieser Beschaffenheit aus den m unabhängigen infinitesimalen Transformationen

$$Y_k f = \sum_1^r h_{k\nu} \cdot X_\nu f \qquad (k = 1 \cdots m)$$

linear ableiten, so erzeugen $Y_1 f \cdots Y_m f$ eine m-gliedrige Untergruppe der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$.

Die Richtigkeit dieses Theorems folgt fast unmittelbar aus dem Satze 5 in Kapitel 7, S. 118. Nach demselben gestattet nämlich das System $\Omega_i = 0$ auch alle infinitesimalen Transformationen von der Form $(Y_k Y_j)$. Da die $(Y_k Y_j)$ ebenfalls der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ angehören, kann unter den gemachten Voraussetzungen keine dieser infinitesimalen Transformationen von $Y_1 f \cdots Y_m f$ unabhängig sein, es müssen vielmehr Relationen von der Form

$$(Y_k Y_j) = \sum_1^m h_{kj\mu} \cdot Y_\mu f$$

bestehen, das heisst die $Y_k f$ erzeugen wirklich eine Gruppe.

Selbstverständlich können wir das obige Theorem auch folgendermassen aussprechen:

Satz 5. *Giebt es unter den infinitesimalen Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ gerade m unabhängige, bei denen eine gewisse Mannigfaltigkeit des Raumes $x_1 \cdots x_n$ invariant bleibt, so erzeugen diese m infinitesimalen Transformationen eine m-gliedrige Untergruppe der r-gliedrigen.*

Der einfachste Fall ist der, dass das invariante Gleichungensystem einen invarianten Punkt darstellt, dass es also die Form hat:

$$x_1 - x_1^0 = 0, \cdots x_n - x_n^0 = 0.$$

Die Untergruppe, welche diesem Gleichungensysteme entspricht, wird offenbar von allen den infinitesimalen Transformationen erzeugt, deren Reihenentwickelungen nach den $x_i - x_i^0$ mit Gliedern erster oder höherer Ordnung anfangen. Wir kommen also hier auf eine der Untergruppen, welche wir schon im vorigen § gefunden haben.

Als zweites Beispiel diene eine Untergruppe der achtgliedrigen allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene. Die Gleichung eines nicht ausgearteten Kegelschnitts gestattet gerade drei unabhängige infinitesimale projective Transformationen der Ebene; diese drei infinitesimalen Transformationen erzeugen daher eine dreigliedrige Untergruppe der allgemeinen projectiven Gruppe.

Endlich noch ein Beispiel, hergenommen von der zehngliedrigen Gruppe aller conformen Punkttransformationen des R_3. Es giebt in dieser Gruppe gerade sechs unabhängige infinitesimale Transformationen, die eine beliebig gewählte Kugel invariant lassen. Diese Transformationen erzeugen eine sechsgliedrige Untergruppe der zehngliedrigen Gruppe.

Das Theorem 31 ist nur ein besonderer Fall des folgenden allgemeineren:

Theorem 32. *Ist in den Veränderlichen* $x_1 \cdots x_n$ *irgend eine Gruppe vorgelegt, endlich oder unendlich, continuirlich oder nicht continuirlich, so bildet der Inbegriff aller darin enthaltenen Transformationen, welche irgend ein Gleichungensystem in* $x_1 \cdots x_n$ *invariant lassen, ebenfalls eine Gruppe.*

Der Beweis dieses Theorems ist sehr einfach. Irgend zwei Transformationen der Gruppe, welche das Gleichungensystem invariant lassen, geben nach einander ausgeführt eine Transformation, welche wiederum der Gruppe angehört und gleichzeitig das Gleichungensystem invariant lässt. Damit ist der Beweis erbracht, dass der im Theoreme definirte Inbegriff von Transformationen wirklich eine Gruppe bildet.

Statt eines Systems von Gleichungen kann natürlich auch ein System von Differentialgleichungen gesetzt werden, auch dann noch würde das Theorem in Geltung bleiben.

Ist übrigens die vorgelegte Gruppe continuirlich, so kann die Untergruppe, welche durch das invariante Gleichungensystem definirt wird, sehr gut discontinuirlich sein.

§ 56.

Nachdem wir bisher einige Methoden kennen gelernt haben, um einzelne Untergruppen einer vorgelegten Gruppe zu ermitteln, wenden wir uns jetzt zu dem allgemeineren Problem, *alle* continuirlichen Untergruppen einer gegebenen r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ zu bestimmen.

Irgend m unabhängige infinitesimale Transformationen:

$$Y_\mu f = \sum_1^r {}_\varrho\, h_{\mu\varrho} \cdot X_\varrho f \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

unserer Gruppe erzeugen dann und nur dann eine m-gliedrige Untergruppe, wenn alle

$$(Y_\mu\, Y_\nu) = \sum_{\varrho\,\sigma}^{1 \cdots r} h_{\mu\varrho} h_{\nu\sigma} \cdot (X_\varrho\, X_\sigma)$$

sich durch $Y_1 f \cdots Y_m f$ allein ausdrücken. Führen wir hier die Werthe

$$(X_\varrho\, X_\sigma) = \sum_1^r {}_\tau\, c_{\varrho\sigma\tau} \cdot X_\tau f$$

ein, so ergiebt sich

$$(Y_\mu Y_\nu) = \sum_{\varrho\sigma\tau}^{1\cdots r} h_{\mu\varrho} h_{\nu\sigma} c_{\varrho\sigma\tau} \cdot X_\tau f$$

und es wird verlangt, dass diese Gleichungen die Form

$$(Y_\mu Y_\nu) = \sum_1^m {}_\pi\, l_{\mu\nu\pi} \cdot Y_\pi f = \sum_1^r {}_\tau \sum_1^m {}_\pi\, l_{\mu\nu\pi} h_{\pi\tau} \cdot X_\tau f$$

annehmen. Hierzu ist nothwendig und hinreichend, dass die Gleichungen

$$(1) \qquad \sum_{\varrho\sigma}^{1\cdots r} h_{\mu\varrho} h_{\nu\sigma} c_{\varrho\sigma\tau} = \sum_1^m {}_\pi\, l_{\mu\nu\pi} h_{\pi\tau}$$

$$(\mu,\ \nu = 1 \cdots m;\ \tau = 1 \cdots r)$$

befriedigt werden können; soll dies möglich sein, so müssen die sämmtlichen $(m+1)$-reihigen Determinanten der Matricen

$$(2) \qquad \left|\begin{array}{ccc} \sum\limits_{\varrho\sigma}^{1\cdots r} h_{\mu\varrho} h_{\nu\sigma} c_{\varrho\sigma 1} & h_{11} \cdot & h_{m1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum\limits_{\varrho\sigma}^{1\cdots r} h_{\mu\varrho} h_{\nu\sigma} c_{\varrho\sigma r} & h_{1r} \cdot & h_{mr} \end{array}\right|$$

verschwinden.

Damit haben wir eine Reihe algebraischer Gleichungen zur Bestimmung der mr Unbekannten $h_{\pi\varrho}$. Weil aber $Y_1 f \cdots Y_m f$ unabhängige infinitesimale Transformationen sein sollen, ist von vornherein jedes Werthsystem $h_{\pi\varrho}$ auszuschliessen, welches alle m-reihigen Determinanten der Matrix

$$\left|\begin{array}{ccc} h_{11} & \cdot\ \cdot & h_{m1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ h_{1r} & \cdot\ \cdot & h_{mr} \end{array}\right|$$

zum Verschwinden bringt.

Sind die $h_{\pi\varrho}$ so bestimmt, dass sie alle diese Bedingungen erfüllen, so reduciren sich die Gleichungen (1) für jedes Paar von Zahlen μ, ν auf gerade m Gleichungen, welche die unbekannten Constanten $l_{\mu\nu 1} \cdots l_{\mu\nu m}$ vollständig bestimmen. Jedes Lösungensystem $h_{\pi\varrho}$ liefert daher eine m-gliedrige Untergruppe und es ist klar, dass man auf diese Weise alle m-gliedrigen Untergruppen findet.

Wir haben hiermit eine allgemeine Methode zur Bestimmung aller Untergruppen einer vorgelegten r-gliedrigen Gruppe; praktisch anwendbar ist diese Methode allerdings im Allgemeinen nur, wenn die Zahl r nicht zu gross ist; sie zeigt aber, dass das Problem alle diese Untergruppen zu bestimmen nur algebraische Operationen erfordert, was an und für sich schon ein sehr wichtiges Resultat ist.

Theorem 33. *Die Bestimmung aller continuirlichen Untergruppen einer vorgelegten r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ erfordert nur algebraische Operationen; die betreffenden Operationen sind durch die Constanten c_{iks} in den Relationen*

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} \cdot X_s f \qquad (i, k = 1 \cdots r)$$

*vollständig bestimmt.**)

In speciellen Fällen wird oft die Bestimmung aller Untergruppen einer vorgelegten Gruppe dadurch erleichtert, dass man von vornherein gewisse Untergruppen und überhaupt gewisse Eigenschaften der betreffenden Gruppe kennt; eine Erleichterung ist es natürlich auch, wenn man schon für eine Untergruppe der vorgelegten Gruppe das entsprechende Problem erledigt hat. Uebrigens werden wir später sehen, dass es eigentlich nicht darauf ankommt, wirklich *alle* Untergruppen aufzustellen, dass es vielmehr genügt, gewisse von diesen Untergruppen anzugeben (vgl. die Untersuchungen über Typen von Untergruppen, Kap. 23).

§ 57.

Die m unabhängigen infinitesimalen Transformationen

$$Y_\mu f = \sum_1^r {}_k\, h_{\mu k} \cdot X_k f \qquad (\mu = 1 \cdots m)$$

mögen eine m-gliedrige Untergruppe der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ erzeugen. Die allgemeine infinitesimale Transformation dieser Untergruppe ist alsdann:

$$\sum_1^m {}_\mu\, \alpha_\mu \cdot Y_\mu f = \sum_1^m {}_\mu \sum_1^r {}_k\, \alpha_\mu h_{\mu k} \cdot X_k f,$$

wo die α_μ willkürliche Parameter bedeuten.

Alle infinitesimalen Transformationen $e_1 \cdot X_1 f + \cdots + e_r \cdot X_r f$ der r-gliedrigen Gruppe, welche der m-gliedrigen Untergruppe $Y_1 f \cdots Y_m f$ angehören, werden infolgedessen durch die Gleichungen

$$e_k = \sum_1^m {}_\mu\, \alpha_\mu h_{\mu k} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

definirt. Denken wir uns hieraus die m willkürlichen Parameter α_μ weggeschafft, so erhalten wir gerade $r - m$ unabhängige lineare homogene Gleichungen zwischen $e_1 \cdots e_r$, also können wir sagen:

---

*) Lie, Archiv for Mathematik og Naturv., Bd. 1, Christiania 1876

Satz 6. *Ist $e_1 \cdot X_1 f + \cdots + e_r \cdot X_r f$ die allgemeine infinitesimale Transformation einer r-gliedrigen Gruppe, so lassen sich die infinitesimalen Transformationen einer jeden m-gliedrigen Untergruppe dieser Gruppe durch $r - m$ unabhängige lineare homogene Relationen zwischen $e_1 \cdots e_r$ definiren.*

Diejenigen infinitesimalen Transformationen, welche zwei verschiedenen Untergruppen der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ gemeinsam sind, erzeugen ihrerseits eine Untergruppe; als die gemeinsamen infinitesimalen Transformationen zweier Gruppen erzeugen sie nämlich nach Kap. 9, Satz 2, S. 159 eine Gruppe, welche natürlich in $X_1 f \cdots X_r f$ als Untergruppe enthalten ist.

Nehmen wir nun an, dass die eine Untergruppe m-gliedrig ist, die andere μ-gliedrig, so werden die ihnen gemeinsamen infinitesimalen Transformationen durch $r - m + r - \mu$ lineare homogene Gleichungen zwischen den e definirt, Gleichungen, die allerdings nicht von einander unabhängig zu sein brauchen.

Wir schliessen daraus, dass es unter den gemeinsamen infinitesimalen Transformationen wenigstens $r - (2r - m - \mu) = m + \mu - r$ unabhängige giebt. Also haben wir den Satz:

Satz 7. *Enthält eine r-gliedrige Gruppe zwei Untergruppen mit bezüglich m und μ Parametern, so haben dieselben wenigstens $m + \mu - r$ unabhängige infinitesimale Transformationen gemein. Diejenigen infinitesimalen Transformationen der r-gliedrigen Gruppe, welche überhaupt beiden Untergruppen gemeinsam sind, erzeugen ihrerseits eine Untergruppe.*

Dieser Satz lässt sich offenbar verallgemeinern:

Werden überhaupt unter den infinitesimalen Transformationen $e_1 \cdot X_1 f + \cdots + e_r \cdot X_r f$ einer r-gliedrigen Gruppe zwei *Schaaren* ausgeschieden, die eine durch $r - m$ lineare homogene Gleichungen zwischen den e, die andere durch $r - \mu$ solche Gleichungen, so giebt es mindestens $m + \mu - r$ unabhängige infinitesimale Transformationen, welche beiden Schaaren gemeinsam sind.

Kapitel 13.

Transitivität, Invarianten, Primitivität.

Die Begriffe Transitivität und Primitivität, welche in der Substitutionentheorie eine so grosse Rolle spielen, sollen hier auf endliche continuirliche Transformationsgruppen ausgedehnt werden. Im Vorbeigehen sei erwähnt, dass sich diese Begriffe überhaupt auf alle Gruppen ausdehnen lassen, auf die endlichen sowohl als auf die unendlichen, auf die continuirlichen so gut wie auf die nichtcontinuirlichen.*)

§ 58.

Eine endliche continuirliche Gruppe in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ heisst *transitiv*, wenn es im Raume $(x_1 \cdots x_n)$ ein n-fach ausgedehntes Gebiet giebt, innerhalb dessen jeder Punkt durch mindestens eine Transformation der Gruppe in jeden beliebigen andern übergeführt werden kann. Jede Gruppe, welche nicht transitiv ist, heisst *intransitiv*.

Nach dieser Definition ist also eine r-gliedrige Gruppe:

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \qquad (i=1 \cdots n)$$

transitiv, wenn man im Allgemeinen zu jedem Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$, $x_1' \cdots x_n'$ wenigstens ein solches Werthsystem $a_1 \cdots a_r$ angeben kann, dass die Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ durch die betreffenden Werthe der x, a, x' befriedigt werden. Mit andern Worten: *Die Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ einer transitiven Gruppe lassen sich nach n von den r Parametern $a_1 \cdots a_r$ auflösen. Ist dagegen eine solche Auflösung nicht möglich, lassen sich vielmehr aus den Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ der Gruppe Relationen herleiten, welche von den Parametern a frei sind und nur die Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $x_1' \cdots x_n'$ enthalten, so ist die Gruppe nicht transitiv, sie ist intransitiv.*

Wir ersehen hieraus, dass jede transitive Gruppe des Raumes $x_1 \cdots x_n$ mindestens n wesentliche Parameter enthält.

Hat eine *transitive* Gruppe in n Veränderlichen gerade n wesentliche Parameter, so enthält sie im Allgemeinen eine, aber auch nur eine Transformation, welche einen beliebigen Punkt des Raumes in einen andern beliebigen Punkt überführt; insbesondere enthält sie daher ausser der identischen Transformation keine Transformation, welche einen Punkt von allgemeiner Lage invariant lässt. Wir bezeichnen jede Gruppe von dieser Beschaffenheit als *einfach transitiv*.

*) Nachdem Lie 1869 einige Differentialgleichungen mit bekannter continuirlicher Gruppe integrirt hatte, stellte er 1871 und 1872 im Verein mit Klein die Aufgabe, die Begriffe der Substitutionentheorie soweit als möglich auf die Theorie der continuirlichen Transformationsgruppen zu übertragen. Die Erledigung dieses Problems im Einzelnen gab Lie; gestützt auf die hierdurch gewonnenen Vorstellungen und Begriffe entwickelte er bereits 1874 die Grundzüge einer allgemeinen Integrationstheorie solcher vollständiger Systeme, welche bekannte infinitesimale Transformationen gestatten (Verh. d. G. d. W. zu Christiania, 1874). Er führte dieses Problem auf den Fall zurück, dass die bekannten infinitesimalen Transformationen eine endliche continuirliche Gruppe erzeugen, welche imprimitiv ist, da ihre Transformationen die charakteristischen Mannigfaltigkeiten des vollständigen Systems unter einander vertauschen. Er gab u. A. alle Fälle an, in denen sich die Integration des vollständigen Systems durch Quadraturen erledigen lässt.

Das oben gegebene allgemeine Kriterium für die Transitivität bezüglich Intransitivität einer Gruppe ist nur dann praktisch anwendbar, wenn man die endlichen Gleichungen der Gruppe kennt. Sollte sich aber nicht ein Kriterium angeben lassen, zu dessen Anwendung blos die Kenntniss der infinitesimalen Transformationen der Gruppe erforderlich ist? Wir werden zeigen, dass sich in der That ein solches Kriterium angeben lässt. Zugleich werden wir Mittel finden, um zu erkennen, wie viele und welche Relationen zwischen den x und den x' allein bei einer intransitiven Gruppe mit bekannten infinitesimalen Transformationen auftreten.

Es seien r unabhängige infinitesimale Transformationen

$$X_k f = \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k=1\cdots r)$$

vorgelegt, die eine r-gliedrige Gruppe erzeugen. Diese Gruppe, deren endliche Gleichungen wir uns in der Form

$$\Phi_i = -x_i' + x_i + \sum_1^r {}_k\, e_k \cdot \xi_{ki}(x) + \cdots = 0 \qquad (i=1\cdots n)$$

geschrieben denken können, ist nach dem Früheren dann und nur dann transitiv, wenn die n Gleichungen $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_n = 0$ nach n von den r Parametern $e_1 \cdots e_r$ auflösbar sind. Nothwendig und hinreichend für die Transitivität unserer Gruppe ist demnach, dass nicht alle n-reihigen Determinanten der Matrix

$$(1) \qquad \left|\begin{array}{ccc} \frac{\partial \Phi_1}{\partial e_1} & \cdot\ \cdot & \frac{\partial \Phi_n}{\partial e_1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial e_r} & \cdot\ \cdot & \frac{\partial \Phi_n}{\partial e_r} \end{array}\right|$$

identisch verschwinden. Hieraus folgt, dass die Gruppe sicher transitiv ist, wenn die betreffenden Determinanten für $e_1 = 0, \cdots e_r = 0$ nicht sämmtlich verschwinden, wenn also nicht alle n-reihigen Determinanten der Matrix

$$(2) \qquad \left|\begin{array}{ccc} \xi_{11} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \xi_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \xi_{r1} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \xi_{rn} \end{array}\right|$$

identisch null sind.

Damit haben wir eine hinreichende Bedingung für die Transitivität unserer Gruppe gefunden. Wir wollen jetzt untersuchen, was eintritt, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist.

Es seien also alle n-reihigen Determinanten der eben geschriebenen Matrix (2) identisch null; um alle Möglichkeiten auf einmal zu umfassen, wollen wir ausserdem voraussetzen, dass zugleich auch alle $(n-1)$-, $(n-2)$-, $\cdots (q+1)$-reihigen Determinanten der Matrix identisch verschwinden, während nicht alle q-reihigen dies thun.

Unter diesen Umständen verschwinden sicher nicht alle q-reihigen Determinanten der Matrix (1), also können wir schliessen, dass sich aus den n Gleichungen $\Phi_1 = 0, \cdots \Phi_n = 0$ höchstens $n-q$ von $e_1 \cdots e_r$ freie und unter einander unabhängige Gleichungen zwischen den x und x' allein herleiten lassen.

Nun aber reduciren sich unter den gemachten Voraussetzungen die r Gleichungen $X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0$ auf gerade $q < n$ unabhängige, etwa auf: $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$, während $X_{q+1} f \cdots X_r f$ sich folgendermassen ausdrücken:

$$X_{q+\nu} f \equiv \varphi_{\nu 1}(x) \cdot X_1 f + \cdots + \varphi_{\nu q}(x) \cdot X_q f \qquad (\nu = 1 \cdots r-q).$$

Mithin wird:

$$(X_i X_k) = \sum_1^q {}_j \left(c_{ikj} + \sum_1^{r-q} {}_\nu \, c_{ik,\, q+\nu} \, \varphi_{\nu j} \right) X_j f$$

für alle Werthe von i und k, das heisst: die q Gleichungen $X_1 f = 0, \cdots X_q f = 0$ bilden ein q-gliedriges vollständiges System mit $n-q$ unabhängigen Lösungen, welche $\Omega_1(x) \cdots \Omega_{n-q}(x)$ heissen mögen. Diese Lösungen gestatten eine jede infinitesimale Transformation von der Form $e_1 \cdot X_1 f + \cdots + e_r \cdot X_r f$, also jede infinitesimale und in Folge dessen auch jede endliche Transformation unserer r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ (vgl. Kap. 6, S. 98). Analytisch drückt sich das dadurch aus, dass zwischen den Veränderlichen x und x', welche in den Transformationsgleichungen unserer Gruppe vorkommen, die folgenden $n-q$ unabhängigen, von den e freien Relationen bestehen:

$$\Omega_1(x_1' \cdots x_n') = \Omega_1(x_1 \cdots x_n), \cdots \Omega_{n-q}(x_1' \cdots x_n') = \Omega_{n-q}(x_1 \cdots x_n).$$

Oben sahen wir, dass zwischen den x und den x' allein höchstens $n-q$ unabhängige Relationen bestehen können, wir haben demnach hiermit die betreffenden Relationen alle gefunden.

Insbesondere erkennen wir, dass die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ intransitiv ist, sobald alle n-reihigen Determinanten der Matrix (2) identisch verschwinden. Damit ist zugleich bewiesen, dass die vorhin gefundene hinreichende Bedingung für die Transitivität der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ nicht blos hinreichend, sondern auch nothwendig ist.

Wir formuliren die gewonnenen Ergebnisse in Sätzen. An die Spitze stellen wir das

Theorem 34. *Die r-gliedrige Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ des Raumes $x_1 \cdots x_n$ ist transitiv, wenn sich unter den r Gleichungen $X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0$ gerade n von einander unabhängige befinden, im entgegengesetzten Falle ist sie intransitiv.*

Sodann mag ein Satz folgen:

Satz 1. *Aus den endlichen Gleichungen*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

einer r-gliedrigen Gruppe mit den infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ kann man nur dann alle r Parameter $a_1 \cdots a_r$ eliminiren, wenn die Gruppe intransitiv ist; man erhält in diesem Falle zwischen den x und den x' eine gewisse Anzahl von Relationen, welche sich auf die Form bringen lassen:

$$\Omega_k(x_1' \cdots x_n') = \Omega_k(x_1 \cdots x_n) \qquad (k = 1, 2 \cdots);$$

dabei sind $\Omega_1(x)$, $\Omega_2(x) \cdots$ ein System unabhängiger Lösungen des vollständigen Systems, welches durch die r Gleichungen $X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0$ bestimmt ist.

In Kapitel 6, S. 97 sahen wir, dass die Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung $Xf = 0$ die einzigen Invarianten der eingliedrigen Gruppe Xf sind; dementsprechend sind die gemeinsamen Lösungen der Gleichungen $X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0$ die einzigen Invarianten der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$. Wir können daher den Satz aussprechen:

Satz 2. *Ist die r-gliedrige Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ des Raumes $x_1 \cdots x_n$ transitiv, so hat sie keine Invarianten, ist sie intransitiv, so sind die gemeinsamen Lösungen der Gleichungen $X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0$ ihre einzigen Invarianten.*

Schliesslich mag noch der folgende Satz angeführt werden, der eine charakteristische Eigenschaft der Invarianten endlicher *continuirlicher* Gruppen ausspricht:

Satz 3. *Sind $u_1 \cdots u_\varrho$ Invarianten der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$, so ist auch jede Function von $u_1 \cdots u_\varrho$ eine Invariante dieser Gruppe.*

Um den begrifflichen Sinn der gewonnenen analytischen Resultate klarzustellen, wollen wir nunmehr $x_1 \cdots x_n$ als Punktcoordinaten eines Raumes von n Dimensionen deuten.

Das in dem Theorem erwähnte vollständige System sei q-gliedrig und die Zahl q sei kleiner als n, also die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ intransitiv. Die Functionen $\Omega_1(x_1 \cdots x_n) \cdots \Omega_{n-q}(x_1 \cdots x_n)$ seien unabhängige Lösungen des betreffenden vollständigen Systems, mit $C_1 \cdots C_{n-q}$ endlich mögen willkürliche Constanten bezeichnet werden. *Dann zerlegen die Gleichungen*

$$\Omega_1 = C_1, \cdots \Omega_{n-q} = C_{n-q}$$

den ganzen Raum in ∞^{n-q} verschiedene q-fach ausgedehnte Theilgebiete, welche sämmtlich bei der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ invariant bleiben. Jeder Punkt des Raumes gehört einem ganz bestimmten Theilgebiet an und kann von Transformationen der Gruppe nur in Punkte desselben Theilgebietes übergeführt werden. Jedoch werden die Punkte eines Theilgebietes unter sich transitiv transformirt, das heisst, jeder Punkt von allgemeiner Lage in dem betreffenden Theilgebiet kann durch wenigstens eine Transformation der Gruppe in jeden andern solchen Punkt übergeführt werden.

Ist $x_1 \cdots x_n$ ein Punkt von allgemeiner Lage, so bezeichnen wir die Functionen $\Omega_1(x) \cdots \Omega_{n-q}(x)$ auch als Invarianten des Punktes $x_1 \cdots x_n$ gegenüber der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$. Die Zahl dieser Invarianten giebt den Grad der Intransitivität unsrer Gruppe an, denn je grösser die Zahl der Invarianten, um so kleiner die Dimensionenzahl des Theilgebietes, innerhalb dessen der Punkt $x_1 \cdots x_n$ bei den Transformationen der Gruppe bleibt.

Einer transitiven Gruppe gegenüber hat ein Punkt von allgemeiner Lage offenbar keine Invariante.

Das oben ausgesprochene Theorem gestattet zu entscheiden, ob eine vorgelegte Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ transitiv ist oder nicht. Dem darin enthaltenen Kriterium für die Transitivität oder Intransitivität einer Gruppe lassen sich nun verschiedene andere Fassungen geben.

Zunächst können wir mit einer leichten Aenderung der Ausdrucksweise sagen:

Eine r-gliedrige Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ in $x_1 \cdots x_n$ ist dann und nur dann transitiv, wenn es unter ihren infinitesimalen Transformationen gerade n — etwa $X_1 f \cdots X_n f$ — giebt, welche durch keine lineare Relation von der Form

$$\chi_1(x_1 \cdots x_n) \cdot X_1 f + \cdots + \chi_n(x_1 \cdots x_n) \cdot X_n f = 0$$

verknüpft sind, während sich $X_{n+1} f \cdots X_r f$ folgendermassen durch $X_1 f \cdots X_n f$ ausdrücken:

$$X_{n+j} f = \varphi_{j1}(x) \cdot X_1 f + \cdots + \varphi_{jn}(x) \cdot X_n f$$
$$(j = 1 \cdots r - n).$$

Giebt es keine n infinitesimalen Transformationen von dieser Beschaffenheit, so ist die Gruppe intransitiv.

Erinnern wir uns jetzt, dass jede infinitesimale Transformation $X_k f$ jedem Punkte des Raumes $x_1 \cdots x_n$ eine Richtung zuordnet und nehmen wir noch hinzu, was in Kap. 6, S. 102 über die Unabhängigkeit solcher Richtungen gesagt ist, welche durch denselben Punkt gehen; dann können wir das Kriterium für die Transitivität einer Gruppe auch folgendermassen aussprechen:

Satz 4. *Eine Gruppe $X_1f \cdots X_rf$ in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ ist transitiv, wenn sie n infinitesimale Transformationen enthält, welche jedem Punkte von allgemeiner Lage n unabhängige Richtungen zuordnen; enthält die Gruppe keine n infinitesimalen Transformationen von dieser Beschaffenheit, so ist sie intransitiv.*

Andererseits möge an die Auseinandersetzungen in Kap. 11, S. 203 erinnert werden, wo wir uns die infinitesimalen Transformationen der Gruppe in der Umgebung eines Punktes x_i^0 von allgemeiner Lage nach den Potenzen der $x_i - x_i^0$ entwickelt dachten. Da eine transitive Gruppe $X_1f \cdots X_rf$ in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ n infinitesimale Transformationen: $X_1f \cdots X_nf$ enthält, welche durch keine lineare Relation $\chi_1(x) \cdot X_1f + \cdots + \chi_n(x) \cdot X_nf = 0$ verknüpft sind, erhalten wir den folgenden Satz:

Satz 5. *Eine r-gliedrige Gruppe $X_1f \cdots X_rf$ in den n Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ ist transitiv, wenn sie in der Umgebung eines Punktes x_i^0 von allgemeiner Lage gerade n solche unabhängige infinitesimale Transformationen von nullter Ordnung in den $x_i - x_i^0$ enthält, aus denen sich keine infinitesimale Transformation von erster oder höherer Ordnung linear ableiten lässt. Ist die Anzahl solcher infinitesimaler Transformationen nullter Ordnung kleiner als n, so ist die Gruppe intransitiv.*

Man sieht hieraus, *dass man nur die Definitionsgleichungen der Gruppe $X_1f \cdots X_rf$ zu kennen braucht, um über die Transitivität oder Intransitivität derselben entscheiden zu können.*

Den ersten Theil des Satzes 5 können wir schliesslich auch folgendermassen aussprechen:

Die Gruppe $X_1f \cdots X_rf$ ist transitiv, wenn sie in der Umgebung eines Punktes x_i^0 von allgemeiner Lage gerade $r - n$ unabhängige infinitesimale Transformationen enthält, deren Reihenentwickelungen nach den $x_i - x_i^0$ mit Gliedern erster oder höherer Ordnung anfangen, wenn also die Gruppe gerade $r - n$ und nicht mehr unabhängige infinitesimale Transformationen enthält, welche einen Punkt von allgemeiner Lage invariant lassen. —

Sind von einer intransitiven Gruppe $X_1f \cdots X_rf$ nur die infinitesimalen Transformationen bekannt, so findet man, wie wir gesehen haben, die Invarianten der Gruppe durch Integration des vollständigen Systems $X_1f = 0, \cdots X_rf = 0$. Es ist nun von grosser Wichtigkeit, dass diese Integration nicht erforderlich ist, wenn die endlichen Gleichungen der Gruppe bekannt sind, dass sich vielmehr in diesem Falle die Invarianten der Gruppe durch blose Elimination ergeben.

Um das nachzuweisen, denken wir uns die endlichen Gleichungen

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

einer intransitiven Gruppe vorgelegt und sodann die Parameter $a_1 \cdots a_r$ daraus eliminirt. Die auf diese Weise erhaltenen $n - q$ unabhängigen Gleichungen

$$(3) \qquad W_\mu(x_1 \cdots x_n, x_1' \cdots x_n') = 0 \qquad (\mu = 1 \cdots n-q)$$

müssen sich nach dem Früheren auf die Form

$$(4) \qquad \Omega_\mu(x_1' \cdots x_n') = \Omega_\mu(x_1 \cdots x_n) \qquad (\mu = 1 \cdots n-q)$$

bringen lassen, wo die $\Omega_\mu(x)$ die gesuchten Invarianten sind. Wenn wir daher, was immer möglich ist, die Gleichungen (3) nach $n - q$ von den Veränderlichen $x_1' \cdots x_n'$ auflösen:

$$x_\mu' = \Pi_\mu(x_1 \cdots x_n, x_{n-q+1}' \cdots x_n') \qquad (\mu = 1 \cdots n-q),$$

so erhalten wir $n - q$ Functionen $\Pi_1 \cdots \Pi_{n-q}$, in welchen die Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ nur in den Verbindungen $\Omega_1(x) \cdots \Omega_{n-q}(x)$ vorkommen. Folglich stellen die $n - q$ Ausdrücke

$$\Pi_\mu(x_1 \cdots x_n, \alpha_{n-q+1} \cdots \alpha_n) \qquad (\mu = 1 \cdots n-q),$$

in denen $\alpha_{n-q+1} \cdots \alpha_n$ Constanten bezeichnen, Invarianten unserer Gruppe dar und zwar offenbar $n - q$ unabhängige Invarianten. —

Es gilt also das

Theorem 35. *Kennt man die endlichen Gleichungen:*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

einer intransitiven Gruppe, so kann man die Invarianten dieser Gruppe durch Elimination finden.

§ 59.

Indem wir untersuchten, wie sich ein Punkt von allgemeiner Lage gegenüber den Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe verhält, wurden wir mit Nothwendigkeit auf die Begriffe Transitivität und Intransitivität geführt. Wir erhielten auf diese Weise eine Eintheilung aller r-gliedrigen Gruppen eines Raumes von n Dimensionen in zwei verschiedene Classen, geradeso wie in der Substitutionentheorie; zugleich aber erhielten wir auch noch eine Eintheilung der intransitiven Gruppen, nämlich nach der Zahl der Invarianten, welche ein Punkt von allgemeiner Lage den betreffenden Gruppen gegenüber besitzt.

Nach dem Vorgange der Substitutionentheorie können wir nun auch noch weiter gehen und das Verhalten zweier und mehrerer Punkte von allgemeiner Lage gegenüber den Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe untersuchen. Das giebt uns neue Classificationen der Gruppen des R_n.

Es sei

$$y_i = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \qquad {\scriptstyle (i=1\cdots n)}$$

eine r-gliedrige Gruppe und $X_1 f \cdots X_r f$ seien r unabhängige infinitesimale Transformationen derselben.

Wir wollen zunächst zwei Punkte $x_1' \cdots x_n'$ und $x_1'' \cdots x_n''$ ins Auge fassen und deren Invarianten gegenüber unsrer Gruppe suchen, das heisst: wir suchen alle Functionen von $x_1' \cdots x_n'$, $x_1'' \cdots x_n''$, welche bei den Transformationen unserer Gruppe invariant bleiben.

Zu dem Ende schreiben wir die infinitesimalen Transformationen $X_k f$ einmal in den x' in der Form $X_k' f$ und einmal in den x'' in der Form $X_k'' f$; die gesuchten Invarianten sind dann einfach die Invarianten der r-gliedrigen Gruppe

$$X_k' f + X_k'' f \qquad {\scriptstyle (k=1\cdots r)} \tag{5}$$

in den Veränderlichen $x_1' \cdots x_n'$, $x_1'' \cdots x_n''$.

Wenn $J_1(x) \cdots J_{\varrho_1}(x)$ die Invarianten der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ sind, so sind die $2\varrho_1$ Functionen

$$J_1(x') \cdots J_{\varrho_1}(x'),\ J_1(x'') \cdots J_{\varrho_1}(x'')$$

ohne Weiteres Invarianten und zwar unabhängige Invarianten der Gruppe (5); es kann aber ausserdem noch eine gewisse Anzahl etwa ϱ_2 Invarianten

$$J_1'(x_1' \cdots x_n', x_1'' \cdots x_n'') \cdots J_{\varrho_2}'(x_1' \cdots x_n', x_1'' \cdots x_n'')$$

geben, die von einander und von den $2\varrho_1$ obigen unabhängig sind. In diesem Falle haben also zwei Punkte von allgemeiner Lage gegenüber der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ gerade $2\varrho_1 + \varrho_2$ unabhängige Invarianten, unter denen aber nur ϱ_2 als wesentlich zu betrachten sind, weil jeder der beiden Punkte an und für sich schon ϱ_1 Invarianten hat. Aus den Gleichungen

$$y_i' = f_i(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r),\ y_i'' = f_i(x_1'' \cdots x_n'', a_1 \cdots a_r) \atop {\scriptstyle (i=1\cdots n)}$$

ergeben sich unter diesen Voraussetzungen die folgenden von den a freien Relationen:

$$J_k(y') = J_k(x'),\ J_k(y'') = J_k(x'') \qquad {\scriptstyle (k=1\cdots \varrho_1)}$$
$$J_j'(y', y'') = J_j'(x', x'') \qquad {\scriptstyle (j=1\cdots \varrho_2)}.$$

Denken wir uns daher die Grössen $x_1' \cdots x_n'$ und $y_1' \cdots y_n'$ fest gewählt, so wird der Inbegriff aller Lagen $y_1'' \cdots y_n''$, welche der Punkt $x_1'' \cdots x_n''$ annehmen kann, durch die Gleichungen

$$J_k(y'') = J_k(x''), \quad J_j'(y', y'') = J_j'(x', x'')$$
$$(k = 1 \cdots \varrho_1, \; j = 1 \cdots \varrho_2)$$

bestimmt; es giebt also $\infty^{n-\varrho_1-\varrho_2}$ verschiedene Lagen dieser Art.

In ähnlicher Weise kann man die Invarianten bestimmen, welche drei, vier und noch mehr Punkte der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ gegenüber haben. *Man findet so eine Reihe von ganzen Zahlen* $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \cdots$, *welche der Gruppe eigenthümlich und von der Wahl der Veränderlichen unabhängig sind.* Berechnet man diese Zahlen der Reihe nach, so kommt man stets zu einer Zahl ϱ_m, welche verschwindet, während zugleich auch alle Zahlen $\varrho_{m+1}, \varrho_{m+2} \cdots$ gleich null sind.

Wir wollen auf diese Verhältnisse nicht weiter eingehen, doch mag bemerkt werden, dass ähnliche Betrachtungen für jede Schaar von ∞^r Transformationen durchgeführt werden können, mag die Schaar nun eine Gruppe bilden oder nicht.

§ 60.

Wir haben oben gesehen, dass eine intransitive Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ den ganzen Raum $(x_1 \cdots x_n)$ in eine continuirliche Schaar von q-fach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeiten

$$\Omega_1(x_1 \cdots x_n) = C_1, \cdots \Omega_{n-q}(x_1 \cdots x_n) = C_{n-q}$$

zerlegt, welche sämmtlich bei den Transformationen der Gruppe invariant bleiben. Die Ω bedeuten dabei unabhängige Lösungen des q-gliedrigen vollständigen Systems, welches durch die Gleichungen $X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0$ bestimmt wird.

Jeder Punkt des Raumes gehört einer und nur einer der ∞^{n-q} Mannigfaltigkeiten $\Omega_1 = a_1, \cdots \Omega_{n-q} = a_{n-q}$ an, also haben wir es in dem Kap. 6, S. 101 angegebenen Sinne mit einer Zerlegung des Raumes zu thun. Diese Zerlegung bleibt bei allen Transformationen der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ invariant; es bleibt aber zugleich jedes einzelne Theilgebiet invariant, in welches der Raum zerlegt wird.

Auch bei transitiven Gruppen kann es vorkommen, dass eine Zerlegung des Raumes in ∞^{n-q} q-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten $\Omega_1 = a_1, \cdots \Omega_{n-q} = a_{n-q}$ existirt, welche gegenüber der Gruppe invariant bleibt. Natürlich darf aber da nicht jede einzelne der ∞^{n-q} Mannigfaltigkeiten invariant bleiben, sonst wäre ja die Gruppe intransitiv; diese ∞^{n-q} Mannigfaltigkeiten müssen vielmehr von der Gruppe unter einander vertauscht werden, während ihr Inbegriff invariant bleibt.

Eine Gruppe des R_n heisst nun *imprimitiv*, wenn sie wenigstens eine invariante Zerlegung des Raumes in ∞^{n-q} q-fach ausgedehnte

Mannigfaltigkeiten bestimmt; eine Gruppe, bei welcher gar keine invariante Zerlegung auftritt, heisst *primitiv*. Dass hierbei die Werthe $q = 0$ und $q = n$ ausgeschlossen sind, bedarf wohl kaum erst der Erwähnung.

Die Intransitivität ist offenbar ein besonderer Fall der Imprimitivität: jede intransitive Gruppe ist zugleich auch imprimitiv. Auf der andern Seite ist jede primitive Gruppe nothwendig transitiv.

Um nun eine analytische Definition für die Imprimitivität einer r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ zu erhalten, brauchen wir uns blos daran zu erinnern, dass jede Zerlegung des Raumes in ∞^{n-q} q-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten $y_1 = \text{const.}, \cdots y_{n-q} = \text{const.}$ analytisch durch das q-gliedrige vollständige System $Y_1 f = 0, \cdots Y_q f = 0$ definirt wird, dessen Lösungen die y_k sind. Dass die betreffende Zerlegung bei der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ invariant bleibt, kommt darauf hinaus, dass das entsprechende q-gliedrige vollständige System alle Transformationen der Gruppe gestattet.

Das q-gliedrige vollständige System $Y_k f = 0$ gestattet unsere Gruppe, sobald es die allgemeine eingliedrige Gruppe $\lambda_1 \cdot X_1 f + \cdots + \lambda_r \cdot X_r f$ gestattet. Nach dem Theorem 20, Kap. 8, S. 140 ist dies der Fall, wenn zwischen den $X_i f$ und den $Y_k f$ Relationen von der folgenden Form bestehen:

$$(X_i Y_k) = \sum_1^q {}_\nu \psi_{ik\nu}(x) \cdot Y_\nu f.$$

Dass es ein q-gliedriges vollständiges System

$$Y_1 f = 0, \cdots Y_q f = 0 \quad (q < n)$$

giebt, welches zu den $X_k f$ in solcher Beziehung steht, das ist also die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Imprimitivität der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$.

Die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ kann übrigens auch auf mehrfache Weise imprimitiv sein, das heisst, es kann mehrere, ja unendlich viele vollständige Systeme geben, welche die Gruppe gestatten.

Später werden wir Methoden angeben, um alle vollständigen Systeme aufzustellen, welche bei einer vorgelegten Gruppe invariant bleiben. Insbesondere werden wir daher auch entscheiden können, ob die betreffende Gruppe primitiv ist oder nicht. Natürlich erfordert diese letztere Frage nur bei transitiven Gruppen eine besondere Untersuchung.

Jetzt noch eine kurze Bemerkung.

Es mögen die Gleichungen

$$y_1 = C_1, \cdots y_{n-q} = C_{n-q}$$

eine bei der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ invariante Zerlegung des Raumes $x_1 \cdots x_n$ darstellen. Führen wir dann $y_1 \cdots y_{n-q}$ zusammen mit q anderen geeigneten Functionen $z_1 \cdots z_q$ von $x_1 \cdots x_n$ als neue unabhängige Veränderliche ein, so erhalten die infinitesimalen Transformationen $X_k f$ die besondere Form

$$X_k f = \sum_1^{n-q} {}^{\mu}\, \omega_{k\mu}(y_1 \cdots y_{n-q}) \frac{\partial f}{\partial y_\mu} + \sum_1^{q} {}^{j}\, \zeta_{kj}(y_1 \cdots y_{n-q}, z_1 \cdots z_q) \frac{\partial f}{\partial z_j}$$
$$(k = 1 \cdots r).$$

Nach Kap. 12, S. 207 erzeugen nun alle infinitesimalen Transformationen $e_1 \cdot X_1 f + \cdots + e_r \cdot X_r f$, welche eine bestimmte Mannigfaltigkeit $y_1 = y_1^0, \cdots y_{n-q} = y_{n-q}^0$ invariant lassen, eine Untergruppe. Wollen wir die betreffenden infinitesimalen Transformationen finden, so haben wir nur alle Werthsysteme $e_1 \cdots e_r$ aufzusuchen, welche die $n - q$ Gleichungen

$$\sum_1^r {}^k\, e_k \cdot \omega_{k\mu}(y_1^0 \cdots y_{n-q}^0) = 0 \qquad (\mu = 1 \cdots n - q)$$

befriedigen. Ist $r > n - q$, so giebt es immer Werthsysteme $e_1 \cdots e_r$ von dieser Beschaffenheit, folglich enthält die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ in diesem Falle sicher Untergruppen mit wenigstens $r - n + q$ Parametern.

Es ist übrigens klar, dass die r *verkürzten* infinitesimalen Transformationen

$$\overline{X}_k f = \sum_1^{n-q} {}^{\mu}\, \omega_{k\mu}(y_1 \cdots y_{n-q}) \frac{\partial f}{\partial y_\mu} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

in den $n - q$ Veränderlichen $y_1 \cdots y_{n-q}$ eine Gruppe erzeugen; allerdings enthält diese Gruppe möglicherweise nicht r, sondern nur eine geringere Anzahl wesentliche Parameter. Die vorhin angedeutete Rechnung kommt offenbar hinaus auf die Bestimmung aller infinitesimalen Transformationen $e_1 \cdot \overline{X}_1 f + \cdots + e_r \cdot \overline{X}_r f$, welche den Punkt $y_1^0 \cdots y_{n-q}^0$ des $(n - q)$-fach ausgedehnten Raumes $y_1 \cdots y_{n-q}$ invariant lassen.

Kapitel 14.

Bestimmung aller Gleichungensysteme, welche eine gegebene r-gliedrige Gruppe gestatten.

Bleibt ein Gleichungensystem in $x_1 \cdots x_n$ bei allen Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ invariant, so sagen wir, dass es die betreffende Gruppe gestattet. Jedes Gleichungensystem von dieser Beschaffenheit gestattet alle Transformationen der allgemeinen eingliedrigen Gruppe $\Sigma e_k \cdot X_k f$, insbesondere also alle ∞^{r-1} *infinitesimalen* Transformationen $\Sigma e_k \cdot X_k f$ der r-gliedrigen Gruppe.

Nun haben wir andererseits früher gezeigt, dass jedes Gleichungensystem, welches die r *infinitesimalen* Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ und also auch alle ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen $\Sigma e_k \cdot X_k f$ gestattet, gleichzeitig alle *endlichen* Transformationen der eingliedrigen Gruppen $\Sigma e_k \cdot X_k f$, das heisst, alle Transformationen der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ zulässt (vgl. Theorem 14, S. 112). Sollen daher alle Gleichungensysteme bestimmt werden, welche die r-gliedrige Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ gestatten, so ist das eine Aufgabe, welche durch die Entwickelungen des Kapitels 7 vollkommen erledigt ist. Dort ist ja in voller Allgemeinheit das Problem erledigt, alle Gleichungensysteme aufzustellen, welche r gegebene infinitesimale Transformationen gestatten.

Allein der Umstand, dass die $X_1 f \cdots X_r f$, welche hier betrachtet werden, eine r-gliedrige Gruppe erzeugen, bedeutet dem allgemeinen Falle gegenüber eine recht erhebliche Vereinfachung. Es erscheint daher vollkommen gerechtfertigt, wenn wir den besonderen Fall, wo die $X_k f$ eine Gruppe erzeugen, selbständig erledigen.

Die Behandlung des in Rede stehenden Problems gestaltet sich nicht unwesentlich verschieden, je nachdem man auch die endlichen Gleichungen der betreffenden Gruppe kennt oder nicht. Im ersten Falle ist keine Integration erforderlich. Im zweiten Falle kommt man allerdings im Allgemeinen nicht ohne Integration durch; es fallen aber verschiedene Operationen weg, welche bei dem allgemeinen Probleme des Kapitels 7 nöthig waren.

Wir werden diese beiden Fälle nach einander behandeln, vor allen Dingen der Anwendungen wegen, dann aber auch, um einen tieferen Einblick in die Sache zu gewähren; in der That ergänzen die betreffenden Entwickelungen einander gegenseitig*).

Erwähnt sei endlich noch, dass wir von jetzt ab häufig die in der Substitutionentheorie gebräuchliche Symbolik auf die Theorie der Transformationsgruppen übertragen. Wir bezeichnen so zum Beispiel mit S, T, $\cdots$ einzelne Transformationen, mit S^{-1}, $T^{-1} \cdots$ die zugehörigen inversen Transformationen. Unter $S\,T$ verstehen wir diejenige Transformation, welche sich ergiebt, wenn erst die Transformation S und dann die Transformation T ausgeführt wird. Daraus folgt, dass Ausdrücke von der Form SS^{-1}, TT^{-1} die identische Transformation bedeuten.

---

*) Lie, Math. Ann. Bd. XI, S. 510—512, Bd. XVI, S. 476. Archiv for Math. og Nat., Christiania 1878, 1882, 1883. Math. Ann. Bd. XXIV.

§ 61.

Betrachten wir irgend einen Punkt P des Raumes. Der Inbegriff aller Lagen, welche dieser Punkt bei den ∞^r Transformationen der Gruppe annimmt, bildet eine gewisse Mannigfaltigkeit M; wir werden zeigen, dass diese Mannigfaltigkeit die Gruppe gestattet, mit andern Worten: dass jeder Punkt von M bei jeder Transformation der Gruppe wieder in einen Punkt von M übergeht.

In der That, es sei P' irgend ein Punkt von M und zwar sei P' aus P durch die Transformation S unserer Gruppe hervorgegangen, was wir durch die symbolische Gleichung:

$$(P)\,S = (P')$$

ausdrücken wollen. Ist dann T eine ganz beliebige Transformation der Gruppe, so geht P' bei Ausführung von T über in:

$$(P')\,T = (P)\,S\,T;$$

da aber die Transformation $S\,T$ ebenfalls der Gruppe angehört, ist auch $(P)\,S\,T$ ein Punkt von M, also ist unsere Behauptung bewiesen.

Offenbar muss jede bei der Gruppe invariante Mannigfaltigkeit, welche den Punkt P enthält, zugleich die Mannigfaltigkeit M enthalten. Deshalb können wir auch sagen: M ist die *kleinste* bei der Gruppe invariante Mannigfaltigkeit, welcher der Punkt P angehört.

Aber noch mehr. Es lässt sich zeigen, dass man mit Hülfe von Transformationen der Gruppe jeden Punkt von M in jeden andern Punkt dieser Mannigfaltigkeit überführen kann. Sind nämlich P' und P'' irgend zwei Punkte von M und werden dieselben bezüglich durch die Transformationen S und U der Gruppe aus P erhalten, so bestehen die Relationen:

$$(P)\,S = (P'), \quad (P)\,U = (P'');$$

aus der ersten derselben folgt:

$$(P')\,S^{-1} = (P)\,S\,S^{-1} = (P);$$

also ergiebt sich mit Hülfe der zweiten:

$$(P')\,S^{-1}\,U = (P''),$$

das heisst, der Punkt P' geht bei der Transformation $S^{-1}\,U$, welche ebenfalls der Gruppe angehört, in den Punkt P'' über. Damit ist die vorhin aufgestellte Behauptung bewiesen.

Wir erkennen hieraus, dass die Mannigfaltigkeit M auch als der Inbegriff aller Lagen definirt werden kann, welche irgend ein anderer ihrer Punkte, nicht eben P, bei den ∞^r Transformationen der Gruppe annimmt.

Es gilt demnach das

Theorem 36. *Führt man auf einen Punkt P des Raumes* $(x_1 \cdots x_n)$ *alle* ∞^r *Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe dieses Raumes aus, so bildet der Inbegriff aller Lagen, welche der Punkt auf diese Weise annimmt, eine bei der Gruppe invariante Mannigfaltigkeit; diese Mannigfaltigkeit enthält kein kleineres bei der Gruppe invariantes Theilgebiet, dagegen ist sie selbst in allen invarianten Mannigfaltigkeiten enthalten, in welchen der Punkt P liegt.*

Setzt man die endlichen Gleichungen $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ der r-gliedrigen Gruppe als bekannt voraus, so kann man ohne Schwierigkeit für jeden Punkt $x_1^0 \cdots x_n^0$ die kleinste invariante Mannigfaltigkeit angeben, welcher er angehört. Die betreffende Mannigfaltigkeit besteht ja nach dem Obigen aus dem Inbegriff aller Lagen $x_1 \cdots x_n$, welche der Punkt $x_1^0 \cdots x_n^0$ bei den Transformationen der Gruppe annimmt; der Inbegriff dieser Lagen wird aber offenbar durch die n Gleichungen

$$x_i = f_i(x_1^0 \cdots x_n^0, a_1 \cdots a_r) \qquad (i=1 \cdots n)$$

dargestellt, in denen die Parameter a als unabhängige Veränderliche aufzufassen sind. Eliminirt man die a, so erhält man die gesuchte Mannigfaltigkeit durch Gleichungen zwischen den x allein dargestellt.

Zu erinnern ist hierbei, dass in den Gleichungen $x_i = f_i(x^0, a)$ die a nicht vollkommen willkürlich sind; es sind ja von vornherein alle Werthsysteme $a_1 \cdots a_r$ ausgeschlossen, für welche die Determinante

$$\sum \pm \left[\frac{\partial f_1(x,a)}{\partial x_1}\right]_{x=x^0} \cdots \left[\frac{\partial f_n(x,a)}{\partial x_n}\right]_{x=x^0}$$

verschwindet, weil wir stets nur solche Transformationen benutzen, die auflösbar sind. Hieraus ergiebt sich, dass man bei der Elimination der a unter Umständen die Gleichungen einer Mannigfaltigkeit erhält, welche ausser den Punkten, in welche $x_1^0 \cdots x_n^0$ bei den *auflösbaren* Transformationen der Gruppe übergeht, noch andere Punkte enthält; diese letzteren Punkte bilden dann, wie man leicht einsieht, ihrerseits eine invariante Mannigfaltigkeit.

Ferner ist zu bemerken, dass die besprochene Elimination sich für verschiedene Werthsysteme x_k^0 verschieden gestalten kann; die Elimination der a braucht nämlich nicht immer auf dieselbe Anzahl Relationen zwischen den x zu führen, was wieder heisst, dass die betreffenden kleinsten invarianten Mannigfaltigkeiten nicht alle dieselbe Dimensionenzahl zu haben brauchen.

Nimmt man unter allen kleinsten invarianten Mannigfaltigkeiten von derselben Dimensionenzahl nach irgend einem analytischen Gesetze unendlich viele, so bildet auch deren Inbegriff eine invariante Mannigfaltigkeit. Auf diese Weise können offenbar alle invarianten Mannigfaltigkeiten erhalten werden.

Also haben wir das

Theorem 37. *Kennt man die endlichen Gleichungen einer r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, so kann man ohne Integration alle bei der Gruppe invarianten Gleichungensysteme finden oder, was dasselbe ist, alle bei ihr invarianten Mannigfaltigkeiten.*

§ 62.

In Kapitel 12, S. 206 haben wir gesehen, dass eine r-gliedrige Gruppe G_r in $x_1 \cdots x_n$ jedem Punkte des Raumes eine ganz bestimmte Untergruppe zuordnet, die Untergruppe nämlich, welche aus allen Transformationen der G_r besteht, die den Punkt invariant lassen.

Der Punkt P bleibe bei einer m-gliedrigen aber bei keiner mehrgliedrigen Untergruppe der G_r invariant; S sei allgemeines Symbol einer Transformation dieser m-gliedrigen Untergruppe, so dass also $(P)S = (P)$ ist. Weiter möge T eine Transformation sein, welche den Punkt P überführt in die neue Lage P':

$$(P)\,T = (P').$$

Ist jetzt T eine beliebige Transformation der G_r, welche ebenfalls P in P' überführt, so haben wir:

$$(P)\,\mathsf{T} = (P') = (P)\,T,$$

also wird:

$$(P)\,\mathsf{T}\,T^{-1} = (P).$$

Hieraus erhellt, dass $\mathsf{T}\,T^{-1}$ zu den Transformationen S gehört, dass also

$$\mathsf{T} = S\,T$$

die allgemeine Form einer Transformation von derselben Beschaffenheit wie T ist. Da es nun gerade ∞^m verschiedene Transformationen S giebt, so sehen wir:

Die G_r enthält gerade ∞^m verschiedene Transformationen, welche P in P' überführen.

Fragen wir andererseits nach allen Transformationen S' der G_r, welche den Punkt P' invariant lassen, so haben wir die Bedingung $(P')S' = (P')$ zu erfüllen. Aus derselben sehen wir:

$$(P)\,TS' = (P)\,T \quad \text{und} \quad (P)\,TS'\,T^{-1} = (P),$$

folglich ist $TS'T^{-1}$ eine Transformation S, das heisst S' hat die Form

$$S' = T^{-1}\,S\,T.$$

Man sieht mit Leichtigkeit, dass S hierin eine ganz beliebige Transformation der zum Punkte P gehörigen Untergruppe sein kann; demnach enthält unsere Gruppe gerade ∞^m verschiedene Transformationen S', die nun ihrerseits offenbar eine m-gliedrige Untergruppe der G_r bilden.

Die bisherigen Resultate dieses Paragraphen lassen sich folgendermassen zusammenfassen:

Satz 1. *Enthält eine r-gliedrige Gruppe G_r des R_n gerade ∞^m und nicht mehr Transformationen S, welche den Punkt P invariant lassen, und ausserdem wenigstens eine Transformation T, welche den Punkt P in den Punkt P' überführt, so enthält sie im Ganzen ∞^m verschiedene Transformationen, welche P in P' überführen; die allgemeine Form dieser Transformationen ist: $S\,T$. Ausserdem enthält die G_r gerade ∞^m Transformationen, welche den Punkt P' invariant lassen; deren allgemeine Form ist: $T^{-1}S\,T$.*

Aus dem zweiten Theile dieses Satzes folgt, dass diejenigen Punkte, welche gerade ∞^m Transformationen unsrer Gruppe gestatten, von den Transformationen der Gruppe unter einander vertauscht werden, während ihr Inbegriff invariant bleibt.

Also gilt das

Theorem 38. *Der Inbegriff aller Punkte, welche gleichviele, etwa ∞^m und nicht mehr Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe gestatten, bleibt gegenüber allen Transformationen der Gruppe invariant.*

Wir haben dieses Theorem bewiesen, indem wir Betrachtungen anwendeten, welche aus der Substitutionentheorie herübergenommen sind. Wir wollen aber zugleich zeigen, wie sich der Beweis führen lässt, falls man auf solche Betrachtungen oder richtiger Redeweisen verzichtet.

Ein Punkt $x_1^0 \cdots x_n^0$, welcher ∞^m Transformationen der r-gliedrigen Gruppe

$$X_k f = \sum_1^n{}^i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k=1\cdots r)$$

zulässt, gestattet gerade m unabhängige infinitesimale Transformationen dieser Gruppe. In der Umgebung von $x_1^0 \cdots x_n^0$ enthält daher die Gruppe gerade m unabhängige infinitesimale Transformationen, deren Reihenentwickelungen nach den $x_i - x_i^0$ mit Gliedern erster oder höherer Ordnung beginnen. Denken wir nun in die Gruppe neue Veränderliche

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i^0 + \sum_1^n {}^k \alpha_{ki}(x_k - x_k^0) + \cdots \qquad (i=1\cdots n)$$

$$\Sigma \pm \alpha_{11} \cdots \alpha_{nn} \neq 0$$

eingeführt, so erhalten wir nach Kap. 11, S. 197 in den $\bar{x}_i$ eine Gruppe, welche in der Umgebung von $\bar{x}_i^0$ ebenfalls gerade m unabhängige infinitesimale Transformationen von erster oder höherer Ordnung enthält. Denken wir uns insbesondere, dass der Uebergang von den x_i zu den $\bar{x}_i$ eine Transformation der Gruppe $X_1f \cdots X_rf$ ist, so ist die Gruppe in den $\bar{x}_i$ einfach mit der Gruppe

$$\overline{X}_k f = \sum_1^n {}^i \xi_{ki}(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n) \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_i} \qquad (k=1\cdots r)$$

identisch (vgl. Kap. 4, Satz 4, S. 81). Mit andern Worten: geht der Punkt x_i^0 bei einer Transformation unserer Gruppe in den Punkt $\bar{x}_i^0$ über, so gestattet auch dieser Punkt gerade m unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe. Damit ist aber augenscheinlich das Theorem 38 bewiesen.

Aus dem Theoreme 38 ergiebt sich sofort, dass auch der folgende Satz gilt:

Satz 2. *Der Inbegriff aller Punkte $x_1 \cdots x_n$, welche m oder mehr unabhängige infinitesimale Transformationen der r-gliedrigen Gruppe $X_1f \cdots X_rf$ gestatten, bleibt bei den Transformationen dieser Gruppe invariant.*

Bringen wir diesen Satz mit den Entwickelungen in Kapitel 11, Satz 4, S. 200 in Verbindung, so erhalten wir ein neues wichtiges Ergebniss. Damals sahen wir nämlich, dass diejenigen Punkte $x_1 \cdots x_n$, welche m oder mehr unabhängige infinitesimale Transformationen $e_1 \cdot X_1f + \cdots + e_r \cdot X_rf$ der r-gliedrigen Gruppe $X_1f \cdots X_rf$ gestatten, dadurch charakterisirt sind, dass sie alle $(r - m + 1)$-reihigen Determinanten einer gewissen Matrix zum Verschwinden bringen. Nunmehr erkennen wir, dass das Gleichungensystem, welches durch Nullsetzen jener $(r - m + 1)$-reihigen Determinanten erhalten wird, alle Transformationen der Gruppe $X_1f \cdots X_rf$ gestattet. Wir haben demnach das

Theorem 39. *Erzeugen die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen*

$$X_k f = \sum_1^n {}^i \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k=1\cdots r)$$

eine r-gliedrige Gruppe, so erhält man durch Nullsetzen aller $(r - m + 1)$-reihigen Determinanten der Matrix

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{1n}(x) \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{rn}(x) \end{vmatrix}$$

stets ein Gleichungensystem, welches alle Transformationen der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ gestattet; das gilt für jede Zahl $m \leqq r$, vorausgesetzt nur, dass es überhaupt Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$ giebt, welche alle die bewussten $(r - m + 1)$-reihigen Determinanten zum Verschwinden bringen.

Für das vorstehende wichtige Theorem geben wir im späteren Verlaufe dieses Kapitels (§§ 66 und 67, S. 239 bez. 241) noch zwei verschiedene rein analytische Beweise. Vorläufig bemerken wir nur Folgendes:

Das Theorem 39 zeigt, dass zwischen dem Probleme des Kap. 7, S. 123 bis 133 und dem des gegenwärtigen Kapitels ein wesentlicher Unterschied besteht.

Erzeugen $X_1 f \cdots X_r f$ eine r-gliedrige Gruppe, so erhält man durch Nullsetzen aller $(r - m + 1)$-reihigen Determinanten der Matrix (1) stets ein invariantes Gleichungensystem, sobald nur alle diese Determinanten wirklich gleichzeitig verschwinden können. Nicht so, wenn von den $X_k f$ blos vorausgesetzt wird, dass sie, gleich Null gesetzt, ein vollständiges System von r oder weniger Gleichungen liefern. In diesem Falle ist es zwar möglich, dass es invariante Gleichungensysteme giebt, welche die durch Nullsetzen der betreffenden Determinanten erhaltenen Gleichungen umfassen, aber es ist keineswegs immer so, dass man durch Nullsetzen der Determinanten ohne Weiteres ein invariantes Gleichungensystem findet. Dazu werden vielmehr im Allgemeinen noch weitere Operationen nöthig sein, wie sie in Kap. 7, S. 124 ff. auseinandergesetzt sind.

In dem letzten Paragraphen dieses Kapitels, S. 243 ff. gehen wir auf diesen Punkt etwas näher ein.

§ 63.

Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen, dass man *aus den infinitesimalen Transformationen* einer r-gliedrigen Gruppe *ohne Integration* gewisse Gleichungensysteme herleiten kann, welche bei der betreffenden Gruppe invariant bleiben. Jetzt werden wir zeigen, wie man *alle* Gleichungensysteme findet, welche eine r-gliedrige Gruppe *mit gegebenen infinitesimalen Transformationen:*

$$X_k f = \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

gestatten.

Wir wollen annehmen, dass unter den r Gleichungen $X_1 f = 0$, $\cdots X_r f = 0$, gerade q von einander unabhängige vorhanden sind, dass also in der Matrix (1) alle $(q+1)$-reihigen Determinanten identisch verschwinden, nicht aber alle q-reihigen.

Geradeso wie in Kap. 7, S. 120 und 123 *können wir dann die Gleichungensysteme, welche die r infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ gestatten, in $q+1$ verschiedene Classen eintheilen. In ein und dieselbe Classe rechnen wir dabei diejenigen Gleichungensysteme, vermöge deren alle $(p+1)$-reihigen nicht aber alle p-reihigen Determinanten der Matrix* (1) *verschwinden, unter p eine der $q+1$ Zahlen q, $q-1$, $\cdots 1$, 0 verstanden.* Ziehen wir es vor, die Ausdrucksweise der Mannigfaltigkeitslehre anzuwenden, so müssen wir sagen: in ein und dieselbe Classe gehören diejenigen invarianten Mannigfaltigkeiten, deren Punkte gleichviele etwa gerade $r-p$ unabhängige infinitesimale Transformationen $e_1 \cdot X_1 f + \cdots + e_r \cdot X_r f$ gestatten. Jedem Punkte einer solchen Mannigfaltigkeit ordnen die infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ gerade p unabhängige Richtungen zu, welche ihrerseits die Mannigfaltigkeit berühren (vgl. Kap. 7, S. 134).

Der Nutzen dieser Classification besteht nun darin, dass es möglich ist, jede einzelne Classe für sich zu betrachten und die ihr angehörigen Gleichungensysteme bezüglich Mannigfaltigkeiten zu bestimmen.

Ist die Zahl p gleich q, so wird die Bestimmung aller invarianten Gleichungensysteme, welche in die betreffende Classe gehören, durch das Theorem 17 in Kap. 7, S. 123 geleistet. Jedes solche Gleichungensystem kann danach durch Relationen zwischen den gemeinsamen Lösungen der Gleichungen $X_1 f = 0$, $\cdots X_r f = 0$ dargestellt werden. Da diese r Gleichungen ein q-gliedriges vollständiges System bestimmen, werden sie natürlich nur dann gemeinsame Lösungen besitzen, wenn q kleiner ist als n.

Von dem Falle $p = q$ können wir nunmehr absehen. Wir setzen daher von jetzt ab voraus, dass p eine der Zahlen 0, $1 \cdots q-1$ ist und stellen uns die Aufgabe, alle bei der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ invarianten Mannigfaltigkeiten zu bestimmen, welche in die durch die Zahl p definirte Classe gehören.

Der erste Schritt zur Lösung dieser Aufgabe ist die Bestimmung des Orts aller Punkte, für welche die sämmtlichen $(p+1)$-reihigen Determinanten der Matrix (1) verschwinden, während nicht alle p-reihigen dies thun. Der betreffende Ort enthält nämlich offenbar alle bei der Gruppe invarianten Mannigfaltigkeiten, welche unserer Classe angehören; überdies bildet er nach Theorem 38, S. 227 selbst eine invariante Mannigfaltigkeit.

Um den verlangten Ort zu finden, suchen wir zunächst den Inbegriff aller Punkte, für welche wenigstens alle $(p+1)$-reihigen Determinanten der Matrix (1) verschwinden, das heisst, wir berechnen die sämmtlichen $(p+1)$-reihigen Determinanten der bewussten Matrix — $\varDelta_1, \varDelta_2 \cdots \varDelta_\varrho$ mögen sie heissen — und setzen dieselben gleich Null:

$$\varDelta_1 = 0, \cdots \varDelta_\varrho = 0.$$

Die so gefundenen Gleichungen stellen dann eine Mannigfaltigkeit dar, welche nach Theorem 39, S. 228 bei der Gruppe invariant ist und welche den gesuchten Ort enthält.

Giebt es nun überhaupt kein Werthsystem $x_1 \cdots x_n$, welches alle $\varDelta$ zum Verschwinden bringt, oder können die $(p+1)$-reihigen Determinanten nur dadurch verschwinden, dass zugleich auch alle p-reihigen null werden, so ist klar, dass überhaupt keine bei der Gruppe $X_1f \cdots X_rf$ invariante Mannigfaltigkeit der durch p definirten Classe angehört. Wir sehen also, dass nicht gerade jede unsrer $q+1$ Classen durch Mannigfaltigkeiten, welche ihr angehören, vertreten zu sein braucht.

Nehmen wir an, dass für das von uns gewählte p keiner der beiden eben besprochenen Ausnahmefälle eintritt, dass es also wirklich Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$ giebt, für welche alle $(p+1)$-reihigen, nicht aber alle p-reihigen Determinanten der Matrix (1) verschwinden.

Die Mannigfaltigkeit $\varDelta_1 = 0, \cdots \varDelta_\varrho = 0$ bleibt, wie wir schon bemerkt haben, bei der Gruppe $X_1f \cdots X_rf$ invariant. Ist nun diese Mannigfaltigkeit reducibel, besteht sie also aus einer discreten Anzahl von endlich verschiedenen Mannigfaltigkeiten, so zerfällt sie ohne Weiteres in eben soviele einzeln invariante Mannigfaltigkeiten. Die Gruppe $X_1f \cdots X_rf$ ist ja von infinitesimalen Transformationen erzeugt; wenn sie daher den Inbegriff mehrerer endlich verschiedener Mannigfaltigkeiten invariant lässt, so muss sie jede einzelne dieser Mannigfaltigkeiten in Ruhe lassen.

Es seien $M_1, M_2, \cdots$ die einzelnen irreducibeln und daher bei der Gruppe invarianten Mannigfaltigkeiten, in welche die Mannigfaltigkeit $\varDelta_1 = 0, \cdots \varDelta_\varrho = 0$ zerfällt. Unter diesen Mannigfaltigkeiten wird es dann möglicherweise gewisse geben, für deren Punkte auch alle p-reihigen Determinanten der Matrix (1) verschwinden. Wenn wir alle Mannigfaltigkeiten von dieser besonderen Beschaffenheit ausschliessen, so behalten wir noch gewisse Mannigfaltigkeiten $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, \cdots$ übrig, deren Inbegriff offenbar den Ort aller Punkte bildet, für welche alle $(p+1)$-reihigen nicht aber alle p-reihigen Determinanten der Matrix (1) verschwinden.

Damit haben wir den gesuchten Ort gefunden; zugleich sehen wir, dass dieser Ort aus einer discreten Anzahl einzeln invarianter

Mannigfaltigkeiten M_1, M_2, $\cdots$ bestehen kann, die natürlich sämmtlich der durch p definirten Classe angehören.

Offenbar ist jede bei unserer Gruppe invariante Mannigfaltigkeit, welche der durch p definirten Classe angehört, in einer der Mannigfaltigkeiten M_1, $M_2 \cdots$ enthalten. Um daher alle jene Mannigfaltigkeiten zu finden, brauchen wir nur jede einzelne der Mannigfaltigkeiten M_1, $M_2 \cdots$ zu untersuchen und die in ihr enthaltenen invarianten Mannigfaltigkeiten zu bestimmen, welche der bewussten Classe angehören. Nach einer früheren Bemerkung (Kap. 7, Satz 6, S. 136) ist jede der Classe p angehörige invariante Mannigfaltigkeit mindestens p-fach ausgedehnt.

§ 64.

Das Problem, auf welches wir am Schlusse des vorigen Paragraphen geführt worden sind, ist ein besonderer Fall des folgenden allgemeinen Problems:

Gegeben sind die Gleichungen einer irreducibeln Mannigfaltigkeit M, welche bei den Transformationen der r-gliedrigen Gruppe $X_1f \cdots X_rf$ invariant bleibt. Den Punkten der Mannigfaltigkeit werden von den infinitesimalen Transformationen $X_1f \cdots X_rf$ im Allgemeinen gerade p unabhängige Richtungen zugeordnet, welche natürlich die — mindestens p-fach ausgedehnte — Mannigfaltigkeit berühren. Gesucht werden alle in M enthaltenen invarianten Theilgebiete, deren Punkten die Transformationen $X_1f \cdots X_rf$ auch gerade p unabhängige Richtungen zuordnen.

Dieses Problem wollen wir jetzt erledigen.

Wir denken uns die Gleichungen von M in aufgelöster Form

$$x_{s+i} - \varphi_{s+i}(x_1 \cdots x_s) = 0 \qquad (i=1\cdots n-s)$$

vorgelegt, dürfen aber dabei nicht vergessen, dass wir durch die Wahl einer bestimmten Auflösung alle Werthsysteme $x_1 \ldots x_n$ ausschliessen, für welche gerade diese Auflösung der Gleichungen nicht möglich ist. Es ist denkbar, dass wir auf diese Weise gewisse invariante Theilgebiete von M ausschliessen, die wir bei einer anderen Auflösung mitbekommen.

Der Fall $p = 0$ bedarf keiner besonderen Behandlung, denn die Mannigfaltigkeit M besteht dann offenbar aus lauter invarianten Punkten.

Um das Problem für die übrigen Werthe von p erledigen zu können, müssen wir einige Bemerkungen vorausschicken, die mit den analytischen Entwickelungen in Kapitel 7, S. 126 und 127 in engem Zusammenhang stehen und die an und für sich schon eine grosse Wichtigkeit besitzen.

Da die Mannigfaltigkeit M bei den Transformationen unserer Gruppe invariant bleibt, so werden ihre Punkte von den Transformationen der Gruppe unter einander vertauscht. Sehen wir daher von allen ausserhalb M gelegenen Punkten ab, so bestimmt unsere Gruppe $X_1f \cdots X_rf$ eine gewisse Gruppe von Transformationen der Punkte von M (vgl. S. 26). Freilich braucht diese neue Gruppe nicht r wesentliche Parameter zu enthalten, denn es kann vorkommen, dass eine Untergruppe der Gruppe $X_1f \cdots X_rf$ alle Punkte von M einzeln stehen lässt.

Wir wollen das Gesagte zunächst in einem Satze zusammenfassen:

Theorem 40. *Die Punkte einer Mannigfaltigkeit, welche bei einer r-gliedrigen Gruppe des Raumes* $(x_1 \cdots x_n)$ *invariant bleibt, werden ihrerseits durch eine continuirliche Gruppe mit r oder weniger Parametern transformirt.*

Da wir angenommen haben, dass die invariante Mannigfaltigkeit M irreducibel ist, können wir dieselbe als einen Raum für sich betrachten. Den analytischen Ausdruck der Transformationsgruppe, von welcher die Punkte dieses Raums transformirt werden, müssen wir daher erhalten, wenn wir die Punkte von M auf ein der Mannigfaltigkeit angehöriges Coordinatensystem beziehen und ermitteln, wie diese Coordinaten bei der Gruppe $X_1f \cdots X_rf$ transformirt werden.

Unter den gemachten Voraussetzungen lässt sich die Gruppe, welche die Punkte von M transformirt, sofort angeben. In der That: wir brauchen blos $x_1 \cdots x_s$ als Coordinaten der Punkte von M aufzufassen und in den endlichen Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ der Gruppe $X_1f \cdots X_rf$ die $x_{s+1} \cdots x_n$ durch $\varphi_{s+1} \cdots \varphi_n$ zu ersetzen beziehentlich wegzulassen; dann erhalten wir die Gleichungen der betreffenden Gruppe, es sind die folgenden:

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_s,\ \varphi_{s+1} \cdots \varphi_n;\ a_1 \cdots a_r) \quad (i=1 \cdots s)$$

Man könnte sich direkt überzeugen, dass man wirklich eine Gruppe in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_s$ vor sich hat. Man brauchte dazu nur zwei Transformationen von der eben geschriebenen Form nach einander auszuführen und nachher die beiden Thatsachen zu berücksichtigen: erstens, dass die Transformationen $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r)$ eine Gruppe bilden und zweitens, dass das Gleichungensystem $x_{s+i} = \varphi_{s+i}$ diese Gruppe gestattet.

Wünscht man dagegen die *infinitesimalen* Transformationen der Gruppe in $x_1 \cdots x_s$ zu kennen, so braucht man blos aus den X_kf die Glieder mit $\frac{\partial f}{\partial x_{s+1}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}$ wegzulassen und in den übrigen Gliedern

$x_{s+1} \cdots x_n$ durch die φ zu ersetzen. Man findet die r infinitesimalen Transformationen:

$$\overline{X}_k f = \sum_1^s {}^\nu \, \xi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s, \, \varphi_{s+1} \cdots \varphi_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$$

$$(k = 1 \cdots r),$$

welche aber nicht von einander unabhängig zu sein brauchen.

Wir werden direkt verificiren, dass die verkürzten infinitesimalen Transformationen $\overline{X}_k f$ eine Gruppe erzeugen. Die betreffende Rechnung ist der in Kap. 7, S. 131 durchgeführten äusserst ähnlich.

Wie damals deuten wir die Ausführung der Substitution $x_{s+i} = \varphi_{s+i}$ durch das Zeichen [ ] an. Dann ist zunächst:

$$\overline{X}_k f = \sum_1^s {}^\nu \, [\xi_{k\nu}] \frac{\partial f}{\partial x_\nu}.$$

Ferner erkennen wir wie damals aus der Gleichung (3) des Kapitels 7, S. 110, dass:

$$\overline{X}_k [\Omega] \equiv [X_k \Omega]$$

ist, unter Ω eine ganz beliebige Function von $x_1 \cdots x_n$ verstanden. Es ergiebt sich demnach:

$$(\overline{X}_k \overline{X}_j) = \sum_1^s {}^\nu \, \{[X_k \xi_{j\nu}] - [X_j \xi_{k\nu}]\} \frac{\partial f}{\partial x_\nu};$$

und da Relationen von der Form:

$$(X_k X_j) = \sum_1^r {}^\pi \, c_{kj\pi} \cdot X_\pi f$$

oder was dasselbe ist, von der Form:

$$X_k \xi_{j\nu} - X_j \xi_{k\nu} = \sum_1^r {}^\pi \, c_{kj\pi} \xi_{\pi\nu}$$

bestehen, so erhalten wir einfach:

$$(\overline{X}_k \overline{X}_j) = \sum_1^r {}^\pi \, c_{kj\pi} \cdot \overline{X}_\pi f.$$

Damit ist rein analytisch bewiesen, dass $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_r f$ wirklich eine Gruppe erzeugen.

Die infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ des Raumes $x_1 \cdots x_n$ ordnen jedem Punkte von allgemeiner Lage auf der Mannigfaltigkeit M gerade p unabhängige Richtungen $dx_1 : \cdots : dx_n$ zu, welche bekanntlich die Mannigfaltigkeit berühren. Es lässt sich voraussehen, dass auch die infinitesimalen Transformationen $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_r f$ des Raumes

$x_1 \cdots x_s$ oder, was dasselbe ist, der Mannigfaltigkeit M, jedem Punkte $x_1 \cdots x_s$ von allgemeiner Lage gerade p unabhängige Richtungen $dx_1 : \cdots : dx_s$ zuordnen. Wir werden verificiren, dass dem wirklich so ist.

Unter den gemachten Voraussetzungen verschwinden bei der Substitution $x_{s+i} = \varphi_{s+i}$ alle $(p+1)$-reihigen, nicht aber alle p-reihigen Determinanten der Matrix (1), es sind also unter den r Gleichungen

$$[\xi_{k1}] \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + [\xi_{kn}] \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \qquad (k=1\cdots r) \tag{2}$$

gerade p unabhängige vorhanden. Hieraus folgt, dass es unter den r Gleichungen $\overline{X}_k f = 0$ höchstens p unabhängige giebt; unsere Aufgabe ist nachzuweisen, dass es gerade p giebt. Das hat keine Schwierigkeit.

Da das Gleichungensystem $x_{s+i} - \varphi_{s+i} = 0$ die infinitesimalen Transformationen $X_k f$ gestattet, so ist identisch

$$[X_k(x_{s+i} - \varphi_{s+i})] \equiv 0,$$

ausführlicher geschrieben:

$$[\xi_{k,\,s+i}] \equiv \sum_1^s {}_\nu\, [\xi_{k\nu}] \frac{\partial \varphi_{s+i}}{\partial x_\nu}.$$

Bezeichnen wir daher mit $\chi_1 \cdots \chi_r$ irgendwelche Functionen von $x_1 \cdots x_s$, so haben wir:

$$\sum_1^r {}_k\, \chi_k\, [\xi_{k,s+i}] \equiv \sum_1^r {}_k\, \chi_k \cdot \overline{X}_k \varphi_{s+i}.$$

Giebt es nun r nicht sämmtlich verschwindende Functionen $\psi_1 \cdots \psi_r$ von $x_1 \cdots x_s$, welche die Gleichung

$$\sum_1^r {}_k\, \psi_k(x_1 \cdots x_s) \cdot \overline{X}_k f = 0$$

identisch befriedigen, so wird:

$$\sum_1^r {}_k\, \psi_k [\xi_{k,s+i}] \equiv \sum_1^r {}_k\, \psi_k \cdot \overline{X}_k \varphi_{s+i} \equiv 0,$$

also ist auch:

$$\sum_1^r {}_k\, \psi_k(x_1 \cdots x_s) \cdot \sum_1^n {}_\nu\, [\xi_{k\nu}] \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \equiv 0.$$

Damit ist bewiesen, dass unter den Gleichungen

$$\overline{X}_1 f = 0, \cdots \overline{X}_r f = 0$$

gerade soviele unabhängige vorhanden sind wie unter den Gleichungen (2), das heisst gerade p unabhängige.

Nunmehr sind wir endlich in den Stand gesetzt, das im Anfange des Paragraphen, S. 232 gestellte Problem zu erledigen.

Es handelt sich um die Bestimmung gewisser bei der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ invarianter Theilgebiete der invarianten Mannigfaltigkeit M, derjenigen Theilgebiete nämlich, deren Punkten die infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ gerade p unabhängige Richtungen zuordnen. Diese Theilgebiete lassen sich nach dem Vorangehenden definiren als gewisse Mannigfaltigkeiten des Raumes $x_1 \cdots x_s$; als solche sind sie dadurch charakterisirt, dass sie die Gruppe $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_r f$ gestatten und dass ihren Punkten von den infinitesimalen Transformationen $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_r f$ gerade p unabhängige Richtungen zugeordnet werden. Unser Problem kommt somit auf das folgende hinaus:

In einem Raume M von s Dimensionen ist die Gruppe $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_r f$ gegeben, deren infinitesimale Transformationen den Punkten von allgemeiner Lage in diesem Raume gerade $p \leq s$ unabhängige Richtungen zuordnen. Gesucht werden alle in M enthaltenen invarianten Mannigfaltigkeiten von derselben Beschaffenheit.

Aber dieses Problem haben wir bereits oben (S. 230) erledigt; nur stand damals an Stelle der Gruppe $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_r f$ die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$, an Stelle von s die Zahl n, an Stelle von p die Zahl q. Die gewünschten Mannigfaltigkeiten werden demnach durch Relationen zwischen den Lösungen des p-gliedrigen vollständigen Systems dargestellt, welches die Gleichungen $\overline{X}_1 f = 0, \cdots \overline{X}_r f = 0$ bestimmen. Fügt man diese Relationen zu den Gleichungen von M hinzu, so erhält man die Gleichungen der invarianten Theilgebiete von M in den ursprünglichen Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$.

Natürlich giebt es in M invariante Theilgebiete von der verlangten Art nur dann, wenn s grösser ist als p, es giebt deren keine, wenn die Zahlen s und p einander gleich sind.

Hiermit haben wir zunächst das folgende wichtige Resultat:

Theorem 41. *Gestattet eine s-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit des Raumes $x_1 \cdots x_n$ die r-gliedrige Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ und werden den Punkten dieser Mannigfaltigkeit von den infinitesimalen Transformationen der Gruppe im Allgemeinen gerade p unabhängige Richtungen zugeordnet, welche dann sicher in die Mannigfaltigkeit hineinfallen, so ist $s \geq p$; im Falle $s > p$ zerlegt sich die Mannigfaltigkeit in ∞^{s-p} p-fach ausgedehnte Theilgebiete, deren jedes die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ gestattet.*

Zugleich ist auch das Problem vollständig erledigt, auf welches wir am Schlusse des vorigen Paragraphen (S. 232) geführt wurden, damit aber die Bestimmung aller Gleichungensysteme, welche die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ gestatten, geleistet. Der Anwendungen wegen stellen wir die dazu erforderlichen Massregeln noch einmal zusammen:

Theorem 42. *Erzeugen die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen*

$$X_k f = \sum_1^n {}_i \, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

eine r-gliedrige Gruppe und verschwinden dabei alle $(q+1)$-reihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \cdot & \cdot & \xi_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1} & \cdot & \cdot & \xi_{rn} \end{vmatrix}$$

identisch, nicht aber alle q-reihigen, so findet man folgendermassen alle Gleichungensysteme oder, was dasselbe ist, alle Mannigfaltigkeiten, welche die Gruppe gestatten:

Man theile die betreffenden Gleichungensysteme beziehentlich Mannigfaltigkeiten in $q+1$ verschiedene Classen ein, indem man in dieselbe Classe immer diejenigen Gleichungensysteme rechnet, vermöge deren alle $(p+1)$-reihigen, nicht aber alle p-reihigen Determinanten der obigen Matrix verschwinden, unter p irgend eine der Zahlen $q, q-1, \cdots 1, 0$ verstanden.

Um sodann alle invarianten Gleichungensysteme zu finden, welche in eine bestimmte Classe gehören, bilde man alle $(p+1)$-reihigen Determinanten $\Delta_1, \Delta_2 \cdots \Delta_\varrho$ der Matrix und setze dieselben gleich Null. Giebt es kein Werthsystem $x_1 \cdots x_n$, welches alle ϱ Determinanten Δ_i gleichzeitig zum Verschwinden bringt, so enthält die Classe, welche durch die Zahl p definirt ist, überhaupt gar keine invarianten Mannigfaltigkeiten; dasselbe gilt dann offenbar auch von den Classen mit den Zahlen $p-1$, $p-2, \cdots 1, 0$. Sollten andererseits alle Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$, welche $\Delta_1 \cdots \Delta_\varrho$ gleich Null machen, gleichzeitig alle p-reihigen Determinanten der Matrix zum Verschwinden bringen, so würde auch in diesem Falle die Classe mit der Zahl p gar nicht durch Mannigfaltigkeiten vertreten sein. Tritt keiner dieser beiden Fälle ein, so stellt das Gleichungensystem

$$\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_\varrho = 0$$

diejenige bei der Gruppe invariante Mannigfaltigkeit M *dar, in welcher alle invarianten Mannigfaltigkeiten mit der Classen-*

zahl p enthalten sind. Zerfällt M *in eine discrete Anzahl von Mannigfaltigkeiten* $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2 \cdots$, *so bleiben dieselben einzeln invariant, in jeder dieser Mannigfaltigkeiten können aber noch unendlich viele invariante Theilgebiete enthalten sein, welche derselben Classe wie* M *angehören. Um diese Theilgebiete zu finden, stelle man die Gleichungen von* M_1 *etwa, in aufgelöster Form auf:*

$$x_{s+i} = \varphi_{s+i}(x_1 \cdots x_s) \qquad (i = 1 \cdots n-s),$$

wo die ganze Zahl s mindestens gleich p ist. Endlich bilde man die r Gleichungen

$$\overline{X}_k f = \sum_1^s \xi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s, \varphi_{s+1} \cdots \varphi_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} = 0,$$

und berechne irgend s — p unabhängige Lösungen

$$\omega_1(x_1 \cdots x_s) \cdots \omega_{s-p}(x_1 \cdots x_s)$$

des von diesen Gleichungen bestimmten p-gliedrigen vollständigen Systems. Der allgemeine analytische Ausdruck der gesuchten invarianten Theilgebiete von M_1 *ist alsdann:*

$$x_{s+i} - \varphi_{s+i}(x_1 \cdots x_s) = 0, \quad \psi_j(\omega_1 \cdots \omega_{s-p}) = 0$$
$$(i = 1 \cdots n-s; \quad j = 1 \cdots m),$$

wo die $m \leqq s - p$ *Relationen* $\psi_j = 0$ *vollkommen willkürlich sind. —*

In derselben Weise wie M_1 *müssen natürlich auch* $\mathsf{M}_2, \cdots$ *behandelt werden. Für p sind ausserdem der Reihe nach alle die* $q + 1$ *Zahlen* $q, q-1, \cdots 1, 0$ *einzusetzen.*

§ 65.

Um die vorstehenden Untersuchungen auf ein Beispiel anzuwenden, betrachten wir die dreigliedrige Gruppe

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial y} + x \frac{\partial f}{\partial z}, \quad X_2 f = y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z},$$
$$X_3 f = (-z + xy) \frac{\partial f}{\partial x} + y^2 \frac{\partial f}{\partial y} + yz \frac{\partial f}{\partial z}$$

des gewöhnlichen Raumes. Die Gruppe ist transitiv, denn die Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & y & z \\ -z + xy & y^2 & yz \end{vmatrix} = -(z - xy)^2$$

verschwindet nicht identisch. Wir schliessen daraus, dass die Fläche zweiten Grades: $z - xy = 0$ bei der Gruppe invariant bleibt, sonst aber keine Fläche weiter.

Für die Punkte der Fläche $z - xy = 0$, aber auch nur für diese verschwinden sogar alle zweireihigen Unterdeterminanten von $\varDelta$, während die einreihigen Unterdeterminanten nicht gleichzeitig verschwinden können. Daraus folgt, dass die invariante Fläche sich in ∞^1 invariante Curven zerlegt, dass aber sonst keine invarianten Curven auftreten, während es invariante Punkte überhaupt nicht giebt.

Um die ∞^1 invarianten Curven auf der Fläche $z - xy = 0$ zu finden, wählen wir x und y als Coordinaten für die Punkte der Fläche und bilden nach der oben gegebenen Vorschrift in x, y die verkürzten infinitesimalen Transformationen

$$\overline{X}_1 f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \overline{X}_2 f = y\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \overline{X}_3 f = y^2\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Die drei Gleichungen $\overline{X}_k f = 0$ reduciren sich auf eine einzige, deren Lösung x ist. Also werden die gesuchten Curven durch die Gleichungen

$$z - xy = 0, \qquad x = \text{const.}$$

dargestellt, das heisst es bleiben auf der Fläche zweiten Grades alle Individuen der einen Schaar von Erzeugenden invariant.

§ 66.

Wir geben hier den einen der beiden neuen auf S. 229 versprochenen Beweise für das wichtige Theorem 39.

Wie früher bezeichnen wir mit $\varDelta_1(x) \cdots \varDelta_\varrho(x)$ die sämmtlichen $(p+1)$-reihigen Determinanten der Matrix

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{1n}(x) \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{rn}(x) \end{vmatrix}$$

Ausserdem setzen wir voraus, dass es Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$ giebt, welche alle ϱ Determinanten $\varDelta$ zum Verschwinden bringen. Zu beweisen ist alsdann, dass das Gleichungensystem

$$\varDelta_1(x) = 0, \cdots \varDelta_\varrho(x) = 0$$

alle Transformationen

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, \; a_1 \cdots a_r) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ gestattet.

Nach Kapitel 6, S. 98 kommt es nur darauf an nachzuweisen, dass das Gleichungensystem

$$\varDelta_1(x') = 0, \cdots \varDelta_\varrho(x') = 0$$

bei der Substitution $x_i' = f_i(x, a)$ mit dem Gleichungensysteme

$$\varDelta_1(x) = 0, \cdots \varDelta_\varrho(x) = 0$$

aequivalent wird; dabei ist es ganz gleichgültig, ob die Gleichungen $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_\varrho = 0$ von einander unabhängig sind oder nicht.

Um nun nachzuweisen, dass unser Gleichungensystem wirklich die betreffende Eigenschaft besitzt, verfahren wir folgendermassen:

In Kap. 4, S. 81 haben wir gesehen, dass vermöge der Gleichungen $x_i' = f_i(x,a)$ eine Relation von der Form

$$\sum_1^r {}^k e_k' \cdot X_k' f = \sum_1^r {}^k e_k \cdot X_k f \tag{4}$$

besteht, in welcher die e_k' mit den e_k durch die r Gleichungen

$$e_j = -\sum_{\pi k}^{1 \cdots r} \vartheta_{jk}(a) \cdot \alpha_{\pi k}(a) \cdot e_\pi' = \sum_1^r {}^\pi \omega_{j\pi}(a) \cdot e_\pi'$$

verknüpft sind. Setzen wir die eben geschriebenen Ausdrücke der e_k in (4) ein und vergleichen die Coefficienten auf beiden Seiten, so erhalten wir r Relationen

$$X_k' f = \sum_1^r {}^j \omega_{jk}(a) \cdot X_j f \quad (k = 1 \cdots r),$$

welche offenbar zu Identitäten werden, sobald man vermöge der Gleichungen $x_i' = f_i(x,a)$ die x' durch die x ausdrückt.

In die eben gefundenen Gleichungen setzen wir an Stelle von f die Function x_i' ein und erhalten so die Gleichungen

$$\begin{aligned} X_k' x_i' = \xi_{ki}(x') &= \sum_1^r {}^j \omega_{jk}(a) \cdot X_j x_i' \\ &= \sum_1^r {}^j \omega_{jk}(a) \cdot \sum_1^n {}^\nu \xi_{j\nu}(x) \frac{\partial f_i(x,a)}{\partial x_\nu}, \end{aligned}$$

welche die $\xi_{ki}(x')$ direkt als Functionen der x und a ausdrücken. Dadurch sind wir in den Stand gesetzt, das Verhalten der Gleichungen $\Delta(x') = 0$ bei der Substitution $x_i' = f_i(x,a)$ zu untersuchen.

Die Determinanten $\Delta_1(x') \cdots \Delta_\varrho(x')$ werden aus der Matrix

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x') & \cdot\ \cdot & \xi_{1n}(x') \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x') & \cdot\ \cdot & \xi_{rn}(x') \end{vmatrix}$$

ebenso gebildet wie die Determinanten $\Delta_1(x) \cdots \Delta_\varrho(x)$ aus der Matrix (3). Denken wir uns nun die vorhin gefundenen Werthe

$$\xi_{ki}(x') = \sum_1^r {}^j \omega_{jk} \cdot X_j x_i'$$

in die eben geschriebene Matrix eingesetzt und sodann die Determinanten $\Delta(x')$ berechnet, so erkennen wir zunächst folgendes: die Determinanten $\Delta_\sigma(x')$ haben die Form:

$$\Delta_\sigma(x') = \sum_1^{\varrho} {}^{\tau}\, \chi_{\sigma\tau}(a) \cdot D_\tau \quad (\sigma = 1 \cdots \varrho),$$

wobei die $\chi_{\sigma\tau}$ gewisse aus den $\omega_{jk}(a)$ gebildete Determinanten sind, während $D_1 \cdots D_\varrho$ die sämmtlichen $(p+1)$-reihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} X_1 x_1' & \cdot & \cdot & X_1 x_n' \\ \cdot & & \cdot \cdot & \cdot \\ X_r x_1' & \cdot & \cdot & X_r x_n' \end{vmatrix}$$

bedeuten.

Ersetzen wir endlich jedes $X_k x_i'$ durch seinen Werth:

$$X_k x_i' = \sum_1^n {}^{\nu}\, \xi_{k\nu}(x) \frac{\partial f_i(x, a)}{\partial x_\nu},$$

so erhalten wir für die Determinanten D_τ Ausdrücke von der Form:

$$D_\tau = \sum_1^{\varrho} {}^{\mu}\, \psi_{\tau\mu}(x, a) \cdot \Delta_\mu(x),$$

wo die $\psi_{\tau\mu}$ gewisse aus den $\dfrac{\partial f_i(x,a)}{\partial x_\nu}$ gebildete Determinanten sind.

Hiermit ist bewiesen, dass die $\Delta_\sigma(x')$ bei der Substitution $x_i' = f_i(x,a)$ die Form annehmen:

$$\Delta_\sigma(x') = \sum_{\tau\mu}^{1 \cdots \varrho} \chi_{\sigma\tau}(a) \cdot \psi_{\tau\mu}(x,a) \cdot \Delta_\mu(x) \quad (\sigma = 1 \cdots \varrho).$$

Da nun die Functionen $\chi_{\sigma\tau}(a)$, $\psi_{\tau\mu}(x,a)$ sich für die in Betracht kommenden Werthsysteme x,a im Algemeinen regulär verhalten, so ist klar, dass das Gleichungensystem $\Delta_\sigma(x') = 0$ bei der Substitution $x_i' = f_i(x,a)$ mit dem Gleichungensystem $\Delta_\sigma(x) = 0$ äquivalent wird, dass also das letztere Gleichungensystem alle Transformationen $x_i' = f_i(x,a)$ gestattet. Das aber war zu beweisen.

§ 67.

Das Theorem 39 ist so wichtig, dass es nicht überflüssig erscheint, noch einen dritten Beweis desselben zu geben.

Nach dem Satze 3 des Kapitels 7 (S. 114) gestattet das Gleichungensystem $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_\varrho = 0$ sicher dann alle Transformationen der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$, wenn Relationen von der Form

$$X_k \varDelta_\sigma = \sum_1^\varrho{}_\tau\, \omega_{\sigma\tau}(x_1 \cdots x_n) \cdot \varDelta_\tau \qquad (k=1\cdots r,\ \sigma=1\cdots\varrho)$$

bestehen und wenn sich ausserdem die Functionen $\omega_{\sigma\tau}$ für diejenigen Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$ regulär verhalten, welche die Gleichungen $\varDelta_1 = 0, \cdots \varDelta_\varrho = 0$ befriedigen. Es ist nun in unserem Falle nicht schwer, nachzuweisen, dass das Gleichungensystem $\varDelta_\sigma = 0$ diese Eigenschaften besitzt. Um aber nicht weitläufig zu werden, wollen wir diesen Nachweis nur in einem besonders einfachen Falle führen. Man wird daraus zur Genüge ersehen, wie der allgemeinste Fall zu behandeln wäre.

Wir werden erstens voraussetzen, dass unsere Gruppe einfach transitiv ist. Sie enthält dann n unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1 f \cdots X_n f$ und ausserdem verschwindet die Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{n1}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

nicht identisch.

Weiter werden wir uns darauf beschränken, nachzuweisen, dass n Relationen von der Form

$$X_i \varDelta = \omega_i(x_1 \cdots x_n) \cdot \varDelta \qquad (i=1\cdots n)$$

bestehen, dass also die Gleichung $\varDelta = 0$ alle Transformationen der Gruppe gestattet. Dagegen werden wir nicht auf die invarianten Gleichungensysteme eingehen, welche durch Nullsetzen von Unterdeterminanten der Determinante $\varDelta$ erhalten werden.

Wenn wir die $(n-1)$-reihigen Unterdeterminanten von $\varDelta$ durch partielle Differentialquotienten von $\varDelta$ nach den $\xi_{\mu\nu}$ ausdrücken, so ergiebt sich für $X_i \varDelta$ der Ausdruck:

$$X_i \varDelta = \sum_{\mu,\,\nu}^{1\cdots n} X_i\, \xi_{\mu\nu} \frac{\partial \varDelta}{\partial \xi_{\mu\nu}}.$$

Nun erzeugen $X_1 f \cdots X_n f$ eine n-gliedrige Gruppe, es bestehen also Relationen von der Form:

$$(X_i X_\mu) = \sum_1^n{}_s\, c_{i\mu s} X_s f,$$

oder ausführlich geschrieben:

$$X_i\, \xi_{\mu\nu} - X_\mu\, \xi_{i\nu} = \sum_1^n{}_s\, c_{i\mu s}\, \xi_{s\nu}.$$

Folglich ergiebt sich für $X_i \xi_{\mu\nu}$ der nachstehende Ausdruck:

$$X_i\, \xi_{\mu\nu} = \sum_1^n{}_s \left(\xi_{\mu s} \frac{\partial \xi_{i\nu}}{\partial x_s} + c_{i\mu s}\, \xi_{s\nu} \right).$$

Setzen wir denselben in die oben stehende Gleichung für $X_i \varDelta$ ein, so kommt:

$$X_i \varDelta = \sum_{\mu\nu s}^{1\cdots n} \left(\xi_{\mu s} \frac{\partial \xi_{i\nu}}{\partial x_s} + c_{i\mu s} \xi_{s\nu} \right) \frac{\partial \varDelta}{\partial \xi_{\mu\nu}}.$$

Hier lassen sich die Coefficienten von $\frac{\partial \xi_{i\nu}}{\partial x_s}$ und von $c_{i\mu s}$ nach einem bekannten Determinantensatze durch $\varDelta$ ausdrücken. Es ist nämlich:

$$\sum_1^n {}^{\mu}\, \xi_{\mu s} \frac{\partial \varDelta}{\partial \xi_{\mu\nu}} = \varepsilon_{s\nu} \varDelta,$$

$$\sum_1^n {}^{\nu}\, \xi_{s\nu} \frac{\partial \varDelta}{\partial \xi_{\mu\nu}} = \varepsilon_{s\mu} \varDelta,$$

wo die Grösse $\varepsilon_{\pi\varrho}$ verschwindet, sobald π und ϱ von einander verschieden sind, während $\varepsilon_{\pi\pi}$ immer den Werth eins hat. Benutzen wir diese Formeln, so bekommen wir:

$$X_i \varDelta = \varDelta \left\{ \sum_{\nu s}^{1\cdots n} \varepsilon_{s\nu} \frac{\partial \xi_{i\nu}}{\partial x_s} + \sum_{\mu s}^{1\cdots n} \varepsilon_{s\mu} c_{i\mu s} \right\}$$

und hieraus folgt endlich:

$$(5) \qquad X_i \varDelta = \varDelta \sum_1^n {}^{s} \left(\frac{\partial \xi_{is}}{\partial x_s} + c_{iss} \right) \qquad (i=1\cdots n).$$

Da, wie immer, nur solche Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$ berücksichtigt werden, für welche sich alle $\xi_{ki}(x)$ regulär verhalten, so verhält sich offenbar der Faktor von $\varDelta$ auf der rechten Seite für die in Betracht kommenden Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$ regulär. Kann daher die Gleichung $\varDelta = 0$ durch derartige Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$ befriedigt werden, so gestattet sie nach dem Satze 3, S. 114 alle Transformationen der Gruppe $X_1 f \cdots X_n f$.

§ 68.

Wie schon auf S. 223 hervorgehoben ist, haben die Entwickelungen des gegenwärtigen Kapitels mit denen des Kapitels 7, S. 120 ff. grosse Aehnlichkeit. Es ist deshalb um so wichtiger, sich der Unterschiede bewusst zu werden, welche zwischen beiden Theorien bestehen.

Den ersten Unterschied haben wir bereits auf Seite 229 erwähnt. Er besteht in folgendem:

Wenn die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ eine r-gliedrige Gruppe erzeugen, so gestattet jedes der sattsam erwähnten, durch Determinantenbildung erhaltenen Gleichungensysteme

$\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_\varrho = 0$ alle infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$. Wenn dagegen die r infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ nur der Beschränkung unterworfen sind, dass die unabhängigen unter den Gleichungen $X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0$ ein vollständiges System bilden sollen, so braucht im Allgemeinen keines der Gleichungensysteme $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_\varrho = 0$ die infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ zu gestatten.

Unter gewissen Bedingungen kann man übrigens auch in dem zweiten der beiden eben erwähnten Fälle von vornherein sicher sein, dass ein durch Determinantenbildung erhaltenes Gleichungensystem $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_\varrho = 0$ die infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ gestattet.

Die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ seien so beschaffen, dass die unabhängigen unter den r Gleichungen $X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0$ ein vollständiges System bilden, sodass also Relationen von der Form

$$(6) \qquad (X_i X_k) = \gamma_{ik1}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_1 f + \cdots + \gamma_{ikr}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_r f \qquad (i, k = 1 \cdots r)$$

bestehen. Mit $\Delta_1 \cdots \Delta_\varrho$ mögen die $(p+1)$-reihigen Determinanten der Matrix

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot\ \cdot & \xi_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x) & \cdot\ \cdot & \xi_{rn}(x) \end{vmatrix}$$

bezeichnet werden. Giebt es dann Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$, für welche alle Determinanten $\Delta_1 \cdots \Delta_\varrho$ verschwinden und *verhalten sich alle Functionen* $\gamma_{ikj}(x_1 \cdots x_n)$ *für diese Werthsysteme regulär*, so lässt sich zeigen, dass das Gleichungensystem $\Delta_1 = 0, \cdots \Delta_\varrho = 0$ die infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ gestattet.

Im Folgenden spielt dieser Satz keine Rolle; es wird daher genügen, wenn wir ihn nur in einem besonders einfachen Falle beweisen; der Beweis für den allgemeinen Satz lässt sich in ganz ähnlicher Weise führen.

Wir wollen annehmen, dass $r = n$ ist und dass die n Gleichungen $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$ von einander unabhängig sind; ausserdem sei $p = n - 1$. Die besprochene Matrix reducirt sich dann auf die nicht identisch verschwindende Determinante

$$\Delta = \Sigma \pm \xi_{11} \cdots \xi_{nn}$$

und enthält nur eine einzige $(p+1)$-reihige Determinante, nämlich sich selbst. Wir werden zeigen, dass die Gleichung $\Delta = 0$ sicher dann die infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_n f$ gestattet, wenn sich die Functionen γ_{ikj} in den Gleichungen

$$(X_i X_k) = \sum_1^n {}_j\, \gamma_{ikj} \cdot X_j f \qquad (i, k = 1 \cdots n)$$

für diejenigen Werthsysteme $x_1 \cdots x_n$, welche Δ zum Verschwinden bringen, regulär verhalten.

Nach Kap. 7, Satz 3, S. 114 brauchen wir blos nachzuweisen, dass jedes $X_k \Delta$ sich in der Form $\omega_k(x_1 \cdots x_n) \cdot \Delta$ darstellen lässt und dass sich die ω_k für die Werthsysteme von $\Delta = 0$ regulär verhalten. Dieser Nachweis gelingt auf demselben Wege wie im vorigen Paragraphen. Wir berechnen einfach die Ausdrücke $X_k \Delta$ und finden in derselben Weise wie damals:

$$X_k \Delta = \Delta \sum_1^n {}_\nu \left\{ \frac{\partial \xi_{k\nu}}{\partial x_\nu} + \gamma_{k\nu\nu}(x_1 \cdots x_n) \right\}$$

$$(k = 1 \cdots n).$$

Die dazu erforderliche Rechnung ist genau die frühere, obwohl die damaligen Constanten c_{ikj} durch die Functionen $\gamma_{ikj}(x)$ ersetzt sind; wenn trotzdem kein Unterschied eintritt, so hat das darin seinen Grund, dass im vorigen Paragraphen von der Constanteneigenschaft der c_{ikj} kein Gebrauch gemacht worden ist.

Die Factoren von Δ auf den rechten Seiten der obigen Gleichungen verhalten sich offenbar für die Werthsysteme von $\Delta = 0$ regulär, also erkennen wir, dass die Gleichung $\Delta = 0$ wirklich die infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_n f$ gestattet.

Ein zweiter wichtiger Unterschied zwischen dem Falle einer r-gliedrigen *Gruppe* $X_1 f \cdots X_r f$ und dem allgemeineren Falle des Kapitels 7 zeigt sich, sobald man bereits eine Mannigfaltigkeit M kennt, welche alle infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ gestattet.

Wir wollen annehmen, dass $X_1 f \cdots X_r f$ den Punkten von M gerade p unabhängige Richtungen zuordnen und dass insbesondere $X_1 f \cdots X_p f$ p unabhängige Richtungen bestimmen. Unter diesen Voraussetzungen bestehen für die Punkte von M Relationen von der Form

$$X_{p+k} f = \varphi_{k1}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_1 f + \cdots + \varphi_{kp}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_p f$$

$$(k = 1 \cdots r - p),$$

wo sich die φ_{kj} regulär verhalten; es bestehen andererseits keine Relationen von der Form

$$\chi_1(x_1 \cdots x_n) \cdot X_1 f + \cdots + \chi_p(x_1 \cdots x_n) \cdot X_p f = 0.$$

Erzeugen nun $X_1 f \cdots X_r f$ eine r-gliedrige Gruppe, so lassen sich alle $(X_i X_k)$ für die Punkte von M in der Form

$$(X_i X_k) = \sum_1^p {}_j \psi_{ikj}(x_1 \cdots x_n) \cdot X_j f \qquad (i, k = 1 \cdots r)$$

darstellen und *es verhalten sich dabei die ψ_{ikj} regulär*. Besitzen dagegen $X_1 f \cdots X_r f$ blos die Eigenschaft, dass die unabhängigen unter den Gleichungen $X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0$ ein vollständiges System bilden, so ist eine solche Darstellung der $(X_i X_k)$ für die Punkte von M nicht in allen Fällen möglich; sie ist aber immer dann möglich, wenn die Functionen γ_{ikj} in den Gleichungen (6) sich für die Werthsysteme von $x_1 \cdots x_n$ regulär verhalten. Diesen Umstand haben wir bereits in Kapitel 7, S. 130 ff. zu verwerthen gelernt.

Kapitel 15.

Invariante Schaaren von infinitesimalen Transformationen.

Unter

$$X_k f = \sum_1^n {}^i\, \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \cdots q)$$

verstehen wir wie gewöhnlich *unabhängige* infinitesimale Transformationen; das soll jedoch vorläufig die einzige Voraussetzung sein, welche wir über die $X_k f$ machen.

Betrachten wir die Schaar von ∞^{q-1} infinitesimalen Transformationen, welche durch den Ausdruck

$$e_1 \cdot X_1 f + \cdots + e_q \cdot X_q f$$

mit den q willkürlichen Parametern $e_1 \cdots e_q$ dargestellt wird. Wenn wir in dieselbe neue unabhängige Veränderliche x' an Stelle der x einführen, so nimmt jede infinitesimale Transformation unserer Schaar eine neue Form an; der Form nach erhalten wir offenbar im Allgemeinen eine ganz neue Schaar von ∞^{q-1} infinitesimalen Transformationen. Unter Umständen kann es jedoch geschehen, dass die neue Schaar sich in ihrer Form nicht wesentlich von der ursprünglichen unterscheidet, indem für beliebige Werthe der e eine Relation von der Gestalt:

$$(1) \qquad \sum_1^q {}^k\, e_k \sum_1^n {}^i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_1^q {}^k\, e_k' \sum_1^n {}^i\, \xi_{ki}(x_1' \cdots x_n') \frac{\partial f}{\partial x_i'}$$

besteht, in welcher die e_k' nicht von den x, sondern blos von $e_1 \cdots e_q$ abhängen.

Besteht eine derartige Relation, welche wir auch kurz

$$(2) \qquad \sum_1^q {}^k\, e_k \cdot X_k f = \sum_1^q {}^k\, e_k' \cdot X_k' f$$

schreiben können, so sagen wir: *die Schaar der infinitesimalen Transformationen $\Sigma e_k X_k f$ bleibt bei Einführung der neuen Veränderlichen x' invariant*, oder: *sie gestattet die Transformation, welche durch die betreffende Variabelnänderung dargestellt wird.*

§ 69.

Die Schaar der ∞^{q-1} infinitesimalen Transformationen $\Sigma e_k X_k f$ bleibe beim Uebergange zu den Veränderlichen x' invariant, es möge also eine Relation von der Form

(2) $$\sum_1^q {}_k\, e_k \cdot X_k f = \sum_1^q {}_k\, e_k' \cdot X_k' f$$

bestehen, in welcher die e' gewisse Functionen von den e allein sind. Betrachten wir zunächst dieses Abhängigkeitsverhältniss zwischen den e und den e'; wir gewinnen so den Ausgangspunkt für die genauere Untersuchung derartiger Schaaren von infinitesimalen Transformationen.

Der Ausdruck $X_k f$ lässt sich schreiben:

$$X_k f = \sum_1^n {}_i\, X_k x_i' \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i'},$$

oder, wenn man die $X_k x_i'$ durch die x' ausdrückt:

$$X_k f = \sum_1^n {}_i\, \eta_{ki}(x_1' \cdots x_n') \frac{\partial f}{\partial x_i'}.$$

Setzen wir diesen Werth in die Gleichung (2) ein, so können wir die Coefficienten der $\frac{\partial f}{\partial x_i'}$ auf beiden Seiten einander gleich setzen und erhalten daher die folgenden linearen Relationen zwischen den e und den e':

(2') $$\sum_1^q {}_k\, e_k' \cdot \xi_{ki}(x') = \sum_1^q {}_k\, e_k \cdot \eta_{ki}(x') \qquad (i = 1 \cdots n).$$

Nach unserer Voraussetzung ist es möglich, für die e' solche Functionen der e allein einzusetzen, dass die Gleichungen (2') für alle Werthe der x' erfüllt werden. Es lässt sich zeigen, dass die betreffenden Functionen der e vollkommen bestimmt sind.

Da die Gleichungen (2') für alle Werthe der x' bestehen sollen, so müssen sie auch noch erfüllt werden, wenn wir $x_1' \cdots x_n'$ durch ein beliebiges anderes System von Veränderlichen ersetzen. Das wollen wir thun und uns die Gleichungen (2') in gerade q verschiedenen Systemen von Veränderlichen: $x_1' \cdots x_n'$, $x_1'' \cdots x_n''$, $\cdots$, $x_1^{(q)} \cdots x_n^{(q)}$ aufschreiben:

$$\sum_1^q {}_k\, e_k' \cdot \xi_{ki}(x^{(\nu)}) = \sum_1^q {}_k\, e_k \cdot \eta_{ki}(x^{(\nu)}) \qquad (i = 1 \cdots n)$$
$$(\nu = 1 \cdots q).$$

Die so erhaltenen Gleichungen sind nach $e_1' \cdots e_q'$ auflösbar; denn unter den gemachten Voraussetzungen verschwinden nach den Entwickelungen des Kapitels 3, S. 64 nicht alle q-reihigen Determinanten der Matrix

$$\left|\begin{matrix} \xi_{11}' & \cdot & \cdot & \xi_{1n}' & \xi_{11}'' & \cdot & \cdot & \xi_{1n}'' & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{1n}^{(q)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{q1}' & \cdot & \cdot & \xi_{qn}' & \xi_{q1}'' & \cdot & \cdot & \xi_{qn}'' & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{qn}^{(q)} \end{matrix}\right|.$$

Da ausserdem die bewussten Gleichungen sicher mit einander verträglich sind, so erhalten wir die e' dargestellt als lineare homogene Functionen der e:

$$e_k' = \sum_1^q {}_j\, \varrho_{kj}\, e_j \qquad (k = 1 \cdots q).$$

Hier sind die ϱ_{kj} natürlich von den $x', x'' \cdots x^{(q)}$ unabhängig und daher absolute Constanten; die Determinante der ϱ_{kj} ist von Null verschieden, weil sich augenscheinlich die e_k geradeso als lineare homogene Functionen der e' darstellen lassen.

Wenn auch unter den gemachten Voraussetzungen die *Schaar* der infinitesimalen Transformationen $\Sigma\, e_k X_k f$ bei Einführung der x' invariant bleibt, so werden doch im Allgemeinen ihre einzelnen Transformationen unter einander vertauscht. Immer giebt es jedoch wenigstens eine infinitesimale Transformation $\Sigma\, e_k^0 X_k f$, welche selbst invariant bleibt; denn die Bedingung

$$\sum_1^q {}_k\, e_k^0 \cdot X_k f = \omega \sum_1^q {}_k\, e_k^0 \cdot X_k' f,$$

welcher die Coefficienten e_k^0 einer solchen infinitesimalen Transformation genügen müssen, lässt sich durch die q Gleichungen:

$$\omega\, e_k^0 = \sum_1^q {}_j\, \varrho_{kj}\, e_j^0 \qquad (k = 1 \cdots q)$$

ersetzen und diese letzteren können immer befriedigt werden, ohne dass die e_k^0 sämmtlich verschwinden.

Ein Beispiel wird zur näheren Erläuterung des Gesagten am geeignetsten sein.

In die Schaar der ∞^3 infinitesimalen Transformationen

$$e_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + e_3 \left(x_1^2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_1 x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) + e_4 \left(x_1 x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2^2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)$$

führen wir neue Veränderliche ein, indem wir setzen:

$$x_1' = a_1 x_1 + a_2 x_2, \quad x_2' = a_3 x_1 + a_4 x_2.$$

Die Schaar erhält dabei die neue Form

$$e_1' \frac{\partial f}{\partial x_1'} + e_2' \frac{\partial f}{\partial x_2'} + e_3' \left(x_1'^2 \frac{\partial f}{\partial x_1'} + x_1' x_2' \frac{\partial f}{\partial x_2'}\right) + e_4' \left(x_1' x_2' \frac{\partial f}{\partial x_1'} + x_2'^2 \frac{\partial f}{\partial x_2'}\right),$$

wobei $e_1' \cdots e_4'$ sich folgendermassen ausdrücken:

$$e_1' = a_1 e_1 + a_2 e_2, \quad e_2' = a_3 e_1 + a_4 e_2, \quad e_3' = \frac{a_4 e_3 - a_3 e_4}{a_1 a_4 - a_2 a_3}, \quad e_4' = \frac{a_1 e_4 - a_2 e_3}{a_1 a_4 - a_2 a_3}.$$

Also bleibt die Schaar in dem oben definirten Sinne invariant. Wünscht man zu wissen, welche einzelnen infinitesimalen Transformationen der Schaar invariant bleiben, so hat man nur ω aus der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_1 - \omega & a_2 \\ a_3 & a_4 - \omega \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 \omega - 1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \omega - 1 \end{vmatrix} = 0$$

zu bestimmen und $e_1 \cdots e_4$ so zu wählen, dass $e_k' = \omega e_k$ wird; die betreffenden Werthsysteme der e_k liefern die invarianten infinitesimalen Transformationen.

Indem wir jetzt zu dem allgemeinen Falle zurückkehren, wollen wir die oben gemachten Voraussetzungen nach einer gewissen Richtung hin specialisiren. Wir wollen nämlich annehmen, dass der Uebergang von den x zu den x' eine ganz beliebige Transformation einer bestimmten eingliedrigen Gruppe ist. Dementsprechend stellen wir uns von jetzt ab die folgende Frage:

Unter welchen Bedingungen bleibt die Schaar $\Sigma e_k X_k f$ bei jeder Transformation $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, t)$ der eingliedrigen Gruppe Yf invariant, dass heisst, unter welchen Bedingungen besteht für alle Werthsysteme $e_1 \cdots e_r$, t eine Relation

$$\sum_1^q {}_k\, e_k \cdot X_k f = \sum_1^q {}_k\, e_k' \cdot X_k' f,$$

in welcher die e_k' ausser von den e_j nur noch von t abhängen?

Wenn wir die allgemeine Transformation

$$x_i' = x_i + t \cdot Y x_i + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

der eingliedrigen Gruppe Yf anwenden, um neue Veränderliche in $X_k f$ einzuführen, so erhalten wir nach Kap. 8, S. 141, Formel (5):

$$X_k f = X_k' f + t(X_k' Y' f - Y' X_k' f) + \cdots;$$

also wird umgekehrt:

(3) $$X_k' f = X_k f + t(Y X_k) + \cdots,$$

was für das Folgende bequemer ist.

Soll nun jede infinitesimale Transformation $X_k f + t(YX_k) + \cdots$ der Schaar $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ angehören und zwar für jeden Werth von t, so muss offenbar auch jede infinitesimale Transformation (YX_k) in dieser Schaar enthalten sein. Damit wären gewisse nothwendige Bedingungen für die Invarianz unserer Schaar gefunden, Bedingungen, welche darauf hinauskommen, dass q Relationen von der Form

(4) $$(YX_k) = \sum_1^q {}_j\, g_{kj} \cdot X_j f \qquad (k = 1 \cdots q)$$

bestehen müssen, in denen die g_{kj} absolute Constanten bezeichnen.

Ist die Schaar der infinitesimalen Transformationen

$$e_1 \cdot X_1 f + \cdots + e_q \cdot X_q f$$

so beschaffen, dass für jedes k eine Relation von der Form (4) besteht, so wollen wir sagen, *dass die Schaar die infinitesimale Transformation Yf gestattet.* Bei dieser Festsetzung können wir das eben gewonnene Ergebniss folgendermassen aussprechen:

Gestattet die Schaar der infinitesimalen Transformationen

$$e_1 \cdot X_1 f + \cdots + e_q \cdot X_q f$$

alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe Yf, so gestattet sie auch die infinitesimale Transformation Yf.

Das Umgekehrte gilt ebenfalls, wie wir jetzt zeigen werden.

Wir wollen annehmen, dass die Schaar der Transformationen $\Sigma e_k X_k f$ die infinitesimale Transformation Yf gestattet, dass also Relationen von der Form (4) bestehen. Soll nun die Schaar $\Sigma e_k X_k f$ zugleich alle endlichen Transformationen der eingliedrigen Gruppe Yf gestatten, so muss es möglich sein $e_1' \cdots e_q'$ derart als Functionen von $e_1 \cdots e_q$ und t zu bestimmen, dass die Gleichung

$$\sum_1^q {}_k\, e_k' \cdot X_k' f = \sum_1^q {}_k\, e_k \cdot X_k f$$

identisch besteht, sobald man in den $X_k' f$ die Veränderlichen x an Stelle der x' einführt. Wenn daher $X_k' f$ bei Einführung der x die Form annimmt:

$$X_k' f = \sum_1^n {}_i\, \zeta_{ki}(x_1 \cdots x_n, t) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

so müssen sich die e_k' so bestimmen lassen, dass der Ausdruck

$$\sum_1^q {}_k\, e_k' \cdot X_k' f = \sum_1^q {}_k \sum_1^n {}_i\, e_k' \cdot \zeta_{ki}(x_1 \cdots x_n, t) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

von t frei wird, dass also der Differentialquotient:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_1^q {}_k\, e_k' \cdot X_k' f = \sum_1^n {}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \sum_1^q {}_k\, e_k' \zeta_{ki}(x_1 \cdots x_n, t)$$

verschwindet; zugleich müssen aber die e auch noch der Anfangsbedingung: $e_k' = e_k$ für $t = 0$ genügen.

Um zeigen zu können, dass es unter den gemachten Voraussetzungen wirklich Functionen e' von der verlangten Beschaffenheit giebt, müssen wir zunächst den Differentialquotienten:

$$\frac{\partial}{\partial t} X_k' f = \sum_1^n {}_i \frac{\partial \zeta_{ki}(x_1 \cdots x_n t)}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

berechnen; wir schlagen dazu einen indirecten Weg ein.

Oben sahen wir, dass $X_k'f$ sich folgendermassen durch $x_1 \cdots x_n$ und t ausdrückt:

$$X_k'f = X_k f + t(YX_k) + \cdots,$$

wenn die in $X_k'f$ eingehenden unabhängigen Veränderlichen x' durch die Gleichungen $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, t)$ der eingliedrigen Gruppe Yf bestimmt sind. Der gewünschte Differentialquotient ergiebt sich daher durch Differentiation der rechts stehenden unendlichen Reihe nach t, anders ausgesprochen: er ist der Coefficient von τ^1 in der Entwickelung des Ausdrucks

$$X_k f + (t+\tau)(YX_k) + \cdots = \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki}(x_1'' \cdots x_n'') \frac{\partial f}{\partial x_i''} = X_k''f$$

nach Potenzen von τ. Die x'' bedeuten dabei die Grössen

$$x_i'' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ t+\tau).$$

Der besprochene Entwickelungscoefficient erscheint allerdings zunächst als eine unendliche Reihe nach Potenten von t; aber es hat keine Schwierigkeit, einen endlichen geschlossenen Ausdruck für denselben zu finden.

Der Uebergang von den Veränderlichen x zu den Veränderlichen $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, t)$ geschieht, wie wir wissen, durch eine Transformation der eingliedrigen *Gruppe* Yf und zwar durch eine Transformation mit dem Parameter t. Von den x zu den $x_i'' = f_i(x_1 \cdots x_n, t+\tau)$ kommt man durch eine Transformation *derselben* Gruppe, nämlich durch die Transformation mit dem Parameter $t+\tau$. Diese Transformation aber lässt sich ersetzen durch die Aufeinanderfolge zweier Transformationen, deren erste den Parameter t, die zweite den Parameter τ besitzt; folglich wird der Uebergang von den x' zu den x'' ebenfalls durch eine Transformation der eingliedrigen Gruppe Yf vermittelt, nämlich durch die Transformation, deren Parameter τ ist:

$$x_i'' = f_i(x_1' \cdots x_n', \tau).$$

Wir schliessen hieraus, dass die Reihenentwickelung von $X_k''f$ nach Potenzen von τ lautet:

$$X_k''f = X_k'f + \tau(Y'X_k') + \cdots.$$

Damit ist denn ein endlicher geschlossener Ausdruck für den vorhin erwähnten Entwickelungscoefficienten gefunden; der gesuchte Differentialquotient $\frac{\partial(X_k'f)}{\partial t}$ wird daher:

$$\text{(5)} \qquad \frac{\partial}{\partial t} X_k'f = (Y'X_k') = Y'X_k'f - X_k'Y'f.$$

Diese Formel gilt natürlich allgemein, wie man auch die beiden infinitesimalen Transformationen X_kf und Yf wählen mag. In unserem besonderen Falle sind aber $X_1 f \cdots X_q f$, Yf nicht vollkommen willkürlich, sondern durch die Relationen (4) verknüpft. Wir bekommen daher unter den oben gemachten Voraussetzungen:

$$\frac{\partial (X_k' f)}{\partial t} = \sum_1^q {}_\nu \, g_{k\nu} \cdot X_\nu' f \qquad (k = 1 \cdots q). \tag{6}$$

Bilden wir nunmehr den Differentialquotienten von $\Sigma e_k' X_k' f$ nach t, so bekommen wir:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_1^q {}_k \, e_k' \cdot X_k' f = \sum_1^q {}_k \frac{d e_k'}{dt} X_k' f + \sum_1^q {}_k \, e_k' \sum_1^q {}_\nu \, g_{k\nu} \cdot X_\nu' f$$

$$= \sum_1^q {}_k \left\{ \frac{d e_k'}{dt} + \sum_1^q {}_\nu \, g_{\nu k} \, e_\nu' \right\} X_k f.$$

Dieser Ausdruck verschwindet offenbar nur dann, wenn die e_k' die Differentialgleichungen

$$\frac{d e_k'}{dt} + \sum_1^q {}_\nu \, g_{\nu k} \, e_\nu' = 0 \qquad (k = 1 \cdots q) \tag{7}$$

erfüllen. Hieraus aber lassen sich die e_k' derart als Functionen von t bestimmen, dass jedes e_k' sich für $t = 0$ in das entsprechende e_k verwandelt; überdies werden die e' lineare homogene Functionen der e.

Setzt man die betreffenden Werthe der e' in den Ausdruck $\Sigma e_k' X_k' f$ ein und kehrt sodann von den x' zu den ursprünglichen Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ zurück, so wird $\Sigma e_k' X_k' f$ von t unabhängig, das heisst, es wird gleich $\Sigma e_k X_k f$. Die Schaar der infinitesimalen Transformationen $\Sigma e_k X_k f$ bleibt also wirklich bei der betreffenden Variabelnänderung invariant.

Somit können wir das folgende Theorem aussprechen:

Theorem 43.*) *Eine Schaar von ∞^{q-1} infinitesimalen Transformationen $e_1 \cdot X_1 f + \cdots + e_q \cdot X_q f$ bleibt bei Einführung neuer Veränderlicher x', welche durch die Gleichungen*

$$x_i' = x_i + t \cdot Y x_i + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

einer eingliedrigen Gruppe definirt sind, dann und nur dann invariant, wenn zwischen Yf und den $X_k f$ q Relationen von der Form

$$(Y X_k) = \sum_1^q {}_\nu \, g_{k\nu} \cdot X_\nu f \qquad (k = 1 \cdots q) \tag{4}$$

bestehen, in welchen die $g_{k\nu}$ Constanten bezeichnen. Sind diese Bedingungen erfüllt, so erhält $\Sigma e_k X_k f$ bei der betreffenden

*) Lie, Archiv for Mathematik og Naturvidenskab Bd. 3, Christiania 1878.

Variabelnänderung die Form $\Sigma e_k' X_k' f$, *wo* $e_1' \cdots e_q'$ *sich als Functionen von* t *aus den Differentialgleichungen*

$$\frac{de_k'}{dt} + \sum_1^q {}_\nu\, g_{\nu k} e_\nu' = 0 \qquad (k = 1 \cdots q)$$

bestimmen, unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen: $e_k' = e_k$ *für* $t = 0$.

Führt man die Integration aus, von welcher in dem vorstehenden Theoreme die Rede ist, bestimmt man also $e_1' \cdots e_r'$ aus den Differentialgleichungen

$$\frac{de_k'}{dt} = - \sum_1^q {}_\nu\, g_{\nu k} e_\nu' \qquad (k = 1 \cdots q)$$

unter Zugrundelegung der Anfangsbedingungen: $e_k' = e_k$ für $t = 0$, so erhält man Gleichungen von der Form:

$$e_k' = \sum_1^q {}_j\, d_{kj}(t) \cdot e_j \qquad (k = 1 \cdots q).$$

Es ist klar, dass diese Gleichungen die endlichen Transformationen einer gewissen eingliedrigen Gruppe darstellen, derjenigen nämlich, welche von der infinitesimalen Transformation

$$\sum_1^q {}_k \left\{ \sum_1^q {}_\nu\, g_{\nu k} e_\nu \right\} \frac{\partial f}{\partial e_k}$$

erzeugt wird (vgl. Kap. 3, Seite 47 und 48).

Aus dem eben aufgestellten Theoreme wollen wir einen wichtigen allerdings naheliegenden Satz ableiten.

Gestattet die Schaar von ∞^{q-1} infinitesimalen Transformationen $e_1 X_1 f + \cdots + e_q X_q f$ die beiden infinitesimalen Transformationen $Y_1 f$ und $Y_2 f$, so gestattet sie zugleich jede aus $Y_1 f$ und $Y_2 f$ linear abgeleitete infinitesimale Transformation $c_1 Y_1 f + c_2 Y_2 f$; dies folgt unmittelbar daraus, dass die infinitesimale Transformation

$$(c_1 Y_1 f + c_2 Y_2 f,\ X_k f) = c_1 (Y_1 X_k) + c_2 (Y_2 X_k)$$

sich in unserem Falle aus den $X_i f$ linear ableiten lässt. Unsere Schaar $e_1 X_1 f + \cdots + e_q X_q f$ gestattet aber auch die infinitesimale Transformation $(Y_1 Y_2)$. In der That, bildet man die Jacobische Identität

$$((Y_1 Y_2) X_k) + ((Y_2 X_k) Y_1) + ((X_k Y_1) Y_2) = 0,$$

und berücksichtigt, dass $(Y_1 X_k)$ und $(Y_2 X_k)$ sich aus den $X_i f$ linear ableiten lassen, so erkennt man, dass dies auch mit $((Y_1 Y_2) X_k)$ der Fall ist.

Durch Verbindung dieser beiden Bemerkungen erhält man den angekündigten

Satz 1. *Lässt sich die allgemeinste infinitesimale Transformation, welche eine Schaar von* ∞^{q-1} *infinitesimalen Transformationen*

$$e_1 \cdot X_1 f + \cdots + e_q \cdot X_q f$$

invariant lässt, aus einer begränzten Anzahl infinitesimaler Transformationen etwa aus $Y_1 f \cdots Y_m f$ *linear ableiten, so erzeugen die* $Y_k f$ *eine m-gliedrige Gruppe.*

Dieser Satz lässt sich noch verallgemeinern; es ist ja selbstverständlich, dass der Inbegriff *aller endlichen* Transformationen, welche die Schaar $\Sigma e_k X_k f$ invariant lassen, immer eine Gruppe bildet.

§ 70.

Die Bedingungen des letzten Theorems seien erfüllt, die Schaar der ∞^{q-1} infinitesimalen Transformationen $\Sigma e_k X_k f$ bleibe invariant gegenüber allen Transformationen der eingliedrigen Gruppe Yf.

Nun gilt nach Kap. 3, S. 57 folgendes: geht die infinitesimale Transformation Xf bei Einführung neuer Veränderlicher über in Zf, so gehen zugleich die Transformationen der eingliedrigen Gruppe Xf über in die Transformationen der eingliedrigen Gruppe Zf. Wir schliessen daher, dass unter den Voraussetzungen des Theorems 43 nicht blos die Schaar der ∞^{q-1} infinitesimalen Transformationen $e_1 X_1 f + \cdots + e_q X_q f$ invariant bleibt, sondern auch die Schaar der ∞^{q-1} von diesen infinitesimalen Transformationen erzeugten eingliedrigen Gruppen und natürlich auch der Inbegriff der ∞^q endlichen Transformationen, welche diesen eingliedrigen Gruppen angehören.

Aber wir wollen noch einen Schritt weiter gehen, wir wollen untersuchen, wie sich der analytische Ausdruck der einzelnen endlichen Transformationen der eingliedrigen Gruppen $e_1 X_1 f + \cdots + e_q X_q f$ verhält, wenn an Stelle der x die neuen Veränderlichen

$$x_i' = x_i + t \cdot Y x_i + \cdots$$

eingeführt werden.

Die Antwort auf diese Frage giebt der Satz 3 in Kap. 3, S. 58. Aus diesem Satze geht nämlich ohne Weiteres hervor, dass jede endliche Transformation

$$\bar{x}_i = x_i + \sum_k^{1 \cdots q} e_k \cdot X_k x_i + \sum_{kj}^{1 \cdots q} \frac{e_k e_j}{1 \cdot 2} X_k X_j x_i + \cdots \tag{8}$$

$$(i = 1 \cdots n)$$

bei Einführung der neuen Veränderlichen x' die Gestalt erhält:

$$\overline{x}_i' = x_i' + \sum_k^{1\cdots q} e_k' \cdot X_k' x_i' + \sum_{kj}^{1\cdots q} \frac{e_k' e_j'}{1\cdot 2} X_k' X_j' x_i' + \cdot\cdot \tag{9}$$

$$(i = 1 \cdots n),$$

wo der Zusammenhang zwischen den e_k und den e_k' durch die Relation

$$\sum_1^q{}_k \, e_k \cdot X_k f = \sum_1^q{}_k \, e_k' \cdot X_k' f \tag{10}$$

festgelegt ist. Wir sehen somit direkt, dass die betreffende Schaar von ∞^q endlichen Transformationen in den neuen Veränderlichen x' genau dieselbe Form besitzt wie in den ursprünglichen Veränderlichen x. Ausserdem aber bemerken wir, dass eine endliche Transformation, welche in den x die Parameter $e_1 \cdots e_q$ hat, nach Einführung der neuen Veränderlichen x' die Parameter $e_1' \cdots e_q'$ besitzt.

Nun ist, wie soeben gesagt, der Zusammenhang zwischen den e und den e' durch die Identität (10) vollkommen festgelegt; diese Identität genügt daher vollständig, wenn es sich darum handelt, die neue Form anzugeben, welche eine beliebige endliche Transformation (8) beim Uebergang zu den x' annimmt.

Am deutlichsten bringen wir diesen Sachverhalt zum Ausdruck, wenn wir $\Sigma e_k X_k f$ *geradezu als Symbol der endlichen Transformation:*

$$\overline{x}_i = x_i + \sum_1^q{}_k \, e_k \cdot X_k x_i + \cdots \quad (i = 1 \cdots n)$$

auffassen, wobei dann die absoluten Werthe der e_k *in Betracht kommen, nicht blos ihre Verhältnisse.* Dann können wir einfach sagen:

Die endliche Transformation $\Sigma e_k X_k f$ *geht bei Einführung der neuen Veränderlichen* x' *in die endliche Transformation* $\Sigma e_k' X_k' f$ *über.*

In den noch folgenden Untersuchungen dieses Kapitels wird $\Sigma e_k X_k f$ bald als Symbol einer endlichen, bald als Symbol einer infinitesimalen Transformation angewendet. Wir werden daher in jedem einzelnen Falle hervorheben, welche von beiden Interpretationen des Symbols gemeint ist.

§ 71.

Die Schaar der ∞^q endlichen Transformationen $e_1 X_1 f + \cdots + e_q X_q f$ möge bei allen Transformationen der eingliedrigen Gruppe Yf invariant bleiben. Es kann geschehen, dass Yf selbst eine infinitesimale Transformation der Schaar $\Sigma e_k X_k f$ ist; von besonderem Interesse ist namentlich der Fall, dass für Yf eine jede der ∞^{q-1} infinitesimalen Transformationen $\Sigma e_k X_k f$ gesetzt werden kann. Dies wird dann, aber auch nur dann eintreten, wenn zwischen den $X_k f$ Relationen von der Form

$$(X_i X_k) = \sum_1^q {}_s\, g_{iks} X_s f$$

bestehen. Aus dem Theorem des vorigen Paragraphen erhalten wir daher das folgende speciellere, in welchem wir uns r statt q und c_{iks} statt g_{iks} zu schreiben erlauben:

Theorem 44. *Soll eine Schaar von ∞^r endlichen Transformationen*

$$e_1 \cdot X_1 f + \cdots + e_r \cdot X_r f \quad \textit{oder} \quad \bar{x}_i = \mathfrak{P}_i(x_1 \cdots x_n,\, e_1 \cdots e_r)$$

bei jeder Transformation, welche ihr angehört, invariant bleiben, soll sie also bei Einführung der neuen Veränderlichen:

$$x_i' = \mathfrak{P}_i(x_1 \cdots x_n,\, h_1 \cdots h_r), \quad \bar{x}_i' = \mathfrak{P}_i(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n,\, h_1 \cdots h_r)$$

an Stelle der x und $\bar{x}$ die Form

$$\bar{x}_i' = \mathfrak{P}_i(x_1' \cdots x_n',\, l_1 \cdots l_r)$$

annehmen, wo die l nur von $e_1 \cdots e_r$ und $h_1 \cdots h_r$ abhängen, so ist nothwendig und hinreichend, dass die Xf paarweise in Beziehungen von der Form

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} \cdot X_s f$$

stehen, wo die c_{iks} absolute Constanten sind.

Dieses Theorem spricht eine wichtige Eigenschaft aus, welche die Schaar der ∞^r endlichen Transformationen $\Sigma e_k X_k f$ besitzt, sobald Relationen von der Form $(X_i X_k) = \sum_s c_{iks} X_s f$ bestehen. Bemerkenswerth ist es, dass wir beim Beweise dieses Theorems die Untersuchungen der früheren Kapitel nur zum kleinsten Theile benutzt haben; wir haben weiter nichts benutzt als einige Entwickelungen der Kapitel 1, 2, 3 und 8. Namentlich beachte man, dass wir von dem Theoreme 24, Kap. 9, S. 158 keinen Gebrauch gemacht haben.

Setzt man dieses letztere Theorem als bekannt voraus, so kann man den Beweis des Theorems 44 folgendermassen abkürzen: man zeigt zunächst wie oben, dass die Relationen $(X_i X_k) = \Sigma c_{iks} X_s f$ nothwendig sind; aus Theorem 24, S. 158 ergiebt sich dann, dass die ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen $\Sigma e_k X_k f$ eine r-gliedrige Gruppe erzeugen. Sind $x_i' = \mathfrak{P}_i(x_1 \cdots x_n,\, h_1 \cdots h_r)$ die endlichen Gleichungen dieser Gruppe, so besteht nach Theorem 5, S. 45 eine Identität von der Form

$$\sum_1^r {}_k\, e_k \cdot X_k f = \sum_1^r {}_k\, e_k' \cdot X_k' f;$$

damit ist der Beweis des Theorems 44 geliefert.

Man braucht nicht einmal sich auf Theorem 5, S. 45 zu beziehen, sondern kann folgendermassen schliessen:

Die Gleichungen $x_i' = \mathfrak{P}_i(x, h)$ unsrer Gruppe geben aufgelöst eine Transformation von der Gestalt

$$x_i = \mathfrak{P}_i(x_1' \cdots x_n', \chi_1(h) \cdots \chi_r(h)),$$

diejenige nämlich, welche zu der Transformation mit den Parametern $h_1 \cdots h_r$ invers ist. Denkt man sich nun diese Werthe der x_i in die Gleichungen $\bar{x}_i = \mathfrak{P}_i(x,e)$ eingesetzt und berücksichtigt, dass man es mit einer Gruppe zu thun hat, so erkennt man das Bestehen gewisser Gleichungen von der Form

$$\bar{x}_i = \mathfrak{P}_i(x_1' \cdots x_n', \psi_1(h,e) \cdots \psi_r(h,e)).$$

Setzt man endlich diese Ausdrücke für die $\bar{x}_i$ in die Gleichungen $\bar{x}_i' = \mathfrak{P}_i(\bar{x},h)$ ein, so erhält man:

$$\bar{x}_i' = \mathfrak{P}_i(x_1' \cdots x_n', l_1 \cdots l_r).$$

Das ist die neue Form, welche die Transformationen $\bar{x}_i = \mathfrak{P}_i(x,e)$ bei Einführung der neuen Veränderlichen x' annehmen. Die l sind dabei offenbar Functionen von den e und den h allein, gerade wie es das Theorem 44, S. 256 behauptet. —

Damit ist der Zusammenhang klargelegt, welcher zwischen dem Theorem 24, S. 158 und dem Theorem 44 des gegenwärtigen Kapitels besteht.

§ 72.

Um die erhaltenen Resultate kürzer, ja, wenn man will, klarer aussprechen zu können, werden wir wie schon früher die Symbolik der Substitutionentheorie auf die Theorie der Transformationsgruppen übertragen.

Wir werden alle endlichen Transformationen $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ mit dem gemeinsamen Symbole T bezeichnen, die einzelnen Transformationen aber durch einen angefügten Index kennzeichnen, so dass zum Beispiel das Symbol $T_{(a)}$ die endliche Transformation

$$a_1 \cdot X_1 f + \cdots + a_r \cdot X_r f$$

bedeutet.

Indem wir diese Ausdrucksweise benutzen, können wir zunächst das Theorem 24, S. 158 folgendermassen aussprechen:

Satz 2. *Stehen r unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ paarweise in Beziehungen von der Form:*

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}^s \, c_{iks} X_s f,$$

so enthält die Schaar aller endlichen Transformationen $\Sigma e_k X_k f$ *oder* $T_{(c)}$ *gleichzeitig mit den beiden Transformationen* $T_{(a)}$ *und* $T_{(b)}$ *auch die Transformation* $T_{(a)} T_{(b)}$; *es besteht also eine symbolische Gleichung von der Form*

$$T_{(a)} T_{(b)} = T_{(c)},$$

in welcher die Parameter c Functionen der a und der b sind.

In entsprechender Weise erhalten wir aus dem Theoreme 44 des gegenwärtigen Kapitels den folgenden Satz, welcher allerdings nicht den ganzen Inhalt des Theorems erschöpft:

Satz 3. *Stehen r unabhängige infinitesimale Transformationen* $X_1 f \cdots X_r f$ *paarweise in der Beziehung* $(X_i X_k) = \Sigma c_{iks} X_s f$, *so enthält die Schaar der* ∞^r *endlichen Transformationen* $\Sigma e_k X_k f$ *oder* $T_{(c)}$ *zugleich mit den Transformationen* $T_{(a)}$ *und* $T_{(b)}$ *auch die Transformation* $T_{(a)}^{-1} T_{(b)} T_{(a)}$, *es besteht also eine Gleichung von der Form*

$$T_{(a)}^{-1} T_{(b)} T_{(a)} = T_{(c')},$$

in welcher die Parameter c′ Functionen der a und der b sind.

Das Bestehen der symbolischen Relation: $T_{(a)}^{-1} T_{(b)} T_{(a)} = T_{(c')}$ ist offenbar eine Folge der früheren Relation: $T_{(a)} T_{(b)} = T_{(c)}$, also ist auch der letzte Satz eine Folge des vorhergehenden, wie wir schon im vorigen Paragraphen gesehen haben.

Endlich erhalten wir noch durch Verbindung der beiden Theoreme 44 und 24, S. 158 das folgende merkwürdige Resultat:

Theorem 45. *Besitzt eine Schaar von* ∞^r *endlichen Transformationen:* $a_1 X_1 f + \cdots + a_r X_r f$ *oder kurz* $T_{(a)}$ *die Eigenschaft, dass die Transformation* $T_{(a)}^{-1} T_{(b)} T_{(a)}$ *immer der Schaar angehört, welche Werthe auch die Parameter* $a_1 \cdots a_r$, $b_1 \cdots b_r$ *haben mögen, so bildet die betreffende Schaar von* ∞^r *Transformationen eine r-gliedrige Gruppe, das heisst: es ist auch* $T_{(a)} T_{(b)}$ *stets eine Transformation, welche der Schaar angehört.*

§ 73.

Fällt die Transformation $T_{(a)}^{-1} T_{(b)} T_{(a)}$ mit der Transformation $T_{(b)}$ zusammen, was wir durch die symbolische Gleichung:

$$T_{(a)}^{-1} T_{(b)} T_{(a)} = T_{(b)}$$

ausdrücken, so sagen wir: *die Transformation* $T_{(b)}$ *bleibt bei der Transformation* $T_{(a)}$ *invariant.*

In diesem Falle ist aber auch:

$$T_{(b)}^{-1} T_{(a)} T_{(b)} = T_{(a)},$$

das heisst, die Transformation $T_{(a)}$ bleibt bei der Transformation $T_{(b)}$ invariant; andererseits ist:

$$T_{(a)}\, T_{(b)} = T_{(b)}\, T_{(a)},$$

eine Gleichung, welche aussagt, dass die beiden Transformationen $T_{(a)}$ und $T_{(b)}$ mit einander *vertauschbar* sind (vgl. S. 3).

Wir bemerkten schon in Theorem 6, S. 49, dass die Transformationen einer jeden eingliedrigen Gruppe paarweise vertauschbar sind. Nunmehr können wir auch die allgemeinere Frage erledigen, wann die Transformationen zweier verschiedener eingliedriger Gruppen Xf und Yf mit einander vertauschbar sind.

In die allgemeine endliche Transformation eXf der eingliedrigen Gruppe Xf führen wir die neuen Veränderlichen x_i' ein, welche durch die endlichen Gleichungen $x_i' = x_i + t \cdot Yx_i + \cdots$ der eingliedrigen Gruppe Yf definirt sind. Die Transformationen unsrer beiden eingliedrigen Gruppen werden dann, aber auch nur dann mit einander vertauschbar sein, wenn jede Transformation von der Form eXf bei Einführung der x' invariant bleibt, wenn also eXf gleich $eX'f$ wird.

Nach dem Theoreme 43, S. 252 ist zum Bestehen einer Gleichung von der Form

$$e \cdot Xf = e' \cdot X'f$$

nothwendig und hinreichend, dass die infinitesimalen Transformationen Xf und Yf eine Relation

$$(YX) = g \cdot Xf$$

befriedigen; das e' bestimmt sich dabei aus der Differentialgleichung

$$\frac{de'}{dt} + ge' = 0.$$

In unserem Falle soll aber e' für jedes t gleich e sein, also hängt e' gar nicht von t ab, d. h. der Differentialquotient $\frac{de'}{dt}$ verschwindet und mit ihm die Grösse g. Diese Bedingung $g = 0$ ist offenbar zugleich nothwendig und hinreichend. Folglich gilt der

Satz 4. *Die endlichen Transformationen zweier eingliedriger Gruppen Xf und Yf sind dann und nur dann paarweise vertauschbar, wenn der Ausdruck (XY) identisch verschwindet.*

Es liegt nahe, *zwei infinitesimale Transformationen Xf und Yf, welche in der Beziehung $(XY) \equiv 0$ stehen, als vertauschbar zu bezeichnen.* Führen wir diese Ausdrucksweise ein, so können wir sagen, dass die endlichen Transformationen zweier eingliedriger Gruppen dann und nur dann paarweise vertauschbar sind, wenn die infinitesimalen Transformationen beider Gruppen es sind.

Aus dem letzten Satze ergiebt sich ferner das

Theorem 46. *Die endlichen Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe $X_1f \cdots X_rf$ sind dann und nur dann paarweise vertauschbar, wenn alle Ausdrücke (X_iX_k) identisch verschwinden, anders ausgesprochen, wenn die infinitesimalen Transformationen $X_1f \cdots X_rf$ paarweise vertauschbar sind.**)

§ 74.

Aus den allgemeinen Entwickelungen der §§ 69 und 70 werden wir jetzt noch einige weitere Folgerungen ziehen, die von Wichtigkeit sind.

Wir setzen wieder voraus, dass die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1f \cdots X_rf$ in den Beziehungen

$$(X_iX_k) = \sum_1^r {}^s c_{iks}\, X_sf$$

stehen, dass also nach Theorem 24 des Kap. 9, S. 158 die ∞^r endlichen Transformationen $\Sigma e_k X_k f$ eine r-gliedrige Gruppe bilden. Bleibt nun die Schaar der Transformationen $\Sigma e_k X_k f$ bei allen Transformationen einer eingliedrigen Gruppe Yf invariant, welche der r-gliedrigen Gruppe nicht angehört, so bestehen nach Theorem 43, S. 252 r Gleichungen von der Form

$$(YX_k) = \sum_1^r {}^s g_{ks}\, X_sf. \tag{4}$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die $r+1$ infinitesimalen Transformationen $X_1f \cdots X_rf$, Yf eine $(r+1)$-gliedrige Gruppe erzeugen, welcher $X_1f \cdots X_rf$ als r-gliedrige Untergruppe angehört.

Ausserdem ist klar, dass die Relationen (4) ihre Form nicht wesentlich ändern, wenn für Yf eine ganz beliebige infinitesimale Transformation der $(r+1)$-gliedrigen Gruppe eingesetzt wird.

Sind daher $x_i' = \psi_i(x_1 \cdots x_n;\ a_1 \cdots a_{r+1})$ die endlichen Gleichungen der $(r+1)$-gliedrigen Gruppe, so bleibt die Schaar der endlichen Transformationen $\Sigma e_k X_k f$ invariant, wenn man in dieselbe an Stelle der x die neuen Veränderlichen x' einführt, d. h. in dem analytischen Ausdrucke der r-gliedrigen Gruppe ändern sich nur die Parameter.

Aehnliches würde gelten, wenn man statt der einen Transformation Yf mehrere etwa m solche hätte, welche sämmtlich Relationen von der Form (4) befriedigen; ausserdem wollen wir noch die Voraussetzung hinzufügen, dass diese m infinitesimalen Transformationen $Y_1f \cdots Y_mf$ mit $X_1f \cdots X_rf$ zusammen eine $(r+m)$-gliedrige Gruppe erzeugen. Führen wir alsdann in die Gruppe $X_1f \cdots X_rf$ vermöge

*) Lie, Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania 1872; Archiv for Mathematik og Naturvidenskab Bd. 8, S. 180, 1882; Math. Annalen Bd. 24, S. 557, 1884.

einer beliebigen Transformation der $(r+m)$-gliedrigen Gruppe neue Veränderliche ein, so bleibt die Schaar der endlichen Transformationen unsrer r-gliedrigen Gruppe invariant, während sich allerdings in ihrer analytischen Darstellung die Parameter ändern werden.

Wir wollen diese Beziehung zwischen den beiden Gruppen kurz dadurch ausdrücken, dass wir sagen: *die r-gliedrige Gruppe $X_1f \cdots X_rf$ bleibt invariant bei allen Transformationen der $(r+m)$-gliedrigen, sie ist eine invariante Untergruppe derselben.*

Uebertragen wir die in der Substitutionentheorie gebräuchliche Ausdrucksweise, so können wir die Definition der invarianten Untergruppen auch folgendermassen fassen:

Ist T Symbol einer beliebigen Transformation der $(r+m)$-gliedrigen Gruppe G, und ist S eine beliebige Transformation einer Untergruppe von G, so ist diese Untergruppe in G invariant, wenn stets auch die Transformation $T^{-1}ST$ der betreffenden Untergruppe angehört.

Die analytischen Bedingungen für die Invarianz einer Untergruppe sind in dem oben Gesagten vollständig angegeben; wir brauchen sie daher nur noch einmal zusammenzufassen:

Theorem 47. *Ist die r-gliedrige Gruppe $X_1f \cdots X_rf$ in einer $(r+m)$-gliedrigen Gruppe $X_1f \cdots X_rf$, $Y_1f \cdots Y_mf$ enthalten, so ist sie eine invariante Untergruppe derselben, wenn jedes (Y_iX_k) sich linear mit constanten Coefficienten durch $X_1f \cdots X_rf$ allein ausdrückt.*

Man kann dem Theorem 47 die folgende allgemeinere, allerdings nur formell allgemeinere Fassung geben:

Satz 5. *Bildet der Inbegriff aller infinitesimalen Transformationen $e_1X_1f + \cdots + e_mX_mf$ eine in der r-gliedrigen Gruppe $X_1f \cdots X_mf \cdots X_rf$ invariante Schaar, so erzeugen $X_1f \cdots X_mf$ eine m-gliedrige invariante Untergruppe der r-gliedrigen Gruppe.*

Da nämlich alle (X_iX_k), in denen $i \leqq m$ ist, sich aus $X_1f \cdots X_mf$ allein linear ableiten lassen, so gilt das insbesondere von allen (X_iX_k), in denen i und k beide $\leqq m$. Demnach erzeugen $X_1f \cdots X_mf$ eine m-gliedrige Untergruppe, auf welche sich sofort das Theorem 47 anwenden lässt.

Zunächst einige Beispiele von invarianten Untergruppen.

Satz 6*). *Erzeugen die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1f \cdots X_rf$ eine r-gliedrige Gruppe, so erzeugt auch der Inbegriff*

*) Im Archiv for Mathematik og Naturvidenskab Bd. 8, S. 390, Christiania 1883 bemerkte Lie, dass die (X_iX_k) eine invariante Untergruppe bilden. Davon unabhängig hat Killing dies im Jahre 1886 erkannt.

aller infinitesimalen Transformationen $(X_i X_k)$ *eine Gruppe; enthält diese letztere r Parameter, so ist sie mit der Gruppe* $X_1 f \cdots X_r f$ *identisch; enthält sie weniger als r Parameter, so ist sie eine invariante Untergruppe der Gruppe* $X_1 f \cdots X_r f$*; fügt man zu den* $(X_i X_k)$ *beliebig viele von einander und von den* $(X_i X_k)$ *unabhängige infinitesimale Transformationen* $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ *hinzu, so erhält man stets wieder eine invariante Untergruppe der Gruppe* $X_1 f \cdots X_r f$.

Dass die $(X_i X_k)$ höchstens eine r-gliedrige Gruppe erzeugen können, ist klar, da sie alle der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ angehören; dass sie wirklich eine Gruppe erzeugen, ergiebt sich aus den Relationen

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}^s c_{iks} X_s f$$

sofort, es wird ja:

$$((X_i X_k)(X_j X_l)) = \sum_{s\sigma}^{1 \cdots r} c_{iks} c_{jl\sigma} (X_s X_\sigma).$$

Dass die von den $(X_i X_k)$ erzeugte Gruppe in der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ invariant ist, erhellt aus den Gleichungen:

$$(X_j (X_i X_k)) = \sum_1^r {}^s c_{iks} (X_j X_s).$$

Der letzte Theil des Satzes bedarf einer näheren Begründung nicht.

Bemerkenswerth ist die folgende Verallgemeinerung des eben bewiesenen Satzes:

Satz 7. *Erzeugen m unabhängige infinitesimale Transformationen* $Z_1 f \cdots Z_m f$ *der r-gliedrigen Gruppe* $X_1 f \cdots X_r f$ *eine m-gliedrige Untergruppe dieser Gruppe, und ist die betreffende Untergruppe in der r-gliedrigen invariant, so ist auch die Untergruppe, welche von den sämmtlichen infinitesimalen Transformationen* $(Z_\mu Z_\nu)$ *erzeugt wird, in der r-gliedrigen Gruppe invariant.*

Der Beweis hierfür ist sehr einfach. Unter den Voraussetzungen des Satzes bestehen Relationen von der Gestalt:

$$(X_k Z_\mu) = \sum_1^m {}^\lambda h_{k\mu\lambda} Z_\lambda f \qquad (k = 1 \cdots r;\ \mu = 1 \cdots m),$$

wo die $h_{k\mu\lambda}$ Constanten sind. Bilden wir nun die Jacobische Identität (vgl. Kap. 5, S. 94):

$$(X_k (Z_\mu Z_\nu)) + (Z_\mu (Z_\nu X_k)) + (Z_\nu (X_k Z_\mu)) = 0$$

und setzen in derselben für $(Z_\mu X_k)$ und $(Z_\nu X_k)$ die vorhin geschriebenen Ausdrücke, so erhalten wir die Gleichungen:

$$(X_k(Z_\mu Z_\nu)) = \sum_1^m {}^\lambda \{h_{k\nu\lambda}(Z_\mu Z_\lambda) - h_{k\mu\lambda}(Z_\nu Z_\lambda)\},$$

aus denen hervorgeht, dass die von den $(Z_\mu Z_\nu)$ erzeugte Untergruppe der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ in dieser letzteren invariant ist. Das aber war zu beweisen. —

Die r-gliedrige Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ oder kurz G_r enthalte eine $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe und es seien r unabhängige infinitesimale Transformationen $Y_1 f \cdots Y_r f$ der G_r so ausgewählt, dass $Y_1 f \cdots Y_{r-1} f$ diese invariante Untergruppe ist. Dann bestehen Relationen von der Form:

$$(Y_i Y_k) = c_{ik1} Y_1 f + \cdots + c_{ik,r-1} Y_{r-1} f \qquad (i, k = 1 \cdots r),$$

es lassen sich also alle $(Y_i Y_k)$ und natürlich auch alle $(X_i X_k)$ aus $Y_1 f \cdots Y_{r-1} f$ allein linear ableiten. Wir schliessen hieraus, dass jede $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe der G_r die sämmtlichen infinitesimalen Transformationen $(X_i X_k)$ enthält und erkennen so, dass der folgende Satz gilt:

Satz 8. *In der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ giebt es dann und nur dann eine $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe, wenn die infinitesimalen Transformationen $(X_i X_k)$ eine Gruppe mit weniger als r Parametern erzeugen; sind unter den $(X_i X_k)$ gerade $r_1 < r$ von einander unabhängige infinitesimale Transformationen vorhanden, so erhält man alle $(r-1)$-gliedrigen invarianten Untergruppen der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$, wenn man zu den $(X_i X_k)$ in allgemeinster Weise $r - r_1 - 1$ von einander und von den $(X_i X_k)$ unabhängige infinitesimale Transformationen $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ hinzufügt.*

Der Satz 1 in Kap. 12, Seite 205 liefert uns andere Beispiele von invarianten Untergruppen.

Enthielt nämlich eine Gruppe in der Umgebung eines Punktes $x_1^0 \cdots x_n^0$ infinitesimale Transformationen von erster und von höherer Ordnung in den $x_i - x_i^0$, so erzeugten jedesmal alle infinitesimalen Transformationen von k-ter $(k > 0)$ und höherer Ordnung eine Untergruppe. Nun liefern zwei infinitesimale Transformationen Xf und Yf von bezüglich k-ter und $(k+\nu)$-ter Ordnung durch Klammeroperation eine Transformation (XY) von der Ordnung $2k + \nu - 1$. Wegen $k > 0$ ist $2k + \nu - 1 \geqq k + \nu$, folglich muss sich (XY) aus den infinitesimalen Transformationen $(k+\nu)$-ter und höherer Ordnung linear ableiten lassen. Mit andern Worten: die sämmtlichen infinitesimalen Transformationen $(k+\nu)$-ter und höherer Ordnung erzeugen eine Gruppe, welche in der von den infinitesimalen Transformationen k-ter und höherer Ordnung erzeugten Gruppe invariant ist. Alles das gilt aber wie gesagt nur unter der Voraussetzung, dass die Zahl k grösser ist als Null.

Lassen sich insbesondere die Zahlen k und $k + \nu$ so wählen, dass die Gruppe in der Umgebung von $x_1^0 \cdots x_n^0$ keine infinitesimalen Transformationen von $(2k + \nu - 1)$-ter und höherer Ordnung enthält, so muss der Ausdruck (XY) identisch verschwinden. Es gilt daher der

Satz 9. *Enthält eine Gruppe in der Umgebung eines Punktes $x_1^0 \cdots x_n^0$ keine infinitesimalen Transformationen von $(s + 1)$-ter oder höherer Ordnung, enthält sie dagegen Transformationen von k-ter Ordnung, wo k die Bedingung $2k - 1 > s$ erfüllt, so erzeugen alle infinitesimalen Transformationen der Gruppe, welche von k-ter und höherer Ordnung sind, eine Gruppe mit paarweise vertauschbaren Transformationen.*

Der Punkt $x_1^0 \cdots x_n^0$ braucht hier keineswegs so beschaffen zu sein, dass sich für denselben die Coefficienten der aufgelösten Definitionsgleichungen der Gruppe (vgl. Kap. 11, S. 189ff.) regulär verhalten. —

Consequenterweise muss man sagen, dass jede endliche continuirliche Gruppe zwei invariante Untergruppen enthält, nämlich erstens sich selbst und zweitens die identische Transformation. Man erkennt das, wenn man in dem Theorem 47 einmal m das andere Mal r gleich Null setzt; in beiden Fällen ist die Bedingung für die Invarianz der Untergruppe $X_1 f \cdots X_r f$ von selbst erfüllt, sobald nur $X_1 f \cdots X_r f$, $Y_1 f \cdots Y_m f$ eine $(r + m)$-gliedrige Gruppe ist.

Von besonderer Wichtigkeit sind die Gruppen, welche, abgesehen von den beiden immer vorhandenen, gar keine invariante Untergruppe enthalten. Diese Gruppen sollen deshalb auch einen besonderen Namen haben, sie sollen *einfache Gruppen* heissen. Im Gegensatze dazu heisst eine Gruppe *zusammengesetzt*, wenn sie ausser den oben angegebenen zwei noch andere invariante Untergruppen enthält.

Zum Schlusse noch zwei Sätze über invariante Untergruppen:

Satz 10. *Die gemeinsamen Transformationen zweier invarianter Untergruppen einer Gruppe G bilden ebenfalls eine in G invariante Untergruppe.*

Eine Untergruppe von G bilden die betreffenden Transformationen sicher (vgl. Kap. 9, Satz 2, S. 159); diese Untergruppe muss in G invariant sein, da sie bei allen Transformationen von G in eine Gruppe übergeht, welche den beiden invarianten Untergruppen angehört, d. h. in sich selbst.

Satz 11. *Haben zwei invariante Untergruppen $Y_1 f \cdots Y_m f$ und $Z_1 f \cdots Z_p f$ einer Gruppe G keine infinitesimale Transformation gemein, so verschwinden alle Ausdrücke $(Y_i Z_k)$ identisch, das heisst es ist jede*

Transformation der einen Untergruppe mit jeder Transformation der andern Untergruppe vertauschbar.

Jeder Ausdruck $(Y_i Z_k)$ muss sich nämlich unter den gemachten Voraussetzungen sowohl durch $Y_1 f \cdots Y_m f$ als durch $Z_1 f \cdots Z_p f$ linear mit constanten Coefficienten ausdrücken; da aber beide Untergruppen keine infinitesimale Transformation gemein haben, so geht das nicht anders, als indem alle Ausdrücke $(Y_i Z_k)$ identisch verschwinden. Das Uebrige folgt aus dem Satze 4, S. 259.

§ 75.

Es giebt r-gliedrige Gruppen, unter deren infinitesimalen Transformationen man r unabhängige: $Y_1 f \cdots Y_r f$ so auswählen kann, dass für jedes $i < r$ die i unabhängigen infinitesimalen Transformationen $Y_1 f \cdots Y_i f$ eine i-gliedrige Gruppe erzeugen, welche in der $(i+1)$-gliedrigen: $Y_1 f \cdots Y_{i+1} f$ invariant ist. Zwischen $Y_1 f \cdots Y_r f$ bestehen alsdann Relationen von der Form:

$$(5) \qquad (Y_i Y_{i+k}) = \bar{c}_{i,i+k,1}\, Y_1 f + \cdots + \bar{c}_{i,i+k,i+k-1}\, Y_{i+k-1} f$$
$$(i = 1 \cdots r-1;\; k = 1 \cdots r-i).$$

In der Integrationstheorie solcher Systeme von Differentialgleichungen, welche endliche Gruppen gestatten, zeigt es sich, dass die Gruppen von der eben definirten besonderen Beschaffenheit allen andern Gruppen gegenüber eine gewisse ausgezeichnete Stellung einnehmen.*)

Später, in dem Kapitel über lineare homogene Gruppen, werden wir uns genauer mit dieser speciellen Kategorie von Gruppen beschäftigen; jetzt wollen wir nur zeigen, auf welche Weise entschieden werden kann, ob eine vorgelegte r-gliedrige Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ in die betreffende Kategorie gehört oder nicht.

Soll es möglich sein, unter den infinitesimalen Transformationen $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ r von einander unabhängige: $Y_1 f \cdots Y_r f$ auszuwählen, welche in Beziehungen von der Form (5) stehen, so muss es vor allen Dingen in der $G_r : X_1 f \cdots X_r f$ eine $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe geben. Ob dieses letztere der Fall ist, das zu entscheiden sind wir durch Satz 8, S. 263 in den Stand gesetzt: die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ enthält danach nur dann eine $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe, wenn die von allen $(X_i X_k)$ erzeugte Gruppe weniger als r etwa r_1 Parameter enthält; ist diese Bedingung erfüllt so erhält man alle $(r-1)$-gliedrigen invarianten Untergruppen der G_r, wenn man zu den $(X_i X_k)$ in allgemeinster Weise $r - r_1 - 1$ von

*) Lie, Ges. der Wiss. zu Christiania, 1874, S. 273. Math. Ann. Bd. XI, S. 517 und 518. Archiv for Math. og Nat. Bd. 3, 1878, S. 105ff., Bd. 8, 1883.

einander und von den $(X_i X_k)$ unabhängige infinitesimale Transformationen $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ hinzufügt.

Aber nicht jede r-gliedrige Gruppe, welche eine $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe enthält, gehört in die oben definirte besondere Kategorie; soll sie dahin gehören, so muss sie eine $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe enthalten, die ihrerseits eine $(r-2)$-gliedrige invariante Untergruppe enthält, diese letztere muss wieder eine $(r-3)$-gliedrige invariante Untergruppe enthalten und so weiter.

Hieraus ergiebt sich, wie wir bei der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ zu verfahren haben: wir müssen unter allen $(r-1)$-gliedrigen invarianten Untergruppen der G_r diejenigen auswählen, welche wenigstens eine $(r-2)$-gliedrige invariante Untergruppe enthalten und müssen ihre $(r-2)$ gliedrigen invarianten Untergruppen alle bestimmen; nach dem Obigen hat das keine Schwierigkeit. Sodann müssen wir unter den gefundenen $(r-2)$-gliedrigen Untergruppen diejenigen auswählen, welche $(r-3)$-gliedrige invariante Untergruppen enthalten und so fort.

Es ist klar, dass wir auf diesem Wege zur Beantwortung der Frage gelangen, welche wir uns betreffs der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ gestellt haben. Entweder erkennen wir, dass diese Gruppe nicht zu der bewussten besonderen Kategorie gehört, oder wir finden r unabhängige infinitesimale Transformationen $Y_1 f \cdots Y_r f$ unserer Gruppe, welche durch Relationen von der Form (5) verknüpft sind.

Die eben angedeutete Rechnung wird unter Umständen dadurch erschwert, dass die zu untersuchenden Untergruppen willkürliche Parameter enthalten, welche sich im Verlaufe der Rechnung specialisiren. Wir werden daher noch ein anderes Verfahren angeben, welches ebenfalls zur Beantwortung unserer Frage führt, welches aber alles Rechnen mit willkürlichen Parametern vermeidet.

Wir wollen annehmen, dass sich unter den $(X_i X_k)$ gerade $r_1 \leqq r$ unabhängige finden und dass alle $(X_i X_k)$ sich aus $X_1' f \cdots X_{r_1}' f$ linear ableiten lassen, dass ferner in entsprechender Weise alle $(X_i' X_k')$ aus den $r_2 \leqq r_1$ unabhängigen Transformationen $X_1'' f \cdots X_{r_2}'' f$, alle $(X_i'' X_k'')$ aus den $r_3 \leqq r_2$ unabhängigen $X_1''' f \cdots X_{r_3}''' f$ linear abgeleitet werden können und so weiter. Dann erzeugen $X_1' f \cdots X_{r_1}' f$ nach Satz 6, S. 261 eine r_1-gliedrige invariante Untergruppe G_{r_1} der G_r: $X_1 f \cdots X_r f$, ferner erzeugen $X_1'' f \cdots X_{r_2}'' f$ eine r_2-gliedrige invariante Untergruppe G_{r_2} der G_{r_1} und so fort; kurz, wir erhalten eine Reihe von Untergruppen $G_{r_1}, G_{r_2}, G_{r_3} \cdots$ der G_r, von denen jede in allen vorhergehenden enthalten und jedenfalls in der unmittelbar vorhergehenden invariant ist. Nach dem Satze 7, S. 262 ist nun aber zunächst die G_{r_2} nicht blos in der G_{r_1}, sondern auch in der G_r invariant, nach demselben Satze ist ferner die G_{r_3} nicht blos in der G_{r_2}, sondern auch in der G_{r_1} und sogar in der G_r selbst invariant und so fort. Man sieht, in der Reihe der Gruppen: G_r, G_{r_1}, $G_{r_2} \cdots$ ist jede einzelne in allen vorhergehenden Gruppen enthalten und in allen vorhergehenden Gruppen invariant.

In der Reihe der ganzen Zahlen r, r_1, $r_2 \cdots$ giebt es keine, welche grösser ist als eine der vorhergehenden und andererseits keine, welche kleiner ist als Null. Folglich muss eine positive ganze Zahl q existiren von solcher Beschaffenheit, dass $r_{q+1} = r_q$ ist, während für $j < q$ stets gilt: $r_{j+1} < r_j$. Augenscheinlich ist dann:

$$r_q = r_{q+1} = r_{q+2} = \cdots,$$

also überhaupt:

$$r_{q+k} = r_q \qquad (k = 1, 2 \cdots).$$

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Zahl r_q den Werth Null hat oder grösser ist als Null.

Im Falle $r_q = 0$ ist es, wie wir zeigen werden, immer möglich, r unabhängige infinitesimale Transformationen $Y_1 f \cdots Y_r f$ der G_r auszuwählen, welche in Beziehungen von der Form (5) stehen.

In der That, als infinitesimale Transformationen $Y_r f$, $Y_{r-1} f \cdots Y_{r_1+1} f$ wählen wir irgend $r - r_1$ von einander und von $X_1' f \cdots X_{r_1}' f$ unabhängige infinitesimale Transformationen $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ der G_r, als Transformationen $Y_{r_1} f$, $Y_{r_1-1} f \cdots Y_{r_2+1} f$ wählen wir irgend $r_1 - r_2$ von einander und von $X_1'' f \cdots X_{r_2}'' f$ unabhängige infinitesimale Transformationen $e_1' X_1' f + \cdots + e_{r_1}' X_{r_1}' f$ der G_{r_1}, $\cdots$, als Transformationen $Y_{r_{q-1}} f$, $Y_{r_{q-1}-1} f \cdots Y_1 f$ endlich wählen wir irgend r_{q-1} unabhängige infinitesimale Transformationen $e_1^{(q-1)} X_1^{(q-1)} f + \cdots + e_{r_{q-1}}^{(q-1)} X_{r_{q-1}}^{(q-1)} f$ der $G_{r_{q-1}}$. Auf diese Weise erhalten wir offenbar r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $Y_1 f \cdots Y_r f$ unserer G_r; wir behaupten von denselben, dass für jedes $i < r$ die i Transformationen $Y_1 f \cdots Y_i f$ eine i-gliedrige Gruppe erzeugen, welche in der $(i+1)$-gliedrigen: $Y_1 f \cdots Y_{i+1} f$ invariant ist. Gelingt es uns, diese Behauptung zu beweisen, so haben wir auch bewiesen, dass $Y_1 f \cdots Y_r f$ in den Beziehungen (5) stehen.

Es sei j irgend eine der Zahlen $1, 2 \cdots q$. Dann ist klar, dass die r_j von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen $Y_1 f \cdots Y_{r_j} f$ eine r_j-gliedrige Gruppe erzeugen, nämlich die oben definirte Gruppe G_{r_j}; allerdings ist zu bemerken, dass sich im Falle $j = q$ die G_{r_j} auf die identische Transformation reducirt.

Wie wir schon früher bemerkt haben, ist die G_{r_j} nach Satz 6, S. 261 in der Gruppe $G_{r_{j-1}}$ invariant; aus diesem Satze lässt sich aber noch mehr schliessen, es lässt sich schliessen, dass wir stets eine invariante Untergruppe der $G_{r_{j-1}}$ erhalten, wenn wir zu den infinitesimalen Transformationen $Y_1 f \cdots Y_{r_j} f$ der G_{r_j} irgend welche von einander und von $Y_1 f \cdots Y_{r_j} f$ unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe $G_{r_{j-1}}$ hinzufügen. Da nun $Y_{r_j+1} f \cdots Y_{r_{j-1}} f$ der $G_{r_{j-1}}$ angehören, da sie ferner von einander und $Y_1 f \cdots Y_{r_j} f$ unabhängig sind, so ergiebt sich, dass jedes der nachstehenden Systeme von infinitesimalen Transformationen

$$\begin{array}{l} Y_1 f \cdots Y_{r_j} f, \; Y_{r_j+1} f \cdots Y_{r_{j-1}-1} f \\ Y_1 f \cdots Y_{r_j} f, \; Y_{r_j+1} f \cdots Y_{r_{j-1}-2} f \\ \cdots \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ Y_1 f \cdots Y_{r_j} f, \; Y_{r_j+1} f, \; Y_{r_j+2} f \\ Y_1 f \cdots Y_{r_j} f, \; Y_{r_j+1} f \end{array}$$

eine invariante Untergruppe der $G_{r_{j-1}}$ erzeugt.

Auf diese Weise sind zwischen den beiden Gruppen $G_{r_{j-1}}$ und G_{r_j} gewisse Gruppen — $\Gamma_{r_{j-1}-1}, \Gamma_{r_{j-1}-2}, \cdots \Gamma_{r_j+1}$ mögen sie heissen — eingeschaltet, die folgende Eigenschaften besitzen: jede derselben hat eine um eins geringere Gliederzahl als die in der Reihe vorhergehende Gruppe, jede ist in allen vorhergehenden Gruppen der Reihe und in der $G_{r_{j-1}}$ enthalten, jede ist in der $G_{r_{j-1}}$ und daher auch in allen vorhergehenden Gruppen der Reihe, insbesondere in der unmittelbar vorhergehenden invariant. Dazu kommt noch, dass die G_{r_j} in der Γ_{r_j+1} als invariante Untergruppe enthalten ist.

Das Gesagte gilt für alle Werthe: $1, 2 \cdots q$ der Zahl j, also ist hiermit bewiesen, dass $Y_1 f \cdots Y_r f$ wirklich solche unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ sind, dass für $i < r$ stets $Y_1 f \cdots Y_i f$ eine i-gliedrige in der $(i+1)$-gliedrigen Gruppe $Y_1 f \cdots Y_{i+1} f$ invariante Gruppe erzeugen. Das aber wollten wir beweisen.

Der Fall, dass die oben definirte ganze Zahl r_q verschwindet, ist nunmehr erledigt, es bleibt noch der Fall, dass r_q grösser ist als Null. Wir werden zeigen, dass es in diesem Falle unmöglich ist, in der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ r unabhängige infinitesimale Transformationen $Y_1 f \cdots Y_r f$ auszuwählen, die in Beziehungen von der Form (5) stehen.

Ist $r_q > 0$, so enthält die r_q-gliedrige, von den r_q unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1^{(q)} f \cdots X_{r_q}^{(q)} f$ erzeugte Gruppe G_{r_q} sicher keine $(r_q - 1)$-gliedrige invariante Untergruppe. Da nämlich $r_{q+1} = r_q$ ist, so befinden sich unter den infinitesimalen Transformationen $(X_i^{(q)} X_k^{(q)})$ gerade r_q von einander unabhängige, woraus bei Berücksichtigung des Satzes 8, S. 263 die eben behauptete Eigenschaft der Gruppe G_{r_q} folgt.

Nehmen wir jetzt an, es giebt in der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ r unabhängige infinitesimale Transformationen $Y_1 f \cdots Y_r f$, welche durch Relationen von der Form (5) verknüpft sind, und bezeichnen wir die i-gliedrige Gruppe, welche unter dieser Voraussetzung von $Y_1 f \cdots Y_i f$ erzeugt wird mit $\mathfrak{G}_i$.

Die Gruppe G_{r_q} ist nach S. 267 in der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ invariant, enthält aber, wie wir vorhin sahen, keine $(r_q - 1)$-gliedrige invariante Untergruppe. Da nun jede $\mathfrak{G}_i$ eine $(i - 1)$-gliedrige invariante Untergruppe enthält, nämlich die Gruppe $\mathfrak{G}_{i-1}$, so ergiebt sich sofort, dass die G_{r_q} nicht mit der Gruppe $\mathfrak{G}_{r_q}$ zusammenfallen kann, es ergiebt sich aber zugleich das Vorhandensein einer ganzen Zahl m, welche mindestens gleich r_q, aber kleiner als r und so beschaffen ist, dass die G_{r_q} in keiner der Gruppen $\mathfrak{G}_{r_q}$, $\mathfrak{G}_{r_q+1} \cdots \mathfrak{G}_m$, dagegen in allen Gruppen: $\mathfrak{G}_{m+1}$, $\mathfrak{G}_{m+2} \cdots \mathfrak{G}_r$ enthalten ist.

Wir haben demnach eine m-gliedrige Gruppe $\mathfrak{G}_m$ und eine r_q-gliedrige Gruppe G_{r_q}, welche beide in der $(m+1)$-gliedrigen Gruppe $\mathfrak{G}_{m+1}$ als Untergruppen enthalten sind und zwar augenscheinlich beide als invariante Untergruppen. Die gemeinsamen Transformationen der $\mathfrak{G}_m$ und der G_{r_q} bilden nach Kap. 12, Satz 7, S. 211 eine Gruppe Γ, welche mindestens $r_q - 1$ Parameter hat, und welche nach Kap. 15, Satz 10, S. 264 in der Gruppe $\mathfrak{G}_{m+1}$ invariant ist. Da nun die G_{r_q} unter den gemachten Voraussetzungen nicht in der $\mathfrak{G}_m$ enthalten ist, so ergiebt sich, dass Γ gerade $(r_q - 1)$-gliedrig und zugleich in der G_{r_q} invariant ist.

Das ist ein Widerspruch, da die G_{r_q} nach dem Obigen gar keine $(r_q - 1)$-gliedrige invariante Untergruppe enthält. Folglich ist die Voraussetzung falsch, von der wir ausgingen, die Voraussetzung nämlich, dass sich in der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ r unabhängige infinitesimale Transformationen $Y_1 f \cdots Y_r f$ angeben lassen, welche zu einander in Beziehungen von der Form (5) stehen. Wir sehen daraus, dass es im Falle $r_q > 0$ keine infinitesimalen Transformationen $Y_1 f \cdots Y_r f$ von dieser Beschaffenheit giebt.

Durch die vorstehenden Entwickelungen ist ein einfaches Verfahren gegeben, vermittelst dessen man erkennen kann, ob eine vorgelegte r-gliedrige Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ der besonderen auf Seite 265 definirten Kategorie von Gruppen angehört oder nicht. Der Bequemlichkeit wegen fassen wir die gefundenen Ergebnisse noch einmal zusammen, wie folgt:

Satz 12. *Sind* $X_1 f \cdots X_r f$ *unabhängige infinitesimale Transformationen einer* r*-gliedrigen Gruppe, sind* $X_1' f \cdots X_{r_1}' f$ $(r_1 \leqq r)$ *solche unabhängige infinitesimale Transformationen, aus denen sich alle* $(X_i X_k)$ *linear ableiten lassen, sind ferner* $X_1'' f \cdots X_{r_2}'' f$ $(r_2 \leqq r_1)$ *solche unabhängige infinitesimale Transformationen, aus denen sich alle* $(X_i' X_k')$ *linear ableiten lassen, und definirt man in entsprechender Weise* $r_3 \leqq r_2$ *von einander unabhängige infinitesimale Transformationen* $X_1''' f \cdots X_{r_3}''' f$ *und so weiter, so erzeugen die* $X' f$ *eine* r_1*-gliedrige Gruppe, die* $X'' f$ *eine* r_2*-gliedrige, die* $X''' f$ *eine* r_3*-gliedrige und so weiter und zwar ist jede dieser Gruppen in allen vorhergehenden und auch in der Gruppe* $X_1 f \cdots X_r f$ *invariant. — In der Reihe der Zahlen* $r, r_1, r_2 \cdots$ *giebt es eine Zahl, etwa* r_q*, welche allen folgenden Zahlen:* $r_{q+1}, r_{q+2} \cdots$ *gleich ist, während dagegen die Zahlen* $r, r_1 \cdots r_q$ *alle von einander verschieden sind. Ist nun* $r_q = 0$*, so ist es stets möglich, in der Gruppe* $X_1 f \cdots X_r f$ r *solche von einander unabhängige infinitesimale Transformationen* $Y_1 f \cdots Y_r f$ *anzugeben, dass für jedes* $i < r$ *die Transformationen* $Y_1 f \cdots Y_i f$ *eine* i*-gliedrige Gruppe erzeugen, welche in der* $(i+1)$*-gliedrigen:* $Y_1 f \cdots Y_{i+1} f$ *invariant ist, sodass also Relationen von der besonderen Form*

$$(Y_i Y_{i+k}) = c_{i, i+k, 1} Y_1 f + \cdots + c_{i, i+k, i+k-1} Y_{i+k-1} f$$
$$(i = 1 \cdots r-1;\ k = 1 \cdots r-i)$$

bestehen. Ist dagegen $r_q > 0$*, so ist es nicht möglich, in der Gruppe* $X_1 f \cdots X_r f$ r *unabhängige infinitesimale Transformationen* $Y_1 f \cdots Y_r f$ *von der eben definirten Beschaffenheit anzugeben.*

Kapitel 16.

Die adjungirte Gruppe.

Es sei $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ eine r-gliedrige Gruppe mit den r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$X_k f = \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \cdots r).$$

Führt man in den Ausdruck $\Sigma e_k X_k f$ die x_i' als neue Veränderliche ein, so ergiebt sich, wie schon in Kap. 4, Satz 4, S. 81 gezeigt worden ist, für alle Werthe der e_k eine Gleichung von der Form:

$$\sum_1^r {}_k\, e_k \cdot X_k f = \sum_1^r {}_k\, e_k' \cdot X_k' f.$$

Dabei sind die e_k' gewisse lineare, homogene Functionen der e_k mit Coefficienten, welche von $a_1 \cdots a_r$ abhängen:

$$(1) \qquad e_k' = \sum_1^r {}_j\, \varrho_{kj}(a_1 \cdots a_r) \cdot e_j.$$

Führt man weiter in $\Sigma e_k' X_k' f$ die neuen Veränderlichen $x_i'' = f_i(x', b)$ ein, so bekommt man:

$$\sum_1^r {}_k\, e_k' \cdot X_k' f = \sum_1^r {}_k\, e_k'' \cdot X_k'' f,$$

wo:

$$(1') \qquad e_k'' = \sum_1^r {}_j\, \varrho_{kj}(b_1 \cdots b_r) \cdot e_j'.$$

Nun stellen aber die Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ eine Gruppe dar, also sind die x'' mit den x durch Relationen von der Form $x_i'' = f_i(x, c)$ verknüpft, in denen die c nur von den a und b abhängen:

$$c_k = \varphi_k(a_1 \cdots a_r,\ b_1 \cdots b_r).$$

Geht man daher unmittelbar von den x zu den x'' über, so findet man:

$$\sum_1^r {}_k\, e_k \cdot X_k f = \sum_1^r {}_k\, e_k'' \cdot X_k'' f$$

und zwar ist:

$$(1'') \quad e_k'' = \sum_1^r {}_j\, \varrho_{kj}(c_1 \cdots c_r) \cdot e_j = \sum_1^r {}_j\, \varrho_{kj}(\varphi_1(a, b) \cdots \varphi_r(a, b)) \cdot e_j.$$

Hieraus lässt sich schliessen, dass der Inbegriff aller Transformationen $e_k' = \Sigma \varrho_{kj}(a) \cdot e_j$ eine Gruppe bildet. Es ergiebt sich nämlich durch Verbindung der Gleichungen (1) und (1'):

$$e_k'' = \sum_{j,\,\nu}^{1 \cdots r} \varrho_{kj}(b_1 \cdots b_r) \cdot \varrho_{j\nu}(a_1 \cdots a_r) \cdot e_\nu,$$

was natürlich mit den Gleichungen (1'') übereinstimmen muss und zwar für alle Werthe der e, der a und der b. Es bestehen daher die r^2 Identitäten:

$$\varrho_{k\nu}(\varphi_1(a, b) \cdots \varphi_r(a, b)) \equiv \sum_1^r {}_j\, \varrho_{j\nu}(a_1 \cdots a_r) \cdot \varrho_{kj}(b_1 \cdots b_r),$$

aus denen hervorgeht, dass die Schaar der Transformationen $e_k' = \Sigma \varrho_{kj}(a) \cdot e_j$ wirklich eine Gruppe bildet.

Zu jeder r-gliedrigen Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$ gehört demnach eine ganz bestimmte lineare homogene Gruppe:

$$(1) \qquad e_k' = \sum_1^r {}_j\, \varrho_{kj}(a_1 \cdots a_r) \cdot e_j \qquad (k = 1 \cdots r),$$

welche wir als die *adjungirte Gruppe**) *der Gruppe* $x_i' = f_i(x, a)$ bezeichnen wollen.

Betrachten wir *zum Beispiel* die zweigliedrige Gruppe $x' = ax + b$ mit den beiden unabhängigen infinitesimalen Transformationen: $\frac{df}{dx}$, $x\frac{df}{dx}$. Wir finden:

$$e_1 \frac{df}{dx} + e_2 x \frac{df}{dx} = e_1 a \frac{df}{dx'} + e_2(x' - b)\frac{df}{dx'} = e'_1 \frac{df}{dx'} + e_2' x' \frac{df}{dx'},$$

also erhalten wir für die adjungirte Gruppe der Gruppe $x' = ax + b$ die folgenden Gleichungen:

$$e_1' = ae_1 - be_2, \quad e_2' = e_2,$$

welche augenscheinlich wirklich eine Gruppe darstellen.

Die adjungirte Gruppe der Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$ enthält in der Form, in welcher wir sie oben gefunden haben, gerade r willkürliche Parameter: $a_1 \cdots a_r$. Es bedarf aber bei jeder einzelnen Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$ einer besonderen Untersuchung, ob die Parameter $a_1 \cdots a_r$ in der adjungirten Gruppe alle wesentlich sind. Wirklich werden wir bald sehen, dass es r-gliedrige Gruppen giebt, deren adjungirte Gruppen nicht r wesentliche Parameter enthalten.

Eine Transformation kommt übrigens in der adjungirten Gruppe der Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$ unter allen Umständen vor, nämlich die identische Transformation; denn setzt man in den Gleichungen (1) für $a_1 \cdots a_r$ diejenigen Zahlenwerthe, welche in der Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$ die identische Transformation $x_i' = x_i$ liefern, so erhält man die Transformation: $e_1' = e_1, \cdots e_r' = e_r$, welche daher immer in der adjungirten Gruppe vorhanden ist. Allerdings kann es, wie wir sehen werden, geschehen, dass die adjungirte Gruppe blos aus der identischen Transformation: $e_1' = e_1, \cdots e_r' = e_r$ besteht.

§ 76.

Um die adjungirte Gruppe der Untersuchung zugänglich zu machen, müssen wir vor allen Dingen ihre infinitesimalen Transformationen bestimmen. Hierzu gelangen wir leicht durch Anwendung des Theorems 43, Kap. 15, S. 252; doch müssen wir dabei die Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ unserer Gruppe durch die äquivalenten *kanonischen* Gleichungen

$$(2) \qquad x_i' = x_i + \frac{t}{1}\sum_1^r {}_k\, \lambda_k \cdot X_k x_i + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

*) Lie, Archiv for Math., Bd. 1, Christiania 1876.

ersetzen, welche die ∞^{r-1} eingliedrigen Untergruppen der Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$ darstellen. Nach Kap. 4, S. 69 sind hier die a_k als Functionen von t und $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ durch das simultane System

(3) $$\frac{d a_k}{dt} = \sum_1^r {}_j\, \lambda_j \cdot \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) \qquad (k = 1 \cdots r)$$

definirt.

Vermittelst der Gleichungen (2) haben wir also die neuen Veränderlichen x_i' in $\Sigma e_k X_k f$ einzuführen und müssen dabei eine Relation von der Form

$$\sum_1^r {}_k\, e_k \cdot X_k f = \sum_1^r {}_k\, e_k' \cdot X_k' f$$

erhalten. Die in Theorem 43, S. 252 mit Yf bezeichnete infinitesimale Transformation lautet jetzt: $\lambda_1 X_1 f + \cdots + \lambda_r X_r f$; wir bekommen daher in unserem Falle:

$$Y(X_k(f)) - X_k(Y(f)) = \sum_1^r {}_\nu\, \lambda_\nu (X_\nu X_k)$$

$$= \sum_1^r {}_s \left\{ \sum_1^r {}_\nu\, \lambda_\nu c_{\nu k s} \right\} X_s f.$$

Für $e_1' \cdots e_r'$ ergeben sich demnach folgende Differentialgleichungen:

(4) $$\frac{d e_s'}{dt} + \sum_1^r {}_\nu\, \lambda_\nu \sum_1^r {}_k\, c_{\nu k s} e_k' = 0 \qquad (s = 1 \cdots r).$$

Die Integration dieser Differentialgleichungen betrachten wir als eine ausführbare Operation, da sie bekanntlich nur die Auflösung einer algebraischen Gleichung r-ten Grades erfordert. Führen wir die Integration aus unter Zugrundelegung der Anfangsbedingung: $e_k' = e_k$ für $t = 0$, so erhalten wir r Gleichungen von der Form:

(5) $$e_k' = \sum_1^r {}_j\, \psi_{kj}(\lambda_1 t, \cdots, \lambda_r t) \cdot e_j \qquad (k = 1 \cdots r),$$

welche mit den Gleichungen (1) äquivalent sind, sobald in diesen letzteren die a_k als Functionen von $\lambda_1 t, \cdots, \lambda_r t$ ausgedrückt werden.

Hieraus geht hervor, dass auch die Gleichungen (5) die adjungirte Gruppe darstellen. Nun aber haben wir die Gleichungen (5) genau in derselben Weise hergeleitet, als hätten wir alle endlichen Transformationen bestimmen wollen, welche von den infinitesimalen Transformationen

$$\sum_1^r {}_\nu\, \lambda_\nu \sum_{ks}^{1 \cdots r} c_{k\nu s} e_k \frac{\partial f}{\partial e_s} = \sum_1^r {}_\nu\, \lambda_\nu \cdot E_\nu f$$

erzeugt werden (vgl. S. 51, oben). *Also schliessen wir, dass die adjungirte Gruppe* (1) *aus dem Inbegriffe aller eingliedrigen Gruppen von der Form* $\lambda_1 E_1 f + \cdots + \lambda_r E_r f$ *besteht.*

Giebt es unter der Schaar aller infinitesimalen Transformationen $\lambda_1 E_1 f + \cdots + \lambda_r E_r f$ gerade ϱ und nicht mehr unabhängige, etwa $E_1 f \cdots E_\varrho f$, so sind alle endlichen Transformationen der eingliedrigen Gruppen $\lambda_1 E_1 f + \cdots + \lambda_r E_r f$ schon in dem Inbegriffe aller endlichen Transformationen der $\infty^{\varrho - 1}$ eingliedrigen Gruppen $\lambda_1 E_1 f + \cdots + \lambda_\varrho E_\varrho f$ enthalten. Der Inbegriff dieser ∞^ϱ endlichen Transformationen bildet die adjungirte Gruppe: $e_k' = \Sigma\, \varrho_{kj}(a) \cdot e_j$, welche somit nur ϱ wesentliche Parameter enthält (Kap. 3, Theorem 8, S. 65).

Nach dem Vorangehenden ist es vorauszusehen, dass $E_1 f \cdots E_\varrho f$ durch Relationen von der Form

$$(E_\mu E_\nu) = \sum_1^\varrho {}_s\, g_{\mu\nu s} \cdot E_s f$$

verknüpft sind; wir können das auch durch Rechnung bestätigen. Bei direkter Ausrechnung kommt:

$$E_\mu(E_\nu(f)) - E_\nu(E_\mu(f)) = \sum_{\sigma\, k\, \pi}^{1 \cdots r} (c_{\pi\mu k}\, c_{k\nu\sigma} - c_{\pi\nu k}\, c_{k\mu\sigma})\, e_\pi \frac{\partial f}{\partial e_\sigma}.$$

Aber zwischen den c_{iks} bestehen die $\frac{r(r-1)}{1 \cdot 2}$ Relationen

$$\sum_1^r {}_k\, (c_{\pi\mu k}\, c_{k\nu\sigma} + c_{\mu\nu k}\, c_{k\pi\sigma} + c_{\nu\pi k}\, c_{k\mu\sigma}) = 0,$$

welche wir seinerzeit (vgl. Kap. 9, Theorem 27, S. 170) aus der Jacobischen Identität abgeleitet haben. Nehmen wir hierzu noch, dass $c_{\nu\pi k} = -c_{\pi\nu k}$ ist und $c_{k\pi\sigma} = -c_{\pi k\sigma}$, so können wir die rechte Seite unserer Gleichung für $(E_\mu E_\nu)$ auf die Form bringen:

$$\sum_1^r {}_k\, c_{\mu\nu k} \sum_{\sigma\pi}^{1 \cdots r} c_{\pi k\sigma}\, e_\pi \frac{\partial f}{\partial e_\sigma},$$

also wird:

$$(E_\mu E_\nu) = \sum_1^r {}_k\, c_{\mu\nu k} \cdot E_k f.$$

Hier lässt sich endlich unter den oben gemachten Voraussetzungen die rechte Seite durch $E_1 f \cdots E_\varrho f$ allein ausdrücken, so dass wirklich Relationen von der Form

$$(E_\mu E_\nu) = \sum_1^\varrho {}_s\, g_{\mu\nu s} \cdot E_s f$$

bestehen, in welchen die $g_{\mu\nu s}$ Constanten bezeichnen.

Bevor wir weitergehen, wollen wir erst noch die bisherigen Ergebnisse des Kapitels im Zusammenhange wiederholen:

Theorem 48. *Führt man in die allgemeine infinitesimale Transformation* $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ *der* r*-gliedrigen Gruppe* $x_i' = f_i(x, a)$ *an Stelle der* x *die neuen Veränderlichen* x' *ein, so erhält man einen Ausdruck von der Form:*

$$e_1' \cdot X_1' f + \cdots + e_r' \cdot X_r' f;$$

dabei sind die e' *mit den* e *durch Gleichungen von der Gestalt*

$$e_k' = \sum_1^r {}_j\, \varrho_{kj}(a_1 \cdots a_r) \cdot e_j \qquad (k = 1 \cdots r)$$

verknüpft, welche eine Gruppe in den Veränderlichen e *darstellen, die sogenannte adjungirte Gruppe der Gruppe* $x_i' = f_i(x, a)$. *Diese adjungirte Gruppe enthält die identische Transformation und wird von gewissen infinitesimalen Transformationen erzeugt; bestehen zwischen* $X_1 f \cdots X_r f$ *die Relationen*

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} \cdot X_s f \qquad (i, k = 1 \cdots r),$$

und setzt man:

$$E_\mu f = \sum_{kj}^{1 \cdots r} c_{j\mu k}\, e_j \frac{\partial f}{\partial e_k} \qquad (\mu = 1 \cdots r),$$

so ist $\lambda_1 E_1 f + \cdots + \lambda_r E_r f$ *die allgemeine infinitesimale Transformation der adjungirten Gruppe und zwischen* $E_1 f \cdots E_r f$ *bestehen dabei die Relationen:*

$$(E_i E_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} \cdot E_s f \qquad (i, k = 1 \cdots r).$$

Sind zwei r-gliedrige Gruppen $X_1 f \cdots X_r f$ und $Y_1 f \cdots Y_r f$ so beschaffen, dass zu gleicher Zeit gilt:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} \cdot X_s f, \quad (Y_i Y_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} \cdot Y_s f,$$

beide Male mit denselben Constanten c_{iks}, so haben beide Gruppen offenbar dieselbe adjungirte Gruppe. Später werden wir sehen, dass unter Umständen auch solche Gruppen, welche nicht gleiche Gliederzahl besitzen, doch dieselbe adjungirte Gruppe haben.

§ 77.

Woran lässt sich nun erkennen, wie viele unabhängige es unter den infinitesimalen Transformationen $E_1 f \cdots E_r f$ giebt?

Sind $E_1 f \cdots E_r f$ nicht alle von einander unabhängig, so giebt es wenigstens eine infinitesimale Transformation $\Sigma g_\mu E_\mu f$, welche identisch verschwindet. Aus der Identität

$$\sum_1^r {}^\mu g_\mu \sum_{k\,j}^{1\cdots r} c_{j\mu k}\, e_j \frac{\partial f}{\partial e_k} \equiv 0$$

ergiebt sich:

$$\sum_1^r {}^\mu g_\mu\, c_{j\mu k} = 0$$

für alle Werthe von j und k, folglich verschwindet auch der Ausdruck

$$\left(X_j f,\ \sum_1^r {}^\mu g_\mu \cdot X_\mu f\right) = \sum_1^r {}^k \left\{ \sum_1^r {}^\mu g_\mu\, c_{j\mu k} \right\} X_k f,$$

das heisst die infinitesimale Transformation $\Sigma g_\mu X_\mu f$ ist mit allen r infinitesimalen Transformationen $X_j f$ vertauschbar. Enthält umgekehrt die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ eine infinitesimale Transformation $\Sigma g_\mu X_\mu f$, welche mit allen $X_k f$ vertauschbar ist, so folgt daraus in derselben Weise, dass die infinitesimale Transformation $\Sigma g_\mu E_\mu f$ identisch verschwindet.

Um diese Beziehungen möglichst kurz ausdrücken zu können, führen wir die folgende Benennung ein:

Eine infinitesimale Transformation $\Sigma g_\mu X_\mu f$ der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ heisst eine ausgezeichnete infinitesimale Transformation dieser Gruppe, wenn sie mit allen $X_k f$ vertauschbar ist.

Die ausgezeichneten infinitesimalen Transformationen der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ sind, nebenbei bemerkt, auch dadurch charakterisirt, dass sie bei Einführung der neuen Veränderlichen $x_i' = f_i(x, a)$ ihre Form behalten, welche Werthe auch die Parameter $a_1 \cdots a_r$ haben mögen. Ist nämlich die infinitesimale Transformation $\Sigma g_\mu X_\mu f$ ausgezeichnet, so besteht nach Kap. 15, S. 259 eine Relation von der Form:

$$\Sigma g_\mu \cdot X_\mu f = \Sigma g_\mu \cdot X_\mu' f.$$

Ueberdies zeigen die citirten Entwickelungen, dass jede endliche Transformation der eingliedrigen Gruppe $\Sigma g_\mu X_\mu f$ mit jeder endlichen Transformation der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ vertauschbar ist.

Nach dem oben Gesagten entspricht jeder ausgezeichneten infinitesimalen Transformation der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ eine lineare Relation zwischen $E_1 f \cdots E_r f$. Ist $\Sigma g_\mu X_\mu f$ eine ausgezeichnete infinitesimale Transformation, so besteht zwischen den Ef einfach die Relation: $\Sigma g_\mu E_\mu f = 0$. Folglich bestehen zwischen $E_1 f \cdots E_r f$ gerade so viele unabhängige Relationen dieser Art, als es in der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ unabhängige ausgezeichnete infinitesimale Transformationen giebt.

Giebt es also solcher Transformationen gerade m und nicht mehr unabhängige, so giebt es unter den infinitesimalen Transformationen $E_1 f \cdots E_r f$ gerade $r - m$ und nicht mehr unabhängige, und ebenso viele wesentliche Parameter enthält die adjungirte Gruppe.

Wir haben somit das

Theorem 49. *Die adjungirte Gruppe $e_k' = \Sigma \varrho_{kj}(a) \cdot e_j$ einer r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ enthält dann und nur dann r wesentliche Parameter, wenn keine von den ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen $\Sigma g_\mu X_\mu f$ innerhalb der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ ausgezeichnet ist; die adjungirte Gruppe hat dagegen weniger als r, nämlich gerade $r - m$ wesentliche Parameter, wenn die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ gerade m und nicht mehr unabhängige ausgezeichnete infinitesimale Transformationen enthält.**)

Nehmen wir zum Beispiel die Gruppe

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_r} \qquad (r \leqq n).$$

Deren infinitesimale Transformationen sind alle ausgezeichnet, denn alle c_{iks} sind gleich Null. Es verschwinden also alle r Ausdrücke $E_1 f \cdots E_r f$ identisch, und die adjungirte Gruppe schrumpft zur identischen Transformation zusammen.

Nehmen wir andererseits die viergliedrige Gruppe:

$$x \frac{\partial f}{\partial x}, \; y \frac{\partial f}{\partial x}, \; x \frac{\partial f}{\partial y}, \; y \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Dieselbe enthält eine einzige ausgezeichnete infinitesimale Transformation, nämlich:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y};$$

ihre adjungirte Gruppe ist daher blos dreigliedrig.

Enthält die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ die ausgezeichnete infinitesimale Transformation $\Sigma g_\mu X_\mu f$, so ist $\Sigma g_\mu X_\mu f = 0$ eine lineare partielle Differentialgleichung, welche bei der Gruppe invariant bleibt; die Gruppe ist in Folge dessen imprimitiv (vgl. S. 221). Wir schliessen hieraus, dass der folgende Satz gilt:

Satz 1. *Ist die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ primitiv, so enthält sie keine ausgezeichnete infinitesimale Transformation.*

Verbinden wir diesen Satz mit dem letzten Theoreme, so erhalten wir noch den

*) Lie, Math. Ann. Bd. XXV, S. 94.

Satz 2. *Die adjungirte Gruppe einer r-gliedrigen primitiven Gruppe enthält r wesentliche Parameter.*

An einer späteren Stelle werden wir den beiden letzten Sätzen eine etwas allgemeinere Fassung geben (vgl. das Kapitel 24, über systatische Gruppen).

Nach dem Vorangehenden sind die infinitesimalen Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ und diejenigen der adjungirten Gruppe $E_1 f \cdots E_r f$ einander derart zugeordnet, dass jeder nicht ausgezeichneten infinitesimalen Transformation $\Sigma e_k X_k f$ eine nicht verschwindende infinitesimale Transformation $\Sigma e_k E_k f$ entspricht, während jeder ausgezeichneten infinitesimalen Transformation $\Sigma e_k X_k f$ in der adjungirten Gruppe die *identische* Transformation zugeordnet ist. Berücksichtigt man überdies, dass die beiden Gleichungensysteme

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} \cdot X_s f, \quad (E_i E_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} \cdot E_s f$$

genau dieselbe Form haben, so könnte man auf die Vermuthung kommen, dass die adjungirte Gruppe keine ausgezeichnete infinitesimale Transformation enthalten kann. Diese Vermuthung wäre indess falsch; das zeigt uns die Gruppe $\frac{\partial f}{\partial x_2}, x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_1}$, deren adjungirte Gruppe aus zwei vertauschbaren infinitesimalen Transformationen besteht und somit zwei unabhängige ausgezeichnete infinitesimale Transformationen enthält.

§ 78.

Den Ausgangspunkt für unsere Untersuchung bildete die Bemerkung, dass der Ausdruck $\Sigma e_k X_k f$ bei Einführung der neuen Veränderlichen $x_i' = f_i(x, a)$ die ähnliche Form $\Sigma e_k' X_k' f$ annimmt. Nun aber kann der Ausdruck $\Sigma e_k X_k f$ nach Kap. 15, S. 255 als Symbol der allgemeinen endlichen Transformation der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ aufgefasst werden; die Grössen $e_1 \cdots e_r$ sind dabei als die Parameter der endlichen Transformationen der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ zu betrachten. Folglich können wir auch sagen: die endlichen Transformationen der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ werden beim Uebergang zu den Veränderlichen x_i' unter einander vertauscht, während ihr Inbegriff invariant bleibt. Wir können nach den Entwickelungen des vorigen Paragraphen hinzufügen, dass die betreffende Vertauschung durch eine Transformation der adjungirten Gruppe bewirkt wird.

Aber wenn von „*Vertauschung der endlichen Transformationen $\Sigma e_k X_k f$ unter einander*“ geredet wird, so liegt schon die Auffassung zu Grunde, dass man sich diese Transformationen als *Individuen* vorstellt: wir wollen diese Auffassung jetzt etwas ins Einzelne verfolgen.

Jedes Individuum in der Schaar $\Sigma e_k X_k f$ wird bestimmt durch die zugehörigen Werthe von $e_1 \cdots e_r$; der Anschaulichkeit halber denken wir uns daher die e_k als rechtwinklige Punktcoordinaten einer r-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit. Die Punkte dieser Mannigfaltigkeit stellen dann alle endlichen Transformationen $\Sigma e_k X_k f$ dar; sie werden daher transformirt durch unsere bekannte lineare homogene Gruppe

$$e_k' = \sum_1^r {}_j\, \varrho_{kj}(a) \cdot e_j.$$

Der Coordinatenanfang $e_1 = 0, \cdots e_r = 0$, der Bildpunkt der identischen Transformation $x_i' = x_i$ bleibt dabei offenbar invariant.

Jede endliche Transformation e_k^0 gehört einer ganz bestimmten eingliedrigen Gruppe an, deren Transformationen durch die Gleichungen

$$\frac{e_1}{e_1^0} = \cdots = \frac{e_r}{e_r^0}$$

definirt sind; bei unsrer Interpretation aber stellen diese Gleichungen eine Gerade durch $e_k = 0$ dar, das heisst:

Jede eingliedrige Untergruppe der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ wird im Raume $e_1 \cdots e_r$ durch eine Gerade dargestellt, welche durch den Coordinatenanfang $e_k = 0$ geht; umgekehrt stellt jede Gerade durch den Coordinatenanfang eine solche eingliedrige Untergruppe dar.

Jede andere Untergruppe der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ besteht aus eingliedrigen Untergruppen und diese eingliedrigen Gruppen sind bestimmt durch die infinitesimalen Transformationen, welche die betreffende Untergruppe enthält. Aber nach Kap. 11, Satz 6, S. 211 lassen sich die infinitesimalen Transformationen einer Untergruppe der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ durch *lineare homogene* Gleichungen zwischen $e_1 \cdots e_r$ definiren; dieselben Gleichungen definiren natürlich auch die eingliedrigen Gruppen, welche der Untergruppe angehören, also definiren sie überhaupt die endlichen Transformationen der betreffenden Untergruppe. Anders ausgesprochen:

Jede m-gliedrige Untergruppe der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ wird im Raume $e_1 \cdots e_r$ durch eine ebene m-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit dargestellt, welche durch den Coordinatenanfang: $e_1 = 0, \cdots e_r = 0$ geht.

Selbstverständlich gilt das Umgekehrte im Allgemeinen nicht; nur ganz ausnahmsweise wird der Fall eintreten, dass *jede* ebene Mannigfaltigkeit durch den Coordinatenanfang eine Untergruppe darstellt.

Die adjungirte Gruppe $e_k' = \Sigma \varrho_{kj}(a) \cdot e_j$ transformirt nun die Punkte e_k linear. Bleibt irgend ein Punkt $\bar{e}_k$ und in Folge dessen jeder Punkt $m\bar{e}_k = \mathrm{Const.}\, \bar{e}_k$ bei allen Transformationen der Gruppe invariant, so heisst das nach dem Früheren, dass die Transformationen der eingliedrigen Gruppe $\Sigma \bar{e}_k X_k f$ mit sämmtlichen Transformationen der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ vertauschbar sind.

Jede *invariante* Untergruppe der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ wird durch eine ebene den Coordinatenanfang enthaltende Mannigfaltigkeit dargestellt, welche bei allen Transformationen $e_k' = \Sigma \varrho_{kj}(a) \cdot e_j$ ihre Lage behält. Andererseits stellt jede durch den Coordinatenanfang gehende ebene Mannigfaltigkeit, welche bei allen Transformationen der adjungirten Gruppe invariant bleibt, eine invariante Untergruppe von $X_1 f \cdots X_r f$ dar (vgl. Kap. 15, Satz 5, S. 261).

Es sei jetzt M irgend eine ebene, durch den Coordinatenanfang gehende Mannigfaltigkeit, welche eine Untergruppe der G_r: $X_1 f \cdots X_r f$ darstellt. Wird auf M irgend eine Transformation der adjungirten Gruppe ausgeführt, so ergiebt sich eine neue ebene Mannigfaltigkeit, die gleichfalls eine Untergruppe der G_r darstellt. Offenbar ist diese neue Untergruppe mit der ursprünglichen durch eine Transformation der G_r ähnlich, was wir nach dem Vorgange der Substitutionentheorie so ausdrücken werden: *die beiden eben besprochenen Untergruppen sind innerhalb der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ mit einander* **gleichberechtigt**.

Der Inbegriff aller Untergruppen, welche innerhalb der G_r mit der von M dargestellten Untergruppe gleichberechtigt sind, wird durch eine Schaar von ebenen Mannigfaltigkeiten dargestellt, durch die Schaar nämlich, welche man erhält, sobald man auf M alle Transformationen der adjungirten Gruppe ausführt. Zwei beliebige Mannigfaltigkeiten dieser Schaar stellen natürlich gleichberechtigte Untergruppen dar.

Wir schliessen hieraus, dass jede invariante Untergruppe der G_r innerhalb der G_r nur mit sich selbst gleichberechtigt ist.

Da die Schaar aller Untergruppen g, welche mit einer gegebenen gleichberechtigt sind, aus der letzteren durch Ausführung aller Transformationen $e_k' = \Sigma \varrho_{kj}(a) \cdot e_j$ hervorgeht, so muss diese Schaar selbst bei allen Transformationen $e_k'' = \Sigma \varrho_{kj}(b) \cdot e_j$ reproducirt werden. Denn führt man die Transformationen $e_k' = \Sigma \varrho_{kj}(a) \cdot e_j$ und $e_k'' = \Sigma \varrho_{kj}(b) \cdot e_j$ nach einander aus, so erhält man dasselbe Resultat, als wenn man auf die ursprünglich gegebene Untergruppe alle Transformationen

$$e_k'' = \Sigma \varrho_{kj}(c) \cdot e_j \qquad (c_k = \varphi_k(a, b))$$

angewendet hätte; in beiden Fällen erhält man die bewusste Schaar.

Haben nun alle gleichberechtigten Untergruppen g eine continuirliche Anzahl von Transformationen mit einander gemein, so wird der Inbegriff aller dieser Transformationen durch eine ebene Mannigfaltigkeit des Raumes $e_1 \cdots e_r$ dargestellt. Diese ebene Mannigfaltigkeit bleibt natürlich bei allen Transformationen der adjungirten Gruppe invariant und stellt daher nach dem oben Gesagten eine invariante Untergruppe der G_r dar. Folglich gilt das

Theorem 50. *Haben diejenigen Untergruppen einer G_r, welche innerhalb der G_r mit einer bestimmten Untergruppe gleichberechtigt sind, eine Schaar von Transformationen gemein, so bildet der Inbegriff dieser Transformationen eine in der G_r invariante Untergruppe.*

§ 79.

Wir theilen die Untergruppen einer jeden r-gliedrigen Gruppe G_r in verschiedene Classen ein, die wir als *Typen von Untergruppen der* G_r bezeichnen. Zu *demselben* Typus rechnen wir solche Untergruppen der G_r, welche innerhalb der G_r mit einander gleichberechtigt sind; solche Untergruppen, welche innerhalb der G_r nicht gleichberechtigt sind, rechnen wir zu *verschiedenen* Typen.

Kennt man irgend eine Untergruppe der G_r, so kann man sofort alle Untergruppen angeben, welche demselben Typus angehören. Durch diesen Umstand wird die Aufzählung der Untergruppen einer vorgelegten Gruppe wesentlich erleichtert; denn man hat offenbar nicht nöthig, wirklich alle Untergruppen hinzuschreiben, man braucht vielmehr blos die verschiedenen Typen von Untergruppen aufzuzählen, indem man für jeden Typus einen Repräsentanten angiebt, also eine Untergruppe, welche dem betreffenden Typus angehört.

Auch bei den endlichen Transformationen einer Gruppe reden wir von verschiedenen Typen. Zwei endliche Transformationen: $e_1^0 X_1 f + \cdots + e_r^0 X_r f$ und $\bar{e}_1 X_1 f + \cdots + \bar{e}_r X_r f$ der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ rechnen wir dann aber auch nur dann zu demselben Typus, wenn sie innerhalb der G_r mit einander gleichberechtigt sind, das heisst: wenn die adjungirte Gruppe eine Transformation enthält, welche den Punkt $e_1^0 \cdots e_r^0$ in den Punkt $\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_r$ überführt. Es ist selbstverständlich, mag aber doch erwähnt werden, dass in der betreffenden Transformation $e_k' = \Sigma \gamma_{kj} e_j$ der adjungirten Gruppe die Determinante der Coefficienten γ_{kj} nicht verschwinden darf.

Wir wollen jetzt die Frage nach den Typen von Untergruppen einer vorgelegten Gruppe noch nicht in voller Allgemeinheit aufnehmen; doch wollen wir wenigstens zeigen, wie man zu verfahren hat, um die vorhandenen Typen von eingliedrigen Gruppen und von endlichen Transformationen zu finden.

Zunächst fragen wir nach allen Typen von endlichen Transformationen.

Es sei $e_1^0 X_1 f + \cdots + e_r^0 X_r f$ irgend eine endliche Transformation der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$. Führen wir auf den Punkt $e_1^0 \cdots e_r^0$ alle Transformationen der adjungirten Gruppe aus, so erhalten wir die Bildpunkte aller derjenigen endlichen Transformationen unsrer Gruppe, welche mit $\Sigma e_k^0 X_k f$ gleichberechtigt sind und somit demselben Typus angehören wie $\Sigma e_k^0 X_k f$. Der Inbegriff aller dieser Punkte bildet nach Kap. 14, S. 225 eine bei der adjungirten Gruppe invariante Mannigfaltigkeit und zwar eine von den damals sogenannten *kleinsten* invarianten Mannigfaltigkeiten.

Die endlichen Gleichungen der adjungirten Gruppe können wir als bekannt betrachten; folglich sind wir im Stande, ohne Integration die Gleichungen der eben erwähnten kleinsten invarianten Mannigfaltigkeiten anzugeben (vgl. Kap. 14, Theorem 37, S. 226). Da nun jede solche *kleinste* invariante Mannigfaltigkeit den Inbegriff aller endlichen Transformationen darstellt, welche einem gewissen Typus angehören, so sind hiermit alle Typen von endlichen Transformationen unserer Gruppe gefunden. Es gilt demnach der

Satz 3. *Ist eine r-gliedrige Gruppe $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ mit den r unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ vorgelegt, so findet man folgendermassen alle Typen von endlichen Transformationen $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ dieser Gruppe: man stellt die endlichen Gleichungen $e_k' = \Sigma \varrho_{kj}(a) \cdot e_j$ der adjungirten Gruppe der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ auf und bestimmt sodann im Raume der e die kleinsten Mannigfaltigkeiten, welche bei der adjungirten Gruppe invariant bleiben; diese Mannigfaltigkeiten stellen die verlangten Typen dar.*

Man vergesse bei alledem nicht, dass nur solche Transformationen der adjungirten Gruppe zulässig sind, bei denen die Determinante der Coefficienten nicht verschwindet. Ueber diesen Punkt vergleiche man das in Kap. 14, S. 225 Gesagte.

Suchen wir jetzt alle Typen von eingliedrigen Untergruppen oder, was dasselbe ist: alle *Typen von infinitesimalen Transformationen* unsrer Gruppe.

Zwei eingliedrige Gruppen $\Sigma e_k^0 X_k f$ und $\Sigma \bar{e}_k X_k f$ sind gleichberechtigt innerhalb der G_r, wenn es in der adjungirten Gruppe eine Transformation giebt, welche die Gerade

$$\frac{e_1}{e_1^0} = \cdots = \frac{e_r}{e_r^0}$$

in die Gerade:

$$\frac{e_1}{\bar{e}_1} = \cdots = \frac{e_r}{\bar{e}_r}$$

überführt; diese beiden durch den Coordinatenanfang gehenden Geraden sind ja die Bilder der betreffenden eingliedrigen Untergruppen. Denken wir uns daher auf die erste jener beiden Geraden alle Transformationen der adjungirten Gruppe ausgeführt, so erhalten wir alle durch den Coordinatenanfang gehenden Geraden, welche eingliedrige Untergruppen darstellen, die mit der Gruppe $\Sigma e_k^0 X_k f$ gleichberechtigt sind. Der Inbegriff aller dieser Geraden bildet natürlich eine bei der adjungirten Gruppe invariante Mannigfaltigkeit, die kleinste invariante Mannigfaltigkeit, welcher die Gerade: $\frac{e_1}{e_1^0} = \cdots = \frac{e_r}{e_r^0}$ angehört. Es ist klar dass diese Mannigfaltigkeit durch ein Gleichungensystem dargestellt wird, welches in den Veränderlichen $e_1 \cdots e_r$ *homogen* ist.

Umgekehrt leuchtet ein, dass jedes in den e homogene Gleichungensystem, welches die adjungirte Gruppe gestattet, eine invariante Schaar von eingliedrigen Gruppen darstellt. Da nun jedes in den e homogene Gleichungensystem dadurch als homogen charakterisirt ist, dass es alle Transformationen von der Form:

$$(6) \qquad e_1' = \lambda e_1, \cdots e_r' = \lambda e_r$$

gestattet, so erhalten wir alle invarianten Schaaren von eingliedrigen Gruppen, wenn wir alle Mannigfaltigkeiten des Raumes $e_1 \cdots e_r$ aufsuchen, welche ausser den Transformationen der adjungirten Gruppe auch noch alle Transformationen von der Form (6) gestatten. Suchen wir insbesondere alle kleinsten invarianten Mannigfaltigkeiten von dieser Beschaffenheit, so erhalten wir offenbar alle vorhandenen Typen von eingliedrigen Untergruppen.

Die Transformationen (6) bilden eine eingliedrige Gruppe, deren infinitesimale Transformation lautet:

$$Ef = \sum_1^r {}_k\, e_k \frac{\partial f}{\partial e_k}.$$

Fügen wir Ef zu den infinitesimalen Transformationen $E_1 f \cdots E_r f$ der adjungirten Gruppe hinzu, so erhalten wir wieder die infinitesimalen Transformationen einer Gruppe; die Ausdrücke $(E_k E)$ verschwinden nämlich, wie ihre Berechnung zeigt, alle identisch. Augenscheinlich kommt nun alles hinaus auf die Bestimmung der kleinsten Mannigfaltigkeiten, welche bei der Gruppe $E_1 f \cdots E_r f$, Ef invariant bleiben. Diese Bestimmung aber kann nach den Vorschriften in Kap. 14, S. 225 geleistet werden, da mit den endlichen Gleichungen der adjungirten Gruppe ohne Weiteres auch die endlichen Gleichungen der soeben erwähnten Gruppe bekannt sind. Wir haben daher den

Satz 4. *Ist eine r-gliedrige Gruppe $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ mit den r unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ vorgelegt, so findet man alle Typen von eingliedrigen Untergruppen oder, was dasselbe ist, von infinitesimalen Transformationen $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ dieser Gruppe folgendermassen: man stellt die infinitesimalen Transformationen $E_1 f \cdots E_r f$ der adjungirten Gruppe der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ auf, berechnet sodann die endlichen Gleichungen der Gruppe, welche von den $r+1$ infinitesimalen Transformationen $E_1 f \cdots E_r f$ und*

$$Ef = \sum_1^r {}_k\, e_k \frac{\partial f}{\partial e_k}$$

erzeugt wird und bestimmt endlich im Raume $e_1 \cdots e_r$ die kleinsten bei der eben definirten Gruppe invarianten Mannigfaltigkeiten; diese Mannigfaltigkeiten stellen die verlangten Typen dar.

Im Vorstehenden ist gezeigt, wie man alle Typen von endlichen Transformationen und alle Typen von eingliedrigen Untergruppen einer vorgelegten r-gliedrigen Gruppe bestimmen kann. Wir werden jetzt noch mit ein paar Worten etwas genauer auf den Zusammenhang eingehen, welcher zwischen diesen beiden Problemen besteht; wir werden sehen, dass die Erledigung des einen der beiden Probleme jedesmal die Erledigung des andern wesentlich erleichtert.

Setzen wir zunächst voraus, dass wir bereits alle Typen von *endlichen Transformationen* der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ kennen, dass uns also alle kleinsten Mannigfaltigkeiten des Raumes $e_1 \cdots e_r$ bekannt sind, welche die adjungirte Gruppe $E_1 f \cdots E_r f$ gestatten. Wie müssen wir dann verfahren, um die kleinsten bei der Gruppe Ef, $E_1 f \cdots E_r f$ invarianten Mannigfaltigkeiten zu finden?

Es ist klar, dass jede bei der Gruppe Ef, $E_1 f \cdots E_r f$ invariante Mannigfaltigkeit auch die adjungirte Gruppe gestattet; folglich muss jede der gesuchten Mannigfaltigkeiten entweder eine von den bereits bekannten sein, oder sie muss wenigstens eine der bekannten Mannigfaltigkeiten enthalten. Um daher die gesuchten Mannigfaltigkeiten alle zu finden, brauchen wir nur die bekannten Mannigfaltigkeiten der Reihe nach herzunehmen und für jede derselben die kleinste bei der Gruppe Ef, $E_1 f \cdots E_r f$ invariante Mannigfaltigkeit aufzusuchen, in welcher sie enthalten ist.

Es sei

(7) $$W_1(e_1 \cdots e_r) = 0, \cdots W_m(e_1 \cdots e_r) = 0$$

oder kurz M eine der bekannten kleinsten Mannigfaltigkeiten, welche die adjungirte Gruppe $E_1 f \cdots E_r f$ gestatten. Wie findet man nun die kleinste Mannigfaltigkeit, welche die Gruppe $Ef, E_1 f \cdots E_r f$ gestattet und welche ausserdem die Mannigfaltigkeit M umfasst?

Die gesuchte Mannigfaltigkeit enthält nothwendig den Coordinatenanfang $e_1 = 0, \cdots e_r = 0$ und besteht ferner aus lauter durch denselben gehenden Geraden, sie enthält daher sicher diejenige Mannigfaltigkeit M', welche von den Geraden zwischen dem Coordinatenanfang und den Punkten von M gebildet wird. Können wir nun nachweisen, dass M' die infinitesimalen Transformationen $Ef, E_1 f \cdots E_r f$ gestattet, so haben wir damit zugleich bewiesen, dass M' die gesuchte Mannigfaltigkeit ist.

Augenscheinlich ergeben sich die Gleichungen von M', wenn der willkürliche Parameter τ aus den Gleichungen

$$(8) \qquad W_1(e_1\tau, \cdots e_r\tau) = 0, \cdots W_m(e_1\tau, \cdots e_r\tau) = 0$$

eliminirt wird. Folglich lässt sich M' auch auffassen als der Inbegriff der ∞^1 Mannigfaltigkeiten, welche durch die Gleichungen (8) mit dem willkürlichen Parameter τ dargestellt werden. Der Inbegriff der Mannigfaltigkeiten (8) gestattet aber offenbar die infinitesimale Transformation Ef, denn die ∞^1 Gleichungensysteme (8) werden von den endlichen Transformationen:

$$e_1' = \lambda e_1, \cdots e_r' = \lambda e_r$$

der eingliedrigen Gruppe Ef unter einander vertauscht. Ferner ist leicht zu sehen, dass sogar jedes einzelne der ∞^1 Gleichungensysteme (8) die infinitesimalen Transformationen $E_1 f \cdots E_r f$ zulässt. Da nämlich das Gleichungensystem (7) die infinitesimalen Transformationen

$$E_\mu f = \sum_{k\,j}^{1 \cdots r} c_{j\mu k}\, e_j \frac{\partial f}{\partial e_k} \qquad (\mu = 1 \cdots r)$$

zulässt, so muss das System (8) mit dem Parameter τ die Transformationen

$$\sum_{kj}^{1 \cdots r} c_{j\mu k} \cdot e_j \tau \frac{\partial f}{\partial (e_k \tau)} = E_\mu f$$

gestatten, das heisst, es gestattet $E_1 f \cdots E_r f$ selbst, welchen Werth auch τ haben mag.

Wir schliessen hieraus, dass der Inbegriff der ∞^1 Mannigfaltigkeiten (8) die infinitesimalen Transformationen $Ef, E_1 f \cdots E_r f$ gestattet, dass also die Mannigfaltigkeit M', welche ja mit diesem Inbegriff zusammenfällt, wirklich die gesuchte Mannigfaltigkeit ist;

dieselbe wird, wie gesagt, analytisch dargestellt von den Gleichungen, welche aus (8) durch Elimination des Parameters τ erhalten werden.

Denken wir uns zu *jeder* Mannigfaltigkeit M die zugehörige Mannigfaltigkeit M' gebildet, so erhalten wir nach dem Obigen alle Typen von eingliedrigen Untergruppen der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$. —

Setzen wir andererseits voraus, dass wir alle Typen von *eingliedrigen Untergruppen* der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ kennen und suchen wir daraus die Typen der endlichen Transformationen dieser Gruppe zu bestimmen.

Bekannt sind uns alle kleinsten bei der Gruppe Ef, $E_1 f \cdots E_r f$ invarianten Mannigfaltigkeiten, gesucht werden die kleinsten bei der Gruppe $E_1 f \cdots E_r f$ invarianten. Da nun offenbar jede der gesuchten Mannigfaltigkeiten in einer der bekannten enthalten ist, so haben wir nur jede einzelne der bekannten Mannigfaltigkeiten für sich zu betrachten und die auf ihr gelegenen Mannigfaltigkeiten von der verlangten Beschaffenheit aufzusuchen.

Die q-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit M sei eine von den kleinsten bei der Gruppe Ef, $E_1 f \cdots E_r f$ invarianten Mannigfaltigkeiten. Für die Punkte von M verschwinden dann (vgl. Kap. 14, S. 237 f.) alle $(q+1)$-reihigen nicht aber alle q-reihigen Determinanten der Matrix:

$$(9)\qquad \left|\begin{array}{ccc} e_1 & \cdot & e_r \\ \sum_1^r k\, c_{k11}\, e_k & \cdot & \sum_1^r k\, c_{k1r}\, e_k \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_1^r k\, c_{kr1}\, e_k & \cdot & \sum_1^r k\, c_{krr}\, e_k \end{array}\right| .$$

Ob sich nun M in Theilgebiete zerlegt, welche bei der Gruppe $E_1 f \cdots E_r f$ invariant bleiben, darüber entscheidet das Verhalten der q-reihigen Unterdeterminanten der Determinante:

$$\varDelta = \left|\begin{array}{ccc} \sum_1^r k\, c_{k11}\, e_k & \cdot & \sum_1^r k\, c_{k1r}\, e_k \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_1^r k\, c_{kr1}\, e_k & \cdot & \sum_1^r k\, c_{krr}\, e_k \end{array}\right| .$$

Verschwinden für die Punkte von M nicht alle die betreffenden Unterdeterminanten, so findet eine Zerlegung von M in kleinere bei der adjungirten Gruppe invariante Mannigfaltigkeiten nicht statt.

Verschwinden dagegen die betreffenden Unterdeterminanten für die Punkte von M sämmtlich, so zerlegt sich M in ∞^1 $(q-1)$-fach ausgedehnte, bei der Gruppe $E_1 f \cdots E_r f$ invariante Theilgebiete; dass es gerade ∞^1 solche Theilgebiete sind, folgt aus dem Umstande, dass für die Punkte von M sicher nicht alle $(q-1)$-reihigen Unterdeterminanten von $\varDelta$ verschwinden, im entgegengesetzten Falle verschwänden nämlich zugleich alle q-reihigen Determinanten der Matrix (9). Natürlich kann man die Gleichungen der besprochenen Theilgebiete ohne Integration aufstellen, da die endlichen Gleichungen der Gruppe $E_1 f \cdots E_r f$ bekannt sind.

In dem gegenwärtigen Kapitel haben wir bisher immer nur die endlichen Transformationen der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ als Individuen betrachtet und als Punkte eines — r-fach ausgedehnten — Raumes interpretirt.

Es giebt einen andern Standpunkt, der ebenso berechtigt ist. Wir können auch die eingliedrigen Untergruppen oder, was auf dasselbe hinauskommt, die infinitesimalen Transformationen unsrer Gruppe als Individuen betrachten und sie als Punkte eines, nunmehr $(r-1)$-fach ausgedehnten Raumes deuten. Wir müssen dann offenbar die Grössen $e_1 \cdots e_r$ als *homogene* Coordinaten in diesem Raume auffassen.

Unsere Absicht ist nicht, diesen Gedanken weiter zu verfolgen; zumal da vieles, was hier zu sagen wäre, bei Berücksichtigung des früher Gesagten als selbstverständlich erscheint, zum Beispiel, dass jede m-gliedrige Untergruppe der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ in dem $(r-1)$-fach ausgedehnten Raume durch eine ebene Mannigfaltigkeit von $m-1$ Dimensionen dargestellt wird. Nur einen einfachen Satz wollen wir ableiten, der sich bei Zugrundelegung der neuen Auffassung ergiebt, und der bei begrifflichen Untersuchungen über Transformationsgruppen oft von Nutzen sein kann.

Wir denken uns die allgemeine endliche Transformation:

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1} \sum_1^r {}_k \lambda_k{}^0 X_k x_i + \cdots \qquad (i=1\cdots n)$$

der eingliedrigen Gruppe $\lambda_1{}^0 X_1 f + \cdots + \lambda_r{}^0 X_r f$ auf die infinitesimale Transformation: $e_1{}^0 X_1 f + \cdots + e_r{}^0 X_r f$ unsrer r-gliedrigen Gruppe ausgeführt, das heisst, wir denken uns in dem Ausdruck $e_1{}^0 X_1 f + \cdots + e_r{}^0 X_r f$ an Stelle von $x_1 \cdots x_n$ die neuen Veränderlichen $x_1' \cdots x_n'$ eingeführt. Nach S. 273 geht dabei die infinitesimale Transformation: $e_1{}^0 X_1 f + \cdots + e_r{}^0 X_r f$ in ∞^1 infinitesimale Transformationen:

$e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ unsrer Gruppe über, wo $e_1 \cdots e_r$ gewisse Functionen von $e_1^0 \cdots e_r^0$ und t sind, welche sich aus den Differentialgleichungen:

$$\frac{de_s}{dt} = - \sum_1^r{}_\nu \lambda_\nu^0 \sum_1^r{}_k c_{\nu k s} e_k \qquad (s = 1 \cdots r) \tag{4'}$$

und den Anfangsbedingungen: $e_1 = e_1^0, \cdots e_r = e_r^0$ für $t = 0$ bestimmen.

Da jede infinitesimale Transformation unsrer Gruppe durch einen Punkt des vorhin erwähnten $(r-1)$-fach ausgedehnten Raumes dargestellt wird, so können wir offenbar auch sagen: Werden auf die infinitesimale Transformation: $e_1^0 X_1 f + \cdots + e_r^0 X_r f$ alle ∞^1 Transformationen der eingliedrigen Gruppe: $\lambda_1^0 X_1 f + \cdots + \lambda_r^0 X_r f$ ausgeführt, so bewegt sich der Bildpunkt dieser infinitesimalen Transformation auf einer gewissen Curve des Raumes $e_1 \cdots e_r$.

Es giebt nun eine sehr einfache Definition für die zum Punkte $e_1^0 : \cdots : e_r^0$ gehörige Tangente dieser Curve. Die Gleichungen der betreffenden Tangente haben nämlich die Form:

$$e_s \sum_{\nu k}^{1 \cdots r} c_{\nu k \tau} \lambda_\nu^0 e_k^0 - e_\tau \sum_{\nu k}^{1 \cdots r} c_{\nu k s} \lambda_\nu^0 e_k^0 = 0$$
$$(s, \tau = 1 \cdots r),$$

also liegt offenbar der Punkt, dessen homogene Coordinaten die Werthe:

$$e_s = \sum_{\nu k}^{1 \cdots r} c_{\nu k s} \lambda_\nu^0 e_k^0 \qquad (s = 1 \cdots r)$$

besitzen, auf der Tangente. Aber dieser Punkt ist augenscheinlich der Bildpunkt der infinitesimalen Transformation:

$$\left(\sum_1^r{}_\nu \lambda_\nu^0 \cdot X_\nu f, \sum_1^r{}_k e_k^0 \cdot X_k f \right) = \sum_1^r{}_s \left\{ \sum_{\nu k}^{1 \cdots r} c_{\nu k s} \lambda_\nu^0 e_k^0 \right\} X_s f,$$

welche durch *Combination* der beiden infinitesimalen Transformationen $\Sigma \lambda_\nu^0 X_\nu f$ und $\Sigma e_k^0 X_k f$ erhalten wird. Folglich haben wir den

Satz 5. *Deutet man die ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ einer r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ als Punkte eines $(r-1)$-fach ausgedehnten Raumes, indem man $e_1 \cdots e_r$ als homogene Coordinaten in diesem Raume auffasst, so findet Folgendes statt: Werden auf eine bestimmte infinitesimale Transformation $e_1^0 X_1 f + \cdots + e_r^0 X_r f$ der Gruppe alle Transformationen einer bestimmten eingliedrigen Gruppe: $\lambda_1^0 X_1 f + \cdots + \lambda_r^0 X_r f$ ausgeführt, so beschreibt der Bildpunkt der Transformation $e_1^0 X_1 f + \cdots + e_r^0 X_r f$ eine Curve, deren Tangente im Punkte $e_1^0 : \cdots : e_r^0$ man erhält, wenn man diesen Punkt mit dem Bildpunkte* *der infinitesimalen Transformation* $(\Sigma \lambda_\nu^0 X_\nu f, \Sigma e_k^0 X_k f)$ *durch eine Gerade verbindet; werden andererseits auf die infinitesimale Transformation* $\Sigma \lambda_\nu^0 X_\nu f$ *alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe* $\Sigma e_k^0 X_k f$ *ausgeführt, so beschreibt der Bildpunkt der Transformation* $\Sigma \lambda_\nu^0 X_\nu f$ *eine Curve, deren Tangente im Punkte* $\lambda_1^0 : \cdots : \lambda_r^0$ *man erhält, wenn man diesen Punkt mit dem Bildpunkte der infinitesimalen Transformation* $(\Sigma \lambda_\nu^0 X_\nu f, \Sigma e_k^0 X_k f)$ *durch eine Gerade verbindet.*

Kapitel 17.

Zusammensetzung und Isomorphismus.

Viele Aufgaben, die man über eine r-gliedrige Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ stellen kann, erfordern zu ihrer Lösung nur die Kenntniss der Constanten c_{iks} in den Relationen:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_s \, c_{iks} \cdot X_s f.$$

So haben wir zum Beispiel gesehen, dass die Bestimmung aller Untergruppen der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ nur von den Constanten c_{iks} abhängt und genau dasselbe gilt auch von der Bestimmung aller Typen von Untergruppen (vgl. Theorem 33, S. 210 und Kapitel 16, S. 280 und 281).

Es erhellt hieraus, dass die Constanten c_{iks} an und für sich schon gewisse Eigenschaften der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ abspiegeln. Für den Inbegriff dieser Eigenschaften führen wir eine besondere Bezeichnung ein, wir nennen ihn die *Zusammensetzung* der Gruppe und sagen daher, dass *die Constanten* c_{iks} *in den Relationen*

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_s \, c_{iks} \cdot X_s f \tag{1}$$

die Zusammensetzung der r*-gliedrigen Gruppe* $X_1 f \cdots X_r f$ *bestimmen.*

§ 80.

Das System der c_{iks}, welches die Zusammensetzung der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ bestimmt, ist seinerseits nicht vollständig bestimmt. Die einzelnen c_{iks} erhalten nämlich im Allgemeinen andere Zahlenwerthe, wenn man an Stelle von $X_1 f \cdots X_r f$ irgend r andere unabhängige infinitesimale Transformationen $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ derselben Gruppe auswählt.

Hieraus folgt, dass zwei verschiedene Systeme von c_{iks} unter Umständen die Zusammensetzung einer und derselben Gruppe darstellen können. Wie aber erkennen, ob sie das thun?

Wir gehen aus von den Relationen:

$$(1)\qquad (X_i X_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} \cdot X_s f \qquad (i, k = 1 \cdots r),$$

welche zwischen r bestimmten unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ unsrer Gruppe bestehen. Wir suchen die allgemeine Form der Relationen, durch welche r beliebige unabhängige infinitesimale Transformationen $\mathfrak{X}_1 f \cdots \mathfrak{X}_r f$ der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ verknüpft sind.

Haben die betreffenden Relationen die Form:

$$(2)\qquad (\mathfrak{X}_i \mathfrak{X}_k) = \sum_1^r {}_s\, c'_{iks} \cdot \mathfrak{X}_s f,$$

so ist das System der Constanten c'_{iks} das allgemeinste, welches die Zusammensetzung der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ darstellt. Es handelt sich daher nur um die Berechnung der c'_{iks}.

Da $\mathfrak{X}_1 f \cdots \mathfrak{X}_r f$ beliebige unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ sein sollen, so ist:

$$\mathfrak{X}_k f = \sum_1^r {}_j\, h_{kj} \cdot X_j f \qquad (k = 1 \cdots r),$$

wo die Constanten h_{kj} alle möglichen Werthe annehmen können, welche die Determinante

$$D = \Sigma \pm h_{11} \cdots h_{rr}$$

nicht zum Verschwinden bringen.

Durch Ausrechnung ergiebt sich:

$$(\mathfrak{X}_i \mathfrak{X}_k) = \sum_{j\,\pi}^{1 \cdots r} h_{ij} h_{k\pi} (X_j X_\pi) = \sum_{j\,\pi\,s}^{1 \cdots r} h_{ij} h_{k\pi} c_{j\pi s} \cdot X_s f;$$

andererseits folgt aus (2):

$$(\mathfrak{X}_i \mathfrak{X}_k) = \sum_{\pi\, s}^{1 \cdots r} h_{\pi s} c'_{ik\pi} \cdot X_s f.$$

Vergleichen wir diese beiden Ausdrücke für $(\mathfrak{X}_i \mathfrak{X}_k)$ mit einander und berücksichtigen, dass $X_1 f \cdots X_r f$ unabhängige infinitesimale Transformationen sind, so erhalten wir die Relationen:

$$(3)\qquad \sum_1^r {}_\pi\, h_{\pi s} c'_{ik\pi} = \sum_{j\,\pi}^{1 \cdots r} h_{ij} h_{k\pi} c_{j\pi s} \qquad (s = 1 \cdots r).$$

Unter den gemachten Voraussetzungen lassen sich diese Gleichungen nach den $c'_{ik\pi}$ auflösen, also wird:

$$(4) \qquad c'_{ik\varrho} = \frac{1}{D} \sum_1^r {}_s \left\{ \frac{\partial D}{\partial h_{\varrho s}} \sum_{j\pi}^{1\cdots r} h_{ij}\, h_{k\pi} \right\} c_{j\pi s}$$

$$(i, k, \varrho = 1 \cdots r).$$

Hiermit ist nach dem Obigen die allgemeine Form aller Constantensysteme gefunden, welche die Zusammensetzung der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ bestimmen. Zugleich haben wir wenigstens theoretisch die Möglichkeit, zu entscheiden, ob ein vorgelegtes System von Constanten $\bar{c}_{iks}$ die Zusammensetzung der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ bestimmt; es besitzt nämlich diese Eigenschaft offenbar dann, aber auch nur dann, wenn man in (4) die Parameter h_{kj} so wählen kann, dass $c'_{iks} = \bar{c}_{iks}$ wird. —

Sind *zwei* r-gliedrige Gruppen vorgelegt, so können wir die Zusammensetzungen derselben mit einander vergleichen. Offenbar sind wir durch die obigen Entwickelungen in den Stand gesetzt, zu entscheiden, ob die beiden Gruppen ein und dieselbe oder ob sie verschiedene Zusammensetzung haben. Auf die Zahl der Veränderlichen, welche in den beiden Gruppen auftreten, brauchen wir dabei offenbar keine Rücksicht zu nehmen.

Zwei r-gliedrige Gruppen, welche ein und dieselbe Zusammensetzung haben, bezeichnen wir als g l e i c h z u s a m m e n g e s e t z t.

Sind

$$X_k f = \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe und

$$Y_k f = \sum_1^m {}_\mu\, \eta_{k\mu}(y_1 \cdots y_m) \frac{\partial f}{\partial y_\mu} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

unabhängige infinitesimale Transformationen einer zweiten, bestehen ausserdem die Relationen

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} \cdot X_s f,$$

so sind diese beiden Gruppen offenbar dann, aber auch nur dann gleichzusammengesetzt, wenn sich unter den infinitesimalen Transformationen $e_1 Y_1 f + \cdots + e_r Y_r f$ der zweiten r solche von einander unabhängige $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ angeben lassen, dass die Relationen

$$(\mathfrak{Y}_i \mathfrak{Y}_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} \cdot \mathfrak{Y}_s f$$

identisch stattfinden.

Haben die zwischen $Y_1 f \cdots Y_r f$ stattfindenden Relationen die Form

$$(Y_i\, Y_k) = \sum_1^r {}_s\, \bar{c}_{iks} \cdot Y_s f,$$

so können wir sagen: die beiden Gruppen sind dann und nur dann gleichzusammengesetzt, wenn es möglich ist, in den Gleichungen (4) die Parameter h_{kj} so zu wählen, dass jedes c'_{iks} dem entsprechenden $\bar{c}_{iks}$ gleich wird.

Man kann auch die Zusammensetzung solcher Gruppen vergleichen, die nicht beide dieselbe Anzahl von Parametern haben. Ermöglicht wird das durch die Einführung des allgemeinen Begriffes: *Isomorphismus.*

Die r-gliedrige Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$:

$$(X_i\, X_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} \cdot X_s f$$

nennen wir ***isomorph*** *mit der $(r - q)$-gliedrigen: $Y_1 f \cdots Y_{r-q} f$, wenn es möglich ist, in der $(r - q)$-gliedrigen r infinitesimale Transformationen*

$$\mathfrak{Y}_k f = h_{k1} \cdot Y_1 f + \cdots + h_{k,r-q} \cdot Y_{r-q} f$$
$$(k = 1 \cdots r)$$

so auszuwählen, dass nicht alle $(r - q)$-reihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} h_{11} & \cdot & h_{1,r-q} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{r1} & \cdot & h_{r,r-q} \end{vmatrix}$$

verschwinden, und dass zugleich die Relationen

$$(\mathfrak{Y}_i\, \mathfrak{Y}_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} \cdot \mathfrak{Y}_s f$$

identisch bestehen.

Es finde Isomorphismus in diesem Sinne statt, und es seien $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ bereits in der angegebenen Weise gewählt. Ordnen wir dann der infinitesimalen Transformation $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ der r-gliedrigen Gruppe stets die infinitesimale Transformation

$$e_1 \cdot \mathfrak{Y}_1 f + \cdots + e_r \cdot \mathfrak{Y}_r f$$

der $(r - q)$-gliedrigen zu, welche Werthe auch die Constanten $e_1 \cdots e_r$ haben mögen, so findet offenbar Folgendes statt: wenn $\Upsilon_1 f$ diejenige Transformation der $(r - q)$-gliedrigen Gruppe ist, welche der Transformation $\Xi_1 f$ der anderen Gruppe zugeordnet ist, und wenn in entsprechender Weise $\Upsilon_2 f$ der Transformation $\Xi_2 f$ zugeordnet ist, so entspricht stets der Transformation $(\Upsilon_1 \Upsilon_2)$ die Transformation $(\Xi_1 \Xi_2)$. Wir drücken das kürzer so aus: durch die angegebene Zuordnung der infinitesimalen Transformationen beider Gruppen zu einander sind die Gruppen *isomorph auf einander bezogen.* Augenscheinlich ist diese isomorphe Beziehung vollständig bestimmt, wenn man weiss, dass $X_1 f \cdots X_r f$ bezüglich den Transformationen $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ zugeordnet sind.

Man unterscheidet zwischen *holoedrischem* und *meroedrischem Isomorphismus.* Der *holoedrische* tritt ein, wenn die Zahl q, welche in der Definition des Isomorphismus vorkommt, den Werth Null hat; der *meroedrische*, wenn q grösser ist als Null. Dementsprechend sagt man, dass die beiden Gruppen holoedrisch oder meroedrisch isomorph auf einander bezogen sind, jenachdem.

Augenscheinlich ist die Eigenschaft des Gleichzusammengesetztseins zweier Gruppen ein besonderer Fall des Isomorphismus; zwei gleichzusammengesetzte Gruppen sind nämlich stets holoedrisch isomorph, und umgekehrt.

Zwei meroedrisch isomorphe Gruppen sind zum Beispiel die beiden:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \; x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \; x_1^2 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \; \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

und:

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}, \; y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1}, \; y_1^2 \frac{\partial f}{\partial y_1},$$

mit bezüglich vier und drei Parametern. Wir erhalten diese Gruppen meroedrisch isomorph auf einander bezogen, wenn wir den vier infinitesimalen Transformationen:

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \; X_2 f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \; X_3 f = x_1^2 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \; X_4 f = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

der einen etwa die folgenden vier:

$$\mathfrak{Y}_1 f = \frac{\partial f}{\partial y_1}, \; \mathfrak{Y}_2 f = y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1}, \; \mathfrak{Y}_3 f = y_1^2 \frac{\partial f}{\partial y_1}, \; \mathfrak{Y}_4 f = \frac{\partial f}{\partial y_1}$$

der andern zuordnen.

Auch in der Substitutionentheorie redet man von isomorphen Gruppen, doch definirt man da den Isomorphismus anscheinend anders als hier geschehen*). Wir werden uns später (vgl. Kap. 21, die Parametergruppe) überzeugen, dass nichtsdestoweniger der aus unserer Definition folgende Begriff des Isomorphismus sich vollkommen mit demjenigen deckt, welchen man erhält, sobald man die Definition der Substitutionentheorie direkt auf die Theorie der endlichen continuirlichen Gruppen überträgt.

---

*) Camille Jordan, Traité des substitutions, Paris 1870.

Jetzt werden wir zunächst einige einfache Folgerungen aus unsrer Definition des Isomorphismus ziehen.

Im vorigen Kapitel haben wir gesehen, dass zu jeder r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ eine gewisse lineare homogene Gruppe gehört, die adjungirte Gruppe, wie wir sie genannt haben. Aus den Relationen, welche zwischen den infinitesimalen Transformationen der adjungirten Gruppe bestehen (vgl. Kap. 16, S. 275), erhellt unmittelbar, dass die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ mit ihrer Adjungirten isomorph ist; holoedrisch isomorph sind allerdings beide Gruppen nur dann, wenn die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ keine ausgezeichnete infinitesimale Transformation enthält, denn nur in diesem Falle ist die adjungirte Gruppe r-gliedrig, während sie sonst stets weniger als r Parameter enthält. Also:

Theorem 51. *Zu jeder r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ giebt es eine isomorphe lineare homogene Gruppe, nämlich die zugehörige adjungirte Gruppe; holoedrisch isomorph ist dieselbe mit der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ nur dann, wenn diese letztere keine ausgezeichnete infinitesimale Transformation enthält.*

Wir gehen hier nicht auf die Frage ein, ob auch zu jeder solchen r-gliedrigen Gruppe, welche ausgezeichnete infinitesimale Transformationen enthält, eine holoedrisch isomorphe lineare homogene Gruppe angegeben werden kann. Doch wollen wir an Beispielen zeigen, dass dies jedenfalls in vielen Fällen möglich ist, auch wenn die gegebene r-gliedrige Gruppe ausgezeichnete infinitesimale Transformationen enthält.

Die r-gliedrige Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ enthalte gerade $r - m$ unabhängige ausgezeichnete infinitesimale Transformationen, und es seien $X_1 f \cdots X_r f$ so gewählt, dass $X_{m+1} f \cdots X_r f$ ausgezeichnete Transformationen sind; dann bestehen zwischen $X_1 f \cdots X_r f$ Relationen von der Form:

$$(X_\mu X_\nu) = c_{\mu\nu 1} \cdot X_1 f + \cdots + c_{\mu\nu r} \cdot X_r f$$
$$(X_\mu X_{m+k}) = (X_{m+k} X_{m+j}) = 0$$
$$(\mu, \nu = 1 \cdots m;\ k, j = 1 \cdots r - m).$$

In der zugehörigen adjungirten Gruppe $E_1 f \cdots E_r f$ giebt es nur m unabhängige infinitesimale Transformationen: $E_1 f \cdots E_m f$, während $E_{m+1} f \cdots E_r f$ identisch verschwinden, es sind daher $E_1 f \cdots E_m f$ durch die Relationen verknüpft:

$$(E_\mu E_\nu) = c_{\mu\nu 1} \cdot E_1 f + \cdots + c_{\mu\nu m} \cdot E_m f.$$

Verschwinden nun insbesondere alle $c_{\mu, \nu, m+1} \cdots c_{\mu\nu r}$, so lässt sich stets eine r-gliedrige lineare homogene Gruppe angeben, welche mit der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ holoedrisch isomorph ist. In diesem Falle erzeugen nämlich $X_1 f \cdots X_m f$ an und für sich eine m-gliedrige Gruppe, zu welcher die Gruppe $E_1 f \cdots E_m f$ holoedrisch isomorph ist. Setzen wir daher

$$\mathsf{E}_{m+1} f = e_{r+1} \frac{\partial f}{\partial e_{r+1}}, \cdots \mathsf{E}_r f = e_{2r-m} \frac{\partial f}{\partial e_{2r-m}},$$

so erzeugen offenbar die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$E_1 f \cdots E_m f, \quad \mathsf{E}_{m+1} f \cdots \mathsf{E}_r f$$

eine lineare homogene zu der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ holoedrisch isomorphe Gruppe.

Aber auch in solchen Fällen, wo nicht alle $c_{\mu, \nu, m+1} \cdots c_{\mu\nu r}$ verschwinden, kann man oft leicht eine holoedrisch isomorphe lineare homogene Gruppe angeben. Als Beispiel diene die dreigliedrige Gruppe $X_1 f, X_2 f, X_3 f$:

$$(X_1 X_2) = X_3 f, \quad (X_1 X_3) = (X_2 X_3) = 0,$$

welche eine ausgezeichnete infinitesimale Transformation enthält, nämlich $X_3 f$; sie ist holoedrisch isomorph mit der linearen homogenen Gruppe:

$$\mathsf{E}_1 f = \alpha_3 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1}, \quad \mathsf{E}_2 f = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}, \quad \mathsf{E}_3 f = \alpha_3 \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}.$$

Die Constanten c_{iks} in den Gleichungen:

$$(1) \qquad (X_i X_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} \cdot X_s f$$

befriedigen, wie wir in Kap. 9, S. 170 gesehen haben, die Relationen:

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} & c_{iks} + c_{kis} = 0 \\ & \sum_1^r {}_\nu \left\{ c_{ik\nu}\, c_{\nu js} + c_{kj\nu}\, c_{\nu is} + c_{ji\nu}\, c_{\nu ks} \right\} = 0 \\ & \qquad (i, k, j, s = 1 \cdots r). \end{aligned} \right.$$

Mit Hülfe dieser Relationen gelang es uns in Kap. 16, S. 274 zu beweisen, dass die r infinitesimalen Transformationen

$$(6) \qquad E_\mu f = \sum_{kj}^{1 \cdots r} c_{j\mu k}\, e_j \frac{\partial f}{\partial e_k} \qquad (\mu = 1 \cdots r)$$

der zur Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ adjungirten Gruppe paarweise in den Beziehungen

$$(7) \qquad (E_\mu E_\nu) = \sum_1^r {}_s\, c_{\mu\nu s} \cdot E_s f$$

stehen.

Bei diesem Beweise der Relationen (7) haben wir aber weiter nichts benutzt als den Umstand, dass die c_{iks} den Gleichungen (5) genügten, namentlich haben wir davon keinen Gebrauch gemacht, dass wir die Existenz von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ kannten, welche durch die Relationen (1) verknüpft waren. Durch die citirten Entwickelungen ist daher bewiesen, dass die r infinitesimalen Transformationen (6) stets dann in den Beziehungen (7) stehen, wenn die c_{iks} den Gleichungen (5) genügen.

Kennen wir demnach ein System von c_{iks}, welches die Relationen (5) befriedigt, so können wir sofort r lineare homogene infinitesimale Transformationen $E_1 f \cdots E_r f$ angeben, die Transformationen (6) nämlich, welche paarweise in den Beziehungen:

$$(E_i E_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} \cdot E_s f$$

stehen.

Selbstverständlich erzeugen die so erhaltenen infinitesimalen Transformationen $E_1 f \cdots E_r f$ eine Gruppe und zwar eine mit r oder weniger Parametern; eine mit gerade r Parametern erzeugen sie offenbar nur dann, wenn sie von einander unabhängig sind, wenn es also unmöglich ist, die Gleichungen:

$$g_1 \cdot E_1 f + \cdots + g_r \cdot E_r f = 0$$

oder die r^2 damit äquivalenten Gleichungen:

$$g_1 c_{j1k} + g_2 c_{j2k} + \cdots + g_r c_{jrk} = 0 \qquad (j, k = 1 \cdots r)$$

durch r nicht sämmtlich verschwindende Grössen $g_1 \cdots g_r$ zu befriedigen.

Damit haben wir das

Theorem 52.*) *Wenn die Constanten* c_{iks} $(i, k, s = 1 \cdots r)$ *solche Werthe besitzen, dass alle Relationen von der Form:*

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} & c_{iks} + c_{kis} = 0 \\ & \sum_1^r {}_\nu \left\{ c_{ik\nu} c_{\nu js} + c_{kj\nu} c_{\nu is} + c_{ji\nu} c_{\nu ks} \right\} = 0 \\ & \qquad (i, k, j, s = 1 \cdots r) \end{aligned} \right.$$

befriedigt sind, so stehen die r linearen homogenen infinitesimalen Transformationen:

$$E_\mu f = \sum_{k\,j}^{1 \cdots r} c_{j\mu k}\, e_j \frac{\partial f}{\partial e_k}, \qquad (\mu = 1 \cdots r)$$

paarweise in den Beziehungen:

$$(E_i E_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} \cdot E_s f \qquad (i, k = 1 \cdots r)$$

und erzeugen daher eine lineare homogene Gruppe. Sind die c_{iks} *insbesondere so beschaffen, dass nicht alle r-reihigen Determinanten verschwinden, deren Horizontalreihen die Form haben:*

$$\left| c_{j1k}\ c_{j2k} \cdots c_{jrk} \right| \qquad (j, k = 1 \cdots r),$$

*) Lie, Archiv for Math. og Nat. Bd. 1, S. 192, Christiania 1876.

so sind $E_1 f \cdots E_r f$ unabhängige infinitesimale Transformationen und erzeugen eine r-gliedrige Gruppe, deren Zusammensetzung durch das System der c_{iks} bestimmt wird, und welche keine ausgezeichnete infinitesimale Transformation enthält. In allen andern Fällen hat die von $E_1 f \cdots E_r f$ erzeugte Gruppe weniger als r Parameter.

§ 81.

Die Ergebnisse des vorigen Paragraphen legen die Vermuthung nahe, dass überhaupt jedes System von c_{iks}, welches die Relationen (5) befriedigt, die Zusammensetzung gewisser r-gliedriger Gruppen darstellt. Diese Vermuthung entspricht der Wahrheit, es gilt wirklich der folgende

Satz 1. *Besitzen die Constanten c_{iks} $(i, k, s = 1 \cdots r)$ solche Werthe, dass die Relationen:*

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} & c_{iks} + c_{kis} = 0 \\ & \sum_1^r {}_\nu \left\{ c_{ik\nu} c_{\nu js} + c_{kj\nu} c_{\nu is} + c_{ji\nu} c_{\nu ks} \right\} = 0 \\ & \qquad (i, k, j, s = 1 \cdots r) \end{aligned} \right.$$

erfüllt sind, so giebt es stets in einem Raume von geeigneter Dimensionenzahl r unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$, welche paarweise in den Beziehungen

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_s \, c_{iks} \cdot X_s f$$

stehen und daher eine r-gliedrige Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} erzeugen.

Wir unterdrücken den Beweis für diesen wichtigen Satz einstweilen, um nicht zu weit abschweifen zu müssen, und werden diesen Beweis erst im nächsten Abschnitte bringen. Doch werden wir natürlich bis dahin von dem Satze so wenig als möglich Gebrauch machen.

Aus dem Satze 1 geht hervor, dass der Inbegriff aller möglichen Zusammensetzungen von r-gliedrigen Gruppen durch den Inbegriff aller Systeme von c_{iks}, welche die Gleichungen (5) befriedigen, dargestellt wird. Kennt man alle solchen Systeme von c_{iks}, so kennt man damit zugleich alle Zusammensetzungen von r-gliedrigen Gruppen.

Nun aber giebt es, wie wir auf S. 291 gesehen haben, im Allgemeinen unendlich viele Systeme von c_{iks}, welche ein und dieselbe Zusammensetzung darstellen; ist ein System von c_{iks} gegeben, das eine Zusammensetzung darstellt, so findet man alle Systeme c'_{iks}, welche dieselbe Zusammensetzung darstellen, vermittelst der Gleichungen (4), unter den h_{kj} willkürliche Parameter verstanden. Wenn man daher alle Systeme von c_{iks} kennt, welche den Gleichungen (5) genügen, so bedarf es noch einer besonderen Untersuchung, um festzustellen, welche von diesen Systemen verschiedene Zusammensetzungen darstellen. Um diese Untersuchung durchführen zu können, müssen wir zunächst die Gleichungen (4) etwas näher betrachten.

Sehen wir für den Augenblick davon ab, dass die c_{iks} durch Relationen verknüpft sind; betrachten wir vielmehr die c_{iks} und ebenso die c'_{iks} als von einander unabhängige Veränderliche. Es wird sich zeigen, dass bei Zugrundelegung dieser Auffassung die Gleichungen (4) eine continuirliche Transformationsgruppe in den Veränderlichen c_{iks} und mit den Parametern h_{kj} darstellen.

Um die eben behauptete Eigenschaft der Gleichungen (4) zu beweisen, werden wir direkt zwei Transformationen (4) oder, was dasselbe ist, zwei Transformationen:

$$\sum_{1}^{r} {}_{\pi}\, h_{\pi s}\, c'_{ik\pi} = \sum_{j\pi}^{1\cdots r} h_{ij}\, h_{k\pi}\, c_{j\pi s} \tag{3}$$

$$(i, k, s = 1 \cdots r)$$

nach einander ausführen.

Zuerst gehen wir also vermöge der Transformation (3) von den c_{iks} zu den c'_{iks} über und sodann von den c'_{iks} zu den c''_{iks} vermöge der Transformation:

$$\sum_{1}^{r} {}_{\pi}\, h'_{\pi s}\, c''_{ik\pi} = \sum_{j\pi}^{1\cdots r} h'_{ij}\, h'_{k\pi}\, c'_{j\pi s}. \tag{3'}$$

Auf diese Weise erhalten wir eine neue Transformation, deren Gleichungen sich ergeben, wenn die c'_{iks} aus (3) und (3′) weggeschafft werden. Zu beweisen ist, dass diese neue Transformation die Form hat:

$$\sum_{1}^{r} {}_{\pi}\, h''_{\pi s}\, c''_{ik\pi} = \sum_{j\pi}^{1\cdots r} h''_{ij}\, h''_{k\pi}\, c'_{j\pi s}, \tag{3''}$$

wo die h'' Functionen der h und der h' allein sind.

Wir multipliciren (3′) mit $h_{s\sigma}$ und summiren nach s; dann bekommen wir:

$$\sum_{\pi s}^{1\cdots r} h'_{\pi s}\, h_{s\sigma}\, c''_{ik\pi} = \sum_{j\pi s}^{1\cdots r} h'_{ij}\, h'_{k\pi}\, h_{s\sigma}\, c'_{j\pi s},$$

oder wegen (3):

$$\sum_{\pi s}^{1\cdots r} h'_{\pi s}\, h_{s\sigma}\, c''_{ik\pi} = \sum_{j\pi\tau\varrho}^{1\cdots r} h'_{ij}\, h'_{k\pi}\, h_{j\tau}\, h_{\pi\varrho}\, c_{\tau\varrho\sigma}.$$

Das ist die besprochene neue Transformation; sie verwandelt sich in (3″), wenn gesetzt wird:

$$h''_{\pi\sigma} = \sum_1^r {}_s\, h'_{\pi s}\, h_{s\sigma}.$$

Damit ist bewiesen, dass die Transformationen (4) wirklich eine Gruppe bilden.

Wir behaupten nun, dass die Transformationen dieser Gruppe das Gleichungensystem (5) invariant lassen.

Es seien die c_{iks} ein System von Constanten, welches die Relationen (5) befriedigt, welches also nach Satz 1 die Zusammensetzung einer gewissen r-gliedrigen Gruppe darstellt. Dann stellt, wie wir wissen, das System der c'_{iks}, welches durch die Gleichungen (4) bestimmt wird, ebenfalls eine Zusammensetzung dar, nämlich dieselbe Zusammensetzung wie jenes System der c_{iks}; folglich genügen auch die c'_{iks} Relationen von der Form (5). Die Transformationen (4) führen demnach jedes Werthsystem c_{iks}, welches (5) erfüllt, in ein Werthsystem c'_{iks} von derselben Beschaffenheit über, das heisst, sie lassen das System der Gleichungen (5) invariant, was eben unsere Behauptung war.

Deuten wir nunmehr die r^3 Veränderlichen c_{iks} als Punktcoordinaten in einem Raume von r^3 Dimensionen.

In diesem Raume wird durch die Gleichungen (5) eine gewisse Mannigfaltigkeit M ausgeschieden, welche bei den Transformationen der Gruppe (4) invariant bleibt. Jeder Punkt von M — so können wir sagen — stellt eine Zusammensetzung r-gliedriger Gruppen dar, und umgekehrt wird jede mögliche Zusammensetzung r-gliedriger Gruppen durch gewisse Punkte von M dargestellt. Zwei verschiedene Punkte von M stellen ein und dieselbe Zusammensetzung dar, wenn es in der Gruppe (4) eine Transformation giebt, welche den einen Punkt in den andern überführt.

Ist daher P irgend ein Punkt von M, so fällt der Inbegriff aller Lagen, welche P bei den Transformationen der Gruppe (4) annimmt, zusammen mit dem Inbegriff aller Punkte, welche dieselbe Zusammensetzung darstellen wie P. Wir wissen von früher her (Kap. 14, S. 225), dass dieser Inbegriff von Punkten eine bei der Gruppe (4) invariante Mannigfaltigkeit bildet und zwar eine sogenannte kleinste invariante Mannigfaltigkeit.

Hieraus ergiebt sich, dass man folgendes Verfahren einzuschlagen hat, um alle verschiedenen Zusammensetzungen r-gliedriger Gruppen zu finden:

Man bestimme alle auf M gelegenen kleinsten Mannigfaltigkeiten, welche bei der Gruppe (4) invariant bleiben; auf *jeder* solchen Mannigfaltigkeit wähle man irgend einen Punkt c_{iks}: die Werthsysteme c_{iks}, welche zu den gewählten Punkten gehören, stellen dann alle verschiedenen Zusammensetzungen r-gliedriger Gruppen dar.

Da die endlichen Gleichungen der Gruppe (4) vorliegen, so ist die Bestimmung der kleinsten invarianten Mannigfaltigkeiten als eine ausführbare Operation zu betrachten; sie erfordert blos die Auflösung algebraischer Gleichungen.

Wir haben hiermit das

Theorem 53. *Die Bestimmung aller wesentlich verschiedenen Zusammensetzungen von r-gliedrigen Gruppen erfordert blos algebraische Operationen.*

§ 82.

Es sei jetzt $X_1 f \cdots X_r f$ eine r-gliedrige Gruppe G_r von der Zusammensetzung:

$$(X_i\, X_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} \cdot X_s f.$$

Ferner sei $Y_1 f \cdots Y_{r-q} f$ eine $(r-q)$-gliedrige mit der G_r isomorphe Gruppe und zwar eine meroedrisch isomorphe, so dass also q grösser ist als Null. Diese zweite Gruppe wollen wir kurz mit G_{r-q} bezeichnen.

Die beiden Gruppen seien in der auf S. 292 u. 293 angegebenen Weise isomorph auf einander bezogen; in der G_{r-q} seien also r infinitesimale Transformationen $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ ausgewählt, welche in den Beziehungen

$$(\mathfrak{Y}_i\, \mathfrak{Y}_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} \cdot \mathfrak{Y}_s f$$

stehen, dabei seien $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_{r-q} f$ von einander unabhängig, dagegen $\mathfrak{Y}_{r-q+1} f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ durch die Identitäten:

$$\mathfrak{Y}_{r-q+k} f \equiv d_{k1} \cdot \mathfrak{Y}_1 f + \cdots + d_{k,\,r-q} \cdot \mathfrak{Y}_{r-q} f \qquad (k = 1 \cdots q) \tag{8}$$

definirt.

Unter den gemachten Voraussetzungen ist offenbar:

$$\Bigl(\mathfrak{Y}_j f,\ \mathfrak{Y}_{r-q+k} f - \sum_1^{r-q} {}_\mu\, d_{k\mu}\, \mathfrak{Y}_\mu f\Bigr) \equiv 0$$
$$(j = 1 \cdots r,\ k = 1 \cdots q),$$

oder

$$\sum_1^r {}_s \Bigl\{ c_{j,\,r-q+k,\,s} - \sum_1^{r-q} {}_\mu\, d_{k\mu}\, c_{j\mu s} \Bigr\}\, \mathfrak{Y}_s f \equiv 0.$$

Ersetzen wir hier $\mathfrak{Y}_{r-q+1} f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ durch ihre Werthe (8), so erhalten wir lineare Relationen zwischen $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_{r-q} f$; solche Relationen können aber offenbar nur dann bestehen, wenn die Coefficienten jedes einzelnen $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_{r-q} f$ den Werth Null besitzen.

Aus dem Verschwinden dieser Coefficienten folgt, dass die rq Ausdrücke

$$\left(X_j f,\ X_{r-q+k} f - \sum_1^{r-q} {}_\mu\, d_{k\mu}\, X_\mu f\right) = \sum_1^r {}_s \left\{ c_{j,\, r-q+k,\, s} - \sum_1^{r-q} {}_\mu\, d_{k\mu}\, c_{j\mu s} \right\} X_s f$$

aus den q infinitesimalen Transformationen

$$X_{r-q+k} f - \sum_1^{r-q} {}_\mu\, d_{k\mu} \cdot X_\mu f \qquad (k = 1 \cdots q) \tag{9}$$

allein linear abgeleitet werden können. Anders ausgesprochen: die q unabhängigen infinitesimalen Transformationen (9) erzeugen eine q-gliedrige *invariante* Untergruppe der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$.

Theorem 54. *Ist die $(r-q)$-gliedrige Gruppe $Y_1 f \cdots Y_r f$ isomorph mit der r-gliedrigen: $X_1 f \cdots X_r f$, und sind $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ solche infinitesimale Transformationen der $(r-q)$-gliedrigen Gruppe, dass erstens $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_{r-q} f$ von einander unabhängig sind, während $\mathfrak{Y}_{r-q+1} \cdots \mathfrak{Y}_r f$ sich aus $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_{r-q} f$ linear ableiten lassen:*

$$\mathfrak{Y}_{r-q+k} f \equiv d_{k1} \cdot \mathfrak{Y}_1 f + \cdots + d_{k,\, r-q} \cdot \mathfrak{Y}_{r-q} f \qquad (k = 1 \cdots q)$$

und dass zweitens mit den Relationen

$$(X_i\, X_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} \cdot X_s f$$

zugleich die analogen Relationen

$$(\mathfrak{Y}_i\, \mathfrak{Y}_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} \cdot \mathfrak{Y}_s f$$

bestehen, so erzeugen die q infinitesimalen Transformationen:

$$X_{r-q+k} f - d_{k1} \cdot X_1 f - \cdots - d_{k,\, r-q} \cdot X_{r-q} f \qquad (k = 1 \cdots q)$$

eine q-gliedrige invariante Untergruppe der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$.

Die G_r: $X_1 f \cdots X_r f$ und die G_{r-q}: $Y_1 f \cdots Y_{r-q} f$ sind, wie wir wissen, isomorph auf einander bezogen, wenn wir jeder infinitesimalen Transformation von der Form: $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ die infinitesimale Transformation:

$$\sum_1^r {}_k\, e_k \cdot \mathfrak{Y}_k f = \sum_1^{r-q} {}_k \left\{ e_k + \sum_1^q {}_j\, e_{r-q+j}\, d_{jk} \right\} \mathfrak{Y}_k f$$

zuordnen.

Bei dieser Zuordnung sind offenbar diejenigen infinitesimalen Transformationen der G_r, welche der q-gliedrigen Gruppe (9) angehören, die einzigen, denen identisch verschwindende infinitesimale Transformationen der G_{r-q} entsprechen. Folglich entspricht im Allgemeinen jeder eingliedrigen Untergruppe der G_r eine ganz bestimmte eingliedrige Untergruppe der G_{r-q}, nur den eingliedrigen Untergruppen der Gruppe (9) entsprechen keine eingliedrigen Untergruppen der G_{r-q}, die zugeordneten eingliedrigen Gruppen reduciren sich nämlich auf die identische Transformation. Umgekehrt entsprechen ein und derselben eingliedrigen Untergruppe $h_1 \mathfrak{Y}_1 f + \cdots + h_{r-q} \mathfrak{Y}_{r-q} f$ der G_{r-q} im Ganzen ∞^q verschiedene eingliedrige Untergruppen der G_r, nämlich alle von der Form:

$$\sum_1^{r-q} {}^k\, h_k \cdot X_k f + \sum_1^q {}^j\, \lambda_j \left\{ X_{r-q+j} f - \sum_1^{r-q} {}^\mu\, d_{j\mu} \cdot X_\mu f \right\},$$

wo $\lambda_1 \cdots \lambda_q$ willkürliche Constanten bezeichnen.

Ein gewisses Entsprechen findet nun überhaupt zwischen den Untergruppen der G_r und der G_{r-q} statt.

Erzeugen irgend m von einander unabhängige infinitesimale Transformationen

$$l_{\mu 1} \cdot X_1 f + \cdots + l_{\mu r} \cdot X_r f \qquad (\mu = 1 \cdots m)$$

der G_r eine m-gliedrige Untergruppe, so erzeugen offenbar die m infinitesimalen Transformationen

$$\sum_1^r {}^k\, l_{\mu k} \cdot \mathfrak{Y}_k f = \sum_1^{r-q} {}^k \left\{ l_{\mu k} + \sum_1^q {}^j\, l_{\mu,\, r-q+j}\, d_{jk} \right\} \mathfrak{Y}_k f$$

$$(\mu = 1 \cdots m)$$

eine Untergruppe der G_{r-q}. Diese Untergruppe ist höchstens m-gliedrig, sie ist insbesondere nullgliedrig, das heisst, sie besteht nur aus der identischen Transformation, wenn jene m-gliedrige Untergruppe der G_r in der q-gliedrigen Gruppe (9) enthalten ist, und zwar offenbar nur in diesem Falle.

Erzeugen umgekehrt irgend m' unabhängige infinitesimale Transformationen

$$l_{\mu 1} \cdot \mathfrak{Y}_1 f + \cdots + l_{\mu,\, r-q} \cdot \mathfrak{Y}_{r-q} f \qquad (\mu = 1 \cdots m')$$

eine m'-gliedrige Untergruppe der G_{r-q}: $Y_1 f \cdots Y_{r-q} f$, so erzeugen stets die m' infinitesimalen Transformationen

$$l_{\mu 1} \cdot X_1 f + \cdots + l_{\mu,\, r-q} \cdot X_{r-q} f \qquad (\mu = 1 \cdots m')$$

zusammen mit den q Transformationen

$$X_{r-q+k} f - d_{k1} X_1 f - \cdots - d_{k,\, r-q} X_{r-q} f \qquad (k = 1 \cdots q)$$

eine $(m' + q)$-gliedrige Untergruppe der G_r.

Wir sehen hieraus, dass jeder Untergruppe der G_r eine ganz bestimmte Untergruppe der G_{r-q} entspricht, welche allerdings unter Umständen blos aus der identischen Transformation besteht; und ferner, dass jeder Untergruppe der G_{r-q} mindestens eine Untergruppe der G_r entspricht. Kennen wir alle Untergruppen der G_r und bestimmen wir alle ihnen entsprechenden Untergruppen der G_{r-q}, so erhalten wir alle Untergruppen der G_{r-q}. Es gilt also der

Satz 2. *Hat man eine r-gliedrige Gruppe, von der man alle Untergruppen kennt, isomorph auf eine $(r-q)$-gliedrige Gruppe bezogen, so kann man sofort auch alle Untergruppen der $(r-q)$-gliedrigen Gruppe angeben.*

Es sei $X_1 f \cdots X_r f$ oder kurz G_r eine r-gliedrige Gruppe von der Zusammensetzung:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} \cdot X_s f.$$

Wir wollen untersuchen, welche verschiedenen Zusammensetzungen eine mit der G_r meroedrisch isomorphe Gruppe haben kann.

Bis jetzt wissen wir nur Folgendes: Lässt sich die G_r auf eine $(r-q)$-gliedrige Gruppe isomorph beziehen, so giebt es in der G_r eine ganz bestimmte q-gliedrige invariante Untergruppe, welcher in der $(r-q)$-gliedrigen Gruppe die identische Transformation entspricht. Wir behaupten nun, dass sich dieser Satz folgendermassen umkehren lässt: Enthält die G_r eine q-gliedrige invariante Untergruppe, so giebt es stets eine $(r-q)$-gliedrige, mit der G_r isomorphe Gruppe G_{r-q}, welche sich derart isomorph auf die G_r beziehen lässt, dass der q-gliedrigen invarianten Gruppe der G_r innerhalb der G_{r-q} die identische Transformation entspricht.

Der Bequemlichkeit wegen denken wir uns die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ so gewählt, dass $X_{r-q+1} f \cdots X_r f$ die bewusste invariante Untergruppe der G_r erzeugen. Dann kommt unsere Behauptung offenbar darauf hinaus, dass es in irgend welchen Veränderlichen $y_1, y_2 \cdots$, r infinitesimale Transformationen $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ giebt, welche die folgenden beiden Bedingungen erfüllen: erstens müssen $\mathfrak{Y}_{r-q+1} f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ identisch verschwinden, während $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_{r-q} f$ von einander unabhängig sind und zweitens müssen die Relationen

$$(10) \qquad (\mathfrak{Y}_i \mathfrak{Y}_k) = c_{ik1} \cdot \mathfrak{Y}_1 f + \cdots + c_{ikr} \cdot \mathfrak{Y}_r f \qquad (i, k = 1 \cdots r)$$

identisch bestehen.

Da $X_{r-q+1} f \cdots X_r f$ eine in der G_r invariante Untergruppe erzeugen, so sind alle $c_{ik1}, c_{ik2} \cdots c_{ik,r-q}$ gleich Null, in denen wenigstens einer der beiden Indices i und k grösser ist als $r-q$. Setzen wir demnach in den Relationen (10) die infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{Y}_{r-q+1}f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ sämmtlich gleich Null, so werden alle Relationen, in denen i und k nicht beide kleiner sind als $r-q+1$, identisch befriedigt und wir behalten blos die folgenden Relationen zwischen $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_{r-q} f$:

$$(11) \qquad (\mathfrak{Y}_i \, \mathfrak{Y}_k) = c_{ik1} \cdot \mathfrak{Y}_1 f + \cdots + c_{ik,\, r-q} \cdot \mathfrak{Y}_{r-q} f \qquad {\scriptstyle (i,\, k = 1 \cdots r-q)}.$$

Es braucht daher nur bewiesen zu werden, dass es $r-q$ unabhängige infinitesimale Transformationen $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_{r-q} f$ giebt, welche durch die Relationen (11) verknüpft sind oder, was dasselbe ist: dass es eine $(r-q)$-gliedrige Gruppe giebt, deren Zusammensetzung durch das System der Constanten c_{iks} ${\scriptstyle (i,\, k,\, s = 1 \cdots r-q)}$ dargestellt wird.

Um das zu beweisen, gehen wir davon aus, dass für $i, k, j = 1 \cdots r-q$ die Jacobische Identität:

$$((X_i \, X_k) \, X_j) + ((X_k \, X_j) \, X_i) + ((X_j \, X_i) \, X_k) = 0,$$

besteht, die sich auch schreiben lässt:

$$\sum_1^{r-q} {}_{\mu} \left\{ c_{ik\mu} \, (X_\mu \, X_j) + c_{kj\mu} \, (X_\mu \, X_i) + c_{ji\mu} \, (X_\mu \, X_k) \right\} +$$

$$+ \sum_1^{q} {}_{\pi} \left(X_{r-q+\pi} f,\ c_{ik,\, r-q+\pi} X_j f + c_{kj,\, r-q+\pi} X_i f + c_{ji,\, r-q+\pi} X_k f \right) = 0.$$

Entwickeln wir hier die linke Seite vollständig und berücksichtigen, dass die Coefficienten von $X_1 f \cdots X_{r-q} f$ verschwinden müssen, so erhalten wir zwischen den Constanten c_{iks}, welche in (11) vorkommen, die folgenden Relationen:

$$\sum_1^{r-q} {}_{\mu} \left\{ c_{ik\mu} \, c_{\mu j\nu} + c_{kj\mu} \, c_{\mu i\nu} + c_{ji\mu} \, c_{\mu k\nu} \right\} = 0$$

$$(i,\, k,\, j,\, \nu = 1 \cdots r-q).$$

Dieselben zeigen, dass die c_{iks} ${\scriptstyle (i,\, k,\, s, = 1 \cdots r-q)}$ eine Zusammensetzung in dem früher definirten Sinne bestimmen. Wie S. 297 bemerkt wurde, giebt es ja sicher $(r-q)$-gliedrige Gruppen, deren Zusammensetzung durch die c_{iks} ${\scriptstyle (i,\, k,\, s = 1 \cdots r-q)}$ bestimmt wird.

Damit ist die oben aufgestellte Behauptung bewiesen. Nehmen wir noch hinzu, was wir schon vorher wussten, so erhalten wir den*)

---

*) Wir zeigen später, dass der citirte Satz 1, S. 297 für die Entwickelungen des Textes keineswegs unentbehrlich ist. Vgl. Lie, Archiv for Math. og Nat. Bd. 10, S. 357 Christiania 1885.

Satz 3. *Kennt man alle invarianten Untergruppen der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$:*

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_s \, c_{iks} \cdot X_s f,$$

so kann man alle Zusammensetzungen angeben, welche eine mit der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ meroedrisch isomorphe Gruppe haben kann.

Um die betreffenden Zusammensetzungen wirklich aufzustellen, muss man folgendermassen verfahren:

Erzeugen die $q > 0$ unabhängigen infinitesimalen Transformationen

$$g_{\mu 1} \cdot X_1 f + \cdots + g_{\mu r} \cdot X_r f \qquad (\mu = 1 \cdots q)$$

eine q-gliedrige invariante Untergruppe der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$, oder kurz G_r, so setze man:

$$g_{\mu 1} \cdot \mathfrak{Y}_1 f + \cdots + g_{\mu r} \cdot \mathfrak{Y}_r f = 0 \qquad (\mu = 1 \cdots q),$$

löse nach q von den r Ausdrücken $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ auf und eliminire darnach dieselben aus den Relationen:

$$(\mathfrak{Y}_i \mathfrak{Y}_k) = \sum_1^r {}_s \, c_{iks} \cdot \mathfrak{Y}_s f.$$

Zwischen den $r - q$ übriggebliebenen der Ausdrücke $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ erhält man dann Relationen, welche die Zusammensetzung einer $(r - q)$-gliedrigen mit der G_r isomorphen Gruppe definiren. Verfährt man in dieser Weise bei jeder einzelnen invarianten Untergruppe der G_r, so erhält man alle die gewünschten Zusammensetzungen.

Da jede Gruppe ihre eigene invariante Untergruppe ist, so ergiebt sich, dass zu jeder r-gliedrigen Gruppe G_r eine meroedrisch isomorphe Gruppe existirt, die Gruppe nämlich, welche von der identischen Transformation gebildet wird. Ist die G_r einfach (vgl. Kap. 15, S. 264), so ist offenbar die identische Transformation die einzige mit ihr meroedrisch isomorphe Gruppe.

§ 83.

Wir betrachten in diesem Paragraphen einige wichtige Fälle, in denen Gruppen auftreten, die zu einer vorgelegten Gruppe isomorph sind.

Die r-gliedrige Gruppe:

$$X_k f = \sum_1^n {}_i \, \xi_{ki} (x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

des Raumes $x_1 \cdots x_n$ sei imprimitiv und es sei:

$$u_1(x_1 \cdots x_n) = \text{const.}, \cdots u_{n-q}(x_1 \cdots x_n) = \text{const.}$$

eine bei der Gruppe invariante Zerlegung des Raumes in ∞^{n-q} q-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten.

Nach Kap. 13, S. 222 befriedigen die $n-q$ von einander unabhängigen Functionen $u_1 \cdots u_{n-q}$ Relationen von der Form:

$$X_k u_\nu = \omega_{k\nu}(u_1 \cdots u_{n-q}) \quad (k=1\cdots r,\ \nu=1\cdots n-q);$$

es stellen daher die r Ausdrücke:

$$\sum_1^{n-q}{}_\nu X_k u_\nu \frac{\partial f}{\partial u_\nu} = \sum_1^{n-q}{}_\nu \omega_{k\nu}(u_1 \cdots u_{n-q}) \frac{\partial f}{\partial u_\nu} = \overline{X}_k f$$
$$(k=1\cdots r)$$

ebensoviele infinitesimale Transformationen in den Veränderlichen $u_1 \cdots u_{n-q}$ dar. Wir behaupten, dass $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_r f$ eine mit der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ isomorphe Gruppe erzeugen.

Zum Beweise bilden wir:

$$\overline{X}_i(\overline{X}_k(f)) - \overline{X}_k(\overline{X}_i(f)) = \sum_1^{n-q}{}_\nu (\overline{X}_i \omega_{k\nu} - \overline{X}_k \omega_{i\nu}) \frac{\partial f}{\partial u_\nu}$$
$$= \sum_1^{n-q}{}_\nu (X_i \omega_{k\nu} - X_k \omega_{i\nu}) \frac{\partial f}{\partial u_\nu};$$

nun ist:

$$X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f)) = \sum_1^r{}_s c_{iks} \cdot X_s f,$$

oder, wenn wir u_ν an Stelle von f einsetzen:

$$X_i \omega_{k\nu} - X_k \omega_{i\nu} = \sum_1^r{}_s c_{iks} \cdot X_s u_\nu = \sum_1^r{}_s c_{iks}\, \omega_{s\nu},$$

also ergiebt sich durch Einsetzung des gefundenen Werthes von $X_i \omega_{k\nu} - X_k \omega_{i\nu}$:

$$\overline{X}_i(\overline{X}_k(f)) - \overline{X}_k(\overline{X}_i(f)) = \sum_1^r{}_s \sum_1^{n-q}{}_\nu c_{iks}\, \omega_{s\nu} \frac{\partial f}{\partial u_\nu},$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt:

$$(\overline{X}_i \overline{X}_k) = \sum_1^r{}_s c_{iks} \cdot \overline{X}_s f.$$

Das aber war zu beweisen.

Die Gruppe $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_r f$ hat eine sehr einfache begriffliche Bedeutung.

Aus der Definition der Imprimitivität folgt, dass der Inbegriff der ∞^{n-q} Mannigfaltigkeiten $u_1 = \text{const.}, \cdots u_{n-q} = \text{const.}$ bei der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ invariant bleibt, dass also bei jeder Transformation dieser Gruppe die ∞^{n-q} Mannigfaltigkeiten unter einander vertauscht werden. Folglich entspricht jeder Transformation der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ eine gewisse Vertauschung unserer ∞^{n-q} Mannigfaltigkeiten oder, was dasselbe ist, eine Transformation in den $n-q$ Veränderlichen $u_1 \cdots u_{n-q}$. Es ist klar, dass der Inbegriff aller so erhaltenen Transformationen in den Veränderlichen u eine Gruppe bildet, eben die von $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_r f$ erzeugte Gruppe.

Natürlich braucht die Gruppe $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_r f$ nicht holoedrisch isomorph mit der ursprünglichen Gruppe zu sein, sie ist aber offenbar nur dann meroedrisch mit ihr isomorph, wenn es unter den infinitesimalen Transformationen $e_1 \overline{X}_1 f + \cdots + e_r \overline{X}_r f$ wenigstens eine giebt, welche identisch verschwindet, ohne dass $e_1 \cdots e_r$ sämmtlich null sind, wenn also wenigstens eine unter den infinitesimalen Transformationen $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ jede einzelne unserer ∞^{n-q} Mannigfaltigkeiten invariant lässt.

Wir haben also den

Satz 4. *Ist die r-gliedrige Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ des Raumes $x_1 \cdots x_n$ imprimitiv und stellen die Gleichungen:*

$$u_1(x_1 \cdots x_n) = \text{const.}, \cdots u_{n-q}(x_1 \cdots x_n) = \text{const.}$$

eine bei der Gruppe invariante Zerlegung des Raumes in ∞^{n-q} q-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten dar, so erzeugen die infinitesimalen Transformationen:

$$\sum_1^{n-q} {}_{\nu}\, X_k u_\nu \frac{\partial f}{\partial u_\nu} = \sum_1^{n-q} {}_{\nu}\, \omega_{k\nu}(u_1 \cdots u_{n-q}) \frac{\partial f}{\partial u_\nu} = \overline{X}_k f$$
$$(k = 1 \cdots r)$$

in den Veränderlichen $u_1 \cdots u_{n-q}$ eine mit der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ isomorphe Gruppe, die angiebt, in welcher Weise die ∞^{n-q} Mannigfaltigkeiten bei den Transformationen der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ unter einander vertauscht werden. Giebt es unter den infinitesimalen Transformationen $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ gerade $r - \varrho$ unabhängige, welche jede einzelne der ∞^{n-q} Mannigfaltigkeiten invariant lassen, so ist die Gruppe $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_r f$ blos ϱ-gliedrig.

Bei Benutzung des Theorems 54, S. 301, erhalten wir noch den

Satz 5. *Ist die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ des Raumes imprimitiv und ist*

$$u_1(x_1 \cdots x_n) = \text{const.}, \cdots u_{n-q}(x_1 \cdots x_n) = \text{const.}$$

eine bei der Gruppe invariante Zerlegung des Raumes in ∞^{n-q} q-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten, so erzeugt der Inbegriff aller infinitesimalen Transformationen $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$, welche jede einzelne dieser Mannigfaltigkeiten stehen lassen, eine invariante Untergruppe der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$.

Betrachten wir jetzt eine beliebige r-gliedrige Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$, welche eine Mannigfaltigkeit des Raumes $x_1 \cdots x_n$ invariant lässt.

Nach Kap. 14, S. 233 werden die Punkte dieser Mannigfaltigkeit ihrerseits durch eine Gruppe transformirt, deren infinitesimale Transformationen sofort angegeben werden können, wenn die Gleichungen der Mannigfaltigkeit in aufgelöster Form vorliegen. Lauten nämlich die Gleichungen der Mannigfaltigkeit folgendermassen:

$$x_1 = \varphi_1(x_{n-m+1} \cdots x_n), \cdots x_{n-m} = \varphi_{n-m}(x_{n-m+1} \cdots x_n)$$

und werden $x_{n-m+1} \cdots x_n$ als Coordinaten für die Punkte der Mannigfaltigkeit gewählt, so besitzen (vgl. Kap. 14, S. 234) die infinitesimalen Transformationen der betreffenden Gruppe die Form:

$$\overline{X}_k f = \sum_1^m {}^{\mu}\, \xi_{k,\, n-m+\mu}(\varphi_1 \cdots \varphi_{n-m},\, x_{n-m+1} \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_{n-m+\mu}}$$
$$(k = 1 \cdots r).$$

Dabei bestehen, wie wir damals bereits nachgewiesen haben, die Relationen:

$$(\overline{X}_i \overline{X}_k) = \sum_1^r {}^{s}\, c_{iks} \cdot \overline{X}_s f.$$

Wir ersehen hieraus, dass die Gruppe $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_r f$ mit der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ isomorph ist; sie ist insbesondere meroedrisch isomorph mit ihr, wenn es unter den infinitesimalen Transformationen

$$e_1 \cdot \overline{X}_1 f + \cdots + e_r \cdot \overline{X}_r f$$

wenigstens eine giebt, welche identisch verschwindet, wenn also wenigstens eine unter den infinitesimalen Transformationen $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ jeden einzelnen Punkt der Mannigfaltigkeit stehen lässt.

Somit können wir das Theorem 40 in Kap. 14, S. 233 folgendermassen ergänzen:

Satz 6. *Lässt die r-gliedrige Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ die Mannigfaltigkeit*

$$x_1 = \varphi_1(x_{n-m+1} \cdots x_n), \cdots x_{n-m} = \varphi_{n-m}(x_{n-m+1} \cdots x_n)$$

invariant, so erzeugen die verkürzten infinitesimalen Transformationen

$$\overline{X}_k f = \sum_1^m {}^{\mu}\, \xi_{k,\, n-m+\mu}(\varphi_1 \cdots \varphi_{n-m},\, x_{n-m+1} \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_{n-m+\mu}}$$
$$(k = 1 \cdots r)$$

in den Veränderlichen $x_{n-m+1} \cdots x_n$ eine mit der r-gliedrigen isomorphe Gruppe, die angiebt, in welcher Weise die Punkte der Mannigfaltigkeit von den Transformationen der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ unter einander vertauscht werden. Giebt es unter den infinitesimalen Transformationen

$e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ gerade $r - \varrho$ unabhängige, welche jeden einzelnen Punkt der Mannigfaltigkeit invariant lassen, so ist die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ blos ϱ-gliedrig.

Ausserdem gilt natürlich auch der

Satz 7. *Lässt die r-gliedrige Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ des Raumes $x_1 \cdots x_n$ eine Mannigfaltigkeit invariant, so erzeugt der Inbegriff aller infinitesimalen Transformationen $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$, welche jeden einzelnen Punkt dieser Mannigfaltigkeit stehen lassen, eine invariante Untergruppe der r-gliedrigen.*

Es sei

$$X_k f = \sum_1^n {}^i \, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

eine r-gliedrige *intransitive* Gruppe des R_n und zwar eine, welche nur eine *discrete* Anzahl von invarianten Untergruppen enthält.

Das vollständige System, welches von den Gleichungen

$$X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0$$

bestimmt wird, ist unter diesen Voraussetzungen q-gliedrig, wo $q < n$, und besitzt $n - q$ unabhängige Lösungen. Wir können uns daher die Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ von vornherein so gewählt denken, dass $x_{q+1} \cdots x_n$ Lösungen des vollständigen Systems sind; thun wir das, so verschwinden wegen $\xi_{k,\, q+j} = X_k x_{q+j}$ alle $\xi_{k,\, q+1} \cdots \xi_{kr}$.

Offenbar bleibt jetzt jede der ∞^{n-q} q-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten

$$x_{q+1} = a_{q+1}, \cdots x_n = a_n$$

bei der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ invariant; dafür werden aber ihre Punkte unter einander vertauscht und zwar nach Kap. 14, Seite 233 durch eine Gruppe. Wählen wir $x_1 \cdots x_q$ als Coordinaten für die Punkte der Mannigfaltigkeit, so werden die infinitesimalen Transformationen der betreffenden Gruppe:

$$\overline{X}_k f = \sum_1^q {}^i \, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_q,\ a_{q+1} \cdots a_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$
$$(k = 1 \cdots r).$$

Ob diese Gruppe r-gliedrig ist oder nicht, bleibt vorläufig ungewiss, jedenfalls ist sie mit der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ isomorph.

Ist die Gruppe $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_r f$ ϱ-gliedrig ($\varrho \leqq r$), so enthält die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ eine $(r - \varrho)$-gliedrige invariante Untergruppe, welche jeden einzelnen Punkt der Mannigfaltigkeit $x_{q+1} = a_{q+1}, \cdots x_n = a_n$ stehen lässt (vgl. Satz 6 und 7). Diese invariante Untergruppe kann sich nicht mit den Werthen von $a_{q+1} \cdots a_n$ ändern, sonst müsste es in der Gruppe $X_1f \cdots X_rf$ eine continuirliche Reihe von invarianten Untergruppen geben, was unsrer Voraussetzung widerspräche. Folglich existirt in der Gruppe $X_1f \cdots X_rf$ eine $(r-\varrho)$-gliedrige invariante Untergruppe, welche alle Punkte einer jeden der ∞^{n-q} Mannigfaltigkeiten

$$x_{q+1} = a_{q+1}, \cdots x_n = a_n$$

und also überhaupt alle Punkte des Raumes $x_1 \cdots x_n$ stehen lässt. Nun aber ist die identische Transformation die einzige, welche alle Punkte des Raumes $x_1 \cdots x_n$ in Ruhe lässt, also ist $r - \varrho = 0$ und $\varrho = r$; das heisst, die Gruppe $\overline{X}_1f \cdots \overline{X}_rf$ ist holoedrisch isomorph mit der Gruppe $X_1f \cdots X_rf$.

Demnach gilt der

Satz 8. *Sind $X_1f \cdots X_rf$ unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen intransitiven Gruppe mit den absoluten Invarianten $\Omega_1(x_1 \cdots x_n), \cdots \Omega_{n-q}(x_1 \cdots x_n)$, und giebt es in dieser Gruppe nur eine discrete Anzahl von invarianten Untergruppen, so werden die Punkte eines jeden invarianten Gebietes: $\Omega_1 = a_1, \cdots \Omega_{n-q} = a_{n-q}$ von der Gruppe $X_1f \cdots X_rf$ durch eine r-gliedrige, holoedrisch isomorphe Grupp etransformirt.*

Kapitel 18.

Endliche Gruppen, deren Transformationen discrete continuirliche Schaaren bilden.

Bisher haben wir uns nur mit endlichen continuirlichen Transformationsgruppen beschäftigt, also mit solchen, welche durch *ein* Gleichungensystem von der Form

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \qquad (i=1 \cdots n)$$

dargestellt werden. In diesem Kapitel sollen nun auch diejenigen endlichen Gruppen kurz behandelt werden, welche sich nicht durch ein einziges Gleichungensystem, sondern erst durch mehrere solche darstellen lassen; es sind das die Gruppen, deren wir schon in der Einleitung, Seite 7 Erwähnung gethan haben.*)

Wir denken uns also eine Reihe von Gleichungensystemen von der Form

$$(1) \qquad x_i' = f_i^{(k)}(x_1 \cdots x_n, a_1^{(k)} \cdots a_{r_k}^{(k)}) \qquad \begin{matrix}(i=1 \cdots n)\\(k=1,2 \cdots)\end{matrix}$$

---

*) Lie, Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania, Nr. 12, S. 1, 1883.

vorgelegt, deren jedes eine endliche Zahl r_k von willkürlichen Parametern $a_1^{(k)} \cdots a_{r_k}^{(k)}$ enthält, und wir setzen voraus, dass der Inbegriff aller Transformationen, welche durch diese Gleichungensysteme dargestellt werden, eine Gruppe bildet.

Da jedes der Gleichungensysteme (1) eine continuirliche Schaar von Transformationen darstellt, so besteht unsere Gruppe aus einer Anzahl discreter, continuirlicher Schaaren. Es ist klar, dass jede continuirliche Schaar von Transformationen unsrer Gruppe entweder mit einer der Schaaren (1) zusammenfallen oder in einer dieser Schaaren enthalten sein muss. Selbstverständlich setzen wir voraus, dass keine der Schaaren (1) in einer der übrigen enthalten ist.

Es ist unsere Absicht, die Grundzüge einer allgemeinen Theorie der eben definirten Art von Gruppen zu entwickeln, doch werden wir der Einfachheit wegen einige Beschränkungen einführen, welche übrigens nicht als wesentlich zu betrachten sind.

Erstens machen wir die Annahme, dass sich die Transformationen der Gruppe (1) paarweise als inverse zusammenordnen. Wenn daher die Transformationen der Schaar

$$x_i' = f_i^{(k)}(x_1 \cdots x_n,\ a_1^{(k)} \cdots a_{r_k}^{(k)}) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

sich nicht schon paarweise als inverse zusammenordnen, so soll auch der Inbegriff der zugehörigen inversen Transformationen eine Schaar bilden, welche der Gruppe angehört, welche also unter den Schaaren (1) enthalten ist.

Zweitens setzen wir voraus, dass die Anzahl der Schaaren (1) endlich, etwa gleich m ist. Wenn jedoch die von uns abgeleiteten Sätze auch für unendlich viele Schaaren (1) gültig bleiben, werden wir gelegentlich darauf hinweisen.

§ 84.

Zu den beiden Voraussetzungen, welche wir in der Einleitung des Kapitels über die Gruppe (1) gemacht haben, wollen wir vorläufig noch die dritte hinzufügen, dass alle Schaaren der Gruppe gleichviele, etwa r wesentliche Parameter enthalten sollen. Im nächsten Paragraphen zeigen wir, dass diese dritte Voraussetzung aus den beiden ersten folgt und daher überflüssig ist.

Es sei

$$x_i' = f_i^{(k)}(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

eine der m Schaaren von ∞^r Transformationen, aus denen unsere Gruppe besteht, es sei also k irgend eine der Zahlen $1 \cdots m$.

Durch Auflösung der eben geschriebenen Gleichungen erhalten wir eine Schaar von Transformationen

$$x_i = F_i^{(k)}(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r) \quad (i=1\cdots n),$$

welche unter den gemachten Voraussetzungen ebenfalls der Gruppe angehört.

Wenn wir daher die beiden Transformationen

$$\begin{aligned} x_i &= F_i^{(k)}(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r) \\ x_i'' &= f_i^{(k)}(x_1 \cdots x_n, a_1 + h_1, \cdots a_r + h_r) \end{aligned} \quad (i=1\cdots n)$$

nach einander ausführen, so ergiebt sich wiederum eine Transformation unsrer Gruppe, nämlich die folgende:

$$(2) \quad x_i'' = f_i^{(k)}(F_1^{(k)}(x', a) \cdots F_n^{(k)}(x', a), a_1 + h_1, \cdots a_r + h_r) \quad (i=1\cdots n)$$

Wir entwickeln hier die rechten Seiten nach Potenzen von $h_1 \cdots h_r$ und finden:

$$x_i'' = f_i^{(k)}(F^{(k)}(x', a), a) + \sum_1^r {}_j\, h_j \left[\frac{\partial f_i^{(k)}(x, a)}{\partial a_j}\right]_{x = F^{(k)}(x', a)} + \cdots,$$

wo alle weggelassenen Glieder in $h_1 \cdots h_r$ von der zweiten und von höherer Ordnung sind. Berücksichtigen wir aber, dass die beiden Transformationen

$$x_i = F_i^{(k)}(x', a), \quad x_i' = f_i^{(k)}(x, a) \quad (i=1\cdots n)$$

zu einander invers sind, setzen wir ausserdem noch zur Abkürzung

$$(3) \quad \left[\frac{\partial f_i^{(k)}(x, a)}{\partial a_j}\right]_{x = F^{(k)}(x', a)} = \eta_{ji}^{(k)}(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r),$$

so erkennen wir, dass die eben gefundene Transformation die folgende Gestalt hat:

$$4) \quad x_i'' = x_i' + \sum_1^r {}_j\, h_j \cdot \eta_{ji}^{(k)}(x', a) + \cdots \quad (i=1\cdots n).$$

Es ist leicht zu sehen, dass es keine von $x_1' \cdots x_n'$ unabhängigen Functionen $\chi_1(a) \cdots \chi_r(a)$ giebt, welche die n Gleichungen

$$\sum_1^r {}_j\, \chi_j(a_1 \cdots a_r) \cdot \eta_{ji}^{(k)}(x', a) = 0 \quad (i=1\cdots n)$$

identisch befriedigen, ohne sämmtlich zu verschwinden. Macht man nämlich in diesen Gleichungen die Substitution $x_\nu' = f_\nu^{(k)}(x, a)$, so erhält man die Gleichungen

$$\sum_1^r {}_j\, \chi_j(a) \frac{\partial f_i^{(k)}(x, a)}{\partial a_j} = 0 \quad (i=1\cdots n),$$

welche ebenfalls identisch befriedigt sein müssten; das aber ist nach Kap. 1, Satz 1, S. 13 unmöglich, weil die Parameter $a_1 \cdots a_r$ in den Transformationsgleichungen $x_i' = f_i^{(k)}(x, a)$ wesentlich sind.

Wir schliessen hieraus, dass die r infinitesimalen Transformationen

$$(5) \qquad \sum_1^n {}_i\, \eta_{ji}^{(k)}(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial x_i'} \qquad (j = 1 \cdots r)$$

stets von einander unabhängig sind, wenn $a_1 \cdots a_r$ ein Werthsystem von allgemeiner Lage ist.

Unter $a_1^0 \cdots a_r^0$ wollen wir ein Werthsystem von allgemeiner Lage verstehen und wollen setzen:

$$\eta_{ji}^{(1)}(x', a^0) = \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n'),$$

indem wir der Zahl k den besonderen Werth 1 ertheilen. Wir werden zeigen, dass sich alle infinitesimalen Transformationen (5) aus den r von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen

$$X_j' f = \sum_1^n {}_i\, \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') \frac{\partial f}{\partial x_i'} \qquad (j = 1 \cdots r)$$

linear ableiten lassen, gleichgültig, welche der Zahlen $1, 2 \cdots m$ auch k ist und welche Werthe auch $a_1 \cdots a_r$ haben mögen.

Der Beweis hierfür hat grosse Aehnlichkeit mit den Entwickelungen in Kapitel 4, S. 76 und 77.

Wir führen zwei Transformationen unsrer Gruppe nach einander aus, nämlich zuerst die Transformation

$$(6) \qquad x_i'' = x_i' + \sum_1^r {}_j\, h_j \cdot \xi_{ji}(x') + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n),$$

welche aus der Transformation (4) hervorgeht, wenn $k = 1$ und $a_1 = a_1^0, \cdots a_r = a_r^0$ gesetzt wird; sodann aber die Transformation

$$x_i''' = x_i'' + \sum_1^r {}_j\, \varrho_j \cdot \eta_{ji}^{(k)}(x'', a) + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n),$$

welche ebenfalls die Form (4) besitzt. Auf diese Weise erhalten wir die folgende unsrer Gruppe angehörige Transformation:

$$x_i''' = x_i' + \sum_1^r {}_j\, h_j \cdot \xi_{ji}(x') + \sum_1^r {}_j\, \varrho_j \cdot \eta_{ji}^{(k)}(x', a) + \cdots$$
$$(i = 1 \cdots n),$$

wo die weggelassenen Glieder in den $2r$ Grössen $h_1 \cdots h_r$, $\varrho_1 \cdots \varrho_r$ von der zweiten und von höherer Ordnung sind.

Abgesehen von den a kommen in der letzten Transformation $2r$ willkürliche Parameter vor: $h_1 \cdots h_r$, $\varrho_1 \cdots \varrho_r$, während doch unsere Gruppe nur Transformationen mit r wesentlichen willkürlichen Parametern enthalten kann. Aus dem Satze 4 des Kap. 3, S. 65 geht somit hervor, dass unter den $2r$ infinitesimalen Transformationen: (5) und $X_1'f \cdots X_r'f$ nur r von einander unabhängige vorhanden sein können. Da aber $X_1'f \cdots X_r'f$ von einander unabhängig sind, so müssen sich die infinitesimalen Transformationen (5) wirklich aus $X_1'f \cdots X_r'f$ linear ableiten lassen, für alle Werthe $1, 2 \cdots m$ von k und für alle Werthe der a.

Durch ähnliche Betrachtungen wie in Kap. 2, S. 39 und 40 erkennen wir nunmehr, dass Identitäten von der Form

$$\sum_1^n {}_i\, \eta_{ji}^{(k)}(x', a) \frac{\partial f}{\partial x_i'} \equiv \sum_1^r {}_\pi\, \psi_{j\pi}^{(k)}(a_1 \cdots a_r) \cdot X_\pi' f$$
$$(k = 1 \cdots m,\ j = 1 \cdots r)$$

bestehen, wo die $\psi_{j\pi}^{(k)}$ ganz bestimmte analytische Functionen von $a_1 \cdots a_r$ sind.

Erinnern wir uns endlich der Gleichungen (3), welche sich offenbar auch schreiben lassen:

$$\eta_{ji}^{(k)}(f_1^{(k)}(x, a) \cdots f_n^{(k)}(x, a),\ a_1 \cdots a_r) \equiv \frac{\partial f_i^{(k)}(x, a)}{\partial a_j},$$

und verbinden wir dieselben mit den Identitäten:

$$\eta_{ji}^{(k)}(x', a) \equiv \sum_1^r {}_\pi\, \psi_{j\pi}^{(k)}(a) \cdot \xi_{\pi i}(x'),$$

so erhalten wir die Identitäten:

$$(7) \qquad \frac{\partial f_i^{(k)}(x, a)}{\partial a_j} \equiv \sum_1^r {}_\pi\, \psi_{j\pi}^{(k)}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{\pi i}(f_1^{(k)}(x, a) \cdots f_n^{(k)}(x, a))$$
$$(j = 1 \cdots r,\ i = 1 \cdots n;\ k = 1 \cdots m).$$

Die Functionen $\xi_{\pi i}$ sind hierbei von dem Index k unabhängig, die $\psi_{j\pi}^{(k)}$ dagegen im Allgemeinen nicht.

Wir haben also das

Theorem 55. *Stellen die m Gleichungensysteme*

$$x_i' = f_i^{(k)}(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \qquad (i = 1 \cdots n)$$
$$(k = 1 \cdots m),$$

in deren jedem die r Parameter $a_1 \cdots a_r$ wesentlich sind, alle Transformationen einer Gruppe dar (und lassen sich dabei alle diese Transformationen paarweise als inverse zusammen-

*ordnen)**), *so giebt es r unabhängige infinitesimale Transformationen*

$$X_j f = \sum_1^n {}^i\, \xi_{ji}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (j = 1 \cdots r),$$

welche zu dieser Gruppe in solcher Beziehung stehen, dass jede Schaar

$$x_i' = f_i^{(k)}(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

Differentialgleichungen von der Form

$$(7') \qquad \frac{\partial f_i^{(k)}}{\partial a_j} = \sum_1^r {}^\pi\, \psi_{j\pi}^{(k)}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{\pi i}(x_1' \cdots x_n') \qquad (i = 1 \cdots n,\ j = 1 \cdots r)$$

befriedigt.

Hieraus folgt zunächst, nach den Theoremen 21, 24, Seite 149 und 158, dass die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ eine r-gliedrige Gruppe erzeugen.

Ferner ist klar, dass auf jede der Schaaren $x_i' = f_i^{(k)}(x, a)$ das Theorem 25 in Kap. 9, S. 160 Anwendung findet: es kann jede Transformation $x_i' = f_i^{(k)}(x, a)$, deren Parameter $a_1 \cdots a_r$ in einer gewissen Umgebung von $\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r$ liegen, dadurch erhalten werden, dass man zuerst die Transformation $\bar{x}_i = f_i^{(k)}(x, \bar{a})$ ausführt und sodann eine gewisse Transformation der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$.

Da nun unsere Gruppe alle Transformationen von der Form (6):

$$x_i'' = x_i' + \sum_1^r {}^j\, h_j \cdot \xi_{ji}(x') + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

enthält und da eine von diesen Transformationen, nämlich die mit den Parametern $h_1 = 0, \cdots h_r = 0$, die identische Transformation ist, so muss die identische Transformation in einer der Schaaren $x_i' = f_i^{(k)}(x, a)$ vorkommen. Folglich ist eine unter diesen Schaaren eben die r-gliedrige Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$. Selbstverständlich ist das die einzige r-gliedrige von infinitesimalen Transformationen erzeugte Gruppe, welche in der Gruppe $x_i' = f_i^{(k)}(x, a)$ enthalten ist.

Damit haben wir das folgende Theorem gewonnen:

Theorem 56. *Jede Gruppe*

$$x_i' = f_i^{(k)}(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \qquad (i = 1 \cdots n) \quad (k = 1 \cdots m)$$

---

*) Das Theorem 55 bleibt, wie man leicht erkennt, noch richtig, wenn die eingeklammerten Worte gestrichen werden. (Vergleiche die Entwickelungen des Kapitels 2.)

von der im vorigen Theoreme angegebenen Beschaffenheit enthält eine und nur eine r-gliedrige Gruppe mit paarweise inversen Transformationen. Diese r-gliedrige Gruppe wird erzeugt von den im vorigen Theoreme definirten infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$, *ihre* ∞^r *Transformationen bilden eine der m Schaaren* $x_i' = f_i^{(k)}(x, a)$ *und stehen ausserdem zu jeder der übrigen* $m - 1$ *Schaaren in der folgenden Beziehung: Ist* $\bar{x}_i = f_i^{(k)}(x, \bar{a})$ *irgend eine Transformation der Schaar* $x_i' = f_i^{(k)}(x, a)$, *so kann jede andere Transformation dieser Schaar, deren Parameter* $a_1 \cdots a_r$ *in einer gewissen Umgebung von* $\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r$ *liegen, dadurch erhalten werden, dass man zuerst die Transformation* $\bar{x}_i = f_i^{(k)}(x, \bar{a})$ *ausführt und sodann eine gewisse Transformation* $x_i' = \omega_i(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n)$ *der r-gliedrigen Gruppe* $X_1 f \cdots X_r f$.

Betrachten wir zum Beispiel die aus zwei Schaaren von je ∞^1 Transformationen bestehende Gruppe, welche durch die beiden Gleichungensysteme

$$x' = x \cos a - y \sin a, \quad y' = x \sin a + y \cos a$$

$$x' = x \cos a + y \sin a, \quad y' = x \sin a - y \cos a$$

dargestellt wird. Bei beiden Schaaren ergiebt sich durch Differentiation nach a:

$$\frac{dx'}{da} = -y', \quad \frac{dy'}{da} = x',$$

so dass also die im Theoreme 55 erwähnten Functionen $\psi_{j\pi}^{(k)}$ im vorliegenden Falle von dem Index k unabhängig sind.

Die erste der obenstehenden beiden Schaaren ist eine eingliedrige Gruppe, welche von der infinitesimalen Transformation $y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y}$ erzeugt ist. Die allgemeine Transformation der zweiten Schaar wird erhalten, wenn man zuerst die Transformation

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = -y$$

ausführt und sodann die Transformation

$$x' = \bar{x} \cos a - \bar{y} \sin a, \quad y' = \bar{x} \sin a + \bar{y} \cos a$$

der eingliedrigen Gruppe $y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y}$, also die allgemeine Transformation der ersten Schaar. —

Nicht unerwähnt bleiben darf, dass die beiden Theoreme 55 und 56 auch dann noch gültig bleiben, wenn die darin besprochene Gruppe aus einer *unendlichen* Anzahl discreter continuirlicher Schaaren besteht, die alle gleichviele wesentliche Parameter enthalten. —

Bevor wir weiter gehen, noch einige nicht unwichtige Bemerkungen. Es sei

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

eine r-gliedrige continuirliche Gruppe, welche die identische Transformation nicht enthält. Dann giebt es nach Theorem 25, Kap. 9, S. 160 eine r-gliedrige Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ mit der identischen und mit paarweise inversen Transformationen, welche zu der Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$ oder kurz $\mathfrak{G}$ in der folgenden Beziehung steht: Führt man zuerst eine Transformation $\bar{x}_i = f_i(x, \bar{a})$ von $\mathfrak{G}$ aus und sodann eine Transformation

$$x_i' = \bar{x}_i + \sum_1^r e_k \cdot \overline{X_k}\, \bar{x}_i + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$, so erhält man stets eine Transformation von $\mathfrak{G}$.

Man kann nun leicht nachweisen, dass man auch dann stets eine Transformation von $\mathfrak{G}$ erhält, wenn man zuerst eine Transformation der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ ausführt und nachher eine Transformation der Gruppe $\mathfrak{G}$. Wir wollen uns nicht damit aufhalten, diesen Nachweis im Einzelnen zu erbringen, und nur bemerken, dass zu demselben ganz ähnliche Ueberlegungen führen wie die in Kapitel 4 angestellten (Vgl. Theorem 58).

Nehmen wir jetzt diese beiden Beziehungen zwischen $\mathfrak{G}$ und der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ zusammen und berücksichtigen wir ausserdem, dass wir es mit zwei Gruppen zu thun haben, so erkennen wir sofort, dass die Transformationen der Gruppe $\mathfrak{G}$ und der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ vereinigt wiederum eine Gruppe bilden, und zwar eine Gruppe, deren Transformationen sich nicht paarweise als inverse zusammenordnen lassen.

Nunmehr ziehen wir auch noch die Schaar der Transformationen:

$$x_i' = F_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \qquad (i = 1 \cdots n),$$

welche zu den Transformationen $x_i' = f_i(x, a)$ invers sind, in den Kreis unsrer Betrachtung. Nach Theorem 2, Kap. 1, S. 19 bildet auch diese Schaar von Transformationen eine Gruppe, welche $\mathfrak{G}'$ heissen möge. Wir werden zeigen, dass die Transformationen der drei Gruppen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$, $X_1 f \cdots X_r f$ zusammengenommen wieder eine Gruppe bilden, natürlich eine Gruppe mit paarweise inversen Transformationen.

Es sei T allgemeines Symbol einer Transformation von $\mathfrak{G}$, also T^{-1} allgemeines Symbol einer Transformation von $\mathfrak{G}'$; unter S möge immer eine Transformation der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ verstanden werden.

Wir wissen bereits, dass alle Transformationen T und S zusammen eine Gruppe bilden, und dass die Transformationen T^{-1} für sich genommen dasselbe thun. Hieraus erkennen wir das Bestehen von Relationen, welche die folgende Form haben:

$$T_\alpha T_\beta = T_\gamma, \quad S_\lambda S_\mu = S_\nu, \quad T_\beta^{-1} T_\alpha^{-1} = T_\gamma^{-1}$$
$$T_\alpha S_\lambda = T_\pi, \quad S_\lambda T_\alpha = T_\varrho.$$

Die zweite Reihe dieser Relationen können wir auch schreiben:

$$S_\lambda^{-1} T_\alpha^{-1} = T_\pi^{-1}, \quad T_\alpha^{-1} S_\lambda^{-1} = T_\varrho^{-1}.$$

Da nun die Gruppe der S aus paarweise inversen Transformationen besteht, so erhellt sofort, dass die T^{-1} zusammen mit den S eine Gruppe bilden. Ferner haben wir:

$$T_\alpha^{-1}\, T_\pi = T_\alpha^{-1}\, T_\alpha\, S_\lambda = S_\lambda\,,$$

$$T_\alpha\, T_\varrho^{-1} = T_\alpha\, T_\alpha^{-1}\, S_\lambda^{-1} = S_\lambda^{-1}\,,$$

also bildet auch der Inbegriff aller S, T, T^{-1} eine Gruppe.

Hiermit ist der versprochene Nachweis erbracht, dass die Transformationen der drei Gruppen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$, $X_1 f \cdots X_r f$ zusammen eine Gruppe bilden, natürlich eine Gruppe mit paarweise inversen Transformationen.

§ 85.

Wir stellen uns jetzt auf einen allgemeineren Standpunkt als im vorigen Paragraphen. Die in demselben gemachte besondere Voraussetzung lassen wir fallen und behalten blos die beiden in der Einleitung getroffenen Festsetzungen bei.

Wir betrachten also eine Gruppe G, welche aus m discreten Schaaren mit bezüglich $r_1, r_2 \cdots r_m$ wesentlichen Parametern besteht und welche zu jeder ihrer Transformationen auch die inverse enthält. Wir werden nachweisen, dass die Zahlen $r_1, r_2 \cdots r_m$ alle einander gleich sind. Daraus ergiebt sich dann, dass die im vorigen Paragraphen gemachte Annahme: $r_1 = r_2 = \cdots = r_m$ keine Beschränkung war.

Wir führen zwei Transformationen der Gruppe G nach einander aus, zuerst eine Transformation

$$x_i' = f_i^{(k)}(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_{r_k}) \qquad (i=1\cdots n)$$

einer Schaar mit r_k Parametern, und dann eine Transformation

$$x_i'' = f_i^{(j)}(x_1' \cdots x_n',\ b_1 \cdots b_{r_j}) \qquad (i=1\cdots n)$$

einer Schaar mit r_j Parametern.

Auf diese Weise finden wir eine Transformation

$$x_i'' = f_i^{(j)}(f_1^{(k)}(x, a) \cdots f_n^{(k)}(x, a),\ b_1 \cdots b_{r_j})\,,$$

welche unsrer Gruppe angehört, und welche formell $r_k + r_j$ willkürliche Parameter enthält. Hat nun die grösste unter den Zahlen $r_1, r_2 \cdots r_m$ den Werth r, so giebt es unter diesen $r_k + r_j$ willkürlichen Parametern nicht mehr als r wesentliche, aber auch nicht weniger als die grössere der beiden Zahlen r_k und r_j angiebt. Sind daher insbesondere die Zahlen r_k und r_j beide gleich r, so enthält die zuletzt geschriebene Transformation gerade r wesentliche Parameter. Folglich bilden schon alle Schaaren unsrer Gruppe, welche gerade r wesentliche Parameter enthalten, zusammengenommen eine Gruppe Γ.

Auf die Gruppe Γ können wir nun unmittelbar das Theorem 56 aus dem vorigen Paragraphen anwenden. Wir ersehen daraus, dass Γ und also auch G eine r-gliedrige Gruppe

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \qquad (i=1\cdots n)$$

enthält, welche von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen erzeugt ist. Wenn wir demnach zuerst die Transformationen $x_i'=f_i(x, a)$ ausführen und sodann die Transformation

$$(8) \qquad x_i'' = f_i^{(j)}(x_1' \cdots x_n', b_1 \cdots b_{r_j}),$$

so erhalten wir wieder eine Transformation der Gruppe G, nämlich die folgende:

$$(9) \qquad x_i'' = f_i^{(j)}(f_1(x, a) \cdots f_n(x, a), b_1 \cdots b_{r_j}) \qquad (i=1\cdots n).$$

Von den $r+r_j$ Parametern dieser Transformation sind gerade r wesentlich, also stellen die eben geschriebenen Gleichungen eine continuirliche Schaar von ∞^r Transformationen der Gruppe G dar. Da aber die Gruppe $x_i'=f_i(x, a)$ die identische Transformation enthält, so giebt es besondere Werthe der Parameter $a_1 \cdots a_r$, für welche sich die Functionen $f_1(x, a) \cdots f_n(x, a)$ auf bezüglich $x_1 \cdots x_n$ reduciren. Folglich ist die Schaar der ∞^{r_j} Transformationen (8) in der Schaar der ∞^r Transformationen (9) enthalten. Nach den in der Einleitung des Kapitels gemachten Bemerkungen ist das nur möglich, wenn beide Schaaren zusammenfallen, wenn also $r_j = r$ ist.

Damit ist bewiesen, dass wirklich die Zahlen $r_1, r_2 \cdots r_m$ alle einander gleich sind. Folglich haben wir das

Theorem 57. *Besteht eine Gruppe, deren Transformationen paarweise zu einander invers sind, aus m continuirlichen Schaaren von Transformationen und enthält jede dieser Schaaren nur eine endliche Anzahl willkürlicher Parameter, so haben die Schaaren alle gleichviele wesentliche Parameter.*

Dieses Theorem bleibt übrigens auch dann noch bestehen, wenn die Anzahl der Schaaren, aus denen die Gruppe besteht, unendlich gross ist, wofern nur jede dieser unendlich vielen Schaaren blos eine endliche Anzahl ϱ_k von willkürlichen Parametern enthält und dabei unter allen Zahlen ϱ_k eine grösste vorhanden ist.

§ 86.

Wie bisher bestehe G aus m discreten, continuirlichen Schaaren von je ∞^r Transformationen; ausserdem setzen wir voraus, dass die Transformationen von G paarweise zu einander invers sind.

Nach dem Theoreme 57 in dem vorhergehenden Paragraphen steckt in der Gruppe G eine und nur eine r-gliedrige von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen erzeugte Gruppe. Ist nun S das Symbol der allgemeinen Transformation dieser r-gliedrigen Gruppe und T das Symbol irgend einer Transformation von G, so ist

$$T^{-1} S T$$

ebenfalls das Symbol der allgemeinen Transformation einer r-gliedrigen von infinitesimalen Transformationen erzeugten Gruppe. Da diese neue Gruppe in G enthalten ist, so muss sie mit der Gruppe aller S zusammenfallen; nach der in Kap. 15, S. 261 eingeführten Terminologie können wir das auch so ausdrücken: die besprochene r-gliedrige Gruppe bleibt bei jeder Transformation T invariant. Also gilt das

Theorem 58. *Besteht eine Gruppe G mit paarweise inversen Transformationen aus mehreren Schaaren von Transformationen, so bleibt die grösste in G enthaltene, von infinitesimalen Transformationen erzeugte Gruppe bei jeder Transformation von G invariant.*

Aus demselben geht hervor, wie man Gruppen construiren kann, welche aus mehreren continuirlichen Schaaren von je ∞^r Transformationen bestehen.

Es sei $X_1 f \cdots X_r f$ eine r-gliedrige Gruppe in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ und es sei S wieder Symbol der allgemeinen Transformation dieser Gruppe.

Wenn nun eine Gruppe mit paarweise inversen Transformationen alle Transformationen der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ enthält und ausserdem noch eine endliche Anzahl, etwa $m - 1$ discrete Schaaren von je ∞^r Transformationen, so besitzt sie dem Theoreme 56, S. 315 zufolge die Form:

$$(10) \qquad T_0 S, \quad T_1 S, \quad \cdots T_{m-1} S.$$

Hier bedeutet T_0 die identische Transformation und $T_1 \cdots T_{m-1}$ sind nach dem letzten Theoreme so beschaffen, dass sie den Inbegriff aller Transformationen S invariant lassen. Analytisch drückt sich diese Eigenschaft der T_ν dadurch aus, dass für jede Transformation S_k der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ eine Relation von der Form

$$T_\nu^{-1} S_k T_\nu = S_j$$

besteht, wo die Transformation S_j wieder der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ angehört. Eine solche Relation besteht übrigens auch, wenn ν gleich Null ist, dann wird nämlich $S_k = S_j$.

Da $T_1 \cdots T_{m-1}$ selbst zu den Transformationen (10) gehören, so kann der Inbegriff aller Transformationen (10) nur dann eine Gruppe bilden, wenn auch alle Transformationen $T_\mu T_\nu$ diesem Inbegriffe angehören. Die T_i müssen daher ausser den obigen auch noch Relationen von der Form:

$$T_\mu T_\nu = T_\pi S_\tau$$

befriedigen, wo μ und ν beliebige unter den Zahlen $1, 2 \cdots m-1$ bedeuten, während π gewisse unter den Werthen $0, 1 \cdots m-1$ durchläuft. Ist eine der Zahlen μ, ν gleich Null, etwa μ, so besteht eine Relation von der angegebenen Form offenbar schon an und für sich; dann ist ja $T_\pi = T_\nu$ und S_τ ist ebenso wie T_0 die identische Transformation.

Besitzen andererseits die Transformationen T_μ die angegebenen Eigenschaften, so bestehen für alle Werthe $0, 1 \cdots m-1$ der beiden Zahlen μ und ν Relationen von der Form

$$T_\mu S_k T_\nu S_l = T_\mu T_\nu S_j S_l = T_\pi S_\tau S_j S_l = T_\pi S_\varrho,$$

also bildet der Inbegriff aller Transformationen (10) eine Gruppe. Es ist leicht zu sehen, dass jedenfalls im Allgemeinen die Transformationen einer solchen Gruppe sich paarweise als inverse zusammenordnen.

Jetzt fragt es sich nur noch, wie die Transformationen T_μ beschaffen sein müssen, damit die m Schaaren (10) alle von einander verschieden sind.

Offenbar sind alle Schaaren (10) von einander verschieden, wenn keine Transformation der Gruppe zweien dieser Schaaren zugleich angehört. Haben andererseits irgend zwei der Schaaren (10), etwa die beiden: $T_\mu S$ und $T_\nu S$ eine Transformation gemein, so sind sie mit einander identisch. Denn aus dem Bestehen einer Relation von der Form

$$T_\mu S_k = T_\nu S_l$$

folgt sofort:

$$T_\nu = T_\mu S_k S_l^{-1},$$

also hat die Schaar der Transformationen $T_\nu S$ die Form

$$T_\mu S_k S_l^{-1} S,$$

das heisst, sie ist mit der Schaar: $T_\mu S$ identisch.

Sollen daher die m Schaaren (10) alle von einander verschieden sein, so ist nothwendig und hinreichend, dass keine zwei der Transformationen $T_0, T_1 \cdots T_{m-1}$ durch eine Relation von der Form

$$T_\nu = T_\mu S_j \qquad (\nu \neq \mu)$$

verknüpft sind.

Die gewonnenen Ergebnisse fassen wir zusammen in dem

Theorem 59. *Ist S das Symbol der allgemeinen Transformation der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$, sind ferner $T_1 \cdots T_{m-1}$*

Transformationen, welche die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ invariant lassen, welche ausserdem unter einander und mit der identischen Transformation T_0 durch Relationen von der Form:

$$T_\mu T_\nu = T_\pi S_\tau$$

verknüpft sind, nicht aber durch Relationen von der Form

$$T_\nu = T_\mu S_j \qquad (\nu \neq \mu),$$

so bildet der Inbegriff aller Transformationen

$$T_0 S,\ T_1 S, \cdots T_{m-1} S$$

eine Gruppe mit paarweise inversen Transformationen, welche aus m discreten continuirlichen Schaaren von je ∞^r Transformationen besteht und dabei alle Transformationen der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ enthält. Wählt man die Transformationen $T_1 \cdots T_{m-1}$ in allen möglichen Weisen, so erhält man alle Gruppen von der angegebenen Beschaffenheit.

Im folgenden Kapitel geben wir eine allgemeine Methode zur Bestimmung aller Transformationen, welche eine vorgelegte Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ invariant lassen.

Hat man zwei verschiedene Systeme von Transformationen $T_1 \cdots T_{m-1}$, etwa $T_1 \cdots T_{m-1}$ und $T_1' \cdots T_{m-1}'$, so sind die beiden Gruppen

$$T_0 S,\ T_1 S, \cdots T_{m-1} S$$

$$T_0 S,\ T_1' S, \cdots T_{m-1}' S$$

offenbar stets dann und nur dann von einander verschieden, wenn es nicht möglich ist, jede der Transformationen $T_1' \cdots T_{m-1}'$ in der Form

$$T_\mu' = T_{i_\mu} S_{k_\mu}$$

darzustellen.

Nebenbei bemerkt kann man es häufig so einrichten, dass die m Transformationen T_0, $T_1 \cdots T_{m-1}$ schon an und für sich eine discontinuirliche Gruppe bilden.

Beispiel. Die n infinitesimalen Transformationen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

erzeugen eine n-gliedrige Gruppe. Der Inbegriff aller Transformationen, welche diese Gruppe invariant lassen, bildet eine endliche continuirliche Gruppe, welche von den $n + n^2$ infinitesimalen Transformationen

$$\frac{\partial f}{\partial x_i},\ x_i \frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad {\scriptstyle (i, k = 1 \cdots n)}$$

erzeugt wird. Wählt man nun unter den ∞^{nn} Transformationen

$$x_i' = a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n \qquad {\scriptstyle (i = 1 \cdots n)}$$

der Gruppe

$$x_i \frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad (i, k = 1 \cdots n)$$

irgend m, die eine discontinuirliche Gruppe bilden, als Transformationen T_0, $T_1, \cdots T_{m-1}$ und setzt man für S die allgemeine Transformation

$$x_1' = x_1 + a_1, \cdots x_n' = x_n + a_n$$

der Gruppe $\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}$, so erhält man stets eine Gruppe, welche aus m discreten Schaaren besteht und alle ∞^n Transformationen der Gruppe $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}$ umfasst.

Das Theorem 58, S. 320 gilt natürlich auch dann, wenn die Gruppe G aus unendlich vielen Schaaren von je ∞^r Transformationen besteht. Will man daher eine solche Gruppe construiren, so hat man nur unendlich viele discrete Transformationen

$$T_1, T_2, T_3 \cdots$$

aufzusuchen, welche die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ invariant lassen, welche ausserdem paarweise Relationen von der Form

$$T_\mu T_\nu = T_\pi S_\tau$$

befriedigen, dagegen weder unter einander noch mit der identischen Transformation T_0 durch Relationen von der Form

$$T_\mu = T_\nu S_j$$

verknüpft sind. Der Inbegriff aller Transformationen

$$T_0 S, T_1 S, T_2 S, \cdots$$

bildet dann eine Gruppe G, welche die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ umfasst und aus unendlich vielen verschiedenen Schaaren von je ∞^r Transformationen besteht.

Aber die Transformationen der so gefundenen Gruppe G werden sich im Allgemeinen nicht paarweise als inverse zusammenordnen; sollen sie das thun, so muss jede der Transformationen T_1, $T_2 \cdots$ ausser den früher angegebenen Relationen auch noch eine von der Form

$$T_\mu^{-1} = T_{k_\mu} S_{j_\mu}$$

befriedigen.

§ 87.

Jetzt noch einiges wenige über die *Invarianten* solcher Gruppen, wie wir sie in den vorhergehenden drei Paragraphen betrachtet haben.

Es sei G eine Gruppe, welche aus m discreten Schaaren:

$$x_i^{(k)} = f_i^{(k)}(x_1 \cdots x_n, a_1^{(k)} \cdots a_r^{(k)}) \qquad (i = 1 \cdots n)$$
$$(k = 1 \cdots m)$$

von je ∞^r Transformationen besteht und welche zu jeder ihrer Transformationen auch die inverse enthält. Insbesondere sei

$$x_i' = f_i^{(1)}(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \qquad (i=1\cdots n)$$

die in G enthaltene von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \cdots X_r f$ erzeugte r-gliedrige Gruppe.

In Uebereinstimmung mit Kap. 6, S. 96 bezeichnen wir jede Function $\mathfrak{U}(x_1 \cdots x_n)$, welche alle Transformationen von G gestattet, welche also die m Gleichungen

$$\mathfrak{U}(x_1^{(k)} \cdots x_n^{(k)}) = \mathfrak{U}(x_1 \cdots x_n) \qquad (k=1\cdots m)$$

befriedigt, als eine *Invariante* von G. Wir wollen zeigen, wie man die Invarianten von G finden kann.

Jede Invariante von G ist offenbar zugleich eine Invariante der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ und demnach eine Lösung des vollständigen Systems, welches durch die Gleichungen

$$X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0$$

bestimmt wird.

Ist dieses vollständige System n-gliedrig, so besitzt die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ und demnach auch die Gruppe G überhaupt keine Invarianten. Nehmen wir daher an, dass das bewusste vollständige System $(n-q)$-gliedrig ist und bezeichnen wir mit $u_1 \cdots u_q$ irgend q unabhängige seiner Lösungen.

Nach Theorem 58 bleibt die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ bei allen Transformationen von G invariant; folglich gestattet auch das von den Gleichungen

$$X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0$$

bestimmte $(n-q)$-gliedrige vollständige System alle Transformationen von G. Die Lösungen $u_1 \cdots u_q$ dieses vollständigen Systems befriedigen daher (vgl. Kap. 8, S. 138) Relationen von der Gestalt:

$$u_j(x_1^{(k)} \cdots x_n^{(k)}) = \omega_j^{(k)}(u_1(x) \cdots u_q(x),\ a_1^{(k)} \cdots a_r^{(k)}) \tag{11}$$
$$(j=1\cdots q,\ k=1\cdots m).$$

Es lässt sich zeigen, dass hier die Functionen $\omega_j^{(k)}$ sämmtlich von den Parametern $a_1^{(k)} \cdots a_r^{(k)}$ frei sind.

Mit $\bar{a}_1^{(k)} \cdots \bar{a}_r^{(k)}$ wollen wir irgend ein festes Werthsystem bezeichnen. Liegt dann das Werthsystem $a_1^{(k)} \cdots a_r^{(k)}$ in einer gewissen Umgebung von $\bar{a}_1^{(k)} \cdots \bar{a}_r^{(k)}$, so kann nach Theorem 56, S. 315 die Transformation

$$x_i^{(k)} = f_i^{(k)}(x_1 \cdots x_n,\ a_1^{(k)} \cdots a_r^{(k)})$$

dadurch erhalten werden, dass man zuerst die Transformation

$$\bar{x}_i^{(k)} = f_i^{(k)}(x_1 \cdots x_n, \bar{a}_1^{(k)} \cdots \bar{a}_r^{(k)})$$

ausführt und sodann eine gewisse Transformation

$$x_i^{(k)} = f_i^{(1)}(\bar{x}_1^{(k)} \cdots \bar{x}_n^{(k)}, \alpha_1 \cdots \alpha_r)$$

der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$. Wir haben also:

$$x_i^{(k)} = f_i^{(1)}(f_1^{(k)}(x, \bar{a}^{(k)}) \cdots f_n^{(k)}(x, \bar{a}^{(k)}), \alpha_1 \cdots \alpha_r).$$

Nun sind $u_1 \cdots u_q$ Invarianten der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ und befriedigen daher Relationen von der Gestalt:

$$u_j(x_1^{(k)} \cdots x_n^{(k)}) = u_j(\bar{x}_1^{(k)} \cdots \bar{x}_n^{(k)}).$$

Andererseits wird:

$$u_j(\bar{x}_1^{(k)} \cdots \bar{x}_n^{(k)}) = \bar{\omega}_j^{(k)}(u_1(x) \cdots u_q(x)),$$

wo die $\bar{\omega}_j^{(k)}$ blos von $u_1 \cdots u_q$ abhängen und keine willkürlichen Parameter enthalten, denn $\bar{a}_1^{(k)} \cdots \bar{a}_r^{(k)}$ sind ja numerische Constanten. Also ergiebt sich

(11′) $$u_j(x_1^{(k)} \cdots x_n^{(k)}) = \bar{\omega}_j^{(k)}(u_1(x) \cdots u_q(x))$$
$$(j = 1 \cdots q;\ k = 1 \cdots m);$$

womit bewiesen ist, dass die Functionen $\omega_j^{(k)}$ in den Gleichungen (11) wirklich von den Parametern $a_1^{(k)} \cdots a_r^{(k)}$ frei sind.

Nach dem oben Gesagten befriedigt jede Invariante $\mathfrak{U}(x_1 \cdots x_n)$ der Gruppe G m Gleichungen von der Gestalt:

$$\mathfrak{U}(x_1^{(k)} \cdots x_n^{(k)}) = \mathfrak{U}(x_1 \cdots x_n) \qquad (k = 1 \cdots m);$$

da sie ausserdem eine Function von $u_1 \cdots u_q$ allein ist, etwa:

$$\mathfrak{U}(x_1 \cdots x_n) = J(u_1 \cdots u_q),$$

so befriedigt sie zugleich die m Relationen:

(12) $$J(\omega_1^{(k)}(u_1 \cdots u_q) \cdots \omega_q^{(k)}(u_1 \cdots u_q)) = J(u_1 \cdots u_q)$$
$$(k = 1 \cdots m).$$

Umgekehrt ist offenbar jede Function $J(u_1 \cdots u_q)$, welche die eben geschriebenen m Functionalgleichungen erfüllt, eine Invariante der Gruppe G. Also brauchen wir blos diese Functionalgleichungen in allgemeinster Weise zu befriedigen, um alle Invarianten von G zu finden.

Die Aufgabe, alle Lösungen der Functionalgleichungen (12) zu bestimmen, ist augenscheinlich identisch mit der Aufgabe, alle Functionen von $u_1 \cdots u_q$ zu bestimmen, welche die m Transformationen

(13) $$u_j' = \omega_j^{(k)}(u_1 \cdots u_q) \qquad (j = 1 \cdots q)$$
$$(k = 1 \cdots m)$$

gestatten. Diese m Transformationen aber bilden eine discontinuirliche Gruppe, wie man ohne Schwierigkeit aus der Gruppeneigenschaft von

G erkennt. Also ist unser im Anfange des Paragraphen gestelltes Problem auf ein Problem aus der Theorie der discontinuirlichen Gruppen zurückgeführt.

Die gewonnenen Ergebnisse fassen wir zusammen in dem

Theorem 60. *Besteht eine Gruppe G, (deren Transformationen paarweise invers sind) aus mehreren discreten Schaaren von je ∞^r Transformationen:*

$$x_i^{(k)} = f_i^{(k)}(x_1 \cdots x_n, a_1^{(k)} \cdots a_r^{(k)}) \qquad (i = 1 \cdots n)$$
$$(k = 1, 2 \cdots),$$

so sind alle Invarianten von G zugleich auch Invarianten der r-gliedrigen durch G bestimmten continuirlichen Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$. Kennt man die Invarianten dieser letzteren Gruppe, kennt man also irgend q unabhängige Lösungen $u_1 \cdots u_q$ des $(n-q)$-gliedrigen vollständigen Systems, welches durch die Gleichungen

$$X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0$$

bestimmt ist, so findet man die Invarianten von G folgendermassen: Man bilde zunächst die Relationen:

$$u_j(x_1^{(k)} \cdots x_n^{(k)}) = \omega_j^{(k)}(u_1(x) \cdots u_q(x)) \qquad (j = 1 \cdots q)$$
$$(k = 1, 2 \cdots),$$

welche unter den gemachten Voraussetzungen bestehen und in denen die $\omega_j^{(k)}$ nur von den beiden Indices j und k abhängen; sodann bestimme man alle Functionen von $u_1 \cdots u_q$, welche die discontinuirliche Gruppe gestatten, die von den Transformationen:

$$u_j' = \omega_j^{(k)}(u_1 \cdots u_q) \qquad (j = 1 \cdots q)$$
$$(k = 1, 2 \cdots)$$

gebildet wird. Die betreffenden Functionen sind die Invarianten der Gruppe G.

Ein ähnliches Theorem gilt offenbar, wenn die Gruppe G aus unendlich vielen continuirlichen Schaaren von Transformationen besteht.

Man kann sich die Aufgabe stellen, alle Invarianten zu finden, welche eine vorgelegte Schaar von Transformationen:

$$x_i' = \varphi_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

besitzt oder alle Invarianten, welche mehreren solchen Schaaren gemeinsam sind.*) Die Schaar, bezüglich die Schaaren können dabei ganz beliebig sein und brauchen nicht einer endlichen Gruppe anzugehören.

*) Vgl. Lie, Berichte der K. Sächs. Ges. d. W. 1. August 1887.

Wir beabsichtigen nicht, dieses Problem erschöpfend zu behandeln; nur soviel sei bemerkt, dass die betreffenden Invarianten Lösungen, freilich keine beliebigen Lösungen eines gewissen leicht angebbaren vollständigen Systems sind. Da nämlich die gesuchten Invarianten ausser den gegebenen Transformationen offenbar auch noch die zugehörigen inversen Transformationen gestatten, so lassen sich sehr leicht gewisse infinitesimale Transformationen aufstellen, bei denen sie ebenfalls invariant bleiben. Diese infinitesimalen Transformationen enthalten im Allgemeinen willkürliche Elemente, insbesondere gewisse Parameter; gleich Null gesetzt liefern sie lineare partielle Differentialgleichungen, welche von den gesuchten Invarianten befriedigt werden müssen. Es ist nun immer möglich, das kleinste vollständige System aufzustellen, welches alle diese Differentialgleichungen umfasst. Kennt man ein System Lösungen $u_1, u_2 \cdots$ dieses vollständigen Systems, so bildet man eine beliebige Function derselben $\Omega(u_1, u_2 \cdots)$, führt auf sie die allgemeine Transformation der vorgelegten Schaar aus und bestimmt Ω in allgemeinster Weise derart, dass Ω sich als Invariante verhält.

Kapitel 19.

Theorie der Aehnlichkeit r-gliedriger Gruppen.

Von äusserster Wichtigkeit ist oft die Beantwortung der Frage, ob eine vorgelegte r-gliedrige Gruppe $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_s, a_1 \cdots a_r)$ des s-fach ausgedehnten Raumes mit einer andern vorgelegten r-gliedrigen Gruppe $y_i' = F_i(y_1 \cdots y_s, b_1 \cdots b_r)$ desselben Raumes *ähnlich* ist, ob man also an Stelle der x und der a solche neue *Veränderliche*: $y_1 \cdots y_s$ und neue *Parameter*: $b_1 \cdots b_r$ einführen kann, dass sich die erste Gruppe in die zweite verwandelt (Kap. 1, S. 24). Weiss man in einem gegebenen Falle, dass eine solche Ueberführung der einen Gruppe in die andere möglich ist, so erhebt sich die zweite Frage: wie leistet man die betreffende Ueberführung in allgemeinster Weise?

In dem gegenwärtigen Kapitel geben wir die Mittel zur Beantwortung beider Fragen.

Zunächst zeigen wir, dass die erste der beiden Fragen durch die folgende einfachere ersetzt werden kann: unter welchen Bedingungen existirt eine Transformation

$$y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s) \qquad (i = 1 \cdots s)$$

von solcher Beschaffenheit, dass irgend r unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$ bei Einführung der neuen Veränderlichen $y_1 \cdots y_s$ in infinitesimale Transformationen der Gruppe $y_i' = F_i(y, b)$ übergehen. Diese einfachere Frage erledigen wir, indem wir gewisse Bedingungen aufstellen, welche für die Existenz einer Transformation $y_i = \Phi_i(x)$ von der verlangten Beschaffenheit nothwendig sind, welche sich aber auch als hinreichend erweisen.

Zu gleicher Zeit werden wir sehen, dass alle etwa vorhandenen Transformationen $y_i = \Phi_i(x)$ von der verlangten Beschaffenheit durch Integration vollständiger Systeme bestimmt werden können. Damit wird dann auch die zweite der eben gestellten beiden Fragen beantwortet.

§ 88.

Die beiden r-gliedrigen Gruppen: $x_i' = f_i(x, a)$ und $y_i' = F_i(y, b)$ seien mit einander ähnlich und zwar gehe die erste in die zweite über, wenn an Stelle von $x_1 \cdots x_s$ die neuen Veränderlichen $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$ und an Stelle von $a_1 \cdots a_r$ die neuen Parameter $b_k = \beta_k(a_1 \cdots a_r)$ eingeführt werden. Ferner seien

$$X_k f = \sum_1^s {}^i \, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

irgend r unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$; bei Einführung der neuen Veränderlichen $y_1 \cdots y_s$ mögen dieselben die Form

$$X_k f = \sum_1^s {}^i \, X_k y_i \frac{\partial f}{\partial y_i} = \sum_1^s {}^i \, \eta_{ki}(y_1 \cdots y_s) \frac{\partial f}{\partial y_i} = Y_k f$$
$$(k = 1 \cdots r)$$

annehmen.

Den Uebergang von der Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$ zu der Gruppe $y_i' = F_i(y, b)$ zerlegen wir in eine Reihe von Schritten.

Zunächst bringen wir die Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$ auf die kanonische Form

$$(1) \qquad x_i' = x_i + \sum_1^r {}^k \, e_k \cdot \xi_{ki}(x_1 \cdots x_s) + \cdots \qquad (i = 1 \cdots s),$$

indem wir für $a_1 \cdots a_r$ gewisse, nebenbei bemerkt, vollkommen bestimmte Functionen derselben $e_1 \cdots e_r$ einführen. Aus (1) müssen wir dann offenbar die Gleichungen $y_i' = F_i(y, b)$ erhalten, wenn wir statt der x die neuen Veränderlichen $y_1 \cdots y_s$ einführen und ausserdem für $e_1 \cdots e_r$ gewisse, vollständig bestimmte Functionen von $b_1 \cdots b_r$ einsetzen.

Nun aber bekommen die Gleichungen (1) nach Kap. 3, S. 58 bei Einführung der Veränderlichen $y_1 \cdots y_s$ die Gestalt:

$$(1') \qquad y_i' = y_i + \sum_1^r {}^k \, e_k \cdot \eta_{ki}(y_1 \cdots y_s) + \cdots \qquad (i = 1 \cdots s);$$

es müssen also die Gleichungen (1') mit den Gleichungen $y_i' = F_i(y, b)$ identisch werden, wenn man $e_1 \cdots e_r$ in der angedeuteten Weise durch

$b_1 \cdots b_r$ ausdrückt. Folglich sind die Gleichungen (1′) eine Form der Gruppe $y_i' = F_i(y, b)$ und zwar, wie der Augenschein lehrt, eine kanonische Form. Mit andern Worten: $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ sind unabhängige infinitesimale Transformationen dieser Gruppe.

Verwandelt sich daher die r-gliedrige Gruppe $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_s, a_1 \cdots a_r)$ bei Einführung der neuen Veränderlichen $y_1 \cdots y_s$ und der neuen Parameter $b_1 \cdots b_r$ in die Gruppe $y_i' = F_i(y_1 \cdots y_s, b_1 \cdots b_r)$, so verwandeln sich die infinitesimalen Transformationen der ersten Gruppe bei Einführung der Veränderlichen $y_1 \cdots y_s$ in die infinitesimalen Transformationen der zweiten Gruppe.

Offenbar findet auch das Umgekehrte statt: stehen die beiden Gruppen $x_i' = f_i(x, a)$ und $y_i' = F_i(y, b)$ in der Beziehung zu einander, dass die infinitesimalen Transformationen der ersten bei Einführung der neuen Veränderlichen $y_1 \cdots y_s$ in die der andern übergehen, so kann man stets die Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$ durch geeignete Wahl der Veränderlichen und der Parameter in die Gruppe $y_i' = F_i(y, b)$ überführen. Bei Einführung der y geht ja die kanonische Form (1) der Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$ in die kanonische Form (1′) der Gruppe $y_i' = F_i(y, b)$ über.

Somit haben wir das

Theorem 61. *Zwei r-gliedrige Gruppen in gleichvielen Veränderlichen sind dann und nur dann mit einander ähnlich, wenn es möglich ist, irgend r unabhängige infinitesimale Transformationen der einen durch Einführung neuer Veränderlicher in infinitesimale Transformationen der andern überzuführen.*

Wenn es sich also darum handelt, zu untersuchen, ob die beiden r-gliedrigen Gruppen $x_i' = f_i(x, a)$ und $y_i' = F_i(y, b)$ mit einander ähnlich sind oder nicht, so braucht man blos die infinitesimalen Transformationen der beiden Gruppen ins Auge zu fassen und zu fragen, ob die in einander übergeführt werden können.

Aus den obigen Entwickelungen lässt sich sofort noch ein anderer wichtiger Schluss ziehen.

Wir wissen, dass zwischen den infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ der Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$ Relationen von der Form:

$$X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f)) = (X_i X_k) = \sum_1^r {}_\sigma\, c_{ik\sigma} \cdot X_\sigma f$$

bestehen. Bei Einführung der neuen Veränderlichen $y_1 \cdots y_s$ erhalten diese Relationen nach Kap. 5, Satz 2, S. 84 die Form:

$$\mathfrak{Y}_i(\mathfrak{Y}_k(f)) - \mathfrak{Y}_k(\mathfrak{Y}_i(f)) = (\mathfrak{Y}_i \mathfrak{Y}_k) = \sum_1^r {}_\sigma\, c_{ik\sigma}\, \mathfrak{Y}_\sigma f,$$

es sind also die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ der Gruppe $y_i' = F_i(y, b)$ durch genau dieselben Relationen verknüpft, wie die infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ der Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$.

Nach der in Kap. 17, S. 291 und 293 eingeführten Ausdrucksweise können wir daher sagen:

Theorem 62. *Sind zwei r-gliedrige Gruppen in gleichvielen Veränderlichen mit einander ähnlich, so sind sie auch gleichzusammengesetzt oder, was dasselbe ist, holoedrisch isomorph.*

Zugleich ist klar, dass die Transformation $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$ eine holoedrisch isomorphe Beziehung zwischen den beiden Gruppen: $x_i' = f_i(x, a)$ und $y_i' = F_i(y, b)$ herstellt, sie ordnet ja den r unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ der einen Gruppe die r unabhängigen Transformationen $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ der andern zu und durch diese Zuordnung sind offenbar die beiden Gruppen holoedrisch isomorph auf einander bezogen.

§ 89.

Denken wir uns jetzt zwei beliebige r-gliedrige Gruppen in gleichvielen Veränderlichen vorgelegt; ihre infinitesimalen Transformationen seien:

$$X_k f = \sum_1^s {}^i \, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

und

$$Z_k f = \sum_1^s {}^i \, \zeta_{ki}(y_1 \cdots y_s) \frac{\partial f}{\partial y_i} \qquad (k = 1 \cdots r).$$

Wir fragen: sind diese beiden Gruppen mit einander ähnlich oder nicht?

Unsere Antwort auf diese Frage muss offenbar in verneinendem Sinne ausfallen, sobald die beiden Gruppen nicht gleichzusammengesetzt sind; nach Theorem 62 können ja nur gleichzusammengesetzte Gruppen mit einander ähnlich sein. Folglich brauchen wir uns nur mit dem Falle zu beschäftigen, dass die beiden Gruppen gleichzusammengesetzt sind; ob dieser Fall bei den vorgelegten Gruppen wirklich eintritt, das kann immer durch eine algebraische Discussion entschieden werden.

Wir setzen demnach von jetzt ab voraus, dass die beiden vorgelegten Gruppen *gleichzusammengesetzt* sind.

Nach Theorem 61 sind die beiden gleichzusammengesetzten Gruppen $X_1 f \cdots X_r f$ und $Z_1 f \cdots Z_r f$ dann und nur dann mit einander ähnlich, wenn es eine Transformation $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$ giebt von solcher Beschaffenheit, dass $X_1 f \cdots X_r f$ bei Einführung der neuen Veränderlichen $y_1 \cdots y_s$ sich in infinitesimale Transformationen der Gruppe $Z_1 f \cdots Z_r f$ verwandeln. Verbinden wir hiermit die Bemerkung am Schlusse des vorigen Paragraphen, so erkennen wir, dass die beiden Gruppen dann und nur dann mit einander ähnlich sind, wenn sich zwischen ihnen eine solche holoedrisch isomorphe Beziehung herstellen lässt, dass es möglich ist, durch Einführung geeigneter neuer Veränderlicher: $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$ die r infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ gerade in diejenigen infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ der Gruppe $Z_1 f \cdots Z_r f$ überzuführen, welche ihnen durch die isomorphe Beziehung zugeordnet sind.

Der nächste Schritt, den wir zur Beantwortung der von uns gestellten Frage thun müssen, ist mithin der, dass wir die beiden Gruppen in allgemeinster Weise holoedrisch isomorph auf einander beziehen.

Wir wählen in der Gruppe $Z_1 f \cdots Z_r f$ in allgemeinster Weise r solche unabhängige infinitesimale Transformationen:

$$Y_k f = \sum_1^r {}_j \, g_{kj} \cdot Z_j f \qquad (k = 1 \cdots r),$$

dass mit den Relationen:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_\sigma \, c_{ik\sigma} \cdot X_\sigma f \tag{2}$$

zu gleicher Zeit die Relationen

$$(Y_i Y_k) = \sum_1^r {}_\sigma \, c_{ik\sigma} \cdot Y_\sigma f \tag{2'}$$

bestehen. Ist das geschehen — es sind nur algebraische Operationen dazu erforderlich —, so ordnen wir $X_1 f \cdots X_r f$ bezüglich den infinitesimalen Transformationen $Y_1 f \cdots Y_r f$ zu und erhalten so die beiden Gruppen in allgemeinster Weise holoedrisch isomorph auf einander bezogen.

In dem gegenwärtigen Kapitel verstehen wir überall unter den g_{kj} *das allgemeinste System von Constanten, welches den eben gestellten Forderungen genügt.*

Zu bemerken ist hier, dass die g_{kj} im Allgemeinen von gewissen willkürlichen Elementen abhängen, einmal von willkürlichen Parametern und dann von gewissen Willkürlichkeiten, welche durch die algebraischen Operationen bedingt werden, die zur Bestimmung der g_{kj} erforderlich sind: es ist ja denkbar, dass es mehrere discrete Schaaren solcher Werthsysteme g_{kj} giebt, welche die verlangte Beschaffenheit besitzen.

Es fragt sich nunmehr, ob es unter den so gefundenen isomorphen Beziehungen der beiden Gruppen zu einander eine giebt, welche die oben angegebene Beschaffenheit hat. Mit andern Worten: ist es möglich, die willkürlichen Elemente, welche in den Coefficienten g_{kj} auftreten, so zu specialisiren, dass $X_1 f \cdots X_r f$ durch Einführung geeigneter neuer Veränderlicher: $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$ bezüglich in $Y_1 f \cdots Y_r f$ übergeführt werden können?

Dann aber auch nur dann, wenn diese Frage mit ja beantwortet werden muss, sind die beiden Gruppen $X_1 f \cdots X_r f$ und $Z_1 f \cdots Z_r f$ mit einander ähnlich.

Es seien $X_1 f \cdots X_n f$ $(n \leqq r)$ durch keine lineare Relation von der Form:

$$\chi_1(x_1 \cdots x_s) \cdot X_1 f + \cdots + \chi_n(x_1 \cdots x_s) \cdot X_n f = 0$$

verknüpft, dagegen mögen sich $X_{n+1} f \cdots X_r f$ linear durch $X_1 f \cdots X_n f$ ausdrücken lassen:

$$(3) \qquad X_{n+k} f \equiv \varphi_{k1}(x_1 \cdots x_s) \cdot X_1 f + \cdots + \varphi_{kn}(x_1 \cdots x_s) \cdot X_n f$$
$$(k = 1 \cdots r - n).$$

Ist nun die Transformation $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$ so beschaffen, dass $X_1 f \cdots X_r f$ bei Einführung der y in gewisse infinitesimale Transformationen $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ übergehen, welche der Gruppe $Z_1 f \cdots Z_r f$ angehören, so können natürlich $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_n f$ nicht durch eine lineare Relation von der Form:

$$\psi_1(y_1 \cdots y_s) \cdot \mathfrak{Y}_1 f + \cdots + \psi_n(y_1 \cdots y_s) \cdot \mathfrak{Y}_n f = 0$$

verknüpft sein; dagegen erhalten wir augenscheinlich für $\mathfrak{Y}_{n+1} f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ Ausdrücke von der Gestalt:

$$\mathfrak{Y}_{n+k} f \equiv \sum_1^n {}^{\nu}\, \overline{\varphi}_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) \cdot \mathfrak{Y}_\nu f \qquad (k = 1 \cdots r - n),$$

in denen die $\overline{\varphi}_{k\nu}(y)$ aus den $\varphi_{k\nu}(x)$ durch Einführung der Veränderlichen y an Stelle der x entstanden sind, so dass also die $n(r-n)$ Gleichungen

$$\overline{\varphi}_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) = \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s)$$

bei der Substitution: $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$ zu Identitäten werden.

Hieraus schliessen wir:

Besteht zwischen $X_1 f \cdots X_n f$ *keine lineare Relation, während* $X_{n+1} f \cdots X_r f$ *sich vermöge der Relationen* (3) *linear durch* $X_1 f \cdots X_n f$ *ausdrücken, so können die beiden gleichzusammengesetzten Gruppen* $X_1 f \cdots X_r f$ *und* $Z_1 f \cdots Z_r f$ *nur dann ähnlich sein, wenn sich die willkürlichen*

Elemente in den oben definirten Coefficienten g_{kj} *derart wählen lassen, dass die infinitesimalen Transformationen:*

$$Y_k f = \sum_1^r {}_j\, g_{kj} \cdot Z_j f \quad (k=1\cdots r)$$

die folgenden Eigenschaften besitzen: erstens sind $Y_1 f \cdots Y_n f$ *durch keine lineare Relation verknüpft, während dagegen* $Y_{n+1} f \cdots Y_r f$ *sich linear durch* $Y_1 f \cdots Y_n f$ *ausdrücken:*

$$(3') \qquad Y_{n+k} f \equiv \sum_1^n {}_\nu\, \psi_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) \cdot Y_\nu f \quad (k=1\cdots r-n)$$

und zweitens sind die $n(r-n)$ *Gleichungen*

$$(4) \qquad \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) - \psi_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) = 0 \quad (k=1\cdots r-n,\ \nu=1\cdots n)$$

mit einander verträglich und ergeben weder zwischen den x *allein noch zwischen den* y *allein Relationen.*

Diese Bedingungen sind *nothwendig* für die Aehnlichkeit der beiden gleichzusammengesetzten Gruppen $X_1 f \cdots X_r f$ und $Z_1 f \cdots Z_r f$. Wir behaupten, dass dieselben zugleich *hinreichend* sind. Genauer gesagt, wir behaupten: *wenn die bewussten Bedingungen erfüllt sind, so giebt es stets eine Transformation* $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$, *welche die infinitesimalen Transformationen* $X_1 f \cdots X_r f$ *in bezüglich* $Y_1 f \cdots Y_r f$ *überführt, so sind die beiden Gruppen* $X_1 f \cdots X_r f$ *und* $Z_1 f \cdots Z_r f$ *mit einander ähnlich.*

Den Beweis für diese Behauptung werden wir dadurch erbringen, dass wir eine Methode entwickeln, welche zur Bestimmung einer Transformation von der angegebenen Beschaffenheit führt.

Unser gegenwärtiger Standpunkt ist also der folgende:

In den s Veränderlichen $x_1 \cdots x_s$ ist eine r-gliedrige Gruppe

$$X_k f = \sum_1^s {}_i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k=1\cdots r)$$

vorgelegt, deren Zusammensetzung durch die Relationen:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_\sigma\, c_{ik\sigma} \cdot X_\sigma f$$

bestimmt ist. Zwischen $X_1 f \cdots X_n f$ besteht dabei keine lineare Relation von der Form:

$$\chi_1(x_1 \cdots x_s) \cdot X_1 f + \cdots + \chi_n(x_1 \cdots x_s) \cdot X_n f = 0,$$

während dagegen $X_{n+1} f \cdots X_r f$ sich durch $X_1 f \cdots X_n f$ ausdrücken lassen:

$$(3) \qquad X_{n+k} f \equiv \sum_1^n {}_\nu\, \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) \cdot X_\nu f \quad (k=1\cdots r-n).$$

Gegeben ist ferner eine mit der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ gleichzusammengesetzte r-gliedrige Gruppe:

$$Z_k f = \sum_1^s {}^i\, \zeta_{ki}(y_1 \cdots y_s) \frac{\partial f}{\partial y_i} \qquad (k=1\cdots r)$$

und es sind in dieser Gruppe r unabhängige infinitesimale Transformationen:

$$Y_k f = \sum_1^r {}^j\, \bar{g}_{kj} Z_j f = \sum_1^s {}^i\, \eta_{ki}(y_1 \cdots y_s) \frac{\partial f}{\partial y_i} \qquad (k=1\cdots r)$$

so ausgewählt, dass erstens die Relationen:

$$(Y_i Y_k) = \sum_1^r {}^\sigma\, c_{ik\sigma} \cdot Y_\sigma f$$

identisch bestehen, dass zweitens $Y_1 f \cdots Y_n f$ durch keine lineare Relation von der Form

$$\psi_1(y_1 \cdots y_s) \cdot Y_1 f + \cdots + \psi_n(y_1 \cdots y_s) \cdot Y_n f = 0$$

verknüpft sind, während dagegen $Y_{n+1} f \cdots Y_r f$ sich folgendermassen ausdrücken:

$$(3') \qquad Y_{n+k} f \equiv \sum_1^n {}^\nu\, \psi_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) \cdot Y_\nu f \qquad (k=1\cdots r-n)$$

und dass endlich die $n(r-n)$ Gleichungen:

$$(4) \qquad \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) - \psi_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) = 0 \qquad (k=1\cdots r-n,\ \nu=1\cdots n)$$

mit einander verträglich sind und weder Relationen zwischen den x allein noch solche zwischen den y allein ergeben.

Gesucht wird eine Transformation:

$$(5) \qquad y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s) \qquad (i=1\cdots s),$$

welche $X_1 f \cdots X_r f$ in bezüglich $Y_1 f \cdots Y_r f$ überführt.

Wir können hinzufügen:

Die gesuchte Transformation ist so beschaffen, dass die Gleichungen (4) *bei der Substitution: $y_1 = \Phi_1(x), \cdots y_s = \Phi_s(x)$ zu Identitäten werden.*

Hiermit ist das Problem ausgesprochen, um dessen Erledigung es sich zunächst handelt.

§ 90.

Bevor wir das am Schlusse des vorigen Paragraphen aufgestellte Problem in seiner vollen Allgemeinheit angreifen, wollen wir einen besonderen Fall betrachten, dessen Erledigung sich bei weitem einfacher gestaltet; wir meinen den Fall $n = r$, welcher offenbar nur dann eintreten kann, wenn s mindestens gleich r ist.

Die oben definirte ganze Zahl n sei also gerade gleich r.

Es ist klar, dass in diesem Falle weder zwischen $X_1 f \cdots X_r f$ noch zwischen $Z_1 f \cdots Z_r f$ eine lineare Relation besteht. Hieraus folgt, dass die r infinitesimalen Transformationen:

$$Y_k f = \sum_1^r {}_j\, g_{kj} Z_j f \qquad (k = 1 \cdots r)$$

die auf S. 333 angegebenen Bedingungen von selbst erfüllen, ohne dass die in den g_{kj} enthaltenen willkürlichen Elemente weiter specialisirt zu werden brauchen. Erstens besteht ja zwischen $Y_1 f \cdots Y_r f$ keine lineare Relation und zweitens schrumpfen die Gleichungen (4) auf die Identität $0 = 0$ zusammen, sie sind also sicher mit einander verträglich und liefern auch weder zwischen den x allein noch zwischen den y allein Relationen.

Ist daher die auf S. 333 aufgestellte Behauptung richtig, so sind unsere beiden r-gliedrigen Gruppen ähnlich, und zwar giebt es eine Transformation $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$, welche $X_1 f \cdots X_r f$ in bezüglich $Y_1 f \cdots Y_r f$ überführt. Versuchen wir eine solche Transformation zu bestimmen.

Wenn wir vermöge der Transformationsgleichungen

$$(5) \qquad y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s) \qquad (i = 1 \cdots s)$$

die Veränderlichen $y_1 \cdots y_s$ in $X_k f$ einführen, so erhalten wir:

$$X_k f = \sum_1^s {}_i\, X_k y_i \frac{\partial f}{\partial y_i} = \sum_1^s {}_i\, X_k \Phi_i \frac{\partial f}{\partial y_i};$$

vergleichen wir hiermit:

$$Y_k f = \sum_1^s {}_i\, \eta_{ki}(y_1 \cdots y_s) = \sum_1^s {}_i\, Y_k y_i \frac{\partial f}{\partial y_i},$$

so erkennen wir, dass die Transformation (5) dann und nur dann $X_1 f \cdots X_r f$ in bezüglich $Y_1 f \cdots Y_r f$ überführt, wenn die rs Gleichungen:

$$(6) \qquad Y_k y_i - X_k \Phi_i = 0 \qquad (k = 1 \cdots r,\ i = 1 \cdots s)$$

bei der Substitution: $y_1 = \Phi_1(x), \cdots y_s = \Phi_s(x)$ zu Identitäten werden.

Setzen wir nun:

$$X_k f + Y_k f = \Omega_k f \qquad (k = 1 \cdots r),$$

so wird:

$$\Omega_k(y_i - \Phi_i) = Y_k y_i - X_k \Phi_i;$$

wenn daher die Gleichungen (5) eine Transformation von der verlangten Beschaffenheit darstellen, so verschwinden die rs Ausdrücke $\Omega_k(y_i - \Phi_i)$ sämmtlich vermöge (5) oder, was auf dasselbe hinauskommt: das Gleichungensystem (5) gestattet die r infinitesimalen Transformationen $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$ (vgl. Kap. 7, S. 109 ff.)

Andererseits gilt offenbar Folgendes: jedes nach $x_1 \cdots x_s$ auflösbare Gleichungensystem von der Form (5), welches die r infinitesimalen Transformationen $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$ gestattet, stellt eine Transformation dar, welche $X_1 f \cdots X_r f$ in bezüglich $Y_1 f \cdots Y_r f$ überführt.

Berücksichtigen wir jetzt, dass die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$ paarweise in den Beziehungen

$$(\Omega_i \Omega_k) = (X_i X_k) + (Y_i Y_k) = \sum_1^r {}_\sigma\, c_{ik\sigma} \Omega_\sigma f$$

stehen und also eine r-gliedrige Gruppe in den $2s$ Veränderlichen $x_1 \cdots x_s$, $y_1 \cdots y_s$ erzeugen, so können wir sagen:

Der Inbegriff aller Transformationen (5), *welche* $X_1 f \cdots X_r f$ *in bezüglich* $Y_1 f \cdots Y_r f$ *überführen, ist identisch mit dem Inbegriff aller nach* $x_1 \cdots x_s$ *auflösbaren Gleichungensysteme von der Form* (5), *welche die r-gliedrige Gruppe* $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$ *gestatten.*

Die Bestimmung einer Transformation von der besprochenen Beschaffenheit ist hiermit zurückgeführt auf die Bestimmung eines gewissen Gleichungensystems in den $2s$ Veränderlichen $x_1 \cdots x_s$, $y_1 \cdots y_s$; dieses Gleichungensytem muss die folgenden Eigenschaften besitzen: *es muss aus s unabhängigen Gleichungen bestehen, muss sowohl nach* $x_1 \cdots x_s$ *als auch nach* $y_1 \cdots y_s$ *auflösbar sein und muss endlich die r-gliedrige Gruppe* $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$ *gestatten.*

Bei der Erledigung dieses neuen Problems können wir uns auf die Entwickelungen des Kapitels 14 stützen.

Unter den gemachten Voraussetzungen verschwinden die r-reihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{1s}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{rs}(x) \end{vmatrix}$$

nicht alle identisch und noch weniger alle r-reihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{1s}(x) & \eta_{11}(y) & \cdot & \cdot & \eta_{1s}(y) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{rs}(x) & \eta_{r1}(y) & \cdot & \cdot & \eta_{rs}(y) \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Wenn daher ein Gleichungensystem alle r-reihigen Determinanten der Matrix (7) zum Verschwinden bringt, so muss es nothwendig Relationen zwischen den x allein enthalten.

Unsere Aufgabe ist die Bestimmung eines Gleichungensystems von der Form:

$$y_1 - \Phi_1(x_1 \cdots x_s) = 0, \cdots y_s - \Phi_s(x_1 \cdots x_s) = 0, \tag{8}$$

welches die Gruppe $X_k f + Y_k f$ gestattet und dabei nach $x_1 \cdots x_s$ auflösbar ist.

Ein Gleichungensystem von dieser Beschaffenheit enthält sicher keine Relationen zwischen $x_1 \cdots x_s$ allein, es bringt also nicht alle r-reihigen Determinanten der Matrix (7) zum Verschwinden und lässt sich nach Theorem 17 in Kap. 7, S. 123 auf eine solche Form bringen, dass es nur Relationen zwischen den Lösungen des vollständigen Systems:

$$(9) \qquad \Omega_k f = X_k f + Y_k f = 0 \quad (k=1\cdots r)$$

enthält. Folglich ist unsere Aufgabe gelöst, wenn es uns gelingt, s unabhängige, sowohl nach $x_1 \cdots x_s$ als nach $y_1 \cdots y_s$ auflösbare Relationen zwischen den Lösungen dieses vollständigen Systems anzugeben.

Das vollständige System (9) besitzt $2s - r$ unabhängige Lösungen, welche wir offenbar so wählen können, dass $s - r$ von ihnen, etwa:

$$u_1(x_1 \cdots x_s) \cdots u_{s-r}(x_1 \cdots x_s)$$

nur von den x abhängen, $s - r$ andere:

$$v_1(y_1 \cdots y_s) \cdots v_{s-r}(y_1 \cdots y_s)$$

nur von den y, während dagegen die r noch übrigen:

$$w_1(x_1 \cdots x_s,\ y_1 \cdots y_s) \cdots w_r(x_1 \cdots x_s,\ y_1 \cdots y_s)$$

sowohl gewisse x als gewisse y enthalten müssen. Hier sind die s Functionen $u_1 \cdots u_{s-r}$, $w_1 \cdots w_r$ in Bezug auf $x_1 \cdots x_s$ von einander unabhängig und die s Functionen $v_1 \cdots v_{s-r}$, $w_1 \cdots w_r$ sind es in Bezug auf $y_1 \cdots y_s$; das folgt daraus, dass die r Gleichungen des vollständigen Systems sowohl nach r von den Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial y_s}$ als nach r von den Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_s}$ auflösbar sind (vgl. Kap. 5, Theorem 12, S. 91).

Wann sind nun s von einander unabhängige Relationen zwischen den u, v, w sowohl nach $x_1 \cdots x_s$ als nach $y_1 \cdots y_s$ auflösbar? Offenbar dann und nur dann, wenn sie sowohl nach $u_1 \cdots u_{s-r}$, $w_1 \cdots w_r$ als nach $v_1 \cdots v_{s-r}$, $w_1 \cdots w_r$ aufgelöst werden können, wenn sie sich also auf die Form:

$$(10) \qquad \begin{array}{ll} v_1 = \mathfrak{F}_1(u_1 \cdots u_{s-r}), \cdots & v_{s-r} = \mathfrak{F}_{s-r}(u_1 \cdots u_{s-r}), \\ w_1 = \mathfrak{G}_1(u_1 \cdots u_{s-r}), \cdots & w_r = \mathfrak{G}_r(u_1 \cdots u_{s-r}) \end{array}$$

bringen lassen, wo $\mathfrak{F}_1 \cdots \mathfrak{F}_{s-r}$ beliebige *von einander unabhängige* Functionen ihrer Argumente bezeichnen, während die Functionen $\mathfrak{G}_1 \cdots \mathfrak{G}_r$ gar keiner Beschränkung unterworfen sind.

Die Gleichungen (10) stellen das allgemeinste Gleichungensystem dar, welches aus s unabhängigen Gleichungen besteht, die Gruppe $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$ gestattet und sich sowohl nach $x_1 \cdots x_s$ als nach $y_1 \cdots y_s$

auflösen lässt; zu gleicher Zeit stellen sie die allgemeinste Transformation zwischen $x_1 \cdots x_s$ und $y_1 \cdots y_s$ dar, welche $X_1 f \cdots X_r f$ in bezüglich $Y_1 f \cdots Y_r f$ überführt. Es ist somit bewiesen, dass es Transformationen giebt, welche diese Ueberführung leisten, dass also unsere beiden Gruppen wirklich mit einander ähnlich sind.

Aber noch mehr, die Gleichungen (10) stellen überhaupt die allgemeinste Transformation dar, welche die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ in die Gruppe $Z_1 f \cdots Z_r f$ überführt.

In der That, ist $y_i = \Psi_i(x_1 \cdots x_s)$ irgend eine Transformation, welche die eine Gruppe in die andere überführt, so verwandelt dieselbe $X_1 f \cdots X_r f$ in gewisse infinitesimale Transformationen $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_r f$ der Gruppe $Z_1 f \cdots Z_r f$, welche paarweise in den Beziehungen

$$(\mathfrak{Y}_i \mathfrak{Y}_k) = \sum_1^r {}_\sigma \, c_{ik\sigma} \, \mathfrak{Y}_\sigma f$$

stehen, und welche daher aus den r infinitesimalen Transformationen:

$$Y_k f = \sum_1^r {}_j \, g_{kj} \, Z_j f \qquad (k = 1 \cdots r)$$

erhalten werden, wenn man die in den g_{kj} vorkommenden willkürlichen Elemente in geeigneter Weise specialisirt. Nun sind aber alle Transformationen, welche $X_1 f \cdots X_r f$ in bezüglich $Y_1 f \cdots Y_r f$ verwandeln, in der Form (10) enthalten, also ist insbesondere auch die Transformation $y_i = \Psi_i(x_1 \cdots x_s)$ in dieser Form enthalten.

Indem wir jetzt die gewonnenen Ergebnisse zusammenfassen, können wir sagen:

Theorem 63. *Sind die beiden r-gliedrigen Gruppen:*

$$X_k f = \sum_1^s {}_i \, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

und:

$$Z_k f = \sum_1^s {}_i \, \zeta_{ki}(y_1 \cdots y_s) \frac{\partial f}{\partial y_i} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

gleichzusammengesetzt und sind weder $X_1 f \cdots X_r f$ noch $Z_1 f \cdots Z_r f$ durch lineare Relationen verknüpft, so sind die beiden Gruppen auch mit einander ähnlich. Die allgemeinste Transformation, welche die eine Gruppe in die andere überführt, erhält man folgendermassen: Man wähle die r^2 Constanten g_{kj} in allgemeinster Weise so, dass die r infinitesimalen Transformationen

$$Y_k f = \sum_1^r {}_j \, g_{kj} \, Z_j f \qquad (k = 1 \cdots r)$$

von einander unabhängig sind und dass mit den Relationen

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_\sigma\, c_{ik\sigma} X_\sigma f$$

zu gleicher Zeit die Relationen:

$$(Y_i Y_k) = \sum_1^r {}_\sigma\, c_{ik\sigma} Y_\sigma f$$

bestehen; sodann bilde man das r-gliedrige vollständige System

$$X_k f + Y_k f = 0 \qquad (k = 1 \cdots r)$$

in den $2s$ Veränderlichen $x_1 \cdots x_s$, $y_1 \cdots y_s$ und bestimme $2s - r$ unabhängige Lösungen desselben, nämlich $s - r$ unabhängige Lösungen:

$$u_1(x_1 \cdots x_s) \cdots u_{s-r}(x_1 \cdots x_s),$$

welche nur die x enthalten, $s - r$ unabhängige Lösungen:

$$v_1(y_1 \cdots y_s) \cdots v_{s-r}(y_1 \cdots y_s),$$

welche nur die y enthalten, und r Lösungen:

$$w_1(x_1 \cdots x_s,\ y_1 \cdots y_s) \cdots w_r(x_1 \cdots x_s,\ y_1 \cdots y_s),$$

welche von einander und von $u_1 \cdots u_{s-r}$, $v_1 \cdots v_{s-r}$ unabhängig sind; ist das geschehen, so stellt das Gleichungensystem:

$$v_1 = \mathfrak{F}_1(u_1 \cdots u_{s-r}), \cdots v_{s-r} = \mathfrak{F}_{s-r}(u_1 \cdots u_{s-r})$$
$$w_1 = \mathfrak{G}_1(u_1 \cdots u_{s-r}), \cdots\ w_r = \mathfrak{G}_r(u_1 \cdots u_{s-r})$$

die verlangte Transformation dar; hierbei sind $\mathfrak{G}_1 \cdots \mathfrak{G}_r$ vollkommen willkürliche Functionen ihrer Argumente; $\mathfrak{F}_1 \cdots \mathfrak{F}_{s-r}$ dagegen sind der Beschränkung unterworfen, von einander unabhängig sein zu müssen.

Hieraus ergiebt sich insbesondere der

Satz 1. *Stehen die $r \leqq s$ unabhängigen infinitesimalen Transformationen:*

$$X_k f = \sum_1^s {}_i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

paarweise in den Beziehungen:

$$(X_i X_k) = 0 \qquad (i, k = 1 \cdots r),$$

ohne jedoch durch eine lineare Relation von der Form:

$$\sum_1^r {}_k\, \chi_k(x_1 \cdots x_s) \cdot X_k f = 0$$

verknüpft zu sein, so erzeugen sie eine r-gliedrige Gruppe, welche mit der Gruppe von Translationen:

$$Y_1 f = \frac{\partial f}{\partial y_1}, \cdots Y_r f = \frac{\partial f}{\partial y_r}$$

ähnlich ist.

Ein äusserst wichtiger Fall ist der, dass die beiden Zahlen s und r einander gleich sind, dass also die beiden Gruppen transitiv sind oder genauer: einfach transitiv (vgl. Kap. 13, S. 212). Wir wollen das Theorem 63 für diesen Fall besonders aussprechen:

Theorem 64. *Zwei gleichzusammengesetzte einfach transitive Gruppen in gleichvielen Veränderlichen sind stets auch mit einander ähnlich. Sind*

$$X_k f = \sum_1^r {}_i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_r) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

und

$$Z_k f = \sum_1^r {}_i\, \xi_{ki}(y_1 \cdots y_r) \frac{\partial f}{\partial y_i} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

die infinitesimalen Transformationen der beiden Gruppen, so findet man die allgemeinste Transformation, welche die eine Gruppe in die andere überführt, folgendermassen: Man wähle die r^2 Constanten g_{kj} in allgemeinster Weise so, dass die r infinitesimalen Transformationen:

$$Y_k f = \sum_1^r {}_j\, g_{kj} Z_j f \qquad (k = 1 \cdots r)$$

von einander unabhängig sind und dass mit den Relationen:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_\sigma\, c_{ik\sigma} X_\sigma f$$

zu gleicher Zeit die Relationen:

$$(Y_i Y_k) = \sum_1^r {}_\sigma\, c_{ik\sigma} Y_\sigma f$$

bestehen; man bilde ferner das r-gliedrige vollständige System:

$$X_k f + Y_k f = 0 \qquad (k = 1 \cdots r)$$

in den $2r$ Veränderlichen $x_1 \cdots x_r$, $y_1 \cdots y_r$ und bestimme irgend r unabhängige Lösungen:

$$w_1(x_1 \cdots x_r,\ y_1 \cdots y_r) \cdots w_r(x_1 \cdots x_r,\ y_1 \cdots y_r)$$

desselben; dann stellen die r Gleichungen:

$$w_1 = a_1,\ \cdots w_r = a_r$$

mit den r willkürlichen Constanten $a_1 \cdots a_r$ die allgemeinste Transformation von der verlangten Beschaffenheit dar.

§ 91.

Jetzt wenden wir uns zur Behandlung des allgemeinen Problems, welches wir am Schlusse von § 89 (S. 334) aufgestellt haben.

Zunächst können wir, und zwar genau wie im vorigen Paragraphen, beweisen, dass jede Transformation: $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$, welche $X_1 f \cdots X_r f$ in bezüglich $Y_1 f \cdots Y_r f$ überführt, ein Gleichungensystem darstellt, welches die r-gliedrige Gruppe $\Omega_k f = X_k f + Y_k f$ gestattet und dass andererseits jedes nach $x_1 \cdots x_s$ auflösbare Gleichungensystem:

$$y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s),$$

welches die Gruppe $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$ gestattet, eine Transformation darstellt, welche $X_1 f \cdots X_r f$ in bezüglich $Y_1 f \cdots Y_r f$ überführt.

Nun ist nach S. 334 jede Transformation $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$, welche $X_1 f \cdots X_r f$ in bezüglich $Y_1 f \cdots Y_r f$ überführt, so beschaffen, dass die Gleichungen (4) bei der Substitution: $y_1 = \Phi_1(x), \cdots y_s = \Phi_s(x)$ zu Identitäten werden. Folglich können wir das auf Seite 334 formulirte Problem auch folgendermassen aussprechen:

Gesucht wird in den $2s$ Veränderlichen $x_1 \cdots x_s$, $y_1 \cdots y_s$ ein Gleichungensystem, welches die r-gliedrige Gruppe $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$ gestattet, aus gerade s unabhängigen Gleichungen besteht, sowohl nach $x_1 \cdots x_s$ als nach $y_1 \cdots y_s$ auflösbar ist und endlich die $n(r-n)$ Gleichungen:

$$(4) \qquad \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) - \psi_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) = 0 \qquad (k=1 \cdots r-n,\ \nu = 1 \cdots n),$$

umfasst.

Für die Erledigung dieses Problems ist es von grosser Wichtigkeit, dass *das Gleichungensystem* (4) *seinerseits die r-gliedrige Gruppe $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$ gestattet.*

Um das zu beweisen, denken wir uns die Matrix:

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{1s}(x) & \eta_{11}(y) & \cdot & \cdot & \eta_{1s}(y) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{rs}(x) & \eta_{r1}(y) & \cdot & \cdot & \eta_{rs}(y) \end{vmatrix}$$

aufgeschrieben, welche zu den infinitesimalen Transformationen $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$ gehört. Wir werden zeigen, dass die Gleichungen (4) eines der Gleichungensysteme sind, welche sich durch Nullsetzen aller $(n+1)$-reihigen Determinanten der Matrix (11) ergeben. Damit ist dann nach Theorem 39, Kap. 14, S. 228 bewiesen, dass das Gleichungensystem (4) die Gruppe $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$ gestattet.

Unter den $(n+1)$-reihigen Determinanten der Matrix (11) giebt es insbesondere solche von der Form:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \xi_{1k_1}(x) & \cdot & \xi_{1k_n}(x) & \eta_{1\sigma}(y) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{nk_1}(x) & \cdot & \xi_{nk_n}(x) & \eta_{n\sigma}(y) \\ \xi_{n+j,k_1}(x) & \cdot & \xi_{n+j,k_n}(x) & \eta_{n+j,\sigma}(y) \end{vmatrix}$$

Ersetzen wir in $\varDelta$ die Glieder der letzten Horizontalreihe durch ihre aus (3) und (3′) folgenden Werthe:

$$\xi_{n+j,k_\mu}(x) \equiv \sum_1^n {}_\nu\, \varphi_{j\nu}(x) \cdot \xi_{\nu,k_\mu}(x), \quad \eta_{n+j,\sigma}(y) \equiv \sum^n {}_\nu\, \psi_{j\nu}(y) \cdot \eta_{\nu\sigma}(y),$$

und subtrahiren wir von der letzten Horizontalreihe die n ersten, nachdem wir dieselben vorher mit bezüglich $\varphi_{j1}(x) \cdots \varphi_{jn}(x)$ multiplicirt haben, so bekommen wir:

$$\varDelta = \Sigma \pm \xi_{1k_1}(x) \cdots \xi_{nk_n}(x) \cdot \sum_1^n {}_\nu\, \eta_{\nu\sigma}(y) \left\{ \psi_{j\nu}(y) - \varphi_{j\nu}(x) \right\}.$$

Hier verschwinden unter den früher gemachten Voraussetzungen die Determinanten von der Form:

$$D = \Sigma \pm \xi_{1k_1}(x) \cdots \xi_{nk_n}(x)$$

nicht alle identisch und ebensowenig alle Determinanten von der Form:

$$\mathfrak{D} = \Sigma \pm \eta_{1k_1}(y) \cdots \eta_{nk_n}(y).$$

Ein Gleichungensystem, das alle Determinanten $\varDelta$ zum Verschwinden bringt, muss offenbar entweder alle Gleichungen von der Form $D = 0$ enthalten oder die $s(r-n)$ Gleichungen:

$$\sum_1^n \eta_{\nu\sigma}(y) \left\{ \psi_{j\nu}(y) - \varphi_{j\nu}(x) \right\} = 0 \qquad (\sigma = 1 \cdots s,\ j = 1 \cdots r-n);$$

im letzteren Falle umfasst es entweder alle Gleichungen von der Form $\mathfrak{D} = 0$ oder die $n(r-n)$ Gleichungen

(4) $$\varphi_{j\nu}(x) - \psi_{j\nu}(y) = 0 \qquad (j = 1 \cdots r-n,\ \nu = 1 \cdots n).$$

In dem letzten dieser drei Fälle bemerken wir nun Folgendes:

Das Gleichungensystem (4) bringt nicht blos alle Determinanten $\varDelta$ zum Verschwinden, sondern überhaupt alle $(n+1)$-reihigen Determinanten der Matrix (11). Man erkennt das sofort, wenn man die Matrix in der Form:

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \xi_{1s}(x) & \eta_{11}(y) & \cdot & \eta_{1s}(y) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{n1}(x) & \cdot & \xi_{ns}(x) & \eta_{n1}(y) & \cdot & \eta_{ns}(y) \\ \sum_\nu^{1\cdots n} \varphi_{1\nu}\,\xi_{\nu 1} & \cdot & \sum_\nu^{1\cdots n} \varphi_{1\nu}\,\xi_{\nu s} & \sum_\nu^{1\cdots n} \psi_{1\nu}\,\eta_{\nu 1} & \cdot & \sum_\nu^{1\cdots n} \psi_{1\nu}\,\eta_{\nu s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_\nu^{1\cdots n} \varphi_{r-n,\nu}\,\xi_{\nu 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sum_\nu^{1\cdots n} \psi_{r-n,\nu}\,\eta_{\nu s} \end{vmatrix}$$

schreibt und sodann die Substitution: $\psi_{k\nu}(y) = \varphi_{k\nu}(x)$ macht; die $(n+1)$-reihigen Determinanten der so erhaltenen Matrix sind alle identisch Null. Folglich gehört (4) zu denjenigen Gleichungensystemen, welche man durch Nullsetzen aller $(n+1)$-reihigen Determinanten der Matrix (11) erhält, und es gestattet daher nach dem oben angeführten Theoreme die r-gliedrige Gruppe $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$.

Die eben bewiesene wichtige Eigenschaft des Gleichungensystems (4) kann auch noch auf einem andern, etwas direkteren Wege erkannt werden.

Nach S. 109 u. 223 gestattet das Gleichungensystem (4) die r-gliedrige Gruppe $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$ jedenfalls nur dann, wenn alle Gleichungen von der Form:

$$\Omega_j\left(\varphi_{k\nu}(x) - \psi_{k\nu}(y)\right) = X_j\,\varphi_{k\nu}(x) - Y_j\,\psi_{k\nu}(y) = 0$$

eine Folge von (4) sind. Dass diese Bedingung im gegenwärtigen Falle erfüllt ist, lässt sich leicht nachweisen.

Es ist für $j = 1 \cdots r$, $k = 1 \cdots r - n$:

$$(X_j X_{n+k}) = \left(X_j f,\ \sum_1^n{}^{\nu}\ \varphi_{k\nu} \cdot X_\nu f\right)$$

$$= \sum_1^n{}^{\nu}\ X_j\,\varphi_{k\nu} \cdot X_\nu f + \sum_1^n{}^{\nu}\ \varphi_{k\nu}\,(X_j X_\nu).$$

Ferner ist allgemein:

$$(X_j X_\mu) = \sum_1^r{}^{\pi}\ c_{j\mu\pi} \cdot X_\pi f = \sum_1^n{}^{\nu} \left\{c_{j\mu\nu} + \sum_1^{r-n}{}^{\tau}\ c_{j\mu,\,n+\tau}\,\varphi_{\tau\nu}\right\} X_\nu f.$$

Setzen wir diesen Werth in die vorhergehende Gleichung ein und berücksichtigen ausserdem, dass $X_1 f \cdots X_n f$ nicht durch eine lineare Relation verknüpft sind, so finden wir:

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} X_j\,\varphi_{k\nu} &= c_{j,\,n+k,\,\nu} + \sum_1^{r-n}{}^{\tau}\ c_{j,\,n+k,\,n+\tau}\,\varphi_{\tau\nu} - \\ &\quad - \sum_1^n{}^{\mu}\ \varphi_{k\mu}\left(c_{j\mu\nu} + \sum_1^{r-n}{}^{\tau}\ c_{j,\,\mu,\,n+\tau}\,\varphi_{\tau\nu}\right). \end{aligned}\right.$$

Es wird also:

$$X_j\,\varphi_{k\nu} = \Pi_{jk\nu}(\varphi_{11}, \varphi_{12} \cdots) \qquad (j = 1 \cdots r,\ k = 1 \cdots r-n,\ \nu = 1 \cdots n)$$

und eine ganz ähnliche Rechnung giebt:

$$Y_j\,\psi_{k\nu} = \Pi_{jk\nu}(\psi_{11}, \psi_{12} \cdots),$$

wo $\Pi_{jk\nu}$ beide Male dieselbe Function seiner Argumente bezeichnet.

Nunmehr erhalten wir:

$$\Omega_j(\varphi_{k\nu} - \psi_{k\nu}) = \Pi_{jk\nu}(\varphi_{11}, \varphi_{12} \cdots) - \Pi_{jk\nu}(\psi_{11}, \psi_{12} \cdots),$$

woraus zu ersehen ist, dass die Ausdrücke $\Omega_j(\varphi_{k\nu} - \psi_{k\nu})$ wirklich alle vermöge (4) verschwinden.

Im Allgemeinen werden die $n(r-n)$ Gleichungen $\varphi_{k\nu}(x) = \psi_{k\nu}(y)$ nicht von einander unabhängig sein, sie werden sich vielmehr durch eine geringere Anzahl von einander unabhängiger Gleichungen ersetzen lassen, etwa durch die $s - \varrho \leqq s$ folgenden:

$$(13) \qquad \varphi_k(x_1 \cdots x_s) = \psi_k(y_1 \cdots y_s) \qquad (k=1 \cdots s-\varrho).$$

Natürlich wird dann jedes $X_j \varphi_k$ eine Function von $\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}$ allein:

$$(14) \qquad X_j \varphi_k = \pi_{jk}(\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}) \qquad (j=1 \cdots r;\ k=1 \cdots s-\varrho)$$

und jedes $Y_j \psi_k$ wird dieselbe Function von $\psi_1 \cdots \psi_{s-\varrho}$:

$$(14') \qquad Y_j \psi_k = \pi_{jk}(\psi_1 \cdots \psi_{s-\varrho}) \qquad (j=1 \cdots r;\ k=1 \cdots s-\varrho),$$

es verschwinden daher vermöge des Gleichungensystems: $\varphi_1 - \psi_1 = 0, \cdots \varphi_{s-\varrho} = \psi_{s-\varrho}$ alle $\Omega_j(\varphi_k - \psi_k)$. Da aber dieses Gleichungensystem in einer Form vorliegt, welche die auf S. 107 f. gestellte Forderung erfüllt, können wir nach S. 112 u. 223 schliessen, dass dasselbe die r-gliedrige Gruppe $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$ gestattet.

Ist nun $s - \varrho = s$, also $\varrho = 0$, so stellen die s Gleichungen $\varphi_1 = \psi_1, \cdots \varphi_s = \psi_s$ an und für sich schon eine Transformation in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_s$, $y_1 \cdots y_s$ dar. Diese Transformation führt offenbar $X_1 f \cdots X_r f$ in bezüglich $Y_1 f \cdots Y_r f$ über und ist zugleich die allgemeinste Transformation, welche das thut.

Demnach ist der Fall $s - \varrho = s$ von vornherein erledigt, dagegen bedarf der Fall $s - \varrho < s$ genauerer Untersuchung.

Um die weiteren Betrachtungen zu vereinfachen, wollen wir zunächst statt der Veränderlichen x und y geeignete neue Veränderliche einführen.

Die n von einander unabhängigen Gleichungen: $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$ bilden ein n-gliedriges vollständiges System in den s Veränderlichen $x_1 \cdots x_s$, sie haben daher $s - n$ unabhängige Lösungen gemein, ebenso haben die n Gleichungen: $Y_1 f = 0, \cdots Y_n f = 0$ in den Veränderlichen $y_1 \cdots y_s$ gerade $s - n$ unabhängige Lösungen gemein.

Es liegt nahe, die infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ und $Y_1 f \cdots Y_r f$ dadurch zu vereinfachen, dass man an Stelle der x neue unabhängige Veränderliche einführt, von denen $s - n$ unabhängige Lösungen des vollständigen Systems: $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$ sind, und an Stelle der y neue unabhängige Veränderliche, von denen $s - n$ unabhängige Lösungen des vollständigen Systems: $Y_1 f = 0, \cdots Y_n f = 0$ sind.

Es liegt andererseits nahe, die Gleichungen (13) dadurch zu vereinfachen, dass man die Functionen $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$ und $\psi_1(y) \cdots \psi_{s-\varrho}(y)$ als neue Veränderliche einführt.

Wir wollen versuchen, beides, so weit als möglich, zu vereinigen.

Zunächst gehen wir darauf aus, an Stelle der x geeignete neue Veränderliche einzuführen.

Unter den Lösungen des vollständigen Systems $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$ kann es solche geben, welche sich durch die Functionen $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$ allein ausdrücken lassen; alle Lösungen $F(\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho})$ von dieser Beschaffenheit bestimmen sich aus den n Differentialgleichungen:

$$(15) \qquad \sum_1^{s-\varrho} X_k \varphi_\nu \frac{\partial F}{\partial \varphi_\nu} = \sum_1^{s-\varrho} \pi_{k\nu}(\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}) \frac{\partial F}{\partial \varphi_\nu} = 0 \qquad (k=1\cdots n)$$

in den $s-\varrho$ Veränderlichen $\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}$. Wir wollen annehmen, dass diese Gleichungen gerade $s-q \leqq s-\varrho$ unabhängige Lösungen besitzen, etwa die folgenden:

$$\mathfrak{U}_1(\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}) \cdots \mathfrak{U}_{s-q}(\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}).$$

Unter dieser Voraussetzung sind offenbar:

$$\mathfrak{U}_1(\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)) = u_1(x), \cdots \mathfrak{U}_{s-q}(\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)) = u_{s-q}(x)$$

solche unabhängige Lösungen des vollständigen Systems: $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$, welche sich durch $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$ allein ausdrücken lassen, und es ist jede andere Lösung von derselben Beschaffenheit eine Function von $u_1(x) \cdots u_{s-q}(x)$ allein. Natürlich gilt dabei auch die Ungleichung: $s-q \leqq s-n$, also ist keine der beiden Zahlen ϱ und n grösser als q.

Es seien nun:

$$u_{s-q+1} = u_{s-q+1}(x), \cdots u_{s-n} = u_{s-n}(x)$$

irgend $q-n$ von einander und von $u_1(x) \cdots u_{s-q}(x)$ unabhängige Lösungen des vollständigen Systems: $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$. Wir werden zeigen, dass die $s-\varrho+q-n$ Functionen: $u_{s-q+1}(x) \cdots u_{s-n}(x)$, $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$ von einander unabhängig sind.

Da $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$ von einander unabhängig sind, so giebt es unter den Functionen $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$, $u_{s-q+1}(x) \cdots u_{s-n}(x)$ wenigstens $s-\varrho$, also etwa gerade $s-\varrho+q-n-h$ von einander unabhängige, wo $0 \leqq h \leqq q-n$. Wir wollen annehmen, dass gerade $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$, $u_{s-q+h+1}(x) \cdots u_{s-n}(x)$ von einander unabhängig sind, während $u_{s-q+1}(x) \cdots u_{s-q+h}(x)$ sich durch $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$, $u_{s-q+h+1}(x) \cdots u_{s-n}(x)$ allein ausdrücken lassen. Es sollen also zwischen den Grössen $u_{s-q+1} \cdots u_{s-n}$, $\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}$ Relationen von der Form:

(16) $u_{s-q+j} = \chi_j(u_{s-q+h+1} \cdots u_{s-n}, \varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}) \quad (j=1\cdots h)$

bestehen, welche bei der Substitution:

$$(17) \quad \begin{cases} u_{s-q+1} = u_{s-q+1}(x), \cdots u_{s-n} = u_{s-n}(x), \\ \varphi_1 = \varphi_1(x), \cdots \varphi_{s-\varrho} = \varphi_{s-\varrho}(x) \end{cases}$$

zu Identitäten werden.

Deuten wir die Substitution (17) durch das Zeichen [ ] an, so haben wir:

$$[u_{s-q+j} - \chi_j] \equiv 0 \quad (j=1\cdots h),$$

also wird auch:

$$X_k[u_{s-q+j} - \chi_j] = -\sum_1^{s-\varrho}{}^{\nu} [\pi_{k\nu}(\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho})] \left[\frac{\partial \chi_j}{\partial \varphi_\nu}\right] \equiv 0 \quad (k=1\cdots n, j=1\cdots h),$$

das heisst: die Ausdrücke

$$(18) \quad \sum_1^{s-\varrho}{}^{\nu} \pi_{k\nu}(\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}) \frac{\partial \chi_j}{\partial \varphi_\nu} \quad (k=1\cdots n, \; j=1\cdots h)$$

verschwinden bei der Substitution (17) alle identisch. Nun sind aber diese Ausdrücke sämmtlich von $u_{s-q+1} \cdots u_{s-q+h}$ frei, wären sie daher nicht identisch null, sondern verschwänden sie erst bei der Substitution (17) identisch, so wären die Functionen $u_{s-q+h+1}(x) \cdots u_{s-n}(x)$, $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$ nicht von einander unabhängig, das aber wäre gegen die Voraussetzung. Folglich sind die Ausdrücke (18) an und für sich identisch null oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Functionen $\chi_1 \cdots \chi_h$ sind Lösungen der n Differentialgleichungen (15) in den $s-\varrho$ Veränderlichen $\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}$. Hieraus geht hervor, dass $\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}$ in den χ_j nur in den Verbindungen: $\mathfrak{U}_1(\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}) \cdots \mathfrak{U}_{s-q}(\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho})$ vorkommen, dass also die h Gleichungen (16) durch h Relationen von der Form:

(19) $u_{s-q+j} = \bar{\chi}_j(u_{s-q+h+1} \cdots u_{s-n}, u_1 \cdots u_{s-q}) \quad (j=1\cdots h)$

ersetzt werden können, die nun ihrerseits bei der Substitution:

$$u_1 = u_1(x), \cdots u_{s-n} = u_{s-n}(x)$$

zu Identitäten werden.

Relationen von der Form (19) können offenbar nicht bestehen, da $u_1 \cdots u_{s-n}$ unabhängige Lösungen des vollständigen Systems $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$ sind; folglich ist h gleich Null. Damit ist bewiesen, dass die $s - \varrho + q - n$ Functionen $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$, $u_{s-q+1}(x) \cdots u_{s-n}(x)$ wirklich von einander unabhängig sind.

Wir sehen also, dass zwischen den $s - n + s - \varrho$ Grössen $u_1 \cdots u_{s-n}$, $\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}$ keine andern Relationen bestehen, als die $s - q$ folgenden:

(20) $$u_1 = \mathfrak{U}_1(\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}), \cdots u_{s-q} = \mathfrak{U}_{s-q}(\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}),$$

welche bei der Substitution:

$$u_1 = u_1(x), \cdots u_{s-q} = u_{s-q}(x), \; \varphi_1 = \varphi_1(x), \cdots \varphi_{s-\varrho} = \varphi_{s-\varrho}(x)$$

zu Identitäten werden.

Aus dem eben Gesagten ergiebt sich, dass unter den $s-n+s-\varrho$ Functionen $u_1(x) \cdots u_{s-n}(x)$, $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$ gerade $s-n+s-\varrho-(s-q)$ $= s-n+q-\varrho$ von einander unabhängige vorhanden sind, nämlich etwa die $s-n$ Functionen: $u_1(x) \cdots u_{s-n}(x)$, zu denen noch $q-\varrho \geqq 0$ von den Functionen $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$ hinzukommen. Nehmen wir an, dass die Gleichungen (20) sich gerade nach $\varphi_{q-\varrho+1} \cdots \varphi_{s-\varrho}$ auflösen lassen, so können wir schliessen, dass gerade die $s-n+q-\varrho$ Functionen: $u_1(x) \cdots u_{s-n}(x)$, $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{q-\varrho}(x)$ von einander unabhängig sind. Hierbei ist die Zahl $q-\varrho$ oder kurz m sicher nicht grösser als n, da die Summe $s-n+q-\varrho$ natürlich die Zahl s der Veränderlichen x nicht übersteigen kann.

Nunmehr sind wir so weit, dass wir an Stelle von $x_1 \cdots x_s$ neue unabhängige Veränderliche $x_1' \cdots x_s'$ einführen können; wir wählen dieselben folgendermassen:

Wir setzen einfach:

$$x_{q+1}' = u_1(x_1 \cdots x_s), \cdots x_s' = u_{s-q}(x_1 \cdots x_s),$$

ferner:

$$x_{n+1}' = u_{s-q+1}(x_1 \cdots x_s), \cdots x_q' = u_{s-n}(x_1 \cdots x_s)$$

und:

$$x_1' = \varphi_1(x_1 \cdots x_s), \cdots x_m' = \varphi_m(x_1 \cdots x_s),$$

wo $m = q-\varrho$ nicht grösser ist als n; ausserdem setzen wir noch:

$$x_{m+1}' = \lambda_1(x_1 \cdots x_s), \cdots x_n' = \lambda_{n-m}(x_1 \cdots x_s),$$

wo $\lambda_1(x) \cdots \lambda_{n-m}(x)$ irgend welche von einander und von $u_1(x) \cdots$ $u_{s-n}(x)$, $\varphi_1(x) \cdots \varphi_m(x)$ unabhängige Functionen bezeichnen.

In ganz ähnlicher Weise führen wir an Stelle von $y_1 \cdots y_s$ neue unabhängige Veränderliche ein.

Wir bilden die $s-q$ Functionen:

$$\mathfrak{U}_1(\psi_1(y) \cdots \psi_{s-\varrho}(y)) = v_1(y), \cdots \mathfrak{U}_{s-q}(\psi_1(y) \cdots \psi_{s-\varrho}(y)) = v_{s-q}(y),$$

welche offenbar unabhängige Lösungen des n-gliedrigen vollständigen Systems: $Y_1 f = 0, \cdots Y_n f = 0$ sind; wir bestimmen ferner irgend $q-n$ von einander und von $v_1(y) \cdots v_{s-q}(y)$ unabhängige Lösungen: $v_{s-q+1}(y) \cdots v_{s-n}(y)$ desselben vollständigen Systems. Dann ist klar, dass die $s-n+q-\varrho$ Functionen:

$$v_1(y) \cdots v_{s-n}(y), \; \psi_1(y) \cdots \psi_{q-\varrho}(y)$$

von einander unabhängig sind.

Die neuen Veränderlichen $y_1' \cdots y_s'$ wählen wir nun gerade so, wie vorhin die x'.

Wir setzen einfach:

$$y'_{q+1} = v_1(y_1 \cdots y_s), \cdots y_s' = v_{s-q}(y_1 \cdots y_s),$$

ferner:

$$y'_{n+1} = v_{s-q+1}(y_1 \cdots y_s), \cdots y_q' = v_{s-n}(y_1 \cdots y_s)$$

und:

$$y_1' = \psi_1(y_1 \cdots y_s), \cdots y'_m = \psi_m(y_1 \cdots y_s);$$

ausserdem setzen wir noch:

$$y'_{m+1} = \varDelta_1(y_1 \cdots y_s), \cdots y'_n = \varDelta_{n-m}(y_1 \cdots y_s),$$

wo $\varDelta_1 \cdots \varDelta_{n-m}$ irgend welche von einander und von: $v_1(y) \cdots v_{s-n}(y)$, $\psi_1(y) \cdots \psi_m(y)$ unabhängige Functionen sind.

Führen wir jetzt die neuen Veränderlichen x' und y' in die infinitesimalen Transformationen $X_k f$, $Y_k f$ und in die Gleichungen (13) ein.

Da alle $X_k x'_{n+1} \cdots X_k x_s'$ identisch verschwinden und da alle $X_k \varphi_1 \cdots X_k \varphi_m$ nur von $\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}$, das heisst also von $x_1' \cdots x'_m$, $x'_{q+1} \cdots x'_s$ abhängen, so erhält $X_k f$ in den Veränderlichen $x_1' \cdots x_s'$ die Form:

$$X_k f = \sum_1^m {}_\mu \, \mathfrak{x}_{k\mu}(x_1' \cdots x'_m, \; x'_{q+1} \cdots x'_s) \frac{\partial f}{\partial x'_\mu} +$$

$$+ \sum_1^{n-m} {}_j \, \mathfrak{x}_{k,m+j}(x_1' \cdots x'_m \cdots x'_n \cdots x'_q \cdots x'_s) \frac{\partial f}{\partial x'_{m+j}} = \Xi_k f.$$

Ebenso wird:

$$Y_k f = \sum_1^m {}_\mu \, \mathfrak{x}_{k\mu}(y_1' \cdots y'_m, \; y'_{q+1} \cdots y'_s) \frac{\partial f}{\partial y'_\mu} +$$

$$+ \sum_1^{n-m} {}_j \, \mathfrak{y}_{k,m+j}(y_1' \cdots y'_m \cdots y'_n \cdots y'_q \cdots y'_s) \frac{\partial f}{\partial y'_{m+j}} = H_k f.$$

Die $\mathfrak{x}_{k\mu}(y_1' \cdots y'_m, y'_{q+1} \cdots y'_s)$ bedeuten hierbei dieselben Functionen ihrer Argumente, wie die $\mathfrak{x}_{k\mu}(x_1' \cdots x'_m, x'_{q+1} \cdots x'_s)$. Aus den Gleichungen (14) und (14') geht nämlich hervor, dass $Y_k y'_\mu$ dieselbe Function von $y_1' \cdots y'_m$, $y'_{q+1} \cdots y'_s$ wird, wie $X_k x'_\mu$ von $x_1' \cdots x'_m$, $x'_{q+1} \cdots x'_s$, unter μ eine beliebige der Zahlen: $1, 2 \cdots m$ verstanden.

Andererseits müssen wir feststellen, welche Form das Gleichungensystem (13) in den neuen Veränderlichen erhält.

Das Gleichungensystem (13) kann offenbar durch das folgende ersetzt werden:

$$\varphi_1 - \psi_1 = 0, \cdots \varphi_m - \psi_m = 0,$$
$$\mathfrak{U}_1(\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}) - \mathfrak{U}_1(\psi_1 \cdots \psi_{s-\varrho}) = 0, \cdots$$
$$\mathfrak{U}_{s-q}(\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}) - \mathfrak{U}_{s-q}(\psi_1 \cdots \psi_{s-\varrho}) = 0.$$

Führen wir nun in dieses System unsere neuen Veränderlichen ein, so erhalten wir offenbar das einfache Gleichungensystem:

$$(21) \qquad \begin{cases} x_1' - y_1' = 0, & \cdots x_m' - y_m' = 0 \\ x_{q+1}' - y_{q+1}' = 0, & \cdots x_s' - y_s' = 0; \end{cases}$$

auf diese Form lässt sich also das Gleichungensystem (13) oder, was dasselbe ist, das Gleichungensystem (4) nach Einführung der neuen Veränderlichen bringen.

Erinnern wir uns endlich, dass weder $X_1 f \cdots X_n f$ noch $Y_1 f \cdots Y_n f$ durch lineare Relationen verknüpft sind und dass vermöge (4) alle $(n+1)$-reihigen Determinanten der Matrix (11) verschwinden, so erkennen wir, dass auch weder $\Xi_1 f \cdots \Xi_n f$ noch $H_1 f \cdots H_n f$ durch lineare Relationen verknüpft sind und dass vermöge (21) alle $(n+1)$-reihigen nicht aber alle n-reihigen Determinanten derjenigen Matrix verschwinden, welche aus den Coefficienten der Differentialquotienten von f in den r infinitesimalen Transformationen $\Omega_k f = \Xi_k f + H_k f$ gebildet werden kann.

Durch die vorstehenden Entwickelungen ist das im Anfang des Paragraphen, S. 341, aufgestellte Problem auf das folgende einfachere zurückgeführt:

Gesucht wird in den $2s$ Veränderlichen $x_1' \cdots x_s'$, $y_1' \cdots y_s'$ ein Gleichungensystem, welches die r-gliedrige Gruppe

$$\Omega_k f = \Xi_k f + H_k f \quad {\scriptstyle (k=1\cdots r)}$$

gestattet und welches überdies aus s unabhängigen Gleichungen besteht, sowohl nach $x_1' \cdots x_s'$ als nach $y_1' \cdots y_s'$ auflösbar ist und endlich die $s - q + m$ Gleichungen (21) *umfasst.*

Um das neue Problem zu erledigen, erinnern wir an Kap. 14, S. 233 ff.; wir schliessen aus dem damals Gesagten, dass jedes Gleichungensystem, welches die Gruppe $\Xi_k f + H_k f = \Omega_k f$ gestattet und dabei die Gleichungen (21) umfasst, dadurch erhalten werden kann, dass zu den Gleichungen (21) ein Gleichungensystem in den $s + q - m$ Veränderlichen $x_1' \cdots x_m' \cdots x_n' \cdots x_q' \cdots x_s'$, $y_{m+1}' \cdots y_q'$ hinzugefügt wird, welches die r-gliedrige Gruppe:

$$\overline{\Omega}_k f = \sum_1^m {}^{\mu}\, \mathfrak{x}_{k\mu}\,(x_1' \cdots x_m',\ x_{q+1}' \cdots x_s')\,\frac{\partial f}{\partial x_\mu'} +$$

$$+ \sum_1^{n-m} {}^{j}\, \mathfrak{x}_{k,m+j}\,(x_1' \cdots x_m' \cdots x_n' \cdots x_q' \cdots x_s')\,\frac{\partial f}{\partial x_{m+j}'} +$$

$$+ \sum_1^{n-m} {}^{j}\, \mathfrak{y}_{k,m+j}\,(x_1' \cdots x_m',\ y_{m+1}' \cdots y_n' \cdots y_q',\ x_{q+1}' \cdots x_s')\,\frac{\partial f}{\partial y_{m+j}'}$$

gestattet.

Hier wird $\overline{\Omega}_k f$ dadurch erhalten, dass man in $\Omega_k f = \Xi_k f + H_k f$ alle Glieder mit $\frac{\partial f}{\partial y_1'} \cdots \frac{\partial f}{\partial y_m'}$ weglässt und in den übrigen Gliedern überall vermöge (21) die Substitution macht:

$$y_1' = x_1', \cdots y_m' = x_m',\ y_{q+1}' = x_{q+1}', \cdots y_s' = x_s'.$$

Diese Entstehung von $\overline{\Omega}_k f$ zeigt, dass in der aus $\overline{\Omega}_1 f \cdots \overline{\Omega}_r f$ gebildeten Matrix:

$$\text{(22)} \qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_{11}(x') & \cdot & \mathfrak{x}_{1n}(x') & \mathfrak{y}_{1,m+1}(x',y') & \cdot & \mathfrak{y}_{1n}(x',y') \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{x}_{r1}(x') & \cdot & \mathfrak{x}_{rn}(x') & \mathfrak{y}_{r,m+1}(x',y') & \cdot & \mathfrak{y}_{rn}(x',y') \end{vmatrix}$$

alle $(n+1)$-reihigen Determinanten identisch verschwinden, nicht aber alle n-reihigen. Nehmen wir noch hinzu, dass weder $\Xi_1 f \cdots \Xi_n f$ noch $H_1 f \cdots H_n f$ durch lineare Relationen verknüpft sind, so erkennen wir sofort, dass insbesondere die beiden n-reihigen Determinanten:

$$\text{(23)} \qquad \Sigma \pm \mathfrak{x}_{11}(x') \cdots \mathfrak{x}_{nn}(x')$$

und:

$$\text{(24)} \qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_{11}(x') & \cdot & \mathfrak{x}_{1m}(x') & \mathfrak{y}_{1,m+1}(x',y') & \cdot & \mathfrak{y}_{1n}(x',y') \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{x}_{n1}(x') & \cdot & \mathfrak{x}_{nm}(x') & \mathfrak{y}_{n,m+1}(x',y') & \cdot & \mathfrak{y}_{nn}(x',y') \end{vmatrix}$$

nicht identisch null sind.

Nun kommt es uns aber nicht darauf an, *alle* Gleichungensysteme zu finden, welche (21) umfassen und die Gruppe $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$ gestatten, sondern nur auf die Bestimmung solcher Gleichungensysteme dieser Art, welche gerade aus s unabhängigen Gleichungen bestehen und sowohl nach $x_1' \cdots x_s'$ als nach $y_1' \cdots y_s'$ auflösbar sind. Folglich haben wir nicht *alle* Gleichungensysteme in $x_1' \cdots x_s'$, $y_{m+1}' \cdots y_q'$ aufzustellen, welche $\overline{\Omega}_1 f \cdots \overline{\Omega}_r f$ gestatten, sondern nur solche, welche gerade aus $s - (m + s - q) = q - m$ unabhängigen Gleichungen bestehen und ausserdem sowohl nach $x_{m+1}' \cdot \cdot x_n' \cdots x_q'$ als nach $y_{m+1}' \cdots y_n' \cdots y_q'$ auflösbar sind.

Genügt ein Gleichungsystem in $x_1' \cdots x_s'$, $y_{m+1}' \cdots y_q'$ den eben gestellten Forderungen, so lässt es sich auf die Form:

$$(25) \qquad y_{m+j}' = \Phi_{m+j}(x_1' \cdots x_m' \cdots x_n' \cdots x_q' \cdots x_s') \qquad (j=1 \cdots q-m)$$

bringen, wo die Functionen $\Phi_{m+1} \cdots \Phi_q$ ihrerseits in Bezug auf $x_{m+1}' \cdots x_q'$ von einander unabhängig sind. Nun ist klar, dass ein Gleichungensystem von der Form (25) nicht alle n-reihigen Determinanten der Matrix (22) zum Verschwinden bringen kann, denn jedenfalls kann die Determinante (23) vermöge (25) nicht gleich Null werden. Da andererseits alle $(n+1)$-reihigen Determinanten von (22) identisch verschwinden, so ergiebt sich nach Kap. 14, S. 230, dass jedes Gleichungensystem von der Form (25), welches die Gruppe $\overline{\Omega}_1 f \cdots \overline{\Omega}_r f$ gestattet, durch Relationen zwischen den Lösungen der Gleichungen: $\overline{\Omega}_1 f = 0, \cdots \overline{\Omega}_r f = 0$ dargestellt wird, oder, was dasselbe ist, durch Relationen zwischen den Lösungen des n-gliedrigen vollständigen Systems: $\overline{\Omega}_1 f = 0, \cdots \overline{\Omega}_n f = 0$.

Das n-gliedrige vollständige System $\overline{\Omega}_1 f = 0, \cdots \overline{\Omega}_n f = 0$ enthält $s + q - m$ unabhängige Veränderliche und besitzt daher $s - n + q - m$ unabhängige Lösungen; $s - n + q - n$ unabhängige Lösungen lassen sich sofort angeben, nämlich: $x_{n+1}' \cdots x_q' \cdots x_s'$, $y_{n+1}' \cdots y_q'$, die $n - m$ fehlenden müssen durch Integration bestimmt werden und können offenbar auf die Form gebracht werden:

$\omega_1(x_1' \cdots x_m' \cdots x_s', y_{m+1}' \cdots y_q') \cdots \omega_{n-m}(x_1' \cdots x_m' \cdots x_s', y_{m+1}' \cdots y_q')$.

Da die beiden Determinanten (23) und (24) nicht identisch verschwinden, so sind die Gleichungen unseres vollständigen Systems sowohl nach $\frac{\partial f}{\partial x_1'} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_m'} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n'}$ als nach $\frac{\partial f}{\partial x_1'} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_m'}, \frac{\partial f}{\partial y_{m+1}'} \cdots \frac{\partial f}{\partial y_n'}$ auflösbar und es sind daher seine $s - n + q - m$ unabhängigen Lösungen $x_{n+1}' \cdots x_s'$, $y_{n+1}' \cdots y_q'$, $\omega_1 \cdots \omega_{n-m}$ sowohl in Bezug auf $x_{n+1}' \cdots x_q' \cdots x_s'$, $y_{m+1}' \cdots y_q'$ als in Bezug auf $x_{m+1}' \cdots x_n' \cdots x_q' \cdots x_s'$, $y_{n+1}' \cdots y_q'$ von einander unabhängig (vgl. Theorem 12, S. 91). Folglich sind die Functionen $\omega_1 \cdots \omega_{n-m}$ sowohl in Bezug auf $y_{m+1}' \cdots y_n'$ als in Bezug auf $x_{m+1}' \cdots x_n'$ von einander unabhängig.

Jedes Gleichungensystem (25), welches den gestellten Forderungen genügt, wird nun durch Relationen zwischen den Lösungen $x_{n+1}' \cdots x_s'$, $y_{n+1}' \cdots y_q'$, $\omega_1 \cdots \omega_{n-m}$ dargestellt und zwar durch $q - m$ sowohl nach $y_{m+1}' \cdots y_q'$ als nach $x_{m+1}' \cdots x_q'$ auflösbare Relationen. Augenscheinlich müssen diese Relationen sowohl nach $\omega_1 \cdots \omega_{n-m}$, $x_{n+1}' \cdots x_q'$ als nach $\omega_1 \cdots \omega_{n-m}$, $y_{n+1}' \cdots y_q'$ auflösbar sein, sie müssen also die Form haben:

$$(26)\quad\begin{cases}\omega_\mu(x_1'\cdots x_m',\ x_{m+1}'\cdots x_s',\ y_{m+1}'\cdots y_q') = \chi_\mu(x_{n+1}'\cdots x_q'\cdots x_s') \\ \qquad\qquad (\mu=1\cdots n-m) \\ y_{n+1}' = \Pi_1(x_{n+1}'\cdots x_q'\cdots x_s'),\ \cdots y_q' = \Pi_{q-n}(x_{n+1}'\cdots x_q'\cdots x_s'),\end{cases}$$

wo $\Pi_1\cdots\Pi_{q-n}$ in Bezug auf $x_{n+1}'\cdots x_q'$ von einander unabhängig sind.

Umgekehrt ist jedes Gleichungensystem von der Form (26), in welchem $\Pi_1\cdots\Pi_{q-n}$ in Bezug auf $x_{n+1}'\cdots x_q'$ von einander unabhängig sind, sowohl nach $y_{m+1}'\cdots y_q'$ als nach $x_{m+1}'\cdots x_q'$ auflösbar und da es ausserdem die Gruppe $\overline{\Omega}_1 f\cdots\overline{\Omega}_r f$ gestattet, so besitzt es alle Eigenschaften, welche das gesuchte Gleichungensystem in den Veränderlichen $x_1'\cdots x_s',\ y_{m+1}'\cdots y_q'$ haben sollte.

Wir schliessen hieraus, dass die Gleichungen (26) das allgemeinste Gleichungensystem darstellen, welches die Gruppe $\overline{\Omega}_1 f\cdots\overline{\Omega}_r f$ gestattet, aus gerade $q-m$ unabhängigen Gleichungen besteht und sowohl nach $y_{m+1}'\cdots y_q'$ als nach $x_{m+1}'\cdots x_q'$ auflösbar ist; dabei sind $\chi_1\cdots\chi_{n-m}$ vollkommen willkürliche Functionen ihrer Argumente und $\Pi_1\cdots\Pi_{q-n}$ ebenfalls, die letzteren allerdings mit der Einschränkung, dass sie in Bezug auf $x_{n+1}'\cdots x_q'$ von einander unabhängig sein müssen.

Fügen wir daher das Gleichungensystem (26) zu den Gleichungen (21) hinzu, so erhalten wir das allgemeinste Gleichungensystem in $x_1'\cdots x_s',\ y_1'\cdots y_s'$, welches die Gruppe $\Omega_k f = \Xi_k f + H_k f$ gestattet, die Gleichungen (21) umfasst, aus s unabhängigen Gleichungen besteht und sowohl nach $x_1'\cdots x_s'$ als nach $y_1'\cdots y_s'$ auflösbar ist. Drücken wir endlich in diesem Gleichungensysteme die Veränderlichen x' und y' durch die ursprünglichen Veränderlichen x und y aus, so erhalten wir das allgemeinste Gleichungensystem, welches die Gruppe $\Omega_k f = X_k f + Y_k f$ gestattet, die Gleichungen (4) umfasst, aus s unabhängigen Gleichungen besteht und sowohl nach $x_1\cdots x_s$ als nach $y_1\cdots y_s$ auflösbar ist. Mit andern Worten: wir erhalten die allgemeinste Transformation $y_i = \Phi_i(x_1\cdots x_s)$, welche $X_1 f\cdots X_r f$ bezüglich in $Y_1 f\cdots Y_r f$ überführt.

Damit ist das auf S. 334 aufgestellte Problem erledigt, es ist sogar mehr geleistet, als eigentlich dort gefordert wurde, denn nicht blos eine Transformation von der verlangten Beschaffenheit kennen wir, wir kennen diese Transformationen sämmtlich. Zu gleicher Zeit ist die auf S. 333 aufgestellte Behauptung bewiesen, es ist bewiesen, dass die beiden Gruppen $X_1 f\cdots X_r f$ und $Z_1 f\cdots Z_r f$ unter den dort gemachten Voraussetzungen wirklich mit einander ähnlich sind.

Endlich können wir auf Grund der vorstehenden Entwickelungen auch noch die allgemeinste Transformation angeben, welche die Gruppe $X_1 f\cdots X_r f$ in die Gruppe $Z_1 f\cdots Z_r f$ überführt; erinnern wir uns nämlich der Betrachtungen auf S. 331 ff. und verbinden wir dieselben mit den soeben gewonnenen Ergebnissen, so sehen wir unmittelbar, dass die betreffende Transformation folgendermassen gefunden werden kann: Man wähle in den auf S. 334 definirten infinitesimalen Transformationen:

$$Y_k f = \sum_1^r {}_j \, \bar{g}_{kj} Z_j f \qquad (k=1\cdots r)$$

die Constanten $\bar{g}_{kj}$ in möglichst allgemeiner Weise und bestimme sodann nach der von uns gegebenen Methode die allgemeinste Transformation, welche $X_1 f \cdots X_r f$ in bezüglich $Y_1 f \cdots Y_r f$ überführt; diese ist dann zugleich die allgemeinste Transformation, welche überhaupt die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ in die Gruppe $Z_1 f \cdots Z_r f$ überführt.

Die so gefundene Transformation enthält, wie die Gleichungen (26) zeigen, $n - m + q - n = q - m$ willkürliche Functionen von $s - n$ Argumenten und ausserdem gewisse willkürliche Elemente, welche von den $\bar{g}_{kj}$ herkommen; es sind das erstens gewisse willkürliche Parameter und zweitens gewisse Willkürlichkeiten, die davon herrühren, dass die $\bar{g}_{kj}$ durch algebraische Gleichungen bestimmt sind. Hieraus geht hervor, dass die bewusste Transformation nicht in allen Fällen durch ein einziges Gleichungensystem dargestellt werden kann. —

Fassen wir jetzt unsere Ergebnisse zusammen.

Zunächst haben wir das

Theorem 65. *Zwei r-gliedrige Gruppen:*

$$X_k f = \sum_1^s {}_i \, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k=1\cdots r)$$

und:

$$Z_k f = \sum_1^s {}_i \, \zeta_{ki}(y_1 \cdots y_s) \frac{\partial f}{\partial y_i} \qquad (k=1\cdots r)$$

in gleichvielen Veränderlichen sind dann und nur dann mit einander ähnlich, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Erstens müssen die beiden Gruppen gleichzusammengesetzt sein; bestehen also die Relationen:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_\sigma \, c_{ik\sigma} X_\sigma f,$$

so muss es möglich sein, r^2 solche Constanten g_{kj} anzugeben, dass die r infinitesimalen Transformationen:

$$\mathfrak{Y}_k f = \sum_1^r {}_j \, g_{kj} Z_j f \qquad (k=1\cdots r)$$

von einander unabhängig sind und die Relationen:

$$(\mathfrak{Y}_i \mathfrak{Y}_k) = \sum_1^r {}_\sigma\, c_{ik\sigma} \mathfrak{Y}_\sigma f$$

identisch befriedigen.

Zweitens: sind $X_1 f \cdots X_r f$ *so beschaffen, dass etwa* $X_1 f \cdots X_n f$ *durch keine lineare Relation von der Form:*

$$\chi_1(x_1 \cdots x_s) \cdot X_1 f + \cdots + \chi_n(x_1 \cdots x_s) \cdot X_n f = 0$$

verknüpft sind, während dagegen $X_{n+1} f \cdots X_r f$ *sich linear durch* $X_1 f \cdots X_n f$ *ausdrücken:*

$$X_{n+k} f \equiv \sum_1^n {}_\nu\, \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) \cdot X_\nu f \quad (k=1 \cdots r-n),$$

so muss es unter den Systemen von g_{kj}, *welche den obigen Forderungen genügen, wenigstens eines geben, etwa das System:* $g_{kj} = \bar{g}_{kj}$, *welches so beschaffen ist, dass von den* r *infinitesimalen Transformationen:*

$$Y_k f = \sum_1^r {}_j\, \bar{g}_{kj} Z_j f \quad (k=1 \cdots r)$$

die ersten n *durch keine lineare Relation von der Form:*

$$\psi_1(y_1 \cdots y_s) \cdot Y_1 f + \cdots + \psi_n(y_1 \cdots y_s) \cdot Y_n f = 0$$

verknüpft sind, während $Y_{n+1} f \cdots Y_r f$ *sich linear durch* $Y_1 f \cdots Y_n f$ *ausdrücken:*

$$Y_{n+k} f \equiv \sum_1^n {}_\nu\, \psi_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) \cdot Y_\nu f \quad (k=1 \cdots r-n)$$

und dass ausserdem die $n(r-n)$ *Gleichungen:*

$$\varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) - \psi_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) = 0 \quad (k=1 \cdots r-n,\ \nu=1 \cdots n)$$

weder einander widersprechen noch Relationen zwischen den x *allein oder den* y *allein ergeben.**)

Weiter haben wir noch den

Satz 2. *Sind die beiden* r*-gliedrigen Gruppen* $X_1 f \cdots X_r f$ *und* $Z_1 f \cdots Z_r f$ *mit einander ähnlich und sind die* r *infinitesimalen Transformationen:*

$$Y_k f = \sum_1^r {}_j\, \bar{g}_{kj} Z_j f \quad (k=1 \cdots r)$$

---

*) Lie, Archiv for Math. og Naturv. Bd. 3 und 4, Christiania 1878 und 1879; Math. Annalen Bd. XXV, S. 96—107.

so gewählt, wie das Theorem 65 angiebt, so existirt stets mindestens eine Transformation:

$$y_1 = \Phi_1(x_1 \cdots x_s), \cdots y_s = \Phi_s(x_1 \cdots x_s),$$

welche $X_1 f \cdots X_r f$ bezüglich in $Y_1 f \cdots Y_r f$ überführt. Man kann jede Transformation von dieser Beschaffenheit aufstellen, sobald man gewisse vollständige Systeme integrirt hat. Die allgemeinste Transformation, welche überhaupt die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ in die Gruppe $Z_1 f \cdots Z_r f$ überführt, erhält man, wenn man die Constanten $\bar{g}_{kj}$ in den $Y_k f$ in möglichst allgemeiner Weise wählt und sodann die allgemeinste Transformation aufsucht, welche $X_1 f \cdots X_r f$ bezüglich in $Y_1 f \cdots Y_r f$ überführt.

Die vollständigen Systeme, von welchen in diesem Satze die Rede ist, treten in einem Falle gar nicht auf, in dem Falle nämlich, wo die früher definirte Zahl ϱ gleich Null ist, wo sich also unter den $n(r-n)$ Functionen $\varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s)$ gerade s von einander unabhängige befinden. Wir haben ja schon auf S. 344 bemerkt, dass in diesem Falle die Gleichungen:

$$\varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) - \psi_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) = 0 \quad (k = 1 \cdots r-n,\ \nu = 1 \cdots n)$$

sowohl nach $y_1 \cdots y_s$ als nach $x_1 \cdots x_s$ auflösbar sind und die allgemeinste Transformation darstellen, welche $X_1 f \cdots X_r f$ in bezüglich $Y_1 f \cdots Y_r f$ überführt.

Andererseits giebt es Fälle, in denen die Integration der bewussten vollständigen Systeme ausführbar ist, zum Beispiel ist sie es immer dann, wenn die endlichen Gleichungen der beiden Gruppen $X_1 f \cdots X_r f$ und $Z_1 f \cdots Z_r f$ bekannt sind; doch können wir uns hier auf Fragen dieser Art nicht einlassen.

§ 92.

Die beiden r-gliedrigen Gruppen $X_1 f \cdots X_r f$ und $Z_1 f \cdots Z_r f$ seien mit einander ähnlich, es gebe also Transformationen, die $X_1 f \cdots X_r f$ in infinitesimale Transformationen der andern Gruppe verwandeln.

Wählen wir nun in der Gruppe $Z_1 f \cdots Z_r f$ r unabhängige infinitesimale Transformationen:

$$Y_k f = \sum_1^r {}_j\, g_{kj} Z_j f \quad (k = 1 \cdots r)$$

aus, so giebt es nach dem Früheren dann und nur dann eine Transformation, welche $X_1 f \cdots X_r f$ bezüglich in $Y_1 f \cdots Y_r f$ überführt, wenn $Y_1 f \cdots Y_r f$ die in Theorem 65 angegebenen Eigenschaften besitzen.

Nehmen wir an, dass $Y_1 f \cdots Y_r f$ dieser Forderung genügen und dass $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$ eine Transformation ist, welche $X_1 f \cdots X_r f$

bezüglich in $Y_1f \cdots Y_rf$ überführt. Dann erhält bei der Transformation $y_i = \Phi_i(x)$ die allgemeine infinitesimale Transformation:

$$e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f \quad \text{die Form:} \quad e_1 Y_1 f + \cdots + e_r Y_r f,$$

also ordnet unsere Transformation jeder infinitesimalen Transformation der Gruppe $X_1f \cdots X_rf$ eine ganz bestimmte infinitesimale Transformation der Gruppe $Z_1f \cdots Z_rf$ zu und umgekehrt. Die eindeutig umkehrbare Beziehung, welche auf diese Weise zwischen den infinitesimalen Transformationen beider Gruppen hergestellt wird, ist nach S. 330 eine holoedrisch isomorphe.

Es sei nun $x_1^0 \cdots x_s^0$ ein Punkt von allgemeiner Lage, d. h. ein Punkt, für welchen die Transformationen $X_1f \cdots X_nf$ n unabhängige Richtungen liefern, so dass sich die Functionen $\varphi_{k\nu}(x)$ in den Identitäten:

$$(3) \qquad X_{n+k}f \equiv \sum_1^n {}_\nu\, \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) \cdot X_\nu f \quad (k=1 \cdots r-n)$$

regulär verhalten. Nach Kap. 11 S. 203 haben dann diejenigen infinitesimalen Transformationen $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$, welche den Punkt $x_1^0 \cdots x_s^0$ invariant lassen, die Form:

$$(27) \qquad \sum_1^{r-n} {}_k\, \varepsilon_k \left\{ X_{q+k}f - \sum_1^n {}_\nu\, \varphi_{k\nu}(x_1^0 \cdots x_s^0) \cdot X_\nu f \right\},$$

unter $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{r-n}$ willkürliche Parameter verstanden, und alle diese infinitesimalen Transformationen erzeugen eine $(r-n)$-gliedrige Untergruppe der Gruppe $X_1f \cdots X_rf$.

Führen wir in die Identitäten (3) vermöge der Transformation: $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$ die neuen Veränderlichen $y_1 \cdots y_s$ ein, so erhalten wir zwischen $Y_1f \cdots Y_rf$ die Identitäten:

$$(3') \qquad Y_{n+k}f \equiv \sum_1^n {}_\nu\, \psi_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) \cdot Y_\nu f \quad (k=1 \cdots r-n).$$

Ist daher $y_i^0 = \Phi_i(x_1^0 \cdots x_s^0)$, so geht die infinitesimale Transformation (27) bei Einführung der Veränderlichen y über in:

$$(27') \qquad \sum_1^{r-n} {}_k\, \varepsilon_k \left\{ Y_{q+k}f - \sum_1^n {}_\nu\, \psi_{k\nu}(y_1^0 \cdots y_s^0) \cdot Y_\nu f \right\},$$

das heisst in die allgemeinste infinitesimale Transformation $e_1 Y_1 f + \cdots + e_r Y_r f$, welche den Punkt von allgemeiner Lage: $y_1^0 \cdots y_s^0$ stehen lässt. Dabei erzeugen natürlich alle infinitesimalen Transformationen von der Form (27′) eine $(r-n)$-gliedrige Untergruppe der Gruppe $Z_1f \cdots Z_rf$.

Hierin liegt eine wichtige Eigenschaft der holoedrisch isomorphen

Beziehung, welche durch die Transformation: $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$ zwischen beiden Gruppen hergestellt wird. Diese holoedrisch isomorphe Beziehung ordnet nämlich der allgemeinsten Untergruppe von $X_1 f \cdots X_r f$, welche einen beliebig gewählten Punkt: $x_1^0 \cdots x_s^0$ von allgemeiner Lage stehen lässt, immer die allgemeinste Untergruppe von $Y_1 f \cdots Y_r f$ zu, welche einen Punkt: $y_1^0 \cdots y_s^0$ von allgemeiner Lage stehen lässt. Genau dieselbe Zuordnung findet in der umgekehrten Richtung statt; mit andern Worten: wenn der Punkt: $x_1^0 \cdots x_s^0$ alle möglichen Lagen durchläuft, so durchläuft auch der Punkt: $y_1^0 \cdots y_s^0$ alle möglichen Lagen.

Sollen nun umgekehrt zwei r-gliedrige Gruppen in gleichvielen Veränderlichen mit einander ähnlich sein, so muss sich offenbar zwischen ihnen eine holoedrisch isomorphe Beziehung von der eben geschilderten Beschaffenheit herstellen lassen. Wir behaupten, dass diese nothwendige Bedingung zugleich auch hinreichend ist; wir werden zeigen, dass die beiden Gruppen wirklich ähnlich sind, wenn sich eine solche holoedrisch isomorphe Beziehung zwischen ihnen herstellen lässt.

In der That, es sei $Z_1 f \cdots Z_r f$ irgend eine r-gliedrige Gruppe, welche sich auf die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ in der besprochenen Weise holoedrisch isomorph beziehen lässt; $e_1 Y_1 f + \cdots + e_r Y_r f$ sei diejenige infinitesimale Transformation der Gruppe $Z_1 f \cdots Z_r f$, welche durch die betreffende holoedrisch isomorphe Beziehung der allgemeinen infinitesimalen Transformation $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ zugeordnet wird.

Sind $X_1 f \cdots X_n f$ durch keine lineare Relation verknüpft, während $X_{n+1} f \cdots X_r f$ sich in der bekannten Weise durch $X_1 f \cdots X_n f$ ausdrücken lassen, so lautet die allgemeinste in der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ enthaltene infinitesimale Transformation, welche den Punkt: $x_1^0 \cdots x_s^0$ von allgemeiner Lage invariant lässt, folgendermassen:

$$\sum_1^{r-n} {}_k\, \varepsilon_k \left\{ X_{n+k} f - \sum_1^{n} {}_\nu\, \varphi_{k\nu}(x_1^0 \cdots x_s^0) \cdot X_\nu f \right\}. \tag{27}$$

Ihr entspricht unter der gemachten Voraussetzung in der Gruppe $Z_1 f \cdots Z_r f$ die infinitesimale Transformation:

$$\sum_1^{r-n} {}_k\, \varepsilon_k \left\{ Y_{n+k} f - \sum_1^{n} {}_\nu\, \varphi_{k\nu}(x_1^0 \cdots x_s^0) \cdot Y_\nu f \right\}, \tag{28}$$

die nun ihrerseits die allgemeinste infinitesimale Transformation der Gruppe $Z_1 f \cdots Z_r f$ ist, welche einen gewissen Punkt: $y_1^0 \cdots y_s^0$ von allgemeiner Lage in Ruhe lässt. Durchläuft hierbei der Punkt $x_1^0 \cdots x_s^0$ alle möglichen Lagen, so thut der Punkt $y_1^0 \cdots y_s^0$ dasselbe.

Da (28) die allgemeinste infinitesimale Transformation $e_1 Y_1 f + \cdots + e_r Y_r f$ ist, welche den Punkt: $y_1^0 \cdots y_s^0$ von allgemeiner Lage invariant lässt, so können $Y_1 f \cdots Y_n f$ durch keine lineare Relation verknüpft sein, dagegen müssen $Y_{n+1} f \cdots Y_r f$ sich in der bekannten Weise durch $Y_1 f \cdots Y_n f$ ausdrücken lassen. Wir schliessen hieraus, dass die allgemeinste infinitesimale Transformation $e_1 Y_1 f + \cdots + e_r Y_r f$, welche den Punkt: $y_1^0 \cdots y_s^0$ stehen lässt, auch durch den folgenden Ausdruck dargestellt wird:

$$(28') \qquad \sum_1^{r-n} {}_k \, \varepsilon_k' \left\{ Y_{n+k} f - \sum_1^n {}_\nu \, \psi_{k\nu}(y_1^0 \cdots y_s^0) \cdot Y_\nu f \right\}.$$

Offenbar ist jede in dem Ausdruck (28) enthaltene infinitesimale Transformation mit einer der infinitesimalen Transformationen (28') identisch, es muss also bei beliebig gewählten $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{r-n}$ stets möglich sein, $\varepsilon_1' \cdots \varepsilon_{r-n}'$ so zu bestimmen, dass die Gleichung:

$$\sum_1^{r-n} {}_k \, (\varepsilon_k - \varepsilon_k') \, Y_{n+k} f - \sum_1^n {}_\nu \left\{ \sum_1^{r-n} {}_k \, (\varepsilon_k \varphi_{k\nu}(x^0) - \varepsilon_k' \psi_{k\nu}(y^0)) \right\} Y_\nu f = 0$$

identisch befriedigt wird.

Da $Y_1 f \cdots Y_r f$ unabhängige infinitesimale Transformationen sind, so zerfällt die eben geschriebene Gleichung in die folgenden:

$$(29) \qquad \varepsilon_k - \varepsilon_k' = 0, \quad \sum_1^{r-n} {}_j \, (\varepsilon_j \varphi_{j\nu}(x^0) - \varepsilon_j' \psi_{j\nu}(y^0)) = 0$$

$$(k = 1 \cdots r-n, \; \nu = 1 \cdots n).$$

Hieraus ergiebt sich sofort:

$$\varepsilon_1' = \varepsilon_1, \quad \cdots \varepsilon_{r-n}' = \varepsilon_{r-n},$$

ausserdem aber erhalten wir wegen der Willkürlichkeit der ε noch die Gleichungen:

$$\varphi_{k\nu}(x_1^0 \cdots x_s^0) - \psi_{k\nu}(y_1^0 \cdots y_s^0) = 0 \quad (k = 1 \cdots r-n; \; \nu = 1 \cdots n),$$

die somit unter der gemachten Voraussetzung für die beiden Punkte $x_1^0 \cdots x_s^0$ und $y_1^0 \cdots y_s^0$ bestehen müssen. Erinnern wir uns jetzt noch, dass der Punkt $y_1^0 \cdots y_s^0$ alle möglichen Lagen durchläuft, sobald der Punkt $x_1^0 \cdots x_s^0$ dies thut, so erkennen wir sofort, dass unter der gemachten Voraussetzung die $n(r-n)$ Gleichungen:

$$(4) \qquad \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) - \psi_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) = 0 \quad (k = 1 \cdots r-n; \; \nu = 1 \cdots n)$$

mit einander verträglich sind und weder zwischen den x allein noch zwischen den y allein Relationen ergeben.

Nach Theorem 65, S. 353 ist hiermit bewiesen, dass die beiden

Gruppen $X_1 f \cdots X_r f$ und $Z_1 f \cdots Z_r f$ mit einander ähnlich sind und das wollten wir eben beweisen.

Wir haben somit den

Satz 3. *Zwei r-gliedrige Gruppen G und Γ in gleichvielen Veränderlichen sind dann und nur dann mit einander ähnlich, wenn es möglich ist, sie derart holoedrisch isomorph auf einander zu beziehen, dass der allgemeinsten Untergruppe von G, welche einen bestimmten Punkt von allgemeiner Lage invariant lässt, stets, wie auch der Punkt gewählt sein mag, die allgemeinste Untergruppe von Γ entspricht, welche einen gewissen Punkt von allgemeiner Lage invariant lässt, und dass dasselbe Entsprechen auch in umgekehrter Richtung stattfindet.*

Zugleich ist aber auch bewiesen, dass unter der eben gemachten Voraussetzung eine Transformation: $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$ existirt, welche $X_1 f \cdots X_r f$ bezüglich in $Y_1 f \cdots Y_r f$ überführt. Wir können daher auch den folgenden etwas specielleren Satz aussprechen:

Satz 4. *Erzeugen die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:*

$$X_k f = \sum_1^s {}_i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k=1 \cdots r)$$

eine r-gliedrige Gruppe G und die r unabhängigen:

$$Y_k f = \sum_1^s {}_i\, \eta_{ki}(y_1 \cdots y_s) \frac{\partial f}{\partial y_i}$$

eine r-gliedrige Gruppe Γ, so giebt es dann und nur dann eine Transformation: $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$, welche $X_1 f \cdots X_r f$ bezüglich in $Y_1 f \cdots Y_r f$ überführt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Erstens, enthält G gerade $r - n$ unabhängige infinitesimale Transformationen, welche einen beliebig gewählten Punkt von allgemeiner Lage invariant lassen, so muss auch Γ gerade $r - n$ unabhängige infinitesimale Transformationen von dieser Beschaffenheit enthalten.

Zweitens, ordnet man jeder infinitesimalen Transformation $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ von G die infinitesimale Transformation $e_1 Y_1 f + \cdots + e_r Y_r f$ von Γ zu, so müssen die beiden Gruppen in der im vorigen Satze angegebenen Weise holoedrisch isomorph auf einander bezogen sein.

Da die allgemeinste Untergruppe von G, welche einen bestimmten Punkt von allgemeiner Lage invariant lässt, durch diesen Punkt vollständig definirt ist, da ferner die mehrfach erwähnte holoedrisch isomorphe Beziehung zwischen G und Γ jeder derartigen Untergruppe von G eine ebenso beschaffene Untergruppe von Γ zuordnet, so stellt diese Beziehung zwischen G und Γ auch ein Entsprechen zwischen den Punkten $x_1 \cdots x_s$ und den Punkten $y_1 \cdots y_s$ her; aber dieses

Entsprechen ist im Allgemeinen unendlich vieldeutig, denn jedem Punkte $x_1 \cdots x_s$ entsprechen offenbar alle Punkte $y_1 \cdots y_s$, welche den Gleichungen (4) genügen und umgekehrt. Dies stimmt damit überein, dass es im Allgemeinen unendlich viele Transformationen giebt, welche $X_1 f \cdots X_r f$ bezüglich in $Y_1 f \cdots Y_r f$ überführen.

Für *transitive* Gruppen gestaltet sich das im Satz 3 ausgesprochene Kriterium der Aehnlichkeit besonders einfach. Wir werden später (Kapitel 21) sehen, dass zwei r-gliedrige transitive Gruppen G und Γ in gleichvielen, etwa s Veränderlichen schon dann mit einander ähnlich sind, wenn es möglich ist, sie derart holoedrisch isomorph auf einander zu beziehen, dass einer einzigen $(r - s)$-gliedrigen Untergruppe von G, welche einen Punkt von allgemeiner Lage stehen lässt, eine ebenso beschaffene $(r - s)$-gliedrige Untergruppe von Γ entspricht.

Ist eine r-gliedrige Gruppe

$$X_k f = \sum_1^s {}_i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

von der Zusammensetzung:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_\sigma\, c_{ik\sigma} X_\sigma f$$

vorgelegt, so kann man nach allen Transformationen:

$$x_i' = \Phi_i(x_1 \cdots x_s) \qquad (i = 1 \cdots s)$$

fragen, welche dieselbe invariant lassen, also nach allen Transformationen, vermöge deren die Gruppe mit sich selbst ähnlich ist.

Durch Entwickelungen des vorigen Paragraphen sind wir in den Stand gesetzt, die betreffenden Transformationen alle zu bestimmen.

Zunächst beziehen wir die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ in allgemeinster Weise holoedrisch isomorph auf sich selbst, wir wählen also in allgemeinster Weise r unabhängige infinitesimale Transformationen

$$\Xi_k f = \sum_1^r {}_j\, g_{kj} X_j f \qquad (k = 1 \cdots r)$$

aus, welche paarweise in den Beziehungen

$$(\Xi_i \Xi_k) = \sum_1^r {}_\sigma\, c_{ik\sigma} \Xi_\sigma f$$

stehen. Sodann specialisiren wir die in den g_{kj} enthaltenen willkürlichen Elemente derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind: wenn zwischen $X_1 f \cdots X_n f$ keine lineare Relation besteht, während $X_{n+1} f \cdots X_r f$ sich linear durch $X_1 f \cdots X_n f$ ausdrücken:

$$X_{n+k} f = \sum_1^n {}^\nu \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) \cdot X_\nu f \quad (k=1 \cdots r-n),$$

so sollen erstens auch $\Xi_1 f \cdots \Xi_n f$ durch keine lineare Relation verknüpft sein, $\Xi_{n+1} f \cdots \Xi_r f$ dagegen sich linear durch $\Xi_1 f \cdots \Xi_n f$ ausdrücken:

$$\Xi_{n+k} f = \sum_1^n {}^\nu \psi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) \cdot \Xi_\nu f \quad (k=1 \cdots r-n)$$

und es sollen zweitens die $n(r-n)$ Gleichungen:

$$\varphi_{k\nu}(x_1' \cdots x_s') = \psi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) \quad (k=1 \cdots r-n,\ \nu=1 \cdots n)$$

mit einander verträglich sein und weder zwischen den x allein noch zwischen den x' allein Relationen ergeben.

Ist alles das ausgeführt, so bestimmen wir nach Anleitung von § 91 die allgemeinste Transformation $x_i' = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$, welche $\Xi_1 f \cdots \Xi_r f$ bezüglich in $X_1' f \cdots X_r' f$ überführt:

$$X_k' f = \sum_1^s {}^i \xi_{ki}(x_1' \cdots x_s') \frac{\partial f}{\partial x_i'}.$$

Die betreffende Transformation ist dann die allgemeinste, bei welcher die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ in sich übergeht.

Es ist klar, dass der Inbegriff aller Transformationen, welche die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ invariant lassen, selbst eine Gruppe bildet, nämlich *die grösste Gruppe, in welcher $X_1 f \cdots X_r f$ als invariante Untergruppe enthalten ist.* Diese Gruppe kann endlich sein oder unendlich, continuirlich oder nicht continuirlich, unter allen Umständen aber ordnen sich ihre Transformationen paarweise als inverse zusammen, denn wenn eine Transformation $x_i' = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$ die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ invariant lässt, so thut es auch die zugehörige inverse Transformation.

Besteht die eben definirte Gruppe zufällig aus einer endlichen Anzahl verschiedener Schaaren von Transformationen und enthält dabei jede dieser Schaaren blos eine endliche Anzahl willkürlicher Parameter, so giebt es nach Kap. 18, S. 315 ff. in der betreffenden Gruppe eine Schaar von Transformationen, die eine endliche continuirliche Gruppe bildet; diese Schaar ist dann die grösste continuirliche Gruppe, in welcher $X_1 f \cdots X_r f$ als invariante Untergruppe enthalten ist.

Wir haben bisher nur bei solchen Gruppen, welche gleichviele Veränderliche enthalten, von Aehnlichkeit gesprochen. Dabei war es aber nicht ausgeschlossen, dass gewisse von den Veränderlichen bei den betreffenden Gruppen gar nicht transformirt wurden, ja in den infinitesimalen Transformationen überhaupt nicht vorkamen.

Man kann nun auch bei Gruppen, welche nicht dieselbe Zahl von Veränderlichen enthalten von Aehnlichkeit reden; man kann ja immer die Anzahl der Veränderlichen in der einen Gruppe dadurch vervollständigen, dass man eine hinreichende Zahl von Veränderlichen hinzufügt, die bei der betreffenden Gruppe gar nicht transformirt werden. Dann hat man zwei Gruppen in gleichvielen Veränderlichen und kann untersuchen, ob sie mit einander ähnlich sind oder nicht.

Im Folgenden werden wir übrigens stets, wo nicht das Gegentheil ausdrücklich hervorgehoben wird, den Begriff der Aehnlichkeit in dem ursprünglichen engeren Sinne fassen.

§ 93.

Um die allgemeine Theorie der Aehnlichkeit durch ein Beispiel zu erläutern, werden wir untersuchen, ob die beiden dreigliedrigen Gruppen in zwei unabhängigen Veränderlichen:

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad X_2 f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$X_3 f = x_1^2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + (2x_1 x_2 + C x_2^2) \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

und:

$$Y_1 f = \frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{\partial f}{\partial y_2}, \quad Y_2 f = y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2},$$

$$Y_3 f = y_1^2 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2^2 \frac{\partial f}{\partial y_2}$$

mit einander ähnlich sind.

Wie man bemerken wird, sind hier die $Y_k f$ schon so gewählt, dass man gleichzeitig hat:

$$(X_1 X_2) = X_1 f, \quad (X_1 X_3) = 2 X_2 f, \quad (X_2 X_3) = X_3 f$$

und

$$(Y_1 Y_2) = Y_1 f, \quad (Y_1 Y_3) = 2 Y_2 f, \quad (Y_2 Y_3) = Y_3 f.$$

Allerdings sind die $Y_k f$ nicht in allgemeinster Weise so gewählt, dass die angegebenen Relationen bestehen, doch ist es nicht nöthig dies zu thun, das Ergebnis würde nämlich dadurch nicht geändert werden.

Wir finden:

$$X_3 f \equiv -(x_1^2 + C x_1 x_2) X_1 f + (2x_1 + C x_2) X_2 f$$

und

$$Y_3 f \equiv -y_1 y_2 Y_1 f + (y_1 + y_2) Y_2 f,$$

es muss also

$$y_1 y_2 = x_1^2 + C x_1 x_2, \quad y_1 + y_2 = 2x_1 + C x_2$$

werden. Solange die Constante C nicht verschwindet, bestimmen diese Gleichungen eine Transformation, folglich sind nach unserer allgemeinen Theorie im Falle $C \neq 0$ die beiden Gruppen mit einander ähnlich.

Ist aber $C = 0$, so ergiebt sich eine Relation zwischen y_1 und y_2 allein, es existirt also jedenfalls keine Transformation, welche X_1f, X_2f, X_3f in bezüglich Y_1f, Y_2f, Y_3f überführt; man kann sich leicht überzeugen, dass die beiden Gruppen in diesem Falle überhaupt nicht mit einander ähnlich sind.

§ 94.

Im Anschlusse an die Theorie der Aehnlichkeit r-gliedriger Gruppen wollen wir noch kurz eine etwas allgemeinere Frage behandeln und ihre Erledigung angeben.

Wir denken uns in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_s$ irgend p infinitesimale Transformationen: $X_1f \cdots X_pf$ vorgelegt, also nicht gerade solche, die eine endliche Gruppe erzeugen, und ebenso denken wir uns in $y_1 \cdots y_s$ irgend p infinitesimale Transformationen $Y_1f \cdots Y_pf$ vorgelegt. Wir fragen, unter welchen Bedingungen es eine Transformation $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$ giebt, welche $X_1f \cdots X_pf$ in bezüglich $Y_1f \cdots Y_pf$ überführt. Dabei verlangen wir nicht, dass $X_1f \cdots X_pf$ unabhängige infinitesimale Transformationen sein sollen, denn diese Voraussetzung würde zwar die Allgemeinheit der folgenden Betrachtungen nicht beeinträchtigen, dafür aber deren Darstellung erschweren, da sie immer berücksichtigt werden müsste.

Das vorstehende allgemeine Problem können wir zunächst auf den besonderen Fall zurückführen, dass die unabhängigen unter den Gleichungen: $X_1f = 0, \cdots X_pf = 0$ ein vollständiges System bilden.

Giebt es nämlich eine Transformation, welche $X_1f \cdots X_pf$ in bezüglich $Y_1f \cdots Y_pf$ überführt, so verwandelt dieselbe nach Kap. 5, S. 84 auch jeden Ausdruck:

$$X_k(X_j(f)) - X_j(X_k(f)) = (X_k X_j)$$

in den entsprechenden Ausdruck:

$$Y_k(Y_j(f)) - Y_j(Y_k(f)) = (Y_k Y_j).$$

Bilden daher die unabhängigen unter den Gleichungen $X_1f = 0, \cdots X_pf = 0$ nicht an und für sich schon ein vollständiges System, so können wir zu $X_1f \cdots X_pf$ noch die sämmtlichen Ausdrücke (X_kX_j) hinzufügen, nur müssen wir auch zu $Y_1f \cdots Y_pf$ die sämmtlichen Ausdrücke $(Y_k Y_j)$ hinzufügen. Die Frage, ob eine Transformation von der verlangten Beschaffenheit existirt, kommt dann darauf hinaus, ob eine Transformation existirt, welche $X_1f \cdots X_pf$, (X_kX_j) bezüglich in $Y_1f \cdots Y_pf$, (Y_kY_j) überführt, wo für k und j der Reihe nach die Zahlen $1, 2 \cdots p$ zu setzen sind.

Bilden nun auch die unabhängigen unter den Gleichungen: $X_1f = 0, \cdots X_pf = 0$, $(X_kX_j) = 0$ noch kein vollständiges System, so fügen wir noch die Ausdrücke $(X_i(X_k X_j))$ und die $((X_i X_k)(X_j X_l))$ hinzu, sowie die entsprechenden Ausdrücke in den Yf. Fahren wir so fort, so erhalten wir schliesslich unser ursprüngliches Problem zurückgeführt auf das folgende:

In den Veränderlichen $x_1 \cdots x_s$ sind vorgelegt r infinitesimale Transformationen: $X_1 f \cdots X_r f$, von denen $n \leqq r$, etwa $X_1 f \cdots X_n f$ durch keine lineare Relation verknüpft sind, während $X_{n+1} f \cdots X_r f$ sich linear durch $X_1 f \cdots X_n f$ ausdrücken:

$$X_{n+k} f \equiv \sum_1^n {}_\nu\, \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) \cdot X_\nu f \qquad (k = 1 \cdots r-n);$$

ausserdem bestehen noch Relationen von der Form:

$$(X_k X_j) = \sum_1^n {}_\nu\, \varphi_{kj\nu}(x_1 \cdots x_s) \cdot X_\nu f \qquad (k, j = 1 \cdots r),$$

so dass also die unabhängigen unter den Gleichungen $X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0$ ein n-gliedriges vollständiges System bilden. Vorgelegt sind ferner in den Veränderlichen $y_1 \cdots y_s$ r infinitesimale Transformationen $Y_1 f \cdots Y_r f$, es soll entschieden werden, ob es eine Transformation $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$ giebt, welche $X_1 f \cdots X_r f$ bezüglich in $Y_1 f \cdots Y_r f$ überführt.

Soll es eine Transformation von der hier verlangten Beschaffenheit geben, so dürfen natürlich $Y_1 f \cdots Y_n f$ nicht durch eine lineare Relation verknüpft sein, dafür müssen sich $Y_{n+1} f \cdots Y_r f$ linear durch $Y_1 f \cdots Y_n f$ ausdrücken lassen:

$$Y_{n+k} f \equiv \sum_1^n {}_\nu\, \psi_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) \cdot Y_\nu f \qquad (k = 1 \cdots r-n)$$

und es müssen Relationen von der Form:

$$(Y_k Y_j) = \sum_1^n {}_\nu\, \psi_{kj\nu}(y_1 \cdots y_s) \cdot Y_\nu f \qquad (k, j = 1 \cdots r)$$

bestehen. Ausserdem dürfen noch die Gleichungen

$$(30) \qquad \begin{cases} \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) - \psi_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) = 0 & (k = 1 \cdots r-n;\ \nu = 1 \cdots n) \\ \varphi_{kj\nu}(x_1 \cdots x_s) - \psi_{kj\nu}(y_1 \cdots y_s) = 0 & (k, j = 1 \cdots r;\ \nu = 1 \cdots n) \end{cases}$$

weder einander widersprechen, noch auf Relationen zwischen den x oder den y allein führen, denn diese Gleichungen werden offenbar bei der Substitution: $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$ zu Identitäten, wenn die Transformation: $y_i = \Phi_i(x)$ die Ausdrücke $X_1 f \cdots X_r f$ bezüglich in $Y_1 f \cdots Y_r f$ verwandelt.

Wir wollen voraussetzen, dass alle diese Bedingungen erfüllt sind und dass sich die sämmtlichen Gleichungen (30) auf die ϱ von einander unabhängigen Gleichungen:

(31) $$\varphi_1(x) - \psi_1(y) = 0, \cdots \varphi_\varrho(x) - \psi_\varrho(y) = 0$$

reduciren.

Durch ganz ähnliche Betrachtungen wie auf S. 335ff. erkennen wir nun, dass die Bestimmung einer Transformation, welche $X_1f \cdots X_rf$ bezüglich in $Y_1f \cdots Y_rf$ überführt, darauf hinauskommt, ein Gleichungensystem in den $2s$ Veränderlichen $x_1 \cdots x_s$, $y_1 \cdots y_s$ zu bestimmen und zwar ein Gleichungensystem von der folgenden Beschaffenheit: es muss die r infinitesimalen Transformationen: $\Omega_k f = X_k f + Y_k f$ gestatten, es muss gerade aus s unabhängigen Gleichungen bestehen, es muss sowohl nach $x_1 \cdots x_s$ als nach $y_1 \cdots y_s$ auflösbar sein und es muss endlich die ϱ Gleichungen (31) umfassen.

Ein Gleichungensystem, welches die ϱ Gleichungen (31) umfasst und die r infinitesimalen Transformationen $\Omega_k f$ gestattet, umfasst zugleich die sämmtlichen $r\varrho$ Gleichungen:

$$\Omega_k(\varphi_j(x) - \psi_j(y)) = X_k\varphi_j(x) - Y_k\psi_j(y) = 0$$
$$(k = 1 \cdots r,\ j = 1 \cdots \varrho).$$

Sind diese Gleichungen keine Folge von (31), so können wir aus ihnen wieder neue Gleichungen herleiten, welche in dem gesuchten Gleichungensysteme enthalten sein müssen und so weiter. Fahren wir so fort, so müssen wir schliesslich entweder auf Relationen kommen, die einander widersprechen, oder auf Relationen zwischen den x allein, oder auf solche zwischen den y allein, oder endlich auf ein System von $\sigma \leqq s$ unabhängigen Gleichungen:

(32) $$\varphi_1(x) - \psi_1(y) = 0, \cdots \varphi_\sigma(x) - \psi_\sigma(y) = 0 \quad (\sigma \geqq \varrho),$$

welches die folgenden beiden Eigenschaften besitzt: es ergiebt keine Relationen zwischen den x oder den y allein und es gestattet die r infinitesimalen Transformationen $\Omega_k f$, so dass also jede der $r\sigma$ Gleichungen

$$\Omega_k(\varphi_j(x) - \psi_j(y)) = 0 \quad (k = 1 \cdots r,\ j = 1 \cdots \sigma)$$

eine Folge von (32) ist.

Offenbar kann es eine Transformation, welche $X_1f \cdots X_rf$ bezüglich in $Y_1f \cdots Y_rf$ überführt, nur dann geben, wenn wir durch die angedeuteten Operationen auf ein Gleichungensystem (32) von der eben definirten Beschaffenheit geführt werden. Wir brauchen also nur diesen Fall zu betrachten.

Ist die ganze Zahl σ gerade gleich s, so stellt das Gleichungensystem (32) an und für sich genommen eine Transformation dar, welche die verlangte Ueberführung leistet und zwar offenbar die einzige Transformation, welche dies thut. Wir werden zeigen, dass auch im Falle $\sigma < s$ eine Transformation existirt, welche $X_1 f \cdots X_r f$ bezüglich in $Y_1 f \cdots Y_r f$ überführt; den Nachweis hierfür erbringen wir dadurch, dass wir eine Methode angeben, welche zur Bestimmung einer Transformation von der verlangten Beschaffenheit führt.

Es ist klar, dass die Gleichungen (32) weder die Unabhängigkeit der Gleichungen: $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$ aufheben noch die der Gleichungen: $Y_1 f = 0, \cdots Y_n f = 0$, sie ergeben ja weder zwischen den x allein noch zwischen den y allein Relationen.

Ueberdies ist zu bemerken, dass Relationen von der Form

$$(\Omega_k \Omega_j) = \sum_1^n {}_\nu \, \varphi_{kj\nu}(x) \cdot \Omega_\nu f = \sum_1^n {}_\nu \, \psi_{kj\nu}(y) \cdot \Omega_\nu f$$
$$(k, j = 1, 2 \cdots n)$$

bestehen, in denen sich die Coefficienten $\varphi_{kj\nu}(x) = \psi_{kj\nu}(y)$ für die Werthsysteme des Gleichungensystems $\varphi_1 - \psi_1 = 0, \cdots \varphi_\sigma - \psi_\sigma = 0$ im Allgemeinen regulär verhalten. Es liegt daher der im Theorem 19, S. 132 erledigte Fall vor.

Wie auf S. 344 ff. führen wir die Lösungen des n-gliedrigen vollständigen Systems $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$ als neue x ein und die des vollständigen Systems $Y_1 f = 0, \cdots Y_n f = 0$ als neue y, dabei haben wir genau wie damals zwischen solchen Lösungen zu unterscheiden, welche sich durch $\varphi_1(x) \cdots \varphi_\sigma(x)$ bezüglich durch $\psi_1(y) \cdots \psi_\sigma(y)$ ausdrücken lassen und zwischen solchen, die von den φ bezüglich ψ unabhängig sind. Auf diese Weise vereinfachen wir die Gestalt der Gleichungen (32) und können dann geradeso wie auf S. 349 ff. ein Gleichungensystem bestimmen, welches $\Omega_1 f \cdots \Omega_r f$ gestattet, gerade s unabhängige Gleichungen enthält, sowohl nach $x_1 \cdots x_s$ als nach $y_1 \cdots y_s$ auflösbar ist und endlich die Gleichungen (32) umfasst. Offenbar stellt dasselbe eine Transformation dar, welche $X_1 f \cdots X_r f$ bezüglich in $Y_1 f \cdots Y_r f$ überführt.

Demnach haben wir das folgende Theorem

Theorem 66. *Sind in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_s$ p infinitesimale Transformationen $X_1 f \cdots X_p f$ vorgelegt und in $y_1 \cdots y_s$ p infinitesimale Transformationen $Y_1 f \cdots Y_p f$, so kann man stets durch Differentiationen und Eliminationen entscheiden, ob es eine Transformation $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$ giebt, welche $X_1 f \cdots X_p f$ bezüglich in $Y_1 f \cdots Y_p f$ überführt; giebt es eine solche, so kann man die allgemeinste Transformation, welche die betreffende Ueberführung leistet, angeben, sobald man gewisse vollständige Systeme integrirt hat.**)

*) Lie, Archiv for Math. og Naturv., Bd. 3, S. 125, Christiania 1878.

Kapitel 20.

Gruppen, deren Transformationen mit allen Transformationen einer vorgelegten Gruppe vertauschbar sind.

Durch die Entwickelungen der §§ 89, 90, 91, S. 330 bis 355 sind wir in den Stand gesetzt, alle Transformationen zu bestimmen, welche eine vorgelegte r-gliedrige Gruppe:

$$X_k f = \sum_1^s {}^i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

invariant lassen. Wir wollen nun unter allen Transformationen von dieser Beschaffenheit diejenigen herausgreifen, welche ausserdem noch die Eigenschaft besitzen, *jede einzelne Transformation der Gruppe* $X_1 f \cdots X_r f$ *invariant zu lassen* und wollen uns mit diesen Transformationen etwas näher beschäftigen.

Wenn eine Transformation T jede einzelne Transformation S der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ invariant lässt, so steht sie nach S. 258 zu S in der Beziehung:

$$T^{-1} S T = S$$

oder, was dasselbe ist, in der Beziehung:

$$ST = TS,$$

sie ist also mit T vertauschbar. Demnach können wir die eben definirten Transformationen auch folgendermassen charakterisiren: *es sind diejenigen Transformationen, welche mit sämmtlichen Transformationen der Gruppe* $X_1 f \cdots X_r f$ *vertauschbar sind.*

§ 95.

Nach Kap. 15, S. 255 kann der Ausdruck $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ als das allgemeine Symbol einer Transformation der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ angesehen werden. Folglich wird eine Transformation $x_i' = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$ stets dann aber auch nur dann jede einzelne Transformation der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ invariant lassen, wenn sie den Ausdruck $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ bei beliebiger Wahl der e invariant lässt, wenn also der Ausdruck $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ bei Einführung der neuen Veränderlichen $x_i' = \Phi_i(x)$ die Form: $e_1 X_1' f + \cdots + e_r X_r' f$ annimmt, wo:

$$X_k' f = \sum_1^s {}^i\, \xi_{ki}(x_1' \cdots x_s') \frac{\partial f}{\partial x_i'}$$

ist. Nothwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist, dass die r

infinitesimalen Transformationen: $X_1f \cdots X_rf$ bei Einführung der neuen Veränderlichen x_i' bezüglich die Formen $X_1'f \cdots X_r'f$ erhalten.

Dass es Transformationen $x_i' = \Phi_i(x)$ von der verlangten Beschaffenheit giebt, ist klar; die identische Transformation $x_i' = x_i$ ist ja eine solche; überdies geht es aus dem Satze 2 des vorigen Kapitels (S. 354) herwor; denn dieser Satz zeigt, dass es Transformationen giebt, welche $X_1f \cdots X_rf$ in bezüglich $X_1'f \cdots X_r'f$ überführen. Aus den damaligen Entwickelungen folgt überdies, dass die allgemeinste Transformation von der verlangten Beschaffenheit dargestellt wird durch das allgemeinste nach $x_1 \cdots x_s$ auflösbare Gleichungensystem:

$$x_1' = \Phi_1(x_1 \cdots x_s), \cdots x_s' = \Phi_s(x_1 \cdots x_s),$$

welches die r-gliedrige Gruppe: $X_1f + X_1'f, \cdots X_rf + X_r'f$ in den $2s$ Veränderlichen $x_1 \cdots x_s, x_1' \cdots x_s'$ gestattet.

Führt man nach einander zwei Transformationen aus, welche jede einzelne Transformation der Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ invariant lassen, so erhält man offenbar stets eine Transformation, welche dasselbe thut; also bildet der Inbegriff aller Transformationen von dieser Beschaffenheit eine Gruppe G. Diese Gruppe kann discontinuirlich sein, ja sogar auf die identische Transformation zusammenschrumpfen; sie kann aus mehreren discreten Schaaren bestehen, von denen jede nur eine endliche Anzahl willkürlicher Parameter enthält, sie kann unendlich sein; immer aber ordnen sich ihre Transformationen paarweise als inverse zusammen, denn lässt eine Transformation alle Transformationen der Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ invariant, so besitzt die zugehörige inverse Transformation natürlich dieselbe Eigenschaft.

Enthält die eben definirte Gruppe G nur eine endliche Anzahl von willkürlichen Parametern, so gehört sie in die Kategorie von Gruppen, welche in Kapitel 18 besprochen ist, und umfasst nach Theorem 56, S. 315 sicher eine von infinitesimalen Transformationen erzeugte, endliche continuirliche Untergruppe. Ist andererseits die Gruppe G unendlich, so lässt sich durch ähnliche Betrachtungen wie in Kapitel 18 nachweisen, dass sie eingliedrige Gruppen umfasst, und zwar unendlich viele, die von unendlich vielen unabhängigen infinitesimalen Transformationen erzeugt sind.

Wir stellen uns jetzt direkt die Aufgabe, alle eingliedrigen Gruppen zu bestimmen, die etwa in der Gruppe G enthalten sind.

Nach Kap. 15, S. 258 und 259 bleiben die r Ausdrücke $X_1f \cdots X_rf$ dann und nur dann bei allen Transformationen der eingliedrigen Gruppe Zf invariant, wenn die r Relationen:

$$(X_kZ) = X_k(Z(f)) - Z(X_k(f)) = 0 \quad (k=1 \cdots r)$$

identisch erfüllt sind, wenn also die infinitesimale Transformation Zf mit allen Transformationen der Gruppe $X_1f \cdots X_rf$ vertauschbar ist.

Demnach kommt die Bestimmung aller eingliedrigen Gruppen von der vorhin definirten Beschaffenheit hinaus auf die Bestimmung der allgemeinsten infinitesimalen Transformation Zf, welche mit allen $X_k f$ vertauschbar ist.

Hat man zwei infinitesimale Transformationen $Z_1 f$ und $Z_2 f$, welche mit allen $X_k f$ vertauschbar sind, so verschwinden alle Ausdrücke $(Z_1 X_k)$ und $(Z_2 X_k)$ identisch, also reducirt sich die Jacobische Identität:

$$((Z_1 Z_2) X_k) + ((Z_2 X_k) Z_1) + ((X_k Z_1) Z_2) \equiv 0$$

auf:

$$((Z_1 Z_2) X_k) \equiv 0.$$

Es gilt demnach der

Satz 1. *Sind die beiden infinitesimalen Transformationen $Z_1 f$ und $Z_2 f$ mit allen infinitesimalen Transformationen der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ vertauschbar, so ist es auch die Transformation $(Z_1 Z_2)$.*

Auf der andern Seite ist zugleich jede infinitesimale Transformation $a Z_1 f + b Z_2 f$ mit $X_1 f \cdots X_r f$ vertauschbar, welche Werthe auch die Constanten a und b haben mögen. Giebt es daher zufällig nur eine endliche Anzahl, etwa nur q unabhängige infinitesimale Transformationen $Z_1 f \cdots Z_q f$, welche mit $X_1 f \cdots X_r f$ vertauschbar sind, so hat die allgemeinste infinitesimale Transformation von derselben Beschaffenheit die Form: $\lambda_1 Z_1 f + \cdots + \lambda_q Z_q f$, unter $\lambda_1 \cdots \lambda_q$ willkürliche Parameter verstanden. Es müssen dann wegen Satz 1 Relationen von der Form:

$$(Z_i Z_k) = \sum_1^q \sigma \, c'_{ik\sigma} Z_\sigma f$$

bestehen, so dass also $Z_1 f \cdots Z_q f$ *eine q-gliedrige Gruppe erzeugen.*

Versuchen wir jetzt direkt die allgemeinste infinitesimale Transformation:

$$Zf = \sum_1^s i \, \zeta_i (x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

zu bestimmen, welche mit allen infinitesimalen Transformationen der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ vertauschbar ist.

Die r Bedingungsgleichungen:

$$(X_1 Z) = 0, \cdots (X_r Z) = 0$$

zerfallen sofort in die rs folgenden:

$$X_k \zeta_i = Z \xi_{ki} \qquad (k = 1 \cdots r, \; i = 1 \cdots s),$$

oder ausführlicher geschrieben:

(1) $$\sum_1^s{}^{\nu}\, \xi_{k\nu}(x)\frac{\partial \zeta_i}{\partial x_\nu} = \sum_1^s{}^{\nu}\, \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_\nu}\zeta_\nu \qquad (k=1\cdots r,\ i=1\cdots s).$$

Es handelt sich also darum, die allgemeinsten Lösungen dieser Differentialgleichungen für $\zeta_1 \cdots \zeta_s$ zu bestimmen.

Ist

(2) $$\zeta_i = \omega_i(x_1\cdots x_s) \qquad (i=1\cdots s)$$

irgend ein Lösungensystem von (1), so verschwinden die Ausdrücke:

$$X_k\omega_i - \sum_1^s{}^{\nu}\,\frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_\nu}\zeta_\nu$$

bei der Substitution: $\zeta_1 = \omega_1(x), \cdots \zeta_s = \omega_s(x)$ sämmtlich identisch, mit anderen Worten: das Gleichungensystem (2) in den $2s$ Veränderlichen $x_1\cdots x_s$, $\zeta_1\cdots\zeta_s$ gestattet die r infinitesimalen Transformationen:

$$W_kf = X_kf + \sum_1^s{}^{i}\left\{\sum_1^s{}^{\nu}\,\frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_\nu}\zeta_\nu\right\}\frac{\partial f}{\partial \zeta_i} \qquad (k=1\cdots r).$$

Gestattet umgekehrt ein Gleichungensystem von der Form (2) die infinitesimalen Transformationen $W_1f\cdots W_rf$, so sind $\omega_1(x)\cdots\omega_s(x)$ offenbar Lösungen der Differentialgleichungen (1). Folglich ist die Integration der Differentialgleichungen (1) äquivalent mit der Bestimmung des allgemeinsten Gleichungensystems (2), welches die infinitesimalen Transformationen $W_1f\cdots W_rf$ gestattet.

Jedes Gleichungensystem, welches $W_1f\cdots W_rf$ gestattet, lässt auch die infinitesimale Transformation $W_k(W_j(f)) - W_j(W_k(f)) = (W_k W_j)$ zu; berechnen wir dieselbe.

Es wird:

$$(W_kW_j) = (X_kX_j) + \sum_{i\mu\nu}^{1\cdots s}\left\{\xi_{k\nu}\frac{\partial^2\xi_{ji}}{\partial x_\mu\partial x_\nu} - \xi_{j\nu}\frac{\partial^2\xi_{ki}}{\partial x_\mu\partial x_\nu}\right\}\zeta_\mu\frac{\partial f}{\partial\zeta_i} +$$
$$+\sum_{i\mu\nu}^{1\cdots s}\left\{\frac{\partial\xi_{k\nu}}{\partial x_\mu}\frac{\partial\xi_{ji}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial\xi_{j\nu}}{\partial x_\mu}\frac{\partial\xi_{ki}}{\partial x_\nu}\right\}\zeta_\mu\frac{\partial f}{\partial\zeta_i},$$

und hier lässt sich die rechte Seite schreiben:

$$(X_kX_j) + \sum_{i\mu}^{1\cdots s}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\sum_1^s{}^{\nu}\left\{\xi_{k\nu}\frac{\partial\xi_{ji}}{\partial x_\nu} - \xi_{j\nu}\frac{\partial\xi_{ki}}{\partial x_\nu}\right\}\cdot\zeta_\mu\frac{\partial f}{\partial\zeta}.$$

Nun aber bestehen Relationen von der Form:

$$(X_kX_j) = \sum_1^r{}^{\sigma}\, c_{kj\sigma}X_\sigma f,$$

aus denen folgt:

$$\sum_1^s {}_\nu \left\{ \xi_{k\nu} \frac{\partial \xi_{ji}}{\partial x_\nu} - \xi_{j\nu} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_\nu} \right\} = \sum_1^r {}_\sigma \, c_{kj\sigma} \, \xi_{\sigma i},$$

mithin ergiebt sich einfach:

$$(W_k W_j) = \sum_1^r {}_\sigma \, c_{kj\sigma} \, W_\sigma f.$$

Wir ersehen hieraus, dass $W_1 f \cdots W_r f$ eine r-gliedrige Gruppe in den $2s$ Veränderlichen $x_1 \cdots x_s$, $\zeta_1 \cdots \zeta_s$ erzeugen; das zu vermuthen lag allerdings nahe.

Es mögen unter den infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ irgend n, etwa $X_1 f \cdots X_n f$ durch keine lineare Relation von der Form:

$$\chi_1(x_1 \cdots x_s) \cdot X_1 f + \cdots + \chi_n(x_1 \cdots x_s) \cdot X_n f = 0$$

verknüpft sein, während $X_{n+1} f \cdots X_r f$ sich folgendermassen ausdrücken lassen:

$$X_{n+k} f \equiv \sum_1^n {}_\nu \, \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) \cdot X_\nu f \quad (k = 1 \cdots r - n). \tag{3}$$

Unter diesen Voraussetzungen lassen sich die Differentialgleichungen (1) auch schreiben:

$$X_\nu \zeta_i - Z \xi_{\nu i} = 0 \quad (\nu = 1 \cdots n, \; i = 1 \cdots s)$$

$$\sum_1^n {}_\nu \, \varphi_{k\nu}(x) \cdot X_\nu \zeta_i - Z \xi_{n+k,\, i} = 0 \quad (k = 1 \cdots r - n, \; i = 1 \cdots s).$$

Werden daher die Ausdrücke $X_1 \zeta_i \cdots X_n \zeta_i$ weggeschafft, so ergeben sich zwischen $\zeta_1 \cdots \zeta_s$ die endlichen Gleichungen:

$$\sum_1^s {}_\pi \left\{ \frac{\partial \xi_{n+k,\, i}}{\partial x_\pi} - \sum_1^n {}_\nu \, \varphi_{k\nu} \frac{\partial \xi_{\nu i}}{\partial x_\pi} \right\} \zeta_\pi = 0 \tag{4}$$
$$(k = 1 \cdots r - n, \; i = 1 \cdots s).$$

Es leuchtet ein, dass jedes Gleichungensystem von der Form (2), welches die Gruppe $W_1 f \cdots W_r f$ gestattet, die Gleichungen (4) umfassen muss.

Die Gleichungen (4) sind linear und homogen in $\zeta_1 \cdots \zeta_s$; finden sich daher unter ihnen gerade s von einander unabhängige, so ist $\zeta_1 = 0, \cdots \zeta_s = 0$ das einzige Lösungensystem, welches sie alle befriedigt. In diesem Falle giebt es nur ein Gleichungensystem von der Form (2), welches die Gruppe $W_1 f \cdots W_r f$ gestattet, nämlich das Gleichungensystem: $\zeta_1 = 0, \cdots \zeta_s = 0$, es giebt also keine infinitesimale Transformation Zf, welche mit allen $X_k f$ vertauschbar ist.

Anders, wenn sich die Gleichungen (4) auf weniger als s, etwa auf $m < s$ unabhängige Gleichungen reduciren. Wir werden sehen, dass es in diesem Falle ausser dem unbrauchbaren Systeme $\zeta_1 = 0, \cdots \zeta_s = 0$ auch noch andere Systeme von der Form (2) giebt, welche die Gruppe $W_1 f \cdots W_r f$ gestatten.

Vor allen Dingen bemerken wir, dass das Gleichungensystem (4) die Gruppe $W_1 f \cdots W_r f$ gestattet.

Um das zu beweisen, schreiben wir uns die Matrix auf, welche zu den infinitesimalen Transformationen $W_1 f \cdots W_r f$ gehört:

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} \xi_{11} \cdot \xi_{1s} & \sum_1^s {}^{\nu} \frac{\partial \xi_{11}}{\partial x_\nu} \zeta_\nu \cdot \sum_1^s {}^{\nu} \frac{\partial \xi_{1s}}{\partial x_\nu} \zeta_\nu \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \xi_{r1} \cdot \xi_{rs} & \sum_1^s {}^{\nu} \frac{\partial \xi_{r1}}{\partial x_\nu} \zeta_\nu \cdot \sum_1^s {}^{\nu} \frac{\partial \xi_{rs}}{\partial x_\nu} \zeta_\nu \end{vmatrix} .$$

Wir werden zeigen, dass (4) zu den Gleichungensystemen gehört, welche man durch Nullsetzen aller $(n+1)$-reihigen Determinanten dieser Matrix erhält. Damit ist dann nach Kap. 14, S. 228 bewiesen, dass (4) die Gruppe $W_1 f \cdots W_r f$ gestattet.

Unter den $(n+1)$-reihigen Determinanten der Matrix (5) giebt es solche von der Form:

$$D = \begin{vmatrix} \xi_{1k_1} & \cdot \ \xi_{1k_n} & \sum_1^s {}^{\nu} \frac{\partial \xi_{1\sigma}}{\partial x_\nu} \zeta_\nu \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{nk_1} & \cdot \ \xi_{nk_n} & \sum_1^s {}^{\nu} \frac{\partial \xi_{n\sigma}}{\partial x_\nu} \zeta_\nu \\ \xi_{n+j,\, k_1} & \cdot \ \xi_{n+j,\, k_n} & \sum_1^s {}^{\nu} \frac{\partial \xi_{n+j,\, \sigma}}{\partial x_\nu} \zeta_\nu \end{vmatrix} .$$

Benutzen wir die aus (3) folgenden Identitäten:

$$\xi_{n+j,\, \pi} \equiv \sum_1^n {}^{\nu} \varphi_{j\nu}(x) \cdot \xi_{\nu\pi} \qquad (\pi = 1 \cdots s,\ j = 1 \cdots r - n),$$

so können wir D offenbar schreiben:

$$D = \sum \pm \xi_{1k_1} \cdots \xi_{nk_n} \cdot \sum_1^s {}^{\nu} \left\{ \frac{\partial \xi_{n+j,\, \sigma}}{\partial x_\nu} - \sum_1^n {}^{\tau} \varphi_{j\tau} \frac{\partial \xi_{\tau\sigma}}{\partial x_\nu} \right\} \zeta_\nu .$$

Nun verschwinden unter den gemachten Voraussetzungen nicht alle Determinanten von der Form:

$$\sum \pm \xi_{1k_1} \cdots \xi_{nk_n}$$

identisch; setzen wir daher alle Determinanten von der Form D gleich Null, so erhalten wir entweder Relationen zwischen $x_1 \cdots x_s$ allein, oder wir erhalten das Gleichungensystem (4). Dieses Gleichungensystem bringt aber, wie leicht zu sehen, überhaupt alle $(n+1)$-reihigen Determinanten der Matrix (5) zum Verschwinden, also gestattet es die Gruppe $W_1 f \cdots W_r f$.

Die Bestimmung des allgemeinsten Gleichungensystems (2), welches die Gruppe $W_1 f \cdots W_r f$ gestattet und die Gleichungen (4) umfasst, lässt sich nun auf Grund von Kap. 14, S. 236 bis 238 durchführen.

Das Gleichungensystem (4) bringt alle $(n+1)$-reihigen, nicht aber alle n-reihigen Determinanten der Matrix (5) zum Verschwinden; ebenso wenig kann ein Gleichungensystem von der Form (2) alle n-reihigen Determinanten der Matrix (5) gleich Null machen. Also verfahren wir folgendermassen: Wir lösen die Gleichungen (4) nach m von den Grössen $\zeta_1 \cdots \zeta_s$ auf, etwa nach $\zeta_1 \cdots \zeta_m$, sodann bilden wir in den $2s - m$ Veränderlichen $x_1 \cdots x_s$, $\zeta_{m+1} \cdots \zeta_s$ nach Anleitung der citirten Entwickelungen die verkürzten infinitesimalen Transformationen $\overline{W}_1 f \cdots \overline{W}_r f$, endlich bestimmen wir irgend $2s - m - n$ unabhängige Lösungen des n-gliedrigen vollständigen Systems, welches von den n Gleichungen: $\overline{W}_1 f = 0, \cdots \overline{W}_n f = 0$ gebildet wird.

Die n Gleichungen $\overline{W}_1 f = 0, \cdots \overline{W}_n f = 0$ sind nach n von den Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_s}$ auflösbar, also sind ihre $2s - m - n$ unabhängigen Lösungen in Bezug auf $s - n$ von den x und die Veränderlichen $\zeta_{m+1} \cdots \zeta_s$ von einander unabhängig (vgl. Kap. 5, Theor. 12, S. 91). Nun giebt es unter den Lösungen des vollständigen Systems $\overline{W}_k f = 0$ gerade $s - n$ unabhängige, welche zugleich das n-gliedrige vollständige System: $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$ befriedigen und also nur von den x abhängen, sie mögen:

$$\mathfrak{u}_1(x_1 \cdots x_s) \cdots \mathfrak{u}_{s-n}(x_1 \cdots x_s)$$

heissen. Sind daher

$$\mathfrak{V}_1(\zeta_{m+1} \cdots \zeta_s,\ x_1 \cdots x_s), \cdots \mathfrak{V}_{s-m}(\zeta_{m+1} \cdots \zeta_s,\ x_1 \cdots x_s)$$

irgend $s - m$ von einander und von den $\mathfrak{u}$ unabhängige Lösungen des vollständigen Systems $\overline{W}_k f = 0$, so sind dieselben nothwendig in Bezug auf $\zeta_{m+1} \cdots \zeta_s$ von einander unabhängig.

Das allgemeinste Gleichungensystem (2), welches die Gruppe $W_1 f \cdots W_r f$ gestattet, erhalten wir jetzt, wenn wir zu den Gleichungen (4) in allgemeinster Weise $s - m$ von einander unabhängige, nach $\zeta_{m+1} \cdots \zeta_s$ auflösbare Relationen zwischen $\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{s-n}$, $\mathfrak{V}_1 \cdots \mathfrak{V}_{s-m}$ hinzufügen. Es ist klar, dass diese Relationen nach $\mathfrak{V}_1 \cdots \mathfrak{V}_{s-m}$ auflösbar sein müssen, dass sie also auf die Form:

$$(6)\quad \mathfrak{V}_\mu(\zeta_{m+1} \cdots \zeta_s,\ x_1 \cdots x_s) = \Omega_\mu(\mathfrak{u}_1(x) \cdots \mathfrak{u}_{s-n}(x)) \quad {\scriptstyle (\mu = 1 \cdots s-m)}$$

gebracht werden können. Hier sind die Ω_μ keinerlei Beschränkung unterworfen, sondern vollkommen willkürliche Functionen ihrer Argumente.

Fügen wir demnach die Gleichungen (6) zu (4) hinzu und lösen wir, was immer möglich ist, alles nach $\zeta_1 \cdots \zeta_s$ auf, so erhalten wir das allgemeinste Gleichungensystem (2), welches die Gruppe $W_1 f \cdots W_r f$ gestattet und damit auch das allgemeinste Lösungensystem der Differentialgleichungen (1). Dieses allgemeinste Lösungensystem enthält augenscheinlich $s - m$ willkürliche Functionen von $\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{s-n}$.

Nun aber sind die Differentialgleichungen (1) linear und homogen in den Unbekannten $\zeta_1 \cdots \zeta_s$; also lässt sich schliessen, dass ihr allgemeinstes Lösungensystem $\zeta_1 \cdots \zeta_s$ aus $s - m$ particulären Lösungensystemen:

$$\zeta_{\mu 1}(x) \cdots \zeta_{\mu s}(x) \quad {\scriptstyle (\mu = 1 \cdots s-m)}$$

in der folgenden Weise abgeleitet werden kann:

$$\zeta_i = \chi_1(\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{s-n}) \cdot \zeta_{1i} + \cdots + \chi_{s-m}(\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{s-n}) \cdot \zeta_{s-m,\, i}$$
$$(i = 1 \cdots s),$$

wobei die χ vollständig willkürliche Functionen der $\mathfrak{u}$ sind; natürlich müssen die betreffenden particulären Lösungensysteme so beschaffen sein, dass es keine $s - m$ Functionen $\psi_1(\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{s-n}) \cdots \psi_{s-m}(\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{s-n})$ giebt, welche die s Gleichungen:

$$\psi_1(\mathfrak{u}) \cdot \zeta_{1i} + \cdots + \psi_{s-m}(\mathfrak{u}) \cdot \zeta_{s-m,\, i} = 0 \quad {\scriptstyle (i = 1 \cdots s)}$$

identisch befriedigen. Es lässt sich sogar zeigen, dass es überhaupt keine $s - m$ Functionen $\Psi_1(x_1 \cdots x_s) \cdots \Psi_{s-m}(x_1 \cdots x_s)$ giebt, welche die $s - m$ Gleichungen:

$$\Psi_1(x) \cdot \zeta_{1i} + \cdots + \Psi_{s-m}(x) \cdot \zeta_{s-m,\, i} = 0 \quad {\scriptstyle (i = 1 \cdots s)}.$$

identisch befriedigen. Nämlich die $s - m$ Gleichungen:

$$\zeta_{m+\sigma} = \sum_1^{s-m} {}^{\mu}\, \chi_\mu(\mathfrak{u}) \cdot \zeta_{\mu,\, m+\sigma} \quad {\scriptstyle (\sigma = 1 \cdots s-m)}$$

sind offenbar mit den Gleichungen (6) äquivalent, also müssen sie nach $\chi_1 \cdots \chi_{s-m}$ auflösbar sein und die Determinante:

$$\Sigma \pm \zeta_{1,\, m+1} \cdots \zeta_{s-m,\, m+s-m}$$

darf nicht identisch verschwinden.

Nach diesen Vorbereitungen können wir endlich die Form angeben, welche die allgemeinste mit $X_1 f \cdots X_r f$ vertauschbare infinitesimale Transformation Zf besitzt. Die betreffende Transformation lautet:

$$Zf = \sum_1^{s-m} {}^{\mu}\, \chi_\mu(\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{s-m}) \cdot Z_\mu f,$$

wo die $s - m$ infinitesimalen Transformationen:

$$Z_\mu f = \sum_1^s {}^i\, \zeta_{\mu i}(x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (\mu = 1 \cdots s - m)$$

durch keine lineare Relation von der Form:

$$\Psi_1(x_1 \cdots x_s) \cdot Z_1 f + \cdots + \Psi_{s-m}(x_1 \cdots x_s) \cdot Z_{s-m} f = 0$$

verknüpft sind. Da überdies nach Satz 1, S. 369 auch jede infinitesimale Transformation $(Z_\mu Z_\nu)$ mit $X_1 f \cdots X_r f$ vertauschbar ist, so bestehen Relationen von der besonderen Form:

$$(Z_\mu Z_\nu) = \sum_1^{s-m} {}^{\pi}\, \omega_{\mu\nu\pi}(\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{s-m}) \cdot Z_\pi f \quad (\mu, \nu = 1 \cdots s - m)$$

Wir sehen also: Es giebt stets dann, aber auch nur dann eine infinitesimale Transformation, welche mit $X_1 f \cdots X_r f$ vertauschbar ist, wenn die auf S. 372 definirte Zahl m kleiner ist als die Zahl s der Veränderlichen x. Ist $m < s$ und zugleich $n < s$, ist also die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ intransitiv, so hängt die allgemeinste mit $X_1 f \cdots X_r f$ vertauschbare infinitesimale Transformation Zf von willkürlichen Functionen ab. Ist dagegen $n = s$, ist also die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ transitiv, so lässt sich die allgemeinste mit $X_1 f \cdots X_r f$ vertauschbare infinitesimale Transformation Zf aus $s - m$ unabhängigen infinitesimalen Transformationen: $Z_1 f \cdots Z_{s-m} f$ linear ableiten; nach einer früheren Bemerkung (S. 369) erzeugen dann die betreffenden infinitesimalen Transformationen eine $(s - m)$-gliedrige Gruppe. —

Wir wissen, dass eine mit $X_1 f \cdots X_r f$ vertauschbare infinitesimale Transformation nur dann existirt, wenn die Gleichungen (4) sich auf weniger als s unabhängige reduciren. Dieser Bedingung können wir eine etwas übersichtlichere Fassung geben, wenn wir uns der Identitäten (3) oder der äquivalenten:

$$\xi_{n+k,\, i} - \sum_1^n {}^{\nu}\, \varphi_{k\nu}(x) \cdot \xi_{\nu i} \equiv 0 \quad (k = 1 \cdots r - n;\ i = 1 \cdots s)$$

erinnern, welche die Functionen $\varphi_{k\nu}$ definiren. Differentiiren wir nämlich die eben geschriebenen Identitäten nach x_j, so erhalten wir die folgenden Identitäten:

$$\frac{\partial \xi_{n+k, i}}{\partial x_j} - \sum_1^n{}_\nu \left\{ \varphi_{k\nu} \frac{\partial \xi_{\nu i}}{\partial x_j} + \xi_{\nu i} \frac{\partial \varphi_{k\nu}}{\partial x_j} \right\} = 0$$
$$(k = 1 \cdots r - n;\ i, j = 1 \cdots s),$$

vermöge deren sich die Gleichungen (4) durch die äquivalenten Gleichungen:

$$\sum_1^n{}_\nu\, \xi_{\nu i} \sum_1^s{}_j\, \zeta_j \frac{\partial \varphi_{k\nu}}{\partial x_j} = 0 \qquad (i = 1 \cdots s,\ k = 1 \cdots r - n)$$

ersetzen lassen. Da aber nicht alle Determinanten von der Form $\Sigma \pm \xi_{k_1} \cdots \xi_{k_n}$ identisch verschwinden, so sind die letzten Gleichungen ihrerseits äquivalent mit:

$$\text{(4')} \qquad \sum_1^s{}_j\, \zeta_j \frac{\partial \varphi_{k\nu}}{\partial x_j} = 0 \qquad (k = 1 \cdots r - n,\ \nu = 1 \cdots n).$$

Es giebt demnach eine mit $X_1 f \cdots X_r f$ vertauschbare infinitesimale Transformation Zf nur dann, wenn die in den ζ_j linearen Gleichungen (4') sich auf weniger als s unabhängige reduciren.

Die Gleichungen (4') sind übersichtlicher als die Gleichungen (4), sie haben überdies einen einfachen Sinn, sie sagen nämlich aus, dass jede der $n(r-n)$ Functionen $\varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s)$ die sämmtlichen infinitesimalen Transformationen Zf gestattet.

Giebt es unter den Gleichungen (4) gerade m von einander unabhängige, so giebt es natürlich auch unter den Gleichungen (4') gerade m von einander unabhängige, also ist m offenbar nichts anderes als die Zahl der unabhängigen unter den $n(r-n)$ Functionen $\varphi_{k\nu}(x)$.

Fassen wir die gewonnenen Ergebnisse zusammen:

Theorem 67. *Sind von den r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:*

$$X_k f = \sum_1^s{}_i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

einer r-gliedrigen Gruppe etwa $X_1 f \cdots X_n f$ durch keine lineare Relation verknüpft, während $X_{n+1} f \cdots X_r f$ sich linear durch $X_1 f \cdots X_n f$ ausdrücken lassen:

$$X_{n+j} f \equiv \sum_1^n{}_\nu\, \varphi_{j\nu}(x_1 \cdots x_s) \cdot X_\nu f \qquad (j = 1 \cdots r - n),$$

und sind unter den $n(r-n)$ Functionen $\varphi_{k\nu}$ gerade s von einander unabhängige vorhanden, so giebt es keine infinitesimale Transformation, welche mit allen $X_k f$ vertauschbar ist; sind dagegen unter den Functionen $\varphi_{k\nu}$ weniger als s, etwa blos m

unabhängige vorhanden, so giebt es infinitesimale Transformationen, welche mit $X_1 f \cdots X_r f$ *vertauschbar sind, und zwar besitzt die allgemeinste infinitesimale Transformation* Zf *von dieser Beschaffenheit die Form:*

$$Zf = \psi_1(\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{s-n}) \cdot Z_1 f + \cdots + \psi_{s-m}(\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{s-n}) \cdot Z_{s-m} f,$$

wo $\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{s-n}$ *unabhängige Lösungen des n-gliedrigen vollständigen Systems:* $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$ *bezeichnen, wo ferner* $\psi_1 \cdots \psi_{s-m}$ *willkürliche Functionen ihrer Argumente bedeuten und wo endlich die mit* $X_1 f \cdots X_r f$ *vertauschbaren, durch keine lineare Relation verknüpften infinitesimalen Transformationen:*

$$Z_\mu f = \sum_1^s {}_i\, \zeta_{\mu i}(x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (\mu = 1 \cdots s - m)$$

paarweise in Beziehungen von der Form:

$$(Z_\mu Z_\nu) = \sum_1^{s-m} {}_\pi\, \omega_{\mu\nu\pi}(\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{s-m}) \cdot Z_\pi f$$

*stehen.**)

Ein Theil der in diesem Satze ausgesprochenen Ergebnisse folgt übrigens unmittelbar aus den Entwickelungen des vorigen Kapitels. Ist nämlich die Anzahl der unabhängigen unter den Functionen $\varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s)$ gerade gleich s, so stellen nach S. 344 die Gleichungen:

$$\varphi_{k\nu}(x_1' \cdots x_s') = \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) \qquad (k = 1 \cdots r - n;\ \nu = 1 \cdots n)$$

die allgemeinste Transformation dar, welche $X_1 f \cdots X_r f$ bezüglich in: $X_1' f \cdots X_r' f$ überführt. Giebt es dagegen unter den $\varphi_{k\nu}$ weniger als s von einander unabhängige Functionen, so giebt es nach Theor. 65, S. 353 eine continuirliche Menge von Transformationen, welche jedes $X_k f$ invariant lassen; wir bemerkten schon auf S. 368, dass der Inbegriff aller derartigen Transformationen eine Gruppe bildet, von welcher sich direkt einsehen lässt, dass sie eingliedrige Gruppen umfasst.

Es scheint angemessen, noch den folgenden Satz ausdrücklich auszusprechen:

Satz 2. *Giebt es überhaupt eine infinitesimale Transformation, welche mit allen infinitesimalen Transformationen* $X_1 f \cdots X_r f$ *einer r-gliedrigen Gruppe des Raumes* $x_1 \cdots x_s$ *vertauschbar ist, so enthält die allgemeinste mit* $X_1 f \cdots X_r f$ *vertauschbare infinitesimale Transformation willkürliche Functionen, sobald die Gruppe* $X_1 f \cdots X_r f$ *intransitiv ist, dagegen nur willkürliche Parameter, sobald die Gruppe transitiv ist.*

---

*) Dieses allgemeine Theorem deutete Lie in den Math. Ann. Bd. XXV an.

§. 96.

Von hervorragender Bedeutung ist der Fall, dass die Gruppe $X_k f$ einfach transitiv ist, also der Fall $s = r = n$.

Wünscht man in diesem Falle die allgemeinste Transformation $x_i' = \Phi_i(x_1 \cdots x_n)$ zu kennen, vermöge deren jedes $X_k f$ die Form $X_k' f$ annimmt, so hat man nur n unabhängige Lösungen $\Omega_1 \cdots \Omega_n$ des n-gliedrigen vollständigen Systems:

$$X_k f + X_k' f = 0 \quad (k = 1 \cdots n)$$

aufzusuchen und dieselben gleich willkürlichen Constanten $a_1 \cdots a_n$ zu setzen. Die Gleichungen:

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n,\ x_1' \cdots x_n') = a_k \quad (k = 1 \cdots n)$$

sind dann sowohl nach den x als nach den x' auflösbar und stellen die verlangte Transformation dar.

Wir wissen von vornherein, dass der Inbegriff aller Transformationen $\Omega_k = a_k$ eine Gruppe bildet. Wir sehen jetzt, dass diese Gruppe n-gliedrig und einfach transitiv ist; das geht sofort aus der Form hervor, in welcher die Gruppe vorliegt, aufgelöst nach ihren n Parametern.

Die Gruppe:

$$\Omega_1(x, x') = a_1, \cdots \Omega_n(x, x') = a_n$$

enthält die identische Transformation und n unabhängige infinitesimale Transformationen:

$$Z_k f = \sum_1^n {}_i\, \zeta_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots n),$$

das geht aus den Entwickelungen des vorigen Paragraphen hervor; es ist aber auch an sich klar, da sich die Transformationen der Gruppe paarweise als inverse zusammen ordnen und also das Theorem 56 im Kap. 18, S. 315 Anwendung findet. Aus der Transitivität der Gruppe $Z_1 f \cdots Z_n f$ folgt überdies, dass $Z_1 f \cdots Z_n f$ durch keine lineare Relation von der Form $\Sigma \chi_i(x_1 \cdots x_s) Z_i f = 0$ verknüpft sind.

Zwischen den beiden *einfach transitiven* Gruppen $X_k f$ und $Z_i f$ besteht ein völliges Reciprocitätsverhältniss. Sind die $X_k f$ gegeben, so ist die allgemeine infinitesimale Transformation $Zf = \Sigma e_i Z_i f$ durch die n Gleichungen

$$X_k(Z(f)) - Z(X_k(f)) = 0 \quad (k = 1 \cdots n)$$

vollständig definirt; sind andererseits die $Z_i f$ gegeben, so bestimmen die n Gleichungen

$$X(Z_i(f)) - Z_i(X(f)) = 0 \quad (i=1\cdots n)$$

in gleicher Weise die allgemeine infinitesimale Transformation

$$Xf = \Sigma e_k X_k f.$$

Damit ist aber die eigenartige Beziehung, in welcher die beiden Gruppen stehen, noch nicht in erschöpfender Weise beschrieben. Die beiden Gruppen sind nämlich, wie wir jetzt zeigen werden, auch noch gleichzusammengesetzt; da beide einfach transitiv sind, folgt daraus sofort, dass sie auch mit einander ähnlich sind (vgl. Kap. 19, Theorem 64, S. 340).

Wir denken uns in den infinitesimalen Transformationen $X_k f$ und $Z_i f$ die $\xi_{k\nu}$ und $\zeta_{i\nu}$ nach Potenzen von $x_1 \cdots x_n$ entwickelt, indem wir voraussetzen, dass $x_1 = 0, \cdots x_n = 0$ ein Punkt von allgemeiner Lage ist. Nach Kap. 13, S. 217 enthält die Gruppe $X_k f$, weil sie einfach transitiv ist, gerade n infinitesimale Transformationen von nullter Ordnung in $x_1 \cdots x_n$, aus denen sich keine infinitesimale Transformation von erster oder höherer Ordnung linear ableiten lässt.

Wir können uns daher $X_1 f \cdots X_n f$ durch n andere unabhängige infinitesimale Transformationen $\mathfrak{X}_1 f \cdots \mathfrak{X}_n f$ ersetzt denken, welche bei Weglassung der Glieder zweiter und höherer Ordnung die Form:

$$\mathfrak{X}_k f = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{\mu\nu}^{1\cdots n} h_{k\mu\nu} x_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \cdots \quad (k=1\cdots n)$$

haben. In derselben Weise können wir $Z_1 f \cdots Z_n f$ durch n unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$\mathfrak{Z}_i f = -\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{\mu\nu}^{1\cdots n} l_{i\mu\nu} x_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \cdots \quad (i=1\cdots n$$

ersetzen.

Nach diesen Vorbereitungen bilden wir die Gleichung $(\mathfrak{X}_k \mathfrak{Z}_i) = 0$; dieselbe nimmt die Form an:

$$\sum_1^n{}^\nu (l_{ik\nu} + h_{ki\nu}) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \cdots = 0,$$

woraus folgt:

$$l_{ik\nu} = - h_{ki\nu}.$$

Rechnungen derselben Art ergeben:

$$(\mathfrak{X}_k \mathfrak{X}_j) = \sum_1^n{}^\nu (h_{jk\nu} - h_{kj\nu}) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \cdots$$

$$(\mathfrak{Z}_k\mathfrak{Z}_j)=\sum_1^n{}_\nu(-l_{jk\nu}+l_{kj\nu})\frac{\partial f}{\partial x_\nu}+\cdots$$

$$=\sum_1^n{}_\nu(h_{kj\nu}-h_{jk\nu})\frac{\partial f}{\partial x_\nu}+\cdots.$$

Andererseits ist:

$$(\mathfrak{X}_k\mathfrak{X}_j)=\sum_1^n{}_\nu\mathfrak{c}_{kj\nu}\mathfrak{X}_\nu f,\ (\mathfrak{Z}_k\mathfrak{Z}_j)=\sum_1^n{}_\nu\mathfrak{c}'_{kj\nu}\mathfrak{Z}_\nu f;$$

hier setzen wir die eben gefundenen Ausdrücke für: $\mathfrak{X}_\nu f$, $\mathfrak{Z}_\nu f$, $(\mathfrak{X}_k\mathfrak{X}_j)$, $(\mathfrak{Z}_k\mathfrak{Z}_j)$ ein und machen sodann die Substitution: $x_1=0, \cdots x_n=0$; da kommt:

$$\mathfrak{c}_{kj\nu}=h_{jk\nu}-h_{kj\nu}=\mathfrak{c}'_{kj\nu}.$$

Also sind unsere beiden Gruppen wirklich gleichzusammengesetzt und in Folge dessen, wie schon oben bemerkt, mit einander ähnlich. Somit gilt das

Theorem 68. *Sind $X_1f\cdots X_nf$ unabhängige infinitesimale Transformationen einer einfach transitiven Gruppe in den Veränderlichen $x_1\cdots x_n$, so definiren die n Gleichungen $(X_kZ)=0$ die allgemeine infinitesimale Transformation Zf einer zweiten einfach transitiven Gruppe $Z_1f\cdots Z_nf$, welche mit der Gruppe $X_1f\cdots X_nf$ gleichzusammengesetzt und zugleich ähnlich ist. Die Beziehung zwischen diesen beiden einfach transitiven Gruppen ist eine gegenseitige: jede der beiden Gruppen besteht aus dem Inbegriffe aller eingliedrigen Gruppen, deren Transformationen mit jeder Transformation der andern Gruppe vertauschbar sind.**)

Es ist bequem, die Gruppen X_kf und Z_if als *reciproke* Transformationsgruppen zu bezeichnen, oder immer die eine als die reciproke Gruppe der andern.

Erinnern wir uns aus Kap. 16, S. 276, dass die ausgezeichneten infinitesimalen Transformationen $e_1X_1f+\cdots+e_nX_nf=Yf$ der Gruppe $X_1f\cdots X_nf$ durch die n Gleichungen $(X_kY)=0$ definirt sind, so können wir noch den folgenden Satz aussprechen:

Satz 3. *Die gemeinsamen infinitesimalen Transformationen zweier reciproker einfach transitiver Gruppen sind zugleich die ausgezeichneten infinitesimalen Transformationen beider Gruppen.*

---

*) Das Theorem 68 theilte Lie der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania im Nov. 1882 und Mai 1883 mit; vgl. auch die Math. Annalen Bd. XXV, S. 107 ff.

Die beiden n-gliedrigen Gruppen $X_1f \cdots X_nf$ und $Z_1f \cdots Z_nf$ in den n Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ seien einfach transitiv und zu einander reciprok. Gehen dann bei Einführung neuer Veränderlicher $x_1' \cdots x_n'$ die X_kf über in $X_k'f$, die Z_kf über in $Z_k'f$, so sind auch die beiden einfach transitiven Gruppen $X_1'f \cdots X_n'f$ und $Z_1'f \cdots Z_n'f$ zu einander reciprok; das folgt unmittelbar aus der Relation: $(X_k'Z_j') = (X_kZ_j) \equiv 0$.

Hieraus ergiebt sich insbesondere der

Satz 4. *Bleibt eine n-gliedrige einfach transitive Gruppe in n Veränderlichen bei einer Transformation invariant, so bleibt gleichzeitig ihre reciproke einfach transitive Gruppe invariant.*

Aus diesem Satz folgt endlich der nachstehende:

Satz 5. *Die grösste Gruppe des Raumes $x_1 \cdots x_n$, in welcher eine n-gliedrige einfach transitive Gruppe dieses Raumes als invariante Untergruppe enthalten ist, fällt zusammen mit der grössten Gruppe, in welcher die reciproke Gruppe dieser einfach transitiven Gruppe als invariante Untergruppe enthalten ist.*

Wir wollen zu den vorstehenden allgemeinen Entwickelungen über einfach transitive Gruppen ein paar einfache Beispiele geben.

Die Gruppe

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$$

der Ebene x, y ist einfach transitiv. Die endlichen Gleichungen der reciproken Gruppe ergeben sich durch Integration des vollständigen Systems

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x'} = 0, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + x'\frac{\partial f}{\partial x'} + y'\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

in folgender Form:

$$\frac{x' - x}{y} = a, \quad \frac{y'}{y} = b,$$

also nach x' und y' aufgelöst:

$$x' = x + ay \qquad y' = by.$$

Die infinitesimalen Transformationen der reciproken Gruppe werden demnach:

$$y\frac{\partial f}{\partial x}, \quad y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Ein interessanteres Beispiel bietet die sechsgliedrige projective Gruppe einer nicht ausgearteten Fläche zweiter Ordnung im gewöhnlichen Raume. Diese Gruppe enthält nämlich zwei dreigliedrige einfach transitive zu einander reciproke Gruppen, von denen die eine alle Erzeugenden der einen Schaar stehen lässt, die andere alle Erzeugenden der andern Schaar.

Ist $z - xy = 0$ die Gleichung der Fläche, so ist

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial z}, \quad X_2 f = x \frac{\partial f}{\partial x} + z \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$X_3 f = x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + (xy - z) \frac{\partial f}{\partial y} + xz \frac{\partial f}{\partial z}$$

die eine der beiden einfach transitiven Gruppen und

$$Z_1 f = \frac{\partial f}{\partial y} + x \frac{\partial f}{\partial z}, \quad Z_2 f = y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$Z_3 f = (xy - z) \frac{\partial f}{\partial x} + y^2 \frac{\partial f}{\partial y} + yz \frac{\partial f}{\partial z}$$

die andere.

Die beiden reciproken Gruppen sind natürlich mit einander ähnlich; zu bemerken ist aber, dass sie durch eine *projective* Transformation mit einander ähnlich sind, nämlich durch jede projective Transformation, welche die beiden Schaaren von Erzeugenden der Fläche mit einander vertauscht.

§ 97.

Wir fahren fort in den allgemeinen Untersuchungen über reciproke einfach transitive Gruppen.

Es seien $X_1 f \cdots X_n f$ und $Z_1 f \cdots Z_n f$ zwei einfach transitive und zu einander reciproke Gruppen in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$.

Wäre n gleich 1, so wären beide Gruppen mit einander identisch, wie man sich leicht überzeugt; wir wollen daher voraussetzen, dass n grösser als 1 ist. Dann enthält die Gruppe $Z_1 f \cdots Z_n f$ sicher Untergruppen. Ist $Z_1 f \cdots Z_m f$ $(m < n)$ eine solche, so bilden die m Gleichungen:

$$Z_1 f = 0, \quad \cdots Z_m f = 0$$

ein m-gliedriges vollständiges System, welches, wie aus den Identitäten:

$$(X_i Z_1) \equiv 0, \quad \cdots (X_i Z_m) \equiv 0 \quad (i = 1 \cdots n)$$

hervorgeht, die Gruppe $X_1 f \cdots X_n f$ gestattet (vgl. Kap. 8, Theorem 20, S. 140). Folglich ist die Gruppe $X_1 f \cdots X_n f$ *imprimitiv.*

Sind $u_1 \cdots u_{n-m}$ unabhängige Lösungen des vollständigen Systems $Z_1 f = 0, \cdots Z_m f = 0$, so bestehen nach Kap. 8, Satz 1, S. 139 Relationen von der Form:

$$X_i u_\nu = \omega_{i\nu}(u_1 \cdots u_{n-m}) \quad (i = 1 \cdots n, \ \nu = 1 \cdots n - m)$$

und es werden daher (vgl. S. 143) die ∞^{n-m} m-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten:

$$u_1 = \text{const.}, \quad \cdots u_{n-m} = \text{const.}$$

von der Gruppe $X_1 f \cdots X_n f$ unter einander vertauscht.

Wir haben also den

Satz 6. *Jede einfach transitive Gruppe:* $X_1 f \cdots X_n f$ *in* $n > 1$ *Veränderlichen:* $x_1 \cdots x_n$ *ist imprimitiv; ist* $Z_1 f \cdots Z_n f$ *die zugehörige reciproke Gruppe und* $Z_1 f \cdots Z_m f$ *eine beliebige Untergruppe derselben mit den Invarianten* $u_1 \cdots u_{n-m}$, *so gestattet das* m*-gliedrige vollständige System* $Z_1 f = 0, \cdots Z_m f = 0$ *die Gruppe* $X_1 f \cdots X_n f$ *und die* ∞^{n-m} m*-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten:* $u_1 = \text{const.}, \cdots u_{n-m} = \text{const.}$ *werden von dieser Gruppe unter einander vertauscht.*

Der vorstehende Satz zeigt, dass jede m-gliedrige Untergruppe der Gruppe $Z_1 f \cdots Z_n f$ eine ganz bestimmte bei der Gruppe $X_1 f \cdots X_n f$ invariante Zerlegung des Raumes $x_1 \cdots x_n$ in ∞^{n-m} m-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten liefert. Denken wir uns daher alle Untergruppen der Gruppe $Z_1 f \cdots Z_n f$ bestimmt und zu jeder die zugehörigen Invarianten berechnet, so erhalten wir unendlich viele bei der Gruppe $X_1 f \cdots X_n f$ invariante Zerlegungen des Raumes. Es lässt sich nachweisen, dass auf diese Weise alle vorhandenen invarianten Zerlegungen gefunden werden, dass also der Satz 6 sich umkehren lässt.

Es sei: $Y_1 f = 0, \cdots Y_m f = 0$ irgend ein m-gliedriges vollständiges System, welches die Gruppe $X_1 f \cdots X_n f$ gestattet, $u_1 \cdots u_{n-m}$ seien unabhängige Lösungen dieses vollständigen Systems, so dass also die Schaar der ∞^{n-m} m-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten:

$$u_1 = \text{const.}, \cdots u_{n-m} = \text{const.}$$

eine bei der Gruppe $X_1 f \cdots X_n f$ invariante Zerlegung des Raumes $x_1 \cdots x_n$ darstellt. Wir behaupten, dass die Gruppe $Z_1 f \cdots Z_n f$ eine ganz bestimmte m-gliedrige Untergruppe enthält, welche jede einzelne dieser ∞^{n-m} Mannigfaltigkeiten stehen lässt; das ist eben die Umkehrung des Satzes 6.

Wir führen zunächst in unseren reciproken Gruppen die Functionen $u_1 \cdots u_{n-m}$ und irgend m von denselben und von einander unabhängige Functionen: $v_1 \cdots v_m$ der x als Veränderliche ein, dann wird:

$$X_k f = \sum_1^{n-m} {}_\nu \, \omega_{k\nu}(u_1 \cdots u_{n-m}) \frac{\partial f}{\partial u_\nu} + \sum_1^{m} {}_\mu \, X_k v_\mu \frac{\partial f}{\partial v_\mu} \qquad (k = 1 \cdots n)$$

und:

$$Z_k f = \sum_1^{n-m} {}_\nu \, Z_k u_\nu \frac{\partial f}{\partial u_\nu} + \sum_1^{m} {}_\mu \, Z_k v_\mu \frac{\partial f}{\partial v_\mu} \qquad (k = 1 \cdots n),$$

wo die $X_k v_\mu$, $Z_k u_\nu$ und $Z_k v_\mu$ gewisse Functionen der u und v sind. Unsere Behauptung kommt nun offenbar darauf hinaus, dass sich aus $Z_1 f \cdots Z_n f$ gerade m unabhängige infinitesimale Transformationen linear ableiten lassen sollen, welche $u_1 \cdots u_{n-m}$ gar nicht transformiren, in denen also die Coefficienten von $\frac{\partial f}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial u_{n-m}}$ sämmtlich null sind.

Um das beweisen zu können, müssen wir die Coefficienten von $\frac{\partial f}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial u_{n-m}}$ in der allgemeinen infinitesimalen Transformation $Zf = e_1 Z_1 f + \cdots + e_n Z_n f$ der Gruppe $Z_1 f \cdots Z_n f$ berechnen.

Die infinitesimale Transformation Zf ist durch die Relationen:

$$X_1(Z(f)) - Z(X_1(f)) = 0, \cdots X_n(Z(f)) - Z(X_n(f)) = 0$$

vollständig definirt. Ersetzen wir in denselben f durch u_ν, so erhalten wir die Relationen:

$$X_1(Zu_\nu) - Z\omega_{1\nu} = 0, \cdots X_n(Zu_\nu) - Z\omega_{n\nu} = 0 \quad (\nu = 1 \cdots n - m).$$

Folglich sind die Functionen $Zu_1 \cdots Zu_{n-m}$ Lösungen der Differentialgleichungen:

$$(7) \qquad X_k \varrho_\nu - \sum_1^{n-m} {}^{\mu} \frac{\partial \omega_{k\nu}}{\partial u_\mu} \varrho_\mu = 0 \quad (k = 1 \cdots n, \ \nu = 1 \cdots n - m),$$

in welchen $\varrho_1 \cdots \varrho_{n-m}$ als die unbekannten Functionen anzusehen sind.

Wenn

$$(8) \quad \varrho_1 = \psi_1(u_1 \cdots u_{n-m}, v_1 \cdots v_m), \cdots \varrho_{n-m} = \psi_{n-m}(u_1 \cdots u_{n-m}, v_1 \cdots v_m)$$

irgend ein Lösungensystem der Differentialgleichungen (7) ist, so verschwinden die $n(n - m)$ Ausdrücke:

$$X_k \psi_\nu - \sum_1^{n-m} {}^{\mu} \frac{\partial \omega_{k\nu}}{\partial u_\mu} \varrho_\mu$$

bei der Substitution: $\varrho_1 = \psi_1, \cdots \varrho_{n-m} = \psi_{n-m}$ sämmtlich identisch. Fassen wir daher die Gleichungen (8) auf als ein Gleichungensystem in den $n + n - m$ Veränderlichen: $u_1 \cdots u_{n-m}, v_1 \cdots v_m, \varrho_1 \cdots \varrho_{n-m}$, so erkennen wir sofort, dass dieses Gleichungensystem die n infinitesimalen Transformationen:

$$(9) \qquad U_k f = X_k f + \sum_1^{n-m} {}^{\nu} \left\{ \sum_1^{n-m} {}^{\mu} \frac{\partial \omega_{k\nu}}{\partial u_\mu} \varrho_\mu \right\} \frac{\partial f}{\partial \varrho_\nu} \quad (k = 1 \cdots n)$$

gestattet. Umgekehrt ist auch klar: kennt man irgend ein Gleichungensystem von der Form (8), welches die infinitesimalen Transformationen $U_1 f \cdots U_n f$ gestattet, so kennt man auch ein System Lösungen der Differentialgleichungen (7), denn die Functionen $\psi_1 \cdots \psi_{n-m}$ sind ein solches System.

Hieraus geht hervor, dass die Bestimmung des allgemeinsten Lösungensystems der Differentialgleichungen (7) darauf hinauskommt, in den $2n - m$ Veränderlichen u, v, ϱ das allgemeinste Gleichungensystem (8) zu bestimmen, welches die infinitesimalen Transformationen $U_1 f \cdots U_n f$ gestattet.

Jedes Gleichungensystem, welches $U_1 f \cdots U_n f$ gestattet, lässt auch die sämmtlichen infinitesimalen Transformationen $(U_i U_k)$ zu. Durch Ausrechnung finden wir:

$$(U_i U_k) = (X_i X_k) + \sum_{\mu \nu \pi}^{1 \cdots n-m} \left(\omega_{i\pi} \frac{\partial^2 \omega_{k\nu}}{\partial u_\mu \partial u_\pi} - \omega_{k\pi} \frac{\partial^2 \omega_{i\nu}}{\partial u_\mu \partial u_\pi} \right) \varrho_\mu \frac{\partial f}{\partial \varrho_\nu} +$$

$$+ \sum_{\mu \nu \pi}^{1 \cdots n-m} \left(\frac{\partial \omega_{i\nu}}{\partial u_\mu} \frac{\partial \omega_{k\pi}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial \omega_{k\nu}}{\partial u_\mu} \frac{\partial \omega_{i\pi}}{\partial u_\nu} \right) \varrho_\mu \frac{\partial f}{\partial \varrho_\pi},$$

oder anders geschrieben:

$$(U_i U_k) = (X_i X_k) + \sum_{\mu \nu}^{1 \cdots n-m} \frac{\partial}{\partial u_\mu} (X_i \omega_{k\nu} - X_k \omega_{i\nu}) \cdot \varrho_\mu \frac{\partial f}{\partial \varrho_\nu}.$$

Da nun $X_1 f \cdots X_n f$ eine Gruppe erzeugen, so bestehen Relationen von der Form:

$$(X_i X_k) = X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f)) = \sum_1^n {}_\sigma \, c_{ik\sigma} X_\sigma f,$$

es ist also insbesondere:

$$X_i(X_k u_\nu) - X_k(X_i u_\nu) = X_i \omega_{k\nu} - X_k \omega_{i\nu} =$$

$$= \sum_1^n {}_\sigma \, c_{ik\sigma} \omega_{\sigma\nu}$$

und es wird:

$$(U_i U_k) = \sum_1^n {}_\sigma \, c_{ik\sigma} U_\sigma f.$$

Folglich erzeugen die infinitesimalen Transformationen $U_1 f \cdots U_n f$ eine n-gliedrige Gruppe in den $2n - m$ Veränderlichen $u_1 \cdots u_{n-m}$, $v_1 \cdots v_m$, $\varrho_1 \cdots \varrho_{n-m}$.

Es handelt sich also jetzt darum, das allgemeinste Gleichungensystem von der Form (8) zu bestimmen, welches die Gruppe $U_1 f \cdots U_n f$ gestattet. Da $X_1 f \cdots X_n f$ durch keine lineare Relation verknüpft sind, so verschwinden in der Matrix, welche zu $U_1 f \cdots U_n f$ gehört, nicht alle n-reihigen Determinanten identisch und ebensowenig können alle diese Determinanten vermöge eines Gleichungensystems von der Form (8) verschwinden. Aus Kap. 14, Theorem 42, S. 237 ergiebt sich daher, dass jedes Gleichungensystem von der Form (8), welches die Gruppe $U_1 f \cdots U_n f$ gestattet, durch Relationen zwischen den Lösungen des n-gliedrigen vollständigen Systems $U_1 f = 0, \cdots U_n f = 0$

dargestellt wird. Nun besitzt dieses vollständige System gerade $n-m$ unabhängige Lösungen, etwa:

$$\Psi_\mu(u_1 \cdots u_{n-m},\, v_1 \cdots v_m,\, \varrho_1 \cdots \varrho_{n-m}) \qquad (k=1 \cdots n-m)$$

und zwar sind $\Psi_1 \cdots \Psi_{n-m}$ in Bezug auf $\varrho_1 \cdots \varrho_{n-m}$ von einander unabhängig, weil das vollständige System nach den Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial u_{n-m}}, \frac{\partial f}{\partial v_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial v_m}$ auflösbar ist (vgl. Kap. 5, Theorem 12, S. 91). Wir schliessen daraus, dass das allgemeinste Gleichungensystem (8), welches die Gruppe $U_1 f \cdots U_n f$ gestattet, die Form:

$$\Psi_1 = C_1, \cdots \Psi_{n-m} = C_{n-m}$$

erhalten kann, wo $C_1 \cdots C_{n-m}$ willkürliche Constanten bezeichnen.

Lösen wir das eben gefundene Gleichungensystem nach $\varrho_1 \cdots \varrho_{n-m}$ auf, was sicher möglich ist, so erhalten wir das allgemeinste Lösungensystem der Differentialgleichungen (7), wir sehen also, dass dieses allgemeinste Lösungensystem gerade $n-m$ wesentliche willkürliche Constanten enthält. Da nun die Differentialgleichungen (7) in den Unbekannten $\varrho_1 \cdots \varrho_{n-m}$ linear und homogen sind, so muss das bewusste allgemeinste Lösungensystem die Form erhalten können:

$$(10) \qquad \varrho_\mu = C_1' \psi_\mu^{(1)} + C_2' \psi_\mu^{(2)} + \cdots + C_{n-m}' \psi_\mu^{(n-m)} \qquad (\mu = 1 \cdots n-m),$$

wo die $n-m$ Functionensysteme:

$$\psi_1^{(\nu)},\ \psi_2^{(\nu)} \cdots \psi_{n-m}^{(\nu)} \qquad (\nu = 1 \cdots n-m)$$

ebensoviel linear unabhängige, von willkürlichen Constanten freie Lösungensysteme der Differentialgleichungen (7) darstellen und wo die C' willkürliche Constanten sind. Selbstverständlich verschwindet hier die Determinante der ψ nicht, da sich die Gleichungen (10) nach $C_1' \cdots C_{n-m}'$ auflösen lassen müssen.

Die Functionen: $Zu_1 \cdots Zu_{n-m}$ sind nach S. 384 Lösungen der Differentialgleichungen (7), sie haben daher die Form:

$$Zu_\mu = \overline{C}_1 \psi_\mu^{(1)} + \cdots + \overline{C}_{n-m} \psi_\mu^{(n-m)} \qquad (\mu = 1 \cdots n-m).$$

Hierbei sind die $\overline{C}_\nu$ Constanten, über die wir vorläufig noch nichts genaueres wissen; es wäre ja noch denkbar, dass sie durch lineare Relationen verknüpft wären.

Aus den Werthen der Zu_μ ergiebt sich für die allgemeine infinitesimale Transformation Zf der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_n f$ die folgende Darstellung:

$$Zf = \sum_{\mu,\nu}^{1 \cdots n-m} \overline{C}_\mu \psi_\nu^{(\mu)} \frac{\partial f}{\partial u_\nu} + \sum_1^m {}_\mu\, Zv_\mu \frac{\partial f}{\partial v_\mu}.$$

Da nun die $n - m$ Ausdrücke:

$$\sum_1^{n-m} \nu\, \psi_\nu^{(\mu)} \frac{\partial f}{\partial u_\nu} \qquad (\mu = 1 \cdots n - m)$$

unabhängige infinitesimale Transformationen darstellen, so lassen sich offenbar aus $Z_1 f \cdots Z_n f$ mindestens m, also etwa gerade $m + \varepsilon$ unabhängige infinitesimale Transformationen linear ableiten, in denen die Coefficienten von $\frac{\partial f}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial u_{n-m}}$ gleich Null sind. Diese $m + \varepsilon$ infinitesimalen Transformationen erzeugen natürlich eine $(m + \varepsilon)$-gliedrige Untergruppe der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_n f$ und zwar eine Untergruppe, welche jede der ∞^{n-m} m-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten: $u_1 = \text{const.}$, $\cdots u_{n-m} = \text{const.}$ stehen lässt. Das aber ist nur möglich, wenn die ganze Zahl ε gleich Null ist, denn wäre $\varepsilon > 0$, so könnte die Gruppe $Z_1 f \cdots Z_n f$ nicht einfach transitiv sein.

Damit ist die auf S. 383 aufgestellte Behauptung bewiesen, wir können also den folgenden Satz aussprechen:

Satz 7. *Sind $X_1 f \cdots X_n f$ und $Z_1 f \cdots Z_n f$ zwei reciproke einfach transitive Gruppen in den n Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, und ist*

$$u_1(x_1 \cdots x_n) = \text{const.}, \cdots u_{n-m}(x_1 \cdots x_n) = \text{const.}$$

irgend eine bei der Gruppe $X_1 f \cdots X_n f$ invariante Zerlegung des Raumes $x_1 \cdots x_n$ in ∞^{n-m} m-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten, so enthält die Gruppe $Z_1 f \cdots Z_n f$ stets eine m-gliedrige Untergruppe, welche jede einzelne dieser ∞^{n-m} Mannigfaltigkeiten stehen lässt.

Durch Verbindung dieses Satzes mit dem Satze 6, S. 383 erhalten wir das

Theorem 69. *Ist die n-gliedrige Gruppe $X_1 f \cdots X_n f$ in den n Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ einfach transitiv, so findet man alle m-gliedrigen vollständigen Systeme, welche diese Gruppe gestatten, oder was dasselbe ist, alle invarianten Zerlegungen des Raumes $x_1 \cdots x_n$ in ∞^{n-m} m-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten folgendermassen: Man bestimme zunächst die zur Gruppe $X_1 f \cdots X_n f$ gehörige reciproke einfach transitive Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_n f$ und stelle alle m-gliedrigen Untergruppen dieser letzteren auf; ist etwa:*

$$\mathsf{Z}_\mu f = g_{\mu 1} Z_1 f + \cdots + g_{\mu n} Z_n f \qquad (\mu = 1 \cdots m)$$

eine der gefundenen Untergruppen, so stellen die Gleichungen $\mathsf{Z}_1 f = 0, \cdots \mathsf{Z}_m f = 0$ eines der gesuchten vollständigen Systeme dar und bestimmen eine bei der Gruppe $X_1 f \cdots X_n f$ invariante Zerlegung des Raumes $x_1 \cdots x_n$ in ∞^{n-m} m-fach ausgedehnte

Mannigfaltigkeiten; bildet man für jede der gefundenen Untergruppen das m-gliedrige vollständige System, welches sie liefert, so erhält man alle m-gliedrigen vollständigen Systeme, welche die Gruppe $X_1f \cdots X_nf$ gestatten. Führt man die angedeutete Untersuchung für jede der Zahlen $m = 1, 2 \cdots n - 1$ durch, so erhält man überhaupt alle vollständigen Systeme, welche die Gruppe $X_1f \cdots X_nf$ gestatten und damit zugleich alle bei dieser Gruppe invarianten Zerlegungen des Raumes $x_1 \cdots x_n$.

Das vorstehende Theorem enthält die Lösung der Aufgabe, alle möglichen Weisen zu bestimmen, in denen eine vorgelegte *einfach transitive* Gruppe imprimitiv ist.

Es mögen jetzt die Gleichungen:

$$u_1 = \text{const.}, \quad \cdots u_{n-m} = \text{const.}$$

wieder irgend eine bei der Gruppe $X_1f \cdots X_nf$ invariante Zerlegung des Raumes $x_1 \cdots x_n$ in ∞^{n-m} m-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten darstellen, so dass also, wenn $u_1 \cdots u_{n-m}$ nebst m geeigneten Functionen $v_1 \cdots v_m$ als neue Veränderliche eingeführt werden, $X_1f \cdots X_nf$ die Form erhalten:

$$X_kf = \sum_1^{n-m} {}_{\nu}\, \omega_{k\nu}(u_1 \cdots u_{n-m}) \frac{\partial f}{\partial u_\nu} + \sum_1^{m} {}_{\mu}\, \xi_{k\mu}(u_1 \cdots u_{n-m},\ v_1 \cdots v_m) \frac{\partial f}{\partial v_\mu}.$$

Hier können nicht alle $(n-m)$-reihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \omega_{11} & \cdot & \omega_{1,\, n-m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{n1} & \cdot & \omega_{n,\, n-m} \end{vmatrix}$$

identisch verschwinden, sonst müssten $X_1f \cdots X_nf$ durch eine lineare Relation verknüpft sein, was gegen die Voraussetzung wäre. Verstehen wir daher unter $u_1^0 \cdots u_{n-m}^0$ ein allgemeines Werthsystem, so enthält die Gruppe $X_1f \cdots X_nf$ nach Kap. 13, S. 222 gerade ∞^{m-1} verschiedene infinitesimale Transformationen, welche das Gleichungensystem:

$$u_1 = u_1^0, \quad \cdots u_{n-m} = u_{n-m}^0$$

invariant lassen; diese infinitesimalen Transformationen erzeugen dann natürlich eine m-gliedrige Untergruppe, die allgemeinste Untergruppe der Gruppe $X_1f \cdots X_nf$, welche die m-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit: $u_1 = u_1^0, \cdots u_{n-m} = u_{n-m}^0$ oder kurz M stehen lässt.

Die eben besprochene m-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit M gestattet nun auf der andern Seite auch m unabhängige infinitesimale Transformationen der reciproken Gruppe $Z_1f \cdots Z_nf$, denn diese Gruppe enthält ja nach Satz 7, S. 387 eine m-gliedrige Untergruppe, welche jede einzelne der ∞^{n-m} Mannigfaltigkeiten:

$$u_1 = \text{const.}, \cdots u_{n-m} = \text{const.}$$

stehen lässt. Es ist überdies klar, dass M keine grössere Untergruppe der Gruppe $Z_1 f \cdots Z_n f$ gestatten kann, da ja $u_1^0 \cdots u_{n-m}^0$ ein allgemeines Werthsystem sein soll.

Wir ersehen hieraus, dass M von jeder der beiden reciproken Gruppen: $X_1 f \cdots X_n f$ und: $Z_1 f \cdots Z_n f$ gerade m unabhängige infinitesimale Transformationen zulässt, also von jeder eine ganz bestimmte m-gliedrige Untergruppe.

Wir können diese beiden m-gliedrigen Untergruppen sichtbar machen, wenn wir irgend ein Werthsystem: $v_1^0 \cdots v_m^0$ von allgemeiner Lage auswählen und die infinitesimalen Transformationen unserer beiden reciproken Gruppen nach Potenzen von: $u_1 - u_1^0, \cdots u_{n-m} - u_{n-m}^0$, $v_1 - v_1^0, \cdots v_m - v_m^0$ entwickeln. Sehen wir nämlich von den Gliedern erster und höherer Ordnung ab, so können wir ähnlich wie auf S. 379 die infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \cdots X_n f$ durch n unabhängige von der Form:

$$\mathfrak{X}_1 f = \frac{\partial f}{\partial u_1} + \cdots, \quad \cdots \mathfrak{X}_{n-m} f = \frac{\partial f}{\partial u_{n-m}} + \cdots,$$

$$\mathfrak{X}_{n-m+1} f = \frac{\partial f}{\partial v_1} + \cdots, \quad \cdots \mathfrak{X}_n f = \frac{\partial f}{\partial v_m} + \cdots$$

ersetzen und $Z_1 f \cdots Z_n f$ durch n von der Form:

$$\mathfrak{Z}_1 f = -\frac{\partial f}{\partial u_1} + \cdots, \quad \cdots \mathfrak{Z}_{n-m} f = -\frac{\partial f}{\partial u_{n-m}} + \cdots,$$

$$\mathfrak{Z}_{n-m+1} f = -\frac{\partial f}{\partial v_1} + \cdots, \quad \cdots \mathfrak{Z}_n f = -\frac{\partial f}{\partial v_m} + \cdots.$$

Hier sind offenbar $\mathfrak{X}_{n-m+1} f \cdots \mathfrak{X}_n f$ unabhängige infinitesimale Transformationen, welche die Mannigfaltigkeit: $u_1 = u_1^0, \cdots u_{n-m} = u_{n-m}^0$ invariant lassen, und $\mathfrak{Z}_{n-m+1} f \cdots \mathfrak{Z}_n f$ sind unabhängige infinitesimale Transformationen, welche dasselbe thun; es sind also: $\mathfrak{X}_{n-m+1} f \cdots \mathfrak{X}_n f$ und $\mathfrak{Z}_{n-m+1} f \cdots \mathfrak{Z}_n f$ die beiden m-gliedrigen Untergruppen, von denen wir soeben gesprochen haben.

Aus dieser Darstellung der beiden Untergruppen lassen sich einige bemerkenswerthe Schlüsse ziehen.

Zwischen $\mathfrak{X}_1 f \cdots \mathfrak{X}_n f$ bestehen Relationen von der Form:

$$(\mathfrak{X}_i \mathfrak{X}_k) = \sum_1^n {}_\nu\, c_{ik\nu} \mathfrak{X}_\nu f$$

und nach S. 379 f. bestehen zwischen $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_n f$ dieselben Relationen:

$$(\mathfrak{Z}_i \mathfrak{Z}_k) = \sum_1^n {}^\nu \mathfrak{c}_{ik\nu} \mathfrak{Z}_\nu f$$

mit denselben Constanten $\mathfrak{c}_{ik\nu}$. Hieraus ergiebt sich, dass die beiden Untergruppen: $\mathfrak{X}_{n-m+1}f \cdots \mathfrak{X}_n f$ und $\mathfrak{Z}_{n-m+1}f \cdots \mathfrak{Z}_n f$ mit einander gleichzusammengesetzt sind. Es ergiebt sich aber noch mehr. Da nämlich die beiden Gruppen: $X_1 f \cdots X_n f$ und: $Z_1 f \cdots Z_n f$ holoedrisch isomorph auf einander bezogen sind, wenn jeder infinitesimalen Transformation: $e_1 \mathfrak{X}_1 f + \cdots + e_r \mathfrak{X}_r f$ die infinitesimale Transformation: $e_1 \mathfrak{Z}_1 f + \cdots + e_r \mathfrak{Z}_r f$ zugeordnet wird, und da bei dieser Zuordnung offenbar der Untergruppe: $\mathfrak{X}_{n-m+1} f \cdots \mathfrak{X}_r f$ die Untergruppe: $\mathfrak{Z}_{n-m+1} f \cdots \mathfrak{Z}_r f$ entspricht, so erhellt, dass die beiden reciproken Gruppen derart holoedrisch isomorph auf einander bezogen werden können, dass die beiden m-gliedrigen Untergruppen, welche M invariant lassen, einander entsprechen.

Fassen wir die Ergebnisse der SS. 388 ff. zusammen, so haben wir den

Satz 8. *Gestattet eine m-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit des Raumes $x_1 \cdots x_n$ gerade m unabhängige infinitesimale Transformationen und also eine m-gliedrige Untergruppe einer einfach transitiven Gruppe $X_1 f \cdots X_n f$ dieses Raumes, so gestattet sie zugleich gerade m unabhängige infinitesimale Transformationen und also eine m-gliedrige Untergruppe der zu $X_1 f \cdots X_n f$ reciproken einfach transitiven Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_n f$. Die beiden so definirten m-gliedrigen Untergruppen sind gleichzusammengesetzt, und es ist möglich, die beiden reciproken einfach transitiven Gruppen derart holoedrisch isomorph auf einander zu beziehen, dass diese m-gliedrigen Untergruppen einander entsprechen.*

§ 98.

Der grösste Theil der Resultate des vorigen Paragraphen lässt sich durch einfache begriffliche Betrachtungen ableiten. Wir werden das jetzt durchführen und zugleich noch einige weitere Ergebnisse gewinnen.

Es seien wie bisher $X_1 f \cdots X_n f$ und $Z_1 f \cdots Z_n f$ zwei reciproke einfach transitive Gruppen in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$; ferner sei $Z_1 f \cdots Z_m f$ wieder irgend eine m-gliedrige Untergruppe der Gruppe $Z_1 f \cdots Z_n f$ und $u_1 \cdots u_{n-m}$ seien ihre Invarianten. Der Buchstabe S sei allgemeines Symbol einer Transformation der Gruppe $Z_1 f \cdots Z_m f$, endlich sei T eine beliebig gewählte Transformation der Gruppe $X_1 f \cdots X_n f$.

Ist nun P irgend ein Punkt des Raumes $x_1 \cdots x_n$, so ist:

$$(P') = (P) S$$

allgemeines Symbol eines Punktes auf derjenigen Mannigfaltigkeit:

$$u_1 = \text{const.}, \cdots u_{n-m} = \text{const.},$$

welche durch den Punkt P geht. Da ferner die Transformationen S und T mit einander vertauschbar sind, so wird:

$$(P')T = (P)ST = (P)TS,$$

also wenn wir den Punkt $(P)T$ mit Π bezeichnen:

(11) $$(P')T = (\Pi)S.$$

Hier ist $(\Pi)S$ allgemeines Symbol eines Punktes auf der durch Π gehenden Mannigfaltigkeit: $u_\nu = \text{const.}$ Folglich sagt unsere symbolische Gleichung (11), dass die Transformation T, also überhaupt jede Transformation der Gruppe $X_1f \cdots X_nf$ die ∞^{n-m} Mannigfaltigkeiten: $u_1 = \text{const.}, \cdots u_{n-m} = \text{const.}$ unter einander vertauscht, indem sie jede dieser Mannigfaltigkeiten in eine Mannigfaltigkeit derselben Schaar überführt.

Damit ist der Satz 6, S. 383 abgeleitet.

Aber auch die Umkehrung dieses Satzes können wir durch solche begriffliche Betrachtungen beweisen.

Denken wir uns irgend eine bei der Gruppe $X_1f \cdots X_nf$ invariante Zerlegung des Raumes $x_1 \cdots x_n$ in ∞^{n-m} m-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten gegeben und nehmen wir an, dass M eine dieser ∞^{n-m} Mannigfaltigkeiten ist. Unter P und P' verstehen wir irgend zwei Punkte von M und unter T irgend eine Transformation der Gruppe $X_1f \cdots X_nf$.

Geht P bei Ausführung von T über in Π, so haben wir:

$$(\Pi) = (P)T;$$

andererseits giebt es in der reciproken Gruppe $Z_1f \cdots Z_nf$ stets eine, aber auch nur eine Transformation S, welche P in P' überführt:

$$(P') = (P)S.$$

Wegen:

$$(P)ST = (P)TS$$

wird also:

(12) $$(P')T = (\Pi)S.$$

Diese Gleichung müssen wir zu deuten versuchen.

Setzen wir zunächst voraus, dass auch der Punkt Π der Mannigfaltigkeit M angehört. In diesem Falle hat die Transformation T die Eigenschaft, M invariant zu lassen. In der That, T vertauscht die erwähnten ∞^{n-m} Mannigfaltigkeiten unter einander, andererseits führt aber T einen Punkt von M, nämlich P, in einen Punkt von M über, nämlich in den Punkt Π; also muss T alle Punkte von M in Punkte von M überführen, es muss M invariant lassen. Da nun P' auf M liegt, so gehört auch der Punkt $(P')T$ und wegen (12) auch der Punkt $(\Pi)S$ der Mannigfaltigkeit M an; aber Π kann bei geeigneter Wahl von T jeder beliebige Punkt von M sein, also führt auch die Transformation S jeden Punkt von M in einen Punkt von M über, auch sie lässt die Mannigfaltigkeit M invariant.

Auf der anderen Seite können wir annehmen, dass Π ein beliebiger Punkt irgend einer andern unter den bewussten ∞^{n-m} Mannigfaltigkeiten ist; machen wir diese Voraussetzung, so erkennen wir aus (12) sofort, dass S die betreffende Mannigfaltigkeit in Ruhe lässt.

Hiermit ist bewiesen, dass die Gruppe $Z_1f \cdots Z_nf$ eine Transformation enthält, die Transformation S nämlich, welche jede einzelne unserer ∞^{n-m} Mannigfaltigkeiten stehen lässt. Solcher Transformationen S giebt es aber offenbar ∞^m verschiedene, denn bei festem P kann der Punkt P' innerhalb M noch auf ∞^m verschiedene Weisen gewählt werden. Mehr als ∞^m derartige Transformationen giebt es aber in der Gruppe $Z_1f \cdots Z_nf$ auch nicht, da dieselbe einfach transitiv ist; also bilden die ∞^m vorhandenen Transformationen eine m-gliedrige Untergruppe der Gruppe $Z_1f \cdots Z_nf$.

Damit ist der Satz 7, S. 387 bewiesen.

Offenbar gestattet die Mannigfaltigkeit M ausser den ∞^m Transformationen der Gruppe $Z_1f \cdots Z_nf$ auch noch ∞^m Transformationen der Gruppe $X_1f \cdots X_nf$, die nun ihrerseits eine m-gliedrige Untergruppe dieser Gruppe bilden. Das ist ein Resultat, welches in dem Satze 8, S. 390 ausgesprochen ist. —

Etwas wesentlich neues ergiebt sich, wenn in den eben durchgeführten Entwickelungen die Zahl m gleich n gewählt wird. Bisher kam dieser Fall nicht in Betracht, da ihm keine Zerlegung des Raumes $x_1 \cdots x_n$ entspricht.

Ist m gleich n, so fällt die Mannigfaltigkeit M mit dem Raume $x_1 \cdots x_n$ selbst zusammen; P und P' sind daher beliebige Punkte des Raumes, S kann bei geeigneter Wahl von P und P' jede Transformation der reciproken Gruppe $Z_1f \cdots Z_nf$ sein.

Wählen wir P und P' fest, so ist die Transformation S vollständig bestimmt; ist dann T eine beliebige Transformation der Gruppe $X_1f \cdots X_nf$, so haben wir:

$$(P)ST = (P)TS$$

oder wegen $(P') = (P)S$:

$$(P')T = (P)TS. \tag{13}$$

Hier kann der Punkt $(P)T$ durch geeignete Wahl der Transformation T mit jedem beliebigen Punkte des Raumes $x_1 \cdots x_n$ zur Deckung gebracht werden; von dem Punkte $(P')T$ gilt dasselbe. Folglich sind wir durch die Gleichung (13) in den Stand gesetzt, für jeden Punkt $\mathfrak{P}$ des Raumes die neue Lage $\mathfrak{P}'$ anzugeben, welche er bei der Transformation S erhält; wir brauchen blos diejenige Transformation T der Gruppe $X_1 f \cdots X_n f$ zu bestimmen, welche P in $\mathfrak{P}$ überführt, welche also der symbolischen Gleichung:

$$(P)\mathsf{T} = (\mathfrak{P})$$

genügt. Dann haben wir:

$$(\mathfrak{P}') = (\mathfrak{P})S = (P)\mathsf{T}S,$$

also:

$$(\mathfrak{P}') = (P')\mathsf{T}.$$

Lassen wir jetzt den Punkt $\mathfrak{P}$ alle möglichen Lagen annehmen oder, was dasselbe ist, setzen wir für T der Reihe nach alle Transformationen der Gruppe $X_1 f \cdots X_n f$, so erhalten wir jedem Punkte des Raumes $x_1 \cdots x_n$ einen ganz bestimmten andern Punkt zugeordnet, wir erhalten also eine Transformation des Raumes $x_1 \cdots x_n$, nämlich die Transformation S. Wählen wir endlich noch die Punkte P und P' in allen möglichen Weisen, so erhalten wir offenbar alle Transformationen der Gruppe $Z_1 f \cdots Z_n f$.

Wir können demnach sagen:

Werden zwei Punkte P und P' des Raumes $x_1 \cdots x_n$ vermittelst jeder der ∞^n Transformationen einer einfach transitiven Gruppe $X_1 f \cdots X_n f$ in cogredienter Weise transformirt, so gehört diejenige Transformation, welche jede der ∞^n von P angenommenen Lagen in die entsprechende Lage des Punktes P' überführt, der reciproken Gruppe $Z_1 f \cdots Z_n f$ der Gruppe $X_1 f \cdots X_n f$ an. Wählt man die Punkte P und P' in allen möglichen Weisen, so erhält man alle Transformationen der Gruppe $Z_1 f \cdots Z_n f$.

Es versteht sich von selbst, dass hier unter den Punkten P und P' immer Punkte von allgemeiner Lage zu verstehen sind oder genauer gesagt solche, die auf keiner bei der Gruppe $X_1 f \cdots X_n f$ invarianten Mannigfaltigkeit liegen.

Kennt man die endlichen Gleichungen der Gruppe $X_1 f \cdots X_n f$, so kann man die eben gefundene Construction für die Transformationen der Gruppe $Z_1 f \cdots Z_n f$ benutzen, um die endlichen Gleichungen dieser Gruppe aufzustellen.

Es seien:

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_n) \quad (i = 1 \cdots n)$$

die endlichen Gleichungen der Gruppe $X_1 f \cdots X_n f$. Nennt man dann die Coordinaten des Punktes P etwa $x_1^0 \cdots x_n^0$ und die des Punktes P' etwa $u_1^0 \cdots u_n^0$, so erhält P bei den ∞^n Transformationen der Gruppe $X_1 f \cdots X_n f$ die ∞^n verschiedenen Lagen:

$$y_i = f_i(x_1^0 \cdots x_n^0,\ a_1 \cdots a_n) \quad (i=1 \cdots n)$$

und P' erhält die ∞^n Lagen:

$$y_i' = f_i(u_1^0 \cdots u_n^0,\ a_1 \cdots a_n) \quad (i=1 \cdots n).$$

Jedes System von Werthen der a liefert einander entsprechende Lagen von P und P'; eliminiren wir daher aus den Gleichungen $y_i = f_i(x^0, a)$ und $y_i' = f_i(u^0, a)$ die Parameter $a_1 \cdots a_n$, so erhalten wir die Gleichungen:

$$(14) \qquad y_i' = \mathfrak{F}_i(y_1 \cdots y_n,\ x_1^0 \cdots x_n^0,\ u_1^0 \cdots u_n^0) \quad (i=1 \cdots n)$$

einer Transformation der Gruppe $Z_1 f \cdots Z_n f$, derjenigen Transformation nämlich, welche P in P' überführt. Lassen wir endlich $x_1^0 \cdots x_n^0$ und $u_1^0 \cdots u_n^0$ alle möglichen Werthe annehmen, so erhalten wir alle Transformationen der Gruppe $Z_1 f \cdots Z_n f$.

In den eben gefundenen Gleichungen (14) der Gruppe $Z_1 f \cdots Z_n f$ kommen $2n$ willkürliche Parameter vor; das ist aber nur scheinbar, es sind nur n von diesen Parametern wesentlich. Man kann nämlich jede einzelne Transformation der Gruppe $Z_1 f \cdots Z_n f$ auf ∞^n verschiedene Weisen erhalten, da man den Punkt P immer willkürlich wählen kann, während der Punkt P' bei festgewähltem P durch die betreffende Transformation bestimmt ist.

Hieraus folgt, dass man alle Transformationen der Gruppe $Z_1 f \cdots Z_n f$ auch in der Weise herleiten kann, dass man den Punkt P ein für alle Male fest wählt und nur den Punkt P' alle möglichen Lagen annehmen lässt; das heisst, man kann für die Grössen $x_1^0 \cdots x_n^0$ bestimmte Zahlen einsetzen und braucht blos $u_1^0 \cdots u_n^0$ als willkürliche Parameter aufzufassen.

Es gilt demnach der

Satz 9. *Sind die endlichen Gleichungen:*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_n) \quad (i=1 \cdots n)$$

einer n-gliedrigen einfach transitiven Gruppe des Raumes $x_1 \cdots x_n$ vorgelegt, so findet man die Gleichungen der reciproken einfach transitiven Gruppe folgendermassen:

Man ertheile in den Gleichungen:

$$y_i = f_i(x_1^0 \cdots x_n^0,\ a_1 \cdots a_n) \quad (i=1 \cdots n)$$

den x^0 feste Werthe und eliminire sodann aus ihnen und den Gleichungen:

$$y_i' = f_i(u_1^0 \cdots u_n^0,\ a_1 \cdots a_n) \quad (i=1 \cdots n)$$

die n Grössen $a_1 \cdots a_n$; die hervorgehenden Gleichungen:

$$y_i' = \mathfrak{F}_i(y_1 \cdots y_n,\ x_1^0 \cdots x_n^0,\ u_1^0 \cdots u_n^0) \qquad (i=1 \cdots n)$$

mit den n willkürlichen Parametern $u_1^0 \cdots u_n^0$ sind die Gleichungen der reciproken Gruppe. Voraussetzung ist, dass die x_k^0 so gewählt sind, dass der Punkt $x_1^0 \cdots x_n^0$ auf keiner Mannigfaltigkeit liegt, welche bei der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ invariant bleibt.

§ 99.

Der Satz 7, S. 387 ist ein besonderer Fall eines allgemeinen Satzes, welcher auch für gewisse Gruppen gilt, die nicht einfach transitiv sind. Wir wollen diesen allgemeinen Satz jetzt ableiten; dabei erhalten wir zugleich einen neuen Beweis für den Satz 7.

Es sei $X_1 f \cdots X_n f$ eine n-gliedrige Gruppe in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_s$ und zwar sei die Zahl n nicht grösser als s. Ausserdem machen wir noch die Voraussetzung, dass $X_1 f \cdots X_n f$ durch keine lineare Relation von der Form:

$$\chi_1(x_1 \cdots x_s) \cdot X_1 f + \cdots + \chi_n(x_1 \cdots x_s) \cdot X_n f = 0$$

verknüpft sind.

Der zu beweisende Satz kommt auf Folgendes hinaus: kennt man irgend ein m-gliedriges vollständiges System: $\mathfrak{Y}_1 f = 0, \cdots \mathfrak{Y}_m f = 0$, welches die Gruppe $X_1 f \cdots X_n f$ gestattet, so kann man dasselbe stets auf eine solche Form: $Y_1 f = 0, \cdots Y_m f = 0$ bringen, dass *die infinitesimalen Transformationen $Y_1 f \cdots Y_m f$ sämmtlich mit $X_1 f \cdots X_n f$ vertauschbar sind* und dass in den Relationen:

$$(Y_i Y_k) = \sum_1^m{}_\nu\, \tau_{ik\nu}(x_1 \cdots x_s) \cdot Y_\nu f,$$

welche zwischen $Y_1 f \cdots Y_m f$ bestehen, die $\tau_{ik\nu}$ sämmtlich Lösungen des n-gliedrigen vollständigen Systems: $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$ sind.

In dem besonderen Falle $s = n$, wo die Gruppe $X_1 f \cdots X_n f$ einfach transitiv ist, gehören die infinitesimalen Transformationen $Y_1 f \cdots Y_m f$ offenbar der zu $X_1 f \cdots X_n f$ reciproken einfach transitiven Gruppe $Z_1 f \cdots Z_n f$ an; da ferner das n-gliedrige vollständige System $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$ in diesem Falle keine andere Lösung besitzt als $f = \text{const.}$, so sind die Functionen $\tau_{ik\nu}$ blose Constanten, so dass $Y_1 f \cdots Y_m f$ eine m-gliedrige Untergruppe der Gruppe $Z_1 f \cdots Z_n f$ erzeugen. Wir haben demnach den Satz 7, S. 387.

Doch jetzt zu dem allgemeinen Fall.

Wir denken uns also ein m-gliedriges vollständiges System:

$$\mathfrak{Y}_1 f = 0, \cdots \mathfrak{Y}_m f = 0$$

vorgelegt, welches die Gruppe $X_1 f \cdots X_n f$ gestattet, so dass die Xf und $\mathfrak{Y}f$ durch Relationen von der Form:

$$(15)\qquad (\mathfrak{Y}_\mu X_k) = \sum_1^m {}^\nu\, \alpha_{\mu k \nu}(x_1 \cdots x_s) \cdot \mathfrak{Y}_\nu f \qquad (k = 1 \cdots n;\ \mu = 1 \cdots m)$$

verknüpft sind (vgl. Kap. 13, S. 221).

Zunächst versuchen wir nun, m Functionen $\varrho_1 \cdots \varrho_m$ von den x so zu bestimmen, dass die infinitesimale Transformation:

$$Yf = \sum_1^m {}^\mu\, \varrho_\mu(x_1 \cdots x_s) \cdot \mathfrak{Y}_\mu f$$

mit allen n infinitesimalen Transformationen $X_k f$ vertauschbar ist. Wir haben somit die n Gleichungen zu befriedigen:

$$(X_k Y) = \sum_1^m {}^\mu\, X_k \varrho_\mu \cdot \mathfrak{Y}_\mu f + \sum_1^m {}^\mu\, \varrho_\mu (X_k \mathfrak{Y}_\mu)$$

$$= \sum_1^m {}^\mu \left\{ X_k \varrho_\mu - \sum_1^m {}^\nu\, \alpha_{\nu k \mu}\, \varrho_\nu \right\} \mathfrak{Y}_\mu f = 0,$$

oder, da $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_m f$ nicht durch lineare Relationen verknüpft sein können, die folgenden mn Relationen:

$$(16)\qquad X_k \varrho_\mu - \sum_1^m {}^\nu\, \alpha_{\nu k \mu}\, \varrho_\nu = 0 \qquad (k = 1 \cdots n;\ \mu = 1 \cdots m)$$

Das sind Differentialgleichungen, aus denen die ϱ zu bestimmen sind.

Ist:

$$(17)\qquad \varrho_1 = P_1(x_1 \cdots x_s), \cdots \varrho_m = P_m(x_1 \cdots x_s)$$

ein Lösungensystem der Differentialgleichungen (16), so werden die Gleichungen:

$$X_k P_\mu - \sum_1^m {}^\nu\, \alpha_{\nu k \mu}\, \varrho_\nu = 0$$

bei der Substitution: $\varrho_1 = P_1, \cdots \varrho_m = P_m$ identisch befriedigt. Anders ausgedrückt: das Gleichungensystem (17) in den $s + m$ Veränderlichen $x_1 \cdots x_s$, $\varrho_1 \cdots \varrho_m$ gestattet die infinitesimalen Transformationen:

$$\mathfrak{U}_k f = X_k f + \sum_1^m {}^\mu \left\{ \sum_1^m {}^\nu\, \alpha_{\nu k \mu}\, \varrho_\nu \right\} \frac{\partial f}{\partial \varrho_\mu} \qquad (k = 1 \cdots n).$$

Gestattet umgekehrt ein Gleichungensystem von der Form (17) die infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_n f$, so sind die Functionen $P_1 \cdots P_n$ offenbar ein System Lösungen der Differentialgleichungen (16).

Wir ersehen hieraus, dass die Integration der Differentialgleichungen (16) darauf hinauskommt, in den $s + m$ Veränderlichen x, ϱ das allgemeinste Gleichungensystem (17) zu bestimmen, welches die infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_n f$ gestattet.

Das zu bestimmende Gleichungensystem gestattet auch die infinitesimalen Transformationen: $(\mathfrak{U}_i \mathfrak{U}_k)$.

Durch Ausrechnung finden wir:

$$(\mathfrak{U}_i \mathfrak{U}_k) = (X_i X_k) + \sum_{\mu\nu}^{1\cdots m} \{ X_i \alpha_{\nu k \mu} - X_k \alpha_{\nu i \mu} \} \varrho_\nu \frac{\partial f}{\partial \varrho_\mu} +$$
$$+ \sum_{\mu\nu\pi}^{1\cdots m} \{ \alpha_{\nu i \pi} \alpha_{\pi k \mu} - \alpha_{\nu k \pi} \alpha_{\pi i \mu} \} \varrho_\nu \frac{\partial f}{\partial \varrho_\mu}.$$

Um hier die rechte Seite zu vereinfachen, bilden wir die Jacobische Identität (vgl. Kap. 5, S. 94):

$$(\mathfrak{Y}_\nu (X_i X_k)) + (X_i (X_k \mathfrak{Y}_\nu)) + (X_k (\mathfrak{Y}_\nu X_i)) = 0,$$

welche sich bei Benutzung von (15) schreiben lässt:

$$(\mathfrak{Y}_\nu (X_i X_k)) = \sum_1^m{}^{\mu} \{ (X_i f,\ \alpha_{\nu k \mu} \mathfrak{Y}_\mu f) - (X_k f,\ \alpha_{\nu i \mu} \mathfrak{Y}_\mu f) \}$$

oder:

$$(\mathfrak{Y}_\nu (X_i X_k)) = \sum_1^m{}^{\mu} \{ X_i \alpha_{\nu k \mu} - X_k \alpha_{\nu i \mu} \} \mathfrak{Y}_\mu f +$$
$$+ \sum_{\mu\pi}^{1\cdots m} \{ \alpha_{\nu i \mu} \alpha_{\mu k \pi} - \alpha_{\nu k \mu} \alpha_{\mu i \pi} \} \mathfrak{Y}_\pi f.$$

Nun aber erzeugen $X_1 f \cdots X_n f$ eine n-gliedrige Gruppe, es ist also:

$$(X_i X_k) = \sum_1^n{}^{\sigma} c_{ik\sigma} X_\sigma f,$$

woraus folgt:

$$(\mathfrak{Y}_\nu (X_i X_k)) = \sum_1^m{}^{\mu} \left\{ \sum_1^n{}^{\sigma} c_{ik\sigma} \alpha_{\nu\sigma\mu} \right\} \mathfrak{Y}_\mu f.$$

Berücksichtigen wir noch, dass $\mathfrak{Y}_1 f \cdots \mathfrak{Y}_m f$ nicht durch lineare Relationen verknüpft sind, so erhalten wir:

$$X_i \alpha_{\nu k \mu} - X_k \alpha_{\nu i \mu} + \sum_1^m{}^{\pi} \{ \alpha_{\nu i \pi} \alpha_{\pi k \mu} - \alpha_{\nu k \pi} \alpha_{\pi i \mu} \} =$$
$$= \sum_1^n{}^{\sigma} c_{ik\sigma} \alpha_{\nu\sigma\mu}.$$

Setzen wir diesen Werth in den oben gefundenen Ausdruck für $(\mathfrak{U}_i \mathfrak{U}_k)$ ein, so ergiebt sich:

$$(\mathfrak{U}_i\mathfrak{U}_k) = \sum_1^n{}_\sigma\, c_{ik\sigma}\mathfrak{U}_\sigma f,$$

mithin erzeugen $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_n f$ eine n-gliedrige Gruppe in den $s+m$ Veränderlichen x, ϱ.

Es handelt sich nunmehr darum, das allgemeinste Gleichungensystem (17) zu bestimmen, welches die n-gliedrige Gruppe $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_n f$ gestattet.

Da $X_1 f \cdots X_n f$ durch keine lineare Relation verknüpft sind, so verschwinden in der zu $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_n f$ gehörigen Matrix nicht alle n-reihigen Determinanten identisch; aber diese n-reihigen Determinanten können offenbar auch vermöge eines Gleichungensystems von der Form (17) nicht alle gleich Null werden. Folglich wird jedes Gleichungensystem von der Form (17), welches die Gruppe $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_n f$ gestattet, durch Relationen zwischen den Lösungen des n-gliedrigen vollständigen Systems: $\mathfrak{U}_1 f = 0, \cdots \mathfrak{U}_n f = 0$ dargestellt (vgl. Kap. 14, Theorem 42, S. 237).

Das n-gliedrige vollständige System $\mathfrak{U}_1 f = 0, \cdots \mathfrak{U}_n f = 0$ besitzt $s+m-n$ unabhängige Lösungen; $s-n$ von diesen Lösungen lassen sich so wählen, dass sie von den ϱ frei sind und nur von den x abhängen, es sind das die unabhängigen Lösungen des n-gliedrigen vollständigen Systems: $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$, welche

$$\mathfrak{v}_1(x_1 \cdots x_s) \cdots \mathfrak{v}_{s-n}(x_1 \cdots x_s)$$

heissen mögen. Ferner seien

$$\Omega_1(\varrho_1 \cdots \varrho_m,\; x_1 \cdots x_s) \cdots \Omega_m(\varrho_1 \cdots \varrho_m,\; x_1 \cdots x_s)$$

irgend m von einander und von den $\mathfrak{v}$ unabhängige Lösungen des vollständigen Systems: $\mathfrak{U}_1 f = 0, \cdots \mathfrak{U}_n f = 0$.

Da die Gleichungen: $\mathfrak{U}_1 f = 0, \cdots \mathfrak{U}_n f = 0$ nach n von den Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_s}$ auflösbar sind, so müssen die $s-n+m$ Functionen $\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_{s-n}$, $\Omega_1 \cdots \Omega_m$ in Bezug auf $s-n$ von den Veränderlichen $x_1 \cdots x_s$ und in Bezug auf $\varrho_1 \cdots \varrho_m$ von einander unabhängig sein. Folglich sind $\Omega_1 \cdots \Omega_m$ in Bezug auf $\varrho_1 \cdots \varrho_m$ von einander unabhängig.

Nach diesen Vorbereitungen können wir das allgemeinste Gleichungensystem angeben, welches die Gruppe $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_n f$ gestattet und die Form (17) erhalten kann.

Das betreffende Gleichungensystem besteht aus m Relationen zwischen $\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_{s-n}$, $\Omega_1 \cdots \Omega_m$ und ist nach $\varrho_1 \cdots \varrho_m$ auflösbar; folglich ist es auch nach $\Omega_1 \cdots \Omega_m$ auflösbar und hat die Form:

(18) $\Omega_\mu(\varrho_1 \cdots \varrho_m, x_1 \cdots x_s) = \Psi_\mu(\mathfrak{v}_1(x) \cdots \mathfrak{v}_{s-n}(x)) \quad (\mu = 1 \cdots m)$,

wo die Ψ vollkommen willkürliche Functionen ihrer Argumente sind. Lösen wir dieses Gleichungensystem nach $\varrho_1 \cdots \varrho_m$ auf, so erhalten wir für $\varrho_1 \cdots \varrho_m$ Ausdrücke, welche das allgemeinste Lösungensystem der Differentialgleichungen (16) darstellen.

Das allgemeinste Lösungensystem der Gleichungen (16) enthält demnach m willkürliche Functionen von $\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_{s-n}$. Da nun die Gleichungen (16) in den Unbekannten $\varrho_1 \cdots \varrho_m$ linear und homogen sind, so lässt sich schliessen, dass ihr allgemeinstes Lösungensystem $\varrho_1 \cdots \varrho_m$ aus m particulären Lösungensystemen:

$$P_1^{(\mu)}(x_1 \cdots x_s) \cdots P_m^{(\mu)}(x_1 \cdots x_s) \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

folgendermassen abgeleitet werden kann:

$$(19) \qquad \varrho_\nu = \chi_1(\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_{s-n}) \cdot P_\nu^{(1)} + \cdots + \chi_m(\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_{s-n}) \cdot P_\nu^{(m)} \\ (\nu = 1 \cdots m),$$

unter den χ willkürliche Functionen ihrer Argumente verstanden. Natürlich müssen die m particulären Lösungensysteme so beschaffen sein, dass es nicht möglich ist, m Functionen $\psi_1 \cdots \psi_m$ von $\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_{s-n}$ so zu bestimmen, dass die m Gleichungen:

$$\sum_1^m {}^\mu\, \psi_\mu(\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_{s-n}) \cdot P_\nu^{(\mu)} = 0 \quad (\nu = 1 \cdots m)$$

gleichzeitig befriedigt werden.

Endlich ist noch zu bemerken, dass die Gleichungen (19) nach $\chi_1 \cdots \chi_m$ auflösbar sind, dass also die Determinante der $P_\nu^{(\mu)}$ nicht identisch verschwindet. Die Gleichungen (19) müssen sich nämlich nach dem Früheren auf die Form (18) bringen lassen, was offenbar unmöglich ist, wenn die Determinante der $P_\nu^{(\mu)}$ verschwindet.

Nunmehr können wir die allgemeinste infinitesimale Transformation

$$Yf = \sum_1^m {}^\mu\, \varrho_\mu \mathfrak{Y}_\mu f$$

hinschreiben, welche mit $X_1 f \cdots X_n f$ vertauschbar ist (vgl. oben S. 396). Ihre Form ist:

$$Yf = \sum_1^m {}^\nu\, \chi_\nu(\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_{s-n}) \sum_1^m {}^\mu\, P_\mu^{(\nu)}(x_1 \cdots x_s) \cdot \mathfrak{Y}_\mu f,$$

oder, wenn wir

$$\sum_1^m {}^\mu\, P_\mu^{(\nu)} \mathfrak{Y}_\mu f = Y_\nu f \quad (\nu = 1 \cdots m)$$

setzen:

$$Yf = \sum_1^m {}^\nu \chi_\nu(\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_{s-n}) \cdot Y_\nu f.$$

Hier sind $Y_1 f \cdots Y_m f$ offenbar sämmtlich mit $X_1 f \cdots X_n f$ vertauschbar, ferner sind die Gleichungen: $Y_1 f = 0, \cdots Y_m f = 0$ mit den Gleichungen: $\mathfrak{Y}_1 f = 0, \cdots \mathfrak{Y}_m f = 0$ aequivalent und bilden daher ihrerseits ein m-gliedriges vollständiges System, welches die Gruppe $X_1 f \cdots X_n f$ gestattet.

Zwischen $Y_1 f \cdots Y_m f$ bestehen demzufolge Relationen von der Form:

$$(Y_\mu Y_\nu) = \sum_1^m {}^\pi \tau_{\mu\nu\pi}(x_1 \cdots x_s) \cdot Y_\pi f.$$

Aber aus der Jacobi'schen Identität:

$$(X_k(Y_\mu Y_\nu)) + (Y_\mu(Y_\nu X_k)) + (Y_\nu(X_k Y_\mu)) \equiv 0,$$

in welcher die letzten beiden Glieder identisch null sind, ergiebt sich sofort:

$$(X_k(Y_\mu Y_\nu)) \equiv 0.$$

Mithin muss sein:

$$\sum_1^m {}^\pi X_k \tau_{\mu\nu\pi} \cdot Y_\pi f \equiv 0,$$

oder, da $Y_1 f \cdots Y_m f$ durch keine lineare Relation verknüpft sind:

$$X_k \tau_{\mu\nu\pi} \equiv 0 \quad (k=1 \cdots n),$$

das heisst: die $\tau_{\mu\nu\pi}$ sind sämmtlich Lösungen des vollständigen Systems: $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$, sie sind Functionen von $\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_{s-n}$ allein.

Das vollständige System: $Y_1 f = 0, \cdots Y_m f = 0$ besitzt alle auf S. 395 angegebenen Eigenschaften; wir können somit den Satz aussprechen:

Theorem 70. *Gestattet ein m-gliedriges vollständiges System: $\mathfrak{Y}_1 f = 0, \cdots \mathfrak{Y}_m f = 0$ in den s Veränderlichen $x_1 \cdots x_s$ die n-gliedrige Gruppe $X_1 f \cdots X_n f$ und ist diese Gruppe so beschaffen, dass zwischen $X_1 f \cdots X_n f$ keine lineare Relation von der Form:*

$$\chi_1(x_1 \cdots x_s) \cdot X_1 f + \cdots + \chi_n(x_1 \cdots x_s) \cdot X_n f = 0$$

besteht, so ist es möglich, m^2 solche Functionen $P_\mu^{(\nu)}(x_1 \cdots x_s)$ mit nicht verschwindender Determinante anzugeben, dass die m infinitesimalen Transformationen

$$Y_\nu f = \sum_1^m {}^\mu P_\mu^{(\nu)}(x_1 \cdots x_s) \cdot \mathfrak{Y}_\mu f \quad (\nu=1 \cdots m)$$

sämmtlich mit $X_1 f \cdots X_n f$ vertauschbar sind. Die mit: $\mathfrak{Y}_1 f = 0, \cdots \mathfrak{Y}_m f = 0$ aequivalenten Gleichungen: $Y_1 f = 0, \cdots Y_m f = 0$ bilden dann ihrerseits ein m-gliedriges vollständiges System, welches die Gruppe $X_1 f \cdots X_n f$ gestattet. Zwischen $Y_1 f \cdots Y_m f$ bestehen endlich Relationen von der besonderen Form:

$$(Y_\mu Y_\nu) = \sum_1^m {}^\pi \vartheta_{\mu\nu\pi}(\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_{s-n}) \, Y_\pi f,$$

*wo $\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_{s-n}$ unabhängige Lösungen des n-gliedrigen vollständigen Systems: $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$ sind.**)

Kapitel 21.

Die Parametergruppe.

Führt man drei Transformationen des Raumes $x_1 \cdots x_n$ nach einander aus, etwa die folgenden:

$$(1) \qquad \begin{cases} x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n) & (i = 1 \cdots n) \\ x_i'' = g_i(x_1' \cdots x_n') & (i = 1 \cdots n) \\ x_i''' = h_i(x_1'' \cdots x_n'') & (i = 1 \cdots n), \end{cases}$$

so erhält man eine neue Transformation:

$$x_i''' = \omega_i(x_1 \cdots x_n) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

des Raumes $x_1 \cdots x_n$.

Die Gleichungen der neuen Transformation ergeben sich, wenn die $2n$ Veränderlichen: $x_1' \cdots x_n', x_1'' \cdots x_n''$ aus den $3n$ Gleichungen (1) eliminirt werden. Man kann offenbar diese Elimination auf zwei verschiedene Weisen ausführen, da man entweder mit der Wegschaffung der x' oder mit der Wegschaffung der x'' beginnen kann. Im ersten Falle erhält man zunächst zwischen den x und den x'' die Relationen:

$$x_i'' = g_i(f_1(x) \cdots f_n(x)) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

und hat sodann diese Werthe von $x_1'' \cdots x_n''$ in die Gleichungen:

$$x_i''' = h_i(x_1'' \cdots x_n'') \qquad (i = 1 \cdots n)$$

einzusetzen. Im zweiten Falle erhält man zunächst zwischen den x' und den x''' die Relationen:

*) Das Theorem 70, welches das Theorem 69 als speciellen Fall umfasst, entwickelte Lie im Sommersemester 1887 in einer Vorlesung über die allgemeine Integrationstheorie solcher Differentialgleichungen, die eine bekannte endliche continuirliche Gruppe gestatten.

$$x_i''' = h_i(g_1(x') \cdots g_n(x')) \quad (i=1\cdots n)$$

und hat dann noch die x' durch ihre Werthe:

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i=1\cdots n)$$

zu ersetzen.

Die selbstverständliche Bemerkung, dass man auf den beiden angegebenen Wegen als Endergebniss beide Male dieselbe Transformation erhält, bekommt einen Inhalt, wenn man die Transformationen als Operationen auffasst und die Symbolik der Substitutionentheorie auf sie anwendet.

Wir wollen für die drei Substitutionen (1) der Reihe nach die Symbole: S, T, U einführen, sodass die Transformation:

$$x_i'' = g_i(f_1(x) \cdots f_n(x)) \quad (i=1\cdots n)$$

das Symbol: ST erhält, die Transformation:

$$x_i''' = h_i(g_1(x') \cdots g_n(x')) \quad (i=1\cdots n)$$

das Symbol: TU und die Transformation: $x_i''' = \omega_i(x_1 \cdots x_n)$ endlich das Symbol: STU. Die beiden vorhin besprochenen Bildungsweisen der Transformation: $x_i''' = \omega_i(x_1 \cdots x_n)$ können wir dann dahin aussprechen, dass diese Transformation erhalten wird sowohl, wenn man zuerst die Transformation: ST und nachher die Transformation U ausführt, als auch, wenn man zuerst die Transformation S ausführt und nachher die Transformation TU.

Symbolisch lässt sich diese Thatsache durch die Gleichung:

$$(2) \qquad (ST)U = S(TU) = STU$$

ausdrücken, die bekanntlich aussagt, dass die Operationen S, T, U dem sogenannten *associativen Gesetze* genügen.

Wir können demnach sagen:

Die Transformationen eines n-fach ausgedehnten Raumes sind solche Operationen, für welche das associative Gesetz gilt.

Betrachten wir jetzt den besonderen Fall, dass S, T, U beliebige Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe:

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \quad (i=1\cdots n)$$

sind. In diesem Falle gehören natürlich auch die Transformationen: ST, TU und STU der betreffenden Gruppe an. Sehen wir zu, was sich jetzt aus der Gültigkeit des associativen Gesetzes schliessen lässt.

§ 100.

Die Transformationen S, T, U unserer Gruppe seien:

$$(3) \qquad \begin{cases} S\colon\ x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \\ T\colon\ x_i'' = f_i(x_1' \cdots x_n',\ b_1 \cdots b_r) \\ U\colon\ x_i''' = f_i(x_1'' \cdots x_n'',\ c_1 \cdots c_r). \end{cases}$$

Für die Transformation ST ergeben sich hieraus in bekannter Weise Gleichungen von der Form:

$$x_i'' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ \varphi_1(a, b) \cdots \varphi_r(a, b)),$$

wo die Functionen $\varphi_1(a, b) \cdots \varphi_r(a, b)$ nach Theorem 1, S. 18 sowohl in Bezug auf $a_1 \cdots a_r$ als in Bezug auf $b_1 \cdots b_r$ von einander unabhängig sind.

Ferner werden die Gleichungen der Transformation $(ST)U$:

$$x_i''' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ \varphi_1(\varphi(a, b), c) \cdots \varphi_r(\varphi(a, b), c)). \tag{4}$$

Auf der andern Seite haben wir für die Transformation TU die Gleichungen:

$$x_i''' = f_i(x_1' \cdots x_n',\ \varphi_1(b, c) \cdots \varphi_r(b, c)),$$

also für $S(TU)$ die folgenden:

$$x_i''' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ \varphi_1(a, \varphi(b, c)) \cdots \varphi_r(a, \varphi(b, c))). \tag{4'}$$

Nun ist: $(ST)U = S(TU)$, folglich müssen die beiden Transformationen (4) und (4′) mit einander identisch sein; durch Vergleichung der Parameter in beiden Transformationen erhalten wir daher die folgenden Relationen:

$$\varphi_k(\varphi_1(a, b) \cdots \varphi_r(a, b),\ c_1 \cdots c_r) = \varphi_k(a_1 \cdots a_r,\ \varphi_1(b, c) \cdots \varphi_r(b, c))$$
$$(k = 1 \cdots r),$$

oder kürzer:

$$\varphi_k(\varphi(a, b), c) = \varphi_k(a, \varphi(b, c)) \qquad (k = 1 \cdots r). \tag{5}$$

Diesen Relationen müssen demnach die Functionen $\varphi_1 \cdots \varphi_r$ für alle Werthe der a, b, c identisch genügen.

Die Gleichungen (5) sprechen das associative Gesetz für drei beliebige Transformationen der Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$ aus. Aber sie können auch noch anders gedeutet werden; sie sagen nämlich, dass die Gleichungen

$$a_k' = \varphi_k(a_1 \cdots a_r,\ b_1 \cdots b_r) \qquad (k = 1 \cdots r) \tag{6}$$

in den Veränderlichen $a_1 \cdots a_r$ eine Gruppe darstellen, und zwar eine Gruppe mit den r Parametern $b_1 \cdots b_r$.

Führen wir nämlich zwei Transformationen (6), etwa:

$$a_k' = \varphi_k(a_1 \cdots a_r,\ b_1 \cdots b_r)$$

und:

$$a_k'' = \varphi_k(a_1' \cdots a_r',\ c_1 \cdots c_r)$$

nach einander aus, so erhalten wir die Transformation

$$a_k'' = \varphi_k(\varphi_1(a, b) \cdots \varphi_r(a, b),\ c_1 \cdots c_r),$$

welche vermöge (5) die Gestalt

$$a_k'' = \varphi_k(a_1 \cdots a_r,\ \varphi_1(b, c) \cdots \varphi_r(b, c))$$

annimmt und daher ebenfalls zu den Transformationen (6) gehört. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Wir wollen die Gruppe:

$$(6) \qquad a_k' = \varphi_k(a_1 \cdots a_r,\ b_1 \cdots b_r) \qquad {\scriptstyle (k=1 \cdots r)}$$

als die Parametergruppe der Gruppe $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r)$ *bezeichnen.*

Nach dem schon angeführten Theor. 1, S. 18 sind die Gleichungen $a_k' = \varphi_k(a, b)$ nach den r Parametern $b_1 \cdots b_r$ auflösbar:

$$b_k = \psi_k(a_1 \cdots a_r,\ a_1' \cdots a_r') \qquad {\scriptstyle (k=1 \cdots r)}.$$

Wir schliessen daraus, dass die Parametergruppe r-gliedrig und dass sie transitiv ist und zwar einfach transitiv. Ausserdem zeigen die Gleichungen (5), dass die Parametergruppe ihre eigene Parametergruppe ist.

Also können wir zusammenfassend sagen:

Theorem 71. *Erfüllen die Functionen* $f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r)$ *in den Gleichungen* $x_i' = f_i(x, a)$ *einer r-gliedrigen Gruppe die Functionalgleichungen*

$$f_i(f_1(x,a) \cdots f_n(x,a),\ b_1 \cdots b_r) = f_i(x_1 \cdots x_n,\ \varphi_1(a,b) \cdots \varphi_r(a,b))$$
$${\scriptstyle (i=1 \cdots n)},$$

so bestimmen die r Relationen

$$a_i' = \varphi_i(a_1 \cdots a_r,\ b_1 \cdots b_r) \qquad {\scriptstyle (i=1 \cdots r)}$$

eine r-gliedrige Gruppe zwischen den $2r$ Veränderlichen a und a': die Parametergruppe der ursprünglichen Gruppe. Dieselbe ist einfach transitiv und ihre eigene Parametergruppe.

§ 101.

Ist die r-gliedrige Gruppe: $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r)$ von den r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$X_k f = \sum_1^n {}^i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad {\scriptstyle (k=1 \cdots r)}$$

erzeugt, so ordnen sich ihre Transformationen nach Kap. 9, S. 158 paarweise als inverse zusammen. Offenbar ordnen sich dann auch die Transformationen der zugehörigen Parametergruppe: $a_k' = \varphi_k(a, b)$ paarweise als inverse zusammen, also enthält die Parametergruppe nach Kap. 9, S. 169 oben gerade r unabhängige infinitesimale Transformationen und ist von denselben erzeugt.

Diese wichtige Eigenschaft der Parametergruppe lässt sich auch folgendermassen beweisen, wobei wir gleichzeitig die infinitesimalen Transformationen dieser Gruppe finden.

Werden in den Gleichungen: $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r)$ die x_i' als Functionen der x und der a betrachtet, so bestehen nach Theorem 3, S. 33 Differentialgleichungen von der Form:

$$(7) \qquad \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r{}^j \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') \qquad (i = 1 \cdots n;\ k = 1 \cdots r),$$

die sich auch schreiben lassen:

$$(7') \qquad \xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') = \sum_1^r{}^k \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} \qquad (j = 1 \cdots r;\ i = 1 \cdots n).$$

Hier sind nach den Entwickelungen des Kapitels 2, S. 30, 31 die ξ_{ji} und α_{jk} bestimmt durch die Gleichungen:

$$\xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') = \left[\frac{\partial x_i'}{\partial b_j}\right]_{b=\omega}, \qquad \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) = \left[\frac{\partial a_k}{\partial b_j}\right]_{b=\omega},$$

deren Sinn an der angegebenen Stelle erklärt worden ist.

Bei der Gruppe $a_k' = \varphi_k(a, b)$ ergeben sich natürlich analoge Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial a_i'}{\partial b_k} = \sum_1^r{}^j \psi_{jk}(b_1 \cdots b_r) \cdot \bar{\alpha}_{ji}(a_1' \cdots a_r') \qquad (i, k = 1 \cdots r),$$

in denen die ψ_{jk} dieselbe Bedeutung haben wie in (7), während sich die $\bar{\alpha}_{ji}(a)$ aus:

$$\bar{\alpha}_{ji}(a_1 \cdots a_r) = \left[\frac{\partial a_i}{\partial b_j}\right]_{b=\omega}$$

bestimmen. *In Folge dessen sind die $\bar{\alpha}_{ji}$ dieselben Functionen ihrer Argumente wie die α_{ji};* also erhalten wir entsprechend den Formeln (7) und (7′) die beiden folgenden:

$$(8) \qquad \frac{\partial a_i'}{\partial b_k} = \sum_1^r{}^j \psi_{jk}(b_1 \cdots b_r) \cdot \alpha_{ji}(a_1' \cdots a_r') \qquad (i, k = 1 \cdots r),$$

und

$$(8') \qquad \alpha_{ji}(a_1' \cdots a_r') = \sum_1^r{}^k \alpha_{jk}(b_1 \cdots b_r) \frac{\partial a_i'}{\partial b_k} \qquad (j, i = 1 \cdots r).$$

Nun enthält die Gruppe: $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r)$ die identische Transformation und zwar können wir immer voraussetzen, dass die Parameter $a_1^0 \cdots a_r^0$ der identischen Transformation in dem auf S. 16 definirten Bereiche $(\!(a)\!)$ liegen. Nach S. 32 ist daher die Determinante:

$$\Sigma \pm \psi_{11}(a^0) \cdots \psi_{rr}(a^0)$$

sicher von Null verschieden.

Es ist andererseits klar, dass auch in der Schaar der Transformationen: $a_k' = \varphi_k(a, b)$ die identische Transformation: $a_1' = a_1$, $\cdots a_r' = a_r$ vorkommt und dass eben die Transformation:

$$a_k' = \varphi_k(a_1 \cdots a_r,\ a_1^0 \cdots a_r^0) \qquad (k=1\cdots r)$$

die identische Transformation ist. Berücksichtigen wir daher das Bestehen der Differentialgleichungen (8) und wenden wir das Theorem 9, S. 72 an, so erkennen wir sofort, dass die Schaar der ∞^r Transformationen: $a_k' = \varphi_k(a, b)$ mit der Schaar der ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen:

$$\sum_1^r {}^k \lambda_k \sum_1^r {}^i \alpha_{ki}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_i}$$

zusammenfällt.

Demnach ist die Gruppe: $a_k' = \varphi_k(a, b)$ von den r infinitesimalen Transformationen:

$$A_k f = \sum_1^r {}^j \alpha_{kj}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_j} \qquad (k=1\cdots r)$$

erzeugt.

Natürlich sind diese infinitesimalen Transformationen von einander unabhängig, ja es besteht zwischen ihnen nicht einmal eine Relation von der Form:

$$\chi_1(a_1 \cdots a_r) \cdot A_1 f + \cdots + \chi_r(a_1 \cdots a_r) \cdot A_r f = 0;$$

das haben wir schon in Kap. 2, Theorem 3, S. 33 erkannt; es lässt sich andererseits auch daraus schliessen, dass die Parametergruppe einfach transitiv ist (Theor. 71).

Im Vorangehenden haben wir nicht blos bewiesen, dass die Gruppe: $a_k' = \varphi_k(a, b)$ von infinitesimalen Transformationen erzeugt ist, sondern wir haben auch diese infinitesimalen Transformationen selbst gefunden. Wir können daraus sofort eine neue wichtige Eigenschaft der Gruppe: $a_k' = \varphi_k(a, b)$ ableiten.

Die r infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \cdots X_r f$ der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ sind durch Relationen von der Form:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}^s c_{iks} X_s f$$

verknüpft, und nach Theorem 21, S. 149, 150 bestehen zwischen $A_1 f \cdots A_r f$ Relationen von derselben Form:

$$(A_i A_k) = \sum_1^r {}^s c_{iks} A_s f,$$

mit denselben Constanten c_{iks}. Bei Anwendung der in Kap. 17, S. 291

und 293 eingeführten Bezeichnungsweise können wir daher das nachstehende Theorem aussprechen:

Theorem 72. *Jede r-gliedrige Gruppe:*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

ist mit ihrer Parametergruppe:

$$a_k' = \varphi_k(a_1 \cdots a_r, b_1 \cdots b_r) \quad (k = 1 \cdots r)$$

gleichzusammengesetzt oder, was dasselbe ist, holoedrisch isomorph. Erfüllen die infinitesimalen Transformationen der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ die Relationen:

$$\xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') = \sum_1^r {}^k \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} \quad (i = 1 \cdots n, \; j = 1 \cdots r),$$

so stellen die r Ausdrücke:

$$A_j f = \sum_1^r {}^k \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_k} \quad (j = 1 \cdots r)$$

r unabhängige infinitesimale Transformationen der Parametergruppe dar).*

§ 102.

Es seien wie gewöhnlich:

$$X_k f = \sum_1^n {}^i \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \cdots r)$$

unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$.

Man bestimme nach Anleitung von Kap. 9, S. 156 und 157 r unabhängige infinitesimale Transformationen:

$$\overline{A}_k f = \sum_1^r {}^j \overline{\alpha}_{kj}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_j} \quad (k = 1 \cdots r),$$

welche durch keine lineare Relation von der Form:

$$\chi_1(a_1 \cdots a_r) \cdot \overline{A}_1 f + \cdots + \chi_r(a_1 \cdots a_r) \cdot \overline{A}_r f = 0$$

verknüpft sind, welche aber paarweise in den Beziehungen:

$$(\overline{A}_i \overline{A}_k) = \sum_1^r {}^s c_{iks} \overline{A}_s f$$

stehen; mit andern Worten: man bestimme r unabhängige infinitesimale Transformationen irgend einer r-gliedrigen einfach transitiven Gruppe, welche mit der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ gleichzusammengesetzt ist.

*) Lie, Gesellschaft d. W. zu Christiania 1884, Nr. 15.

Sodann wähle man irgend ein Werthsystem: $\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r$ aus, in dessen Umgebung die $\bar{\alpha}_{ki}(a_1 \cdots a_r)$ sich regulär verhalten und für welches die Determinante $\Sigma \pm \bar{\alpha}_{11} \cdots \bar{\alpha}_{rr}$ nicht verschwindet, und bestimme in Bezug auf dieses Werthsystem die Hauptlösungen des r-gliedrigen vollständigen Systems:

$$(9)\quad \sum_1^n {}^i\, \xi_{ki}(x') \frac{\partial f}{\partial x'_i} + \sum_1^r {}^j\, \bar{\alpha}_{kj}(a) \frac{\partial f}{\partial a_j} = X'_k f + \bar{A}_k f = 0 \qquad (k = 1 \cdots r)$$

in den $n + r$ Veränderlichen: $x_1' \cdots x_n'$, $a_1 \cdots a_r$.

Sind nun: $\overline{F}_1(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r) \cdots \overline{F}_n(x', a)$ die betreffenden Hauptlösungen, so setze man:

$$x_i = \overline{F}_i(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r) \qquad (i=1 \cdots n);$$

durch Auflösung nach $x_1' \cdots x_n'$ erhält man Gleichungen von der Form:

$$x_i' = \bar{f}_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \qquad (i=1 \cdots n),$$

welche nach Theor. 23, S. 154 die endlichen Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe darstellen, eben der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$.

Schon in dem angeführten Theoreme bemerkten wir, dass die Gleichungen: $x_i' = \bar{f}_i(x, a)$ durch die Einführung neuer Parameter auf die Form:

$$x_i' = x_i + \sum_1^r {}^k\, e_k X_k x_i + \sum_{kj}^{1 \cdots r} \frac{e_k e_j}{1 \cdot 2} X_k X_j x_i + \cdots \qquad (i=1 \cdots n)$$

gebracht werden können, dass sie also die endlichen Transformationen derjenigen r-gliedrigen Gruppe darstellen, welche von den infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \cdots X_r f$ erzeugt wird.

Hierin liegt, dass es keinen Einfluss hat, ob wir die Gruppe $\bar{A}_1 f \cdots \bar{A}_r f$ wählen oder irgend eine andere von den unendlich vielen einfach transitiven Gruppen, die mit der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ gleichzusammengesetzt sind, und dass es ganz gleichgültig ist, ob wir das Werthsystem $\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r$ wählen, oder irgend ein anderes: immer erhalten wir auf dem angegebenen Wege eine analytische Darstellung für die endlichen Transformationen der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$.

Auch diese Bemerkung machten wir schon in Kap. 9, wenn auch natürlich nicht mit denselben Worten. Jetzt sind wir aber insofern weiter, als wir direkt einsehen können, warum man bei verschiedener Wahl der Gruppe: $\bar{A}_1 f \cdots \bar{A}_r f$ und des Werthsystems: $\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r$ doch stets die Gleichungen derselben Gruppe erhält.

In der That, es sei:

$$\mathfrak{A}_k f = \sum_1^r {}^j\, \beta_{kj}(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_j} \qquad (k=1 \cdots r)$$

irgend eine andere einfach transitive, mit der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ gleichzusammengesetzte Gruppe, für welche die Relationen:

$$(\mathfrak{A}_i \mathfrak{A}_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks}\, \mathfrak{A}_s f$$

identisch erfüllt sind, es sei ferner: $\mathfrak{a}_1^0 \cdots \mathfrak{a}_r^0$ irgend ein Werthsystem, in dessen Umgebung sich alle $\beta_{kj}(\mathfrak{a})$ regulär verhalten und für welches die Determinante $\Sigma \pm \beta_{11} \cdots \beta_{rr}$ nicht verschwindet.

Da die beiden Gruppen: $\overline{A}_1 f \cdots \overline{A}_r f$ und $\mathfrak{A}_1 f \cdots \mathfrak{A}_r f$ gleichzusammengesetzt und beide einfach transitiv sind, so giebt es (Theor. 64, S. 340) ∞^r verschiedene Transformationen:

$$a_k = \lambda_k(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r,\ C_1 \cdots C_r) \qquad {\scriptstyle (k=1\cdots r)},$$

welche $\mathfrak{A}_1 f \cdots \mathfrak{A}_r f$ in bezüglich: $\overline{A}_1 f \cdots \overline{A}_r f$ überführen. Die Gleichungen dieser Transformationen sind nach den willkürlichen Parametern: $C_1 \cdots C_r$ auflösbar, also kann man $C_1 \cdots C_r$ insbesondere so wählen, dass die Gleichungen:

$$\bar{a}_k = \lambda_k(\mathfrak{a}_1^0 \cdots \mathfrak{a}_r^0,\ C_1 \cdots C_r) \qquad {\scriptstyle (k=1\cdots r)}$$

befriedigt werden.

Sind: $C_1^0 \cdots C_r^0$ die so erhaltenen Werthe von $C_1 \cdots C_r$ und setzt man:

$$\lambda_k(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r,\ C_1^0 \cdots C_r^0) = \pi_k(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r) \qquad {\scriptstyle (k=1\cdots r)},$$

so stellen die Gleichungen:

$$(10) \qquad a_k = \pi_k(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r) \qquad {\scriptstyle (k=1\cdots r)}$$

eine Transformation dar, welche $\mathfrak{A}_1 f \cdots \mathfrak{A}_r f$ in bezüglich: $\overline{A}_1 f \cdots \overline{A}_r f$ überführt und ausserdem das Werthsystem: $\mathfrak{a}_1^0 \cdots \mathfrak{a}_r^0$ in das Werthsystem: $\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r$.

Hieraus ergiebt sich, dass wir die Hauptlösungen des vollständigen Systems:

$$(9') \qquad X_k' f + \mathfrak{A}_k f = 0 \qquad {\scriptstyle (k=1\cdots r)}$$

in Bezug auf: $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1^0, \cdots \mathfrak{a}_r = \mathfrak{a}_r^0$ erhalten, wenn wir in den Hauptlösungen:

$$\overline{F}_i(x_1' \cdots x_n',\ a_1 \cdots a_r) \qquad {\scriptstyle (i=1\cdots n)}$$

des vollständigen Systems (9) die Substitution: $a_1 = \pi_1(\mathfrak{a}), \cdots a_r = \pi_r(\mathfrak{a})$ machen. Hätten wir daher statt der einfach transitiven Gruppe: $\overline{A}_1 f \cdots \overline{A}_r f$ die Gruppe: $\mathfrak{A}_1 f \cdots \mathfrak{A}_r f$ benutzt und statt des Werthsystems: $\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r$ das Werthsystem: $\mathfrak{a}_1^0 \cdots \mathfrak{a}_r^0$, so hätten wir anstatt der Gleichungen: $x_i' = \bar{f}_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r)$ die Gleichungen:

$$x_i' = \bar{f}_i(x_1 \cdots x_n,\ \pi_1(\mathfrak{a}) \cdots \pi_r(\mathfrak{a})) \qquad {\scriptstyle (i=1\cdots n)}$$

bekommen. Diese gehen aber offenbar in jene über, wenn an Stelle von $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r$ vermöge der Gleichungen (10) die neuen Parameter $a_1 \cdots a_r$ eingeführt werden.

Wie in den Paragraphen 100 u. 101, S. 402ff. wollen wir wieder von einer bestimmten Form:

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \quad (i=1\cdots n)$$

der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ ausgehen, und es mögen $a_1^0 \cdots a_r^0$ wie damals die zur identischen Transformation: $x_i' = x_i$ gehörigen Parameter bezeichnen.

Alsdann ist es leicht, das vollständige System anzugeben, dessen Integration gerade auf die Gleichungen: $x_i' = f_i(x, a)$ führt.

Das betreffende vollständige System hat einfach die Form:

$$X_k' f + A_k f = 0 \quad (k=1\cdots r),$$

wo in den infinitesimalen Transformationen:

$$A_k f = \sum_1^r {}^j \alpha_{kj}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_j} \quad (k=1\cdots r)$$

die Functionen $\alpha_{kj}(a)$ dieselben sind, wie in den Differentialgleichungen (7'). Bedeuten:

$$F_i(x_1' \cdots x_n',\ a_1 \cdots a_r) \quad (i=1\cdots n)$$

die Hauptlösungen des vollständigen Systems: $X_k' f + A_k f = 0$ in Bezug auf: $a_1 = a_1^0, \cdots a_r = a_r^0$, so ergeben die Gleichungen:

$$x_i = F_i(x_1' \cdots x_n',\ a_1 \cdots a_r) \quad (i=1\cdots n)$$

durch Auflösung nach $x_1' \cdots x_n'$ gerade die Gleichungen: $x_i' = f_i(x, a)$. Das folgt alles aus den Entwickelungen der Kapitel 2 und 9.

Wenden wir diese Betrachtungen auf die zur Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ gehörige Parametergruppe an, deren Gleichungen nach S. 404 die Form haben:

$$a_k' = \varphi_k(a_1 \cdots a_r,\ b_1 \cdots b_r) \quad (k=1\cdots r)$$

und deren identische Transformation die Parameter: $b_1 = a_1^0, \cdots b_r = a_r^0$ besitzt.

Das vollständige System, durch dessen Integration die Gleichungen: $a_k' = \varphi_k(a, b)$ der Parametergruppe gefunden werden können, lautet augenscheinlich:

$$\sum_1^r {}^j \alpha_{kj}(a_1' \cdots a_r') \frac{\partial f}{\partial a_j'} + \sum_1^r {}^j \alpha_{kj}(b_1 \cdots b_r) \frac{\partial f}{\partial b_j} = 0 \quad (k=1\cdots r).$$

Bestimmen wir die Hauptlösungen:

$$H_j(a_1' \cdots a_r',\ b_1 \cdots b_r) \quad (j=1\cdots r)$$

dieses vollständigen Systems in Bezug auf: $b_k = a_k^0$ und lösen wir sodann die Gleichungen:

$$a_j = H_j(a_1' \cdots a_r',\ b_1 \cdots b_r) \quad (j=1 \cdots r)$$

nach $a_1' \cdots a_r'$ auf, so erhalten wir: $a_k' = \varphi_k(a, b)$.

Demnach gilt das

Theorem 73. *Kennt man die infinitesimalen Transformationen:*

$$A_k f = \sum_1^r {}_j\, \alpha_{kj}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_j} \quad (k=1 \cdots r)$$

der Parametergruppe einer r-gliedrigen Gruppe und weiss man, dass die identische Transformation dieser Gruppe und also auch der Parametergruppe die Parameter: $a_1^0 \cdots a_r^0$ *besitzt, so findet man die endlichen Gleichungen der Parametergruppe folgendermassen: Man bestimme die Hauptlösungen des vollständigen Systems:*

$$\sum_1^r {}_j\, \alpha_{kj}(a') \frac{\partial f}{\partial a_j'} + \sum_1^r {}_j\, \alpha_{kj}(b) \frac{\partial f}{\partial b_j} = 0 \quad (k=1 \cdots r)$$

in Bezug auf: $b_1 = a_1^0, \cdots b_r = a_r^0$; *sind:*

$$H_j(a_1' \cdots a_r',\ b_1 \cdots b_r) \quad (j=1 \cdots r)$$

diese Hauptlösungen, so erhält man die gesuchten Gleichungen der Parametergruppe, wenn man die r Gleichungen:

$$a_j = H_j(a_1' \cdots a_r',\ b_1 \cdots b_r) \quad (j=1 \cdots r)$$

nach $a_1' \cdots a_r'$ *auflöst.*

Führt man in eine r-gliedrige Gruppe $x_i' = f_i(x, a)$ neue Parameter $\mathfrak{a}_k$ an Stelle der a ein, so erhält die Gruppe eine neue Form, zu welcher natürlich auch eine neue Parametergruppe gehört.

Der Zusammenhang zwischen der neuen und der alten Parametergruppe ist sehr einfach. Sind nämlich die neuen Parameter $\mathfrak{a}_k$ durch die Gleichungen:

$$a_j = \lambda_j(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r) \quad (j=1 \cdots r)$$

bestimmt, so wird die neue Form der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ die folgende:

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ \lambda_1(\mathfrak{a}) \cdots \lambda_r(\mathfrak{a})) \quad (i=1 \cdots n),$$

und die neue Parametergruppe lautet:

$$\lambda_k(\mathfrak{a}_1' \cdots \mathfrak{a}_r') = \varphi_k(\lambda_1(\mathfrak{a}) \cdots \lambda_r(\mathfrak{a}),\ \lambda_1(\mathfrak{b}) \cdots \lambda_r(\mathfrak{b})) \quad (k=1 \cdots r),$$

wenn $a_k' = \varphi_k(a, b)$ die alte war. Also geht die neue aus der alten hervor, wenn man die Substitution $a_j = \lambda_j(\mathfrak{a})$ sowohl auf die a als auf die b ausführt, das heisst, wenn man in den Gleichungen: $a_k' = \varphi_k(a, b)$ für die a', a, b die folgenden Werthe einsetzt:

$$a_j' = \lambda_j(\mathfrak{a}'),\ a_j = \lambda_j(\mathfrak{a}),\ b_j = \lambda_j(\mathfrak{b}) \quad (j=1\cdots r).$$

§ 103.

Nach Theorem 72, S. 407 ist jede r-gliedrige Gruppe mit ihrer Parametergruppe gleichzusammengesetzt, folglich sind solche r-gliedrige Gruppen, welche dieselbe Parametergruppe haben, mit einander gleichzusammengesetzt.

Wir behaupten nun, dass umgekehrt zwei r-gliedrige gleichzusammengesetzte Gruppen sich stets durch Einführung neuer Parameter auf eine solche Form bringen lassen, dass sie beide dieselbe Parametergruppe haben.

Um diese Behauptung zu beweisen, denken wir uns von beiden Gruppen die infinitesimalen Transformationen gegeben; die der einen seien:

$$X_k f = \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k=1\cdots r),$$

die der andern:

$$Y_k f = \sum_1^m {}_\mu\, \eta_{k\mu}(y_1 \cdots y_m) \frac{\partial f}{\partial y_\mu} \quad (k=1\cdots r).$$

Da die beiden Gruppen gleichzusammengesetzt sind, können wir voraussetzen, dass die $X_k f$ und die $Y_k f$ bereits so gewählt sind, dass mit den Relationen:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} X_s f$$

zugleich die Relationen:

$$(Y_i Y_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} Y_s f$$

bestehen.

Endlich denken wir uns noch irgend r unabhängige infinitesimale Transformationen:

$$A_k f = \sum_1^r {}_j\, \alpha_{kj}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_j} \quad (k=1\cdots r)$$

gegeben, die eine r-gliedrige einfach transitive mit jenen Gruppen gleichzusammengesetzte Gruppe erzeugen und die paarweise in den Beziehungen:

$$(A_i A_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} A_s f$$

stehen.

Nunmehr bilden wir das vollständige System:

$$X_k'f + A_kf = 0 \quad {\scriptstyle (k=1\cdots r)}$$

und bestimmen seine Hauptlösungen:

$$F_i(x_1'\cdots x_n',\ a_1\cdots a_r) \quad {\scriptstyle (i=1\cdots n)}$$

in Bezug auf irgend ein Werthsystem: $a_1 = a_1^0, \cdots a_r = a_r^0$; wir bilden ferner das vollständige System:

$$Y_k'f + A_kf = 0 \quad {\scriptstyle (k=1\cdots r)}$$

und bestimmen seine Hauptlösungen:

$$\mathfrak{F}_\mu(y_1'\cdots y_m',\ a_1\cdots a_r) \quad {\scriptstyle (\mu=1\cdots m)}$$

in Bezug auf dasselbe Werthsystem: $a_k = a_k^0$.

Ausserdem lösen wir noch die n Gleichungen: $x_i = F_i(x', a)$ nach $x_1'\cdots x_n'$ auf:

(11) $$x_i' = f_i(x_1\cdots x_n,\ a_1\cdots a_r) \quad {\scriptstyle (i=1\cdots n)}$$

und ebenso die m Gleichungen: $y_\mu = \mathfrak{F}_\mu(y', a)$ nach $y_1'\cdots y_m'$:

(11′) $$y_\mu' = \mathfrak{f}_\mu(y_1\cdots y_m,\ a_1\cdots a_r) \quad {\scriptstyle (\mu=1\cdots m)}.$$

Liegen dann die endlichen Gleichungen der Gruppe: $X_1f\cdots X_rf$ in irgend einer Form vor, so können sie offenbar durch Einführung neuer Parameter auf die Form (11) gebracht werden, und ebenso können die endlichen Gleichungen der Gruppe: $Y_1f\cdots Y_rf$, in welcher Form sie auch vorliegen, stets durch Einführung neuer Parameter die Form (11′) erhalten.

Auf die beiden Gruppen (11) und (11′) lässt sich aber das Theorem 73, S. 411 anwenden. In beiden Gruppen hat nämlich die identische Transformation die Parameter: $a_1^0\cdots a_r^0$ und bei beiden enthält die zugehörige Parametergruppe die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen: $A_1f\cdots A_rf$, folglich kann nach dem bewussten Theoreme für jede der beiden Gruppen die zugehörige Parametergruppe angegeben werden und diese Parametergruppe wird für beide dieselbe.

Damit ist die oben aufgestellte Behauptung bewiesen. —

Es steht also nunmehr fest, dass zwei Gruppen, welche dieselbe Parametergruppe haben, gleichzusammengesetzt sind, und andererseits, dass zwei Gruppen, die gleichzusammengesetzt sind, durch Einführung neuer Parameter auf eine Form gebracht werden können, in welcher sie beide dieselbe Parametergruppe haben. Demnach können wir sagen:

Theorem 74. *Zwei r-gliedrige Gruppen:*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \qquad (i=1\cdots n)$$

und:

$$y_\mu' = g_\mu(y_1 \cdots y_m,\ \mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r) \qquad (\mu=1\cdots m)$$

sind dann und nur dann gleichzusammengesetzt, wenn es möglich ist, die Parameter: $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_r$ *derart als unabhängige Functionen der a darzustellen:*

$$\mathfrak{a}_k = \chi_k(a_1 \cdots a_r) \qquad (k=1\cdots r),$$

dass die Parametergruppe der Gruppe:

$$y_\mu' = g_\mu(y_1 \cdots y_m,\ \chi_1(a) \cdots \chi_r(a)) \qquad (\mu=1\cdots m)$$

mit der Parametergruppe der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ *zusammenfällt.*

Besonders bemerkenswerth ist, dass unsere beiden gleichzusammengesetzten Gruppen: $X_1 f \cdots X_r f$ und $Y_1 f \cdots Y_r f$ dann die Parametergruppe gemein haben, wenn man ihre endlichen Gleichungen in der kanonischen Form:

$$(12) \qquad x_i' = x_i + \sum_1^r {}_k\, e_k X_k x_i + \sum_{kj}^{1\cdots r} \frac{e_k e_j}{1\cdot 2} X_k X_j x_i + \cdots \qquad (i=1\cdots n)$$

und bezüglich:

$$(12') \quad y_\mu' = y_\mu + \sum_1^r {}_k\, e_k Y_k y_\mu + \sum_{kj}^{1\cdots r} \frac{e_k e_j}{1\cdot 2} Y_k Y_j y_\mu + \cdots \qquad (\mu=1\cdots m)$$

schreibt.

In der That, aus den Entwickelungen in Kap. 4, S. 68 ff. ergiebt sich, dass die Gleichungen (11) bei der Substitution:

$$(13) \qquad a_\nu = a_\nu^0 + \sum_1^r {}_k\, e_k [A_k a_\nu]_{a=a^0} + \sum_{kj}^{1\cdots r} \frac{e_k e_j}{1\cdot 2} [A_k A_j a_\nu]_{a=a^0} + \cdots$$
$$(\nu=1\cdots r)$$

die Form (12) annehmen und dass die Gleichungen (11′) bei derselben Substitution in (12′) übergehen. Da nun die Gleichungen (13) eine Transformation zwischen den Parametern: $a_1 \cdots a_r$ und $e_1 \cdots e_r$ darstellen und da die beiden Gruppen (11) und (11′) die Parametergruppe gemein haben, so folgt, dass auch zu den beiden Gruppen (12) und (12′) ein und dieselbe Parametergruppe gehört.

Es gilt demnach der

Satz 1. *Stehen die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:*

$$X_k f = \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k=1\cdots r)$$

paarweise in den Beziehungen:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} X_s f,$$

und stehen andererseits die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$Y_k f = \sum_1^m {}_\mu\, \eta_{k\mu}(y_1 \cdots y_m) \frac{\partial f}{\partial y_\mu} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

paarweise in denselben Beziehungen:

$$(Y_i Y_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} Y_s f,$$

so besitzen die beiden r-gliedrigen gleichzusammengesetzten Gruppen:

$$x_i' = x_i + \sum_1^r {}_k\, e_k X_k x_i + \sum_{kj}^{1 \cdots r} \frac{e_k e_j}{1 \cdot 2} X_k X_j x_i + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

und:

$$y_\mu' = y_\mu + \sum_1^r {}_k\, e_k Y_k y_\mu + \sum_{kj}^{1 \cdots r} \frac{e_k e_j}{1 \cdot 2} Y_k Y_j y_\mu + \cdots \qquad (\mu = 1 \cdots m)$$

ein und dieselbe Parametergruppe.

Denken wir uns jetzt irgend zwei r-gliedrige gleichzusammengesetzte Gruppen:

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

und:

$$y_\mu' = \mathfrak{f}_\mu(y_1 \cdots y_m,\ a_1 \cdots a_r) \qquad (\mu = 1 \cdots m)$$

vorgelegt, die bereits eine solche Form haben, dass die Parametergruppe für beide dieselbe ist.

Die infinitesimalen Transformationen der betreffenden Parametergruppe seien:

$$A_k f = \sum_1^r {}_j\, \alpha_{kj}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_j} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

und mögen durch die Relationen:

$$(A_i A_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} A_s f$$

verknüpft sein.

Nach S. 405 genügen $x_1' \cdots x_n'$ als Functionen von $x_1 \cdots x_n$ $a_1 \cdots a_r$ betrachtet gewissen Differentialgleichungen von der Form:

$$\xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') = \sum_1^r {}_k\, \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} \qquad (j = 1 \cdots r;\ i = 1 \cdots n).$$

Hierbei sind die $\xi_{ji}(x')$ ganz bestimmte Functionen; denn erhalten wir durch Auflösung der Gleichungen: $x_i' = f_i(x, a)$ etwa: $x_i = F_i(x', a)$, so wird identisch:

$$\xi_{ji}(x_1' \cdots x_n') = \sum_1^r {}^k \, \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) \left[\frac{\partial f_i(x, a)}{\partial a_k}\right]_{x=F(x', a)},$$

so dass wir also die $\xi_{ji}(x')$ ohne Weiteres finden können, wenn wir wollen.

Nach Theorem 21, S. 149 sind die r Ausdrücke:

$$X_k f = \sum_1^n {}^i \, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

unabhängige infinitesimale Transformationen und durch die Relationen

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}^s \, c_{iks} X_s f$$

verknüpft; natürlich erzeugen sie die Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$.

Für die Gruppe: $y_\mu' = \mathfrak{f}_\mu(y, a)$ ergeben sich in entsprechender Weise Differentialgleichungen von der Form:

$$\eta_{j\mu}(y_1' \cdots y_m') = \sum_1^r {}^k \, \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial y_\mu'}{\partial a_k} \qquad (j = 1 \cdots r;\ \mu = 1 \cdots m),$$

wo die $\eta_{j\mu}(y')$ vollständig bestimmte Functionen sind. Die r Ausdrücke:

$$Y_k f = \sum_1^m {}^\mu \, \eta_{k\mu}(y_1 \cdots y_m) \frac{\partial f}{\partial y_\mu} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

sind unabhängige infinitesimale Transformationen und durch die Relationen:

$$(Y_i Y_k) = \sum_1^r {}^s \, c_{iks} Y_s f$$

verknüpft; sie erzeugen natürlich die Gruppe: $y_\mu' = f_\mu(y, a)$.

Nunmehr erkennen wir geradeso wie auf S. 414, dass die Gruppen: $x_i' = f_i(x, a)$ und: $y_\mu' = \mathfrak{f}_\mu(y, a)$ bei der Substitution:

$$a_\nu = a_\nu^0 + \sum_1^r {}^k \, e_k [A_k a_\nu]_{a = a^0} + \cdots \qquad (\nu = 1 \cdots r)$$

bezüglich die Formen:

$$x_i' = x_i + \sum_1^r {}^k \, e_k X_k x_i + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

und:

$$y_\mu' = y_\mu + \sum_1^r {}_k\, e_k Y_k y_\mu + \cdots \qquad (\mu = 1 \cdots m)$$

erhalten. Also ergiebt sich der

Satz 2. *Haben die beiden r-gliedrigen Gruppen:*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

und:

$$y_\mu' = f_\mu(y_1 \cdots y_m,\ a_1 \cdots a_r) \qquad (\mu = 1 \cdots m)$$

dieselbe Parametergruppe, so ist es möglich, an Stelle der a solche neue Parameter: $e_1 \cdots e_r$ einzuführen, dass die beiden Gruppen bezüglich die Formen erhalten:

$$x_i' = x_i + \sum_1^r {}_k\, e_k X_k x_i + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

und:

$$y_\mu' = y_\mu + \sum_1^r {}_k\, e_k Y_k y_\mu + \cdots \qquad (\mu = 1 \cdots m);$$

hierbei sind: $X_1 f \cdots X_r f$ und $Y_1 f \cdots Y_r f$ solche unabhängige infinitesimale Transformationen der beiden Gruppen, dass mit den Relationen:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} X_s f$$

zu gleicher Zeit die Relationen:

$$(Y_i Y_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} Y_s f$$

bestehen, sodass die beiden Gruppen holoedrisch isomorph auf einander bezogen sind, wenn jeder infinitesimalen Transformation: $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ die infinitesimale Transformation $e_1 Y_1 f + \cdots + e_r Y_r f$ zugeordnet wird.

Ueber die beiden Gruppen: $x_i' = f_i(x, a)$ und: $y_\mu' = f_\mu(y, a)$ machen wir dieselben Voraussetzungen wie in Satz 2; ausserdem wollen wir noch annehmen, dass: $a_k' = \varphi_k(a, b)$ die endlichen Gleichungen ihrer gemeinsamen Parametergruppe sind.

Offenbar gilt unter dieser Voraussetzung für jede der beiden Gruppen Folgendes: Werden nach einander zwei Transformationen der Gruppe ausgeführt, die bezüglich die Parameter: $a_1 \cdots a_r$ und: $b_1 \cdots b_r$ haben, so gehört die resultirende Transformation der Gruppe an und besitzt die Parameter: $\varphi_1(a, b) \cdots \varphi_r(a, b)$.

Diese Thatsache können wir etwas anders ausdrücken, wenn wir die Transformationen der beiden Gruppen in der Weise einander zuordnen, dass jeder Transformation der einen Gruppe diejenige Transformation der andern Gruppe entspricht, welche dieselben Parameter hat. Dann können wir nämlich sagen: ist S eine Transformation der einen Gruppe und $\mathfrak{S}$ die entsprechende Transformation der anderen Gruppe, ist ferner T eine zweite Transformation der einen Gruppe und $\mathfrak{T}$ die entsprechende Transformation der andern Gruppe, so entspricht der Transformation ST der einen Gruppe in der andern Gruppe die Transformation $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$.

Eine solche Zuordnung der Transformationen beider Gruppen zu einander ist nach Theorem 74, S. 414 stets dann aber auch nur dann möglich, wenn die beiden Gruppen gleichzusammengesetzt sind. Also haben wir das

Theorem 75. *Zwei r-gliedrige Gruppen sind dann und nur dann gleichzusammengesetzt, wenn es möglich ist, die Transformationen der einen derart eindeutig umkehrbar auf die Transformationen der andern zu beziehen, dass Folgendes stattfindet: Führt man in der einen Gruppe zwei Transformationen nach einander aus und führt man in der andern Gruppe die entsprechenden Transformationen in derselben Reihenfolge nach einander aus, so entspricht die Transformation, welche man in der einen Gruppe erhält, derjenigen Transformation, welche man in der andern Gruppe erhält.**)

Ein neues wichtiges Ergebniss liefern die vorstehenden Betrachtungen, wenn sie auf den Satz 1, S. 414 angewandt werden. Um dieses Ergebniss in möglichst einfacher Form aussprechen zu können, erinnern wir noch an zweierlei, erstens daran, dass die beiden Gruppen: $X_1 f \cdots X_r f$ und $Y_1 f \cdots Y_r f$ holoedrisch isomorph auf einander bezogen sind, wenn jeder infinitesimalen Transformation: $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ die infinitesimale Transformation: $e_1 Y_1 f + \cdots + e_r Y_r f$ zugeordnet wird und zweitens, dass der Ausdruck: $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ auch als Symbol einer endlichen Transformation der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ aufgefasst werden kann (vgl. Kap. 17, S. 293 und Kap. 15, S. 255). Berücksichtigen wir das, so können wir sagen:

Satz 3. *Die beiden gleichzusammengesetzten r-gliedrigen Gruppen:*

$$X_k f = \sum_1^n {}^i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k=1 \cdots r)$$

und:

*) Vgl. Lie, Archiv for Mathematik og Naturvidenskab 1876; Math. Ann., Bd. XXV, S. 77; G. d. W. zu Christiania, 1884, Nr. 15.

$$Y_k f = \sum_1^m {}_\mu \, \eta_{k\mu}(y_1 \cdots y_m) \frac{\partial f}{\partial y_\mu} \qquad (k=1 \cdots r)$$

seien holoedrisch isomorph auf einander bezogen, wenn man jeder infinitesimalen Transformation: $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ *die infinitesimale Transformation:* $e_1 Y_1 f + \cdots + e_r Y_r f$ *zuordnet, es mögen also mit den Relationen:*

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_s \, c_{iks} X_s f$$

zugleich die Relationen:

$$(Y_i Y_k) = \sum_1^r {}_s \, c_{iks} Y_s f$$

bestehen. Deutet man dann die Ausdrücke: $\Sigma e_k X_k f$ *und* $\Sigma e_k Y_k f$ *als allgemeine Symbole der endlichen Transformationen der beiden Gruppen:* $X_1 f \cdots X_r f$ *und* $Y_1 f \cdots Y_r f$, *so findet Folgendes statt: Ergeben die beiden Transformationen:* $\Sigma e_k X_k f$ *und* $\Sigma e_k' X_k f$ *der Gruppe:* $X_1 f \cdots X_r f$ *nach einander ausgeführt die Transformation:* $\Sigma e_k'' X_k f$, *so ergeben die beiden Transformationen:* $\Sigma e_k Y_k f$ *und* $\Sigma e_k' Y_k f$ *der Gruppe:* $Y_1 f \cdots Y_r f$ *nach einander ausgeführt die Transformation:* $\Sigma e_k'' Y_k f$.

Wenn man also zwei r-gliedrige gleichzusammengesetzte Gruppen im Sinne von Kap. 17, S. 293 holoedrisch isomorph auf einander bezogen hat, so hat man dadurch zugleich zwischen den endlichen Transformationen der beiden Gruppen eine eindeutig umkehrbare Beziehung hergestellt, wie sie in Theorem 75 beschrieben ist.

Aber auch das Umgekehrte gilt: Hat man zwischen den Transformationen von zwei r-gliedrigen gleichzusammengesetzten Gruppen eine eindeutig umkehrbare Beziehung hergestellt, welche die in Theor. 75 beschriebene Beschaffenheit hat, so sind dadurch zugleich die beiden Gruppen holoedrisch isomorph auf einander bezogen.

In der That, es sei: $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r)$ die eine Gruppe und es sei: $y_\mu' = f_\mu(y_1 \cdots y_m, a_1 \cdots a_r)$ diejenige Transformation der andern Gruppe, welche der Transformation: $x_i' = f_i(x, a)$ entspricht. Dann haben die beiden Gruppen: $x_i' = f_i(x, a)$ und $y_\mu' = f_\mu(y, a)$ offenbar ein und dieselbe Parametergruppe und können daher nach Satz 2, S. 417 durch Einführung geeigneter neuer Parameter: $e_1 \cdots e_r$ die folgenden Formen erhalten:

$$x_i' = x_i + \sum_1^r {}_k \, e_k X_k x_i + \cdots \qquad (i=1 \cdots n)$$

und:

$$y_\mu' = y_\mu + \sum_1^r {}_k \, e_k Y_k y_\mu + \cdots \qquad (\mu=1 \cdots m).$$

Hieraus geht hervor, dass die bewusste eindeutig umkehrbare Beziehung zwischen den Transformationen beider Gruppen darauf hinauskommt, dass jeder endlichen Transformation: $e_1 X_1 f + \cdot \cdot + e_r X_r f$ der einen Gruppe die endliche Transformation: $e_1 Y_1 f + \cdots + e_r Y_r f$ der andern Gruppe zugeordnet ist. Es ist also zugleich jeder infinitesimalen Transformation: $\Sigma e_k X_k f$ die infinitesimale Transformation: $\Sigma e_k Y_k f$ zugeordnet und damit ist nach Satz 2 wirklich eine holoedrisch isomorphe Beziehung zwischen beiden Gruppen hergestellt.

In der Substitutionentheorie definirt man den holoedrischen Isomorphismus zweier Gruppen und die holoedrisch isomorphe Beziehung zwischen zwei Gruppen anders, als wir es in Kap. 17 gethan haben. Man sagt da, dass zwei Gruppen mit gleichvielen Substitutionen „gleichzusammengesetzt" oder „holoedrisch isomorph" sind, wenn sich zwischen den Transformationen der beiden Gruppen eine eindeutig umkehrbare Beziehung herstellen lässt, welche die in Theorem 75, Seite 418 beschriebene Beschaffenheit hat; ist eine solche Beziehung zwischen zwei holoedrisch isomorphen Gruppen wirklich hergestellt, so sagt man, dass die beiden Gruppen „holoedrisch isomorph auf einander bezogen sind".

Aber schon auf S. 293 bemerkten wir, dass materiell unsere Definition der in Rede stehenden Begriffe genau derjenigen entspricht, welche in der Substitutionentheorie üblich ist, jedenfalls soweit entspricht, als es bei zwei so verschiedenen Gebieten wie der Theorie der Substitutionengruppen und der Theorie der Transformationsgruppen möglich ist.

Unsere letzten Entwickelungen zeigen, dass die Behauptung auf S. 293 richtig ist. Aus Theorem 75, S. 418 geht hervor, dass zwei r-gliedrige Gruppen, die im Sinne von Kap. 17, S. 293 holoedrisch isomorph sind, auch im Sinne der Substitutionentheorie als holoedrisch isomorph bezeichnet werden müssen, und umgekehrt. Aus Satz 3, S. 418 und den darauf folgenden Bemerkungen erhellt, dass zwei r-gliedrige Gruppen, die im Sinne von Kap. 17, S. 293 holoedrisch isomorph auf einander bezogen sind, es auch im Sinne der Substitutionentheorie sind und umgekehrt.

Noch bleibt nachzuweisen, dass auch unsere Definition des meroedrischen Isomorphismus (vgl. Kap. 17, S. 293) der Definition entspricht, welche die Substitutionentheorie vom meroedrischen Isomorphismus giebt.

Es seien $X_1 f \cdots X_{r-q} f \cdots X_r f$ und $Y_1 f \cdots Y_{r-q} f$ zwei meroedrisch isomorphe Gruppen, und es möge gerade $X_{r-q+1} f \cdots X_r f$ diejenige invariante Untergruppe der r-gliedrigen Gruppe sein, welche der identischen Transformation der $(r-q)$-gliedrigen Gruppe entspricht. Endlich sei $A_1 f \cdots A_r f$ eine mit $X_1 f \cdots X_r f$ gleichzusammengesetzte, einfach transitive Gruppe in den Veränderlichen $a_1 \cdots a_r$. Dabei wollen wir annehmen, dass $a_1 \cdots a_{r-q}$ Lösungen des vollständigen Systems:

$$A_{r-q+1} f = 0, \quad \cdots A_r f = 0$$

sind.

Bei dieser Wahl der Veränderlichen besitzen $A_1 f \cdots A_{r-q} f$ die Form:

$$A_k f = \sum_1^{r-q} {}_i\, \alpha_{ki}(a_1 \cdots a_{r-q}) \frac{\partial f}{\partial a_i} + \sum_{r-q+1}^{r} {}_j\, \beta_{kj}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_j}$$

$$(k = 1 \cdots r - q),$$

während $A_{r-q+1} f \cdots A_r f$ die Form haben:

$$A_k f = \sum_{r-q+1}^{r} {}_j\, \beta_{kj}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_j} \qquad (k = r - q + 1 \cdots r).$$

Zugleich ist klar, dass die verkürzten infinitesimalen Transformationen:

$$\overline{A}_k f = \sum_1^{r-q} {}_i\, \alpha_{ki}(a_1 \cdots a_{r-q}) \frac{\partial f}{\partial a_i} \qquad (k = 1 \cdots r - q)$$

eine mit der $(r-q)$-gliedrigen Gruppe $Y_1 f \cdots Y_{r-q} f$ gleichzusammengesetzte einfach transitive Gruppe erzeugen.

Bezeichnet man die infinitesimalen Transformationen $A_k f$, $\overline{A}_k f$, geschrieben in den Veränderlichen b statt in den a, mit $B_k f$, $\overline{B}_k f$, so findet man nach früheren Auseinandersetzungen die Parametergruppe der $(r-q)$-gliedrigen Gruppe $Y_1 f \cdots Y_{r-q} f$ durch Integration des vollständigen Systems:

$$\overline{A}_k f + \overline{B}_k f = 0 \qquad (k = 1 \cdots r - q)$$

und die Parametergruppe der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ durch Integration des vollständigen Systems:

$$A_k f + B_k f = 0 \qquad (k = 1 \cdots r).$$

Ergeben sich in dieser Weise als Gleichungen der zur $(r-q)$-gliedrigen Gruppe gehörigen Parametergruppe etwa:

$$a_k' = \varphi_k(a_1 \cdots a_{r-q}, \; b_1 \cdots b_{r-q}) \qquad (k = 1 \cdots r - q),$$

so ist es klar, dass die zur r-gliedrigen Gruppe gehörige Parametergruppe durch Gleichungen von der Form:

$$a_k' = \varphi_k(a_1 \cdots a_{r-q}, \; b_1 \cdots b_{r-q}) \qquad (k = 1 \cdots r - q)$$

$$a_i' = \psi_i(a_1 \cdots a_r, \; b_1 \cdots b_r) \qquad (i = r - q + 1 \cdots r)$$

darstellbar ist. Hieraus folgt, dass die Gruppen $X_1 f \cdots X_r f$ und $Y_1 f \cdots Y_{r-q} f$ im Sinne der Substitutionentheorie meroedrisch isomorph sind.

Das soeben erhaltene Resultat wollen wir jetzt noch in einer anderen Weise ableiten. Wir halten es jedoch nicht für nothwendig, diese zweite, an sich bemerkenswerthe Methode im Einzelnen auszuführen, da sie mit früheren Entwickelungen grosse Analogie darbietet.

Wir denken uns die Transformationsgleichungen:

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \quad (i=1\cdots n)$$

vorgelegt, lassen es aber unentschieden, ob die a wesentliche Parameter sind oder nicht. Erfüllen nun die f_i Differentialgleichungen von der Form:

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_k} = \sum_1^r {}^j\, \psi_{jk}(a_1 \cdots a_r) \cdot \xi_{ji}(f_1 \cdots f_n),$$

die sich nach den ξ_{ji} auflösen lassen:

$$\xi_{ji}(f) = \sum_1^r {}^k\, \alpha_{jk}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f_i}{\partial a_k},$$

so erkennen wir leicht (vgl. Kap. 4, S. 68 ff.), dass jede Transformation: $x_i' = f_i(x, a)$, deren Parameter a in einer gewissen Umgebung von $\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_r$ liegen, dadurch entstehen kann, dass wir zuerst die Transformation: $\bar{x}_i = f_i(x, \bar{a})$ ausführen und darnach eine gewisse Transformation:

$$x_i' = w_i(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n,\ \lambda_1 \cdots \lambda_r)$$

einer eingliedrigen Gruppe:

$$\lambda_1 X_1 f + \cdots + \lambda_r X_r f = \sum_1^r {}^k\, \lambda_k \sum_1^n {}^i\, \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Wir finden überdies, dass die betreffenden Werthe der Parameter λ nur von der Form der Functionen $\alpha_{kj}(a)$ sowie von den beiden Werthsystemen $\bar{a}_k$ und a_k abhängen.

Unter den gemachten Voraussetzungen ergiebt sich nun (vergleiche Seite 146 ff.), wenn:

$$\sum_1^r {}^k\, \alpha_{jk}(a) \frac{\partial f}{\partial a_k} = A_k f, \quad \sum_1^n {}^i\, \xi_{ki}(x') \frac{\partial f}{\partial x_i'} = X_k' f$$

gesetzt wird, dass Relationen von der Form:

$$(X_i' X_k') = \sum_1^r {}^s\, \vartheta_{iks}(x_1' \cdots x_n',\ a_1 \cdots a_r) \cdot X_s' f$$

$$(A_i A_k) = \sum_1^r {}^s\, \vartheta_{iks}(x_1' \cdots x_n',\ a_1 \cdots a_r) \cdot A_s f$$

bestehen, in denen sogar die ϑ_{iks} von den x' unabhängig sind. Jetzt lässt sich allerdings nicht wie bei den früheren analogen Entwickelungen nachweisen, dass in den *beiden* letzten Gleichungen die ϑ gleich absoluten Constanten gesetzt werden können. Wenn wir aber nur die Gleichungen:

$$(X_i' X_k') = \sum_1^r {}^s\, \vartheta_{iks}(a) \cdot X_s' f$$

ins Auge fassen, so ist es klar, dass sie bei Particularisirung der a Relationen von der Form:

$$(X_i' X_k') = \sum_1^r{}_s \, c_{iks} X_s' f$$

liefern, in denen die c_{iks} Constanten bedeuten. Es ist daher auch unter unseren jetzigen Voraussetzungen sicher, dass alle endlichen Transformationen $\lambda_1 X_1 f + \cdots + \lambda_r X_r f$ eine Gruppe bilden, welche ebenso viele wesentliche Parameter besitzt wie die Schaar $x_i' = f_i(x, a)$.

Es mögen andererseits $X_1' f \cdots X_r' f$ r solche nicht eben unabhängige infinitesimale Transformationen in den Veränderlichen $x_1' \cdots x_n'$ bezeichnen, welche in den Beziehungen:

$$(X_i' X_k') = \sum_1^r{}_s \, c_{iks} X_s' f$$

stehen; ferner seien:

$$A_k f = \sum_1^r{}_i \, \alpha_{ki}(a_1 \cdots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_i} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

r unabhängige infinitesimale Transformationen einer einfach transitiven Gruppe, deren Zusammensetzung durch die Gleichungen:

$$(A_i A_k) = \sum_1^r{}_s \, c_{iks} A_s f$$

gegeben ist.

Jetzt bilden wir das r-gliedrige vollständige System:

$$X_k' f + A_k f = 0 \quad (k = 1 \cdots r),$$

berechnen seine Hauptlösungen $F_1 \cdots F_n$ hinsichtlich eines passenden Werthsystems $a_1 = a_1^0, \cdots a_r = a_r^0$ und setzen darauf: $x_1 = F_1, \cdots x_n = F_n$. Alsdann bestimmen die durch Auflösung hervorgehenden Gleichungen:

$$x_k' = f_k(x_1 \cdots x_n, \, a_1 \cdots a_r)$$

eine Schaar von höchstens ∞^r Transformationen, welche offenbar die identische Transformation $x_k' = x_k$ umfasst.

Indem wir nun genau wie auf Seite 152 verfahren, erhalten wir zunächst das Gleichungensystem:

$$\sum_1^r{}_\mu \, \alpha_{j\mu}(a) \frac{\partial x_\nu'}{\partial a_\mu} = \xi_{j\nu}(x')$$

und darnach durch Auflösung:

$$\frac{\partial x_\nu'}{\partial a_\mu} = \sum_1^r{}_j \, \psi_{j\mu}(a) \cdot \xi_{j\nu}(x').$$

Wir schliessen hieraus *erstens*, dass die Schaar $x_i' = f_i(x, a)$ aus den Transformationen aller eingliedrigen Gruppen $\Sigma \lambda_k X_k f$ besteht, *zweitens*, dass alle diese Transformationen eine *Gruppe* mit höchstens r wesentlichen Parametern bilden, endlich *drittens*, dass aus den beiden Transformationen:

$$x_i' = f_i(x, a), \quad x_i'' = f_i(x', b)$$

eine dritte Transformation $x_i'' = f_i(x, c)$ dieser Gruppe entsteht, deren Parameter: $c_1 = \varphi_1(a, b), \cdots c_r = \varphi_r(a, b)$ durch die beiden Werthsysteme a_k, b_i und durch die Form der Functionen $\alpha_{kj}(a)$ bestimmt sind.

Hiermit ist aber, wie wir nicht näher auszuführen brauchen, das früher erhaltene Resultat in neuer Weise abgeleitet.

Enthält eine gegebene r-gliedrige Gruppe $X_1 f \cdots X_{r-q} f \cdots X_r f$ eine bekannte invariante Untergruppe etwa $X_{r-q+1} f \cdots X_r f$, so können wir jetzt leicht eine meroedrisch isomorphe $(r-q)$-gliedrige Gruppe angeben, deren identische Transformation der besprochenen invarianten Untergruppe entspricht (vgl. S. 304, Anmerkung). In der That, man bilde eine mit der r-gliedrigen Gruppe gleichzusammengesetzte einfach transitive Gruppe $A_1 f \cdots A_{r-q} f \cdots A_r f$ in den Veränderlichen $a_1 \cdots a_r$. Dabei können wir wie früher annehmen, dass $a_1 \cdots a_{r-q}$ Invarianten der q-gliedrigen Gruppe: $A_{r-q+1} f \cdots A_r f$ sind. Setzen wir dann wieder:

$$A_k f = \sum_1^{r-q} {}_i \, \alpha_{ki}(a_1 \cdots a_{r-q}) \frac{\partial f}{\partial a_i} + \sum_{r-q+1}^{r} {}_j \, \beta_{kj}(a) \frac{\partial f}{\partial a_j} \qquad (k = 1 \cdots r - q),$$

so erzeugen die verkürzten infinitesimalen Transformationen:

$$\overline{A}_k f = \sum_1^{r-q} {}_i \, \alpha_{ki}(a_1 \cdots a_{r-q}) \frac{\partial f}{\partial a_i} \qquad (k = 1 \cdots r - q)$$

offenbar eine $(r-q)$-gliedrige Gruppe von der verlangten Beschaffenheit.

Aus diesen Entwickelungen geht überdies hervor, dass *jeder Satz über die Zusammensetzung $(r-q)$-gliedriger Gruppen ohne weiteres einen Satz über die Zusammensetzung r-gliedriger Gruppen mit einer invarianten q-gliedrigen Untergruppe liefert.* Dieses allgemeine Princip, welches in der Substitutionentheorie sein Analogon hat, wird im dritten Abschnitte verwerthet werden.*)

§ 104.

In Kap. 19, Satz 3, S. 359, gaben wir den Kriterien für die Aehnlichkeit gleichzusammengesetzter Gruppen eine bemerkenswerthe Form; wir zeigten nämlich, dass zwei gleichzusammengesetzte Gruppen in gleichvielen Veränderlichen dann und nur dann mit einander ähnlich sind, wenn sie sich in einer gewissen, ganz besonderen Weise holoedrisch isomorph auf einander beziehen lassen.

Schon damals kündigten wir an, dass das betreffende Kriterium sich noch wesentlich vereinfachen lässt, sobald die beiden Gruppen, um welche es sich handelt, *transitiv* sind; wir kündigten an, dass das folgende Theorem gilt:

---

*) Vgl. Lie, Math. Ann. Bd. XXV, S. 137.

Theorem 76. *Zwei gleichzusammengesetzte transitive Gruppen:*

$$X_k f = \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad {\scriptstyle (k=1\cdots r)}$$

und:

$$Z_k f = \sum_1^n {}_i\, \zeta_{ki}(y_1 \cdots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_i} \qquad {\scriptstyle (k=1\cdots r)}$$

*in gleichvielen Veränderlichen sind dann und nur dann mit einander ähnlich, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Wählt man einen bestimmten Punkt: $x_1^0 \cdots x_n^0$ aus, welcher auf keiner bei der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ invarianten Mannigfaltigkeit liegt, so muss es möglich sein, die beiden Gruppen derart holoedrisch isomorph auf einander zu beziehen, dass der grössten in der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ enthaltenen Untergruppe, welche den Punkt: $x_1^0 \cdots x_n^0$ invariant lässt, die grösste Untergruppe der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ entspricht, welche einen gewissen Punkt: $y_1^0 \cdots y_n^0$ in Ruhe lässt.**)

Aus Satz 3, S. 359 ist klar, dass diese Bedingung für die Aehnlichkeit der beiden Gruppen nothwendig ist; nachgewiesen zu werden braucht daher blos, dass sie auch hinreichend ist.

Denken wir uns also die Voraussetzungen des Theorems erfüllt, denken wir uns in der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ solche unabhängige infinitesimale Transformationen: $Y_1 f \cdots Y_r f$ ausgewählt, dass unsere beiden Gruppen in der im Theorem 76 beschriebenen Weise holoedrisch isomorph auf einander bezogen sind, wenn jeder infinitesimalen Transformation: $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ die infinitesimale Transformation: $e_1 Y_1 f + \cdots + e_r Y_r f$ zugeordnet wird.

Nach den Entwickelungen des vorigen Paragraphen ist durch die betreffende holoedrisch isomorphe Beziehung auch zwischen den endlichen Transformationen beider Gruppen eine eindeutig umkehrbare Beziehung hergestellt. Wir können diese letztere am einfachsten beschreiben, wenn wir in der bekannten Weise $\Sigma e_k X_k f$ und $\Sigma e_k Y_k f$ als Symbole der endlichen Transformationen unserer Gruppen auffassen und ausserdem zu grösserer Bequemlichkeit die endliche Transformation $\Sigma e_k X_k f$ kurz mit: $T_{(e)}$ bezeichnen, sowie die Transformation: $\Sigma e_k Y_k f$ kurz mit: $\mathfrak{T}_{(e)}$.

Unter diesen Voraussetzungen ordnet nämlich die holoedrisch isomorphe Beziehung zwischen unsern beiden Gruppen der Transformation $T_{(e)}$ die Transformation $\mathfrak{T}_{(e)}$ zu und umgekehrt, und diese

*) Vgl. Lie, Archiv for Math. og Naturv. Christiania 1885, S. 388 u. 389.

Zuordnung ist so beschaffen, dass auch die beiden Transformationen: $T_{(e)} T_{(e')}$ und $\mathfrak{T}_{(e)} \mathfrak{T}_{(e')}$ einander zugeordnet sind, wobei $e_1 \cdots e_r$ und $e_1' \cdots e_r'$ ganz beliebige Werthsysteme bezeichnen.

Der Punkt: $x_1^0 \cdots x_n^0$ bleibt bei gerade $r - n$ unabhängigen infinitesimalen Transformationen der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ invariant, folglich gestattet er gerade ∞^{r-n} verschiedene endliche Transformationen dieser Gruppe, Transformationen, die bekanntlich eine $(r-n)$-gliedrige Untergruppe bilden. Wir wollen für die allgemeinste Transformation $T_{(e)}$, welche den Punkt: $x_1^0 \cdots x_n^0$ in Ruhe lässt, das Symbol: $S_{(a_1 \cdots a_{r-n})}$ oder kurz: $S_{(a)}$ einführen; unter $a_1 \cdots a_{r-n}$ verstehen wir dabei willkürliche Parameter.

Diejenigen Transformationen $\mathfrak{T}_{(e)}$ der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$, welche den Transformationen $S_{(a)}$ der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ zugeordnet sind, bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}_{(a_1 \cdots a_{r-n})}$ oder kurz mit $\mathfrak{S}_{(a)}$; unter den gemachten Voraussetzungen bilden dann die ∞^{r-n} Transformationen $\mathfrak{S}_{(a)}$ die grösste in der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ enthaltene Untergruppe, welche den Punkt: $y_1^0 \cdots y_n^0$ invariant lässt. Hierin liegt, dass der Punkt: $y_1^0 \cdots y_n^0$ keiner Mannigfaltigkeit angehört, welche bei der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ invariant bleibt.

Nach diesen Vorbereitungen stellen wir die folgenden Ueberlegungen an.

Bei Ausführung der Transformation $T_{(e)}$ geht der Punkt x_i^0 in den Punkt: $(x_i^0) T_{(e)}$ über, dessen Lage natürlich von den Werthen der Parameter $e_1 \cdots e_r$ abhängt. Dieser neue Punkt gestattet nach Kap. 14, Satz 1, S. 227 seinerseits gerade ∞^{r-n} Transformationen der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$, nämlich alle Transformationen von der Form:

$$T_{(e)}^{-1} S_{(a)} T_{(e)},$$

mit den $r - n$ willkürlichen Parametern: $a_1 \cdots a_{r-n}$.

Andererseits geht der Punkt y_i^0 bei der Transformation $\mathfrak{T}_{(e)}$ über in den Punkt: $(y_i^0) \mathfrak{T}_{(e)}$, der natürlich gerade ∞^{r-n} Transformationen der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ gestattet, nämlich alle Transformationen von der Form:

$$\mathfrak{T}_{(e)}^{-1} \mathfrak{S}_{(a)} \mathfrak{T}_{(e)}.$$

Das sind nun augenscheinlich diejenigen Transformationen der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$, welche den Transformationen: $T_{(e)}^{-1} S_{(a)} T_{(e)}$ der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ zugeordnet sind; also sehen wir, dass bei unserer holoedrisch isomorphen Beziehung für die Punkte: $(x_i^0) T_{(e)}$ und $(y_i^0) \mathfrak{T}_{(e)}$ genau dasselbe gilt wie für die Punkte: x_i^0 und y_i^0; nämlich der grössten in der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ enthaltenen Untergruppe, welche den Punkt

$(x_i^0)T_{(e)}$ invariant lässt, entspricht die grösste Untergruppe der Gruppe: $Z_1f \cdots Z_rf$, bei welcher der Punkt: $(y_i^0)\mathfrak{T}_{(e)}$ stehen bleibt.

Ertheilen wir jetzt den Parametern $e_1 \cdots e_r$ in den Transformationen $T_{(e)}$ und $\mathfrak{T}_{(e)}$ nach und nach alle möglichen Werthe. Dann geht der Punkt: $(x_i^0)T_{(e)}$ wegen der Transitivität der Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ nach und nach in alle Punkte des Raumes $x_1 \cdots x_n$ über, welche auf keiner invarianten Mannigfaltigkeit liegen, also in alle Punkte von allgemeiner Lage. Zugleich geht der Punkt: $(y_i^0)\mathfrak{T}_{(e)}$ in alle Punkte von allgemeiner Lage im Raume $y_1 \cdots y_n$ über.

Hiermit ist gezeigt, dass die holoedrisch isomorphe Beziehung zwischen unsern beiden Gruppen die im Satze 3, S. 359 zusammengestellten Eigenschaften besitzt; also ist nach diesem Satze die Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ mit der Gruppe: $Z_1f \cdots Z_rf$ ähnlich und die Richtigkeit des Theorems 76, S. 425 ist erwiesen.

Zum Beweise des Theorems 76 braucht man übrigens gar nicht auf den citirten Satz zurückzugreifen. Es lässt sich vielmehr aus den vorstehenden Entwickelungen direkt schliessen, dass eine Transformation existirt, welche die infinitesimalen Transformationen: $X_1f \cdots X_rf$ bezüglich in: $Y_1f \cdots Y_rf$ überführt.

Wir haben gesehen, dass durch unsere holoedrisch isomorphe Beziehung dem Punkte: $(x_i^0)T_{(e)}$ des Raumes $x_1 \cdots x_n$ der Punkt: $(y_i^0)\mathfrak{T}_{(e)}$ des Raumes $y_1 \cdots y_n$ zugeordnet ist, und zwar ist auf diese Weise zwischen den Punkten von allgemeiner Lage beider Räume eine innerhalb eines gewissen Bereiches eindeutig umkehrbare Beziehung hergestellt. Deuten wir nun die x_i und die y_i als Punktcoordinaten eines und desselben n-fach ausgedehnten Raumes: R_n und zwar beide in Bezug auf dasselbe Coordinatensystem, so giebt es eine ganz bestimmte Transformation T des Raumes R_n, welche stets den Punkt mit den Coordinaten: $(x_i^0)T_{(e)}$ in den Punkt mit den Coordinaten: $(y_i^0)\mathfrak{T}_{(e)}$ überführt. Wir werden nachweisen, dass diese Transformation T die infinitesimalen Transformationen: $X_1f \cdots X_rf$ in bezüglich: $Y_1f \cdots Y_rf$ überführt, dass also unsere beiden r-gliedrigen Gruppen gerade vermöge der Transformation T mit einander ähnlich sind.

Die Transformation T befriedigt alle die unendlich vielen symbolischen Gleichungen:

$$(14) \qquad (x_i^0)T_{(e')}\mathsf{T} = (y_i^0)\mathfrak{T}_{(e')},$$

mit den r willkürlichen Parametern $e_1 \cdots e_r$, sie ist sogar durch diese Gleichungen definirt. Hieraus geht hervor, dass T zugleich die folgenden symbolischen Gleichungen erfüllt:

$$(x_i^0)\,T_{(e')}\,T_{(e)}\,\mathsf{T} = (y_i^0)\,\mathfrak{T}_{(e')}\,\mathfrak{T}_{(e)},$$

welche Werthe auch die Parameter e und e' haben mögen.

Verbinden wir diese Gleichungen mit den Gleichungen (14), welche wir offenbar auch schreiben können:

$$(x_i^0)\,T_{(e')} = (y_i^0)\,\mathfrak{T}_{(e')}\,\mathsf{T}^{-1},$$

so erhalten wir:

$$(y_i^0)\,\mathfrak{T}_{(e')}\,\mathsf{T}^{-1}\,T_{(e)}\,\mathsf{T} = (y_i^0)\,\mathfrak{T}_{(e')}\,\mathfrak{T}_{(e)},$$

oder, was dasselbe ist:

$$(15)\qquad (y_i^0)\,\mathfrak{T}_{(e')}\,\mathsf{T}^{-1}\,T_{(e)}\,\mathsf{T}\,\mathfrak{T}_{(e)}^{-1} = (y_i^0)\,\mathfrak{T}_{(e')}.$$

Der Punkt: $(y_i^0)\,\mathfrak{T}_{(e')}$ kann bei geeigneter Wahl von $e_1' \cdots e_r'$ mit jedem Punkte von allgemeiner Lage in dem R_n zur Deckung gebracht werden, also sagen die Gleichungen (15) aus, dass jede Transformation von der Form:

$$(16)\qquad \mathsf{T}^{-1}\,T_{(e)}\,\mathsf{T}\,\mathfrak{T}_{(e)}^{-1}$$

alle Punkte von allgemeiner Lage in dem R_n stehen lässt. Das ist aber offenbar nur möglich, wenn alle Transformationen (16) mit der identischen Transformation zusammenfallen.

Hiermit ist bewiesen, dass die folgenden ∞^r symbolischen Gleichungen bestehen:

$$(17)\qquad \mathsf{T}^{-1}\,T_{(e)}\,\mathsf{T} = \mathfrak{T}_{(e)},$$

dass also die Transformation T jede Transformation $T_{(e)}$ der Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ in die entsprechende Transformation $\mathfrak{T}_{(e)}$ der Gruppe: $Z_1f \cdots Z_rf$ überführt. Mit andern Worten, der Ausdruck: $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ verwandelt sich bei der Ausführung der Transformation T in den Ausdruck: $e_1 Y_1 f + \cdots + e_r Y_r f$ oder, was dasselbe ist, die r infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \cdots X_r f$ gehen bei Ausführung von T in bezüglich: $Y_1 f \cdots Y_r f$ über.

Folglich sind die beiden Gruppen: $X_1 f \cdots X_r f$ und $Z_1 f \cdots Z_r f$ mit einander ähnlich und das Theorem 76, S. 425 ist nunmehr auch unabhängig von dem Satze 3, S. 359 bewiesen.

§ 105.

In § 100 sahen wir, dass die daselbst definirten Gleichungen: $a_k' = \varphi_k(a, b)$ eine Gruppe darstellen, und zwar erkannten wir das daraus, dass zwischen den r Functionen $\varphi_k(a, b)$ die r Identitäten:

$$(5)\qquad \varphi_k(\varphi_1(a, b) \cdots \varphi_r(a, b),\, c_1 \cdots c_r) \equiv \varphi_k(a_1 \cdots a_r,\, \varphi_1(b, c) \cdots \varphi_r(b, c))$$

bestanden.

Man überzeugt sich nun geradeso, dass auch die Gleichungen:

$$(18)\qquad a_k' = \varphi_k(b_1 \cdots b_r,\, a_1 \cdots a_r) \quad (k = 1 \cdots r)$$

in den Veränderlichen a eine Gruppe mit den Parametern b darstellen und zwar eine r-gliedrige einfach transitive Gruppe.

Nur einige Bemerkungen über diese neue Gruppe.

Dieselbe besitzt die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass jede ihrer Transformationen mit jeder Transformation der Parametergruppe: $a_k' = \varphi_k(a, b)$ vertauschbar ist. Führt man nämlich zuerst die Transformationen (18) aus und sodann irgend eine Transformation:

$$a_k'' = \varphi_k(a_1' \cdots a_r', c_1 \cdots c_r) \quad {\scriptstyle (k=1 \cdots r)}$$

der Parametergruppe: $a_k' = \varphi_k(a, b)$, so erhält man die Transformation:

$$a_k'' = \varphi_k(\varphi_1(b, a) \cdots \varphi_r(b, a),\ c_1 \cdots c_r) \quad {\scriptstyle (k=1 \cdots r)},$$

welche wegen der Identitäten (5) auf die Form:

$$a_k'' = \varphi_k(b_1 \cdots b_r,\ \varphi_1(a, c) \cdots \varphi_r(a, c)) \quad {\scriptstyle (k=1 \cdots r)}$$

gebracht werden kann. Diese Transformation kann aber auch dadurch erhalten werden, dass man zuerst die Transformation:

$$a_k' = \varphi_k(a_1 \cdots a_r,\ c_1 \cdots c_r)$$

der Parametergruppe ausführt und sodann die Transformation:

$$a_k'' = \varphi_k(b_1 \cdots b_r,\ a_1' \cdots a_r')$$

der Gruppe (18).

Demnach ist die Gruppe (18) nichts anderes als die zur Parametergruppe gehörige reciproke einfach transitive Gruppe*); sie ist nach Theorem 68, S. 380 mit der Parametergruppe gleichzusammengesetzt und sogar ähnlich; sie ist überdies natürlich auch mit der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ selbst gleichzusammengesetzt.

Kapitel 22.

Die Bestimmung aller r-gliedrigen Gruppen.

Bereits im Kapitel 17, S. 297 haben wir hervorgehoben, dass jedes System von Constanten c_{iks}, welches die Relationen:

$$(1) \qquad \begin{cases} c_{iks} + c_{kis} = 0 \\ \sum_1^r {}_\nu \, (c_{ik\nu} c_{\nu js} + c_{kj\nu} c_{\nu is} + c_{ji\nu} c_{\nu ks}) = 0 \\ \qquad {\scriptstyle (i,\, k,\, j,\, s = 1 \cdots r)} \end{cases}$$

befriedigt, eine mögliche Zusammensetzung r-gliedriger Gruppen darstellt, dass es immer r-gliedrige Gruppen giebt, deren Zusammensetzung

---

*) Die Bemerkung, dass die beiden im Texte besprochenen Gruppen (6) und (18) in solcher Beziehung zu einander stehen, dass die Transformationen der einen mit den Transformationen der andern vertauschbar sind, ist von Engel.

eben durch dieses System von c_{iks} bestimmt wird. Der Beweis hierfür wird aber, wie wir damals bemerkten, erst im zweiten Abschnitte in voller Allgemeinheit geliefert; dort werden wir uns ein beliebiges System c_{iks} von der bewussten Beschaffenheit vorgelegt denken und werden nachweisen, dass jedenfalls nur die Integration simultaner Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen erforderlich ist, um die infinitesimalen Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe zu finden, welche die Zusammensetzung c_{iks} hat. Die endlichen Gleichungen dieser Gruppe ergeben sich dann nach Kap. 4 und 9 ebenfalls durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen.

In dem gegenwärtigen Kapitel nun zeigen wir zweierlei:

Erstens denken wir uns die endlichen Gleichungen:

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \quad (i=1\cdots n)$$

einer r-gliedrigen Gruppe vorgelegt und zeigen, wie man jedenfalls durch Integration simultaner Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen alle r-gliedrigen *transitiven* Gruppen finden kann, welche mit der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ gleichzusammengesetzt sind.

Zweitens zeigen wir, dass sich ohne Integration alle r-gliedrigen *intransitiven* Gruppen bestimmen lassen, sobald man alle *transitiven* Gruppen mit r oder weniger Parametern kennt.

Verbinden wir diese Ergebnisse mit dem oben Gesagten und nehmen wir noch hinzu, dass nach Theorem 53, S. 300 die Bestimmung aller möglichen Zusammensetzungen von Gruppen mit gegebener Parameterzahl nur algebraische Operationen verlangt, so erkennen wir sofort Folgendes:

Ist die Zahl r gegeben, so erfordert die Bestimmung aller r-gliedrigen Gruppen ausser ausführbaren Operationen höchstens die Integration simultaner Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Von grosser Wichtigkeit ist natürlich die Frage, ob die Integration der auftretenden Differentialgleichungen ausführbar ist oder nicht. Doch können wir weder in diesem Kapitel noch an den betreffenden Stellen des zweiten Abschnitts auf solche Fragen eingehen, denn die Beantwortung derselben setzt Integrationstheorien voraus, welche nicht wohl in einem Werke über Transformationsgruppen entwickelt werden können, welche vielmehr eine gesonderte Behandlung verlangen.

§ 106.

In diesem Paragraphen stellen wir verschiedene Methoden zur Bestimmung von *einfach transitiven* Gruppen zusammen, theils weil diese Methoden im Folgenden Anwendung finden, theils weil sie an und für sich bemerkenswerth sind.

Es seien zunächst die endlichen Gleichungen:

(2) $$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \qquad (i=1\cdots r)$$

einer r-gliedrigen Gruppe vorgelegt. Wir suchen die endlichen Gleichungen einer einfach transitiven Gruppe, welche mit der vorgelegten Gruppe gleichzusammengesetzt ist.

Nach Kap. 21, S. 404 ist die Parametergruppe der Gruppe (2) einfach transitiv und mit der Gruppe (2) gleichzusammengesetzt. Nun lassen sich die endlichen Gleichungen:

$$a_k' = \varphi_k(a_1 \cdots a_r, b_1 \cdots b_r) \qquad (k=1\cdots r)$$

dieser Parametergruppe durch ausführbare Operationen, nämlich durch Auflösung endlicher Gleichungen finden. Also können wir die endlichen Gleichungen *einer* einfach transitiven Gruppe von der verlangten Beschaffenheit aufstellen, eben die bewusste Parametergruppe.

Wir haben somit das

Theorem 77. *Sind die endlichen Gleichungen einer r-gliedrigen Gruppe vorgelegt, so kann man durch ausführbare Operationen die endlichen Gleichungen einer gleichzusammengesetzten einfach transitiven Gruppe finden.*

Offenbar sind mit dieser einen einfach transitiven Gruppe auch alle andern einfach transitiven Gruppen gegeben, welche mit der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ gleichzusammengesetzt sind; dieselben sind ja dem Theorem 64, S. 340 zufolge alle unter einander ähnlich.

Nehmen wir andererseits an, dass nicht die endlichen sondern blos die infinitesimalen Transformationen:

$$X_k f = \sum_1^n \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k=1\cdots r)$$

einer r-gliedrigen Gruppe vorgelegt sind, und suchen wir die infinitesimalen Transformationen einer gleichzusammengesetzten einfach transitiven Gruppe zu bestimmen.

Augenscheinlich haben wir diese Aufgabe bereits in Kap. 9, S. 156 und 157 gelöst, nur ist sie dort anders gefasst, weil wir damals den Begriff der einfach transitiven Gruppe und des Gleichzusammengesetztseins noch nicht hatten. Unsere damalige Lösung der Aufgabe können wir jetzt so aussprechen:

Satz 1. *Sind die infinitesimalen Transformationen:*

$$X_k f = \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k=1\cdots r)$$

einer r-gliedrigen Gruppe vorgelegt, so findet man folgendermassen die *infinitesimalen Transformationen einer gleichzusammengesetzten einfach transitiven Gruppe: Man setze:*

$$X_k^{(\mu)} f = \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki}\,(x_1^{(\mu)} \cdots x_n^{(\mu)}) \frac{\partial f}{\partial x_i^{(\mu)}} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

$$(\mu = 1, 2 \cdots r-1),$$

bilde die r infinitesimalen Transformationen:

$$W_k f = X_k f + X_k^{(1)} f + \cdots + X_k^{(r-1)} f \qquad (k = 1 \cdots r)$$

und bestimme irgend $rn - r$ unabhängige Lösungen: $u_1 \cdots u_{nr-r}$ des r-gliedrigen vollständigen Systems:

$$W_1 f = 0, \cdots W_r f = 0;$$

führt man dann $u_1 \cdots u_{nr-r}$ nebst r geeigneten Functionen: $y_1 \cdots y_r$ der nr Veränderlichen $x_i^{(\mu)}$ als neue unabhängige Veränderliche ein und erhält man auf diese Weise die infinitesimalen Transformationen:

$$W_k f = \sum_1^r {}_j\, \eta_{kj}\,(y_1 \cdots y_r,\ u_1 \cdots u_{nr-r}) \frac{\partial f}{\partial y_j} \qquad (k = 1 \cdots r),$$

versteht man ausserdem unter $u_1^0 \cdots u_{rn-r}^0$ numerische Constanten, so erzeugen die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$\mathfrak{W}_k f = \sum_1^r {}_j\, \eta_{kj}\,(y_1 \cdots y_r,\ u_1^0 \cdots u_{nr-r}^0) \frac{\partial f}{\partial y_j} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

eine einfach transitive Gruppe, die mit der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ gleichzusammengesetzt ist. Sind: $X_1 f \cdots X_r f$ durch die Relationen:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks}\, X_s f$$

verknüpft, so bestehen zwischen $\mathfrak{W}_1 f \cdots \mathfrak{W}_r f$ dieselben Relationen:

$$(\mathfrak{W}_i \mathfrak{W}_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks}\, \mathfrak{W}_s f.$$

Das Verfahren, welches in dem vorstehenden Satze beschrieben ist, verlangt die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen und diese Integration wird natürlich nicht immer ausführbar sein. Theoretisch ist das ja ganz gleichgültig, da wir in dem gegenwärtigen Kapitel doch nicht ohne Integrationen auskommen. Gleichwohl werden wir in den Entwickelungen der nächsten Paragraphen von dem beschriebenen Verfahren nirgends Gebrauch machen, wo es sich um die wirkliche Aufstellung einfach transitiver Gruppen handelt, wir werden es nur an einer Stelle anwenden, wo es gilt, die Existenz einer einfach transitiven Gruppe mit gewissen Eigenschaften nachzuweisen.

Endlich wollen wir uns noch auf den Standpunkt stellen, dass wir uns blos eine Zusammensetzung r-gliedriger Gruppen gegeben denken, also ein System von c_{iks}, welches die Gleichungen (1) befriedigt. Wir werden zeigen, dass es zum mindesten in sehr vielen Fällen möglich ist, durch ausführbare Operationen die endlichen Gleichungen einer einfach transitiven Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} aufzustellen.

Wir benutzen dazu das Theorem 52, S. 296. Nach demselben stehen die r infinitesimalen Transformationen:

$$E_\mu f = \sum_{kj}^{1 \cdots r} c_{j\mu k}\, e_j \frac{\partial f}{\partial e_k} \qquad (\mu = 1 \cdots r)$$

paarweise in den Beziehungen:

$$(E_i E_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks}\, E_s f,$$

erzeugen also eine lineare homogene Gruppe in den Veränderlichen: $e_1 \cdots e_r$. Diese Gruppe ist insbesondere r-gliedrig, wenn nicht alle r-reihigen Determinanten verschwinden, deren Horizontalreihen die Form besitzen:

$$| \, c_{j1k} \; c_{j2k} \cdots c_{jrk} \, | \qquad (j, k = 1 \cdots r),$$

sie hat dann offenbar die Zusammensetzung c_{iks}.

Nun lassen sich die endlichen Gleichungen der Gruppe: $E_1 f \cdots E_r f$ durch ausführbare Operationen aufstellen (vgl. S. 273); wenn daher jene Determinanten nicht alle gleich Null sind, so können wir die endlichen Gleichungen einer r-gliedrigen Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} angeben. Daraus folgt aber sofort (Theor. 77, S. 431), dass wir auch die endlichen Gleichungen einer einfach transitiven Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} angeben können.

Hiermit haben wir den nachstehenden Satz gewonnen:

Satz 2. *Ist ein System von Constanten c_{iks} vorgelegt, welches die Gleichungen:*

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & c_{iks} + c_{kis} = 0 \\ & \sum_1^r {}_\nu \left(c_{ik\nu}\, c_{\nu js} + c_{kj\nu}\, c_{\nu is} + c_{ji\nu}\, c_{\nu ks} \right) = 0 \\ & \qquad (i, k, j, s = 1 \cdots r) \end{aligned} \right.$$

befriedigt und welches so beschaffen ist, dass nicht alle r-reihigen Determinanten verschwinden, deren Horizontalreihen die Form haben:

$$| \, c_{j1k} \; c_{j2k} \cdots c_{jrk} \, | \qquad (j, k = 1 \cdots r),$$

so kann man stets durch ausführbare Operationen die endlichen Gleichungen einer einfach transitiven Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} finden.

Dasselbe lässt sich übrigens in ganz analoger Weise auch noch für andere Systeme von c_{iks} beweisen, doch wollen wir darauf nicht weiter eingehen. Nur eine Bemerkung noch.

Sind r unabhängige infinitesimale Transformationen: $X_1 f \cdots X_r f$ vorgelegt, die eine r-gliedrige Gruppe erzeugen, so ist zugleich das System von c_{iks} gegeben, welches zu der betreffenden Gruppe gehört. Ist nun dieses System von c_{iks} so beschaffen, dass die in Satz 2 bezeichneten Determinanten nicht alle verschwinden, so enthält die Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ augenscheinlich keine ausgezeichnete infinitesimale Transformation (vgl. S. 276), also erkennen wir, dass Folgendes gilt:

Sind r unabhängige infinitesimale Transformationen: $X_1 f \cdots X_r f$ vorgelegt, welche eine r-gliedrige Gruppe erzeugen, so kann man jedenfalls dann, wenn diese Gruppe keine ausgezeichneten infinitesimalen Transformationen enthält, durch ausführbare Operationen die endlichen Gleichungen einer einfach transitiven Gruppe aufstellen, welche mit der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ gleichzusammengesetzt ist.

§ 107.

Nunmehr nehmen wir das erste der beiden Probleme in Angriff, deren Erledigung wir in der Einleitung des Kapitels versprochen haben.

Wir denken uns also die endlichen Gleichungen:

$$(2) \qquad x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \qquad {\scriptstyle (i=1\cdots n)}$$

einer r-gliedrigen Gruppe vorgelegt und stellen uns die Aufgabe, alle r-gliedrigen transitiven Gruppen zu bestimmen, welche mit der vorgelegten Gruppe gleichzusammengesetzt sind.

Wenn eine r-gliedrige Gruppe Γ irgend eines Raumes transitiv und mit der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ gleichzusammengesetzt ist, so gilt dasselbe offenbar auch von allen mit Γ ähnlichen Gruppen desselben Raumes. Es liegt daher nahe, die gesuchten Gruppen in Classen einzutheilen, indem man in ein und dieselbe Classe alle Gruppen von der verlangten Beschaffenheit rechnet, welche gleichviele Veränderliche enthalten und ausserdem mit einander ähnlich sind. Den Inbegriff aller Gruppen, welche einer solchen Classe angehören, bezeichnen wir als einen *Typus* von transitiven Gruppen gegebener Zusammensetzung.

Diese Eintheilung der gesuchten Gruppen in Typen hat den Vortheil, dass wir nicht nöthig haben, die gesuchten Gruppen wirklich alle hinzuschreiben. Ist nämlich *eine* Gruppe von der verlangten Beschaffenheit bekannt, so sind zugleich alle mit ihr ähnlichen Gruppen bekannt, also alle Gruppen, welche demselben Typus angehören. Es genügt daher vollständig, wenn wir aufzählen, wie viele verschiedene

Typen der gesuchten Gruppen es giebt und wenn wir für jeden einzelnen Typus einen Repräsentanten angeben, also eine Gruppe, welche dem betreffenden Typus angehört.

Um unser Problem zu erledigen, schlagen wir nun den folgenden Weg ein:

Zunächst geben wir ein Verfahren an, welches transitive, mit der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ *gleichzusammengesetzte Gruppen liefert. Sodann führen wir den Nachweis, dass man durch dieses Verfahren jede Gruppe von der betreffenden Beschaffenheit erhalten kann, dass man insbesondere für jeden Typus von solchen Gruppen wenigstens einen Repräsentanten findet. Endlich geben wir Kriterien zur Entscheidung darüber, ob zwei verschiedene durch unser Verfahren erhaltene Gruppen mit einander ähnlich sind oder nicht, ob sie also demselben Typus angehören oder nicht. Dadurch sind wir dann in den Stand gesetzt, die Zahl der vorhandenen von einander verschiedenen Typen zu überblicken und haben zugleich für jeden dieser Typen einen Repräsentanten.*

Das ist das Programm, welches wir im Folgenden durchführen werden.

Es seien:

$$Y_k f = \sum_1^r {}_j\, \eta_{kj}(y_1 \cdots y_r) \frac{\partial f}{\partial y_j} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

unabhängige infinitesimale Transformationen einer einfach transitiven Gruppe, welche mit der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ gleichzusammengesetzt ist. Ferner seien:

$$Z_k f = \sum_1^r {}_j\, \zeta_{kj}(y_1 \cdots y_r) \frac{\partial f}{\partial y_j} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

unabhängige infinitesimale Transformationen der zugehörigen reciproken Gruppe, welche nach Theorem 68, S. 380 ebenfalls einfach transitiv und mit der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ gleichzusammengesetzt ist.

Offenbar können alle diese Voraussetzungen erfüllt werden. Zwei einfach transitive Gruppen von der angegebenen Beschaffenheit sind zum Beispiel die im vorigen Kapitel definirte Parametergruppe:

$$a_k' = \varphi_k(a_1 \cdots a_r, b_1 \cdots b_r) \qquad (k = 1 \cdots r)$$

der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ und ihre reciproke Gruppe:

$$a_k' = \varphi_k(b_1 \cdots b_r, a_1 \cdots a_r) \qquad (k = 1 \cdots r),$$

von beiden können ja sogar die endlichen Gleichungen durch ausführbare Operationen aufgestellt werden.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns zur Auseinandersetzung des oben angekündigten Verfahrens, welches transitive Gruppen liefert, die mit der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ gleichzusammengesetzt sind. Dabei können wir offenbar die Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ durch die Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$ ersetzen.

In Kap. 17, S. 305—307 zeigten wir, wie jede bei einer Gruppe invariante Zerlegung des Raumes benutzt werden kann, um eine isomorphe Gruppe aufzustellen. Das wollen wir auf die Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$ anwenden.

Auf Grund von Theor. 69, S. 387 suchen wir irgend eine bei der Gruppe $Y_1 f \cdots Y_r f$ invariante Zerlegung des Raumes $y_1 \cdots y_r$. Wir bestimmen durch algebraische Operationen eine m-gliedrige Untergruppe der reciproken Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$. Sind:

$$(3) \qquad \mathsf{Z}_\mu f = \varepsilon_{\mu 1} Z_1 f + \cdots + \varepsilon_{\mu r} Z_r f \qquad (\mu = 1 \cdots m)$$

unabhängige infinitesimale Transformationen dieser Untergruppe, so bilden wir das m-gliedrige vollständige System:

$$\mathsf{Z}_1 f = 0, \cdots \mathsf{Z}_m f = 0$$

und berechnen durch Integration desselben irgend $r - m$ unabhängige Invarianten:

$$u_1(y_1 \cdots y_r) \cdots u_{r-m}(y_1 \cdots y_r)$$

der Gruppe: $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$. Dann bestimmen die Gleichungen:

$$(4) \qquad u_1(y_1 \cdots y_r) = \text{const.}, \cdots u_{r-m}(y_1 \cdots y_r) = \text{const.}$$

eine bei der Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$ invariante Zerlegung des Raumes $y_1 \cdots y_r$ in ∞^{r-m} m-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten.

Nun führen wir $u_1(y) \cdots u_{r-m}(y)$ nebst m andern geeigneten Functionen: $v_1 \cdots v_m$ der y als neue Veränderliche in $Y_1 f \cdots Y_r f$ ein und erhalten:

$$Y_k f = \sum_1^{r-m} {}_\nu \, \omega_{k\nu}(u_1 \cdots u_{r-m}) \frac{\partial f}{\partial u^\nu} + \sum_1^m {}_\mu \, w_{k\mu}(u_1 \cdots u_{r-m}, v_1 \cdots v_m) \frac{\partial f}{\partial v_\mu}$$
$$(k = 1 \cdots r).$$

Hieraus bilden wir endlich die verkürzten infinitesimalen Transformationen:

$$U_k f = \sum_1^{r-m} {}_\nu \, \omega_{k\nu}(u_1 \cdots u_{r-m}) \frac{\partial f}{\partial u_\nu} \qquad (k = 1 \cdots r).$$

Die erzeugen nach Kap. 17, Satz 4, S. 307 eine mit der Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$ isomorphe Gruppe in den Veränderlichen: $u_1 \cdots u_{r-m}$.

Hätten wir an Stelle von $u_1(y) \cdots u_{r-m}(y)$ irgend welche andere unabhängige Invarianten: $u_1'(y) \cdots u_{r-m}'(y)$ der Gruppe: $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$ gewählt, so hätten wir an Stelle der Gruppe: $U_1 f \cdots U_r f$ eine andere Gruppe in den Veränderlichen: $u_1' \cdots u_{r-m}'$ erhalten, dieselbe wäre aber augenscheinlich mit der Gruppe: $U_1 f \cdots U_r f$ ähnlich, da $u'_1(y) \cdots u'_{r-m}(y)$ unabhängige Functionen von: $u_1(y) \cdots u_{r-m}(y)$ sind. Würden wir $u_1(y) \cdots u_{r-m}(y)$ durch das allgemeinste System von $r-m$ unabhängigen Invarianten der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_m f$ ersetzen, so würden wir die allgemeinste Gruppe in $r-m$ Veränderlichen erhalten, welche mit der Gruppe: $U_1 f \cdots U_r f$ ähnlich ist.

Daraus, dass die Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$ einfach transitiv ist, folgt, wie wir schon in Kap. 20, S. 388 bemerkten, dass nicht alle $(r-m)$-reihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \omega_{11}(u) & \cdot & \omega_{1,r-m}(u) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{r1}(u) & \cdot & \omega_{r,r-m}(u) \end{vmatrix}$$

identisch verschwinden; anders ausgedrückt: es ergiebt sich, dass die Gruppe: $U_1 f \cdots U_{r-m} f$ in den $r-m$ Veränderlichen u transitiv ist.

Wir haben somit eine Methode zur Aufstellung transitiver Gruppen, welche mit der Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$ isomorph sind. Aber das genügt uns nicht, wir verlangen transitive Gruppen, die mit der Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$ gleichzusammengesetzt, also holoedrisch isomorph sind. Demnach ist die Gruppe: $U_1 f \cdots U_r f$ für uns nur dann brauchbar, wenn sie r-gliedrig ist. Unter welchen Bedingungen ist sie das?

Da die Gruppe: $U_1 f \cdots U_r f$ transitiv ist, so enthält sie mindestens $r-m$ wesentliche Parameter, sie wird also im Allgemeinen gerade $r-l$ wesentliche Parameter enthalten, wo $0 \leqq l \leqq m$ ist. Dann giebt es nach S. 307 in der Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$ gerade l unabhängige infinitesimale Transformationen, welche jede einzelne der ∞^{r-m} Mannigfaltigkeiten (4) stehen lassen, und diese infinitesimalen Transformationen erzeugen eine l-gliedrige invariante Untergruppe der Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$. Wir wollen die betreffende Untergruppe der Kürze wegen mit g bezeichnen.

Ist M irgend eine allgemein gelegene unter den Mannigfaltigkeiten (4), so gestattet M gerade m unabhängige infinitesimale Transformationen: $e_1 Y_1 f + \cdots + e_r Y_r f$, die eine m-gliedrige Untergruppe γ der Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$ erzeugen (vgl. Seite 388). In dieser Gruppe γ ist natürlich die invariante Untergruppe g enthalten. Andererseits gestattet M gerade m unabhängige infinitesimale Transformationen der reciproken Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$, nämlich: $Z_1 f \cdots Z_m f$, die ja auch eine m-gliedrige Gruppe erzeugen. Man kann daher nach Kap. 20, S. 390 die beiden einfach transitiven Gruppen: $Y_1 f \cdots Y_r f$ und $Z_1 f \cdots Z_r f$ derart holoedrisch isomorph auf einander beziehen, dass der Untergruppe γ die Untergruppe: $Z_1 f \cdots Z_m f$ entspricht. Dabei entspricht der invarianten Untergruppe g augenscheinlich eine l-gliedrige invariante Untergruppe g' der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ und zwar ist g' in der Untergruppe: $Z_1 f \cdots Z_m f$ enthalten.

Wir sehen also: wenn die Gruppe: $U_1 f \cdots U_r f$ gerade $(r-l)$-gliedrig ist, so enthält die Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_m f$ eine l-gliedrige Untergruppe g', welche in der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ invariant ist.

Umgekehrt: wenn die Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_m f$ eine l-gliedrige Untergruppe:

$$Z'_\lambda f = h_{\lambda 1} Z_1 f + \cdots + h_{\lambda m} Z_m f \qquad (\lambda = 1 \cdots l)$$

enthält, welche in der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ invariant ist, so kann die Gruppe: $U_1 f \cdots U_r f$ höchstens $(r-l)$-gliedrig sein.

In der That, unter der eben gemachten Voraussetzung bilden die l von einander unabhängigen Gleichungen:

$$(5) \qquad Z'_1 f = 0, \cdots Z'_l f = 0$$

ein l-gliedriges vollständiges System mit $r-l$ unabhängigen Lösungen

$$\psi_1(y_1 \cdots y_r) \cdots \psi_{r-l}(y_1 \cdots y_r).$$

Es bestehen ferner Relationen von der Form:

$$(Z_k Z'_\lambda) = h_{k\lambda 1} Z'_1 f + \cdots + h_{k\lambda l} Z'_l f$$
$$(k = 1 \cdots r;\ \lambda = 1 \cdots l),$$

welche aussagen, dass das vollständige System (5) die Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ gestattet. Folglich stellen die Gleichungen:

$$(6) \qquad \psi_1(y_1 \cdots y_r) = \text{const.}, \cdots \psi_{r-l}(y_1 \cdots y_r) = \text{const.}$$

eine bei der Gruppe $Z_1 f \cdots Z_r f$ invariante Zerlegung des Raumes $y_1 \cdots y_r$ dar und zwar eine Zerlegung in ∞^{r-l} l-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten.

Diese ∞^{r-l} Mannigfaltigkeiten stehen zu den ∞^{r-m} Mannigfaltigkeiten:

$$(4) \qquad u_1(y_1 \cdots y_r) = \text{const.}, \cdots u_{r-m}(y_1 \cdots y_r) = \text{const.}$$

in einer sehr einfachen Beziehung, es besteht nämlich jede der Mannigfaltigkeiten (4) aus ∞^{m-l} verschiedenen Mannigfaltigkeiten (6). Das folgt ohne Weiteres daraus, dass $u_1(y) \cdots u_{r-m}(y)$ als Lösungen des vollständigen Systems:

$$Z_1 f = 0, \cdots Z_m f = 0$$

zugleich das vollständige System (5) befriedigen und sich demnach als Functionen von: $\psi_1(y) \cdots \psi_{r-l}(y)$ darstellen lassen.

Nun enthält die reciproke Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$ nach Kap. 20, S. 387 gerade l unabhängige infinitesimale Transformationen, welche jede einzelne der ∞^{r-l} Mannigfaltigkeiten (6) stehen lassen, also enthält sie offenbar wenigstens l unabhängige infinitesimale Transformationen, welche jede einzelne der ∞^{r-m} Mannigfaltigkeiten (4) stehen lassen; daraus aber folgt sofort, dass die Gruppe: $U_1 f \cdots U_r f$ unter der gemachten Voraussetzung höchstens $(r-l)$-gliedrig sein kann, wie wir oben behaupteten.

Durch die vorstehenden Entwickelungen ist bewiesen: die Gruppe: $U_1 f \cdots U_r f$ ist dann und nur dann $(r-l)$-gliedrig, wenn die Gruppe: $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$ eine l-gliedrige in der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ invariante Untergruppe enthält, aber keine grössere Untergruppe von derselben Beschaffenheit. Insbesondere ist daher die Gruppe: $U_1 f \cdots U_r f$ dann und nur dann r-gliedrig, wenn die Gruppe: $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$ ausser der identischen Transformation keine in der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ invariante Untergruppe enthält. Das Wort Untergruppe ist hierbei im weitesten Sinne zu fassen, so dass man also auch die Gruppe: $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$ selbst als eine in ihr enthaltene Untergruppe zu betrachten hat.

Die gewonnenen Ergebnisse zusammenfassend, können wir nunmehr sagen:

Theorem 78. *Sind die beiden r-gliedrigen Gruppen:*

$$Y_k f = \sum_1^r {}_j \, \eta_{kj}(y_1 \cdots y_r) \frac{\partial f}{\partial y_j} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

und:

$$Z_k f = \sum_1^r {}_j \, \zeta_{kj}(y_1 \cdots y_r) \frac{\partial f}{\partial y_j} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

einfach transitiv und zu einander reciprok, ist ferner:

$$\mathsf{Z}_\mu f = \varepsilon_{\mu 1} Z_1 f + \cdots + \varepsilon_{\mu r} Z_r f \qquad (\mu = 1 \cdots m)$$

eine m-gliedrige Untergruppe der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ und sind:

$$u_1(y_1 \cdots y_r) \cdots u_{r-m}(y_1 \cdots y_r)$$

unabhängige Invarianten dieser Untergruppe, so erzeugen die r infinitesimalen Transformationen:

$$\sum_1^{r-m} {}_\nu \, Y_k u_\nu \frac{\partial f}{\partial u_\nu} = \sum_1^{r-m} {}_\nu \, \omega_{k\nu}(u_1 \cdots u_{r-m}) \frac{\partial f}{\partial u_\nu} = U_k f$$
$$(k = 1 \cdots r)$$

in den $r-m$ Veränderlichen: $u_1 \cdots u_{r-m}$ eine transitive, mit der Gruppe $Y_1 f \cdots Y_r f$ isomorphe Gruppe. Diese Gruppe ist $(r-l)$-gliedrig, wenn es in der Gruppe: $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$ eine l-gliedrige aber keine grössere Untergruppe giebt, welche in der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ invariant ist. Sie ist daher insbesondere dann und *nur dann r-gliedrig und mit der Gruppe:* $Y_1 f \cdots Y_r f$ *gleichzusammengesetzt, wenn die Gruppe:* $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$ *weder selbst in der Gruppe:* $Z_1 f \cdots Z_r f$ *invariant ist, noch eine andere in der Gruppe:* $Z_1 f \cdots Z_r f$ *invariante Untergruppe enthält als die identische Transformation.*

Ersetzt man: $u_1(y) \cdots u_{r-m}(y)$ *durch das allgemeinste System:* $u_1'(y) \cdots u_{r-m}'(y)$ *von* $r-m$ *unabhängigen Invarianten der Gruppe:* $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$, *so erhält man an Stelle der Gruppe:* $U_1 f \cdots U_r f$ *die allgemeinste mit ihr ähnliche Gruppe in* $r-m$ *Veränderlichen. Ist insbesondere die Gruppe:* $U_1 f \cdots U_r f$ *r-gliedrig, so erhält man auf diese Weise die allgemeinste transitive, mit der Gruppe:* $Y_1 f \cdots Y_r f$ *gleichzusammengesetzte Gruppe, welche demselben Typus angehört wie die Gruppe:* $U_1 f \cdots U_r f$.

Aus den zum Beweise dieses Theorems benutzten Entwickelungen ergiebt sich überdies noch der folgende

Satz 3. *Sind* $Y_1 f \cdots Y_r f$ *und* $Z_1 f \cdots Z_r f$ *zwei reciproke einfach transitive Gruppen, und ist:* $Z_1 f \cdots Z_l f$ *eine invariante l-gliedrige Untergruppe der zweiten, so lassen sich die Invarianten dieser l-gliedrigen Gruppe auch definiren als die Invarianten einer gewissen l-gliedrigen Gruppe, welche in der r-gliedrigen Gruppe:* $Y_1 f \cdots Y_r f$ *als invariante Untergruppe enthalten ist.*

Durch das Theorem 78 ist der erste Theil des auf S. 435 aufgestellten Programm's erledigt, wir sind im Besitz eines Verfahrens, welches transitive, mit der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ gleichzusammengesetzte Gruppen liefert. Wir kommen jetzt zum zweiten Theil, zu dem Nachweis, dass durch unser Verfahren jede derartige Gruppe gefunden werden kann.

Es sei in $r-m$ Veränderlichen irgend eine transitive Gruppe vorgelegt, welche mit der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ gleichzusammengesetzt ist; ihre infinitesimalen Transformationen seien:

$$\mathfrak{X}_k f = \sum_1^{r-m} {}_\nu\, \mathfrak{x}_{k\nu}(z_1 \cdots z_{r-m}) \frac{\partial f}{\partial z_\nu} \quad (k=1 \cdots r).$$

Wir beweisen zunächst, dass es unter den einfach transitiven Gruppen von derselben Zusammensetzung jedenfalls eine giebt, aus welcher die Gruppe: $\mathfrak{X}_1 f \cdots \mathfrak{X}_r f$ auf ganz analoge Weise erhalten werden kann, wie die Gruppe: $U_1 f \cdots U_r f$ aus der einfach transitiven Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$.

Zu dem Ende bilden wir nach Anleitung von Satz 1, S. 431 in den $r(r-m)$ Veränderlichen: $z, z^{(1)} \cdots z^{(r-1)}$ die r infinitesimalen Transformationen:

$$W_k f = \mathfrak{X}_k f + \mathfrak{X}_k^{(1)} f + \cdots + \mathfrak{X}_k^{(r-1)} f \quad (k=1 \cdots r).$$

Sind nun: $\varphi_1 \cdots \varphi_R$ irgend $(r-m)r - r = R$ unabhängige Lösungen des r-gliedrigen vollständigen Systems:

$$(7) \qquad W_1 f = 0, \cdots W_r f = 0,$$

so führen wir dieselben nebst $z_1 \cdots z_{r-m}$ und noch m geeigneten Functionen $\bar{z}_1 \cdots \bar{z}_m$ der $z, z^{(1)} \cdots z^{(r-1)}$ als neue Veränderliche ein. Das ist möglich, denn die Gleichungen (7) sind wegen der Transitivität der Gruppe: $\mathfrak{X}_1 f \cdots \mathfrak{X}_r f$ nach: $\frac{\partial f}{\partial z_1}, \cdots \frac{\partial f}{\partial z_{r-m}}$ auflösbar, es sind daher $z_1 \cdots z_{r-m}$ von den Functionen: $\varphi_1 \cdots \varphi_R$ unabhängig. In den neuen Veränderlichen erhalten $W_1 f \cdots W_r f$ die Form:

$$W_k f = \mathfrak{X}_k f + \sum_1^m {}_\mu\, w_{k\mu}(z_1 \cdots z_{r-m}, \bar{z}_1 \cdots \bar{z}_m, \varphi_1 \cdots \varphi_R) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\mu}$$
$$(k = 1 \cdots r),$$

und wenn wir hier den φ passende feste Werthe $\varphi_1^0 \cdots \varphi_R^0$ ertheilen und setzen:

$$w_k(z_1 \cdots z_{r-m}, \bar{z}_1 \cdots \bar{z}_m, \varphi_1^0 \cdots \varphi_R^0) = w_k^0(z_1 \cdots z_{r-m}, \bar{z}_1 \cdots \bar{z}_m),$$

so sind:

$$\mathfrak{W}_k f = \mathfrak{X}_k f + \sum_1^m {}_\mu\, w_{k\mu}^0(z_1 \cdots z_{r-m}, \bar{z}_1 \cdots \bar{z}_m) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\mu} \quad (k=1 \cdots r)$$

unabhängige infinitesimale Transformationen einer einfach transitiven Gruppe, welche mit der Gruppe: $\mathfrak{X}_1 f \cdots \mathfrak{X}_r f$ und also auch mit der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ gleichzusammengesetzt ist.

Hiermit haben wir eine einfach transitive Gruppe von der vorhin angegebenen Beschaffenheit gefunden.

Die Gleichungen:

$$z_1 = \text{const.}, \cdots z_{r-m} = \text{const.}$$

bestimmen nämlich offenbar eine bei der Gruppe: $\mathfrak{W}_1 f \cdots \mathfrak{W}_r f$ invariante Zerlegung des Raumes: $z_1 \cdots z_{r-m}, \bar{z}_1 \cdots \bar{z}_m$ in ∞^{r-m} m-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten. Die Gruppe: $\mathfrak{X}_1 f \cdots \mathfrak{X}_r f$ giebt an, in welcher Weise diese ∞^{r-m} Mannigfaltigkeiten von der Gruppe: $\mathfrak{W}_1 f \cdots \mathfrak{W}_r f$ unter einander vertauscht werden. Also besteht zwischen den beiden Gruppen: $\mathfrak{X}_1 f \cdots \mathfrak{X}_r f$ und $\mathfrak{W}_1 f \cdots \mathfrak{W}_r f$ ein ganz ähnliches Verhältniss, wie oben zwischen den beiden Gruppen: $U_1 f \cdots U_r f$ und $Y_1 f \cdots Y_r f$.

Nunmehr hat es gar keine Schwierigkeit nachzuweisen, dass die Gruppe: $\mathfrak{X}_1 f \cdots \mathfrak{X}_r f$ mit einer der Gruppen ähnlich ist, welche wir erhalten, wenn wir das in Theorem 78, S. 439 beschriebene Verfahren auf zwei bestimmte reciproke einfach transitive Gruppen: $Y_1f \cdots Y_rf$ und $Z_1f \cdots Z_rf$ von der betreffenden Zusammensetzung anwenden.

Es sei: $\mathsf{B}_1f \cdots \mathsf{B}_rf$ die zu: $\mathfrak{W}_1f \cdots \mathfrak{W}_rf$ reciproke einfach transitive Gruppe. Dieselbe ist natürlich mit der Gruppe: $Z_1f \cdots Z_rf$ gleichzusammengesetzt und daher auch ähnlich (vgl. Kap. 19, Theor. 64, S. 340).

Wir wollen annehmen, dass die Transformation:

$$(8) \qquad \begin{cases} z_1 = z_1(y_1 \cdots y_r), \cdots z_{r-m} = z_{r-m}(y_1 \cdots y_r) \\ \bar{z}_1 = \bar{z}_1(y_1 \cdots y_r), \quad \cdots \bar{z}_m = \bar{z}_m(y_1 \cdots y_r) \end{cases}$$

die Gruppe: $Z_1f \cdots Z_rf$ in die Gruppe: $\mathsf{B}_1f \cdots \mathsf{B}_rf$ überführt. Dann geht nach Kap. 20, S. 381 bei derselben Transformation zugleich die Gruppe: $Y_1f \cdots Y_rf$ in die Gruppe: $\mathfrak{W}_1f \cdots \mathfrak{W}_rf$ über, es bestehen also vermöge (8) Relationen von der Form:

$$Y_kf = \sum_1^r {}_j \, \mathfrak{h}_{kj} \mathfrak{W}_jf \quad (k = 1 \cdots r),$$

wo die Determinante der Constanten $\mathfrak{h}_{kj}$ nicht verschwindet. Aus diesen Relationen aber folgen sofort die Relationen:

$$(9) \qquad \sum_1^{r-m} {}_\nu \, Y_k z_\nu \frac{\partial f}{\partial z_\nu} = \sum_1^r {}_j \, \mathfrak{h}_{kj} \mathfrak{X}_jf \quad (k = 1 \cdots r),$$

welche ebenfalls vermöge (8) identisch bestehen.

Hierin liegt, dass die Gleichungen:

$$z_1(y_1 \cdots y_r) = \text{const.}, \cdots z_{r-m}(y_1 \cdots y_r) = \text{const.}$$

eine bei der Gruppe: $Z_1f \cdots Z_rf$ invariante Zerlegung des Raumes $y_1 \cdots y_r$ darstellen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass $z_1(y) \cdots z_{r-m}(y)$ unabhängige Invarianten einer ganz bestimmten m-gliedrigen Untergruppe $\mathfrak{g}$ der Gruppe $Z_1f \cdots Z_rf$ sind. Folglich erhalten wir die Gruppe: $\mathfrak{X}_1f \cdots \mathfrak{X}_rf$ durch das in Theorem 78, S. 439 beschriebene Verfahren, wenn wir uns folgendermassen einrichten: Als Gruppe: $\mathsf{Z}_1f \cdots \mathsf{Z}_mf$ wählen wir die eben definirte m-gliedrige Untergruppe $\mathfrak{g}$ der Gruppe: $Z_1f \cdots Z_rf$, als Functionen: $u_1(y) \cdots u_{r-m}(y)$ wählen wir die eben besprochenen Invarianten: $z_1(y) \cdots z_{r-m}(y)$ der Gruppe $\mathfrak{g}$. Unter diesen Voraussetzungen bestehen nämlich die Relationen (9), in denen die Ausdrücke rechter Hand unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe: $\mathfrak{X}_1f \cdots \mathfrak{X}_rf$ sind.

Damit ist bewiesen, dass man durch das Verfahren, welches in Theorem 78, S. 439 beschrieben ist, jede transitive mit der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ isomorphe Gruppe finden kann. Wir können daher das folgende Theorem aussprechen:

Theorem 79. *Sind die endlichen Gleichungen:*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

einer r-gliedrigen Gruppe vorgelegt, so findet man folgendermassen alle transitiven Gruppen, welche mit dieser Gruppe gleichzusammengesetzt sind:

Man bestimmt zunächst, was nur ausführbare Operationen verlangt, zwei r-gliedrige einfach transitive Gruppen:

$$Y_k f = \sum_1^r {}_j\, \eta_{kj}(y_1 \cdots y_r) \frac{\partial f}{\partial y_j} \quad (k = 1 \cdots r)$$

und:

$$Z_k f = \sum_1^r {}_j\, \zeta_{kj}(y_1 \cdots y_r) \frac{\partial f}{\partial y_j} \quad (k = 1 \cdots r),$$

*welche zu einander reciprok und mit der vorgelegten Gruppe gleichzusammengesetzt sind. Sodann stellt man durch algebraische Operationen alle diejenigen Untergruppen der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ auf, welche weder in dieser Gruppe invariant sind, noch eine andere in dieser Gruppe invariante Untergruppe enthalten als die identische Transformation. Jede der gefundenen Untergruppen liefert nach Anleitung von Theorem 78 alle transitiven mit der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ gleichzusammengesetzten Gruppen, welche einem gewissen Typus angehören. Bestimmt man diese Gruppen für jede der gefundenen Untergruppen, so erhält man alle transitiven Gruppen, welche mit der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ gleichzusammengesetzt sind.**)

Der zweite Theil unseres Programms ist nunmehr durchgeführt, wir sind im Stande, alle Typen von transitiven, mit der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ gleichzusammengesetzten Gruppen anzugeben. Jede Untergruppe der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$, welche die in Theorem 79 angezeigte Beschaffenheit hat, liefert uns einen solchen Typus. Es erübrigt noch zu entscheiden, wann zwei verschiedene Untergruppen der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ verschiedene und wann sie dieselben Typen liefern.

Die m unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$\mathsf{Z}_\mu f = \sum_1^r {}_k\, \varepsilon_{\mu k} Z_k f \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

mögen eine m-gliedrige Gruppe erzeugen, welche weder in der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ invariant ist, noch eine andere in der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$

*) Lie, Archiv for Math., Bd. 10, Christiania 1885, und Verh. der Gesellsch. d. W. zu Chr. a. 1884; Berichte der Kgl. Sächs. G. d. W., 1888.

invariante Untergruppe enthält als die identische Transformation. Die Functionen:

$$u_1(y_1 \cdots y_r) \cdots u_{r-m}(y_1 \cdots y_r)$$

seien unabhängige Invarianten der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_m f$. Unter diesen Voraussetzungen ist nach Theorem 79 die Gruppe:

$$U_k f = \sum_1^{r-m} {}^{\nu}\, Y_k u_\nu \frac{\partial f}{\partial u_\nu} = \sum_1^{r-m} {}^{\nu}\, \omega_{k\nu}(u_1 \cdots u_{r-m}) \frac{\partial f}{\partial u_\nu} \qquad (k=1 \cdots r)$$

in den $r-m$ Veränderlichen: $u_1 \cdots u_{r-m}$ mit der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ gleichzusammengesetzt und überdies transitiv, sie ist daher ein Repräsentant desjenigen Typus von solchen Gruppen, welcher der Untergruppe: $Z_1 f \cdots Z_m f$ entspricht.

Soll eine andere Untergruppe der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ denselben Gruppentypus liefern, so muss sie offenbar m-gliedrig sein, denn nur dann kann sie transitive, mit der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ gleichzusammengesetzte Gruppen in $r-m$ Veränderlichen liefern.

Nehmen wir daher an, dass:

$$\mathfrak{Z}_\mu f = \sum_1^r {}^{k}\, \mathfrak{e}_{\mu k} Z_k f \qquad (\mu = 1 \cdots m)$$

eine andere m-gliedrige Untergruppe der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ ist, und dass auch diese Untergruppe weder in der Gruppe $Z_1 f \cdots Z_r f$ invariant ist, noch eine andere in der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ invariante Untergruppe enthält als die identische Transformation. Unabhängige Invarianten der Gruppe: $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_m f$ seien:

$$\mathfrak{u}_1(y_1 \cdots y_r) \cdots \mathfrak{u}_{r-m}(y_1 \cdots y_r).$$

Unter diesen Voraussetzungen ist auch die Gruppe:

$$\mathfrak{U}_k f = \sum_1^{r-m} {}^{\nu}\, Y_k \mathfrak{u}_\nu \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{u}_\nu} = \sum_1^{r-m} {}^{\nu}\, \mathfrak{o}_{k\nu}(\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{r-m}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{u}_\nu} \qquad (k=1 \cdots r)$$

in den $r-m$ Veränderlichen: $\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{r-m}$ transitiv und mit der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ gleichzusammengesetzt.

Die Frage, ob die beiden Untergruppen: $Z_1 f \cdots Z_m f$ und $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_m f$ der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ denselben Gruppentypus liefern oder nicht, kann nun offenbar auch so ausgesprochen werden: Sind die beiden Gruppen: $U_1 f \cdots U_r f$ und: $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$ mit einander ähnlich oder nicht?

Die beiden Gruppen, um welche es sich jetzt handelt, sind transitiv; ob sie ähnlich sind oder nicht ähnlich, kann daher auf Grund von Theorem 76, S. 425 entschieden werden.

Wir ersehen daraus, dass die Gruppen: $U_1 f \cdots U_r f$ und: $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$

dann und nur dann mit einander ähnlich sind, wenn es möglich ist, sie derart holoedrisch isomorph auf einander zu beziehen, dass die folgende Bedingung erfüllt ist: Der allgemeinsten Untergruppe der Gruppe: $U_1 f \cdots U_r f$, welche ein beliebig gewähltes aber bestimmtes Werthsystem: $u_1 = u_1^0, \cdots u_{r-m} = u_{r-m}^0$ von allgemeiner Lage invariant lässt, muss die allgemeinste Untergruppe der Gruppe: $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$ entsprechen, welche ein gewisses Werthsystem: $\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_1^0, \cdots \mathfrak{u}_{r-m} = \mathfrak{u}_{r-m}^0$ von allgemeiner Lage invariant lässt.

Nun sind die Gruppen: $U_1 f \cdots U_r f$ und: $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_{r-m} f$ durch ihre Herleitung beide auf die Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$ holoedrisch isomorph bezogen, also können wir das nothwendige und hinreichende Kriterium für ihre Aehnlichkeit offenbar auch so aussprechen: *Aehnlichkeit findet dann und nur dann statt, wenn es möglich ist, die Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$ derart holoedrisch isomorph auf sich selbst zu beziehen, dass ihrer grössten Untergruppe G, welche die Mannigfaltigkeit:*

(10) $$u_1(y_1 \cdots y_r) = u_1^0, \quad \cdots u_{r-m}(y_1 \cdots y_r) = u_{r-m}^0$$

festhält, ihre grösste Untergruppe $\mathfrak{G}$ entspricht, welche die Mannigfaltigkeit:

(11) $$\mathfrak{u}_1(y_1 \cdots y_r) = \mathfrak{u}_1^0, \quad \cdots \mathfrak{u}_{r-m}(y_1 \cdots y_r) = \mathfrak{u}_{r-m}^0$$

festhält.

Das hiermit gefundene Kriterium kann auf eine andere bemerkenswerthe Form gebracht werden. In der That, betrachten wir die zur Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$ reciproke Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$. In derselben ist: $\mathrm{Z}_1 f \cdots \mathrm{Z}_m f$ die grösste Untergruppe, welche die Mannigfaltigkeit (10) invariant lässt und: $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_m f$ ist die grösste Untergruppe, welche die Mannigfaltigkeit (11) invariant lässt. Nach Kap. 20, Satz 8, S. 390 kann man daher die beiden Gruppen: $Y_1 f \cdots Y_r f$ und $Z_1 f \cdots Z_r f$ derart holoedrisch isomorph auf einander beziehen, dass der Untergruppe G die Untergruppe: $\mathrm{Z}_1 f \cdots \mathrm{Z}_m f$ entspricht; man kann sie aber auch derart holoedrisch isomorph auf einander beziehen, dass der Untergruppe $\mathfrak{G}$ die Untergruppe: $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_m f$ entspricht.

Hieraus ergiebt sich, dass man die Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$ dann und nur dann in der eben beschriebenen Weise holoedrisch isomorph auf sich selbst beziehen kann, wenn es möglich ist, die Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ derart holoedrisch isomorph auf sich selbst zu beziehen, dass der Untergruppe: $\mathrm{Z}_1 f \cdots \mathrm{Z}_m f$ die Untergruppe: $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_m f$ entspricht.

Wir haben somit das:

Theorem 80. *Sind die beiden r-gliedrigen Gruppen:*

$$Y_k f = \sum_1^r {}_j \, \eta_{kj}(y_1 \cdots y_r) \frac{\partial f}{\partial y_j} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

und:

$$Z_k f = \sum_1^r{}_j\, \xi_{kj}(y_1 \cdots y_r)\, \frac{\partial f}{\partial y_j} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

einfach transitiv und zu einander reciprok, sind ferner:

$$\mathsf{Z}_\mu f = \sum_1^r{}_k\, \varepsilon_{\mu k} Z_k f \qquad (\mu = 1 \cdots m)$$

und:

$$\mathfrak{Z}_\mu f = \sum_1^r{}_k\, \mathfrak{e}_{\mu k} Z_k f \qquad (\mu = 1 \cdots m)$$

zwei m-gliedrige Untergruppen der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$, *welche beide weder in dieser Gruppe invariant sind, noch eine andere in dieser Gruppe invariante Untergruppe enthalten, als die identische Transformation, sind endlich:* $u_1(y) \cdots u_{r-m}(y)$ *und:* $\mathfrak{u}_1(y) \cdots \mathfrak{u}_{r-m}(y)$ *bezüglich unabhängige Invarianten dieser beiden m-gliedrigen Untergruppen, so sind die beiden transitiven, mit der Gruppe:* $Y_1 f \cdots Y_r f$ *gleichzusammengesetzten Gruppen:*

$$U_k f = \sum_1^{r-m}{}_\nu\, Y_k u_\nu \frac{\partial f}{\partial u_\nu} = \sum_1^{r-m}{}_\nu\, \omega_{k\nu}(u_1 \cdots u_{r-m}) \frac{\partial f}{\partial u_\nu} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

und:

$$\mathfrak{U}_k f = \sum_1^{r-m}{}_\nu\, Y_k \mathfrak{u}_\nu \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{u}_\nu} = \sum_1^{r-m}{}_\nu\, \mathfrak{o}_{k\nu}(\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{r-m}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{u}_\nu} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

dann und nur dann mit einander ähnlich, wenn es möglich ist, die Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ *derart holoedrisch isomorph auf sich zu beziehen, dass der Untergruppe:* $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$ *die Untergruppe:* $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_m f$ *entspricht.*

Durch dieses Theorem ist nun auch der letzte Theil des auf S. 435 aufgestellten Programms erledigt. Wir können jetzt entscheiden, ob zwei verschiedene Untergruppen der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ verschiedene Typen von transitiven mit der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ gleichzusammengesetzten Gruppen liefern oder nicht. Dazu ist offenbar nur eine Untersuchung über die Untergruppen der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ erforderlich oder, was dasselbe ist, über die Untergruppen der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$.

Wir stellen die erforderlichen Operationen in einem Theorem zusammen:

Theorem 81. *Sind die endlichen Gleichungen oder die infinitesimalen Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe Γ vorgelegt, so kann man folgendermassen entscheiden, wieviele verschiedene Typen von transitiven, mit Γ gleichzusammen-*

gesetzten Gruppen es giebt: Man bestimme alle m-gliedrigen Untergruppen von Γ, schliesse aber jede solche aus, welche entweder in Γ invariant ist, oder eine andere in Γ invariante Untergruppe enthält als die identische Transformation. Die gefundenen m-gliedrigen Untergruppen theile man in Classen ein, indem man zwei Untergruppen stets dann in dieselbe Classe rechnet, wenn es möglich ist, Γ derart holoedrisch isomorph auf sich zu beziehen, dass die beiden Untergruppen einander entsprechen. Jeder der so erhaltenen Classen von m-gliedrigen Untergruppen entspricht ein ganz bestimmter Typus von transitiven, mit Γ gleichzusammengesetzten Gruppen in $r - m$ Veränderlichen; verschiedenen Classen entsprechen verschiedene Typen. Führt man diese Untersuchung für jede der Zahlen: $m = 0, 1, 2 \cdots r - 1$ durch, so kann man die Zahl aller vorhandenen Typen übersehen.

Wir bemerken noch Folgendes: Die in dem Theorem 81 verlangten Operationen sind alle ausführbar, selbst wenn nicht die Gruppe Γ, sondern nur ihre Zusammensetzung gegeben ist. Auch dann sind nur algebraische Operationen erforderlich. Da die Anzahl der Untergruppen von Γ nur von willkürlichen Parametern abhängt, hängt die Anzahl der vorhandenen Typen höchstens von willkürlichen Parametern ab. Insbesondere giebt es nur einen einzigen Typus von einfach transitiven Gruppen, welche mit der Gruppe Γ gleichzusammengesetzt sind. Das geht allerdings schon aus den Entwickelungen des vorigen Paragraphen hervor.

Durch Verbindung der beiden Theoreme 81 und 78 erhalten wir endlich noch das folgende:

Theorem 82. *Sind die endlichen Gleichungen:*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

*einer r-gliedrigen Gruppe vorgelegt, so erfordert die Bestimmung aller gleichzusammengesetzten transitiven Gruppen abgesehen von ausführbaren Operationen jedenfalls nur die Integration simultaner Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen.**)

Wünscht man in n Veränderlichen alle r-gliedrigen transitiven Gruppen aufzustellen, so bestimmt man alle Zusammensetzungen von r-gliedrigen Gruppen und sucht darnach für jede Zusammensetzung die zugehörigen Typen von transitiven Gruppen in n Veränderlichen. Alle

*) Vgl. Lie, Math. Annalen Bd. XVI, S. 528.

diese Typen zerfallen nun für gegebenes r (und n) in eine begränzte Anzahl Gattungen derart, dass die Typen einer Gattung dieselbe analytische Darstellung haben. Allerdings enthalten die analytischen Ausdrücke für alle Typen einer Gattung im Allgemeinen gewisse Parameter, deren Anzahl wir uns stets auf ein Minimum herabgedrückt denken. Dass solche Parameter auftreten, beruht auf zwei verschiedenen Umständen: erstens darauf, dass zu einem gegebenen $r > 2$ eine unbegränzte Anzahl verschiedener Zusammensetzungen gehört; zweitens darauf, dass eine gegebene r-gliedrige Gruppe im Allgemeinen eine unbegränzte Anzahl Untergruppen enthält, welche lauter verschiedene Typen liefern. Wir halten es nicht für zweckmässig hier diese Betrachtungen weiter zu verfolgen.

§ 108.

Versetzen wir uns noch einmal auf den Standpunkt zurück, den wir auf S. 443 f. einnahmen.

Wir hatten zwei m-gliedrige Untergruppen: $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$ und: $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_m f$ der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ benutzt, um transitive mit der Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$ gleichzusammengesetzte Gruppen herzustellen, und hatten so die beiden Gruppen: $U_1 f \cdots U_r f$ und: $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$ gefunden. Es fragte sich nunmehr, unter welchen Bedingungen diese beiden Gruppen mit einander ähnlich sind.

Wir haben damals diese Frage beantwortet, indem wir uns auf das Theorem 76, S. 425 stützten und haben auf diese Weise das Theorem 80, S. 445 erhalten. Jetzt wollen wir die Frage wieder aufnehmen und versuchen, sie ohne Benutzung des Theorems 76 zu beantworten.

Offenbar liegt die Vermuthung nahe, dass die Gruppen: $U_1 f \cdots U_r f$ und: $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$ jedenfalls dann mit einander ähnlich sind, wenn es eine Transformation:

$$(12) \qquad \bar{y}_k = \Omega_k(y_1 \cdots y_r) \qquad (k=1 \cdots r)$$

giebt, welche die Untergruppe: $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$ in die Untergruppe: $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_m f$ verwandelt und zu gleicher Zeit die Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ in sich überführt. Wir werden zeigen, dass diese Vermuthung der Wahrheit entspricht.

Es sei also (12) eine Transformation, welche die angegebenen Eigenschaften besitzt. Bei derselben gehen offenbar die Invarianten der Gruppe: $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$ in die Invarianten der Gruppe: $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_m f$ über, es wird daher vermöge (12):

$$\mathfrak{u}_\nu(\bar{y}_1 \cdots \bar{y}_r) = \chi_\nu(u_1(y) \cdots u_{r-m}(y)) \qquad (\nu=1 \cdots r-m),$$

wo die Functionen: $\chi_1 \cdots \chi_{r-m}$ vollkommen bestimmt und in Bezug auf: $u_1(y) \cdots u_{r-m}(y)$ von einander unabhängig sind. Andererseits geht nach Kap. 20, S. 381 bei der Transformation (12) nicht blos die Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$, sondern auch ihre reciproke Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$ in sich über, also haben wir:

$$\sum_1^r {}_j\, \eta_{kj}(\bar{y}_1 \cdots \bar{y}_r) \frac{\partial f}{\partial \bar{y}_j} = \overline{Y}_k f = \sum_1^r {}_j\, h_{kj} Y_j f \quad (k=1 \cdots r),$$

wo die h_{kj} Constanten sind, deren Determinante nicht verschwindet.

Setzen wir nun in den eben geschriebenen Gleichungen für f irgend eine Function F von: $u_1(y) \cdots u_{r-m}(y)$ oder, was dasselbe ist, eine Function von: $\mathfrak{u}_1(\bar{y}) \cdots \mathfrak{u}_{r-m}(\bar{y})$, so kommt:

$$\overline{Y}_k F = \sum_1^{r-m} {}_\nu\, \mathfrak{o}_{k\nu}(\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{r-m}) \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{u}_\nu} = \sum_1^r {}_j\, h_{kj} \sum_1^{r-m} {}_\nu\, \omega_{j\nu}(u_1 \cdots u_{r-m}) \frac{\partial F}{\partial u_\nu}.$$

Mit andern Worten, die beiden Gruppen: $U_1 f \cdots U_r f$ und: $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$ sind mit einander ähnlich: Offenbar ist:

(13) $$\mathfrak{u}_\nu = \chi_\nu(u_1 \cdots u_{r-m}) \quad (\nu=1 \cdots r-m)$$

eine Transformation, welche die eine Gruppe in die andere überführt.

Damit ist die vorhin ausgesprochene Vermuthung bewiesen.

Aber es lässt sich nachweisen, dass auch das Umgekehrte gilt: Wenn die beiden Gruppen: $U_1 f \cdots U_r f$ und: $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$ mit einander ähnlich sind, so giebt es immer eine Transformation, welche die Untergruppe: $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$ in die Untergruppe: $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_m f$ überführt und zugleich die Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ in sich.

Es seien also die beiden Gruppen: $U_k f$ und: $\mathfrak{U}_k f$ mit einander ähnlich und es sei:

(14) $$\mathfrak{u}_\nu = \psi_\nu(u_1 \cdots u_{r-m}) \quad (\nu=1 \cdots r-m)$$

eine Transformation, welche die eine Gruppe in die andere überführt, so dass wird:

(15) $$\mathfrak{U}_k f = \sum_1^r {}_j\, \delta_{kj} U_j f = U_k' f \quad (k=1 \cdots r).$$

Unter den δ_{kj} sind hierbei Constanten zu verstehen, deren Determinante nicht verschwindet. Sind $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$ durch Relationen von der Form:

$$(\mathfrak{U}_i \mathfrak{U}_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} \mathfrak{U}_s f$$

verknüpft, so sind es natürlich $U_1' f \cdots U_r' f$ durch die Relationen:

$$(U_i' U_k') = \sum_1^r {}_s\, c_{iks}\, U_s' f.$$

Wir haben vorhin gesehen, dass jede Transformation (12), welche die Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ invariant lässt und die Untergruppe der $Z_\mu f$ in die Untergruppe der $\mathfrak{Z}_\mu f$ überführt, eine ganz bestimmte Transformation (13) liefert, welche die Gruppe der $U_k f$ in die Gruppe der $\mathfrak{U}_k f$ überführt. Unter den gegenwärtigen Voraussetzungen kennen wir schon eine Transformation, welche die letztere Ueberführung leistet, nämlich die Transformation (14). Versuchen wir daher eine Transformation:

$$\text{(16)} \qquad \bar{y}_k = O_k(y_1 \cdots y_r) \quad {\scriptstyle (k=1 \cdots r)}$$

zu bestimmen, welche die Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ invariant lässt, die Untergruppe: $Z_1 f \cdots Z_m f$ in die Untergruppe: $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_m f$ verwandelt und welche endlich gerade die Transformation (14) liefert.

Es ist klar, dass jede Transformation (16) von der verlangten Art so beschaffen sein muss, dass ihre Gleichungen die $r-m$ von einander unabhängigen Gleichungen:

$$\text{(14')} \qquad \mathfrak{u}_\nu(\bar{y}_1 \cdots \bar{y}_r) = \psi_\nu(u_1(y) \cdots u_{r-m}(y)) \quad {\scriptstyle (\nu=1 \cdots r-m)}$$

umfassen. Genügt sie dieser Bedingung und lässt sie überdies noch die Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ invariant, so genügt sie allen unseren Anforderungen. Einmal führt sie ja die Invarianten der Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_m f$ in die Invarianten der Gruppe: $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_m f$ über, sie verwandelt also die erste dieser Gruppen in die zweite, und andererseits liefert sie augenscheinlich die Transformation (14), vermöge deren die beiden Gruppen: $U_1 f \cdots U_r f$ und $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$ mit einander ähnlich sind.

Ob wir nun aber von der Transformation (16) verlangen, dass sie die Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ invariant lässt, oder ob wir verlangen, dass sie die Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$ in sich überführt, das ist offenbar ganz gleichgültig. Wir können daher unsere Aufgabe auch so fassen:

Gesucht wird eine Transformation (16), *welche die Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$ invariant lässt, und welche so beschaffen ist, dass ihre Gleichungen die Gleichungen* (14') *umfassen.*

Zur Vereinfachung führen wir neue Veränderliche ein.

Wir wählen irgend m von einander und von: $u_1(y) \cdots u_{r-m}(y)$ unabhängige Functionen: $v_1(y) \cdots v_m(y)$ und ferner irgend m von einander und von: $\mathfrak{u}_1(\bar{y}) \cdots \mathfrak{u}_{r-m}(\bar{y})$ unabhängige Functionen: $\mathfrak{v}_1(\bar{y}) \cdots \mathfrak{v}_m(\bar{y})$. Die Functionen: $u_1(y) \cdots u_{r-m}(y)$, $v_1(y) \cdots v_m(y)$ führen wir an Stelle von: $y_1 \cdots y_r$ als neue Veränderliche ein und die Functionen: $\mathfrak{u}_1(\bar{y}) \cdots \mathfrak{u}_{r-m}(\bar{y})$, $\mathfrak{v}_1(\bar{y}) \cdots \mathfrak{v}_m(\bar{y})$ an Stelle von: $\bar{y}_1 \cdots \bar{y}_r$.

In den neuen Veränderlichen erhält die gesuchte Transformation (16) nothwendig die Form:

$$(16') \quad \begin{cases} \mathfrak{u}_\nu = \psi_\nu(u_1 \cdots u_{r-m}) & (\nu = 1 \cdots r-m) \\ \mathfrak{v}_\mu = \Psi_\mu(u_1 \cdots u_{r-m}, v_1 \cdots v_m) & (\mu = 1 \cdots m), \end{cases}$$

wobei schon berücksichtigt ist, dass ihre nunmehrigen Gleichungen die Gleichungen (14) umfassen müssen.

Was tritt aber an die Stelle der Forderung, dass die Transformation (16) die Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$ invariant lassen sollte?

In den neuen Veränderlichen: $u_1 \cdots u_{r-m}$, $v_1 \cdots v_m$ erhält die Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$ offenbar die Form:

$$U_k f + \sum_1^m{}^\mu w_{k\mu}(u_1 \cdots u_{r-m}, v_1 \cdots v_m) \frac{\partial f}{\partial v_\mu} = U_k f + V_k f \quad (k = 1 \cdots r).$$

Andererseits gehen:

$$\overline{Y}_k f = \sum_1^r{}^j \eta_{kj}(\bar{y}_1 \cdots \bar{y}_r) \frac{\partial f}{\partial \bar{y}_j} \quad (k = 1 \cdots r)$$

bei Einführung von $\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{r-m}$, $\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_m$ über in:

$$\mathfrak{U}_k f + \sum_1^m{}^\mu \mathfrak{w}_{k\mu}(\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{r-m}, \mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_m) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{v}_\mu} = \mathfrak{U}_k f + \mathfrak{V}_k f \quad (k = 1 \cdots r).$$

Folglich müssen wir von der Transformation (16′) verlangen, dass sie die Gruppe: $U_1 f + V_1 f, \cdots U_r f + V_r f$ in die Gruppe: $\mathfrak{U}_1 f + \mathfrak{V}_1 f, \cdots \cdots \mathfrak{U}_r f + \mathfrak{V}_r f$ überführt; wir müssen versuchen, die Functionen: $\Psi_1 \cdots \Psi_m$ demgemäss zu bestimmen.

Wie die Gleichungen (15) zeigen, gehen die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$\sum_1^r{}^j \delta_{1j} U_j f, \cdots \sum_1^r{}^j \delta_{rj} U_j f$$

bei der Transformation:

$$(14) \qquad \mathfrak{u}_\nu = \psi_\nu(u_1 \cdots u_{r-m}) \quad (\nu = 1 \cdots r - m)$$

in bezüglich:

$$\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$$

über. Soll daher eine Transformation von der Form (16′) die Gruppe der $U_k f + V_k f$ in die Gruppe der $\mathfrak{U}_k f + \mathfrak{V}_k f$ verwandeln, so müssen bei ihr die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$\sum_1^r{}^j \delta_{1j}(U_j f + V_j f), \cdots \sum_1^r{}^j \delta_{rj}(U_j f + V_j f)$$

in bezüglich:

$$\mathfrak{U}_1 f + \mathfrak{V}_1 f, \cdots \mathfrak{U}_r f + \mathfrak{V}_r f$$

übergehen. Diese Bedingung ist nothwendig, aber zugleich auch hinreichend.

Durch dieselben Betrachtungen wie in Kap. 19, S. 335 ff. erkennen wir nun, dass jede Transformation (16′) von der verlangten Beschaffenheit auch definirt werden kann als ein Gleichungensystem in den $2r$ Veränderlichen $u, v, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}$, welches die Form:

$$(16') \qquad \begin{cases} \mathfrak{u}_\nu = \psi_\nu(u_1 \cdots u_{r-m}) & (\nu = 1 \cdots r-m) \\ \mathfrak{v}_\mu = \Psi_\mu(u_1 \cdots u_{r-m},\ v_1 \cdots v_m) & (\mu = 1 \cdots m) \end{cases}$$

besitzt, die r-gliedrige Gruppe:

$$W_k f = \mathfrak{U}_k f + \mathfrak{V}_k f + \sum_1^r{}_j\, \delta_{kj}(U_j f + V_j f) \qquad (k = 1 \cdots r)$$

gestattet und nach $u_1 \cdots u_{r-m},\ v_1 \cdots v_m$ auflösbar ist.

Das Gleichungensystem:

$$(14) \qquad \mathfrak{u}_\nu = \psi_\nu(u_1 \cdots u_{r-m}) \qquad (\nu = 1 \cdots r-m)$$

stellt nach unserer Voraussetzung eine Transformation dar, welche die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$\sum_1^r{}_j\, \delta_{kj}\, U_j f \qquad (k = 1 \cdots r)$$

in bezüglich: $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$ überführt, es gestattet mithin die r-gliedrige Gruppe:

$$\mathfrak{U}_k f + \sum_1^r{}_j\, \delta_{kj}\, U_j f \qquad (k = 1 \cdots r)$$

und demzufolge auch die Gruppe: $W_1 f \cdots W_r f$.

Wir können daher die Entwickelungen in Kap. 14, S. 233—236 benutzen, um ein Gleichungensystem (16′) von der verlangten Beschaffenheit zu finden.

Zunächst bilden wir aus $W_1 f \cdots W_r f$ gewisse verkürzte infinitesimale Transformationen: $\mathfrak{W}_1 f \cdots \mathfrak{W}_r f$, indem wir alle Glieder mit den Differentialquotienten: $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{u}_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{u}_{r-m}}$ weglassen und in allen übrigen Gliedern die Substitution: $\mathfrak{u}_1 = \psi_1(u), \cdots \mathfrak{u}_{r-m} = \psi_{r-m}(u)$ machen. Wird diese Substitution durch das Zeichen [ ] angedeutet, so lauten die $\mathfrak{W}_k f$ folgendermassen:

$$\mathfrak{W}_k f = \sum_1^m{}_\mu\, [\mathfrak{w}_{k\mu}(\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{r-m},\ \mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_m)]\, \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{v}_\mu} + \sum_1^r{}_j\, \delta_{kj}(U_j f + V_j f),$$

oder kürzer:

$$\mathfrak{W}_k f = [\mathfrak{V}_k f] + \sum_1^r {}_j\, \delta_{kj}(U_j f + V_j f) \qquad (k=1\cdots r).$$

Natürlich erzeugen $\mathfrak{W}_1 f \cdots \mathfrak{W}_r f$ eine Gruppe in den $r+m$ Veränderlichen $\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_m$, $u_1 \cdots u_{r-m}$, $v_1 \cdots v_m$ und zwar in unserem Falle offenbar eine r-gliedrige.

Nunmehr bestimmen wir in den $\mathfrak{v}$, u, v ein Gleichungensystem von der Form:

$$\text{(17)} \qquad \mathfrak{v}_\mu = \Psi_\mu(u_1 \cdots u_{r-m}, v_1 \cdots v_m) \qquad (\mu = 1 \cdots m),$$

welches die Gruppe: $\mathfrak{W}_1 f \cdots \mathfrak{W}_r f$ gestattet und nach $v_1 \cdots v_m$ auflösbar ist. Wenn wir endlich dasselbe zu den Gleichungen (14) hinzufügen, so erhalten wir ein Gleichungensystem von der Form (16′), welches die oben auseinandergesetzten Eigenschaften besitzt.

Da die r-gliedrige Gruppe:

$$\sum_1^r {}_j\, \delta_{kj}(U_j f + V_j f) \qquad (k=1\cdots r)$$

einfach transitiv ist, so verschwinden in der Matrix, welche aus den Coefficienten von $\mathfrak{W}_1 f \cdots \mathfrak{W}_r f$ gebildet werden kann, die r-reihigen Determinanten sicher nicht alle identisch, ebensowenig können sie aber vermöge eines Gleichungensystems von der Form (17) sämmtlich verschwinden. Folglich kann jedes Gleichungensystem von der Form (17), welches die Gruppe: $\mathfrak{W}_1 f \cdots \mathfrak{W}_r f$ gestattet, durch m unabhängige Relationen zwischen irgend m unabhängigen Lösungen des r-gliedrigen vollständigen Systems:

$$\text{(18)} \qquad \mathfrak{W}_1 f = 0, \cdots \mathfrak{W}_r f = 0$$

in den $r+m$ Veränderlichen $\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_m$, $u_1 \cdots u_{r-m}$, $v_1 \cdots v_m$ dargestellt werden.

Die Gleichungen (18) sind offenbar nach $\frac{\partial f}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial u_{r-m}}, \frac{\partial f}{\partial v_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial v_m}$ auflösbar; sie sind andererseits auch nach: $\frac{\partial f}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial u_{r-m}}, \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{v}_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{v}_m}$ auflösbar, denn führen wir in die r infinitesimalen Transformationen:

$$\mathfrak{U}_1 f + \mathfrak{V}_1 f, \cdots \mathfrak{U}_r f + \mathfrak{V}_r f$$

an Stelle von $\mathfrak{u}_1 \cdots \mathfrak{u}_{r-m}$, $\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_m$ vermöge der Gleichungen:

$$\text{(14)} \qquad \mathfrak{u}_\mu = \psi_\mu(u_1 \cdots u_{r-m}) \qquad (\mu = 1 \cdots r-m)$$

die neuen Veränderlichen: $u_1 \cdots u_{r-m}$, $\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_m$ ein, so erhalten wir die infinitesimalen Transformationen:

$$\sum_1^r {}_j\, \delta_{kj} U_j f + [\mathfrak{V}_k f] \qquad (k=1\cdots r),$$

welche somit ihrerseits in den Veränderlichen: $u_1 \cdots u_{r-m}$, $\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_m$ eine einfach transitive Gruppe erzeugen.

Sind daher:

$$P_\mu(\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_m,\ u_1 \cdots u_{r-m},\ v_1 \cdots v_m) \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

irgend m unabhängige Lösungen des vollständigen Systems (18), so sind dieselben sowohl in Bezug auf $\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_m$, als in Bezug auf: $v_1 \cdots v_m$ von einander unabhängig (vgl. Theor. 12, S. 91).

Hieraus ergiebt sich, dass das allgemeinste Gleichungensystem von der Form (17), welches nach $v_1 \cdots v_m$ aufgelöst werden kann und die Gruppe: $\mathfrak{W}_1 f \cdots \mathfrak{W}_r f$ gestattet, dadurch erhalten wird, dass man die m Gleichungen:

$$(19) \qquad P_\mu(\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_m,\ u_1 \cdots u_{r-m},\ v_1 \cdots v_m) = \text{const.} \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

nach $\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_m$ auflöst.

Nunmehr können wir sofort eine, ja überhaupt die allgemeinste Transformation (16') angeben, welche die infinitesimalen Transformationen:

$$\sum_1^r {}_j\, \delta_{1j}(U_j f + V_j f), \cdots \sum_1^r {}_j\, \delta_{rj}(U_j f + V_j f)$$

in bezüglich:

$$\mathfrak{U}_1 f + \mathfrak{B}_1 f, \cdots \mathfrak{U}_r f + \mathfrak{B}_r f$$

überführt; dieselbe wird einfach durch die Gleichungen (14) und (19) zusammen dargestellt. Führen wir endlich in (14) und (19) wieder die Veränderlichen: $y_1 \cdots y_r$, $\bar{y}_1 \cdots \bar{y}_r$ ein, so erhalten wir eine Transformation, welche die Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$ invariant lässt und deren Gleichungen die Gleichungen (14') umfassen, mit andern Worten: wir erhalten eine Transformation, welche die Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ invariant lässt und die Untergruppe: $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$ in die Untergruppe: $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_m f$ überführt.

Hiermit ist bewiesen, dass es stets eine Transformation von der eben beschriebenen Beschaffenheit giebt, sobald die beiden Gruppen: $U_1 f \cdots U_r f$ und $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$ mit einander ähnlich sind. Da umgekehrt nach S. 448 f. aus der Existenz einer solchen Transformation die Aehnlichkeit der beiden Gruppen folgt, so können wir sagen:

Die beiden Gruppen: $U_1 f \cdots U_r f$ und $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$ sind dann und nur dann mit einander ähnlich, wenn es eine Transformation giebt, welche die Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ invariant lässt und die Untergruppe: $\mathsf{Z}_1 f \cdots \mathsf{Z}_m f$ in die Untergruppe: $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_m f$ überführt.

Nun ist die Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ einfach transitiv, also ist klar, dass es eine derartige Transformation stets dann aber auch nur dann giebt, wenn die Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ in der Weise holoedrisch isomorph auf sich selbst bezogen werden kann, dass die beiden Untergruppen: $Z_1 f \cdots Z_m f$ und $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_m f$ einander entsprechen. Also finden wir für die Aehnlichkeit der Gruppen: $U_1 f \cdots U_r f$ und $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$ genau dasselbe Kriterium, welches wir in Theorem 80, S. 445 ausgesprochen haben.

Die vorstehenden Entwickelungen können übrigens auch zu einem neuen Beweise des Theorems 76 in Kap. 21, S. 425 benutzt werden. Wir wollen wenigstens andeuten wie.

Zunächst lässt sich durch ganz ähnliche Betrachtungen wie auf S. 444—445 nachweisen, dass die transitiven Gruppen $U_1 f \cdots U_r f$ und $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$ dann und nur dann in der in Theor. 76 beschriebenen Weise holoedrisch isomorph auf einander bezogen werden können, wenn es möglich ist, die Gruppe: $Z_1 f \cdots Z_r f$ derart holoedrisch isomorph auf sich selbst zu beziehen, dass die Untergruppen: $Z_1 f \cdots Z_m f$ und $\mathfrak{Z}_1 f \cdots \mathfrak{Z}_m f$ einander entsprechen. Aus den vorstehenden Entwickelungen folgt sodann, dass die Bedingungen des Theorems 76 für die Aehnlichkeit der beiden Gruppen: $U_1 f \cdots U_r f$ und $\mathfrak{U}_1 f \cdots \mathfrak{U}_r f$ nothwendig und hinreichend sind.

§ 109.

Wir wenden uns jetzt zu der zweiten der beiden Aufgaben, deren Erledigung in der Einleitung des Kapitels (auf S. 430) angekündigt wurde, *zur Bestimmung aller r-gliedrigen intransitiven Gruppen;* wir wollen, wie schon damals gesagt wurde, die betreffende Bestimmung unter der Voraussetzung durchführen, dass bereits alle transitiven Gruppen mit r oder weniger Parametern gegeben sind. Da alle transitiven Gruppen mit gleicher Parameterzahl sich nach ihrer Zusammensetzung in Classen ordnen und da ferner alle transitiven Gruppen von ein und derselben Zusammensetzung in eine Reihe von Typen zerfallen (vgl. S. 434 f.), so können wir unsere Voraussetzung genauer dahin präcisiren, dass wir *erstens* alle möglichen Zusammensetzungen einer Gruppe mit r oder weniger Parametern als bekannt annehmen, und dass wir uns *zweitens* für jede dieser Zusammensetzungen alle möglichen Typen transitiver Gruppen von der betreffenden Zusammensetzung gegeben denken.

Betrachten wir zunächst irgend eine r-gliedrige intransitive Gruppe.

Sind $X_1 f \cdots X_r f$ unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen intransitiven Gruppe des Raumes $x_1 \cdots x_n$, so haben die r Gleichungen:

$$(20) \qquad X_1 f = 0, \cdots X_r f = 0$$

eine gewisse Anzahl, etwa gerade $n - l > 0$ unabhängige Lösungen gemein. Wir können uns daher von vornherein die Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ so gewählt denken, dass $x_{l+1} \cdots x_n$ solche unabhängige Lösungen sind. Dann werden $X_1 f \cdots X_r f$ die Form erhalten:

$$X_k f = \sum_1^l {}_\lambda\, \xi_{k\lambda}(x_1 \cdots x_l,\ x_{l+1} \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \qquad (k = 1 \cdots r),$$

wo nun natürlich nicht alle l-reihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \xi_{1l}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x) & \cdot & \xi_{rl}(x) \end{vmatrix}$$

identisch verschwinden, sonst hätten ja die Gleichungen (20) mehr als $n - l$ unabhängige Lösungen gemein.

Wäre die Zahl r, die mindestens gleich l ist, gerade gleich l, so wären $X_1 f \cdots X_r f$ sicher durch keine Relation von der Form:

$$\chi_1(x_{l+1} \cdots x_n) \cdot X_1 f + \cdots + \chi_r(x_{l+1} \cdots x_n) \cdot X_r f = 0$$

verknüpft; nun aber braucht r nicht gleich l zu sein, also können auch sehr gut Relationen von der eben geschriebenen Form bestehen, ohne dass die Functionen $\chi_1 \cdots \chi_r$ alle verschwinden. Wir wollen daher voraussetzen, dass etwa $X_1 f \cdots X_m f$ durch keine derartige Relation verknüpft sind, dass dagegen $X_{m+1} f \cdots X_r f$ sich folgendermassen durch $X_1 f \cdots X_m f$ ausdrücken lassen:

$$(21) \qquad X_{m+\nu} f \equiv \sum_1^m {}_\mu\, \vartheta_{\nu\mu}(x_{l+1} \cdots x_n) \cdot X_\mu f \qquad (\nu = 1 \cdots r - m).$$

Dabei genügt m selbstverständlich der Ungleichung: $l \leqq m \leqq r$.

Durch Verbindung der Gleichungen (21) mit den Relationen:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} X_s f \qquad (i, k = 1 \cdots r),$$

welche unter allen Umständen bestehen, erkennen wir noch, dass $X_1 f \cdots X_m f$ paarweise in den Beziehungen:

$$(X_\lambda X_\mu) = \sum_1^m {}_\pi \left\{ c_{\lambda\mu\pi} + \sum_1^{r-m} {}_\nu\, c_{\lambda,\mu,m+\nu}\, \vartheta_{\nu\pi}(x_{l+1} \cdots x_n) \right\} X_\pi f$$
$$(\lambda, \mu = 1 \cdots m)$$

stehen.

Werden jetzt die Veränderlichen $x_{l+1} \cdots x_n$ durch willkürliche Constanten: $a_{l+1} \cdots a_n$ ersetzt und werden blos $x_1 \cdots x_l$ noch als Veränderliche betrachtet, so ist klar, dass die r infinitesimalen Transformationen:

$$\overline{X}_k f = \sum_1^l \lambda\, \xi_{k\lambda}(x_1 \cdots x_l,\ a_{l+1} \cdots a_n)\, \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \qquad (k=1\cdots r)$$

in den l Veränderlichen $x_1 \cdots x_l$ nicht mehr von einander unabhängig sind, sondern sich aus den m unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$\overline{X}_\mu f = \sum_1^l \lambda\, \xi_{\mu\lambda}(x_1 \cdots x_l,\ a_{l+1} \cdots a_n)\, \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \qquad (\mu=1\cdots m)$$

linear ableiten lassen. Die m infinitesimalen Transformationen: $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_m f$ sind ihrerseits offenbar durch die Relationen:

$$(22) \qquad (\overline{X}_\lambda \overline{X}_\mu) = \sum_1^m \pi \left\{ c_{\lambda\mu\pi} + \sum_1^{r-m} \nu\, c_{\lambda,\,\mu,\,m+\nu}\, \vartheta_{\nu\pi}(a_{l+1} \cdots a_n) \right\} \overline{X}_\pi f$$

verknüpft, sie erzeugen also stets, welche Werthe man auch den Parametern $a_{l+1} \cdots a_n$ ertheilen mag, eine m-gliedrige Gruppe in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_l$, und zwar selbstverständlich eine transitive Gruppe.

Ertheilt man nun den Parametern $a_{l+1} \cdots a_n$ nach und nach alle möglichen Werthe, so erhält man ∞^{n-l} m-gliedrige Gruppen in l Veränderlichen. Es ist dabei denkbar, aber nicht nothwendig, dass diese ∞^{n-l} Gruppen unter einander ähnlich sind. Ist das nicht der Fall, so ordnen sie sich in $\infty^{n-l-\sigma}$ Schaaren, jede bestehend aus ∞^σ Gruppen, und zwar in solcher Weise, dass zwei Gruppen derselben Schaar ähnlich sind, dagegen zwei zu verschiedenen Schaaren gehörige Gruppen nicht ähnlich sind.

Unter allen Umständen gehören unsere ∞^{n-l} Gruppen derselben Typengattung an; diese Gattung hängt im letzten Falle von wesentlichen Parametern ab (vgl. Seite 447 f.).

Man übersieht jetzt, wie man alle intransitiven r-gliedrigen Gruppen in n Veränderlichen finden kann. Man wählt zwei Zahlen l und m so, dass $l \leqq m \leqq r$ ist und ausserdem $l < n$, man bildet sodann alle Gattungen von transitiven m-gliedrigen Gruppen in l Veränderlichen. Ist $Y_1 f \cdots Y_m f$:

$$Y_k f = \sum_1^l i\, \eta_{ki}(x_1 \cdots x_l,\ \alpha_1,\ \alpha_2 \cdots)\, \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k=1\cdots m)$$

eine solche Gattung mit den wesentlichen Parametern $\alpha_1, \alpha_2 \cdots$, so fasst man dieselben als unbekannte Functionen von $x_{l+1} \cdots x_n$ auf, setzt:

$$X_k f = \sum_1^m i\, \beta_{ki}(x_{l+1} \cdots x_n) \cdot Y_i f \qquad (k=1\cdots r)$$

und versucht endlich, die noch unbestimmten Functionen α_j, β_{ki} von $x_{l+1} \cdots x_n$ in allgemeinster Weise derart zu wählen, dass $X_1 f \cdots X_r f$ unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe werden. Diese Forderung führt zu gewissen *endlichen Relationen* zwischen den α und β und den c_{iks} der gesuchten r-gliedrigen Gruppe, die in allgemeinster Weise erfüllt werden müssen. Die Ausdrücke der in dieser Weise bestimmten infinitesimalen Transformationen enthalten neben gewissen willkürlichen Constanten c_{iks} noch gewisse willkürliche Funktionen von den Invarianten der Gruppe.

Hiermit haben wir nun zunächst das

Theorem 83. *Die Bestimmung aller intransitiven r-gliedrigen: Gruppen $X_1 f \cdots X_r f$ in n Veränderlichen verlangt, sobald alle transitiven Gruppen mit r oder weniger Parametern gefunden sind, keine Integrationen, sondern nur ausführbare Operationen*).*

Es ist wohl zu beachten, dass die zur Bestimmung aller intransitiven Gruppen erforderlichen Rechnungen nur von den Zahlen r, l und m abhängen. Dagegen spielt die Zahl n keine direkte Rolle. Also:

Theorem 84. *Die Bestimmung aller r-gliedrigen Gruppen in beliebig vielen Veränderlichen lässt sich auf die Bestimmung aller r-gliedrigen Gruppen in r oder weniger Veränderlichen zurückführen.*

Noch eine kurze Bemerkung über die Bestimmung aller intransitiven r-gliedrigen Gruppen von gegebener Zusammensetzung.

Enthält eine Gruppe von der betreffenden Zusammensetzung nur eine endliche Anzahl invarianter Untergruppen, so muss (Satz 8, Seite 310) $m = r$ sein und mithin kommt die Erledigung des soeben gestellten Problems ohne weiteres auf die Bestimmung aller transitiven Gruppen von der betreffenden Zusammensetzung zurück. Treten dagegen unendlich viele invariante Untergruppen auf, so kann m kleiner als r sein; alsdann muss nach den soeben citirten Entwickelungen die oben besprochene m-gliedrige Gruppe $\overline{X}_1 f \cdots \overline{X}_m f$ mit der gesuchten r-gliedrigen meroedrisch isomorph sein. Wir wollen nicht hier näher ausführen, wie das Problem in diesem Falle erledigt wird.

Kapitel 23.

Invariante Schaaren von Mannigfaltigkeiten.

Sind $x_1 \cdots x_n$ Punktcoordinaten eines n-fach ausgedehnten Raumes, so wird eine Schaar von Mannigfaltigkeiten dieses Raumes durch Gleichungen von der Form:

*) Lie, Archiv for Math. og Naturv. Bd. 10, Christiania 1885; Math. Ann. Bd. XVI, S. 528, 1880.

$$(1) \quad \Omega_1(x_1 \cdots x_n, l_1 \cdots l_m) = 0, \cdots \Omega_{n-q}(x_1 \cdots x_n, l_1 \cdots l_m) = 0$$

dargestellt, in denen ausser den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ noch gewisse willkürliche Parameter: $l_1 \cdots l_m$ vorkommen.

Führt man irgend eine Transformation:

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i=1 \cdots n)$$

des Raumes $x_1 \cdots x_n$ aus, so geht jede der Mannigfaltigkeiten (1) in eine neue Mannigfaltigkeit des Raumes $x_1 \cdots x_n$ über, die ganze Schaar (1) verwandelt sich daher in eine neue Schaar von Mannigfaltigkeiten. Die Gleichungen dieser neuen Schaar erhält man, wenn man $x_1 \cdots x_n$ aus (1) mit Hülfe der n Gleichungen: $x_i' = f_i(x)$ wegschafft. Fällt nun insbesondere die neue Schaar von Mannigfaltigkeiten mit der ursprünglichen Schaar (1) zusammen, geht also bei der Transformation: $x_i' = f_i(x)$ jede Mannigfaltigkeit der Schaar (1) in eine Mannigfaltigkeit derselben Schaar über, so sagen wir, *dass die Schaar (1) die betreffende Transformation gestattet, dass sie bei ihr invariant bleibt.*

Gestattet eine Schaar von Mannigfaltigkeiten des Raumes $x_1 \cdots x_n$ alle Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe, so sagen wir, *dass sie die betreffende Gruppe gestattet.*

Beispiele von invarianten Schaaren von Mannigfaltigkeiten sind uns schon öfters vorgekommen; so zerlegte jede intransitive Gruppe den Raum in eine invariante Schaar von einzeln invarianten Mannigfaltigkeiten (Kap. 13, SS. 215, 216), jede imprimitive Gruppe zerlegte den Raum in eine invariante Schaar von Mannigfaltigkeiten, welche sie unter einander vertauschte (S. 220 f.); auch jede einzelne bei einer Gruppe invariante Mannigfaltigkeit kann als eine invariante Schaar von Mannigfaltigkeiten aufgefasst werden, nämlich als eine invariante Schaar von Punkten.

Im Folgenden betrachten wir nun eine ganz beliebige Schaar von Mannigfaltigkeiten. Wir untersuchen zuerst, unter welchen Bedingungen diese Schaar eine einzelne vorgelegte Transformation und eine vorgelegte r-gliedrige Gruppe gestattet. Sodann denken wir uns eine Gruppe gegeben, bei welcher die Schaar invariant bleibt, und bestimmen das Gesetz, nach welchem die Mannigfaltigkeiten der Schaar von den Transformationen dieser Gruppe unter einander vertauscht werden. Auf diese Weise erhalten wir ein neues Verfahren zur Aufstellung von Gruppen, die mit einer gegebenen Gruppe isomorph sind. Schliesslich geben wir eine Methode zur Auffindung aller bei einer vorgelegten Gruppe invarianten Schaaren von Mannigfaltigkeiten.

§ 110.

Es mögen die Gleichungen:

(1) $$\Omega_k(x_1 \cdots x_n,\ l_1 \cdots l_m) = 0 \qquad {\scriptstyle (k=1 \cdots n-q)}$$

mit den m willkürlichen Parametern $l_1 \cdots l_m$ irgend eine Schaar von Mannigfaltigkeiten darstellen.

Sollen $l_1 \cdots l_m$ vollkommen willkürliche Parameter sein, so dürfen natürlich nicht sämmtliche x sich aus (1) eliminiren lassen; es müssen also die Gleichungen (1) nach $n - q$ von den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ auflösbar sein.

Dagegen ist es nicht ausgeschlossen, dass sich die l aus (1) eliminiren lassen, es hat nichts zu sagen, wenn sich aus (1) Relationen zwischen den x allein ableiten lassen. Nur muss die Anzahl der unabhängigen, von den l freien Gleichungen, welche aus (1) folgen, kleiner sein als $n - q$, sonst kämen ja die Parameter $l_1 \cdots l_r$ in (1) nur scheinbar vor und die Gleichungen (1) stellten daher nicht eine Schaar von Mannigfaltigkeiten dar, sondern nur eine einzelne Mannigfaltigkeit.

Bevor wir untersuchen, wie sich die Schaar der Mannigfaltigkeiten (1) gegenüber Transformationen der x verhält, müssen wir erst über die Beschaffenheit der Gleichungen (1) an sich einige Bemerkungen machen.

Die Gleichungen (1) enthalten m Parameter $l_1 \cdots l_m$; lassen wir diese Parameter alle möglichen Werthe annehmen, so erhalten wir ∞^m verschiedene Werthsysteme: $l_1 \cdots l_m$, nicht aber nothwendig ∞^m verschiedene Mannigfaltigkeiten. Es muss daher festgestellt werden, unter welchen Bedingungen das vorgelegte Gleichungensystem gerade ∞^m verschiedene Mannigfaltigkeiten darstellt, mit andern Worten: es muss ein Kriterium dafür gegeben werden, ob die Parameter: $l_1 \cdots l_m$ in den Gleichungen (1) *wesentlich* sind oder nicht.

Um ein solches Kriterium zu finden, denken wir uns die Gleichungen $\Omega_k = 0$ nach $n - q$ von den x, etwa nach $x_{q+1} \cdots x_n$ aufgelöst:

(2) $$x_{q+k} = \psi_{q+k}(x_1 \cdots x_q,\ l_1 \cdots l_m) \qquad {\scriptstyle (k=1 \cdots n-q)}$$

und denken uns weiter die Functionen ψ_{q+k} in der Umgebung irgend eines Werthsystems: $x_1^0 \cdots x_q^0$ nach Potenzen von: $x_1 - x_1^0, \cdots x_q - x_q^0$ entwickelt. Die Entwickelungscoefficienten, deren Zahl natürlich im Allgemeinen unendlich gross ist, werden analytische Functionen von $l_1 \cdots l_m$ und mögen heissen:

$$A_j(l_1 \cdots l_m) \qquad {\scriptstyle (j=1,2\cdots)}.$$

Es kommt jetzt blos darauf an, wieviele von einander unabhängige unter den sämmtlichen Functionen $A_1, A_2 \cdots$ vorhanden sind.

Giebt es nämlich unter den A gerade l von einander unabhängige Functionen — mehr als l giebt es ja sicher nicht —, so entsprechen den ∞^m verschiedenen Werthsystemen: $l_1 \cdots l_m$ offenbar auch ∞^m verschiedene Werthsysteme: $A_1, A_2 \cdots$ und demnach ∞^m verschiedene Mannigfaltigkeiten (2), das heisst die Parameter $l_1 \cdots l_m$ sind in den Gleichungen (2) und demnach auch in den Gleichungen (1) wesentlich.

Anders wenn es unter den Functionen $A_1, A_2 \cdots$ nicht m sondern weniger, etwa blos $m-h$ von einander unabhängige giebt. In diesem Falle lassen sich alle A_j durch $m-h$ unter ihnen ausdrücken, etwa durch: $A_1' \cdots A_{m-h}'$, welche natürlich von einander unabhängig sein müssen. Den ∞^m verschiedenen Werthsystemen $l_1 \cdots l_m$ entsprechen daher ∞^{m-h} verschiedene Werthsysteme $A_1' \cdots A_{m-h}'$ und ∞^{m-h} verschiedene Werthsysteme $A_1, A_2 \cdots$, so dass die Gleichungen (2) und demnach auch die Gleichungen (1) blos ∞^{m-h} verschiedene Mannigfaltigkeiten darstellen. Am deutlichsten kommt das zum Ausdruck, wenn man beachtet, dass die Functionen $\psi_{q+k}(x, l)$ die Parameter $l_1 \cdots l_m$ blos in den Verbindungen: $A_1' \cdots A_{m-h}'$ enthalten, dass also die Gleichungen (2) die Form besitzen:

$$(2') \qquad x_{q+k} = \overline{\psi}_{q+k}(x_1 \cdots x_n, \; A_1' \cdots A_{m-h}') \qquad (k=1 \cdots n-q).$$

Hieraus geht nämlich hervor, dass wir in (2) geradezu $A_1' \cdots A_{m-h}'$ als neue Parameter an Stelle von $l_1 \cdots l_m$ einführen können, wodurch die Anzahl der in (2) vorkommenden willkürlichen Parameter auf $m-h$ erniedrigt wird.

Demnach können wir sagen:

Die Gleichungen:

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n, \; l_1 \cdots l_m) = 0 \qquad (k=1 \cdots n-q)$$

stellen nur dann ∞^m verschiedene Mannigfaltigkeiten dar, wenn es nicht möglich ist, $m-h < m$ solche Functionen $\pi_1 \cdots \pi_{m-h}$ von $l_1 \cdots l_m$ anzugeben, dass sich in den aufgelösten Gleichungen:

$$x_{q+k} = \psi_{q+k}(x_1 \cdots x_q, \; l_1 \cdots l_m) \qquad (k=1 \cdots n-q)$$

die Functionen $\psi_{q+1} \cdots \psi_n$ durch $x_1 \cdots x_q$ und $\pi_1 \cdots \pi_{m-h}$ allein ausdrücken lassen. Ist es dagegen möglich, $m-h < m$ Functionen π_μ von dieser Beschaffenheit anzugeben, so stellen die Gleichungen $\Omega_k = 0$ höchstens ∞^{m-h} verschiedene Mannigfaltigkeiten dar und die Parameter $l_1 \cdots l_m$ sind daher nicht wesentlich.

Hierzu noch eine kurze Bemerkung.

Nehmen die oben besprochenen Functionen: $A_1, A_2 \cdots$ bei der Substitution: $l_1 = l_1^0, \cdots l_m = l_m^0$ die Werthe: $A_1^0, A_2^0 \cdots$ an, so definiren die Gleichungen:

$$A_j(l_1 \cdots l_m) = A_j^0 \quad (j=1,2\cdots)$$

den Inbegriff aller Werthsysteme $l_1 \cdots l_m$, welche in (2) oder (1) eingesetzt dieselbe Mannigfaltigkeit liefern wie das Werthsystem: $l_1^0 \cdots l_m^0$. Giebt es nun unter den Functionen $A_1, A_2 \cdots m$ von einander unabhängige, sind also die Parameter $l_1 \cdots l_m$ alle wesentlich, so gilt offenbar Folgendes: Um jedes Werthsystem $l_1^0 \cdots l_m^0$ von allgemeiner Lage lässt sich ein solches Gebiet abgränzen, dass zwei verschiedene Werthsysteme $l_1 \cdots l_m$ des betreffenden Gebietes stets auch zwei verschiedene Mannigfaltigkeiten liefern.

Die im Vorstehenden gegebene Definition für die Wesentlichkeit bezüglich Nichtwesentlichkeit der Parameter $l_1 \cdots l_m$ ist nur dann befriedigend, wenn die Gleichungen: $\Omega_1 = 0, \cdots \Omega_{n-q} = 0$ bereits nach $n - q$ von den x aufgelöst sind. Es ist jedoch an und für sich und auch für das Folgende wünschenswerth, diese Definition so umzugestalten, dass sie auch für ein nicht aufgelöstes Gleichungensystem $\Omega_k = 0$ passt.

Das hat keine Schwierigkeit.

Die Parameter $l_1 \cdots l_m$ in den Gleichungen:

$$(2) \qquad x_{q+k} = \psi_{q+k}(x_1 \cdots x_q,\ l_1 \cdots l_m) \quad (k=1\cdots n-q)$$

seien nicht wesentlich, es mögen sich also $m - h < m$ solche Functionen: $\pi_1(l) \cdots \pi_{m-h}(l)$ angeben lassen, dass $\psi_{q+1}(x, l) \cdots \psi_n(x, l)$ durch $x_1 \cdots x_q$ und $\pi_1(l) \cdots \pi_{m-h}(l)$ allein ausgedrückt werden können. Offenbar giebt es dann wenigstens eine lineare partielle Differentialgleichung:

$$Lf = \sum_1^m {}_\mu\, \lambda_\mu(l_1 \cdots l_m) \frac{\partial f}{\partial l_\mu} = 0$$

mit von den x freien Coefficienten: $\lambda_1(l) \cdots \lambda_\mu(l)$, welche von sämmtlichen Functionen: $\pi_1(l) \cdots \pi_{m-h}(l)$ und daher auch von sämmtlichen Functionen: $x_{q+i} - \psi_{q+i}(x, l)$ identisch befriedigt wird. Demnach können wir auch sagen (vgl. Kap. 7, Theorem 15, S. 117):

Wenn in (2) die Parameter $l_1 \cdots l_m$ nicht wesentlich sind, so gestattet das Gleichungensystem (2), aufgefasst als Gleichungensystem in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n,\ l_1 \cdots l_m$, eine infinitesimale Transformation Lf in den Veränderlichen $l_1 \cdots l_m$ allein.

Umgekehrt gilt aber auch: Wenn das Gleichungensystem (2), aufgefasst als Gleichungensystem in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n,\ l_1 \cdots l_m$, eine infinitesimale Transformation Lf in den l allein gestattet, so sind die Parameter $l_1 \cdots l_m$ in dem Gleichungensystem nicht wesentlich; es ist nämlich unmittelbar einleuchtend, dass $\psi_{q+1}(x, l) \cdots \psi_n(x, l)$

unter der gemachten Voraussetzung Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung: $Lf = 0$ sind, es ist also möglich, die Anzahl der in (2) vorkommenden willkürlichen Parameter zu erniedrigen.

Bedenken wir nun, dass das Gleichungensystem (2) nur eine andere Form des Gleichungensystems (1) ist, so erkennen wir ohne weiteres (vgl. S. 111), dass der folgende Satz besteht:

Satz 1. *Ein nach $n - q$ von den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ auflösbares Gleichungensystem:*

$$(1) \qquad \Omega_k(x \cdots x_n, \, l_1 \cdots l_m) = 0 \qquad {\scriptstyle (k=1\cdots n-q)}$$

mit den m Parametern $l_1 \cdots l_m$ stellt dann und nur dann ∞^m verschiedene Mannigfaltigkeiten des Raumes $x_1 \cdots x_n$ dar, wenn es, angesehen als Gleichungensystem in den $n + m$ Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $l_1 \cdots l_m$ keine infinitesimale Transformation

$$Lf = \sum_1^m {}^{\mu} \lambda_\mu (l_1 \cdots l_m) \frac{\partial f}{\partial l_\mu}$$

in den l allein gestattet.

§ 111.

In dem Raume $x_1 \cdots x_n$ sei jetzt eine Schaar von ∞^m verschiedenen Mannigfaltigkeiten durch die $n - q$ Gleichungen: $\Omega_k(x, l) = 0$ oder durch die gleichwerthigen:

$$(2) \qquad x_{q+k} = \psi_{q+k}(x_1 \cdots x_n, \, l_1 \cdots l_m) \qquad {\scriptstyle (k=1\cdots n-q)}$$

bestimmt.

Soll diese Schaar bei der Transformation: $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n)$ invariant bleiben, so muss jede Mannigfaltigkeit der Schaar bei der betreffenden Transformation wieder in eine Mannigfaltigkeit der Schaar übergehen. Verstehen wir daher unter $l_1' \cdots l_m'$ die Parameter derjenigen Mannigfaltigkeit der Schaar, in welche die Mannigfaltigkeit mit den Parametern $l_1 \cdots l_m$ bei der Transformation: $x_i' = f_i(x)$ übergeht, so müssen die Gleichungen (2) nach Einführung der neuen Veränderlichen: $x_1' = f_1(x), \cdots x_n' = f_n(x)$ die Form:

$$x_{q+k}' = \psi_{q+k}(x_1' \cdots x_q', \, l_1' \cdots l_m') \qquad {\scriptstyle (k=1\cdots n-q)}$$

erhalten können, wo die Parameter $l_1' \cdots l_m'$ natürlich nur von den l abhängen.

Nun aber nehmen die Gleichungen (2) bei Einführung der x' offenbar die Form an:

$$x_{q+k}' = \Psi_{q+k}(x_1' \cdots x_q', \, l_1 \cdots l_m) \qquad {\scriptstyle (k=1\cdots n-q)};$$

soll also die Schaar (2) bei der Transformationen: $x_i' = f_i(x)$ invariant bleiben, so muss es möglich sein, die $n - q$ Gleichungen:

$$(3) \quad \psi_{q+k}(x_1' \cdots x_q', \, l_1' \cdots l_m') = \Psi_{q+k}(x_1' \cdots x_q', \, l_1 \cdots l_m) \qquad {\scriptstyle (k=1\cdots n-q)}$$

unabhängig von den Werthen der Veränderlichen $x'_1 \cdots x'_q$ zu befriedigen.

Entwickelt man die beiden Seiten von (3) in der Umgebung irgend eines Werthsystems $x'^0_1 \cdots x'^0_n$ nach Potenzen von: $x'_1 - x'^0_1$, $\cdots x'_n - x'^0_n$, vergleicht die Coefficienten und berücksichtigt, dass $l'_1 \cdots l'_m$ wesentliche Parameter sind, so erkennt man, dass $l'_1 \cdots l'_m$ ganz bestimmte Functionen von $l_1 \cdots l_m$ sein müssen:

$$l'_\mu = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m) \qquad (\mu = 1 \cdots m).$$

Umgekehrt müssen natürlich auch die l sich als Functionen der l' darstellen lassen, denn auch bei dem Uebergange von den x' zu den x muss die Schaar unserer Mannigfaltigkeiten ungeändert bleiben.

Wir sehen also, dass die Gleichungen:

$$x'_i = f_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n), \qquad l'_\mu = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m) \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

zusammengenommen eine Transformation in den $n + m$ Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $l_1 \cdots l_m$ darstellen, welche das Gleichungensystem: $x_{q+k} = \psi_{q+k}(x, l)$ in diesen $n + m$ Veränderlichen invariant lässt. Folglich können wir sagen:

Eine Schaar von ∞^m Mannigfaltigkeiten

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n,\ l_1 \cdots l_m) = 0 \qquad (k = 1 \cdots n - q)$$

des Raumes $x_1 \cdots x_n$ gestattet dann und nur dann die Transformation

$$x'_i = f_i(x_1 \cdots x_n) \qquad (i = 1 \cdots n),$$

wenn es möglich ist, zu dieser Transformation in den x eine entsprechende Transformation

$$l'_\mu = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m) \qquad (\mu = 1 \cdots m)$$

in den l hinzuzufügen, derart, dass das Gleichungensystem $\Omega_k(x, l) = 0$ in den $n + m$ Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $l_1 \cdots l_m$ die Transformation

$$x'_i = f_i(x_1 \cdots x_n), \quad l'_\mu = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m)$$

zulässt.

Aus den vorhergehenden Ueberlegungen erhellt, dass die Transformation: $l'_\mu = \chi_\mu(l)$, wenn sie überhaupt existirt, einzig in ihrer Art ist; sie ist ja vollständig bestimmt, wenn die Transformation $x'_i = f_i(x)$ bekannt ist. Die Transformation: $l'_\mu = \chi_\mu(l)$ enthält daher keine willkürlichen Parameter.

Lässt die Schaar der ∞^m Mannigfaltigkeiten $\Omega_k(x, l) = 0$ zwei verschiedene Transformationen zu:

$$x'_i = f_i(x_1 \cdots x_n); \; x''_i = F_i(x'_1 \cdots x'_n),$$

so gestattet sie offenbar auch die Transformation:

$$x''_i = F_i(f_1(x) \cdots f_n(x)),$$

welche durch Ausführung jener beiden Transformationen nach einander entstanden ist. Hieraus schliessen wir:

Der Inbegriff aller Transformationen $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n)$, welche eine Schaar von ∞^m Mannigfaltigkeiten des Raumes $x_1 \cdots x_n$ invariant lassen, bildet eine Gruppe.

Diese Gruppe braucht natürlich weder endlich noch continuirlich zu sein; nur soviel können wir ganz allgemein sagen: ihre Transformationen ordnen sich paarweise als inverse zusammen. Wenn sie daher insbesondere nur eine endliche Anzahl von willkürlichen Parametern enthält, so gehört sie in die Kategorie von Gruppen, welche in Kap. 18 besprochen ist, und enthält nach Theor. 56, S. 315 f. eine ganz bestimmte von infinitesimalen Transformationen erzeugte, endliche continuirliche Untergruppe. Diese Untergruppe ist offenbar die grösste continuirliche Gruppe, bei welcher die Schaar $\Omega_k(x, l) = 0$ invariant bleibt.

Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung von endlichen continuirlichen Gruppen, welche die Schaar der ∞^m Mannigfaltigkeiten:

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n,\ l_1 \cdots l_m) \quad (k = 1 \cdots n-q) \tag{1}$$

invariant lassen; jedoch beschränken wir uns der Einfachheit wegen zunächst auf den Fall einer eingliedrigen Gruppe von der betreffenden Beschaffenheit.

Die Schaar der ∞^m Mannigfaltigkeiten (1) gestatte alle Transformationen:

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ \varepsilon) \quad (i = 1 \cdots n) \tag{4}$$

der eingliedrigen Gruppe:

$$Xf = \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n)\, \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Die Transformation in den l, welche nach S. 464 der allgemeinen Transformation: $x_i' = f_i(x, \varepsilon)$ entspricht, möge lauten:

$$l_\mu' = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m,\ \varepsilon) \quad (\mu = 1 \cdots m). \tag{4'}$$

Es ist leicht zu sehen, dass der Inbegriff aller Transformationen von der Form:

$$\left\{\begin{aligned} x_i' &= f_i(x_1 \cdots x_n,\ \varepsilon) \quad (i = 1 \cdots n) \\ l_\mu' &= \chi_\mu(l_1 \cdots l_m,\ \varepsilon) \quad (\mu = 1 \cdots m) \end{aligned}\right. \tag{4''}$$

seinerseits eine eingliedrige Gruppe in den $n + m$ Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n,\ l_1 \cdots l_m$ bildet.

In der That, die Transformationen (4″) lassen nach S. 464 das Gleichungensystem (1) invariant; führt man daher zuerst die Transformation (4″) aus und sodann eine Transformation von derselben Form mit dem Parameter ε_1, so erhält man eine Transformation:

$$x_i'' = f_i(f_1(x, \varepsilon) \cdots f_n(x, \varepsilon), \varepsilon_1) \quad (i=1 \cdots n)$$
$$l_\mu'' = \chi_\mu(\chi_1(l, \varepsilon) \cdots \chi_m(l, \varepsilon), \varepsilon_1) \quad (\mu=1 \cdots m),$$
welche ebenfalls das Gleichungensystem (1) invariant lässt. Nun gehört die Transformation:

$$(5) \qquad x_i'' = f_i(f_1(x, \varepsilon) \cdots f_n(x, \varepsilon), \varepsilon_1)$$

der eingliedrigen Gruppe Xf an und lässt sich daher auf die Form:

$$x_i'' = f_i(x_1 \cdots x_n, \varepsilon_2) \quad (i=1 \cdots n)$$

bringen, wo ε_2 nur von ε und ε_1 abhängt. Folglich hat diejenige Transformation in den l, welche der Transformation (5) entspricht, die Gestalt:

$$l_\mu'' = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m, \varepsilon_2) \quad (\mu=1 \cdots m)$$

und es wird daher:

$$\chi_\mu(\chi_1(l, \varepsilon) \cdots \chi_m(l, \varepsilon), \varepsilon_1) = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m, \varepsilon_2)$$
$$(\mu=1 \cdots m).$$

Damit ist bewiesen, dass die Gleichungen (4″) wirklich eine eingliedrige Gruppe in den $n+m$ Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $l_1 \cdots l_m$ darstellen, und zwar eine, welche dieselbe Parametergruppe besitzt wie die vorgelegte Gruppe: $x_i' = f_i(x, \varepsilon)$. Zugleich ist klar, dass auch die Gleichungen (4′) für sich genommen eine Gruppe in den Veränderlichen: $l_1 \cdots l_m$ darstellen, ob freilich eine eingliedrige Gruppe, das wissen wir nicht, denn es ist denkbar, dass der Parameter ε in den Gleichungen (4′) ganz fehlt.

Die Transformationen der Gruppe (4) ordnen sich paarweise als inverse zusammen, von den Transformationen der Gruppe (4″) gilt daher augenscheinlich dasselbe. Hieraus ergiebt sich (vgl. Kap. 9, S. 169 oben), dass auch die Gruppe (4″) die identische Transformation enthält und ausserdem eine infinitesimale Transformation:

$$\sum_1^n {}^i\, \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m {}^\mu\, \lambda_\mu(l_1 \cdots l_m) \frac{\partial f}{\partial \lambda_\mu} = Xf + Lf,$$

von welcher sie erzeugt wird.

Die gewonnenen Ergebnisse fassen wir in dem Satz zusammen:

Satz 2. *Gestattet die Schaar der ∞^m Mannigfaltigkeiten:*

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n, l_1 \cdots l_m) = 0 \quad (k=1 \cdots n-q)$$

des Raumes $x_1 \cdots x_n$ alle Transformationen:

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, \varepsilon) \quad (i=1 \cdots n)$$

der eingliedrigen Gruppe:

$$Xf = \sum_1^n {}^i\, \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

so bilden die entsprechenden Transformationen:

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, \varepsilon) \quad (i=1 \cdots n)$$

$$l_\mu' = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m, \varepsilon) \quad (\mu=1 \cdots m),$$

welche das Gleichungsystem: $\Omega_1(x, l) = 0, \cdots \Omega_{n-q}(x, l) = 0$ *in den* $n + m$ *Veränderlichen:* $x_1 \cdots x_n$, $l_1 \cdots l_m$ *invariant lassen, eine eingliedrige Gruppe mit einer infinitesimalen Transformation von der Gestalt:*

$$\sum_1^n {}_i\, \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m {}_\mu\, \lambda_\mu(l_1 \cdots l_m) \frac{\partial f}{\partial l_\mu} = Xf + Lf.$$

Nunmehr stellen wir die folgende Definition auf:

Definition. *Eine Schaar von* ∞^m *Mannigfaltigkeiten:*

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n,\ l_1 \cdots l_m) = 0 \quad (k=1 \cdots n-q)$$

des Raumes $x_1 \cdots x_n$ *gestattet die infinitesimale Transformation:*

$$Xf = \sum_1^n {}_i\, \xi_i(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

wenn es in $l_1 \cdots l_m$ *eine solche infinitesimale Transformation:*

$$Lf = \sum_1^m {}_\mu\, \lambda_\mu(l_1 \cdots l_m) \frac{\partial f}{\partial l_\mu}$$

giebt, dass das Gleichungsystem: $\Omega_1(x, l) = 0, \cdots \Omega_{n-q}(x, l) = 0$ *in den* $n + m$ *Veränderlichen:* $x_1 \cdots x_n$, $l_1 \cdots l_m$ *die infinitesimale Transformation* $Xf + Lf$ *gestattet.*

Es bleibt hier noch die Frage, ob die infinitesimale Transformation Lf durch die Transformation Xf vollständig bestimmt ist. Man erkennt leicht, dass dies der Fall ist; gestattet nämlich das Gleichungensystem: $\Omega_k(x, l) = 0$ die beiden infinitesimalen Transformationen: $Xf + Lf$ und $Xf + \mathfrak{L}f$, so gestattet es zugleich die Transformation:

$$Xf + Lf - (Xf + \mathfrak{L}f) = Lf - \mathfrak{L}f,$$

da aber die Parameter der Schaar: $\Omega_k(x, l) = 0$ wesentlich sind, so muss der Ausdruck: $Lf - \mathfrak{L}f$ identisch verschwinden, die Transformation $\mathfrak{L}f$ kann daher von der Transformation Lf nicht verschieden sein.

Bei Zugrundelegung der obigen Definition können wir den Inhalt von Satz 2 offenbar auch so ausdrücken:

Gestattet die Schaar der ∞^m Mannigfaltigkeiten:

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n,\ l_1 \cdots l_m) = 0 \quad (k=1 \cdots n-q)$$

die eingliedrige Gruppe Xf, so gestattet sie zugleich die infinitesimale Transformation Xf.

Umgekehrt: wenn die Schaar der ∞^m Mannigfaltigkeiten: $\Omega_k(x,l)=0$ die infinitesimale Transformation Xf gestattet, so gestattet sie auch die eingliedrige Gruppe Xf.

Unter der gemachten Voraussetzung gestattet ja das Gleichungensystem: $\Omega_k(x,l)=0$ in den $n+m$ Veränderlichen x, l eine infinitesimale Transformation von der Form:

$$Xf+Lf=\sum_1^n{}_i\, \xi_i(x_1\cdots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_1^m{}_\mu\, \lambda_\mu(l_1\cdots l_m)\frac{\partial f}{\partial l_\mu},$$

es gestattet daher zugleich alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe: $Xf+Lf$, darin aber liegt, dass die Schaar der ∞^m Mannigfaltigkeiten: $\Omega_k(x,l)=0$ des Raumes $x_1\cdots x_n$ alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe Xf zulässt.

Hiermit ist bewiesen:

Satz 3. *Die Schaar der ∞^m Mannigfaltigkeiten:*

$$\Omega_k(x_1\cdots x_n,\ l_1\cdots l_m)=0 \quad (k=1\cdots n-q)$$

des Raumes $x_1\cdots x_n$ gestattet dann und nur dann die eingliedrige Gruppe Xf, wenn sie die infinitesimale Transformation Xf gestattet.

Will man wissen, ob die Schaar der ∞^m Mannigfaltigkeiten: $\Omega_k(x,l)=0$ eine vorgelegte infinitesimale Transformation Xf gestattet, so wird man die Gleichungen $\Omega_k(x,l)$ zunächst nach $n-q$ von den x auflösen:

$$(2)\qquad x_{q+k}=\psi_{q+k}(x_1\cdots x_q,\ l_1\cdots l_m) \quad (k=1\cdots n-q)$$

und sodann versuchen, m solche Functionen: $\lambda_1(l)\cdots\lambda_m(l)$ von den l zu bestimmen, dass das Gleichungensystem (2) in den $n+m$ Veränderlichen x, l die infinitesimale Transformation:

$$Xf+Lf=\sum_1^n{}_i\, \xi_i(x_1\cdots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_1^m{}_\mu\, \lambda_\mu(l_1\cdots l_m)\frac{\partial f}{\partial l_\mu}$$

gestattet.

Deutet man die Substitution: $x_{q+1}=\psi_{q+1},\ \cdots x_n=\psi_n$ durch das Zeichen [ ] an, so erhält man für $\lambda_1(l)\cdots\lambda_m(l)$ offenbar die folgenden Gleichungen:

$$\sum_1^m{}_\mu\, \lambda_\mu(l)\frac{\partial\psi_{q+k}}{\partial l_\mu}=[\xi_{q+k}]-\sum_1^q{}_j\, [\xi_j]\frac{\partial\psi_{q+k}}{\partial x_j}$$
$$(k=1\cdots n-q),$$

die unabhängig von den Werthen der Veränderlichen $x_1\cdots x_q$ befriedigt werden müssen. Theoretisch hat es gar keine Schwierigkeit zu entscheiden, ob das möglich ist. Man findet entweder, dass es kein System von Functionen $\lambda_\mu(l)$ giebt, welches die verlangte Beschaffenheit hat, oder man findet ein solches System, dann aber auch nur eins, denn die infinitesimale Transformation Lf ist ja, wenn sie überhaupt existirt, durch Xf vollständig bestimmt.

Wir werden jetzt beweisen, dass der folgende Satz gilt:

Satz 4. *Gestattet die Schaar der ∞^m Mannigfaltigkeiten:*

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n,\ l_1 \cdots l_m) = 0 \quad {\scriptstyle (k=1 \cdots n-q)}$$

des Raumes $x_1 \cdots x_n$ die beiden infinitesimalen Transformationen:

$$X_1 f = \sum_1^n {}_i\, \xi_{1i}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad X_2 f = \sum_1^n {}_i\, \xi_{2i}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

so gestattet sie nicht allein jede infinitesimale Transformation:

$$e_1 X_1 f + e_2 X_2 f,$$

welche aus $X_1 f$ und $X_2 f$ linear abgeleitet werden kann, sondern auch die Transformation $(X_1 X_2)$.

Unter den Voraussetzungen, die in dem Satze gemacht sind, giebt es zwei infinitesimale Transformationen $L_1 f$ und $L_2 f$ in den l allein, so beschaffen, dass das Gleichungensystem $\Omega_k(x, l) = 0$ in den $n+m$ Veränderlichen x, l die beiden infinitesimalen Transformationen $X_1 f + L_1 f$, $X_2 f + L_2 f$ zulässt. Nach Kap. 7, Satz 5, S. 118 gestattet das Gleichungensystem $\Omega_k(x, l) = 0$ dann auch die durch Combination entstehende infinitesimale Transformation $(X_1 X_2) + (L_1 L_2)$; das aber heisst nichts anderes, als dass die Schaar der ∞^m Mannigfaltigkeiten $\Omega_k(x, l) = 0$ auch $(X_1 X_2)$ gestattet. Damit ist der Satz bewiesen.

Die Ueberlegungen, welche wir bei dem eben durchgeführten Beweise angewendet haben, ergeben auch noch Folgendes:

Gestattet die Schaar der ∞^m Mannigfaltigkeiten $\Omega_k(x, l) = 0$ die beiden infinitesimalen Transformationen $X_1 f$ und $X_2 f$, und sind $L_1 f$ und $L_2 f$ bezüglich die entsprechenden infinitesimalen Transformationen in $l_1 \cdots l_m$ allein, so entspricht der infinitesimalen Transformation $(X_1 X_2)$ die Transformation $(L_1 L_2)$.

Nehmen wir jetzt an, dass die Schaar der ∞^m Mannigfaltigkeiten: $\Omega_k(x, l) = 0$ des Raumes: $x_1 \cdots x_n$ alle Transformationen irgend einer r-gliedrigen Gruppe:

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \quad {\scriptstyle (i=1 \cdots n)} \tag{6}$$

zulässt. Die betreffende Gruppe sei von den r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$X_k f = \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad {\scriptstyle (k=1 \cdots r)}$$

erzeugt, zwischen: $X_1 f \cdots X_r f$ mögen daher Relationen von der bekannten Form:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_s \, c_{iks} X_s f \qquad (i, k = 1 \cdots r)$$

bestehen.

Ist

$$(6') \qquad l_\mu' = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m, \, a_1 \cdots a_r) \qquad (\mu = 1 \cdots m)$$

diejenige Transformation in den l, welche der allgemeinen Transformation: $x_i' = f_i(x, a)$ der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ entspricht, so stellen die Gleichungen (6) und (6′) zusammengenommen eine r-gliedrige Gruppe in den $n + m$ Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $l_1 \cdots l_m$ dar.

In der That, sind $T_{(a_1 \cdots a_r)}$ oder kurz $T_{(a)}$ und $T_{(b_1 \cdots b_r)}$ oder kurz $T_{(b)}$ zwei Transformationen der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$, so ergeben dieselben nach einander ausgeführt in bekannter Weise eine Transformation: $T_{(a)} T_{(b)} = T_{(c)}$ derselben Gruppe, wo die Parameter $c_1 \cdots c_r$ nur von den a und den b abhängen.

Sind andererseits $S_{(a)}$ und $S_{(b)}$ diejenigen Transformationen (6′), welche bezüglich den Transformationen $T_{(a)}$ und $T_{(b)}$ entsprechen, so erhält man offenbar die der Transformation $T_{(a)} T_{(b)}$ entsprechende Transformation in den l, wenn man die beiden Transformationen $S_{(a)}$ und $S_{(b)}$ nach einander ausführt, das heisst: der Transformation $T_{(a)} T_{(b)}$ entspricht die Transformation: $S_{(a)} S_{(b)}$. Nun aber ist: $T_{(a)} T_{(b)} = T_{(c)}$ und der Transformation $T_{(c)}$ entspricht in den l die Transformation $S_{(c)}$, also muss sein: $S_{(a)} S_{(b)} = S_{(c)}$.

Hiermit ist bewiesen, dass die Gleichungen (6) und (6′) wirklich eine r-gliedrige Gruppe in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $l_1 \cdots l_m$ darstellen und zwar eine mit der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ holoedrisch isomorphe Gruppe; beide Gruppen haben nämlich augenscheinlich ein und dieselbe Parametergruppe (vgl. Kap. 21, S. 402 ff.).

Zugleich ist bewiesen, dass auch die Gleichungen (6′) ihrerseits eine Gruppe in den Veränderlichen $l_1 \cdots l_m$ darstellen, und zwar, wie aus dem gleichzeitigen Bestehen der symbolischen Relationen:

$$T_{(a)} T_{(b)} = T_{(c)}$$

und:

$$S_{(a)} S_{(b)} = S_{(c)}$$

hervorgeht, eine mit der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ isomorphe Gruppe (vgl. Kap. 21, S. 420 ff.). Ordnet man jeder Transformation der Gruppe (6) diejenige Transformation der Gruppe (6′) zu, welche durch sie bestimmt ist, so erhält man die beiden Gruppen (6) und (6′) isomorph auf einander bezogen.

Der Isomorphismus der beiden Gruppen (6) und (6′) braucht keineswegs ein holoedrischer zu sein, es kann ja die Gruppe (6′) unter Umständen sogar auf die identische Transformation zusammenschrumpfen, wenn nämlich die Gruppe: $x' = f(x, a)$ jede einzelne der ∞^m Mannigfaltigkeiten: $\Omega_k(x, l) = 0$ stehen lässt.

Wir werden zeigen, dass die Gruppe, welche von den vereinigten Gleichungen (6) und (6′) dargestellt wird, von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen erzeugt ist.

Da die Schaar der ∞^m Mannigfaltigkeiten: $\Omega_k(x, l) = 0$ alle Transformationen der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ zulässt, so gestattet sie insbesondere jede der r eingliedrigen Gruppen: $X_1 f \cdots X_r f$, sie gestattet also nach Satz 3, S. 468 auch jede der r infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \cdots X_r f$. Hieraus ergiebt sich, dass zu jeder infinitesimalen Transformation $X_k f$ eine ganz bestimmte infinitesimale Transformation:

$$L_k f = \sum_1^m {}^{\mu}\, \lambda_{k\mu}(l_1 \cdots l_m) \frac{\partial f}{\partial l_\mu}$$

von solcher Beschaffenheit gehört, dass das Gleichungensystem: $\Omega_k(x, l) = 0$ in den $n + m$ Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $l_1 \cdots l_m$ die infinitesimale Transformation: $X_k f + L_k f$ gestattet.

Natürlich gestattet das Gleichungensystem: $\Omega_k(x, l) = 0$ zugleich jede infinitesimale Transformation: $e_1(X_1 f + L_1 f) + \cdots + e_r(X_r f + L_r f)$ und in Folge dessen auch jede eingliedrige Gruppe: $e_1(X_1 f + L_1 f) + \cdots + e_r(X_r f + L_r f)$. Da aber die Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ aus dem Inbegriff aller eingliedrigen Gruppen: $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ besteht, so muss offenbar die von den Gleichungen (6) und (6′) dargestellte Gruppe mit dem Inbegriff aller eingliedrigen Gruppen: $\Sigma e_k X_k f + \Sigma e_k L_k f$ identisch sein, sie muss also von den r unabhängigen infinitesimalen Transformationen: $X_k f + L_k f$ erzeugt sein, was zu zeigen war.

Hieraus folgt nun, dass zwei beliebige unter diesen infinitesimalen Transformationen Relationen von der Form:

$$(X_i f + L_i f,\ X_k f + L_k f) = \sum_1^r {}^{s}\, c'_{iks}(X_s f + L_s f)$$

erfüllen. Indem wir dies direkt verificiren, erhalten wir einen neuen Beweis dafür, dass alle endlichen Transformationen: $x_i' = f_i(x, a)$, $l_\mu' = \chi_\mu(l, a)$ eine Gruppe bilden. Wir erkennen aber gleichzeitig, dass $c'_{iks} = c_{iks}$ ist, was damit stimmt, dass unsere neue Gruppe in den x und l dieselbe Parametergruppe besitzt wie die vorgelegte Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$.

Das Gleichungensystem: $\Omega_k(x, l) = 0$ gestattet mit den r infinitesimalen Transformationen: $X_1 f + L_1 f, \cdots X_r f + L_r f$ zugleich die Transformationen:

$$(X_i X_k) + (L_i L_k) = \sum_1^r s\, c_{iks} X_s f + (L_i L_k)$$
$$(i, k = 1 \cdots r)$$

und demnach auch die folgenden:

$$(X_i X_k) + (L_i L_k) - \sum_1^r s\, c_{iks}(X_s f + L_s f) = (L_i L_k) - \sum_1^r s\, c_{iks} L_s f$$

in den Veränderlichen $l_1 \cdots l_m$ allein. Das aber ist wegen der Beschaffenheit des Gleichungensystems: $\Omega_k(x, l) = 0$ nur möglich, wenn die eben geschriebenen infinitesimalen Transformationen identisch verschwinden, wenn also die Relationen bestehen:

$$(L_i L_k) = \sum_1^r s\, c_{iks} L_s f.$$

Hieraus ergiebt sich sofort:

$$(X_i X_k) + (L_i L_k) = \sum_1^r s\, c_{iks}(X_s f + L_s f),$$

womit die bewusste Eigenschaft der vereinigten Gleichungen (6), (6′) bewiesen ist.

Es versteht sich nach dem Obigen von selbst, dass die Gruppe (6′) von den r infinitesimalen Transformationen: $L_1 f \cdots L_r f$ erzeugt ist. Zugleich haben wir in dem Vorstehenden einen neuen Beweis dafür, dass die Gleichungen (6′) eine mit der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ isomorphe Gruppe in den Veränderlichen $l_1 \cdots l_m$ darstellen.

Die auf S. 470 erwähnte isomorphe Beziehung zwischen den beiden Gruppen (6) und (6′) kann nunmehr auch dahin definirt werden, dass sie jeder infinitesimalen Transformation: $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ die durch sie bestimmte infinitesimale Transformation: $e_1 L_1 f + \cdots + e_r L_r f$ in den l zuordnet.

Wir haben somit den:

Satz 5. *Gestattet die Schaar der ∞^m Mannigfaltigkeiten:*

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n,\ l_1 \cdots l_m) = 0 \qquad (k = 1 \cdots n - q)$$

des Raumes: $x_1 \cdots x_n$ die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$X_k f = \sum_1^n i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

einer r-gliedrigen Gruppe von der Zusammensetzung:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r s\, c_{iks} X_s f \qquad (i, k = 1 \cdots r),$$

entspricht also jedem $X_k f$ *eine ganz bestimmte infinitesimale Transformation:*

$$L_k f = \sum_1^m \mu\, \lambda_{k\mu}(l_1 \cdots l_m) \frac{\partial f}{\partial l_\mu}$$

von solcher Beschaffenheit, dass das Gleichungensystem: $\Omega_k(x, l) = 0$ *in den* $n + m$ *Veränderlichen:* $x_1 \cdots x_n$, $l_1 \cdots l_m$ *die* r *infinitesimalen Transformationen:* $X_k f + L_k f$ *gestattet, so stehen die* r *infinitesimalen Transformationen* $L_k f$ *paarweise in den Beziehungen:*

$$(L_i L_k) = \sum_1^r s\, c_{iks} L_s f \qquad (i, k = 1 \cdots r),$$

das heisst, sie erzeugen eine mit der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ *isomorphe Gruppe.*

Hier mag noch der folgende Satz ausdrücklich ausgesprochen und selbständig bewiesen werden:

Satz 6. *Enthält die* r*-gliedrige Gruppe:* $X_1 f \cdots X_r f$ *des Raumes* $x_1 \cdots x_n$ *gerade* $p \leq r$ *unabhängige infinitesimale Transformationen, welche die Schaar der* ∞^m *Mannigfaltigkeiten:*

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n,\ l_1 \cdots l_m) = 0 \qquad (k = 1 \cdots n - q)$$

invariant lassen, so erzeugen diese p *unabhängigen infinitesimalen Transformationen eine* p*-gliedrige Untergruppe der Gruppe:* $X_1 f \cdots X_r f$.

Der Beweis ist sehr einfach. Es seien:

$$\Xi_\pi f = \sum_1^r j\, g_{\pi j} X_j f \qquad (\pi = 1 \cdots p)$$

solche unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$, welche die Schaar: $\Omega_k(x, l) = 0$ invariant lassen, so dass jede andere infinitesimale Transformation: $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$, welche dasselbe thut, sich aus $\Xi_1 f \cdots \Xi_p f$ linear ableiten lässt. Dann gestattet nach Satz 4, S. 469 die Schaar: $\Omega_k(x, l) = 0$ auch jede infinitesimale Transformation $(\Xi_\mu \Xi_\nu)$ der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$, es bestehen mithin Relationen von der Form:

$$(\Xi_\mu \Xi_\nu) = \sum_1^p \pi\, g_{\mu\nu\pi} \Xi_\pi f \qquad (\mu, \nu = 1 \cdots p),$$

in denen die $g_{\mu\nu\pi}$ Constanten bezeichnen. Hieraus geht hervor, dass $\Xi_1 f \cdots \Xi_p f$ wirklich eine p-gliedrige Gruppe erzeugen. —

Ist die Schaar der ∞^m Mannigfaltigkeiten:

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n,\ l_1 \cdots l_m) = 0 \quad (k=1\cdots n-q)$$

vorgelegt und ausserdem noch irgend eine r-gliedrige Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ des Raumes $x_1 \cdots x_n$, so kann man fragen, wieviele unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ die vorgelegte Schaar gestattet. Wir übersehen nun, wie sich diese Frage beantworten lässt.

Soll nämlich die Schaar: $\Omega_k(x, l) = 0$ eine infinitesimale Transformation von der Form: $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ gestatten, so muss es möglich sein, eine solche infinitesimale Transformation: Lf in den l allein anzugeben, dass das Gleichungensystem: $\Omega_k(x, l) = 0$ in den $n+m$ Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $l_1 \cdots l_m$ die infinitesimale Transformation: $\Sigma e_k X_k f + Lf$ gestattet. Denken wir uns daher die Gleichungen: $\Omega_k(x, l) = 0$ nach $n-q$ von den x aufgelöst:

$$x_{q+k} = \psi_{q+k}(x_1 \cdots x_q,\ l_1 \cdots l_m) \quad (k=1\cdots n-q)$$

und bezeichnen wir wie auf S. 468 die Substitution: $x_{q+1} = \psi_{q+1}, \cdots x_n = \psi_n$ durch das Zeichen [ ], so haben wir nur die Constanten $e_1 \cdots e_r$ und die Functionen: $\lambda_1(l) \cdots \lambda_m(l)$ in allgemeinster Weise derart zu bestimmen, dass die $n-q$ Gleichungen:

$$\sum_1^m{}^{\mu}\, \lambda_\mu(l)\, \frac{\partial \psi_{q+k}}{\partial l_\mu} = \sum_1^r{}^{\sigma}\, e_\sigma \left\{ [\xi_{\sigma,\, q+k}] - \sum_1^q{}^{j}\, [\xi_{\sigma j}]\, \frac{\partial \psi_{q+k}}{\partial x_j} \right\}$$
$$(k=1\cdots n-q)$$

unabhängig von den Werthen der Veränderlichen $x_1 \cdots x_q$ befriedigt werden. Auf diese Weise finden wir die allgemeinste infinitesimale Transformation: $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$, welche die Schaar: $\Omega_k(x, l) = 0$ invariant lässt.

§ 112.

Wenn die Schaar der ∞^m Mannigfaltigkeiten:

(1) $$\Omega_k(x_1 \cdots x_n,\ l_1 \cdots l_m) = 0 \quad (k=1\cdots n-q)$$

die Transformation: $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n)$ gestattet, so giebt es, wie wir auf S. 463 f. gesehen haben, eine ganz bestimmte Transformation: $l_\mu' = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m)$ von solcher Beschaffenheit, dass das Gleichungensystem: $\Omega_k(x, l) = 0$ in den $n+m$ Veränderlichen x, l die Transformation:

$$\begin{cases} x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n) & (i=1\cdots n) \\ l_\mu' = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m) & (\mu=1\cdots m) \end{cases}$$

gestattet.

Wir bemerkten schon auf S. 463, dass die Gleichungen: $l_\mu' = \chi_\mu(l)$ die Parameter $l_1' \cdots l_m'$ derjenigen Mannigfaltigkeit der invarianten Schaar (1) bestimmen, in welche die Mannigfaltigkeit mit den Parametern $l_1 \cdots l_m$ bei der Transformation: $x_i' = f_i(x)$ übergeht. Wenn wir daher $l_1 \cdots l_m$ geradezu als Coordinaten der einzelnen Mannigfaltigkeiten der Schaar (1) auffassen, so geben die Gleichungen: $l_\mu' = \chi_\mu(l)$ das Gesetz an, nach welchem die Mannigfaltigkeiten unserer invarianten Schaar von der Transformation: $x_i' = f_i(x)$ unter einander vertauscht werden.

Gestattet zum Beispiel ein specielles Werthsystem: $l_1^0 \cdots l_m^0$ die Transformation:

$$l_\mu' = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m) \quad (\mu = 1 \cdots m),$$

so gestattet zugleich die Mannigfaltigkeit:

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n,\ l_1^0 \cdots l_m^0) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q)$$

die Transformation:

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots n).$$

In der That, die Mannigfaltigkeit: $\Omega_k(x, l^0) = 0$ geht bei Ausführung der Transformation: $x_i' = f_i(x)$ über in die neue:

$$\Omega_k(x_1' \cdots x_n',\ \chi_1(l^0) \cdots \chi_m(l^0)) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q);$$

unter der gemachten Voraussetzung ist aber:

$$\chi_\mu(l_1^0 \cdots l_m^0) = l_\mu^0 \quad (\mu = 1 \cdots m),$$

also fällt die neue Mannigfaltigkeit mit der alten zusammen und die Mannigfaltigkeit: $\Omega_k(x, l^0) = 0$ bleibt wirklich invariant.

Das Umgekehrte gilt dagegen nicht immer. Gestattet irgend eine specielle Mannigfaltigkeit:

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n,\ l_1^0 \cdots l_m^0) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q)$$

der Schaar (1) die Transformation: $x_i' = f_i(x)$, so folgt daraus nicht mit Nothwendigkeit, dass das Werthsystem: $l_1^0 \cdots l_m^0$ die Transformation: $l_\mu' = \chi_\mu(l)$ gestattet. Es ist ja denkbar, dass das Werthsystem: $l_1^0 \cdots l_m^0$ einer continuirlichen Reihe von Werthsystemen: $l_1 \cdots l_m$ angehört, welche in (1) eingesetzt dieselbe Mannigfaltigkeit liefern wie das Werthsystem: $l_1^0 \cdots l_m^0$; in diesem Falle folgt aus der Invarianz der Mannigfaltigkeit: $\Omega_k(x, l^0) = 0$ nur, dass die einzelnen Werthsysteme: $l_1 \cdots l_m$ der eben definirten Reihe von der Transformation: $l_\mu' = \chi_\mu(l)$ unter einander vertauscht werden, nicht aber, dass das Werthsystem: $l_1^0 \cdots l_m^0$ bei der betreffenden Transformation invariant bleibt. *Haben indess die l_k nicht specielle sondern allgemeine Werthe, so gestattet die Mannigfaltigkeit: $\Omega_k(x, l) = 0$ nur dann die Transformation: $x_i' = f_i(x)$, wenn das Werthsystem l_k die entprechende Transformation: $l_\mu' = \chi_\mu(l)$ zulässt, dann aber auch immer.*

Betrachten wir nun den allgemeinen Fall, dass die Schaar der ∞^m Mannigfaltigkeiten:

(1) $$\Omega_k(x_1 \cdots x_n,\ l_1 \cdots l_m) = 0 \quad (k=1\cdots n-q)$$

die r-gliedrige Gruppe:

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \quad (i=1\cdots n)$$

mit den r unabhängigen infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \cdots X_r f$ gestattet. Die Gruppe in den l, welche der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ entspricht, habe die Form:

$$l_\mu' = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m,\ a_1 \cdots a_r) \quad (\mu=1\cdots m)$$

und sei von den r infinitesimalen Transformationen: $L_1 f \cdots L_r f$ erzeugt, die ihrerseits natürlich den infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \cdots X_r f$ bezüglich entsprechen.

Es fragt sich nun zunächst, wie man entscheidet, ob die infinitesimale Transformation: $e_1^0 X_1 f + \cdots + e_r^0 X_r f$ eine bestimmte in der Schaar (1) enthaltene Mannigfaltigkeit:

(7) $$\Omega_k(x_1 \cdots x_n,\ l_1^0 \cdots l_m^0) = 0 \quad (k=1\cdots n-q)$$

invariant lässt.

Es ist leicht zu sehen, dass die Mannigfaltigkeit (7) die infinitesimale Transformation: $e_1^0 X_1 f + \cdots + e_r^0 X_r f$ jedenfalls dann gestattet, wenn das Werthsystem: $l_1^0 \cdots l_m^0$ die infinitesimale Transformation: $e_1^0 L_1 f + \cdots + e_r^0 L_r f$ gestattet.

In der That, das Gleichungensystem (1) in den $n+m$ Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n, l_1 \cdots l_m$ gestattet unter den gemachten Voraussetzungen die infinitesimale Transformation: $\Sigma e_j^0 (X_j f + L_j f)$; die $n-q$ Ausdrücke:

$$\sum_1^r {}_j\, e_j^0 (X_j \Omega_k + L_j \Omega_k) = \sum_1^r {}_j\, e_j^0 \left\{ \sum_1^n {}_i\, \xi_{ji}(x) \frac{\partial \Omega_k}{\partial x_i} + \sum_1^m {}_\mu\, \lambda_{j\mu}(l) \frac{\partial \Omega_k}{\partial l_\mu} \right\}$$

verschwinden also sämmtlich vermöge: $\Omega_1(x, l) = 0, \cdots \Omega_{n-q}(x, l) = 0$. Das gilt auch noch, wenn wir setzen: $l_1 = l_1^0, \cdots l_m = l_m^0$; nun aber gestattet das Werthsystem $l_1^0 \cdots l_m^0$ die infinitesimale Transformation: $\Sigma e_j^0 L_j f$ und es verschwinden daher die m Ausdrücke:

$$e_1^0 \lambda_{1\mu}(l^0) + \cdots + e_r^0 \lambda_{r\mu}(l^0) \quad (\mu=1\cdots m)$$

sämmtlich. Folglich verschwinden die $n-q$ Ausdrücke:

$$\sum_1^n {}_i \left\{ \sum_1^r {}_j\, e_j^0\, \xi_{ji}(x) \right\} \frac{\partial \Omega_k(x, l^0)}{\partial x_i} \quad (k=1\cdots n-q)$$

alle vermöge (7), das heisst die Mannigfaltigkeit (7) gestattet wirklich die infinitesimale Transformation: $\Sigma e_j^0 X_j f$.

Das hiermit gefundene hinreichende Kriterium ist indess nicht nothwendig.

Bleibt nämlich unsere Schaar von Mannigfaltigkeiten $\Omega_k(x,l) = 0$ bei der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ invariant, und soll dabei die specielle Mannigfaltigkeit: $\Omega_k(x, l^0) = 0$ die infinitesimale Transformation: $e_1^0 X_1 f + \cdots + e_r^0 X_r f$ gestatten, so ist dazu nur erforderlich, dass die $n - q$ Ausdrücke:

$$\sum_1^m {}^\mu \sum_1^r {}^j e_j^0 \lambda_{j\mu}(l^0) \frac{\partial \Omega_k(x, l^0)}{\partial l_\mu}$$

vermöge des Gleichungensystems: $\Omega_k(x, l^0) = 0$ gleich Null werden; es ist aber keineswegs nothwendig, dass die r Ausdrücke: $\sum^j e_j^0 \lambda_{j\mu}(l^0)$ selbst verschwinden.

Wünscht man daher zu wissen, ob jede Mannigfaltigkeit: $\Omega_k(x,l) = 0$ der invarianten Schaar eine oder mehrere infinitesimale Transformationen: $\Sigma e_k X_k f$ gestattet, und will man ausserdem für jede Mannigfaltigkeit l_k die betreffenden infinitesimalen Transformationen finden, so hat man die e_k in allgemeinster Weise derart als Functionen der l zu bestimmen, dass die Gleichungen:

$$\sum_1^m {}^\mu \sum_1^r {}^j e_j \lambda_{j\mu}(l) \frac{\partial \Omega_k(x, l)}{\partial l_\mu} = 0 \tag{8}$$

eine Folge des Gleichungensystems $\Omega_k(x, l) = 0$ werden. Da aber nach der früheren Annahme, dass die l wesentliche Parameter sind, das Gleichungensystem: $\Omega_k(x, l) = 0$ in den $n + m$ Veränderlichen x, l keine nicht identisch verschwindende Transformation:

$$\sum_1^m {}^\mu \sum_1^r {}^j e_j(l) \lambda_{j\mu}(l) \frac{\partial f}{\partial l_\mu}$$

gestatten kann, so folgt jetzt mit Nothwendigkeit:

$$e_1 \lambda_{1\mu}(l) + \cdots + e_r \lambda_{r\mu}(l) = 0 \quad (\mu = 1, 2 \cdots m).$$

Es ergiebt sich mithin Folgendes:

Ist: $\Sigma e_k^0 L_k f$ die allgemeinste in der Gruppe: $L_1 f \cdots L_r f$ enthaltene infinitesimale Transformation, welche das ***allgemein gelegene Werthsystem:*** *$l_1^0 \cdots l_m^0$ invariant lässt, so ist: $\Sigma e_k^0 X_k f$ die allgemeinste in der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ enthaltene infinitesimale Transformation, welche die allgemein gelegene Mannigfaltigkeit* (7) *invariant lässt.*

Wir können annehmen, dass von den r infinitesimalen Transformationen: $L_1 f \cdots L_r f$ gerade $m - p$, etwa: $L_1 f \cdots L_{m-p} f$ durch keine lineare Relation von der Form:

$$\alpha_1(l_1 \cdots l_m) L_1 f + \cdots + \alpha_{m-p}(l_1 \cdots l_m) L_{m-p} f = 0$$

verknüpft sind, während dagegen: $L_{m-p+1}f \cdots L_r f$ sich linear durch $L_1 f \cdots L_{m-p} f$ ausdrücken lassen:

$$L_{m-p+j} f \equiv \sum_1^{m-p} {}^{\mu}\, \alpha_{j\mu}(l_1 \cdots l_m) L_\mu f \qquad (j = 1 \cdots r - m + p).$$

Diese Voraussetzung können wir immer machen, selbst wenn die infinitesimalen Transformationen: $L_1 f \cdots L_r f$ nicht von einander unabhängig sind, was ja sehr gut eintreten kann.

Es ist nun klar, dass die $r - m + p$ infinitesimalen Transformationen:

$$(9) \qquad L_{m-p+j} f - \sum_1^{m-p} {}^{\mu}\, \alpha_{j\mu}(l_1^0 \cdots l_m^0) L_\mu f \qquad (j = 1 \cdots r - m + p)$$

das Werthsystem: $l_1^0 \cdots l_m^0$ invariant lassen; da ferner $l_1^0 \cdots l_m^0$ ein Werthsystem von allgemeiner Lage ist, so erkennt man sofort, dass jede infinitesimale Transformation: $\Sigma e_k L_k f$, bei welcher das Werthsystem invariant bleibt, aus den $r - m + p$ Transformationen (9) linear abgeleitet werden kann. Folglich lässt sich die allgemeinste infinitesimale Transformation: $\Sigma e_k X_k f$, welche die allgemein gelegene Mannigfaltigkeit (7) invariant lässt, aus den $r - m + p$ Transformationen:

$$(10) \qquad X_{m-p+j} f - \sum_1^{m-p} {}^{\mu}\, \alpha_{j\mu}(l_1^0 \cdots l_m^0) X_\mu f \qquad (j = 1 \cdots r - m + p)$$

linear ableiten.

Selbstverständlich sind die infinitesimalen Transformationen (10) von einander unabhängig und erzeugen eine $(r - m + p)$-gliedrige Gruppe, nämlich die allgemeinste in der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ enthaltene Untergruppe, bei welcher die Mannigfaltigkeit (7) invariant bleibt.

Ist insbesondere die Gruppe: $L_1 f \cdots L_r f$ transitiv, so hat die ganze Zahl p den Werth Null; in diesem Falle gestattet daher jede allgemein gelegene Mannigfaltigkeit der Schaar (1) gerade $r - m$ unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$.

Somit haben wir den

Satz 7. *Gestattet die Schaar der ∞^m Mannigfaltigkeiten:*

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n,\; l_1 \cdots l_m) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q)$$

die r-gliedrige Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$, sind ferner $L_1 f \cdots L_r f$ die den $X_j f$ entsprechenden infinitesimalen Transformationen in den l allein und sind endlich $L_1 f \cdots L_r f$ durch gerade $r - m + p$ unabhängige Relationen von der Form: $\Sigma \beta_j(l) L_j f = 0$ verknüpft, so enthält die Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ gerade $r - m + p$ unabhängige infinitesimale Transformationen, welche *eine Mannigfaltigkeit $l_1^0 \cdots l_m^0$ von allgemeiner Lage invariant lassen. Dieselben erzeugen eine $(r - m + p)$-gliedrige Gruppe. Ist die Gruppe: $L_1 f \cdots L_r f$ in den m Veränderlichen $l_1 \cdots l_m$ transitiv, so gestattet jede allgemein gelegene Mannigfaltigkeit der Schaar $\Omega_k(x, l) = 0$ gerade $r - m$ unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$, und diese infinitesimalen Transformationen erzeugen eine $(r - m)$-gliedrige Untergruppe.*

Wir fügen hierzu noch die selbstverständliche Bemerkung, dass die Gruppe: $L_1 f \cdots L_r f$ in $l_1 \cdots l_m$ dann und nur dann transitiv ist, wenn jede allgemein gelegene Mannigfaltigkeit der Schaar $\Omega_k(x, l) = 0$ in jede andere durch wenigstens eine Transformation der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ übergeführt werden kann.

§ 113.

Es sei in dem n-fach ausgedehnten Raume $x_1 \cdots x_n$ eine r-gliedrige Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ vorgelegt und ausserdem irgend eine Mannigfaltigkeit, die wir mit M bezeichnen wollen. Wir setzen voraus, dass in den Gleichungen von M keinerlei willkürliche Parameter vorkommen.

Werden alle ∞^r Transformationen der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ auf die Mannigfaltigkeit M ausgeführt, so geht dieselbe in eine Reihe von neuen Mannigfaltigkeiten über. Wir werden beweisen, dass der Inbegriff aller dieser Mannigfaltigkeiten bei der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ invariant bleibt, dass er eine bei der Gruppe invariante Schaar bildet.

Es sei M' irgend eine Mannigfaltigkeit, welche dem eben besprochenen Inbegriff angehört, und T_1 sei eine solche Transformation der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$, welche M in M' überführt, es bestehe also die symbolische Gleichung:

$$(M) T_1 = (M').$$

Ist nun T eine beliebige Transformation der Gruppe, so haben wir:

$$(M') T = (M') T_1 T = (M) T_2,$$

wo die Transformation T_2 wiederum der Gruppe angehört; folglich geht die Mannigfaltigkeit M' bei der Transformation T in eine andere Mannigfaltigkeit des bewussten Inbegriffs über. Da dies für jede Mannigfaltigkeit M' des Inbegriffs gilt, so sehen wir, dass die dem Inbegriff angehörigen Mannigfaltigkeiten von T und also überhaupt von allen Transformationen der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ unter einander vertauscht werden, dass der oben definirte Inbegriff von Mannigfaltigkeiten wirklich eine bei der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ invariante Schaar bildet.

Es ist leicht zu sehen, dass jede Mannigfaltigkeit dieser invarianten Schaar in jede andere Mannigfaltigkeit der Schaar durch wenigstens eine Transformation der Gruppe übergeführt werden kann. Ist nämlich:

$$(M') = (M) T_1, \ (M'') = (M)\ T_2,$$

so wird $(M) = (M') T_1^{-1}$ also:

$$(M'') = (M') T_1^{-1} T_2,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Daraus geht zugleich hervor, dass man die besprochene Schaar von Mannigfaltigkeiten auch erhält, wenn man auf irgend eine ihrer Mannigfaltigkeiten alle ∞^r Transformationen der Gruppe ausführt.

Wir haben somit den

Satz 8. *Führt man auf eine vorgelegte Mannigfaltigkeit des R_n alle ∞^r Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ dieses Raumes aus, so bildet der Inbegriff aller Lagen, welche die Mannigfaltigkeit dabei annimmt, eine bei der Gruppe invariante Schaar von Mannigfaltigkeiten. Jede Mannigfaltigkeit dieser Schaar kann in jede andere durch wenigstens eine Transformation der Gruppe übergeführt werden. Aus jeder einzelnen ihrer Mannigfaltigkeiten kann die Schaar auf dieselbe Weise hergeleitet werden wie aus der ursprünglich vorgelegten Mannigfaltigkeit.*

Die Mannigfaltigkeit M wird eine gewisse Anzahl, nehmen wir an gerade $r - m$ unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ gestatten*). Dieselben erzeugen dann eine $(r - m)$-gliedrige Untergruppe (vgl. Theorem 31, S. 207).

Es sei nun S allgemeines Symbol einer Transformation dieser Untergruppe, also: $(M) S = (M)$; es sei weiter T_1 irgend eine Transformation der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ und es gehe M bei T_1 in die neue Lage M' über: $(M') = (M) T_1$. Dann ist es leicht, *alle* Transformationen T der Gruppe $X_k f$ anzugeben, welche M in M' überführen.

Man hat nämlich:

$$(M) \mathsf{T} = (M') = (M) T_1,$$

folglich wird:

$$(M) \mathsf{T}\, T_1^{-1} = (M),$$

also ist $\mathsf{T}\, T_1^{-1}$ eine Transformation S und es ist $S T_1$ allgemeines Symbol aller Transformationen der Gruppe $X_k f$, welche M in M'

---

*) Der Inbegriff aller *endlichen* Transformationen der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$, welche eine Mannigfaltigkeit M invariant lassen, bildet immer (Theorem 32, S. 208) eine Untergruppe, welche aber offenbar keine endliche continuirliche Gruppe zu sein braucht. Wenn wir nichtsdestoweniger in den folgenden Entwickelungen des Textes implicite die Annahme machen, dass diese Untergruppe von infinitesimalen Transformationen erzeugt wird, so ist dies nicht als eine wesentliche Beschränkung aufzufassen, denn wir können ja den auf S. 16 besprochenen Bereich $((a))$ immer passend einengen.

überführen. Transformationen ST_1 giebt es aber gerade so viele, als es verschiedene Transformationen S giebt, das heisst ∞^{r-m}.

Aehnlich findet man alle Transformationen $\mathfrak{S}$ unserer Gruppe, welche M' invariant lassen. Aus $(M')\mathfrak{S} = (M')$ und $(M)T_1 = (M')$ erhält man:

$$(M)T_1\mathfrak{S}T_1^{-1} = (M),$$

also:

$$T_1\mathfrak{S}T_1^{-1} = S, \quad \mathfrak{S} = T_1^{-1}ST_1.$$

Solcher Transformationen giebt es ebenfalls ∞^{r-m} verschiedene und ihr Inbegriff bildet eine $(r-m)$-gliedrige Untergruppe, welche innerhalb der Gruppe X_kf mit der Gruppe der S gleichberechtigt ist.

Wir fassen diese Ergebnisse zusammen wie folgt:

Satz 9. *Gestattet eine Mannigfaltigkeit M des R_n gerade $r-m$ unabhängige infinitesimale Transformationen der r-gliedrigen Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ oder kurz G_r und ist S allgemeines Symbol der ∞^{r-m} endlichen Transformationen derjenigen $(r-m)$-gliedrigen Untergruppe, welche von diesen $r-m$ infinitesimalen Transformationen erzeugt wird, ist endlich T irgend eine Transformation der G_r: $X_1f \cdots X_rf$ und nimmt M bei Ausführung von T die neue Lage M' an, so enthält die G_r gerade ∞^{r-m} verschiedene Transformationen, welche ebenfalls M in M' überführen, das allgemeine Symbol derselben ist: ST; ausserdem enthält die G_r gerade ∞^{r-m} Transformationen, welche M' invariant lassen, diese letzteren haben $T^{-1}ST$ zum allgemeinen Symbol und bilden eine $(r-m)$-gliedrige Untergruppe, welche innerhalb der G_r mit der Gruppe der S gleichberechtigt ist.*

Denken wir uns auf die Gleichungen der Mannigfaltigkeit M die ∞^r Transformationen: $x_i' = f_i(x, a)$ der Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ ausgeführt, so erhalten wir den analytischen Ausdruck der besprochenen invarianten Schaar von Mannigfaltigkeiten. Formell enthält dieser Ausdruck die r Parameter $a_1 \cdots a_r$, doch brauchen dieselben nicht alle wesentlich zu sein. Die Zahl m' der wesentlichen unter den Parametern $a_1 \cdots a_r$ wollen wir jetzt bestimmen.

Unsere invariante Schaar besteht aus $\infty^{m'}$ verschiedenen Mannigfaltigkeiten und jede dieser Mannigfaltigkeiten kann in jede andere durch eine Transformation der Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ übergeführt werden. Nach Satz 7, S. 478 gestattet daher jede einzelne der $\infty^{m'}$ Mannigfaltigkeiten gerade $r-m'$ unabhängige infinitesimale Transformationen der G_r; wir wissen aber aus dem Vorhergehenden, dass unter den gemachten Voraussetzungen jede dieser Mannigfaltigkeiten gerade ∞^{r-m} endliche Transformationen der G_r zulässt, folglich ist $m' = m$ und es sind von den r Parametern: $a_1 \cdots a_r$ gerade m wesentlich.

Wir haben somit den

Satz 10. *Gestattet eine Mannigfaltigkeit M des n-fach ausgedehnten Raumes R_n gerade $r-m$ unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ dieses Raumes, so nimmt dieselbe bei den ∞^r Transformationen dieser Gruppe gerade ∞^m verschiedene Lagen an.*

§ 114.

In den Gleichungen unserer invarianten Schaar von Mannigfaltigkeiten brauchen wie gesagt die Parameter $a_1 \cdots a_r$ nicht sämmtlich wesentlich zu sein, wir können uns aber stets $m \leqq r$ solche Functionen $l_1 \cdots l_m$ der a als neue Parameter eingeführt denken, dass die Gleichungen unsrer Schaar die Form:

$$\Omega_k(x_1 \cdots x_n,\ l_1 \cdots l_m) = 0 \quad (k=1\cdots n-q)$$

erhalten, wo nun $l_1 \cdots l_m$ wesentliche Parameter sind.

Die Schaar $\Omega_k = 0$ bleibt bei der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ invariant, während ihre einzelnen Mannigfaltigkeiten unter einander vertauscht werden. Wie dieselben vertauscht werden, das giebt jene Gruppe: $L_1 f \cdots L_r f$ in den l allein an, welche, wie früher gezeigt wurde, durch die Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ vollständig bestimmt ist.

Die Gruppe $L_k f$ in den Veränderlichen $l_1 \cdots l_m$ ist mit der Gruppe $X_k f$ isomorph, hat also höchstens r wesentliche Parameter; andererseits ist sie unter den gemachten Voraussetzungen sicher transitiv (vgl. S. 479 f.), sie hat also mindestens m wesentliche Parameter. Es bleibt uns nur noch übrig, ein einfaches Kriterium dafür anzugeben, wieviele wesentliche Parameter die Gruppe $L_k f$ eigentlich hat.

Die Gruppe: $L_1 f \cdots L_r f$ sei ϱ-gliedrig, wo $m \leqq \varrho \leqq r$. Da sie mit der G_r: $X_1 f \cdots X_r f$ meroedrisch isomorph ist, so muss es in dieser letzteren eine $(r-\varrho)$-gliedrige invariante Untergruppe geben, welche der identischen Transformation der Gruppe $L_k f$ entspricht (vgl. Theorem 54, S. 301). Diese $(r-\varrho)$-gliedrige invariante Untergruppe der G_r lässt demnach jede einzelne der ∞^m Mannigfaltigkeiten: $\Omega_k(x,l) = 0$ stehen, sie ist also in derjenigen $(r-m)$-gliedrigen Untergruppe g_{r-m} der G_r enthalten, welche die früher besprochene Mannigfaltigkeit M invariant lässt und zugleich ist sie in allen $(r-m)$-gliedrigen Untergruppen der G_r enthalten, welche innerhalb der G_r mit der eben erwähnten g_{r-m} gleichberechtigt sind.

Enthält umgekehrt jene g_{r-m} eine $(r-\varrho)$-gliedrige Untergruppe, welche in der G_r invariant ist, so ist dieselbe zugleich in allen mit der g_{r-m} gleichberechtigten Untergruppen der G_r enthalten, sie lässt daher jede einzelne Mannigfaltigkeit: $\Omega_k(x, l) = 0$ stehen und in der Gruppe: $L_1 f \cdots L_r f$ entspricht ihr die identische Transformation.

Um zu entscheiden, wieviele Parameter die Gruppe: $L_1 f \cdots L_r f$ enthält, haben wir somit nur die grösste in der g_{r-m} enthaltene Gruppe aufzusuchen, welche in der G_r invariant ist. Wenn die betreffende Gruppe gerade $(r-\varrho)$-gliedrig ist $(\varrho \geqq m)$, so ist die Gruppe: $L_1 f \cdots L_r f$ gerade ϱ-gliedrig.

Wir wollen dieses Ergebniss nicht in einem besonderen Satze aussprechen, sondern wollen jetzt die sämmtlichen Resultate der beiden letzten Paragraphen in einem Theoreme zusammenfassen:

Theorem 85. *Hat man eine r-gliedrige Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ oder kurz G_r des Raumes $x_1 \cdots x_n$ und irgend eine Mannigfaltigkeit M, welche gerade $r-m$ unabhängige infinitesimale Transformationen der G_r und also auch die von denselben erzeugte $(r-m)$-gliedrige Untergruppe g_{r-m} der G_r zulässt, so nimmt M bei den ∞^r Transformationen der G_r im Ganzen ∞^m verschiedene Lagen an, deren Inbegriff sich gegenüber der Gruppe G_r invariant verhält. Kennzeichnet man die einzelnen Lagen von M durch m Parameter: $l_1 \cdots l_m$, so erhält man in $l_1 \cdots l_m$ eine gewisse Gruppe:*

$$l_\mu' = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m;\ a_1 \cdots a_r) \quad {\scriptstyle (\mu = 1 \cdots m)},$$

*die angiebt, in welcher Weise die einzelnen Lagen von M bei der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ unter einander vertauscht werden. Diese Gruppe in den l ist transitiv und isomorph mit der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$. Ist die grösste in der g_{r-m} enthaltene invariante Untergruppe der G_r gerade $(r-\varrho)$-gliedrig, so hat die Gruppe: $l_\mu' = \chi_\mu(l, a)$ genau ϱ wesentliche Parameter. Ist die G_r insbesondere einfach, so ist die Gruppe in den l stets r-gliedrig und mit G_r holoedrisch isomorph, mit alleiniger Ausnahme des Falles $m = r$, in welchem die Gruppe: $l_\mu' = \chi_\mu(l, a)$ blos aus der identischen Transformation besteht.**)

Die in dem Theorem erwähnte Zahl $r-\varrho$ kann jeden der Werthe: $0, 1 \cdots r-m$ haben; ist $r-\varrho = 0$, so besteht die $(r-\varrho)$-gliedrige Untergruppe der g_{r-m} aus der identischen Transformation, die Gruppe: $l_\mu' = \chi_\mu(l, a)$ ist daher mit der G_r holoedrisch isomorph; ist $r-\varrho = r-m$, so ist die g_{r-m} selbst in der G_r invariant und die Gruppe: $l_\mu' = \chi_\mu(l, a)$ ist nur m-gliedrig.

§ 115.

Im vorletzten Paragraphen gaben wir eine Methode, um solche Schaaren von Mannigfaltigkeiten zu finden, welche bei einer vor-

*) Lie, Archiv for Mathematik og Naturv., Bd. 10, Christiania 1885.

gelegten r-gliedrigen Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ invariant blieben. Die invarianten Schaaren, welche wir auf diese Weise erhielten, waren dadurch ausgezeichnet, dass jede Mannigfaltigkeit einer derartigen Schaar in jede andere Mannigfaltigkeit der Schaar durch mindestens eine Transformation der Gruppe: $X_1f \cdot \cdot X_rf$ übergeführt werden konnte.

Jetzt wollen wir die besprochene Methode so verallgemeinern, dass sie *alle* bei der Gruppe $X_1f \cdots X_rf$ invarianten Schaaren von Mannigfaltigkeiten liefert.

Dazu führt uns die selbstverständliche Bemerkung, dass die Betrachtungen der SS. 479—482 auch dann noch gültig bleiben, wenn die Gleichungen der Mannigfaltigkeit M willkürliche Parameter enthalten, das heisst: wenn wir an Stelle einer einzelnen Mannigfaltigkeit M gleich eine ganze Schaar von Mannigfaltigkeiten benutzen. Demnach können wir auch folgendermassen verfahren, um invariante Schaaren von Mannigfaltigkeiten zu finden:

Wir nehmen irgend eine Schaar:

(11) $$V_k(x_1 \cdots x_n, u_1 \cdots u_h) = 0 \qquad {\scriptstyle (k=1 \cdots n-q)}$$

von ∞^h Mannigfaltigkeiten und führen auf dieselben alle ∞^r Transformationen der Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ aus; der Inbegriff aller Mannigfaltigkeiten, welche wir so erhalten, bildet immer eine bei der Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ invariante Schaar.

Es ist klar, dass wir alle bei der Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ invarianten Schaaren von Mannigfaltigkeiten erhalten, wenn wir die Schaar (11) in allen möglichen Weisen wählen. Denn ist eine beliebige bei der Gruppe invariante Schaar vorgelegt, etwa die Schaar:

(1) $$\Omega_k(x_1 \cdots x_n, l_1 \cdots l_m) = 0 \qquad {\scriptstyle (k=1 \cdots n-q)},$$

so kann dieselbe jedenfalls dadurch erhalten werden, dass wir als Schaar (11) eben die Schaar (1) selbst wählen. Uebrigens kann man leicht unendlich viele andere Schaaren (11) angeben, aus denen gerade die Schaar (1) erhalten wird, doch wollen wir uns damit nicht aufhalten.

Noch bleibt eine Frage zu beantworten.

Ist die Schaar (11) vorgelegt und werden auf ihre Mannigfaltigkeiten alle Transformationen der Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ ausgeführt, so haben die Gleichungen der entstehenden invarianten Schaar offenbar die Form:

(12) $$W_k(x_1 \cdots x_n, u_1 \cdots u_h, a_1 \cdots a_r) = 0 \qquad {\scriptstyle (k=1 \cdots n)},$$

enthalten demnach formell $h + r$ willkürliche Parameter, nämlich: $u_1 \cdots u_h$, $a_1 \cdots a^r$. Wieviele unter diesen Parametern sind wesentlich?

Jede allgemein gelegene Mannigfaltigkeit der Schaar (11) nimmt bei der Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ eine gewisse Anzahl, etwa ∞^p verschiedene Lagen an; von diesen ∞^p Lagen werden wieder eine gewisse Anzahl, etwa ∞^o verschiedene der Schaar (11) angehören. Auf diese Weise wird die ganze Schaar (11) in ∞^{h-o} verschiedene Unterschaaren von je ∞^o Mannigfaltigkeiten zerlegt, dergestalt, dass jede Mannigfaltigkeit der Schaar (11) in jede Mannigfaltigkeit, welche ein und derselben Unterschaar angehört, stets durch mindestens eine Transformation der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ übergeführt werden kann und dass jede Mannigfaltigkeit der Schaar (11), sobald sie bei einer Transformation der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ innerhalb der Schaar (11) bleibt, zugleich in der Unterschaar bleibt, welcher sie angehört.

Denken wir uns nun nach einander auf irgend zwei Mannigfaltigkeiten der Schaar (11), die *derselben* Unterschaar angehören, alle Transformationen der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ ausgeführt, so erhalten wir offenbar beide Male dieselbe Schaar von ∞^p Mannigfaltigkeiten; denken wir uns andererseits auf zwei Mannigfaltigkeiten der Schaar (11), welche *verschiedenen* Unterschaaren angehören, alle Transformationen der Gruppe ausgeführt, so erhalten wir zwei verschiedene Schaaren von je ∞^p Mannigfaltigkeiten, die gar keine Mannigfaltigkeit gemein haben.

Wenn wir daher aus jeder der ∞^{h-o} Unterschaaren der Schaar (11) eine Mannigfaltigkeit auswählen und auf die so erhaltenen ∞^{h-o} Mannigfaltigkeiten alle Transformationen der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ ausführen, so bekommen wir ∞^{h-o} verschiedene Schaaren von je ∞^p Mannigfaltigkeiten, im Ganzen also ∞^{h-o+p} verschiedene Mannigfaltigkeiten. Zugleich ist klar, dass wir auf diese Weise genau dieselbe Schaar von Mannigfaltigkeiten erhalten, als wenn wir auf die Mannigfaltigkeiten (11) selbst alle Transformationen unserer Gruppe ausführen.

Damit ist bewiesen, dass die Schaar (12) aus ∞^{h-o+p} verschiedenen Mannigfaltigkeiten besteht, dass also unter den $h + r$ Parametern der Gleichungen (12) gerade $h - o + p$ wesentlich sind.

Wir wollen noch andeuten, wie man zu verfahren hat, um die im Vorstehenden erwähnten Zahlen p und o zu bestimmen.

Die Zahl $r - p$ ist offenbar die Anzahl der unabhängigen infinitesimalen Transformationen: $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$, welche eine allgemein gelegene Mannigfaltigkeit der Schaar (11) invariant lassen. Nun hat die allgemeinste infinitesimale Transformation: $\Sigma e_j X_j f$, welche die Mannigfaltigkeit:

$$V_k(x_1 \cdots x_n,\ u_1 \cdots u_h) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q) \tag{13}$$

invariant lässt, nothwendig die Form:

$$\sum_1^r{}_j\, e_j(u_1 \cdots u_h) \cdot X_j f, \tag{14}$$

wo die $e_j(u_1 \cdots u_h)$ Functionen der u sind. Wir brauchen daher blos die

Functionen $e_j(u)$ in allgemeinster Weise so zu bestimmen, dass das Gleichungensystem (13) in den Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$ die infinitesimale Transformation (14) gestattet.

Denken wir uns die Gleichungen (13) nach $n - q$ von den x aufgelöst:

$$x_{q+k} = \omega_{q+k}(x_1 \cdots x_q,\ u_1 \cdots u_h) \quad (k = 1 \cdots n - q)$$

und deuten wir die Substitution: $x_{q+1} = \omega_{q+1}, \cdots x_n = \omega_n$ durch das Zeichen [ ] an, so erhalten wir augenscheinlich für die Functionen $e_j(u)$ die Gleichungen:

$$(15) \qquad \sum_1^r {}_j\, e_j(u_1 \cdots u_r)\left\{[\xi_{j,\,q+k}] - \sum_1^q {}_\pi\, [\xi_{j\pi}]\, \frac{\partial \omega_{q+k}}{\partial x_\pi}\right\} = 0$$
$$(k = 1 \cdots n - q),$$

die unabhängig von den Werthen von $x_1 \cdots x_q$ befriedigt werden müssen.

Haben wir aus diesen Gleichungen die $e_j(u)$ in allgemeinster Weise bestimmt, so kennen wir die allgemeinste infinitesimale Transformation $\Sigma e_j X_j f$, welche die Mannigfaltigkeit (13) invariant lässt und daraus können wir sofort die Anzahl der unabhängigen infinitesimalen Transformationen $\Sigma e_j X_j f$ von dieser Beschaffenheit ableiten.

Zur Bestimmung der Zahl o gelangen wir folgendermassen:

Wir suchen zunächst die allgemeinste infinitesimale Transformation: $\Sigma \varepsilon_j(u_1 \cdots u_h) X_j f$, welche die Mannigfaltigkeit (13) in eine unendlich benachbarte Mannigfaltigkeit der Schaar (11) überführt, anders ausgesprochen: wir suchen die allgemeinste infinitesimale Transformation:

$$\sum_1^r {}_j\, \varepsilon_j(u_1 \cdots u_h) X_j f + \sum_1^h {}_\sigma\, \Phi_\sigma(u_1 \cdots u_h) \frac{\partial f}{\partial u_\sigma},$$

welche das Gleichungensystem (13) in den $n + h$ Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $u_1 \cdots u_h$ invariant lässt.

Behalten wir die oben gewählten Bezeichnungen bei, so werden die Functionen: $\varepsilon_j(u)$ und $\Phi_\sigma(u)$ offenbar durch die Gleichungen:

$$(15') \quad \sum_1^r {}_j\, \varepsilon_j(u)\left\{[\xi_{j,\,q+k}] - \sum_1^q {}_\pi\, [\xi_{j\pi}]\, \frac{\partial \omega_{q+k}}{\partial x_\pi}\right\} = \sum_1^h {}_\sigma\, \Phi_\sigma(u)\, \frac{\partial \omega_{q+k}}{\partial u_\sigma}$$
$$(k = 1 \cdots n - q)$$

definirt, denen sie unabhängig von den Werthen der Veränderlichen $x_1 \cdots x_q$ genügen müssen.

Wir denken uns aus diesen Gleichungen die $\varepsilon_j(u)$ und die $\Phi_\sigma(u)$ in allgemeinster Weise bestimmt und bilden den Ausdruck:

$$\sum_1^h {}_\sigma\, \Phi_\sigma(u_1 \cdots u_h) \frac{\partial f}{\partial u_\sigma}.$$

Derselbe lässt sich offenbar aus einer ganz bestimmten Zahl, etwa aus $h' \leq h$ Ausdrücken:

$$\sum_1^h {}_\sigma\, \Phi_{\tau\sigma}(u_1 \cdots u_h) \frac{\partial f}{\partial u_\sigma} \quad (\tau = 1 \cdots h')$$

durch Multiplication mit Functionen der u und durch Addition ableiten. Die h' Gleichungen:

$$\sum_1^h {}_\sigma \Phi_{\tau\sigma}(u_1 \cdots u_h) \frac{\partial f}{\partial u_\sigma} = 0 \quad (\tau = 1, \cdots h')$$

bilden nach der Natur der Sache ein h'-gliedriges vollständiges System mit $h - h'$ unabhängigen Lösungen:

$$w_1(u_1 \cdots u_h) \cdots w_{h-h'}(u_1 \cdots u_h)$$

und es ist klar, dass die Gleichungen:

$$w_1 = \text{const.}, \cdots w_{h-h'} = \text{const.}$$

jene ∞^{h-o} Unterschaaren bestimmen, in welche, wie wir oben sahen, die Schaar (11) sich zerlegen lässt. Folglich ist: $h - o = h - h'$ und $o = h'$.

Nicht unerwähnt darf bleiben, dass die Entwickelungen des gegenwärtigen Kapitels sich noch verallgemeinern lassen.

Man kann z. B. anstatt von einer einzelnen Mannigfaltigkeit auch von einer discreten Anzahl von Mannigfaltigkeiten ausgehen oder noch allgemeiner: anstatt von einer einzelnen Schaar von Mannigfaltigkeiten von mehreren solchen Schaaren. Eine Anzahl von Mannigfaltigkeiten bezeichnen wir kurz als eine *Figur*.

§ 116.

Das Theorem 85, S. 483 enthält eine Methode zur Bestimmung transitiver Gruppen, die mit einer vorgelegten r-gliedrigen Gruppe isomorph sind; eine Methode zur Bestimmung *aller* derartigen Gruppen haben wir aber schon in Kap. 22, S. 434 ff. auseinandergesetzt. Wir werden jetzt zeigen, dass unsere neue Methode schliesslich im Grunde auf die alte hinauskommt, und werden auf diese Weise dazu gelangen, ein früher gefundenes wichtiges Resultat in einer neuen, viel allgemeineren Form auszusprechen.

Es sei:

(16) $$V_k(x_1 \cdots x_n) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q)$$

irgend eine Mannigfaltigkeit und:

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n)$$

irgend eine r-gliedrige von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen erzeugte Gruppe. Durch Auflösung der Gleichungen: $x_i' = f_i(x, a)$ nach den x möge sich ergeben:

$$x_i = F_i(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r) \quad (i = 1 \cdots n).$$

Endlich wollen wir noch voraussetzen, dass die Mannigfaltigkeit (16) gerade $r - m$ unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ gestattet.

Führen wir auf die Mannigfaltigkeit (16) die allgemeine Transformation: $x_i' = f_i(x, a)$ unserer Gruppe aus, so erhalten wir nach Theorem 85, S. 483 eine bei der Gruppe invariante Schaar von ∞^m Mannigfaltigkeiten. Die Gleichungen dieser Schaar werden:

$$V_k(F_1(x', a) \cdots F_n(x', a)) = W_k(x_1' \cdots x_n', a_1 \cdots a_r) = 0 \tag{17}$$
$$(k = 1 \cdots n - q),$$

enthalten also formell r willkürliche Parameter. Aber unter diesen r Parametern sind nur m wesentlich, es ist daher möglich, m solche unabhängige Functionen: $\omega_1(a) \cdots \omega_m(a)$ der a anzugeben, dass die Gleichungen (17) die Form:

$$\Omega_k(x_1' \cdots x_n', \omega_1(a) \cdots \omega_m(a)) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q) \tag{17'}$$

annehmen. Hier können wir endlich: $l_1 = \omega_1(a), \cdots l_m = \omega_m(a)$ an Stelle der a als neue Parameter einführen; in dem so entstehenden Gleichungensysteme:

$$\Omega_k(x_1' \cdots x_n', l_1 \cdots l_m) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q) \tag{18}$$

sind dann die Parameter $l_1 \cdots l_m$ wesentlich.

Eine neue Darstellung unserer invarianten Schaar finden wir, wenn wir auf das Gleichungensystem (18) irgend eine Transformation: $x_i'' = f_i(x', b)$ unserer Gruppe ausführen. Nach Theorem 85, S. 483 erhält (18) dabei die Form:

$$\Omega_k(x_1'' \cdots x_n'', l_1' \cdots l_m') = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q), \tag{18'}$$

wo die l' ganz bestimmte Functionen der l und der b sind:

$$l_\mu' = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m, b_1 \cdots b_r) \quad (\mu = 1 \cdots m). \tag{19}$$

Dieselbe Darstellung unserer Schaar müssen wir erhalten, wenn wir auf die Mannigfaltigkeit (16) gleich die Transformation:

$$x_i'' = f_i(f_1(x, a) \cdots f_n(x, a), b_1 \cdots b_r) = f_i(x_1 \cdots x_n, a_1' \cdots a_r')$$

ausführen, in welcher die a' ganz bestimmte Functionen der a und der b sind:

$$a_k' = \varphi_k(a_1 \cdots a_r, b_1 \cdots b_r) \quad (k = 1 \cdots r). \tag{20}$$

Thun wir das, so bekommen wir die Gleichungen unsrer Schaar zunächst in der Form:

$$V_k(F_1(x'', a') \cdots F_n(x'', a')) = W_k(x_1'' \cdots x_n'', a_1' \cdots a_r') = 0$$
$$(k = 1 \cdots n - q),$$

welche wir offenbar auch schreiben können:

$$\Omega_k(x_1'' \cdots x_n'', \omega_1(a') \cdots \omega_m(a')) = 0 \quad (k = 1 \cdots n - q).$$

Da aber diese Gleichungen mit den Gleichungen (18') übereinstimmen müssen, so ergiebt sich, dass die Parameter l' mit den a' durch die Relationen:

$$l_\mu' = \omega_\mu(a_1' \cdots a_r') \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

verknüpft sind.

Wir haben somit, wegen der Gleichungen (19):

$$\omega_\mu(a') = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m,\ b_1 \cdots b_r) \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

oder:

(21) $$\omega_\mu(a') = \chi_\mu(\omega_1(a) \cdots \omega_m(a),\ b_1 \cdots b_r) \quad (\mu = 1 \cdots m).$$

Machen wir hierin die Substitution: $a_1' = \varphi_1(a, b), \cdots a_r' = \varphi_r(a, b)$, so müssen wir lauter Identitäten erhalten, denn die Parameter $a_1 \cdots a_r$, $b_1 \cdots b_r$ sind vollkommen willkürlich und daher nicht durch Relationen verknüpft.

Erinnern wir uns jetzt, dass die Gleichungen (20) eine einfach transitive, mit der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ gleichzusammengesetzte Gruppe in den Veränderlichen $a_1 \cdots a_r$ darstellen, nämlich die zugehörige Parametergruppe (Kap. 21, S. 404), und dass die Gleichungen (19) eine transitive, mit der Gruppe: $x_i' = f_i(x, a)$ isomorphe Gruppe darstellen. Dann erkennen wir sofort Folgendes:

Die Gleichungen:

(22) $$\omega_1(a_1 \cdots a_r) = \text{const.}, \cdots \omega_m(a_1 \cdots a_r) = \text{const.}$$

stellen eine bei der Gruppe (20) invariante Zerlegung des r-fach ausgedehnten Raumes $a_1 \cdots a_r$ dar und zwar eine Zerlegung in ∞^m $(r - m)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten. Die Gruppe:

(19) $$l_\mu' = \chi_\mu(l_1 \cdots l_m,\ b_1 \cdots b_r) \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

aber giebt an, in welcher Weise die ∞^m Mannigfaltigkeiten (22) von den Transformationen der einfach transitiven Gruppe (20) unter einander vertauscht werden.

Wir sehen also, dass die Gruppe (19) aus der einfach transitiven Gruppe: $a_k' = \varphi_k(a, b)$ nach den Regeln des vorigen Kapitels (S. 435 ff.) hergeleitet werden kann.

Diesen Umstand können wir benutzen, um zu entscheiden, unter welchen Bedingungen wir zwei mit einander ähnliche Gruppen (19) erhalten, wenn wir von zwei verschiedenen Mannigfaltigkeiten (16) ausgehen. Durch einfache Ueberlegungen erkennen wir, dass der folgende Satz gilt, von welchem das Theorem 80 in Kap. 22, S. 445 im Grunde nur ein specieller Fall ist:

Theorem 86. *Ist in dem Raume $x_1 \cdots x_n$ eine r-gliedrige Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ vorgelegt und ausserdem zwei Mannigfaltigkeiten M und M', und führt man auf jede dieser beiden Mannigfaltigkeiten alle ∞^r Transformationen der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ aus, so werden die einzelnen Mannigfaltigkeiten der beiden invarianten Schaaren, welche man auf diese Weise erhält, durch* *zwei transitive, mit der Gruppe:* $X_1f \cdots X_rf$ *isomorphe Gruppen transformirt, welche dann aber auch nur dann mit einander ähnlich sind, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

Erstens müssen die beiden Mannigfaltigkeiten M *und* M' *gleichviele unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:* $e_1X_1f + \cdots + e_rX_rf$ *gestatten und*

zweitens muss es möglich sein, die Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ *derart holoedrisch isomorph auf sich selbst zu beziehen, dass jeder infinitesimalen Transformation, welche die eine Mannigfaltigkeit festhält, eine infinitesimale Transformation entspricht, welche die andere invariant lässt.*

Es versteht sich von selbst, dass dieses Theorem auch noch gültig bleibt, wenn man die beiden Mannigfaltigkeiten durch zwei Figuren ersetzt.

§ 117.

Besonders erwähnenswerth ist der Fall, dass man eine Mannigfaltigkeit oder Figur hat, welche gar keine infinitesimale Transformation der G_r: $X_1f \cdots X_rf$ gestattet. Die zur G_r isomorphe Gruppe (19) hat dann die Form:

$$l_k' = \chi_k(l_1 \cdots l_r, a_1 \cdots a_r) \qquad (k=1\cdots r),$$

sie ist einfach transitiv und daher holoedrisch isomorph mit der G_r.*)

Wir haben also hier eine allgemeine Methode, um einfach transitive Gruppen aufzustellen, die mit einer vorgelegten r-gliedrigen gleichzusammengesetzt sind.

Die im vorhergehenden Kapitel, Satz 1, Seite 431 angewendete Methode ist nur ein besonderer Fall der jetzigen allgemeinen. Damals nämlich — so können wir es jetzt ausdrücken — benutzten wir als Figur den Inbegriff von r verschiedenen Punkten des R_n.

Wenn über die Lage dieser Punkte keine besonderen Voraussetzungen gemacht werden, so kann die aus ihnen bestehende Figur keine von den infinitesimalen Transformationen der Gruppe X_kf zulassen. Denn die Gruppe X_kf lässt sicher keinen Punkt von allgemeiner Lage invariant, es kann daher in ihr höchstens $r-1$ unabhängige infinitesimale Transformationen geben, welche einen solchen Punkt festhalten; aus diesen etwaigen $r-1$ können sich wieder höchstens $r-2$ unabhängige infinitesimale Transformationen linear ableiten lassen, für welche noch ein zweiter Punkt von allgemeiner Lage

*) Lie, Gesellsch. d. W. zu Christiania, 1884.

stehen bleibt u. s. f.; man erkennt so schliesslich, dass es in der Gruppe keine infinitesimale Transformation giebt, bei welcher gleichzeitig r Punkte von allgemeiner Lage invariant bleiben.

Nehmen wir daher eine Figur, die aus r solchen Punkten besteht, und führen wir auf dieselbe die ∞^r Transformationen der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ aus, so nimmt die Figur ∞^r verschiedene Lagen an, deren Inbegriff bei der Gruppe invariant bleibt. Diese ∞^r Lagen werden durch eine einfach transitive Gruppe transformirt.

Stellen wir diese einfach transitive Gruppe wirklich auf, so erhalten wir genau dieselbe Gruppe, wie durch die Methode des vorigen Kapitels.

§ 118.

Es erscheint wünschenswerth, die allgemeinen Entwickelungen der §§ 114 u. 116 auch an einem besonderen Beispiele zu erläutern. Wir beschränken uns jedoch hierbei auf Andeutungen und überlassen dem Leser die wirkliche Ausführung der betreffenden einfachen Rechnungen.

Die allgemeinste projective Gruppe der Ebene, welche den nicht ausgearteten Kegelschnitt: $x^2 - 2y = 0$ invariant lässt, ist dreigliedrig und enthält die folgenden drei unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_2 f = x\frac{\partial f}{\partial x} + 2y\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$X_3 f = (x^2 - y)\frac{\partial f}{\partial x} + xy\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Man sieht sofort, dass diese Gruppe — G_3 wollen wir sie kurz nennen — transitiv ist und dass ihre Zusammensetzung durch die Relationen:

$$(X_1 X_2) = X_1 f, \quad (X_1 X_3) = X_2 f, \quad (X_2 X_3) = X_3 f$$

bestimmt ist. Hieraus folgt bei Berücksichtigung von Kap. 15, Satz 8, S. 263, dass die G_3 keine zweigliedrige invariante Untergruppe enthält; dass sie auch keine eingliedrige invariante Untergruppe enthält, davon überzeugt man sich ohne Schwierigkeit. Mithin ist die G_3 *einfach* (Kap. 15, S. 264).

Jede Tangente des festen Kegelschnitts $x^2 - 2y = 0$ gestattet gerade zwei unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe; es lässt sich überdies zeigen, dass die Tangenten die einzigen Curven der Ebene sind, welche diese Eigenschaft haben. Ebenso sind solche Kegelschnitte, welche den festen Kegelschnitt in zwei Punkten berühren, die einzigen Curven, welche eine und nur eine infinitesimale Transformation der G_3 gestatten; als ein zweimal berührender Kegelschnitt muss da allerdings auch jede Gerade der Ebene aufgefasst werden, welche den Kegelschnitt in zwei getrennten Punkten schneidet. Endlich ist klar, dass jeder nicht auf dem Kegelschnitt gelegene Punkt eine und nur eine infinitesimale Transformation der Gruppe gestattet.

Wählt man nun als Mannigfaltigkeit M irgend eine andere Curve, also eine, welche gar keine infinitesimale Transformation der G_3 gestattet, so nimmt dieselbe bei der Gruppe ∞^3 verschiedene Lagen an und der Inbegriff dieser Lagen wird offenbar durch eine dreigliedrige Gruppe transformirt. Man findet somit eine einfach transitive, mit der ursprünglichen G_3 gleichzusammengesetzte Gruppe des R_3. Alle Gruppen, welche man auf diese Weise erhält, sind mit einander ähnlich; eine unter ihnen ist z. B. die dreigliedrige Gruppe aller projectiven Transformationen des R_3, welche eine gewundene Curve dritter Ordnung invariant lassen.

Führt man als Mannigfaltigkeit M einen in zwei getrennten Punkten berührenden (irreducibeln oder zerfallenden) Kegelschnitt ein, so erhält man eine mit der G_3 holoedrisch isomorphe Gruppe in einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit; alle in dieser Weise erhaltenen Gruppen sind mit einander ähnlich. Benutzt man dagegen einen vierpunktig berührenden Kegelschnitt als Mannigfaltigkeit M, so erhält man einen ganz anderen Typus von dreigliedrigen Gruppen einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit.

Führt man endlich als Mannigfaltigkeit M eine Tangente des festen Kegelschnitts ein, so erhält man in einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit eine dreigliedrige Gruppe, welche mit der allgemeinen projektiven Gruppe der geraden Linie ähnlich ist.

§ 119.

Es sei eine lineare homogene Gruppe

$$X_k f = \sum_{\mu\,\nu}^{1\cdots n} a_{k\mu\nu}\, x_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

des R_n vorgelegt. Dieselbe lässt die Schaar der ∞^n ebenen M_{n-1}:

$$u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n + 1 = 0$$

des R_n invariant. Wir wollen die entsprechende Gruppe in den Parametern $u_1 \cdots u_n$ aufstellen.

Die infinitesimalen Transformationen

$$U_k f = \sum_1^n {}_\nu\, v_{k\nu}(u_1 \cdots u_n) \frac{\partial f}{\partial u_\nu}$$

der gesuchten Gruppe sind nach § 111 so zu bestimmen, dass die

Gleichung $\Sigma\, u_\nu x_\nu + 1 = 0$ die infinitesimale Transformation $X_k f + U_k f$ gestattet. Es müssen also die r Ausdrücke:

$$\sum_{\mu\nu}^{1\cdots n} a_{k\mu\nu}\, x_\mu u_\nu + \sum_{\nu}^{1\cdots n} x_\nu v_{k\nu}$$

vermöge $\Sigma\, u_\nu x_\nu + 1 = 0$ verschwinden. Dies ist nur möglich, wenn sie identisch verschwinden, das heisst, wenn $v_{k\nu} = -\Sigma^\mu\, a_{k\nu\mu} u_\mu$ ist.

Wir finden somit:

$$U_k f = -\sum_{\mu\nu}^{1\cdots n} a_{k\nu\mu} u_\mu \frac{\partial f}{\partial u_\nu}.$$

Also ist die Gruppe $U_k f$ ebenfalls linear und homogen; dass sie mit der Gruppe $X_k f$ isomorph ist, wissen wir von vornherein.

Wir bezeichnen die Gruppe: $U_1 f \cdots U_r f$ als die zur Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ *dualistische* Gruppe.

Um ein Beispiel zu geben, wollen wir zu der adjungirten Gruppe einer r-gliedrigen Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$ von der Zusammensetzung:

$$(Y_i Y_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} Y_s f$$

die dualistische Gruppe aufsuchen.

Die adjungirte Gruppe lautet (vgl. S. 275):

$$\sum_{i\,s}^{1\cdots r} c_{iks} e_i \frac{\partial f}{\partial e_s} \qquad (k = 1 \cdots r),$$

also ihre dualistische*):

$$\sum_{is}^{1\cdots r} c_{kis}\, \varepsilon_s \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_i} \qquad (k = 1 \cdots r),$$

wobei die Relation: $c_{iks} = -c_{kis}$ benutzt ist.

Aehnliche Betrachtungen lassen sich nun überhaupt für alle projectiven Gruppen des R_n anstellen, da dieselben alle die Schaar der ∞^n ebenen, $(n-1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten des R_n invariant lassen. Wir wollen jedoch hier nicht darauf eingehen, verweisen vielmehr auf den nächsten Abschnitt, in welchem der Begriff der Dualität unter einem allgemeineren Gesichtspunkte betrachtet wird, nämlich als ein besonderer Fall des allgemeinen Begriffes: Berührungstransformation.

---

*) Lie, Math. Ann., Bd. XVI, S. 496, vgl. auch Archiv for Mathematik, Bd. 1, Christiania 1876.

§ 120.

Endlich wollen wir noch ein wichtiges Beispiel allgemeinerer Natur betrachten.

Wir nehmen an, dass wir alle q-gliedrigen Untergruppen der G_r: $X_1 f \cdots X_r f$ kennen. Dann handelt es sich noch darum, zu entscheiden, was für verschiedene *Typen* von solchen q-gliedrigen Untergruppen es giebt.

Den Begriff „Typen von Untergruppen" haben wir schon in Kap. 16, S. 281 erklärt; wir rechnen danach zwei q-gliedrige Untergruppen zu demselben Typus, wenn sie innerhalb der G_r gleichberechtigt sind; von allen Untergruppen, welche demselben Typus angehören, brauchen wir daher nur eine anzugeben, die übrigen sind durch diese eine vollkommen bestimmt.

Wir wissen, dass jede Untergruppe der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ durch eine Reihe von linearen homogenen Relationen zwischen den Parametern: $e_1 \cdots e_r$ der allgemeinen infinitesimalen Transformation: $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ dieser Gruppe dargestellt wird (Kap. 12, S. 211). Wir wissen ferner, dass zwei Untergruppen stets dann aber auch nur dann innerhalb der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ gleichberechtigt sind, wenn das Gleichungensystem zwischen den e, welches die eine Untergruppe darstellt, durch eine Transformation der adjungirten Gruppe in das Gleichungensystem übergeführt werden kann, welches die andere Untergruppe darstellt (Kap. 16, S. 280).

Nun kennen wir nach unsrer Voraussetzung alle q-gliedrigen Untergruppen der G_r, wir kennen also alle Systeme von $r - q$ unabhängigen linearen homogenen Gleichungen zwischen den e:

$$\sum_1^r {}_j\, h_{kj} e_j = 0 \qquad (k = 1 \cdots r - q),$$

welche q-gliedrige Untergruppen darstellen.

Wir wollen der Einfachheit wegen unter allen diesen Gleichungensystemen diejenigen herausheben, welche sich nach $e_{q+1} \cdots e_r$ auflösen lassen, welche somit auf die Form gebracht werden können:

$$e_{q+k} = g_{q+k,1} e_1 + \cdots + g_{q+k,q} e_q \qquad (23)$$
$$(k = 1 \cdots r-q);$$

die übrigen, welche nicht auf diese Form gebracht werden können, lassen wir bei Seite, dieselben wären natürlich gerade so zu behandeln wie diejenigen von der Form (23).

Alle Werthsysteme $g_{q+k,j}$, welche in (23) eingesetzt q-gliedrige Untergruppen liefern, werden durch gewisse Gleichungen zwischen den $g_{q+k,j}$ definirt; im Allgemeinen wird es jedoch nicht möglich sein, alle diese Werthsysteme durch ein einziges Gleichungensystem zwischen den g darzustellen, es wird vielmehr eine discrete Anzahl von solchen Gleichungensystemen erforderlich sein, will man alle q-gliedrigen Untergruppen haben, welche in der Form (23) enthalten sind. Zwei verschiedene Gleichungensysteme dieser Art liefern dann natürlich auch lauter verschiedene Typen von q-gliedrigen Untergruppen.

Wir beschränken uns auf irgend eines der betreffenden Gleichungensysteme, etwa auf das folgende:

$$\Omega_\mu(g_{q+1,1}, g_{q+1,2} \cdots g_{rq}) = 0 \quad (\mu = 1, 2 \cdots) \tag{24}$$

und wollen nun sehen, was dasselbe für Typen von q-gliedrigen Untergruppen bestimmt. Die Gleichungen (23) stellen, wenn die $g_{q+k,j}$ ganz beliebig sind, die Schaar aller ebenen q-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten des Raumes $e_1 \cdots e_r$ dar, welche durch den Punkt: $e_1 = 0$, $\cdots e_r = 0$ gehen. Diese Schaar von Mannigfaltigkeiten bleibt selbstverständlich bei der adjungirten Gruppe:

$$e_k' = \sum_1^r {}_j \varrho_{kj}(a_1 \cdots a_r) e_j \quad (k = 1 \cdots r) \tag{25}$$

der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ invariant. Führen wir daher auf das Gleichungensystem (23) die Transformation (25) aus, so erhalten wir in den e' ein Gleichungensystem von entsprechender Form:

$$e_{q+k}' = \sum_1^q {}_j g_{q+k,j}' \cdot e_j' \quad (k = 1 \cdots r-q),$$

wo die g' lineare homogene Funktionen der g sind mit Coefficienten, welche von den a abhängen:

$$g_{q+k,j}' = \sum_1^{r-q} {}_\mu \sum_1^q {}_\nu \alpha_{kj\mu\nu}(a_1 \cdots a_r) \cdot g_{q+\mu,\nu} \tag{26}$$

$$(k = 1 \cdots r-q, \quad j = 1 \cdots q).$$

Nach S. 469 f. bestimmen die Gleichungen (26) eine Gruppe in den Veränderlichen g. Bei dieser Gruppe bleibt das Gleichungensystem (24) invariant; denn jedes Werthsystem $g_{q+k,j}$, welches eine Untergruppe liefert, geht natürlich in ein Werthsystem $g_{q+k,j}'$ über, welches eine Untergruppe bestimmt; da aber die Gruppe (26) continuirlich ist, so lässt sie alle discreten Gebiete von derartigen Werthsystemen $g_{q+k,j}$ einzeln invariant, also insbesondere auch das Gleichungensystem:

$$\Omega_\mu(g_{q+1,1} \cdots g_{rq}) = 0 \quad (\mu = 1, 2 \cdots). \tag{24}$$

Es fragt sich nun, wie die Werthsysteme von (24) bei der Gruppe (26) transformirt werden, ob jedes Werthsystem in jedes andere übergeführt werden kann oder nicht.

Diese Frage bekommt einen anschaulicheren Sinn, wenn wir uns die $g_{q+k,j}$ als Punktcoordinaten in einem Raume von $q(r-q)$ Dimensionen denken. Dann stellen nämlich die Gleichungen (24) in diesem Raume eine gewisse Mannigfaltigkeit dar, welche bei der Gruppe (26) invariant bleibt. Jeder Punkt der Mannigfaltigkeit gehört einem gewissen kleinsten invarianten Theilgebiete der Mannigfaltigkeit an und die Punkte jedes solchen Theilgebietes stellen lauter gleichberechtigte q-gliedrige Untergruppen der G_r dar und zwar die sämmtlichen q-gliedrigen Untergruppen der G_r, welche einunddemselben Typus angehören.

Uebrigens muss darauf aufmerksam gemacht werden, dass zu einem solchen kleinsten invarianten Theilgebiete nur diejenigen Punkte $g_{q+k,j}$ desselben zu rechnen sind, welche ihrerseits in keinem kleineren invarianten Theilgebiete enthalten sind; denn nur wenn man das Theilgebiet in dieser Weise abgränzt, kann jeder Punkt desselben durch eine nicht ausgeartete Transformation der Gruppe (26) in jeden anderen übergeführt werden.

Will man daher alle Typen von q-gliedrigen Untergruppen bestimmen, welche in dem Gleichungensysteme (24) enthalten sind, so hat man nur alle kleinsten invarianten Theilgebiete der Mannigfaltigkeit $\Omega_\mu = 0$ aufzusuchen. Jedes solche Theilgebiet bestimmt alle Untergruppen, die demselben Typus angehören, und irgend ein Punkt des Theilgebietes liefert eine Gruppe, die als Repräsentant des betreffenden Typus gewählt werden kann.

Um die besprochenen invarianten Theilgebiete bestimmen zu können, braucht man übrigens keineswegs die endlichen Gleichungen (25) der adjungirten Gruppe als bekannt vorauszusetzen; es genügt, wenn man die infinitesimalen Transformationen dieser Gruppe hat, dann kann man ja sofort die infinitesimalen Transformationen der Gruppe (26) angeben und bestimmt darauf nach den Regeln des Kapitels 14 die gewünschten invarianten Theilgebiete; im vorliegenden Fall verlangt diese Bestimmung nur ausführbare Operationen.

Man beachte, dass die vorstehenden Entwickelungen auch dann noch anwendbar bleiben, wenn man nicht eine r-gliedrige *Gruppe* kennt, sondern nur eine mögliche *Zusammensetzung* einer solchen, also ein System von c_{iks}, welches die bekannten Relationen:

$$\left\{\begin{array}{c} c_{iks} + c_{kis} = 0 \\ \sum_1^r {}_\nu \left\{ c_{ik\nu} c_{\nu js} + c_{kj\nu} c_{\nu is} + c_{ji\nu} c_{\nu ks} \right\} = 0 \\ (i,\, k,\, j,\, s = 1 \cdots r) \end{array}\right.$$

erfüllt.

Ist die G_r: $X_1 f \cdots X_r f$ in einer grösseren Gruppe $\mathfrak{G}$ invariant, so handelt es sich häufig darum, ob zwei Untergruppen der G_r in dieser grösseren Gruppe $\mathfrak{G}$ gleichberechtigt sind oder nicht. Man kann in diesem Falle auch den Begriff „Typen von Untergruppen der G_r" anders definiren, indem man zwei Untergruppen der G_r erst dann zu verschiedenen Typen rechnet, wenn sie auch in der $\mathfrak{G}$ nicht mit einander gleichberechtigt sind.

Will man in diesem Sinne alle Typen von Untergruppen der G_r bestimmen, so hat das keine besondere Schwierigkeit. Die betreffende Aufgabe ist ja offenbar ein Theil der allgemeineren Aufgabe: alle Typen von Untergruppen der $\mathfrak{G}$ zu bestimmen, das Wort „Typus" in dem Sinne von Kap. 16, S. 281 genommen.

Besonders wichtig ist diese Untersuchung, wenn die Gruppe $\mathfrak{G}$ überhaupt die grösste Gruppe des R_n ist, in welcher die G_r: $X_1 f \cdots X_r f$ invariant ist.

Kapitel 24.

Systatische und asystatische Transformationsgruppen.

In dem s-fach ausgedehnten Raume $x_1 \cdots x_s$ sei eine r-gliedrige Gruppe:

$$X_k f = \sum_1^s {}_i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k=1 \cdots r)$$

oder kurz G_r vorgelegt. Von den r infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ seien gerade n etwa: $X_1 f \cdots X_n f$ durch keine lineare Relation verknüpft, während dagegen $X_{n+1} f \cdots X_r f$ sich folgendermassen ausdrücken lassen:

$$\text{(1)} \qquad X_{n+j} f \equiv \sum_1^n {}_\nu\, \varphi_{j\nu}(x_1 \cdots x_s) \cdot X_\nu f \qquad (j=1 \cdots r-n).$$

Ist nun $x_1^0 \cdots x_s^0$ ein Punkt, für welchen nicht alle n-reihigen Determinanten der Matrix:

$$\text{(2)} \qquad \begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{1s}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{n1}(x) & \cdot & \cdot & \xi_{ns}(x) \end{vmatrix}$$

verschwinden, so giebt es nach Kap. 11, S. 203 in der G_r gerade $r-n$ unabhängige infinitesimale Transformationen, deren Reihenentwickelungen nach den $x_i - x_i^0$ keine Glieder nullter, sondern nur Glieder erster oder höherer Ordnung enthalten; der Punkt $x_1^0 \cdots x_s^0$

gestattet mithin gerade $r-n$ unabhängige infinitesimale Transformationen der G_r, welche eine $(r-n)$-gliedrige Untergruppe G_{r-n} der G_r erzeugen (vgl. Kap. 12, Satz 2, S. 205). Die infinitesimalen Transformationen dieser G_{r-n} lassen sich nach S. 203 aus den $r-n$ unabhängigen:

$$X_{n+j}f - \sum_1^n {}_\nu \, \varphi_{j\nu}(x_1^0 \cdots x_s^0) \cdot X_\nu f \qquad (j=1 \cdots r-n)$$

linear ableiten.

Wir wollen im Folgenden einen Punkt $x_1^0 \cdots x_s^0$, für welchen nicht alle n-reihigen Determinanten der Matrix (2) verschwinden, auch wohl kurz als einen Punkt *von allgemeiner Lage* bezeichnen.

§ 121.

Zu jedem Punkte $x_1^0 \cdots x_s^0$ von allgemeiner Lage gehört nach dem Vorhergehenden eine ganz bestimmte $(r-n)$-gliedrige Untergruppe der G_r, nämlich die allgemeinste Untergruppe der G_r, bei welcher er invariant bleibt.

Lassen wir den Punkt x^0 seine Lage ändern, so bekommen wir eine neue $(r-n)$-gliedrige Untergruppe der G_r und da es ∞^s verschiedene Punkte giebt, so bekommen wir im Ganzen ∞^s derartige Untergruppen; jedoch ist nicht gesagt, dass wir ∞^s verschiedene Untergruppen erhalten.

Ist z. B. $r=n$, so fallen die besprochenen ∞^s Untergruppen alle zusammen, sie reduciren sich nämlich sämmtlich auf die identische Transformation, da die G_r gar keine infinitesimale Transformation enthält, welche einen Punkt x^0 von allgemeiner Lage in Ruhe lässt.

Aber auch abgesehen von diesem speciellen Falle kann es vorkommen, dass zu den ∞^s Punkten des Raumes $x_1 \cdots x_s$ nur ∞^{s-1} oder noch weniger verschiedene Gruppen der eben besprochenen Art gehören; das wird offenbar immer dann geschehen, wenn es jedesmal *eine continuirliche Schaar von einzelnen Punkten giebt, welche gleichzeitig bei derselben $(r-n)$-gliedrigen Untergruppe der G_r ihre Lage behalten.*

Wir wollen jetzt die analytischen Bedingungen aufsuchen, unter denen eine solche Erscheinung eintritt. Zunächst stellen wir uns daher die Frage: wann bleiben zwei Punkte von allgemeiner Lage bei derselben $(r-n)$-gliedrigen Untergruppe der G_r invariant?

Die Beantwortung dieser Frage hat grosse Aehnlichkeit mit den Betrachtungen in Kap. 19, S. 357 f.

Der eine Punkt sei $x_1^0 \cdots x_s^0$, die zugehörige $(r-n)$-gliedrige Untergruppe der G_r heisse G_{r-n}; dann lautet die allgemeine infinitesimale Transformation der G_{r-n}:

$$\sum_1^{r-n} {}_j \varepsilon_j \left(X_{n+j} f - \sum_1^n {}_\nu \varphi_{j\nu}^0 X_\nu f \right),$$

unter den ε willkürliche Parameter verstanden.

Der andere Punkt sei: $\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_s$, die allgemeine infinitesimale Transformation der zu ihm gehörigen Untergruppe: $\overline{G}_{r-n}$ ist alsdann:

$$\sum_1^{r-n} {}_j \bar{\varepsilon}_j \left(X_{n+j} f - \sum_1^n {}_\nu \bar{\varphi}_{j\nu} X_\nu f \right).$$

Jetzt sollen beide Punkte bei derselben $(r-n)$-gliedrigen Untergruppe invariant bleiben, G_{r-n} und $\overline{G}_{r-n}$ sollen also zusammenfallen; dazu ist nothwendig und hinreichend, dass alle infinitesimalen Transformationen der einen auch der andern angehören und umgekehrt, analytisch ausgedrückt: die Gleichung

$$\sum_1^{r-n} {}_j \varepsilon_j \left\{ X_{n+j} f - \sum_1^n {}_\nu \varphi_{j\nu}^0 X_\nu f \right\} = \sum_1^{r-n} {}_j \bar{\varepsilon}_j \left\{ X_{n+j} f - \sum_1^n {}_\nu \bar{\varphi}_{j\nu} X_\nu f \right\}$$

muss bei beliebig gewählten ε stets durch geeignete Werthe der $\bar{\varepsilon}$ identisch befriedigt werden können und bei beliebig gewählten $\bar{\varepsilon}$ stets durch geeignete Werthe der ε.

Die letzte Gleichung lässt sich schreiben:

$$\sum_1^{r-n} {}_j (\varepsilon_j - \bar{\varepsilon}_j) \cdot X_{n+j} f - \sum_1^n {}_\nu \sum_1^{r-n} {}_j (\varepsilon_j \varphi_{j\nu}^0 - \bar{\varepsilon}_j \bar{\varphi}_{j\nu}) \cdot X_\nu f = 0,$$

sie kann mithin wegen der Unabhängigkeit der infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ nicht anders bestehen, als wenn $\bar{\varepsilon}_j = \varepsilon_j$ ist; da ausserdem die ε_j vollkommen willkürlich sind, so ergiebt sich:

$$\varphi_{j\nu}(x_1^0 \cdots x_s^0) = \varphi_{j\nu}(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_s) \quad (j = 1 \cdots r-n;\ \nu = 1 \cdots n).$$

Die beiden $(r-n)$-gliedrigen Untergruppen der G_r, welche zu zwei verschiedenen Punkten von allgemeiner Lage gehören, sind demnach dann und nur dann mit einander identisch, wenn jede der $n(r-n)$ Functionen $\varphi_{j\nu}$ für den einen Punkt denselben Zahlenwerth annimmt wie für den andern.

Wünschen wir daher alle Punkte von allgemeiner Lage zu kennen, welche gleichzeitig mit dem Punkte $x_1^0 \cdots x_s^0$ bei der Gruppe G_{r-n} ihre Lage behalten, so haben wir nur alle Werthsysteme x zu bestimmen, welche die Gleichungen:

$$\text{(3)} \qquad \varphi_{j\nu}(x_1 \cdots x_s) = \varphi_{j\nu}^0 \quad (j = 1 \cdots n-q;\ \nu = 1 \cdots q)$$

befriedigen; jedes solche Werthsystem liefert einen Punkt von der verlangten Beschaffenheit.

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Erstens kann die Zahl der von einander unabhängigen unter den $n\,(r-n)$ Functionen $\varphi_{k\nu}(x)$ gerade gleich s sein. In diesem Falle lässt die $(r-n)$-gliedrige Untergruppe G_{r-n}, welche den Punkt: $x_1^0 \cdots x_s^0$ festhält, höchstens noch eine discrete Anzahl von Punkten allgemeiner Lage stehen.

Zweitens kann die Zahl der unabhängigen unter den $\varphi_{k\nu}(x)$ kleiner sein als s. In diesem Falle giebt es eine continuirliche Mannigfaltigkeit von Punkten allgemeiner Lage, welche alle bei der Gruppe G_{r-n} invariant bleiben; zu jedem Punkte der betreffenden Mannigfaltigkeit gehört dann dieselbe $(r-n)$-gliedrige Untergruppe der G_r wie zu dem Punkte: $x_1^0 \cdots x_s^0$. Dabei liegt der Punkt $x_1^0 \cdots x_s^0$ offenbar innerhalb der Mannigfaltigkeit, das heisst, es giebt in der Mannigfaltigkeit auch solche Punkte, die dem Punkte: $x_1^0 \cdots x_s^0$ unendlich benachbart sind.

Nehmen wir an, dass der zweite Fall eintritt, dass sich also unter den $n\,(r-n)$ Functionen $\varphi_{k\nu}(x)$ blos $s-\varrho < s$ von einander unabhängige befinden, welche $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$ heissen mögen.

Unter dieser Voraussetzung lassen sich alle $\varphi_{k\nu}(x)$ durch $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$ allein ausdrücken und die Gleichungen (3) können durch die $s-\varrho$ von einander unabhängigen Gleichungen:

$$(3') \quad \varphi_1(x_1 \cdots x_s) = \varphi_1(x_1^0 \cdots x_s^0), \cdots \varphi_{s-\varrho}(x_1 \cdots x_s) = \varphi_{s-\varrho}(x_1^0 \cdots x_s^0)$$

ersetzt werden. Wir sehen mithin, dass jeder allgemein gelegene Punkt: $x_1^0 \cdots x_s^0$ des Raumes einer ganz bestimmten ϱ-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit (3′) angehört, welche von dem Inbegriff aller Punkte gebildet wird, zu denen dieselbe $(r-n)$-gliedrige Untergruppe der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ gehört, wie zum Punkte: $x_1^0 \cdots x_s^0$.

Es ist möglich, dass die Gleichungen:

$$\varphi_{j\nu}(x_1 \cdots x_s) = \varphi_{j\nu}(x_1^0 \cdots x_s^0) \qquad (j = 1 \cdots r-n;\ \nu = 1 \cdots n)$$

für jedes Werthsystem $x_1^0 \cdots x_s^0$ eine Mannigfaltigkeit darstellen, welche in eine discrete Anzahl endlich verschiedener Mannigfaltigkeiten zerfällt.

Ein Beispiel bietet die dreigliedrige Gruppe:

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \qquad X_2 f = \frac{1}{\cos x_2}\frac{\partial f}{\partial x_2}, \qquad X_3 f = \operatorname{tg} x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

Hier ist:

$$X_3 f \equiv \sin x_2 \cdot X_2 f,$$

während $X_1 f$ und $X_2 f$ durch keine lineare Relation verknüpft sind. Hält man daher den Punkt x_1^0, x_2^0 fest, so bleiben auch alle Punkte fest, deren Coordinaten x_1, x_2 der Gleichung:

$$\sin x_2 = \sin x_2^0$$

genügen; das heisst, zugleich mit dem Punkte x_1^0, x_2^0 behält jeder Punkt seine Lage, der auf einer der unendlich vielen zur x_1-Axe parallelen Geraden:

$$x_2 = x_2^0 + 2k\pi$$

liegt, unter k eine beliebige, positive oder negative ganze Zahl verstanden.

Da die Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ unter der oben gemachten Voraussetzung jedem Punkte: $x_1^0 \cdots x_s^0$ eine durch ihn hindurchgehende ϱ-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit zuordnet, so zerlegt sie offenbar den ganzen Raum $x_1 \cdots x_s$ in eine Schaar von $\infty^{s-\varrho}$ ϱ-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten:

$$\varphi_1(x_1 \cdots x_s) = \text{const.}, \cdots \varphi_{s-\varrho}(x_1 \cdots x_s) = \text{const.} \tag{4}$$

und zwar derart, dass alle Transformationen der Gruppe, welche einen beliebig gewählten Punkt von allgemeiner Lage festhalten, zugleich alle Punkte der durch diesen Punkt gehenden Mannigfaltigkeit (4) in Ruhe lassen.

Allerdings ist hierbei zu bemerken, dass von einer wirklichen Zerlegung nur dann die Rede sein kann, wenn die Zahl ϱ kleiner ist als s; ist $\varrho = s$, so findet keine wirkliche Zerlegung des Raumes statt, dann lässt nämlich jede Transformation unserer Gruppe, welche einen Punkt von allgemeiner Lage festhält, überhaupt alle Punkte des Raumes invariant; mit andern Worten: die identische Transformation ist die einzige Transformation der Gruppe, welche einen Punkt von allgemeiner Lage in Ruhe lässt.

Die vorstehenden Betrachtungen geben Anlass zu einer neuen wichtigen Eintheilung aller r-gliedrigen Gruppen $X_1f \cdots X_rf$ des Raumes $x_1 \cdots x_s$ und zwar zu einer Eintheilung in zwei verschiedene Classen.

*Ist eine Gruppe des Raumes $x_1 \cdots x_s$ so beschaffen, dass alle ihre Transformationen, welche einen Punkt von allgemeiner Lage invariant lassen, gleichzeitig alle Punkte einer continuirlichen, durch diesen Punkt gehenden Mannigfaltigkeit festhalten, so rechnen wir die Gruppe der einen Classe zu und nennen sie systatisch. Alle übrigen Gruppen aber, also die, welche nicht systatisch sind, rechnen wir zur andern Classe und nennen sie asystatisch.**)

---

*) Die Begriffe: systatische und asystatische Gruppen sowie die im Texte entwickelte Theorie derselben rühren von Lie her (Ges. d. W. zu Christiania 1884, Archiv for Math. Bd. 10, Christiania 1885). Die ausdrucksvollen Bezeichnungen: systatisch „mitstehenlassend" und asystatisch „nichtmitstehenlassend" sind von Engel. Im Uebrigen ist die dem vorliegenden Werk eigenthümliche Terminologie von Lie eingeführt.

Mit Benutzung dieser Bezeichnungsweise können wir die erhaltenen Ergebnisse folgendermassen aussprechen:

Theorem 87. *Sind die unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ einer r-gliedrigen Gruppe in s Veränderlichen $x_1 \cdots x_s$ durch $r - n$ lineare Relationen von der Form:*

$$X_{n+k} f \equiv \sum_1^n {}_\nu\, \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) \cdot X_\nu f \qquad (k = 1 \cdots r - n)$$

verknüpft, während zwischen $X_1 f \cdots X_n f$ allein keine derartige Relation besteht, so ist die Gruppe systatisch, wenn es unter den $n(r-n)$ Functionen $\varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s)$ weniger als s von einander unabhängige giebt; giebt es dagegen unter den Functionen $\varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s)$ gerade s von einander unabhängige, so ist die Gruppe asystatisch.

§ 122.

Alle Voraussetzungen, welche wir in der Einleitung des Kapitels über die r-gliedrige Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ des Raumes $x_1 \cdots x_s$ gemacht haben, wollen wir beibehalten, nur wollen wir jetzt noch die Voraussetzung hinzufügen, dass die Gruppe systatisch sein soll. Wir nehmen also an, dass unter den $n(r-n)$ Functionen $\varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s)$ blos $0 \leqq s - \varrho < s$ von einander unabhängige vorhanden sind, welche wie oben $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$ heissen mögen.

Betrachten wir zunächst den Fall, dass die Zahl $s - \varrho$ den Werth Null besitzt.

Verschwindet die Zahl $s - \varrho$, so ist offenbar n gleich r, das heisst die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \cdots X_r f$ sind durch keine lineare Relation von der Form:

$$\chi_1(x_1 \cdots x_s) \cdot X_1 f + \cdots + \chi_r(x_1 \cdots x_s) \cdot X_r f = 0$$

verknüpft. Hieraus ergiebt sich, dass die Zahl r jedenfalls nicht grösser ist als die Zahl s der Veränderlichen x, dass also die Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ entweder intransitiv oder höchstens einfach transitiv ist. Beide Male ist daher die Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ imprimitiv (vgl. Kap. 13, S. 221 und Kap. 20, Satz 6, S. 383).

Wir sehen also, dass die systatische Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ stets imprimitiv ist, wenn die ganze Zahl $s - \varrho$ den Werth Null hat.

Wenden wir uns jetzt zu dem Falle $s - \varrho > 0$.

In diesem Falle liefern die Gleichungen:

(4) $$\varphi_1(x_1 \cdots x_s) = \text{const.}, \quad \cdots \quad \varphi_{s-\varrho}(x_1 \cdots x_s) = \text{const.}$$

eine wirkliche Zerlegung des Raumes $x_1 \cdots x_s$ in $\infty^{s-\varrho}$ ϱ-fach ausgedehnte

Mannigfaltigkeiten und zwar, wie wir oben gesehen haben, eine Zerlegung, welche durch die Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ vollständig bestimmt ist und zu dieser Gruppe in einer ganz eigenthümlichen Beziehung steht. Es liegt sehr nahe, zu vermuthen, dass diese Zerlegung bei der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ invariant bleibt; daraus würde dann folgen, dass die systatische Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ auch im Falle $s - \varrho > 0$ imprimitiv ist (Kap. 13, S. 220).

Man kann sehr leicht einsehen, dass die eben ausgesprochene Vermuthung der Wahrheit entspricht. In der That, nach Kap. 19, S. 343 f. lassen sich die $r(s-\varrho)$ Ausdrücke: $X_k \varphi_1 \cdots X_k \varphi_{s-\varrho}$ als Functionen von $\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}$ allein darstellen:

$$X_k \varphi_j = \pi_{kj}(\varphi_1 \cdots \varphi_{s-\varrho}) \quad (k = 1 \cdots r;\ j = 1 \cdots s - \varrho).$$

Hierin liegt (vgl. Kap. 8, S. 139 u. 143), dass die Zerlegung (4) die r infinitesimalen Transformationen $X_k f$ und somit überhaupt die ganze Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ gestattet.

Die eben durchgeführten Entwickelungen beweisen, dass eine systatische Gruppe des Raumes $x_1 \cdots x_s$ stets imprimitiv ist. Wir haben somit das

Theorem 88. *Jede systatische Gruppe ist imprimitiv.*

Es ist nicht überflüssig, auch durch begriffliche Ueberlegungen nachzuweisen, dass im Falle $s - \varrho > 0$ die Zerlegung (4) bei der systatischen Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ invariant bleibt.

Wir bezeichnen mit M irgend eine der $\infty^{s-\varrho}$ ϱ-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten (4), P sei allgemeines Symbol eines Punktes der Mannigfaltigkeit M, das allgemeine Symbol der ∞^{r-n} Transformationen unserer Gruppe, welche sämmtliche Punkte von M stehen lassen, sei S, endlich verstehen wir unter T eine beliebige Transformation unserer Gruppe.

Führen wir die Transformation T auf M aus, so erhalten wir eine gewisse ϱ-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit M', deren ∞^ϱ Punkte P' durch die Gleichung:

$$(P') = (P)T$$

definirt sind. Da nun jeder Punkt P bei allen ∞^{r-n} Transformationen S unserer Gruppe invariant bleibt, so ist klar, dass jeder Punkt P' bei den ∞^{r-n} Transformationen $T^{-1}ST$, die ebenfalls unserer Gruppe angehören, seine Lage behält. Hieraus geht hervor, dass auch M' zu den $\infty^{s-\varrho}$ Mannigfaltigkeiten (4) gehört; also ist bewiesen, dass die $\infty^{s-\varrho}$ Mannigfaltigkeiten (4) von jeder Transformation der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ unter einander vertauscht werden, dass die Zerlegung (4) wirklich bei unserer Gruppe invariant bleibt.

Da nach Theorem 88 jede systatische Gruppe imprimitiv ist, muss umgekehrt jede primitive Gruppe asystatisch sein. Es giebt aber auch imprimitive Gruppen, die asystatisch sind, zum Beispiel die viergliedrige Gruppe:

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ x\frac{\partial f}{\partial y},\ y\frac{\partial f}{\partial y}$$

der Ebene x, y. Diese Gruppe ist imprimitiv, denn sie lässt die Geradenschaar: $x = \text{const.}$ invariant, sie ist aber zugleich asystatisch, denn aus den beiden Identitäten:

$$x\frac{\partial f}{\partial y} \equiv x \cdot \frac{\partial f}{\partial y},\ y\frac{\partial f}{\partial y} \equiv y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

erhellt, dass die zu der Gruppe gehörigen Functionen $\varphi_{k\nu}$ keine andern sind als x und y selbst; die sind aber offenbar von einander unabhängig. Dass es sogar intransitive asystatische Gruppen giebt, zeigt die dreigliedrige intransitive Gruppe:

$$\frac{\partial f}{\partial y},\ x\frac{\partial f}{\partial y},\ y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

§ 123.

Kennt man r unabhängige infinitesimale Transformationen: $X_1 f \cdots X_r f$ einer r-gliedrigen Gruppe des Raumes $x_1 \cdots x_s$, so kann man nach Theor. 87, S. 502 leicht entscheiden, ob die betreffende Gruppe systatisch ist oder nicht.

Man bildet zu diesem Behufe die Matrix:

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot\ \cdot & \xi_{1s}(x) \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \xi_{r1}(x) & \cdot\ \cdot & \xi_{rs}(x) \end{vmatrix}$$

und untersucht ihre Determinanten. Verschwinden die $(n+1)$-reihigen Determinanten alle identisch, nicht aber alle n-reihigen und insbesondere nicht alle n-reihigen, die aus den obersten n Reihen der Matrix gebildet werden können, so bestehen Identitäten von der Form:

$$X_{n+k} f \equiv \sum_1^n {}_\nu\, \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) X_\nu f \quad (k=1 \cdots r-n), \tag{1}$$

während $X_1 f \cdots X_n f$ durch keine lineare Relation verknüpft sind. Hat man die Identitäten (1) aufgestellt, so entscheidet die Anzahl der unabhängigen unter den $n(r-n)$ Functionen $\varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s)$.

Aber, um entscheiden zu können, ob eine bestimmte r-gliedrige Gruppe systatisch ist oder nicht, braucht man gar nicht die endlichen Ausdrücke für die infinitesimalen Transformationen der Gruppe, es genügt vielmehr schon, wenn man die *Definitionsgleichungen* der Gruppe kennt. Dass dies genügt, beruht darauf, dass man, sobald die Definitionsgleichungen der Gruppe vorgelegt sind, stets ein unbeschränkt integrables System totaler Differentialgleichungen angeben kann, dessen einzige Integralfunctionen eben die $\varphi_{k\nu}(x)$ und ihre Functionen sind. Hieraus ergiebt sich nämlich offenbar, dass man die Zahl der unabhängigen unter den $\varphi_{k\nu}(x)$ bestimmen kann, ohne die $\varphi_{k\nu}(x)$ selber zu kennen.

Wir werden jetzt dieses wichtige Resultat ableiten.

Die unabhängigen unter den Gleichungen:

$$d\varphi_{k\nu} = \sum_1^s {}_i \frac{\partial \varphi_{k\nu}(x)}{\partial x_i} dx_i = 0 \quad (k = 1 \cdots r - n;\ \nu = 1 \cdots n) \tag{5}$$

bilden ein unbeschränkt integrables System von totalen Differentialgleichungen, dessen einzige Integralfunctionen die $\varphi_{k\nu}(x)$ und deren Functionen sind (vgl. Kap. 5, S. 91 ff.). Von diesem Systeme totaler Differentialgleichungen gehen wir aus.

Wegen (1) ist identisch:

$$\xi_{n+j,\, i} - \sum_1^n {}_\nu\, \varphi_{j\nu} \xi_{\nu i} \equiv 0 \quad (j = 1 \cdots r - n;\ i = 1 \cdots s),$$

also ergiebt sich durch Differentiation:

$$d\xi_{n+j,\, i} - \sum_1^n {}_\nu\, \varphi_{j\nu} d\xi_{\nu i} \equiv \sum_1^n {}_\nu\, \xi_{\nu i} d\varphi_{j\nu},$$

oder, da nach Voraussetzung nicht alle n-reihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdot\ \cdot & \xi_{1s}(x) \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \xi_{n1}(x) & \cdot\ \cdot & \xi_{ns}(x) \end{vmatrix}$$

verschwinden:

$$d\varphi_{j\pi} \equiv \sum_1^s {}_i\, \chi_{\pi i}(x_1 \cdots x_s) \left\{ d\xi_{n+j,\, i} - \sum_1^n {}_\nu\, \varphi_{j\nu} d\xi_{\nu i} \right\}$$

$$(j = 1 \cdots r - n;\ \pi = 1 \cdots n).$$

Hieraus folgt, dass das System der totalen Differentialgleichungen (5) durch das nachstehende ersetzt werden kann:

$$\sum_1^s {}_\pi \left\{ \frac{\partial \xi_{n+j,\, i}}{\partial x_\pi} - \sum_1^n {}_\nu\, \varphi_{j\nu} \frac{\partial \xi_{\nu i}}{\partial x_\pi} \right\} dx_\pi = 0 \quad (j = 1 \cdots r - n;\ i = 1 \cdots s). \tag{6}$$

Selbstverständlich bilden die unabhängigen unter den Gleichungen (6) ein unbeschränkt integrables System von totalen Differentialgleichungen, dessen einzige Integralfunctionen eben die $\varphi_{k\nu}(x)$ und ihre Functionen sind.

Es ist nun allerdings ohne Integration nicht möglich, die einzelnen Gleichungen (6) aufzustellen, wenn man blos die Definitionsgleichungen der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ kennt; dagegen ist es möglich, das Gleichungensystem (6) durch ein anderes zu ersetzen, welches ausser den dx_π nur Coefficienten der Definitionsgleichungen enthält. Dazu gelangen wir folgendermassen.

Wir verstehen unter $x_1^0 \cdots x_s^0$ einen Punkt von allgemeiner Lage. Nach S. 203 hat dann die allgemeinste infinitesimale Transformation: $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$, deren Reihenentwickelungen nach den $x_i - x_i^0$ nur Glieder erster und höherer Ordnung enthalten, die Gestalt:

$$\sum_1^{r-n} {}_j\, \mathfrak{e}_j \left(X_{n+j} f - \sum_1^n {}_\nu\, \varphi_{j\nu}(x_1^0 \cdots x_s^0) X_\nu f \right),$$

unter den $\mathfrak{e}_j$ willkürliche Parameter verstanden. Dieser Ausdruck aber erhält, wenn wir die Entwickelung nach den $x_i - x_i^0$ wirklich ausführen und dabei blos die Glieder erster Ordnung berücksichtigen, die Form:

$$(7) \quad \sum_1^{r-n} {}_j\, \mathfrak{e}_j \sum_{i\pi}^{1 \cdots s} \left\{ \left[\frac{\partial \xi_{n+j,\, i}}{\partial x_\pi} \right]_{x = x_0} - \sum_1^n {}_\nu\, \varphi_{j\nu}(x^0) \left[\frac{\partial \xi_{\nu i}}{\partial x_\pi} \right]_{x = x^0} \right\} (x_\pi - x_\pi^0) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \cdots.$$

Die Glieder erster Ordnung in dem Ausdruck (7) können wir aber auch aus den Definitionsgleichungen der Gruppe berechnen und zwar ohne Integration. Nach Kap. 11, S. 188 ff. hat nämlich die allgemeinste infinitesimale Transformation: $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$, deren Reihenentwickelung nach den $x_i - x_i^0$ nur Glieder erster und höherer Ordnung enthält, die Form:

$$\sum_{i\pi}^{1 \cdots s} g'_{\pi i}(x_\pi - x_\pi^0) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \cdots,$$

wo von den s^2 Grössen $g'_{\pi i}$ eine gewisse Anzahl, die wir damals mit $\varepsilon_1 - \nu_1$ bezeichneten, willkürlich waren, während die $s^2 - \varepsilon_1 + \nu_1$ übrigen lineare homogene Functionen dieser $\varepsilon_1 - \nu_1$ wurden mit Coefficienten, die unmittelbar aus den Definitionsgleichungen berechnet werden konnten. Wir erhalten somit, wenn wir von den Definitionsgleichungen ausgehen, für den Ausdruck (7) die folgende Darstellung:

$$(7') \qquad \sum_1^{\varepsilon_1 - \nu_1} {}_j\, \mathfrak{e}'_j \sum_{i\pi}^{1 \cdots s} \alpha_{j\pi i}(x_1^0 \cdots x_s^0)(x_\pi - x_\pi^0) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \cdots,$$

wo die $\mathfrak{e}'_j$ willkürliche Parameter bedeuten, während die $\alpha_{j\pi i}(x^0)$ ganz bestimmte analytische Functionen der x^0 sind und wie soeben gesagt, aus den Definitionsgleichungen berechnet werden können.

Da (7) und (7') nur verschiedene Darstellungen derselben infinitesimalen Transformationen sind, so müssen die Faktoren von $(x_\pi - x_\pi^0)\frac{\partial f}{\partial x_i}$ in beiden Ausdrücken einander gleich sein, das heisst, es bestehen die folgenden s^2 Relationen:

$$\sum_1^{r-n} {}_j\, \mathfrak{e}_j \left[\frac{\partial \xi_{n+j,\,i}}{\partial x_\pi} - \sum_1^n {}_\nu\, \varphi_{j\nu}(x) \frac{\partial \xi_{\nu i}}{\partial x_\pi} \right]_{x=x^0} = \sum_1^{\varepsilon_1-\nu_1} {}_j\, \mathfrak{e}_j' \alpha_{j\pi i}(x^0) \quad (i, \pi = 1 \cdots s).$$

Dieselben müssen sich bei beliebig gewählten $\mathfrak{e}_j$ stets durch geeignete Werthe der $\mathfrak{e}_j'$ befriedigen lassen und bei beliebig gewählten $\mathfrak{e}_j'$ stets durch geeignet gewählte Werthe der $\mathfrak{e}_j$.

Alles das gilt für jeden Punkt $x_1^0 \cdots x_s^0$ von allgemeiner Lage; es gilt also auch, wenn wir die x^0 als veränderlich betrachten und durch $x_1 \cdots x_s$ ersetzen. Folglich können wir, wenn wir die $\mathfrak{e}$ in ganz beliebiger Weise als Functionen der x gewählt haben, stets die $\mathfrak{e}'$ derart als Functionen der x bestimmen, dass die Gleichungen:

$$(7'') \qquad \sum_1^{r-n} {}_j\, \mathfrak{e}_j \left\{ \frac{\partial \xi_{n+j,\,i}}{\partial x_\pi} - \sum_1^n {}_\nu\, \varphi_{j\nu}(x) \frac{\partial \xi_{\nu i}}{\partial x_\pi} \right\} = \sum_1^{\varepsilon_1-\nu_1} {}_j\, \mathfrak{e}_j' \alpha_{j\pi i}(x) \qquad (i, \pi = 1 \cdots s)$$

identisch befriedigt werden und, wenn wir die $\mathfrak{e}'$ in ganz beliebiger Weise als Functionen der x gewählt haben, so können wir (7'') stets durch geeignete Functionen $\mathfrak{e}_1 \cdots \mathfrak{e}_{r-n}$ der x identisch erfüllen.

Nun kann man die Gleichungen (6) offenbar ersetzen durch die s Gleichungen:

$$(6') \qquad \sum_1^{r-n} {}_j\, \mathfrak{e}_j \sum_1^s {}_\pi \left\{ \frac{\partial \xi_{n+j,\,i}}{\partial x_\pi} - \sum_1^n {}_\nu\, \varphi_{j\nu} \frac{\partial \xi_{\nu i}}{\partial x_\pi} \right\} dx_\pi = 0,$$

vorausgesetzt nur, dass man in diesen letzteren die $\mathfrak{e}$ als willkürliche Functionen der x ansieht. Aus dem vorhin Gesagten ergiebt sich daher, dass der Inbegriff aller Gleichungen (6) äquivalent ist mit dem Inbegriff aller Gleichungen von der Form:

$$\sum_1^{\varepsilon_1-\nu_1} {}_j\, \mathfrak{e}_j' \sum_1^s {}_\pi\, \alpha_{j\pi i}(x_1 \cdots x_s)\, dx_\pi = 0 \quad (i = 1 \cdots s),$$

in denen die $\mathfrak{e}'$ als willkürliche Functionen der x aufzufassen sind. Die letzten Gleichungen endlich können offenbar durch die $(\varepsilon_1 - \nu_1)s$ Gleichungen:

$$(8) \qquad \sum_1^s {}_\pi\, \alpha_{j\pi i}(x_1 \cdots x_s)\, dx_\pi = 0 \quad (j = 1 \cdots \varepsilon_1 - \nu_1;\ i = 1 \cdots s)$$

ersetzt werden.

Hiermit ist bewiesen, dass die beiden Systeme totaler Differentialgleichungen: (6) und (8) mit einander äquivalent sind; es ergiebt sich also, dass die unabhängigen unter den Gleichungen (8) ein unbeschränkt integrables System totaler Differentialgleichungen bilden und zwar ein System, dessen einzige Integralfunctionen die $\varphi_{k\nu}(x)$ und ihre Functionen sind.

Wir können daher sagen:

Theorem 89. *Sind die Definitionsgleichungen einer r-gliedrigen Gruppe des Raumes* $x_1 \cdots x_s$ *vorgelegt, so entscheidet man folgendermassen, ob die betreffende Gruppe systatisch ist oder nicht:*

Man verstehe unter $x_1^0 \cdots x_s^0$ *einen beliebigen Punkt, in dessen Umgebung sich die Coefficienten der aufgelösten Definitionsgleichungen regulär verhalten, und bestimme die Glieder nullter und erster Ordnung in der Reihenentwickelung der allgemeinen infinitesimalen Transformation der Gruppe nach Potenzen von* $x_1 - x_1^0, \cdots x_s - x_s^0$. *Sodann suche man die Glieder erster Ordnung in der allgemeinsten infinitesimalen Transformation der Gruppe, welche keine Glieder nullter Ordnung enthält. Diese Glieder werden die Form haben:*

$$\sum_1^{\varepsilon_1 - \nu_1} {}_j\, \mathfrak{e}_j' \sum_{i\pi}^{1 \cdots s} \alpha_{j\pi i}(x_1^0 \cdots x_s^0)(x_\pi - x_\pi^0) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

wo die $\mathfrak{e}_j'$ *willkürliche Parameter bezeichnen, während die* $\alpha_{j\pi i}(x^0)$ *ganz bestimmte analytische Functionen der* x^0 *sind und aus den Coefficienten der Definitionsgleichungen ohne Integration berechnet werden können. Nunmehr bilde man das System der totalen Differentialgleichungen:*

$$(8) \qquad \sum_1^s {}_\pi\, \alpha_{j\pi i}(x_1 \cdots x_s)\, dx_\pi = 0 \quad (j = 1 \cdots \varepsilon_1 - \nu_1;\ i = 1 \cdots s)$$

und bestimme die Anzahl $s - \varrho$ *der unabhängigen unter diesen Gleichungen. Ist* $s - \varrho < s$, *so ist die Gruppe systatisch, ist aber* $s - \varrho = s$, *so ist die Gruppe asystatisch.**)

Wir können hinzufügen:

Satz 1. *Die* $s - \varrho$ *von einander unabhängigen unter den Differentialgleichungen* (8) *bilden ein unbeschränkt integrables System mit* $s - \varrho$ *unabhängigen Integralfunctionen:* $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$. *Diese Integralfunctionen stehen zu der Gruppe* $X_1 f \cdots X_r f$ *in folgender Beziehung:*

*) Lie, Archiv for Math., Bd. 10, Christiania 1885.

Sind von den r unabhängigen infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \cdots X_r f$ gerade n, etwa $X_1 f \cdots X_n f$ durch keine lineare Relation verknüpft, während $X_{n+1} f \cdots X_r f$ sich linear durch $X_1 f \cdots X_n f$ ausdrücken lassen:

$$X_{n+k} f \equiv \sum_1^n {}_\nu\, \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s)\, X_\nu f \quad (k = 1 \cdots r - n),$$

so lassen sich alle $n(r-n)$ Functionen $\varphi_{k\nu}(x)$ durch $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$ allein ausdrücken.

Man braucht nicht einmal die Definitionsgleichungen selbst zu kennen, um entscheiden zu können, ob eine bestimmte Gruppe systatisch ist oder nicht. *Man braucht dazu nur die Anfangsglieder von den Reihenentwickelungen der infinitesimalen Transformationen der Gruppe in der Umgebung eines einzigen Punktes: $x_1^0 \cdots x_s^0$ von allgemeiner Lage.* Kennt man nämlich diese Anfangsglieder, so kann man offenbar die Zahlenwerthe $\alpha_{j\pi i}^0$ berechnen, welche die Functionen $\alpha_{j\pi i}(x)$ für $x_1 = x_1^0, \cdots x_s = x_s^0$ annehmen. Die oben definirte Zahl $s - \varrho$ ist dann nichts weiter als die Anzahl der von einander unabhängigen unter den in $dx_1 \cdots dx_s$ linearen Gleichungen:

$$\sum_1^s {}_\pi\, \alpha_{j\pi i}^0 dx_\pi = 0 \quad (j = 1 \cdots \varepsilon_1 - \nu_1;\ i = 1 \cdots s).$$

Das System der totalen Differentialgleichungen (6) hat einen sehr einfachen begrifflichen Sinn. Es definirt nämlich, wie man leicht direkt erkennt, alle dem Punkte $x_1 \cdots x_s$ unendlich benachbarten Punkte: $x_1 + dx_1, \cdots x_s + dx_s$, welche bei allen Transformationen unserer Gruppe invariant bleiben, die den Punkt $x_1 \cdots x_s$ in Ruhe lassen. Hierin liegt der innere Grund dafür, dass die $\varphi_{k\nu}(x)$ und ihre Functionen die einzigen Integralfunctionen des Systems (6) oder (8) sind; denn die Gleichungen:

$$\varphi_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) = \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) \quad (k = 1 \cdots r - n;\ \nu = 1 \cdots n)$$

definiren ja alle Punkte $y_1 \cdots y_s$, welche zugleich mit dem Punkte $x_1 \cdots x_s$ invariant bleiben.

§ 124.

Wir haben gefunden, dass die r-gliedrige Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ des Raumes $x_1 \cdots x_s$ asystatisch oder systatisch ist, je nachdem unter den auf S. 332 u. 497 definirten Functionen $\varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s)$ gerade s oder weniger als s von einander unabhängige vorhanden sind. Nun giebt es nach Kap. 20, Theorem 67, S. 376 stets dann aber auch nur dann eine mit allen $X_k f$ vertauschbare infinitesimale Transformation Zf, wenn die Zahl der unabhängigen unter den Functionen $\varphi_{k\nu}(x)$ kleiner ist als s. Folglich können wir auch sagen:

Satz 2. *Die r-gliedrige Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ des Raumes $x_1 \cdots x_s$ ist dann und nur dann systatisch, wenn es eine mit allen X_kf vertauschbare infinitesimale Transformation Zf giebt; giebt es keine solche infinitesimale Transformation, so ist die Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ asystatisch.**)

Da jede ausgezeichnete infinitesimale Transformation einer Gruppe mit allen andern infinitesimalen Transformationen derselben vertauschbar ist, haben wir ausserdem:

Satz 3. *Jede Gruppe, welche eine oder mehrere ausgezeichnete infinitesimale Transformationen enthält, ist systatisch.*

Bei solchen Gruppen erkennt man also schon aus der Zusammensetzung, dass sie systatisch sind.

Erinnern wir uns schliesslich noch, dass die adjungirte Gruppe einer Gruppe ohne ausgezeichnete infinitesimale Transformation r wesentliche Parameter enthält (vgl. Theorem 49, S. 277), so sehen wir, dass der folgende Satz gilt:

Satz 4. *Die Adjungirte einer asystatischen Gruppe ist stets r-gliedrig.*

Satz 2 und Satz 4 sind die seinerzeit angekündigten Verallgemeinerungen der Sätze 1 und 2 des Kapitels 16 (S. 277 f.).

Schon aus den Entwickelungen des Kapitels 20 hätten wir zu einer Eintheilung aller Gruppen in zwei Classen Anlass nehmen können; in die eine Classe hätten wir dann jede r-gliedrige Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ zu rechnen gehabt, für welche es wenigstens eine mit allen X_kf vertauschbare infinitesimale Transformation giebt, in die andere Classe alle übrigen Gruppen. Nach dem oben Gesagten ist klar, dass diese Eintheilung mit unserer jetzigen Eintheilung der Gruppen in systatische und asystatische zusammenfallen würde; die erste Classe würde aus allen systatischen Gruppen bestehen, die zweite aus allen asystatischen. Wir wollen im Folgenden diesen Umstand durch begriffliche Betrachtungen erklären und zugleich eine Reihe neuer wichtiger Resultate ableiten.

Es sei Θ eine Transformation, welche mit allen Transformationen einer vorgelegten r-gliedrigen Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ des Raumes $x_1 \cdots x_s$ vertauschbar ist, ferner sei S allgemeines Symbol aller derjenigen Transformationen der Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$, welche irgend einen allgemein gelegenen Punkt P des Raumes $x_1 \cdots x_s$ invariant lassen.

Geht P bei Ausführung der Transformation Θ in den Punkt P_1

*) Lie, Archiv for Math., Bd. 10, S. 377, Christiania 1885.

über, so ist $\Theta^{-1}S\Theta$ offenbar allgemeines Symbol aller Transformationen der Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$, welche den Punkt P_1 invariant lassen. Da nun aber Θ mit allen Transformationen der Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ vertauschbar ist, so ist der Inbegriff aller Transformationen $\Theta^{-1}S\Theta$ mit dem Inbegriff aller Transformationen S identisch, wir sehen also, dass alle Transformationen der Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$, welche den Punkt P festhalten, auch den Punkt P_1 in Ruhe lassen.

Wenden wir das auf den Fall an, dass es eine continuirliche Schaar von Transformationen Θ giebt, welche mit allen Transformationen der Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ vertauschbar sind.

Da P ein Punkt allgemeiner Lage ist, so nimmt er bei Ausführung der Transformationen Θ eine continuirliche Reihe von verschiedenen Lagen an. Jede dieser Lagen aber bleibt, wie wir soeben gesehen, bei allen Transformationen S invariant, folglich ist die Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ systatisch.

Damit ist bewiesen, dass die r-gliedrige Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ des Raumes $x_1 \cdots x_s$ jedenfalls dann systatisch ist, wenn es eine mit allen X_kf vertauschbare infinitesimale Transformation Zf giebt. Es bleibt noch übrig zu zeigen, dass auch das umgekehrte gilt, dass zu jeder systatischen Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ sich eine continuirliche Schaar von Transformationen angeben lässt, welche mit allen Transformationen $X_1f \cdots X_rf$ vertauschbar ist.

Wir denken uns also eine r-gliedrige systatische Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ des Raumes $x_1 \cdots x_s$. Wir werden eine Construction angeben, welche unendlich viele Transformationen liefert, die mit allen Transformationen dieser Gruppe vertauschbar sind.

Jede Transformation Θ, welche mit allen Transformationen der Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ vertauschbar ist, führt jeden Punkt P des Raumes in einen Punkt P_1 über, welcher genau dieselben Transformationen der Gruppe gestattet wie der Punkt P; das haben wir oben gezeigt. *Wählen wir daher irgend zwei Punkte P und P_1 aus, welche dieselben Transformationen unserer Gruppe gestatten, und versuchen wir eine Transformation Θ zu bestimmen, welche mit allen Transformationen unserer Gruppe vertauschbar ist, und überdies P in P_1 überführt.*

Es sei P' ein Punkt, in welchen P durch eine Transformation T der Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ übergeführt werden kann; es sei ferner wie früher S allgemeines Symbol aller Transformationen dieser Gruppe, welche P und also auch P_1 invariant lassen. Dann ist (Kap. 14, Satz 1, S. 227) ST allgemeines Symbol aller Transformationen unserer Gruppe, welche P in P' überführen. Offenbar nimmt P_1 bei allen diesen

Transformationen ST dieselbe Lage an, es ist ja:

$$(P_1)ST = (P_1)T.$$

Jetzt können wir, indem wir die Existenz *einer* Transformation Θ von der eben verlangten Beschaffenheit voraussetzen, leicht einsehen, dass jeder Punkt $P' = (P)T$ bei allen etwaigen Θ eine ganz bestimmte neue Lage erhält; dies folgt ja unmittelbar aus den Gleichungen:

$$(P')\Theta = (P)T\Theta = (P)\Theta T = (P_1)T.$$

Ist daher T eine beliebige Transformation unserer Gruppe, so nimmt der Punkt $(P)T$ bei jeder Transformation Θ, welche überhaupt existirt, die neue Lage $(P_1)T$ an.

Wir fügen hinzu, dass wir in dieser Weise keine Ueberbestimmung der neuen Lage des Punktes P' erhalten. Ersetzen wir nämlich in den letzten Gleichungen die Transformation T durch eine beliebige andere Transformation der Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$, welche ebenfalls P in P' überführt, schreiben wir also ST statt T, so kommt wiederum:

$$(P')\Theta = (P)ST\Theta = (P)\Theta ST = (P_1)ST = (P_1)T.$$

Betrachten wir zunächst den besonderen Fall, dass die systatische Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ *transitiv* ist.

Wenn die Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ transitiv ist, so kann der Punkt $(P)T$ bei geeigneter Wahl von T mit jedem Punkte des Raumes zur Deckung gebracht werden; ordnen wir daher jedem Punkte $(P)T$ des Raumes den Punkt $(P_1)T$ zu, so ist dadurch eine ganz bestimmte Transformation Θ' definirt. Gelingt es uns noch nachzuweisen, dass Θ' mit allen Transformationen unserer Gruppe vertauschbar ist, so ist klar, dass Θ' alle Eigenschaften besitzt, welche wir von der Transformation Θ verlangt haben und dass Θ' die einzige Transformation Θ ist, welche es überhaupt giebt.

Dass Θ' wirklich mit allen Transformationen unserer Gruppe vertauschbar ist, lässt sich leicht beweisen. Wir haben ja:

$$(P)T\Theta' = (P_1)T = (P)\Theta' T,$$

wo T eine beliebige Transformation unserer Gruppe bedeutet. Verstehen wir daher unter T ebenfalls eine beliebige Transformation unserer Gruppe, so erhalten wir:

$$(P)T\mathsf{T}\Theta' = (P)\Theta' T\mathsf{T} = (P)T\Theta'\mathsf{T},$$

mithin lässt die Transformation: $\mathsf{T}\Theta'\mathsf{T}^{-1}\Theta'^{-1}$ den Punkt $(P)T$, das heisst jeden Punkt des Raumes invariant. Daraus folgt, dass $\mathsf{T}\Theta'\mathsf{T}^{-1}\Theta'^{-1}$ die identische Transformation ist, das heisst: Θ' ist wirklich mit allen Transformationen unserer Gruppe vertauschbar.

Wenn daher die systatische Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ transitiv ist, so entspricht jedem Punktepaare P, P_1 von der oben definirten Beschaffenheit eine und nur eine mit allen Transformationen der Gruppe vertauschbare Transformation. Wählt man das Punktepaar in allen möglichen Weisen, so erhält man unendlich viele solche Transformationen; wie viele ist leicht zu entscheiden: Wenn jedesmal ∞^ϱ verschiedene Punkte bei allen Transformationen der Gruppe stehen bleiben, welche einen beliebig gewählten Punkt invariant lassen, so giebt es gerade ∞^ϱ verschiedene Transformationen, welche mit allen Transformationen der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ vertauschbar sind. Das stimmt mit Theorem 67, S. 376, denn wegen der eben gemachten Voraussetzung sind unter den $n(r-n)$ Functionen $\varphi_{k\nu}(x)$ gerade $s-\varrho$ von einander unabhängige vorhanden, es giebt also gerade ϱ unabhängige Transformationen $Z_1 f \cdots Z_\varrho f$, welche mit allen $X_k f$ vertauschbar sind.

Wir können daher den Satz aussprechen:

Satz 5. *Ist die r-gliedrige systatische Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ des Raumes $x_1 \cdots x_s$* transitiv, *und sind P und P_1 zwei Punkte, welche genau dieselben infinitesimalen Transformationen der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ gestatten, so giebt es eine und nur eine Transformation Θ, welche mit allen Transformationen der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ vertauschbar ist und welche P in P_1 überführt. Versteht man unter T das allgemeine Symbol einer Transformation der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$, so lässt sich Θ auch definiren als diejenige Transformation, welche jeden Punkt $(P)T$ in den Punkt $(P_1)T$ überführt. Gestatten jedesmal gerade ∞^ϱ verschiedene Punkte genau dieselben infinitesimalen Transformationen der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$, so giebt es gerade ∞^ϱ verschiedene Transformationen, welche mit allen Transformationen der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ vertauschbar sind.*

Die Entwickelungen über einfach transitive Gruppen, welche wir in Kap. 20, S. 390—395 gegeben haben, sind offenbar unter den eben durchgeführten Entwickelungen als besonderer Fall enthalten.

Jetzt wenden wir uns zu dem Falle, dass die r-gliedrige systatische Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ *intransitiv* ist. Doch wollen wir uns hier kurz fassen.

Ist die systatische Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ intransitiv, so giebt es nicht blos eine einzige Transformation, welche den Punkt P in den auf S. 511 definirten Punkt P_1 überführt und mit allen Transformationen unserer Gruppe vertauschbar ist, es giebt vielmehr unendlich viele verschiedene Transformationen von dieser Beschaffenheit. Wir werden angeben, wie man solche Transformationen findet.

Die intransitive systatische Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ bestimmt mehrere invariante Zerlegungen des Raumes $x_1 \cdots x_s$.

Eine erste Zerlegung wird durch die $s-\varrho<s$ Gleichungen:

$$\text{(a)} \qquad \varphi_1(x_1 \cdots x_s) = \text{const.}, \cdots \varphi_{s-\varrho}(x_1 \cdots x_s) = \text{const.}$$

dargestellt. Eine zweite bestimmen irgend $s - n > 0$ unabhängige Lösungen: $u_1(x) \cdots u_{s-n}(x)$ des n-gliedrigen vollständigen Systems: $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$; der analytische Ausdruck für diese Zerlegung lautet:

(b) $$u_1(x_1 \cdots x_s) = \text{const.}, \quad \cdots \quad u_{s-n}(x_1 \cdots x_s) = \text{const.}$$

Wir verstehen im Folgenden unter M_ϱ stets eine der $\infty^{s-\varrho}$ ϱ-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten (a) und unter M_n eine der ∞^{s-n} n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten (b).

Unter den Lösungen des vollständigen Systems: $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$ giebt es eine gewisse Anzahl, etwa $s - q \leqq s - n$, welche sich durch $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$ allein ausdrücken lassen; wir wollen annehmen, dass $u_1(x) \cdots u_{s-q}(x)$ solche Lösungen sind, dass also $s - q \leqq s - \varrho$ Relationen von der Form:

$$u_1(x) = \mathfrak{U}_1(\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)), \cdots u_{s-q}(x) = \mathfrak{U}_{s-q}(\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x))$$

bestehen, und dass jede Lösung des vollständigen Systems: $X_1 f = 0, \cdots X_n f = 0$, welche sich durch: $\varphi_1(x) \cdots \varphi_{s-\varrho}(x)$ allein ausdrücken lässt, eine Function von $u_1(x) \cdots u_{s-q}(x)$ ist (vgl. Kap. 19, S. 345). Dann stellen die $s - q$ Gleichungen:

(c) $$u_1(x_1 \cdots x_s) = \text{const.}, \quad \cdots \quad u_{s-q}(x_1 \cdots x_s) = \text{const.}$$

eine dritte bei der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ invariante Zerlegung dar. Die einzelnen Mannigfaltigkeiten dieser Zerlegung sind augenscheinlich die kleinsten Mannigfaltigkeiten, welche sowohl aus M_ϱ als aus M_n bestehen (vgl. Kap. 8, S. 146). Unter $\mathfrak{M}_q$ verstehen wir im Folgenden stets eine der ∞^{s-q} q-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten (c).

Eine vierte invariante Zerlegung endlich ist durch die Schnittmannigfaltigkeiten der M_ϱ und der M_n bestimmt (vgl. Kap. 8, S. 145), dieselbe wird offenbar durch die $s - \varrho + q - n$ Gleichungen:

(d) $$\begin{cases} \varphi_1(x) = \text{const.}, & \cdots \varphi_{s-\varrho}(x) = \text{const.}, \\ u_{s-q+1}(x) = \text{const.}, & \cdots u_{s-n}(x) = \text{const.} \end{cases}$$

bestimmt, welche nach Kap. 19, S. 345 f. von einander unabhängig sind. Wir wollen im Folgenden unter $N_{\varrho+n-q}$ stets eine der $\infty^{s-\varrho+q-n}(\varrho + n - q)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten (d) verstehen.

Um nun eine Transformation Θ zu finden, welche mit allen Transformationen der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ vertauschbar ist, verfahren wir folgendermassen:

Wir ordnen innerhalb jeder $\mathfrak{M}_q$ jeder M_n eine andere M_n zu, welche M_n' heissen möge, und zwar machen wir diese Zuordnung nach einem willkürlichen analytischen Gesetz. Sodann wählen wir auf jeder der ∞^{s-n} M_n einen beliebigen Punkt P aus und ordnen jedem der ∞^{s-n} gewählten Punkte einen beliebigen Punkt P_1 auf derjenigen $N_{\varrho+n-q}$ zu, in welcher sich die durch den Punkt gehende M_ϱ mit der M_n' schneidet, welche der durch den Punkt gehenden M_n entspricht.

Es giebt eine und nur eine Transformation Θ', welche jeden der ∞^{s-n} gewählten Punkte P in den ihm zugeordneten Punkt P_1 überführt. Diese Transformation Θ ist durch die symbolische Gleichung:

$$(P) T \Theta = (P_1) T$$

definirt, in welcher P allgemeines Symbol der ∞^{s-n} gewählten Punkte, T aber allgemeines Symbol der ∞^r Transformationen unserer Gruppe ist.

Man überzeugt sich leicht, dass die eben definirte Transformation Θ mit allen Transformationen der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ vertauschbar ist und dass man alle Transformationen Θ von dieser Beschaffenheit erhält, wenn man die in der Definition von Θ enthaltenen willkürlichen Elemente in allgemeinster Weise wählt.

Wir brauchen uns nicht damit aufzuhalten, das nachzuweisen; nur soviel sei bemerkt: Wenn man den analytischen Ausdruck der Transformation Θ aufstellt, so sieht man sofort, dass die Anzahl der in diesem Ausdruck vorkommenden willkürlichen Functionen und die Anzahl der in diesen Functionen vorkommenden Argumente mit dem Theor. 67, S. 376 stimmt.

Endlich noch eine Bemerkung, die sich sowohl auf intransitive als auf transitive systatische Gruppen bezieht: Wenn die Mannigfaltigkeit:

$$\varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) = \varphi_{k\nu}(x_1^0 \cdots x_s^0) \qquad (k = 1 \cdots r - n;\ \nu = 1 \cdots n)$$

für jedes Werthsystem $x_1^0 \cdots x_s^0$ in mehrere discrete Mannigfaltigkeiten zerfällt, so zerfällt auch der Inbegriff aller Transformationen, welche mit den Transformationen der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ vertauschbar sind, in mehrere discrete Schaaren.

§ 125.

Die Functionen $\varphi_{k\nu}(x)$, welche darüber entscheiden, ob eine Gruppe systatisch ist oder nicht, haben auch schon in dem Kapitel über die Aehnlichkeit r-gliedriger Gruppen eine grosse Rolle gespielt. Wir wollen jetzt an die damaligen Entwickelungen anknüpfen und dieselben nach einer gewissen Richtung hin vervollständigen.

Sind in gleichvielen Veränderlichen zwei r-gliedrige Gruppen:

$$X_k f = \sum_1^s {}_i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

und:

$$Y_k f = \sum_1^s {}_i\, \eta_{ki}(y_1 \cdots y_s) \frac{\partial f}{\partial y_i} \qquad (k = 1 \cdots r)$$

vorgelegt und bestehen dabei die Relationen:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_\sigma\, c_{ik\sigma} X_\sigma f \quad \text{und} \quad (Y_i Y_k) = \sum_1^r {}_\sigma\, c_{ik\sigma} Y_\sigma f,$$

beide Male mit denselben Constanten $c_{ik\sigma}$, so giebt es nach Kap. 19, S. 353 ff. dann und nur dann eine Transformation:

$$y_\nu = \Phi_\nu(x_1 \cdots x_s) \qquad (\nu = 1 \cdots s),$$

welche $X_1 f \cdots X_r f$ in bezüglich $Y_1 f \cdots Y_r f$ überführt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Bestehen zwischen $X_1 f \cdots X_r f$ Relationen von der Form:

$$X_{n+k}f = \sum_1^n{}^\nu \varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) \cdot X_\nu f \qquad (k=1\cdots r-n),$$

während $X_1 f \cdots X_n f$ nicht durch lineare Relationen verknüpft sind, so müssen zwischen $Y_1 f \cdots Y_r f$ analoge Relationen bestehen:

$$Y_{n+k}f = \sum_1^n{}^\nu \psi_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) \cdot Y_\nu f \qquad (k=1\cdots r-n),$$

es dürfen aber $Y_1 f \cdots Y_n f$ nicht durch lineare Relationen verknüpft sein; ausserdem dürfen die $n\,(r-n)$ Gleichungen:

(e) $$\varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) = \psi_{k\nu}(y_1 \cdots y_s) \qquad (k=1\cdots r-n;\ \nu=1\cdots n)$$

weder einander widersprechen noch Relationen zwischen den x allein oder den y allein ergeben.

Waren nun unter den Functionen $\varphi_{k\nu}(x)$ weniger als s von einander unabhängige vorhanden, so erforderte die Bestimmung einer Transformation, welche $X_1 f \cdots X_r f$ in bezüglich $Y_1 f \cdots Y_r f$ überführt, gewisse Integrationen; war dagegen die Anzahl der unabhängigen unter den $\varphi_{k\nu}(x)$ gerade gleich s, so stellten die Gleichungen (e) selbst eine Transformation dar, welche $X_1 f \cdots X_r f$ in $Y_1 f \cdots Y_r f$ überführt, und zwar die allgemeinste von dieser Beschaffenheit. Erinnern wir uns daher, dass im letzten Falle die Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ und natürlich auch die Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$ asystatisch ist, so erhalten wir den

Satz 6. *Weiss man, dass zwei r-gliedrige asystatische Gruppen in s Veränderlichen ähnlich sind und hat man schon in jeder der beiden Gruppen r solche unabhängige infinitesimale Transformationen:*

$$X_k f = \sum_1^s{}^i \xi_{ki}(x_1 \cdots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k=1\cdots r)$$

und:

$$Y_k f = \sum_1^r{}^i \eta_{ki}(y_1 \cdots y_s) \frac{\partial f}{\partial y_i} \qquad (k=1\cdots r)$$

ausgewählt, dass eine Transformation: $y_i = \Phi_i(x_1 \cdots x_s)$ existirt, welche $X_1 f \cdots X_r f$ in bezüglich $Y_1 f \cdots Y_r f$ überführt, so kann man die allgemeinste Transformation, welche die betreffende Ueberführung leistet, ohne Integration aufstellen; diese allgemeinste Transformation enthält weder willkürliche Functionen noch willkürliche Parameter.

Hieraus ergiebt sich, dass man ohne Integration die allgemeinste Transformation finden kann, welche überhaupt die asystatische Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ in die mit ihr ähnliche Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$ überführt. Man hat zu diesem Zwecke folgendermassen zu verfahren:

Man bestimme in der Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$ in allgemeinster Weise r solche unabhängige infinitesimale Transformationen:

$$\mathsf{Y}_j f = \sum_1^r {}_k \, \bar{g}_{jk} Y_k f \qquad (j = 1 \cdots r),$$

dass erstens die Relationen:

$$(\mathsf{Y}_i \mathsf{Y}_k) = \sum_1^r {}_\sigma \, c_{ik\sigma} \mathsf{Y}_\sigma f$$

bestehen und dass zweitens eine Transformation existirt, welche $X_1 f \cdots X_r f$ in bezüglich $\mathsf{Y}_1 f \cdots \mathsf{Y}_r f$ überführt. Dann kann man nach dem vorhin Gesagten ohne Integration die allgemeinste Transformation finden, welche die betreffende Ueberführung leistet und erhält damit zugleich die allgemeinste Transformation, welche die Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ in die Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$ verwandelt. Offenbar enthält diese Transformation nur willkürliche Parameter.

Lässt man insbesondere die Gruppe: $Y_1 f \cdots Y_r f$ mit der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ zusammenfallen, so erhält man auf die angegebene Weise alle Transformationen, welche die Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ invariant lassen. Der Inbegriff aller dieser Transformationen bildet nach Kap. 19, S. 361 eine Gruppe und zwar in unserem Falle augenscheinlich eine endliche Gruppe. Also:

Theorem 90. *Die grösste Gruppe, in welcher eine r-gliedrige asystatische Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ des Raumes $x_1 \cdots x_s$ als invariante Untergruppe enthalten ist, besitzt nur eine endliche Anzahl von Parametern. Man kann die endlichen Gleichungen dieser Gruppe ohne Integration finden, sobald die infinitesimalen Transformationen der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ gegeben sind.**)

Von Wichtigkeit ist es, dass man auch die endlichen Gleichungen der asystatischen Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ selbst ohne Integration finden kann, sobald ihre infinitesimalen Transformationen gegeben sind.

Man stelle einfach die endlichen Gleichungen:

$$\text{(f)} \qquad e_k' = \sum_1^r {}_j \, \psi_{kj}(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r) \cdot e_j \qquad (k = 1 \cdots r)$$

der zur Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ gehörigen adjungirten Gruppe auf; das verlangt ja nur ausführbare Operationen (vgl. Kap. 16, S. 273). Haben dann die gesuchten endlichen Gleichungen der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ die Form: $x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r)$, so nimmt nach Theor. 48, S. 275 die

*) Lie, Archiv for Math. Bd. 10, S. 378, Christiania 1885.

infinitesimale Transformation $X_k f$ bei Einführung der neuen Veränderlichen: $x_i' = f_i(x, \varepsilon)$ die Form an:

$$X_k f = \sum_1^r {}_j\, \psi_{jk}(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r) \cdot X_j' f \quad (k = 1 \cdots r),$$

wo wie gewöhnlich gesetzt ist:

$$\sum_1^n {}_i\, \xi_{ki}(x_1' \cdots x_s') \frac{\partial f}{\partial x_i'} = X_k' f.$$

Da nun die Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ asystatisch ist, so giebt es eine ganz bestimmte Transformation zwischen den x und den x', welche $X_1 f \cdots X_r f$ in bezüglich:

$$\sum_1^r {}_j\, \psi_{jk}(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r) \cdot X_j' f \quad (k = 1 \cdots r)$$

überführt. Indem man diese Transformation nach den früheren Regeln berechnet, findet man die gesuchten Gleichungen $x_i' = f_i(x, \varepsilon)$.

Sind insbesondere die Gleichungen (f) eine kanonische Form der adjungirten Gruppe (vgl. Kap. 9, S. 171), so erhält man offenbar die endlichen Gleichungen der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ auch in kanonischer Form. Wir haben somit den

Satz 7. *Kennt man die infinitesimalen Transformationen einer asystatischen Gruppe des Raumes $x_1 \cdots x_s$, so kann man die endlichen Gleichungen dieser Gruppe stets durch ausführbare Operationen finden und zwar in kanonischer Form.*

Es giebt noch allgemeinere Fälle, in denen sich die endlichen Gleichungen einer r-gliedrigen Gruppe, deren infinitesimale Transformationen: $X_1 f \cdots X_r f$ man kennt, ohne Integration bestimmen lassen. Wir wollen uns jedoch hier auf solche Fragen nicht näher einlassen sondern nur bemerken, dass die Bestimmung der endlichen Gleichungen unter anderm gelingt, wenn es keine mit allen $X_k f$ vertauschbare infinitesimale Transformation giebt, welche der Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ nicht angehört.

§ 126.

Es sei $X_1 f \cdots X_r f$ oder kurz G_r eine r-gliedrige *systatische* Gruppe des Raumes $x_1 \cdots x_s$ und G_{r-n} sei diejenige $(r - n)$-gliedrige Untergruppe der G_r, welche einem bestimmten Punkte $x_1^0 \cdots x_s^0$ von allgemeiner Lage zugeordnet ist. Die Mannigfaltigkeit:

$$\varphi_{k\nu}(x_1 \cdots x_s) = \varphi_{k\nu}(x_1^0 \cdots x_s^0) \quad (k = 1 \cdots r-n;\ \nu = 1 \cdots n),$$

welche aus allen bei der G_{r-n} invarianten Punkten besteht, möge mit M bezeichnet werden.

Da die G_{r-n} alle Punkte von M festhält, so lässt sie natürlich M selbst invariant; es ist aber denkbar, dass die G_r auch Transformationen enthält, welche die Mannigfaltigkeit M invariant lassen, ohne alle ihre Punkte festzuhalten. Wir wollen annehmen, dass die grösste Untergruppe der G_r, welche M invariant lässt, gerade $r - l$ Parameter enthält und wollen diese Untergruppe G_{r-l} nennen.

Die G_{r-n} ist selbstverständlich entweder mit der G_{r-l} identisch oder in ihr als Untergruppe enthalten. Das letztere tritt immer ein, wenn die G_r transitiv ist; in diesem Falle kann nämlich der Punkt $x_1^0 \cdots x_s^0$ durch geeignete Transformationen der G_r in alle Punkte von M übergeführt werden, und da augenscheinlich jede Transformation der G_r, welche $x_1^0 \cdots x_s^0$ in einen Punkt von M überführt, die Mannigfaltigkeit M invariant lässt, so enthält die G_r eine continuirliche Schaar von Transformationen, welche M invariant lassen, ohne alle Punkte von M festzuhalten; also ist im Falle einer transitiven G_r die Zahl $r - l$ sicher grösser als $r - n$. Ist aber die G_r intransitiv, so ist es sehr gut möglich, dass alle Transformationen der G_r, welche M invariant lassen, auch alle Punkte von M festhalten, dass also $r - l = r - n$ ist. Das zeigt z. B. die dreigliedrige intransitive systatische Gruppe:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad x_2^2 \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

der Ebene x_1, x_2.

Es ist leicht zu sehen, dass die G_{r-n} in der G_{r-l} invariant ist. In der That, die G_{r-n} wird von allen infinitesimalen Transformationen der G_{r-l} erzeugt, welche alle Punkte von M stehen lassen; diese infinitesimalen Transformationen erzeugen aber nach Kap. 17, Satz 7, S. 309 eine invariante Untergruppe der G_{r-n}. Wir haben somit den

Satz 8. *Ist: $X_1 f \cdots X_r f$ oder G_r eine r-gliedrige systatische Gruppe des Raumes $x_1 \cdots x_s$, ist ferner P ein Punkt von allgemeiner Lage und endlich M die Mannigfaltigkeit aller Punkte, welche bei allen Transformationen der G_r, die P gestattet, invariant bleiben, so ist die grösste Untergruppe der G_r, welche P invariant lässt, entweder identisch mit der grössten Untergruppe, welche M in Ruhe lässt, oder in derselben als invariante Untergruppe enthalten. Der erste Fall kann nur eintreten, wenn die G_r intransitiv ist; wenn die G_r transitiv ist, tritt stets der zweite Fall ein.*

Kennt man andererseits irgend eine r-gliedrige Gruppe G_r des Raumes $x_1 \cdots x_s$ und weiss man, dass die grösste Untergruppe G_{r-n} derselben, welche irgend einen Punkt P von allgemeiner Lage invariant lässt, in einer noch grösseren Untergruppe G_{r-h} mit $r - h > r - n$ Parametern invariant ist, so kann man schliessen, dass die G_r in die Classe der systatischen Gruppen gehört.

In der That, der Punkt P gestattet gerade $r - n$ unabhängige infinitesimale Transformationen der G_{r-h} und nimmt also (Kap. 23, Theor. 85, S. 483) bei allen ∞^{r-h} Transformationen der G_{r-h} gerade ∞^{n-h} verschiedene Lagen an, wo die Zahl $n - h$ unter der gemachten Voraussetzung mindestens gleich 1 ist. Da nun die G_{r-n} in der G_{r-h} invariant ist, so gehört zu jeder dieser ∞^{n-h} Lagen von P genau dieselbe $(r - n)$-gliedrige Untergruppe der G_r wie zum Punkte P, das heisst, die G_r ist wirklich systatisch. Also:

Satz 9. *Ist die r-gliedrige Gruppe G_r des Raumes $x_1 \cdots x_s$ so beschaffen, dass ihre grösste Untergruppe G_{r-n}, welche irgend einen Punkt von allgemeiner Lage invariant lässt, in einer noch grösseren Untergruppe der G_r oder gar in der G_r selbst invariant ist, so gehört die G_r zu der Classe der systatischen Gruppen.*

Aus diesem Satze ergiebt sich sofort, dass bei einer r-gliedrigen asystatischen Gruppe des Raumes $x_1 \cdots x_s$ die einem Punkte von allgemeiner Lage zugeordnete Untergruppe weder in der G_r selbst invariant ist, noch in einer grösseren Untergruppe der G_r. Ist aber umgekehrt die G_r so beschaffen, dass die einem Punkte von allgemeiner Lage zugeordnete Untergruppe in keiner grösseren Untergruppe invariant ist, so braucht sie deswegen noch nicht asystatisch zu sein, sie ist es nur dann nothwendig, wenn sie zugleich auch transitiv ist; das folgt offenbar aus dem Satze 8, S. 519. Wir können daher sagen:

Satz 10. *Eine r-gliedrige transitive Gruppe G_r des Raumes $x_1 \cdots x_s$ ist dann und nur dann asystatisch, wenn die einem Punkte von allgemeiner Lage zugeordnete Untergruppe in keiner grösseren Untergruppe invariant ist.*

In Kapitel 22, Theorem 79, S. 443 gaben wir eine Methode zur Bestimmung aller *transitiven* Gruppen, welche mit einer vorgelegten r-gliedrigen Gruppe Γ gleichzusammengesetzt sind. Wir können nunmehr diese Methode so specialisiren, dass sie insbesondere alle *transitiven asystatischen* Gruppen liefert, welche mit der Gruppe Γ gleichzusammengesetzt sind.

Man bestimme alle Untergruppen von Γ, welche weder eine in Γ invariante Untergruppe enthalten, noch in einer grösseren Untergruppe von Γ invariant sind. Jede dieser Untergruppen liefert, wenn nach den Regeln von Theor. 78 verfahren wird, eine transitive asystatische Gruppe, welche mit Γ gleichzusammengesetzt ist, und zwar findet man auf diese Weise alle transitiven asystatischen Gruppen von der betreffenden Zusammensetzung.

Auf Grund des Satzes 10 lässt sich die Frage beantworten, ob eine vorgelegte transitive Gruppe systatisch ist oder asystatisch. Man kann einen ähnlichen Satz aufstellen, vermöge dessen sich die Frage beantworten lässt, *ob eine vorgelegte transitive Gruppe primitiv ist oder nicht.*

Die r-gliedrige *transitive* Gruppe G_r des Raumes $x_1 \cdots x_s$ sei imprimitiv und:

$$u_1(x_1 \cdots x_s) = \text{const.}, \cdots u_{s-m}(x_1 \cdots x_s) = \text{const.} \quad (0 < m < s)$$

sei eine bei der Gruppe invariante Zerlegung des Raumes in ∞^{s-m} m-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten.

Da die G_r transitiv ist, so bilden alle ihre Transformationen, welche einen Punkt $x_1^0 \cdots x_s^0$ von allgemeiner Lage invariant lassen, eine $(r-s)$-gliedrige Untergruppe G_{r-s}, andererseits bilden alle ihre Transformationen, welche die m-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit:

$$u_1(x_1 \cdots x_s) = u_1(x^0), \cdots u_{s-m}(x_1 \cdots x_s) = u_{s-m}(x^0_s)$$

invariant lassen, eine $(r-s+m)$-gliedrige Untergruppe G_{r-s+m} (vgl. Kap. 23, S. 478 f.). Hierbei ist natürlich die G_{r-s} als Untergruppe in der G_{r-s+m} enthalten, welche ihrerseits offenbar eine wirkliche Untergruppe der G_r ist.

Denken wir uns jetzt umgekehrt irgend eine r-gliedrige transitive Gruppe $\mathfrak{G}_r$ des Raumes $x_1 \cdots x_s$ vorgelegt, und setzen wir voraus, dass die einem Punkte P von allgemeiner Lage zugeordnete $(r-s)$-gliedrige Untergruppe $\mathfrak{G}_{r-s}$ der $\mathfrak{G}_r$ in einer grösseren Untergruppe:

$$\mathfrak{G}_{r-s+h} \quad (r-s < r-s+h < r)$$

enthalten ist.

Werden auf P alle Transformationen der $\mathfrak{G}_{r-s+h}$ ausgeführt, so nimmt der Punkt ∞^h verschiedene Lagen an. Diese ∞^h Lagen bilden eine h-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit M, welche bei der $\mathfrak{G}_{r-s+h}$ invariant bleibt (vgl. Kap. 23, S. 483). Führen wir endlich auf M alle Transformationen der $\mathfrak{G}_r$ aus, so erhalten wir ∞^{s-h} verschiedene h-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten, welche eine Zerlegung des Raumes $x_1 \cdots x_s$ bestimmen.

In der That, da die Mannigfaltigkeit M bei der $\mathfrak{G}_{r-s+h}$ invariant bleibt, so nimmt sie bei den ∞^r Transformationen der $\mathfrak{G}_r$ höchstens ∞^{s-h} verschiedene Lagen an (vgl. Kap. 23, S. 483), sie nimmt andererseits wegen der Transitivität der $\mathfrak{G}_r$ mindestens ∞^{s-h} Lagen an, also erhält sie bei der $\mathfrak{G}_r$ genau ∞^{s-h} verschiedene Lagen, die den Raum gerade ausfüllen und daher eine Zerlegung bestimmen. Dass diese Zerlegung bei der $\mathfrak{G}_r$ invariant bleibt, folgt aus Theorem 85, S. 483.

Hieraus ergiebt sich, dass die $\mathfrak{G}_r$ unter den gemachten Voraussetzungen imprimitiv ist. Verbinden wir dieses Resultat mit dem oben gewonnenen, so erhalten wir zunächst das:

Theorem 91. *Eine r-gliedrige transitive Gruppe G_r des Raumes $x_1 \cdots x_s$ ist dann und nur dann primitiv, wenn die $(r-s)$-gliedrige Untergruppe G_{r-s}, welche irgend einem Punkte von allgemeiner Lage zugeordnet ist, in keiner grösseren Untergruppe der G_r enthalten ist.*

Aber noch mehr, wir erhalten offenbar zugleich eine Methode, um alle etwaigen Zerlegungen des Raumes $x_1 \cdots x_s$ zu bestimmen, welche bei einer vorgelegten transitiven Gruppe dieses Raumes invariant bleiben:

Theorem 92. *Ist eine r-gliedrige transitive Gruppe G_r des Raumes $x_1 \cdots x_s$ vorgelegt, so findet man alle etwaigen bei dieser Gruppe invarianten Zerlegungen des Raumes folgendermassen:*

Man bestimme zunächst die $(r-s)$-gliedrige Untergruppe G_{r-s} der G_r, bei welcher irgend ein Punkt P invariant bleibt, der auf keiner bei der G_r invarianten Mannigfaltigkeit liegt. Sodann suche man alle Untergruppen der G_r auf, welche die G_{r-s} enthalten. Ist G_{r-s+h} eine von diesen Untergruppen, so führe man auf P alle Transformationen der G_{r-s+h} aus; dabei nimmt der Punkt P ∞^h verschiedene Lagen an, die eine h-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit M bilden; führt man nunmehr auf M alle Transformationen der G_r aus, so nimmt M ∞^{s-h} verschiedene Lagen an, die eine bei der G_r invariante Zerlegung des Raumes bestimmen. Behandelt man in dieser Weise alle Untergruppen der G_r, welche die G_{r-s} umfassen, so erhält man alle bei der G_r invarianten Zerlegungen.

Wir können jetzt auch angeben, wie man die in Kap. 22, Theorem 79 auseinandergesetzte Methode zu specialisiren hat, um alle *primitiven* Gruppen zu finden, welche mit einer vorgelegten r-gliedrigen Gruppe Γ gleichzusammengesetzt sind.

Da alle primitiven Gruppen transitiv sind, so hat man folgendermassen zu verfahren:

Man bestimme alle Untergruppen von Γ, welche keine in Γ invariante Untergruppe enthalten und welche in keiner grösseren Untergruppe von Γ enthalten sind. Jede dieser Untergruppen liefert, wenn nach den Regeln von Theorem 78 verfahren wird, eine primitive mit Γ gleichzusammengesetzte Gruppe und zwar findet man auf diese Weise alle derartigen primitiven Gruppen. —

Das Theorem 92 zeigt, dass man alle bei einer *transitiven* Gruppe invarianten Zerlegungen ohne Integration finden kann, wenn die endlichen Gleichungen der Gruppe bekannt sind. Dasselbe gilt nun auch für intransitive Gruppen, doch bedarf man, um das einzusehen, ziemlich langer Ueberlegungen, welche hier auseinanderzusetzen nicht zweckmässig sein dürfte.

Kapitel 25.

Differentialinvarianten.

Wir denken uns in n Veränderlichen eine Transformation vorgelegt:

$$(1) \qquad y_i = f_i(x_1 \cdots x_n) \qquad (i=1 \cdots n)$$

und denken uns diese Transformation auf ein System von $n-q$ unabhängigen Gleichungen:

$$(2) \qquad \Omega_k(x_1 \cdots x_n) = 0 \qquad (k=1 \cdots n-q)$$

in den x ausgeführt; wir erhalten auf diese Weise ein neues Gleichungensystem:

$$(2')\qquad \overline{\Omega}_k(y_1 \cdots y_n) = 0 \quad (k=1\cdots n-q)$$

in den y.

Nun lassen sich vermöge der Gleichungen (2) $n-q$ von den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ als Functionen der q übrigen darstellen und diese $n-q$ besitzen natürlich gewisse Differentialquotienten: $p_1, p_2 \cdots$ nach den q übrigen. Andererseits lassen sich vermöge der Gleichungen (2') $n-q$ von den Veränderlichen $y_1 \cdots y_n$ als Functionen der q übrigen darstellen und diese $n-q$ besitzen ihrerseits gewisse Differentialquotienten: $p_1', p_2' \cdots$ nach den q übrigen.

Zwischen den beiden so definirten Reihen von Differentialquotienten besteht ein gewisser Zusammenhang, welcher im Wesentlichen von der Form der $n-q$ Relationen (2) unabhängig ist. Wir werden im Verlaufe des Kapitels diesen bekannten Zusammenhang ausführlich auseinandersetzen und erinnern hier nur daran, dass sich die p' erster bis m-ter Ordnung als Functionen von $x_1 \cdots x_n$ und den p erster bis m-ter Ordnung darstellen lassen, während die p als Functionen von $x_1' \cdots x_n'$ und den p' ausgedrückt werden können. Hieraus geht hervor, dass man aus der Transformation (1) eine neue Transformation herleiten kann, welche ausser den x auch die Differentialquotienten von der ersten bis zur m-ten Ordnung transformirt. Wir wollen sagen, dass *diese neue Transformation durch Erweiterung der Transformation* (1) *erhalten wird.*

Augenscheinlich kann die Erweiterung der Transformation (1) in sehr mannigfacher Weise geschehen, da es ganz dem Belieben überlassen ist, wie viele und welche von den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ man als Functionen der übrigen ansehen will. Man kann sogar die Zahl der Möglichkeiten noch vergrössern, indem man Hülfsveränderliche: $t_1, t_2 \cdots$ hinzunimmt, welche von der Transformation (1) gar nicht transformirt werden, wenn man also zu den Gleichungen der Transformation (1) die identische Transformation in den Hülfsveränderlichen: $t_1, t_2 \cdots$ hinzufügt.

Ist eine r-gliedrige Gruppe vorgelegt, so können wir alle ihre ∞^r Transformationen erweitern und erhalten so ∞^r erweiterte Transformationen; diese letzteren bilden, wie wir sehen werden, ihrerseits eine r-gliedrige Gruppe, welche mit der ursprünglichen Gruppe gleichzusammengesetzt ist.

§ 127.

Wir betrachten zunächst eine besonders einfache Art der Erweiterung.

In der Transformation:

$$(1)\qquad y_i = f_i(x_1 \cdots x_n) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

betrachten wir die Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ als Functionen einer Hülfsveränderlichen t, welche von der Transformation (1) gar nicht transformirt wird. Offenbar sind dann auch $y_1 \cdots y_n$ als Functionen von t aufzufassen; setzen wir daher:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i^{(1)}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = y_i^{(1)},$$

so ergiebt sich aus (1) durch Differentiation nach t:

$$(3)\qquad y_i^{(1)} = \sum_1^n {}_\nu \frac{\partial f_i}{\partial x_\nu} x_\nu^{(1)} \qquad (i = 1 \cdots n).$$

Nehmen wir (1) und (3) zusammen, so erhalten wir eine Transformation in den $2n$ Veränderlichen x_i und $x_i^{(1)}$.

Die Transformation (1), (3) ist in gewissem Sinne die einfachste Transformation, welche man aus (1) durch Erweiterung ableiten kann.

Wenden wir die eben beschriebene specielle Erweiterung auf alle ∞^r Transformationen der r-gliedrigen Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$, oder:

$$(4)\qquad y_i = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

an, so erhalten wir ∞^r erweiterte Transformationen, welche offenbar die Form haben:

$$(5)\qquad y_i = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r),\ y_i^{(1)} = \sum_1^n {}_\nu \frac{\partial f_i(x, a)}{\partial x_\nu} x_\nu^{(1)} \qquad (i = 1 \cdots n).$$

Es lässt sich leicht nachweisen, dass die Gleichungen (5) eine r-gliedrige Gruppe in den $2n$ Veränderlichen x_i, $x_i^{(1)}$ darstellen.

In der That, die Gleichungen:

$$y_i = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r) \quad \text{und} \quad z_i = f_i(y_1 \cdots y_n,\ b_1 \cdots b_r)$$

haben nach Voraussetzung zur Folge:

$$z_i = f_i(x_1 \cdots x_n,\ c_1 \cdots c_r),$$

wo die c nur von den a und den b abhängen. Mithin ergiebt sich aus:

$$y_i^{(1)} = \sum_1^n {}_\nu \frac{\partial f_i(x, a)}{\partial x_\nu} x_\nu^{(1)} \quad \text{und} \quad z_j^{(1)} = \sum_1^n {}_i \frac{\partial f_j(y, b)}{\partial y_i} y_i^{(1)}$$

durch Elimination der $y_i^{(1)}$:

$$z_j^{(1)} = \sum_{i\nu}^{1 \cdots n} \frac{\partial f_j(y, b)}{\partial y_i} \frac{\partial f_i(x, a)}{\partial x_\nu} x_\nu^{(1)}$$

$$= \sum_1^n {}_\nu \frac{\partial f_j(y, b)}{\partial x_\nu} x_\nu^{(1)} = \sum_1^n {}_\nu \frac{\partial f_j(x, c)}{\partial x_\nu} x_\nu^{(1)},$$

womit der angekündigte Nachweis geführt ist.

Aus dem Gesagten geht überdies hervor, dass die neue Gruppe dieselbe Parametergruppe besitzt, wie die ursprüngliche Gruppe:

$$y_i = f_i(x_1 \cdots x_n,\ a_1 \cdots a_r).$$

Die neue Gruppe:

$$(5) \qquad y_k = f_k(x, a),\ y_k^{(1)} = \sum_1^n {}_i \frac{\partial f_k}{\partial x_i} x_i^{(1)} \qquad (k = 1 \cdots n),$$

welche ein erstes Beispiel einer *erweiterten Gruppe* darbietet, hat einen sehr einfachen begrifflichen Sinn.

Deutet man nämlich $x_1 \cdots x_n$ als gewöhnliche Punktcoordinaten eines n-fach ausgedehnten Raumes, so kann man die $2n$ Grössen: $x_1 \cdots x_n,\ x_1^{(1)} \cdots x_n^{(1)}$ als Bestimmungsstücke einer durch den Punkt $x_1 \cdots x_n$ gehenden Richtung auffassen, mithin als Bestimmungsstücke eines *Linienelements*; dabei sind $x_1^{(1)} \cdots x_n^{(1)}$ homogene Coordinaten in dem Gebiete der ∞^{n-1} Richtungen, welche durch den Punkt $x_1 \cdots x_n$ gehen.

Die neue Gruppe (5) *in den* $x, x^{(1)}$ *giebt an, in welcher Weise die Linienelemente des Raumes* $x_1 \cdots x_n$ *von der ursprünglichen Gruppe:* $y_i = f_i(x, a)$ *unter einander vertauscht werden.*

Da die Gruppe: $y_i = f_i(x, a)$ von den r unabhängigen infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \cdots X_r f$ erzeugt ist, so lauten ihre endlichen Gleichungen in kanonischer Form:

$$y_k = x_k + \sum_1^r {}_j e_j \xi_{jk} + \cdots \qquad (k = 1 \cdots n).$$

Legen wir diese Form der Gruppe: $y_i = f_i(x, a)$ zu Grunde, um die erweiterte Gruppe (5) zu bilden, so erhalten die Gleichungen dieser letzteren die Gestalt:

$$(6) \qquad y_k = x_k + \sum_1^r {}_j e_j \xi_{jk} + \cdots,\ y_k^{(1)} = x_k^{(1)} + \sum_1^r {}_j e_j \xi_{jk}^{(1)} + \cdots$$
$$(k = 1 \cdots n),$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\sum_1^n {}_i \frac{\partial \xi_{jk}}{\partial x_i} x_i^{(1)} = \xi_{jk}^{(1)}.$$

Wir erkennen hieraus sofort, dass die erweiterte Gruppe die identische Transformation enthält, zugleich aber kommen wir auf die Vermuthung, dass sie von den r unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$X_k^{(1)}f = \sum_1^n{}^i\, \xi_{ki}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n{}^i\, \xi_{ki}^{(1)}\frac{\partial f}{\partial x_i^{(1)}} \quad (k=1\cdots r)$$

erzeugt ist. Die Richtigkeit dieser Vermuthung lässt sich folgendermassen beweisen:

Die n Functionen: $y_i = f_i(x, a)$ befriedigen nach Theorem 3, S. 33 Differentialgleichungen von der Form:

$$\frac{\partial y_i}{\partial a_k} = \sum_1^r{}^j\, \psi_{jk}(a_1\cdots a_r)\cdot\xi_{ji}(y_1\cdots y_n) \quad (i=1\cdots n;\ k=1\cdots r). \tag{7}$$

Differentiiren wir diese Gleichungen nach t und berücksichtigen wir, dass die a von t unabhängig sind, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial y_i^{(1)}}{\partial a_k} = \sum_1^r{}^j\, \psi_{jk}(a)\sum_1^n{}^\nu \frac{\partial \xi_{ji}(y)}{\partial y_\nu}\, y_\nu^{(1)} \quad (i=1\cdots n,\ k=1\cdots r). \tag{8}$$

Sind nun $a_1^0\cdots a_r^0$ die Parameter der identischen Transformation in der Gruppe: $y_i = f_i(x,a)$, so verschwindet die Determinante: $\Sigma\pm\psi_{11}(a)\cdots\psi_{rr}(a)$ für: $a_1 = a_1^0, \cdots a_r = a_r^0$ nicht; aber $a_1^0\cdots a_r^0$ sind auch die Parameter der identischen Transformation der erweiterten Gruppe (5); folglich können wir aus den Gleichungen (7) und (8) in der bekannten Weise (vgl. Kap. 4, S. 69 ff.) schliessen, dass die erweiterte Gruppe wirklich von den r unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_k^{(1)}f$ erzeugt ist. Wir bezeichnen die $X_k^{(1)}f$ als *erweiterte infinitesimale Transformationen.*

Als die unabhängigen infinitesimalen Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe befriedigen die $X_k^{(1)}f$ paarweise Relationen von der Form:

$$X_k^{(1)}X_j^{(1)}f - X_j^{(1)}X_k^{(1)}f = \sum_1^r{}^s\, c'_{kjs}X_s^{(1)}f.$$

Hier müssen rechts und links die Coefficienten der $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ übereinstimmen, es muss also sein: $X_kX_jf - X_jX_kf = \Sigma^s\, c'_{kjs}X_sf$, folglich wird:

$$\sum_1^r{}^s\, (c'_{kjs} - c_{kjs})\, X_sf = 0,$$

oder wegen der Unabhängigkeit von $X_1f\cdots X_rf$:

$$c'_{kjs} = c_{kjs} \quad (k, j, s = 1\cdots r).$$

Somit ist die erweiterte Gruppe (5) mit der ursprünglichen Gruppe holoedrisch isomorph, was damit stimmt, dass beide Gruppen nach S. 525 dieselbe Parametergruppe besitzen. —

Wir geben noch einen zweiten direkten Beweis des eben gefundenen Resultats.

Sind $X_k f$ und $X_j f$ *beliebige* infinitesimale Transformationen und werden die zugehörigen erweiterten infinitesimalen Transformationen wie früher mit $X_k^{(1)} f$ und $X_j^{(1)} f$ bezeichnet, so ergiebt sich:

$$X_k^{(1)} X_j^{(1)} f - X_j^{(1)} X_k^{(1)} f = X_k X_j f - X_j X_k f +$$
$$+ \sum_{\pi i \nu}^{1 \cdots n} \left\{ \xi_{ki} \frac{\partial^2 \xi_{j\pi}}{\partial x_i \partial x_\nu} - \xi_{ji} \frac{\partial^2 \xi_{k\pi}}{\partial x_i \partial x_\nu} \right\} x_\nu^{(1)} \frac{\partial f}{\partial x_\pi^{(1)}} +$$
$$+ \sum_{\pi i \nu}^{1 \cdots n} \left\{ \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_\nu} \frac{\partial \xi_{j\pi}}{\partial x_i} - \frac{\partial \xi_{ji}}{\partial x_\nu} \frac{\partial \xi_{k\pi}}{\partial x_i} \right\} x_\nu^{(1)} \frac{\partial f}{\partial x_\pi^{(1)}}$$

oder:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} X_k^{(1)} X_j^{(1)} f - X_j^{(1)} X_k^{(1)} f &= \sum_{\pi i}^{1 \cdots n} \left\{ \xi_{ki} \frac{\partial \xi_{j\pi}}{\partial x_i} - \xi_{ji} \frac{\partial \xi_{k\pi}}{\partial x_i} \right\} \frac{\partial f}{\partial x_\pi} + \\ &+ \sum_{\pi i}^{1 \cdots n} \frac{d}{dt} \left\{ \xi_{ki} \frac{\partial \xi_{j\pi}}{\partial x_i} - \xi_{ji} \frac{\partial \xi_{k\pi}}{\partial x_i} \right\} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\pi^{(1)}}. \end{aligned} \right.$$

Nehmen wir nun insbesondere an, dass die $X_k f$ infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe sind und dass dabei:

$$X_k X_j f - X_j X_k f = \sum_1^r {}_s\, c_{kjs} X_s f$$

ist, so folgt:

$$X_k^{(1)} X_j^{(1)} f - X_j^{(1)} X_k^{(1)} f = \sum_1^r {}_s\, c_{kjs} \sum_1^n {}_\pi\, \xi_{s\pi} \frac{\partial f}{\partial x_\pi} +$$
$$+ \sum_1^r {}_s\, c_{kjs} \sum_1^n {}_\pi\, \frac{d}{dt} \xi_{s\pi} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\pi} = \sum_1^r {}_s\, c_{kjs} X_s^{(1)} f,$$

was zu beweisen war.*)

Von besonderem Interesse in der eben durchgeführten Rechnung ist die allgemeine Formel (9), welche sich in Worten aussprechen lässt wie folgt:

Satz 1. *Bildet man zu zwei beliebigen infinitesimalen Transformationen:*

$$X_1 f = \sum_1^n {}_i\, \xi_{1i} \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad X_2 f = \sum_1^n {}_i\, \xi_{2i} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

---

*) Die vorstehenden analytischen Entwickelungen haben grosse Aehnlichkeit mit gewissen Entwickelungen des Kapitels 20 (vgl. S. 370 f.). Der innere Grund dieses Zusammenhangs liegt darin, dass die Grössen ζ auf S. 370 nichts anderes sind, als gewisse Differentialquotienten: $\frac{\delta y}{\delta t}$ von den y nach t.

die erweiterten infinitesimalen Transformationen:

$$X_k^{(1)}f = \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki}^{(1)} \frac{\partial f}{\partial x_i^{(1)}} \quad (k = 1, 2).$$

so ist $X_1^{(1)} X_2^{(1)} f - X_2^{(1)} X_1^{(1)} f$ *die zu* $X_1 X_2 f - X_2 X_1 f$ *gehörige erweiterte infinitesimale Transformation.*

§ 128.

Wir fragen jetzt, wie sich entscheiden lässt, ob die *Gleichung:*

$$\sum_1^n {}_\nu\, U_\nu(x_1 \cdots x_n) \cdot x_\nu^{(1)} = 0$$

jede endliche Transformation der erweiterten eingliedrigen Gruppe:

$$X^{(1)}f = \sum_1^n {}_i\, \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i\nu}^{1 \cdots n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu} x_\nu^{(1)} \frac{\partial f}{\partial x_i^{(1)}}$$

gestattet.

Nach Kap. 7, S. 112 thut sie es dann und nur dann, wenn $X^{(1)}(\Sigma\, U_\nu x_\nu^{(1)})$ vermöge $\Sigma\, U_\nu x_\nu^{(1)} = 0$ verschwindet. Durch Ausrechnung findet man:

$$X^{(1)}\left(\sum_1^n {}_\nu\, U_\nu x_\nu^{(1)}\right) = \sum_1^n {}_\nu\, X U_\nu \cdot x_\nu^{(1)} + \sum_1^n {}_\nu\, U_\nu \sum_1^n {}_i \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_i} x_i^{(1)},$$

also einen Ausdruck, welcher in den $x_i^{(1)}$ linear ist. *Mithin gestattet die Gleichung:* $\Sigma\, U_\nu x_\nu^{(1)} = 0$ *dann und nur dann die eingliedrige Gruppe* $X^{(1)}f$, *wenn eine Relation von der Form:*

$$X^{(1)}\left(\sum_1^n {}_\nu\, U_\nu x_\nu^{(1)}\right) = \varrho \sum_1^n {}_\nu\, U_\nu x_\nu^{(1)}$$

besteht, unter ϱ *eine Function von* $x_1 \cdots x_n$ *allein verstanden.*

Nebenbei mag bemerkt werden, dass der *Ausdruck* $\Sigma\, U_\nu x_\nu^{(1)}$ stets dann aber auch nur dann bei jeder endlichen Transformation der erweiterten Gruppe $X^{(1)}f$ invariant bleibt, wenn der Ausdruck: $X^{(1)}(\Sigma\, U_\nu x_\nu^{(1)})$ identisch verschwindet.

Endlich wird ein System von m Gleichungen:

$$(10) \qquad \sum_1^n {}_i\, U_{ki}(x_1 \cdots x_n) \cdot x_i^{(1)} = 0 \quad (k = 1 \cdots m)$$

dann und nur dann alle Transformationen der erweiterten Gruppe $X^{(1)}f$ gestatten, wenn jeder Ausdruck: $X^{(1)}(\Sigma\, U_{ki} x_i^{(1)})$ vermöge des Systems verschwindet, wenn also Relationen von der Form:

$$X^{(1)}\left(\sum_1^n{}^i U_{ki}x_i^{(1)}\right)=\sum_1^m{}^j \varrho_{kj}\sum_1^n{}^i U_{ji}x_i^{(1)} \quad (k=1\cdots m)$$

bestehen, wo die ϱ_{kj} Functionen von den x allein bedeuten.

Verbinden wir den Satz 5 des Kapitels 7, S. 118 mit dem oben bewiesenen Satze 1 (S. 527), so ergiebt sich offenbar der

Satz 2. *Gestattet ein Gleichungensystem von der Form:*

$$(10)\qquad \sum_1^n{}^i U_{ki}(x_1\cdots x_n)\cdot x_i^{(1)}=0 \quad (k=1\cdots m)$$

die beiden eingliedrigen Gruppen: $X_1^{(1)}f$ *und* $X_2^{(1)}f$, *welche bezüglich aus* X_1f *und* X_2f *durch die oben definirte besondere Erweiterung hergeleitet sind, so gestattet es zu gleicher Zeit die eingliedrige Gruppe:* $X_1^{(1)}X_2^{(1)}f-X_2^{(1)}X_1^{(1)}f$, *welche aus der Gruppe:* $X_1X_2f-X_2X_1f$ *durch Erweiterung hergeleitet ist.*

Wir haben den vorstehenden Satz erhalten, indem wir den Satz 5 des Kapitels 7 auf den besonderen Fall eines Gleichungensystems von der Form (10) anwendeten. Es muss aber erwähnt werden, dass unser jetziger Satz sich weit leichter beweisen lässt, als der allgemeine Satz 5 des Kapitels 7. Man kann nämlich ohne Schwierigkeit durch Rechnung sich überzeugen, dass ein Gleichungensystem (10), welches $X_1^{(1)}f$ und $X_2^{(1)}f$ gestattet, auch $X_1^{(1)}X_2^{(1)}f-X_2^{(1)}X_1^{(1)}f$ zulässt.

Eine Gleichung von der Form:

$$\sum_1^n{}^i U_i(x_1\cdots x_n)\cdot dx_i=0$$

nennen wir eine *Pfaffsche Gleichung*, ihre linke Seite bezeichnen wir als einen *Pfaffschen Ausdruck.*

Aus den bisherigen Entwickelungen des gegenwärtigen Kapitels ergeben sich wichtige Sätze über Systeme von Pfaffschen Gleichungen:

$$(10')\qquad \sum_1^n{}^i U_{ki}(x_1\cdots x_n)\cdot dx_i=0 \quad (k=1\cdots m).$$

Die Ausführung der Transformation: $y_i=f_i(x_1\cdots x_n)$ auf den Differentialausdruck: $\Sigma^i\, U_{ki}(x_1\cdots x_n)\,dx_i$ geschieht offenbar in der Weise, dass man die $2n$ Grössen $x_1\cdots x_n$, $dx_1\cdots dx_n$ durch die erweiterte Transformation:

$$y_i=f_i(x_1\cdots x_n),\quad dy_i=\sum_1^n{}^\nu \frac{\partial f_i}{\partial x_\nu}dx_\nu \quad (i=1\cdots n)$$

transformirt. Hieraus folgt, dass das System der Pfaffschen Gleichungen:

$$(10') \qquad \sum_1^n {}_i\, U_{ki}(x_1 \cdots x_n) \cdot dx_i = 0 \qquad (k = 1 \cdots m)$$

dann und nur dann bei der eingliedrigen Gruppe Xf invariant bleibt, wenn das Gleichungensystem:

$$\sum_1^n {}_i\, U_{ki}(x_1 \cdots x_n) \cdot x_i^{(1)} = 0 \qquad (k = 1 \cdots m)$$

die erweiterte eingliedrige Gruppe:

$$X^{(1)}f = \sum_1^n {}_i\, \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n {}_i\, \xi_i^{(1)} \frac{\partial f}{\partial x_i^{(1)}}$$

gestattet, wenn also m Relationen von der Form:

$$\sum_1^n {}_i\, X U_{ki} \cdot x_i^{(1)} + \sum_1^n {}_i\, U_{ki} \sum_1^n {}_\nu \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu} x_\nu^{(1)} = \sum_1^m {}_j\, \varrho_{kj}(x) \sum_1^n {}_i\, U_{ji} x_i^{(1)}$$
$$(k = 1 \cdots m)$$

bestehen oder, was auf dasselbe hinauskommt, m Relationen von der Form:

$$\sum_1^n {}_i\, X U_{ki} \cdot dx_i + \sum_1^n {}_i\, U_{ki}\, d(Xx_i) = \sum_1^m {}_j\, \varrho_{kj}(x) \sum_1^n {}_i\, U_{ji}\, dx_i$$
$$(k = 1 \cdots m).$$

Führen wir daher die abgekürzte Schreibweise ein:

$$\sum_1^n {}_i\, X U_{ki} \cdot dx_i + \sum_1^n {}_i\, U_{ki}\, d(Xx_i) = X\left(\sum_1^n {}_i\, U_{ki}\, dx_i \right),$$

so erhalten wir den

Satz 3. *Soll das System der m Pfaffschen Gleichungen:*

$$(10') \qquad \sum_1^n {}_i\, U_{ki}(x_1 \cdots x_n) \cdot dx_i = 0 \qquad (k = 1 \cdots m)$$

alle Transformationen: $y_i = x_i + \varepsilon X x_i + \cdots$ der eingliedrigen Gruppe Xf gestatten, sollen also für jeden Werth von ε Relationen von der Form:

$$\sum_1^n {}_i\, U_{ki}(y_1 \cdots y_n) \cdot dy_i = \sum_1^m {}_j\, \omega_{kj}(x_1 \cdots x_n, \varepsilon) \sum_1^n {}_i\, U_{ji}(x)\, dx_i \qquad (k = 1 \cdots m)$$

bestehen, so ist nothwendig und hinreichend, dass die m Ausdrücke $X(\Sigma\, U_{ki}\, dx_i)$ sich in der Form:

$$X\left(\sum_1^n {}_i\, U_{ki}\, dx_i \right) = \sum_1^m {}_j\, \varrho_{kj}(x) \sum_1^n {}_i\, U_{ji}\, dx_i \qquad (k = 1 \cdots m)$$

darstellen lassen.

Führen wir endlich die Redeweise ein: *das System der Pfaffschen Gleichungen* (10') *gestattet die infinitesimale Transformation* Xf, *wenn* m *Relationen von der Form:*

$$X\left(\sum_1^n{}_i\, U_{ki}dx_i\right) = \sum_1^m{}_j\, \varrho_{kj}(x) \sum_1^n{}_i\, U_{ji}dx_i$$

bestehen, so können wir den letzten Satz auch folgendermassen aussprechen:

Das System der m Pfaffschen Gleichungen (10') *gestattet dann und nur dann alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe* Xf, *wenn es die infinitesimale Transformation* Xf *gestattet.*

Ausserdem geht aus Satz 2 ohne Weiteres hervor:

Theorem 93. *Gestattet ein System von m Pfaffschen Gleichungen:*

$$\sum_1^n{}_i\, U_{ki}(x_1 \cdots x_n) \cdot dx_i = 0 \qquad (k = 1 \cdots m)$$

die beiden eingliedrigen Gruppen: X_1f *und* X_2f, *so gestattet es gleichzeitig auch die eingliedrige Gruppe:* $X_1X_2f - X_2X_1f$.

Zu bemerken ist noch, dass der Pfaffsche *Ausdruck:* $\Sigma^i\, U_i(x_1 \cdots x_n)\, dx_i$ dann und nur dann bei jeder Transformation der eingliedrigen Gruppe Xf invariant bleibt, wenn der Ausdruck: $X(\Sigma\, U_i dx_i)$ identisch verschwindet.

Wir sind früher (S. 53 f.) übereingekommen, dass wir an Stelle von ξ_i zuweilen auch $\frac{\delta x_i}{\delta t}$ schreiben wollen und an Stelle von Xf auch $\frac{\delta f}{\delta t}$. In ähnlicher Weise wollen wir an Stelle von $X(\Sigma\, U_i dx_i)$ auch wohl schreiben: $\frac{\delta}{\delta t} \Sigma\, U_i dx_i$; wir haben dann die Gleichung:

$$\delta\left(\sum_1^n{}_i\, U_i dx_i\right) = \sum_1^n{}_i\, \delta U_i \cdot dx_i + \sum_1^n{}_i\, U_i d\delta x_i,$$

welche in derselben Bedeutung in der Variationsrechnung vorkommt.

§ 129.

Die Sätze des vorigen Paragraphen reichen vollkommen aus, um die Theorie der Erweiterung einer Gruppe durch Hinzufügung von Differentialquotienten in voller Allgemeinheit abzuleiten. Wir wollen jedoch erst einen besonderen Fall betrachten, ehe wir die Behandlung des allgemeinen Falles in Angriff nehmen. Dabei knüpfen wir an bekannte geometrische Begriffe des dreifach ausgedehnten Raumes an.

Unter x, y, z mögen gewöhnliche Punktcoordinaten des dreifach ausgedehnten Raumes verstanden werden und es sei ferner:

(11) $$x' = \Xi(x, y, z), \quad y' = \mathrm{H}, \quad z' = \mathrm{Z}$$

eine Transformation dieses Raumes.

Bei der Transformation (11) werden alle Punkte x, y, z transformirt, das heisst in neue Lagen: x', y', z' übergeführt. Gleichzeitig nehmen auch alle Flächen neue Lagen an: jede Fläche: $\chi(x, y, z) = 0$ geht in eine neue Fläche: $\psi(x', y', z') = 0$ über, deren Gleichung durch Elimination von x, y, z aus den Gleichungen (11) der Transformation in Verbindung mit $\chi = 0$ erhalten wird.

In der Natur der Sache liegt es, dass die Transformation (11) solche Flächen, die einander berühren, wenigstens im Allgemeinen in Flächen überführt, welche in derselben Beziehung stehen. Bezeichnen wir daher mit dem Ausdruck *Flächenelement den Inbegriff eines auf einer Fläche gelegenen Punktes x, y, z und der hindurchgehenden Tangentialebene:*

$$z_1 - z = p(x_1 - x) + q(y_1 - y) \quad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

so können wir sagen, dass unsere Transformation (11) jedes Flächenelement x, y, z, p, q in ein neues Flächenelement x', y', z', p', q' verwandelt. Mit andern Worten, es müssen gewisse Gleichungen:

$$(12) \qquad p' = \Pi(x, y, z, p, q), \quad q' = \mathsf{K}(x, y, z, p, q)$$

bestehen, welche wir weiter unten wirklich aufstellen werden. Die Gleichungen (11) und (12) zusammengenommen stellen eine Transformation dar, welche aus der Transformation (11) durch Erweiterung entstanden ist.

Setzen wir nunmehr voraus, dass ∞^r Transformationen:

$$(13) \qquad x' = \Xi(x, y, z, a_1 \cdots a_r), \quad y' = \mathsf{H}, \quad z' = \mathsf{Z}$$

vorgelegt sind, welche eine r-gliedrige Gruppe von Punkttransformationen des Raumes darstellen und denken wir uns zu jeder dieser ∞^r Transformationen die eben definirte erweiterte Transformation aufgestellt. Wir behaupten, dass die ∞^r erweiterten Transformationen:

$$(14) \qquad \begin{cases} x' = \Xi(x, y, z, a_1 \cdots a_r), & y' = \mathsf{H}, \quad z' = \mathsf{Z}, \\ p' = \Pi(x, y, z, p, q, a_1 \cdots a_r), & q' = \mathsf{K}, \end{cases}$$

welche wir auf diese Weise erhalten, eine r-gliedrige Gruppe in den Veränderlichen x, y, z, p, q bilden.

Zum Beweise fassen wir die ∞^r Transformationen (13) als Operationen auf und bemerken, dass diese Operationen sowohl die Punkte x, y, z als die Flächenelemente x, y, z, p, q unter einander vertauschen. Als Vertauschungen der Punkte angesehen bilden diese Operationen eine Gruppe, folglich müssen sie auch als Vertauschungen der Flächenelemente aufgefasst eine Gruppe bilden, das aber findet eben darin seinen analytischen Ausdruck, dass die Gleichungen (14) eine Gruppe darstellen.

Die bisherigen Ueberlegungen werden wir näher *präcisiren*, indem wir sie rein analytisch entwickeln.

Es sei

$$x' = \Xi(x, y, z), \quad y' = \mathsf{H}(x, y, z), \quad z' = \mathsf{Z}(x, y, z) \tag{11}$$

eine Transformation zwischen den Veränderlichen x, y, z und x', y', z'. Denken wir uns z als eine beliebig gewählte Function: $z = \varphi(x, y)$ von x und y, so existiren partielle Differentialquotienten erster Ordnung von z nach x und y; dieselben sind definirt durch die Gleichung:

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0.$$

Andererseits aber verwandelt unsere Transformation jedes Abhängigkeitsverhältniss: $z = \varphi(x, y)$ zwischen x, y, z in ein eben solches zwischen z', x', y', welches im Allgemeinen die Form: $z' = \overline{\varphi}(x', y')$ erhalten kann; daher hat auch z' zwei partielle Differentialquotienten p' und q', welche ihrerseits der Bedingung:

$$dz' - p'dx' - q'dy' = 0$$

genügen.

Setzen wir in der eben geschriebenen Gleichung an Stelle von z', x', y' ihre Werthe $\mathsf{Z}, \Xi, \mathsf{H}$ ein und ordnen wir das Resultat nach dz, dx, dy, so kommt:

$$\left(\frac{\partial \mathsf{Z}}{\partial z} - p'\frac{\partial \Xi}{\partial z} - q'\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial z}\right) dz + \left(\frac{\partial \mathsf{Z}}{\partial x} - p'\frac{\partial \Xi}{\partial x} - q'\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x}\right) dx + \\ + \left(\frac{\partial \mathsf{Z}}{\partial y} - p'\frac{\partial \Xi}{\partial y} - q'\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial y}\right) dy = 0$$

oder wegen: $dz = p\,dx + q\,dy$:

$$(15)\left\{\begin{aligned} &\left\{\frac{\partial \mathsf{Z}}{\partial x} - p'\frac{\partial \Xi}{\partial x} - q'\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x} + p\left(\frac{\partial \mathsf{Z}}{\partial z} - p'\frac{\partial \Xi}{\partial z} - q'\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial z}\right)\right\} dx + \\ &+ \left\{\frac{\partial \mathsf{Z}}{\partial y} - p'\frac{\partial \Xi}{\partial y} - q'\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial y} + q\left(\frac{\partial \mathsf{Z}}{\partial z} - p'\frac{\partial \Xi}{\partial z} - q'\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial z}\right)\right\} dy = 0.\end{aligned}\right.$$

In der Gleichung (15) müssen die beiden Faktoren von dx und dy für sich verschwinden, weil dx und dy nicht durch eine Relation verknüpft sind. Wir erhalten daher die beiden Gleichungen:

$$(16)\left\{\begin{aligned} &p'\left(\frac{\partial \Xi}{\partial x} + p\frac{\partial \Xi}{\partial z}\right) + q'\left(\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x} + p\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial z}\right) = \frac{\partial \mathsf{Z}}{\partial x} + p\frac{\partial \mathsf{Z}}{\partial z} \\ &p'\left(\frac{\partial \Xi}{\partial y} + q\frac{\partial \Xi}{\partial z}\right) + q'\left(\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial y} + q\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial z}\right) = \frac{\partial \mathsf{Z}}{\partial y} + q\frac{\partial \mathsf{Z}}{\partial z}.\end{aligned}\right.$$

Dieselben lassen sich nach p' und q' auflösen. Verschwände nämlich die Determinante:

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial \Xi}{\partial x} + p\frac{\partial \Xi}{\partial z} & \frac{\partial \Xi}{\partial y} + q\frac{\partial \Xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x} + p\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial z} & \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial y} + q\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial z} \end{vmatrix}$$

für jede beliebige Function z von x und y, so müsste sie an und für sich identisch verschwinden, das heisst, für jeden Werth der Veränderlichen x, y, z, p, q. Letzteres kann offenbar nur dann eintreten, wenn alle zweireihigen Determinanten der Matrix

$$\left|\begin{array}{ccc} \frac{\partial \Xi}{\partial x} & \frac{\partial \Xi}{\partial y} & \frac{\partial \Xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x} & \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial y} & \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial z} \end{array}\right|$$

identisch verschwinden, wenn also Ξ und H keine unabhängigen Functionen von x, y, z sind. Das aber ist von vornherein ausgeschlossen.

Wir sehen also, dass die Gleichungen (16) im Allgemeinen nach p' und q' auflösbar sind, welche Function von x und y auch das z sein mag, und dass die Auflösung nur dann nicht möglich ist, wenn die Function $z = \varphi(x, y)$ die partielle Differentialgleichung befriedigt, welche durch Nullsetzung der Determinante (17) entsteht. Indem wir die Auflösung der Gleichungen (16) wirklich ausführen, erhalten wir für p' und q' ganz bestimmte Functionen von: x, y, z, p, q:

$$p' = \Pi(x, y, z, p, q), \quad q' = \mathsf{K}(x, y, z, p, q).$$

Diese Bestimmung ist allgemein gültig, da wir über die Function $z = \varphi(x, y)$ *besondere Voraussetzungen nicht gemacht haben.*

Alles das ist übrigens längst bekannt.

Die Gleichung (15) zeigt, dass es möglich ist, eine Grösse $\mathfrak{a}$ derart zu bestimmen, dass die Relation:

$$(18) \qquad dZ - p'd\Xi - q'd\mathsf{H} = \mathfrak{a}(dz - pdx - qdy)$$

in dx, dy, dz identisch besteht. Entwickelt man nämlich (18) nach dx, dy, dz, so erhält man zunächst durch Vergleichung der Faktoren von dz auf beiden Seiten:

$$\mathfrak{a} = \frac{\partial Z}{\partial z} - p'\frac{\partial \Xi}{\partial z} - q'\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial z};$$

setzt man aber diesen Werth in die Gleichung (18) ein, so verwandelt sich dieselbe in (15).

Die Gleichung (18) ihrerseits hat einen sehr einfachen Sinn, *sie sagt aus, dass die erweiterte Transformation:*

$$x' = \Xi, \quad y' = \mathsf{H}, \quad z' = Z, \quad p' = \Pi, \quad q' = \mathsf{K}$$

die Pfaffsche Gleichung: $dz - pdx - qdy = 0$ *invariant lässt.*)*

Für das Folgende ist es sehr wichtig zu bemerken, dass die erweiterte Transformation: $x' = \Xi, \cdots q' = \mathsf{K}$ durch diese Eigenschaft

*) Lie, Göttinger Nachr. 1872, S. 480, Verhandl. d. G. d. W. zu Christiania 1873; Math. Ann. Bd. VIII.

vollkommen definirt ist. Mit andern Worten: kennt man $\Xi, \mathsf{H}, \mathsf{Z}$, so sind Π und K durch die Forderung, dass die Transformation: $x' = \Xi, \cdots q' = \mathsf{K}$ die Pfaffsche Gleichung: $dz - pdx - qdy = 0$ invariant lassen soll, eindeutig bestimmt.

Nunmehr gehen wir wieder zur Betrachtung einer r-gliedrigen Gruppe:

$$(19) \qquad x' = \Xi(x, y, z, a_1 \cdots a_r), \quad y' = \mathsf{H}, \quad z' = \mathsf{Z}$$

über und denken uns jede der ∞^r Transformationen dieser Gruppe in der vorhin angegebenen Weise durch Hinzufügung der Gleichungen:

$$(20) \qquad p' = \Pi(x, y, z, p, q, a_1 \cdots a_r), \quad q' = \mathsf{K}$$

erweitert. Dass dann die Gleichungen (19) und (20) zusammengenommen eine r-gliedrige Gruppe darstellen, wissen wir schon (vgl. S. 532), wir wollen es aber jetzt auch analytisch beweisen.

Werden die Gleichungen:

$$x'' = \Xi(x', y', z', b_1 \cdots b_r), \quad y'' = \mathsf{H}, \quad z'' = \mathsf{Z}$$

mit (19) verbunden, so erhält man in bekannter Weise:

$$x'' = \Xi(x, y, z, c_1 \cdots c_r), \quad y'' = \mathsf{H}, \quad z'' = \mathsf{Z},$$

wo die c nur von den a und b abhängen. Andererseits ergeben aber die beiden Gleichungen

$$dz' - p'dx' - q'dy' = \mathfrak{a}(dz - pdx - qdy)$$
$$dz'' - p''dx'' - q''dy'' = \mathfrak{a}'(dz' - p'dx' - q'dy')$$

die analoge Gleichung

$$dz'' - p''dx'' - q''dy'' = \mathfrak{a}\mathfrak{a}'(dz - pdx - qdy),$$

welche nach der oben gemachten Bemerkung zeigt, dass p'' und q'' gerade so von x, y, z, p, q und den c abhängen, wie p' und q' von x, y, z, p, q und den a. Wir haben somit den

Satz 4. *Stellen die Gleichungen*

$$(19) \qquad x' = \Xi(x, y, z, a_1 \cdots a_r), \quad y' = \mathsf{H}, \quad z' = \mathsf{Z}$$

eine r-gliedrige Gruppe dar und bestimmt man die Functionen $\Pi(x, y, z, a_1 \cdots a_r)$, $\mathsf{K}(x, y, z, a_1 \cdots a_r)$ derart, dass die erweiterten Transformationsgleichungen:

$$(21) \qquad x' = \Xi, \quad y' = \mathsf{H}, \quad z' = \mathsf{Z}, \quad p' = \Pi, \quad q' = \mathsf{K}$$

die Pfaffsche Gleichung: $dz - pdx - qdy = 0$ invariant lassen, dass also eine Relation von der Form:

$$dz' - p'dx' - q'dy' = \mathfrak{a}(x, y, z, p, q, a_1 \cdots a_r) \cdot (dz - pdx - qdy)$$

besteht, so stellen diese Transformationsgleichungen ebenfalls eine r-gliedrige Gruppe dar und zwar eine Gruppe, welche mit der ursprünglichen Gruppe die Parametergruppe gemein hat.

Wir behaupten nun: Ist die r-gliedrige Gruppe (19) von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen erzeugt — und das setzen wir natürlich wie sonst immer auch hier voraus —, so gilt dasselbe zugleich von der erweiterten Gruppe (21).

Wir werden diese Behauptung zunächst für den einfachen Fall: $r = 1$ beweisen. Es sei also $r = 1$ und die Gruppe (19) sei von der infinitesimalen Transformation

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}$$

erzeugt. Um nachzuweisen, dass auch die erweiterte Gruppe von einer infinitesimalen Transformation erzeugt ist, brauchen wir blos zu zeigen, dass aus Xf eine erweiterte infinitesimale Transformation

$$X^{(1)}f = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + \pi \frac{\partial f}{\partial p} + \varkappa \frac{\partial f}{\partial q}$$

hergeleitet werden kann, welche die Pfaffsche Gleichung:

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0 \tag{22}$$

invariant lässt. Ist das gezeigt, so ist klar, dass die von $X^{(1)}f$ erzeugte eingliedrige Gruppe in den Veränderlichen x, y, z, p, q mit der eingliedrigen Gruppe (21) identisch ist, sie lässt ja die Pfaffsche Gleichung (22) invariant und entsteht durch Erweiterung der Gruppe Xf, welche nach Voraussetzung eben die Gruppe (19) ist.

Nach S. 531 lässt die infinitesimale Transformation $X^{(1)}f$ dann und nur dann die Pfaffsche Gleichung (22) invariant, wenn π und $\varkappa$ eine Gleichung von der Form:

$$d\zeta - p\,d\xi - q\,d\eta - \pi\,dx - \varkappa\,dy = \mathfrak{b}(dz - p\,dx - q\,dy)$$

befriedigen, unter $\mathfrak{b}$ eine Function von x, y, z, p, q verstanden. Diese Gleichung zerlegt sich in die drei:

$$\mathfrak{b} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} - p\frac{\partial \xi}{\partial z} - q\frac{\partial \eta}{\partial z}$$

$$\pi = \frac{\partial \zeta}{\partial x} - p\frac{\partial \xi}{\partial x} - q\frac{\partial \eta}{\partial x} + \mathfrak{b}p$$

$$\varkappa = \frac{\partial \zeta}{\partial y} - p\frac{\partial \xi}{\partial y} - q\frac{\partial \eta}{\partial y} + \mathfrak{b}q,$$

also ergeben sich für π und $\varkappa$ die vollständig bestimmten Werthe:

$$\pi = \frac{d\zeta}{dx} - p\frac{d\xi}{dx} - q\frac{d\eta}{dx}, \qquad \varkappa = \frac{d\zeta}{dy} - p\frac{d\xi}{dy} - q\frac{d\eta}{dy},$$

wo der Abkürzung wegen gesetzt ist:

$$\frac{\partial \Phi(x,y,z)}{\partial x} + p\frac{\partial \Phi(x,y,z)}{\partial z} = \frac{d\Phi}{dx}, \quad \frac{\partial \Phi(x,y,z)}{\partial y} + q\frac{\partial \Phi(x,y,z)}{\partial z} = \frac{d\Phi}{dy}.$$

Hiermit ist die Existenz der infinitesimalen Transformation $X^{(1)}f$ bewiesen und damit zugleich die Richtigkeit der oben aufgestellten Behauptung für $r = 1$.

Nunmehr sei r beliebig. Ist dann $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ irgend eine infinitesimale Transformation der Gruppe (19), so gehört offenbar diejenige eingliedrige Gruppe, welche von der erweiterten infinitesimalen Transformation: $e_1 X_1^{(1)} f + \cdots + e_r X_r^{(1)} f$ erzeugt wird, der Gruppe (21) an, denn die betreffende eingliedrige Gruppe entsteht ja durch Erweiterung der eingliedrigen Gruppe: $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$. Hieraus geht hervor, dass die Gruppe (21) die ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen: $e_1 X_1^{(1)} f + \cdots + e_r X_r^{(1)} f$ enthält, dass sie also von den r unabhängigen infinitesimalen Transformationen: $X_1^{(1)} f \cdots X_r^{(1)} f$ erzeugt ist.

Selbstverständlich erfüllen die $X_k^{(1)} f$ paarweise Relationen von der Form:

$$X_i^{(1)} X_k^{(1)} f - X_k^{(1)} X_i^{(1)} f = \sum_1^r {}_s\, c'_{iks} X_s^{(1)} f;$$

wir werden das durch Ausrechnung verificiren, und so überdies erkennen, dass die c'_{iks} hier dieselben Werthe haben wie die c_{iks} in den Relationen:

$$X_i X_k f - X_k X_i f = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} X_s f.$$

Die Pfaffsche Gleichung: $dz - pdx - qdy = 0$ gestattet nach Theor. 93, S. 531 zugleich mit den beiden infinitesimalen Transformationen: $X_i^{(1)} f$ und $X_k^{(1)} f$ auch die folgende: $X_i^{(1)} X_k^{(1)} f - X_k^{(1)} X_i^{(1)} f$, welche augenscheinlich die Form hat:

$$X_i^{(1)} X_k^{(1)} f - X_k^{(1)} X_i^{(1)} f = X_i X_k f - X_k X_i f + \alpha \frac{\partial f}{\partial p} + \beta \frac{\partial f}{\partial q}.$$

Hieraus ergiebt sich, dass die infinitesimale Transformation: $X_i^{(1)} X_k^{(1)} f - X_k^{(1)} X_i^{(1)} f$ durch Erweiterung von

$$X_i X_k f - X_k X_i f = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} X_s f$$

erhalten wird, dass also die Relationen:

$$X_i^{(1)} X_k^{(1)} f - X_k^{(1)} X_i^{(1)} f = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} X_s^{(1)} f$$

bestehen.

Wir ersehen hieraus noch, dass die erweiterte Gruppe (21) mit der Gruppe (19) holoedrisch isomorph ist, was damit stimmt, dass beide Gruppen dieselbe Parametergruppe besitzen (Satz 4, S. 535).

Die Gruppe:

(19) $$x' = \Xi(x, y, z, a_1 \cdots a_r), \quad y' = \mathsf{H}, \quad z' = \mathsf{Z}$$

kann noch mehr erweitert werden, nämlich dadurch, dass man auch Differentialquotienten von höherer als der ersten Ordnung mitnimmt. Wir wollen hier nur noch auf die Erweiterung durch Hinzunahme der Differentialquotienten zweiter Ordnung eingehen.

Da z als Function von x und y betrachtet wird, haben wir neben p und q auch die drei Differentialquotienten zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$$

zu berücksichtigen.

Bei den Transformationen unserer Gruppe hängen x', y', z' in bekannter Weise von x, y, z ab und nach dem Früheren ebenso p', q' von x, y, z, p, q. Wie jetzt gezeigt werden soll, lassen sich auch r', s', t' als Functionen von x, y, z, p, q, r, s, t darstellen:

$$r' = \mathsf{P}(x, y, z, p, q, r, s, t; a_1 \cdots a_r), \quad s' = \Sigma, \quad t' = \mathsf{T}.$$

Die Grössen r', s', t' sind definirt durch:

$$dp' - r'dx' - s'dy' = 0, \qquad dq' - s'dx' - t'dy' = 0.$$

Werden hierin die dx', dy', dp', dq' nach dx, dy, dz, dp, dq entwickelt und dann für dz, dp, dq ihre Werthe aus

$$dz - pdx - qdy = 0, \quad dp - rdx - sdy = 0, \quad dq - sdx - tdy = 0$$

eingesetzt, so ergeben sich zwei Gleichungen von der Form: $Adx + Bdy = 0$, deren Coefficienten neben x', y', z' und ihren Differentialquotienten nach x, y, z auch noch $p', q', r', s', t', p, q, r, s, t$ enthalten. Da dx und dy von einander unabhängig sind, müssen A und B beide Male einzeln verschwinden und so finden wir vier Gleichungen:

$$r'\left(\frac{\partial \Xi}{\partial x} + p\frac{\partial \Xi}{\partial z}\right) + s'\left(\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x} + p\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial z}\right) = \frac{\partial \Pi}{\partial x} + p\frac{\partial \Pi}{\partial z} + r\frac{\partial \Pi}{\partial p} + s\frac{\partial \Pi}{\partial q}$$

$$r'\left(\frac{\partial \Xi}{\partial y} + q\frac{\partial \Xi}{\partial z}\right) + s'\left(\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial y} + q\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial z}\right) = \frac{\partial \Pi}{\partial y} + q\frac{\partial \Pi}{\partial z} + s\frac{\partial \Pi}{\partial p} + t\frac{\partial \Pi}{\partial q}$$

u. s. w.

Von diesen Gleichungen sind die beiden ersten nach r' und s' auflösbar, die beiden letzten nach s' und t', geradeso wie die Gleichungen (16) nach p' und q' auflösbar waren. Es fragt sich nur noch, ob die beiden Werthe, welche wir auf diese Weise für s' finden, mit einander übereinstimmen. Das aber ist bekanntlich der Fall, sonst bekämen wir ja eine nicht identische Relation zwischen x, y, z, p, q, r, s, t, welche bei der Substitution: $z = \varphi(x, y)$ identisch befriedigt sein müsste, und das ist unmöglich, da φ gar keiner Beschränkung unterworfen ist.

Aehnlich wie früher erkennen wir auch hier, dass die Grössen r', s', t' dadurch eindeutig als Functionen von x, y, z, p, q, r, s, t definirt sind, dass Gleichungen von der Form:

$$dp' - r'dx' - s'dy' = \alpha_1(dz - pdx - qdy) + \beta_1(dp - rdx - sdy) + \\ + \gamma_1(dq - sdx - tdy)$$

$$dq' - s'dx' - t'dy' = \alpha_2(dz - pdx - qdy) + \beta_2(dp - rdx - sdy) + \\ + \gamma_2(dq - sdx - tdy)$$

identisch in dp, dq, dz, dy, dx bestehen. Erinnern wir uns dazu der früheren Identität:

$$dz' - p'dx' - q'dy' = \mathfrak{a}(dz - pdx - qdy),$$

welche p' und q' bestimmte, so können wir sagen, dass bei gegebenen $\Xi, \mathsf{H}, \mathsf{Z}$ die Transformationsgleichungen:

$$(23) \qquad x' = \Xi(x, y, z, a_1 \cdots a_r), \cdots t' = \mathsf{T}(x, y, z, p, q, r, s, t, a_1 \cdots a_r)$$

durch die Forderung, dass sie das System von Pfaffschen Gleichungen:

$$(24) \quad dz - pdx - qdy = 0, \ dp - rdx - sdy = 0, \ dq - sdx - tdy = 0$$

invariant lassen sollen, vollständig und eindeutig definirt sind.

Hieraus erhellt, dass durch die Aufeinanderfolge zweier Transformationen (23) wieder eine Transformation entsteht, welche das System (24) invariant lässt. Nach Voraussetzung haben aber die Gleichungen:

$$x' = \Xi(x, y, z, a_1 \cdots a_r), \qquad y' = \mathsf{H}, \qquad z' = \mathsf{Z}$$

$$x'' = \Xi(x', y', z', b_1 \cdots b_r), \qquad y'' = \mathsf{H}, \qquad z'' = \mathsf{Z}$$

zur Folge:

$$(19') \qquad x'' = \Xi(x, y, z, c_1 \cdots c_r), \qquad y'' = \mathsf{H}, \qquad z'' = \mathsf{Z},$$

wo die c nur von den a und b abhängen. Mithin ergeben die beiden Transformationen:

$$x' = \Xi(x, y, z, a_1 \cdots a_r), \cdots t' = \mathsf{T}(x, y, z, p, q, r, s, t, a_1 \cdots a_r)$$

$$x'' = \Xi(x', y', z', b_1 \cdots b_r), \cdots t'' = \mathsf{T}(x', y', z', p', q', r', s', t', b_1 \cdots b_r)$$

nach einander ausgeführt eine Transformation, welche aus (19′) durch dieselbe Erweiterung hervorgeht, durch welche (23) aus

$$(19) \qquad x' = \Xi(x, y, z, a_1 \cdots a_r), \qquad y' = \mathsf{H}, \qquad z' = \mathsf{Z}$$

entstanden ist, eine Transformation also, welche ebenfalls der Schaar (23) angehört. Die Transformationen (23) bilden demnach eine r-gliedrige Gruppe.

Wir werden uns direkt überzeugen, dass die Gruppe (23) von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen erzeugt ist.

Setzen wir wiederum zunächst voraus, dass $r = 1$ und dass die Gruppe (19) von der infinitesimalen Transformation Xf erzeugt ist. Dann brauchen wir offenbar nur zu beweisen, dass es eine erweiterte infinitesimale Transformation:

$$X^{(2)}f = Xf + \pi\frac{\partial f}{\partial p} + \varkappa\frac{\partial f}{\partial q} + \varrho\frac{\partial f}{\partial r} + \sigma\frac{\partial f}{\partial s} + \tau\frac{\partial f}{\partial t}$$

giebt, welche das System der Pfaffschen Gleichungen (24) invariant lässt. Das aber hat keine Schwierigkeit; für π und $\varkappa$ finden wir dieselben Werthe wie früher, für ϱ, σ, τ ergeben sich in ähnlicher Weise Ausdrücke, die linear und homogen von den ξ, η, ζ und ihren Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung abhängen.

Wir finden auch hier zunächst vier Gleichungen für ϱ, σ, τ; es lässt sich aber leicht nachweisen, dass diese Gleichungen mit einander verträglich sind. Wir verschieben die Durchführung dieses Nachweises auf die Betrachtung des allgemeinen Falles, wo sich derselbe übersichtlicher gestaltet.

Aus der Existenz von $X^{(2)}f$ folgt natürlich, dass die Gruppe (23) im Falle $r = 1$ eben von $X^{(2)}f$ erzeugt ist.

In gleicher Weise erkennt man, dass bei beliebigem r die Gruppe (23) von den r infinitesimalen Transformationen: $X_1^{(2)}f \cdots X_r^{(2)}f$ erzeugt ist, welche durch Erweiterung der infinitesimalen Transformationen: $X_1 f \cdots X_r f$ der Gruppe (19) erhalten werden. Damit ist zugleich bewiesen, dass Relationen von der Form:

$$X_i^{(2)}X_k^{(2)}f - X_k^{(2)}X_i^{(2)}f = \sum_1^r {}_s\, c''_{iks} X_s^{(2)}f$$

bestehen.

Es lässt sich leicht einsehen, dass $c''_{iks} = c_{iks}$ ist. In der That, das System der Pfaffschen Gleichungen (24) gestattet mit $X_i^{(2)}f$ und $X_k^{(2)}f$ zugleich auch die infinitesimale Transformation: $X_i^{(2)}X_k^{(2)}f - X_k^{(2)}X_i^{(2)}f = (X_i^{(2)}X_k^{(2)})$, diese aber hat offenbar die Form:

$$(X_i^{(2)}X_k^{(2)}) = (X_i X_k) + \alpha\frac{\partial f}{\partial p} + \beta\frac{\partial f}{\partial q} + \lambda\frac{\partial f}{\partial r} + \mu\frac{\partial f}{\partial s} + \nu\frac{\partial f}{\partial t},$$

also entsteht sie aus der Transformation:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} X_s f$$

durch Erweiterung und lässt sich folgendermassen darstellen:

$$(X_i^{(2)}X_k^{(2)}) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} X_s^{(2)}f.$$

Hierin liegt, dass die erweiterte Gruppe (23) mit der ursprünglichen Gruppe (19) gleichzusammengesetzt ist.

§ 130.

Nach der Durchführung der speciellen Untersuchungen des vorigen Paragraphen wird uns die allgemeine Theorie der Erweiterung einer endlichen continuirlichen Gruppe durch Hinzunahme von Differentialquotienten keine Schwierigkeit mehr bereiten.

Zunächst betrachten wir eine einzelne Transformation in den $n+m$ Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $z_1 \cdots z_m$, etwa die folgende:

$$(25) \qquad \begin{cases} x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, z_1 \cdots z_m) & (i=1\cdots n) \\ z_k' = F_k(x_1 \cdots x_n, z_1 \cdots z_m) & (k=1\cdots m). \end{cases}$$

Wollen wir dieselbe durch Hinzunahme von Differentialquotienten erweitern, so müssen wir zunächst festsetzen, wieviele und welche unter den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $z_1 \cdots z_m$ als unabhängig betrachtet werden sollen, welche als abhängig. Das kann auf sehr mannigfaltige Weise geschehen und jeder möglichen Weise entspricht eine ganz bestimmte Erweiterung der Transformation (25).

Wir werden im Folgenden immer $x_1 \cdots x_n$ als unabhängige Veränderliche betrachten und $z_1 \cdots z_m$ als Functionen, aber als beliebig wählbare Functionen von $x_1 \cdots x_n$. Unter dieser Voraussetzung sind dann $x_1' \cdots x_n'$ im Allgemeinen von einander unabhängig, während $z_1' \cdots z_m'$ Functionen von $x_1' \cdots x_n'$ werden.

Für die Differentialquotienten der z nach den x und der z' nach den x' führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\frac{\partial z_\nu}{\partial x_k} = z_{\nu, k}, \quad \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} z_\mu}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = z_{\mu, \alpha_1 \cdots \alpha_n}, \quad \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} z_\mu'}{\partial x_1'^{\alpha_1} \cdots \partial x_n'^{\alpha_n}} = z_{\mu, \alpha_1 \cdots \alpha_n}'$$

und behaupten, dass sich die $z_{\mu, \alpha_1 \cdots \alpha_n}'$ durch $x_1 \cdots x_n$, $z_1 \cdots z_m$ und die Differentialquotienten $z_{\nu, \beta_1 \cdots \beta_n}$ von der ersten bis $(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)$-ten Ordnung ausdrücken lassen:

$$(26) \qquad z_{\mu, \alpha_1 \cdots \alpha_n}' = F_{\mu, \alpha_1 \cdots \alpha_n}(x_1 \cdots x_n, z_1 \cdots z_m, z_{\nu, \beta_1 \cdots \beta_n})$$
$$(\nu = 1 \cdots m, \beta_1 + \cdots + \beta_n \leqq \alpha_1 + \cdots + \alpha_n).$$

Setzen wir $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = N$, so ist das Bestehen von Gleichungen von der Form (26) klar für $N = 0$; um dasselbe für ein beliebiges N nachzuweisen, brauchen wir daher blos zu zeigen, dass Gleichungen von der Form (26) auch für $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = N + 1$ gelten, sobald solche für $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leqq N$ bestehen.

Es seien also die Functionen $F_{\mu, \alpha_1 \cdots \alpha_n}$ $(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leqq N)$ bekannt; die Werthe der $z_{\mu, \alpha_1 \cdots \alpha_n}'$ $(\alpha_1 + \cdots \alpha_n = N + 1)$ sind dann aus den Gleichungen

$$(27)\qquad dz'_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_n} - \sum_1^n{}^i z'_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n}\, dx'_i = 0 \qquad (\alpha_1+\cdots+\alpha_n=N)$$

zu bestimmen und zwar muss (27) vermöge des Gleichungensystems

$$(28)\qquad dz_{\nu,\beta_1\cdots\beta_n} - \sum_1^n{}^i z_{\nu,\beta_1\cdots\beta_i+1,\cdots\beta_n}\, dx_i = 0$$
$$(\nu = 1\cdots m;\ 0 \leq \beta_1+\cdots+\beta_n \leq N)$$

identisch bestehen, während $dx_1\cdots dx_n$ völlig von einander unabhängig sind. Für $z'_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n}$ erhalten wir daher die Gleichungen:

$$(29)\qquad \sum_1^n{}^i z'_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n}\left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_1^m{}^\nu z_{\nu,k}\frac{\partial f_i}{\partial z_\nu}\right\} = \frac{dF_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_n}}{dx_k} \qquad (k=1\cdots n),$$

wo die rechte Seite den vollständigen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial F_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_n}}{\partial x_k} + \sum_1^m{}^\nu z_{\nu,k}\frac{\partial F_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_n}}{\partial z_\nu} + \sum_1^m{}^\nu \sum_\beta z_{\nu,\beta_1\cdots\beta_k+1,\cdots\beta_n}\frac{\partial F_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_n}}{\partial z_{\nu,\beta_1\cdots\beta_n}}$$
$$(1 < \beta_1+\cdots+\beta_n \leq \alpha_1+\cdots+\alpha_n)$$

von $F_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_n}$ nach x_k bedeutet.

Wären die Gleichungen (29) nicht nach den $z'_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n}$ $(i=1\cdots n)$ auflösbar, so müsste die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \sum_1^m{}^\mu z_{\mu,1}\frac{\partial f_1}{\partial z_\mu} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} + \sum_1^m{}^\mu z_{\mu,n}\frac{\partial f_1}{\partial z_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} + \sum_1^m{}^\mu z_{\mu,1}\frac{\partial f_n}{\partial z_\mu} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} + \sum_1^m{}^\mu z_{\mu,n}\frac{\partial f_n}{\partial z_\mu} \end{vmatrix}$$

gleich Null sein, welche Functionen von $x_1\cdots x_n$ man auch für $z_1\cdots z_m$ einsetzt, das heisst, sie müsste identisch verschwinden für jeden Werth der Veränderlichen x_i, z_μ, $z_{\mu,i}$. Man überzeugt sich leicht, dass dies nur dann eintreten kann, wenn alle m-reihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial z_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & \frac{\partial f_n}{\partial z_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_n}{\partial z_m} \end{vmatrix}$$

identisch verschwinden, wenn also die Functionen $f_1 \cdots f_n$ nicht von einander unabhängig sind. Das ist ausgeschlossen, folglich sind die Gleichungen (29) nach den $z'_{\mu, \alpha_1 \cdots \alpha_i + 1 \cdots \alpha_n}$ $(i = 1 \cdots n)$ auflösbar.

Noch bleibt ein Bedenken zu beseitigen. Die Gleichungen (29) liefern anscheinend für die Differentialquotienten $z'_{\mu, \alpha_1 \cdots \alpha_i + 1 \cdots \alpha_n}$ im Allgemeinen verschiedene Werthe. Das ist in Wirklichkeit nur scheinbar. Denn sonst ergäben sich ja zwischen den x_i, den z_μ und den Differentialquotienten der letzteren gewisse nicht identische Relationen, die für ganz beliebige Functionen $z_1 \cdots z_m$ von $x_1 \cdots x_n$ identisch erfüllt sein müssten, was unmöglich ist.

Wir sehen also: die Gleichungen (29) bestimmen alle $z'_{\mu, \alpha_1 \cdots \alpha_i + 1 \cdots \alpha_n}$ vollständig und eindeutig, folglich bestehen Gleichungen von der Form (26) unter den gemachten Voraussetzungen auch für $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = N + 1$, womit ihre allgemeine Existenz erwiesen ist. Ausserdem aber erkennen wir noch, dass die Transformation:

$$(30) \begin{cases} x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\, z_1 \cdots z_m), \qquad z_\mu' = F_\mu(x_1 \cdots x_n,\, z_1 \cdots z_m) \\ z'_{\mu, \alpha_1 \cdots \alpha_n} = F_{\mu, \alpha_1 \cdots \alpha_n}(x_1 \cdots x_n,\, z_1 \cdots z_m,\, z_{\nu, \beta_1 \cdots \beta_n}) \; (\Sigma^\varkappa \beta_\varkappa \leqq \Sigma^\varkappa \alpha_\varkappa) \\ \qquad (i = 1 \cdots n;\; \mu = 1 \cdots m;\; 0 < \alpha_1 + \cdots \alpha_n \leqq N) \end{cases}$$

das Pfaffsche Gleichungensystem:

$$(31) \quad dz_{\mu, \beta_1 \cdots \beta_n} - \sum_1^n{}^i z_{\mu, \beta_1 \cdots \beta_i + 1, \cdots \beta_n} dx_i = 0 \quad (\mu = 1 \cdots m;\; 0 \leqq \Sigma \beta_\varkappa < N)$$

invariant lässt und dass sie durch diese Eigenschaft vollständig definirt ist. Endlich ist auch noch klar, dass die Aufeinanderfolge von zwei Transformationen (30), welche das Pfaffsche Gleichungensystem (31) invariant lassen, wieder eine Transformation von dieser Beschaffenheit ergiebt.

Setzen wir jetzt voraus, dass die ursprünglichen Transformationsgleichungen (25) eine gewisse Anzahl, etwa r Parameter enthalten:

$$(32) \quad \begin{cases} x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\, z_1 \cdots z_m,\, a_1 \cdots a_r) & (i = 1 \cdots n) \\ z_\mu' = F_\mu(x_1 \cdots x_n,\, z_1 \cdots z_m,\, a_1 \cdots a_r) & (\mu = 1 \cdots m) \end{cases}$$

und eine r-gliedrige von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen erzeugte Gruppe darstellen. Aus (32) denken wir uns alle Gleichungen von der Form (26) abgeleitet, in denen $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leqq N$ ist; wir behaupten, dass dieselben mit den Gleichungen (32) zusammengenommen:

$$(33) \quad \begin{cases} x_i' = f_i(x, z, a), \qquad z_\mu' = F_\mu(x, z, a) \\ z'_{\mu, \alpha_1 \cdots \alpha_n} = F_{\mu, \alpha_1 \cdots \alpha_n}(x, z, z_{\nu, \beta_1 \cdots \beta_n}, a) \\ \qquad (i = 1 \cdots n;\; \mu = 1 \cdots m;\; 0 < \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leqq N) \end{cases}$$

wieder eine r-gliedrige Gruppe darstellen.

Der Beweis ist sehr einfach.

Die Transformationen:

$$x_i' = f_i(x, z, a), \quad z_k' = F_k(x, z, a)$$

$$x_i'' = f_i(x', z', b), \quad z_k'' = F_k(x', z', b)$$

ergeben nach einander ausgeführt eine Transformation:

$$x_i'' = f_i(x, z, c), \quad z_k'' = F_k(x, z, c),$$

in welcher die c gewisse Functionen der a und der b sind. Nach dem oben Gesagten drücken sich daher die $z''_{\mu, \alpha_1 \cdots \alpha_n}$ gerade so durch die $x_i, z_k, z_{\nu, \beta_1 \cdots \beta_n}$ und die c_j aus, wie die $z'_{\mu, \alpha_1 \cdots \alpha_n}$ sich durch die $x_i, z_k, z_{\nu, \beta_1 \cdots \beta_n}$ und die a ausdrücken. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Es bleibt noch nachzuweisen, dass die erweiterte Gruppe (33) ebenso wie die ursprüngliche Gruppe (32) von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen erzeugt ist. Um diesen Nachweis führen zu können, stellen wir zunächst die folgenden Betrachtungen an:

Wir gehen aus von einer beliebigen infinitesimalen Transformation:

$$Xf = \sum_1^n {}^i \, \xi_i(x, z) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m {}^\mu \, \zeta_\mu(x, z) \frac{\partial f}{\partial z_\mu}$$

und versuchen aus derselben eine erweiterte infinitesimale Transformation:

$$X^{(N)}f = Xf + \sum_1^m {}^\nu \sum_\alpha \zeta_{\nu, \alpha_1 \cdots \alpha_n} \frac{\partial f}{\partial z_{\nu, \alpha_1 \cdots \alpha_n}}$$
$$(0 < \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq N)$$

zu bilden, welche das Pfaffsche Gleichungensystem:

$$(31) \qquad dz_{\nu, \beta_1 \cdots \beta_n} - \sum_1^n {}^i \, z_{\nu, \beta_1 \cdots \beta_i + 1, \cdots \beta_n} dx_i = 0$$
$$(\nu = 1 \cdots m;\ 0 \leq \beta_1 + \cdots + \beta_n < N)$$

invariant lässt.

Für $N = 0$ und $N = 1$ giebt es sicher eine infinitesimale Transformation $X^{(N)}f$ von der eben geschilderten Beschaffenheit, das bedarf keiner näheren Begründung. Wir können daher den allgemeinen Beweis für die Existenz von $X^{(N)}f$ in der Weise führen, dass wir zeigen: sobald $X^{(N-1)}f$ und $X^{(N)}f$ existiren, existirt auch $X^{(N+1)}f$.

Voraussetzung ist also, dass $X^{(N-1)}f$ und $X^{(N)}f$ existiren. Soll es nun eine infinitesimale Transformation $X^{(N+1)}f$ geben, welche das Pfaffsche Gleichungensystem:

$$(34)\qquad dz_{\nu,\beta_1\cdots\beta_n}-\sum_1^n{}^i z_{\nu,\beta_1\cdots\beta_i+1,\cdots\beta_n}dx_i=0$$
$$(\nu=1\cdots m;\ 0\leqq\beta_1+\cdots+\beta_n<N+1)$$

invariant lässt, so müssen die noch unbekannten:

$$\frac{\delta z_{\mu,\gamma_1\cdots\gamma_n}}{\delta t}=\zeta_{\mu,\gamma_1\cdots\gamma_n}\ (\gamma_1+\cdots+\gamma_n=N+1)$$

gewisse Gleichungen von der Form:

$$d\zeta_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_n}-\sum_1^n{}^i z_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n}d\xi_i-\sum_1^n{}^i \zeta_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n}dx_i=$$
$$=\sum_1^m{}^\nu\sum_\beta \mathsf{P}_{\nu,\beta_1\cdots\beta_n}\left\{dz_{\nu,\beta_1\cdots\beta_n}-\sum_1^n{}^i z_{\nu,\beta_1\cdots\beta_i+1,\cdots\beta_n}dx_i\right\}$$
$$(\alpha_1+\cdots+\alpha_n=N,\ 0\leqq\beta_1+\cdots+\beta_n<N+1)$$

befriedigen und zwar unabhängig von den Differentialen: dx_i, $dz_{\nu,\beta_1\cdots\beta_n}$.

Hieraus bestimmen sich zunächst die $\mathsf{P}_{\nu,\beta_1\cdots\beta_n}$ eindeutig und es bleiben nur Gleichungen zwischen den von einander unabhängigen Differentialen: $dx_1\cdots dx_n$. Setzt man daher die Werthe der $\mathsf{P}_{\nu,\beta_1\cdots\beta_n}$ ein und vergleicht auf beiden Seiten die Coefficienten der dx_i, so erhält man für $\zeta_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n}$ den folgenden Ausdruck:

$$(35)\qquad \begin{aligned}\frac{\delta}{\delta t}z_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n}&=\zeta_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n}=\\&=\frac{d\zeta_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_n}}{dx_i}-\sum_1^n{}^j z_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_j+1,\cdots\alpha_n}\frac{d\xi_j}{dx_i}\end{aligned}$$
$$(\alpha_1+\cdots+\alpha_n=N),$$

wo $\dfrac{d}{dx_i}$ einen vollständigen Differentialquotienten nach x_i bedeutet.*)

Nun aber bleibt noch eine Schwierigkeit; im Allgemeinen erhalten wir nämlich für jedes $\zeta_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n}$ eine Reihe anscheinend verschiedener Ausdrücke.

Der Ausdruck rechter Hand in (35) ist seiner Ableitung nach der Werth von:

$$\frac{\delta}{\delta t}\frac{\partial z_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_n}}{\partial x_i}=\frac{\delta}{\delta t}z_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n}.$$

---

*) Die Formel (35) ist im Grunde identisch mit einer von *Poisson* herrührenden Formel der Variationsrechnung.

Andererseits ist aber auch:

$$(36)\qquad \frac{\delta}{\delta t} z_{\mu,\,\alpha_1\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n} = \frac{\delta}{\delta t}\frac{\partial z_{\mu,\,\alpha_1\cdots\alpha_h-1,\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n}}{\partial x_h} =$$

$$= \frac{d\zeta_{\mu,\,\alpha_1\cdots\alpha_h-1,\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n}}{dx_h} - \sum_1^n{}_j\, z_{\mu,\,\alpha_1\cdots\alpha_j+1,\cdots\alpha_h-1,\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n}\frac{d\xi_j}{dx_h},$$

wo h irgend eine von i verschiedene der Zahlen $1, 2\cdots n$ bedeutet. Damit sind alle Möglichkeiten erschöpft. Es braucht daher blos noch nachgewiesen zu werden, dass der letzte Werth von $\frac{\delta}{\delta t} z_{\mu,\,\alpha_1\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n}$ mit dem Werthe (35) übereinstimmt.

Um das nachzuweisen, erinnern wir daran, dass die folgenden Gleichungen bestehen:

$$\zeta_{\mu,\,\alpha_1\cdots\alpha_n} = \frac{\delta}{\delta t}\frac{\partial z_{\mu,\,\alpha_1\cdots\alpha_h-1,\cdots\alpha_n}}{\partial x_h} =$$

$$= \frac{d\zeta_{\mu,\,\alpha_1\cdots\alpha_h-1,\cdots\alpha_n}}{dx_h} - \sum_1^n{}_j\, z_{\mu,\,\alpha_1\cdots\alpha_j+1,\cdots\alpha_h-1,\cdots\alpha_n}\frac{d\xi_j}{dx_h}$$

und:

$$\zeta_{\mu,\,\alpha_1\cdots\alpha_h-1,\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n} = \frac{\delta}{\delta t}\frac{\partial z_{\mu,\,\alpha_1\cdots\alpha_h-1,\cdots\alpha_n}}{\partial x_i} =$$

$$= \frac{d\zeta_{\mu,\,\alpha_1\cdots\alpha_h-1,\cdots\alpha_n}}{dx_i} - \sum_1^n{}_j\, z_{\mu,\,\alpha_1\cdots\alpha_j+1,\cdots\alpha_h-1,\cdots\alpha_n}\frac{d\xi_j}{dx_i}.$$

Setzen wir den Werth von $\zeta_{\mu,\,\alpha_1\cdots\alpha_n}$ in (35) ein, so bekommen wir:

$$\frac{\delta}{\delta t}\frac{\partial z_{\mu,\,\alpha_1\cdots\alpha_n}}{\partial x_i} = \frac{d}{dx_i}\frac{d}{dx_h}\zeta_{\mu,\,\alpha_1\cdots\alpha_h-1,\cdots\alpha_n} - \sum_1^n{}_j\, z_{\mu,\alpha_1\cdots\alpha_j+1,\cdots\alpha_h-1,\cdots\alpha_i+1\cdots\alpha_n}\frac{d\xi_j}{dx_h}$$

$$- \sum_1^n{}_j\, z_{\mu,\,\alpha_1\cdots\alpha_j+1,\cdots\alpha_n}\frac{d\xi_j}{dx_i} - \sum_1^n{}_j\, z_{\mu,\,\alpha_1\cdots\alpha_j+1,\cdots\alpha_h-1,\cdots\alpha_n}\frac{d}{dx_i}\frac{d\xi_j}{dx_h}.$$

Setzen wir andererseits den Werth von $\zeta_{\mu,\,\alpha_1\cdots\alpha_h-1,\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n}$ in (36) ein und berücksichtigen wir, dass $\frac{d}{dx_i}\frac{d}{dx_h} = \frac{d}{dx_h}\frac{d}{dx_i}$ ist, so finden wir:

$$\frac{\delta}{\delta t}\frac{\partial z_{\mu,\,\alpha_1\cdots\alpha_h-1,\cdots\alpha_i+1,\cdots\alpha_n}}{\partial x_h} = \frac{\delta}{\delta t}\frac{\partial z_{\mu,\,\alpha_1\cdots\alpha_n}}{\partial x_i}.$$

Das aber war zu zeigen.

Nunmehr ist bewiesen, dass die $\zeta_{\mu,\gamma_1\cdots\gamma_n}$ $(\gamma_1+\cdots+\gamma_n = N+1)$ unter den gemachten Voraussetzungen wirklich existiren und eindeutig bestimmt sind; mithin ist nach dem oben Gesagten sicher, dass zu Xf für jeden Werth von N eine ganz bestimmte erweiterte infinitesimale Transformation $X^{(N)}f$ gehört.

Die Coefficienten von $X^{(N)}f$ sind offenbar linear und homogen in den ξ_i, ζ_k und ihren Differentialquotienten nach den x und z. Sind daher $X_i f$ und $X_j f$ zwei infinitesimale Transformationen von der Form Xf, sind ferner $X_i^{(N)}f$ und $X_j^{(N)}f$ die zugehörigen in der angegebenen Weise erweiterten infinitesimalen Transformationen, so geht

$$c_i X_i^{(N)}f + c_j X_j^{(N)}f$$

aus $c_i X_i f + c_j X_j f$ durch die betreffende Erweiterung hervor. Da ausserdem mit $X_i^{(N)}f$ und $X_j^{(N)}f$ zugleich $X_i^{(N)}X_j^{(N)}f - X_j^{(N)}X_i^{(N)}f$ das Pfaffsche Gleichungensystem (31) invariant lässt, muss auch

$$X_i^{(N)}X_j^{(N)}f - X_j^{(N)}X_i^{(N)}f$$

aus $X_i X_j f - X_j X_i f$ durch jene Erweiterung entstehen.

Nun mögen endlich $X_1 f \cdots X_r f$ unabhängige infinitesimale Transformationen der r-gliedrigen Gruppe (32) sein und also die bekannten Relationen:

$$X_i X_j f - X_j X_i f = \sum_1^r {}_s\, c_{ijs} X_s f$$

befriedigen.

Bilden wir die erweiterten infinitesimalen Transformationen: $X_1^{(N)}f \cdots X_r^{(N)}f$, so geht auch $X_i^{(N)}X_j^{(N)}f - X_j^{(N)}X_i^{(N)}f$ aus $X_i X_j f - X_j X_i f$ und folglich aus $\Sigma c_{ijs} X_s f$ durch diese Erweiterung hervor, was wieder heisst, dass:

$$X_i^{(N)}X_j^{(N)}f - X_j^{(N)}X_i^{(N)}f = \sum_1^r {}_s\, c_{ijs} X_s^{(N)}f$$

wird. Die r infinitesimalen Transformationen $X_i^{(N)}f$ erzeugen daher für jeden Werth von N eine mit der Gruppe der $X_i f$ gleichzusammengesetzte Gruppe; dieselbe ist offenbar identisch mit der früher besprochenen Gruppe (33), welche durch Erweiterung der endlichen Gleichungen (32) der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ erhalten wird.

Theorem 94. *Bilden die ∞^r Transformationen:*

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n,\ z_1 \cdots z_m,\ a_1 \cdots a_r) \quad (i=1 \cdots n)$$

$$z_k' = F_k(x_1 \cdots x_n,\ z_1 \cdots z_m,\ a_1 \cdots a_r) \quad (k=1 \cdots m)$$

in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $z_1 \cdots z_m$ eine r-gliedrige Gruppe und betrachtet man die z_k als beliebig wählbare Functionen der x_i, so werden auch die Differentialquotienten der z_k nach den x_i transformirt. Nimmt man alle Differentialquotienten von der ersten bis etwa zur N-ten Ordnung mit, so erhält man gewisse Gleichungen:

$$z'_{\mu, \alpha_1 \cdots \alpha_n} = F_{\mu, \alpha_1 \cdots \alpha_n}(x_1 \cdots x_n, z_1 \cdots z_m, z_{\nu, \beta_1 \cdots \beta_n}; a_1 \cdots a_r)$$
$$(\beta_1 + \cdots + \beta_n \leq \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq N),$$

*welche, mit den Gleichungen der ursprünglichen Gruppe vereinigt, eine r-gliedrige, mit der ursprünglichen gleichzusammengesetzte Gruppe darstellen.**)

Schon oben erwähnten wir, dass jede vorgelegte Gruppe in sehr vielen verschiedenen Weisen erweitert werden kann; es ist ja ganz dem Belieben überlassen, welche Veränderliche man als unabhängige wählen will.

Man kann ausserdem von vornherein die vorgelegte Gruppe durch eine mit ihr gleichzusammengesetzte ersetzen, indem man eine Anzahl von Veränderlichen: $t_1 \cdots t_\sigma$ hinzufügt, welche bei der Gruppe gar nicht oder, anders gesagt, nur durch die identische Transformation:

$$t_1' = t_1, \cdots t_\sigma' = t_\sigma$$

transformirt werden. Indem man nun von den ursprünglichen Veränderlichen und von den t_i irgend welche als unabhängig, die übrigen als abhängig ansieht, kann man Differentialquotienten hinzufügen und so erweitern; man kommt immer auf eine gleichzusammengesetzte Gruppe.

Wie man sieht, ist hierbei die Zahl der Möglichkeiten sehr gross.

§ 131.

Die früher in Kap. 13 gegebene Theorie der Invarianten einer beliebigen Gruppe lässt sich unmittelbar auf unsere erweiterten Gruppen anwenden.

Da man immer die Zahl N so gross wählen kann, dass die infinitesimalen Transformationen $X_i^{(N)}f$ mehr als r Veränderliche enthalten, lässt es sich immer so einrichten, dass die r Gleichungen $X_k^{(N)}f = 0$ ein vollständiges System mit einer oder mehreren Lösungen bilden. Diese Lösungen sind Functionen von den x, den z und den Differentialquotienten der letzteren, sie gestatten jede endliche Transformation der erweiterten Gruppe $X_k^{(N)}f$ und sind daher absolute Invarianten dieser Gruppe; sie sollen als *Differentialinvarianten* der ursprünglichen Gruppe bezeichnet werden.

Eine Function Ω von $x_1 \cdots x_n$, $z_1 \cdots z_m$ und den Differentialquotienten der z nach den x heisst eine Differentialinvariante der r-gliedrigen Gruppe:

$$x_i' = f_i(x_1 \cdots x_n, z_1 \cdots z_m; a_1 \cdots a_r)$$
$$z_k' = F_k(x_1 \cdots x_n, z_1 \cdots z_m; a_1 \cdots a_r),$$

*) Lie, Math. Annalen Bd. XXIV, 1884; Archiv for Math., Christiania 1883.

wenn eine Relation von der Form:

$$\Omega(x_1' \cdots x_n', z_1' \cdots z_m', z'_{\mu, \alpha_1 \cdots \alpha_n}) = \Omega(x_1 \cdots x_n, z_1 \cdots z_m, z_{\mu, \alpha_1 \cdots \alpha_n})$$

identisch besteht.

Da wir N beliebig gross wählen können, haben wir sogleich:

Theorem 95. *Jede endliche continuirliche Transformationsgruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ bestimmt eine unendliche Reihe von Differentialinvarianten, welche sich als Lösungen von vollständigen Systemen definiren lassen.**)

Kennt man die endlichen Gleichungen der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$, so findet man in der oben auseinandergesetzten Weise die endlichen Gleichungen der erweiterten Gruppe und sodann nach Anleitung von Kap. 13 die Differentialinvarianten einer jeden Ordnung ohne Integration. Im Allgemeinen ist aber diese Methode zur Bestimmung der Differentialinvarianten nicht praktisch anwendbar. In den meisten Fällen ist die direkte Integration des vollständigen Systems: $X_k^{(N)} f = 0$ vorzuziehen.

Auf diesen Punkt soll hier nicht eingegangen werden. Nur sei noch bemerkt, dass aus hinlänglich vielen bekannten Differentialinvarianten sich neue durch Differentiation und Determinantenbildung ableiten lassen.

Ist in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $z_1 \cdots z_m$ eine Gruppe vorgelegt, welche durch *mehrere* Gleichungensysteme mit je r Parametern dargestellt wird, so giebt es natürlich ebenfalls erweiterte Gruppen, deren Invarianten Differentialinvarianten der ursprünglichen Gruppe sind. Die früheren allgemeinen Entwickelungen zeigen nicht allein, dass jede derartige Gruppe Differentialinvarianten besitzt, sondern zugleich, wie dieselben gefunden werden können.

§ 132.

Man kann auch nach etwaigen *Systemen von Differentialgleichungen* fragen, welche bei einer gegebenen Gruppe invariant bleiben. Die Bestimmung eines jeden derartigen Systems lässt sich offenbar durchführen, indem man die betreffende Gruppe in geeigneter Weise erweitert und auf die erweiterte Gruppe die Entwickelungen des Kapitels 14 anwendet, auf Grund deren alle bei der erweiterten Gruppe invarianten Gleichungensysteme bestimmt werden können. Jedes so gefundene Gleichungensystem stellt dann ein bei der ursprünglichen Gruppe invariantes System von Differentialgleichungen dar.

In jedem einzelnen Falle muss allerdings noch besonders untersucht werden, ob das betreffende System von Differentialgleichungen die Integrabilitätsbedingungen erfüllt. —

Umgekehrt kann man sich ein System von Differentialgleichungen vorgelegt denken — integrabel oder nicht integrabel — und kann sich

---

*) Lie, Gesellsch. d. W. zu Christiania 1882; Math. Ann. Bd. XXIV, 1884.

die Frage stellen, ob dasselbe eine vorgelegte Gruppe gestattet. Auch die Beantwortung dieser Frage hat jetzt keine Schwierigkeit. Man hat nur die vorgelegte Gruppe in der richtigen Weise zu erweitern und sodann zu untersuchen, ob das vorgelegte Gleichungensystem die erweiterte Gruppe gestattet; diese Untersuchung kann nach Kap. 7 ohne Integration durchgeführt werden.

§ 133.

Um eine einfache Anwendung der vorhergehenden Theorien zu geben, wollen wir die Bedingungen aufsuchen, unter welchen ein System von Differentialgleichungen von der Form:

$$A_k\varphi = \sum_1^n {}^i\, \alpha_{ki}(x_1 \cdots x_n)\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \qquad (k=1\cdots q)$$

die r-gliedrige Gruppe:

$$X_j f = \sum_1^n {}^i\, \xi_{ji}(x_1 \cdots x_n)\, \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (j=1\cdots r)$$

in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ gestattet; die q Gleichungen $A_k\varphi = 0$ werden dabei natürlich als von einander unabhängig vorausgesetzt.

Um die gestellte Frage beantworten zu können, müssen wir zu den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ der Gruppe $X_k f$ noch die Veränderliche φ hinzufügen, welche offenbar bei der Gruppe gar nicht transformirt wird. Die x sind als unabhängige Veränderliche zu betrachten, φ als abhängige und die Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ ist demnach durch Hinzunahme der n Differentialquotienten:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \varphi_i \qquad (i=1\cdots n)$$

zu erweitern. Sodann ist zu untersuchen, ob das Gleichungensystem: $\Sigma^i\, \alpha_{ki}\, \varphi_i = 0$ die erweiterte Gruppe zulässt.

Wir berechnen zunächst das unendlich kleine Increment $\delta\varphi_i$, welches φ_i bei der infinitesimalen Transformation $X_j f$ erhält. Dasselbe ist so zu bestimmen, dass der Ausdruck:

$$\delta\left(d\varphi - \sum_1^n {}^\nu\, \varphi_\nu\, dx_\nu\right) = d\,\delta\varphi - \sum_1^n {}^\nu \left\{\varphi_\nu\, d\,\delta x_\nu + \delta\varphi_\nu\, dx_\nu\right\}$$

vermöge $d\varphi = \Sigma\, \varphi_\nu\, dx_\nu$ verschwindet. Da aber $\delta\varphi$ wie oben bemerkt Null ist, so erhalten wir für die $\delta\varphi_\nu$ die Gleichung:

$$\sum_1^n {}^\nu \left\{\varphi_\nu\, d\xi_{j\nu} \cdot \delta t + \delta\varphi_\nu \cdot dx_\nu\right\} = 0,$$

welche identisch bestehen muss. Folglich wird:

$$\delta\varphi_\nu = -\sum_1^n {}^\mu\, \frac{\partial \xi_{j\mu}}{\partial x_\nu}\, \varphi_\mu \cdot \delta t$$

und die erweiterte infinitesimale Transformation $X_j f$ hat die Gestalt:

$$X_j^{(1)} f = \sum_1^n {}^i\, \xi_{ji} \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_1^n {}^i \left\{ \sum_1^n {}^\mu \frac{\partial \xi_{j\mu}}{\partial x_i} \varphi_\mu \right\} \frac{\partial f}{\partial \varphi_i}.$$

Soll nun das Gleichungensystem: $\Sigma i\, \alpha_{ki}(x)\, \varphi_i = 0$ in den $2n$ Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$, $\varphi_1 \cdots \varphi_n$ die infinitesimale Transformation $X_j^{(1)} f$ gestatten, so müssen alle q Ausdrücke:

$$X_j^{(1)} \left(\sum_1^n {}^i\, \alpha_{ki} \varphi_i \right) = \sum_1^n {}^i\, X_j \alpha_{ki} \cdot \varphi_i - \sum_1^n {}^\mu \left\{ \sum_1^n {}^i\, \alpha_{ki} \frac{\partial \xi_{j\mu}}{\partial x_i} \right\} \varphi_\mu \qquad (k = 1 \cdots q)$$

vermöge des Gleichungensystems verschwinden. Diese nothwendige und zugleich hinreichende Bedingung ist nur dann erfüllt, wenn Relationen von der Form:

$$X_j^{(1)} \left(\sum_1^n {}^i\, \alpha_{ki} \varphi_i \right) = \sum_1^q {}^\sigma\, \varrho_{jk\sigma}(x) \sum_1^n {}^i\, \alpha_{\sigma i} \varphi_i$$

bestehen, wo die $\varrho_{jk\sigma}$ Functionen von $x_1 \cdots x_n$ allein bedeuten und nicht von den φ_i abhängen.

Hiermit haben wir die gewünschten Bedingungen gefunden; dieselben lassen sich schreiben:

$$\sum_1^r {}^i \left(X_j \alpha_{ki} - A_k \xi_{ji} \right) \varphi_i = \sum_1^q {}^\sigma\, \varrho_{jk\sigma} \sum_1^n {}^i\, \alpha_{\sigma i} \varphi_i,$$

oder wenn wir an Stelle von φ_i wieder $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ einsetzen:

$$X_j(A_k(\varphi)) - A_k(X_j(\varphi)) = \sum_1^q {}^\sigma\, \varrho_{jk\sigma}(x) \cdot A_\sigma \varphi.$$

Solche Relationen müssen für jede beliebige Function $\varphi(x_1 \cdots x_n)$ bestehen. Stets wenn dieselben bestehen, aber auch nur dann bleibt das System der q linearen partiellen Differentialgleichungen: $A_1 \varphi = 0, \cdots A_q \varphi = 0$ bei jeder Transformation der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ invariant.

Dieses Ergebniss ist uns für den Fall, dass die q Gleichungen: $A_k \varphi = 0$ ein q-gliedriges vollständiges System bilden, nichts neues. Das eben gefundene nothwendige und hinreichende Kriterium haben wir ja für diesen speciellen Fall schon in Kap. 8, Theorem 20, S. 140 angegeben. Unsere gegenwärtigen Entwickelungen leisten jedoch insofern mehr als die damaligen, als wir jetzt gezeigt haben, dass das betreffende Kriterium allgemein gilt, auch wenn die Gleichungen: $A_k \varphi = 0$ kein q-gliedriges vollständiges System bilden.

Der Ursprung der Theorie der Differentialinvarianten geht weit zurück; denn schon Mathematiker des vorigen Jahrhunderts haben die zu mehreren besonders einfachen Gruppen gehörigen invarianten Differentialgleichungen betrachtet und integrirt.

So ist es ja z. B. längst bekannt, dass jede Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x und y, in welcher die eine Veränderliche etwa y nicht explicite vorkommt, durch Quadratur integrirt werden kann; offenbar ist aber:

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0 = f(x, y')$$

nichts anderes als die allgemeinste Differentialgleichung erster Ordnung, welche die eingliedrige Gruppe:

$$(37) \qquad \mathfrak{x} = x, \qquad \mathfrak{y} = y + a$$

mit dem Parameter a gestattet. Aus einer particulären Integralgleichung: $y = \varphi(x)$ einer solchen Differentialgleichung kann die allgemeinste Integralgleichung abgeleitet werden und zwar, so können wir jetzt sagen, dadurch, dass man auf die betreffende particuläre Integralgleichung die allgemeine Transformation der eingliedrigen Gruppe (37) ausführt; hierdurch erhält man ja die Gleichung: $\mathfrak{y} = \varphi(\mathfrak{x}) + a$ mit der willkürlichen Constanten a.

Ferner ist die homogene Differentialgleichung:

$$f\left(\frac{y}{x}, \frac{dy}{dx}\right) = 0 = f\left(\frac{y}{x}, y'\right)$$

die allgemeine Form einer Differentialgleichung erster Ordnung, welche die eingliedrige Gruppe: $\mathfrak{x} = ax$, $\mathfrak{y} = ay$ gestattet; hier ist $f\left(\frac{y}{x}, y'\right)$ die allgemeinste zu dieser Gruppe gehörige Differentialinvariante erster Ordnung.

Es ist längst bemerkt worden, dass jede particuläre Integralgleichung: $F(x, y) = 0$ einer homogenen Differentialgleichung: $f = 0$ durch Ausführung der allgemeinen Transformation: $\mathfrak{x} = ax$, $\mathfrak{y} = ay$ in die allgemeine Integralgleichung:

$$F\left(\frac{\mathfrak{x}}{a}, \frac{\mathfrak{y}}{a}\right) = 0$$

übergeht. Von der Gleichung $xy' - y = 0$ wird doch hier abgesehen.

Ein drittes Beispiel liefern die Differentialgleichungen von der Form:

$$f\left(\frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}}\right) = 0 = f(y^{(m)}, y^{(m+1)});$$

es wird indess nicht nöthig sein, die Gruppe aller Gleichungen von dieser Form hinzuschreiben.

In der Invariantentheorie der linearen Transformationen kommen häufig wirkliche Differentialinvarianten gegenüber allen linearen Transformationen vor. Dieselben sind zuerst von *Cayley* betrachtet worden. Dabei ist indess zu bemerken *erstens*, dass die *Cayley*schen Differentialinvarianten nicht die einfachsten sind, welche zu der allgemeinen linearen homogenen Gruppe gehören, *zweitens*, dass *Cayley* keine invarianten Differential*gleichungen* betrachtet und noch weniger solche integrirt.

In einer 1867 eingereichten und 1871 gedruckten Preisschrift (Bestimmung einer speciellen Minimalfläche, Akad. d. W. zu Berlin) betrachtet *H. Schwarz* Differentialgleichungen von der Form:

$$J = \frac{y'y''' - \frac{3}{2}y''^2}{y'^2} - f(x) = 0,$$

die, wie er selbst angegeben hat, schon bei *Lagrange* gelegentlich vorkommen. *Schwarz* bemerkt, dass aus jeder particulären Lösung: $y = \varphi(x)$ sich die allgemeinste ableiten lässt; diese letztere hat nämlich die Form:

$$y = \frac{a + b\varphi}{c + d\varphi}$$

mit den willkürlichen Constanten: $a:b:c:d$. Es ist daher, können wir sagen, der Ausdruck J eine Differentialinvariante und zwar die allgemeinste Differentialinvariante dritter Ordnung der Gruppe:

$$\mathfrak{x} = x, \quad \mathfrak{y} = \frac{a + by}{c + dy}.$$

So werthvoll nun aber alle diese speciellen Theorien unzweifelhaft sind, so ist doch zu bemerken, dass der innere Zusammenhang zwischen ihnen, das allgemeine Princip, aus dem sie alle fliessen, den Mathematikern entgangen war. Sie hatten nicht bemerkt, dass zu *jeder* endlichen continuirlichen Gruppe Differentialinvarianten gehören.

In den Jahren 1869—1871 beschäftigte sich *Lie* mit Differentialgleichungen, die vertauschbare infinitesimale Transformationen zulassen, und 1874 veröffentlichte er eine bereits 1872 angekündigte *allgemeine Integrationstheorie von gewöhnlichen Differentialgleichungen, die eine beliebige continuirliche Gruppe von Transformationen gestatten.**)

Sodann berechnete *Halphen* die einfachsten *Differentialinvarianten gegenüber allen projectiven Transformationen* und gab überdies schöne Anwendungen auf die Theorie der *linearen* Differentialgleichungen.**)

Darnach entwickelte *Lie* in den Jahren 1882—1884 eine *allgemeine Theorie der Differentialinvarianten* der endlichen und unendlichen continuirlichen Gruppen, wobei er sich besonders eingehend mit endlichen Gruppen in zwei Veränderlichen beschäftigte.***) Diese allgemeine Theorie ist, soweit sie sich auf endliche Gruppen bezieht, im Vorangehenden auseinandergesetzt.

Endlich haben nach 1884 *Sylvester* und mehrere andere englische und amerikanische Mathematiker ausführliche aber *specielle* Untersuchungen über Differentialinvarianten veröffentlicht.

---

*) Verhandlungen der Gesellsch. d. W. zu Christiania 1870—1874; Math. Ann. Bd. V, XI; Gött. Nachr. 1874.

**) Thèse sur les invariants différentiels 1878; Journal de l'école pol. 1880. Vgl. auch Comptes rendus Bd. 81, 1875, p. 1053; Journal de Liouville Novbr. 1876. Mémoire sur la réduction des équat. diff. lin. aux formes intégrables 1880—1883.

***) Verh. d. Gesellsch. d. W. zu Christiania, 1882, 1883 und Februar 1875; Archiv for Math. 1882, 1883; Math. Ann. Bd. XXIV, 1884.

Kapitel 26.

Die allgemeine projective Gruppe.

Die Gleichungen:

$$(1) \qquad x_\nu' = \frac{a_{1\nu} x_1 + \cdots + a_{n\nu} x_n + a_{n+1,\nu}}{a_{1,n+1} x_1 + \cdots + a_{n,n+1} x_n + a_{n+1,n+1}} \qquad (\nu = 1 \cdots n)$$

bestimmen, wie man sich leicht überzeugt, eine Gruppe, die sogenannte *allgemeine projective Gruppe* der Mannigfaltigkeit $x_1 \cdots x_n$. Wir wollen diese wichtige Gruppe, welche auch die Gruppe aller *Collineationen* des Raumes $x_1 \cdots x_n$ heisst, in dem gegenwärtigen Kapitel etwas näher untersuchen, indem wir unsere Aufmerksamkeit insbesondere auf ihre Untergruppen richten.

§ 134.

Die $(n+1)^2$ Parameter a sind nicht alle wesentlich, es treten ja blos ihre Verhältnisse auf; einer der Parameter, am besten $a_{n+1,n+1}$ kann daher gleich 1 gesetzt werden. Die Werthe der Parameter sind der Beschränkung unterworfen, dass die Substitutionsdeterminante $\Sigma \pm a_{11} \cdots a_{n+1,n+1}$ nicht gleich Null sein darf; denn gleichzeitig mit derselben würde auch die Functionaldeterminante: $\sum \pm \frac{\partial x_1'}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial x_n'}{\partial x_n}$ verschwinden.

Die identische Transformation ist in unserer Gruppe enthalten, sie gehört zu den Parameterwerthen:

$$a_{\nu\nu} = 1, \; a_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu, \nu = 1 \cdots n+1, \; \mu \neq \nu),$$

für welche sich ja $x_i' = x_i$ ergiebt. In Folge dessen erhält man infinitesimale Transformationen der Gruppe, indem man den $a_{\mu\nu}$ die Werthe

$$a_{\nu\nu} = 1 + \omega_{\nu\nu}, \; a_{n+1,n+1} = 1, \; a_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu}$$

ertheilt und dabei die ω infinitesimale Grössen bedeuten lässt. So findet man:

$$x_\nu' = \left(x_\nu + \sum_1^n {}^\mu \, \omega_{\mu\nu} x_\mu + \omega_{n+1,\nu} \right) \left(1 - \sum_1^n {}^\mu \, \omega_{\mu,n+1} x_\mu + \cdots \right)$$

oder bei Weglassung der Grössen von zweiter und höherer Ordnung:

$$x_\nu' - x_\nu = \sum_1^n {}^\mu \, \omega_{\mu\nu} x_\mu + \omega_{n+1,\nu} - x_\nu \sum_1^n {}^\mu \, \omega_{\mu,n+1} x_\mu .$$

Setzt man hierin alle $\omega_{\mu\nu}$ mit Ausnahme eines einzigen gleich Null, so erkennt man nach und nach, dass unsere Gruppe die $n(n+2)$ unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

(2) $$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad x_i \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad x_i \sum_1^n {}^j x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \qquad (i, k = 1 \cdots n)$$

enthält.

Die allgemeine projective Gruppe des n-fach ausgedehnten Raumes $x_1 \cdots x_n$ enthält daher $n(n+2)$ wesentliche Parameter und ist von infinitesimalen Transformationen erzeugt. Die analytischen Ausdrücke der letzteren verhalten sich für jeden Punkt des Raumes regulär.

Für $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *werden wir von jetzt ab in der Regel* p_i *schreiben.* Ausserdem wollen wir in diesem Kapitel der Bequemlichkeit wegen die Abkürzungen:

$$x_i p_k = T_{ik}, \quad x_i \sum_1^n {}^k x_k p_k = P_i$$

einführen. Endlich wollen wir noch festsetzen, dass ε_{ik} jedesmal Null bedeuten soll, wenn i und k von einander verschieden sind, während dagegen ε_{ii} den Werth 1 haben soll; eine Festsetzung, die wir gelegentlich schon früher gemacht haben. Auf Grund derselben können wir die Relationen, welche sich durch Combination der infinitesimalen Transformationen p_i, T_{ik}, P_i ergeben, folgendermassen schreiben:

$$(p_i p_k) = 0, \quad (P_i P_k) = 0, \quad (p_i P_k) = T_{ki} + \varepsilon_{ik} \sum_1^n {}^\nu T_{\nu\nu},$$
$$(p_i T_{k\nu}) = \varepsilon_{ik} p_\nu, \quad (P_i T_{k\nu}) = -\varepsilon_{i\nu} P_k,$$
$$(T_{ik} T_{\mu\nu}) = \varepsilon_{k\mu} T_{i\nu} - \varepsilon_{\nu i} T_{\mu k}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Relationen ungeändert bleiben, wenn man darin nach dem Schema:

(3) $$\begin{matrix} p_i, & T_{ik}, & P_i \\ P_i, & -T_{ki}, & p_i \end{matrix}$$

die p_i, T_{ik} und P_i bezüglich durch die unter ihnen stehenden Ausdrücke ersetzt. *In dieser Weise lässt sich also die allgemeine projective Gruppe holoedrisch isomorph auf sich selbst beziehen.*

Man könnte vermuthen, dass es eine Transformation: $x_i' = \Phi_i(x_1 \cdots x_n)$ giebt, welche die infinitesimalen Transformationen:

$$p_i, \quad x_i p_k, \quad x_i \sum_1^n {}^k x_k p_k$$

in bezüglich:

$$x_i' \sum_1^n {}^k x_k' p_k', \quad -x_k' p_i', \quad p_i'$$

überführt. Eine solche Transformation giebt es aber nicht, aus dem einfachen Grunde, weil die n infinitesimalen Transformationen $p_1 \cdots p_n$ eine n-gliedrige *transitive* Gruppe erzeugen, während: $x_1' \Sigma x_k' p_k' \cdots x_n' \Sigma x_k' p_k'$ eine n-gliedrige *intransitive* Gruppe erzeugen.

Erst im nächsten Abschnitte werden wir die volle Bedeutung jener wichtigen Eigenschaft der projectiven Gruppe einsehen lernen, wenn der Begriff der Berührungstransformation und insbesondere der Dualität eingeführt werden wird.

Die allgemeine infinitesimale Transformation:

$$\sum_1^n {}_i\, a_i p_i + \sum_{i,k}^{1 \cdots n} b_{ik} T_{ik} + \sum_1^n {}_i\, c_i P_i$$

unserer Gruppe ist nach Potenzen von $x_1 \cdots x_n$ entwickelt und enthält offenbar nur Glieder von nullter, erster und zweiter Ordnung in den x. Man erkennt leicht, dass die Gruppe n unabhängige infinitesimale Transformationen von nullter Ordnung in den x enthält, aus denen sich keine infinitesimale Transformation von erster oder zweiter Ordnung in den x linear ableiten lässt. Zum Beispiel sind $p_1 \cdots p_n$ n solche infinitesimale Transformationen. Daraus folgt, dass *die allgemeine projective Gruppe transitiv* ist.

Ferner giebt es n^2 infinitesimale Transformationen von erster Ordnung in den x_i, zum Beispiel alle $x_i p_k = T_{ik}$, aus welchen sich keine von zweiter Ordnung linear ableiten lässt. Endlich ergeben sich noch n Transformationen von zweiter Ordnung in den x:

$$x_i \sum_1^n {}_k\, x_k p_k = P_i.$$

In Uebereinstimmung mit dem Satze 9 des Kap. 15, S. 264 sind die P_i paarweise vertauschbar und ausserdem erzeugen die T_{ik} mit den P_i zusammen eine Untergruppe, in welcher die Gruppe der P_i als invariante Untergruppe enthalten ist.

Wie man sieht und wie auch aus unserer obigen Bemerkung über das Verhältniss zwischen den p_i und P_i folgt, sind auch die p_i paarweise vertauschbar und erzeugen mit den T_{ik} zusammen eine Untergruppe, in welcher die Gruppe der p_i invariant ist.

§ 135.

Für die wichtigsten Untergruppen der allgemeinen projectiven Gruppe empfiehlt es sich besondere Namen zu benutzen. Lässt man in dem allgemeinen Ausdruck (1) einer projectiven Transformation den Nenner sich auf 1 reduciren, so erhält man eine *lineare* Transformation:

$$x_\nu' = a_{1\nu}x_1 + \cdots + a_{n\nu}x_n + a_{n+1,\nu} \quad {\scriptstyle (\nu = 1 \cdots n)};$$

alle Transformationen von dieser Form bilden die sogenannte *allgemeine lineare* Gruppe. Die infinitesimalen Transformationen derselben haben wir schon am Schlusse des vorigen Paragraphen angegeben; sie lassen sich alle aus den folgenden $n(n+1)$:

$$p_i,\ x_i p_k \quad {\scriptstyle (i, k = 1 \cdots n)}$$

linear ableiten.

Deutet man $x_1 \cdots x_n$ als Coordinaten in einem n-fach ausgedehnten Raume R_n und überträgt die Ausdrucksweisen aus dem gewöhnlichen Raume, so kann man sagen, dass die allgemeine lineare Gruppe aus allen projectiven Transformationen besteht, welche die unendlich ferne $(n-1)$-fach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit oder kurz die *unendlich ferne ebene* M_{n-1} invariant lassen.

Erinnert man sich daran, dass bei Ausführung zweier endlicher linearer Transformationen nach einander die Substitutionsdeterminanten: $\Sigma \pm a_{11} \cdots a_{nn}$ sich multipliciren, so erkennt man ohne Weiteres, dass der Inbegriff aller linearen Transformationen, deren Determinante: $\Sigma \pm a_{11} \cdots a_{nn}$ gleich 1 ist, in der allgemeinen linearen Gruppe eine Untergruppe bildet und zwar eine invariante Untergruppe, welche wir die *specielle lineare Gruppe* nennen wollen. Man findet leicht, dass als die $n(n+1)-1$ unabhängigen infinitesimalen Transformationen derselben die folgenden gewählt werden können:

$$p_i,\ x_i p_k,\ x_i p_i - x_k p_k \quad {\scriptstyle (i \gtrless k)}.$$

Beschränkt man sich unter allen linearen Transformationen auf die in den x homogenen, so erhält man die *allgemeine lineare homogene Gruppe:*

$$x_\nu' = a_{1\nu}x_1 + \cdots + a_{n\nu}x_n \quad {\scriptstyle (\nu = 1 \cdots n)},$$

deren infinitesimale Transformationen sämmtlich die Form: $\Sigma b_{ik} x_i p_k$ besitzen und sich daher aus den n^2 Transformationen $x_i p_k$ linear ableiten lassen. Auch diese Gruppe enthält offenbar eine invariante Untergruppe, die *specielle lineare homogene*, für welche: $\Sigma \pm a_{11} \cdots a_{nn}$ den Werth 1 hat. Die $n^2 - 1$ infinitesimalen Transformationen dieser letzteren sind:

$$x_i p_k,\ x_i p_i - x_k p_k \quad {\scriptstyle (i \gtrless k)};$$

die allgemeine infinitesimale Transformation der betreffenden Gruppe hat daher die Form: $\sum\limits_{ik} \alpha_{ik} x_i p_k$, wo die n^2 willkürlichen Constanten α_{ik} nur der Bedingung $\Sigma \alpha_{ii} = 0$ unterworfen sind.

Da der Ausdruck: $(x_i p_k,\ \Sigma^j x_j p_j)$ immer verschwindet, so liegt es auf der Hand, dass die beiden letztgenannten Gruppen *systatisch* und folglich *imprimitiv* sind. In der That, setzt man:

$$\frac{x_i}{x_n} = y_i, \quad \frac{x_i'}{x_n'} = y_i' \qquad (i = 1 \cdots n-1)$$

so bekommt man:

$$y_\nu' = \frac{a_{1\nu} y_1 + \cdots + a_{n-1,\nu} y_{n-1} + a_{n\nu}}{a_{1,n-1} y_1 + \cdots + a_{n-1,n-1} y_{n-1} + a_{n,n-1}} \qquad (\nu = 1 \cdots n-1).$$

Hieraus geht überdies hervor, dass in beiden Fällen die y durch die (n^2-1)-gliedrige allgemeine projective Gruppe der $(n-1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit $y_1 \cdots y_{n-1}$ transformirt werden. Mit dieser Gruppe ist daher sowohl die allgemeine als die specielle lineare homogene Gruppe einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit isomorph, doch ist der Isomorphismus natürlich nur für die specielle lineare homogene Gruppe holoedrisch, da dieselbe n^2-1 Parameter enthält.

Theorem 96. *Die specielle lineare homogene Gruppe:*

$$x_i p_k, \quad x_i p_i - x_k p_k \qquad (i \gtrless k = 1 \cdots n)$$

in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ ist imprimitiv und holoedrisch isomorph mit der allgemeinen projectiven Gruppe einer $(n-1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit.

Die formell einfachsten infinitesimalen Transformationen der allgemeinen projectiven Gruppe sind $p_1 \cdots p_n$; dieselben erzeugen, wie schon bemerkt, an und für sich eine Gruppe: die Gruppe aller *Translationen:*

$$x_i' = x_i + a_i \qquad (i = 1 \cdots n),$$

die offenbar einfach transitiv ist.

Ueberhaupt erzeugen beliebige m infinitesimale Translationen, etwa $p_1 \cdots p_m$, stets eine m-gliedrige Gruppe. Für alle diese Gruppen gilt:

Satz 1. *Alle m-gliedrigen Gruppen von Translationen sind innerhalb der allgemeinen projectiven, ja sogar schon innerhalb der allgemeinen linearen Gruppe mit einander gleichberechtigt.*

Die m unabhängigen infinitesimalen Transformationen einer solchen Gruppe haben nämlich immer die Form:

$$\sum_1^n {}_\nu \, b_{\mu\nu} p_\nu \qquad (\mu = 1 \cdots m),$$

wo nicht alle m-reihigen Determinanten der $b_{\mu\nu}$ verschwinden.

Wir können aber sehr leicht zeigen, dass vermittelst einer linearen Transformation neue Veränderliche $x_1' \cdots x_n'$ eingeführt werden können, für welche:

$$p'_\mu = \sum_1^n {}_\nu\, b_{\mu\nu} p_\nu \quad (\mu = 1 \cdots m)$$

wird. Es ist ja $p'_\mu = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial x'_\mu} + \cdots + p_n \frac{\partial x_n}{\partial x'_\mu}$; mithin brauchen wir nur zu setzen:

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} = b_{\mu\nu} \quad (\nu = 1 \cdots n,\ \mu = 1 \cdots m),$$

während die $\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_{m+1}} \cdots \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_n}$ beliebig bleiben. Wir können diesen letzteren solche Werthe ertheilen, dass die Gleichungen:

$$x_\nu = \sum_1^m {}_\mu\, b_{\mu\nu} x'_\mu + \sum_{m+1}^n {}_\pi\, c_{\pi\nu} x'_\pi \quad (\nu = 1 \cdots n)$$

eine Transformation bestimmen, und diese führt dann die vorgelegte Gruppe von Translationen in die Gruppe $p_1' \cdots p_m'$ über. Hieraus folgt unser Satz unmittelbar.

Einen zweiten Beweis desselben Satzes wollen wir wenigstens andeuten. Wie schon oben bemerkt, lässt die allgemeine lineare Gruppe die unendlich ferne ebene M_{n-1} invariant, und zwar ist sie sogar die allgemeinste projective Gruppe von dieser Beschaffenheit. Nun ist jede infinitesimale Translation nach einem unendlich fernen Punkte gerichtet und durch diesen vollständig bestimmt; *jede m-gliedrige Gruppe von Translationen lässt sich daher durch eine m-fach ausgedehnte unendlich ferne ebene Mannigfaltigkeit M_m darstellen.* Aber zwei unendlich ferne ebene M_m können stets durch eine lineare Transformation, welche ja die unendlich ferne Ebene invariant lässt, in einander übergeführt werden. Folglich sind alle m-gliedrigen Gruppen von Translationen innerhalb der allgemeinen linearen und ebenso innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe mit einander gleichberechtigt.

Das früher angegebene Entsprechen, welches zwischen den p_i und den P_i stattfindet, liefert, wie wir sogleich zeigen, den

Satz 2. *Alle m-gliedrigen Gruppen, deren infinitesimale Transformationen die Form $\Sigma e_i P_i$ besitzen, sind innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe gleichberechtigt.*

Beim Beweise gehen wir davon aus, dass zwei Untergruppen dann innerhalb einer Gruppe G_r gleichberechtigt sind, wenn die eine vermittelst einer Transformation der adjungirten Gruppe von G_r in die andere übergeführt werden kann; die Untergruppen haben wir uns dabei als ebene Mannigfaltigkeiten in dem Raume $e_1 \cdots e_r$ zu denken, welcher bei der adjungirten Gruppe transformirt wird (vgl. Kap. 16, S. 280). Schreiben wir jetzt die Transformationen der projectiven Gruppe einmal in der Reihenfolge p_i, T_{ik}, P_i und dann in der Reihenfolge P_i, $-T_{ki}$, p_i, so erhalten wir beide Male identisch dieselbe adjungirte Gruppe. Da aber zwei m-gliedrige Gruppen von Translationen stets durch die adjungirte Gruppe in einander übergeführt werden können, muss dies auch stets mit zwei solchen m-gliedrigen Gruppen der Fall sein, deren infinitesimale Transformationen sich aus den P_i linear ableiten lassen. Ja es ergiebt sich sogar, dass zwei m-gliedrige Gruppen dieser Art schon in der Gruppe P_i, T_{ik} mit einander gleichberechtigt sind. Damit ist unser Satz bewiesen.

§ 136.

Wir betrachten jetzt nach einander die allgemeine projective Gruppe, die allgemeine lineare und die lineare homogene Gruppe, und zwar wollen wir untersuchen, ob invariante Untergruppen und welche in diesen drei Gruppen enthalten sind.

Zunächst die allgemeine projective Gruppe. Es sei:

$$S = \sum_1^n {}^i \alpha_i p_i + \sum_1^n {}^i \sum_1^n {}^k \beta_{ik} x_i p_k + \sum_1^n {}^i \gamma_i x_i \sum_1^n {}^k x_k p_k$$

eine infinitesimale Transformation einer invarianten Untergruppe; $(p_\nu S)$ und $(p_\mu(p_\nu S))$ sind dann nothwendig auch Transformationen derselben. In unserer invarianten Untergruppe käme daher sicher eine infinitesimale Translation $\Sigma \varrho_i p_i$ vor. Da aber innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe alle infinitesimalen Translationen mit einander gleichberechtigt sind, müssen sie alle vorkommen. Weiter enthielte die Untergruppe, weil sie invariant ist, nothwendig alle Transformationen: $(p_k,\ x_i \Sigma^j x_j p_j)$, oder ausgerechnet:

$$x_i p_k \quad {\scriptstyle (i \gtrless k)}, \qquad x_i p_i + \sum_1^n {}^j x_j p_j \,.$$

Addirt man die n Transformationen: $x_i p_i + \Sigma^j x_j p_j$ zu einander, so erhält man: $(n+1) \Sigma x_j p_j$, hieraus $x_i p_i$ und damit überhaupt alle $x_i p_k$. Endlich enthielte die invariante Untergruppe noch alle Transformationen: $(x_i p_i,\ x_i \Sigma^k x_k p_k)$, also alle $x_i \Sigma x_k p_k$ und wäre daher mit der allgemeinen projectiven Gruppe selbst identisch. Unser erstes Ergebniss ist daher:

Theorem 97. *Die allgemeine projective Gruppe in n Veränderlichen ist einfach.**)

Dementsprechend ist auch die specielle lineare homogene Gruppe:

(4) $$x_i p_k,\ x_i p_i - x_k p_k \quad {\scriptstyle (i \gtrless k)}$$

einfach.

---

*) Lie, Math. Ann., Bd. XXV, S. 130.

Die allgemeine lineare homogene Gruppe mit den n^2 infinitesimalen Transformationen $x_i p_k$ enthält, wie wir oben sahen, eine invariante Untergruppe mit $n^2 - 1$ Parametern, nämlich die eben genannte Gruppe (4).

Giebt es noch eine zweite invariante Untergruppe, so kann dieselbe offenbar die Gruppe (4) nicht umfassen, ebensowenig aber kann sie mit derselben infinitesimale Transformationen gemein haben, denn solche würden (vgl. Satz 10 des Kap. 15, S. 264) in der einfachen Gruppe (4) eine invariante Untergruppe bilden. Mit Berücksichtigung des Satzes 7, Kap. 12, S. 211 folgt daher, dass eine etwaige zweite invariante Untergruppe nur eine infinitesimale Transformation enthalten kann und zwar eine von der Form:

$$\sum_1^n {}^i\, x_i p_i + \sum_{ik}^{1\cdots n} \alpha_{ik} x_i p_k \quad \left(\sum_1^n {}^i\, \alpha_{ii} = 0\right).$$

Dieselbe muss ausserdem nach Satz 11, Kap. 15, S. 264 mit jeder Transformation der Gruppe (4) vertauschbar sein, woraus folgt, dass die Transformation:

$$\sum_{ik}^{1\cdots n} \alpha_{ik} x_i p_k \quad \left(\sum_1^n {}^i\, \alpha_{ii} = 0\right)$$

innerhalb der Gruppe (4) ausgezeichnet sein muss. Eine solche Transformation giebt es aber nicht, also verschwinden alle α_{ik} und es zeigt sich, dass $x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n$ und (4) die beiden einzigen invarianten Untergruppen der Gruppe $x_i p_k$ sind.

Theorem 98. *Die allgemeine lineare homogene Gruppe $x_i p_k$ in n Veränderlichen enthält nur zwei invariante Untergruppen, nämlich die specielle lineare homogene Gruppe und die eingliedrige Gruppe: $x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n$.*

Nunmehr gelingt es leicht, alle invarianten Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppe aufzustellen. Es sei:

$$S = \sum_1^n {}^i\, \alpha_i p_i + \sum_1^n {}^i \sum_1^n {}^k\, \beta_{ik} x_i p_k$$

eine Transformation einer solchen Untergruppe. Zugleich mit S gehört dann auch $(p_j S)$ der invarianten Untergruppe an; dieselbe enthält daher sicher eine Translation und wegen Satz 1, S. 558 enthält sie alle. Die kleinste invariante Untergruppe besteht somit aus den Translationen selbst; jede andere muss ausser den Translationen noch eine Reihe infinitesimaler Transformationen von der Form: $\Sigma^i \Sigma^k \alpha_{ik} x_i p_k$ enthalten. Diese letzteren aber erzeugen augenscheinlich eine invariante Untergruppe der linearen homogenen Gruppe $x_i p_k$. Also finden wir:

Theorem 99. *Die allgemeine lineare Gruppe:* p_i, $x_i p_k$ *enthält nur drei invariante Untergruppen**), *nämlich die drei:*

$$p_i \qquad p_i, x_1p_1 + \cdots + x_np_n \qquad p_i, x_ip_k, x_ip_i - x_kp_k \quad {\scriptstyle (i \gtrless k)}$$

mit bezüglich n, $n+1$ *und* n^2+n-1 *Parametern.*

Bedienen wir uns, wie schon mehrmals, der Terminologie, welche beim gewöhnlichen Raume gebräuchlich ist, so können wir sagen: die drei invarianten Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppe sind erstens die Gruppe aller Translationen, zweitens die Gruppe aller Aehnlichkeitstransformationen: $(x_1 - x_1^0)p_1 + \cdots + (x_n - x_n^0)p_n$ und endlich die allgemeinste lineare Gruppe, welche alle Volumina ungeändert lässt.

§ 137.

Bevor wir dazu übergehen, die grössten Untergruppen der allgemeinen projectiven Gruppe zu bestimmen, schicken wir eine Bemerkung voraus, welche im Folgenden vielfach Anwendung finden wird.

Es seien $X_1f \cdots X_rf$ unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe G_r, und es möge eine Schaar von ∞^{r-m-1} infinitesimalen Transformationen derselben durch m unabhängige Gleichungen von der Form:

$$\sum_1^r {}_j\, \alpha_{kj} e_j = 0 \quad {\scriptstyle (k=1\cdots m)} \tag{5}$$

bestimmt sein. Man wisse ferner aus irgend einem Grunde, dass unter den infinitesimalen Transformationen: $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ dieser Schaar keine infinitesimale Transformation von der Form: $e_1X_1f + \cdots + e_mX_mf$ enthalten ist. Dann lässt sich zunächst schliessen, dass die Gleichungen (5) nach $e_1 \cdots e_m$ auflösbar sind; denn setzt man in diesen Gleichungen: $e_{m+1} = \cdots = e_r = 0$, so muss folgen: $e_1 = \cdots = e_m = 0$, was nur eintritt, wenn die Determinante: $\Sigma \pm \alpha_{11} \cdots \alpha_{mm}$ nicht verschwindet. Wählt man daher: $e_{m+1} \cdots e_r$ beliebig, doch nicht alle gleich Null, so erhalten $e_1 \cdots e_m$ bestimmte Werthe, und die Schaar enthält somit $r-m$ von einander unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$X_{m+j}f + e_{1j}X_1f + \cdots + e_{mj}X_mf \quad {\scriptstyle (j=1\cdots r-m)}.$$

Demnach gilt der

Satz 3. *Wird unter den infinitesimalen Transformationen:* $\Sigma e_k X_k f$ *der r-gliedrigen Gruppe:* $X_1f \cdots X_rf$ *durch m unabhängige lineare Gleichungen:*

$$\sum_1^r {}_j\, \alpha_{kj} e_j = 0 \quad {\scriptstyle (k=1\cdots m)}$$

---

*) Lie, Math. Ann. Bd. XXV, S. 130.

eine Schaar ausgeschieden, welche keine infinitesimale Transformation von der Form: $e_1 X_1 f + \cdots + e_m X_m f$ *umfasst, so enthält dieselbe* $r - m$ *infinitesimale Transformationen von der Gestalt:*

$$X_{m+j} + \sum_1^m {}_\nu \, e_{j\nu} X_\nu f \quad (j = 1 \cdots r - m).$$

§ 138.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns speciell zu der allgemeinen projectiven Gruppe. Die Parameterzahl $n(n+2)$ derselben bezeichnen wir zur Abkürzung mit N und suchen zunächst alle Untergruppen mit mehr als $N - n$ Parametern, also alle G_{N-m}, für welche $m < n$ ist. Diese Fragestellung hat natürlich nur dann einen Sinn, wenn die Zahl n grösser als 1 ist.

Nach einer früheren Bemerkung (vgl. Kap. 12, Satz 7, S. 211) hat die gesuchte G_{N-m} mit der n-gliedrigen Gruppe $p_1 \cdots p_n$ wenigstens $n - m$ unabhängige infinitesimale Transformationen gemein. Also enthält G_{N-m} jedenfalls $n - m$ unabhängige infinitesimale Translationen. Enthält sie nicht mehr als $n - m$, so können wir wegen Satz 1 annehmen, dass $p_{m+1} \cdots p_n$ diese Translationen sind, während keine Translation von der Form: $e_1 p_1 + \cdots + e_m p_m$ vorhanden ist. Aus dem Satze 3 folgt dann, dass eine Transformation:

$$x_{m+1} p_1 + e_1 p_1 + \cdots + e_m p_m$$

vorkommt, diese aber würde mit p_{m+1} combinirt p_1 ergeben, was ein Widerspruch wäre. In unserer G_{N-m} sind daher sicher mehr als $n - m$, etwa $n - q \; (q < m)$ infinitesimale Translationen vorhanden, wir wollen annehmen: $p_{q+1} \cdots p_m \cdots p_n$; dagegen kommt, wenn $q > 0$ ist, keine Translation von der Form: $e_1 p_1 + \cdots + e_q p_q$ vor. Nun giebt es (vgl. Kap. 12, Satz 7, S. 211) in der G_{N-m} jedenfalls *eine* Transformation:

$$\lambda_n x_n p_1 + \cdots + \lambda_{q+1} x_{q+1} p_1 + e_q p_q + \cdots + e_1 p_1,$$

in welcher nach dem Vorhergehenden die λ nicht alle verschwinden können. Durch Combination mit einer der Translationen $p_{q+1} \cdots p_n$ ergiebt sich daher mindestens einmal p_1, was doch ausgeschlossen war. Die Zahl q kann daher nicht grösser als Null sein, es ist $q = 0$ und die gesuchte G_{N-m} umfasst mithin, wenn $m < n$ ist, alle Translationen.

Durch vollständig analoge Betrachtungen erkennt man, dass die $G_{N-m} \; (m < n)$ alle Transformationen P_i enthalten muss. Diese Betrachtungen stimmen sogar wörtlich mit den eben durchgeführten überein, wenn man nur die p_i, $x_i p_k$, P_i bezüglich durch P_i, $-x_k p_i$, p_i ersetzt und sich auf den Satz 2, S. 559 bezieht.

Unsere G_{N-m} enthält demnach alle p_i und zugleich alle P_i, dann aber enthält sie, wie schon früher (auf Seite 560) gelegentlich gezeigt wurde, auch noch alle $x_i p_k$ und ist daher mit der allgemeinen projectiven Gruppe selbst identisch. Folglich:

Theorem 100. *Die allgemeine projective Gruppe der Mannigfaltigkeit* $x_1 \cdots x_n$ *enthält keine Untergruppe mit mehr als* $n(n+2) - n = n(n+1)$ *Parametern.*

§ 139.

Jetzt handelt es sich darum, alle in der allgemeinen projectiven Gruppe enthaltenen Untergruppen mit $N - n = n(n+1)$ Parametern zu bestimmen. Um diese Aufgabe vollständig erledigen zu können, müssen wir eine Reihe verschiedener Möglichkeiten einzeln behandeln.

Zunächst suchen wir alle $n(n+1)$-gliedrigen Untergruppen, welche keine infinitesimale Translation $\Sigma e_k p_k$ enthalten. Nach Satz 3, S. 562 ist dann sicher eine Transformation:

$$U = \sum_1^n {}^i x_i p_i - \sum_1^n {}^i \alpha_i p_i = \sum_1^n {}^i (x_i - \alpha_i) p_i$$

vorhanden und ebenso giebt es für jeden Werth von i und k eine Transformation von der Form:

$$T = (x_i - \alpha_i) p_k + \sum_1^n {}^j \beta_{ikj} p_j.$$

Durch Combination der beiden infinitesimalen Transformationen U und T ergiebt sich der Ausdruck: $(UT) = -\Sigma^j \beta_{ikj} p_j$, und da unsere Gruppe keine infinitesimale Transformation von dieser Form enthält, müssen alle β_{ikj} verschwinden.

Endlich giebt es noch n infinitesimale Transformationen:

$$P_i + \sum_1^n {}^k \gamma_{ik} p_k$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt:

$$P_i' = (x_i - \alpha_i) \sum_1^n {}^j (x_j - \alpha_j) p_j + \sum_1^n {}^k \delta_{ik} p_k.$$

Combiniren wir P_i' mit $\Sigma (x_k - \alpha_k) p_k = U$, so ergiebt sich:

$$(UP_i') = (x_i - \alpha_i) \sum_1^n {}^j (x_j - \alpha_j) p_j - \sum_1^n {}^k \delta_{ik} p_k,$$

so dass alle δ_{ik} verschwinden.

In der gesuchten $n(n+1)$-gliedrigen Untergruppe müssen daher die folgenden $n(n+1)$ unabhängigen infinitesimalen Transformationen vorkommen:

$$(6) \qquad (x_i - \alpha_i)p_k, \ (x_i - \alpha_i)\sum_1^n{}_j (x_j - \alpha_j)\, p_j \qquad {\scriptstyle (i,k=1\cdots n)}.$$

Man überzeugt sich leicht durch paarweise Combination, dass diese infinitesimalen Transformationen auch wirklich eine $n(n+1)$-gliedrige Gruppe erzeugen. Dies folgt übrigens auch daraus, dass die infinitesimalen Transformationen (6) alle den im Endlichen gelegenen Punkt $x_i = \alpha_i$ invariant lassen. Sie sind nämlich von einander unabhängig und $n(n+1)$ an der Zahl, das heisst also geradesoviel, als es in der $n(n+2)$-gliedrigen projectiven Gruppe unabhängige infinitesimale Transformationen giebt, welche den Punkt $x_i = \alpha_i$ invariant lassen. Nach Satz 2, S. 205 erzeugen daher die infinitesimalen Transformationen (6) eine $n(n+1)$-gliedrige Gruppe.

Jede $n(n+1)$-gliedrige projective Gruppe des R_n, in welcher keine infinitesimale Translation $\Sigma e_k p_k$ vorkommt, besteht somit aus allen projectiven Transformationen, welche einen im Endlichen gelegenen Punkt festhalten.

Hätten wir in der obigen Rechnung überall bezüglich P_i, $-x_i p_k$, p_i an Stelle von p_i, $x_k p_i$, P_i geschrieben, so hätten wir alle $n(n+1)$-gliedrigen Untergruppen gefunden, welche keine infinitesimale Transformation $\Sigma e_k P_k$ enthalten. Wir können daher gleich die betreffende Vertauschung in den Ausdrücken (6) vornehmen und erhalten so:

$$x_k p_i + \alpha_i P_k, \ p_i + \alpha_i \sum_1^n{}_j x_j p_j + \sum_1^n{}_j \alpha_j (x_j p_i + \alpha_i P_j).$$

Hier darf das Glied $\Sigma \alpha_j (x_j p_i + \alpha_i P_j)$ ohne Weiteres weggelassen werden, und es ergiebt sich daher als allgemeine Form der $n(n+1)$-gliedrigen Untergruppen, welche keine Transformation $\Sigma e_k P_k$ enthalten, die folgende:

$$(7) \qquad p_i + \alpha_i \sum_1^n{}_j x_j p_j, \quad x_i p_k + \alpha_k P_i.$$

Dass diese infinitesimalen Transformationen eine Gruppe erzeugen, folgt aus ihrer Herleitung, man könnte es natürlich auch direkt bestätigen.

Verschwinden alle α_i, so haben wir die schon früher besprochene allgemeine lineare Gruppe, welche die unendlich ferne ebene M_{n-1} invariant lässt. Es liegt daher die Vermuthung recht nahe, dass im allgemeinen Falle, wo nicht alle α_i gleich Null sind, ebenfalls eine ebene M_{n-1}: $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda = 0$ existirt, welche alle infinitesimalen Transformationen (7) gestattet.

Durch Ausführung der infinitesimalen Transformationen: $p_i + \alpha_i \Sigma x_j p_j$ ergeben sich für die λ_i folgende Bedingungen:

$$\lambda_i + \alpha_i \sum_1^n{}^j \lambda_j x_j = 0 = \lambda_i - \alpha_i \lambda.$$

Die Grösse λ darf daher jedenfalls nicht verschwinden und kann gleich 1 gesetzt werden; giebt es also überhaupt eine invariante ebene M_{n-1}, so kann dieselbe nur die Form haben: $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n + 1 = 0$. In der That gestattet diese letztere auch noch die infinitesimalen Transformationen: $x_i p_k + \alpha_k P_i$.

Jede Untergruppe (7) lässt daher eine ebene M_{n-1} des R_n invariant und ist ausserdem die allgemeinste projective Gruppe des R_n, welche die betreffende ebene M_{n-1} in Ruhe lässt. Jede weitere infinitesimale projective Transformation, welche die ebene M_{n-1}: $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n + 1 = 0$ invariant liesse, könnte nämlich die Form erhalten:

$$\sum_1^n{}^k e_k P_k = \sum_1^n{}^k e_k x_k \sum_1^n{}^i x_i p_i.$$

Führt man aber diese infinitesimale Transformation auf die M_{n-1} aus, so ergiebt sich:

$$\sum_1^n{}^k e_k x_k \sum_1^n{}^i \alpha_i x_i = 0 = -\sum_1^n{}^k e_k x_k,$$

woraus: $e_1 = \cdots e_n = 0$.

Enthält also eine $n(n+1)$-gliedrige projective Gruppe des R_n keine infinitesimale Transformation $\Sigma e_k P_k$, so besteht sie aus allen projectiven Transformationen, welche eine nicht durch den Coordinatenanfang gehende ebene M_{n-1} invariant lassen.

Aus den bisherigen Resultaten können wir durch eine einfache Transformation noch einige andere herleiten, welche uns weiterhin von Nutzen sein werden. Verlegen wir nämlich den bisherigen Coordinatenanfang durch die Collineation:

$$(7') \qquad x_1 = \frac{1}{x_1'}, \ x_2 = \frac{x_2'}{x_1'}, \cdots x_n = \frac{x_n'}{x_1'}$$

ins Unendliche, so erhalten wir:

$$p_1' = \sum_1^n{}^i p_i \frac{\partial x_i}{\partial x_1'} = -\frac{1}{x_1'^2}\left(p_1 + \sum_2^n{}^i x_i' p_i\right)$$

und also:

$$p_1' = -x_1 \sum_1^n{}_i\, x_i p_i = -P_1,$$

$$x_k' p_1' = -x_k \sum_1^n{}_i\, x_i p_i = -P_k \quad (k=2\cdots n).$$

Desgleichen ergiebt sich:

$$x_1' \sum_1^n{}_i\, x_i' p_i' = -p_1, \quad x_1' p_k' = -p_k \quad (k=2\cdots n),$$

wie ja überhaupt bei Einführung der x' jede infinitesimale projective Transformation in eine ebensolche übergeht (vgl. Kap. 4, Satz 4, S. 81).

Wir sehen hieraus: unsere Collineation (7′) verwandelt jede $n(n+1)$-gliedrige projective Gruppe, in welcher keine infinitesimale Transformation $\Sigma e_k P_k$ vorkommt, in eine solche, welche keine Transformation $e_1 p_1 + e_2 x_2 p_1 + \cdots + e_n x_n p_1$ enthält. Ebenso geht jede von allen $\Sigma e_k p_k$ freie projective Gruppe in eine über, welche keine Transformation: $e_1 P_1 + e_2 x_1 p_2 + \cdots + e_n x_1 p_n$ enthält.

Giebt es daher in einer $n(n+1)$-gliedrigen projectiven Gruppe keine infinitesimale Transformation: $e_1 p_1 + e_2 x_2 p_1 + \cdots + e_n x_n p_1$, so besteht diese Gruppe aus allen projectiven Transformationen, welche eine gewisse ebene M_{n-1} invariant lassen. Giebt es dagegen in der Gruppe keine infinitesimale Transformation: $e_1 P_1 + e_2 x_1 p_2 + \cdots + e_n x_1 p_n$, so besteht sie aus allen projectiven Transformationen, welche einen gewissen Punkt invariant lassen.

Die allgemeine projective Gruppe besitzt die Eigenschaft, *jeden* Punkt des R_n in *jeden* andern und *jede* ebene M_{n-1} in jede andere überführen zu können. Daraus geht hervor, dass jede $n(n+1)$-gliedrige projective Gruppe des R_n, welche einen Punkt invariant lässt, mit jeder andern Gruppe derselben Art innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe des R_n gleichberechtigt ist und dass ebenso jede $n(n+1)$-gliedrige projective Gruppe des R_n, welche eine ebene M_{n-1} invariant lässt, mit jeder andern projectiven Gruppe dieser Art gleichberechtigt ist.

Nunmehr endlich können wir daran gehen, alle $n(n+1)$-gliedrigen projectiven Gruppen des R_n aufzusuchen.

Da wir alle derartigen Gruppen kennen, welche keine Translationen enthalten, bleibt nur übrig, diejenigen zu finden, in welchen infinitesimale Translationen auftreten. Wir setzen voraus, dass es deren gerade q unabhängige giebt, etwa $p_n \cdots p_{n-q+1}$, dass also, wenn $n-q>0$ ist, keine Translation von der Form: $e_1 p_1 + \cdots + e_{n-q} p_{n-q}$ vorhanden ist.

In unserer Gruppe ist dann sicher eine infinitesimale Transformation von der Form:

$$(8) \qquad \sum_1^q {}_i\, x_{n-q+i} \sum_1^{n-q} {}_k\, \lambda_{ik} p_k + e_1 p_1 + \cdots + e_{n-q} p_{n-q}$$

vorhanden, wenn nur die Anzahl $(n-q)(q+1)$ der in dieser infinitesimalen Transformation enthaltenen Glieder grösser ist als n.

Dies ist nur der Fall, wenn $(n-q)(q+1)-n=q(n-q-1)$ grösser als Null ist, woraus folgt, dass wir von den Fällen $q=n-1$ und $q=n$ zunächst absehen müssen. Setzen wir aber q kleiner als $n-1$ voraus und combiniren die Transformation (8), in welcher offenbar die λ_{ik} nicht alle verschwinden, mit jeder der vorhandenen Translationen $p_{n-q+1} \cdots p_n$, so erhalten wir unter allen Umständen eine nicht identisch verschwindende Transformation von der Form $\mu_1 p_1 + \cdots + \mu_{n-q} p_{n-q}$ und das ist ein Widerspruch. Die Zahl q kann daher nicht kleiner als $n-1$ sein.

Enthält also eine $n(n+1)$-gliedrige projective Gruppe *eine* infinitesimale Translation $\Sigma e_k p_k$, so enthält sie mindestens $n-1$ unabhängige Translationen.

In diesem Resultate können wir wieder, wie schon so oft, die p_i durch die P_i ersetzen und finden, dass es in jeder Gruppe der genannten Art sicher $n-1$ unabhängige Transformationen $\Sigma e_k P_k$ giebt, sobald nur eine einzige von dieser Form vorhanden ist.

Jetzt suchen wir alle $n(n+1)$-gliedrigen projectiven Gruppen mit gerade $n-1$ unabhängigen infinitesimalen Translationen $\Sigma e_k p_k$, etwa mit $p_2 \cdots p_n$. Keine solche Gruppe kann eine Transformation von der Form

$$e_1 p_1 + e_2 x_2 p_1 + \cdots + e_n x_n p_1$$

enthalten, denn durch Combination mit $p_2 \cdots p_n$ ergäbe sich p_1, was ausgeschlossen ist. Nach dem Früheren gehören daher alle diese Gruppen unter die Kategorie derjenigen $n(n+1)$-gliedrigen projectiven Gruppen, welche eine ebene M_{n-1} invariant lassen. Entsprechend ergiebt sich, dass jede $n(n+1)$-gliedrige Gruppe, welche gerade $n-1$ unabhängige Transformationen $\Sigma e_k P_k$ enthält, einen Punkt invariant lässt.

Noch bleiben die $n(n+1)$-gliedrigen projectiven Gruppen zu bestimmen, welche alle n Translationen $p_1 \cdots p_n$ enthalten. Die P_i können nicht ausserdem noch sämmtlich auftreten, weil sonst die Gruppe mit der projectiven Gruppe selbst zusammenfiele.

Es giebt daher nach dem Früheren nur zwei Möglichkeiten: entweder ist gar keine Transformation $\Sigma e_k P_k$ vorhanden oder es treten deren $n-1$ unabhängige auf. Beide Fälle sind schon oben erledigt.

Damit ist unsere Untersuchung zum Abschluss gebracht. Das Ergebniss ist folgendes:

Theorem 101. *Die grössten Untergruppen der allgemeinen projectiven Gruppe einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit enthalten $n(n+1)$ Parameter. Jede solche Untergruppe besteht entweder aus allen projectiven Transformationen, welche eine ebene M_{n-1} oder aus allen, welche einen Punkt invariant lassen. Im ersten Falle ist sie innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe mit der allgemeinen linearen Gruppe p_i, $x_i p_k$ gleichberechtigt, im zweiten Falle mit der Gruppe $x_i p_k$, P_k.**)

Weil die Gruppen der einen Kategorie aus denen der andern durch Vertauschung von $p_i, x_i p_k, P_i$ mit $P_i, -x_k p_i, p_i$ hervorgehen, sind alle $n(n+1)$-gliedrigen Untergruppen der allgemeinen projectiven Gruppe mit einander holoedrisch isomorph. Aus dem Vorhergehenden folgt überdies der

Satz 4. *Die allgemeine projective Gruppe des Raumes $x_1 \cdots x_n$ lässt sich derart auf sich selbst isomorph beziehen, dass die grösste Untergruppe, welche einen Punkt invariant lässt, jedesmal der grössten Untergruppe entspricht, welche eine ebene M_{n-1} invariant lässt.*

Ist $n=1$, so fällt der Unterschied zwischen Punkt und ebener M_{n-1} fort; die allgemeine dreigliedrige projective Gruppe der einfachen Mannigfaltigkeit enthält daher nur *eine* Kategorie von zweigliedrigen Untergruppen, und diese sind in der dreigliedrigen alle mit einander gleichberechtigt.

Die allgemeine projective Gruppe eines n-fach ausgedehnten Raumes enthält nach den früheren Entwickelungen $n(n+1)$ unabhängige infinitesimale Transformationen, die einen vorgelegten Punkt in Ruhe lassen, und zwar erzeugen dieselben eine Untergruppe, die in keiner grösseren Untergruppe enthalten ist. Hieraus folgt (Kap. 24, Theor. 91, S. 521), dass *die allgemeine projective Gruppe primitiv und umsomehr asystatisch ist.*

---

*) Lie, Math. Ann. Bd. XXV, S. 130.

§ 140.

Wir schliessen hieran einige allgemeine Betrachtungen über die Bestimmung aller Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppe $p_i, x_i p_k \; (i, k = 1 \cdots n)$ des R_n.

Die allgemeine infinitesimale Transformation einer linearen Gruppe des R_n lässt sich schreiben:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{ik}^{i \gtrless k} a_{ik} x_i p_k + \sum_1^{n-1}{}_i \, b_i (x_i p_i - x_n p_n) + \\ & + c \sum_1^n{}_k \, x_k p_k + \sum_1^n{}_k \, d_k p_k . \end{aligned} \right.$$

Combinirt man zwei infinitesimale Transformationen von dieser Gestalt mit einander, so erhält man eine Transformation

$$\sum_{ik}^{i \gtrless k} A_{ik} x_i p_k + \sum_1^{n-1}{}_i \, B_i (x_i p_i - x_n p_n) + C \sum_1^n{}_k \, x_k p_k + \sum_1^n{}_k \, D_k p_k ,$$

in welcher die A_{ik}, B_i und $C \, (C = 0)$ nur von den a_{ik}, b_i und den c abhängen. Folglich ist die verkürzte infinitesimale Transformation

$$(10) \qquad \sum_{ik}^{i \gtrless k} a_{ik} x_i p_k + \sum_1^{n-1}{}_i \, b_i (x_i p_i - x_n p_n) + c \sum_1^n{}_k \, x_k p_k$$

ihrerseits die allgemeine infinitesimale Transformation einer linearen homogenen Gruppe in $x_1 \cdots x_n$.

Wir erkennen hieraus, dass das Problem, alle Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppe zu bestimmen, sich in zwei Probleme zerlegt, welche nach einander erledigt werden müssen. Zuerst sind alle Untergruppen der allgemeinen linearen homogenen Gruppe $x_i p_k \; (i, k = 1 \cdots n)$ aufzusuchen; sodann müssen zu den infinitesimalen Transformationen jeder der gefundenen Gruppen in allgemeinster Weise Glieder $\Sigma \, \beta_k p_k$ hinzugefügt werden, so dass man wieder eine Gruppe erhält. Ist also $X_1 f \cdots X_r f$ eine der gefundenen linearen homogenen Gruppen, so hat man alle Gruppen von der Form

$$X_k f + \sum_1^n{}_i \, \alpha_{ki} p_i , \qquad \sum_1^n{}_i \, \beta_{\mu i} p_i$$
$$(k = 1 \cdots r, \;\; \mu = 1 \cdots m, \;\; m \leq n)$$

zu bestimmen.

Ueber die weitere Behandlung dieser beiden reducirten Probleme wollen wir hier nichts weiter sagen; wir verweisen vielmehr auf den dritten Abschnitt, der ausführliche Untersuchungen über die projectiven Gruppen der Ebene und des dreifach ausgedehnten Raumes bringen wird.

Dagegen wollen wir nicht unterlassen, auf die geometrische Bedeutung aufmerksam zu machen, welche die eben besprochene Zerlegung des betreffenden Problems hat.

Wir denken uns zu diesem Zwecke die Gruppe (9) erweitert, indem wir wie in Kap. 25, S. 524 ff. die x als Functionen einer Hülfsveränderlichen t ansehen und die Differentialquotienten $\frac{dx_i}{dt} = x_i'$ mitnehmen. Dabei ergiebt sich die Gruppe:

$$\sum a_{ik} x_i p_k + \sum b_i (x_i p_i - x_n p_n) + c \sum x_k p_k + \sum d_k p_k +$$
$$+ \sum a_{ik} x_i' p_k' + \sum b_i (x_i' p_i' - x_n' p_n') + c \sum x_k' p_k',$$

in welcher die Glieder in den x_i' an und für sich eine Gruppe bestimmen, nämlich genau die oben gefundene Gruppe (10). Nun aber können die x_i', wie wir a. a. O. gesehen haben, als homogene Coordinaten der Richtungen durch die Punkte $x_1 \cdots x_n$ des R_n aufgefasst werden. Dass die x_i' bei der obigen Gruppe für sich transformirt werden, bedeutet daher nichts anderes, als dass parallele Gerade bei jeder linearen Transformation der x in ebensolche Gerade übergehen; die Richtungen, welche ein bestimmtes Werthsystem x_i' den sämmtlichen Punkten des R_n zuordnet, sind ja mit einander parallel. Jedes Bündel von Parallelgeraden liefert aber einen ganz bestimmten Punkt auf der unendlich fernen ebenen M_{n-1} des R_n, also *können* $x_1' \cdots x_n'$ *geradezu als homogene Coordinaten der Punkte auf der unendlich fernen ebenen* M_{n-1} *gedeutet werden* und die Gruppe:

$$(11) \qquad \sum a_{ik} x_i' p_k' + \sum b_i (x_i' p_i' - x_n' p_n') + c \sum x_k' p_k'$$

giebt daher einfach an, wie die unendlich fernen Punkte des R_n von der Gruppe (9) transformirt werden. Dabei ist noch zu bemerken, dass die infinitesimale Transformation $\Sigma x_k' p_k'$ alle unendlich fernen Punkte stehen lässt, dass also diese Punkte von der zuletzt geschriebenen Gruppe gerade so transformirt werden, als wäre c gleich Null.

Jetzt haben wir den innern Grund für die oben angegebene Zerlegung des Problems, alle linearen Gruppen des R_n zu bestimmen. Die betreffenden Gruppen sind dabei einfach in Classen eingetheilt gedacht, und in jede Classe sind alle Gruppen gerechnet, für welche die Gruppe (11) dieselbe ist, welche also die unendlich fernen Punkte des R_n in gleicher Weise transformiren. (Vgl. hierzu Theorem 40, S. 233).

§ 141.

Um wenigstens *eine* Anwendung der eben entwickelten allgemeinen Betrachtungen zu geben, wollen wir alle linearen Gruppen des R_n bestimmen, welche die unendlich fernen Punkte des R_n in möglichst allgemeiner Weise transformiren. Für alle diese Gruppen hat die zugehörige Gruppe (11) die Form

$$x_i' p_k', \quad x_i' p_i' - x_k' p_k' \qquad (i, k = 1 \cdots n, \; i \gtrless k),$$

wozu unter Umständen noch die Transformation $x_1' p_1' + \cdots + x_n' p_n'$ treten kann, welche die unendlich fernen Punkte alle einzeln stehen lässt. Die unendlich fernen Punkte werden demnach $(n^2 - 1)$-gliedrig transformirt und zwar durch die allgemeine projective Gruppe eines $(n - 1)$-fach ausgedehnten Raumes.

Jede der gesuchten Gruppen muss $n^2 - 1$ infinitesimale Transformationen enthalten, aus denen keine solche linear abgeleitet werden kann, welche alle unendlich fernen Punkte invariant lässt, also keine, welche die Form: $\gamma \Sigma^j x_j p_j + \Sigma^k \gamma_k p_k$ besitzt. Die Gruppe enthält daher sicher $n^2 - 1$ infinitesimale Transformationen von der Form:

$$(12) \qquad \begin{cases} x_i p_k + \alpha_{ik} \sum\limits_1^n{}^j x_j p_j + \sum\limits_1^n{}^\nu \beta_{ik\nu} p_\nu & (i \gtrless k) \\[2ex] x_i p_i - x_n p_n + \alpha_i \sum\limits_1^n{}^j x_j p_j + \sum\limits_1^n{}^\nu \beta_{i\nu} p_\nu . \end{cases}$$

Ausserdem können noch eine oder mehrere infinitesimale Transformationen von der Form: $\gamma \Sigma^j x_j p_j + \Sigma^\nu \gamma_\nu p_\nu$ auftreten.

Enthält eine Gruppe von der verlangten Art eine Translation, so enthält sie dieselben alle. Ist nämlich $p_1 + e_2 p_2 + \cdots + e_n p_n$ die betreffende Translation, so combiniren wir dieselbe mit

$$x_1 p_k + \alpha_{1k} \sum_1^n{}^j x_j p_j + \sum_1^n{}^\nu \beta_{1k\nu} p_\nu \qquad (k = 2 \cdots n)$$

und erhalten auf diese Weise $p_2 \cdots p_n$ und somit alle p_i.

Zunächst wollen wir daher annehmen, dass alle Translationen auftreten. Giebt es dann noch die Transformation $\Sigma x_j p_j$, so haben wir die allgemeine lineare Gruppe selbst. Ist dagegen die Transformation $\Sigma x_j p_j$ nicht vorhanden, so erhalten wir durch Combination der Transformationen (12), in welchen wir vorher die $\beta_{ik\nu}$ und $\beta_{i\nu}$ gleich Null setzen können:

$$\left(x_i p_k + \alpha_{ik} \sum_1^n{}^j x_j p_j , \; x_k p_i + \alpha_{ki} \sum_1^n{}^j x_j p_j \right) = x_i p_i - x_k p_k ,$$

so dass also die α_i alle Null sind. Ausserdem aber kommt:

$$\left(x_i p_i - x_k p_k,\ x_i p_k + \alpha_{ik} \sum_1^n {}_j\, x_j p_j\right) = 2\, x_i p_k.$$

Die betreffende Gruppe ist also die specielle lineare.

Giebt es in der gesuchten Gruppe gar keine Translation, dagegen aber eine Transformation

$$\sum_1^n {}_j\, x_j p_j + \sum_1^n {}_\nu\, \gamma_\nu p_\nu = \sum_1^n {}_j\, (x_j + \gamma_j) p_j, \tag{13}$$

so können alle α_{ik} und alle α_i gleich Null gesetzt werden. Schreiben wir noch die infinitesimalen Transformationen (12) in der Form:

$$(x_i + \gamma_i) p_k + \sum_1^n {}_\nu\, \beta'_{ik\nu} p_\nu \qquad (i \gtrless k)$$

$$(x_i + \gamma_i) p_i - (x_n + \gamma_n) p_n + \sum_1^n {}_\nu\, \beta'_{i\nu} p_\nu,$$

so erkennen wir durch Combination mit $\Sigma\, (x_i + \gamma_i) p_i$ sofort, dass alle $\beta'_{ik\nu}$ und $\beta'_{i\nu}$ verschwinden und finden also die Gruppe:

$$(x_i + \gamma_i) p_k \qquad (i, k = 1 \cdots n).$$

Tritt endlich auch keine Transformation von der Form (13) auf, so ergiebt sich zunächst aus (12) durch Combination, dass alle α_{ik} und α_i gleich Null sind. Weiter kommt:

$$\left(x_i p_k + \sum_1^n {}_\nu\, \beta_{ik\nu} p_\nu,\ x_k p_i + \sum_1^n {}_\nu\, \beta_{ki\nu} p_\nu\right) = x_i p_i - x_k p_k + \beta_{ikk} p_i - \beta_{kii} p_k,$$

und ausserdem:

$$\left((x_i + \beta_{ikk}) p_i - (x_k + \beta_{kii}) p_k,\ x_i p_k + \sum_1^n {}_\nu\, \beta_{ik\nu} p_\nu\right) =$$
$$= 2\, x_i p_k + 2\, \beta_{ikk} p_k - \beta_{iki} p_i,$$

so dass alle $\beta_{ik\nu}$ verschwinden mit Ausnahme der β_{ikk} und β_{kii}, durch welche sich auch die $\beta_{i\nu}$ ausdrücken.

Ist nun $n > 2$, so könnte β_{ikk} mit k variiren; das ist jedoch nicht der Fall. Ersetzen wir nämlich in

$$(x_i + \beta_{ikk}) p_i - (x_k + \beta_{kii}) p_k$$

i und k einmal durch k, j, dann durch j, i und addiren die erhaltenen drei infinitesimalen Transformationen zusammen, so muss die Summe verschwinden, weil Translationen nicht auftreten dürfen. So erhalten wir: $\beta_{ikk} = \beta_{ijj}$ u. s. w. Schreiben wir daher für β_{ikk} kurz β_i, so haben wir die Gruppe:

$$(x_i + \beta_i) p_k,\quad (x_i + \beta_i) p_i - (x_k + \beta_k) p_k \qquad (i \gtrless k).$$

Damit sind alle Fälle erledigt. Indem wir noch in den beiden letzten Gruppenformen bezüglich $x_i + \gamma_i$ und $x_i + \beta_i$ als neues x_i einführen, können wir unser Resultat zusammenfassen wie folgt:

Theorem 102. *Die allgemeine lineare Gruppe in n Veränderlichen enthält nur drei verschiedene Arten von Untergruppen, welche ebenso wie die Gruppe selbst die Punkte der unendlich fernen Ebene* $(n^2 - 1)$*-gliedrig transformiren: es sind dies erstens die specielle lineare Gruppe und zweitens alle mit den beiden homogenen Gruppen*

$$x_i p_k; \qquad x_i p_k, \; x_i p_i - x_k p_k \quad (i \gtrless k)$$

*gleichberechtigten Untergruppen.**)

Hier haben wir also eine charakteristische Eigenschaft, welche allen diesen uns schon bekannten Gruppen gemeinsam ist. Dagegen sind die Unterscheidungsmerkmale der betreffenden vier Gruppen kurz die folgenden: Die allgemeine lineare Gruppe lässt die Verhältnisse aller Volumina, die specielle lineare Gruppe lässt alle Volumina invariant. Die allgemeine und die specielle lineare homogene Gruppe unterscheiden sich bezüglich von der allgemeinen und der speciellen linearen dadurch, dass sie noch den Punkt $x_i = 0$ invariant lassen.

§ 142.

Wir haben zu Anfang des vorigen Paragraphen gesehen, dass die Bestimmung aller linearen Gruppen des R_n wesentlich gefördert ist, sobald alle linearen homogenen Gruppen des R_n bestimmt sind. Dieses letztere Problem zu erledigen, hat keine besondere Schwierigkeit, wenn man alle projectiven Gruppen des R_{n-1} kennt. Das wollen wir jetzt noch zeigen.

Die allgemeine lineare homogene Gruppe des R_n: $x_i p_k \; (i, k = 1 \cdots n)$ enthält, wie wir wissen, eine invariante Untergruppe mit $n^2 - 1$ Parametern, nämlich die specielle lineare homogene Gruppe

$$x_i p_k, \qquad x_i p_i - x_k p_k \qquad (i, k = 1 \cdots n, \;\; i > k).$$

Diese letztere ist gleichzusammengesetzt mit der allgemeinen projectiven Gruppe des R_{n-1}, ihre Untergruppen lassen sich daher sofort hinschreiben, wenn alle projectiven Gruppen des R_{n-1} bekannt sind (vgl. darüber das nächste Kapitel). Darnach findet man die Untergruppen der Gruppe $x_i p_k$ durch die folgenden Ueberlegungen:

---

*) Lie, Archiv for Math. og Nat. Bd. IX, S. 103 und 104, Christiania 1884.

Eine r-gliedrige Untergruppe G_r der Gruppe $x_i p_k$ ist entweder zugleich in der Gruppe $x_i p_k,\ x_i p_i - x_k p_k$ $(i \gtrless k)$ enthalten oder sie ist dies nicht. Im ersten Falle wäre sie schon bekannt, im zweiten hätte sie aber nach Satz 7, S. 211 mit der speciellen linearen homogenen Gruppe eine G_{r-1} gemein. Um daher alle linearen homogenen G_r der zweiten Art zu finden, brauchen wir nur zu jeder G_{r-1}: $X_1 f \cdots X_{r-1} f$ der Gruppe $x_i p_k,\ x_i p_i - x_k p_k$ $(i \gtrless k)$ eine infinitesimale Transformation von der Form

$$Yf = \sum_1^n {}_i\, x_i p_i + \sum_{kj}^{1\cdots n} \alpha_{kj} x_k p_j \qquad (\Sigma^k \alpha_{kk} = 0)$$

hinzuzufügen und durch Combination mit $X_1 f \cdots X_{r-1} f$ alle Werthe der α_{kj} zu bestimmen, welche eine Gruppe liefern. Zu bemerken ist hierbei, dass die $(r-1)$-gliedrige Gruppe $X_1 f \cdots X_{r-1} f$ offenbar in der gesuchten r-gliedrigen Gruppe invariant sein muss; wir finden daher, können wir sagen, die allgemeinsten Werthe der α_{kj}, wenn wir die allgemeinste lineare homogene infinitesimale Transformation Yf suchen, welche die vorgelegte $(r-1)$-gliedrige Gruppe invariant lässt. *Eine* r-gliedrige Gruppe erhalten wir übrigens stets, dann nämlich, wenn wir alle α_{kj} gleich Null wählen.

Bei Berücksichtigung der infinitesimalen Transformationen $X_1 f \cdots X_{r-1} f$ erkennt man, dass $r-1$ von den α_{kj} gleich Null gemacht werden können. Je kleiner daher die Zahl r, um so mehr Constanten müssen bestimmt werden. Für kleine Werthe von r, aber auch sonst ist häufig die folgende Methode bequemer:

Die r-gliedrigen Untergruppen der Gruppe $x_i p_k$ lassen sich nämlich noch in einer anderen Weise in zwei Kategorien eintheilen; erstens in solche, welche die Transformation $\Sigma\, x_i p_i$ enthalten — sie können wir unter den gemachten Voraussetzungen augenblicklich hinschreiben — und zweitens in solche, welche die Transformation $x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n$ nicht enthalten. Die r infinitesimalen Transformationen einer Gruppe aus der letzteren Kategorie müssen die Form haben:

$$X_k f + \alpha_k \sum_1^n {}_i\, x_i p_i\,, \tag{14}$$

wo die $X_k f$ infinitesimale Transformationen der speciellen linearen homogenen Gruppe darstellen. Weil die Transformation $\Sigma\, x_i p_i$ mit allen $X_k f$ vertauschbar ist, bleibt es bei Ausführung der Klammeroperation gleichgültig, ob die α_i verschwinden oder nicht; $X_1 f \cdots X_r f$ müssen daher selbst eine Gruppe erzeugen und zwar eine r-gliedrige Untergruppe der Gruppe $x_i p_k,\ x_i p_i - x_k p_k$ $(i \gtrless k)$, eine von denen, welche wir als bekannt voraussetzten. Es bleibt mithin nur übrig, die α_k in allgemeinster Weise so zu bestimmen, dass die infinitesimalen Transformationen (14) eine Gruppe erzeugen. Unter Umständen kann man ohne Weiteres erkennen, dass gewisse von den α_k verschwinden müssen; besteht nämlich eine Gleichung von der Form

$$(X_i X_k) = X_j f,$$

so muss α_j nothwendig Null sein.

Erzeugen alle $(X_i X_k)$ eine ϱ-gliedrige Gruppe (Kap. 15, Satz 6, S. 261), so können wir annehmen, dass die infinitesimalen Transformationen $X_k f$ so gewählt sind, dass sich alle $(X_i X_k)$ aus $X_1 f \cdots X_\varrho f$ linear ableiten lassen. Dann sind $\alpha_1 = \cdots = \alpha_\varrho = 0$, während alle anderen α_i von Null verschieden sein können. Ist daher $\varrho < r$, so treten willkürliche Parameter auf. Ob die verschiedenen Werthe dieser Parameter verschiedene *Typen* von linearen homogenen Gruppen liefern, mit andern Worten, ob die betreffenden Parameter wesentlich sind, das muss in jedem einzelnen Falle besonders untersucht werden. Die Erledigung dieses Problems für $n = 2$ und $n = 3$ siehe im dritten Abschnitt.

§ 143.

Ist irgend eine lineare homogene Gruppe G_r vorgelegt, welche nicht in der speciellen linearen enthalten ist, so umfasst diese G_r, wie wir schon oben bemerkten, eine *invariante* $(r-1)$-gliedrige Untergruppe, deren infinitesimale Transformationen dadurch charakterisirt sind, dass sie die Form

$$\sum_{i,k}^{i \gtrless k} a_{ik} x_i p_k + \sum_1^{n-1} {}_i\, a_i (x_i p_i - x_n p_n)$$

besitzen.

Wenden wir nun diese Bemerkung auf die zu einer *beliebigen* r-gliedrigen Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ gehörige adjungirte Gruppe:

$$E_\nu f = \sum_{k,s}^{1\cdots r} c_{k\nu s}\, e_k \frac{\partial f}{\partial e_s} \qquad (\nu = 1 \cdots r)$$

an, so erkennen wir unmittelbar, dass dieselbe, wenn die r Summen $\Sigma_k\, c_{k\nu k}$ nicht alle verschwinden, eine invariante Untergruppe enthält, deren infinitesimale Transformationen: $\lambda_1 E_1 f + \cdots + \lambda_r E_r f$ durch die Bedingungsgleichungen:

$$\sum_1^r {}_\nu\, \lambda_\nu \sum_1^r {}_k\, c_{k\nu k} = 0$$

definirt sind.

Erinnern wir uns endlich, dass jede Gruppe mit ihrer adjungirten Gruppe isomorph ist, so erhalten wir den

Satz 5. *Stehen r unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1f \cdots X_rf$ einer r-gliedrigen Gruppe paarweise in den Beziehungen: $(X_i X_k) = \Sigma_s c_{iks} X_s f$ und ist mindestens eine unter den r Summen $\Sigma_k c_{\nu k k}$ von Null verschieden, so erzeugen alle infinitesimalen Transformationen $\lambda_1 X_1 f + \cdots + \lambda_r X_r f$, welche die Bedingung*

$$\sum_1^r {}_\nu \lambda_\nu \sum_1^r {}_k c_{\nu k k} = 0$$

*erfüllen, eine invariante $(r - 1)$-gliedrige Untergruppe.**)

Bei einer eingehenderen Untersuchung der allgemeinen projectiven Gruppe muss man natürlich ihrer adjungirten Gruppe $\Sigma e_k E_k f$, sowie den zugehörigen invarianten Gleichungensystemen in den e_k eine besondere Aufmerksamkeit widmen. Hier nur zwei kurze, aber wichtige Bemerkungen.

Interpretirt man wie gewöhnlich die e_k als homogene Punktcoordinaten eines Raumes mit $n^2 + 2n - 1$ Dimensionen, so giebt es unter allen invarianten Mannigfaltigkeiten dieses Raumes eine bestimmte, deren Dimensionenzahl den kleinsten Werth besitzt. Diese wichtige Mannigfaltigkeit besteht aus allen Punkten e_k, welche entweder Translationen oder mit Translationen gleichberechtigte Transformationen darstellen. Dieselbe ist in keiner ebenen Mannigfaltigkeit des betreffenden Raumes enthalten. Im Uebrigen liefert natürlich die bekannte Classification aller projectiven Transformationen ohne Weiteres *alle* invarianten Mannigfaltigkeiten des Raumes $e_1 \cdots e_r$.

Bei jeder infinitesimalen projectiven Transformation, die mit einer Translation gleichberechtigt ist, bleiben im Raume x_k alle Punkte einer ebenen M_{n-1} invariant und zugleich alle ebenen M_{n-1}, welche durch einen gewissen Punkt dieser M_{n-1} hindurchgehen. Jede derartige Transformation ist durch die zuerst besprochene invariante ebene M_{n-1} und den ausgezeichneten invarianten Punkt derselben vollständig bestimmt.

Ist $n = 2$, so wird, können wir sagen, jede mit einer infinitesimalen Translation gleichberechtigte projective Transformation der Ebene x_1, x_2 durch ein *Linienelement* vollständig repräsentirt. Dementsprechend wird im dreifachen Raume x_1, x_2, x_3 jede mit einer infinitesimalen Translation gleichberechtigte projective Transformation durch ein *Flächenelement* dargestellt u. s. w. Diese Bemerkungen werden im dritten Abschnitt Verwerthung finden.

---

*) Lie, Archiv for Math., Bd. IX, S. 89, Christiania 1884; Fortschritte der Mathematik, Bd. XVI, S. 325.

Kapitel 27.

Lineare homogene Gruppen.

Die allgemeine lineare homogene Gruppe in n Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ haben wir im vorigen Kapitel, S. 574 als die allgemeinste projective Gruppe des n-fach ausgedehnten Raumes $x_1 \cdots x_n$ oder kurz R_n bezeichnet, welche die unendlich ferne ebene M_{n-1} und zugleich den Punkt $x_1 = \cdots = x_n = 0$ invariant lässt. Eine andere Bedeutung erhält diese Gruppe, wenn man $x_1 \cdots x_n$ als homogene Coordinaten in einem $(n-1)$-fach ausgedehnten Raume R_{n-1} deutet. Diese Auffassung soll in dem gegenwärtigen Kapitel zu Grunde gelegt werden.

§ 144.

Den Uebergang von den gewöhnlichen Cartesischen Coordinaten $y_1 \cdots y_{n-1}$ des $(n-1)$-fach ausgedehnten Raumes R_{n-1} zu den homogenen Coordinaten $x_1 \cdots x_n$ desselben Raumes denken wir uns vermittelt durch die Gleichungen:

$$y_k = \frac{x_k}{x_n} \qquad (k = 1 \cdots n-1).$$

Der n^2-gliedrigen allgemeinen linearen homogenen Gruppe

$$x_i' = \sum_1^n {}^k\, a_{ik} x_k \qquad (i = 1 \cdots n) \tag{1}$$

entspricht dann in den Veränderlichen $y_1 \cdots y_{n-1}$ die meroedrisch isomorphe Gruppe

$$y_i' = \frac{\sum_1^{n-1} {}^k\, a_{ik} y_k + a_{in}}{\sum_1^{n-1} {}^k\, a_{nk} y_k + a_{nn}} \qquad (i = 1 \cdots n-1), \tag{2}$$

die (n^2-1)-gliedrige allgemeine projective Gruppe des R_{n-1}. Jeder linearen homogenen Transformation (1) entspricht demnach eine einzige projective Transformation (2), also eine ganz bestimmte Collineation des R_{n-1}, während umgekehrt jeder projectiven Transformation (2) im Ganzen ∞^1 verschiedene lineare homogene Transformationen (1) entsprechen.

Man kann übrigens auch einen eindeutig umkehrbaren Zusammenhang zwischen linearen homogenen Transformationen in $x_1 \cdots x_n$ und projectiven Transformationen in $y_1 \cdots y_{n-1}$ herstellen, wenn man die Constanten a_{ik} der Bedingung $\Sigma \pm a_{11} \cdots a_{nn} = 1$ unterwirft, wenn man also statt der allgemeinen die specielle lineare homogene Gruppe betrachtet, welche mit der allgemeinen projectiven Gruppe (2) holoedrisch isomorph ist (vgl. Kap. 26, S. 558). Wir wollen diesen Zusammenhang für die infinitesimalen Transformationen der beiden Gruppen ausführlich entwickeln.

Die specielle lineare homogene Gruppe in $x_1 \cdots x_n$ enthält die folgenden $n^2 - 1$ unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$x_i p_k, \qquad x_i p_i - x_k p_k \qquad (i \gtrless k). \tag{3}$$

Um die entsprechenden infinitesimalen Transformationen in $y_1 \cdots y_{n-1}$ zu finden, haben wir nur für jede einzelne der eben geschriebenen infinitesimalen Transformationen die Incremente

$$\delta y_i = \frac{x_n \delta x_i - x_i \delta x_n}{x_n^{\,2}} \qquad (i = 1 \cdots n - 1)$$

zu berechnen. Wir finden auf diese Weise die folgende Tabelle:

$$\left\{\begin{array}{l} x_n p_k \equiv q_k, \qquad x_k p_n \equiv - y_k (y_1 q_1 + \cdots + y_{n-1} q_{n-1}) \\ x_k p_k - x_n p_n \equiv y_k q_k + y_1 q_1 + \cdots + y_{n-1} q_{n-1}, \qquad x_i p_k \equiv y_i q_k \\ \qquad\qquad (i, k = 1 \cdots n-1; \quad i \gtrless k), \end{array}\right. \tag{4}$$

in der q_i für $\frac{\partial f}{\partial y_i}$ geschrieben ist. Diese Tabelle liefert auch umgekehrt zu jeder infinitesimalen Transformation der projectiven Gruppe (2) die entsprechende infinitesimale Transformation der speciellen linearen homogenen Gruppe (3); aus den Gleichungen (4) erhalten wir ja ohne Weiteres die Formeln:

$$n(y_1 q_1 + \cdots + y_{n-1} q_{n-1}) \equiv x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n - n\, x_n p_n$$
$$n y_k q_k \equiv n x_k p_k - (x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n).$$

Nunmehr ist es auch leicht, anzugeben, welche ∞^1 infinitesimalen Transformationen der allgemeinen linearen homogenen Gruppe (1) einer gegebenen infinitesimalen Transformation der projectiven Gruppe (2) entsprechen. Nämlich die infinitesimale Transformation $x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n$ reducirt sich in den Veränderlichen $y_1 \cdots y_{n-1}$ auf die Identität, da für sie alle Zuwachse der y_k verschwinden. Entspricht daher der infinitesimalen Transformation Xf der speciellen homogenen Gruppe (3) die infinitesimale Transformation Yf der projectiven Gruppe (2), so sind alle ∞^1 infinitesimalen Transformationen der allgemeinen homogenen Gruppe (1), welche Yf entsprechen, in dem Ausdruck $Xf + c(x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n)$ enthalten, wo c eine willkürliche Constante bedeutet.

Gestattet ein Gleichungensystem:

$$\Omega_k(y_1 \cdots y_{n-1}) = 0 \qquad (k = 1 \cdots m)$$

in $y_1 \cdots y_{n-1}$ eine endliche oder infinitesimale projective Transformation, so gestattet das entsprechende Gleichungensystem in den x:

$$\Omega_k\left(\frac{x_1}{x_n} \cdots \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) = 0 \quad (k = 1 \cdots m)$$

natürlich die entsprechende endliche oder infinitesimale Transformation der Gruppe (3); ausserdem aber gestattet es wegen seiner Homogeneität auch noch die infinitesimale Transformation: $x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n$.

Umgekehrt ist jedes Gleichungensystem in $x_1 \cdots x_n$, welches $x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n$ gestattet, homogen. Nun kommt es uns aber, wenn wir eine projective Gruppe des R_{n-1} in den homogenen Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ schreiben, stets nur auf die Verhältnisse der x an, also auch nur auf Gleichungensysteme, welche in den x homogen sind. Deshalb werden wir stets, wenn wir die infinitesimalen Transformationen einer projectiven Gruppe des R_{n-1} mit Hülfe der Tabelle (4) homogen geschrieben haben und die zugehörigen invarianten Gleichungensysteme in $x_1 \cdots x_n$ aufsuchen wollen, noch die infinitesimale Transformation $x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n$ hinzufügen. Die so erhaltene Gruppe in $x_1 \cdots x_n$ ist die wahre analytische Darstellung der betreffenden projectiven Gruppe des R_{n-1} in homogenen Veränderlichen.

Will man bei der Untersuchung einer projectiven Gruppe auch das Unendlichferne mitnehmen, so muss man die Gruppe in homogenen Veränderlichen schreiben.

§ 145.

Wir haben im vorigen Paragraphen gezeigt, dass die infinitesimalen projectiven Transformationen des R_{n-1} durch infinitesimale lineare homogene Transformationen in n Veränderlichen ersetzt werden können. Jetzt wollen wir uns eine beliebige Transformation dieser Art in $x_1 \cdots x_n$ vorgelegt denken, etwa:

$$Xf = \sum_{ik}^{1 \cdots n} a_{ki}\, x_i\, p_k$$

und wollen dieselbe einer näheren Untersuchung unterwerfen. Namentlich wollen wir nach ebenen Mannigfaltigkeiten des R_{n-1} fragen, welche die betreffende infinitesimale Transformation gestatten. Auf diese Weise wird es uns gelingen, zu zeigen, dass Xf durch Einführung geeigneter neuer Veränderlicher: $x_i' = \Sigma c_{ik} x_k$ stets eine gewisse kanonische Form erhalten kann.

Gestattet eine ebene M_{n-2}: $\Sigma c_i x_i = 0$ des R_{n-1} die infinitesimale Transformation Xf, so gestattet sie nach Theorem 14, S. 112 gleichzeitig alle endlichen Transformationen der zugehörigen eingliedrigen

Gruppe. Nun gestattet die M_{n-2} die infinitesimale Transformation Xf dann und nur dann, wenn der Ausdruck $X(\Sigma c_i x_i)$ gleichzeitig mit $\Sigma c_i x_i$ verschwindet. Da $X(\Sigma c_i x_i)$ in den x_i linear ist, kommt diese Bedingung auf das identische Bestehen einer Relation von der Form:

$$X\left(\sum_1^n{}_k\, c_k x_k\right) = \varrho \sum_1^n{}_i\, c_i x_i$$

hinaus, wo ϱ eine Constante bedeutet. Die hieraus folgende Bedingungsgleichung:

$$\sum_1^n{}_i \left(\sum_1^n{}_k\, a_{ki} c_k - \varrho c_i\right) x_i = 0$$

zerlegt sich in die n Gleichungen:

$$(5)\qquad a_{1i} c_1 + \cdots + (a_{ii} - \varrho) c_i + \cdots + a_{ni} c_n = 0 \quad (i = 1 \cdots n),$$

welche nur befriedigt werden können, wenn die Determinante:

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} - \varrho & \cdots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} - \varrho \end{vmatrix} = \varDelta(\varrho)$$

verschwindet. Das liefert für ϱ eine Gleichung n-ten Grades mit sicher n Wurzeln, unter denen sich allerdings vielfache befinden können. Unter allen Umständen giebt es also wenigstens eine ebene M_{n-2}: $c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = 0$, welche bei der eingliedrigen Gruppe Xf invariant bleibt.

Bekanntlich sieht man genau in derselben Weise ein, dass eine jede *endliche* projective Transformation oder, homogen geschrieben, jede Transformation $x_i' = \Sigma b_{ik} x_k$ ebenfalls mindestens eine ebene M_{n-2} stehen lässt. Es folgt dies übrigens auch daraus, dass jede Transformation $x_i' = \Sigma b_{ik} x_k$ einer eingliedrigen Gruppe Xf angehört.

Hat die oben gefundene Gleichung $\varDelta(\varrho) = 0$ gerade n verschiedene Wurzeln ϱ, so bleiben bei der Gruppe Xf im Ganzen n getrennte ebene M_{n-2} invariant; zwei verschiedene Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 der Gleichung für ϱ liefern nämlich wegen der Form der Gleichungen (5) stets auch zwei verschiedene Werthsysteme $c_1 : c_2 : \cdots : c_n$. Giebt es dagegen vielfache Wurzeln ϱ, so können verschiedene Fälle eintreten. Verschwindet für eine m-fache Wurzel ϱ zwar die Determinante (6) selbst, nicht aber alle ihre $(n-1)$-reihigen Unterdeterminanten, so bleiben für den betreffenden Werth von ϱ gerade $n-1$ unter den Gleichungen (5) von einander unabhängig und die Verhältnisse der c_i sind dann alle bestimmt. Zu der m-fachen Wurzel gehört daher nur eine einzige invariante ebene M_{n-2}, diese eine aber zählt m-fach. Wird dagegen für eine m-fache Wurzel nicht blos die Determinante (6) selbst gleich Null, sondern verschwinden auch alle ihre Unterdeterminanten $(n-1)$-ten $\cdots$ $(n-q+1)$-ten, jedoch nicht alle $(n-q)$-ten Grades $(q \leqq m)$, so reduciren sich die Gleichungen (5) gerade auf $n-q$ unabhängige, und unter den Verhältnissen der c_i bleiben $q-1$ willkürlich wählbar. Die m-fache Wurzel ϱ ergiebt daher in diesem Falle eine Schaar von ∞^{q-1} einzeln invariant bleibenden ebenen M_{n-2}.

Es ist leicht zu erkennen, dass eine Wurzel der Gleichung $\varDelta(\varrho)=0$ wenigstens q-fach ist, wenn für dieselbe alle $(n-q+1)$-reihigen Unterdeterminanten von $\varDelta(\varrho)$ verschwinden. Nämlich die Differentialquotienten $(q-1)$-ter Ordnung von $\varDelta(\varrho)$ nach ϱ drücken sich als Summen der $(n-q+1)$-reihigen Unterdeterminanten von $\varDelta(\varrho)$ aus.

Wollten wir schon an dieser Stelle die Dualitätstheorie als bekannt voraussetzen, so könnten wir sofort schliessen, dass die infinitesimale Transformation Xf in dem R_{n-1} auch wenigstens einen *Punkt* invariant lässt. Wir ziehen es aber vor, auch dies direkt nachzuweisen, zumal wir dabei eine tiefere Einsicht in den Sachverhalt gewinnen.

In den homogenen Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ wird ein Punkt durch $n-1$ Gleichungen von der Form $x_i x_k^0 - x_k x_i^0 = 0$ dargestellt; der Punkt wird daher alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe Xf gestatten, wenn $Xx_i \cdot x_k^0 - Xx_k \cdot x_i^0$ vermöge der Gleichungen $x_i x_k^0 - x_k x_i^0 = 0$ verschwindet, wenn also n Relationen von der Form:

$$Xx_i = \sigma x_i \qquad (i=1\cdots n)$$

bestehen. Für die x_i und für σ erhalten wir daher die n Bedingungsgleichungen:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + (a_{ii}-\sigma)x_i + \cdots + a_{in}x_n = 0 \qquad (i=1\cdots n).$$

Sehen wir von der nichtssagenden Lösung $x_1 = \cdots = x_n = 0$ ab, so muss σ eine Wurzel der Gleichung:

$$\varDelta(\sigma) = \begin{vmatrix} a_{11}-\sigma & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\sigma & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

sein, und jede solche Wurzel liefert einen invarianten Punkt. Die Bestimmung der Punkte, welche bei Xf stehen bleiben, führt also auf dieselbe algebraische Gleichung, wie die Bestimmung der invarianten ebenen M_{n-2}: $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = 0$.

Hat daher diese Gleichung n-ten Grades n verschiedene Wurzeln, so bleiben in dem R_{n-1}: $x_1 : x_2 : \cdots : x_n$ nicht blos n verschiedene ebene

M_{n-2}: $\Sigma c_k x_k = 0$, sondern zugleich auch n getrennte Punkte invariant. Diese n Punkte liegen dabei nicht alle in ein und derselben ebenen M_{n-2}; denn bleiben in einer ebenen M_{n-2} n verschiedene Punkte fest, so behalten nothwendig unendlich viele Punkte der M_{n-2} ihre Lage, was unter der gemachten Voraussetzung ausgeschlossen ist. Wir können diese Eigenschaft der n invarianten Punkte kurz ausdrücken, indem wir sagen, dass bei Xf ein nicht ausgeartetes n-Flach invariant bleibt.

Treten mehrfache Wurzeln auf, so müssen wieder zwei Fälle unterschieden werden. Verschwinden für eine m-fache Wurzel nicht alle Unterdeterminanten $(n-1)$-ten Grades der Determinante (6), so ergiebt diese Wurzel eine m-fach zählende invariante ebene M_{n-2} und einen m-fach zählenden invarianten Punkt. Sind dagegen für die betreffende Wurzel alle Unterdeterminanten $(n-1)$-ten $\cdots$ $(n-q+1)$-ten Grades gleich Null $(q \leq m)$, ohne dass alle $(n-q)$-ten Grades verschwinden, so gehört zu dieser Wurzel eine Schaar von ∞^{q-1} einzeln invarianten ebenen M_{n-2} und eine ebene Mannigfaltigkeit von ∞^{q-1} einzeln invarianten Punkten. Also gilt:

Satz 1. *Jede infinitesimale Transformation:*

$$\sum_{ik}^{1\cdots n} a_{ki}\, x_i\, p_k$$

in den homogenen Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ *oder, was dasselbe ist, jede infinitesimale projective Transformation in* $n-1$ *Veränderlichen:*

$$\frac{x_1}{x_n} \cdots \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

lässt eine Reihe von Punkten $x_1 : x_2 : \cdots : x_n$ *und eine Reihe von ebenen* M_{n-2}: $c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = 0$ *invariant. Die Punkte, welche fest bleiben, erfüllen eine endliche Anzahl und zwar höchstens n getrennte ebene Mannigfaltigkeiten. Die invarianten ebenen* M_{n-2} *bilden ebenso eine endliche Anzahl und zwar höchstens n getrennte lineare Büschel.*

Hat die infinitesimale Transformation Xf die Form: $\Sigma x_k p_k$, so lässt sie überhaupt alle Punkte $x_1 : x_2 : \cdots : x_n$ und natürlich auch alle ebenen M_{n-2}: $\Sigma c_i x_i = 0$ invariant.

Aus dem bisher Gefundenen lassen sich nun weitere Schlüsse ziehen. Betrachten wir zunächst einmal den speciellen Fall, dass die oben besprochene Gleichung n-ten Grades n verschiedene Wurzeln hat. Es giebt da n getrennte invariante ebene M_{n-2}: $\Sigma^i c_{ki} x_i = 0$, welche nach dem Früheren ein wirkliches n-Flach bilden. Wir können daher:

$$x_k' = \sum_1^n {}_i\, c_{ki} x_i \qquad (k=1\cdots n)$$

als neue homogene Veränderliche einführen und müssen dabei in $x_1' \cdots x_n'$ eine infinitesimale Transformation erhalten, welche die n Gleichungen $x_k' = 0$ invariant lässt, welche also die Form:

$$Xf = a_1' x_1' p_1' + \cdots + a_n' x_n' p_n'$$

besitzt. Auf diese kanonische Form lässt sich Xf unter den gemachten Voraussetzungen bringen. Natürlich sind hier keine zwei von den Grössen $a_1' \cdots a_n'$ einander gleich, denn die Gleichung:

$$(a_1' - \varrho) \cdots (a_n' - \varrho) = 0$$

muss offenbar n verschiedene Wurzeln haben.

Aehnliche kanonische Formen von Xf existiren nun auch, wenn die Gleichung für ϱ vielfache Wurzeln besitzt. Wir wollen jedoch auf die Betrachtung derselben uns nicht einlassen, sondern nur zeigen, dass es eine kanonische Form giebt, auf welche *jede* infinitesimale Transformation:

$$Xf = \sum_{ik}^{1\cdots n} a_{ki} x_i p_k$$

durch eine geeignete Variabelnänderung: $x_k' = \Sigma h_{ki} x_i$, das heisst also durch eine geeignete Collineation des R_{n-1} gebracht werden kann, ganz ohne Rücksicht auf die Beschaffenheit der Gleichung $\varDelta(\varrho) = 0$.

Da Xf stets einen Punkt invariant lässt, können wir unsere Coordinaten so gewählt denken, dass der Punkt: $x_1 = \cdots = x_{n-1} = 0$ fest bleibt. Dabei finden wir:

$$Xf = \sum_1^{n-1} {}_k \sum_1^{n-1} {}_i\, a_{ik}' x_k p_i + \sum_1^n {}_k\, a_{nk}' x_k p_n = X'f + \sum_1^n {}_k\, a_{nk}' x_k p_n. \tag{7}$$

Auf die lineare homogene infinitesimale Transformation $X'f$ in den $n-1$ Veränderlichen $x_1 \cdots x_{n-1}$ können wir dasselbe Verfahren anwenden, welches uns die Reduction von Xf auf die Form (7) lieferte, und erhalten so:

$$Xf = \sum_1^{n-2} {}_k \sum_1^{n-2} {}_i\, a_{ik}'' x_k p_i + \sum_1^{n-1} {}_k\, a_{n-1,k}'' x_k p_{n-1} + \sum_1^n {}_k\, a_{nk}' x_k p_n.$$

Hier können wir wieder das erste Glied rechts in analoger Weise behandeln. So ergiebt sich schliesslich:

Theorem 103. *In jede lineare homogene infinitesimale Transformation mit n Veränderlichen kann man n solche lineare homogene Functionen dieser Veränderlichen als neue unab-*

hängige Veränderliche einführen, dass die betreffende infinitesimale Transformation die kanonische Form:

$$a_{11}x_1p_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)p_2 + \cdots + (a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n)p_n$$

annimmt.

Es hat ein gewisses Interesse, den Weg, auf welchem dieses Resultat gewonnen worden ist, geometrisch zu deuten.

Da Xf jedenfalls einen Punkt invariant lässt, wählten wir oben einen solchen invarianten zum Coordinateneckpunkt: $x_1 = \cdots = x_{n-1} = 0$. Die Verhältnisse $x_1 : x_2 : \cdots : x_{n-1}$ stellen dann die Geraden durch den gewählten Punkt dar; diese Geraden werden bei der Transformation Xf gleichzeitig mit den Punkten $x_1 : \cdots : x_n$ unter einander vertauscht und zwar durch die lineare infinitesimale Transformation $X'f$ in den $n-1$ Veränderlichen $x_1 \cdots x_{n-1}$. Bei $X'f$ muss aber nach dem Früheren ein System von Verhältnissen $x_1 : \cdots : x_{n-1}$, das heisst eine Gerade durch den oben genannten Punkt ungeändert bleiben. Diese Gerade wählen wir als Kante $x_1 = \cdots = x_{n-2} = 0$ unseres Coordinatensystems, dann stellen die Verhältnisse $x_1 : \cdots : x_{n-2}$ die ebenen M_2 durch die Kante dar. Diese M_2 werden von Xf ebenfalls unter einander vertauscht, eine unter ihnen bleibt sicher invariant und giebt wieder eine nähere Bestimmung des Coordinatensystems u. s. f.

Auf diese Weise erkennt man, dass sich das Coordinatensystem so wählen lässt, dass Xf die oben angegebene Normalform erhält. Wir wollen jedoch die eben durchgeführten Betrachtungen noch in einen besonderen Satz zusammenfassen, denn sie sprechen ja eine allgemeine Eigenschaft der infinitesimalen projectiven Transformationen des R_{n-1} aus:

Satz 2. *Bei jeder infinitesimalen projectiven Transformation des R_{n-1} bleibt mindestens ein Punkt invariant, durch jeden invarianten Punkt geht mindestens eine invariante Gerade, $\cdots$ endlich durch jede invariante ebene M_{n-3} mindestens eine invariante ebene M_{n-2}.*

§ 146.

Die Ergebnisse des vorigen Paragraphen sind dem Wesen der Sache nach längst bekannt und decken sich in der Hauptsache mit der von *Cauchy* herrührenden Reduction eines Systems linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten auf eine Normalform.

Wir werden im Folgenden die bisherigen Entwickelungen wesentlich verallgemeinern, müssen jedoch vorher einige Bemerkungen anderer Art einschalten, welche sich allerdings genau genommen unter die allgemeinen Entwickelungen in Kapitel 23, S. 479 ff. unterordnen. Doch können wir hier die Ueberlegungen in etwas einfacherer Weise durchführen.

Es sei irgend eine r-gliedrige Gruppe G_r mit einer $(r-m)$-gliedrigen *invarianten* Untergruppe G_{r-m} vorgelegt und T bedeute eine beliebige Transformation der G_r, S dagegen eine beliebige Transformation der G_{r-m}. Nach Voraussetzung bestehen dann gewisse Gleichungen von der Form:

$$T^{-1}ST = S_1, \quad TS_1T^{-1} = S,$$

wo S_1 wiederum eine Transformation der G_{r-m} ist und zwar eine ganz beliebige, wenn man nur das S geeignet wählt.

Lässt nun jede Transformation S eine gewisse Punktfigur M invariant, gilt also:

$$(M)S = (M),$$

so besteht auch die folgende Gleichung:

$$(M)TT^{-1}ST = (M)T,$$

welche zeigt, dass die Figur $(M)T$ jede Transformation $T^{-1}ST$, mithin überhaupt jede Transformation S gestattet.

Satz 3. *Ist G_r eine r-gliedrige Gruppe und G_{r-m} eine invariante Untergruppe derselben, ist endlich M eine Punktfigur, welche alle Transformationen der G_{r-m} gestattet, so bleibt auch jede Lage, welche M vermöge einer Transformation der G_r annimmt, bei allen Transformationen der G_{r-m} invariant.*

Insbesondere seien jetzt die beiden Gruppen G_r und G_{r-m} projective Gruppen des R_{n-1} und zwar geschrieben in n homogenen Veränderlichen. Die Figur M sei ein Punkt. Dann geht jeder einzelne bei allen S invariante Punkt bei Ausführung aller Transformationen T in lauter solche Punkte über, welche wieder alle Transformationen S gestatten. Folglich bleibt der *Inbegriff aller* bei der Gruppe G_{r-m} invarianten Punkte auch bei der Gruppe G_r invariant, doch werden allerdings im Allgemeinen von der G_r die einzelnen Punkte dieses Inbegriffs unter einander vertauscht.

Oben sahen wir, dass die sämmtlichen Punkte, welche bei einer eingliedrigen projectiven Gruppe invariant bleiben, sich in höchstens n endlich von einander verschiedene ebene Mannigfaltigkeiten anordnen. Das gilt natürlich auch von den Punkten, welche bei unserer G_{r-m} ihre Lage behalten. Es seien daher $M_1, M_2 \cdots M_\varrho$ $(\varrho \leqq n)$ endlich verschiedene ebene Mannigfaltigkeiten, deren Punkte sämmtlich bei der G_{r-m} fest bleiben, während es ausserhalb dieser Mannigfaltigkeiten keinen bei der G_{r-m} invarianten Punkt giebt. Wäre nun die Gruppe

G_r discontinuirlich — die gemachten Ueberlegungen bleiben auch für diesen Fall gültig —, so würden die Mannigfaltigkeiten $M_1 \cdots M_\varrho$ bei der G_r unter einander vertauscht werden können. Nicht so, wenn die G_r continuirlich, also von infinitesimalen Transformationen erzeugt ist. Denn nähme etwa M_1 vermöge der in G_r enthaltenen Transformationen neue Lagen an, so müssten dieselben eine continuirliche Schaar bilden. Nun aber haben wir eben gesehen, dass M_1 höchstens die endlich von einander verschiedenen Lagen $M_1 \cdots M_\varrho$ erhalten kann. Folglich kann keine Transformation der G_r die Lage von M_1 ändern. Ebenso bleibt natürlich jedes andere der ϱ M_k bei allen Transformationen der G_r an seiner Stelle.

Wir wollen jetzt noch die Voraussetzung hinzufügen, dass m den Werth 1 hat. Es seien $X_1 f \cdots X_{r-1} f$ unabhängige infinitesimale Transformationen der in G_r invarianten G_{r-1} und $X_1 f \cdots X_{r-1} f$, Yf die Transformationen der G_r; es sei ferner $x_1 = 0, \cdots x_q = 0$ eine von den ebenen Mannigfaltigkeiten $M_1 \cdots M_\varrho$, deren Punkte sämmtlich bei $X_1 f \cdots X_{r-1} f$ invariant bleiben.

Da, wie wir wissen, Yf sicher die Mannigfaltigkeit $x_1 = 0, \cdots x_q = 0$ invariant lässt, muss es die Form haben:

$$Yf = \sum_{i,k}^{1\cdots q} a_{ki} x_i p_k + \sum_{q+1}^{n}{}_j \sum_{1}^{n}{}_\nu a_{j\nu} x_\nu p_j .$$

Die Punkte der betreffenden Mannigfaltigkeit werden bei Yf transformirt (vgl. Theorem 40, S. 233 ff.) und zwar durch die Transformation, welche aus Yf bei der Substitution $x_1 = \cdots = x_q = 0$ hervorgeht, nämlich:

$$\sum_{q+1}^{n}{}_j \sum_{q+1}^{n}{}_\nu a_{j\nu} x_\nu p_j ; \tag{8}$$

die Veränderlichen $x_{q+1} \cdots x_n$ sind hier als Coordinaten für die Punkte der Mannigfaltigkeit zu betrachten. Nun lässt die Transformation (8) *innerhalb* der Mannigfaltigkeit $x_1 = \cdots = x_q = 0$ mindestens einen Punkt $x_{q+1}^0 : \cdots : x_n^0$ invariant, weiter eine durch diesen Punkt gehende Gerade u. s. f.

Hiermit haben wir das

Theorem 104. *Enthält eine $(r+1)$-gliedrige projective Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$, Yf des R_{n-1} eine r-gliedrige invariante Untergruppe $X_1 f \cdots X_r f$ und giebt es Punkte des R_{n-1}, welche bei allen $X_k f$ invariant bleiben, so gestattet jede aus solchen invarianten Punkten bestehende ebene Mannigfaltigkeit, welche in keiner grösseren von dieser Art enthalten ist, auch alle Transforma-*

tionen der $(r+1)$*-gliedrigen Gruppe. Die Punkte jeder solchen Mannigfaltigkeit werden dabei unter einander vertauscht, jedoch so, dass wenigstens einer dieser Punkte bei allen Transformationen der* $(r+1)$*-gliedrigen Gruppe seine Lage behält.*

Dieses Theorem werden wir jetzt auf eine specielle Kategorie linearer homogener Gruppen anwenden.

Es seien $X_1 f \cdots X_r f$ die infinitesimalen Transformationen einer r-gliedrigen linearen homogenen Gruppe und es mögen stets, wenn ϱ kleiner als r ist, $X_1 f \cdots X_\varrho f$ eine ϱ-gliedrige Untergruppe erzeugen, welche in der $(\varrho+1)$-gliedrigen Untergruppe $X_1 f \cdots X_{\varrho+1} f$ invariant ist. Analytisch finden diese Voraussetzungen durch gewisse Relationen von der Form:

$$(X_i X_{i+k}) = \sum_1^{i+k-1} {}_s\, c_{iks} X_s f \quad (i = 1 \cdots r-1,\ k = 1 \cdots r-i)$$

ihren Ausdruck.

Deuten wir nun wie bisher $x_1 \cdots x_n$ als homogene Coordinaten eines R_{n-1}, so sehen wir, dass es in diesem R_{n-1} jedenfalls einen bei $X_1 f$ invarianten Punkt giebt, ferner jedenfalls einen, der sowohl bei $X_1 f$ als bei $X_2 f$ seine Lage behält, schliesslich einen, welcher überhaupt alle Transformationen $X_1 f \cdots X_r f$ gestattet, für welchen also Relationen von der Form:

$$X_k x_i = \alpha_k x_i \quad (k = 1 \cdots r,\ i = 1 \cdots n)$$

bestehen. Wählen wir die Veränderlichen x_i derartig, dass $x_1 = \cdots = x_{n-1} = 0$ dieser invariante Punkt ist, so hängen in jedem der r Ausdrücke:

$$X_k f = \xi_{k1} p_1 + \cdots + \xi_{kn} p_n$$

die $n-1$ ersten Coefficienten $\xi_{k1} \cdots \xi_{k,\,n-1}$ nur von $x_1 \cdots x_{n-1}$ ab. Folglich stehen auch die verkürzten Ausdrücke:

$$X_k' f = \xi_{k1} p_1 + \cdots + \xi_{k,\,n-1} p_{n-1}$$

wiederum in den Beziehungen:

$$(X_i' X_{i+k}') = \sum_1^{i+k-1} {}_s\, c_{iks} X_s' f.$$

Freilich brauchen $X_1' f \cdots X_r' f$ nicht mehr von einander unabhängig zu sein, nichtsdestoweniger können wir aber auf sie dieselben Ueberlegungen anwenden wie oben auf $X_1 f \cdots X_r f$, denn dabei wurde ganz und gar nicht von der Unabhängigkeit der $X_k f$ Gebrauch gemacht. Aehnlich wie oben können wir uns daher die Veränderlichen $x_1 \cdots x_{n-1}$ so gewählt denken, dass alle $\xi_{k1} \cdots \xi_{k,\,n-2}$ nur von $x_1 \cdots x_{n-2}$ abhängen. Geradeso lassen sich jetzt die Ausdrücke:

$$X_k''f = \xi_{k1}p_1 + \cdots + \xi_{k,\,n-2}p_{n-2}$$

behandeln u. s. w.

Wir erhalten somit das

Theorem 105. *Sind $X_1f \cdots X_rf$ unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen linearen homogenen Gruppe in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ und bestehen Relationen von der besonderen Form:*

$$(X_i X_{i+k}) = \sum_1^{i+k-1} {}_s\, c_{iks} X_s f, \quad (i = 1 \cdots r-1,\ k = 1 \cdots r-i),$$

so kann man stets solche lineare homogene Functionen von $x_1 \cdots x_n$ als neue unabhängige Veränderliche einführen, dass alle X_kf gleichzeitig die kanonische Form:

$$a_{k11}x_1p_1 + (a_{k21}x_1 + a_{k22}x_2)p_2 + \cdots + (a_{kn1}x_1 + \cdots + a_{knn}x_n)p_n$$

*erhalten.**)

Erinnern wir uns andererseits daran, dass $X_1f \cdots X_rf$ auch eine projective Gruppe des R_{n-1} ist, so können wir sagen:

Satz 4. *Ist $X_1f \cdots X_rf$ eine r-gliedrige projective Gruppe des R_{n-1} von der besonderen Zusammensetzung:*

$$(X_i X_{i+k}) = \sum_1^{i+k-1} {}_s\, c_{iks} X_s f,$$

so giebt es in dem R_{n-1} wenigstens einen bei der Gruppe invarianten Punkt M_0, durch jeden invarianten Punkt geht wenigstens eine invariante Gerade $M_1, \cdots$ durch jede invariante ebene M_{n-3} geht wenigstens eine invariante ebene M_{n-2}. Unter Umständen gehören zu der Gruppe mehrere, ja unendlich viele derartige Reihen von invarianten Mannigfaltigkeiten $M_0, M_1 \cdots M_{n-2}$.

Behalten wir die Voraussetzungen des letzten Satzes bei und nehmen wir überdies an, dass im Raume $x_1 : x_2 : \cdots : x_n$ schon mehrere invariante ebene Mannigfaltigkeiten $\mathsf{M}_{\varrho_1} \cdots \mathsf{M}_{\varrho_q}$ bekannt sind, von denen jede in der nächstfolgenden enthalten ist, so giebt es unter den im Satze 4 erwähnten Reihen von invarianten Mannigfaltigkeiten M_0, $M_1 \cdots M_{n-2}$ offenbar mindestens eine, bei welcher M_{ϱ_1} mit M_{ϱ_1}, M_{ϱ_2} mit $\mathsf{M}_{\varrho_2}, \cdots M_{\varrho_q}$ mit M_{ϱ_q} zusammenfällt.

§ 147.

Die im Vorangehenden entwickelten Untersuchungen tragen zwar anscheinend einen ziemlich speciellen Charakter, sie besitzen jedoch

*) Lie, Archiv for Math., Bd. 3, S. 110 u. 111, Theorem 3; Christiania 1878.

für eine jede endliche continuirliche Gruppe deswegen eine allgemeine Bedeutung, weil sich zu jeder solchen eine isomorphe lineare homogene Gruppe angeben lässt, nämlich die zugehörige adjungirte Gruppe (Kapitel 16).

Unter anderm können wir unsere obigen Theorien benutzen, um nachzuweisen, dass jede Gruppe mit mehr als zwei Parametern zweigliedrige Untergruppen enthält und jede Gruppe mit mehr als drei Parametern dreigliedrige.

Es sei $X_1 f \cdots X_r f$ eine beliebige r-gliedrige Gruppe und:

$$E_k f = \sum_{ij}^{1\cdots r} c_{jki}\, e_j \frac{\partial f}{\partial e_i} \qquad (k=1\cdots r)$$

die zugehörige adjungirte Gruppe, so dass gleichzeitig die Relationen:

$$(X_i X_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} X_s f, \quad (E_i E_k) = \sum_1^r {}_s\, c_{iks} E_s f$$

bestehen.

Wir behaupten, dass $X_1 f$ jedenfalls *einer* zweigliedrigen Gruppe angehört, dass also eine infinitesimale Transformation $\lambda_2 X_2 f + \cdots + \lambda_r X_r f$ existirt, für welche sich ergiebt:

$$(X_1,\ \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_r X_r) = \varrho X_1 f + \mu \sum_2^r {}_k\, \lambda_k X_k f.$$

Diese Bedingung stellt sich in der Form:

$$\sum_2^r {}_k\, \lambda_k \sum_1^r {}_s\, c_{1ks} X_s f = \varrho X_1 f + \mu \sum_2^r {}_k\, \lambda_k X_k f$$

dar und zerlegt sich in die n Gleichungen:

$$(9) \qquad \begin{cases} \sum_2^r {}_k\, \lambda_k c_{1k1} = \varrho \\ \sum_2^r {}_k\, \lambda_k c_{1ks} = \mu \lambda_s \qquad (s=2\cdots r). \end{cases}$$

Hier kommt es offenbar nur darauf an, die letzten $r-1$ Gleichungen zu befriedigen; dass dies möglich ist, sieht man allerdings direkt am einfachsten ein. Für μ ergiebt sich ja die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} c_{122}-\mu & c_{132} & \cdot & c_{1r2} \\ c_{123} & c_{133}-\mu & \cdot & c_{1r3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{12r} & c_{13r} & \cdot & c_{1rr}-\mu \end{vmatrix} = 0,$$

welche immer Wurzeln besitzt; deshalb existirt auch ein System von nicht sämmtlich verschwindenden λ_k, welche den obigen Bedingungen genügen und welche auch ϱ bestimmen.

Dass die Gleichungen (9) erfüllt werden können, ist jedoch auch eine unmittelbare Consequenz unserer obigen Theorien; wenn diese Bemerkung auch hier, wo die Verhältnisse so einfach liegen, kaum nöthig erscheint, wollen wir doch nicht daran vorübergehen, weil wir bei den allgemeineren Fällen, welche nachher zu behandeln sind, nicht ohne jene Theorien auskommen.

In der infinitesimalen Transformation:

$$E_1 f = \sum_1^r {}^i \sum_1^r {}^k c_{k1i} e_k \frac{\partial f}{\partial e_i} = \sum_1^r {}^i \varepsilon_i \frac{\partial f}{\partial e_i}$$

der adjungirten Gruppe sind alle ε_i von e_1 frei, da c_{11i} immer null ist. Die abgekürzte lineare homogene infinitesimale Transformation $\varepsilon_2 p_2 + \cdots + \varepsilon_r p_r$ in den $r-1$ Variabeln $e_2 \cdots e_r$ lässt nun sicher ein System $e_2 : \cdots : e_r$ invariant; es ist also möglich, den Gleichungen:

$$\sum_2^r {}^k c_{k1i} e_k = \sigma e_i \quad (i = 2 \cdots r)$$

zu genügen, diese unterscheiden sich aber gar nicht von den letzten $r-1$ Gleichungen (9), denn es ist ja $c_{k1i} = - c_{1ki}$.

Nunmehr können wir unsere obige Behauptung, dass jede Gruppe mit mehr als zwei Parametern zweigliedrige Untergruppen enthält, genauer folgendermassen aussprechen:

Satz 5. *Jede infinitesimale Transformation einer Gruppe mit mehr als zwei Parametern ist in mindestens einer zweigliedrigen Untergruppe enthalten.**)

Wir wollen jetzt annehmen, dass $X_1 f$ und $X_2 f$ eine zweigliedrige Untergruppe erzeugen, dass also eine Relation von der Form:

$$(X_1 X_2) = c_{121} X_1 f + c_{122} X_2 f$$

besteht; wir behaupten, dass sobald r grösser als 3 ist, es auch immer eine dreigliedrige Untergruppe giebt, in welcher $X_1 f$ und $X_2 f$ enthalten sind.

Zunächst können wir von den Constanten c_{121} und c_{122}, wenn sie nicht schon beide null sind, immer eine gleich Null machen. In der That, ist etwa c_{121} verschieden von Null, so führen wir $X_1 f + \frac{c_{122}}{c_{121}} X_2 f$ als neues $X_1 f$ ein und erhalten so:

*) Lie, Archiv for Math. Bd. 1, S. 192. Christiania 1876.

$$(X_1 X_2) = c_{121} X_1 f.$$

Auf diese Form lässt sich also jede zweigliedrige Gruppe bringen.

Soll $\lambda_3 X_3 f + \cdots + \lambda_r X_r f$ mit $X_1 f$ und $X_2 f$ zusammen eine dreigliedrige Gruppe erzeugen, so muss werden:

$$(10)\begin{cases}(X_1, \lambda_3 X_3 + \cdots + \lambda_r X_r) = \alpha_1 X_1 f + \alpha_2 X_2 f + \mu(\lambda_3 X_3 f + \cdots + \lambda_r X_r f)\\(X_2, \lambda_3 X_3 + \cdots + \lambda_r X_r) = \beta_1 X_1 f + \beta_2 X_2 f + \nu(\lambda_3 X_3 f + \cdots + \lambda_r X_r f).\end{cases}$$

Hieraus erhalten wir folgende Bedingungsgleichungen:

$$(11)\quad\begin{cases}\sum_3^r {}_k\, \lambda_k c_{1k1} = \alpha_1, & \sum_3^r {}_k\, \lambda_k c_{1k2} = \alpha_2,\\ \sum_3^r {}_k\, \lambda_k c_{2k1} = \beta_1, & \sum_3^r {}_k\, \lambda_k c_{2k2} = \beta_2,\\ \sum_3^r {}_k\, c_{1ks} \lambda_k = \mu \lambda_s, & \sum_3^r {}_k\, c_{2ks} \lambda_k = \nu \lambda_s \quad (s = 3 \cdots r).\end{cases}$$

Wie man bemerken wird, braucht nur nachgewiesen zu werden, dass die $2(r-2)$ Gleichungen in der letzten Reihe befriedigt werden können, die übrigen Gleichungen lassen sich alsdann immer erfüllen.

Um nun diese Frage zu entscheiden, bilden wir die infinitesimalen Transformationen:

$$E_1 f = \sum_1^r {}_i \sum_1^r {}_k\, c_{k1i} e_k \frac{\partial f}{\partial e_i} = \sum_1^r {}_i\, \varepsilon_{1i} \frac{\partial f}{\partial e_i}$$

$$E_2 f = \sum_1^r {}_i \sum_1^r {}_k\, c_{k2i} e_k \frac{\partial f}{\partial e_i} = \sum_1^r {}_i\, \varepsilon_{2i} \frac{\partial f}{\partial e_i},$$

welche, wie wir wissen, in der Beziehung:

$$(E_1 E_2) = c_{121} E_1 f$$

stehen. Da alle c_{11i}, c_{22i} und die $c_{122} \cdots c_{12r}$ gleich Null sind, kommen e_1 und e_2 beide in $\varepsilon_{13} \cdots \varepsilon_{1r}$, $\varepsilon_{23} \cdots \varepsilon_{2r}$ gar nicht vor. Die verkürzten Ausdrücke:

$$\overline{E}_1 f = \sum_3^r {}_i\, \varepsilon_{1i} \frac{\partial f}{\partial e_i}, \quad \overline{E}_2 f = \sum_3^r {}_i\, \varepsilon_{2i} \frac{\partial f}{\partial e_i}$$

sind daher lineare homogene infinitesimale Transformationen in $e_3 \cdots e_r$ und befriedigen die Relation:

$$(\overline{E}_1 \overline{E}_2) = c_{121} \overline{E}_1 f.$$

Daraus folgt nach dem Früheren die Existenz wenigstens eines Systems $e_3 : \cdots : e_r$, welches beide infinitesimale Transformationen $\overline{E}_1 f$ und $\overline{E}_2 f$ gestattet, welches also Bedingungen von der Form:

$$\sum_3^r {}_k\, c_{k1i}\, e_k = \sigma\, e_i\,, \qquad \sum_3^r {}_k\, c_{k2i}\, e_k = \tau\, e_i \qquad (i=3\cdots r)$$

erfüllt. Das aber war gerade zu beweisen, denn diese letzten Gleichungen sind keine andern als die Gleichungen (11), um deren Befriedigung es sich eben handelte. Mit den λ_i sind natürlich auch die Grössen α_1, α_2, β_1, β_2 bestimmt.

Da wir also unter allen Umständen $\lambda_3 \cdots \lambda_r$ so wählen können, dass Gleichungen von der Form (10) bestehen, können wir sagen:

Theorem 106. *Jede infinitesimale Transformation und ebenso jede zweigliedrige Untergruppe einer Gruppe mit mehr als drei Parametern ist in wenigstens einer dreigliedrigen Untergruppe enthalten.**)

Man könnte auf die Vermuthung kommen, dass auch jede dreigliedrige Untergruppe in mindestens einer viergliedrigen enthalten ist u. s. w., allein diese Vermuthung bestätigt sich nicht. Unser Beweisverfahren würde nur dann weiter angewendet werden können, wenn *jede* dreigliedrige Gruppe X_1f, X_2f, X_3f sich auf die Form:

$$(X_1X_2) = c_{121}X_1f, \qquad (X_1X_3) = c_{131}X_1f + c_{132}X_2f$$
$$(X_2X_3) = c_{231}X_1f + c_{232}X_2f$$

bringen liesse, wenn also nicht blos X_1f in der Gruppe X_1f, X_2f invariant wäre, sondern auch diese letztere in der ganzen dreigliedrigen Gruppe.

Das ist aber für alle dreigliedrigen Gruppen von der Zusammensetzung

$$(X_1X_2) = X_1f, \qquad (X_1X_3) = 2\,X_2f, \qquad (X_2X_3) = X_3f$$

nicht der Fall (Kap. 15, Satz 12, S. 270).

Wir wollen noch kurz bei einem speciellen Falle verweilen, in welchem eine m-gliedrige Untergruppe wirklich in einer $(m+1)$-gliedrigen enthalten ist.

Es sei eine r-gliedrige Gruppe $X_1f \cdots X_rf$ vorgelegt, welche eine m-gliedrige Untergruppe $X_1f \cdots X_mf$ von der schon oben erwähnten eigenthümlichen Zusammensetzung

$$(X_i X_{i+k}) = \sum_1^{i+k-1} {}_s\, c_{i,i+k,s} X_sf \qquad (i < m,\ i+k \leq m)$$

---

*) Lie, Archiv for Math. Bd. 1, S. 193, Bd. 3, S. 114—116, Christiania 1876 und 1878.

enthält. Wir behaupten, dass stets eine $(m+1)$-gliedrige Untergruppe von der Form:

$$X_1 f \cdots X_m f, \qquad \lambda_{m+1} X_{m+1} f + \cdots + \lambda_r X_r f$$

existirt.

Unsere Behauptung kommt darauf zurück, dass gewisse Relationen von der Form:

$$(X_j, \lambda_{m+1} X_{m+1} + \cdots + \lambda_r X_r) = \sum_1^m {}_k\, \alpha_{jk} X_k f + \mu_j \sum_{m+1}^r {}_s\, \lambda_s X_s f$$
$$(j = 1 \cdots m)$$

bestehen. Durch Zerlegung ergiebt sich:

$$(12) \qquad \begin{cases} \sum_{m+1}^r {}_i\, \lambda_i c_{jik} = \alpha_{jk} & (j, k = 1 \cdots m) \\ \sum_{m+1}^r {}_i\, \lambda_i c_{jis} = \mu_j \lambda_s & (j = 1 \cdots m;\ s = m+1, \cdots r). \end{cases}$$

Es fragt sich also, ob die letzten $m(r-m)$ Gleichungen befriedigt werden können; die ersten m^2 können es dann immer.

Um diese Frage zu entscheiden, bilden wir die m infinitesimalen Transformationen:

$$E_k f = \sum_1^r {}_i \sum_1^r {}_j\, c_{jki} e_j \frac{\partial f}{\partial e_i} = \sum_1^r {}_i\, \varepsilon_{ki} \frac{\partial f}{\partial e}$$
$$(k = 1 \cdots m),$$

welche paarweise den Relationen:

$$(E_i E_{i+k}) = \sum_1^{i+k-1} {}_s\, c_{i, i+k, s} E_s f \qquad (i + k \leqq m)$$

genügen. Wir bemerken, dass alle $c_{j, k, m+1} \cdots c_{jkr}$ verschwinden, in denen j und k kleiner sind als $m+1$, und daraus folgern wir, dass in $E_1 f \cdots E_m f$ alle Coefficienten $\varepsilon_{k, m+1} \cdots \varepsilon_{kr}$ von $e_1 \cdots e_m$ frei sind. Die verkürzten infinitesimalen Transformationen:

$$\overline{E}_k f = \sum_{m+1}^r {}_i\, \varepsilon_{ki} \frac{\partial f}{\partial e_i} \qquad (k = 1 \cdots m)$$

in den Veränderlichen $e_{m+1} \cdots e_r$ stehen daher paarweise in der Beziehung:

$$(\overline{E}_i \overline{E}_k) = \sum_1^{i+k-1} {}_s\, c_{i, i+k, s} \overline{E}_s f \qquad (i + k \leqq m)$$

und es giebt somit nach Satz 4, S. 589 ein System $e_{m+1} : \cdots : e_r$, welches alle infinitesimalen Transformationen $\overline{E}_1 f \cdots \overline{E}_m f$ gestattet. Das heisst aber nichts anderes, als dass es möglich ist, die Gleichungen

$$\sum_{m+1}^{r} {}_j\, c_{jks} e_j = \sigma_k e_s \qquad (k = 1 \cdots m;\; s = m+1, \cdots r)$$

zu befriedigen. Diese Gleichungen sind aber genau dieselben wie die oben gefundenen (12) und somit ist alles, was wir zeigen wollten, wirklich nachgewiesen.

Theorem 107. *Giebt es in einer r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ eine m-gliedrige Untergruppe $X_1 f \cdots X_m f$ von der besonderen Zusammensetzung:*

$$(X_i X_{i+k}) = \sum_{1}^{i+k-1} {}_s\, c_{i,i+k,s} X_s f \qquad (i + k \leqq m),$$

*so ist diese m-gliedrige Untergruppe stets in mindestens einer $(m+1)$-gliedrigen enthalten.**)

§ 148.

Wir wollen das soeben aufgestellte Theorem auch noch durch begriffliche Betrachtungen ableiten, indem wir wie in Kap. 16 die infinitesimalen Transformationen $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ unserer Gruppe als Punkte eines $(r-1)$-fach ausgedehnten Raumes mit den homogenen Coordinaten $e_1 \cdots e_r$ interpretiren.

Da die Gruppe $X_1 f \cdots X_m f \cdots X_r f$ mit ihrer adjungirten: $E_1 f \cdots E_m f \cdots E_r f$ isomorph ist, so erfüllen $E_1 f \cdots E_m f$ unter den gemachten Voraussetzungen Relationen von der Form:

$$(E_i E_{i+k}) = \sum_{1}^{i+k-1} {}_s\, c_{i,i+k,s} E_s f \qquad (i + k \leqq m),$$

sie erzeugen daher eine Untergruppe, welche im Raume e_k durch die $(m-1)$-fach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit:

$$e_{m+1} = 0, \quad \cdots \quad e_r = 0$$

dargestellt wird. Diese ebene Mannigfaltigkeit gestattet natürlich die Untergruppe $E_1 f \cdots E_m f$, und offenbar gilt dasselbe von der *Schaar* aller m-fach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeiten:

$$\frac{e_{m+1}}{\mathfrak{e}_{m+1}} = \frac{e_{m+2}}{\mathfrak{e}_{m+2}} = \cdots = \frac{e_r}{\mathfrak{e}_r},$$

welche durch die Mannigfaltigkeit $e_{m+1} = 0, \cdots e_r = 0$ hindurchgehen. Da aber die Parameter $\mathfrak{e}_{m+1} : \cdots : \mathfrak{e}_r$ durch eine mit der Untergruppe $E_1 f \cdots E_m f$ isomorphe lineare homogene Gruppe transformirt werden (Kap. 23, Satz 5, S. 472), so giebt es unter den m-fach ausgedehnten

*) Lie, Archiv for Math., Bd. 3, S. 114—116, Christiania 1878.

Mannigfaltigkeiten unserer invarianten Schaar mindestens eine, welche bei der Untergruppe $E_1 f \cdots E_m f$ invariant bleibt. Diese m-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit ist das Bild einer $(m+1)$-gliedrigen Untergruppe der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ (vgl. Satz 5, S. 288).

Die soeben angestellten begrifflichen Betrachtungen, die uns wiederum zum Theorem 107 geführt haben, sind im Wesentlichen mit den früher entwickelten analytischen Betrachtungen identisch. Doch ist die synthetische Begründung durchsichtiger als die analytische.

Es ist überhaupt zweckmässig, bei Untersuchungen über die Zusammensetzung von Transformationsgruppen die Interpretation aller infinitesimalen Transformationen $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ als der Punkte eines Raumes, welcher durch die lineare homogene adjungirte Gruppe transformirt wird, zu Grunde zu legen. Wir werden die Fruchtbarkeit und Einfachheit dieser Methode, die auch im dritten Abschnitte mehrfache Anwendung finden soll, durch noch ein Beispiel ins Licht setzen und gleichzeitig einen bemerkenswerthen neuen Satz ableiten.

Wir betrachten eine r-gliedrige Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$, deren infinitesimale Transformationen durch Relationen von der Form:

$$(X_i X_{i+k}) = \sum_1^{i+k-1} {}_s\, c_{i,\,i+k,\,s} X_s f$$

verknüpft sind. Die infinitesimalen Transformationen $E_1 f \cdots E_r f$ der adjungirten Gruppe erfüllen dann die analogen Gleichungen:

$$(E_i E_{i+k}) = \sum_1^{i+k-1} {}_s\, c_{i,\,i+k,\,s} E_s f.$$

Also (Satz 4, S. 589) enthält der Raum e_k mindestens einen bei der adjungirten Gruppe invarianten Punkt. Durch jeden derartigen invarianten Punkt geht mindestens eine invariante Gerade M_1, durch jede derartige M_1 geht mindestens eine invariante ebene M_2 u. s. w.

Deuten wir jetzt die Punkte e_k als infinitesimale Transformationen, so sehen wir, dass unsere r-gliedrige Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ mindestens eine invariante eingliedrige Untergruppe enthält; ferner dass jede invariante eingliedrige Untergruppe in mindestens einer invarianten zweigliedrigen Untergruppe enthalten ist; dass jede invariante zweigliedrige Untergruppe in mindestens einer invarianten dreigliedrigen Untergruppe enthalten ist u. s. w. (vgl. S. 280).

Es gilt daher das

Theorem 108. *Enthält eine r-gliedrige Gruppe r unabhängige infinitesimale Transformationen $Y_1 f \cdots Y_r f$, welche Relationen von der Form:*

$$(Y_i Y_{i+k}) = \sum_1^{i+k-1} {}_s\, c_{i,i+k,s} Y_s f$$

erfüllen, so enthält sie zugleich r unabhängige infinitesimale Transformationen $Z_1 f \cdots Z_r f$, zwischen denen Relationen von der Form:

$$(Z_i Z_{i+k}) = \sum_1^{i} {}_s\, c_{i,i+k,s} Z_s f$$

*bestehen; dann erzeugen $Z_1 f \cdots Z_i f$ für jedes $i < r$ eine i-gliedrige Untergruppe $\mathfrak{G}_i$, und zwar ist jede $\mathfrak{G}_i$ in jeder $\mathfrak{G}_{i+k}$, sowie in der Gruppe $Y_1 f \cdots Y_r f$ selbst invariant.**)

Behalten wir die Voraussetzungen dieses Theorems bei, und setzen wir überdies voraus, dass zufällig schon mehrere invariante Untergruppen, etwa G_{ϱ_1}, $G_{\varrho_2} \cdots G_{\varrho_q}$ bekannt sind, von denen jede die nächstfolgende umfasst, so leuchtet ein (vgl. die Schlussbemerkungen des § 146), dass die im Theoreme 108 besprochenen Untergruppen $\mathfrak{G}_i$ so gewählt werden können, dass $\mathfrak{G}_{\varrho_1}$ mit G_{ϱ_1}, $\mathfrak{G}_{\varrho_2}$ mit $G_{\varrho_2}, \cdots \mathfrak{G}_{\varrho_q}$ mit G_{ϱ_q} zusammenfällt.

Wenn andererseits eine r-gliedrige Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ von der hier betrachteten besonderen Zusammensetzung vorliegt, so ist es immer möglich, gewisse invariante Untergruppen durch Differentiation abzuleiten. Es erzeugen ja alle $(X_i X_k)$ eine *erste abgeleitete* invariante Untergruppe mit etwa $r_1 < r$ unabhängigen infinitesimalen Transformationen. Bezeichnen wir dieselben wie in Kap. 15, S. 266 mit $X_1' f \cdots X_{r_1}' f$, so erzeugen alle $(X_i' X_k')$ eine *zweite abgeleitete* invariante Untergruppe der r-gliedrigen Gruppe mit etwa $r_2 < r_1$ unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1'' f \cdots X_{r_2}'' f$ u. s. w.

Es ist daher möglich, unsere Gruppe auf eine solche Form $U_1 f \cdots U_i f \cdots U_r f$ zu bringen, dass *erstens* für jedes i die infinitesimalen Transformationen $U_1 f \cdots U_i f$ eine invariante Untergruppe erzeugen, dass *zweitens* alle $(U_i U_k)$ sich aus $U_1 f \cdots U_{r_1} f$ linear ableiten lassen, dass *drittens* alle $((U_i U_k)(U_\alpha U_\beta))$ aus $U_1 f \cdots U_{r_2} f$ linear abgeleitet werden können u. s. w.

---

*) Lie, Archiv for Math., Bd. 3, S. 112 u. 113, Christiania 1878; vgl. auch Bd. IX, S. 79–82.

Kapitel 28.

Ansatz zur Bestimmung aller endlichen continuirlichen Gruppen des n-fach ausgedehnten Raumes.

Es ist nicht wahrscheinlich, dass man so bald im Stande sein wird, alle endlichen continuirlichen Transformationsgruppen zu bestimmen; ja es ist sogar fraglich, ob das jemals gelingen wird. Man thut daher gut, wenn man an Stelle des allgemeinen Problems, *alle* endlichen continuirlichen Gruppen zu bestimmen, zunächst speciellere Probleme in Angriff nimmt, welche sich auf die Bestimmung gewisser Kategorien von endlichen continuirlichen Gruppen beziehen. Solche speciellere Probleme sind namentlich die folgenden drei:

Erstens die Bestimmung aller r-gliedrigen Gruppen in n Veränderlichen.

Zweitens die Bestimmung aller r-gliedrigen Gruppen überhaupt.

Drittens die Bestimmung aller endlichen continuirlichen Gruppen in n Veränderlichen.

In Kapitel 22, S. 429 ff. haben wir gezeigt, dass die Erledigung des ersten dieser Probleme ausser ausführbaren Operationen jedenfalls nur die Integration simultaner Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen verlangt. Wir fanden ferner, dass das zweite unserer drei Probleme sich auf das erste zurückführen lässt (Theor. 84, S. 458).

Dagegen ist das dritte Problem durch die Entwickelungen des Kapitels 22 keineswegs erledigt. Ist nämlich $n > 1$, so giebt es für jeden Werth von r, wie gross derselbe auch sein mag, stets r-gliedrige Gruppen in n Veränderlichen. Wählt man z. B. r Functionen $F_1 \cdots F_r$ von $x_1 \cdots x_{n-1}$ derart, dass zwischen ihnen keine lineare Relation von der Form:

$$c_1 F_1 + \cdots + c_r F_r = 0$$

mit constanten Coefficienten besteht, so sind die r infinitesimalen Transformationen:

$$F_1(x_1 \cdots x_{n-1}) \frac{\partial f}{\partial x_n}, \quad \cdots \quad F_r(x_1 \cdots x_{n-1}) \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

von einander unabhängig und paarweise vertauschbar, sie erzeugen daher eine r-gliedrige Gruppe in den n Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$.

Trotz der wichtigen Ergebnisse des Kapitels 22 harrt also das dritte der oben angegebenen Probleme noch der Erledigung. Im gegenwärtigen Kapitel werden wir deshalb dieses Problem in Angriff nehmen und wenigstens einen Ansatz zu seiner Erledigung geben.

Das Problem der Bestimmung aller Gruppen eines n-fach ausgedehnten Raumes R_n zerlegen wir im Folgenden in eine Reihe von einzelnen Problemen, die von einander unabhängig sind. Wir erreichen das durch eine naturgemässe Eintheilung der Gruppen des R_n in Classen, welche so gewählt sind, dass die Gruppen einer jeden Classe bestimmt werden können, ohne dass von den Gruppen der übrigen Classen etwas bekannt zu sein braucht. Freilich können wir keine allgemeine Methode angeben, welche in jedem Falle die Bestimmung aller Gruppen einer Classe leistet; doch geben wir wichtige Sätze über die zu einer Classe gehörigen Gruppen und entwickeln andererseits eine Reihe Betrachtungen, welche die Bestimmung aller Gruppen einer Classe wesentlich erleichtern; im nächsten Kapitel soll das durch specielle Anwendungen erläutert werden. Bei diesen allgemeinen Auseinandersetzungen beschränken wir uns im Wesentlichen auf transitive Gruppen, weil unsere Classification gerade für die transitiven Gruppen von besonderer praktischer Bedeutung ist.

Wenn wir später (im dritten Abschnitt) bei der Bestimmung aller endlichen continuirlichen Gruppen in einer oder zwei oder drei Veränderlichen die Entwickelungen des gegenwärtigen Kapitels nur theilweise verwerthen, so hat das seinen guten Grund. Bei der Bestimmung der *primitiven* Gruppen eines Raumes ist das hier auseinandergesetzte Verfahren entschieden zweckmässig; nicht so bei der Bestimmung der imprimitiven Gruppen; da empfiehlt es sich mehr, einen andern Weg einzuschlagen. Jede imprimitive Gruppe des R_n zerlegt ja diesen Raum in eine invariante Schaar von Mannigfaltigkeiten und transformirt die Mannigfaltigkeiten dieser Schaar durch eine isomorphe Gruppe in weniger als n Veränderlichen. Hieraus ergiebt sich, dass man gut thut, die Bestimmung aller imprimitiven Gruppen des R_n erst dann in Angriff zu nehmen, wenn man schon alle Gruppen in weniger als n Veränderlichen kennt. Nach diesem Grundsatz werden wir in Abschnitt III die Bestimmung aller imprimitiven Gruppen des R_2 und gewisser des R_3 durchführen.

§ 149.

Es sei

$$X_k f = \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad {\scriptstyle (k=1\cdots r)}$$

eine ganz beliebige r-gliedrige Gruppe des n-fach ausgedehnten Raumes $x_1 \cdots x_n$ oder kurz des R_n.

Nach Anleitung von Kap. 25, S. 522 ff. erweitern wir diese Gruppe, indem wir $x_1 \cdots x_n$ als Functionen einer Hülfsveränderlichen t ansehen, welche bei unserer Gruppe gar nicht transformirt wird, und indem wir berücksichtigen, dass die Differentialquotienten: $\frac{dx_i}{dt} = x_i'$ bei der Gruppe transformirt werden. Wir erhalten so in den $2n$ Veränderlichen: $x_1 \cdots x_n$, $x_1' \cdots x_n'$ die erweiterte Gruppe:

$$\overline{X}_k f = \sum_1^n {}^i\, \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n {}^i \left(\sum_1^n {}^\nu \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_\nu} x_\nu' \right) \frac{\partial f}{\partial x_i'} \quad (k = 1 \cdots r).$$

Dieselbe giebt wie wir wissen an, in welcher Weise die ∞^{2n-1} Linienelemente: $x_1 \cdots x_n$, $x_1' : x_2' : \cdots : x_n'$ des Raumes $x_1 \cdots x_n$ von der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ unter einander vertauscht werden (vgl. S. 525).

Jeder Punkt: $x_1^0 \cdots x_n^0$ von allgemeiner Lage bleibt bei einer ganz bestimmten Anzahl von unabhängigen infinitesimalen Transformationen: $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ invariant und zwar mindestens bei $r - n$ und höchstens bei $r - 1$. Wir wollen die Anzahl dieser unabhängigen infinitesimalen Transformationen mit $r - q$ bezeichnen und annehmen, dass: $X_1^0 f \cdots X_{r-q}^0 f$ solche unabhängige infinitesimale Transformationen sind; dieselben erzeugen dann sicher eine $(r - q)$-gliedrige Untergruppe der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ (vgl. Kap. 12, S. 205 f.).

In den Reihenentwickelungen von $X_1^0 f \cdots X_{r-q}^0 f$ nach Potenzen der $x_i - x_i^0$ fehlen natürlich alle Glieder nullter Ordnung und es kommen nur Glieder erster und höherer Ordnung vor:

$$X_k^0 f = \sum_1^n {}^\nu \left\{ \sum_1^n {}^i\, \alpha_{ki\nu}(x_1^0 \cdots x_n^0) \cdot (x_i - x_i^0) + \cdots \right\} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \quad (k = 1 \cdots r - q).$$

Die Gruppe: $X_1^0 f \cdots X_{r-q}^0$ lässt den Punkt $x_1^0 \cdots x_n^0$ invariant, vertauscht aber die Linienelemente, welche durch diesen Punkt gehen, unter einander; wie? das zeigt die zugehörige erweiterte Gruppe:

$$\overline{X}_k^0 f = \sum_1^n {}^\nu \left\{ \sum_1^n {}^i\, \alpha_{ki\nu}(x_1^0 \cdots x_n^0) \cdot (x_i - x_i^0) + \cdots \right\} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} +$$

$$+ \sum_1^n {}^\nu \left\{ \sum_1^n {}^i\, \alpha_{ki\nu}(x_1^0 \cdot \cdot x_i^0) \cdot x_n' + \cdots \right\} \frac{\partial f}{\partial x_\nu'} \quad (k = 1 \cdots n - q),$$

welche die ∞^{2n-1} Linienelemente des Raumes $x_1 \cdots x_n$ genau so transformirt wie die Gruppe: $X_1^0 f \cdots X_{r-q}^0 f$. Will man daher sich auf die Linienelemente durch den Punkt $x_1^0 \cdots x_n^0$ beschränken und von den übrigen ganz absehen, so hat man nach Anleitung von Kap. 14, S. 233 f. aus den $\overline{X}_k^0 f$ alle Glieder mit den Differentialquotienten von f nach $x_1 \cdots x_n$ wegzulassen und in den übrigen Gliedern die Substitution: $x_1 = x_1^0, \cdots x_n = x_n^0$ zu machen. Die so erhaltenen verkürzten infinitesimalen Transformationen:

$$(1) \qquad L_k f = \sum_{i\nu}^{1\cdots n} \alpha_{ki\nu}(x_1^0 \cdots x_n^0) \cdot x_i' \frac{\partial f}{\partial x_\nu'} \qquad (k = 1 \cdots r - q)$$

erzeugen *eine lineare homogene Gruppe in den n Veränderlichen* $x_1' \cdots x_n'$; diese Gruppe, die mit der Gruppe: $\overline{X}_1^0 f \cdots \overline{X}_{r-q}^0 f$ und natürlich auch mit der Gruppe: $X_1^0 f \cdots X_{r-q}^0 f$ isomorph ist, giebt an, in welcher Weise die beiden eben genannten Gruppen die ∞^{n-1} Linienelemente: $x_1' : x_2' : \cdots : x_n'$ durch den Punkt $x_1^0 \cdots x_n^0$ transformiren.

Die lineare homogene Gruppe: $L_1 f \cdots L_{r-q} f$ ist augenscheinlich durch die Glieder erster Ordnung in den Reihenentwickelungen von $X_1^0 f \cdots X_{r-q}^0 f$ vollkommen bestimmt, sie enthält mithin soviele wesentliche Parameter als die Gruppe: $X_1^0 f \cdots X_{r-q}^0 f$ unabhängige infinitesimale Transformationen 1. O., aus denen sich keine Transformation von zweiter oder höherer Ordnung in den $x_i - x_i^0$ linear ableiten lässt. Hieraus ergiebt sich, dass man die Gruppe: $L_1 f \cdots L_{r-q} f$ aufstellen kann, sobald man weiss, wie viele unabhängige infinitesimale Transformationen erster Ordnung, aus denen sich keine Transformation von zweiter oder höherer Ordnung linear ableiten lässt, die Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ in der Umgebung von $x_1^0 \cdots x_n^0$ enthält und sobald man ausserdem die Glieder erster Ordnung in den Reihenentwickelungen dieser infinitesimalen Transformationen kennt. Umgekehrt kann man, sobald man die Gruppe: $L_1 f \cdots L_r f$ kennt, die Zahl und die Glieder erster Ordnung derjenigen unabhängigen infinitesimalen Transformationen erster Ordnung der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ angeben, aus denen sich keine Transformation von zweiter oder höherer Ordnung in den $x_i - x_i^0$ linear ableiten lässt.

Man kann die lineare homogene Gruppe: $L_1 f \cdots L_{r-q} f$ auch folgendermassen ableiten:

Da es sich nur um die Art und Weise handelt, in welcher die Richtungen durch den festgehaltenen Punkt: $x_1^0 \cdots x_n^0$ transformirt werden, so darf man die Gruppe: $X_1^0 f \cdots X_{r-q}^0 f$ durch die nachstehende:

$$\sum_{i\nu}^{1\cdots n} \alpha_{ki\nu}(x_1^0 \cdots x_n^0) \cdot (x_i - x_i^0) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \qquad (k = 1 \cdots r - q)$$

ersetzen, welche durch Weglassung aller Glieder von zweiter und höherer Ordnung erhalten wird. Hier lassen sich nun $x_1 - x_1^0, \cdots x_n - x_n^0$ direkt als homogene Coordinaten der Linienelemente durch den Punkt $x_1^0 \cdots x_n^0$ auffassen, die Gruppe:

$$\sum_{i\nu}^{1\cdots n} \alpha_{ki\nu}(x_1^0 \cdots x_n^0) \cdot (x_i - x_i^0) \frac{\partial f}{\partial (x_\nu - x_\nu^0)} \qquad (k = 1 \cdots r - q)$$

giebt also an, wie diese Linienelemente transformirt werden. Das stimmt mit dem Obigen.

Wir haben gesehen, dass die r-gliedrige Gruppe: $X_1 f \cdots X^r f$ jedem Punkte $x_1^0 \cdots x_n^0$ von allgemeiner Lage eine ganz bestimmte lineare homogene Gruppe (1) zuordnet, die freilich im Allgemeinen für verschiedene Punkte verschieden ausfällt. Untersuchen wir jetzt, wie sich diese lineare homogene Gruppe bei Einführung neuer Veränderlicher verhält.

An Stelle von $x_1 \cdots x_n$ führen wir die neuen Veränderlichen:

$$(2)\qquad y_i = y_i^0 + \sum_1^n{}^\nu a_{i\nu}(x_\nu - x_\nu^0) + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

ein, welche gewöhnliche Potenzreihen von $x_1 - x_1^0, \cdots x_n - x_n^0$ sind; wie immer setzen wir dabei voraus, dass die Determinante:

$$\sum \pm a_{11} \cdots a_{nn}$$

von Null verschieden ist, damit auch umgekehrt die x_i gewöhnliche Potenzreihen von $y_1 - y_1^0, \cdots y_n - y_n^0$ werden.

In $y_1 \cdots y_n$ möge $X_k^0 f$ die Form:

$$Y_k^0 f = \sum_1^n{}^\nu \left\{ \sum_1^n{}^i \beta_{ki\nu} \cdot (y_i - y_i^0) + \cdots \right\} \frac{\partial f}{\partial y_\nu} \qquad (k = 1 \cdots r - q)$$

erhalten. Dann ist zunächst klar, dass die Gruppe, welche aus: $X_1 f \cdots X_r f$ durch Einführung der neuen Veränderlichen: $y_1 \cdots y_n$ entsteht, dem Punkte $y_1^0 \cdots y_n^0$ die lineare homogene Gruppe:

$$(1')\qquad \mathfrak{L}_k f = \sum_{i\nu}^{1 \cdots n} \beta_{ki\nu}\, y_i' \frac{\partial f}{\partial y_\nu'} \qquad (k = 1 \cdots r - q)$$

zuordnet. Andererseits ist aber klar (vgl. Kap. 11, S. 196 f.), dass die Glieder erster Ordnung:

$$\sum_{i\nu}^{1 \cdots n} \beta_{ki\nu}(y_i - y_i^0) \frac{\partial f}{\partial y_\nu}$$

von $Y_k^0 f$ aus den Gliedern erster Ordnung:

$$\sum_{i\nu}^{1 \cdots n} \alpha_{ki\nu}(x_i - x_i^0) \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$$

von $X_k^0 f$ durch Einführung der neuen Veränderlichen:

$$y_i = y_i^0 + \sum_1^n{}^\nu a_{i\nu}(x_\nu - x_\nu^0) \qquad (i = 1 \cdots n)$$

erhalten werden. Mithin ergiebt sich, dass die lineare homogene Gruppe (1′) aus der linearen homogenen Gruppe (1) entsteht, wenn man in (1) vermöge der linearen homogenen Transformation:

$$y_i' = \sum_1^n{}_\nu\, a_{i\nu} x_\nu' \qquad (i = 1 \cdots n)$$

die neuen Veränderlichen: $y_1' \cdots y_n'$ an Stelle der x' einführt.

Hierin liegt, dass die lineare homogene Gruppe (1) von der analytischen Darstellung der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$, das heisst von der Wahl der Veränderlichen wesentlich unabhängig ist; denn führt man vermöge einer Transformation (2) in die Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ neue Veränderliche ein, so verwandelt sich die lineare homogene Gruppe (1) in eine andere lineare homogene Gruppe (1′), welche innerhalb der allgemeinen linearen homogenen Gruppe des R_n mit (1) gleichberechtigt ist (vgl. Kap. 16, S. 280). Durch geeignete Wahl der Constanten $a_{i\nu}$ in der Transformation (2) kann man offenbar erreichen, dass die dem Punkte y_k^0 zugeordnete Gruppe (1′) jede beliebige mit (1) gleichberechtigte Gruppe wird.

Nehmen wir jetzt insbesondere an, dass die Transformation (2) der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ selbst angehört. In diesem Falle ist (1′) augenscheinlich diejenige lineare homogene Gruppe, welche die Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ dem Punkte: $y_1^0 \cdots y_n^0$ zuordnet, folglich geht (1′) aus (1) hervor, wenn man in den $\alpha_{ki\nu}(x_1^0 \cdots x_n^0)$ die x^0 durch die y^0 ersetzt. Da aber die beiden Gruppen (1) und (1′) innerhalb der allgemeinen linearen homogenen Gruppe des R_n gleichberechtigt sind, so haben wir das folgende

Theorem 109. *Jede r-gliedrige Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ des Raumes $x_1 \cdots x_n$ ordnet jedem Punkte $x_1^0 \cdots x_n^0$ von allgemeiner Lage eine ganz bestimmte lineare homogene Gruppe des R_n zu, die angiebt, in welcher Weise die Linienelemente durch diesen Punkt transformirt werden, sobald derselbe festgehalten wird. Zu solchen Punkten, welche durch Transformationen der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ in einander übergeführt werden können, gehören lineare homogene Gruppen, welche innerhalb der allgemeinen linearen homogenen Gruppe des R_n gleichberechtigt sind. Ist die Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ insbesondere transitiv, so ordnet sie allen Punkten, welche auf keiner invarianten Mannigfaltigkeit liegen, solche lineare homogene Gruppen zu, die mit einander innerhalb der allgemeinen linearen homogenen Gruppe gleichberechtigt sind.*

Das vorstehende Theorem, welches die wichtigsten der bisherigen Ergebnisse zusammenfasst, liefert nun die in der Einleitung angekündigte Classification aller Gruppen des R_n.

Betrachten wir zunächst die *transitiven* Gruppen.

Zwei transitive Gruppen G und Γ des R_n rechnen wir in dieselbe Classe, wenn die lineare homogene Gruppe, welche G irgend einem

Punkte von allgemeiner Lage zuordnet, mit derjenigen linearen homogenen Gruppe gleichberechtigt ist, welche Γ irgend einem solchen Punkte zuordnet. Im entgegengesetzten Falle rechnen wir G und Γ zu verschiedenen Classen.

Wir unterscheiden demnach ebensoviele Classen von transitiven Gruppen des R_n, als es *Typen* von Untergruppen der allgemeinen linearen homogenen Gruppe des R_n giebt (vgl. S. 281). Nachher werden wir sehen, dass jeder solchen Classe jedenfalls eine transitive Gruppe des R_n angehört.

Gehören zwei transitive Gruppen G und Γ des Raumes $x_1 \cdots x_n$ derselben Classe an, so enthalten sie offenbar in der Umgebung eines jeden Punktes $x_1^0 \cdots x_n^0$ von allgemeiner Lage gleichviele unabhängige infinitesimale Transformationen von erster Ordnung in den $x_i - x_i^0$, aus denen sich keine Transformation von zweiter oder höherer Ordnung linear ableiten lässt. Da man übrigens Γ stets durch Einführung neuer Veränderlicher so umformen kann, dass es dem Punkte $x_1^0 \cdots x_n^0$ genau dieselbe lineare homogene Gruppe zuordnet wie G, so kann man jedes Mal erreichen, dass die Glieder erster Ordnung in den betreffenden infinitesimalen Transformationen erster Ordnung für beide Gruppen dieselben sind. Ausserdem enthalten G und Γ, weil sie transitiv sind, in der Umgebung von $x_1^0 \cdots x_n^0$ je n unabhängige infinitesimale Transformationen nullter Ordnung, aus denen sich keine Transformation von erster oder höherer Ordnung linear ableiten lässt; dagegen können die Zahlen und die Anfangsglieder der infinitesimalen Transformationen von zweiter, dritter $\cdots$ Ordnung sehr gut für Γ andere sein als für G. *Hierin liegt, dass zwei transitive Gruppen des Raumes $x_1 \cdots x_n$, welche derselben Classe angehören, keineswegs gleichviele Parameter zu haben brauchen.*

Wenden wir uns jetzt zu den *intransitiven* Gruppen.

Zu jeder transitiven Gruppe des R_n gehörte ein ganz bestimmter Typus von linearen homogenen Gruppen des R_n; bei intransitiven Gruppen ist das im Allgemeinen nicht der Fall. Jede intransitive Gruppe G des R_n zerlegt diesen Raum in eine Schaar von ∞^{n-q} $(0 < q < n)$ einzeln invarianten q-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten M_q, jedoch so, dass sie die Punkte jeder einzelnen dieser M_q transitiv transformirt (vgl. Kap. 13, S. 216). Hieraus folgt, dass G allen Punkten ein und derselben M_q stets gleichberechtigte lineare homogene Gruppen zuordnet, nicht jedoch nothwendig den Punkten verschiedener M_q.

Unsere ∞^{n-q} M_q ordnen sich im Allgemeinen derart in continuirliche Schaaren, dass nur solchen Punkten, welche den M_q derselben Schaar angehören, gleichberechtigte lineare homogene Gruppen zugeordnet sind. Besteht jede solche Schaar aus gerade ∞^m M_q, so zerfällt der ganze R_n in ∞^{n-q-m} $(q+m)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten M_{q+m} und jeder

M_{q+m} ist ein ganz bestimmter Typus von linearen homogenen Gruppen zugeordnet, während verschiedenen M_{q+m} auch verschiedene Typen zugeordnet sind. So gehört zu unserer Gruppe G eine Schaar von ∞^{n-q-m} verschiedenen Typen; der Inbegriff aller dieser Typen kann natürlich durch gewisse analytische Ausdrücke mit $n-q-m$ wesentlichen willkürlichen Parametern dargestellt werden. Wir können das auch so ausdrücken: alle die betreffenden Typen gehören derselben *Typengattung* an (vgl. Kap. 22, S. 448 oben).

Zwei intransitive Gruppen des R_n rechnen wir nun zu derselben Classe, wenn zu beiden dieselbe Typengattung von linearen homogenen Gruppen des R_n gehört.

§ 150.

Die eben beschriebene Classification aller Gruppen des R_n können wir benutzen, um einen Ansatz zur Bestimmung dieser Gruppen zu geben. Wir werden das aber nur für die *transitiven* Gruppen ausführen.

Denken wir uns die Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ so gewählt, dass der Coordinatenanfang: $x_1 = 0, \cdots x_n = 0$ ein Punkt von allgemeiner Lage ist, so enthält jede transitive Gruppe des R_n in der Umgebung des Coordinatenanfangs n unabhängige infinitesimale Transformationen von nullter Ordnung in den x_i:

$$T_i^{(0)} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n),$$

aus denen sich keine Transformationen von erster oder höherer Ordnung linear ableiten lassen.

Weiter enthält jede transitive Gruppe des R_n im Allgemeinen auch gewisse infinitesimale Transformationen von erster Ordnung in den x_i; welche, das hängt nach dem Früheren von der Classe ab, der sie angehört. Da nun zu jedem Typus von linearen homogenen Gruppen des R_n eine ganz bestimmte Classe von transitiven Gruppen dieses Raumes gehört, so wollen wir irgend einen solchen Typus auswählen und uns auf die Betrachtung derjenigen transitiven Gruppen beschränken, welche der entsprechenden Classe angehören.

Die m_1-gliedrige Gruppe:

$$(3) \qquad \sum_{i\nu}^{1\cdots n} \alpha_{ji\nu} x_i' \frac{\partial f}{\partial x_\nu'}, \qquad (j = 1 \cdots m_1;\ 0 \leq m_1 \leq n^2)$$

sei ein Repräsentant des gewählten Typus von linearen homogenen Gruppen. Dann kann nach dem Früheren jede transitive Gruppe des R_n, welche zu der entsprechenden Classe gehört, durch geeignete Wahl der Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ auf eine solche Form gebracht werden, dass sie in der Umgebung von: $x_1 = 0, \cdots x_n = 0$ die folgenden m_1 unabhängigen infinitesimalen Transformationen erster Ordnung enthält:

$$T_k^{(1)} = \sum_1^n \left\{ \sum_1^n{}^i \alpha_{ji\nu} x_i + \cdots \right\} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \qquad (j = 1 \cdots m_1).$$

Diese m_1 infinitesimalen Transformationen $T_j^{(1)}$ sind so beschaffen, dass sich aus ihnen keine Transformation von zweiter oder höherer Ordnung linear ableiten lässt und dass andererseits in jeder infinitesimalen Transformation erster Ordnung der Gruppe die Glieder erster Ordnung sich aus den Gliedern erster Ordnung von $T_1^{(1)} \cdots T_{m_1}^{(1)}$ linear ableiten lassen.

Wir sehen übrigens schon jetzt, dass es unter allen Umständen wenigstens eine transitive Gruppe giebt, welche der von uns gewählten Classe angehört; *eine* solche Gruppe lässt sich nämlich sofort angeben, die $(n + m_1)$-gliedrige:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}, \qquad \sum_{i\nu}^{1 \cdots n} \alpha_{ji\nu} x_i \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \qquad (j = 1 \cdots m_1);$$

sie wird durch Weglassung aller Glieder erster bezüglich zweiter und höherer Ordnung aus den P_i und den $T_j^{(1)}$ erhalten.

Ausser den bereits angegebenen infinitesimalen Transformationen von nullter und erster Ordnung kann jede Gruppe, welche unserer Classe angehört, in der Umgebung von: $x_1 = 0, \cdots x_n = 0$ noch eine gewisse Anzahl von unabhängigen infinitesimalen Transformationen zweiter Ordnung enthalten, aus denen sich keine Transformation von dritter oder höherer Ordnung linear ableiten lässt, ferner eine gewisse Anzahl von infinitesimalen Transformationen dritter, vierter $\cdots$ Ordnung; immer aber giebt es nach Theor. 29, S. 192 eine der Gruppe eigenthümliche ganze Zahl $s \geqq 1$ von solcher Beschaffenheit, dass die Gruppe infinitesimale Transformationen zweiter, dritter, $\cdots$ s-ter Ordnung enthält, dagegen keine Transformationen $(s + 1)$-ter oder höherer Ordnung.*) Hieraus folgt, dass der Inbegriff aller Gruppen unserer Classe in eine Reihe von Unterclassen zerfällt: jedem Werthe von s entspricht eine Unterclasse.

Da es unendlich viele ganze Zahlen s giebt, welche $\geqq 1$ sind, so ist die Anzahl der eben definirten Unterclassen unendlich gross, doch braucht keineswegs jede Unterclasse wirklich durch Gruppen vertreten zu sein. Wir werden zeigen, wie sich für jeden einzelnen Werth von s

*) Was wir in Theorem 29 mit s bezeichneten, nennen wir hier $s + 1$!

entscheiden lässt, ob Gruppen in die betreffende Unterclasse gehören; dabei handelt es sich im Grunde nur um solche Zahlen s, die grösser sind als 1, denn dass die Unterclasse: $s = 1$ Gruppen enthält, wissen wir bereits.

Es sei $s_0 \geqq 1$ eine beliebig gewählte aber bestimmte ganze Zahl; wir fragen, ob es in unserer Classe Gruppen giebt, welche der Unterclasse: $s = s_0$ angehören.

Giebt es derartige Gruppen, so möge etwa G eine sein. Lassen wir dann für $k = 0, 1, 2 \cdots s_0$ aus den infinitesimalen Transformationen k-ter Ordnung von G alle Glieder $(k + 1)$-ter und höherer Ordnung weg, so erhalten wir offenbar unabhängige infinitesimale Transformationen, die eine gewisse Gruppe Γ erzeugen und zwar eine Gruppe, welche ebenso wie G der Unterclasse: $s = s_0$ angehört.

Hieraus folgt, dass die Unterclasse: $s = s_0$, sobald sie überhaupt Gruppen umfasst, mindestens eine Gruppe Γ von der folgenden besonderen Beschaffenheit enthält: Γ ist erzeugt von dem $n + m_1$ infinitesimalen Transformationen nullter und erster Ordnung:

$$\mathsf{T}_i^{(0)} = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \mathsf{T}_j^{(1)} = \sum_{i\nu}^{1 \cdots n} \alpha_{ji\nu}\, x_i \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$$
$$(i = 1 \cdots n;\; j = 1 \cdots m_1)$$

und ausserdem von m_2 unabhängigen infinitesimalen Transformationen zweiter, von m_3 unabhängigen dritter, $\cdots$ von m_{s_0} unabhängigen s_0-ter Ordnung; die allgemeine Form dieser Transformationen ist:

$$\mathsf{T}_{i_k}^{(k)} = \sum_{1}^{n}{}_{\nu}\, \xi_{i_k,\nu}^{(k)}(x_1 \cdots x_n) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$$
$$(k = 2, 3 \cdots s_0;\; i_k = 1, 2 \cdots m_k),$$

wo die $\xi^{(k)}$ *ganze homogene Functionen k-ter Ordnung ihrer Argumente* sind. Zugleich ergiebt sich, dass jeder Gruppe G, welche der Unterclasse $s = s_0$ angehört, eine ganz bestimmte Gruppe Γ von der eben geschilderten Beschaffenheit zugeordnet ist.

Es lässt sich durch ausführbare Operationen entscheiden, ob es eine Gruppe Γ giebt, welche die eben beschriebenen Eigenschaften besitzt; es lassen sich sogar alle etwa vorhandenen Gruppen Γ durch ausführbare Operationen bestimmen.

In der That, zunächst ist die Anzahl aller möglichen Systeme: $m_2, m_3, \cdots m_{s_0}$ endlich. Hat man ferner ein solches System gewählt, so kann man stets durch algebraische Operationen in allgemeinster Weise $m_2 + \cdots + m_{s_0}$ unabhängige infinitesimale Transformationen:

$$\mathsf{T}_{i_k}^{(k)} \qquad (k=2,3\cdots s_0;\ i_k=1,2\cdots m_k)$$

bestimmen, welche zusammen mit den $\mathsf{T}_i^{(0)}$, $\mathsf{T}_j^{(1)}$ eine $(n+m_1+\cdots+m_{s_0})$-gliedrige Gruppe erzeugen. Dazu braucht man nämlich nur die unbekannten Coefficienten in den Functionen $\xi^{(k)}$ in allgemeinster Weise derart zu bestimmen, dass jede Transformation:

$$\left(\mathsf{T}_{i_k}^{(k)}\,\mathsf{T}_{j_\mu}^{(\mu)}\right) \qquad (k,\mu=0,1\cdots s_0)$$

sich aus:

$$\mathsf{T}_\pi^{(k+\mu-1)} \qquad (\pi=1\cdots m_{k+\mu-1})$$

linear ableiten lässt, sobald $k+\mu-1 \leqq s_0$, und identisch verschwindet, sobald $k+\mu-1 > s_0$. Es ist klar, dass man dabei für die unbekannten Coefficienten nur algebraische Gleichungen erhält.

Im Vorstehenden ist gezeigt, dass sich für jede *einzelne* ganze Zahl $s_0 \geqq 1$ durch ausführbare Operationen feststellen lässt, ob es in unserer Classe Gruppen giebt, welche der Unterclasse: $s=s_0$ angehören. Wir besitzen aber keine allgemeine Methode, die das entsprechende für *alle* ganzen Zahlen $s>1$ *mit einem Schlage* leistet. Nur in speciellen Fällen, bei besonderer Beschaffenheit der linearen homogenen Gruppe (3) gelingt es uns zu erkennen, wieviele und welche von den unendlich vielen Unterclassen durch Gruppen vertreten sind. Dabei kommt es vor, dass für die Zahl s ein Maximum existirt, dass also nur solche Unterclassen, deren Zahl s ein gewisses Maximum nicht übersteigt, wirklich Gruppen enthalten (vergl. das Kapitel 29); jedoch haben wir auch für die Existenz eines solchen Maximums kein allgemeines Kriterium. Nichtsdestoweniger glauben wir, dass es möglich ist, solche Kriterien aufzustellen.

Wir werden uns in Folge dessen darauf beschränken, auseinanderzusetzen, wie alle Gruppen unsrer Classe gefunden werden können, welche in einer bestimmten Unterclasse, etwa in der: $s=s_0 \geqq 1$ enthalten sind.

Nach S. 607 gehört zu jeder Gruppe der Unterclasse: $s=s_0$ eine ganz bestimmte Gruppe Γ derselben Unterclasse mit infinitesimalen Transformationen, die eine besondere damals beschriebene Form haben. Da nun, wie wir wissen, alle derartigen Gruppen Γ, welche der Unterclasse: $s=s_0$ angehören, durch ausführbare Operationen bestimmt werden können, so brauchen wir blos noch zu zeigen, in welcher Weise diejenigen Gruppen der Unterclasse: $s=s_0$ gefunden werden, zu denen irgend eine beliebig gewählte der betreffenden Gruppen Γ gehört.

Es seien:

$$(4)\quad \begin{cases} \mathsf{T}_i^{(0)} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \mathsf{T}_j^{(1)} = \sum\limits_{\nu\pi}^{1\cdots n} \alpha_{j\nu\pi} x_\nu \dfrac{\partial f}{\partial x_\pi} = \sum\limits_1^n {}^{\pi}\, \xi_{j\pi}^{(1)} (x_1 \cdots x_n) \dfrac{\partial f}{\partial x_\pi} \\ \mathsf{T}_{i_k}^{(k)} = \sum\limits_1^n {}^{\nu}\, \xi_{i_k,\nu}^{(k)} (x_1 \cdots x_n) \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x_\nu} \end{cases}$$

$$(i = 1 \cdots n;\; j = 1 \cdots m_1;\; i_k = 1 \cdots m_k;\; k = 2 \cdots s_0)$$

die $n + m_1 + \cdots + m_{s_0}$ unabhängigen infinitesimalen Transformationen irgend einer unter den besprochenen Gruppen Γ, und die Zusammensetzung dieser Gruppe sei durch die Relationen:

$$(5)\qquad (\mathsf{T}_{i_k}^{(k)} \mathsf{T}_{j_\mu}^{(\mu)}) = \sum_1^{m_{k+\mu-1}} {}^{\pi}\, c_{i_k j_\mu \pi} \mathsf{T}_\pi^{(k+\mu-1)}$$

$$(k, \mu = 0, 1 \cdots s_0;\; i_k = 1 \cdots m_k;\; j_\mu = 1 \cdots m_\mu;\; m_0 = n)$$

bestimmt, in denen die c auf der rechten Seite als bekannt zu betrachten sind und insbesondere verschwinden, sobald $k + \mu - 1$ die Zahl s_0 übersteigt.

Jede in die Unterclasse: $s = s_0$ gehörige Gruppe $\mathfrak{G}$, welcher die Gruppe (4) zugeordnet ist, enthält $n + m_1 + \cdots + m_{s_0}$ Parameter und ist von ebensovielen unabhängigen infinitesimalen Transformationen erzeugt; diese Transformationen haben die Form:

$$(6)\qquad T_i^{(0)} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \cdots, \qquad T_{i_k}^{(k)} = \sum_1^n {}^{\nu}\, \xi_{i_k,\nu}^{(k)} (x_1 \cdots x_n) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \cdots$$

$$(i = 1 \cdots n;\; i_k = 1 \cdots m_k;\; k = 1 \cdots s_0),$$

wo überall die weggelassenen Glieder von höherer Ordnung sind als die geschriebenen. *Es handelt sich also um nichts anderes als darum, alle Gruppen zu bestimmen, deren infinitesimale Transformationen die Form* (6) *haben.*

Die Zusammensetzung einer Gruppe mit den infinitesimalen Transformationen (6) wird offenbar durch Relationen von der Form:

$$(7)\quad \begin{cases} (T_{i_k}^{(k)} T_{j_\mu}^{(\mu)}) = \sum\limits_1^{m_{k+\mu-1}} {}^{\pi}\, c_{i_k j_\mu \pi}\, T_\pi^{(k+\mu-1)} + \\ \qquad + \sum\limits_{k+\mu}^{s_0} {}^{\tau} \sum\limits_{\pi_\tau}^{1\cdots m_\tau} C_{i_k j_\mu \pi_\tau} T_{\pi_\tau}^{(\tau)} \end{cases}$$

$$(k, \mu = 0, 1 \cdots s_0;\; i_k = 1 \cdots m_k;\; j_\mu = 1 \cdots m_\mu;\; m_0 = n)$$

dargestellt. Hier sind die C gewisse Constanten, welche den bekannten aus der Jacobischen Identität abgeleiteten Relationen genügen (vgl. Kap. 9, S. 169 f.).

Wir denken uns die betreffenden Relationen zwischen den C aufgestellt und das allgemeinste System von C berechnet, welches ihnen genügt. Da die Relationen sämmtlich algebraisch sind, so erfordert diese Rechnung blos ausführbare Operationen. Die Form der Relationen (7) lässt sich übrigens dadurch vereinfachen, dass man jede infinitesimale Transformation k-ter Ordnung: $T_{i_k}^{(k)}$ durch eine andere Transformation k-ter Ordnung:

$$(8) \qquad \mathfrak{T}_{i_k}^{(k)} = T_{i_k}^{(k)} + \sum_{k+1}^{s_0} \sum_{\pi_\tau}^{1 \cdots m_\tau} \mathsf{P}_{i_k \pi_\tau} T_{\pi_\tau}^{(\tau)}$$
$$(i_k = 1 \cdots m_k;\ k = 0, 1 \cdots s_0)$$

ersetzt, unter den P irgend welche Zahlgrössen verstanden. Führt man nämlich an Stelle der T die $\mathfrak{T}$ ein, so erhält man an Stelle von (7) Relationen von der Form:

$$(7') \qquad \left\{ \begin{aligned} (\mathfrak{T}_{i_k}^{(k)} \mathfrak{T}_{j_\mu}^{(\mu)}) &= \sum_1^{m_{k+\mu-1}} {}_\pi\, c_{i_k j_\mu \pi} \mathfrak{T}_\pi^{(k+\mu-1)} + \\ &+ \sum_{k+\mu}^{s_0} {}_\tau \sum_{\pi_\tau}^{1 \cdots m_\tau} \mathfrak{C}_{i_k j_\mu \pi_\tau} \mathfrak{T}_{\pi_\tau}^{(\tau)}, \end{aligned} \right.$$

wo zwischen den $\mathfrak{C}$ und den C ein leicht angebbarer Zusammenhang besteht. Man wird nun über die P, welche ja vollkommen willkürlich sind, so verfügen, dass die Coefficienten $\mathfrak{C}$ möglichst einfache Zahlenwerthe erhalten; dadurch erzielt man eine gewisse Vereinfachung.

Sind in der Gleichung (8) alle P fest gewählt, so sagen wir zuweilen, dass die infinitesimale Transformation k-ter Ordnung: $\mathfrak{T}_{i_k}^{(k)}$ vollständig *normirt* ist.

Kennt man alle Systeme von C, welche den vorhin erwähnten Relationen genügen, so kennt man damit zugleich alle Zusammensetzungen, welche eine Gruppe von der Form (6) möglicherweise haben kann. Es fragt sich nur noch, ob es für jede der so definirten Zusammensetzungen Gruppen von der Form (6) giebt, welche gerade die betreffende Zusammensetzung haben, und wie diese Gruppen gefunden werden können, falls sie existiren.

Denken wir uns also in den Gleichungen (7) unter den C irgend ein Werthsystem, welches die bewussten Relationen befriedigt, sodass die Gleichungen (7) eine mögliche Zusammensetzung $(n + m_1 + \cdots + m_{s_0})$-gliedriger Gruppen darstellen (vgl. S. 297).

Zunächst erkennen wir leicht: giebt es überhaupt Gruppen von der Form (6), welche die Zusammensetzung (7) haben, so sind sie alle mit einander ähnlich, sie gehören alle demselben Typus von transitiven Gruppen des Raumes $x_1 \cdots x_n$ an (Kap. 22, S. 434).

In der That, haben wir zwei Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$, welche beide die Form (6) und die Zusammensetzung (7) besitzen, so sind diese Gruppen augenscheinlich durch die Wahl ihrer infinitesimalen Transformationen derart holoedrisch isomorph auf einander bezogen, dass der grössten Untergruppe von $\mathfrak{G}$, welche den Punkt: $x_1 = 0, \cdots x_n = 0$ invariant lässt, die grösste Untergruppe von $\mathfrak{G}'$ entspricht, welche diesen Punkt festhält. Da nun der Punkt: $x_1 = 0, \cdots x_n = 0$ unter den gemachten Voraussetzungen ein Punkt von allgemeiner Lage ist, so sind die beiden *transitiven* Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ nach Theorem 76, S. 425 mit einander ähnlich. Das aber war zu beweisen.

Weiter werden wir zeigen, dass es immer Gruppen von der Form (6) giebt, welche die Zusammensetzung (7) besitzen.

Wir bestimmen zuvörderst in einem Raume R_N von $N = n + m_1 + \cdots + m_{s_0}$ Dimensionen eine einfach transitive Gruppe:

$$W_i f, \quad W_{i_k}^{(k)} f \quad (i = 1 \cdots n;\ k = 1 \cdots s_0;\ i_k = 1 \cdots m_k) \tag{9}$$

von der Zusammensetzung (7); das ist nach Kap. 22, S. 429—432 immer möglich und erfordert höchstens Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Sodann wählen wir irgend eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ des R_N aus, welche die $(N - n)$-gliedrige Untergruppe:

$$W_{i_k}^{(k)} f \quad (k = 1 \cdots s_0;\ i_k = 1 \cdots m_k) \tag{10}$$

der Gruppe (9) gestattet, aber keine grössere Untergruppe; diese Eigenschaft besitzt ja jede charakteristische Mannigfaltigkeit (S. 101) des $(N - n)$-gliedrigen vollständigen Systems:

$$W_{i_k}^{(k)} f = 0 \quad (k = 1 \cdots s_0;\ i_k = 1 \cdots m_k).$$

Bei den ∞^N Transformationen der Gruppe (9) nimmt $\mathfrak{M}$ gerade ∞^n verschiedene Lagen an, deren Inbegriff eine invariante Schaar bildet. Charakterisiren wir die einzelnen Mannigfaltigkeiten dieser Schaar durch n Veränderliche $x_1 \cdots x_n$, so erhalten wir in $x_1 \cdots x_n$ eine transitive Gruppe:

$$X_i^{(0)} f, \quad X_{i_k}^{(k)} f \quad (i = 1 \cdots n;\ k = 1 \cdots s_0;\ i_k = 1 \cdots m_k), \tag{11}$$

die angiebt, in welcher Weise die Mannigfaltigkeiten unsrer invarianten Schaar von der Gruppe (9) unter einander vertauscht werden. Diese neue Gruppe ist mit der Gruppe (9) isomorph, so dass Relationen von der Form:

$$(X_{i_k}^{(k)} X_{j_\mu}^{(\mu)}) = \sum_1^{m_{k+\mu-1}} {}_{\pi}\, c_{i_k j_\mu \pi} X_\pi^{(k+\mu-1)} f + \sum_{k+\mu}^{s_0} \sum_{\pi_\tau}^{1 \cdots m_\tau} C_{i_k j_\mu \pi_\tau} X_{\pi_\tau}^{(\tau)} f \tag{7''}$$

$$(k, \mu = 0, 1 \cdots s_0;\ i_k = 1 \cdots m_k;\ j_\mu = 1 \cdots m_\mu;\ m_0 = n)$$

bestehen (vgl. Theorem 85, S. 483).

Es lässt sich leicht nachweisen, dass die infinitesimalen Transformationen der Gruppe (11) bei geeigneter Wahl der Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ die Form (6) annehmen.

Um den betreffenden Nachweis zu führen, denken wir uns vor allen Dingen die Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ so gewählt, dass $\mathfrak{M}$ die Coordinaten: $x_1 = 0, \cdots x_n = 0$ erhält. Dann sind offenbar alle infinitesimalen Transformationen:

$$X_{i_k}^{(k)} f \quad (k = 1 \cdots s_0;\ i_k = 1 \cdots m_k)$$

in den x_ν von erster oder höherer Ordnung, dagegen sind: $X_1{}^0 f \cdots X_n{}^0 f$ unabhängige infinitesimale Transformationen nullter Ordnung, aus denen sich keine Transformation von erster oder höherer Ordnung linear ableiten lässt; das letztere folgt aus der Transitivität der Gruppe (11). Es ist somit klar, dass wir unbeschadet unserer eben gemachten Voraussetzung die Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ so wählen können, dass $X_1{}^0 f \cdots X_n{}^0 f$ die Form:

$$X_i^{(0)} f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \cdots \quad (i = 1 \cdots n)$$

bekommen.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir zunächst die Anfangsglieder in den Reihenentwickelungen der m_1 infinitesimalen Transformationen $X_j^{(1)} f$ bestimmen.

Wir haben:

$$X_j^{(1)} f = \sum_1^n {}^\nu\, \xi_{j\nu}^{(1)} (x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \cdots \quad (j = 1 \cdots m_1),$$

unter den $\xi^{(1)}$ lineare homogene Functionen ihrer Argumente verstanden. Setzen wir diesen Ausdruck in die n Relationen:

$$(X_i^{(0)} X_j^{(1)}) = \sum_1^n {}^\pi\, c_{ij\pi} X_\pi^{(0)} f + \sum_1^{s_0} {}^\tau \sum_{\pi_\tau}^{1 \cdots m_\tau} C_{ij\pi_\tau} X_{\pi_\tau}^{(\tau)} f \quad (i = 1 \cdots n)$$

ein und vergleichen wir auf beiden Seiten die Glieder nullter Ordnung, so kommt:

$$\sum_1^n {}^\nu \frac{\partial \xi_{j\nu}^{(1)}}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} = \sum_1^n {}^\pi\, c_{ij\pi} \frac{\partial f}{\partial x_\pi} \quad (i = 1 \cdots n),$$

also sind alle Differentialquotienten erster Ordnung von $\xi_{j\nu}^{(1)}$ vollständig bestimmt und wegen der bekannten Gleichung:

$$\sum_1^n {}^i\, x_i \frac{\partial \xi_{j\nu}^{(1)}}{\partial x_i} = \xi_{j\nu}^{(1)}$$

auch die $\xi_{j\nu}^{(1)}$ selbst. Da nun $\xi_{j\nu}^{(1)}$ offenbar allen Differentialgleichungen genügt, welche wir soeben gefunden haben, so ergiebt sich: $\zeta_{j\nu}^{(1)} = \xi_{j\nu}^{(1)}$ und mithin:

$$X_j^{(1)}f = \sum_1^n {}_\nu\, \xi_{j\nu}^{(1)}(x_1 \cdots x_n) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \cdots \quad (j = 1 \cdots m_1).$$

In derselben Weise finden wir überhaupt:

$$X_{i_k}^{(k)}f = \sum_1^n {}_\nu\, \xi_{i_k\nu}^{(k)}(x_1 \cdots x_n) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \cdots \quad (k = 1 \cdots s_0;\ i_k = 1 \cdots m_k),$$

mit andern Worten: wir finden, dass die infinitesimalen Transformationen der Gruppe (11) die Form (6) haben. Hierin liegt offenbar, dass die N infinitesimalen Transformationen (11) von einander unabhängig sind, dass also die Gruppe (11) N-gliedrig und mit der Gruppe (9) gleichzusammengesetzt ist.

Da die Gruppe (11), wie wir soeben gesehen haben, N-gliedrig ist, so kann die Gruppe:

(9) $$W_i^{(0)}f,\ W_{i_k}^{(k)}f \quad (i = 1 \cdots n;\ k = 1 \cdots s_0;\ i_k = 1 \cdots m_k)$$

keine invariante Untergruppe enthalten, welche der Gruppe:

(10) $$W_{i_k}^{(k)}f \quad (k = 1 \cdots s_0;\ i_k = 1 \cdots m_k)$$

angehört (Theorem 85, S. 483). Man kann aber auch direkt erkennen, dass es keine derartige invariante Untergruppe der Gruppe (9) giebt; auf diese Weise erhält man mit Berücksichtigung des Theorems 85 einen neuen Beweis dafür, dass die Gruppe (11) N wesentliche Parameter hat.

Jede invariante Untergruppe $\mathfrak{g}$ von (9), welche der Gruppe (10) angehört, enthält offenbar eine infinitesimale Transformation:

$$\mathfrak{W}f = \sum_1^{m_p} {}_\tau\, \varrho_\tau W_\tau^{(p)}f + \sum_{p+1}^{s_0} {}_k \sum_{\tau_k}^{1 \cdots m_k} \sigma_{\tau_k} W_{\tau_k}^{(k)}f \quad (p \geqq 1),$$

in der nicht alle m_p Grössen ϱ_τ verschwinden. Zugleich mit $\mathfrak{W}f$ kommen in $\mathfrak{g}$ auch die n infinitesimalen Transformationen:

$$(W_1{}^0\mathfrak{W}) \cdots (W_n{}^0\mathfrak{W})$$

vor; es tritt daher, wie man aus der Zusammensetzung (7) der Gruppe (9) ersieht, in $\mathfrak{g}$ sicher eine Transformation von der Form:

$$\mathfrak{W}'f = \sum_1^{m_{p-1}} {}_\tau\, \varrho_\tau' W_\tau^{(p-1)}f + \sum_p^{s_0} {}_k \sum_{\tau_k}^{1 \cdots m_k} \sigma_{\tau_k}' W_{\tau_k}^{(k)}f$$

auf, in welcher nicht alle m_{p-1} Grössen ϱ_τ' gleich Null sind. Auf diese Weise erkennt man schliesslich, dass $\mathfrak{g}$ eine infinitesimale Transformation enthalten muss, welche der Gruppe (10) nicht angehört; das aber widerspricht der Voraussetzung, dass $\mathfrak{g}$ in der Gruppe (10) enthalten sein soll, also giebt es keine Gruppe $\mathfrak{g}$ von der angenommenen Beschaffenheit.

Die bisherigen Entwickelungen liefern das

Theorem 110.*) *Es sei in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ eine transitive Gruppe vorgelegt, welche in der Umgebung des Punktes von allgemeiner Lage: $x_1 = 0, \cdots x_n = 0$ folgende infinitesimale Transformationen enthält: Erstens n unabhängige Transformationen nullter Ordnung von der Form:*

$$\mathsf{T}_1^{(0)} = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \; \cdots \; \mathsf{T}_n^{(0)} = \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

zweitens für $k = 1, 2 \cdots s$ je $m_k > 0$ unabhängige Transformationen k-ter Ordnung von der Form:

$$\mathsf{T}_{i_k}^{(k)} = \sum_1^n {}^\nu \, \xi_{i_k \nu}^{(k)}(x_1 \cdots x_n) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \qquad (k = 1 \cdots s; \; i_k = 1 \cdots m_k),$$

wo die $\xi^{(k)}$ ganze homogene Functionen k-ter Ordnung bezeichnen. Die Zusammensetzung der Gruppe sei durch die Relationen:

$$(\mathsf{T}_{i_k}^{(k)} \mathsf{T}_{j_\mu}^{(\mu)}) = \sum_1^{m_{k+\mu-1}} {}^\pi \, c_{i_k j_\mu \pi} \mathsf{T}_\pi^{(k+\mu-1)}$$
$$(k, \mu = 0, 1 \cdots s; \; i_k = 1 \cdots m_k; \; j_\mu = 1 \cdots m_\mu; \; m_0 = n)$$

bestimmt, wo die c auf der rechten Seite alle verschwinden, sobald $k + \mu - 1$ grösser ist als s. Dann findet man folgendermassen alle $(n + m_1 + \cdots + m_s)$-gliedrigen Gruppen des Raumes $x_1 \cdots x_n$, deren infinitesimale Transformationen in der Umgebung von: $x_1 = 0, \cdots x_n = 0$ die Form:

$$(6) \qquad T_i^{(0)} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \cdots, \quad T_{i_k}^{(k)} = \sum_1^n {}^\nu \, \xi_{i_k \nu}^{(k)}(x_1 \cdots x_n) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \cdots$$
$$(i = 1 \cdots n; \; k = 1 \cdots s; \; i_k = 1 \cdots m_k)$$

besitzen:

Man bestimmt die Constanten C in den Gleichungen:

$$(7) \quad \begin{cases} (T_{i_k}^{(k)} T_{j_\mu}^{(\mu)}) = \sum_1^{m_{k+\mu-1}} {}^\pi \, c_{i_k j_\mu \pi} T_\pi^{(k+\mu-1)} + \\ \qquad + \sum_{k+\mu}^{s} {}^\tau \sum_{\pi_\tau}^{1 \cdots m_\tau} C_{i_k j_\mu \pi_\tau} T_{\pi_\tau}^{(\tau)} \end{cases}$$
$$(k, \mu = 0, 1 \cdots s; \; i_k = 1 \cdots m_k; \; j_\mu = 1 \cdots m_\mu; \; m_0 = n)$$

in allgemeinster Weise derart, dass die aus der Jacobischen Identität folgenden Relationen befriedigt sind. Ist das geschehen, so stellen die Gleichungen (7) *alle Zusammensetzungen dar, welche die gesuchten Gruppen haben können. Jeder ein-*

*) Lie, Archiv for Math. Bd. X, S. 381—389. 1885.

zelnen unter diesen Zusammensetzungen entsprechen Gruppen von der Form (6), *die alle mit einander ähnlich sind und die jedenfalls durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen gefunden werden können.*

§ 151.

Das Problem der Bestimmung aller transitiven Gruppen des R_n haben wir in den vorhergehenden Paragraphen auf die folgenden vier Probleme zurückgeführt:

𝔄. *Es sollen alle Typen von linearen homogenen Gruppen in n Veränderlichen gefunden werden.*

Hat man dieses Problem erledigt, so kennt man in der Umgebung eines jeden Punktes von allgemeiner Lage die möglichen Formen der Anfangsglieder in allen infinitesimalen Transformationen erster Ordnung, welche in einer transitiven Gruppe des R_n auftreten können.

𝔅. *Gegeben sind in der Umgebung eines Punktes von allgemeiner Lage die Anfangsglieder der infinitesimalen Transformationen erster Ordnung einer transitiven Gruppe des R_n; es sollen die möglichen Formen der Anfangsglieder in den infinitesimalen Transformationen zweiter und höherer Ordnung bestimmt werden.*

ℭ. *Es sollen alle Zusammensetzungen bestimmt werden, die eine transitive Gruppe des R_n haben kann, welche in der Umgebung eines Punktes von allgemeiner Lage gewisse infinitesimale Transformationen von erster, zweiter $\cdots$ s-ter Ordnung mit gegebenen Anfangsgliedern enthält, welche dagegen keine Transformationen von $(s+1)$-ter oder höherer Ordnung enthält.*

𝔇. *Gegeben ist eine der im vorigen Problem gesuchten Zusammensetzungen. Es soll eine transitive Gruppe aufgestellt werden, welche diese Zusammensetzung besitzt und deren infinitesimale Transformationen erster $\cdots$ s-ter Ordnung die im vorigen Probleme gegebenen Formen haben.*

Kennt man *eine* Gruppe von der im letzten Probleme verlangten Beschaffenheit, so kennt man *alle*, denn dieselben sind ja nach Theorem 110 mit einander ähnlich.

Die Erledigung des ersten unter diesen vier Problemen verlangt nur ausführbare, genauer gesagt: nur algebraische Operationen (vgl. Kap. 12, S. 210 und Kap. 23, S. 494 ff.). Dagegen ist es uns nicht gelungen, das Problem 𝔅 auf eine endliche Anzahl ausführbarer Operationen zurückzuführen. Das Problem ℭ erfordert wieder nur algebraische Operationen. Das Problem 𝔇 endlich kann, wie wir im vorigen Paragraphen gezeigt haben, jedenfalls durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen erledigt werden.

Wir wollen jetzt einen besonderen Fall betrachten, der eine eigenthümliche Vereinfachung darbietet, und wollen denselben im Einzelnen durchführen.

Die $(n+m_1+\cdots+m_s)$-gliedrige Gruppe:

$$(12)\qquad \mathsf{T}_i^{(0)}=\frac{\partial f}{\partial x_i},\quad \mathsf{T}_{i_k}^{(k)}=\sum_1^n{}^{\nu}\,\xi_{i_k\nu}^{(k)}(x_1\cdots x_n)\cdot\frac{\partial f}{\partial x_\nu}$$
$$(i=1\cdots n;\ k=1\cdots s;\ i_k=1\cdots m_k),$$

welche wir uns in Theorem 110, S. 614 gegeben dachten, möge unter ihren infinitesimalen Transformationen erster Ordnung:

$$e_1\mathsf{T}_1^{(1)}+\cdots+e_{m_1}\mathsf{T}_{m_1}^{(1)}$$

insbesondere eine von der Form:

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\cdots+x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

enthalten, und zwar möge etwa $\mathsf{T}_{m_1}^{(1)}$ diese Form haben. Wir werden zeigen, dass es unter dieser Voraussetzung immer möglich ist, alle $(n+m_1+\cdots+m_s)$-gliedrigen transitiven Gruppen des Raumes zu bestimmen, deren infinitesimale Transformationen in der Umgebung des Punktes von allgemeiner Lage: $x_1=0,\cdots x_n=0$ die Form haben:

$$(12')\qquad T_i^{(0)}=\frac{\partial f}{\partial x_i}+\cdots,\quad T_{i_k}^{(k)}=\sum_1^n{}^{\nu}\,\xi_{i_k\nu}^{(k)}(x_1\cdots x_n)\cdot\frac{\partial f}{\partial x_\nu}+\cdots$$
$$(i=1\cdots n;\ k=1\cdots s;\ i_k=1\cdots m_k).$$

Für:

$$T_{m_1}^{(1)}=\sum_1^n{}^{\nu}\,x_\nu\frac{\partial f}{\partial x_\nu}+\cdots$$

schreiben wir U, eine Bezeichnungsweise, die wir auch bei späteren Gelegenheiten anwenden werden.

Zunächst ist klar, dass zwischen U und den infinitesimalen Transformationen s-ter Ordnung einer Gruppe von der Form (12′) die folgenden Relationen bestehen:

$$(T_\pi^{(s)}U)=(1-s)\,T_\pi^{(s)}\qquad(\pi=1\cdots m_s).$$

Desgleichen bestehen zwischen U und den infinitesimalen Transformationen $(s-1)$-ter Ordnung Relationen von der Form:

$$(T_j^{(s-1)}U)=(2-s)\,T_j^{(s-1)}+\sum_1^{m_s}{}^{\pi}\,K_{j\pi}T_\pi^{(s)}\qquad(j=1\cdots m_{s-1}),$$

wo die K unbekannte Constanten sind. Um diese Relationen zu vereinfachen, setzen wir (vgl. S. 610):

$$\mathfrak{T}_j^{(s-1)} = T_j^{(s-1)} + \sum_1^{m_s}{}_\pi \mathsf{P}_{j\pi} T_\pi^{(s)} \quad (j = 1 \cdots m_{s-1})$$

und finden:

$$(\mathfrak{T}_j^{(s-1)} U) = (2 - s)\mathfrak{T}_j^{(s-1)} + \sum_1^{m_s}{}_\pi (K_{j\pi} + (1 - s - 2 + s)\mathsf{P}_{j\pi}) T_{j\pi}^{(s)},$$

also wenn wir die P in geeigneter Weise wählen:

$$(\mathfrak{T}_j^{(s-1)} U) = (2 - s)\mathfrak{T}_j^{(s-1)} \quad (j = 1 \cdots m_{s-1}).$$

Damit sind die infinitesimalen Transformationen $(s - 1)$-ter Ordnung der Gruppe (12′) *normirt.*

In genau derselben Weise können wir die Transformationen $(s - 2)$-ter Ordnung normiren, indem wir setzen:

$$\mathfrak{T}_j^{(s-2)} = T_j^{(s-2)} + \sum_1^{m_{s-1}}{}_\pi \mathsf{P}'_{j\pi} \mathfrak{T}_\pi^{(s-1)} + \sum_1^{m_s}{}_\pi \mathsf{P}''_{j\pi} T_\pi^{(s)}$$
$$(j = 1 \cdots m_{s-2})$$

und über die P' und P'' geeignet verfügen; auf diese Weise kommt:

$$(\mathfrak{T}_j^{(s-2)} U) = (3 - s)\mathfrak{T}_j^{(s-2)} \quad (j = 1 \cdots m_{s-2}).$$

Indem wir so fortfahren, erhalten wir schliesslich, wenn wir überall wieder T für $\mathfrak{T}$ schreiben:

$$(13) \qquad (T_{i_k}^{(k)} U) = (1 - k) T_{i_k}^{(k)} \quad (k = 0, 1 \cdots s;\ i_k = 1 \cdots m_k;\ m_0 = n).$$

Damit sind alle infinitesimalen Transformationen nullter, erster bis s-ter Ordnung normirt, *ausgenommen U selbst.*

Nunmehr erinnern wir uns, dass wegen der Zusammensetzung der Gruppe (12′) zwischen den T Relationen von der Form:

$$(14) \qquad \begin{cases} (T_{i_k}^{(k)} T_{j_\mu}^{(\mu)}) = \sum_1^{m_{k+\mu-1}}{}_\pi c_{i_k j_\mu \pi} T_\pi^{(k+\mu-1)} + \\ \qquad + \sum_{k+\mu}^{s}{}_\tau \sum_{\pi_\tau}^{1 \cdots m_\tau} C_{i_k j_\mu \pi_\tau} T_{\pi_\tau}^{(\tau)} \end{cases}$$
$$(k, \mu = 0, 1 \cdots s;\ i_k = 1 \cdots m_k;\ j_\mu = 1 \cdots m_\mu;\ m_0 = n)$$

bestehen, in denen die c überall verschwinden, sobald $k + \mu - 1 > s$. Um hier die unbekannten Constanten C zu bestimmen, bilden wir die Jacobische Identität:

$$((T_{i_k}^{(k)} T_{j_\mu}^{(\mu)}) U) + ((T_{j_\mu}^{(\mu)} U) T_{i_k}^{(k)}) + ((U T_{i_k}^{(k)}) T_{j_\mu}^{(\mu)}) = 0,$$

welche wegen (13) offenbar die Form annimmt:

$$((T_{i_k}^{(k)} T_{j_\mu}^{(\mu)}) U) = (2 - k - \mu)(T_{i_k}^{(k)} T_{j_\mu}^{(\mu)}).$$

Setzen wir hier den Ausdruck (14) ein und benutzen wir abermals die Gleichungen (13), so kommt:

$$\sum_1^{m_{k+\mu-1}} {}^{\pi} c_{i_k j_\mu \pi}(2-k-\mu)\, T_\pi^{(k+\mu-1)} + \sum_{k+\mu}^{s} {}^{\tau} \sum_{\pi_\tau}^{1\cdots m_\tau} C_{i_k j_\mu \pi_\tau}(1-\tau)\, T_{\pi_\tau}^{(\tau)} =$$
$$= (2-k-\mu)\left(T_{i_k}^{(k)} T_{j_\mu}^{(\mu)}\right)$$

oder, da die T unabhängige infinitesimale Transformationen sind:

$$C_{i_k j_\mu \pi_\tau}(\tau + 1 - k - \mu) = 0 \quad (k+\mu \leq \tau \leq s).$$

Hieraus ergiebt sich, dass alle C verschwinden.

Demnach haben unter der gemachten Voraussetzung alle Gruppen von der Form (12′) dieselbe Zusammensetzung wie die Gruppe (12), sie sind mithin nach Theorem 110, S. 614 alle mit einander und mit der Gruppe (12) ähnlich.

Wir können in Folge dessen sagen:

Theorem 111. *Enthält eine transitive* $(n + m_1 + \cdots + m_s)$-*gliedrige Gruppe in den Veränderlichen* $x_1 \cdots x_n$ *in der Umgebung des Punktes von allgemeiner Lage:* $x_1 = 0, \cdots x_n = 0$ *ausser den* n *unabhängigen infinitesimalen Transformationen von nullter Ordnung in den* x:

$$T_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \cdots \quad (i = 1 \cdots n)$$

noch für $k = 1, 2 \cdots s$ *je* m_k *unabhängige infinitesimale Transformationen von* k-*ter Ordnung, aus denen sich keine Transformation von* $(k+1)$-*ter oder höherer Ordnung ableiten lässt und enthält sie insbesondere eine infinitesimale Transformation erster Ordnung von der Form:*

$$\sum_1^n {}^{\nu} x_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \cdots,$$

so lässt sie sich durch Einführung neuer Veränderlicher $x_1' \cdots x_n'$ *auf die Form bringen:*

$$T_i = \mathsf{T}_i = \frac{\partial f}{\partial x_i'}, \quad T_{i_k}^{(k)} = \mathsf{T}_{i_k}^{(k)} = \sum_1^n {}^{\nu} \xi_{i_k \nu}^{(k)}(x_1' \cdots x_n') \frac{\partial f}{\partial x_\nu'}$$
$$(i = 1 \cdots n;\ k = 1 \cdots s;\ i_k = 1 \cdots m_k);$$

hier sind die $\xi^{(k)}$ *diejenigen ganzen homogenen Functionen* k-*ter Ordnung, welche in den infinitesimalen Transformationen* k-*ter Ordnung:*

$$T_{i_k}^{(k)} = \sum_1^n {}^{\nu} \xi_{i_k \nu}^{(k)}(x_1 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \cdots \quad (k = 1 \cdots s;\ i_k = 1 \cdots m_k)$$

der Gruppe die Glieder von der Ordnung k *bestimmen.*

Kapitel 29.

Charakteristische Eigenschaften solcher Gruppen, welche mit gewissen projectiven ähnlich sind.

Im vorigen Kapitel gaben wir eine Classification aller *transitiven* Gruppen: $X_1 f \cdots X_r f$ des n-fach ausgedehnten Raumes $x_1 \cdots x_n$. Wir wählten einen Punkt $x_1^0 \cdots x_n^0$ von allgemeiner Lage und betrachteten alle infinitesimalen Transformationen der Gruppe, welche diesen Punkt in Ruhe lassen, also alle, deren Reihenentwickelungen nach den $x_i - x_i^0$ die Form haben:

$$\sum_{i\nu}^{1\cdots n} \alpha_{ji\nu}(x_1^0 \cdots x_n^0) \cdot (x_i - x_i^0) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \cdots \quad (j = 1, 2 \cdots),$$

wo die weggelassenen Glieder von der zweiten und höherer Ordnung sind. Dann zeigte die lineare homogene Gruppe:

$$L_j f = \sum_{i\nu}^{1\cdots n} \alpha_{ji\nu}(x_1^0 \cdots x_n^0)\, x_i' \frac{\partial f}{\partial x_\nu'} \quad (j = 1, 2 \cdots),$$

in welcher Weise die ∞^{n-1} Linienelemente $x_1' : x_2' : \cdots : x_n'$ durch den Punkt $x_1^0 \cdots x_n^0$ von denjenigen Transformationen der Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ transformirt werden, welche diesen Punkt invariant lassen.

In dem gegenwärtigen Kapitel erledigen wir zunächst das Problem, alle *transitiven* Gruppen: $X_1 f \cdots X_r f$ des Raumes $x_1 \cdots x_n$ zu bestimmen, für welche die einem Punkte von allgemeiner Lage zugeordnete lineare homogene Gruppe: $L_1 f$, $L_2 f \cdots$ entweder mit der allgemeinen oder mit der speciellen linearen homogenen Gruppe zusammenfällt.*) Dabei ergiebt sich das merkwürdige Resultat, dass jede derartige Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ entweder mit der allgemeinen projectiven oder mit der allgemeinen linearen, oder mit der speciellen linearen Gruppe des Raumes $x_1 \cdots x_n$ ähnlich ist.

---

*) Es ist leicht zu sehen, dass eine Gruppe des R_n, welche einem Punkte $x_1^0 \cdots x_n^0$ *von allgemeiner Lage* die allgemeine oder die specielle lineare homogene Gruppe zuordnet, immer transitiv ist. Die Gruppe enthält nämlich in der Umgebung von $x_1^0 \cdots x_n^0$ sicher eine infinitesimale Transformation von nullter Ordnung in den $x_i - x_i^0$, also eine Transformation: $\Sigma \alpha_i p_i + \cdots$, in welcher nicht alle α_i gleich Null sind. Ausserdem enthält die Gruppe sicher $n(n-1)$ Transformationen erster Ordnung von der Form:

$$(x_i - x_i^0) p_k + \cdots \quad (i, k = 1 \cdots n;\ i \neq k).$$

Combinirt man diese letzteren mit $\Sigma \alpha_i p_i + \cdots$, so erkennt man, dass n Transformationen von der Form: $p_1 + \cdots, \cdots p_n + \cdots$ auftreten, dass also die Gruppe wirklich transitiv ist.

Ausserdem zeigen wir noch in dem letzten Paragraphen des Kapitels, dass es im Raume $x_1 \cdots x_n$ keine endliche continuirliche Gruppe giebt, welche $m > n + 2$ beliebig gewählte Punkte von allgemeiner Lage in m ebensolche Punkte überführen kann; zugleich weisen wir nach, dass die allgemeine projective und die mit ihr ähnlichen Gruppen die einzigen Gruppen des Raumes $x_1 \cdots x_n$ sind, welche $n+2$ beliebig gewählte Punkte von allgemeiner Lage in $n+2$ ebensolche Punkte überführen können.

§ 152.

Jede transitive Gruppe G des R_n enthält in der Umgebung des Punktes von allgemeiner Lage: $x_1^0 \cdots x_n^0$ n unabhängige infinitesimale Transformationen von nullter Ordnung in den $x_i - x_i^0$:

$$p_1 + \cdots, \; p_2 + \cdots, \; \cdots p_n + \cdots,$$

wo nach der Festsetzung auf S. 555 p_i an Stelle von $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ geschrieben ist.

Ordnet nun G dem Punkte $x_1^0 \cdots x_n^0$ die allgemeine lineare homogene Gruppe als Gruppe: $L_1 f$, $L_2 f \cdots$ zu, so enthält es in der Umgebung von $x_1^0 \cdots x_n^0$ die grösste mögliche Zahl, nämlich n^2 solche unabhängige infinitesimale Transformationen von erster Ordnung in $x_1 - x_1^0, \cdots x_n - x_n^0$, aus denen sich keine Transformation von zweiter oder höherer Ordnung linear ableiten lässt. Diese n^2 Transformationen erster Ordnung haben die Form:

$$(x_i - x_i^0) p_k + \cdots \quad (i, k = 1 \cdots n).$$

Ordnet dagegen G dem Punkte $x_1^0 \cdots x_n^0$ die specielle lineare homogene Gruppe zu, so enthält es in der Umgebung des Punktes nur $n^2 - 1$ unabhängige infinitesimale Transformationen erster Ordnung, aus denen sich keine Transformation von zweiter oder höherer Ordnung linear ableiten lässt; dieselben haben die Form:

$$(x_i - x_i^0) p_k + \cdots, \; (x_i - x_i^0) p_i - (x_k - x_k^0) p_k + \cdots$$
$$(i, k = 1 \cdots n; \; i \gtrless k).$$

Wir können daher, wenn wir noch den Punkt $x_1^0 \cdots x_n^0$ zum Coordinatenanfang wählen, das in der Einleitung des Kapitels angegebene Problem folgendermassen aussprechen:

Gesucht werden in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ alle Gruppen $X_1 f \cdots X_r f$ oder kurz G, welche in der Umgebung des Punktes von allgemeiner Lage: $x_1 = 0, \cdots x_n = 0$ die folgenden infinitesimalen Transformationen nullter und erster Ordnung enthalten:

entweder die $n + n^2$:

$$p_i + \cdots, \; x_i p_k + \cdots \quad (i, k = 1 \cdots n)$$

oder die $n + n^2 - 1$:

$$p_i + \cdots,\ x_i p_k + \cdots,\ x_i p_i - x_k p_k + \cdots$$
$$(i, k = 1 \cdots n;\ i \gtrless k).$$

Beide Fälle lassen sich zunächst gleichzeitig behandeln, man muss nur so lange wie möglich davon absehen, dass im ersten Falle ausser den Transformationen, welche im zweiten Falle auftreten, noch eine Transformation: $\Sigma^i x_i p_i + \cdots$ vorkommt.

Die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ enthalte infinitesimale Transformationen, deren Reihenentwickelungen mit Gliedern von zweiter bezüglich höherer Ordnung in den x beginnen, kurz infinitesimale Transformationen von zweiter bezüglich höherer Ordnung. Wir suchen die höchste Ordnungszahl s der vorhandenen Transformationen und diese Transformationen selbst zu bestimmen. Die Zahl s können wir grösser als 1 voraussetzen, da wir alle infinitesimalen Transformationen erster Ordnung, welche auftreten, schon kennen. Es sei

$$K = \vartheta_1 p_1 + \cdots + \vartheta_n p_n + \cdots$$

eine infinitesimale Transformation s-ter Ordnung der Gruppe; die ϑ sollen dabei ganze homogene Functionen s-ter Ordnung von $x_1 \cdots x_n$ bezeichnen, die weggelassenen Glieder sind höherer Ordnung. Offenbar verschwinden $\vartheta_1 \cdots \vartheta_n$ nicht alle, da es ja keine infinitesimale Transformation $\Sigma c_k X_k f$ geben soll, deren Reihenentwickelung mit Gliedern $(s+1)$-ter oder höherer Ordnung anfängt; wir können daher annehmen, dass jedenfalls ϑ_1 nicht gleich Null ist.

Die niedrigste Potenz von x_1, welche in ϑ_1 auftritt, sei die α_1-te und

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \qquad (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = s)$$

sei ein Glied von ϑ_1 mit nicht verschwindendem Coefficienten. Wir combiniren nun die Transformation $x_1 p_2 + \cdots$ mit K, das Resultat combiniren wir abermals mit $x_1 p_2 + \cdots$ u. s. f. im Ganzen α_2 Male. Die auf diese Weise erhaltene infinitesimale Transformation s-ter Ordnung combiniren wir mit $x_1 p_3 + \cdots$ und verfahren so α_3-mal hintereinander u. s. w., schliesslich wenden wir noch $x_1 p_n + \cdots$ α_n-mal hintereinander an. In dieser Weise erkennen wir schliesslich, dass eine Transformation von der Gestalt:

$$K' = x_1^s p_1 + \vartheta_2' p_2 + \cdots + \vartheta_n' p_n + \cdots$$

unserer Gruppe G angehört.

Alle übrigen Glieder von ϑ_1 sind weggefallen; dieselben enthalten nämlich entweder auch die Potenz $x_1^{\alpha_1}$ oder eine höhere, in beiden Fällen ist sicher die Potenz einer Veränderlichen x_i $(i > 1)$ nicht die α_i-te, sondern eine niedrigere; das betreffende Glied verschwindet daher bei der α_i-maligen Combination mit $x_1 p_i + \cdots$. Die Glieder von $(s+1)$-ter und von höherer Ordnung kommen, wie immer, auch hier nicht in Betracht (vgl. Kap. 11, Theorem 30, S. 193).

Um die Form der Transformation K' näher zu bestimmen, bedienen wir uns eines Hülfssatzes, der sich vielfach mit Vortheil verwerthen lässt.

Satz 1. *Gehören einer Gruppe die infinitesimalen Transformationen* Cf *und* $B_1 f + \cdots + B_m f$ *an und bestehen ferner* m *Relationen von der Form* $(CB_k) = \varepsilon_k B_k f$, *wo die Constanten* ε_k *alle von einander verschieden sind, so enthält die Gruppe alle* m *infinitesimalen Transformationen* $B_1 f \cdots B_m f$.

Der Beweis dieses Hülfssatzes ist sehr einfach. Ausser $B_1 f + \cdots + B_m f$ enthält die Gruppe offenbar noch folgende infinitesimale Transformationen:

$$(C, B_1 + \cdots + B_m) = \varepsilon_1 B_1 f + \cdots + \varepsilon_m B_m f$$
$$(C, \varepsilon_1 B_1 + \cdots + \varepsilon_m B_m) = \varepsilon_1^2 B_1 f + \cdots + \varepsilon_m^2 B_m f$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$(C, \varepsilon_1^{m-2} B_1 + \cdots + \varepsilon_m^{m-2} B_m) = \varepsilon_1^{m-1} B_1 f + \cdots + \varepsilon_m^{m-1} B_m f.$$

Da aber die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \varepsilon_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \varepsilon_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon_1^{m-1} & \cdot & & \cdot & \varepsilon_m^{m-1} \end{vmatrix} = \prod_{i,k} (\varepsilon_i - \varepsilon_k)$$

nach Voraussetzung nicht verschwindet, lässt sich jede einzelne Transformation $B_k f$ aus den eben gefundenen durch Multiplication mit geeigneten Constanten und nachherige Addition herleiten. Damit ist der Satz bewiesen.

Um denselben anzuwenden, combiniren wir jetzt die Transformation K', ausführlicher geschrieben:

$$x_1^s p_1 + \{\Sigma A_\beta x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}\} p_2 + \cdots + \{\Sigma N_\nu x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}\} p_n + \cdots$$
$$(\beta_1 + \cdots \beta_n = \cdots = \nu_1 + \cdots + \nu_n = s)$$

mit der Transformation:

$$x_1 p_1 - x_i p_i + \cdots,$$

unter i eine beliebige der Zahlen $2 \cdots n$ verstanden. Dabei ergiebt sich:

$$(s-1) x_1^s p_1 + \{\Sigma A_\beta (\beta_1 - \beta_i + \varepsilon_{2i}) x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}\} p_2 + \cdots$$
$$+ \{\Sigma N_\nu (\nu_1 - \nu_i + \varepsilon_{ni}) x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}\} p_n + \cdots,$$

wo ε_{ii} den Werth 1 hat, während alle ε_{ki} $(i \neq k)$ verschwinden. Also haben die Glieder s-ter Ordnung der infinitesimalen Transformation K' die oben besprochene Form $B_1 f + \cdots + B_m f$, wo die $B_k f$ durch Combination mit $x_1 p_1 - x_i p_i$ reproducirt werden, aber mit verschiedenen Faktoren. Da nun aus den Reihenentwickelungen der infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe sich dadurch die infinitesimalen Transformationen einer neuen Gruppe Γ herleiten lassen, dass in jeder Reihenentwickelung nur die Glieder niedrigster Ordnung behalten werden (Kap. 28, S. 607), so zeigt unser Satz 1, dass jedes einzelne $B_k f$ der Gruppe Γ angehört. Es giebt nun offenbar ein $B_k f$, welches das Glied $x_1^s p_1$ umfasst und daher mit dem Faktor $s-1$ reproducirt wird. Die übrigen Glieder dieses $B_k f$ sind durch die Gleichungen

$$\beta_1 - \beta_i + \varepsilon_{2i} = \cdots = \nu_1 - \nu_i + \varepsilon_{ni} = s - 1$$

definirt. Aus denselben erhalten wir, da $\varepsilon_{23} \cdots \varepsilon_{2n}$ verschwinden, sofort $\beta_3 = \cdots = \beta_n$, und mithin

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = \beta_1 + \beta_2 + (n-2)\beta_3 = s,$$

wozu noch

$$\beta_2 = \beta_1 - s + 2, \qquad \beta_3 = \beta_1 - s + 1$$

kommt. Durch Elimination von β_2 und β_3 ergiebt sich

$$(\beta_1 - s + 1) n = 0$$

also $\beta_1 = s - 1, \qquad \beta_2 = 1, \qquad \beta_3 = \cdots = \beta_n = 0.$

Ebenso bestimmen sich die ν_k u. s. w. Kurz, wir erkennen, dass unsere Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ eine infinitesimale Transformation von der Gestalt

$$K'' = x_1^s p_1 + A_2 x_1^{s-1} x_2 p_2 + \cdots + A_n x_1^{s-1} x_n p_n + \cdots$$

enthält.

Wird K'' mit $p_1 + \cdots$ combinirt, so kommt

$$s x_1^{s-1} p_1 + (s-1) A_2 x_1^{s-2} x_2 p_2 + \cdots + (s-1) A_n x_1^{s-2} x_n p_n + \cdots = L$$

und also enthält unsere Gruppe eine infinitesimale Transformation, nämlich $(L K'')$, welche die Form

$$s x_1^{2s-2} p_1 + \eta_2 p_2 + \cdots + \eta_n p_n + \cdots$$

besitzt. Da nun $2s - 2$ nicht grösser als s sein darf und andererseits s grösser als 1 ist, so folgt

$$s = 2,$$

so dass

$$K'' = x_1^2 p_1 + A_2 x_1 x_2 p_2 + \cdots + A_n x_1 x_n p_n + \cdots$$

wird.

Ferner kommt:

$$(x_1 p_i + \cdots, K'') = (A_i - 1) x_1^2 p_i + \cdots$$

Wäre nun A_i von 1 verschieden, so erhielten wir nach einander die beiden Transformationen:

$$(x_1^2 p_i + \cdots, x_i p_1 + \cdots) = x_1^2 p_1 - 2x_1 x_i p_i + \cdots$$
$$(x_1^2 p_1 - 2x_1 x_i p_i + \cdots, x_1^2 p_i + \cdots) = 4x_1^3 p_i + \cdots.$$

Da aber keine infinitesimale Transformation dritter Ordnung vorkommen darf, sind alle $A_i = 1$. Also hat K'' die Form:

$$x_1(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n) + \cdots$$

und hieraus finden wir endlich durch Combination mit $x_i p_1 + \cdots$ überhaupt

$$x_i(x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n) + \cdots.$$

Enthält daher eine Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ von der auf S. 620 f. verlangten Beschaffenheit infinitesimale Transformationen von höherer als der ersten Ordnung, so enthält sie nur solche von zweiter und zwar jedenfalls n von der Form:

$$x_i(x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n) + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n).$$

Addiren wir alle n Transformationen

$$\left(p_i + \cdots, x_i \sum_1^n {}_k\, x_k p_k + \cdots\right) = x_i p_i + \sum_1^n {}_k\, x_k p_k + \cdots$$

zusammen, so erhalten wir die Transformation $x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n + \cdots$. Wenn daher die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ infinitesimale Transformationen von zweiter Ordnung enthält, ist die zugehörige lineare Gruppe $L_1 f, L_2 f \cdots$ die allgemeine lineare homogene. Oder umgekehrt:

Die Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ enthält niemals infinitesimale Transformationen von höherer als der ersten Ordnung, wenn die zugehörige Gruppe $L_1 f$, $L_2 f \cdots$ die specielle lineare homogene ist.

Zur Abkürzung schreiben wir die infinitesimalen Transformationen $x_i(x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n) + \cdots$ in der Form $H_i + \cdots$, indem wir unter H_i die Glieder zweiter Ordnung verstehen. Es wäre nun denkbar, dass in einer Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ ausser den n Transformationen $H_k + \cdots$ noch andere von zweiter Ordnung vorkämen. Eine solche sei etwa:

$$\tau_1 p_1 + \cdots + \tau_n p_n + \cdots = \mathsf{T} + \cdots,$$

wo die τ_i homogene Functionen zweiter Ordnung von $x_1 \cdots x_n$ bedeuten und T die Summe $\Sigma \tau_k p_k$. Dann muss offenbar der Ausdruck $(H_i\, \mathsf{T})$ verschwinden, denn derselbe stellt die niedrigsten Glieder einer infinitesimalen Transformation dritter Ordnung dar. Also genügen $\tau_1 \cdots \tau_n$ der Gleichung:

$$\left(x_i \sum_1^n{}_k\, x_k p_k,\ \sum_1^n{}_j\, \tau_j p_j\right) = 0;$$

diese zerlegt sich in die folgenden n:

$$x_i \left(\sum_1^n{}_k\, x_k \frac{\partial \tau_j}{\partial x_k} - \tau_j\right) - x_j \tau_i = 0$$

und hieraus folgt ausser der selbstverständlichen Gleichung:

$$\sum_1^n{}_k\, x_k \frac{\partial \tau_j}{\partial x_k} = 2\tau_j$$

auch noch $x_i\tau_j - x_j\tau_i = 0$. Die τ_i und T haben daher die Form:

$$\tau_i = \sum_1^n{}_k\, \alpha_k x_k x_i, \qquad \mathsf{T} = \sum_1^n{}_k\, \alpha_k H_k.$$

Damit ist bewiesen, dass eine Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ von der angegebenen Beschaffenheit ausser den n infinitesimalen Transformationen $H_k + \cdots$ keine von zweiter Ordnung enthalten kann.

Im Ganzen haben wir somit die folgenden Fälle:

Ist die lineare homogene Gruppe $L_1 f$, $L_2 f \cdots$ die ***allgemeine*** *lineare homogene, so enthält die zugehörige Gruppe $X_1 f \cdots X_r f$ gerade n infinitesimale Transformationen von nullter Ordnung:*

$$P_i = p_i + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

und n^2 von erster:

$$T_{ik} = x_i p_k + \cdots \qquad (i, k = 1 \cdots n).$$

Transformationen von höherer Ordnung treten entweder gar nicht auf oder es sind die folgenden n vorhanden:

$$S_i = x_i (x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n) + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n).$$

Ist die Gruppe: $L_1 f$, $L_2 f \cdots$ die specielle lineare homogene, so enthält die Gruppe: $X_1 f \cdots X_r f$ gerade n infinitesimale Transformationen von nullter Ordnung:

$$P_i = p_i + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

und ausserdem $n^2 - 1$ von erster:

$$T_{ik} = x_i p_k + \cdots, \quad T_{ii} - T_{kk} = x_i p_i - x_k p_k + \cdots \qquad (i \gtrless k = 1 \cdots n),$$

aber keine von höherer.

Diese drei Fälle werden wir der Reihe nach behandeln. Wir bringen zunächst die Relationen zwischen den infinitesimalen Transformationen und sodann diese Transformationen selbst auf eine möglichst einfache Form. Dabei bemerken wir, dass unter den drei Fällen die beiden ersten schon durch die Entwickelungen des Paragraphen 151, S. 616 ff. erledigt sind. Nichtsdestoweniger halten wir es für zweckmässig, auch diese beiden Fälle ausführlich zu behandeln.

§ 153.

Der erste Fall, wo n Transformationen von nullter und n^2 von erster Ordnung auftreten, ist der einfachste.

Die Relationen zwischen den n^2 infinitesimalen Transformationen erster Ordnung können wir ohne Weiteres angeben. Es ist:

$$(T_{ik}, T_{\nu\pi}) = \varepsilon_{k\nu} T_{i\pi} - \varepsilon_{\pi i} T_{\nu k},$$

wobei ε_{ik} verschwindet, sobald i und k verschieden sind, während ε_{ii} den Werth 1 hat. Insbesondere ist von Wichtigkeit, dass jeder Ausdruck:

$$\left(T_{ik}, \sum_1^n{}^{\nu}\, T_{\nu\nu}\right)$$

verschwindet. Ferner bestehen, wenn wir zur Abkürzung das Symbol

$$U = \sum_1^n{}^{\nu}\, T_{\nu\nu}$$

einführen, Relationen von der Form:

$$(P_i U) = P_i + \sum_1^n{}^{\nu} \sum_1^n{}^{\pi} \alpha_{\nu\pi} T_{\nu\pi},$$

oder wenn wir die rechte Seite als neues P_i einführen: $(P_i U) = P_i$.

Endlich bestehen Relationen von der Gestalt:

$$(P_i T_{kj}) = \varepsilon_{ik} P_j + \sum \sum \beta_{\nu\pi} T_{\nu\pi}$$

$$(P_i P_k) = \sum \gamma_\nu P_\nu + \sum \sum \delta_{\nu\pi} T_{\nu\pi}.$$

Aber die Jacobischen Identitäten:

$$((P_i T_{kj})\, U) - (P_i T_{kj}) = 0$$

$$((P_i P_k)\, U) - 2(P_i P_k) = 0$$

zeigen sofort, dass alle Constanten β, γ, δ verschwinden, also gilt:

$$(P_i T_{kj}) = \varepsilon_{ik} P_j, \quad (P_i P_k) = 0.$$

Damit sind alle Relationen zwischen den infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe bekannt.

Die r infinitesimalen Transformationen $P_i = p_i + \cdots$ erzeugen eine einfach transitive Gruppe, welche mit der Gruppe $p_1' \cdots p_n'$ gleichzusammengesetzt und daher auch ähnlich ist (Kap. 19, S. 339, Satz 1). Wir können daher solche neue Veränderliche $x_1' \cdots x_n'$ einführen, dass

$$P_i = p_i' \qquad {\scriptstyle (i=1\cdots n)}$$

wird. Die Form $\xi_1 p_1' + \cdots + \xi_n p_n'$, welche U in den neuen Veränderlichen annimmt, bestimmt sich aus den Relationen $(P_i U) = P_i$; dieselben ergeben:

$$U = \sum_1^n {}_k (x_k' + \alpha_k) p_k'$$

und, wenn die $x_k' + \alpha_k$ als neue x_k eingeführt werden, was die Form der P_i nicht ändert, wird $U = \Sigma\, x_k p_k$. Aus den Relationen

$$(P_i T_{kj}) = \varepsilon_{ik} P_j$$

findet man ebenso:

$$T_{kj} = x_k p_j + \sum_1^n {}_\nu\, \alpha_{kj\nu} p_\nu;$$

da aber $(T_{kj} U)$ verschwinden muss, sind alle $\alpha_{kj\nu}$ gleich Null. Also haben wir die Gruppe:

$$P_i = p_i, \quad T_{ik} = x_i p_k \qquad {\scriptstyle (i,k=1\cdots n)},$$

das heisst *alle Gruppen, welche unter den ersten Fall gehören, sind mit der allgemeinen linearen Gruppe der Mannigfaltigkeit* $x_1 \cdots x_n$ *ähnlich.*

§ 154.

Wir kommen jetzt zum zweiten Falle, wo ausser den n Transformationen nullter Ordnung $P_i = p_i + \cdots$ und den n^2 von erster Ordnung $T_{ik} = x_i p_k + \cdots$ noch die n Transformationen zweiter Ordnung

$$S_i = x_i(x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n) + \cdots$$

auftreten.

Folgende Relationen ergeben sich ohne Weiteres:

$$(S_i S_k) = 0, \quad (T_{ik} S_j) = \varepsilon_{kj} S_i, \quad (U S_j) = S_j.$$

Weiter bestehen Gleichungen von der Form:

$$(T_{ik} U) = \sum_1^n {}_j\, \alpha_{ikj} S_j.$$

Setzen wir nun zunächst voraus, dass i und k nicht alle beide gleich n sind, so können wir $T_{ik} + \Sigma\, \alpha_{ikj} S_j$ als neues T_{ik} einführen und erhalten dementsprechend für die betreffenden Werthe von i und k die Relation: $(T_{ik} U) = 0$. Da ausserdem $(UU) = 0$ ist, kommt überhaupt:

$$(T_{ik} U) = 0 \quad {\scriptstyle (i,k=1\cdots n)}.$$

Ferner ist:

$$(T_{ik} T_{\nu\pi}) = \varepsilon_{k\nu} T_{i\pi} - \varepsilon_{\pi i} T_{\nu k} + \sum_1^n {}_j \beta_j S_j;$$

aber die Identität:

$$((T_{ik} T_{\nu\pi}) U) = 0$$

lässt erkennen, dass alle β_j verschwinden, folglich gilt:

$$(T_{ik} T_{\nu\pi}) = \varepsilon_{k\nu} T_{i\pi} - \varepsilon_{\pi i} T_{\nu k}.$$

Aus der Relation:

$$(P_i U) = P_i + \sum_1^n {}_\nu \sum_1^n {}_\pi \gamma_{\nu\pi} T_{\nu\pi} + \sum_1^n {}_\nu \delta_\nu S_\nu$$

ergiebt sich, wenn:

$$P_i + \sum_1^n {}_\nu \sum_1^n {}_\pi \gamma_{\nu\pi} T_{\nu\pi} + \tfrac{1}{2} \sum_1^n {}_\nu \delta_\nu S_\nu$$

als neues P_i eingeführt wird:

$$(P_i U) = P_i.$$

Weiter ist:

$$(P_i S_k) = \varepsilon_{ik} U + T_{ki} + \sum_1^n {}_\nu \lambda_\nu S_\nu;$$

bilden wir aber die Identität:

$$((P_i S_k) U) + (P_i S_k) - (P_i S_k) = 0,$$

so finden wir, dass die λ_ν null sind; folglich haben wir:

$$(P_i S_k) = \varepsilon_{ik} U + T_{ki}.$$

Endlich bestehen Relationen von der Form:

$$(P_i T_{kj}) = \varepsilon_{ik} P_j + \sum \sum a_{\nu\pi} T_{\nu\pi} + \sum \lambda_\nu S_\nu$$

$$(P_i P_k) = \sum g_\nu P_\nu + \sum \sum h_{\nu\pi} T_{\nu\pi} + \sum l_\nu S_\nu;$$

doch auch hier verschwinden alle Constanten wegen der Identitäten:

$$((P_i T_{kj}) U) - (P_i T_{kj}) = 0,$$

$$((P_i P_k) U) - 2 (P_i P_k) = 0.$$

Somit kommt:

$$(P_i T_{kj}) = \varepsilon_{ik} P_j, \qquad (P_i P_k) = 0.$$

Die Relationen zwischen den infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe sind nun alle bestimmt. Man wird bemerken, dass die infinitesimalen Transformationen P_i, T_{ik} eine Untergruppe erzeugen, welche die im ersten Falle betrachtete Form besitzt und daher bei geeigneter Wahl der Veränderlichen die Gestalt:

$$P_i = p_i, \qquad T_{ik} = x_i p_k \quad {\scriptstyle (i,\, k = 1 \cdots n)}$$

annimmt. Die infinitesimale Transformation S_i wird in den neuen Veränderlichen etwa gleich $\Sigma\, \xi_{ik} p_k$, wo die ξ_{ik} den Relationen:

$$(P_\nu S_i) = \varepsilon_{\nu i} U + T_{i\nu}, \qquad (U S_i) = S_i$$

genügen. Wir finden hieraus:

$$\frac{\partial \xi_{ik}}{\partial x_\nu} = \varepsilon_{\nu i} x_k + \varepsilon_{\nu k} x_i, \qquad \sum_1^n {}^\nu\, x_\nu \frac{\partial \xi_{ik}}{\partial x_\nu} = 2\, \xi_{ik},$$

also $\xi_{ik} = x_i x_k$ und:

$$S_i = x_i (x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n).$$

Somit haben wir die Gruppe:

$$P_i = p_i, \quad T_{ik} = x_i p_k, \quad S_i = x_i(x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n) \qquad (i, k = 1 \cdots n);$$

das heisst, alle Gruppen, welche unter den zweiten Fall gehören, sind mit der allgemeinen projectiven Gruppe der Mannigfaltigkeit $x_1 \cdots x_n$ *ähnlich.*

§ 155.

Uebrig bleibt der dritte und letzte Fall mit n infinitesimalen Transformationen von nullter Ordnung: $P_i = p_i + \cdots$ und $n^2 - 1$ von erster:

$$T_{ik} = x_i p_k + \cdots, \quad T_{ii} - T_{kk} = x_i p_i - x_k p_k + \cdots \qquad (i \gtrless k = 1 \cdots n),$$

während Transformationen von höherer Ordnung nicht auftreten.

Es ist bequem, die infinitesimalen Transformationen $T_{ii} - T_{kk}$ durch eine einzige von der Form: $\alpha_1 T_{11} + \cdots + \alpha_n T_{nn}$ zu ersetzen, indem man sich die α_i als willkürliche Constanten denkt, dieselben jedoch der Bedingung $\Sigma^i \alpha_i = 0$ unterwirft. Dann gelten zunächst die Relationen:

$$(T_{ik} T_{\nu\pi}) = \varepsilon_{k\nu} T_{i\pi} - \varepsilon_{\pi i} T_{\nu k} \qquad (i \gtrless k,\ \nu \gtrless \pi)$$

$$\left(T_{ik}, \sum_1^n {}^\nu\, \alpha_\nu T_{\nu\nu}\right) = (\alpha_k - \alpha_i) T_{ik}, \qquad \left(T_{ii} - T_{kk}, \sum_1^n {}^\nu\, \alpha_\nu T_{\nu\nu}\right) = 0,$$

Ferner besteht eine Gleichung von der Form:

$$\left(P_i, \sum_1^n {}^\nu\, \alpha_\nu T_{\nu\nu}\right) = \alpha_i P_i + \sum_1^n {}^k \sum_1^n {}^j\, \lambda_{ikj} T_{kj} \qquad (\Sigma^k \lambda_{ikk} = 0).$$

Setzen wir daher:

$$P_i' = P_i + \sum_1^n {}^k \sum_1^n {}^j\, l_{ikj} T_{kj} \qquad \left(\sum_1^n {}^k\, l_{ikk} = 0\right),$$

so kommt:

$$\left(P_i', \sum_1^n {}^\nu\, \alpha_\nu T_{\nu\nu}\right) = \alpha_i P_i' + \sum_1^n {}^k \sum_1^n {}^j \left\{\lambda_{ikj} - (\alpha_i + \alpha_k - \alpha_j)\, l_{ikj}\right\} T_{kj}.$$

Jetzt denken wir uns für $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ ein ganz bestimmtes Werthsystem gewählt, welches der Bedingung $\Sigma\,\alpha_i = 0$ genügt und ausserdem die Eigenschaft hat, dass kein Ausdruck $\alpha_i + \alpha_k - \alpha_j$ verschwindet; eine Forderung, welche sich immer befriedigen lässt. Unter diesen Voraussetzungen können wir die l_{ikj} so wählen, dass die Gleichungen:

$$\lambda_{ikj} - (\alpha_i + \alpha_k - \alpha_j)\, l_{ikj} = 0$$

befriedigt werden, wobei die Bedingung $\Sigma^k\, l_{ikk} = 0$ von selbst erfüllt ist. Folglich erhalten wir mit Wiederanwendung der ursprünglichen Bezeichnung:

$$\left(P_i,\ \sum_1^n{}^{\nu}\, \alpha_\nu T_{\nu\nu}\right) = \alpha_i P_i \qquad \left(\sum_1^n{}^{\nu}\, \alpha_\nu = 0\right).$$

Wird der Ausdruck:

$$\left(P_i,\ \sum_1^n{}^{k}\, \beta_k T_{kk}\right) = \beta_i P_i + \sum_1^n{}^{\nu} \sum_1^n{}^{\pi}\, g_{\nu\pi} T_{\nu\pi}$$
$$(\Sigma\beta_k = \Sigma g_{\nu\nu} = 0)$$

in die Identität:

$$\left(\left(P_i,\ \sum_1^n{}^{k}\, \beta_k T_{kk}\right) \sum_1^n{}^{k}\, \alpha_k T_{kk}\right) - \alpha_i \left(P_i,\ \sum_1^n{}^{k}\, \beta_k T_{kk}\right) = 0$$

eingesetzt, so ergiebt sich:

$$\sum_1^n{}^{\nu} \sum_1^n{}^{\pi}\, (\alpha_\pi - \alpha_\nu - \alpha_i)\, g_{\nu\pi} T_{\nu\pi} = 0.$$

Hieraus folgt wegen der Beschaffenheit der α, dass alle $g_{\nu\pi}$ gleich Null sind, also gilt die Gleichung:

$$\left(P_i,\ \sum_1^n{}^{k}\, \beta_k T_{kk}\right) = \beta_i T_i$$

für alle Werthsysteme $\beta_1 \cdots \beta_n$, welche die Bedingung $\Sigma\,\beta_k = 0$ befriedigen. Weiter besteht eine Relation von der Form:

$$(P_i,\ T_{kj}) = \varepsilon_{ik} P_j + \sum_1^n{}^{\nu} \sum_1^n{}^{\pi}\, h_{\nu\pi} T_{\nu\pi}$$
$$(k \gtrless j,\ \Sigma^\nu\, h_{\nu\nu} = 0).$$

Die Identität:

$$\left((P_i,\ T_{kj}) \sum_1^n{}^{\tau}\, \beta_\tau T_{\tau\tau}\right) - (\beta_i + \beta_j - \beta_k)(P_i T_{kj}) = 0$$

nimmt daher die Gestalt:

$$\varepsilon_{ik}(\beta_k - \beta_i) P_j + \sum_1^n{}^{\nu} \sum_1^n{}^{\pi}\, (\beta_\pi - \beta_\nu - \beta_i + \beta_k - \beta_j)\, h_{\nu\pi} T_{\nu\pi} = 0$$

an; folglich müssen, da die β_ν, abgesehen von der Bedingung $\Sigma^\nu\, \beta_\nu = 0$, ganz willkürlich sind, die $h_{\nu\pi}$ verschwinden:

$$(P_i,\, T_{kj}) = \varepsilon_{ik} P_j \qquad (k \gtrless j).$$

Endlich sind noch die Relationen:

$$(P_i P_k) = \sum_1^n {}^\nu\, m_\nu P_\nu + \sum_1^n {}^\nu \sum_1^n {}^\pi\, m_{\nu\pi} T_{\nu\pi} \qquad \left(\sum_1^n {}^\nu\, m_{\nu\nu} = 0\right)$$

zu untersuchen. Durch Ausrechnung der Identität:

$$\left((P_i P_k) \sum_1^n {}^\tau\, \beta_\tau T_{\tau\tau}\right) - (\beta_i + \beta_k)(P_i P_k) = 0$$

finden wir:

$$\sum_1^n {}^\nu (\beta_\nu - \beta_i - \beta_k)\, m_\nu P_\nu + \sum_1^n {}^\nu \sum_1^n {}^\pi (\beta_\pi - \beta_\nu - \beta_i - \beta_k)\, m_{\nu\pi} T_{\nu\pi} = 0;$$

wegen der Willkürlichkeit der β_ν müssen daher die m_ν und $m_{\nu\pi}$ alle gleich Null sein. Folglich ist:

$$(P_i P_k) = 0$$

und wir kennen somit alle Relationen zwischen den infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe.

Ebenso, wie wir es beim ersten Falle gethan, bringen wir $P_1 \cdots P_n$ durch geeignete Wahl der Veränderlichen auf die Form:

$$P_i = p_i \qquad (i = 1 \cdots n).$$

Hieraus schliessen wir, indem wir wie am Schlusse des Paragraphen 153 verfahren, dass *alle Gruppen, welche unter den dritten Fall gehören, mit der speciellen linearen Gruppe der Mannigfaltigkeit $x_1 \cdots x_n$ ähnlich sind.*

Durch Vereinigung der gefundenen Resultate erhalten wir somit das

Theorem 112. *Ist eine transitive Gruppe G in n Veränderlichen so beschaffen, dass alle Transformationen derselben, welche einen Punkt allgemeiner Lage invariant lassen, die hindurchgehenden Linienelemente durch die allgemeine oder die specielle lineare homogene Gruppe $L_1 f$, $L_2 f \cdots$ transformiren, so ist G mit der allgemeinen projectiven, mit der allgemeinen linearen, oder mit der speciellen linearen Gruppe in n Veränderlichen ähnlich.**)

Nennen wir eine r-gliedrige Gruppe des Raumes $x_1 \cdots x_n$ m-fach transitiv, wenn sie mindestens eine Transformation enthält, welche m gegebene Punkte von allgemeiner gegenseitiger Lage in m andere beliebig gegebene Punkte von allgemeiner Lage überführt, so können wir

*) Lie, Archiv for Math., Bd. 3, Christiania 1878; vgl. auch Math. Ann. Bd. XVI, Bd. XXV und Götting. Nachr. 1874, S. 539.

jetzt leicht nachweisen *erstens*, dass immer $m \leqq n+2$ ist und *zweitens*, dass jede Gruppe, für welche $m = n + 2$ ist, mit der allgemeinen projectiven Gruppe des n-fach ausgedehnten Raumes ähnlich ist.

Erzeugen nämlich die infinitesimalen Transformationen: $X_1f \cdots X_rf$ in den Veränderlichen $x_1 \cdots x_n$ eine m-fach transitive Gruppe, so leuchtet es unmittelbar ein, dass die zu einem Punkte x_k^0 von allgemeiner Lage gehörige lineare homogene Gruppe $L_1f, L_2f \cdots$ die ∞^{n-1} durch diesen Punkt gehenden Linienelemente durch eine $(m-1)$-fach transitive projective Gruppe transformirt. Da nun aber die allgemeine projective Gruppe eines $(n-1)$-fach ausgedehnten Raumes bekanntlich $(n+1)$-fach transitiv ist, so erkennen wir, dass:

$$m - 1 \leqq n + 1 \quad \text{und also:} \quad m \leqq n + 2$$

ist. Also gilt das

Theorem 113. *Eine endliche continuirliche Gruppe in n Veränderlichen ist höchstens $(n+2)$-fach transitiv.*

Ist eine r-gliedrige Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ in n Veränderlichen gerade $(n+2)$-fach transitiv, so ist die einem Punkte x_k^0 von allgemeiner Lage zugeordnete Gruppe $L_1f, L_2f \cdots$, wie schon früher bemerkt, die allgemeine oder die specielle lineare homogene Gruppe in n Veränderlichen; folglich ist die Gruppe: $X_1f \cdots X_rf$ mit der allgemeinen projectiven, der allgemeinen linearen oder der speciellen linearen Gruppe in n Veränderlichen ähnlich. Da nun aber nur die erstgenannte unter diesen drei Gruppen $(n+2)$-fach transitiv ist, so ergiebt sich das

Theorem 114. *Ist eine r-gliedrige Gruppe in n Veränderlichen $(n+2)$-fach transitiv, so ist sie mit der allgemeinen projectiven Gruppe des n-fach ausgedehnten Raumes ähnlich.*

Im zweiten und dritten Abschnitte sollen unter Anderem eine Reihe von Untersuchungen durchgeführt werden, welche mit den in diesem Kapitel angestellten analog sind.